Mathematatik für Techniker

4. Band

Quadratische Gleichungen mit einer u. mehreren Unbekannten

von

J. E. Mayer

Moritz Schäfer, Leipzig

Mathematik für Techniker

Gemeinverständliches Lehrbuch

der

Mathematik für Mittelschüler

sowie besonders für den

Selbst-Unterricht.

---

4. Band

Quadratische Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Textgleichungen. Exponential- und logarithmische Gleichungen. Unbestimmte Gleichungen I. und II. Grades. (Kettendivision, Zahlenkongruenzen).

Leipzig

Verlagsbuchhandlung von Moritz Schäfer

1907.

Quadratische Gleichungen

mit einer und mehreren Unbekannten. Textgleichungen. Exponential- und logarithmische Gleichungen. Unbestimmte Gleichungen I. und II. Grades (Kettendivision, Zahlenkongruenzen).

Gemeinverständliche Darstellung

für

Mittelschulen und zum **Selbstunterricht.**

Von

J. E. Mayer, Ingenieur.

Leipzig

Verlagsbuchhandlung von Moritz Schäfer.

1907.

Dem Andenken meines Vaters,

des zu Donaueschingen verstorbenen

Herrn Baumeister Johann Mayer

gewidmet.

Der Verfasser.

Vorwort.

Der vorliegende Band enthält in seinem ersten Teil „Quadratische Gleichungen“. Die Behandlungsweise dieser ist dieselbe, wie die der linearen Gleichungen im III. Bändchen; zuerst eine populäre Erläuterung der Auflösungsmethoden, dann Einübung dieser Methoden an zahlreichen, vollständig durchgerechneten Beispielen und zum Schluß Anwendung der quadratischen Gleichungen auf praktische Aufgaben. Bei diesem letzten Kapitel war ich wieder eifrig bestrebt, den Schüler an eine logische Ableitung der Bestimmungsgleichungen zu gewöhnen und hoffe ich, ihm richtige Leitsätze für weitere Studien mitgegeben zu haben. Nach dem Schema der übrigen Hefte fügte ich ein starkes Kapitel Repetitionsaufgaben bei, und glaube, hiermit dem Schüler einen Dienst erwiesen zu haben. Dem Autodidakten können solche Ruhepunkte in der fortschreitenden Entwicklung der mathematischen Lehren nur fruchtbringend sein, sie geben ihm einen sicheren Prüfstein seiner Kenntnisse.

Der zweite Teil des Buches behandelt hauptsächlich Zahlenkongruenzen und hat dieser Teil eine weit größere Dimension angenommen, als ursprünglieh vorgesehen war. Bei der Schönheit und Durchsichtigkeit des Stoffes aber glaube ich das Interesse der Schüler zu gewinnen, um so mehr, als gerade diese Theorien dem Schüler so manche Wahrheit in klarem Licht vor Augen führen.

Die Kettendivision II. Grades konnte in diesem Bande leider keine Aufnahme mehr finden; sie wird in einem späteren Bande behandelt werden.

Die Anhangstabellen mögen dem Schüler gute Dienste leisten.

Möge das Büchlein Anklang bei den Schülern und Nachsicht bei der Kritik finden.

Freiburg i. Br., Weihnachten 1906.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel I.

Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

§ 1.

Theorie derselben.

Wenn eine Gleichung so vereinfacht ist, daß Wurzeln, Nenner und Klammern beseitigt und die Glieder, welche gleiche Potenzen der Unbekannten enthalten, in eines vereinigt sind, und es enthält die Gleichung die Unbekannte in keiner höheren als in der zweiten Potenz, so nennt man die Gleichung eine Gleichung zweiten Grades oder eine quadratische Gleichung. Die allgemeine Form einer Gleichung zweiten Grades ist also:

$$\underline{ax^2 + bx + c = 0.}$$

Ist in einer Gleichung, welche auf diese Form gebracht ist, der Koëffizient $b = 0$, fehlt also mit anderen Worten das Glied mit der ersten Potenz der Unbekannten, so heißt die Gleichung eine rein quadratische. Die allgemeine Form einer rein quadratischen Gleichung ist:

$$\underline{ax^2 = c.}$$

oder mit a durchdividiert:

$$x^2 = \frac{c}{a} \text{ oder}$$

$$x^2 = n.$$

Daraus ergibt sich die Auflösung durch beiderseitiges Radizieren mit 2:

$$x = \sqrt{n}.$$

Da aber eine Quadratwurzel immer zweideutig ist, d. h. sowohl positives, wie negatives Vorzeichen haben kann, so erhält man:

$$\underline{x = \pm \sqrt{n}}$$ oder die beiden Lösungen

$$\underline{x_1 = + \sqrt{n}}$$

$$\underline{x_2 = - \sqrt{n}.}$$

Die beiden Lösungen einer rein quadratischen Gleichung sind also ihrem absoluten Werte nach einander gleich, sie unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Beide Lösungen sind algebraisch vollständig gleichberechtigt. Ist z. B:

$$x^2 = 4$$

so ist: $$x = \pm \sqrt{4} = \pm 2, \text{ also}$$

$$x_1 = + 2$$

$$x_2 = - 2.$$

Beide Lösungen sind gleichberechtigt, denn nach dem Begriff des Radizierens heißt $\sqrt{4}$ ausziehen, diejenige Zahl suchen, welche mit sich selbst multipliziert 4 gibt; nun gibt aber sowohl: $(+2) \cdot (+2)$ wie $(-2) \cdot (-2)$ die Zahl $+4$. Bei Textgleichungen hat man natürlich zu entscheiden, ob die algebraisch der Gleichung genügenden Wurzeln auch dem Sinne der Aufgabe entsprechen, oder ob nicht ein Wert zu verwerfen ist, weil für die Aufgabe sinnlos! (Man denke z. B. an eine negative Anzahl von Menschen etc.)

Ist das absolute Glied — so nennt man das Glied, welches x nicht enthält — oder wenn man will, das Glied mit der 0^{ten} Potenz von x — der Null gleich, so läßt sich die linke Seite der Gleichung in ein Produkt aus 2 Faktoren zusammenfassen. Ist aber ein Produkt der Null gleich, so muß ein Faktor gleich Null sein. Hierdurch erhält man wieder zwei Lösungen, die auch absolut genommen voneinander verschieden sind. Die eine Lösung ist stets Null, da stets der eine Faktor x allein ist. Die allgemeine Form einer solchen Gleichung ist:

$$\underline{ax^2 + bx = 0.}$$

Zur Lösung erhält man:

$$x\,(ax + b) = 0, \text{ also entweder}$$

$$\underline{x = 0} \quad \text{oder}$$

$$ax + b = 0, \quad \text{also}$$

$$x = -\frac{b}{a}. \quad \text{Man hat also}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Ist keiner der drei Koëffizienten der Null gleich, so heißt die Gleichung eine gemischt quadratische Gleichung. Ihre allgemeine Form ist also:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Um diese Gleichung auflösen zu können, verfahre man folgendermaßen. Man multipliziere die ganze Gleichung mit 4a und erhält:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Darauf addiere man auf beiden Seiten der Gleichung b^2 und es kommt:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac,$$

oder da die linke Seite das Quadrat von $(2ax + b)$ darstellt:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac, \text{ also:}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}, \text{ also}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}, \text{ folglich:}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \text{ also:}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Diese beiden Lösungen sind auch ihrem absoluten Werte nach verschieden. Bei der Wichtigkeit und dem häufigen Vorkommen der quadratischen Gleichungen muß man sich die Auflösungsformel auswendig merken. Man merke also: Ist eine gemischt quadratische Gleichung auf die Form:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

gebracht, so erhält man x aus der Formel:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Wir wollen die Formel an einigen Beispielen einüben.

Aufgabe 1. Man bestimme x aus der Gleichung:

$$57x - 18x^2 + 145 = 0.$$

Man bringe nach Multiplikation mit (— 1) die Gleichung auf die allgemeine Form. Es kommt:

$$18x^2 - 57x - 145 = 0.$$

b ist also hier $= -57$ und $c = -145$. Man erhält nach unserer Auflösungsformel:

$$x = \frac{57 \pm \sqrt{57^2 + 4 \cdot 18 \cdot 145}}{36}$$

$$x = \frac{57 \pm \sqrt{3249 + 10440}}{36} = \frac{57 \pm 117}{36}$$

$$x_1 = \frac{174}{36} = \frac{29}{6}$$

$$x_2 = \frac{60}{35} = \frac{5}{3}.$$

Aufgabe 2. Man bestimme x aus der Gleichung:

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

Hier ist $b = +1$ und $c = -1$. Man erhält:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}, \text{ also:}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = -1.$$

Die Auflösungsformel

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

enthält eine geradzahlige (zweite) Wurzel und unter der Wurzel steht eine Differenz. Wir wissen aber, daß eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl eine imaginäre Zahl ist, so daß wir sagen können, eine gemischt quadratische Gleichung von der allgemeinen Form:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hat nur dann reelle Wurzeln, wenn die Differenz

$$\underline{b^2 - 4ac < 0.}$$

Ist aber: $\underline{b^2 - 4ac \leqq 0}$

so erhält man komplexe Lösungen, und zwar konjugiert komplexe.

Man nennt den Ausdruck

$$b^2 - 4ac$$

Die Diskriminante der quadratischen Gleichung. Die Diskriminante ist positiv, wenn in der Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

welche so geordnet, daß ax^2 positiv ist, — was stets möglich ist — das absolute Glied negativ ist, oder wenn c zwar positiv ist, aber kleiner als $\frac{b^2}{4a}$. Ist $4ac$ dem Quadrat von b gleich, so ist die Quadratwurzel Null. Man erhält also reelle Lösungen, wenn c Werte annimmt, die zwischen $-\infty$ und $+\frac{b^2}{4a}$ liegen.

Es ist noch eine zweite Auflösungsformel in Verwendung, welche man sich ebenfalts auswendig zu merken hat, da man bald diese, bald jene mit Vorteil verwendet. Dividiert man in der allgemeinen Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit a durch, also

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

und führt man für $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ die Buchstaben p und q ein, so erhält man die sogenannte Normalform einer gemischt quadratischen Gleichung, welche lautet:

$$\underline{x^2 + px + q = 0.}$$

Nun verfahren wir nach dem Grundsatz, den wir in der Lehre von den linearen Gleichungen kennen gelernt haben, nämlich: Unbekannte auf die eine, Bekannte auf die andere Seite bringen! Also ist:

$$x^2 + px = -q.$$

Nun haben wir auf der linken Seite das Quadrat einer Zahl und mit ihm additiv verbunden ein Produkt, dessen einer Faktor die erste Potenz dieser Zahl ist. Die beiden Glieder sind also die beiden ersten Glieder des Quadrats eines Binoms, und zwar ist x das erste Glied des Binoms und $\frac{p}{2}$ das zweite. Denn es ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, wir haben also für $2b$ den Faktor p, also ist $b = \frac{p}{2}$. Durch diese Tatsache nun werden wir angeregt, die linke Seite der Gleichung durch Hinzufügung der quadratischen Ergänzung in ein vollständiges Quadrat zu verwandeln und zuzusehen, ob wir nicht dadurch instand gesetzt werden, die Unbekannte x zu bestimmen. Die quadratische Ergänzung ist $\frac{p^2}{4}$. Addieren wir diese auf beiden Seiten der Gleichung, so erhalten wir:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = -q + \frac{p_2}{4}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \frac{p^2}{4}.$$

Folglich: $$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{-q + \frac{p^2}{4}}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 49}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right).}$$

Dies ist die Auflösungsform einer quadratischen Gleichung, wenn diese auf die Normalform

$$x^2 + px + y = 0$$

gebracht ist. Bezeichnen wir die erste Auflösung mit x_1 und die zweite mit x_2,

so ist $$x_1 = \frac{1}{2}\left(-p + \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(-p - \sqrt{p^2 - 4q}\right).$$

Lernen wir auch diese Formel an einigen Beispielen anwenden.

Aufgabe 3. $(a + b)\,x^2 - x \cdot \sqrt{c^2 - b} = 2ac + b.$ Bringen wir die Gleichung auf die Form: $x^2 + px + q = 0$, so erhalten wir:

$$x^2 + \frac{-\sqrt{c^2 - b}}{a + b} \cdot x + \left(-\frac{2ac + b}{a + b}\right) = 0.$$

In dieser Gleichung ist

$$p = -\frac{\sqrt{c^2 - b}}{a + b} \text{ und}$$

$$q = -\frac{2ac + b}{a + b}.$$ Wir erhalten also nach unserer Formel als Auflösung:

$$x = \frac{1}{2}\left(+\frac{\sqrt{c^2 - b}}{a + b} \pm \sqrt{\frac{c^2 - b}{(a + b)^2} + \frac{4 \cdot (2ac + b)}{a + b}}\right)$$

Aufgabe 4. $x^2 - 8x = -12$. Wir erhalten:

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}(+8 \pm \sqrt{64-48} = \frac{1}{2}(+8 \pm 4)$$

$$x_1 = 6.$$
$$x^2 = 2.$$

Aufgabe 5. $x^2 + 10x = -21$.

$$x^2 + 10x + 21 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}(-10 \pm \sqrt{100 - 84}) = \frac{1}{2}(-10 \pm 4)$$

$$x_1 = -3,\ x_2 = -7.$$

Nachdem wir nun auch an einigen Beispielen gesehen haben, wie man diese Formel anwendet, wollen wir nun untersuchen, ob zwischen den Auflösungen oder, wie man sagt, zwischen den Wurzeln einer gemischt quadratischen Gleichung und ihren Koëffizienten nicht irgendwelche Beziehungen bestehen. Man findet leicht, daß solche tatsächlich stattfinden. Addiert man nämlich die beiden Wurzeln, so erhält man:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} - \frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$$

$$\underline{x_1 + x_2 = -p.}$$

In Worten ausgesprochen heißt diese Gleichung: **Die Summe der beiden Wurzeln einer gemischt quadratischen Gleichung ist gleich dem negativen Koëffizienten der ersten Potenz der Unbekannten.** Multiplizieren wir beide Wurzeln miteinander, so erhalten wir:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4} - \frac{1}{4}\ p^2 - 4q)$$

$$\underline{x_1 \cdot x_2 = q,}$$

eine Gleichung, welche besagt: „**Das Produkt der beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung ist gleich dem absoluten Glied.**"

Auf den Gedanken, beide Wurzeln zu addieren, kommt man durch die Vergleichung der Normalform mit der Gleichung:

$$x_2 - (a + b)\, x + ab = 0,$$

welche entsteht aus: $(x - a)(x - b) = 0.$

Sie muß die beiden Wurzeln haben:

$x = a$ und $x = b$, weil entweder $(x - a)$ oder $(x - b)$ gleich Null sein muß. Vergleicht man diese Gleichung mit: $x^2 + px + q = 0$, so ergibt sich:

$$\underline{p = -(a + b)} \text{ und } \underline{q = ab,}$$

also unsere beiden obigen Sätze.

Mit Hilfe dieser beiden gefundenen Sätze können wir, wenn uns eine gemischt quadratische Gleichung zur Lösung vorgelegt wird, aus deren Koëffizienten über die beiden Lösungen folgendes aussagen.

Ist die gegebene Gleichung auf die Form:

$$x^2 + px + q = 0$$

gebracht und ist hierin das absolute Glied q positiv, so sind die Lösungen der Gleichung entweder beide positiv oder beide negativ. Dies folgt aus dem zweiten gefundenen Satz. Nach diesem ist: $x_1 \cdot x_2 = q.$

Da aber nur das Produkt zweier Faktoren von gleichen Vorzeichen positiv sein kann, so muß, wenn q positiv ist, entweder x_1 und x_2 positiv, oder x_1 und x_2 negativ sein. Was von beiden sind sie nun in einem gegebenen Falle? Darauf gibt uns der erste Satz die Antwort. Die Summe der beiden Lösungen hat das negative oder das entgegengesetzte Vorzeichen von p und damit natürlich auch jede der beiden Lösungen, da ja beide Summanden dasselbe Vorzeichen haben müssen. Wir haben hieraus also folgenden Satz: „Ist eine gemischt quadratische Gleichung auf die Form: $x^2 + px + q = 0$ gebracht, so haben die Lösungen der Gleichung beide dasselbe Vorzeichen, wenn das absolute Glied q positiv ist, und zwar sind beide Lösungen positiv, wenn der Koëffizient der ersten Potenz der Unbekannten, also p, negativ ist, und beide negativ, wenn p positiv ist. Betrachten wir den Fall, wenn q negativ ist.

Hier sagt uns die Beziehung:

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

sofort, daß in diesem Falle die eine Wurzel der Gleichung positiv ist, die andere negativ. —

Nun wollen wir noch sehen, ob p und q beliebige Größen sein dürfen, oder ob nicht etwa hinsichtlich ihres gegenseitigen Größenverhältnisses noch irgendwelche Beschränkungen gemacht werden müssen, wenn anders die Gleichung auflösbar sein soll, das will besagen, wenn wir wirkliche, reelle Werte als Auflösungen oder Wurzeln der Gleichung erhalten sollen. Daß eine solche Beschränkung wirklich gemacht werden muß, sagt uns auch diese Formel. Es ist:

$$x = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right).$$

In dieser Auflösungsformel kommt wieder eine Quadrat- also eine geradzahlige Wurzel aus einer Differenz vor. Diese Wurzel können wir aber nur so lange ziehen, als die Differenz positiv ist; wird diese negativ, so ist die Wurzel imaginär und wir erhalten als Lösungen zwei komplexe Zahlen und zwar sind diese komplexen Zahlen konjugiert, d. h. sie unterscheiden sich nur durch Vorzeichen ihres imaginären Gliedes, sind also von der Form: $a + bi$ und $a - bi$. Wann wird nun die Differenz unter der Wurzel negativ? Die Antwort hierauf lautet: $p^2 - 4q$ wird negativ, wenn q positiv ist und $4q$ größer ist als p^2 oder q größer als $\frac{p^2}{4}$. Ist q negativ, so ist $-4q$ positiv, also der ganze Radikand positiv. Ist q zwar negativ, aber $4q$ kleiner als p^2, so ist die Differenz positiv, die Wurzel also reell. Wäre q positiv und $4q$ gleich p^2, so ist die Differenz und mit ihr ihre Quadratwurzel gleich Null. Wirkliche, reelle Werte erhalten wir also für die Wurzel in der Formel, wenn q Werte annimmt, die zwischen $+\frac{p^2}{4}$ und $-\infty$ liegen.

Fassen wir nun alles zusammen, so haben wir den Satz:

„Ist eine gemischt quadratische Gleichung auf die Form: $x^2 + px + q = 0$ gebracht, so erhalten wir, wenn das absolute Glied q negativ ist, in allen Fällen zwei reelle Lösungen. Die Vorzeichen der Wurzeln sind verschieden. Ist p positiv und zugleich kleiner als $\frac{p^2}{4}$ so erhalten wir zwei reelle Lösungen mit gleichem Vorzeichen, und zwar ist dieses gleiche Vorzeichen denjenigen von p entgegengesetzt. Ist q positiv und größer als $\frac{p^2}{4}$, so sind die Wurzeln der Gleichung nicht reell, sondern komplex, und zwar konjugiert komplex.“ —

Wir haben gesehen, jede quadratische Gleichung hat zwei Lösungen. Dies kommt daher, weil jede quadratische Form sich in zwei lineare Faktoren zerlegen läßt. Ist die quadratische Form gegeben:

$$ax^2 + bx + c,$$

so erhält man:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

oder:

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \pm \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

$$\cdot \left[\left(x + \frac{b}{a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right].$$

Setzt man die quadratische Form gleich Null, so erhält man eine quadratische Gleichung. Da a nicht Null sein kann — sonst fällt ja das Glied mit x^2 fort, so muß einer der beiden linearen Faktoren der Null gleich sein und durch Gleichsetzen beider Faktoren mit Null erhält man die beiden Wurzeln, welche der Gleichung Genüge leisten.

Aus der letzten Betrachtung ergibt sich, daß wenn man eine Gleichung mit einem Faktor, welcher x enthält, multipliziert, die neue Gleichung einmal die Wurzeln der alten hat und dann aber noch diejenigen Wurzeln, welche der zugesetzte Faktor ergibt, wenn er gleich Null gesetzt wird. Eine Gleichung erhält also dadurch Wurzeln, welche ihr nicht angehören. Darauf hat man beim Heben der Brüche insbesondere zu achten. Man darf in den Hauptnenner keinen Faktor aufnehmen, der durch Vereinfachung der Brüche fortfallen würde.

Des weiteren ergibt sich aus unserer obigen Entwicklung, daß eine Gleichung, von der man weiß, daß a eine Wurzel derselben ist, durch $x - a$ in der Nullform ohne Rest teilbar ist, denn das Gleichungspolynom enthält den Faktor $x - a$.

So wird z. B. die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0.$$

befriedigt durch die Wurzel

$$x = 1,$$

welches sind die übrigen Wurzeln?

Man dividiere $x^3 - 3x^2 - x + 3$ durch $x - 1$ und erhält:

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$ also erhält man für:

$$x_{2,3} = \frac{1}{2}\,(2 \pm \sqrt{4 + 12}), \text{ also}$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = -1.$$

Ferner genügt der Gleichung

$$x^3 - 1 = 0$$

der Wurzelwert $x = 1$. Welches sind die übrigen Wurzeln?

Durch Division von $x^3 - 1$ durch $x - 1$ erhält man:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Hieraus erhält man die beiden weiteren Wurzeln:

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Für $x_3 = a$ erhält man:

$$x_1 = \sqrt[3]{a}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a}$$

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\,\sqrt[3]{a}.$$

Hieraus erkennt man, daß eine dritte Wurzel drei Werte hat, wovon aber zwei imaginär sind. Wir gehen nun dazu über, quadratische Gleichungen zu lösen, wobei wir zahlreiche Beispiele der ausgezeichneten Aufgabensammlung von Dr. E. Heis, welchewir unseren Lesern wärmstens empfehlen, entnehmen. Der Leser versuche zuerst immer selbst die Aufgabe zu lösen.

§ 2.

Aufgaben über quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

a) Rein quadratische Gleichungen.

Aufgabe 6. $9x^2 = 2601.$

Man erhält: $$x^2 = \frac{2601}{9} = 289$$

$$x = \pm\sqrt{289} = \pm 17.$$

Aufgabe 7.

$$x + \sqrt{x^2 - 17} = 4 : \sqrt{x^2 - 17}.$$ Man erhält:

$$x \cdot \sqrt{x^2 - 17} + x^2 - 17 = 4$$
$$x \cdot \sqrt{x^2 - 17} = 21 - x^2$$
$$x^2 (x^2 - 17) = 21^2 + x^4 - 42 x^2$$
$$x^4 - 17 x^2 = 441 + x^4 - 42 x^2$$
$$25 x^2 = 441$$
$$x = \pm \sqrt{\frac{441}{25}} = \pm \frac{21}{5}.$$

Aufgabe 8. $x + \sqrt{a + x^2} = (a^2 + a) : \sqrt{4a + 4x^2}$

Wir bekommen:

$$2x \cdot \sqrt{a + x^2} + 2(a + x^2) = a^2 + a$$
$$2x \sqrt{a + x^2} = a^2 - a - 2x^2$$
$$4x^2 a + 4x^4 = (a^2 - a)^2 - 4(a^2 - a)x^2 + 4x^4$$
$$4a^2x^2 = a^4 - 2a^3 + a^2$$

(mit a^2 dividieren): $$4x^2 = a^2 - 2a + 1$$
$$x^2 = \frac{(a-1)^2}{4}$$
$$x = \pm \frac{1}{2}(a - 1).$$

Aufgabe 9.

$$\sqrt{\frac{3m^2}{x^2} + m^2 - 3} = m + 1 - \sqrt{\frac{3m^2}{x^2} - 2}.$$

Durch Quadrieren erhält man:

$$\frac{3m^2}{x^2} + m^2 - 3 = (m+1)^2 + \frac{3m^2}{x^2} - 2 - 2(m+1) \cdot \sqrt{\frac{3m^2}{x^2} - 2}$$
$$m^2 - 1 = (m+1)^2 - 2(m+1) \cdot \sqrt{\frac{3m^2}{x^2} - 2}.$$

Dividiere durch $m + 1$:

$$m - 1 = m + 1 - 2\sqrt{\frac{3m^2}{x^2} - 2}$$

$$2\sqrt{\frac{3m^2}{x^2} - 2} = 2$$
$$\sqrt{\frac{3m^2}{x^2} - 2} = 1$$
$$\frac{3m^2}{x^2} - 2 = 1$$
$$3x^2 = 3m^2$$
$$x = \pm m.$$

Aufgabe 10. $\sqrt{a - \frac{b}{x^2}} + \sqrt{d - \frac{b}{x^2}} = c.$

Quadriere:

$$a - \frac{b}{x^2} + d - \frac{b}{x^2} + 2\sqrt{\left(a - \frac{b}{x^2}\right)\left(d - \frac{b}{x^2}\right)} = c^2$$

$$2\sqrt{\left(a - \frac{b}{x^2}\right)\left(d - \frac{b}{x^2}\right)} = c^2 - a - d + \frac{2b}{x^2}$$

$$4\left(a - \frac{b}{x^2}\right)\left(d - \frac{b}{x^2}\right) = (c^2 - a)^2 + \left(d - \frac{b}{x^2}\right)^2 - 2(c^2 - a)(d - \frac{2b}{x^2}$$

$$4ad - \frac{4ab}{x^2} - \frac{4bd}{x_2} + \frac{4b}{x^4} = c^4 + a^2 - 2ac^2 + d^2 + \frac{4b^2}{x^4} - \frac{4bd}{x^2} - 2c^2d + \frac{4bc^2}{x^2} + 2ad - \frac{4ab}{x^2}$$

$$-\frac{4bc^2}{x^2} = c^4 + a^2 - 2ac^2 + d^2 - 2c^2d - 2ad.$$

Addiere und subtrahiere auf der rechten Seite $4c^2d$:

$$-\frac{4bc^2}{x^2} = (c^2 - a + d)^2 - 4c^2d$$

$$-4bc^2 = x^2\,[(c^2 - a + d)^2 - 4c^2d]$$

$$x^2 = \frac{4bc^2}{4c^2d - (c^2 - a + d)^2}$$

$$x = \pm 2c\sqrt{\frac{b}{4c^2d - (c^2 - a + d)^2}}.$$

Aufgabe 11.

$$\sqrt{\frac{560}{x^2} + 29} - \sqrt{\frac{560}{x^2} - 34} = 7.$$

Man schreibe die Gleichung:

$$\sqrt{\frac{560}{x^2} + 29} = 7 + \sqrt{\frac{560}{x^2} - 34}$$

Quadriere: $$14 \cdot \sqrt{\frac{560}{x^2} - 34} = 14$$

$$\frac{560}{x^2} - 34 = 1$$

$$x = \pm 4.$$

Aufgabe 12.

$$\sqrt[3]{0{,}125\,x^3 - 6x} = \sqrt{0{,}25\,x^2 - 8}$$

Erhebe beide Seiten in die sechste Potenz:

$$(0{,}125\,x^3 - 6x)^2 = (0{,}25\,x^2 - 8)^3$$

$$0{,}125^2x^6 + 36x^2 - 12 \cdot 0{,}125\,x^4 = 0{,}25^3x^6 - 3 \cdot 0{,}25^2x^4 \cdot 8 + 3 \cdot 0{,}25\,x^2 \cdot 64 - 8^3$$

$$x^2 = 42{,}666\cdots$$

$$x = \pm 6{,}53197.$$

Aufgabe 13.

$$\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)^{-1} - \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)^{-1} = x^{-2}\sqrt{3}$$

Man schreibe die Gleichung:

$$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}$$

$$\frac{1 + \sqrt{1 - x^2} - \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)}{1 - 1 + x^2} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}$$

$$2\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}$$

$$4 - 4x^2 = 3$$

$$x^2 = \frac{1}{4};\ x = \pm 0{,}5.$$

Aufgabe 14.

$$\left(x + \sqrt{2 - x^2}\right)^{-1} + \left(x - \sqrt{2 - x^2}\right)^{-1} = x.$$

Man schreibe die Gleichung:

$$\frac{1}{x + \sqrt{2 - x^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{2 - x^2}} = x$$

$$\frac{x - \sqrt{2 - x^2} + x + \sqrt{2 - x^2}}{x^2 - 2 - x^2} = x$$

$$\frac{2x}{2x^2 - 2} = x$$

$$\frac{2}{2x^2 - 2} = 1$$

$$2x^2 = 4$$

$$x = \pm \sqrt{2}.$$

Aufgabe 15.

$$\frac{\sqrt[n]{m + x^2}}{m} + \frac{\sqrt[n]{m + x^2}}{x^2} = \sqrt[n]{x^2}$$

$\sqrt[n]{m + x^2}$ läßt sich links heraussetzen:

$\sqrt[n]{m + x^2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{x^2}\right) = \sqrt[n]{x^2}$ oder:

$$\sqrt[n]{m + x^2} \cdot \frac{x^2 + m}{m x^2} = \sqrt[n]{x^2}$$

Erhebe in die n^{te} Potenz:

$$(m + x^2) \cdot \frac{(m + x^2)^n}{(m x^2)^n} = x^2$$

$$\frac{(m + x^2)^{n+1}}{m^n x^{2n}} = x^2$$

$$(m + x^2)^{n+1} = m^n \cdot x^{2(n+1)}$$

$$m + x^2 = m^{\frac{n}{n+1}} \cdot x^2$$

$$x^2 \left(m^{\frac{n}{n+1}} - 1\right) = m$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{m}{m^{\frac{n}{n+1}} - 1}}.$$

Aufgabe 16.

$$\sqrt[m-1]{m} \cdot \sqrt[m+1]{x - m} = \sqrt[m+1]{m} \cdot \sqrt[m-1]{x - m}$$

$$\frac{\sqrt[m+1]{x - m}}{\sqrt[m-1]{x - m}} = \frac{\sqrt[m+1]{m}}{\sqrt[m-1]{m}}$$

$$(x - m)^{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m-1}} = m^{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m-1}}$$

$$(x - m)^{\frac{-2}{m^2-1}} = m^{\frac{-2}{m^2-1}}$$

$$(x - m)^{-2} = m^{-2}$$

$$(x - m)^2 = m^2$$

$$x - m = \pm m$$

$$x_1 = 2m,\ x_2 = 0.$$

Aufgabe 17. $\frac{x + m - 2n}{x + m + 2n} = \frac{n + 2m - 2x}{n - 2m + 2x}.$

Wende hier den Satz an: „In einer geometrischen Proportion verhält sich die Summe der Glieder der einen Seite zu deren Differenz wie die Summe der Glieder der anderen Seite zu ihrer Differenz.

Man erhält:

$$(x + m + 2n + x + m - 2n):(x + m + 2n - x - m + 2n)$$
$$= (n - 2m + 2x + n + 2m - 2x):(n - 2m + 2x - n - 2m + 2x)$$

$$2(x + m) : 4n = 2n : 4(x - m)$$

$$x + m : 2n = n : 2(x - m)$$

$$2x^2 - 2m^2 = 2n^2$$

$$x^2 = m^2 + n^2$$

$$x = \pm\sqrt{m^2 + n^2}.$$

b) Gemischt quadratische Gleichungen:

Aufgabe 18. $557x = 5801\frac{1}{4} + 8x^2$

$$8x^2 - 557x + 5501{,}25 = 0.$$

Wenden wir die Formel an:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, so erhalten wir:

$$x = \frac{+557 \pm \sqrt{557^2 - 4 \cdot 8 \cdot 5801{,}25}}{16}$$

$$x = \frac{557 \pm \sqrt{310249 - 185640}}{16} = \frac{557 \pm \sqrt{124609}}{16}$$

$x = \frac{557 \pm 353}{16}$ also: $x_1 = 910 : 16 = 56\frac{7}{8}$ und

$$x_2 = 204 : 16 = 12\frac{3}{4}.$$

Bringen wir die andere Auflösungsformel in Anwendung, so ergibt sich:

$$8x^2 - 557x + \frac{23205}{4} = 0$$

$$x^2 - \frac{557x}{8} + \frac{23205}{32} = 0$$

$$x^2 - \frac{2228}{32}x + \frac{23205}{32} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{2228}{32} \pm \sqrt{\left(\frac{2228}{32}\right)^2 - \frac{4 \cdot 23205}{32}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{2228}{32} \pm \frac{1}{32}\sqrt{2228^2 - 4 \cdot 32 \cdot 23205}\right)$$

$$x = \frac{1}{32}\left(1114 \pm \sqrt{1114^2 - 32 \cdot 23205}\right)$$

$$x = \frac{1}{32}\left(1114 \pm \sqrt{1240996 - 742560}\right)$$

$$x = \frac{1}{32}(1114 \pm 706)$$

Aufgabe 19.

$$699230,07 - 3\,(100x - 31x^2) = 100x\,(60 + x)$$

$$699230,07 - 300x + 93x^2 = 6000x + 100x^2$$

$$7x^2 + 6300x - 699230,07 = 0$$

$$x = \frac{-6300 \pm \sqrt{6300^2 + 4 \cdot 7 \cdot 699230,07}}{14}$$

$$x = \frac{-6300 \pm 7698,6}{14}$$

$x_1 = 99,9$ und $x_2 = -999,9$

oder nach der anderen Formel:

$$x^2 + 900x - 99890,01 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-900 \pm \sqrt{900^2 + 4 \cdot 99890,01}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-900 \pm \sqrt{810000 + 399560,04}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}(-900 \pm 1099,8)$$

$x_1 = 99,9$ und

$x_2 = -450 - 549,9 = -999,9.$

Aufgabe 20. $x_1 = +\frac{1}{2}$

$x^2 = -1$

$$\frac{1}{n(n+1)x} = x + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$1 = n(n+1)x^2 + x$$
$$n(n+1)x^2 + x - 1 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4n(n+1)}}{2n(n+1)}$$
$$x = -\frac{1}{2n(n+1)} \pm \frac{1+2n}{2n(n+1)}$$
$$x_1 = \frac{1}{n+1};\ x_2 = \frac{-1-1-2n}{2n(n+1)}$$
$$= \frac{-2(n+1)}{2n(n+1)}$$
$$= -\frac{1}{n}.$$

Aufgabe 21.

$$\left(\frac{1}{3}x\right)^2 + 1 = \left(\frac{5}{13}\right)^2 - \frac{10}{13}x - \left(\frac{1}{4}x\right)^2$$
$$\frac{x^2}{9} + 1 = \frac{25}{169} - \frac{10}{13}x - \frac{x^2}{16}$$
$$\frac{25}{144}x^2 + \frac{10}{13}x + \frac{144}{169} = 0$$
$$25x^2 + \frac{1440}{13}x + \frac{144^2}{13^2} = 0$$
$$(5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot \frac{144}{13} + \left(\frac{144}{13}\right)^2 = 0$$
$$\left(5x + \frac{144}{13}\right)^2 = 0$$
$$5x + \frac{144}{13} = 0$$
$$5x = -\frac{144}{13}$$
$$x_1 = x_2 = -\frac{144}{65}.$$

Aufgabe 22. $x^2 - (a+b)x + ab = 0.$

Erinnern wir uns der Formel von früher:

$$x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b) = 0,$$

so erhalten wir sofort als Lösungen:

$$x - a = 0$$
$$x_1 = a$$
$$x - b = 0$$
$$x_2 = b.$$

Aufgabe 23. $x^2 + 1 = x\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\sqrt{m \cdot n}.$

$x^2 - \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\sqrt{m \cdot n} \cdot x + 1 = 0$ oder:

$$x^2 - \left(\frac{\sqrt{m \cdot n}}{\sqrt{m^2}} + \frac{\sqrt{m \cdot n}}{\sqrt{n^2}}\right)x + 1 = 0$$
$$x^2 - \left(\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{m}{n}}\right)x + 1 = 0$$
$$x^2 - \left(\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{m}{n}}\right)x + \sqrt{\frac{n}{m}} \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}$$
$$= \left(x - \sqrt{\frac{n}{m}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{m}{n}}\right) = 0$$
$$x - \sqrt{\frac{n}{m}} = 0$$
$$x_1 = \sqrt{\frac{n}{m}}$$
$$x - \sqrt{\frac{m}{n}} = 0$$
$$x^2 = \sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Aufgabe 24.

$$2b^2 = 2x\sqrt{a^2 + b^2} - x^2$$
$$x^2 - 2x\sqrt{a^2 + b^2} + 2b^2 = 0$$
$$x^2 - 2x \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + 2b^2 = x^2 - [(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 - b^2})$$
$$+ (\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b^2})]\, x + (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 - b^2})$$
$$(\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}) = 0,$$

also nach derselben Entwicklung, wie in den letzten Beispielen:

$$x^2 - 2x\sqrt{a^2 + b^2} + 2b^2 = [x - (\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$+ \sqrt{a^2 - b^2})]\,[x - (\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 - b^2})]$$

daher entweder:

$x - (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}) = 0$ und hieraus:

$$x_1 = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 - b^2},$$

oder:

$$x - (\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}) = 0, \text{ und hieraus:}$$

$$x_2 = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Aufgabe 25.

$$x^2 - (a^2 + b^2)\, x + (a^2 - b^2)\, ab = 0.$$

Es ist:

$$a^2 + b^2 = a\,(a - b) + b)\,(b + a) \text{ und:}$$

$$(a^2 - b^2)\,ab = a\,(a - b) \cdot b\,(b + a),$$

also hat die gegebene Gleichung die Form:

$$x^2 - (a + b)\,x + ab = 0,$$

es ist also:

$$x^2 - (a^2 + b^2)\,x + (a^2 - b^2)\,ab = [x - a\,(a - b)]$$

$$[x - b\,(a + b)] = 0$$

und somit entweder: $x - a\,(a - b) = 0$ und hieraus:

$$x_1 = a\,(a - b), \text{ oder:}$$

$$x - b\,(a + b) = 0 \text{ und hieraus:}$$

$$x_2 = b\,(a + b).$$

Erkennt der Schüler nicht sofort die Summanden resp. Faktoren a und b, möchte aber doch untersuchen, ob die Gleichung nicht von der Form $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ ist, so hat er einfach, wie bereits in Beispiel 24 gezeigt:

$$a + b = a^2 + b^2 \text{ und}$$

$$ab = (a^2 - b^2)\,ab$$

zu setzen und hieraus, wie dort gezeigt, a und b zu bestimmen, wobei er sich klar zu werden hat, daß die a und b links von denen rechts verschieden sind, er setze deshalb jeweils verschiedene Buchstaben ein. Wählen wir für unsere Rechnung m und n, so ist der Gang folgender:

$$m + n = a^2 + b^2$$

$$mn = (a^2 - b^2)\,ab$$

erste Glchg. quadriert: $m^2 + 2mn + n^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2$

zweite Glchg. mit 4 multipliziert: $4mn = 4(a^2 - b^2)\,ab$

subtrahiert: $m^2 - 2mn + n^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 4(a^2 - b^2)ab$

$$(m - n)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 4\,(a^2 - b^2)\,ab$$

$$m - n = \sqrt{a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 4\,(a^2 - b^2)ab}$$

$$m - n = a^2 - 2ab - b^2$$

$$m + n = a^2 + b^2$$

$$2m = 2a^2 - 2ab$$

$$m = a\,(a - b)$$

$$2n = a^2 + b_2 - a^2 + 2ab + b^2$$

$$n = b\,(a + b)$$

Aufgabe 26.

$$x^2 - 5x = 6\sqrt{-3} - 16.$$

$$x^2 - 5x - 6\sqrt{-3} + 16 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{25 + 24\sqrt{-3} - 64}\right) = \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{-39 + 24\sqrt{-3}}\right)$$

Nun ist bekanntlich:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \text{ und}$$

$$\sqrt{-a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \text{ also}$$

$$\sqrt{-39 + 24\sqrt{-3}} = \sqrt{-39 + \sqrt{-3 \cdot 24^2}}$$

$$= \sqrt{-\frac{39}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{39^2 + 3 \cdot 24^2}}$$

$$+ \sqrt{-\frac{39}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{39^2 + 3 \cdot 24^2}} = 3 + 4\sqrt{-3}.$$

Diesen Wert in unserer Lösung eingeführt, ergibt:

$$x = \frac{1}{2}(5 \pm (3 + 4\sqrt{-3}) \text{ und hieraus:}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(8 + 4\sqrt{-3}) = 4 + 2\sqrt{-3}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(2 + 4\sqrt{-3}) = 1 - 2\sqrt{-3}$$

Aufgabe 27.

$$\sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 + 18x + 27} = -\sqrt{4x^2 + 4x + 9}.$$

Erhebt man beiderseits zur sechsten Potenz, so kommt:

$$(8x^3 + 12x^2 + 18x + 27)^2 = (4x^2 + 4x + 9)^3$$

oder nach dem polynomischen Lehrsatz ausgerechnet:

$$64x^6 + 144x^4 + 324x^2 + 729 + 192x^5 + 288x^4 + 432x^3$$
$$+ 432x^3 + 648x^2 + 972x = 64x^6 + 192x^5 + 192x^4$$
$$+ 64x^3 + 432x^4 + 432x^2 + 864x^3 + 972x^2 + 972x,$$

oder die gleichnamigen Glieder vereinigt:

$$192x_4 + 64x^3 + 431x^2 = 0,$$

oder mit $192x^2$ durchdividiert:

$$x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{9}{4} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - 9}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{-80}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} \pm \frac{4}{3}\sqrt{-5}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{6}\left(-1 + 4\sqrt{-5}\right) \text{ und } x_2 = \frac{1}{6}(-1 - 4\sqrt{-5}).$$

Da man aus der Gleichung:

$$192\,x^4 + 64\,x^3 + 432\,x^2 = 0,$$

zweimal x als Faktor voraussetzen kann, so ergibt sich:
$x \cdot x \cdot (192\,x^2 + 64\,x + 432) = 0$, also:

1. $x = 0$
2. $x = 0$
3. $192\,x^2 + 64\,x + 432 = 0.$

Wir haben also noch die Lösungen:

$$x_3 = 0$$

$x_4 = 0.$ (Siehe Anmerkung) *).

§ 3.
Gleichungen, welche sich auf quadratische zurückführen lassen.

Mitunter lassen sich Gleichungen höheren Grades auf quadratische Gleichungen zurückführen. Hierher gehören hauptsächlich Gleichungen von der Form:

$$a\,x^{2n} + b\,x^n + c = 0.$$

Solche Gleichungen werden gelöst, indem man x^n als Unbekannte ansieht. Wäre z. B. gegeben:

$x^4 - 5\,x^2 + 4 = 0$, so setzt man

$$x^2 = y$$

und die Gleichung geht über in:

$y^2 - 5\,y + 4 = 0$, also

$$y = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{25 - 16})$$

$$y = \frac{1}{2}(5 \pm 3)$$

$y_1 = 4;\ y_2 = 1$, also:

---

*) Anmerkung: Weitere Beispiele unter „Repetitionsaufgaben".

$$x = \pm\sqrt{4} \quad \text{oder} \quad x = \pm\sqrt{1}$$

und daraus die Lösungen:

$$x_1 = +2;\ x_2 = -2;\ x^3 = +1;\ x_4 = -1.$$

Wäre ferner die Gleichung gegeben:

$$\sqrt[3]{13x+12} + \sqrt[6]{13x+12} = 6,$$

so könnte man zur Lösung setzen:

$$\sqrt[6]{13x+12} = y, \text{ folglich}$$

$$\sqrt[3]{13x+12} = y^2$$

und wir haben die Gleichung:

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{25})$$

$$y^1 = +2\ y_2 = -3. \text{ Also}$$

$$\left(\sqrt[6]{13x+12}\right)^6 = 2^6$$

$$13x = 52$$

$$x_1 = 4.$$

Ebenso erhält man:

$$x_2 = \frac{717}{13}.$$

28.

$$4m^2 = (a+b+x)(a+b-x)(x+a-b)(x-a+b).$$

Fassen wir rechts die zwei ersten und die zwei letzten Faktoren jeweils zusammen, so erhalten wir:

$$4m^2 = [(a+b)^2 - x^2] \cdot [x^2 - (a-b)^2]$$

$$= -a^4 - b^4 - x^4 + 2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2$$

$$x^4 - 2(a^2+b^2)x^2 + (a^2-b^2)^2 + 4m^2 = 0$$

$$x^2 = y,$$

substituiert:

$$y^2 - 2(a^2+b^2)y + (a^2-b^2)^2 + 4m^2 = 0$$

$$y = a^2 + b^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4(a^2+b^2)^2 - 4(a^2-b^2)^2 - 16m^2}$$

$$y = a^2 + b^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{16(a^2b^2 - m^2)} = a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(ab)^2 - m^2}$$

$$x = \pm\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(ab)^2 - m^2}}$$

$$= \pm\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(ab+m)(ab-m)}}.$$

Aufgabe 29. $x^4 - ax^2 + b^2 = 0.$

$$y^2 - ay + b^2 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}\right)$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b^2}}$$

oder nach der Formel:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}} \pm \sqrt{\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 - 4b^2}{4}}}$$

$$\pm\sqrt{\frac{a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 - 4b^2}{4}}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a}{4} + \frac{2b}{4}} \pm\sqrt{\frac{a}{4} - \frac{2b}{4}}$$

$$x = \pm\frac{1}{2}\left[\sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b}\right].$$

Ferner sind hier zu erwähnen die reziproken Gleichungen höheren Grades. Gleichungen heißen reziprok, wenn sie unverändert in ihrem Wert bleiben, wenn man $\frac{1}{x}$ anstatt x setzt. Dies ist der Fall, wenn das erste und letzte, das zweite und zweitletzte Glied usw. denselben Coeffizienten haben und diese gleichen Koeffizienten in der Gleichung stets dasselbe oder stets das entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen. Diese Gleichungen werden dadurch gelöst, daß man für $x + \frac{1}{x}$ oder $x - \frac{1}{x}$ eine neue Unbekannte y einführt. Zeigen wir dies an Beispielen.

Es sei gegeben:

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch x^2, so erhalten wir

$$2x^2 + 3x - 16 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0.$$

Nun setzen wir:

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

folglich

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Unsere Gleichung geht also über in:

$$2\,(y^2 - 2) + 3\,y - 16 = 0$$
$$2\,y^2 - 4 + 3\,y - 16 = 0$$
$$y^2 + \frac{3}{2}y - 10 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 40}\right)$$
$$y = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} \pm \frac{13}{2}\right)$$
$$y_1 = \frac{5}{2},\ y_2 = -4.$$

Also: $$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$x^2 - \frac{5}{x}x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}\right)$$

$$\underline{x_1 = 2;}\quad \underline{x_2 = \frac{1}{2}}.$$

Ferner ist:

$$x + \frac{1}{x} = -4,$$

also $$x^2 + 4\,x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}(-4 \pm \sqrt{12})$$

$$x = \frac{1}{2}\,(-4 \pm 3{,}46410), \text{ also:}$$

$$\underline{x^3 = 0{,}26795}$$
$$\underline{x_4 = -3{,}73205.}$$

Ist die gegebene Gleichung von ungeradem Grade, so benütze man zur Lösung den Satz: „Die reziproken Gleichungen von ungeradem Grade haben den Faktor $x + 1$, wenn die entsprechenden Koefiizienten gleiches Vorzeichen haben und den Faktor $(x - 1)$, wenn sie ungleiches Vorzeichen haben.“ Es sei z. B. die Gleichung gegeben:

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$, so erhält man
$(x - 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0$. Also:

$$x - 1 = 0$$
$$\underline{x_1 = 1}$$
$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25-16}{4}}\right)$$
$$\underline{x_2 = 2}$$
$$\underline{\underline{x_3 = \frac{1}{2}.}}$$

Obiger Satz leuchtet ein, wenn man bedenkt, daß eine Gleichung von ungeradem Grade eine ungerade Anzahl von Wurzeln hat. Da aber bei den symmetrischen Gleichungen je zwei Wurzeln reziproke Werte voneinander sind, so muß eine Wurzel zu sich selbst reziprok sein, was aber nur bei den Größen $+1$ und -1 der Fall ist. Eine solche Gleichung muß also entweder durch $(x - 1)$ oder $(x + 1)$ teilbar sein. Wann das eine und wann das andere eintritt, sagt obiger Satz.

Aufgabe 30. Die Gleichung zu lösen:

$$(x - a)^4 - (b + c)(x - a)^2 + (b - c)^2 = 0$$

Setze $(x - a)^2 = z$, so kommt:

$$z^2 - (b + c)z + (b - c)^2 = 0$$
$$z = \frac{1}{2}\left(b + c \pm \sqrt{(b + c)^2 - 4(b - c)^2}\right).$$

Also:

$$x - a = \pm\sqrt{\frac{b+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2 - 4(b-c)^2}}$$
$$x = a \pm \sqrt{\frac{b+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2 - 4(b-c)^2}}.$$

Aufgabe 31. $x^4 - 14x^3 + 50x^2 - 14x + 1 = 0$.
Dividiert man die Gleichung durch x^2, so erhält man:

$$x^2 - 14x + 60 - \frac{14}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 14\left(x + \frac{1}{x}\right) + 50 = 0.$$

Nun setzt man:

$$x + \frac{1}{x} = y, \text{ folglich}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Also geht die Gleichung über in:

$$y^2 - 2 - 14y + 50 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}\left(+14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 48}\right)$$

$$y_1 = 8$$

$$y_2 = 6.$$

Also: $x^2 - 8x + 1 = 0$

$$x = \frac{1}{2}\left(8 \pm \sqrt{64 - 4}\right)$$

$$x_1 = 4 + \sqrt{15}$$

$$x_2 = 4 - \sqrt{15}$$

Ferner $x^2 - 6x + 1 = 0$

$$x = \frac{1}{2}\left(6 \pm \sqrt{36 - 4}\right)$$

$$x_3 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$x_4 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Aufgabe 32. Die Gleichung zu lösen:

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

Diese Gleichung ist durch $x + 1$ teilbar. Führen wir diese Division aus, so erhalten wir als Quotienten:

$$x^4 + (a - 1)x^3 + (b - a + 1)x^2 + (a - 1)x + 1.$$

Die Gleichung geht also über in:

$$(x + 1)[x^4 + (a - 1)x^3 + (b - a + 1)x^2 + (a - 1)x + 1] = 0,$$

also: $x + 1 = 0$

$$x_1 = -1.$$

Ferner:

$$x^4 + (a - 1)x^3 + (b - a + 1)x^2 + (a - 1)x + 1 = 0.$$

Diese Gleichung ist wie die vorige Aufgabe zu behandeln.

Aufgabe 33. Die Gleichung zu lösen:

$$x^6 + ax^5 + bx^4 - bx^2 - ax - 1 = 0.$$

Dividiere die Gleichung durch $x^{\frac{n}{2}} = x^3$, so erhält man:

$$x^3 + ax^2 + bx - \frac{b}{x} - \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0.$$

Diese Gleichung ist aber durch $x - 1$ teilbar, also auch die gegebene, dieselbe geht demnach über in:

$$(x - 1)[x^5 + (a + 1)x^4 + (a + b + 1)x^3 + (a + b + 1)x^2 + (a + 1)x + 1] = 0.$$

Der zweite Faktor ist aber teilbar durch $x + 1$ und man erhält:

$$(x - 1)(x + 1)[x^4 + ax^3 + (b + 1)x^2 + ax + 1] = 0$$

also: $x_1 = +1; \quad x_2 = -1.$

Die weiteren Wurzeln erhält man aus der Gleichung:

$$x^4 + ax^3 + (b + 1)x^2 + ax + 1 = 0.$$

§ 4.

Textgleichungen II. Grades mit einer Unbekannten.

Für die Textgleichungen zweiten Giades gelten dieselben Anleitungen wie für die Textgleichungen ersten Grades. Bei der Diskussion des Resultates ist jeweils zu entscheiden, ob beide Wurzeln der Natur der Aufgabe nach brauchbar sind oder nicht. Unter Umständen ist eine oder sogar alle zwei Wurzeln dem Sinne der Aufgabe entgegenlaufend und sind unbrauchbar. Erhält man imaginäre Lösungen, so zeigen diese an, daß die Gleichung durch reelle Werte der Unbekannten überhaupt nicht befriedigt werden können.

a) Rein quadratische Gleichungen.

Aufgabe 34. Zwei Zahlen zu finden, die in dem Verhältnis 11 : 13 stehen und die miteinander multipliziert 7007 geben.

Auflösung. Nehmen wir an, die eine Zahl heiße $11x$, dann ist die andere $13x$. Ihr Produkt soll laut Text 7007 sein, also:

$$11x \cdot 13x = 7007$$

$$x^2 = \frac{7007}{143} = 49$$

$$x = \pm 7$$

Die beiden Zahlen sind also ± 77 und ± 91.

Aufgabe 35. Drei Zahlen zu finden, die in dem Verhältnis $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ stehen und deren Summe der Quadrate 10309 ausmacht.

Auflösung. Die Zahlen sollen in dem Verhältnis $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ $= 6 : 4 : 3$ stehen. Wir nehmen also an, die erste Zahl sei $6x$, dann ist die zweite $4x$ und die dritte $3x$. Nach dem Text muß die Gleichung bestehen:

$$36x^2 + 16x^2 + 9x^2 = 10309$$

$$61x^2 = 10309$$

$$x^2 = 169$$
$$x = \pm 13$$

$6x = \pm 78$; $4x = \pm 52$ und $3x = \pm 39$. Die drei gesuchten Zahlen sind also: ± 78, ± 52 und ± 39.

Aufgabe 36. Jemand kauft eine gewisse Anzahl kg Salz, 4 mal soviel Zucker und 8 mal soviel Kaffee und bezahlt für jedes kg der drei Waren so viel mal 40 Pfg. als es kg von der betreffenden Ware sind. Zusammen bezahlt er 32 Mk. 40 Pfg. Wieviel kg Kaffee hat er gekauft?

Auflösung. Angenommen er habe x kg Kaffee gekauft, dann waren es $\frac{x}{2}$ kg Zucker und $\frac{x}{8}$ Salz. Da er für jedes Kilogramm Ware soviel mal 40 Pfg bezahlt, als es Kilogramme von der betreffenden Ware sind, so zahlt er für 1 kg Kaffee $x \cdot 40$ Pfg. und für x kg Kaffee $x^2 \cdot 40$ Pfg. Zusammen zahlt er: $x^2 \cdot 40$ Pfg $+ \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot 40$ Pfg. $+ \left(\frac{x}{8}\right)^2 \cdot 40$ Pfennig. Diese Summe beträgt laut Aufgabe 3240 Pfg. Also:

$$4 \cdot x^2 + \frac{4x^2}{4} + \frac{4x^2}{64} = 324$$
$$4x^2 + x^2 + \frac{x^2}{16} = 324$$
$$\frac{81}{16}x^2 = 324$$
$$x^2 = \frac{324 \cdot 16}{81} = 4 \cdot 16 = 64$$
$$x = \pm 8.$$

Er kaufte also 8 kg Kaffee; die negative Lösung hat für diese Aufgabe keine Bedeutung.

Aufgabe 37. Ein rechtwinkliger Garten hat zur Breite 37 m, zur Länge 259 m. Die Breite wird um eine gewisse Anzahl Meter vermehrt und die Länge um das Siebenfache der Anzahl vermindert; hierdurch vermindert sich der Inhalt um 63 Quadratmeter. Wie groß ist die Anzahl der Meter, um welche die Breite vermehrt wird?

Auflösung. Angenommen die Breite werde um x Meter verlängert, dann wird die Länge um 7x Meter vermindert. Die Breite beträgt dann $(37 + x)$ Meter, die Länge $(259 - 7x)$ Meter und der Inhalt dieses neuen Rechteckes ist:

$$(37 + x)(259 - 7x) \text{ qm}.$$

Nach dem Text soll dieser Inhalt 63 qm kleiner sein, als der des ursprünglichen Rechteckes, also ist:

$$(37 + x)(259 - 7x) = 37 \cdot 259 - 63,$$

dies ausmultipliziert, gibt, da $259 = 7 \cdot 37$:

$$7 \cdot 37 \cdot 37 - 7 \cdot 37x + 37 \cdot 7x - 7x^2 = 7 \cdot 37 \cdot 37 - 63.$$

Nun heben sich das erste Glied links und das erste rechts, ferner das zweite und dritte Glied links gegenseitig auf und es bleibt:

$$-7x^2 = -63 \text{ oder:}$$

$$7x^2 = 63$$

$$x = \pm 3.$$

Die Breite wird also um 3 Meter verlängert, die Länge um 21 Meter verkürzt. Die negative Wurzel bezeichnet, daß man zu demselben Ergebnis kommt, wenn man die Breite um 3 Meter verkürzt und die Länge um 21 Meter verlängert.

Aufgabe 38. Mit einer Schnur von einer bestimmten Länge kann ich ein Quadrat umspannen; verkürze ich die Schnur um 8 Meter, so kann ich mit derselben ein Quadrat umspannen. welches $\frac{16}{25}$ des ersten beträgt. Wie lang ist die Schnur, welche das erste Quadrat umspannt?

Auflösung. Angenommen die Schnur sei x Meter lang, Die Seite des ersten umspannten Quadrats ist dann $\frac{x}{4}$ Meter die des zweiten $\frac{1}{4}(x - 8)$ Meter. Der Inhalt des ersten Quadrates ist also $\frac{x^2}{16}$, der des zweiten $\frac{1}{16}(x - 8)^2$ qm. Nach der Aufgabe soll das zweite $\frac{16}{25}$ vom ersten sein, also:

$$\frac{1}{16}(x - 8)^2 = \frac{16}{25} \cdot \frac{x^2}{16}$$

$$25(x - 8)^2 = 16x^2$$

$$25x^2 - 400x + 64 \cdot 25 - 16x^2 = 0$$

$$9x^2 - 400x + 1600 = 0$$

$$4 = \frac{400 \pm \sqrt{160000 - 36 + 600}}{18}$$

$$x = \frac{400 \pm \sqrt{102400}}{18}$$

$$x = \frac{400 \pm 320}{18}$$

$$x_1 = 40$$
$$x_2 = \frac{40}{9}.$$

Die Schnur ist also 40 Meter lang, der zweite Wert $4\frac{4}{9}$ ist für die Aufgabe unbrauchbar, denn eine Schnur von $4\frac{4}{9}$ Meter kann man nicht um 8 Meter verkürzen.

Aufgabe 39. Jemand kauft 133 kg einer Ware und verkauft sie mit einem gewissen Prozent Nutzen. Für das eingenommene Geld kauft er von einer zweiten Ware und verkauft diese mit demselben Nutzen wie die erste Ware. Hierdurch ist er imstande, mit allem eingenommenen Geld von einer dritten Ware, welche 40 Prozent teurer ist als die erste 168 kg zu kaufen Mit wieviel Prozent Nutzen verkauft er die Ware?

Auflösung. Angenommen er verkaufe mit x Prozent Nutzen. Die Verkaufssumme der 133 kg ist dann das $133\,(1 + 0{,}01 \cdot x)$ fache von dem, was ein kg kostet, denn mit x Prozent Nutzen verkaufen, heißt statt: 100 ₰ — (100 + x) ₰ einnehmen,

oder statt: 1 ₰ $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ ₰ einnehmen.

Von der zweiten Ware löst er also das $133\,(1 + 0{,}01x)^2$ fache von dem, was ein kg kostet. Die dritte Ware steht 14 Prozent höher im Preise, das heißt

für 100 ₰ hat er hier 114 zu zahlen und
für 1 ₰ hat er hier 1,14.

Die dritte Ware kostet also pro kg das 1,14 fache von dem, was das kg der ersten und zweiten kostet; der ganze Einkauf kostet also das $168 \cdot 1{,}14$ fache von dem, was 1 kg der ersten Ware kostet. Die Summe aber soll nach dem Text gleich der Einnahme von der zweiten Ware sein, also:

$$133\,(1 + 0{,}01x)^2 = 168 \cdot 1{,}14$$
$$(1 + 0{,}01\,x)^2 = \frac{168 \cdot 1{,}14}{133}$$
$$(1 + 0{,}01\,x)^2 = 1{,}44 = (1{,}2)^2$$
$$1 + 0{,}01\,x = \pm 1{,}2$$
$$0{,}01\,x = 0{,}2$$
$$x_1 = 20$$
$$0{,}01\,x = -1{,}2 - 1$$
$$x = -220.$$

Er verkaufte also mit 20 Prozent Nutzen; die zweite Lösung hat keine Bedeutung, da er ja mit Nutzen, nicht mit Verlust arbeitet.

Aufgabe 40. Köln, Aachen und Düsseldorf liegen in einem nahezu rechtwinkligen Dreieck, so daß Köln an der Spitze des rechten Winkels liegt. Die Entfernungen von Aachen nach Düsseldorf und von Aachen nach Köln stehen in dem Verhältnisse 19:17 und die Entfernung von Köln nach Düsseldorf beträgt $31\frac{7}{8}$ km. Wieviel km beträgt die Entfernung zwischen Aachen und Köln und die zwischen Aachen und Düsseldorf.

Auflösung. Es sei die Entfernung von Aachen nach Köln x km, dann ist die von Aachen nach Düsseldorf $\frac{19}{17}$ x km. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist dann:

$$x^2 + \left(31\frac{7}{8}\right)^2 = \left(\frac{19}{17}x\right)^2$$

$$x^2 - \frac{361}{289}x^2 = -\frac{255 \cdot 255}{8 \cdot 8}$$

$$\frac{72}{289}x^2 = \frac{255 \cdot 255}{8 \cdot 8}$$

$$x^2 = \frac{255 \cdot 255 \cdot 289}{8 \cdot 8 \cdot 72}$$

$$x^2 = \frac{85^2 \cdot 17^2}{8^2 \cdot 8}$$

$$x = \pm \frac{85 \cdot 17}{16} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x = \pm \frac{85 \cdot 17}{3 \cdot 16}\sqrt{2}$$

$$x = \pm\, 45{,}15625 \cdot 1{,}4142^2$$

$$x_1 = 63{,}86054$$

$$\frac{19}{17}x_1 = 71{,}37355.$$

Die Entfernung von Aachen nach Köln beträgt rund also 63 km 860 m, und die von Achen nach Düsseldorf 71 km 373 m. (Neg. Wurzel keinen Sinn).

b) Gemischt quadratische Gleichungen.

Aufgabe 41. Vermehrt man den ersten Faktor des Produkts 6·52 um eine gewisse Zahl und vermindert man den zweiten Faktor um dieselbe Zahl, so erhält man als Produkt der beiden neuen Faktoren das 35 fache der Zahl, um welche der erste Faktor vermehrt wurde. Wie heißt die Zahl?

Auflösung. Nehmen wir an, die Zahl sei x. Das verlangte Produkt ist dann $(6 + x)(52 - x)$. Nach Aufgabe soll dieses Produkt das 35fache von x betragen, also:

$$(6 + x)(52 - x) = 35x$$

$$312 - 6x + 52x - x^2 - 35x = 0$$

$$-x^2 + 11x + 312 = 0$$

$$x^2 - 11x - 312 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}(11 \pm \sqrt{11^2 + 4 \cdot 312})$$

$$x = \frac{1}{2}(11 \pm 37)$$

$$x_1 = 24 \text{ und } x_2 = -13.$$

Die Zahl ist also 24 oder — 13.

Aufgabe 42. Zur Beschaffung einer Summe von 336 Mark sollen die Mitglieder einer Gesellschaft gleichmäßig beitragen. Eine gleiche Summe mußte die Gesellschaft schon füher aufbringen. Weil aber damals 3 Mitglieder weniger da waren, so betrug der Beitrag eines jeden 2 Mark mehr als jetzt. Wieviel Mitglieder zählt die Gesellschaft?

Auflösung. Angenommen die Gesellschaft zähle x Mitglieder. Der Beitrag eines Mitgliedes ist dann $\frac{336}{x}$ Mk. Früher waren es $(x - 3)$ Mitglieder, dort war also der Beitrag eines Mitgliedes $\frac{336}{x-3}$ Mark. Nach dem Text soll aber der damalige Beitrag eines Mitgliedes 2 Mark mehr betragen haben, als der jetzige, es muß also die Gleichung bestehen:

$$\frac{336}{x - 3} = \frac{336}{x} + 2$$

$$336x = 336(x - 3) + 2x(x - 3)$$

$$336x\ 336x + 1008 - 2x^2 + 6x = 0$$

$$2x^2 - 6x - 1008 = 0$$

$$x^2 - 3x - 504 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{9 + 2016})$$

$$x = \frac{1}{2}(3 \pm 45)$$

$$x_1 = 24.$$

Die Gesellschaft hat also 24 Mitglieder. Die negative Wurzel hat hier keinen Sinn.

Aufgabe 43. Die Vorderräder eines Wagens machen auf einer Strecke von 120 m 6 Umläufe mehr als die Hinterräder. Vergrößert man den Umfang eines jeden Rades um 1 m, so macht ein Vorderrad auf derselben Strecke nur noch 4 Umläufe mehr als ein Hinterrad. Welchen Umfang hat ein Vorderrad, welchen ein Hinterrad?

Auflösung. Angenommen die Peripherie eines Vorderrades betrage x Meter. Ein Vorderrad macht auf 120 Meter dann $\frac{120}{x}$ Umläufe, ein Hinterrad $\frac{120}{x} - 6$. Die Umläufe verhalten sich umgekehrt wie die Peripherien, es ist also die Peripherie eines Hinderrades aus der Proportion:

$\frac{120}{x} : \frac{120 - 6x}{x} = u : x$ zu bestimmen. Man erhält:

$$u = \frac{120x}{120 - 6x}.$$

Vermehrt man den Umfang jedes Rades um 1 Meter, so ist die Peripherie eines Vorderrades $(x + 1)$ Meter und die eines Hinterrades

$$\frac{120x}{120 - 6x} + 1.$$

Auf 120 Meter macht dann ein Vorderrad

$$\frac{120}{x + 1} \text{ Umläufe, ein Hinterrad}$$

$$\frac{120}{\frac{120x}{120 - 6x} + 1} = \frac{120(120 - 6x)}{114x + 120}$$

Umläufe. Nach der Aufgabe aber soll die Anzahl der Umläufe des Vorderrades um 4 größer sein als die des Hinterrades, also besteht die Gleichung:

$$\frac{120}{x + 1} = \frac{120(120 - 6x)}{114x + 120} + 4$$

$$120(114x + 120) = 120\,(120 - 6x)\,(x + 1) + 4\,(x + 1)\,(114x + 120).$$

$$13680x + 14400 = 14440x - 720x^2 + 14400 - 720x + 456x^2 + 480x + 456x + 480$$

$$264x^2 - 936x - 480 = 0 \text{ (kürzen mit 24!)}$$

$$11x^2 - 39x - 20 = 0$$

$$x = \frac{39 \pm \sqrt{39^2 + 80 \cdot 11}}{22} = \frac{39 \pm 49}{22}$$

$x_1 = 88 : 22 = + 4.$

Ein Vorderrad hat also einen Umfang von 4 Meter, ein Hinterrad also:

$$\frac{120 \cdot 4}{120 - 24} = 480 : 96 = 5 \text{ Meter.}$$

Die negative Wurzel hat hier keinen Sinn.

Aufgabe 44. Jemand hat einem Kapitalisten nach 7 Monaten 8800 Mark und nach einem Jahre 5940 Mark zurückzuzahlen. Nach wieviel Monaten kann er dem Kapitalisten die ganze Summe von 14740 Mark zurückzahlen, wenn für die Summe, die er später zahlt, 5 Prozent pro Jahr berechnet werden und für die Summe, die er früher zahlt, ein Rabat von 5 Prozent auf Hundert für das Jahr in Abzug kommt?

Auflösung. Angenommen nach x Monaten könne er dem Kapitalisten die ganze Summe von 14740 Mark zurückzahlen, so zwar, daß Zins und Rabatt einander aufheben. Die erste Summe wird dann (x — 7) Monate zu spät und die zweite 12 — x Monate zu früh bezahlt. Bei 5 Prozent tragen 8800 Mark in (x — 7) Monaten einen Zins von:

$$8800 \cdot \frac{5(x-7)}{1200} \text{ Mark.}$$

Ein Jahresrabatt von 5 Prozent bedeutet für (12 — x) Monate einen solchen von $\frac{5}{12} \cdot (12 - x)$ Prozent.

Von $\left(100 + \frac{5}{12} \cdot (12-x)\right)$ ℳ bekommt er also $\frac{5}{12} \cdot (12-x)$ ℳ

nachgelassen, von $\frac{1}{12}$ ℳ " " " $\frac{\frac{5}{12} \cdot (12-x)}{1200+5(12-x)}$ ℳ

" 1 ℳ " " " $\frac{5(12-x)}{1200+5(12-x)}$ ℳ

" 5940 ℳ " " " $\frac{5940 \cdot 5 \cdot (12-x)}{1200+5(12-x)}$ ℳ

Da Zins und Rabatt einander gleich sein sollen

$$8800 \cdot \frac{5(x-7)}{1200} = \frac{5940 \cdot 5 \cdot (12-x)}{1200 + 5(12-x)}.$$

Dies gibt ausgerechnet:

$$x^2 - 421x + 3708 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(+ 421 \pm \sqrt{421^2 - 4 \cdot 3708}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(421 \pm \sqrt{177241 - 14832}\right)$$

$$x = \frac{1}{2} (421 \pm 403)$$

$$x_1 = 412 \text{ und } x_2 = 9.$$

Der erste Wurzelwert ist unbrauchbar. Er bezahlte den Kapitalisten nach 9 Monaten. —

Aufgabe 45. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden, durch die eine 2 Stunden früher als durch die andere. Durch beide Röhren zusammen wird der Behälter in $1\frac{7}{8}$ Stunden gefüllt. In wieviel Stunden wird der Behälter voll werden, wenn die Röhren einzeln fließen?

Auflösung. Angenommen der Behälter werde von der ersten Röhre in x Stunden gefüllt, von der zweiten also in $(x + 2)$ Stunden. Die erste Röhre füllt dann in einer Stunde $\frac{1}{x}$ und in $1\frac{7}{8} = \frac{15}{8}$ Stunden $\frac{15}{8x}$ des Behälters; die zweite Röhre füllt in dieser Zeit $\frac{15}{8(x+2)}$ des Behälters. Nach den Bestimmungen der Aufgabe muß nun die Gleichung bestehen:

$$\frac{15}{8x} + \frac{15}{8(x+2)} = 1$$

$$120(x + 2) + 120x = 64x(x + 2)$$

$$120x + 240 + 120x - 64x^2 - 128x = 0$$

$$64x^2 - 112x - 240 = 0$$

$$4x^2 - 7x - 15 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 240}}{8}$$

$$x = \frac{7 \pm 17}{8}$$

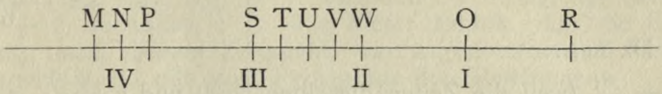
$$x_1 = 3.$$

Der Behälter kann also in 3 Stunden durch die erste Röhre allein gefüllt werden, durch die zweite also in 5 Stunden.

Aufgabe 46. A und B gehen mit derselben Geschwindigkeit von einem Orte M nach einem Orte R. A reist früher ab als B. Beim dritten Meilensteine vor R holt A eine vor ihm hertreibende Gänseherde ein, welche jede Stunde $^1/_6$ Meile zurücklegt; $^1/_2$ Stunde später stößt er auf eine Herde Schafe, welche jede Stunde $^1/_5$ Meile zurücklegt. B erreicht die Gänse $2^1/_2$ Meilen vor R, die Schafe 10 Minuten früher, als er den zweiten Meilenstein vor R erreicht. Es ist die Frage, mit welcher Geschwindigkeit die beiden Fußgänger A und B die Reise zurücklegen?

Nehmen wir an, beide Fußgänger legen in der Stunde x Meilen zurück.

Der Fußgänger A treffe nun die Gänse in S, die Schafe in T
„ „ B „ „ „ „ „ U, „ „ „ V



O, W, S und N seien die vier letzten Meilensteine vor R. N sei die Stelle, an der sich B befindet, wenn A in S ist, P der Ort für B, wenn A in T ist. Nach den Bestimmungen der Aufgabe ist SR = 3 Meilen, UR = 2,5 Meilen, also SU = $^1/_2$ Meile. Diese Strecke legen die Gänse bei der angegebenen Geschwindigkeit in 3 Stunden zurück. Nun geht B in derselben Zeit von N nach U, wie die Gänse von S nach U. B. braucht also zu diesem Weg 3 Stunden. In 3 Stunden legt er 3x Meilen zurück, also ist:

$$NU = 3x \text{ Meilen, also}$$

$$NS = NU - SU = (3x - {}^1/_2) \text{ Meilen.}$$

Ferner geht nun B in derselben Zeit von P nach V, wie die Schafe von T nach V. Nun ist die Zeit gleich: „Weg durch Geschwindigkeit.“ Bezeichnen wir P V mit s und T V mit s_1, ferner die Geschwindigkeit der Schafe mit v, so ist:

$$t = \frac{s}{x} \text{ und auch} : t = \frac{s_1}{v}$$

v ist nach Aufgabe $\frac{1}{5}$. Zur Bestimmung von s und s_1 haben wir:

$V R = 2 + \frac{1}{6} x$, denn B trifft die Schafe 10 Minuten $= \frac{1}{6}$ Stunde früher, als er den zweiten Meilenstein von R erreicht, also in einer Entfernung von $\left(2 + \frac{x}{6}\right)$ Meilen von R. Ferner muß N P nnd S T einander gleich und zwar $= \frac{x}{2}$ sein, denn bei gleichen Geschwindigkeiten legen die Wanderer in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück, und da A von S nach T eine halbe Stunde braucht, deshalb ist $N P = S P = \frac{x}{2}$ Meilen. Also ist:

$$s_1 = T V = S R - S T - V R = 3 - \frac{x}{2} - \left(2 + \frac{x}{6}\right)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} x \text{ und:}$$

$$s = PV = PT + TV \text{ oder da: } ST = NP:$$

$$PV = TS + TV = 3x - \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{3}x = \frac{7x}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{14x+3}{6}$$

Da nun:

$\frac{s}{x} = \frac{s_1}{v}$ (weil die Zeiten dieselben sind) und $v = \frac{1}{5}$, so erhalten wir:

$\frac{14x+3}{6} : x = \left(1 - \frac{2}{3}x\right) : \frac{1}{5}$, also: (Produkt der inneren Glieder gleich dem der äußern):

$$x\left(1 - \frac{2}{3}x\right) = \frac{14x+3}{30}$$

$$30x\left(1 - \frac{2}{3}x\right) = 14x + 3$$

$$30x - 20x^2 - 14x - 3 = 0,$$

mit (— 1) multipliciert:

$$20x^2 - 16x + 3 = 0$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{3}{20} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{16}{25} - \frac{12}{20}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{64-60}{100}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5} \pm \frac{2}{10}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ und } x_2 = \frac{3}{10}.$$

Jeder der beiden Reisenden legt also in einer Stunde entweder $^1/_2$ oder $^3/_{10}$ Meilen zurück.

Aufgabe 47. Zwei Körper bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf zweien, sich unter einem rechten Winkel durchschneidenden geraden Linien. Der eine legt jede Sekunde c Meter zurück und erreicht den Durchschnittspunkt beider Linien t Sekunden später als der andere; der andere macht jede Sekunde c′ Meter. Wieviel Sekunden nach der Zeit, wo der erste Körper den Durchschnittspunkt erreicht, wird die gegenseitige Entfernung der beiden d Meter betragen?

Auflösung. Angenommen x Sekunden nach dem Durchgang des ersten Körpers durch den Scheitel des rechten Winkels sei die Entfernung der beiden Körper d Meter. Der zweite ist dann vor (x + t) Sekunden durch den Scheitel gegangen. Der erste legt in x Sekunden cx Meter, der zweite in (x + t) Secunden c' (x + t) Meter zurück. Da die Entfernung nach diesem Zeitpunkt, wie angenommen, d Meter betragen soll, so gilt nach Pythagoras die Gleichung:

$$c^2x^2 + c'^2 (x + t)^2 = d^2;$$

$$c^2 x^2 + c'^2 (x^2 + 2tx + t^2) - d^2 = 0$$

$$(c^2 + c'^2) x^2 + 2c'^2tx + c'^2 t^2 - d^2 = 0, \text{ also:}$$

$$x = \frac{-2c'^2t \pm \sqrt{4'^4t^2 - 4(c^2 \quad c'^2)\, c'^2t^2 - d^2)}}{2(c^2 + c'^2)}$$

Unter der Wurzel 4 vor eine Klammer, hieraus die Wurzel und mit 2 gekürzt:

$$x = \frac{-c'^2t \pm \sqrt{c'^4t^2 - (c^2 + c'^2)(c'^2t^2 - d^2)}}{c^2 + c'^2}$$

Den zweiten Faktor des zweiten Gliedes unter der Wurzel mit (— 1) multipliziert:

$$x = \frac{-c'^2t \pm \sqrt{c'^4t + (c^2 + c'^2)\, d^2 - c'^2t^2)}}{c^2 + c'^2.}$$

Aufgabe 48. Zwei Körper bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf zweien, sich unter einem rechten Winkel schneidenden Geraden nach dem Durchschnittspunkte hin. Ihre Entfernungen von dem Durchschnittspunkte sind a und b und ihre Geschwindigkeiten sind c resp. c'. Wann wird die gegenseitige Entfernung beider Körper d sein? Welche Beziehung muß zwischen den Größen a, b, c und c' stattfinden, wenn die Lösung der Aufgabe möglich sein soll?

Auflösung. Angenommen nach x Sekunden sei die Entfernung der beiden Körper d. In x Sekunden legt der erste cx Längeneinheiten, der zweite c'x L E zurück. Da sich beide gegen den Scheitel hin bewegen und ihre ursprünglichen Entfernungen von demselben a resp. b sind, so sind sie nach x Sekunden vom Scheitel des rechten Winkels (a — cx) resp. (b — c'x) Längeneinheiten entfernt. Ihre Entfernung ist aber die Hypotenuse zu diesen beiden Katheten, es besteht daher die Gleichung (Pythagoras!)

$$(a - cx)^2 + (b - c'x^2 = d^2$$

$$a^2 - 2acx + e^2x^2 + b^2 - 2bc'x + c'^2x^2 - d^2 = 0$$

$$(c^2 + c'^2)\, x^2 - (2ac + 2bc')\, x + a^2 + b^2 - d^2 = 0$$

$$x = \frac{2(ac + bc') \pm \sqrt{4(ac + bc')^2 - 4(c^2 + c'^2)a^2 + b^2 - d)}}{2(c^2 + c'^2)}$$

Die 4 aus der Wurzel herausgenommen und mit 2 den Bruch gekürzt:

$$x = \frac{ac + bc' \pm \sqrt{(ac + bc')^2 - (c^2 + c'^2)(a^2 + b^2 - d^2)}}{c^2 + c'^2.}$$

Rechnen wir nun den Radikanden aus Wir erhalten: $(ac + bc')^2 - (c^2 + c'^2)(a^2 + b^2 - d^2) = a^2c^2 + b^2c'^2 + 2abcc' - a^2c^2 - b^2c^2 + c^2d^2 - a^2c'^2 - b^2c'^2 + c'^2d^2 = 2abcc' + c^2d^2 - a^2c'^2 - b^2c^2 + c'^2d^2 = -(ac' - bc)^2 + d^2(c^2 + c'^2$ oder umgestellt: $= d^2(c^2 + c'^2) - ac' - bc)^2$

Diesen Wert eingeführt, gibt:

$$x = \frac{ac + bc' \pm \sqrt{d^2(c^2 + c'^2) - (ac' - bc)^2}}{c^2 + c'^2.}$$

Sollen die Lösungen reell sein, so muß $d^2(c^2 + c'^2)$ größer sein oder höchstens gleich der Produktensumme: $ac' + bc$. Im übrigen siehe die Erklärung in Heis. (§ 72).

Aufgabe 48. Welche Beziehung muß zwischen den Größen a b c und c' der vorigen Aufgabe bestehen, wenn die beiden sich bewegenden Körper im Durchschnittspunkte der beiden Geraden zusammentreffen sollen?

Auflösung. Da die beiden Körper im Scheitel zusammentreffen sollen, so ist ihre Entfernung d dort gleich 0. Da sie ferner gleichzeitig sich zu bewegen beginnen und ihre Bewegung ja eine gleichförmige ist, so müssen sich ihre Geschwindigkeiten wie die durchlaufenen Wege verhalten. Also:

$$c : c' = a : b \text{ oder}$$

$$ac' = bc \text{ oder: } ac' - bc = 0,$$

was sich für $d = 0$ auch aus der Determination zur vorigen Aufgabe ergibt. Für die Wurzel x erhalten wir:

$$x = \frac{ac + bc'}{c^2 + c'^2}.$$

Ersetzen wir hierin nun c' durch seinen Wert aus obiger Proportion, so erhalten wir:

$$c' = \frac{bc}{a}, \text{ also:}$$

$$bc' = \frac{b^2c}{a} \text{ und:}$$

$$c'^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2}, \text{ also:}$$

$$x = \frac{ac + \frac{b^2 c}{a}}{c^2 + \frac{b^2 c^2}{a^2}}$$

oder Zähler und Nenner je auf einen Nenner gebracht:

$$x = \frac{\frac{a^2 c + b^2 c}{a}}{\frac{a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2}} = \frac{a(a^2 c + b^2 c)}{a^2 c^2 + b^2 c^2}$$

$$x = \frac{ac(a^2 + b^2)}{c^2(a^2 + b^2)} = \frac{a}{c}.$$

Ersetzen wir auf gleiche Weise c durch c', so kommt als Lösung:

$$x = \frac{b}{c'}.$$

Aufgabe 50. Zwei Körper bewegen sich gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c und c' auf zwei sich senkrecht schneidenden Geraden nach dem Durchschnittspunkte und sind von letzteren um a resp. b entfernt. Nach wieviel Zeiteinheiten werden sie die kürzeste Entfernung von einander haben?

Auflösung. In Aufgabe 47 haben wir gesehen, daß diese Bewegungsaufgabe nur solange reelle Lösungen hat, d. h. mit anderen Worten überhaupt lösbar ist, als $d^2 (c^2 + c'^2)$ größer oder höchstens gleich $(ac' - bc)^2$ ist. Die Produktendifferenz $ac' - bc$ gibt also den kleinsten Wert an, den $d \sqrt{(c^2 + c'^2)}$ annehmen kann. Daraus ergibt sich als Minimum für die Entfernung:

$$d^2_{min} = \frac{(ac' - bc)^2}{c^2 + c'^2}$$

$$d_{min} = \frac{ac' - bc}{\sqrt{c^2 + c'^2}} \text{ oder } = \frac{bc - ac'}{\sqrt{c^2 + c'^2}}$$

je nachdem eben $ac' \gtrless be$.

Für die Zeit x erhält man, da der Wurzelausdruck gleich Null wird:

$$x = \frac{ac - bc'}{c^2 + c'^2}.$$

Dies ist aber offenbar gleich der halben Summe der Werte x_1 und x^2 in Aufgabe 47, denn bei der Summierung hebt sich der in x_1 und x_2 mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Wurzelausdruck heraus und resultiert:

$$\frac{2(ac - bc'}{c^2 + c'^2}.$$

Es ist also:

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Nun ist aber sowohl in

$$x_1 = \frac{ac + bc' + \sqrt{d^2(c^2 + c'^2) - (ac' - bc)^2}}{c^2 + c'^2}$$

wie in $x_2 = \dfrac{ac + bc' - \sqrt{d^2(c^2 + c'^2) - (ac' - bc)^2}}{c^2 + c'^2}$

Zeiteinheiten die Entfernung beider Körper gleich d. Wir haben also das Ergebnis: „Das Minimum der gegenseitigen Entfernungen der beiden Körper liegt in Mitte der Zeiten, bei welchen die gegenseitigen Entfernungen einander gleich werden."

Aufgabe 51. Zwei Kreise, der erste mit einem Radius von 36 Centimeter, der zweite mit einem Radius von 16 Centimeter bewegen sich gleichförmig mit ihren Mittelpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels nach dem Scheitelpunkt derselben. Der eine legt jede Sekunde 2 Centimeter zurück und ist 38 Centimeter vom Scheitelpunkt entfernt, der zweite macht jede Sekunde 18 Centimeter und ist 210 Centimeter vom Scheitel entfernt. Wann werden beide Kreise einander berühren und in welcher Entfernung befinden sich die Mittelpunkte, wenn diese einander am nächsten sind?

Auflösung. Wir haben hier zweierlei Berührungen zu unterscheiden, die Berührung von außen und die von innen. Behandeln wir zuerst die äußere.

Nehmen wir an, beide Kreise berühren sich nach x Sekunden von außen. Der erste Kreis legt in x Sekunden 2x cm zurück, sein Mittelpunkt ist also nach dieser Zeit vom Scheitel $(38 - 2x)$ cm entfernt. Der zweite Kreis, resp. dessen Mittelpunkt legt in x Sekunden 18 cm zurück und hat infolgedessen nach dieser Zeit vom Scheitel eine Entfernung von $(210 - 18x)$ cm. Da nach unserer Annahme sich beide Kreise nach x Sekunden von außen berühren sollen, so muß nach einem Satze der Planimetrie die Entfernung der beiden Mittelpunkte gleich der Summe der beiden Radien, also $36 + 16 = 52$ cm sei. Die Bewegungsrichtungen sind aber senkrecht zu einander, also muß nach dem pythagor. Lehrsatz:

$$(38 - 2x)^2 + (210 - 18x)^2 = 52^2.$$

$$38^2 - 152x + 4x^2 + 210^2 - 36 \cdot 210 \cdot x + 324x^2 - 52x^2 = 0$$
$$1444 - 152x + 4x^2 + 44100 - 7560x + 324x^2 - 2704 = 0$$
$$328x^2 - 1712x + 42840 = 0,$$

oder durch 8 vereinfacht:

$$41x^2 - 964x + 5355 = 0, \text{ also:}$$

$$x = \frac{964 \pm \sqrt{964^2 - 4 \cdot 41 \cdot 5355}}{82}$$

$$x = \frac{964 \pm \sqrt{929296 - 878229}}{82} = \frac{964 \pm \sqrt{51076}}{82}$$

$$x = \frac{964 \pm 226}{82}$$

$$x_1 = \frac{964 + 226}{82} = \frac{1190}{82} = 14\,\frac{21}{41}$$

$$x_2 = \frac{964 - 226}{82} = \frac{738}{82} = 9.$$

Die erste äußere Berührung findet also nach 9, die zweite nach $14\,\frac{31}{41}$ Sekunden statt.

Da bei der inneren Berührung die Mittelpunkte eine Entfernung haben, die gleich der Differenz der Radien ist, so gilt für diesen Fall die Gleichung:

$$(38 - 2x)^2 + (210 - 18x)^2 = 20^2$$
$$328x^2 - 7712x + 45144 = 0,$$

oder wieder mit 8 gekürzt:

$$41x^2 - 964x + 5643 = 0$$

$$x = \frac{964 \pm \sqrt{964^2 - 164 \cdot 5643}}{82}$$

$$x = \frac{964 \pm \sqrt{929296 - 925452}}{82}$$

$$x = \frac{964 \pm \sqrt{3844}}{82} = \frac{964 \pm 62}{82}$$

$$x_1 = \frac{964 + 62}{82} = 12\,\frac{21}{41}$$

$$x_2 = \frac{964 - 62}{82} = 11.$$

Die erste Berührung von innen findet also nach 11, die zweite nach $12\,\frac{21}{41}$ Sekunden statt. Das Minimum der Entfernungen tritt nach den Entwicklungen in der vorigen Aufgabe in einer Zeit:

$$t = \frac{1}{2}\left(9 + 14\frac{21}{41}\right) \text{ oder } t = \frac{1}{2}\left(11 + 12\frac{21}{41}\right)$$

$$t = 11\frac{31}{41} \text{ Sekunden ein.}$$

Die Entfernung selbst beträgt nach Aufgabe 50:

$$d_{\min} = \frac{38 \cdot 18 - 2 \cdot 210}{\sqrt{2^2 + 18^2}} = \frac{684 - 420}{\sqrt{4 + 324}} = \frac{264}{18{,}11}$$

$$d_{\min} = 14{,}5769 \text{ cm.}$$

Aufgabe 52. Der Mittelpunkt eines festen Kreises, dessen Radius 1009Centimeter beträgt, befindet sich auf einer horizontalen Geraden; in derselben Ebene, gerade über dem Mittelpunkt, in vertikaler Richtung in einer Entfernung von 50 Centimeter befindet sich der Mittelpunkt eines zweiten beweglichen Kreises, der einen Radius von 945 Centimeter hat und der nach vertikaler Richtung abwärts jede Sekunde sich 180 cm bewegt, nach horizontaler Richtung aber, also parallel mit der festen Linie, jede Sekunde 2000 Centimeter fortschreitet. Nach wieviel Sekunden werden beide Kreise einander von außen und nach wieviel Sekunden von innen berühren und nach wieviel Sekunden werden sie einander am nächsten sein?

Auflösung. Nehmen wir an, eine äußere Berührung findet nach x Sekunden statt. In x Sekunden legt der Mittelpunkt des beweglichen Kreises in vertikaler Richtung nach abwärts $180x$ cm zurück und in horizontaler Richtung $2000x$ cm. Der Mittelpunkt des beweglichen Kreises hat also nach dieser Zeit von dem horizontalen Durchmesser des festen Kreises eine Entfernung von $(50 - 180x)$ cm. Nach dieser Zeit steht aber der Mittelpunkt des beweglichen Kreises nicht mehr vertikal über dem des festen, sondern in einer horizontalen winkelrechten Entfernung von $2000x$ cm. Die Entfernung d der Mittelpunkte der beiden Kreise ist also die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem $2000x$ und $(50 - 180x)$ die beiden Katheten sind. Da aber nach unserer Annahme die beiden Kreise sich von außen berühren sollen, so muß diese Entfernung (Centrale) gleich der Summe der beiden Radien sein, also $= 1009 + 945 = 1954$ cm. Nach Pythagoras gilt demnach die Gleichung:

$$(50 - 180x)^2 + (2000x)^2 = 1954^2$$

$$2500 - 100 \cdot 180x + 180^2x^2 + 2000^2x^2 - 1954^2 = 0$$

$$32400x + 4\,000\,000x^2 - 18\,000x + 2500 - 3818116 = 0$$

$$4032400x^2 - 18000x - 3815616 = 0$$

oder mit 16 gekürzt:

$$252025x^2 - 1125x - 238476 = 0$$

$$x^2 = \frac{1125}{252025}x - \frac{238476}{252025} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1125}{252025} \pm \sqrt{\frac{1125^2}{252025^2} + \frac{4 \cdot 238476}{25\,2025}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1125}{252025} \pm \sqrt{\frac{1125^2 + 4 \cdot 238476 \cdot 252025}{252025^2}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1125}{252025} \pm \frac{1}{252025}\sqrt{1125^2 + 4 \cdot 252525 \cdot 238476}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1125}{252025} \pm \frac{1}{252025}\sqrt{1265625 + 240407655600}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\ \frac{1125}{25025} \pm \frac{490315{,}1\cdots}{252025}\Big)$$

$$x = 0{,}00223 \pm 0{,}97275)$$

$$x_1 = 0{,}9750 \text{ und } x_2 = -0{,}9705.$$

Eine äußere Berührung findet also nach 0,975 Sekunden statt und hat vor 0,9705 Sekunden stattgefunden.

Für die innere Berührung ist die Zentrale gleich der Differenz der beiden Radien; wir erhalten für diesen Fall daher die Gleichung:

$$(50 - 180x)^2 + (200x)^2 = 64^2$$

$$x^2 - \frac{180\,00}{4032400}x - \frac{4096 - 2500}{4032400}$$

$$x^2 - \frac{18000}{4032500}x - \frac{1596}{4032400} = 0$$

oder mit 8 gekürzt:

$$x^2 = \frac{2250}{504050} - \frac{197}{504050} = 0.$$

$$x = 0{,}00223 \pm 0{,}02000$$

$$x_3 = 0{,}0222;\ x_4 = -0{,}0178.$$

Die beiden Kreise berühren sich also nach 0,0222 Sekunden von innen und haben sich vor 0,0178 Sekunden von innen berührt.

Aufgabe 53. Aus einem mit 360 Liter Weingeist gefüllten Faß nehme ich eine bestimmte Menge heraus und ersetze das Fehlende durch Wasser. Von der gehörig vermischten Flüssigkeit nehme ich zum zweiten Male ebensoviel Liter heraus, wie zum ersten Male und noch 84 Liter dazu und fülle das Faß wieder mit Wasser. Nach der zweiten Mischung enthält das Faß ebensoviel Wasser wie Weingeist. Wieviel Liter wurden zum ersten Male herausgenommen?

Auflösung. Angenommen ich nehme das erste Mal x Liter heraus, so beträgt der Rest (360 — x(Liter. Fülle ich mit Wasser auf, so enthält ein Liter der Mischung $\frac{360 - x}{360}$ Liter reinen Weingeist. Das zweite Mal nehme ich (x + 84) Liter Mischung heraus, also:

$$\frac{(360 - x)}{360} \cdot (x + 84)$$

Liter reinen Weingeist. Im Faß verbleiben also:

$$\left(360 - x - \frac{(x + 84)(360 - x)}{360}\right)$$

Liter reinen Weingeist. Nach der Aufgabe aber soll die Hälfte des ursprünglichen Quantums reiner Weingeist im Faße sein, also muß die Gleichung bestehen:

$$360 - x - \frac{(x + 84)\ 360 - x)}{360} = 180.$$

$$360 - x - \frac{360\,x = x^2 + 84 \cdot 360 - 84\,x}{360} = 180$$

$$360 \quad - 360\,x - 360\,x + x^2 - 84 \cdot 360 + 84\,x - 180 \cdot 360 = 0$$

$$x^2 - 636\,x + 180 \cdot 360 - 84 \cdot 360 = 0$$

$$x^2 - 636\,x + 360\,(180 - 84) = 0$$

$$x^2 - 636\,x + 360 \cdot 96 = 0$$

$$x^2 - 636\,x + 34560 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(636 \pm \sqrt{636^2 - 4 \cdot 34560}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(636 \pm \sqrt{404496 - 138240}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(636 \pm \sqrt{266256}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(636 \pm 516\right) \text{ und hieraus:}$$

$$x_1 = 576 \text{ und } x_2 = 60.$$

Zum ersten Male wurden also 60 Liter herausgenommen. Die zweite Lösung ist unbrauchbar, denn ich kann von 360 Liter keine 576 herausnehmen.

Aufgabe 54. Ein von allen Seiten geschlossener, innen hohler, aus 9 Millimeter starkem Eisenblech verfertigter Würfel wird dadurch, daß er auf allen 6 Seiten mit 5 Millimeter dicken Bleiplatten belegt wird, noch einmal so schwer. Wenn man nun weiß, daß zwei gleich große aus Schmiedeeisen und Blei verfertigte Würfel dem Gewicht nach sich verhalten wie 7,8 : 11,4, wie läßt sich hieraus die Höhe des aus Eisenblech verfertigten Würfels berechnen?

Auflösung. Nehmen wir an, die Höhe des Eisenblechwürfels sei x mm, dann ist sein Volumen x^3 cmm. Der innere Hohlraum hat Kanten von $(x - 2 \cdot 9)$mm, also einen Inhalt von $(x - 18)^3$ cmm. Das Gesamtvolumen des Eisenbleches ist also $[x^3 - (x - 18)^3]$ cmm. Eine Kante des mit 5 mm dicken Bleiplatten belegten Würfels ist $(x + 10)$ mm, sein Inhalt also $(x + 10)^3$ cmm und das Volumen der Bleimasse: $[(x + 10)^3 - x^3]$ cmm. Wenn nun die Gewichte zweier gleicher Volumina sich verhalten wie 7,8 : 11,4, so verhalten sich die Volumina bei gleichem Gewicht wie 11, 4 : 7,8. Für unseren Fall, wo gleiche Gewichte vorhanden sind, weil das Gewicht durch die Bleiplatten verzweifacht wird, gilt also die Proportion:

$$[x^3 - (x - 18)^3] : [(x + 10)^3 - x^3] = 11{,}4 : 7{,}8 \text{ oder:}$$

$$7{,}8\,[x^3 - (x - 18)^3] = 11{,}4 \cdot [(x + 10)^3 - x^3]$$

$$7{,}8\,[x^3 - x^3 + 54\,x^2 - 3 \cdot 18^2 x + 18^3]$$

$$= 11{,}4\;[x^3 + 3x^2 \cdot 10 + 3\,x \cdot 10^2 + 10^3 - x^3]$$

$$7{,}8 \cdot [54x^2 - 3 \cdot 18 \cdot 2x + 18^3]$$

$$= 11{,}4\;]30\,x^2 + 300\,x + 1000]$$

$$13\;[54\,x^2 - 972\,x + 5832]$$

$$= 19\;[30\,x^2 + 300\,x + 1000]$$

$$702\,x^2 - 12636\,x + 75816 - 570\,x^2 - 5700\,x - 19000 = 0$$

$$132\,x^2 - 18336\,x + 56816 = 0$$

$$33\,x^2 - 4584\,x + 14204 = 0$$

$$x = \frac{4584 \pm \sqrt{4584^2 - 4 \cdot 33 \cdot 14204}}{66}$$

$$x = \frac{4584 \pm \sqrt{21023056 - 1874928}}{66}$$

$$x = \frac{4584 \pm 4375{,}8574}{66}$$

$$x_1 = 135{,}75 \text{ und } x_2 = 3{,}15.$$

Der zweite Wurzelwert ist unbrauchbar, weil das Eisenblech allein 9 mm stark ist.

Aufgabe 55. Welches ist die Pfeilhöhe eines Stichgewölbes, wenn die Spannweite desselben 9 m und der Radius des unteren Begrenzungskreises der Stirnfläche 11,7 m beträgt.

Auflösung. Bezeichnen wir die Spannweite mit s, die Pfeilhöhe mit p und den Radius mit r, so ist nach einem bekannten Satze der Kreislehre:

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = p(2\,r - p).$$

In unserer Aufgabe ist

$$s = 9,\ r = 117.$$

Die Größe p ist gesucht, also gleich x.

Wir haben also:

$$\frac{81}{4} = x\,(23{,}4 - x) = 23{,}4\,x - x^2, \text{ also}$$

$$x^2 - 23{,}4\,x + \frac{81}{4} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\,(23{,}4 \pm \sqrt{23{,}4^2 - 81}\,)$$

$$x = \frac{1}{2}\,(23{,}4 \pm 21{,}6)$$

$$x_1 = 22{,}5;\quad x_2 = 0{,}9.$$

Die für ein Stichgewölbe brauchbare Lösung ist

$$p = 0{,}9 \text{ m}.$$

Aufgabe 56. Zwei Punkte, deren Entfernung 250 Meter beträgt, sind durch eine kreisförmige Kurve vom Radius 450 Meter verbunden. Welches ist die Entfernung der Bogenmitte von der Verbindungslinie des Bogenanfangs mit Bogenende, oder mit anderen Worten, welches ist die Pfeilhöhe des Bogens?

Auflösung. Bezeichnen wir die gesuchte Pfeilhöhe mit d x, so ist nach einem bekannten Satze aus der Planimetrie

$$x\,(2 \cdot 450 - x) = \left(\frac{250}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 2 \cdot 450\,x + \frac{250^2}{4} = 0$$

$$4\,x^2 - 3600\,x + 62500 = 0$$

$$x = \frac{3600 \pm \sqrt{12960000 - 1000000}}{8}$$

welche Gleichung jetzt auszurechnen ist.

Aufgabe 57. Die Geschwindigkeit zweier Eisenbahnzüge soll so bestimmt werden, daß der eine zum Durchfahren von 100 km eine Stunde weniger braucht als der andere zum

Durchfahren von 150 km und daß dabei der erste stündlich 5 km weniger macht als der zweite. Wie lange brauchte jeder zum Durchlaufen seiner Strecke.

Auflösung. Angenommen der erste brauche zum Durchfahren seiner Strecke x Stunden, dann braucht der zweite $(x + 1)$ Stunden zu seiner Strecke. Der erste legt in einer Stunde also $\frac{100}{x}$ km, der zweite $\frac{150}{x+1}$ km zurück. Nach den Bestimmungen der Aufgabe muß nun aber die Beziehung bestehen:

$$\frac{100}{x} = \frac{150}{x+1} - 5$$

$$100\,(x + 1) = 150x - 5x\,(x + 1)$$

$$100x + 100 - 150x + 5x^2 + 5x = 0$$

$$5x^2 - 45x + 100 = 0$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(9 \pm \sqrt{81 - 80}\right)$$

$$x_1 = 5 \text{ und } x_2 = 4.$$

Der erste braucht zu seiner Strecke also entweder 5 oder 4 Stunden und der zweite zu seiner Strecke 6 oder 5 Stunden. Weitere Aufgaben siehe Kapitel IV.

Anhang.

Trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten.

Die trigonometrische Lösung quadratischer Gleichungen mit einer Unbekannten sei hier nur der Vollständigkeit halber kurz erwähnt. Einen praktischen Wert hat dieselbe keinen. Man kommt mit den beiden obigen Auflösungsformeln stets mindestens ebenso schnell zum Ziel.

Setzt man in der allgemeinen Form:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\sqrt{\frac{c}{a}} = r, \text{ also:}$$

$$ac = a^2 \cdot r^2,$$

so kann man für den Fall, daß c negativ ist:

$$b = 2ar \operatorname{ctg} \lambda \text{ setzen.}$$

Dann ist:

$$x = \frac{-2ar\,\mathrm{ctg}\,\lambda \pm \sqrt{4a^2r^2\,\mathrm{ctg}^2\lambda + 4a^2r^2}}{2a}$$

$$x = \frac{2ar(-\mathrm{ctg}\,\lambda \pm \sqrt{\mathrm{ctg}^2\lambda + 1})}{2a} = r(-\mathrm{ctg}\,\lambda \pm \sqrt{\mathrm{ctg}^2\lambda + 1})$$

$$x = r\left(-\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} \pm \sqrt{\frac{\cos^2\lambda}{\sin^2\lambda} + 1}\right)$$

$$x = r\left(\frac{-\cos\lambda \pm 1}{\sin\lambda}\right)$$

$$\boldsymbol{x_1 = r\,tg\,\frac{\lambda}{2}}$$

$$\boldsymbol{x_2 = -r\,ctg\,\frac{\lambda}{2}}$$

wobei also $\mathrm{tg}\,\lambda = \frac{2ar}{b}$ ist. Ist c positiv, so hat man die beiden möglichen Auflösungsformeln

$$\text{I.}\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und}$$

$$\text{II.}\quad x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Für I setzen wir:

$$b = \frac{2ar}{\sin\lambda},\ \text{also}$$

$$x = \frac{-\frac{2ar}{\sin\lambda} \pm \sqrt{\frac{4a^2r^2}{\sin^2\lambda} - 4a^2r^2}}{2a}$$

$$x = r\left(-\frac{1}{\sin\lambda} \pm \sqrt{\frac{2}{\sin^2\lambda} - 1}\right)$$

$$x = r \cdot \frac{-1 \pm \cos\lambda}{\sin\lambda}$$

$$\boldsymbol{x_1 = -r\,tg\,\frac{\lambda}{2}}$$

$$\boldsymbol{x_2 = -r\,ctg\,\frac{\lambda}{2}},\ \text{wobei also:}$$

$$\sin\lambda = \frac{2\,ar}{b}.$$

Für den Fall II. setzen wir: $b = 2ar \cdot \cos$ und wir erhalten:

$$x = \frac{-2\,a r \cos\lambda \pm i\sqrt{4a^2r^2 - 4a^2r^2\cos^2\lambda}}{2a}$$

$$x = r(-\cos\lambda \pm i\sin\lambda)$$

$$x_1 = -r\cdot\cos\lambda + \sin\lambda\sqrt{-1}$$

$$x_2 = -r\cdot\cos\lambda - \sin\lambda\sqrt{-1},$$

wobei

$$\cos\lambda = \frac{b}{2ar}.$$

Lösen wir hiernach folgendes Beispiel (aus Heis):

$$x^2 + 0{,}42331\,x - 8{,}53972 = 0.$$

Hier ist c negativ, wir setzen also:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{2ar}{b}, \text{ wo}$$

$$r = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

ist. Als Lösungen erhalten wir also:

$$x_1 = r\cdot\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}$$

$$x_2 = -r\operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}.$$

Führen wir nun die Werte ein. Es ist:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{2\cdot\sqrt{8{,}53972}}{0{,}42331}$$

$$\lg\operatorname{tg}\lambda = 1{,}14009$$

$$\lambda = 85^0\,51'\,26'',7.$$

Daraus berechnet sich

$$x_1 = 2{,}71828$$

und für

$$x_2 = -3{,}14159.$$

Setzt man für die beiden Wurzeln x_1 und x_2 der Gleichung:

$$ax^2 - bx + c = 0$$

die Werte $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi'$, so erhält man φ und φ' folgendermaßen. Es ist:

$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi' = b$$

$$\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi' = c.$$

Nun ist:

$$\operatorname{tg}(\varphi + \varphi') = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi'}{1 - \operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi'} = \frac{b}{1-c}.$$

Hieraus erhält man $\varphi + \varphi'$. Ferner ist, wie man sich leicht herleiten kann:

$$\frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')} = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi'} = \frac{1 + c}{b}$$

$\varphi + \varphi'$ ist berechnet, also

$$\cos(\varphi - \varphi)') = \frac{1 + c}{b} \cdot \sin(\varphi + \varphi').$$

Hieraus erhält man auch die Differenz von φ und φ'. Durch sie und die Summe φ und φ' sind die Winkel φ und φ' bestimmt. Lösen wir hiernach die Aufgabe 176 aus Heis:

$$x^2 - 24{,}691\,x + 61{,}6 = 0,$$

so erhalten wir:

$$\operatorname{tg}(\varphi + \varphi') = \frac{24{,}691}{-\,60{,}6}.$$

$$\begin{aligned}
\lg 24{,}691 &= 1{,}3925387 \\
\lg 60{,}6 &= 1{,}7824726 \\
\hline
\lg \operatorname{tg}(\varphi + \varphi') &= 9{,}6100661 - 10 \\
\varphi + \varphi' &= 157^0 49' 55'' \\
\lg \sin(\varphi + \varphi') &= 95{,}767305 - 10 \\
\lg(1 + c) &= 1{,}7965743 \\
\lg c &= 1{,}3925387 \\
\lg \cos(\varphi - \varphi') &= 99807661 - 10, \text{ also:} \\
\varphi - \varphi' &= 16^0 55' 59'',6, \text{ also:} \\
\varphi &= 87^0 22' 57''3. \\
\varphi' &= 70^0 26' 57'',7. \\
x_1 = \operatorname{tg}\varphi &= \mathbf{21{,}875} \\
x_2 = \operatorname{tg}\varphi' &= \mathbf{2{,}816.}
\end{aligned}$$

Kapitel II.

Gleichungen zweiten Grades mit zwei und mehrerrn Unbekannten.

§ 1.

Auflösen quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Wenn in einer Gleichung mit zwei Unbekannten beide Unbekannte in der zweiten Potenz oder durch Multiplikation mit einander verbunden vorkommen, so heißt die Gleichung eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten. Zur Bestimmung der Unbekannten sind auch hier wie bei den linearen Gleichungen soviele Gleichungen notwendig, als Unbekannte vorkommen; für unsern vorliegenden Fall müssen also zwei Gleichungen gegeben sein. Die allgemeine Form einer Gleichung zweiten Grades ist:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0.$$

Wie bei den linearen Gleichungen wird auch hier das Streben beim Auflösen der Gleichungen dahin gehen, eine Gleichung mit nur einem Unbekannten zu erhalten und zwar eine Gleichung, die wir bereits lösen können, d. h. also eine Gleichung, die höchstens vom zweiten Grade ist. Sind aber nun beide Gleichungen quadratisch, so wird man, wenn man den Wert der Unbekannten aus der einen Gleichung in die andere einführt, im allgemeinen auf eine Gleichung vierten Grades kommen, welche wir im allgemeinen mit unseren Mitteln nicht lösen können werden. Man muß deshalb seine Auflösungsmethode so einrichten, daß man eine Gleichung vierten Grades umgeht oder aber, daß diese eine für uns lösbare Form annimmt. Es lassen sich nun zur Auflösung von quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten keine allgemeine Regeln aufstellen, sondern es gibt nur eine Reihe von Verfahren, unter welchen man in jedem einzelnen Falle eben das passendste auszuwählen hat. Damit ist dem Scharfblick ein Feld zu seiner Tätigkeit gegeben und es wird auch hier nur Uebung und Lust und Liebe zur Sache die nötige Gewandtheit reifen lassen. Wir wollen nun im folgenden eine Anzahl von Auflösungsmethoden entwickeln, um diese dann im § 2 dieses Kapitels an weiteren Beispielen einzuüben.

a) Die eine der beiden Gleichungen ist linear.

In diesem Falle drückt man die eine Unbekannte in der linearen Gleichung durch die andere aus und substituiert diesen Wert in die quadratische Gleichung. In diesem Falle erhält man eine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten und aus den beiden Werten der Unbekannten berechnet man die andere Unbekannte. Man erhält zwei zusammmengehörige Wertepaare.

Aufgabe 58.

1. $x^2 + xy - y^2 + 2ay - 2bx = 3a^2 + 7ab - 3b^2$
2. $x + y = 3a + b$

$$x = 3a + b - y,$$

dies in 1 substituiert, ergibt:

$$(3a + b - y)^2 + (3a + b - y)y - y^2 + 2ay - 2b(3a + b - y) = 3a^2 + 7ab - 3b^2$$

$$(3a + b)^2 - 2(3a + b)y + y^2 + 3ay + by - y^2 - y^2 + 2ay - 6ab - 2b^2 + 2by - 3a^2 - 7ab + 3b^2 = 0$$

$$9a^2 + b^2 - 6ay + 3ay + by - y^2 + 2ay - 2b^2 - 3a^2 - 7ab + 3b^2 = 0$$

$$-y^2 - (a - b)y + 6a^2 + 2b^2 - 7ab = 0$$

$$y^2 + (a - b)y - (6a^2 + 2b^2 - 7ab) = 0$$

$$y = \frac{1}{2}\left[b - a \pm \sqrt{(a - b)^2 + 4(6a^2 + 2b^2 - 7ab)}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[b - a \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 24a^2 + 8b^2 - 28ab}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[b - a \pm \sqrt{25a^2 + 9b^2 - 30ab}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[b - a \pm \sqrt{(5a - 3b)^2}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[b - a \pm (5a - 3b)\right]$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}[4a - 2b] = 2a - b \\ y_2 &= \frac{1}{2}\cdot[4b - 6a) = 2b - 3a \end{aligned}\right\} \text{und hieraus:}$$

$$x_1 = 3a + b - 2a + b = a + 2b$$
$$x_2 = 3a + b - 2b + 3a = 6a - b.$$

Aufgabe 59.

$$5x^2 + 2y^2 - xy = 20$$
$$3x - 4y = 2$$

$$x = \frac{2 + 4y}{3}$$

$$5\left(\frac{2 + 4y}{3}\right)^2 + 2y^2 - y \cdot \frac{2 + 4y}{3} = 20$$

$$\frac{5}{9}(4 + 16y^2 + 16) + 2y^2 - \frac{2}{3} - y\frac{4}{3}y^2 = 20$$

$$20 + 80y^2 + 80y + 18y^2 - 6y - 12y^2 = 180$$
$$86y^2 + 74y - 160 = 0$$
$$43y^2 + 37y - 80 = 0$$

$$y = \frac{-37 \pm \sqrt{37^2 + 4 \cdot 43 \cdot 80}}{86}$$

$$y = \frac{-37 \pm 123}{86}$$

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = -\frac{80}{43}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$3x = 2 - 4 \cdot 1$$
$$3x = -2$$
$$x_1 = -\frac{2}{3} \text{ und}$$

$$3x = 2 - 4 \cdot \left(-\frac{80}{43}\right)$$

$$3x = 2 + \frac{320}{43} = \frac{406}{43}.$$

b) Beide Gleichungen sind quadratisch.

Sind beide Gleichungen rein quadratisch, d. h. kommen in beiden nur die Quadrate der Unbekannten vor, so kann man die Gleichungen auf solche ersten Grades zurückführen, indem man für x^2 und y^2 die Unbekannten t und v einführt oder eingeführt denkt und diese nach bekannter Art berechnet.

Aufgabe 60. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 8$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 5.$$

Auflösung. Man erhält:

$$3x^2 + 2y^2 = 48$$
$$5x^2 + 3y^2 = 75$$

oder:

$$15x^2 + 10y^2 = 240$$
$$15x^2 + 9y^2 = 225$$

$$y^2 = 15$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{15} = \pm 3{,}873$$
$$y_{1,2} = \pm\sqrt{6} = \pm 2{,}449.$$

Sind beide Gleichungen aber nicht rein quadratisch, so gelingt es doch öfters, die eine Gleichung in zwei lineare Gleichungen zu zerlegen. Man hat dann jede Gleichung mit der quadratischen in Verbindung zu setzen und erhält im allgemeinen 4 Wertepaare. Wie diese Zerlegung stattfinden kann, sei in folgenden Beispielen gezeigt.

Aufgabe 61.
$$x^2 + xy = 6 \qquad (1.)$$
$$(x + 3)(x + y - 2) = 0 \qquad (2.)$$

Auflösung. Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$x + 3 = 0 \text{ und } x + y - 2 = 0 \text{ oder:}$$
$$x = -3 \text{ und } x = 2 - y.$$

Setzen wir diese Werte in die erste Gleichung, so ergibt sich:

$$9 - 3y = 6$$
$$y_1 = 1 \text{ und:}$$
$$4 - 4y + y^2 + 2y - y^2 = 6$$
$$-2y = 2$$
$$y_2 = -1 \text{ also:}$$
$$x_2 = 3.$$

Aufgabe 62.
$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 4y = 60$$
$$x^2 - xy - 2y^2 + x - y = 0$$

Auflösung. Die zweite Gleichung läßt sich zerlegen in die Faktoren:

$$(x - y)(x + 2y + 1) = 0$$

also entweder: $x = y$

oder: $x = -2y - 1.$

Diese Werte in die erste Gleichung substituiert ergeben:

$$y^2 - 2y^2 + 3y^2 - 2y + 4y = 60$$
$$2y^2 + 2y = 60$$
$$y^2 + y - 30 = 0$$
$$y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 120})$$
$$y = \frac{1}{2}(-1 \pm 11)$$
$$\left.\begin{array}{l} y_1 = +5 \\ y_2 = -6 \end{array}\right\} \text{und hieraus:}$$
$$x_1 = +5$$
$$y_2 = -6$$

und ferner:

$$(-2y-1)^2 - 2y(-2y-1) + 3y^2 - 2(-2y-1) + 4y = 60$$
$$4y^2 + 4y + 1 + 4y^2 + 2y + 3y^2 + 4y + 2 + 4y = 60$$
$$11y^2 + 14y - 57 = 0$$
$$y = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 44 \cdot 57}}{22}$$
$$y_3 = -3 \text{ und } y_4 = \frac{49}{11} \text{ und hieraus:}$$
$$x_3 = +5 \text{ und } x_4 = -\frac{49}{11}.$$

Aufgabe 63. $x^2 + 3xy + 2y^2 = 130$ (1.)

$$x^2 + 2xy + y^2 - 23x - 23y + 130 = 0 \qquad (2.)$$

Auflösung. Die zweite Gleichung läßt sich schreiben:

$$(x+y)^2 - 23(x+y) + 130 = 0.$$

Setzen wir $x + y = z$,

so kommt: $z^2 - 23z + 190 = 0$

$$z = \frac{1}{2}(23 \pm \sqrt{529 - 520})$$
$$z_1 = 13 \text{ und } z_2 = 10.$$

Also:

$$(x+y)^2 - 23(x+y) + 130 = (x+y-13)(x+y-10) = 0$$

also entweder:

$$x + y - 13 = 0$$

oder: $x + y - 10 = 0$

also entweder: $y = 13 - x$

oder: $y = 10 - x.$

Diese Werte in Gleichung (1.) eingeführt, ergibt:

$$x^2 + 3x(13 - x) + 2(13 - x)^2 = 130$$
$$x^2 + 39x - 3x^2 + 338 + 2x^2 - 52x - 130 = 0$$
$$-13x = -208$$
$$x_1 = 16 \text{ also } y_1 = -3$$

ferner:

$$x^2 + 3x(10 - x) + 2(10 - x)^2 = 130$$
$$x^2 + 30x - 3x^2 + 200 + 2x^2 - 40x - 130 = 0$$
$$-10x = -70$$
$$x_2 = 7,$$

also $y_2 = 3.$

Zu beachten hat man insbesondere Gleichungen, welche nur quadratische Glieder enthalten. In diesem Falle bildet man aus den beiden Gleichungen eine neue Gleichung, indem man die konstanten Glieder eliminiert. Die neue Gleichung dividiert man durch y^2 und führt für $\frac{x}{y}$ eine neue Unbekannte ein. Die Werte für $\frac{x}{y}$ benützt man zu den oben ausgeführten Substitutionen in eine der beiden Gleichungen. Ist bereits in einer der beiden Gleichungen die Konstante gleich Null, so dividiert man direkt diese durch y^2 etc.

Aufgabe 64.
$$2x^2 + 3xy - 9y^2 = 0$$
$$3xy - 3y^2 = 8.$$

Auflösung. Dividiere die erste Gleichung durch y^2 und man erhält:

$$2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\frac{x}{y} - 9 = 0$$

$$\text{und setze: } \frac{x}{y} = v$$

$$2v^2 + 3v - 9 = 0$$

$$v = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 7^2}}{4}$$

$$v_1 = \frac{3}{2} \text{ und } v_2 = -3;$$

man hat also die beiden Gleichungen:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \text{ und } \frac{x}{y} = -3 \text{ oder:}$$

$$2x = 3y$$

$$x = \frac{3y}{2} \text{ und:}$$

$$2x = -3y.$$

Substituieren wir diese Werte in die zweite Gleichung dann kommt:

$$3y \cdot \frac{3y}{2} - 4y^2 = 8$$

$$9y^2 - 8y^2 = 16$$

$$y_{1,2} = \pm 4 \text{ also:}$$

$$x_{1,2} = \mp 6$$

ferner bei $x = -3y$:

$$3 \cdot (-3y) \cdot y - 4y^2 = 8$$

$$-9y^2 - 4y^2 = 8$$

$$13y^2 = -8$$

$$y^2 = -\frac{8}{13}$$

$$y = \pm 2\sqrt{-\frac{2}{13}}$$

$$x = \mp 6\sqrt{-\frac{2}{13}}.$$

Aufgabe 65. $x^2 + axy + by^2 = m$
$x^2 + cxy + dy^2 = n.$

Auflösung. Multipliziere die erste Gleichung mit n und die zweite mit m; wir erhalten:

$$nx^2 + naxy + nby^2 = mn$$

$$mx^2 + mcxy + mdy^2 = mn$$

$$(m - n)x^2 + (mc - na)xy + (md - nb)y^2 = 0.$$

Dividiere diese neue Gleichung durch y^2 und es kommt:

$$(m - n) \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 + (mc - na)\frac{x}{y} + (md - nb) = 0$$

also: $$\frac{x}{y} = \frac{na - mc \pm \sqrt{(mc - na)^2 - 4(m - n)(md - nb)}}{2(m - n).}$$

Nunmehr hat man wieder zwei lineare Gleichungen. Diese hat man mit einer der beiden gegebenen in Verbindung zu setzen und man erhält hieraus die Wertepaare der Unbekannten.

Aufgabe 66. $x^2 + xy + y^2 = 7$
$2x^2 + 3xy + 4y^2 = 13.$

Auflösung.
$$\begin{array}{r} 13x^2 + 13xy + 13y^2 = 91 \\ 14x^2 + 21xy + 28y^2 = 91 \\ \hline x^2 + 8xy + 15y^2 = 0 \end{array}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 8 \cdot \frac{x}{y} + 15 = 0$$

$$\frac{x}{y} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{-8 \pm 2}{2}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)_1 = -3 \text{ und } \left(\frac{x}{y}\right)_2 = -5.$$

Hieraus ergibt sich:

$$x = -3y \text{ und } x = -5y.$$

Diese Werte in die erste Gleichung eingeführt, gibt:

$$9y^2 - 3y^2 + y^2 = 7$$
$$7y^2 = 7$$
$$y_{12} = \pm 1$$

also:
$$x_{12} = \mp 3.$$

Ferner gibt die Substitution $x = -5y$:

$$25y^2 - 5y^2 + y^2 = 7$$
$$21y^2 = 7$$
$$y^2 = \frac{1}{3} \text{ also:}$$
$$y_{34} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ und}$$
$$y_{34} = \mp 5\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Nach derselben Methode werden quadratische Gleichungen gelöst, welche die Unbekannten nur in der Form $\frac{x}{y}$ und $\frac{y}{x}$ enthalten.

Aufgabe 67.

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} = \frac{27}{4}$$
$$x - y = 2.$$

Auflösung. Man führe für $\frac{x}{y}$ die neue Unbekannte v ein und erhält:

$$x^2 + v + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v} = \frac{27}{4}.$$

Nun setzt man $v + \frac{1}{v} = z$, dann ist

$$v^2 + \frac{1}{v^2} = z^2 - 2 \text{(s. reciproke Gleichungen!)}$$

also:
$$z - 2 + z = \frac{27}{4}$$

$$z^2 + z - \frac{35}{4} = 0 \text{ oder } 4z^2 + 4z - 35 = 0$$

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 560}}{8} = \frac{-4 \pm 24}{8}$$

$$z_1 = \frac{5}{2} \text{ und } z_2 = -\frac{7}{2}$$

Nun ist also:

$$v + \frac{1}{v} = \frac{5}{2} \quad \text{oder:} \quad v + \frac{1}{v} = -\frac{7}{2}$$

Man erhält:

$$v^2 + 1 = \frac{5}{2} v \qquad v^2 + 1 = -\frac{7}{2} 0$$

$$2v^2 - 5v + 2 = 0 \qquad 2v^2 + 7v + 2 = 0$$

$$v = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \qquad v = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 16}}{4}$$

$$v_1 = 2 \qquad v_3 = \frac{-7 + \sqrt{33}}{4}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \qquad v_4 = \frac{-7 - \sqrt{33}}{4}$$

Es ist nun:

$$\frac{x}{y} = 2, \text{ also } x = 2y, \text{ also}$$

$$2y - y = 2$$
$$y_1 = 2$$
$$x_1 = 4,$$

ferner: $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ oder: $x = \frac{y}{2}$,

dies eingesetzt:

$$\frac{y}{2} - y = 2$$

$$-\frac{y}{2} = 2$$

$$y_2 = -4$$
$$x_2 = -2$$

ferner: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{-7 + \sqrt{33}}{4}$ oder $4x = y(-7 + \sqrt{33})$

$$\text{also: } \frac{y}{4}(-7 + \sqrt{33}) - y = 2$$
$$y(-7 + \sqrt{33}) - 4y = 8$$
$$y\ (-7 + (\sqrt{33} - 4) = 8$$
$$x = \frac{8}{\sqrt{23} - 11}.$$

Machen wir hier den Nenner rational, so kommt:

$$y = \frac{8 \cdot (\sqrt{33} - 11)}{33 - 121} = \frac{8\ (\sqrt{33} - 11)}{-88}$$

$$y = \frac{8\ \left(\sqrt{\dfrac{3 \cdot 11 \cdot 11}{11}} - 11\right)}{-88} = \frac{88\left(\sqrt{\dfrac{3}{11}} - 1\right)}{-88}$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{11}} - 1$$

$y_3 = -\sqrt{\dfrac{3}{11}} - 1$ u. hieraus:

$x_3 = -\sqrt{\dfrac{3}{11}} + 1.$

Ebenso erhält man y_4 und x_4.

Zu beachten sind ferner c) Fälle, in denen die Unbekannten in den Formen

$$x \pm y,\ x^n \pm y^n,\ xy$$

vorkommen, oder sich auf diese Formen bringen lassen. Man merke sich hier folgende typische Beispiele:

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} x + y &= s \\ x \cdot y &= p \end{aligned} \qquad \text{II.}\quad \begin{aligned} x - y &= d \\ xy &= p \end{aligned}$$

$$\text{III.}\quad \begin{aligned} x + y &= s \\ x^2 + y^2 &= q \end{aligned} \qquad \text{IV.}\quad \begin{aligned} x \cdot y &= p \\ x^2 + y^2 &= q. \end{aligned}$$

Lösung für I. Man quadriere die erste der beiden Gleichungen und multipliziere die zweite mit 4. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rr} x^2 + y^2 + 2xy = s^2 & (1.) \\ 4xy = 4p & (2.) \\ \hline \end{array}$$

subtrahiere (2.) von (1.): $x^2 + y^2 - 2xy = s^2 - 4p$

$$(x - y)^2 = s^2 - 4p$$

$$x - y = \pm \sqrt{s^2 - 4p}.$$

Nun hat man Summe und Differenz der beiden Unbekannten. Ihre Summe gibt x, ihre Differenz y.

Lösung für II. Diese ist dieselbe wie I, nur hat man die mit 4 multiplizierte zweite Gleichung zu der quadrierten ersten zu addieren.

Lösung für III. Man quadriere die erste Gleichung und subtrahiere von diesem Quadrat die zweite Gleichung.

Wir erhalten: $x^2 + y^2 + 2xy = s^2$

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = q \\ \hline 2xy = s^2 - q. \end{array}$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der zweiten gegebenen, so erhält man:

$$x^2 + y^2 - 2xy = 2q - s^2$$

$$(x - y)^2 = 2q - s^2$$

$$x - y = \pm \sqrt{29 - s^2}.$$

Aus dieser und der gegebenen ersten erhält man durch Addition und Subtraktion x_{12} + und y_{12}.

Lösung für IV. Multipliziere die erste Gleichung mit 2 und addiere sie zur zweiten, hierdurch erhält man $x + y$; darauf subtrahiere die erste Gleichung von der zweiten, hierdurch erhält man $x - y$. Es ist:

$$\begin{array}{r} 2xy = 2p \\ x^2 + y^2 = q \\ \hline x^2 + y^2 + 2xy = q + 2p \end{array}$$

$$x + y = \pm \sqrt{9 + 2p}$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = q - 2p$$

$$x - y = \pm \sqrt{9 - 2p}.$$

Für $(x^3 + y^3)$ oder $(x^3 - y^3)$ etc. merke man, daß:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \text{ etc.}$$

In manchen Fällen kommt man d) durch eine Substitution auf einfachere Formen und es soll hier auch ein Beispiel dieser Art behandelt werden.

Aufgabe 68.

$$6 \cdot (x + 2y) + 5 \cdot \sqrt{x + 2y} = 116$$

$$\frac{x^2 y^2}{75} - \frac{xy}{5} = 6.$$

Auflösung. Man setze in der ersten Gleichung

$$\sqrt{x + 2y} = u$$

und man erhält:

$$6u^2 + 5u - 116 = 0, \text{ also:}$$

$$u = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 2784}}{12} = \frac{-5 \pm 53}{12}$$

$$u_2 = 4 \text{ und } u_1 = -\frac{58}{12} = -\frac{29}{6}, \text{ also:}$$

$$\text{I. } x + 2y = 16 \text{ und}$$

$$\text{II. } x + 2y = -\frac{841}{36}$$

In der zweiten Gleichung setze man $xy = t$ und man erhält:

$$t^2 - 15t - 450 = 0$$

$$t = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 1800}}{2} = \frac{15 \pm 45}{2}$$

$$\text{III. } (xy)_1 = 30 \text{ und}$$

$$\text{IV. } (xy)_2 = -15$$

Nun ist aus I. $x = 16 - 2y$, dies in III. eingesetzt, gibt

$$y(16 - 2y) = 30$$

$$16y - 2y^2 - 30 = 0$$

$$2y^2 - 16y + 30 = 0$$

$$y = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{4} = \frac{16 \pm 4}{4}$$

$$y_1 = 5 \text{ und dazu } x_1 = 6$$

$$y_2 = 3 \text{ und dazu } x_2 = 10.$$

Durch die weiteren Einsetzungen erhält man die übrigen Wurzelpaare.

Man erkennt, es lassen sich für quadratische Gleichungen mit 2 Unbekannten keine Regeln zur Auflösung aufstellen; man muß sich durch Uebung eine gewisse Fertigkeit aneignen und man wird durch fleißiges Transformieren sich mit der Zeit auch gewisse Kunstgriffe zu eigen machen. Im folgenden Paragraphen wollen wir noch einige Beispiele lösen. Der Schüler greife nach deren Studium zu einer guten Aufgabensammlung und suche dort weiteres Aufgabenmaterial. (Siehe auch Kapitel IV.)

§ 2.

Beispiele.

Aufgabe 69.

$$x^2 + y^2 = 26,24$$
$$x^2 - y^2 = 5,76.$$

Man addiere und subtrahiere beide Gleichungen, man erhält:

$$2x^2 = 32$$
$$x = \pm\sqrt{16} \qquad x_1 = +4 \qquad x_2 = -4$$
$$2y^2 = 20,48$$
$$y = \pm\sqrt{10,24} \qquad y_1 = +3,2 \qquad y_2 = -3,2.$$

Aufgabe 70.

$$xy = p$$
$$\frac{x}{y} = b.$$

Man multipliziere beide Gleichungen miteinander und dividiere die erste durch die zweite. Man erhält:

$$x^2 = p \cdot b$$
$$x = \pm\sqrt{p \cdot b}$$
$$y^2 = \frac{p}{b}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{p}{b}}\,.$$

Aufgabe 71. $(x + y) : (x - y) = 9 : 5$

$$5 : \frac{3}{4}x = \frac{6}{5}y : 1,8.$$

Aus 1. erhält man:

$$5\,(x + y) = 9\,(x - y)$$
$$x = \frac{7}{2}y$$

Aus 2. folgt:

$$\frac{9}{10}xy = 9, \text{ also}$$
$$\frac{9}{10} \cdot \frac{7}{2} \cdot y^2 = 9$$
$$9 = \pm\sqrt{\frac{20}{7}}$$
$$x = \pm\frac{7}{2}\sqrt{\frac{20}{7}}.$$

Aufgabe 72.
$$x^2 + xy = a$$
$$xy + y^2 = b$$

Man addiere die beiden Gleichungen, so erhält man
$$x^2 + 2xy + y^2 = a + b$$
$$x + y = \pm \sqrt{a + b}.$$

Nun ist: $x(x + y) = a$, also
$$x = \frac{a}{x + y} = \pm \frac{a}{\sqrt{a + b}}.$$

Ebenso findet man:
$$y = \pm \frac{b}{\sqrt{a + b}}.$$

Aufgabe 73.
$$2(x + 4)^2 - 5(y - 7)^2 = 75$$
$$7(x + 4)^2 + 15(y - 7)^2 = 1075$$

Auflösung. Multipliziere die erste Gleichung mit 3 und addiere sie zu der zweiten, man erhält:
$$\begin{aligned} 6(x + 4)^2 - 15(y - 7)^2 &= 225 \\ 7(x + 4)^2 + 15(y - 7)^2 &= 1075 \\ \hline 13(x + 4)^2 &= 1300 \\ (x + 4)^2 &= 100 \\ x + 4 &= \pm 10 \\ x_1 &= + 6 \\ x_2 &= - 14. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für y:
$$\begin{aligned} 2 \cdot 100 - 5(y - 7)^2 &= 75 \\ 5(y - 7)^2 &= 125 \\ y - 7 &= \pm 5 \\ y_1 &= 12 \\ y_3 &= \pm 2. \end{aligned}$$

und für $x = - 14$ oder $(x + 4) = - 10$;
$$2 \cdot 100 - 5(y - 7)^2 = 75$$

also auch:
$$y_2 = 12 \text{ und}$$
$$y_4 = 2.$$

Wir haben also die Wertepaare:

$x_1 = 6$; $x_2 = - 14$; $x_3 = 6$; $x_4 = - 14$

$y_1 = 12!$ $y_2 = 12$; $y_3 = 2$; $y_4 = 2.$

Aufgabe 74.

$$(3x + 4y)(7x - 2y) + 3x + 4y = 44$$
$$(3x + 4y)(7x - 2y) - 7x + 2y = 30.$$

Man setze:

$$3x + 4y = z$$
$$7x - 2y = v,$$

so gehen die beiden Gleichungen über in:

$$z \cdot v + z = 44$$
$$z \cdot v - v = 30.$$

Subtrahiert man nun die zweite Gleichung von der ersten, so ist:

$$z + v = 14$$
$$z = 14 - v, \text{ also:}$$
$$v(14 - v) + 14 - v = 44$$
$$v^2 - 13v + 30 = 0.$$

Aufgabe 75. $x^3 + y^3 = b$

$$x + y = a.$$

Man dividiere die erste Gleichung durch die zweite, so erhält man:

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{b}{a} \cdot$$ Quadriere nun 2,

so ist $x^2 + 2xy + y^2 = a^2.$

Also; $$x \cdot y = \frac{a^3 - b}{3a}$$

dazu $x + y = a.$

Es ist nun $x - y$ leicht zu bestimmen.

Aufgabe 76. $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \sqrt{ab}$

$$x^2 - y^2 = a^4.$$

Setze $\sqrt{x + y} = z$ und $\sqrt{x - y} = v$,

so erhält man $z + v = \sqrt{ab}$

und weil $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ ferner:

$$z^2 \cdot v^2 = a^4, \text{ also}$$
$$z \cdot v = a^2.$$

Aufgabe 77. $x^2 + y^2 + xy + x + y = 46$

$$3(x^2 + y^2) + 3(x + y) + 2xy = 128.$$

Auflösung. Multipliziere die erste Gleichung mit 3 und subtrahiere sie von der zweiten und es kommt:

$$\begin{array}{r} 3(x^2 + y^2) + 3(x + y) + 3xy = 138 \\ 3(x^2 + y^2) + 3(x + y) + 2xy = 128 \\ \hline xy = 10. \end{array}$$

Man setze nun $x + y = z$, so kommt, da $xy = 10$:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 10 + x + y = 46 \text{ oder:}$$

$$z^2 + z - 56 = 0, \text{ also:}$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-1 \pm 15}{2}$$

$$z_1 = 7 \text{ und} \qquad z_2 = -8.$$

Nun kennt man xy und $x + y$ und ist die Lösung dadurch auf ein typisches Beispiel zurückgeführt.

Aufgabe 78.

$$(3x + 4y)(7x - 2y) + 3x + 4y = 44$$
$$(3x + 4y)(7x - 2y) - 7x + 2y = 30.$$

Auflösung. Setze: $3x + 4y = u$, und

$$7x - 2y = v, \text{ so kommt:}$$

$$\begin{array}{r} u \cdot v + u = 44 \\ u \cdot v - v = 30 \\ \hline \end{array}$$

Subtrahiert man die zweite von der ersten, so kommt:

$$u + v = 14$$
$$u = 14 - v, \text{ also:}$$
$$v(14 - v) + 14 - v = 44$$
$$v^2 - 13v + 30 = 0$$

$$v = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{2} = \frac{13 \pm 7}{2}$$

$$v_1 = 10 \text{ und} \qquad v_2 = 3, \text{ also:}$$
$$u_1 = 4 \text{ und} \qquad u_2 = 11.$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{array}{r} 3x + 4y = 4 \\ 7x - 2y = 10 \\ \hline 3x + 4y = 4 \\ 14x - 4y = 20 \\ \hline 17x = 24 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{24}{17}$$

$$y_1 = -\frac{1}{17},$$

ferner:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 11 \\ 7x - 2y &= 3 \\ \hline 17x &= 17 \\ x_2 &= 1 \\ y_2 &= 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 79.

$$\begin{aligned} (x - y)(x^2 - y^2) &= a \\ (x + y)(x^2 + y^2) &= b. \end{aligned}$$

Auflösung. Man setze:

$$\begin{aligned} x - y &= u \\ x + y &= v \end{aligned}$$

dann ist $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = u \cdot v$
und die erste Gleichung heißt:

$$\begin{aligned} u \cdot u \cdot v &= a \\ u^2 v &= a. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\left[(x + y)^2 + (x - y)^2\right] = \frac{v^2 + u^2}{2},$$

die zweite Gleichung heißt demnach:

$$v \cdot \frac{v^2 + u^2}{2} = b$$

$$v^3 + u^2 v = 2b.$$

Nun ist aber $u^2 v = a$, also:

$$v^3 = 2b - a$$

und damit ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 80.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2xy - 2x(a + b) - 2y(a + b) &= -4ab \\ x^2 + y^2 - 2xy + 2x(a - b) - 2y(a - b) &= 4ab. \end{aligned}$$

Auflösung. Aus 1. kommt:

$$(x + y)^2 - 2(x + y)(a + b) + 4ab = 0$$

$$x + y = \frac{2(a + b) \pm \sqrt{4(a + b)^2 - 4 \cdot 4ab}}{2}$$

$$x + y = a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} = a + b \pm (a - b)$$

$$(x + y)_1 = 2a \text{ und } (x + y)_2 = 2b.$$

Ferner ist:

$$(x - y)^2 + 2(x - y)(a - b) - 4ab = 0, \text{ also:}$$

$$x - y = \frac{-2(a - b) \pm \sqrt{4(a-b)^2 + 4 \cdot 4ab}}{2} = (a-b) \pm (a+b)$$

$$(x - y)_1 = 2b \text{ und } (x - y)_2 = -2a.$$

Hieraus erhalten wir folgende Wertepaare:

$$\begin{array}{c} x + y = 2a \\ x - y = 2b \\ \hline x_1 = a + b \\ y_1 = a - b. \end{array}$$

Ferner:

$$\begin{array}{c} x + y = 2a \\ x - y = -2a \\ \hline x_2 = 0 \\ y_2 = 2a. \end{array}$$

Ferner:

$$\begin{array}{c} x + y = 2b \\ x - y = 2b \\ \hline x_3 = 2b \\ y_3 = 0 \end{array}$$

Endlich:

$$\begin{array}{c} x + y = 2b \\ x - y = -2a \\ \hline x_4 = b - a \\ y_4 = a + b. \end{array}$$

Aufgabe 81.

$$\begin{array}{c} (x^2 + y^2)^2 - xy = 613 \\ 2(x^2 + y^2) - 3xy = 14. \\ \hline \end{array}$$

Auflösung. Multipliziere die erste Gleichung mit 3 und subtrahiere von ihr die zweite.

Wir erhalten:

$$\begin{array}{c} 3(x^2 + y^2)^2 - 3xy = 1839 \\ 2(x^2 + y^2) - 3xy = 14 \\ \hline 3(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) = 1825. \end{array}$$

Nun setze man $x^2 + y^2 = u$ und es kommt:

$$3u^2 - 2u - 1825 = 0$$

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 21900}}{6} = \frac{2 \pm 148}{6}$$

$$u_1 = \frac{150}{6} = 25 \text{ und } u_2 = -\frac{73}{3},$$

also: $$x^2 + y^2 = 25 \text{ oder: } x^2 + y^2 = -\frac{73}{3}.$$

Daraus ergibt sich für xy:

$$x \cdot y = 25^2 - 613$$
$$x \cdot y = 12 \text{ oder}$$
$$xy = \left(-\frac{73}{3}\right)^2 - 613 = \frac{5329}{9} - \frac{5517}{9} = -\frac{188}{9}.$$

Nunmehr ist die Aufgabe auf ein typisches Beispiel zurückgeführt.

Aufgabe 82. $$x^3 + y^3 = a$$
$$xy\,(x + y) = b.$$

Man addiere zu 1 das Dreifache von 2, so erhält man:

$$(x + y)^3 = a + 3b$$
$$x + y = \sqrt[3]{a + 3b}.$$

Setzt man diesen Wert in 2 ein, so erhält man

$$x \cdot y = \frac{b}{\sqrt[3]{a + 3b}}.$$

Nun ist die weitere Lösung bekannt.

Aufgabe 83. $$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 7$$
$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 37.$$

Man setze $\sqrt[3]{x} = v$ und $\sqrt[3]{y} = u$, so gehen die beiden Gleichungen über in:

$$v + u = 7$$
$$v^2 + u^2 = 37.$$

Dieses Gleichungssystem aufzulösen wurde oben gezeigt.

§ 3.

Textgleichungen II. Grades mit 2 Unbekannten.

Aufgabe 84. Auf einer Strecke von 1732,5 Meter macht das Vorderrad eines Wagens 165 Umläufe mehr als das Hinterrad. Vergrößert man den Umfang eines jeden Rades um 0,75 m, so wird auf derselben Strecke das Vorderrad 112 Umläufe mehr machen als das Hinterrad. Welchen Umfang hat jedes der beiden Räder?

Auflösung. Angenommen das Vorderrad habe einen Umfang von x Meter, das Hinterrad einen solchen von y Meter. Das Vorderrad muß, um 1732,5 m zurückzulegen, $\frac{1732{,}5}{x}$ Umläufe machen; das Hinterrad $\frac{1732{,}5}{y}$. Laut Aufgabe aber macht das Vorderrad 165 Umläufe mehr als das Hinterrad, also muß die Gleichung gelten:

$$\frac{1732{,}5}{x} = \frac{1732{,}5}{y} + 165$$

$$\text{I.}\quad 31{,}5\,(y - x) = 3xy.$$

Vergrößert man jeden Umfang um 0,75 m, so muß das Vorderrad, um die gegebene Strecke zurückzulegen, $\frac{1732{,}5}{x+0{,}75}$, das Hinterrad $\frac{1732{,}5}{y+0{,}75}$ Umläufe.

Nach den Bestimmungen der Aufgabe muß aber sein:

$$\frac{1732{,}5}{x+0{,}75} = \frac{1732{,}5}{y+0{,}75} + 112$$

$$\text{II.}\quad 1648{,}5y - 1816{,}5x = 112xy + 63.$$

Die Lösung dieses Systems bereitet keine Schwierigkeit.

Man eliminiert das Glied mit $x \cdot y$; drückt y durch x aus und substituiert. —

Aufgabe 85. Ein Behälter, der bis zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist, kann durch eine von zwei Röhren in einer bestimmten Zeit gefüllt und durch die zweite in einer anderen Zeit ausgeleert werden. Läßt man beide Röhren 12 Stunden offen, so wird der Behälter ausgeleert. Macht man die Öffnungen beider Röhren kleiner, so daß die eine zur Füllung, die andere zur Ausleerung eine Stunde mehr braucht, so wird bei gleichzeitiger Öffnung beider Röhren der Behälter in $15\frac{3}{4}$ Stunden leer. In welcher Zeit wird der leere Behälter durch die erste Röhre allein gefüllt, in welcher Zeit der volle Behälter durch die zweite Röhre allein ausgeleert werden?

Auflösung. Angenommen der Behälter könne durch die erste Röhre allein in x Stunden gefüllt werden und durch die zweite Röhre in y Stunden geleert werden. Durch die erste Röhre wird in 1 Stunde $\frac{1}{x}$ des Behälters gefüllt. Durch die zweite Röhre wird in einer Stunde $\frac{1}{y}$ des Behälters geleert. In 12 Stunden werden durch die erste Röhre $\frac{12}{x}$ zugeführt, durch die zweite Röhre $\frac{12}{y}$ abgeführt. Laut Aufgabe soll nach 12 Stunden der Behälter, der ursprünglich halb voll war, leer sein, es muß also:

$$\frac{12}{y} = \frac{12}{x} + \frac{1}{2}$$

$$xy = 24x - 24y \qquad (1.)$$

Ebenso wird die zweite Gleichung hergeleitet. Es ist:

$$\frac{15\frac{3}{4}}{y+1} = \frac{15\frac{3}{4}}{x+1} + \frac{1}{2}$$

$$xy = \frac{1}{2}(61x - 63y - 2).$$

Setzen wir nun die Werte für xy in Gleichung (1) und (2) einander gleich, dann erhalten wir:

$$24x - 24y = \frac{61}{2}x - \frac{65}{2}y - 1$$

$$48x - 48y - 61x + 65y + 2 = 0$$

$$x = \frac{17y + 2}{13}$$

Diesen Wert in Gleichung (1.) substituiert, gibt:

$$\frac{17y+2}{13}y = 24 \cdot \frac{17y+2}{13} - 24y$$

$$17y^2 + 2y - 96y - 48 = 0$$

$$17y^2 - 94y - 48 = 0$$

$$y = \frac{94 \pm \sqrt{94^2 + 68 \cdot 48}}{34} = \frac{94 \pm \sqrt{8836 + 3264}}{34}$$

$$y = \frac{94 \pm 110}{34} \text{ und hieraus:}$$

$$y_1 = \frac{204}{34} = 6, \text{ und } y_2 = -\frac{8}{17} \text{ und folglich:}$$

$$x_1 = \frac{102 + 2}{13} = 8.$$

Der Behälter kann also durch die erste Röhre in 8 Stunden gefüllt und durch die zweite Röhre in 6 Stunden geleert werden. Die beiden negativen Wurzelwerte liegen nicht im Sinne der Aufgabe.

Aufgabe 86. Die Summe zweier Zahlen ist 2, die Summe ihrer vierten Potenzen 82. Wie heißen die Zahlen?

Auflösung. Man erhält die beiden Gleichungen:

$$x + y = 2$$
$$x^4 + y^4 = 82$$

Erhebt man nun die erste Gleichung in die vierte Potenz, so erhält man

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 2^4,$$

subtrahiert man hiervon die zweite Gleichung, so erhält man:

$$4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = 24 - 82$$
$$4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2 = 2 - 82.$$

Nun ist:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy, = 2^2 - 2xy, \text{ also}$$
$$4xy\,[22 - 2xy] + 6x^2y^2 = 2^4 - 82$$
$$16xy - 8x^2y^2 + 6x^2y^2 = -66$$
$$-2x^2y^2 + 16xy + 66 = 0$$
$$x^2y^2 - 8xy - 33 = 0$$
$$xy = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 132}}{2} = \frac{8 \pm 14}{2}$$
$$(xy_1) = \frac{22}{2} = 11 \text{ und } \overline{(xy)_2} = -3.$$

Damit ist die Anfgabe auf das typische Beispiel:

$$x + y = s$$
$$x \cdot y = p$$

zurückgeführt. Löst man das System auf, so erhält man:

$$x_1 = y_2 = 3 \qquad x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{-10}$$
$$y_1 = x_2 = 1 \qquad y_{3,4} = 1 \mp \sqrt{-10}.$$

Aufgabe 87. Die Summe dreier Glieder einer geometrischen Reihe ist a, die Summe ihrer Quadrate b. Wie heißen die Zahlen?

Auflösung. Nehmen wir an, das erste Glied sei x und der Exponent y, so heißen die drei Zahlen: x, x y. x y². Ihre Summe soll a sein, also besteht die Gleichung:

$$x + xy + xy^2 = a.$$

Als zweite Gleichung ergibt sich aus den Bestimmungen der Aufgabe.

$$x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = b.$$

Man hat also das Gleichungssystem zu lösen:

$$x + xy + xy^2 = a \qquad (1.)$$
$$x_2 + x^2y^2 + x^2y^4 = b \qquad (2.)$$

Erhebe die erste Gleichung ins Quadrat; es kommt:

$$\begin{array}{l} x^2 + 2xy^2 + 3x^2y^2 + 2x^2y^3 + x^2y^4 = a^2 \quad \text{subtrahiere hiervon} \\ x^2 \qquad\qquad + x^2y^2 \qquad\qquad + x^2y^4 = b \\ \hline 2x^2y + 2x^2y^2 + 2x^2y^3 = a^2 - b \end{array}$$

$$xy\,(x + xy + xy^2) = \frac{a^2 - b}{2}$$

oder
$$x + xy + xy^2 = a$$

$$xy \cdot a = \frac{a^2 - b}{2} \quad \text{also}$$

$$xy = \frac{a^2 - b}{2a}$$

Multipliziere nun die erste Gleichung mit y, so kommt:

$$xy + xy \cdot y + xy \cdot y^2 = ay.$$

Substituiert man den Wert für xy, so erhält man:

$$\frac{a^2 - b}{2a} + \frac{a^2 - b}{2a}y + \frac{a^2 - b}{2a}y^2 - a \cdot y = 0.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nun y bestimmen und aus $xy = \frac{a^2 - b}{2a}$ sodann x. Man erhält als Lösungen die drei Glieder:

$$\frac{1}{4a} \cdot (a^2 + b \pm \sqrt{(3a_8 - b)\,(3b - a^2)}), \quad \frac{a^2 - b}{2a}$$

$$\frac{1}{4a}(a^2 + b \mp \sqrt{(3a^2 - b)\,(3b - a^3)}).$$

Aufgabe 88. Einem Kreise von 314,14 qm Flächeninhalt ist ein Rechteck von 192 qm Fläche eingeschrieben. Wie groß sind dessen Seiten?

Auflösung. Bezeichnet man den Radius des Kreises mit r, so ist:

$$r^3\pi = 314{,}14; \text{ da aber } \pi = 3{,}14,$$

so ist
$$r^2 = 100, \text{ also } r = 10.$$

Ferner ist:
$$xy = 192 \text{ und}$$
$$x^2 + y^2 = (2r)^2 = 400.$$

Man hat also das System zu lösen:

$$x^2 + y^2 = 400$$
$$xy = 192$$

was oben bereits gezeigt wurde.

Aufgabe 89. Ein gerader Kreiskegelstumpf hat eine Höhe von 6 Meter, einen Inhalt von 395,841 cbm. Wie groß sind die Radien seiner Grundkreise, wenn deren Produkt 18 ist?

Auflösung. Angenommen der eine Radius sei x, der andere y Meter. Als erste Gleichung ergibt sich dann aus der Aufgabe direkt:

$$x \cdot y = 18.$$

Der Inhalt des Kegelstumpfes ist:

$$J = 2\pi (x^2 + xy + y^2).$$

Laut Aufgabe soll jedoch der Inhalt des Stumpfes 395,841 cbm betragen, es muß also die Gleichung bestehen:

$$2\pi (x^2 + x \cdot y + y^2) = 395{,}841.$$

Wir haben also das Gleichungssystem zu lösen:

$$x^2 + x \cdot y + y^2 = \frac{395{,}841}{2\pi}$$

$$x \cdot y = 18.$$

Das hier einzuschlagende Verfahren ist bereits gezeigt worden.

Aufgabe 90. Ein gerader Kreiskegel von 12 cm Höhe hat eine Gesamtoberfläche von $90\pi \cdot$qm. Wie groß sind der Radius des Grundkreises und die Seitenlinie?

Auflösung. Angenommen der Radius des Grundkreises sei x, die Seitenlinie y cm. Aus der Aufgabe ergibt sich direkt die Gleichung:

$$x^2 + 12^2 = y_8 \qquad (1.)$$

Die Gesamtoberfläche des Kegels ist:

$$O = \pi \cdot x (x + y).$$

Nach den Bestimmungen der Aufgabe aber soll die Gesamtoberfläche 90 qcm betragen, es muß also:

$$\pi x (x + y) = 90\pi \text{ oder}$$

$$x (x + y) = 90 \ (2.) \text{ hiezu Gleichung } (1.)$$

$$x^2 - y^2 = -144 \qquad (1.)$$

Multipliziere die Gleichung (2) mit 2, es kommt:

$2x^2 + 2xy = 180$, subtrahiere hiervon (1.), so erhält man:

$$x^2 - y^2 = 144$$

$$x^2 + y + 2xy = 324$$

$$x + y = \pm \sqrt{324} = \pm 18$$

Die in Gleichung 2 eingeführt, gibt:

$$18x = 90$$

$$x_1 = +5$$

$$x_2 = -5.$$

Und hieraus ergibt sich:

$$y^2 = 169$$
$$y_1 = + 13$$
$$y_2 = - 13.$$

Der Kreiskegel hat einen Grundkreis mit dem Radius 5 cm und Seitenlinien von 13 cm. Die negativen Lösungen haben hier keinen Sinn.

Aufgabe 91. Es zieht einer aus einer Urne zwei Nummern. Addiert er zur Summe der beiden Nummern ihre Quadrate, so erhält er 938. Multipliziert er beide Nummern miteinander, so erhält er 351. Welche beide Nummern hat er gezogen?

Auflösung. Angenommen die beiden Nummern seien x und y. Aus den Bestimmungen der Aufgabe ergeben sich dann ohne weiteres die beiden Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + x + y = 938 \qquad (1.)$$
$$xy = 351$$

Man setze nun: $x + y = u$, dann ist:

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2xy = u^2 - 702.$$

Man erhält also dann die Gleichung:

$$u^2 - 702 + u = 938$$
$$u^2 + u - 1640 = 0$$
$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 6560}}{2}$$
$$u = \frac{1 \pm 81}{2}$$
$$u_1 = 40 \text{ und } u_2 = - 41.$$

Nun ist das Beispiel zurückgeführt auf:

$$x + y = 40$$
$$xy = 351$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 1600$$
$$4xy = 1404$$

$$(x - y)^2 = 196$$
$$x - y = \pm 14, \text{ hiezu:}$$
$$x + y = \pm 40$$

$$x = \frac{54}{2} = 27$$
$$y = 13.$$

Er zog also die beiden Nummern 13 und 27. Die negativen Lösungen entsprechen nicht dem Sinne der Aufgabe.

Aufgabe 92. Zwei Punkte bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf den Schenkeln eines rechten Winkels nach dem Scheitelpunkt, von dem der eine um 50, der andere um 136,5 Meter entfernt ist. Nach 7 Sekunden beträgt die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte 85 und nach 9 Sekunden 68 Meter. Welche Geschwindigkeiten haben beide Punkte.

Auflösung. Aus der Aufgabe folgt nach der Annahme, daß der erste Punkt eine Geschwindigkeit von x Meter, der zweite eine solche von y Meter habe, direkt:

$$(50 - 7x)^2 + (136{,}5 - 7y)^2 = 85^2$$
$$(50 - 9x)^2 + (136{,}5 - 9y)^2 = 68^2$$

$$2500 + 49x^2 - 700x + 136{,}5^2 + 49y^2 - 14 \cdot 136{,}5\,y - 85^2 = 0$$
$$2500 + 81x^2 - 900x + 136{,}5^2 + 81y^2 - 18 \cdot 136{,}5\,y - 68^2 = 0$$

Die quadratischen Glieder lassen sich nun eliminieren und man erhält eine lineare Gleichung, aus welcher man eine Unbekannte durch die andere ausdrücken kann.

Aufgabe 93. Zwei Punkte bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf zwei senkrecht zu einander stehenden Linien nach dem Durchschnittspunkt hin, von welchem der eine Punkt a Meter, der andere b Meter entfernt ist. Nach t Sekunden haben sie die Entfernung d Meter, und nach t' Sekunden erlangen sie ihre kürzeste Entfernung. Welche Geschwindigkeiten haben die beiden Punkte? $(t' > t)$.

Auflösung. Angenommen der eine Punkt lege in der Sekunde x Meter zurück, der zweite y Meter. Wie leicht abzuleiten, muß die Gleichung gelten:

$$(a - tx)^2 + (b - ty)^2 = d^2.$$

Durch eine einfache Ueberlegung kommt man ferner darauf, daß das Minimum der Entfernung zweier Körper, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen, eintritt in der Mitte der Zeiten, in welchen die Entfernungen der Punkte gleich sind. In unserer Aufgabe tritt das Minimum der Entfernungen nach t' Sekunden ein, also ist umgekehrt die Entfernung der beiden Punkte in 2 t' — t Sekunden abermals d. Man erhält also als zweite Gleichung:

$$[a - (2t' - t')\,x]^2 + [b - (2t' - t)y]^2 = d^2.$$

Aufgabe 94. Eine gewisse Anzahl Arbeiter schafft einen Haufen Steine in 8 Stunden fort; sie würden ebenfalls 8 Stunden brauchen, wenn 5 Arbeiter weniger da wären und dafür jeder bei jedem Gange um 6 Pfund mehr Steine tragen würde.

Wären es aber um sieben Arbeiter weniger, so würden sie um 20 Minuten länger brauchen, obwohl jeder bei jedem Gange um 8 Pfund mehr trägt. Wieviel Arbeiter sind vorhanden und wieviel trägt jeder bei jedem Gange?

Auflösung. Angenommen es seien x Arbeiter und jeder trage bei einem Gange y Pfund. Bei einem Gange tragen die Arbeiter also x y Pfund. Sind es 5 Arbeiter weniger, also $(x - 5)$ und trägt jeder 6 Pfund mehr, also $(y + 6)$ Pfund, so tragen sie bei einem Gange

$$(x - 5)(y + 6) \text{ Pfund.}$$

Da sie den Haufen in diesem Falle in derselben Zeit wegtragen und die Gänge stets dieselben bleiben, so verhalten sich die Massen, die sie bei einem Gange wegtragen, umgekehrt wie die Zeiten, die sie zum ganzen Haufen brauchen, hier also wie 1 : 1.

$$(x - 5)(y + 6) = xy.$$

Auf dieselbe Weise findet man als zweite Gleichung:

$$8\tfrac{1}{3}(x - 7)(y + 8) = 8xy$$

$$25(x - 7)(y + 8) = 24xy$$

$$(x - 5)y + 6) = xy$$

$$25xy + 200x - 175y - 56 \cdot 25 = 24xy$$

$$xy + 6x - 5y - 30 = xy$$

$$xy + 200x - 175y - 56 \cdot 25 = 0$$

$$6x - 5y - 30 = 0$$

was nun leicht zu lösen ist.

§ 4.

Quadratische Gleichungen mit drei und mehreren Unbekannten.

Ein System von quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten wird nach denselben Prinzipien aufgelöst, wie ein solches System mit zwei Unbekannten. Man strebt, eine Gleichung mit nur einem Unbekannten zu erhalten. Bestimmte Regeln lassen sich auch nicht aufstellen. Für ein System, in dem nur eine Gleichung quadratisch, die andern alle linear sind, merke man sich, daß man sämtliche Unbekannte durch eine einzige ausdrückt und die gefundenen Werte in die erste Gleichung einsetzt. In den anderen Fällen sucht man durch Zerlegen der Gleichungen, durch Elimination, durch passende

Substitution oder sonst irgendwelche angebrachte Transformationen sein Ziel zu erreichen. Wir wollen auch hier einige Beispiele lösen.

Aufgabe 95.

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy = 35$$
$$2x + y - z = 3$$
$$5x + 4y - 3z = 10$$

Es ist aus 3: $5x = 10 - 4y + 3z$, also

$$x = 2 - \frac{4}{3}y + \frac{3}{3}z.$$

Dies in Gleichung 2 eingeführt, gibt:

$$2\left(2 - \frac{4}{5}y + \frac{3}{5}z\right) + y - z = 3$$
$$4 - \frac{8}{5}y + \frac{6}{5}z + y - z = 3$$
$$20 - 8y + 6z + 5y - 5z = 15$$
$$-3y + z = -5$$
$$z = 3y - 5$$

$$x = 2 - \frac{4}{5}y + \frac{3}{5}(3y - 5)$$
$$x = 2 - \frac{4}{5}y + \frac{9}{5}y - 3$$
$$x = y - 1.$$

Diese Werte in Gleichung 1 eingeführt, ergibt:

$$(y-1)^2 + y^2 + (3y-5)^2 + y(y-1) = 35$$
$$y^2 - 2y + 1 + y^2 + 9y^2 - 30y + 25 + y^4 - y^4 - 35 = 0$$
$$12y^2 - 33y - 9 = 0$$
$$4y^2 - 11y - 3 = 0, \text{ und hieraus:}$$
$$y = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{8}$$
$$y = \frac{11 \pm 13}{8} \text{ und hieraus:}$$
$$y_1 = 3 \text{ und } y_2 = -\frac{1}{4}.$$

Daraus ergibt sich:

$$x_1 = 3 - 1 = 2 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

und endlich:

$$z_1 = 9 - 5 = 4 \text{ und } z_2 = -\frac{3}{4} - 5 = -\frac{23}{4}$$

Aufgabe 96.

$$\begin{aligned} x \cdot y + xz &= 27 \\ xy + yz &= 32 \\ xz + yz &= 35. \end{aligned}$$

Auflösung. Man setze $xy = u$, $xz = v$ und $yz = w$, so hat man die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} u + v &= 27 \\ u + w &= 32 \\ v + w &= 35, \end{aligned}$$

also:

$$u + v + w = \frac{27 + 32 + 35}{2} = 47$$

und hieraus erhält man:

$$\begin{aligned} u &= 47 - (v + w) = 47 - 35 = 12 \\ v &= 47 - (u + w) = 47 - 32 = 15 \\ w &= 47 - (u + v) = 47 - 27 = 20. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\frac{xy \cdot xz}{yz} = x^2 = \frac{u \cdot v}{w} = \frac{12 \cdot 15}{20} = 9$$

$$x = \pm 3$$

also:

$$y = \frac{12}{\pm 3} = \pm 4$$

und endlich:

$$z = \frac{20}{\pm 4} = \pm 5.$$

Aufgabe 97. In einer geometrischen Proportion ist die Summe der beiden inneren Glieder a, die Summe der beiden äußeren b und die Summe der Quadrate aller Glieder c. Wie heißt die Proportion:

Auflösung. Es heiße die Proportion:

$$x : y = z : v,$$

so hat man die vier Gleichungen:

1. $x \cdot v = y \cdot z$
2. $y + z = a$
3. $x + v = b$
4. $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = c.$

Quadriert man nun 2 und 3 und addiert dann die beiden Gleichungen, so erhält man:

$$x^2 + 2xv + v^2 + y^2 + 2yz + z^2 = a^2 + b^2.$$

Subtrahiert man hiervon die Gleichung 4, so erhält man:

$$2(xv + yz) = a^2 + b^2 - c,$$

oder da $xv = yz$:

$$4xv = 4yz = a^2 + b^2 - c.$$

Nun hat man die beiden Systeme:

$$\begin{array}{c} y + z = a \\ 4yz = a^2 + b^2 - c \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} x + v = b \\ 4xv = a^2 + b^2 - c \end{array}$$

und aus diesen lassen sich die Unbekannten leicht berechnen.

Aufgabe 98. Es werden drei Zahlen in stetiger Proportion gesucht, so daß ihre Summe a und die Summe ihrer Quadrate b ist.

Auflösung. Es heiße die Proportion:

$x : y = y : z$, so ist:

1. $xz = y^2$
2. $x + y + z = a$ und
3. $x^2 + y^2 + z^2 = b.$

Man quadriere nun 2., so erhält man:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = a^2$$

Nun ist: $x^2 + y^2 + z^2 = b$ und

$$2xz = 2y^2,$$

man erhält also:

$$b + 2y(x + y + z) = a^2 \text{ und dies ist}$$

$$b + 2ay = a^2, \text{ also}$$

$$y = \frac{a^2 - b}{2a}$$

Ferner ist nun nach Glchg. 1.:

$$\left\{\begin{array}{l} xz = \dfrac{a^4 - 2a^2b + b^2}{4a^2} \text{ und nach Gleichung 2:} \\ x + z = \dfrac{a^2 + b}{2a}. \end{array}\right.$$

Aus diesem System berechne man nach bekannter Art x und z.

Aufgabe 99. Drei Zahlen geben paarweise miteinander multipliziert die Produkte 42, 78 und 91. Wie heißen die drei Zahlen?

Auflösung. Angenommen die drei Zahlen heißen x, y und z. Aus der Aufgabe ergeben sich dann die Gleichungen:

$$x \cdot y = 42 \qquad (1.)$$
$$x \cdot z = 78 \qquad (2.)$$
$$y \cdot z = 91 \qquad (3.)$$

Aus (2.) ist: $$x = \frac{78}{z}$$

Aus (3.) ist: $$z = \frac{91}{y}$$

Also: $$x = \frac{78\,y}{91}.$$

Diesen Wert in (1.) eingeführt gibt:

$$78\,y^2 = 42 \cdot 91$$
$$y^2 = 48$$
$$y = \pm 7.$$

Also: $$z = \pm 13$$
$$x = \pm 6$$

Aufgabe 100. Eine Zahl wird mit drei Ziffern geschrieben. Addiert man zu derselben 396, so erscheinen die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge. Die Summe ihrer Ziffern ist 9, die Summe ihrer Quadrate 35. Wie heißt die Zahl?

Auflösung. Angenommen die erste Ziffer der Zahl heiße x, die zweite y und die dritte z. Dann heißt die Zahl $100\,x + 10\,y + z$. Addiert man zu dieser Zahl 396, so sollen nach Aufgabe die Ziffern in umgekehrter Folge erscheinen, also muß die Gleichung gelten:

$$100\,x + 10\,y + z + 396 = 100\,z + 10\,y + x \qquad (1.)$$

Als zwei weitere Gleichungen ergeben sich direkt aus der Aufgabe:

$$x + y + z = 9 \qquad (2.)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 35 \qquad (3.)$$

Aus (1.) erhält man:

$$99\,x - 99\,z + 396 = 0$$
$$x - z = -4$$
$$z - x = 4$$

Aus (2.) ergibt sich: $$z + x = 9 - y, \text{ also}$$

$$z = \frac{13 - y}{2}$$

$$x = \frac{5 - y}{2}.$$

Führen wir diese Werte in Gleichung (3.) ein, so erhalten wir:

$$\left(\frac{5 - y}{2}\right)^2 + y^2 + \left(\frac{13 - y}{2}\right)^2 = 35$$

$$25 - 10y + y^2 + 4y^2 + 169 - 26y + y^2 = 140$$

$$6y^2 - 36y + 54 = 0$$

$$y^2 - 6y + 9 = 0$$

$$(y - 3)^2 = 0$$

$$\boldsymbol{y = 3.}$$

Folglich: $$\boldsymbol{x = \frac{5 - 3}{2} = 1}$$

und: $$\boldsymbol{z = \frac{13 - 3}{2} = 5.}$$

Die Zahl heißt also 135.

Aufgabe 101. Die Gesamtoberfläche eines Quaders beträgt 552 qcm, seine Raumdiagonale 17 cm. Die Summe der ersten und der zweiten Kante ist um 13 cm größer als die dritte Kante. Wie lang sind alle drei?

Auflösung. Angenommen die Quaderkanten seien bezüglich x, y und z cm lang. Die Oberfläche desselben beträgt sodann:
$2xy + 2xz + 2xz$ qcm. Nach Aufgabe aber soll die Gesamtoberflähhe 552 qcm. betragen, also muß:

$$2xy + 2xz + 2yz = 552$$

Das Quadrat einer Raumdiagonale ist: $x^2 + y^2 + z^2$. Für die vorliegende Aufgabe gilt also ferner die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 289.$$

Als dritte Gleichung erhält man aus der Aufgabe direkt:

$$x + y = z + 13.$$

Wir haben also das Gleichungssystem zu lösen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 289 \qquad (1.)$$

$$2xy + 2xz + 2yz = 522 \qquad (2.)$$

$$x + y - z = 13. \qquad (3.)$$

Quadrieren wir die dritte Gleichung, so kommt:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz = 169.$$

Führen wir hierin für $x^2 + y^2 + z^2$ den Wert aus (1) ein. so ist:

$$2xy - 2xz - 2yz = -120.$$ Addieren wir hierzu (2.)

$$\begin{array}{ll} 2xy + 2xz + 2yz & = 552 \\ \hline 4xy & = 432 \\ 2xy & = 216. \end{array}$$

Addieren wir diese Gleichung zu (1.), so ist:

$$x^2 + y^2 + 2xy + z^2 = 289 + 216$$
$$(x + y)^2 + z^2 = 505.$$

Nun ist aus Gleichung (3.):

$$x + y = z + 13, \text{ also:}$$
$$(z + 13)^2 + z^2 = 505$$
$$2z^2 + 26z - 336 = 0$$
$$z = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 + 8 \cdot 336}}{4}$$
$$z = \frac{-26 \pm 58}{4}$$
$$z_1 = +8$$
$$z_2 = -21.$$

Subtrahieren wir nun von (1.) die Gleichung für $2xy$, so kommt:

$$(x - y)^2 + z^2 = 73, \text{ folglich:}$$
$$\begin{array}{l} x - y = \pm \sqrt{73 - z^2}, \text{ hierzu} \\ x + y = z + 13 \\ \hline \end{array}$$
$$x = \frac{z + 13 \pm \sqrt{73 - z^2}}{2}$$
$$y = \frac{z + 13 \mp \sqrt{73 - z^2}}{2}$$

Also:
$$x = \frac{8 + 13 \pm 3}{2}$$
$$x_1 = +12$$
$$x_2 = +9$$
$$x_1 = +9$$
$$y_2 = +12,$$

d. h. entweder ist $x = 12$ und $y = 9$ oder $x = 9$ und $y = 12$; aus dieser Willkür der Wahl von x und y entspringt obige Zweideutigkeit der Ausdrücke für x und y. Setzt man z_2 in diese Gleichungen ein, so werden x und y imaginär. Die Kanten des Quaders sind also: 8, 9 und 12 cm lang.

Aufgabe 102. Vier Zahlen geben zu je drei miteinander multipliziert als Produkte der Reihe nach 105, 165, 231, 385. Wie heißen die Zahlen?

Auflösung. Angenommen die vier Zahlen heißen u, x, y, z. Man erhält dann aus der Aufgabe direkt die Gleichungen

$$uxy = 105 \qquad (1.)$$
$$uxz = 165 \qquad (2.)$$
$$uyz = 231 \qquad (3.)$$
$$xyz = 385 \qquad (4.)$$

Multiplizieren wir die vier Gleichungen miteinander, so kommt:

$$u^3x^3y^3z^3 = 105 \cdot 165 \cdot 231 \cdot 385.$$

Dividieren wir jetzt diese Gleichung durch den Kubus einer jeden der vier Gleichungen, so erhält man z, y, x, u. Es ist:

$$\frac{u^3 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z^3}{u^3x^3y^3} = z^3 = \frac{105 \cdot 165 \cdot 231 \cdot 385}{105 \cdot 105 \cdot 105}.$$

$$z^3 = 11^3, \text{ also:}$$
$$z = 11.$$
$$y^3 = 7^3$$
$$y = 7$$
$$x^3 = 5^3$$
$$x = 5$$
$$u^3 = 3^3$$
$$u = 3.$$

Kapitel III.

Exponential- und logarithmische Gleichungen.

Enthält eine Gleichung die Unbekannte nur als Basis von Potenzen (ganzen oder gebrochenen), so heißt die Gleichung eine algebraische. Kommt die Unbekannte auch noch in anderer Verbindung vor, so heißt die Gleichung eine transzendente. Zu den transzendenten Gleichungen gehören auch die Exponential- und die logarithmischen Gleichungen.

Eine Gleichung heißt eine Exponentialgleichung, wenn sie die Unbekannte als Potenz- oder Wurzelexponent enthält. Ihre einfachste Form ist:

$$a^x = m.$$

Eine solche Gleichung wird gelöst, indem man beiderseits logarithmiert. Man erhält:

$$x \cdot \log a = \log m, \text{ also:}$$

$$x = \frac{\log m}{\log a}.$$

Hat eine Exponentialgleichung diese einfache Form nicht, so sucht man ihr diese zu geben. Dies kann dadurch geschehen, daß man alle vorkommenden Exponentialgrößen durch eine einzige Exponentialgröße ersetzt, diese als Unbekannte einführt und ihren Wert resp. ihre Werte aus der erhaltenen Gleichung berechnet. Damit ist dann die Gleichung auf die einfachste Form zurückgeführt und beiderseitiges Logarithmieren bildet die letzte Operation. Möge das Verfahren an einigen Beispielen erläutert sein.

Aufgabe 103. $6^x + 6^{2x} = 56.$

Auflösung. Es ist

$$6^{2x} = (6^2)^x = (6^x)^2; \text{ setze nun}$$

$$6^x = y, \text{ so kommt:}$$

$$y^2 + y - 56 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2} = \frac{-1 \pm 15}{2}$$

$y_1 = 7$ und $y_2 = -8$. Also

$6^x = 7$ und $6^x = -8$

$x \cdot \log 6 = \log 7$

$$x = \frac{\log 7}{\log 6} = \frac{0 \cdot 84510}{0 \cdot 77815} \quad \Big| \quad \begin{array}{l} x \cdot \log 6 = \log -8 \\ x_2 \text{ wird imaginär.} \end{array}$$

Aufgabe 104. $2^{x-1} + 2^{7-x} = 5 \cdot 2^2$.

Auflösung. Man erhält:

$$\frac{2^x}{2} + \frac{2^7}{2^x} = 20.$$

Setzt man $2^x = y$,

so erhält man:

$$\frac{y}{2} + \frac{128}{y} - 20 = 0$$

$$y^2 + 256 - 40y = 0$$

$$y = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1024}}{2} = \frac{40 \pm 24}{2}$$

$$y_1 = 32 \text{ und } y_2 = 8.$$

Also: $2^x = 32$ und $2^x = 8$

$x \cdot \log 2 = \log 32$ | $x \cdot \log 2 = \log 8$

$$x = \frac{\log 8}{\log 2}$$

$$x = \frac{\log 32}{\log 2} = \frac{\log 2^5}{\log 2}$$

$$x = \frac{\log 2^3}{\log 2}$$

$$x = \frac{5 \cdot \log 2}{\log 2} = 5 \qquad x = \frac{3 \log 2}{\log 2} = 3.$$

Also: $x_1 = 5$ und $x_2 = 3$.

Aufgabe 105.

Man setze $4^x = y$ und erhält:

$$y - \frac{8}{y} - 15{,}5 = 0$$

$$y^2 - 8 - 15{;}5y = 0$$

$$y = \frac{15{,}5 \pm \sqrt{15{,}5^2 + 32}}{2} = \frac{15{,}5 \pm 16{,}5}{2}$$

$$y_1 = 16 \text{ und } y_2 = -0{,}5.$$

Daraus: $4^x = 16$ und | $4^x = -0{,}5$

$$x \cdot \log 4 = \log 16 \qquad x \cdot \log 4 = \log -0{,}5$$

$$x = \frac{2 \log 4}{\log 4} = 2 \qquad x_2 \text{ also imaginär.}$$

Es ist also $x = 2.$

Lassen sich beide Seiten sofort logarithmieren, so logarithmiere man ohne weiteres.

Aufgabe 106. $a^{x-2}, b^{x-1} = c^{x+1}$

Auflösung. Durch beiderseitiges Logarithmieren erhält man:

$$(x-2)\log a + (x-1)\log b = (x+1)\log c$$

$$x \cdot \log a - 2\log a + x \log b - \log b - x \log c - \log c = 0$$

$$x(\log a + \log b - \log c) = 2\log a + \log b + \log c$$

$$x = \frac{2\log a + \log b + \log c}{\log a + \log b - \log c}$$

Aufgabe 107. $\sqrt[x]{8^{3x+1}} = \sqrt[2x]{4^{x+2}}$

Auflösung. Man erhält durch beiderseitiges Logarithmieren:

$$\frac{1}{x} \cdot \log 8^{3x+1} = \frac{1}{2x} \log 4^{x+2}$$

$$\frac{3x+1}{x} \log 8 = \frac{8+2}{2x} \cdot \log 4$$

$$\frac{3x+1}{x} \cdot \log 2^3 = \frac{x+2}{2x} \cdot \log 2^2$$

$$\frac{3(3x+1)}{x} = \frac{2(x+2)}{2x}$$

$$18x + 6 - 2x - 4 = 0$$

$$16x = -2$$

$$x = -\frac{1}{8}.$$

Lassen sich die Exponentialgrößen nicht auf nur eine zurückführen, so ist es oft möglich, sie wenigstens auf zwei zu vereinigen. Man bringt dann je die gleichnamigen auf eine Gleichungsseite, wodurch die Gleichung lösbar wird.

Aufgabe 108. $2^x + 2^{x+2} + 2^{x+6} = 3^x + 3^{x+3}$

$$2^x + 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^6 = 3^x + 3^x \cdot 3^3$$

$$2^x(1 + 2^2 + 2^6) = 3^x(1 + 3^3)$$
$$2^x \cdot 69 = 3^x \cdot 28$$
$$x \cdot \log 2 + \log 69 = x \log 3 + \log 28$$
$$x(\log 2 - \log 3) = \log 28 - \log 69$$
$$x = \frac{\log \frac{28}{69}}{\log \frac{2}{3}}.$$

Bei Exponentialgleichungen mit mehreren Unbekannten sucht man jede Gleichung in eine logarithmierbare Form zu bringen. Durch Logarithmieren erhält man die Unbekannten nur noch als Faktoren in den Gleichungen, welche nach den bereits gezeigten algebraischen Methoden gelöst werden.

Aufgabe 109. $\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{a^2} = \sqrt[12]{a^5}$

$$\sqrt[x]{a^2} : \sqrt[y]{a^3} = \frac{1}{\sqrt[24]{a}}$$

Auflösung. Durch beiderseitiges Logarithmieren erhält man:

$$\frac{1}{x} \cdot \log a + \frac{1}{y} \log a^2 = \frac{1}{12} \log a^5$$
$$\frac{1}{x} \log a^2 - \frac{1}{y} \log a^3 = -\frac{1}{24} \log a$$

$$\frac{1}{x} \log a + \frac{2}{y} \log a = \frac{5}{12} \log a$$
$$\frac{2}{x} \log a - \frac{3}{y} \log a = -\frac{1}{24} \log a$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{5}{12} = 0$$
$$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{x} = u \text{ und } \frac{1}{y} = v$$
$$u + 2v - \frac{5}{12} = 0$$
$$2u - 3v + \frac{1}{24} = 0$$

$$2u + 4v - \frac{20}{24} = 0$$

$$2u - 3v + \frac{1}{24} = 0$$

$$7v - \frac{21}{24} = 0$$

$$v = \frac{1}{8}, \text{ also}: y = 8$$

$$u = \frac{5}{12} - 20 = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

also $$x = 6.$$

Aufgabe 110. $\sqrt[y]{a^x} = a^2 : \sqrt[y]{a^7}$

$$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{a : b} = \left(\sqrt[15]{a^2}\right)^4 : \sqrt[y]{b}.$$

Auflösung. Logarithmiere beiderseits und es kommt:

$$\frac{1}{y} \log a^x = 2 \log a - \frac{7}{y} \log a$$

$$\frac{x}{y} \cdot \log a = 2 \log a - \frac{7}{y} \log a$$

$$\frac{x}{y} + \frac{7}{y} - 2 = 0 \qquad (1.)$$

$$\frac{1}{x} \cdot \log a + \frac{1}{y} \log \frac{a}{b} = 4 \cdot \log \sqrt[15]{a^2} - \frac{1}{y} \log b$$

$$\frac{1}{x} \log a + \frac{1}{y} \log a - \frac{1}{y} \log b = \frac{4 \cdot 2}{15} \log a - \frac{1}{y} \log b$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{8}{15} = 0 \qquad (2.)$$

$$x + 7 - 2y = 0$$

$$15y + 15x - 8xy = 0$$

$$x = 2y - 7$$

$$15y + 15(2y - 7) - 8(2y - 7) = 0$$

$$15y + 30y - 105 - 16y^2 + 56y = 0$$

$$-16y^2 + 101y - 105 = 0$$

$$16y^2 - 101y + 105 = 0$$

$$y = \frac{101 \pm \sqrt{101^2 - 64 \cdot 105}}{32} = \frac{101 \pm 59}{32}$$

$$y_1 = 5 \text{ und } y_2 = 1\tfrac{5}{16}$$
$$x_1 = 3 \text{ und } x_2 = -4\tfrac{3}{8}.$$

Aufgabe 111. $a^x \cdot a^y : a^5 = a^{13}$

$$(a^x)^y = a^{77}$$

Durch Logarithmieren erhält man:

$$x \cdot \log a + y \log a - 5 \log a = 13 \log a$$
$$y \log a^x = 77 \log a$$
$$xy \log a = 77 \log a$$

$$x + y = 18$$
$$xy = 77$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 324$$
$$4xy = 308$$

$$(x - y)^2 = 16$$
$$x - y = \pm 4$$
$$x + y = 18$$

$$x_1 = 11$$
$$y_1 = 7$$
$$x_2 = 7$$
$$y_2 = 11.$$

Aufgabe 112. $3^x - 5^y = 4$

$$3^{2x} + 5^{2y} = 106.$$

Auflösung. Man setze $3^x = u$ und $5^y = v$ und es kommt

$$u - v = 4$$
$$u^2 + v^2 = 106$$

$$u^2 + v^2 - 2uv = 16$$
$$u^2 + v^2 = 106$$

$$-2uv = -80$$
$$2uv = 80$$
$$u^2 + v^2 + 2uv = 196$$
$$u + v = \pm\sqrt{196} = \pm 14$$
$$u - v = 4$$

$$u = 9 \text{ u. } v = 5$$

$$3^x = 9$$
$$x \log 3 = 2 \log 3$$
$$x = 2$$

$$5^y = 5$$
$$y \log 5 = \log 5$$
$$y = 1.$$

Aufgabe 113.
$$xy = a$$
$$x^{\log y} = b$$

$$\log x + \log y = \log a$$
$$\log y \cdot \log x = \log b.$$

Setzen wir $\log x = u$ und $\log y = v$, so erhalten wir:
$$u + v = \log a$$
$$u \cdot v = \log b$$

Nunmehr lösen wir das System nach bekannter Weise.

Eine Gleichung heißt eine logarithmische, wenn sie die Unbekannte als Logarithmand enthält. Die einfachste Form einer logarithmischen Gleichung ist:

$$\log x = n.$$

Ihre Lösung ist:

$$x = (\text{Basis})^n \text{ oder } x = \text{num} \log n.$$

Ist n eine reelle Zahl und ist die Basis 10 (künstliches Logarithmensystem), so entnimmt man den Wert von x einer Logarithmentafel. Andere logarithmische Gleichungen müssen auf diese Form gebracht werden. Haben die Logarithmen verschiedene Basis, so muß man sie auf dieselbe Basis bringen. Man erinnere sich dabei wieder der Formel:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Wir wollen auch hier einige Beispiele lösen.

Aufgabe 114. $\log x + \log x^2 + \log x^3 = \log 4x^2$

$$\log x + 2\log x + 3\log x - \log 4 - 2\log x = 0$$
$$4 \log x - \log 4 = 0.$$
$$4 \log x = \log 4$$
$$2 \log x = \log 2$$

infolgedessen:

$$\log x = \frac{1}{2} \log 2$$

$$x = \sqrt{2}.$$

Aufgabe 115. $\log 2x + \log x^2 + \log 2^{\log x} = 2$

$$\log 2 + \log x + 2 \log x + \log x \cdot \log 2 = 2$$

$$\log x (1 + 2 + \log 2) = 2 - \log 2$$

$$\log x = \frac{2 - \log 1}{3 + \log 2}.$$

Aufgabe 116. $\log_2 x + \log_3 x = \log_6 2x.$

Auflösung. Bringen wir sämtliche Logarithmen auf die Basis 10. Wir erhalten:

$$\frac{\log x}{\log 2} + \frac{\log x}{\log 3} = \frac{\log 2 + \log x}{\log 2 + \log 3}$$

$$\log x \log 3 (\log 3 + \log 3) + \log x \cdot \log 2 (\log 2 + \log 3)$$
$$= \log 2 + \log x) \log 2 \log 3$$

$$\log x \cdot \log 3 \log 2 + \log x (\log 3)^2 + \log x (\log 2)^2 + \log x \log 2 \cdot \log 3$$
$$= (\log 2)^2 \log 3 + \log x \log 2 \log 3.$$

$$\log x \cdot [\log 2 \cdot \log 3 + (\log 2^2 + (\log 3)^2] = \log 2)^2 \log 3$$

$$\log x = \frac{(\log 2)^2 \log 3}{(\log 2)^2 + \log 2 \log 3 + (\log 3)^2}.$$

Aufgabe 117.

$$\log (x - 5) + \log (x + 2) = \log (x - 7) + \log (x + 6)$$

Auflösung. Wir erhalten:

$$\log [(x - 5) \cdot (x + 2)] = \log [(x - 7)(x + 6)]$$

$$\log (x^2 + 2x - 5x - 10) = \log (x^2 + 6x - 7x - 42).$$

Wenn aber zwei Logarithmen bei gleicher Basis einander gleich sind, so müssen auch die Logarithmanden einander gleich sein, also:

$$x^2 - 3x - 10 = x^2 - x - 42$$

$$-2x = -92$$

$$x = 16.$$

Aufgabe 118. $$\frac{2 \log 2 + \log 2x}{\log (2x - 4)} = 2$$

Auflösung. Man erhält:

$$\frac{\log(4 \cdot 2x)}{\log(2x - 4)} = 2$$

$$\log(4 \cdot 2x) = 2 \cdot \log(2x - 4) \text{ oder:}$$

$$\log(8x) = \log(2x \pm 4)^2; \text{ also muß:}$$

$$3x = (2x - 4)^2$$

$$4x^2 + 16 - 16x - 8x = 0$$

$$4x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$x = \frac{+24 \pm \sqrt{24^2 - 256}}{8}$$

$$x = \frac{+24 \pm \sqrt{320}}{8} = \frac{+24 \pm 8\sqrt{5}}{8}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{5} \text{ und } x_2 = 3 - \sqrt{5}.$$

Aufgabe 119. $\log_x 5 + \log_5 x = 4.$

Auflösung. $$\frac{\log 5}{\log x} + \frac{\log x}{\log 5} = 4$$

$$\frac{(\log 5)^2 + \log x)^2}{\log x \cdot \log 5} = 4$$

$$(\log x)^2 - 4 \log 5 \cdot \log x + (\log 5)^2 = 0$$

Hieraus läßt sich $\log x$ berechnen.

Aufgabe 120. $$\log_y x + \log_x y = 2{,}5$$
$$\log x + \log y = 1{,}43136$$

Auflösung. Man erhält:

$$\frac{\log x}{\log y} + \frac{\log y}{\log x} = 2{,}5$$

$$(\log x)^2 + (\log y)^2 - 2{,}5 \log x \cdot \log y = 0$$
$$\log x + \log y - 1{,}43 \cdot 136 = 0$$

Man setze: $\log x = u$ und $\log y = v$,
dann erhält man:

$$u^2 + v^2 = 2{,}5\, u\, v$$
$$u + v = 1{,}43136.$$

Dieses Gleichungssystem zu lösen bietet keine Schwierigkeit. Man erhält schließlich:

$$x = 3 \text{ und } y = 9.$$

Zum Schlusse dieses Kapitels sei noch bemerkt, daß die Exponentialgleichungen unendlich vieldeutig sind; unsere Auflösung liefert nur einen, den reellen Wert; alle übrigen Werte sind imaginär. Der Grund liegt in der unendlichen Anzahl der Logarithmen einer Zahl. Wir werden in den Heften über höhere Analysis hierauf zurückkommen.

Kapitel IV.

Repetitionsaufgaben.

Nach dem System der drei ersten Bände geben wir im folgenden dem Schüler noch weiteres Übungsmaterial, um ihm in der Auflösung der quadratischen Gleichungen eine möglichst große Sicherheit zu geben. Besonders war ich bestrebt, zahlreiche Aufgaben mit mehreren Unbekannten aufzunehmen, da die Lösung dieser meist scharfsinnige Operationen erfordern, die dem Schüler erst nach weitgehendster Uebung geläufig werden. Wir raten dem Schüler dringendst, alle Aufgaben durchzurechnen und zwar immer zuerst ohne Benützung unserer Lösungen; ein Vergleich seiner Lösung mit der unserigen wird ihm dann oft zeigen, welch verschiedene Wege zur Lösung führen und welcher der kürzeste ist.

Gleichungen mit einer Unbekannten.

1. $$\frac{ax + b}{a + bx} = \frac{cx + d}{c + dx}$$

Es kommt:

$$(ax + b)(c + dx) = (cx + d)(a + bx)$$

$$acx + adx^2 + bc + bdx = acx + bcx^2 + ad + bdx$$

oder geordnet:

$$adx^2 - bcx^2 = ad - bc$$

oder:

$$x^2 (ad - bc) = ad - bc$$

$$x^2 = \frac{ad - bc}{ad - bc} = 1$$

$$x = \pm \sqrt{1} = \pm 1.$$

2. $$\sqrt{x + 4} - \sqrt{5x - 24} = \frac{6}{\sqrt{x + 4}}$$

Man erhält durch Multiplikation der ganzen Gleichung mit $\sqrt{x+4}$:

$$x + 4 - \sqrt{(5x - 24)(x + 4)} = 6$$

$$x + 4 - \sqrt{5x^2 + 20x - 24x - 96} = 6$$

$$x + 4 - \sqrt{5x^2 - 4x - 96} = 6$$

$$x - 2 = \sqrt{5x^2 - 4x - 96}$$

$$(x - 2)^2 = 5x^2 - 4x - 96$$

$$x^2 - 4x + 4 = 5x^2 - 4x - 96$$

$$4x^2 = 100$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm\sqrt{25}$$

$$x_1 = +5$$

$$x_2 = -5$$

3. $$x^2 + 2ax = b$$

$$x^2 + 2ax - b = 0$$

$$x = \frac{1}{2}(-2a \pm \sqrt{4a^2 + 4b})$$

$$x = -a \pm \frac{1}{2}\sqrt{4(a^2 + b)}$$

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 + b}$$

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2 + b}$$

$$x_2 = -a - \sqrt{a^2 + b}$$

4. $$ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$x_1 = -\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

5. $$3x^2 - 7x = 16$$

$$3x^2 - 7x - 16 = 0$$

$$x = \frac{+7 \pm \sqrt{49 + 192}}{6} = \frac{+7 \pm \sqrt{241}}{6}$$

6.
$$(a - x)(x - b) + ab = 0$$
$$ax - ab - x^2 + bx + ab = 0$$
$$-x^2 + x(a + b) = 0$$
$$x^2 - x(a + b) = 0$$
$$x[x - (a + b)] = 0$$

also entweder:
$$x = 0$$

oder:
$$x - (a + b) = 0$$
$$x = a + b$$

also:
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = a + b$$

7.
$$\frac{4}{x - 1} + \frac{1}{x - 4} = \frac{3}{x - 2} + \frac{2}{x - 3}$$
$$4(x - 4)(x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$
$$= 3(x - 1)(x - 4)(x - 3) + 2(x - 1)(x - 4)(x - 2)$$
$$(4x - 16)(x - 2)(x - 3) + (x^2 - x - 2x + 2)(x - 3)$$
$$= (3x - 3)(x - 4)(x - 3) + (2x - 2)(x - 4)(x - 2)$$
$$(4x^2 - 16x - 8x + 32)(x - 3) + (x^2 - 3x + 2(x - 3)$$
$$= (3x^2 - 12x - 3x + 12)(x - 3) + (2x^2 - 8x - 2x + 8)(x - 2).$$
$$(4x^2 - 24x + 32)(x - 3) + (x^2 - 3x + 2)(x - 3)$$
$$= (3x^2 - 15x + 12)(x - 3) + (2x^2 - 10x + 8)(x - 2)$$
$$4x^3 - 24x^2 + 32x - 12x^2 + 72x - 96 + x^3 - 3x^2$$
$$+ 2x - 3x^2 + 9x - 6 = 3x^3 - 15x^2 + 12x - 9x^2$$
$$+ 45x - 36 + 2x^3 - 10x^2 + 8x - 4x^2 + 20x - 16$$
$$-4x^2 + 30x - 50 = 0$$
$$4x^2 - 30x + 50 = 0$$
$$x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 800}}{8} = \frac{30 \pm 10}{8}$$
$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 2{,}5.$$

8.
$$ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$$
$$x = \frac{(a^2 + 1) \pm \sqrt{(a^2 + 1)^2 - 4a^2}}{2a}$$
$$x = \frac{(a^2 + 1) \pm \sqrt{a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2}}{2a} = \frac{(a^2 + 1) \pm \sqrt{(a^2 - 1)^2}}{2a}$$

$$x = \frac{(a^2 + 1) \pm (a^2 - 1)}{2a}$$

$$x_1 = \frac{a^2 + 1 + a^2 - 1}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a$$

$$x_2 = \frac{a^2 + 1 - a^2 + 1}{2a} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}.$$

9. $$(a - x)^2 + (x - b)^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - 2ax + x^2 + x^2 - 2bx + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$2x^2 - 2x(a + b) + 2ab = 0$$

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left[(a + b) \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[(a + b) \pm \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab - 4ab}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[(a + b) \pm \sqrt{(a - b)^2}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[(a + b) \pm (a - b)\right]$$

$$x_1 = \frac{a + b + a - b}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$$x_2 = \frac{a + b - a + b}{2} = \frac{2b}{2} = b.$$

10. $$(a - x)(b - x) = 2(a - b)^2$$

$$ab - bx - ax + x^2 = 2(a - b)^2$$

$$x^2 - (a + b)x + ab - 2(a - b)^2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left[(a + b) \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4ab + 8(a - b^2}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[(a+b) \pm \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 8a^2 + 8b^2 - 16ab}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[(a + b) \pm \sqrt{9a^2 + 9b^2 - 18ab}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[(a + b) \pm \sqrt{9 \cdot (a - b)^2}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[(a + b) \pm 3(a - b)\right]$$

$$x_1 = \frac{a + b + 3a - 3b}{2} = \frac{4a - 2b}{2} = 2a - b$$

$$x_2 = \frac{a + b - 3a + 3b}{2} = \frac{4b - 2a}{2} = 2b - a$$

11. $$(3x - 5)^2 - 8(3x - 5) + 7 = 0$$

$$9x^2 + 25 - 30x - 24x + 40 + 7 = 0$$

$$9x^2 - 54x + 72 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}(6 \pm \sqrt{36 - 32})$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(6 + 2) = 4$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(6 - 2) = 2$$

12. $$3x - 7\sqrt{x+2} = 0$$

$$\sqrt{x} = y$$

$$x = y^2$$

$$3y^2 - 7x + 2 = 0$$

$$y = \frac{+7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6}$$

$$y = \frac{+7 \pm 5}{6}$$

$$y_1 = 2$$

$$y_2 = \frac{1}{3}$$

$$x_1 = y_1^2 = 4$$

$$x_2 = y_2^2 = \frac{1}{9}$$

13. $$x^2 - 5x = 6\sqrt{-3} - 16$$

$$x = \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{25 + 24\sqrt{-3} - 64}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{-39 + 24\sqrt{-3}}\right)$$

Nun ist bekanntlich:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

und:

$$\sqrt{-a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

also: $\sqrt{39 + 24\sqrt{-3}} = \sqrt{-39 + \sqrt{-3 \cdot 24^2}}$

$$= \sqrt{-\frac{39}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{39^2 + 3 \cdot 24^2}} + \sqrt{-\frac{39}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{39^2 + 3 \cdot 24^2}}$$

$$= 3 + 4\sqrt{-3}.$$

Diesen Wert in unsere Lösung eingeführt gibt:

$$x = \frac{1}{2}\left[5 \pm (3 + 4\sqrt{-3})\right]$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(8 + 4\sqrt{-3}) = 4 + 2\sqrt{-3}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(2 + 4\sqrt{-3}) = 1 - 2\sqrt{-3}$$

14. $x^2 + (5 + 2\sqrt{-1})\,x = 24 + 6\sqrt{-1}$

$$x^2 + (5 + 2\sqrt{-1})\,x - 24 - 6\sqrt{-1} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left[-5 - 2\sqrt{-1} \pm \sqrt{(5 + 2\sqrt{-1})^2 + 96 + 24\sqrt{-1}}\right]$$

$$x = -\frac{5 + 2\sqrt{-1}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{25 + 20\sqrt{-1} - 4 + 96 + 24\sqrt{-1}}$$

$$x = -\frac{5 + 2\sqrt{-1}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{117 + 44\sqrt{-1}}$$

Den irrationalen Teil zerlegen wir wieder und erhalten:

$$\sqrt{117 + 44\sqrt{-1}} = \sqrt{117 + \sqrt{-44^2}} = \sqrt{\frac{117}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{117^2 + 44^2}}$$

$$+ \sqrt{\frac{117}{2} - \sqrt{117^2 + 44^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{117}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13689 + 1936}} + \sqrt{\frac{117}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13689 + 1936}}$$

$$= \sqrt{\frac{117}{2} + \frac{125}{2}} + \sqrt{\frac{117}{2} - \frac{125}{2}} = 11 + 2\sqrt{-1}$$

$$x = -\frac{1}{2}\left[5 + 2\sqrt{-1} \pm \left(\frac{11}{2} + 2\sqrt{-1}\right)\right]$$

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = -8 - 2\sqrt{-1}.$$

15. $x^2 - (8 - 2\sqrt{-1})\,x = 38\sqrt{-1} - 31$

$$x^2 - (8 - 2\sqrt{-1})\,x - (38\sqrt{-1} - 34) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(8 - 2\sqrt{-1} \pm \sqrt{(8 - 2\sqrt{-1})^2 + 4(38\sqrt{-1} - 34)}\right)$$

$$x = 4 - \sqrt{-1} \pm \sqrt{-16 + 30\sqrt{-1}}$$

Nun zerlegen wir wieder den irrationalen Teil und erhalten:

$$\sqrt{-16 + 30\sqrt{-1}} = \sqrt{-16 + \sqrt{-30^2}}$$

$$= \sqrt{-\frac{16}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 30^2}} + \sqrt{-\frac{16}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 30^2}}$$

$$= \sqrt{-\frac{16}{2} + \frac{34}{2}} + \sqrt{-\frac{16}{2} - \frac{34}{2}} = 3 + 5\sqrt{-1}$$

Also: $\quad x = 4 - \sqrt{-1} \pm (3 + 5\sqrt{-1})$

$$x_1 = 7 + 4\sqrt{-1} \text{ und:}$$
$$x_2 = 1 - 6\sqrt{-1}.$$

16. $\quad x^2 - 2x = 2\sqrt{6} - 6$

$$x^2 - 2x - 2\sqrt{6} + 6 = 0$$

$$x = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 + 8\sqrt{6} - 24} = 1 \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{6} - 24}$$

$$= 1 \pm \sqrt{-5 + 2\sqrt{6}}.$$

Wir zerlegen wiederum den irrationalen Teil. Es ist:

$$\sqrt{-5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{-5 + \sqrt{24}} = \sqrt{-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{25 - 24}}$$

$$+ \sqrt{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{25 - 24}} = \sqrt{-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{-2} + \sqrt{-3}$$

also:

$$x = 1 \pm (\sqrt{-2} + \sqrt{-3}).$$

17. $$\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{2b}.$$

Quadriere auf beiden Seiten und es kommt:

$$a + x + a - x - 2\sqrt{a^2 - x^2} = 2b$$
$$-2\sqrt{a^2 - x^2} = 2b - 2a$$
$$\sqrt{a^2 - x^2} = a - b$$
$$a^2 - x^2 = (a - b)^2$$
$$-x^2 = a^2 - 2ab + b^2 - a^2$$
$$x^2 = 2ab - b^2$$
$$x = \pm\sqrt{b(2a - b)}.$$

18. $$\frac{x+a}{x-a} - \frac{x-a}{x+a} = \frac{4a(a+b)}{b(2a+b)}$$

$$\frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{x^2 - a^2} = \frac{4a(a+b)}{b(2a+b)}$$

$$\frac{4ax}{x^2 - a^2} = \frac{4a(a+b)}{b(2a+b)}$$

$$x^2 - \frac{b(2a+b)}{a+b}x - a^2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{b(2a+b)}{a+b} \pm \sqrt{\left(\frac{b(2a+b)}{a+b}\right)^2 + 4a^2}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{b(2a+b)}{a+b} \pm \sqrt{\left(\frac{2ab+b}{a+b}\right)^2 + 4a^2}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{b(2a+b)}{a+b} \pm \sqrt{\frac{4a^2b^2 + b^2 + 4ab^2}{a^2 + 2ab + b^2} + 4a^2}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{b(2a+b}{a+b} \pm \frac{1}{a+b}\sqrt{4a^2b^2 + b^2 + 4ab^2 + 4a^2(a+b)^2}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{b(2a+b)}{a+b} \pm \frac{2a^2 + 2ab + b^2}{a+b}\right]$$

$$x = \frac{2ab + 2b^2 \pm (2a^2 + 2ab + b^2)}{2(a+b)}$$

19. $$\frac{2+3x}{1-4x} - \frac{6-5x}{7x-25} = \frac{16-x}{28x-193}$$

$$(2+3x)(7x-25)(28x-193) - (6-5x)(1-4x)(28x-139)$$
$$= (16-x)(1-4x)(7x-25):$$

Dies ausgerechnet und geordnet ergibt:

$$178x^2 - 957x - 3736 = 0$$

$$x = \frac{957 \pm \sqrt{957^2 + 4 \cdot 178 \cdot 3736}}{2 \cdot 178}$$

$$x = \frac{957 \pm \sqrt{915849 + 2660032}}{356}$$

$$x = \frac{957 \pm \sqrt{3575881}}{356} = \frac{927 \pm 1891}{356}$$

$$x_1 = +8$$

$$x_2 = -\frac{467}{178}.$$

20. $$\frac{1}{a - x} - \frac{1}{a + x} = \frac{3 + x^2}{a^2 - x^2}$$

$$a + x - (a - x) = 3 + x^2$$

$$-x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 - 12} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-8}.$$

$$x = 1 \pm \sqrt{-2}.$$

21. $$(a - 1)^2 x^2 + 2(3a - 1)x = 4a - 1$$

$$x^2 + \frac{2(3a - 1)}{(a - 1)^2} x - \frac{4a - 1}{(a - 1)^2} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-\frac{2(3a - 1)}{(a - 1)^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2(3a - 1)}{(a - 1)^2}\right)^2 + \frac{4(4a - 1)}{(a - 1)^2}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-\frac{2(3a - 1)}{(a - 1)^2} \pm \frac{1}{(a - 1)^2}\sqrt{4(3a - 1)^2 + 4(4a - 1)(a - 1)^2}\right)$$

$$x = \frac{1 - 3a \pm 2a\sqrt{a}}{(a - 1)^2}$$

22. $$x : (a + x) + (a + x) : x = 2\frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 2(a + x)^2 = 5x(a + x)$$

$$2x^2 + 2a^2 + 2x^2 + 4ax = 5ax + 5x^2$$

$$-x^2 - ax + 2a^2 = 0$$

$$x^2 + ax - 2a^2 = 0$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8a^2}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{3a}{2}$$

$$x_1 = -2a$$

$$x_2 = +a$$

23. $$\frac{12x^3 - 11x^2 + 10x - 78}{8x^2 - 7x + 6} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$24x^3 - 22x^2 + 20x - 156 = 3x(8x^2 - 7x + 6) - 8x^2 + 7x - 6$$

$$7x^2 - 5x - 150 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 28 \cdot 150}}{14}$$

$$x = \frac{5 \pm 65}{14}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -\frac{30}{7}.$$

24. $$\frac{\sqrt{3a + x}}{\sqrt{a} + \sqrt{3a + x}} = \frac{\sqrt{3a - x}}{\sqrt{a} - \sqrt{3a - x}}$$

$$\sqrt{3a + x}\,(\sqrt{a} - \sqrt{3a - x}) = \sqrt{3a - x}\,(\sqrt{a} + \sqrt{3a + x})$$

oder ausmultipliziert:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{3a + x} - \sqrt{9a^2 - x^2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{3a - x} + \sqrt{9a^2 - x^2}$$

$$\sqrt{a} \cdot (\sqrt{3a + x} - \sqrt{3a - x}) = 2\sqrt{9a^2 - x^2}$$

Nun quadriere man:

$$a\,(3a + x + 3a - x - 2\sqrt{9a^2 - x^2}) = 4(9a^2 - x^2)$$

$$3a^2 + 3a^2 - 2a\sqrt{9a^2 - x^2} = 36a^2 - 4x^2$$

$$2a\sqrt{9a^2 - x^2} = 4x^2 - 30a^2$$

$$a\sqrt{9a^2 - x^2} = 2x^2 - 15a^2$$

$$a^2(9a^2 - x^2) = 4x^4 + 225a^4 - 60a^2x^2$$

$$9a^4 - a^2x^2 - 4x^4 - 225a^4 + 60a^2x^2 = 0$$
$$-4x^4 + 59a^2x^2 - 216a^4 = 0$$
$$4x^4 - 59a^2x^2 + 216a^4 = 0$$

Setzen wir nun: $x^2 = y$

so kommt:

$$4y^2 - 59a^2y + 216a^4 = 0$$
$$y = \frac{59a^2 \pm \sqrt{59^2a^4 - 16 \cdot 216a^4}}{8}$$
$$y = \frac{59a^2 \pm \sqrt{25a^4}}{8}$$
$$y = \frac{59a^2 \pm 5a^2}{8}$$
$$y_1 = 8a^2$$
$$y_2 = \frac{27}{4}a^2$$

also: $x = \pm\sqrt{8a^2}$

und: $x = \pm\sqrt{\frac{27}{4}a^2}$

also:
$$x_1 = +2a\sqrt{2}$$
$$x_2 = -2a\sqrt{2}$$
$$x_3 = +\frac{3a}{2}\sqrt{3}$$
$$x_4 = -\frac{3a}{2}\sqrt{3}.$$

25. $$\frac{2x-3}{3x-2} - \frac{3x-2}{2x-3} = 5(1-x^2)$$
$$\frac{(2x-3)^2 - (3x-2)^2}{6x^2 - 13x + 6} = 5(1-x^2)$$
$$\frac{4x^2 + 9 - 12x - 9x^2 - 4 + 12x}{6x^2 - 13x + 6} - 5(1-x^2) = 0$$
$$\frac{-5x^2 + 5}{6x^2 - 13x + 6} - 5(1-x^2) = 0$$
$$\frac{5(1-x^2)}{6x^2 - 13x + 6} - 5(1-x^2) = 0$$
$$(1-x^2)\cdot\left[\frac{1}{6x^2 - 13x + 6} - 1\right] = 0.$$

Also entweder:

$$1 - x^2 = 0$$
$$x = \pm \sqrt{1}$$
$$x_1 = +1$$
$$x_2 = -1,$$

oder:

$$\frac{1}{6x^2 - 13x + 6} - 1 = 0$$
$$6x^2 - 13x + 6 = 1$$
$$6x^2 - 13x + 5 = 0$$
$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{12}$$
$$x = \frac{13 \pm 7}{12}$$
$$x_3 = \frac{5}{3}$$
$$x_4 = \frac{1}{2}.$$

26. $$\frac{x + m}{a + m} - \frac{a - m}{x - m} = \frac{x + n}{a + n} - \frac{a - n}{x - n}$$

$$\frac{x^2 - m^2 - a^2 + m^2}{(a + m)(x - m)} = \frac{x^2 - n^2 - a^2 + n^2}{(a + n)(x - n)}$$

$$\frac{x^2 - a^2}{(a + m)(x - m)} - \frac{x^2 - a^2}{(a + n)(x - n)} = 0$$

$$(x^2 - a^2) \cdot \left[\frac{1}{(a + m)(x - m)} - \frac{1}{(a + n)(x - n)}\right] = 0,$$

also entweder: $$x^2 - a^2 = 0$$
$$x_1 = +a$$
$$x_2 = -a$$

oder:

$$\frac{1}{(a + m)(x - m)} - \frac{1}{(a + n)(x - n)} = 0$$
$$(a + n)(x - n) = (a + m)(x - m)$$
$$ax - an + nx - n^2 = ax - am + mx - m^2$$
$$nx - mx = n^2 - m^2 - am + an$$

$$(n - m)\,x = (n - m)\,(n + m + a)$$

$$x_3 = n + m + a.$$

27. $$(m - n)\,x^2 - n x = m$$

$$(m - n)\,x^2 - n x - m = 0$$

$$x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 4m\,(m - n)}}{2\,(m - n)}$$

$$x = \frac{n \pm \sqrt{(n - 2m)^2}}{2\,(m - n)}$$

$$x = \frac{n \pm \sqrt{(n - 2m)^2}}{2\,(m - n)}$$

also:

$$x_1 = \frac{2\,(n - m)}{2\,(m - n)} = -1$$

und:

$$x_2 = \frac{2m}{2(m-n)} = \frac{m}{m - n}.$$

28. $$x^2 + \frac{a - b}{ab^2} = \frac{14a^2 - 5b\,(a + 2b)}{18a^2b^2} + \frac{2a - 3b}{2ab}\,x$$

$$x^2 - \frac{2a - 3b}{2ab}\,x + \frac{a - b}{ab^2} - \frac{14a^2 - 5b\,(a + 2b)}{18a^2b^2} = 0$$

$$x^2 - \frac{2a - 3b}{2ab}\,x + \frac{18a^2 - 18ab - 14a^2 + 5ab + 10b^2}{18a^2b^2} = 0$$

$$x^2 - \frac{2a - 3b}{2ab}\,x + \frac{4a^2 - 13ab + 10b^2}{18a^2b^2} = 0.$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{2a - 3b}{2ab} \pm \sqrt{\left(\frac{2a - 3b}{2ab}\right)^2 - \frac{4\,(4a^2 - 13ab + 10b^2}{18a^2b^2}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{2a - 3b}{2ab} \pm \sqrt{\frac{a\,(2a - 3b)^2 - 2\cdot 4\,(4a^2 - 13ab + 10b^2}{36a^2b^2}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{2a - 3b}{2ab} \pm \frac{1}{6ab}\sqrt{36a^2 + 81b^2 - 108ab - 32a^2 + 104ab - 80b^2}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{2a - 3b}{2ab} \pm \frac{1}{6ab}\sqrt{4a^2 - 4ab + b^2}\right.$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{2a - 3b}{2ab} \pm \frac{2a - b}{6ab}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{6a - 9b + 2a - b}{6ab} = \frac{4a - 5b}{6ab}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{6a - 9b - 2a + b}{6ab} = \frac{a - 2b}{3ab}$$

29. $$\frac{x}{a - b} = \frac{1}{2\sqrt{a} - x}$$

$$x(2\sqrt{a} - x) = a - b$$

$$2\sqrt{a} \cdot x - x^2 - a + b = 0$$

$$x^2 - 2\sqrt{a} \cdot x - (a - b) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}(+2\sqrt{a} \pm \sqrt{4a - 4a + 4b})$$

$$x = \frac{1}{2}(2\sqrt{a} \pm 2\sqrt{b})$$

$$x_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$x_2 = \sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

30. $$\frac{1}{a - b + x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{a - b + x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$\frac{x - (a - b + x)}{(a - b + x) \cdot x} = \frac{b - a}{ab}$$

$$\frac{b - a}{(a - b + x)x} - \frac{b - a}{ab} = 0$$

$$(b - a) \cdot \left[\frac{1}{(a - b + x)x} - \frac{1}{ab}\right] = 0$$

und da $b - a$ nicht Null sein soll, so muß:

$$\frac{1}{(a - b + x)x} - \frac{1}{ab} = 0$$

oder: $$ab = (a - b + x)x$$

$$x^2 + (a - b)x - ab = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left[-(a - b) \pm \sqrt{(a - b)^2 + 4ab}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}[-(a - b) \pm (a + b)]$$

$$x_1 = b.$$
$$x_2 = -a.$$

31. $15x^2 - (5a + 3b - 3c)(50b - 12a - 90c + 15x)$
$$= 15bc + 324ac - 169ab$$

Rechnet man die Produkte aus und vereinigt die gleichnamigen Glieder, so kommt:

$$x^2 - (5a + 3b - 3c)x + (4a^2 - 3ab + 6ac - 10b^2 + 27bc - 18c^2) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left[(5a + 3b - 3c) \pm \sqrt{(5a+3b-3c)^2 - 4(4a^2 - 3ab + 6ac - 10b^2 + 27bc - 18c^2)}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[5a + 3b - 3c \pm \sqrt{9a^2 + 49b^2 + 42ab + 81c^2 - 54ac - 126bc}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[5a + 3b - 3c \pm \sqrt{(3a + 7b - 9c)^2}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[5a + 3b - 3c \pm (3a + 7b - 9c)\right]$$

$x_1 = 4a + 5b - 6c$ und: $x_2 = a - 2b + 3c$.

32. $$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = 0.$$

Führt man die Division wirklich aus, so kommt:

$$x^2 + x + 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 - 4})$$
$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$
$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

33. $$x^{2n} + ax^n = b$$

Setzen wir $x^n = y$, so kommt:

$y^2 + ay - b = 0$, also:

$$y = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}$$

also: $$y_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}$$

$$y^2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b}$$

und hieraus:

$$\left.\begin{aligned} x_1 \text{ bis } x_n &= \sqrt[n]{-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b}} \\ x_{n+1} \text{ bis } x_{2n} &= \sqrt[n]{-\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b}.} \end{aligned}\right\}$$ beide Wurzeln liefern je n Werte.

33a. $$x^4 + 28224 = (25\,x)^2.$$

Setze wieder $x^2 = y$ und es kommt:

$$y^2 - 625\,y + 28224 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}\left(625 \pm \sqrt{625^2 - 4 \cdot 28224}\right)$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{625 \pm \sqrt{625^2 - 4 \cdot 28224}}{2}}$$

$x_1 = +24$; $x_2 = -24$; $x_3 = 7$ u. $x_4 = -7$.

34. $$(13\,x^2)^2 + (12\,x)^2 = 5^2$$

$$169\,x^4 + 144\,x^2 - 25 = 0$$

oder: $$x^2 = y$$

$$169\,y^2 + 144\,y - 25 = 0$$

$$y = \frac{-144 \pm \sqrt{144^2 + 16900}}{338}$$

$$y = \frac{72 \pm 97}{169},$$ also:

$x_1 = \frac{5}{13}$; $x_2 = -\frac{5}{13}$ und $|x_3| = |x_4| = \pm\sqrt{-1}.$

35. $$(65\,x)^4 + (65^2 x)^2 + 1848^2 = 0$$

$$x^2 = y$$

$$65^4 \cdot y^2 + 65^4 y + 1848^2 = 0$$

$$y^2 + y + \frac{1848^2}{65^4} = 0$$

$$y = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \frac{1}{65^2}\sqrt{4225^2 - 3696^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1 \pm \frac{1}{4225}\sqrt{7921 \cdot 529}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \frac{89 \cdot 23}{4225}\right)$$

$$y_1 = -\frac{1089}{4225} \quad \text{und} \quad y_2 = -\frac{3136}{4225}$$

$$x_1 \text{ und } x_2 = \pm \frac{33}{65}\sqrt{-1}$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = \pm \frac{56}{65}\sqrt{-1}.$$

36. $$x^4 - ax^2 + b^2 = 0$$

$$y^2 - ay + b^2 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}\right)$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b^2}}$$

oder nach der Formel:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}} \pm \sqrt{\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 - 4b^2}{4}}} \pm \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 - 4b^2}{4}}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a}{4} + \frac{2b}{4}} \pm \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{2b}{4}}$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b}\right].$$

37. $$x^4 - 4abx^2 = (a^2 - b^2)^2$$

$$x^2 = y$$

$$y^2 + 4aby - (a^2 - b^2)^2 = 0$$

$$y = -2ab \pm \frac{1}{2}\sqrt{16a^2b^2 + 4(a^2 - b^2)^2}$$

$$y = -2ab \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2a^2 + 2b^2)^2}$$

$$= -2ab \pm (a^2 + b^2)$$

also: $y_1 = -2ab + a^2 + b^2 = (a-b)^2$

$y_2 = -2ab - a^2 - b^2 = -(a+b)^2$

und hieraus:

$$x_1 \text{ und } x_2 = \pm (a-b)$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = \pm (a+b)\sqrt{-1.}$$

38. $4m^2 = (a+b+x)(a+b-x)(x+a-b)(x-a+b)$

Fassen wir rechts die zwei ersten und die zwei letzten Faktoren zusammen, so erhalten wir:

$$4m^2 = [(a+b)^2 - x^2] \cdot [x^2 - (a-b)^2]$$

$$= -a^4 - b^4 - x^4 + 2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2$$

$$x^2 - 2(a^2+b^2)x^2 = (a^2-b^2)^2 + 4m^2 = 0$$

$$x^2 = y \text{ substituiert:}$$

$$y^2 - 2(a^2+b^2)y + (a^2-b^2)^2 + 4m^2 = 0$$

$$y = a^2 + b^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4(a^2+b^2) - 4(a^2-b^2)_2 - 16m^2}$$

$$y = a^2 + b^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{16a^2b^2 - m^2)}$$

$$= a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(ab)^2 - m^2}$$

$$x = \pm\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(ab)^2 - m^2}}$$

$$= \pm\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(ab+m)(ab-m)}}$$

38. $(2{,}5 - x)^4 + 0{,}5625 = 2{,}5(2{,}5 - x)^2$

Setze hier: $(2{,}5 - x)^2 = y$

und es kommt:

$$y^2 + 0{,}5625 - 2{,}5y = 0$$

$$y = \frac{1}{2}(2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}5625})$$

$$y = \frac{1}{2}(2{,}5 \pm \sqrt{4})$$

$$y = \frac{1}{2}(2{,}5 \pm 2)$$

also: $y_1 = 2{,}25$

$y_2 = 0{,}25$ und hiernach:

$$(2{,}5 - x)^2 = 2{,}25$$
$$2{,}5 - x = \pm \sqrt{2{,}25} \pm 1{,}5$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 4.$$

Ferner:
$$(2{,}5 - x)^2 = 0{,}25$$
$$2{,}5 - x = \pm 0{,}5$$
$$x_3 = 2$$
$$x_4 = 3.$$

39. $25x^2 - \sqrt{x^4 - 6x^2} = 25x^2 - 3\sqrt{-1}.$

Nach Herausheben von $25x^2$ kommt:
$$\sqrt{x^4 - 6x^2} = 3\sqrt{-1}$$
$$x^4 - 6x^2 = -9$$
$$x^4 - 6x^2 + 9 = 0.$$

Durch Substitution
$$x^2 = y \text{ kommt:}$$
$$y^2 - 6y + 9 = 0$$
$$(y - 3)^2 = 0$$
also:
$$y = 3$$
$$x_1 = +\sqrt{3}$$
$$x_2 = -\sqrt{3}.$$

40. $(x^2 - 8x + 11)^2 + (x - 4)^2 = 25$
$$(x^2 - 8x + 16 - 5)^2 + (x - 4)^2 = 25$$
$$[(x - 4)^2 - 5]^2 + (x - 4)^2 - 25 = 0$$
$$(x - 4)^4 - 10(x - 4)^2 + 25 + (x - 4)^2 - 25 = 0$$

Setzen wir: $(x - 4)^2 = y$

dann kommt: $y^2 - 9y = 0$

und hieraus: $y_1 = 0$
$$y_2 = 9$$

also: $(x - 4)^2 = 0$

daher: x_1 und $x_2 = 4$
$$(x - 4)^2 = 9$$

daher: $x_3 = 7$
$$x_4 = 1.$$

41. $$x^6 + 27 = 28x^3$$

Setzen wir: $$x^3 = y$$

so kommt:

$$y^2 - 28y + 27 = 0$$

$$y = 14 \pm \frac{1}{2}\sqrt{28^2 - 108}$$

$$y = 14 \pm 13$$

also:

$$y_1 = 27$$

$$y_2 = 1$$

$$x_3 = 27$$

$$x_1, x_2 \text{ und } x_3 = 3 \cdot \sqrt[3]{1}$$

$$x_4, x_5 \text{ und } x_6 = \sqrt[3]{1}.$$

$\sqrt[3]{1}$ hat drei Werte, einen reellen und zwei komplexe, der reelle ist 1 und die beiden komplexen:

$$\varepsilon_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Siehe auch Band VI.

42. $$x^8 - 97x^4 + 1296 = 0$$

Wir setzen: $$x^4 = y$$

und es kommt: $$y^2 - 97y + 1296 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}(97 \pm \sqrt{97^2 - 4 \cdot 1296})$$

$$y = \frac{1}{2}(97 \pm \sqrt{9409 - 5184})$$

$$y = \frac{1}{2}(97 \pm 65)$$

$$y_1 = 81$$

$$y^2 = 16.$$

Also:

$$x^4 = 81$$

$$x^2 = \pm 9$$

$$x_1 = + 3$$

$$x_2 = -3$$
$$x_3 = 3\sqrt{-1}$$
$$x_4 = -3\sqrt{-1}$$
$$x^4 = 16$$
$$x^2 = \pm 4$$
$$x_5 = +2$$
$$x_6 = -2$$
$$x_7 = +2\sqrt{-1}$$
$$x_8 = -2\sqrt{-1}.$$

Jede Gleichung hat also soviele Wurzeln, als ihre Gradzahl Einheiten zählt.

Textgleichungen.

1. Multipliziere ich die Anzahl der Markstücke, die ich bei mir habe, mit sich selbst, so erhalte ich 132,25. Wieviel Markstücke habe ich bei mir?

Nehmen wir an, ich hätte x Mark bei mir. Multipliziere ich x mit sich selbst, so erhalte ich x^2. Nach den Bestimmungen der Aufgabe soll dieses Produkt $132^1/_4$ sein, also:

$$x^2 = 132{,}25, \text{ also:}$$

$$x = \pm\sqrt{132{,}25} = \pm 11{,}5$$

$$\begin{array}{c}\scriptstyle 32\,:\,20 \\ 1125\,:\,220\end{array}$$

Ich habe also $11^1/_2$ Mark bei mir; die zweite Lösung — $11^1/_2$ hat nur dann einen Sinn, wenn zwischen Vermögen und Schulden unterschieden wird.

2. Eine Zahl zu finden, deren fünfter Teil mit ihrem siebten Teile multipliziert 4235 gibt.

Die Zahl sei x. Der fünfte Teil der Zahl ist dann $\frac{x}{5}$ u deren 7. Teil $\frac{x}{7}$. Das Produkt aus diesen beiden Teilen $\frac{x^2}{35}$. Die Aufgabe verlangt, daß dieses Produkt 4235 gibt, also besteht die Gleichung:

$$\frac{x^2}{35} = 4235$$

$$x^2 = 4235 \cdot 35$$

$$x = \pm\sqrt{4235 \cdot 35} = \pm\sqrt{11^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \pm 11 \cdot 5 \cdot 7$$
$$= \pm 385.$$

Die gedachte Zahl ist also $+ 385$ oder $- 385$.

3. Multipliziere ich das $3^4/_7$ fache einer gedachten Zahl mit dem 8,68 fachen derselben Zahl, so erhalte ich 5239. Wie heißt die gedachte Zahl?

Die Zahl sei x, so muß nach den **F**estsetzungen der Aufgabe:

$$3\frac{4}{7}x \cdot 8\,68\,x = 5239$$

$$\frac{25}{7} \cdot \frac{217}{25} x^2 = 5239$$

$$x^2 = \frac{5239}{31} = 169$$

$$x = \pm\sqrt{169} = \pm 13.$$

Die gedachte Zahl heißt also ± 13.

4. Die Zahl 20 in zwei Teile zu zerlegen, so daß sich die Quadrate der Teile wie $1 : 2^1/_4$ verhalten.

Angenommen der kleinere Teil sei x, dann ist der größere $20 - x$; nach dem Text gilt dann die Proportion:

$$x^2 : (20 - x)^2 = 1 : \frac{9}{4} = 4 : 9.$$

Da nun eine geometrische Proportion richtig bleibt, wenn man alle vier Glieder mit derselben Zahl radiziert, so ist:

$$x : (20 - x) = \pm 2 : 3$$
$$3x \mp 2(20 - x) = 0$$
$$(3 \pm 2)x = \pm 40.$$

Mit oberem Vorzeichen: $x_1 = + 8, \quad 20 - x_1 = 12$

„ unterem „ $x_2 = - 40, \quad 20 - x_2 = 60.$

Die beiden Teile sind also entweder: 12 und 8, oder $- 40$ und $+ 60$; die zweite Lösung läuft zwar gegen den alltäglichen Sprachgebrauch, ist aber logisch richtig.

5. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Inhalt um das $\frac{9}{16}$ fache größer wird, wenn die Seite sich um 3 Meter verlängert?

Angenommen die Seite des Quadrates sei x Meter. Nach dem Text der Aufgabe muß dann die Gleichung bestehen:

$$(x+3)^2 = 1\frac{9}{16}x^2$$

$$\pm(x+3) = \frac{5}{4}x$$

$$4x + 12 = 5x$$

$$x_1 = 12$$

$$-4x - 12 = 5x$$

$$-9x = 12$$

$$x_2 = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}.$$

Die Seite des Quadrates ist also 12 Meter lang, der negative Wurzelwert hat für die Aufgabe keinen Sinn.

6. In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete das $\frac{3}{7}$fache der anderen beträgt, ist die Hypotenuse 1000 Meter lang. Wie groß ist jede der beiden Katheten?

Angenommen die eine Kathete sei x Meter, dann ist die andere $3\frac{3}{7}x$ Meter. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist dann die Hypotenuse $= \sqrt{x^2 + (3\frac{3}{7}x)^2}$. Nach Text soll diese aber 1000 Meter sein, also gilt die Gleichung:

$$x^2 + \left(\frac{24}{7}x\right)^2 = 1000^2 \text{ oder } x^2 + \frac{576}{49}x^2 = 1000^2$$

$$\frac{625}{49}x^2 = 1000^2$$

$$\left(\frac{25}{7}x\right)^2 = 1000^2$$

$$\frac{25}{7}x = \pm 1000$$

$$25x = \pm 7000$$

$$x_1 = +280 \text{ u. } 3\tfrac{3}{7}x_1 = 960$$

$$x_2 = -280.$$

Die eine Kathete ist also 280, die andere 960 Meter lang, die negative Wurzel hat hier keine Deutung.

7. Zwei Körper, deren Entfernung d Meter beträgt, bewegen sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels mit gleicher und gleichförmiger Geschwindigkeit nach dem Scheitel

punkt hin. Der erste geht t Sekunden früher ab als der zweite und trifft n Sekunden nach seinem Abgang mit diesem in dem Scheitelpunkt des rechten Winkels zusammen. Wie viel Meter legt jeder der Körper in einer Sekunde zurück?

Angenommen jeder der beiden Körper lege in einer Sekunde x Meter zurück. Beim Zusammentreffen ist der erste n Sekunden, der zweite n — t Sekunden unterwegs, der erste hat also nx und der zweite (n — t)x Meter zurückgelegt. Ihre ursprüngliche Entfernung war d; die zurückgelegten Wege sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse d ist. Nach dem pyth. Lehrsatz ist also:

$$n^2x^2 + (n - t)^2x^2 = d^2$$

$$x^2\,[n^2 + (n - t)^2] = d^2$$

$$x = \pm \frac{d}{\sqrt{n^2 + (n - t)^2}}$$

8. Das Quadrat einer Zahl, nebst dem 13fachen derselben Zahl gibt 264. Wie heißt die Zahl?

Angenommen die Zahl heiße x. Nach dem Text besteht dann die Gleichung:

$$x^2 + 13x = 264$$

$$x^2 + 13x - 264 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-13 \pm \sqrt{13^2 + 4\cdot 264}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-13 \pm \sqrt{169 + 1056}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}(-13 \pm 35)$$

$$x_1 = +11 \text{ u. } x_2 = -24.$$

Die gesuchte Zahl ist also + 11 oder — 24.

9. Der Inhalt eines Rechteckes, dessen eine Seite um 7 Meter länger ist als die andere, beträgt 494 Quadratmeter. Wie lang ist jede Seite?

Angenommen die kürzere Seite sei x Meter, dann ist die andere (x + 7) Meter. Der Inhalt dieses Rechteckes ist dann: x (x + 7) qm. Nach Aufgabe soll er aber 494 qm sein, also ist:

$$x(x + 7) = 494$$

$$x^2 + 7x - 494 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 494}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}(-7 \pm 45)$$

$$x_1 = +19 \text{ und } x_1 + 7 = 26.$$

$$x_2 = -26 \text{ und } x_2 + 7 = -19.$$

Die eine Seite ist 19 m, die andere 26 m lang. Die negative Lösung liegt nicht im Sinne der Aufgabe.

10. Auf der Verlängerung einer Linie von a Centimeter Länge einen Punkt zu bestimmen, so daß das Rechteck aus der Entfernung dieses Punktes von den Endpunkten der Linie einem Rechtecke von n Quadratzentimeter gleich wird.

Nehmen wir an, der Punkt habe von dem ihm zunächst gelegenen Endpunkt eine Entfernung von x cm, dann ist die andere Seite des Rechtecks $(a + x)$ cm und der Inhalt desselben $x(a + x)$ qcm. Nach Aufgabe aber soll der Inhalt n qcm sein, also muß die Beziehung bestehen:

$$x(a + x) = n$$

$$x^2 + ax - n = 0$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + 4n}.$$

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + 4n}$$

$$a + x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + 4n}.$$

Der negative Wurzelwert läßt im Sinne der Aufgabe eine Deutung nicht zu.

11. Zwei Hausfluren, beide von quadratischer Form, die eine $2^1/_3$ Meter breiter als die andere, erfordern zusammen zum Belegen 1429 quadratische Platten, deren 9 auf einen Quadratmeter gehen. Wieviel Platten erfordert eine jede derselben?

Wir nehmen hier nicht die Anzahl der Platten als Unbekannte an, sondern die Breite der kleinen Flur. Diese sei also x Meter, dann ist die breitere $(x + 2^1/_3)$ Meter. Da 1429 Platten notwendig sind und 9 auf 1 m^2 gehen, so haben die beiden Fluren einen Gesamtinhalt von $\frac{1429}{9}$ qm. Es besteht daher die Gleichung:

$$x^2 + \left(x + 2\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1429}{9}$$

$$x^2 + x^2 + \frac{49}{9} + \frac{14}{3}x = \frac{1429}{9}$$

$$9x^2 + 9x^2 + 49 + 42x - 1429 = 0$$

$$18x^2 + 42x - 1380 = 0$$

$$3x^2 + 7x - 230 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 12 \cdot 230}}{6} = \frac{7 \pm 53}{6}$$

$$x_1 = 7\frac{2}{3}.$$

Die eine Breite ist also $\frac{23}{3}$ m, die andere $7\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 10$m.

Nun ist die Anzahl der Platten $9x^2$ resp. $9\left(x + 2\frac{1}{3}\right)^2$, also $9 \cdot \left(\frac{23}{3}\right)^2 = 529$ resp. $9 \cdot \left(\frac{73}{3} + \frac{7}{3}\right) = 9 \cdot 10^2 = 900.$

12. Was ist das für eine zweizifferige Zahl, in der die erste Ziffer rechter Hand doppelt so groß ist als die zweite, und die durch das doppelte Produkt ihrer Ziffern dividiert 1 zum Quotienten, und 8 als Rest gibt?

Nehmen wir an, die Ziffer der Zehner sei x, also die der Einer 2x. Die Zahl heißt dann $10x + 2x = 12x$. Es muß nach dem Text nun die Gleichung bestehen:

$$\frac{12x}{2 \cdot x \cdot 2x} = 1 + \frac{8}{4x^2}$$

$$12x = 4x^2 + 8$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}(+3 \pm \sqrt{9 - 8}) = \frac{1}{2}(+3 \pm 1)$$

$$x_1 = 2 \text{ und } x_2 = 1.$$

Die Zahl heißt also 24. Die andere Lösung 12 ist hier nicht zu gebrauchen, weil das doppelte Produkt der Ziffern, nämlich 4, kleiner ist als der Rest, der bei der Division bleiben soll.

13. Welcher Quotient, dessen Dividend um $2^1/_2$ kleiner ist als sein Divisor, gibt zu seinem reziproken Werte addiert $2^1/_2$?

Nehmen wir an, der Divisor sei x, dann ist der Dividend x — 2,5. Nach den Bestimmungen in der Aufgabe muß nun die Gleichung bestehen:

$$\frac{x}{x - 2{,}5} + \frac{x - 2{,}5}{x} = 2{,}5$$

$$x^2 + (x - 2{,}5)^2 = 2{,}5\,(x - 2{,}5)\cdot x$$

$$x^2 + x^2 + 6{,}25 - 5x = 2{,}5x^2 - 6{,}25x$$

$$0{,}5x^2 - 1{,}25x - 6{,}25 = 0$$

$$x^2 - 2{,}5x - 12{,}5 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 + 4\cdot 12{,}5}\right) = \frac{1}{2}\left(2{,}5 \pm \sqrt{56{,}25}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}(2{,}5 \pm 7{,}5)$$

$$x_1 = 5 \text{ und } x_2 = -2{,}5.$$

Der eine Bruch heißt also: $\frac{2{,}5}{5}$ und der andere $\frac{-5}{-2{,}5}$.

14. Zwei Bäuerinnen, A und B, gehen auf den Markt; die erste mit Eiern, die zweite mit dreimal soviel Aepfeln. Jede hat den Preis ihrer Ware so festgesetzt, daß, wenn A der B ihre Eier für die Aepfel gibt, A 20 Heller verliert. Aus diesem Grunde behält A noch $^2/_5$ von den Eiern und läßt sich von B alle Aepfel geben, wobei aber B um 12 Heller zu kurz kommt. B beschließt deshalb, die Eier zu einem höheren Preis zu verkaufen, als A es bestimmt hatte, und indem sie sofort jedes Ei für 6 Heller verkauft, gewinnt sie noch den Preis von 12 Aepfeln hinzu. Wieviel Eier und Aepfel haben A und B gebracht und welche Preise waren dafür bestimmt?

Nehmen wir an, die Eier seien zu x Heller, also die Aepfel zu (x — 20) Heller angesetzt gewesen. Nimmt die A $^2/_5$ der Aepfel, so hat die B $^3/_5$ der Eier. Diese sind $^3/_5$ x Heller wert, sie soll dabei aber um 12 Heller geschädigt sein, d. h. sie soll von den $^3/_5$ der Eier 12 Heller weniger einnehmen, als ursprünglich für ihre Aepfel, also muß die Gleichung bestehen:

$$\frac{3}{5}x = (x - 20) - 12$$

$$\frac{2}{5}x = 32$$

$$x = \frac{32\cdot 5}{2} = 80.$$

Die Eier waren also zu 80 Heller, und die Aepfel zu 60 Heller angesetzt. Die Anzahl der Eier sei nun y, dann ist die der Aepfel 3y. Ein Ei kostet nun $\frac{80}{y}$ Heller und ein Apfel $\frac{20}{y}$ Heller. Die B löst für ein Ei 6 Heller, also für ihre $\frac{3}{5}$ y Eier $6\frac{3}{5}$y Heller. Nach Aufgabe muß nun die Gleichung bestehen:

$$6\frac{3}{5}y = 60 + 12\cdot\frac{20}{y}$$

$$\frac{18}{5}y = 60 + \frac{240}{y}$$

$$18y^2 - 300y - 1200 = 0$$

$$3y^2 - 50y - 200 = 0$$

$$y = \frac{50 \pm \sqrt{2500 + 2400}}{6}$$

$$y = \frac{50 \pm 70}{6} = 20.$$

Es waren also 20 Eier und 60 Aepfel und ein Ei kostete daher 4 Heller und ein Apfel 1 Heller. Die negative Lösung hat hier keinen Sinn.

15. Aus jedem von zwei Beuteln, welche eine verschiedene Anzahl von Kugeln enthalten, nimmt A eine Handvoll. Jetzt ist die Anzahl der Kugeln in dem größeren Beutel gleich dem Kubus der Zahl in dem kleineren oder gleich dem Quadrate einer Handvoll Kugeln. A nimmt dann aus dem größeren Beutel so viele Kugeln heraus, daß die Anzahl der übrig bleibenden gleich dem Quadrate der Anzahl der Kugeln in dem kleineren Beutel wird, schüttet jetzt den ganzen Inhalt des größeren in den kleineren und findet, daß die ursprüngliche Anzahl des kleineren um $^2/_3$ vermehrt ist. Man soll die Anzahl der Kugeln finden, welche anfangs in jedem Beutel waren, und die Anzahl, welche in einer Handvoll herausgenommen wurden!

Nehmen wir an, in dem kleinen Beutel seien nach Herausnehmen einer Handvoll Kugeln noch x Kugeln, dann sind in dem großen noch x^3 Kugeln. Da nun das Quadrat einer Handvoll gleich x^3 ist, so ist eine Handvoll selbst $= \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$. Schüttet nun A den Inhalt des größeren Beutel, nachdem er denselben auf x^2 Kugeln reduziert hat, in den kleineren Beutel, so sind in dem kleineren Beutel $(x^2 + x)$ Kugeln.

Nach den Bestimmungen der Aufgabe aber sollen jetzt der Inhalt des kleineren Beutel um $^2/_3$ der ursprünglichen Kugelanzahl vermehrt sein. Ursprünglich waren x + eine Handvoll = $(x + x^{\frac{3}{2}})$ Kugeln darin, also jetzt: $(x + x^{\frac{3}{2}}) + \frac{2}{3}(x + x^{\frac{3}{2}}) = \frac{5}{3}(x + x^{\frac{3}{2}})$ Kugeln. Es besteht dementsprechend die Gleichung:

$$x^2 + x = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

oder mit x die ganze Gleichung dividiert:

$$x + 1 = \frac{5}{3} + \frac{5}{3}x^{\frac{1}{2}}$$

$$x - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}\sqrt{x}, \text{ quadriert:}$$

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{25}{9}x$$

$$9x^2 - 12x + 4 - 25x = 0$$

$$9x^2 - 37x + 4 = 0$$

$$x = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{18} = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 144}}{18}$$

$$= \frac{37 \pm \sqrt{9225}}{18}$$

$$x = \frac{37 \pm 35}{18} \text{ u. hieraus; } x_1 = \frac{72}{18} = 4 \text{ u. } x_2 = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

In dem kleineren Beutel blieben also noch 4 Kugeln; eine Handvoll ist $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{64} = 8$. In dem kleinen Beutel sind also ursprünglich 12 Kugeln, und in dem großen $4^3 + 4^{\frac{3}{2}} = 64 + 8 = 72$ Kugeln. Die zweite Lösung liegt nicht im Sinne der Aufgabe.

16. Ein Kapitalist verleiht sein Kapital von 160 000 Mark zu einem gewissen Prozent auf Zinsen. Am Ende des ersten Jahres nimmt er für seinen Unterhalt 2400 Mark weg und vermehrt mit dem Ueberschuß der Zinsen sein Kapital. Zu demselben Zinsfuß verleiht er im zweiten Jahre sein Kapital und sieht sich nach Abzug von abermals 2400 Mark im Besitz von 168987 Mark. Zu wie viel Prozent hatte er sein Kapital ausstehen?

Angenommen, das Kapital sei zu x Prozent ausgeliehen gewesen. 160 000 Mark wachsen in einem Jahr dann an zu $160000 \frac{100+x}{100}$, denn 100 Mark wachsen bei x Prozent in einem Jahre an zu $(100+x)$ Mark, also 1 Mark zu $\frac{100+x}{100}$ und 160 000 Mark zu $160\,000 \frac{100+x}{100}$. Hiervon nimmt er 2400 Mark weg, es bleiben also: $\left(160\,000 \cdot \frac{100+x}{100} - 2400\right)$ Mark, diese stehen im zweiten Jahre aus und wachsen nach derselben Entwicklung bis zum Ende des zweiten Jahres an zu:

$$\left[160000 \cdot \frac{100+x}{100} - 2400\right] \frac{100+x}{100}.$$

Nach den Bestimmungen der Aufgabe soll diese Summe nach Abzug von weiteren 2400 Mark, einen Wert von 168987 Mark darstellen, es gilt also die Gleichung:

$$[1600\,(100+x) - 2400]\,\frac{100+x}{100} - 2400 = 168987$$

$$16\,(100+x)^2 - 24\,(100+x) - 2400 - 168987 = 0$$

$$16\,(10000 + 200x + x^2) - 2400 - 24x - 2400 - 168987 = 0$$

$$160000 + 3200x + 16x^2 - 2400 - 24x - 2400 - 168987 = 0$$

$$16x^2 + 3176x - 13787 = 0$$

$$x = \frac{-3176 \pm \sqrt{3176^2 + 4 \cdot 16 \cdot 13787}}{32}$$

$$x = \frac{-3176 \pm \sqrt{10086976 + 882368}}{32} = \frac{-3176 \pm \sqrt{10969344}}{32}$$

$x = \frac{-3176 \pm 3312}{32}$ und hieraus:

$x_1 = \frac{136}{32} = 4^1/_4$.

17. Ein Landmann hat a hl Weizen ausgesät; im zweiten Jahr säet er das Geerntete weniger b hl und erhält bei gleicher Fruchtbarkeit das c-fache seiner Aussaat nebst d hl. Wieviel hat er das erste Mal geerntet?

Nehmen wir an, er habe das erste Mal x hl geerntet, dann ist das Fruchtbarkeitsverhältnis $\frac{x}{a}$. Das zweite Mal erntete er also: $(x - b)\,\frac{x}{a}$ hl. Nach den Bestimmungen der Aufgabe aber soll er: $[c \cdot (x - b) + d)$ hl ernten, also muß die Gleichung bestehen:

$$(x - b)\,\frac{x}{a} = c\,(x - b) + d$$

$$(x - b)\,x = ac\,(x - b) + ad$$

$$x^2 - bx - acx + acb - ad = 0$$

$$x^2 - (b + ac)x + acb - ad = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(b + ac \pm \sqrt{(b + ac)^2 - 4\,(acb - ad)}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(b + ac \pm \sqrt{b^2 + a^2c^2 + 2acb - 4acb + 4ad}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(b + ac \pm \sqrt{(ac - b)^2 + 4ad}\right).$$

Er hat also das erste Mal

$x = \frac{1}{2}\left(b + ac \pm \sqrt{(ac - b)^2 + 4ad}\right)$ hl geerntet. Der zweite Wurzelwert hat deshalb keinen Sinn, weil er kleiner wird als b, er also nicht b hl weniger säen kann.

18. Die Seite eines Würfels ist nm 2,5 Zentimeter länger als die eines anderen der $2501\frac{7}{8}$ Kubikcentimeter weniger Inhalt hat. Wie groß ist jeder der Würfel?

Die Kante des einen Würfels sei x cm, dann ist die des andern $(x - 2{,}5)$. Nach den Bestimmungen der Aufgabe gilt nun, da der Inhalt eines Würfels gleich dem Cubus seiner Kante ist, die Beziehung:

$$x^3 - (x - 2{,}5)^3 = 2401\frac{7}{8}.$$

$$x^3 - x^3 + 3x^2 \cdot 2{,}5 - 3x \cdot (2{,}5)^2 + (2{,}5)^3 - 2501\frac{7}{8} = 0.$$

$$7{,}5\,x^2 - 18{,}75\,x - 2486{,}25 = 0$$

$$x^2 - 2{,}5\,x - 331{,}5 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 + 4 \cdot 331{,}5}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 + 1326{,}0}\right) = \frac{1}{2}\left(2{,}5 \pm \sqrt{1332{,}25}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\,(2{,}5 \pm 36{,}5)$$

$$x_1 = 19{,}5 \text{ und } x - 2{,}5 = 17.$$

Die Kante des einen Würfels ist 19,5 cm, die des andern 17 cm. Daraus ergibt sich als Inhalt:

$$J_1 = 19{,}5^3 = 7414{,}875 \text{ ccm und}$$
$$J_2 = 17^3 = 4913 \text{ ccm.}$$

19. Wie läßt sich die Summe der unendlichen Reihe

$$\sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 \cdots\cdots\cdots)})}}$$

bestimmen.

Man setze die Summe der unendlichen Reihe x, also:

$$x = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \cdots)})}}$$

Quadriere nun beide Seiten:

$$x^2 = 2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \cdots)})}}$$

Der zweite Teil rechts ist, weil natürlich immer noch unendlich gleich x, also

$$x^2 = 2 + x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\,(1 \pm \sqrt{1+8}) = \frac{1}{2}\,(1 \pm 3)$$

$$x_1 = 2 \text{ und } x_2 = -1.$$

Der zweite Wurzelwert ist unbrauchbar, weil negativ.

20. Wie groß ist die unendliche Reihe

$$\sqrt{(a + \sqrt{(a + \sqrt{(a + \cdots\cdots)})}}\,?$$

Man setze die Summe der unendlichen Reihe x, also

$$x = \sqrt{(a + \sqrt{(a + \sqrt{(a + \cdots)})}}$$

Beiderseits quadriert:

$$x^2 = a + \sqrt{(a + \sqrt{(a + \sqrt{(a + \cdots)})}}$$

Der zweite Teil rechts ist, weil immer noch unendlich = x, also:

$$x^2 = a + x$$
$$x^2 - x - a = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4a}\right)$$

brauchbar ist nur: $x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4a}\right)$.

21. Es ist näherungsweise:

$$\sqrt[3]{a^3 \pm b} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 \pm \frac{1}{3}\,\frac{b}{a}}$$

und zwar um so genauer, je kleiner b gegen a ist. Warum?

Beweis:

Man setze: $\sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \varepsilon$,

also:

$$a^3 \pm b = (a \pm \varepsilon)^3 = a^3 + 3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2 \pm \varepsilon^3$$

oder auch

$$\pm b = \pm 3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2,$$

wenn man $\pm \varepsilon^3$ als eine sehr kleine Größe (kl. Gr. III. O.) vernachlässigt.

Also ist:

$$3a\varepsilon^2 \pm 3a^2\varepsilon = \pm b$$

$$\varepsilon^2 \pm a\varepsilon = \pm \frac{b}{3a}$$

$$\varepsilon = \mp \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \pm \frac{1}{3}\,\frac{b}{a}}.$$

Also:

$$\sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \varepsilon = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{a^2}{4} \pm \frac{1}{3}\,\frac{b}{a}}.$$

Das negative Zeichen ist unbrauchbar, weil für $b = 0$ der Näherungswert in a selbst übergehen muß.

22. Man berechne nach Formel in 21:

$$\sqrt[3]{2} = ?$$

Man erhält:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1{,}2^3 + 0{,}272} = 0{,}6 + \sqrt{0{,}36 + 0{,}0755}$$
$$= 1{,}2599.$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1{,}2599^3 + 0{,}000\,100\,242\,201}$$

$$= 0{,}62995 + \sqrt{0{,}396\,837\,002\,5 + \frac{0{,}000\,100\,242\,201}{3{,}7797}}$$

$$= 0{,}62995 + \sqrt{0{,}396\,863\,523\,705\,65\,124}$$

$$= 1{,}259\,921\,049\,895.$$

Gleichungen mit zwei und mehr Unbekannten.

1.
$$2x^2 - 3y^2 = 6$$
$$3x^2 - 2y^2 = 19$$

Nach der Additionsmethode gelöst, ergibt sich:

$$6x^2 - 9y^2 = 18$$
$$6x^2 - 4y^2 = 38$$
$$5y^2 = 20$$
$$y^2 = 4$$
$$y = \pm 2$$
$$2x^2 - 12 = 6$$
$$2x^2 = 18$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3\sqrt{3}.$$

2.
$$x^2 + y^2 = 40$$
$$x - 3y = 0$$

Es ist: $x = 3y$

also durch Substitution:

$$9y^2 + y^2 = 40$$
$$y^2 = 4$$
$$y = \pm 2.$$
$$x = 3y = \pm 6.$$

3.
$$x \cdot y = 12$$
$$2x + 3y = 18$$

also:
$$x = \frac{12}{y}$$
$$\frac{24}{y} + 3y = 18$$
$$24 + 3y^2 - 18y = 0$$
$$3y^2 - 18y + 24 = 0$$
$$y = \frac{+18 \pm \sqrt{18^2 - 96 \cdot 3}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{6}$$
$$y = \frac{+18 \pm 6}{6}$$
$$y_1 = 4$$
$$y_2 = 2.$$

Also:
$$x \cdot 4 = 12$$
$$x_1 = 3$$

oder:
$$x \cdot 2 = 12$$
$$x_2 = 6.$$

4.
$$x^2 + 2xy - y^2 = 7(x - y)$$
$$2x - y = 5$$

Wir erhalten: $x^2 + y(2x - y) = 7(x - y)$

oder nach Gleichung 2:
$$x^2 + 5y - 7x + 7y = 0$$
$$x^2 + 12y - 7x = 0$$
$$x^2 + 24x - 60 - 7x = 0$$
$$x^2 + 17x - 60 = 0$$
$$x = \frac{1}{2}(-17 \pm \sqrt{289 + 240})$$
$$x = \frac{1}{2}(-17 \pm 23)$$
$$x_1 = 3$$
$$x_2 = -20$$

und hieraus:

$$-y_1 = 5 - 6$$
$$y_1 = 1$$
$$-y_2 = 5 - 2x_2 = 5 + 40$$
$$y_2 = -45.$$

5.
$$x + xy = 35$$
$$y + xy = 32$$
$$x - y = 3$$
$$x = 3 + y$$
$$3 + y + (3 + y)\,y = 35$$
$$3 + y + 3y + y^2 = 35$$
$$y^2 + 4y - 32 = 0$$
$$y = \frac{1}{2}\left(-4 \pm \sqrt{16 + 128}\right)$$
$$y = \frac{1}{2}(-4 \pm 12)$$
$$y_1 = 4$$
$$y_2 = -8.$$
$$x_1 = 4 + 3 = 7$$
$$x_2 = -8 + 3 = -5.$$

6.
$$4x^2 - 9y^2 = 0$$
$$4x^2 + y^2 = 8\,(x + y)$$
$$4x^2 = 9y^2$$
$$x^2 = \frac{9}{4}y^2$$
$$x = \pm\frac{3}{2}y$$
$$9y^2 + y^2 = 8\left(\frac{3}{2}y + y\right)$$
$$10y^2 - 20y = 0$$
$$y_1 = 0$$
oder:
$$y_2 = 2$$
$$9y^2 + y^2 = 8\left(-\frac{3}{2}y + y\right)$$

$$10y^2 + 4y = 0$$

$$y_3 = 0$$

$$y_4 = -\frac{2}{5}$$

und hieraus:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \pm\frac{3}{2}\cdot 2 = \pm 3.$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = \mp\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5} = \mp\frac{3}{5}.$$

7.

$$x : y = 9 : 4$$

$$x : 12 = 12 : y$$

$$4x = 9y$$

$$xy = 144$$

$$x = \frac{9}{4}y$$

$$\frac{9}{4}\cdot y^2 = 144$$

$$y^2 = \frac{4\cdot 144}{9}$$

$$y = \pm\frac{2\cdot 12}{3} = \pm 8$$

$$x = \pm\frac{9}{4}\cdot 8 = \pm 18$$

8.

$$\frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} = 0$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{c}$$

Wir setzen:

$$\frac{1}{x} = u$$

$$\frac{1}{y} = v$$

und es kommt:

$$a \cdot u^2 - b v^2 = 0$$

$$u - v = \frac{1}{c}$$

$$u = \frac{1}{c} + v$$

$$a\left(\frac{1}{c} + v\right)^2 - b v^2 = 0$$

$$\frac{a}{c^2} + a v^2 + \frac{2 a v}{c} - b v^2 = 0$$

$$v^2 (a - b) + \frac{2 a}{c} v + \frac{a}{c^2} = 0$$

$$v = \frac{-\frac{2a}{c} \pm \sqrt{\frac{4a^2}{c^2} - 4\frac{a}{c^2}(a-b)}}{2(a-b}$$

$$v = \frac{-\frac{2a}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4ab}}{2(a-b)}$$

$$v = \frac{2a \pm 2\sqrt{ab}}{2c(a-b)}$$

$$v = \frac{a \pm \sqrt{ab}}{c(a-b)}$$

$$u = \frac{1}{c} + \frac{a \pm \sqrt{ab}}{c(a-b)} = \frac{a - b + a \pm \sqrt{ab}}{c(a-b)}$$

$$u = \frac{2a - b \pm \sqrt{ab}}{c(a-b)}$$

also:

$$x = \frac{c(a-b)}{2a - b \pm \sqrt{ab}}$$

$$y = \frac{c(a-b)}{a \pm \sqrt{ab}}$$

9.

$$x \cdot \sqrt{x + y} = a$$

$$y \cdot \sqrt{x + y} = b$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

$$x = \frac{a \cdot y}{b}$$

$$x \cdot y\,(x + y) = ab$$

$$\frac{a \cdot y^2}{b}\left(\frac{ay}{b} + y\right) = ab$$

$$\frac{a^2 y^3}{b^2} + \frac{ay^3}{b} = ab$$

$$\frac{a}{b^3} \cdot y^3 + \frac{1}{b^2} y^3 = 1$$

$$y^3 \cdot \left(\frac{a}{b^3} + \frac{1}{b^2}\right) = 1$$

$$y^3 \cdot \frac{a + b}{b^3} = 1$$

$$y^3 = \frac{b^3}{a + b}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{b^3}{a + b}} = b \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a + b}} = \frac{b}{\sqrt[3]{a + b}}$$

$$x = \frac{ay}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{\sqrt[3]{a + b}}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt[3]{a + b}}.$$

10.
$$x + y = 58$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$$

Man erhält: $x + y + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 100$

oder mit Benutzung der ersten Gleichung

$$2\sqrt{x \cdot y} = 100 - 58 = 42$$

$$4\sqrt{xy} = 84$$

$$x + y + 2\sqrt{x \cdot y} = 100$$

$$x + y - 2\sqrt{xy} = 16$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 16$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \pm 4$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$$

$$2\sqrt{x} = 14$$
$$\sqrt{x} = 7$$
$$x = 49$$

oder:

$$2\sqrt{x} = 6$$
$$\sqrt{x} = 3$$
$$x = 9$$

und:

$$2\sqrt{y} = 6$$
$$\sqrt{y} = 3$$
$$y = 9$$

oder:

$$2\sqrt{y} = 14$$
$$\sqrt{y} = 7$$
$$y = 49.$$

Die Symmetrie der Wurzeln folgt aus der Vertauschbarkeit der Unbekannten.

11.
$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a$$
$$x + y = b$$

Man dividiere die zweite Gleichung durch die erste und es kommt:

$$(x + y):(\sqrt[3]{x} + \sqrt[2]{y}) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = \frac{b}{a}$$

Nun quadriere man die erste Gleichung und man erhält:

$$\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = a^2$$

hierzu:

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = \frac{b}{a}$$

$$\sqrt[3]{xy} = a^2 + \frac{b}{a} = \frac{a^3 + b}{a}$$

$$xy = \left(\frac{a^3 + b}{a}\right)^3$$

hierzu:

$$x + y = b,$$

wodurch die Aufgabe auf einen typischen Fall zurückgeführt ist.

12.
$$\begin{array}{r}x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}x^2 + y^2 + 2xy &= a^2 \\ x^2 + y^2 &= b \\ \hline 2xy &= a^2 - b\end{array}$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = b - a^2 + b$$

$$(x - y)^2 = 2b - a^2$$

$$\begin{array}{rl}x - y &= \pm \sqrt{2b - a^2} \\ x + y &= a \\ \hline 2x &= a + \sqrt{2b - a^2}\end{array}$$

$$x = \frac{a + \sqrt{2b - a^2}}{2}$$

$$y = \frac{a + \sqrt{2b - a^2}}{2}$$

13.
$$\begin{array}{r}xy = a \\ x^2 + y^2 = b \\ \hline\end{array}$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = b + 2a$$

$$x + y = \sqrt{b + 2a}$$

$$x^2 + y^2 - 5xy = b - 2a$$

$$x - y = \sqrt{b - 2a}$$

$$x = \frac{\sqrt{b + 2a} + \sqrt{b - 2a}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{b + 2a} - \sqrt{b - 2a}}{2}$$

14.
$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{a}{b}$$

$$\begin{array}{r}x^2 + y^2 = m^2 \\ \hline\end{array}$$

$$bx + by = ax - ay$$

$$bx - ax = - by - ay$$

$$x(b - a) = - y(a + b)$$

$$x(a - b) = y(a + b)$$

$$x = \frac{a + b}{a - b} \cdot y$$

$$\frac{(a + b)^2}{(a - b)^2} \cdot y^2 + y^2 = m^2$$

$$y^2 \left[\frac{(a + b)^2}{(a - b)^2} + 1 \right] = m^2$$

$$y^2 = \frac{m^2}{\frac{(a + b)^2}{(a - b)^2} + 1}$$

$$y^2 = \frac{m^2}{\frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{(a - b)^2}}$$

$$y^2 = \frac{m^2 \cdot (a - b)^2}{(a + b)^2 + (a - b)^2} = \frac{m^2 (a - b)^2}{2(a_2 + b^2)}$$

$$y = \pm \frac{m(a - b)}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}$$

$$x = \pm \frac{(a + b) \cdot m(a - b}{(a - b) \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2}} = \frac{m(a + b)}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}$$

15.
$$x^2 + xy + y^2 = 2a$$
$$x^2 - xy + y^2 = 2b$$

Wir subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten und erhalten:

$$2xy = 2a - 2b$$
$$xy = a - b$$

Diesen Wert addieren wir zu der ersten Gleichung und subtrahieren ihn von der zweiten; es kommt:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2a + a - b = 3a - b$$
$$(x + y)^2 = 3a - b$$
$$x + y = \pm \sqrt{3a - b}$$

und:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2b - a + b$$
$$(x - y)^2 = 3b - a$$
$$x - y = \pm \sqrt{3b - a}$$
$$x + y = \pm \sqrt{3a - b}$$

$$2x = \pm\sqrt{3a-b} \pm \sqrt{3b-a}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{3a-b} \pm \sqrt{3b-a}}{2}$$

$$2y = \pm\sqrt{3a-b} \mp \sqrt{3b-a}$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{3a-b} \mp \sqrt{3b-a}}{2}$$

16.
$$\begin{array}{c} xy + x = a \\ xy - y = b \\ \hline \end{array}$$

$$x(y+1) = a$$

$$x = \frac{a}{y+1}$$

$$\frac{a}{y+1} \cdot y - y = b$$

$$ay - y^2 - y = by + b$$

$$-y^2 + y(a - 1 - b) - b = 0$$

$$y^2 - (a - b - 1)y + b = 0$$

$$y = \frac{1}{2}\left[a - b - 1 \pm \sqrt{(a-b-1)^2 - 4b}\right]$$

$$x = \frac{a}{\frac{a + b - 1 \pm \sqrt{(a-b-1)^2 - 4b}}{2} + 1}$$

$$x = \frac{a}{\frac{a + b - 1 + 2 \pm \sqrt{(a-b-1)^2 - 4b}}{2}}$$

$$x = \frac{2a}{a + b + 1 \pm \sqrt{(a-b-1)^2 - 4b}}.$$

17.
$$\begin{array}{c} xy = a \\ x^2 + y^2 + xy = b \\ \hline \end{array}$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = a + b$$

$$(x+y)^2 = a + b$$

$$x + y = \pm\sqrt{a+b}$$

$$3xy = 3a$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = b - 3a$$
$$(x - y)^2 = b - 3a$$
$$x - y = \pm \sqrt{b - 3a}$$
$$x + y = \pm \sqrt{a + b}.$$

18.
$$ax + by = m$$
$$xy = n$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy = m$$
$$4abxy = 4abn$$

$$a^2x^2 + b^2y^3 + 2abxy = m^2 - 4abn$$
$$(ax - by)^2 = m^2 - 4abn$$
$$ax - by = \pm \sqrt{m^2 - 4abn}$$
$$ax + by = m$$

$$2ax = m \pm \sqrt{m^2 - 4abn}$$
$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4abn}}{2a}$$
$$2by = m \mp \sqrt{m^2 - 4abn}$$
$$y = \frac{m \mp \sqrt{m^2 - 4abn}}{2b}$$

19.
$$x^3 + y^3 = a$$
$$xy = b$$

$$x = \frac{b}{y}$$
$$\frac{b^3}{y^3} + y^3 = a$$
$$y^6 - ay^3 + b^3 = 0$$
$$y^3 = z$$
$$z^2 - az + b^3 = 0$$
$$z = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b^3}\right)$$
$$y = \sqrt[3]{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^3}}{2}}$$

20. $$(x + y)(x^2 - y^2) = a$$
$$(x - y)(x^2 + y^2) = b$$

Wir setzen:

$$x + y = u$$
$$x - y = v$$

dann ist:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = u \cdot v$$

und:

$$x^2 + y^2 = \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2} = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

Also erhalten wir:

$$u^2 \cdot v = a$$
$$v \cdot \frac{u^2 + v^2}{2} = b$$

$$\frac{u^2 v}{2} + \frac{v^3}{2} = b$$
$$\frac{a}{2} + \frac{v^3}{2} = b$$
$$v^3 = 2b - a$$
$$v = \sqrt[3]{2b - a}$$
$$u^2 \cdot \sqrt[3]{2b - a} = a$$
$$u^2 = \frac{a}{\sqrt[3]{2b - a}}$$
$$u = \pm \sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{2b - a}}}$$
$$x + y = \sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{2b - a}}}$$
$$x - y = \sqrt[3]{2b - a}$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{2b - a}}} + \sqrt[3]{2b - a}\right]$$
$$y = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{2b - a}}} - \sqrt[3]{2b - a}\right]$$

21. $$(x + y)(x^2 + y^2) = a$$
$$(x - y)(x^2 - y^2) = b$$

Wir setzen wieder:
$$x + y = u$$
$$x - y = v$$

und es wird:
$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = u \cdot v$$

und:
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(x - y)^2 = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

also:
$$u \cdot \frac{u^2 + v^2}{2} = a$$
$$v \cdot u \cdot v = b$$

$$\frac{u^3}{2} + \frac{u \cdot v^2}{2} = a$$
$$u \cdot v^2 = b$$
$$\frac{u^3}{2} + \frac{b}{2} = a$$
$$\frac{u^3}{2} = a - \frac{1}{2}$$
$$u^3 = 2a - b$$
$$u = \sqrt[3]{2a - b}$$
$$u \cdot v^2 = v^2 \cdot \sqrt[3]{2a - b} = b$$
$$v^2 = \frac{b}{\sqrt[3]{2a - b}}$$
$$v = \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{2a - b}}}$$

22. $$x^3 - y^3 = \frac{a}{x + y}$$
$$x^3 + y^3 = \frac{b}{x - y}$$

Es ist:
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

und
$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Wir erhalten also:

$$(x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2) = a$$
$$(x^2 - y^2)(x^2 - xy + y^2) = b$$

Durch Addition und Subtraktion beider Gleichungen erhält man:

$$(x^2 - y^2)(2x^2 + 2y^2) = a + b$$
$$(x^2 - y^2) \cdot 2xy = a - b$$

$$2(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = a + b$$
$$2xy(x^2 - y^2) = a - b$$

Wir setzen nun:

$$x^2 + y^2 = u$$
$$x^2 - y^2 = v$$

dann wird:

$$xy = \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - v^2}$$

also kommt:

$$2uv = a + b$$
$$2v \cdot \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - v^2} = a - b$$
$$u = \frac{a+b}{2v}$$
$$v \cdot \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4v^2} - v^2} = a - b$$
$$v \cdot \sqrt{\frac{(a+b)^2 - 4v^4}{4v^2}} = a - b$$
$$\frac{v}{2v}\sqrt{(a+b)^2 - 4v^4} = a - b$$
$$\sqrt{(a+b)^2 - 4v^4} = 2(a - b)$$
$$(a+b)^2 - 4v^4 = 4(a-b)^2$$
$$4v^4 = (a+b)^2 - 4(a-b)^2$$
$$v^4 = \frac{1}{4}(a + b^2) - (a-b)^2$$
$$v = \sqrt[4]{\frac{(a+b)^2}{4} - (a-b)^2}$$
$$= \sqrt[4]{\frac{(a+b)^2 - 4(a-b)^2}{4}}$$

woraus sich die übrigen Resultate leicht ergeben.

23.
$$x + y = a$$
$$x^4 + y^4 = b$$

Man erhebe die erste Gleichung in die vierte Potenz, es kommt:

$$x^4 + y^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = a^4$$

oder;

$$x^4 + y^4 + 4xy(x^2 + 2xy + y^2) - 2x^2y^2 = a^4$$

oder:

$$x^4 + y^4 + 4xy(x + y)^2 - 2x^2y^2 = a^4$$

oder unter Verwendung der beiden gegebenen Gleichungen:

$$b + 4xy \cdot a^2 - 2x^2y^2 = a^4$$

$$x^2y^2 - 2a^2xy - \frac{b - a^4}{2} = 0$$

$$xy = \frac{1}{2}[+ 2a^2 \pm \sqrt{4a^4 + 2b - 2a^4}]$$

$$xy = a^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot \frac{a^4 + b}{2}}$$

$$xy = a^2 \pm \sqrt{\frac{a^4 + b}{2}}$$

Nun ist $x + y$ und xy bekannt, erfolgt also die weitere Lösung nach bekannter Methode.

24.
$$x + y = p$$
$$x^5 + y^5 = q$$

Erhebe die erste Gleichung in die fünfte Potenz, so kommt:

$$x^5 + y^5 + 5xy(x + y)^3 - 5x^2(x + y) = p^5$$

und setze für $x + y$ und für $x^5 + y^5$ die gegebenen Werte ein; man erhält:

$$9 + 5p^3xy - 5px^2y^2 = p^5$$

$$xy = \frac{1}{2}\left(p^2 \pm \sqrt{\frac{p^5 + 4q}{5p}}\right)$$

Nun ist wieder Summe und Produkt der Unbekannten gegeben und nach bekannter Methode weiterzufahren.

25.
$$x^3 + y^3 = a$$
$$xy(x + y) = b$$

Erhebe die zweite Gleichung in die dritte Potenz, es kommt:

$$x^3y^3[x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2] = b^3$$

$$x^3y^3[x^3 + y^3 + 3xy(x + y)] = b^3$$

$$x^3y^3[a + 3b] = b^3$$

$$x^3y^3 = \frac{b^3}{a + 3b}$$

also:

$$xy = \frac{b}{\sqrt[3]{a + 3b}}$$

Diesen Wert in die zweite Gleichung eingeführt:

$$(x + y) \cdot \frac{b}{\sqrt[3]{a + 3b}} = b$$

$$x + y = \sqrt[3]{a + 3b}$$

26.

$$(x^2 - y^2)(x - y) = 16xy$$

$$(x^4 - y^4)(x^2 - y^2) = 640xy$$

Man dividiere die zweite Gleichung durch die erste und man erhält:

$$(x^2 + y^2)(x + y) = 40xy \qquad (3.)$$

hierzu (1.)

$$(x^2 - y^2)(x - y) = 16xy$$

und subtrahiert:

$$xy(x + y) = 12xy$$

$$xy(x + y - 12) = 0$$

also:

$$x \cdot y = 0 \qquad (4.)$$

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = 0$$

und:

$$x + y = 12 \qquad (5.)$$

Addiert man (1.) und (3.), so kommt:

$$2x^3 + 2y^3 = 56xy$$

$$x^3 + y^3 = 28xy$$

und diese Gleichung durch die Gleichung (5.) dividiert:

$$x^2 - xy + y^2 = 3xy$$

und hierzu die quadrierte Gleichung (5.)

$$x^2 + 2xy + y^2 = 144$$

$$3xy = 144 - \frac{7}{3}xy$$

$$xy = 27$$

also:

$$x_2 = 9$$

$$y_2 = 3$$

oder:

$$x_3 = 3$$

$$y_3 = 9.$$

27.
$$x(y + z) = m$$
$$y(z + x) = n$$
$$z(x + y) = o$$

Man addiere die drei gegebenen Gleichungen. Es kommt

$$xy + xy + yz + xy + xz + xy = m + n + o$$
$$2xy + 2xz + 2yz = m + n + o$$

Von dieser Gleichung subtrahiere man die drei gegebenen Gleichungen und es kommt:

$$xy + xz + 2yz = n + o$$

oder da:

$$xy + xz = m$$
$$2yz = - m + n + o$$
$$yz = \frac{1}{2}(- m + n + o) \qquad (4.)$$

und ferner:

$$xz = \frac{1}{2}(m - n + o) \qquad (5.)$$

und:

$$xy = \frac{1}{2}(m + n - o) \qquad (6.)$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen miteinander und radizieren das Produkt mit 2; wir erhalten:

$$x^2 \cdot y^2 z^2 = \frac{1}{8}(- m + n + o)(m - n + o)(m + n - o)$$

$$xyz = \pm \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (-m + n + o)(m - n + o)(m + n - o)}$$

Dividiert man diese Gleichung nacheinander durch die Gleichungen (4.), (5.) und (6.), so kommt:

$$x = \pm \sqrt{\frac{(m - n + o)(m + n - o)}{2(-m + n + o)}}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{(m + n - o)(-m + n + o)}{2(m - n + o)}}$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{(m - n + o)(-m + n + o)}{2(m + n - o)}}$$

28. $$x - y = a(n - z) \qquad (1.)$$

$$x^2 - y^2 = b(n^2 - z^2) \qquad (2.)$$

$$x^3 - y^3 = c(n^3 - z^3) \qquad (3.)$$

Man dividiere die Gleichungen (2.) und (3.) durch die Gleichung (1.) und erhält:

$$x + y = \frac{b}{a}(n + z) \qquad (4.)$$

$$a(x^2 + y^2 + xy) = c(n^2 + z^2 + nz) \qquad (5.)$$

Erhebe nun (4.) ins Quadrat,

$$x^2 + y^2 + 2xy = \frac{b^2}{a^2}(n^2 + z^2 + 2nz)$$

$$x^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2}(n^2 + z^2 + 2nz) - 2xy$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (5.) ein, so kommt:

$$a\left[\frac{b^2}{a^2}(n^2 + z^2 + 2nz) - xy\right] = c(n^2 + z^2 + nz)$$

$$b^2(n^2 + z^2 + 2nz) - a^2xy = ac(n^2 + z^2 + nz)$$

$$a^2xy = (b^2 - ac)z^2 + nz(2b^2\ ac) + n^2(b^2 - ac) \qquad (6.)$$

Nun erhalten wir aus:

$$x - y = a(n - z)$$

und:

$$x + y = \frac{b}{a}(n + z)$$

$$x = \frac{(b - a^2)z + n(b + a^2)}{2a}$$

und:

$$y = \frac{(b + a^2)z + n(b - a^2)}{2a}$$

daher:

$$x \cdot y = \frac{(b^2 - a^4) z^2 + 2 nz (b^2 + a^4) + n^2 (b^2 - a^4)}{4 a^2}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (6.) ein, so kommt:

$$a^2 \cdot \frac{b^2 - a^4)z^2 + 2 n z (b^2 + a^4) + n^2 (b^2 - a^4)}{4 a^2} = (b^2 - a c) z^2 + n z (2 b^2 - a c) + n^2 (b^2 - a c)$$

und hieraus: $(a^4 + 3 b^2 - 4 ac) z^2 - 2 n z (a^4 - 3 b^2 + 2 a c) + n^2 (a^4 + 3 b^2 - 4 a c) = 0$

also;

$$z = \frac{2 n (a^4 - 3 b^2 + 2 a c) \pm \sqrt{(a^4 - 3 b + 2 a c)^2 - 4 n^2 (a^4 + 3 b^2 - 4 a c)(a^4 + 3 b^2 - 4 a c)}}{2 (a^4 + 3 b^2 - 4 a c)}$$

Nach einigen Umformungen erhält man:

$$z = n \cdot \frac{a^4 - 3 b^2 + 2 a c \pm 2 \sqrt{3 a (a^3 - c)(a c - b^2)}}{a^4 - 4 ac + 3 b^2}$$

Diesen Wert hat man nun in die Resultate für x und y einzusetzen.

29.
$$x + y = a \quad (1.)$$
$$z + x = b \quad (2.)$$
$$x^2 = y^2 + z^2 \quad (3.)$$

Aus der 3. Gleichung erhält man:

$$x^2 - y^2 = z^2$$
$$(x + y)(x - y) = z^2$$

also:

$$a(x - y) = z^2$$
$$x - y = \frac{z^2}{a}$$

hiezu:

$$x + y = a$$

$$2x = \frac{z^2}{a} + a = \frac{z^2 + a^2}{a}$$
$$x = \frac{a^2 + z^2}{2a}$$
$$y = \frac{a^2 - z^2}{2a}$$

Diesen Wert für x setzen wir in die zweite Gleichung ein und erhalten:

$$z + \frac{a^2 + z^2}{2a} = b$$
$$2az + a^2 - 2ab + z^2 = 0$$
$$z^2 + 2az + (a^2 - 2ab) = 0$$
$$z = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 8ab}}{2}$$
$$z = \frac{-2a \pm 2\sqrt{2ab}}{2} = -a \pm \sqrt{2ab}$$

30.
$$x + y + z = a$$
$$yz = bx$$
$$x^2 = y^3 + z^2$$

Man erhebe die erste Gleichung ins Quadrat und erhält:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz) + yz = a_2$$

Addiere hierzu die dritte Gleichung:

$$x^2 - y^2 - z^2 \qquad = 0$$

$$2x^2 + 2(xy + xz + yz) = a^2$$

oder für yz den Wert aus der zweiten Gleichung eingeführt.

$$2x^2 + 2(xy + xz + bx) = a^2$$

$$2x(x + y + z + b) = a^2$$

und hierin aus Gleichung (1.) den Wert für $x + y + z$ eingesetzt:

$$2x \cdot (a + b) = a^2$$

$$x = \frac{a^2}{2(a + b)}$$

Diesen Wert in die erste und dritte Gleichung substituiert:

$$y + z = \frac{a(a + 2b)}{2(a + b)}$$

$$y^2 + z^2 = \left(\frac{a^2}{2(a + b)}\right)^2$$

Nun ist die Aufgabe auf einen typischen Fall zurückgeführt.

31.

$$a^x \cdot a^y : a^5 = a^{13}$$
$$(a^x)^y = a^{77}$$

$$a^{x+y} = a^{18}$$
$$a^{xy} = a^{77}$$

$$x + y = 18$$
$$xy = 77$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 334$$
$$4xy = 308$$

$$x - y = \sqrt{16} = \pm 4$$
$$x_1 = 11,\ x_2 = 7$$
$$y_1 = 7$$
$$y_2 = 11.$$

32.

$$xy = a$$
$$x^{\log y} = b$$

Man logarithmiert beide Gleichungen und erhält:

$$\log x + \log y = \log a$$
$$\log x \cdot \log y = \log b$$

Nunmehr ist die Summe und das Produkt der Unbekannten gegeben und nach bekannter Weise zu lösen.

Textgleichungen.

1. Zwei Zahlen verhalten sich wie 5 : 3, ihr Produkt ist 735. Wie heißen dieselben?

Angenommen die beiden Zahlen heißen x u. y. Nach dem Text der Aufgabe müssen dann die beiden Gleichungen bestehen:

$$x : y = 5 : 3$$
$$xy = 735$$

$$5y = 3x$$
$$y = \frac{3}{5}x$$
$$x \cdot \frac{3}{5}x = 735$$
$$3x^2 = 3675$$
$$x^2 = 1225$$
$$x = \pm\sqrt{1225} = \pm 35$$
$$y = \pm 21.$$

Die beiden Zahlen sind also ± 35 und ± 21.

2. Die Diagonale eines Rechteckes ist 89 m lang. Wäre jede Seite derselben um 3 m kürzer, so würde die Diagonale des neuen Rechteckes 85 m lang sein. Wie lang sind die Seiten?

Nehmen wir die eine Seite x m und die andere y m lang an. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz gilt dann, da die Diagonale nach dem Text 89 m lang ist, die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 89^2.$$

Wird jede Seite um 3 m kürzer, die eine also $(x - 3)$, die andere $(y - 3)$ m lang, und die Diagonale jetzt 85 m lang sein soll, so gilt nach demselben Satz für diesen Fall die Gleichung:

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 85^2$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 85^2$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 6y = 85^2 - 18$$

oder da:

$$x^2 + y^2 = 89^2$$
$$-6x - 6y = 85^2 - 18 - 89^2$$
$$6(x + y) = 89^2 - 85^2 + 18 = 7921 - 7225 + 18$$
$$x + y = 119$$
$$x = 119 - y$$
$$(119 - y)^2 + y^2 = 7921$$
$$119^2 + y^2 - 238y + y^2 = 7921$$
$$2y^2 - 238y + 6240 = 0$$
$$y^2 - 119y + 3120 = 0$$
$$y = \frac{1}{2}\left(119 \pm \sqrt{119^2 - 4 \cdot 3120}\right)$$
$$y = \frac{1}{2}\left(119 \pm \sqrt{14161 - 12480}\right)$$
$$y = \frac{1}{2}\left(119 \pm \sqrt{1681}\right)$$
$$y = \frac{1}{2}(119 \pm 41)$$
$$y_1 = 80$$
$$y_2 = 39$$
$$x_1 = 39$$
$$x_2 = 80.$$

Die eine Seite ist also 80, die andere 39 m lang. Es ergeben sich symmetrische Lösungen, da beide Seiten vertauscht werden können.

3. Von einem Dreieck sind gegeben eine Seite zu 39 m, die Summe der beiden andern gleich 66 m und der von diesen eingeschlossene Winkel gleich 60°. Wie groß sind die beiden andern Seiten?

Angenommen die eine Seite sei x, die andere y m, es gilt dann nach Aufgabe die Gleichung:

$$x + y = 66. \qquad (1.)$$

Ferner gilt nach dem Kosinussatz für die obigen Bestimmungen als zweite Bestimmungsgleichung:

$$x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 60^0 = 39^2$$

$$x^2 + y^2 - xy = 39^2 \qquad (2.)$$

hierzu Gleichung (1.) quadriert:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 66^2$$

$$3xy = 66^2 - 39^2 = 4356 - 1521$$

$$3xy = 2835$$

$$xy = 943$$

Nun ist $x + y$ und xy bekannt und die weitere Lösung bekannt.

4. Eine bikonvexe Linse aus Flintglas vom Brechungsindex 1,65 hat eine Brennweite von 14 cm; wäre der eine ihrer Krümmungshalbmesser um 1 cm kleiner, der andere um 1 cm größer, so würde sich die Brennweite auf 13,5 cm stellen. Wie groß sind die Radien?

Nehmen wir an, der eine Krümmungsradius sei x, der andere y cm, so gilt nach der optischen Gleichung:

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)$$

nach den Angaben im Text als erste Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{14} = 0{,}65 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

Wird der eine Krümmungsradius $x - 1$, der andere $y + 1$, so erhält man nach den Angaben der Aufgabe und der optischen Gleichung als zweite Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{13{,}5} = 0{,}65 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1}\right)$$

$$xy = 0{,}65 \cdot 14y + 0{,}65 \cdot 14x$$

$$(x - 1)(y - 1) = 0{,}65 \cdot 13{,}5\,(y - 1) + 0{,}65 \cdot 13{,}5\,(x - 1)$$

Dieses Gleichungssystem ist zu lösen.

5. In einem Kreis von 20 cm Radius ist eine Sehne von 24 cm Länge gezogen. Welchen Abstand vom Mittelpunkt hat der Schnittpunkt der Geraden, die den Kreis in den Endpunkten jener Sehne berühren?

In unserer Figur 1 sei M = x und BS = y. Nach dem Text der Aufgabe und bekannten geometrischen Lehrsätzen (Pythagoras und Satz vom Quadrat der Höhe auf die Hypotenuse) gelten dann die beiden Bestimmungsgleichungen:

$$x^2 = r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$x(y + r - x) = \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$x^2 = 20^2 - 12^2$$
$$x^2 = 256$$
$$x = \pm 16$$
$$16(y + 4) = 144$$
$$16y = 80$$
$$y = 5.$$

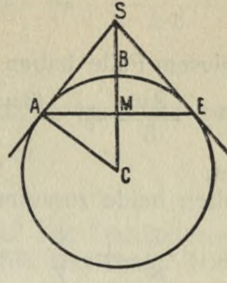


Fig. 1.

Die Entfernung des betreffenden Schnittpunktes vom Mittelpunkt ist also:

$$CS = r + y = 20 + 5 = 25 \text{ cm}.$$

6. Bacchus fand den Silen neben einem vollen Weinfasse schlafend; er benutzte die Gelegenheit und trank während zweier Drittel der Zeit, welche Silen gebraucht hätte, um das ganze Faß zu leeren. Nachdem Silen erwacht war, trank er den von Bacchus übrig gelassenen Rest. Hätten beide zugleich angefangen zu trinken, so wären sie um 2 Stunden früher fertig geworden; Bacchus hatte aber alsdann nur halb soviel getrunken, als er vorher dem Silen übrig gelassen hatte. In welcher Zeit hätte jeder allein das Faß geleert?

Angenommen Bacchus hätte das Faß in x, Silen in y Stunden allein geleert; jener trank dann in einer Stunde $\frac{1}{x}$, dieser $\frac{1}{y}$ des Fasses. Da Bacchus während $\frac{2}{3}$ der Zeit, welche Silen zum ganzen Faß braucht, trinkt, so leert er in dieser Zeit: $\frac{2y}{3x}$ des Weines; für den Silen bleibt also noch

$$1 - \frac{2y}{3x} = \frac{3x - 2y}{3x}$$

des Weines. Nun braucht Silen

zu 1 Faß .... y Stunden

zu $\frac{1}{3}$ Faß ...... $\frac{y}{3x}$ Stunden zu $\frac{3x - 2y}{3x} = \frac{(3x - 2y)y}{3x}$ Stunden.

In diesem Falle haben beide also zum Leeren des Fasses:

$$\frac{2y}{3} + \frac{(3x - 2y)y}{3x} \text{ Stunden}$$

gebraucht.

Trinken beide zusammen, so leeren sie in einer Stunde

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y + x}{xy} \text{ des Fasses.}$$

Wenn sie zu:

$\frac{x + y}{xy}$ des Fasses 1 Stunde brauchen, so brauchen sie zu:

$$1 \cdot (x + y) \text{ der Fässer } xy \text{ Stunden}$$

und zu:

$$1 \text{ Faß} \cdot \frac{xy}{x + y} \text{ Stunden.}$$

In diesem Fall sollen sie aber 2 Stunden weniger brauchen wie vorhin und es kommt:

$$\frac{xy}{x + y} = \frac{2y}{3} + \frac{(3x - 2y)\,y}{3x} - 2.$$

Da Bacchus aber jetzt nur die Hälfte trinkt von dem, was er Silen vorher übrig gelassen hat, so erhält man die zweite Gleichung:

$$\frac{xy}{x(x + y)} = \frac{3x - 2y}{6x}$$

oder:

$$\frac{y}{x + y} = \frac{3x - 2y}{6x}$$

Löst man dieses Gleichungssystem auf, so erhält man:

$$x = 6$$
$$x = 3.$$

Bacchus hätte das Faß also in 6 Stunden, Silen in 3 Std. allein geleert.

7. In einem Kreis vom Radius 13 cm soll durch einen um 5 cm vom Mittelpunkt abstehenden Punkt eine Sehne gezogen werden, die durch diesen Punkt im Verhältnis 9 : 4 geteilt wird.

Nehmen wir an, der eine Abschnitt sei x, der andere y cm lang, dann muß nach den Forderungen der Aufgabe die Gleichung gelten:

$$x : y = 9 : 4$$

oder:

$$9y = 4x.$$

Ferner gilt nach einem geometr. Lehrsatz als zweite Bestimmungsgleichung:

$$x \cdot y = \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

wenn s die im gegebenen Punkt auf den Durchmesser durch den Punkt konstruierte senkrechte Sehne bezeichnet. Man erhält:

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = (r + 5)(r - 5)$$

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = 18 \cdot 8 = 144$$

$$xy = 144$$

$$x = \frac{9}{4} y$$

$$\frac{9}{4} y^2 = 144$$

$$y^2 = \frac{4 \cdot 144}{9}$$

$$y = \pm \frac{2 \cdot 12}{3} = \pm 8$$

$$x = \pm \frac{9 \cdot 8}{4} = \pm 18.$$

Der eine Abschnitt ist also 8, der andere 18 cm lang.

8. In einem Kreis von 29 cm Radius soll durch einen 21 cm vom Mittelpunkt abstehenden Punkt eine Sehne von 41 cm Länge gezogen werden. Wie lang fallen ihre Abschnitte aus?

Angenommen der eine Abschnitt sei x, der andere y cm lang. Es besteht als erste Bestimmungsgleichung nach dem Text ohne Weiteres die Gleichung:

$$x + y = 41.$$

Ferner muß:

$$x \cdot y = \left(\frac{s}{2}\right)^2,$$

wenn $\frac{s}{2}$ die in dem gegebenen Punkt errichtete „senkrechte Halbsehne“*) ist. Für s finden:

*) Vergl. Band X.

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = (r + 21)(r - 21)$$
$$= 50 \cdot 8 = 400$$

also:

$$x + y = 41$$
$$xy = 400$$
$$x^2 + y^2 + 2xy = 1681$$
$$4xy = 1600$$
$$x - y = \pm\sqrt{81} = \pm 9$$
$$\left.\begin{aligned} x &= 25 \\ y &= 16 \end{aligned}\right\} \text{oder umgekehrt.}$$

Der eine Abschnitt ist also 25 der andere 16 cm lang.

9. Durch zwei konzentrische Kreise von den Radien $r = 17$ cm, $\varrho = 10$ cm soll eine Sehne so gelegt werden, daß das in den innern Kreis fallende Stück zwei Fünftel der ganzen Sehnenlänge ausmacht. Wie lang ist die Sehne und wie groß ist ihr Abstand vom Mittelpunkt?

Wir nehmen an, die ganze Sehne sei x cm lang und habe vom Mittelpunkt einen Abstand von y cm. Nach dem bereits oben angewandten geometrischen Lehrsatz und den Bestimmungen des Textes erhalten wir die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = (r + y)(r - y) = r^2 - y^2$$
$$\frac{x^2}{4} = 17^2 - y^2$$
$$x^2 + 4y^2 = 289 \cdot 4.$$

Ferner erhalten wir, wenn wir die halbe in den inneren Kreis fallende Sehne mit a bezeichnen, als zweite Gleichung:

$$a^2 = (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$
$$a^2 = 100 - y^2$$

Nach Aufgabe soll aber das innere Stück $\frac{2}{5}$ **x** sein, also:

$$\left(\frac{2 \cdot x}{5 \cdot 2}\right)^2 = 100 - y^2$$
$$\frac{x^2}{25} = 100 - y^2$$
$$x^2 = 2500 - 25y^2$$

$$2500 - 25y^2 + 4y^2 = 1156$$
$$-21y^2 = -1344$$
$$y^2 = 64$$
$$y = \pm 8.$$
$$x^2 = 1156 - 256$$
$$x = \pm 30.$$

Die Sehne ist also 30 cm lang und hat einen Abstand von 8 cm vom Mittelpunkt.

10. Außerhalb eines Kreises von 8 cm Radius liegt ein Punkt, der um 17 cm vom Mittelpunkt absteht. Von ihm soll nach dem Kreise eine Sekante gezogen werden, deren innerer Abschnitt 12,5 cm beträgt. Wie lang ist diese Sekante?

Wir nehmen an, die von dem gegebenen Punkt nach dem Kreis gezogene Tangente sei x, das von der Sekante außerhalb des Kreises gelegene Stück y cm lang. Wir erhalten dann nach dem Text folgende Gleichungen:

$$x^2 = 17^2 - 8^2 = (17 + 8)(17 - 8) = 25 \cdot 9 = 225$$

und:
$$y(y + 12{,}5) = x^2 = 225$$
$$y^2 + 12{,}5y - 225 = 0$$
$$y = \frac{1}{2}\left(-12{,}5 \pm \sqrt{12{,}5^2 + 900}\right)$$
$$y = \frac{1}{2}\left(-12{,}5 \pm \sqrt{156{,}25 + 900}\right)$$
$$y = \frac{1}{2}(-12{,}5 \pm 32{,}5)$$
$$y_1 = 10.$$

Das außerhalb des Kreises gelegene Stück der Sekante ist also: 10 cm, mithin die ganze Sekante 22,5 cm lang.

11. Die Summe der Grundkreisradien eines Kegelstumpfes von 21 m Höhe und 2926 cbm Volumen beträgt 13 m. Wie groß sind diese Radien.

Angenommen der eine sei x m, der andere y m. Nach den Bestimmungen der Aufgabe ergibt sich dann als erste Gleichung:

$$x + y = 13.$$

Der Inhalt eines Kegelstumpfes ist:

$$I = \frac{\pi \cdot h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

Der Inhalt des vorliegenden Stumpfes ergibt sich also zu:

$$J = \frac{\pi \cdot 21}{3} (x^2 + xy + y^2).$$

Laut Aufgabe aber soll dieser Inhalt 2926 cbm betragen, so daß wir als zweite Bestimmungsgleichung erhalten:

$$7\pi (x^2 + xy + y^2) = 2926$$

oder:

$$x^2 + xy + y^2) = \frac{2926}{22} - 133.$$

$$x + y = 13$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 169$$

$$xy = 169 - 133 = 36$$

$$4xy = 144$$

$$x - y = \pm 5$$

$$x = 9$$

$$y = 4.$$

Der eine Radius ist 9 m, der andere 4 m lang.

12. Ein Kegelstumpf hat eine Höhe von 12 m, ein Volumen von 616 cbm. Wie groß sind seine Grundkreisradien, wenn deren Produkt 15 qm beträgt?

Angenommen der eine Radius sei x, der andere y m. Als erste Gleichung ergibt sich nach dem Text der Aufgabe sofort:

$$x \cdot y = 15.$$

Ferner erhält man analog dem Gedankengang in der vorigen Aufgabe:

$$7 = \frac{\pi \cdot 12}{3} (x^2 + xy + y^2)$$

$$\frac{22 \cdot 12}{7 \cdot 3} (x^2 + xy + y^2) = 616$$

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{616 \cdot 7}{88} = 7 \cdot 7 = 49.$$

$$xy = 15$$

$$(x + y)^2 = 64$$

$$x + y = \pm 8,$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

13. Die Seite eines geraden Kegelstumpfes ist 41 cm lang, seine Höhe beträgt 40 cm und sein Volumen 7920 cm. Wie lang sind seine Grundkreisradien?

Angenommen der eine Radius sei x, der andere y cm lang. Aus einer hierzu leicht zu zeichnenden Figur, die sich der einigermaßen begabte Schüler auch leicht vorstellen kann, findet man leicht die Beziehung:

$$(x - y)^2 + h^2 = s^2$$

oder nach den Angaben unserer Aufgabe:

$$(x - y)^2 + 40^2 = 41^2$$

$$(x - y)^2 = 41^2 - 40^2 = (41 + 40)(41 - 40)$$

$$(x - y)^2 = 81$$

$$x - y = \pm 9.$$

Ferner ergibt sich leicht die zweite Gleichung:

$$J = \frac{\pi \cdot h}{3}(x^2 + xy + y^2) = 7920$$

$$\frac{22}{7} \cdot \frac{40}{3} \cdot (x^2 + xy + y^2) = 7920$$

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{21 \cdot 7920}{22 \cdot 40} = 21 \cdot 9 = 189$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 81$$

$$3xy = 108$$

$$xy = 36$$

womit die Rechnung erledigt ist.

14. Ein gerader Kegelstumpf von 9 cm Höhe, dessen Grundkreisradien sich um 13 cm unterscheiden, ist einer Kugel von 25 cm Radius einbeschrieben. Welche Radien haben seine Grundkreise und wieweit sind diese vom Kugelmittelpunkt entfernt?

Angenommen der eine Grundkreisradius sei x cm, dann ist der andere x + 13 cm; und der Grundkreis mit dem Radius x habe vom Mittelpunkt eine Entfernung von y cm. Aus einer hierzu gedachten Figur und aus dem Text der Aufgabe ergeben sich dann die Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = 25^2$$

$$(x + 13)^2 + (9 - y)^2 = 25^2$$

$$x^2 + 26x + 169 + 81 - 18y + y^2 = 625$$

oder für $x^2 + y^2$ den Wert eingeführt:

$$625 + 26x + 169 + 81 - 18y = 625$$
$$26x - 18y = -251$$
$$26x = 18y - 251$$
$$x = \frac{18y - 251}{26}$$

Setzt man diesen Wert in die erste Gleichung, so ergibt sich y und hieraus x.

15. Der Achsenschnitt eines geraden Zylinders, dessen Mantel eine Größe von 220 qcm hat, besitzt einen Umfang von 34 cm. Wie groß sind Höhe und Grundkreisradius des Zylinders?

Bezeichnen wir den Radius des Grundkreises mit x und die Höhe mit y, so werden ohne Weiteres die beiden Gleichungen einleuchten:

$$4x + 2y = 34$$
$$2x + y = 17$$

und:

$$2\pi \cdot x \cdot y = 220$$
$$2x + y = 17$$
$$xy = \frac{220 \cdot 7}{22 \cdot 2} = 35$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 = 288$$
$$8xy = 280$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 = 9$$
$$2x - y = +3$$
$$2x + y = 17$$

$$x = 5$$
$$y = 7.$$

Der Radius des Grundkreises ist 3 cm, die Höhe des Zylinders 7 cm.

16. Einer Kugel von 25 m Radius soll ein Zylinder einbeschrieben werden, dessen Mantel 2112 qm groß ist. Wie groß sind Höhe und Grundkreisradius dieses Zylinders?

Angenommen der gesuchte Radius sei x, die Höhe y m; es ergeben sich die Gleichungen:

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 25^2$$

und:

$$2\pi \cdot x \cdot y = 2112$$

$$4x^2 + y^2 = 2500$$

$$xy = \frac{2112 \cdot 7}{22 \cdot 2} = 48 \cdot 7$$

$$4xy = 1344$$

$$(2x + y)^2 = 3844$$

$$2x + y = 62$$

$$(2x - y)^2 = 1156$$

$$2x - y = 34$$

$$2x + y = 62$$

$$4x = 96$$

$$x = 24$$

$$y = 14.$$

Der Radius des Grundkreises ist also 24 m, die Höhe 14 m.

17. Durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende Gerade entsteht eine ringförmige Wulst von 9680 qcm Gesamtoberfläche. Der äußere Durchmesser dieser Wulst hat eine Länge von 108 cm. Wie groß ist der Radius des erzeugenden Kreises und wie groß der Abstand seines Mittelpunktes von der Rotationsachse?

Angenommen der Radius des erzeugenden Kreises sei x cm, und der Abstand des Mittelpunktes von der Achse y cm. Die Oberfläche der Wulst ist gleich Umfang des erzeugenden Kreises mal Weg des Schwer- oder hier Mittelpunkts, also:

$$O = 2\pi y = 4\pi^2 xy$$

Nun soll diese laut Aufgabe aber 9680 qcm sein, also haben wir als erste Gleichung

$$4\pi^2 xy = 9680$$

$$xy = \frac{9680 \cdot 7 \cdot 7}{4 \cdot 22 \cdot 22} = 245$$

Als weitere Gleichung ergibt sich direkt:

$$x + y = \frac{108}{2} = 54$$

hierzu:

$$xy = 245$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 2916$$
$$4xy = 980$$
$$(x - y)^2 = 1936$$
$$x - y = 44$$
$$x + y = 54$$
$$3x = 98$$
$$x = 49$$
$$y = 5.$$

Der Kreis hat also einen Radius von 49 cm und sein Mittelpunkt ist von der Achse 5 cm entfernt.

18. Die Fläche einer Kugelkalotte, deren Grundkreis um 16 cm vom Kugelmittelpunkt absteht, beträgt 20020 qcm. Wie groß ist der Kugelradius, wie groß die Höhe der Kalotte?

Nehmen wir den Kugelradius zu x cm und die Höhe der Kalotte zu y cm an, so gelten ohne Weiteres die beiden Gleichungen:

$$x - y = 16$$
$$2\pi x \cdot y = 20020$$
$$x - y = 16$$
$$xy = \frac{20\,020 \cdot 7}{22 \cdot 2} = 455 \cdot 7 = 3185$$
$$x^2 + y^2 - 2xy = 256$$
$$4xy = 1740$$
$$x^2 + y^2 + 2xy = 12996$$
$$x + y = 114$$
$$x = 65$$
$$y = 49.$$

Der Kugelradius ist also 65, die Kalottenhöhe 49 cm. (Man löse die Aufgaben auch mit einer Unbekannten.)

19. Ein gerader Kegel von 4 cm Höhe hat eine Gesamtoberfläche von 24 π qcm. Wie groß sind sein Grundkreisradius und seine Seitenlinie?

Angenommen der Radius des Grundkreises sei x und die

Seitenlinie y cm lang. Man erhält dann nach bekannten Formeln und laut Text der Aufgabe die beiden Gleichungen:

$$y^2 - x^2 = 16$$
$$\pi x (y + x) = 24\pi$$

$$x(x + y) = 24$$
$$y^2 - x^2 = 16$$

$$x^2 + xy = 24$$
$$y^2 - x^2 = 16$$

Multipliziere die erste Gleichung mit 2 und addiere hierzu die zweite:

$$2x^2 + 2xy = 48$$
$$y^2 - x^2 = 16$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 64$$
$$x + y = 8.$$

Diesen Wert oben eingeführt:

$$x(x + y) = 8x = 24$$
$$x = 3$$
$$y^2 = 16 + x^2 = 25$$
$$y = 5.$$

Der Radius des Grundkreises ist 3, die Seitenlinie 5 cm lang.

20. Einer Ellipse von den Halbachsen 26 und 13 m soll ein Rechteck von 88 m Umfang einbeschrieben werden. Wie lang sind dessen Seiten?

Angenommen die halben Seiten seien x und y; der Umfang des Rechtecks ist dann:

$$U = 4x + 4y$$

Laut Aufgabe soll diese Summe 88 sein, also muß die Gleichung gelten:

$$4x + 4y = 88$$

Ferner sind x und y Koordinaten von Ellipsenpunkten, es muß für sie also die Ellipsengleichung Giltigkeit haben und wir erhalten als zweite Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

oder die in der Aufgabe angegebenen Halbachsen eingeführt

$$\frac{x^2}{26^2} + \frac{y^2}{13^2} - 1 = 0$$

$$x + y = 22$$
$$x^2 + 4y^2 = 4 \cdot 13^2$$

$$x = 22 - y$$
$$(22 - y)^2 + 4y^2 - 4 \cdot 169 = 0$$
$$22^2 - 44y + y^2 + 4y^2 - 4 \cdot 169 = 0$$
$$484 - 44y + 5y^2 - 676 = 0$$
$$5y^2 - 44y - 192 = 0$$

$$y = \frac{44 \pm \sqrt{44^2 + 20 \cdot 192}}{10}$$

$$y = \frac{44 \pm \sqrt{1936 + 3840}}{10} = \frac{44 \pm \sqrt{5776}}{10}$$

$$y = \frac{44 \pm 76}{10}$$

$$y = 12$$
$$x = 10.$$

Die Seiten des Rechtecks sind 24 und 20 cm.

21. Einer Ellipse von den Halbachsen 51 und 34 m soll ein Rechteck von 2880 qm Fläche einbeschrieben werden. Wie lang sind dessen Seiten?

Angenommen die Halbseiten des gesuchten Rechtecks seien x und y m lang; der Inhalt des Rechteckes ist dann:

$$J = 4x \cdot y$$

nach den Bestimmungen der Aufgabe soll dieser Inhalt aber 2880 qm betragen, so daß sich als erste Gleichung ergibt:

$$4xy = 2880.$$

Da ferner x und y Koordinaten von Ellipsenpunkten sind, müssen sie der allgemeinen Ellipsengleichung (siehe Band 13) genügen. Wir erhalten, wenn wir in die allgemeine Gleichung die in der Aufgabe verlangten Halbachsen einführen als zweite Bestimmungsgleichung:

$$\frac{x^2}{51^2} + \frac{y^2}{34^2} - 1 = 0$$

oder:

$$\frac{x^2}{(3 \cdot 17)^2} + \frac{y^2}{(2 \cdot 17)^2} - 1 = 0$$

$$4x^2 + 9y^2 - 36 \cdot 17^2 = 0$$
$$4xy - 2880 = 0$$
$$\overline{}$$
$$(2x)^2 + (3y)^2 = 36 \cdot 289$$
$$12xy = 3 \cdot 2880$$
$$\overline{}$$
$$2x + 2y = \sqrt{36 \cdot 289 + 3 \cdot 2880}$$

Auf dieselbe Weise erhält man $2x - 2y$ und die Aufgabe ist gelöst.

22. Eine Ellipse von den Halbachsen 25 und 20 m wird von einer Geraden geschnitten, die die verlängerte große Achse in einer Entfernung von 40 m, die kleine in einer Entfernung von 24 m vom Ellipsenmittelpunkt schneidet. Wo liegen die Schnittpunkte mit der Ellipse?

Nehmen wir an, die Koordinaten des einen Schnittpunktes seien x und y. Da dieser Schnittpunkt sowohl auf der Geraden wie auf der Ellipse liegen muß, so müssen seine Koordinaten den allgemeinen Gleichungen beider Gebilde genügen und wir erhalten, wenn wir in die allgemeinen Gleichungen:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

die in der Aufgabe verlangten Werte einführen, die beiden Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{x}{40} + \frac{y}{24} - 1 = 0$$
$$\frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{20^2} - 1 = 0$$
$$\overline{}$$
$$3x + 5y = 120$$
$$16x^2 + 25y^2 = 10\,000$$
$$\overline{}$$
$$5y = 120 - 3x$$
$$16x^2 + (120 - 3x)^2 = 10000$$
$$16x^2 + 120^2 - 720x + 9x^2 = 10000$$
$$25x^2 - 720x + 4400 = 0$$
$$5x^2 - 144x + 880 = 0$$
$$x = \frac{144 \pm \sqrt{144^2 - 20 \cdot 880}}{10}$$

$$x = \frac{144 \pm \sqrt{3136}}{10}$$

$$x = \frac{144 \pm 56}{10}$$

$$x_1 = 20$$

$$x_2 = 8{,}8$$

$$5 y_1 = 120 - 60 = 60$$

$$y_1 = 12$$

$$5 y_2 = 120 - 26{,}4 = 93{,}6$$

$$y_2 = 18{,}72$$

Die Schnittpunkte haben also die Koordinaten (20, 12) und (8,8; 18, 72).

23. Eine Hyperbel hat Halbachsen von 24 und 16 m Länge. Wo liegen ihre Schnittpunkte mit einer Geraden, die die erste Achse in einem Abstande von 45, die zweite in einem Abstande von 36 m vom Hyperbelmittelpunkt schneidet.

Angenommen der eine Schnittpunkt habe die Koordinaten x u. y. Da dieser Schnittpunkt sowohl der Geraden wie der Hyperbel angehört, so müssen seine Koordinaten sowohl der allgemeinen Geraden- wie der allgemeinen Hyperbelgleichung Genüge leisten und wenn wir in die allgemeinen Formen dieser Gleichungen die in der Aufgabe geforderten Spezialwerte einführen, so erhalten wir die beiden Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{x}{45} + \frac{y}{36} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{24^2} - \frac{y^2}{16^2} - 1 = 0$$

$$4x + 5y = 180$$

$$4x^2 - 9y^2 = (2 \cdot 3 \cdot 8)^2 = 2304$$

Diese Gleichungen sind zu lösen.

24. Drei Zahlen geben paarweise miteinander multipliziert die Produkte a, b und c. Wie heißen dieselben?

Angenommen die Zahlen heißen x, y und z. Ihre paarweisen Produkte sind dann xy, xz und yz. Laut Aufgabe sollen diese Produkte aber a, b und c sein, so daß wir die 3 Gleichungen erhalten:

$$xy = a$$

$$xz = b$$
$$yz = c.$$
$$x^2y^2z^2 = a \cdot b \cdot c$$
$$x^2y^2 = a^2$$
$$z^2 = \frac{bc}{a}$$
$$z = \sqrt{\frac{bc}{a}}$$
usw.

25. In einer geometrischen Proportion ist die Summe der beiden inneren Glieder a, die Summe der beiden äußeren Glieder b und die Summe der Quadrate aller Glieder c. Wie heißt die Proportion.

Angenommen die beiden ersten Glieder seien x und y. dann sind die beiden letzten (a — x) und (b — y). Die gesuchte Proportion heißt dann;

$$y : x = (a - x) : (b - y)$$

oder:

$$ax - x^2 = by - y^2$$

Da nach Aufgabe ferner die Summe der Quadrate aller Glieder c sein soll, so erhält man als zweite Gleichung:

$$x^2 + (a - x)^2 + y^2 + (b - y)^2 = c$$
$$x^2 + y^2 - ax - by = \frac{1}{2}(c - a^2 - b^2)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit (— 1), so kommt

$$ax - x^2 + by - y^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c) \qquad (2\,a)$$

und führt man hier den Wert für $by - y^2$ ein, so erhält man:

$$2(ax - x^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c)$$

woraus man nach bekannter Art erhält:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{c - b^2}}{2}$$

also:

$$a - x = a - \frac{a \pm \sqrt{c - b^2}}{2} = \frac{1}{2}(a \mp \sqrt{c - b^2})$$

Führt man in obige Gleichung (2 a) den Wert für $ax - x^2$ ein, so erhält man nach derselben Art und Weise y und b — y.

26. In einer stetigen Proportion ist die Summe aller drei Glieder a und der Rest, den man erhält, wenn man von der Summe der Quadrate der äußern Glieder das Quadrat des mittleren Gliedes abzieht, b. Wie heißt die Proportion?

Wir nehmen an die Summe des ersten und dritten Gliedes sei x, dann ist das zweite Glied $a - x$. Ferner nehmen wir an, die Differenz des ersten und dritten Gliedes sei y, dann ist das erste Glied $= \frac{1}{2}(x + y)$ und das dritte $= \frac{1}{2}(x - y)$.

Nun ist also:

$$\frac{1}{4}(x^2 - y^2) = (a - x)^2 \text{ oder:}$$

$$8ax - 3x^2 - y^2 = 4a^2 \qquad (1.)$$

Ferner erhält man nach den Forderungen der Aufgabe als zweite Gleichung:

$$\frac{1}{4}(2x^2 + 2y^2) - (a - x)^2 = b$$

$$4ax - x^2 + y^2 = 2a^2 + 2b \qquad (2.)$$

Addiert man (1.) und (2.), so kommt:

$$12ax - 4x^2 = 6a^2 + 2b$$

$$x^2 - 3ax + \frac{3a^2 + b}{2} = 0$$

$$x = \frac{3a \pm \sqrt{3a^2 - 2b}}{2}$$

$$a - x = a - \frac{3a \pm \sqrt{3a^2 - 2b}}{2} = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{3a^2 - 2b}\right)$$

Die weitere Rechnung ist nun leicht auszuführen.

27. Eine Zahl wird mit drei Ziffern geschrieben. Addiert man 297 zu derselben, so erscheinen die Ziffern in umgekehrter Ordnung. Die Summe der Ziffern ist 16; die Summe ihrer Quadrate ist 90. Wie heißt die Zahl?

Angenommen die drei Ziffern seien von links nach rechts x, y und z; die Zahl heißt dann in unserem dekadischen System

$$\text{Zahl} = 100x + 10y + z$$

Addiert man hierzu 297, so soll nach der Aufgabe eine Zahl mit umgekehrter Ziffernfolge resultieren, so daß wir als erste Gleichung erhalten:

$$100x + 10y + z + 297 = 100z + 10y + x.$$

Aus den Forderungen der Aufgabe ergeben sich ferner die beiden Gleichungen:

$$x + y + z = 16$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 90$$

$$99x - 99z = 297$$
$$x - z = -3$$
$$x = -3 + z$$
$$-3 + z + y + z = 16$$
$$-3 + 2z + y = 16$$
$$y = 19 - 2z$$
$$(-3 + z)^2 + (19 - 2z)^2 + z^2 = 90$$
$$9 - 6z + z^2 + 361 - 76z + 4z^2 + z^2 - 90 = 0$$
$$6z^2 - 82z + 280 = 0$$
$$3z^2 - 41z + 140 = 0$$
$$z = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 12 \cdot 140}}{6}$$
$$z = \frac{41 \pm 1}{6}$$
$$z = 7$$
$$x = -3 + z = 4$$
$$y = 19 - 14 = 5.$$

Die gesuchte Zahl heißt also 457. Die zweite Lösung für z entspricht, weil keine ganze Zahl, nicht dem Sinne der Aufgabe.

28. Die Gesamtoberfläche eines Quaders beträgt 552 qcm, seine Raumdiagonale 17 cm. Die Summe der ersten und zweiten Kante ist um 13 cm größer, als die dritte Kante. Wie lang sind die Kanten?

Angenommen die Kanten seien x, y und z cm lang. Aus der Aufgabe folgen dann ohne Weiteres die drei Gleichungen:

$$2xy + 2xz + 2yz = 552$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 17^2$$
$$x + y = z + 13$$

Addieren wir die erste und zweite Gleichung und es kommt:

$$(x + y + z)^2 = 552 + 289 = 841$$

$$x + y + z = 29$$

hierzu:

$$\frac{x + y - z = 13}{2z = 16}$$

$$z = 8.$$

Nun ist also:

$$x + y = z + 13 = 21.$$

Ferner ist:

$$(x + y - z)^2 = 13^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2xz - 2yz + z^2 = 169$$

Hierin $x^2 + y^2 + z^2 = 289$ eingesetzt:

$$2xy - 2xz - 2yz = 169 - 289$$

Ferner für: $-2xz - 2yz = 2xy - 552$ eingeführt

$$2xy + 2xy - 552 = 169 - 289$$

$$4xy = -120 + 552 = 432$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 2xy = 21^2 = 441}{(x - y)^2 = 9}$$

$$x - y = \pm 3$$

$$\frac{x + y = + 21}{2x = 24}$$

$$x = 12$$

$$y = 9.$$

Die Kanten sind also 12,9 und 8 cm lang. *)

*) Andere Lösung des Gleichungssystems siehe in Kapitel II.

Kapitel V.

Ueber Maxima und Minima.

Es gibt eine Reihe von Aufgaben, in denen man zu bestimmen hat, welchen größten oder kleinsten Wert ein algebraischer Ausdruck annehmen kann. Bezeichnet man nun den Ausdruck mit m, so erhält man eine Gleichung, deren Lösung m enthält. Ist nun ferner diese Gleichung quadratisch, so enthält die Lösung für x die Größe m unter dem Wurzelzeichen und es läßt sich leicht bestimmen, welchen Wert m nicht über- oder unterschreiten darf, wenn nicht die Wurzel imaginär werden soll. Dieser Wert ist dann das gesuchte Maximum oder Minimum. Nur von diesem Gesichtspunkt aus wollen wir hier Aufgaben über Maxima und Minima betrachten; wir werden noch später uns ausführlich mit solchen Aufgaben beschäftigen. An einigen Beispielen sei die Methode eingeübt.

Aufgabe 1. In welche Summanden muß man eine Zahl a zerlegen, damit das Produkt aus diesen ein Größtes wird, d. h. größer als das Produkt aus irgend zwei anderen Summanden, in welche sich die Zahl a zerlegen läßt?

Angenommen der eine Summand sei x, dann ist der andere (a — x) und das Produkt dieser beiden:

$$x(a - x).$$

Wir bezeichnen dieses größte Produkt mit m und erhalten:

$$x(a - x) = m$$

$$ax - x^2 - m = 0$$

$$x^2 - ax + m = 0$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 - 4m}$$

Hier darf nun offenbar höchstens:

$$m = \frac{a^2}{4} \text{ sein,}$$

und dies ist der höchste Wert, den das Produkt $x(a - x)$ erreichen kann. Für diesen Fall wird:

$$x = \frac{a}{2}$$

$$a - x = \frac{a}{2}$$

d. h. in Worten, das Produkt wird am größten, wenn man die beiden Summanden gleich macht. Geometrisch heißt das, das größte Rechteck (inhaltlich) das von 2 Teilstrecken einer gegebenen Strecke konstruiert werden kann, ist das Quadrat über der halben Strecke.

Als Zahlenbeispiel diene:

$$\begin{array}{rlll} 64 = & 30 + 34 & \qquad 30 \cdot 34 = 1020 \\ & 28 + 36 & \qquad 28 \cdot 36 = 1008 \\ & 20 + 44 & \qquad 20 \cdot 44 = 880 \\ & 50 + 14 & \qquad 50 \cdot 14 = 700 \\ & 40 + 24 & \qquad 40 \cdot 24 = 960 \\ & 32 + 32 & \qquad 32 \cdot 32 = 1024 \\ & 31 + 33 & \qquad 31 \cdot 33 = 1023. \end{array}$$

Aufgabe 2. In welche Faktoren muß die Zahl a zerlegt werden, so daß die Summe derselben ein Minimum wird, d. h. daß die Summe derselben kleiner wird, als die Summe irgend zweier anderen Faktoren, in welche die Zahl a zerlegt werden kann?

Angenommen der eine Faktor sei x, dann ist der andere $\frac{a}{x}$ und die Summe beider:

$$x + \frac{a}{x}.$$

Den Minimalwert dieser Summe setzen wir m und erhalten:

$$x + \frac{a}{x} = m$$

$$x^2 - mx + a = 0$$

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{m^2 - 4a}$$

In diesem Ausdruck muß m^2 mindestens $4a$ sein und geben wir ihm diesen Minimalwert, dann wird:

$$x = \frac{m}{2}$$

und aus:

$$m^2 = 4a$$

$$m = 2\sqrt{a}$$

$$x = \sqrt{a}.$$

also:

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{a^2}{a}} = \sqrt{a}.$$

Damit also die Summe ein Minimum wird, müssen die Faktoren einander gleich sein, und zwar jeder $= \sqrt{a}.$

Als Zahlenbeispiel diene:

$$\begin{array}{rlr} 36 = & 4 \cdot 9 & 4 + 9 = 13 \\ & 12 \cdot 3 & 12 + 3 = 15 \\ & 2 \cdot 18 & 18 + 2 = 20 \\ & 6 \cdot 6 & 6 + 6 = 12. \end{array}$$

Aufgabe 3. Für welchen Wert von x erreicht der Ausdruck:

$$13 - 5x + x^2$$

sein Minimum?

Wir setzen den Minimalwert:

$$x^2 - 5x + 13 = m$$

und daraus wird:

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{25 - 42 + 4m}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{-17 + 4m}$$

Hierin muß mindestens:

$$m = \frac{17}{4} \text{ sein,}$$

und es wird für diesen Fall:

$$x = \frac{5}{2}.$$

Der obige Ausdruck erreicht also für $x = \frac{5}{2}$ sein Minimum, und zwar ist dieses $\frac{17}{4}$.

Aufgabe 4. Für welchen Wert erreicht der Ausdruck:

$$10 + 7x - x^2$$

sein Maximum?

Wir setzen diesen Maximalwert m und erhalten:

$$10 + 7x - x^2 = m$$

$$-x^2 + 7x + 10 - m = 0$$

$$x^2 - 7x - (10 - m) = 0$$

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{49 + 40 - 4m}$$

m darf in diesem Falle höchstens $\frac{89}{4}$ werden und hierfür wird:

$$x = \frac{7}{2}.$$

Der Ausdruck erhält also für $x = \frac{7}{2}$ seinen Maximalwert von $\frac{89}{4}$.

Aufgabe 5. Welches von allen Dreiecken, deren Grundlinie und Höhe die Summe a haben, hat den größten Inhalt und wie groß ist dieser?

Angenommen die Grundlinie sei x, dann ist die Höhe (a — x) und der Inhalt:

$$\frac{x(a - x)}{2}$$

Dieser Ausdruck soll ein Maximum werden. Wir setzen den Maximalwert = m und erhalten:

$$\frac{x(a - x)}{2} = m$$

$$ax - x^2 - 2m = 0$$

$$x^2 - ax + 2m = 0$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 - 8m}$$

m kann hier höchstens $\frac{a^2}{8}$ werden und für diesen Fall wird:

$$x = \frac{a}{2}$$

$$a - x = \frac{a}{2}$$ und:

$$J = \frac{a^2}{8} \cdot$$

Der Inhalt wird also ein Maximum für

$$x = \frac{a}{2} \text{ und } a - x = \frac{a}{2}.$$

Aufgabe 6. Welches einem Kreise mit dem Radius r einbeschriebene Rechteck hat den größten Inhalt, welches den größten Umfang?

Nehmen wir an, die eine Seite des Rechtecks sei x, die eine andere y, dann ist sein Inhalt:

$$J = x \cdot y$$

Dieser Ausdruck soll ein Maximum werden.

Nun ist:
$$x^2 + y^2 = 4r^2$$
$$x^2 = 4r^2 - y^2$$

Wenn J ein Maximum wird, muß auch J^2 ein solches sein, wir erhalten:

$$J^2 = x^2 y^2$$
$$J^2 = y^2 (4r^2 - y^2)$$

Diesen Ausdruck setzen wir gleich dem Maximalwert m und erhalten:

$$J^2 = y^2 (4r^2 - y^2) = m$$
$$4r^2 y^2 - y^4 - m = 0$$
$$y^2 = v$$
$$v^2 - 4r^2 v + m = 0$$
$$v = \frac{4r^2}{2} \pm \sqrt{16r^4 - 4m}$$

Es darf hier m höchstens:

$$\frac{16r^4}{4} = 4r^4$$

werden; in diesem Fall wird;

$$v = 2r^2$$
$$\underline{y = r\sqrt{2}}$$

und hierfür wird:
$$x^2 + 2r^2 = 4r^2$$
$$x^2 = 2r^2$$
$$\underline{x = r\sqrt{2}.}$$

Das größte Rechteck ist also das reguläre Viereck und sein Inhalt ist $2r^2$.

Aufgabe 7. Welches von den Rechtecken, die sich in ein gleichseitiges Dreieck beschreiben lassen, hat die größte Fläche?

Die Seite des Dreiecks sei a. Eine Rechteckseite sei x, die andere y. Der Inhalt des Rechtecks ist dann:

$$J = x \cdot y$$

Dieser Ausdruck soll ein Maximum sein.

Nun verhält sich offenbar:

$$\frac{x}{2} : \frac{a}{2} = (h - y) : h$$

$$\frac{h \cdot x}{2} = \frac{a}{2}(h - y)$$

$$hx = a(h - y)$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot x = a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y\right)$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y\right)$$

$$x = a - \frac{2y}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3} - 2y}{\sqrt{3}}$$

also:

$$J = y \cdot \frac{a\sqrt{3} - 2y}{\sqrt{3}.}$$

Wenn J ein Maximum wird, muß offenbar das Produkt $y(a\sqrt{3} - 2y)$ ein solches werden; wir setzen daher diesen Ausdruck m und erhalten:

$$-2y^2 + y \cdot a\sqrt{3} - m = 0$$

$$2y^2 - a\sqrt{3}\,y + m = 0$$

$$y = \frac{a\sqrt{3} \pm \sqrt{3a^2 - 8m}}{4}$$

In diesem Ausdruck darf nun m höchstens $\frac{3a^2}{8}$ werden und es wird hierfür:

$$y = \frac{a}{4}\sqrt{3}$$

und dann wird:

$$x = \frac{a\sqrt{3} - \frac{a}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}.$$

Das Rechteck erhält also die größte Fläche, wenn die in einer Seite des Dreiecks gelegene Seite $\frac{a}{2}$ und die darauf senkrecht stehende $\frac{a}{4} \cdot \sqrt{3}$, d. h. gleich der halben Höhe wird.

Der Inhalt dieses Rechteckes ist $\frac{3}{8}a^2$.

Kapitel VI.

Unbestimmte Gleichungen I. und II. Grades.

§ 1. Zahlenkongruenzen.

Sind a und m zwei beliebige natürliche Zahlen, so lassen sich stets zwei Zahlen q und r so bestimmen, daß:

$$a = q \cdot m + r.$$

Ist nun eine andere Zahl b durch die Gleichung bestimmt:

$$b = q' \cdot m + r$$

so geben beide Zahlen bei der Division durch m denselben Rest r, die beiden Zahlen sind nach m gleichrestig oder nach Gauß*) kongruent nach dem Modul m (Numeri congrui). Symbolisch wird diese Kongruenz (Zahlenkongruenz), die mit dem geometrischen Begriff der Kongruenz nichts gemein hat, dargestellt durch:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

gelesen: „a kongruent zu b nach dem Modul m" oder kürzer: „a kongruent b nach m".

Die Zahl q ist Null oder positiv, und r genügt der Bedingung:

$$0 \lesseqgtr r < m.$$

Aus:

$$a = q \cdot m + r$$

und:

$$b = q' m + r$$

ergibt sich:

$$a - b = (q - q') m$$

so daß also (a — b) durch den Modul m ohne Rest teilbar oder (a — b) : m eine ganze Zahl ist. Man kann also auch sagen:

Zwei kongruente Zahlen sind solche, deren Differenz durch den Modul ohne Rest teilbar ist.

*) Siehe geschichtl. Anhang zu Band V.

In dem symbolischen Ausdruck:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

heißt a die „Präzedente“, b die „Konsequente“, m der „Modul“ (wie schon erwähnt), von den Größen a und b heißt jede das „Residuum“, der anderen.

Da z. B. 37 und 25 bei der Division durch 6 beide den Rest 1 geben, so ist:

$$37 \equiv 25 \pmod{6}$$

und es ist:

$$37 - 25 = 12$$

ohne Rest durch 6 teilbar.

Ferner ist:

$$47 \equiv -2 \pmod{7}$$

denn

$$47 - (-2) = 49$$

ist durch 7 ohne Rest teilbar.

Man erkennt ohne Weiteres, daß jede Zahl mit ihrem Rest kongruent nach dem Divisor als Modul ist, also z. B.:

$$51 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$84 \equiv 3 \pmod{9}$$

$$117 \equiv 15 \pmod{17}$$

....

....

Für das Rechnen mit kongruenten Zahlen gelten folgende Sätze:

1. Sind m aufeinanderfolgende Zahlen gegeben und eine andere Zahl A, so ist eine, aber auch nur eine von jenen m Zahlen der Zahl A kongruent nach dem Modul m.

Es seien: $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, \cdots a + (m - 1)$ die m gegebenen aufeinanderfolgenden Zahlen und es sei:

$$A = s \cdot m + r.$$

Dividiert man A durch m, so ergibt sich der Rest r. Dieser Rest kann nur eine von den Zahlen $0, 1, 2, 3, \cdots\cdots (m - 1)$ sein, und jede dieser Zahlen ist kleiner als m. Dividiert man jede der Zahlen $a, a + 1, a + 2, \cdots\cdots a + (m - 1)$ ebenfalls durch m, so können die Reste keine andern sein als die Zahlen $0, 1, 2, 3 \cdots\cdots\cdots m - 1$, da beim Wachsen jedes Dividenden um 1 gegenüber dem vorhergehenden auch notwendiger Weise jeder Rest um 1 gegenüber dem vorhergehenden wachsen muß. Unter diesen in der Zahlenreihe aufeinanderfolgenden Resten muß aber nun notwendiger einer, aber auch nur einer, sein, der r gleich ist und die kongruente Zahl ist der dem Rest zugehörige Dividendus. Zwei kongruente Zahlen kann es unter den m gegebenen, aufeinanderfolgenden Zahlen zu A nicht geben, denn sonst müßten unter den m Resten zwei gleiche sein, was aber unmöglich ist.

2. Wenn zwei Zahlen mit derselben dritten nach demselben Modus kongruent sind, so sind sie auch unter sich nach diesem Modus kongruent.

Wenn also:

$$a \equiv b \pmod m$$
$$b \equiv c \pmod m$$

so ist auch:

$$\boldsymbol{a \equiv c \pmod m}.$$

Es ist nach den Voraussetzungen:

$$a - b$$

ein Vielfaches von m, ebenso

$$b - c,$$

folglich auch ihre Summe:

$$(a - b) + (b - c) = a - c$$

was in die Form einer Kongruenz übertragen lautet:

$$a \equiv c \pmod m$$

wie behauptet wurde.

3. Sind zwei Kongruenzen modulgleich, so ist die Summe der Präzedenten kongruent zur Summe der Konsequenten nach dem gleichen Modul.

Es sei:

$$A \equiv a \pmod m$$
$$B \equiv b \pmod m$$

dann ist:

$$\boldsymbol{A + B \equiv a + b \pmod m}.$$

Aus den beiden Voraussetzungen ergibt sich, daß

$$A - a$$

ein Vielfaches von m ist, und ebenso:

$$B - b,$$

folglich auch ihre Summe:

$$A - a + B - b = (A + B) - (a + b).$$

Das heißt in Form einer Zahlenkongruenz geschrieben:

$$A + B \equiv a + b \pmod m.$$

4. Sind zwei Kongruenzen modulgleich, so ist die Differenz der Präzedenten kongruent zur Differenz der Konsequenten nach dem gleichen Modul.

Es sei:

$$\begin{array}{c} A \equiv a \pmod{m} \\ B \equiv b \pmod{m} \\ \hline \end{array}$$

dann ist auch:

$$\boldsymbol{A - B \equiv a - b \pmod{m}}.$$

Nach den beiden Voraussetzungen ist sowohl:

$$A - a$$

wie auch:

$$B - b$$

ein Vielfaches von m, folglich auch ihre Differenz:

$$A - a - B + b = (A - B) - (a - b)$$

was in Kongruenzform heißt:

$$\boldsymbol{A - B \equiv a - b \pmod{m}}$$

wie behauptet wurde.

5. Eine bestehende Kongruenz bleibt für denselben Modul richtig, wenn man Präzedent und Konsequent mit derselben Zahl k multipliziert.

Ist also:

$$A \equiv a \pmod{m}$$

so ist auch:

$$\boldsymbol{Ak \equiv ak \pmod{m}}.$$

Nach der Voraussetzung ist:

$$A - a$$

ein Vielfaches von m, folglich auch:

$$(A - a) \cdot k = Ak - ak,$$

was in Kongruenzform die geforderte Kongruenz

$$Ak \equiv ak \pmod{m}$$

ergibt.

6. Sind zwei Kongruenzen modulgleich, so ist das Produkt der Präzedenten kongruent dem Produkt der Konsequenten nach dem gleichen Modul.

Ist also:

$$\begin{array}{c} A \equiv a \pmod{m} \\ B \equiv b \pmod{m} \\ \hline \end{array}$$

so ist auch:

$$\boldsymbol{A \cdot B \equiv a \cdot b \pmod{m}}.$$

Nach der ersten Voraussetzung ist:

$$A - a$$

ein Vielfaches von m, folglich auch:

$$(A - a)\,B = AB - aB$$

was in Kongruenzform heißt:

$$AB \equiv aB \pmod{m}.$$

Nach der zweiten Voraussetzung ist:

$$B - b$$

ein Vielfaches von m, folglich auch

$$(B - b)\,a = aB - ab$$

oder in Kongruenzform:

$$aB \equiv ab \pmod{m}$$

hierzu:

$$AB \equiv aB \pmod{m}$$

ergibt die Behauptung:

$$\boldsymbol{AB \equiv ab \pmod{m}}.$$

Dieser Satz läßt sich auch auf mehrere Kongruenzen mit demselben Modul ausdehnen, woraus sich dann ohne weiteres der Satz ergibt:

6a. In einer bestehenden Kongruenz darf man bei demselben Modul Präzedent und Konsequent mit ein und derselben Zahl potenzieren.

Ist also:

$$A \equiv a \pmod{m}$$

so ist auch:

$$\boldsymbol{A^p \equiv a^p \pmod{m}}$$

7. Sind zwei Zahlen nach einem Modul kongruent, so können beide Zahlen durch einen gemeinschaftlichen Teiler dividiert werden, wenn dieser zum Modul relativ prim ist.

Ist also:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

und ist τ ein gemeinschaftlicher Teiler von a und b und außerdem relativ prim zu m, so ist auch:

$$\boldsymbol{\frac{a}{\tau} \equiv \frac{b}{\tau} \pmod{m}}$$

Nach der Voraussetzung ist m ein Teiler von a — b, ebenso τ, folglich auch: $m\tau$. Es ist also:

$$\frac{a - b}{m \cdot \tau} = x = \text{einer ganzen Zahl}$$

$$\frac{a - b}{\tau} = m x$$

$$\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau} = m \cdot x.$$

Also ist:

$\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau}$ ein Vielfaches von m, d. h. in Kongruenzform:

$$\frac{a}{\tau} \equiv \frac{b}{\tau} \;(mod\; m).$$

8. Haben in einer Kongruenz die beiden Kongruenzzahlen und der Modul einen gemeinschaftlichen Teiler, so bleibt die Kongruenz richtig, wenn man alle drei Zahlen durch diesen Teiler dividiert.

Ist also; $\quad a \equiv b \;(\text{mod } m)$

und ist: τ ein gemeinsamer Faktor von a, b und m, so ist auch:

$$\frac{a}{\tau} \equiv \frac{b}{\tau} \left(mod\; \frac{m}{\tau}\right).$$

Es sei:

$$a = a_1 \cdot \tau$$

$$b = b_1 \cdot \tau$$

$$m = m_1 \cdot \tau$$

so ist nach der Voraussetzung:

$$a_1 \tau - b_1 \tau = m_1 \tau \cdot x = \text{einer ganzen Zahl}$$

folglich:

$$\frac{a_1 \tau - b_1 \tau}{m_1 \tau} = x = \text{einer ganzen Zahl}$$

oder: $\quad \dfrac{a_1 - b_1}{m_1} = x = \text{einer ganzen Zahl}$

oder:

$$\frac{\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau}}{\frac{m}{\tau}} = x = \text{einer ganzen Zahl}$$

oder:

$$\frac{a}{\tau} \equiv \frac{b}{\tau} \left(mod\; \frac{m}{\tau}\right),$$ wie behauptet wurde.

9. Die Kongruenz zweier Zahlen bleibt bestehen, wenn zu einer oder zu jeder der beiden kongruenten Zahlen ein Vielfaches des Modul addiert oder subtrahiert wird.

Ist also: $a \equiv b \pmod m$

so ist auch: $\boldsymbol{a \pm pm \equiv b \pmod m}$

$$\boldsymbol{a \equiv b \pm pm \pmod m}$$

$$\boldsymbol{a \pm pm \equiv b \pm qm \pmod m}.$$

Die Behauptungen lassen sich herleiten aus dem Tatbestand, daß wenn: $a - b$

ein Vielfaches von m ist, auch:

$$a - b \pm pm$$

ein solches ist.

Aufgaben.

1. Den Satz über Teilbarkeit der Zahlen durch 9 mit Hilfe der Kongruenzen zu beweisen.

Jede dekadische Zahl ist (siehe Band II) von der Form:

$$N = a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Für den Modul m sei nun:

$$a \equiv a \pmod m,$$
$$b \cdot 10 \equiv b \cdot \alpha_1 \pmod m$$
$$c \cdot 10^2 \equiv c\,\alpha_2 \pmod m$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so ist:

$$N \equiv a + b\alpha_1 + c\alpha_2 + d\alpha_3 + \cdots\cdots\cdots$$

für m = 9 ist nun:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_3 = \cdots\cdots\cdots = 1$$

also:

$$N \equiv a + b + c + d + e + \cdots\cdots \pmod 9).$$

Bezeichnen wir die rechtsstehende Summe mit R, so kann:

$$R = sm$$

oder:

$$R = sm + r,$$

so daß:

$N \equiv R \equiv r$, es ist also für

$$R = sm$$

$N - R = x =$ eine ganze Zahl und da R ein Vielfaches von 9 ist, so muß auch N ein solches sein. Die Zahl N ist also durch 9 teilbar, wenn R es ist, d. h. wenn die Ziffernsumme es ist.

Ist:
$$R = sm + r$$
so ist:
$$N - sm - r = x = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Hierin ist aber r kleiner als m, also unmöglich ein Vielfaches von m, s m ist ein Vielfaches von m, so daß N nichts anderes sein kann als ein Vielfaches von m plus demselben Rest r. Es muß also:
$$N = R \cdot m + r$$
sein, d. h. die Zahl N muß bei der Division durch 9 denselben Rest liefern wie R, d. h. wie die Ziffernsumme.

2. Wenn von den sieben Wochentagen Sonntag mit 1, Montag mit 2, Dienstag mit 3 usw. bezeichnet wird, und 1. Januar den Wochentag 1 hat, welchen Wochentag haben 1. Februar, 1. März, 1. April usw. α) im Gemeinjahr, β) im Schaltjahr?

Berechnen wir vom 1. Januar an die Tage bis zum 1. Febr., 1. März einschließlich usw. und bestimmen die kleinsten Residuen der gefundenen Zahlen nach dem Modul 7, so erhalten wir:

$$\begin{array}{ll}
32 = 4 \cdot 7 + 4 & \\
60 = 8 \cdot 7 + 4, & 61 = 8 \cdot 7 + 5 \\
91 = 12 \cdot 7 + 7, & 92 = 13 \cdot 7 + 1 \\
121 = 17 \cdot 7 + 2, & 122 = 17 \cdot 7 + 3 \\
152 = 21 \cdot 7 + 5, & 153 = 21 \cdot 7 + 6 \\
182 = 25 \cdot 7 + 7, & 183 = 26 \cdot 7 + 1 \\
213 = 30 \cdot 7 + 3, & 214 = 30 \cdot 7 + 4 \\
244 = 34 \cdot 7 + 6, & 245 = 34 \cdot 7 + 7 \\
274 = 39 \cdot 7 + 1, & 275 = 39 \cdot 7 + 2 \\
305 = 43 \cdot 7 + 4, & 306 = 43 \cdot 7 + 5 \\
335 = 47 \cdot 7 + 6, & 336 = 47 \cdot 7 + 7.
\end{array}$$

Hiernach ergeben sich folgende Kongruenzen nach dem Modul 7:

$$\begin{array}{ll}
32 \equiv 4 & \\
60 \equiv 4, & 61 \equiv 5 \\
91 = 7, & 92 \equiv 1 \\
121 \equiv 2, & 122 \equiv 3 \\
152 \equiv 5, & 153 \equiv 6 \\
182 \equiv 7, & 183 \equiv 1 \\
213 \equiv 3, & 214 \equiv 4
\end{array}$$

$$244 \equiv 6, \qquad 245 \equiv 7$$
$$274 \equiv 1, \qquad 275 \equiv 2$$
$$305 \equiv 4, \qquad 306 \equiv 5$$
$$335 \equiv 6, \qquad 336 \equiv 7$$

demnach ist:

1. Februar	im Gemeinjahr:		Mittwoch,	im Schaltjahr:		Mittwoch
1. März	„	„	Mittwoch,	„	„	Donnerstag
1. April	„	„	Samstag,	„	„	Sonntag
1. Mai	„	„	Montag,	„	„	Dienstag
1. Juni	„	„	Donnerstag,	„	„	Freitag
1. Juli	„	„	Samstag,	„	„	Sonntag
1. August	„	„	Dienstag,	„	„	Mittwoch
1. September		„	Freitag,	„	„	Samstag
1. Oktober	„	„	Sonntag,	„	„	Montag
1. November		„	Mittwoch,	„	„	Donnerstag
1. Dezember		„	Freitag,	„	„	Samstag.

Es handelt sich nun darum, den Wochentag des 1. Januar für jedes beliebige Jahr unserer Zeitrechnung bestimmen zu könnnen. Dies erreichen wir auf folgende Weise.

Mit jedem gemeinen Jahre findet eine Verschiebung des Wochentages statt, da $365 = 52 \cdot 7 + 1$, weshalb ein solches Jahr mit dem Wochentag schließt, mit dem es begonnen hat, das nächste Jahr aber mit dem folgenden Wochentag beginnt. Bei einem Schaltjahr aber finden zwei Verschiebungen statt, da $366 = 52 \cdot 7 + 2$; wenn also in einem Schaltjahr der 1. Januar ein Sonntag ist, so ist der 31. Dezember dieses Jahres ein Montag und der 1. Januar des folgenden Jahres ein Dienstag. Bezeichnen wir das Jahr, für dessen 1. Januar wir den Wochentag bestimmen wollen, mit a, so haben seit Christi Geburt a Verschiebungen stattgefunden. Da aber alle 4 Jahre ein Schaltjahr ist, so sind $\frac{a}{4}$ weitere Verschiebungen in Rechnung zu setzen. Die Säkularjahre sind keine Schaltjahre, so daß wieder $\frac{a}{100}$ Verschiebungen abzuziehen sind, jedes 4. Säcularjahr ist aber ein Schaltjahr, so daß zu dem vorigen Resultat $\frac{a}{400}$ Verschiebungen zu addieren sind. Da ferner das Jahr 0 als Schaltjahr angenommen werden muß, so muß noch eine weitere Verschiebung angerechnet werden.

Hiernach haben wir bis zum Jahre a:

$$a + \frac{a}{4} - \frac{a}{100} + \frac{a}{400} + 1$$

Verschiebungen.

Bestimmen wir nun zu der Anzahl der Verschiebungen nach dem Modul 7 das kleinste Residuum. so erhalten wir den Wochentag des 1. Januars im Jahre a unter der Annahme, daß der 1. Januar vom Jahre 1 ein Samstag war.

Wir wollen hiernach den Wochentag des 1. Januars 1907, 1920 und 1937 bestimmen. Wir erhalten:
als Anzahl der Verschiebungen:

$$N = 1907 + \frac{1907}{4} - \frac{1907}{100} + \frac{1907}{400} + 1$$

$$= 1907 + 476 - 19 + 4 + 1 = 2369$$

$$2369 \equiv 3 \pmod 7.$$

Der erste Januar 1907 ist also 3 d. h. ein Dienstag. Für 1920 erhalten wir:

$$N = 1920 + \frac{1920}{4} - \frac{1920}{100} + \frac{1920}{400} + 1$$

$$= 1920 + 480 - 19 + 4 + 1$$

$$= 2386.$$

Das Jahr 1920 ist ein Schaltjahr; auf den 1. Januar hat aber diese Tatsache noch keine Wirkung und wir haben in der obigen Summe der Verschiebungen eine zum Abzug zu bringen, erhalten also:

$$N = 2385$$

$$2385 \equiv 5 \pmod 7$$

Der erste Januar 1920 ist also ein Donnerstag

Ferner kommt für 1937:

$$N = 1937 + \frac{1937}{4} - \frac{1937}{100} + \frac{1937}{400} + 1$$

$$N = 1937 + 484 - 19 + 4 + 1$$

$$N = 2407$$

$$2407 \equiv 6 \pmod 7.$$

Der erste Januar 1937 ist also ein Freitag.

Wir haben gefunden, daß der 1. Januar 1907 ein Dienstag ist; nach der bekannten 28 jährigen Periode*) ist also auch der erste Januar 1935 ein Dienstag, der erste Januar 1936 ein Mittwoch, und der erste Januar 1937, da 1936 ein Schaltjahr, ein Freitag, wie wir durch Rechnung gefunden haben.

---

*) Siehe Band III.

3. Der erste Januar 1801 war ein Donnerstag: welchen Wochentag hat der erste Januar 1802?

Bis zum ersten Januar 1801 seien y Tage verflossen, dann sind es bis zum ersten Januar 1802: $y + 365$ Tage. Da der erste Januar 1801 ein Donnerstag, also 5 ist, so gilt die Kongruenz:

$$y \equiv 5 \pmod 7$$

Das kleinste Residuum zu $y + 365$ sei x, dann ist:

$$y + 365 \equiv x \pmod 7$$

also*):
$$y + 365 - y \equiv x - 5 \pmod 7$$

oder:
$$365 \equiv x - 5 \pmod 7.$$

Nun ist aber auch: $365 \equiv 1 \pmod 7$.

Hieraus ergibt sich: $x - 5 = 1$

$$x = 6,$$

so daß also der erste Januar 1802 ein Freitag war.

4. Jsaak Newton wurde geboren am 5. Januar 1643. Was war sein Geburtstag für ein Wochentag? Galileo Galilei starb am 8. Januar 1642, auf welchen Wochentag fiel sein Todestag?

Wir berechnen den Wochentag vom 1. Januar 1642. Wir erhalten:

$$N = 1642 + \frac{1642}{4} - \frac{1642}{100} + \frac{1642}{400} + 1$$
$$= 1642 + 410 - 16 + 4 + 1$$
$$= 2041$$

$$2041 \equiv 4 \pmod 7$$

Der 1. Januar und damit auch der 8. des Jahres 1642 war also ein Mittwoch; der erste Januar 1643 ein Donnerstag, also der 5. ein Montag.

5. Am 16. August 1858 kam das erste Telegramm von Europa nach Amerika; was war dieser Tag für ein Wochentag?

Bis zum 16. August 1858 sind:

$$1858 \cdot 365 + \frac{1858}{4} - \frac{1858}{100} + \frac{1858}{400} + 1 + 228$$

Tage verflossen. Es kommt:

$$1857 \cdot 365 + 464 - 18 + 4 + 1 + 227$$
$$= 1857 \cdot 365 + 678 = 1857\,(52 \cdot 7 + 1) + 678 \equiv 1 \pmod 7.$$

Der 16. August 1858 war also ein Sonntag.

*) Nach Satz 4.

6. Was war der Todestag des Ingenieurs von Tulla für ein Wochentag, wenn von Tulla am 27. März 1828 starb.

Bis zu diesem Tag sind:

$$1827 \cdot 365 + \frac{1827}{4} - \frac{1327}{100} + \frac{1827}{400} + 1 + 85$$

Tage verflossen. Man erhält:

$$1827 \cdot 365 + 456 - 18 + 4 + 1 + 85 = 1827 \cdot 365 + 528$$
$$= 1827\,(52 \cdot 7 + 1) + 528$$
$$1827 + 528 = 2355 \equiv 3 \pmod 7$$

Der Todestag des Jngenieurs von Tulla war also ein Dienstag. (von Tulla war von 1813 bis zu seinem Tode Chef des großh. badischen Wasser- und Straßenbauwesens; sein größtes Verdienst ist die Anregung zu der 1818 unter ihm begonnenen Kanalisation und Vertiefung des Oberrheins.)

7. Man berechne die goldene Zahl g, den Sonnenzirkel s und die Römerzinszahl r des Jahres 1908.

Im III. Bändchen haben wir die obigen Begriffe erklärt und wollen also dort nachgelesen werden.

Wir erhalten allgemein für das Jahr n:

$$n + 1 \equiv g \pmod{19}$$
$$n + 9 \equiv s \pmod{28}$$
$$n + 3 \equiv r \pmod{15}$$

für unsern Spezialfall also:

$$1909 \equiv g \pmod{19}$$

wir erhalten:

$$1909 \equiv 9 \pmod{19}$$
$$1917 \equiv s \pmod{28}$$
$$1917 \equiv 13 \pmod{28}$$
$$1911 \equiv r \pmod{15}$$
$$1911 \equiv 6 \pmod{15}.$$

Das Jahr 1908 hat also die charakteristischen Merkmale:

$$g = 9$$
$$s = 13$$
$$r = 6.$$

8. Es sei zu lösen:

$$13\,x \equiv 5 \pmod 7.$$

Eine solche Kongruenz zu lösen heißt, ganzzahlige Werte für x suchen, die der Kongruenz genügen. Hierbei ist, d. h. wenn die Aufgabe lösbar sein soll, unerläßliche Bedingung, daß der Koeffizient von x und der Modul relativ prim zu einander sind, denn hätte jener und der Modul einen Teiler, der nicht zugleich auch in der zweiten Kongruenzzahl enthalten wäre, so wäre eine Wurzel in ganzen Zahlen unmöglich. Eine Kongruenz I. Grades läßt sich lösen:

I. Nach der Substitutionsmethode.

Man addiert zu 5 solange ein Vielfaches vom Modul 7, bis die Summe ein Vielfaches vom Koeffizienten von x, hier von 13 ist. Diese Operation ist, wie oben gezeigt, erlaubt.

Man erhält: $5 + 1 \cdot 7 = 12$

$$12 : 13 \text{ Rest } 12$$

$$5 + 2 \cdot 7 = 19$$

$$19 : 13 \text{ Rest } 6$$

$$5 + 3 \cdot 7 = 26$$

$$26 : 13 \text{ Rest } 0.$$

Wir addieren also $3 \cdot 7$ und erhalten:

$$13x \equiv 5 + 3 \cdot 7 \pmod 7$$

$$13x \equiv 26 \pmod 7.$$

Hieraus folgt: $x \equiv 2 \pmod 7$.

Mithin ist 2 eine Wurzel der Kongruenz:

$$13x \equiv 5 \pmod 7$$

Die übrigen Wurzeln sind enthalten in der Form:

$$x = 2 + 7n,$$

worin n jede ganze Zahl sein kann.

Löst man das Beispiel mittels Substitution durch Subtraktion, so erhält man:

$5 - 1 \cdot 7 = -2$	Rest: -2
$5 - 2 \cdot 7 = -9$	„ : -9
$5 - 3 \cdot 7 = -16$	„ : -3
$5 - 4 \cdot 7 = -23$	„ : -10
$5 - 5 \cdot 7 = -30$	„ : -4
$5 - 6 \cdot 7 = -37$	„ : -1
$5 - 7 \cdot 7 = -42$	„ : -5
$5 - 8 \cdot 7 = -51$	„ : -12
$5 - 9 \cdot 7 = -58$	„ : -6
$5 - 10 \cdot 7 = -65$	„ : $-0.$

Also: $$13x \equiv 5 - 10 \cdot 7 \pmod{7}$$
$$13x \equiv -65 \pmod{7}$$
$$x \equiv -5 \pmod{7}$$

Also ist -5 ebenfalls eine Wurzel der Kongruenz; diese Lösung ist natürlich auch in der vorigen enthalten; es ist:
$$x = 2 + 7 \cdot n$$
für $$n = -1$$
$$x = 2 - 7 = -5.$$

II. Nach der Methode der Faktorenzerlegung.

Diese Methode eignet sich besonders für größere Zahlen Es sei z. B. zu lösen:
$$91x \equiv 17 \pmod{73}$$
Man erhält: $7 \cdot 13x \equiv 17 \pmod{73}$

Nun eliminiert man nach der vorigen Methode zuerst den einen Faktor, dann den andern. Man erhält:
$$7 \cdot 13x \equiv 17 - 1 \cdot 73 \pmod{73}$$
$$7 \cdot 13x \equiv -56 \pmod{73}$$
$$13x \equiv -8 \pmod{73}$$
$$13x \equiv -8 + 1 \cdot 73 \pmod{73}$$
$$13x \equiv 65 \pmod{73}$$
$$x \equiv 5 \pmod{73}$$
Also ist: $$x = 5$$
eine Wurzel der Kongruenz. Die übrigen Wurzeln sind enthalten in der Form:
$$x = 5 + 73n,$$
wo n jede ganze Zahl bedeuten kann.

III. Nach der Methode der Transformation der Kongruenz.

Es sei zu lösen:
$$53x \equiv 8 \pmod{37} \qquad (1.)$$
Es ist: $$37x \equiv 0 \pmod{37} \qquad (2.)$$
also: $$(53 - 37)x \equiv 8 - 0 \pmod{37}$$
$$16x \equiv 8 \pmod{37} \qquad (3.)$$
oder: $$48x \equiv 24 \pmod{37}$$
oder diese Kongruenz von der gegebenen subtrahiert:

$$5x \equiv -16 \pmod{37}$$

oder: $$15x \equiv -48 \pmod{37}$$

und diese Kongruenz von (3.) subtrahiert:

$$x \equiv 56 \pmod{37}$$

oder: $$x \equiv 56 - 1 \cdot 37 \pmod{37}$$

$$x \equiv 19 \pmod{37}$$

$$x = 19$$

oder allgemein: $$x = 19 + 37n.$$

Die kleinste positive Wurzel der Kongruenz ist also $x = 19$; die übrigen sind enthalten in $x = 19 + 37n$.

9. Das kleinste Residuum x zu bestimmen, wenn:

$$7235^{1000} \equiv x \pmod{7}$$

Es ist: $$7235 = 1033 \cdot 7 + 4, \text{ also:}$$

$$7235 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$7235^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 2 \pmod{7}$$

also: $$7235^1 \cdot 7235^2 = 4 \cdot 2 \pmod{7}$$

$$7235^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod{7}$$

Nun ist: $$1000 \equiv 3 \cdot 333 + 1$$

$$(7235^3)^{333} \equiv 1^{333} \pmod{7}$$

$$7235^{999} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$7235^{999} \cdot 7235^1 \equiv 1 \cdot 4 \pmod{7}$$

$$7235^{1000} \equiv 4 \pmod{7}$$

Also ist zu 7235^{1000} nach dem Modul 7 das kleinste Residiuum $x = 4$.

Auf dieselbe Weise sind ähnliche Aufgaben zu lösen.

Ist: $$a = m \cdot q + r$$

und sind a und m relativ prim, so muß auch r zu m relativ prim sein, denn ein gemeinsamer Teiler von m und r wäre auch ein Teiler von:

$$a = m \cdot q + r$$

Aus der Reihe der möglichen Reste:

$$r = 0, 1, 2, 3 \cdots\cdots\cdots\cdots (m - 1)$$

fallen, wenn man nur die zu m teilerfremden in Betracht zieht, also verschiedene aus und wir bezeichnen die Anzahl der positiven Reste, die zu m teilerfremd sind, mit:

$$\varphi\ (m).$$

Unter diesen teilerfremden Resten ist jedenfalls stets 1. Ist nun m eine Primzahl, so ist:

$$\varphi\ (m) = m - 1,$$

also z. B. $\varphi\ (5) = 5 - 1 = 4$,

nämlich: 1, 2, 3, 4.

oder $\varphi\ (11) = 10$,

nämlich: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ist m eine Potenz einer Primzahl p, so sind alle durch p teilbaren Zahlen auszuscheiden; ihre Anzahl ist $\frac{m}{p}$, so daß man erhält:

$$\varphi\ (m) = m - \frac{m}{p} = m\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

So ist z. B.

$$\varphi\ (49) = \varphi\ (7)^2 = 49 - \frac{49}{7} = 42$$

nämlich: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48.

Läßt sich m in Faktoren zerlegen, die zu einander teilerfremd sind, und sind diese Faktoren p, q, s etc., so ist:

$$\varphi\ (m) = m\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{s}\right)\ldots\ldots,$$

so ist z. B.

$$\varphi\ (385) = 385\ \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right)$$

$$\varphi\ (385) = 240, \text{ oder:}$$

$$\varphi\ (60) = 60\ \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$\varphi\ (60) = 16, \text{ oder:}$$

$$\varphi\ (84) = 84\ \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)$$

$$\varphi\ (84) = 24.$$

Auf den Beweis des Satzes gehen wir hier nicht ein.

Es seien nun m und g zwei relative Primzahlen (g bezeichne eine Grundzahl, für unser dekadisches System also $g = 10$). Wir bilden nun die Potenzen

$$g^0, g^1, g^2. g^3, g^4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

und bilden hierzu die Reste nach m:

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4. \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Diese sind nun ebenfalls relativ prim zu m und da sie kleiner sind als m, so gibt es unter ihnen höchstens φ (m) verschiedene. Es sei nun:

$$\varrho_k = \varrho_{k+f}$$

d. h. $$g^{k+f} \equiv g^k \pmod m$$

so ist: $$g^{k+f} - g^k$$

oder: $$g^k (g^f - 1)$$

durch m teilbar, folglich ist auch:

$$g^f - 1$$

durch m teilbar.

Es gibt also positive Exponenten f, für die:

$$g^f \equiv 1 \pmod m$$

f soll stets den kleinsten unter diesen positiven Exponenten bezeichnen. Von den f-Potenzen

$$g_0, g^1, g^2, g_3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots, g^{f-1}$$

haben dann keine zwei denselben Rest, weil sich sonst eine kleinere Zahl f' bestimmen ließ, für die

$$g^{f'} \equiv 1 \pmod m$$

wäre. Wir erhalten also die f verschiedenen Reste:

$$\varrho^0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho^3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \varrho_{f-1}.$$

Die höheren Potenzen: g^f, g^{f+1}, g^{f+2} ....liefern immer wieder d i e s e l b e n R e s t e i n d e r s e l b e n R e i h e n f o l g e. Man nennt:

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \varrho_{f-1}$$

die P o t e n z r e s t e von g.

Ist nun f kleiner als φ (m), so gibt es wenigstens noch einen unter den möglichen, zu m relativ primen Resten, der n i c h t unter den Potenzresten ist. Es sei dieser r_1. Es sind dann die Reste von:

$$r_1 g^0, r_1 g^1, r_2 g^2 \dots\dots\dots\dots, r_1 \cdot g^{f-1}$$

sowohl unter sich als von den Potenzresten verschieden.

Ist ferner:

$$2f < \varphi (m)$$

so gibt es mindestens noch e i n e n Rest r_2, der unter den letzten und unter den Potenzresten nicht vorkommt. Die Zahlen

$$r_2\, g^0,\ r_2\, g^1,\ r_2\, g^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ r_2\, g^{f-1}$$

geben wieder Reste, die von sämtlichen obigen verschieden sind. Führt man diesen Schluß immer weiter, so folgt, da die Vielfachen von f nicht immer kleiner bleiben können als $\varphi(m)$, daß $\varphi(m)$ ein Vielfaches von f ist. Wir setzen:

$$\varphi(m) = e \cdot f$$

und es ergibt sich der Satz:

$$g^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ m)$$

in Werten:

Die $\varphi(m)^{\text{te}}$ Potenz einer zu m teilerfremden Zahl g ist nach dem Modul zu 1 kongruent (Allgemeiner Fermatscher Satz)*).

Für eine Primzahl m ist

$$\varphi(m) = m - 1$$

also:
$$g^{m-1} \equiv 1 \ \mathrm{mod}\ (m).$$

Ist m eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl, immer zerfallen die zu m teilerfremden Reste in e Reihen von f Gliedern, die wir die „Periode der Reste" nennen. Man erhält diese Reste, wenn man in einem Produkt $r \cdot g^k$ dem Exponenten k alle Werte 0, 1, 2, 3, $\cdots\cdots\cdots$ $f - 1$ gibt. Die Auffindung dieser Reste gestaltet sich einfach, indem man den Rest von $r \cdot g^k$ dadurch bildet, daß man nicht $r \cdot g^{k-1}$, sondern seinen Rest nach m mit g multipliziert.

Es sei z. B. $m = 13,\ g = 2,$
so ergibt sich:

k	Rest
0	1
1	2
2	4
3	8
4	3
5	6
6	12
7	11
8	9
9	5
10	10
11	7
12	1

Es ist also $f = 12$.

*) Zuerst von Euler bewiesen. Siehe geschichtl. Anhang in Band V.

Ferner: $m = 19, \; g = 10$

k	Rest
0	1
1	10
2	5
3	12
4	6
5	3
6	11
7	15
8	17
9	18
10	9
11	14
12	7
13	13
14	16
15	8
16	4
17	2
18	1

es ist also $f = \varphi(m) = 18$.

Ferner sei: $m = 17, \; g = 2$

k	Rest
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	15
6	13
7	9
8	1

hier ist: $f = 8, \; \varphi(m) = 16$,
wir erhalten also zwei Perioden.

Ferner sei: $m = 13, \; g = 10$

k	Rest
0	1
1	10
2	9
3	12
4	3
5	4
6	1

es ist also: $f = 6,\ \varphi(m) = 12,$

wir erhalten zwei Perioden.

Erhält man bei willkürlicher Wahl von g und m nur eine Periode, ist also $f = \varphi(m)$, so heißt g primitive Wurzel von m. Nach obigen Entwicklungen ist also 2 primitive Wurzel von 13, ferner 10 primitive Wurzel von 19.

Wir wollen nun unsere bisherigen Entwicklungen auf periodische Dezimalbrüche anwenden.

In dem Bruch:

$$\gamma = \frac{m}{n}$$

seien m und n positive relative Primzahlen und n außerdem teilerfremd zu 10. Es läßt sich alsdann der Bruch in einen unendlichen Dezimalbruch:

$$z(m) = z_1 z_2 z_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

verwandeln.

Zwei solche Brüche: $\gamma = \dfrac{m}{n}$

$$\gamma' = \frac{m'}{n}$$

haben nur dieselben Mantisse, wenn m' sich von m durch ein Vielfaches von n unterscheidet, oder ist:

$$m \equiv m' \pmod{n}$$

dann ist: $z(m) = z(m')$

Da es $\varphi(n)$ verschiedene zu n teilerfremde Reste gibt, so gibt es auch $\varphi(n)$ verschiedene Mantissen zu demselben Nenner n. Aus der Mantisse von γ erhält man die von 10γ, indem man in z(m) die erste Stelle wegläßt, also mit z_2 beginnt; durch wiederholte Anwendung erhält man:

$$z(10^k m) = z_{k+1} z_{k+2} z_{k+3} \cdots\cdots$$

Ist nun aber: $10^f \equiv 1 \pmod{n}$

so muß: $z(10^f m) = z(m)$

sein, d. h. es ist: $z_{f+1} = z_1$

$$z_{f+2} = z_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Ziffern in der Mantisse wiederholen sich also von der $(f + 1)^{ten}$ Stelle ab in derselben Reihenfolge. Die Ziffern zerfallen in Gruppen von je f Glieder, und eine solche Gruppe nennen wir die Periode der Mantisse; der Dezimalbruch heißt periodisch, f gibt die Länge der Periode an.

Ein gemeiner Bruch, dessen Nenner relativ prim zu 10 ist, läßt sich also in einen periodischen Dezimalbruch verwandeln.

Jeder andere Bruch läßt sich durch Multiplikation mit einer Potenz von 10, also 10^k in einen Bruch verwandeln, dessen Nenner relativ prim zu 10 ist. Um dann wieder zu dem ursprünglichen Bruch zurückzukehren, hat man im Resultat das Komma k Stellen nach links zu rücken und dadurch treten vor die Periode noch andere Ziffern, so daß die Periode nicht gleich hinter dem Komma beginnt. Solche Dezimalbrüche heißen im Gegensatz zu obigen „unrein periodisch". Bezeichnen wir die Periode mit:

$$P(m) = z_1 z_2 z_3 \cdots\cdots\cdots z_f$$

dann ist:

$$P(10\,m) = z_2 z_3 z_4 \cdots\cdots\cdots z_1$$

$$P(10^2\,m) = z_3 z_4 z_5 \cdots\cdots\cdots z_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(10^{f-1}\,m) = z_f\, z_1\, z_2\, z^3 \cdots\cdots\cdots z_{f-1}.$$

Ist nun:

$$\varphi(n) = e \cdot f,$$

so hat man für e verschiedene Werte von m solche Perioden zu bilden, um alle Perioden für den Nenner n zu erhalten. Ist $e = 1$, $f = \varphi(n)$, so genügt ein einziger Wert, etwa $m = 1$, um alle echten Brüche $\frac{m}{n}$ in Dezimalbrüche zu verwandeln. Ist $e > 1$, so hat man mehrere Perioden zu berechnen.

Wir wollen nun Beispiele behandeln:

Es ist $n = 7$.

Wir dividieren nach der gewohnten Methode:

$$\begin{array}{l}
10 : 7 = 142857 \\
\underline{\;\;7} \\
\;\;30 \\
\;\;\underline{28} \\
\;\;\;\;20 \\
\;\;\;\;\underline{14} \\
\;\;\;\;\;\;60 \\
\;\;\;\;\;\;\underline{56} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;40 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{35} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;50 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{49} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1
\end{array}$$

Hierin ist: $f = \varphi(m)$, d. h. $e = 1$, wir erhalten die Periode 142 857, die unterstrichenen Zahlen sind die Potenzreste. Demnach ist:

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

eine Stelle nach rechts gerückt, gibt die Periode für $\frac{3}{7}$, die mit z_2 beginnt:

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

eine weitere Stelle nach rechts gibt die Periode für $\frac{2}{7}$, die mit z_3 beginnt, man erhält:

$$\frac{2}{7} = 0{,}285714\cdots\cdots\cdots$$

ebenso:

$$\frac{6}{7} = 0{,}857142\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{4}{7} = 0{,}571428\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{5}{7} = 0{,}714285\cdots\cdots\cdots$$

Die Punkte bedeuten Wiederholung der vorangehenden Zahlen in derselben Reihenfolge.

Als nächstes n wollen wir 13 wählen. Wir erhalten:

$$\begin{array}{l}
\underline{1}0 : 13 = 076923 \\
\underline{\;00\;} \\
\underline{10}0 \\
\underline{\;\;91\;} \\
\;\;\underline{9}0 \\
\underline{\;\;78\;} \\
\;\;\underline{12}0 \\
\underline{\;\;117\;} \\
\;\;\;\;\underline{3}0 \\
\underline{\;\;\;\;26\;} \\
\;\;\;\;\;\;\underline{4}0 \\
\underline{\;\;\;\;\;\;39\;} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;1
\end{array}$$

hier ist $f = 6$, $\varphi(n) = 12$, man hat also zwei Perioden. Aus der obigen erhalten wir:

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{10}{13} = 0{,}769230\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{9}{13} = 0{,}692307\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{12}{13} = 0{,}923076\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{3}{13} = 0{,}230769\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{4}{13} = 0{,}307692\cdots\cdots\cdots$$

Um die zweite Periode zu erhalten hat man einen der fehlenden Zähler zu dividieren, wählen wir als Zähler 2 und es kommt:

$$\begin{array}{l}
20 : 13 = 153846 \\
\underline{\overline{1}3} \\
\ \ 70 \\
\ \ \underline{\overline{6}5} \\
\ \ \ \ 50 \\
\ \ \ \ \underline{\overline{3}9} \\
\ \ \ \ 110 \\
\ \ \ \ \underline{\overline{10}4} \\
\ \ \ \ \ \ 60 \\
\ \ \ \ \ \ \underline{\overline{5}2} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 80 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{\overline{7}8} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{2}
\end{array}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\frac{2}{13} = 0{,}153846\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{7}{13} = 0{,}538461\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{5}{13} = 0{,}384615\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{11}{13} = 0{,}846153\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{6}{13} = 0{,}461538\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{8}{13} = 0{,}615384 \cdots\cdots$$

Ferner sei: $n = 17$

Wir erhalten:

$$\begin{array}{l}
10 : 17 = 0588235294117647 \\
\overline{0}0 \\
\hline
100 \\
\overline{8}5 \\
\hline
150 \\
\overline{13}6 \\
\hline
140 \\
\overline{13}6 \\
\hline
40 \\
\overline{3}4 \\
\hline
60 \\
\overline{5}1 \\
\hline
90 \\
\overline{8}5 \\
\hline
50 \\
\overline{3}4 \\
\hline
160 \\
\overline{15}3 \\
\hline
70 \\
\overline{6}8 \\
\hline
20 \\
\overline{1}7 \\
\hline
30 \\
\overline{1}7 \\
\hline
130 \\
\overline{11}9 \\
\hline
110 \\
\overline{10}2 \\
\hline
80 \\
\overline{6}8 \\
\hline
120 \\
\overline{11}9 \\
\hline
1
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich also, daß $f = 16$, d. h. $e = 1$ ist; wir haben e i n e Periode. Es kommt:

$$\frac{1}{17} = 0{,}0588235294117647 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{10}{17} = 0{,}5882352941176470 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{15}{17} = 0{,}8823529411764705 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{14}{17} = 0{,}8235294117647058 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{4}{17} = 0{,}2352941176470588 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{6}{17} = 0{,}3529411764705882 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{9}{17} = 0{,}5294117647058823 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{5}{17} = 0{,}2941176470588235 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{16}{17} = 0{,}9411764705882352 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{7}{17} = 0{,}4117647058823529 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{17} = 0{,}1176470588235294 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{3}{17} = 0{,}1764705882352941 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{13}{17} = 0{,}7647058823529411 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{11}{17} = 0{,}6470588235294117 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{8}{17} = 0{,}4705882352941176 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{12}{17} = 0{,}7058823529411764 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Es sei: $n = 19.$

Wir erhalten:

$10 : 19 = 052631578947368421$

```
10 : 19 = 052631578947368421
00
---
100
 95
---
  50
  38
 ---
  120
  114
  ---
    60
    57
   ---
    30
    19
   ---
    110
     95
    ---
     150
     133
     ---
      170
      152
      ---
       180
       171
       ---
        90
        76
       ---
        140
        133
        ---
         70
         57
        ---
         130
         114
         ---
         160
         152
         ---
          80
          76
         ---
          40
          38
         ---
           20
           19
          ---
            1
```

Auch hier ist also: $f = \varphi(n) = 18$
und wir erhalten:

$$\frac{1}{19} = 0{,}052631578947368421 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{10}{19} = 0{,}526315789473684210 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{5}{19} = 0{,}263157894736842105 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{12}{19} = 0{,}631578947368421052 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{6}{19} = 0{,}315789473684210526 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{3}{19} = 0{,}157894736842105263 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{11}{19} = 0{,}578947368421052631 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{15}{19} = 0{,}789473684210526315 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{17}{19} = 0.894736842105263157 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{18}{19} = 0{,}947368421052631578 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{9}{19} = 0{,}473684210526315789 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{14}{19} = 0{,}736842105263157894 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{7}{19} = 0{,}368421052631578947 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{13}{19} = 0{,}684210526315789473 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{16}{19} = 0{,}842105263157894736 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{8}{19} = 0{,}421052631578947368 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{4}{19} = 0{,}210526315789473684 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{19} = 0{,}105263157894736842 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wählen wir für n die nächste Primzahl 23. Es kommt:

```
10 : 23 = 0434726086956521 73913
00
100
 92
  80
  69
  110
   92
   180
   161
    190
    184
      60
      46
     140
     138
       20
       00
      200
      184
       160
       138
        220
        207
         130
         115
          150
          138
           120
           115
             50
             46
             40
             23
            170
            161
              90
```

```
 90
 68
210
207
  30
  23
   70
   69
    1
```

Hieraus erhalten wir also die Perioden:

$$\frac{1}{23} = 0{,}0434782608695652173913\cdots\cdots$$

$$\frac{10}{23} = 0{,}4347826086956521739130\cdots\cdots$$

$$\frac{8}{23} = 0{,}3478260869565217391304\cdots\cdots$$

$$\frac{11}{23} = 0{,}4782608695652173913043\cdots\cdots$$

$$\frac{18}{23} = 0{,}7826086956521739130434\cdots\cdots$$

$$\frac{19}{23} = 0{,}8260869565217391304347\cdots\cdots$$

$$\frac{6}{23} = 0{,}2608695652173913043478\cdots\cdots$$

$$\frac{14}{23} = 0{,}6086956521739130434782\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{23} = 0{,}0869565217391304347826\cdots\cdots$$

$$\frac{20}{23} = 0{,}8695652173913043478260\cdots\cdots$$

$$\frac{16}{23} = 0{,}6956521739130434782608\cdots\cdots$$

$$\frac{22}{23} = 0{,}9565217391304347826086\cdots\cdots$$

$$\frac{13}{23} = 0{,}5652173913043478260869\cdots\cdots$$

$$\frac{15}{23} = 0{,}6521739130434782608695\cdots\cdots$$

$$\frac{12}{23} = 0{,}5217391304347826086956\cdots\cdots$$

$$\frac{5}{23} = 0{,}2173913043478260869565\cdots\cdots$$

$$\frac{4}{23} = 0{,}1739130434782608695652\cdots\cdots$$

$$\frac{17}{23} = 0{,}7391304347826086956521\cdots\cdots$$

$$\frac{9}{23} = 0{,}3913043478260869565217\cdots\cdots$$

$$\frac{21}{23} = 0{,}9130434782608695652173\cdots\cdots$$

$$\frac{3}{23} = 0{,}1304347826086956521739\cdots\cdots$$

$$\frac{7}{23} = 0{,}3043478260869565217391\cdots\cdots$$

Wählen wir die nächste Primzahl 29. Wir erhalten:

10 : 29 = 034482758620689551724137931

```
00
100
 87
 130
 116
  140
  116
   240
   232
     80
     58
     220
     203
      170
      145
       250
       232
        180
        174
          60
          58
           20
           00
           200
           174
            260
```

```
260
232
 280
 261
  190
  174
   160
   145
    150
    145
      50
      29
     210
     203
       70
       58
      120
      116
        40
        29
       110
        87
       230
```

```
230
203
 270
 261
   90
   87
    30
    29
     1
```

Hieraus erhalten wir:

$$\frac{1}{29} = 0{,}0344827586206896551724137931\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{10}{29} = 0{,}3448275862068965517241379310\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{13}{29} = 0{,}4482758620689655172413793103\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{14}{29} = 0{,}4827586206896551724137931034\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{24}{29} = 0{,}8275862068965517241379310344\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{8}{29} = 0{,}2758620689655172413793103448\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{22}{29} = 0{,}7586206896551724137931034492\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{17}{29} = 0{,}5862068965517241379310344827\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{25}{29} = 0{,}8620689655172413793103448275\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{18}{29} = 0{,}6206896551724137931034482758\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{6}{29} = 0{,}2068965517241379310344827586\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{29} = 0{,}0689655172413793103448275862\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{20}{29} = 0{,}6896551724137931034482758620\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{26}{29} = 0{,}8965517241379310344827586206\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{28}{29} = 0{,}9655172413793103448275862068\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{19}{29} = 0{,}6551724137931034482758620689\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{16}{29} = 0{,}5517241379310344827586206896\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{15}{29} = 0{,}5172413793103448275862068965\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{5}{29} = 0{,}1724137931034482758620689655\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{21}{29} = 0{,}7241379310344827586206896551\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{7}{29} = 0{,}2413793103448275862068965517\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{12}{29} = 0{,}4137931034482758620689655172\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{4}{29} = 0{,}1379310344827586206896551724\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{11}{29} = 0{,}3793103448275862068965517241\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{23}{29} = 0{,}7931034482758620689655172414\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{27}{29} = 0{,}9310344827586206896551724137\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{9}{29} = 0{,}3103448275862068965517241379\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{3}{29} = 0{,}1034482758620689655172413793\cdots\cdots\cdots$$

Für n = 31 erhalten wir:

10 : 31 = 032258064516129
00
100
93
70
62
80
62
180
155
250
248
20

20
00
200
186
140
124
160
155
50
31
190

190
186
40
31
90
62
280
279
1

Hier ist $f = 15$, also $e = 2$, denn 10 ist keine primitive Wurzel zu 31; wir erhalten 2 Perioden.

Aus obigem Divisionsschema erhalten wir:

$$\frac{1}{31} = 0{,}032258064516129 \cdots\cdots$$

$$\frac{10}{31} = 0{,}322580645161290 \cdots\cdots$$

$$\frac{7}{31} = 0{,}225806451612903 \cdots\cdots$$

$$\frac{8}{31} = 0{,}258064516129032 \cdots\cdots$$

$$\frac{18}{31} = 0{,}580645161290322 \cdots\cdots$$

$$\frac{25}{31} = 0{,}806451612903225 \cdots\cdots$$

$$\frac{2}{31} = 0{,}064516129032258 \cdots\cdots$$

$$\frac{20}{31} = 0{,}645161290322580 \cdots\cdots$$

$$\frac{14}{31} = 0{,}451612903225806 \cdots\cdots$$

$$\frac{16}{31} = 0{,}516129032258064 \cdots\cdots$$

$$\frac{5}{31} = 0{,}161290322580645 \cdots\cdots$$

$$\frac{19}{31} = 0{,}612903225806451 \cdots\cdots$$

$$\frac{4}{31} = 0{,}129032258064516 \cdots\cdots$$

$$\frac{9}{31} = 0{,}290322580645161 \cdots\cdots$$

$$\frac{28}{31} = 0{,}903225806451612 \cdots\cdots$$

Um die zweite Periode zu erhalten, verwenden wir einen der noch nicht vorhandenen Zähler, etwa 3. Es kommt:

$$\begin{array}{l}
30:31 = 096774193548387 \\
00 \\
\hline
300 \\
279 \\
\hline
210 \\
186 \\
\hline
240 \\
217 \\
\hline
230 \\
217 \\
\hline
130 \\
124 \\
\hline
60 \\
31 \\
\hline
290 \\
279 \\
\hline
110 \\
93 \\
\hline
170 \\
155 \\
\hline
150 \\
124 \\
\hline
260 \\
248 \\
\hline
120 \\
93 \\
\hline
270 \\
248 \\
\hline
220 \\
217 \\
\hline
3
\end{array}$$

Hieraus erhält man:

$$\frac{3}{31} = 0{,}096774193548387 \cdots\cdots$$

$$\frac{30}{31} = 0{,}967741935483870 \cdots\cdots$$

$$\frac{21}{31} = 0{,}677419354838709 \cdots\cdots$$

$$\frac{24}{31} = 0{,}774193548387096 \cdots\cdots$$

$$\frac{23}{31} = 0{,}741935483870967 \cdots\cdots$$

$$\frac{13}{31} = 0{,}419354838709677 \cdots\cdots$$

$$\frac{6}{31} = 0{,}193548387096774 \cdots\cdots$$

$$\frac{29}{31} = 0{,}935483870967741 \cdots\cdots$$

$$\frac{11}{31} = 0{,}354838709677419 \cdots\cdots$$

$$\frac{17}{31} = 0{,}548387096774193 \cdots\cdots$$

$$\frac{15}{31} = 0{,}483870967741935 \cdots\cdots$$

$$\frac{26}{31} = 0{,}838709677419354 \cdots\cdots$$

$$\frac{12}{31} = 0{,}387096774193548 \cdots\cdots$$

$$\frac{27}{31} = 0{,}870967741935483 \cdots\cdots$$

$$\frac{22}{31} = 0{,}709677419354838 \cdots\cdots$$

Es sei ferner:

$$n = 37.$$

Wir erhalten das Divisionsschema:

$$\begin{array}{r}
10 : 37 = 027 \\
\overline{0}0 \\
\hline
100 \\
74 \\
\hline
260 \\
259 \\
\hline
1
\end{array}$$

Hieraus erhalten wir:

$$\frac{1}{37} = 0{,}027 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{10}{37} = 0{,}270 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{26}{37} = 0{,}702 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Ferner:

$$\begin{array}{l} 20 : 37 = 054 \\ \overline{0}0 \\ \hline 200 \\ \overline{18}5 \\ \hline \;\;150 \\ \;\;\overline{14}8 \\ \hline \;\;\;\;2 \end{array}$$

und hieraus:

$$\frac{2}{37} = 0{,}054 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{20}{37} = 0{,}540 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{15}{37} = 0{,}405 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ferner:

$$\begin{array}{l} 30 : 37 = 081 \\ \overline{0}0 \\ \hline 300 \\ \overline{29}6 \\ \hline \;\;40 \\ \;\;\overline{3}7 \\ \hline \;\;\;\;3 \end{array}$$

und hieraus:

$$\frac{3}{37} = 0{,}081 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{30}{37} = 0{,}810 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{4}{37} = 0{,}108 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ferner:

$$
\begin{array}{r}
50 : 37 = 135 \\
\underline{37} \\
130 \\
\underline{111} \\
190 \\
\underline{185} \\
5
\end{array}
$$

und hieraus:

$$\frac{5}{37} = 0{,}135 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{13}{37} = 0{,}351 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{19}{37} = 0{,}513 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ferner:

$$
\begin{array}{r}
60 : 37 = 162 \\
\underline{37} \\
230 \\
\underline{222} \\
80 \\
\underline{74} \\
6
\end{array}
$$

und hieraus:

$$\frac{9}{37} = 0{,}162 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{23}{37} = 0{,}621 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{8}{37} = 0{,}216 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ferner:

$$
\begin{array}{r}
70 : 37 = 189 \\
\underline{37} \\
330 \\
\underline{296} \\
340 \\
\underline{333} \\
7
\end{array}
$$

und hieraus:

$$\frac{7}{37} = 0{,}189 \ldots\ldots$$

$$\frac{33}{37} = 0{,}891 \ldots\ldots$$

$$\frac{34}{37} = 0{,}918 \ldots\ldots$$

ferner:

$$\begin{array}{l}
90 : 37 = 243 \\
\underline{74} \\
\;160 \\
\;\underline{148} \\
\;\;120 \\
\;\;\underline{111} \\
\;\;\;\;9
\end{array}$$

und hieraus:

$$\frac{9}{37} = 0{,}243 \ldots\ldots$$

$$\frac{16}{37} = 0{,}432 \ldots\ldots$$

$$\frac{12}{37} = 0{,}324 \ldots\ldots$$

ferner:

$$\begin{array}{l}
110 : 37 = 297 \\
\;\underline{74} \\
\;360 \\
\;\underline{333} \\
\;\;270 \\
\;\;\underline{259} \\
\;\;\;11
\end{array}$$

und hieraus:

$$\frac{11}{37} = 0{,}297 \ldots\ldots$$

$$\frac{36}{37} = 0{,}972 \ldots\ldots$$

$$\frac{27}{37} = 0729 \ldots\ldots$$

ferner:

$$\begin{array}{l}
140 : 37 = 378 \\
111 \\
\hline
\;\;290 \\
\;\;259 \\
\hline
\;\;\;\;310 \\
\;\;\;\;296 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;14
\end{array}$$

und hieraus:

$$\frac{14}{37} = 0{,}378 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{29}{37} = 0{,}783 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{31}{37} = 0{,}837 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ferner:

$$\begin{array}{l}
170 : 37 = 459 \\
148 \\
\hline
\;\;220 \\
\;\;185 \\
\hline
\;\;\;\;350 \\
\;\;\;\;333 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;17
\end{array}$$

und hieraus:

$$\frac{17}{37} = 0{,}459 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{22}{37} = 0{,}594 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{35}{37} = 0{,}945 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ferner:

$$\begin{array}{l}
180 : 37 = 486 \\
148 \\
\hline
\;\;320 \\
\;\;296 \\
\hline
\;\;\;\;240 \\
\;\;\;\;222 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;18
\end{array}$$

und hieraus:

$$\frac{18}{37} = 0{,}486 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{32}{37} = 0{,}864 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{24}{37} = 0{,}648 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und ferner:

$$\begin{array}{l} 210 : 37 = 567 \\ \underline{185} \\ \quad 250 \\ \quad \underline{222} \\ \qquad 280 \\ \qquad \underline{259} \\ \qquad\ \ 21 \end{array}$$

und hieraus:

$$\frac{21}{37} = 0{,}567 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{25}{37} = 0{,}675 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{28}{37} = 0{,}756 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Für den Nenner 37 erhalten wir also 12 Perioden, es ist $f = 3$, $e = 12$.

Wählen wir den Nenner 41; wir erhalten:

$$\begin{array}{l} 10 : 41 = 02439 \\ \underline{00} \\ 100 \\ \ \ \underline{82} \\ \quad 180 \\ \quad \underline{164} \\ \qquad 160 \\ \qquad \underline{123} \\ \qquad\ 370 \\ \qquad\ \underline{369} \\ \qquad\quad\ 1 \end{array}$$

Hieraus erhalten wir:

$$\frac{1}{41} = 0{,}02439 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{10}{41} = 0{,}24390 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{18}{41} = 0{,}43902 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{16}{41} = 0{,}39024 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{37}{41} = 0{,}90243 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Ferner:

$$\begin{array}{l}
20 : 41 = 04874 \\
\underline{\;00\;} \\
\;200 \\
\;\underline{164} \\
\;\;360 \\
\;\;\underline{328} \\
\;\;\;320 \\
\;\;\;\underline{287} \\
\;\;\;\;330 \\
\;\;\;\;\underline{328} \\
\;\;\;\;\;\;\;2
\end{array}$$

und hieraus:

$$\frac{2}{41} = 0{,}04874 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{20}{41} = 0{,}48740 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{36}{41} = 0{,}87404 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{32}{41} = 0{,}74048 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{33}{41} = 0{,}40487 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ferner:

$$\begin{array}{r}
30 : 41 = 07317 \\
\underline{\overline{0}0} \\
300 \\
\underline{\overline{28}7} \\
130 \\
\underline{\overline{12}3} \\
70 \\
\underline{\overline{4}1} \\
290 \\
\underline{\overline{28}7} \\
3
\end{array}$$

und hieraus:

$$\frac{3}{41} = 0{,}07317 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{30}{41} = 0{,}73170 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{13}{41} = 0{,}31707 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{7}{41} = 0{,}17073 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{29}{41} = 0{,}70731 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ferner:

$$\begin{array}{r}
40 : 41 = 09756 \\
\underline{\overline{0}0} \\
400 \\
\underline{\overline{36}9} \\
310 \\
\underline{\overline{28}7} \\
230 \\
\underline{\overline{20}5} \\
250 \\
\underline{\overline{24}6} \\
4
\end{array}$$

also:

$$\frac{4}{41} = 0{,}09756 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{40}{41} = 0{,}97560 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{31}{41} = 0{,}75609 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{23}{41} = 0{,}57091 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{25}{41} = 0{,}60975 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ferner:

$$\begin{array}{l} 50 : 41 = 12195 \\ \underline{41} \\ \;\;90 \\ \;\;\underline{82} \\ \;\;\;80 \\ \;\;\;\underline{41} \\ \;\;\;390 \\ \;\;\;\underline{369} \\ \;\;\;\;210 \\ \;\;\;\;\underline{205} \\ \;\;\;\;\;\;\;5 \end{array}$$

und hieraus:

$$\frac{5}{41} = 0{,}12195 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{9}{41} = 0{,}21951 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{8}{41} = 0{,}19512 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{39}{41} = 0{,}95121 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{21}{41} = 0{,}51219 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ferner:

$$\begin{array}{l} 60 : 41 = 14634 \\ \underline{41} \\ 190 \\ \underline{164} \\ \;\;260 \\ \;\;\underline{246} \\ \;\;\;140 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 140 \\ \underline{123} \\ \;\;170 \\ \;\;\underline{164} \\ \;\;\;\;\;\;6 \end{array}$$

also:

$$\frac{6}{41} = 0{,}14634 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{19}{41} = 0{,}46342 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{26}{41} = 0{,}63414 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{14}{41} = 0{,}34146 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{17}{41} = 0{,}41463 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ferner:

$$\begin{array}{l}
110 : 41 = 26829 \\
\underline{82} \\
280 \\
\underline{246} \\
340 \\
\underline{328} \\
120 \\
\underline{82} \\
380 \\
\underline{369} \\
11
\end{array}$$

und hieraus:

$$\frac{11}{41} = 0{,}26829 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{28}{41} = 0{,}68292 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{34}{41} = 0{,}82926 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{12}{41} = 0{,}29268 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{38}{41} = 0{,}92682 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ferner:

$$
\begin{array}{r}
150 : 41 = 36585 \\
\overline{1}23 \\
\hline
270 \\
\overline{2}46 \\
\hline
240 \\
\overline{2}05 \\
\hline
350 \\
\overline{3}28 \\
\hline
220 \\
\overline{2}05 \\
\hline
15
\end{array}
$$

und hieraus:

$$\frac{15}{41} = 0{,}36585 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{27}{41} = 0{,}65853 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{24}{41} = 0{,}58536 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{35}{41} = 0{,}85365 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{22}{41} = 0{,}53658 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Weitere Beispiele möge nun der Schüler selbst aufstellen.*)

Für einen zusammengesetzten Nenner ergibt sich hinsichtlich der Periodenlänge der Satz:

Die Länge der Periode der Dezimalbrüche für einen zusammengesetzten Nenner n ist gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen ***der Periodenlänge*** *für alle die Brüche, deren Nenner Teiler von n sind.*

Denn ist:
$$n = n' \cdot n''$$
und n' und n'' relativ prim, und sind f' und f'' die kleinsten Exponenten, für die:
$$10^{f'} - 1$$
und
$$10^{f''} - 1$$
durch n' und durch n'' teilbar sind, so ist:
$$10^{f} - 1$$
nur durch n teilbar, wenn f zugleich ein Vielfaches von n' und n'' ist. Ist die Periodenlänge f, so muß:

---

*) Siehe auch Tabellen im Anhang.

$$10^f - 1$$

durch n teilbar sein; man weiß also, daß alle Nenner mit der Periodenlänge f unter den Teilern von $10^f - 1$ enthalten sind. Umgekehrt ist die Periodenlänge eines Bruches, dessen Nenner ein Teiler von $10^f - 1$ ist, entweder gleich f oder gleich einem Teiler von f.

Hiermit wollen wir die unendlichen Dezimalbrüche verlassen und zu den unbestimmten Gleichungen I. Grades übergehen.

§ 2.

Unbestimmte Gleichungen I. Grades.

Lösung mittels Zahlenkongruenzen.

Unbestimmte Gleichungen I. Grades haben wir schon im III. Band behandelt; hier soll nur eine etwas andere Lösung gezeigt werden, sonst bleibt sich die Angelegenheit gleich. Es handelt sich darum, unbekannte ganze Zahlen zu bestimmen, von denen gewisse Eigenschaften verlangt werden. Die einfachste Aufgabe lautet:

Es seien a, b und c gegebene ganze Zahlen; es seien zwei andere ganze Zahlen x und y gesucht, so daß die Gleichung besteht:

$$ay - bx = c.$$

Wenn nun hierin a und b gemeinsamen Teiler d besäßen, so müßte, wenn die Aufgabe lösbar sein soll, auch c durch d teilbar sein; wir wollen also annehmen, daß a und b teilerfremd sind.

Wie nun Diophantische Gleichungen mittels Zahlenkongruenzen gelöst werden, wollen wir an nachfolgenden Beispielen zeigen (vgl. Heis, Aufgabensammlung § 79).

1. 71 in zwei Zahlen zu zerlegen, von denen die eine durch 5, die andere durch 8 ohne Rest teilbar ist.

Der eine Faktor sei x, der andere y, dann ist:

$$5x + 8y = 71$$

und es ergeben sich die Kongruenzen:

$$5x \equiv 71 \pmod 8$$
$$8y \equiv 71 \pmod 5$$

$$5x \equiv 71 - 2 \cdot 6 \equiv 55 \pmod 8$$
$$x \equiv 11 \pmod 8$$

$$x = 11 + 8n$$
$$8y \equiv 71 - 3 \cdot 15 \pmod 5$$
$$8y \equiv 56$$
$$y \equiv 7 \pmod 5$$
$$y \equiv 2 \pmod 5$$

und da der eine Faktor abnimmt, wenn der andere wächst allgemein:

$$y = 2 - 5n.$$

Wir erhalten:

für $n = 0$: $x = 11$, $y = 2$

für $n = -1$: $x = 3$, $y = 7$

die anderen Lösungen sind unbrauchbar.

2. 131 in zwei Teile zu zerlegen, so daß der eine Teil durch 7 dividiert zum Reste 3 und der andere durch 11 dividiert, zum Reste 5 läßt.

Angenommen der eine Faktor sei x, der andere y, so ergibt sich nach den Bestimmungen der Aufgabe die Gleichung:

$$(7x + 3) + (11y + 5) = 131$$

oder:

$$7x + 11y = 123$$

Hieraus ergeben sich die beiden Zahlenkongruenzen:

$$7x \equiv 123 \pmod{11}$$
$$11y \equiv 123 \pmod 7$$

$$7x \equiv 123 - 11 \equiv 112 \pmod{11}$$
$$x \equiv 16 \pmod{11}$$
$$x \equiv 16 \pmod{11} \equiv 5 \pmod{11}$$
$$11y \equiv 123 - 7 \cdot 5 \equiv 88 \pmod 7$$
$$11y \equiv 88 \pmod 7$$
$$y \equiv 8 \pmod 7$$
$$y \equiv 1 \pmod 7$$

$$x = 16 - 11n$$
$$y = 1 + 7n$$

für $n = 0$:

$$x = 16$$
$$y = 1$$

und für $n = 1$:

$$x = 5$$
$$y = 8.$$

3. Jemand kauft 124 Stück Vieh, nämlich Schweine, Ziegen und Schafe für 2400 Mark. Ein Schwein kostet 27 Mark, eine Ziege 19 Mark und ein Schaf $7^1/_2$ Mark. Wieviel Stück von jeder Gattung sind es?

Angenommen es seien x Schweine, y Ziegen und z Schafe. Es ergeben sich dann nach den Bestimmungen der Aufgabe die Gleichungen:

$$x + y + z = 124.$$
$$27x + 19y + 7^1/_2 z = 2400$$

$$54x + 38y + 15z = 4800$$
$$15x + 15y + 15z = 1860$$

$$39x + 23y = 2940$$

und hieraus:

$$39x \equiv 2940 \pmod{23}$$

und:

$$23y \equiv 2940 \pmod{39}$$

$$3 \cdot 13x \equiv 3 \cdot 980 \pmod{23}$$
$$13x \equiv 980 \pmod{23}$$
$$13x \equiv 980 - 7 \cdot 23 \pmod{23}$$
$$13x \equiv 819 \pmod{23}$$
$$x \equiv 63 \pmod{23}$$
$$x \equiv 40 \pmod{23}$$
$$x \equiv 17 \pmod{23}$$
$$23y \equiv 2940 \pmod{39}$$
$$23y \equiv 2940 - 75 \cdot 39 \pmod{39}$$
$$23y \equiv 15 \pmod{39}$$
$$69y \equiv 45 \pmod{39}$$

also:

$$78y \equiv 0 \pmod{39}$$
$$9y \equiv -45 \pmod{39}$$

Hier dürfen wir nun — 45 und 9 nicht ohne weiteres durch 9 dividieren, da 9 zum Modul 39 nicht relativ prim ist. Wir erhalten nach den früheren Sätzen:

$$3y \equiv -15 \pmod{13}$$
$$y \equiv -5 \pmod{13}$$
$$y \equiv -5 + 13 \equiv 8 \pmod{13}$$
$$y \equiv 21 \pmod{13}$$
$$y \equiv 60 \pmod{13}$$
$$y \equiv 99 \pmod{13}.$$

Wir haben also:

$$x = 17 + 23n$$
$$y = 99 - 39n$$

Es sind also:

17 Schweine, 99 Ziegen und 8 Schafe

oder: 40 Schweine, 60 Ziegen und 24 Schafe

oder: 63 Schweine, 21 Ziegen und 40 Schafe.

3a. Jemand kauft Ochsen und Pferde, und zahlt für einen Ochsen 198 Mark, für ein Pferd 282 Mark und findet, daß die Ochsen 36 Mark mehr gekostet haben als die Pferde. Wieviel Ochsen und Pferde sind es gewesen?

Angenommen es seien x Ochsen und y Pferde gewesen; es ergibt sich dann ohne weiteres die Gleichung:

$$198x = 282y + 36$$

oder:

$$33x = 47y + 6$$

und hieraus ergeben sich die Kongruenzen:

$$33x \equiv 6 \pmod{47}$$
$$11x \equiv 2 \pmod{47}$$
$$11x \equiv 2 + 3 \cdot 47 \pmod{47}$$
$$11x \equiv 143 \pmod{47}$$
$$x \equiv 13 \pmod{47}$$
$$47y \equiv -6 \pmod{33}$$
$$33y \equiv 0 \pmod{33}$$
$$14y \equiv -6 \pmod{33}$$
$$7y \equiv -3 \pmod{33}$$
$$7y \equiv -3 - 5 \cdot 33 \equiv -168 \pmod{33}$$
$$y \equiv -24 \pmod{33}$$
$$y \equiv -24 + 33 \pmod{33}$$
$$y \equiv 9 \pmod{33}$$

also: $$x = 13 + 47\,n$$
$$y = 9 + 33\,n$$
worin n jede ganze positive Zahl sein kann.

4. Hätte ich 8 mal so viel Eier, als ich jetzt habe, spricht eine Bäuerin zur andern, und Du 7 mal soviel, als Du jetzt hast, und gäbe ich Dir alsdann ein Ei, so hätten wir beide gleich viel Eier. Wieviel Eier hatte jede der Bäuerinnen?

Angenommen die eine Bäuerin habe x, die andere y Eier, dann ergibt sich aus den Bestimmungen der Aufgabe die Gleichung:
$$8x - 1 = 7y + 1,$$
oder: $$8x = 7y + 2.$$

Hieraus ergeben sich die Kongruenzen:
$$8x \equiv 7 \pmod 7$$
$$7y \equiv -2 \pmod 8$$
$$\overline{8x \equiv 2 \pmod 7}$$
hierzu: $$7x \equiv 0 \pmod 7$$
$$\overline{x \equiv 2 \pmod 7}$$
$$7y \equiv -2 \pmod 8$$
$$8y \equiv 0 \pmod 8$$
$$\overline{y \equiv 2 \pmod 8}$$
daher: $$x = 2 + 7\,n$$
$$y = 2 + 8\,n$$
worin n jede positive ganze Zahl sein kann. Lösungen sind also:

$$x = 2,\quad y = 2.$$
$$x = 9,\quad y = 10.$$
$$x = 16,\quad y = 18.$$
$$x = 23,\quad y = 26.$$
. . . .

5. Ein gezahntes Rad mit 17 Zähnen greift in die Zahnlücken eines andern Rades von 13 Zähnen ein. Wieviel Umdrehungen wird jedes der Räder machen müssen, bis jeder Zahn des ersten Rades wieder in dieselben Zahnlücken des zweiten Rades eingreift?

Angenommen das erste Rad mache x, das zweite y Umdrehungen, dann ergibt sich die Gleichung:

$$17x = 13y$$

$$\begin{array}{r} 17x \equiv 0 \pmod{13} \\ 13y \equiv 0 \pmod{17} \\ \hline x = 0 + 13n \\ y = 0 + 17n. \end{array}$$

6. Die Zähne eines gezahnten Rades, welches mit einem andern in Verbindung steht, sind der Ordnung nach mit den Zahlen 1, 2, 3 bis 35 bezeichnet; ebenso sind die Zahnlücken des zweiten Rades nacheinander mit den Zahlen 1, 2, 3, bis 47 bezeichnet. Wenn nun der erste Zahn des ersten Rades in die erste Zahnlücke des zweiten Rades eingreift, wieviel Umdrehungen wird jedes Rad gemacht haben, wenn der erste Zahn des ersten Rades in die achte Zahnlücke des zweiten Rades eingreift?

Es ergibt sich die Gleichung:

$$35x = 47y + 7.$$

also:

$$\begin{array}{r} 35x \equiv 7 \pmod{47} \\ 47y \equiv -7 \pmod{35} \\ \hline 35x \equiv 7 \pmod{47} \\ 5x \equiv 1 \pmod{47} \\ 5x \equiv 1 + 2 \cdot 47 \pmod{47} \\ 5x \equiv 95 \pmod{47} \\ x \equiv 19 \pmod{47} \\ 47y \equiv -7 \pmod{35} \\ 35y \equiv 0 \pmod{35} \\ \hline 12y \equiv -7 \pmod{35} \\ 12y \equiv -7 + 5 \cdot 35 \equiv 168 \pmod{35} \\ y \equiv 14 \pmod{35} \end{array}$$

also:

$$x = 19 + 47n$$
$$y = 14 + 35n,$$

worin n jede ganze positive Zahl sein kann.

7. Wenn ein gezahntes Rad 27, ein anderes 35 Zähne hat, wird alsdann nach und nach jeder Zahn des ersten Rades

in jede Zahnlücke des zweiten Rades kommen? Wird dieses auch geschehen, wenn das erste Rad 28, das zweite 35 Zähne hat? Von welcher Art muß die Anzahl der Zähne bei zwei ineinander greifenden Rädern sein, wenn alle Zähne des einen nach und nach in alle Zahnlücken des anderen Rades gelangen sollen?

In den Kongruenzen:

$$27x \equiv 0 \pmod{35}$$
$$35y \equiv 0 \pmod{27}$$

sind Präzedent und Modul relativ prim, es muß also das erste Rad 35, das zweite 27 Umdrehungen machen, bis wieder derselbe Zahn in dieselbe Lücke greift; es greifen also alle Zähne in alle Lücken. In:

$$28x \equiv 0 \pmod{35}$$

ist zu vereinfachen:

$$4x \equiv 0 \pmod{5}$$
$$x = 0 + 5n.$$

Alle 5 Umdrehungen des ersten Rades greift also derselbe Zahn des ersten Rades wieder in dieselbe Lücke des zweiten Rades, es können also nicht alle Zähne des ersten Rades in alle Lücken des zweiten Rades eingreifen. Das allmähliche Eingreifen jedes Zahnes des ersten Rades in jede Lücke des zweiten Rades ist also nur dann möglich, wenn die Anzahl der Zähne des ersten Rades zur Anzahl der Lücken des zweiten Rades relativ prim ist.

8. Welche Zahl gibt durch 4 dividiert 1, und durch 5 dividiert 3 zum Rest.

Die Zahl hat die beiden Formen:

$$4x + 1$$

und:

$$5y + 3$$

also:

$$4x + 1 = 5y + 3$$

oder:

$$4x = 5y + 2$$

hieraus:

$$4x \equiv 2 \pmod{5}$$
$$5y \equiv -2 \pmod{4}$$

$$4x \equiv 2 + 2 \cdot 5 = 12 \pmod{5}$$
$$x \equiv 3 \pmod{5}$$
$$5y \equiv 10 \pmod{4}$$

$$y \equiv 2 \pmod 4$$

also:

$$x = 3 + 5n$$

$$y = 2 + 4n.$$

Setzt man in die Form:

$$4x + 1$$

den Wert für x ein, so kommt:

$$4(3 + 5n) + 1 = 13 + 20n$$

also heißt die Zahl für $n = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$

$n = 0 : \quad 13$

$n = 1 : \quad 33$

$n = 2 : \quad 53$

$n = 3 : \quad 73$ etc.

9. Welche Zahl läßt, durch 3, 5 und 7 dividiert, nach der Reihe die Reste 2, 2 und 5?

Die gesuchte Zahl hat, da sie für 3 und 5 den gleichen Rest läßt, die Formen:

$$15x + 2$$

und:

$$7y + 5$$

daher:

$$15x + 2 = 7y + 5$$

oder:

$$15x = 7y + 3$$

also:

$$15x \equiv 3 \pmod 7$$

$$7y \equiv -3 \pmod{15}$$

$$15x \equiv 3 \pmod 7$$

$$14x \equiv 0 \pmod 7$$

$$x \equiv 3 \pmod 7$$

$$7y \equiv -3 \pmod{15}$$

$$14y \equiv -6 \pmod{15}$$

$$15y \equiv 0 \pmod{15}$$

$$y \equiv 6 \pmod{15}$$

also allgemein:

$$x = 3 + 7n$$

$$y = 6 + 15n.$$

Die Zahl heißt also:

$$15\,(3 + 7\,n) + 2 = 47 + 105\,n$$

Solche Zahlen sind also:

$$\begin{aligned} n = 0&:\quad 47\\ n = 1&:\quad 152\\ n = 2&:\quad 257\\ n = 3&:\quad 362\\ &\ \ldots\ldots\\ &\ \ldots\ldots \end{aligned}$$

10. Welche Zahl läßt durch 4, 10 und 24 dividiert nacheinander die Reste 1, 7 und 9?

Die gesuchte Zahl hat die Formen:

$$\begin{gathered} 4x + 1\\ 10y + 7\\ 24z + 9. \end{gathered}$$

Es ist daher zunächst:

$$\begin{aligned} 4x + 1 &= 10y + 7\\ 2x &= 5y + 3 \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 3 \pmod 5\\ 5y &\equiv -3 \pmod 2\\ \hline 2x &\equiv 8 \pmod 5\\ x &\equiv 4 \pmod 5\\ 5x &\equiv -3 + 4 \cdot 2 \equiv 5 \pmod 2\\ y &\equiv 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

also allgemein:

$$\begin{aligned} x &= 4 + 5\,n\\ y &= 1 + 2\,n. \end{aligned}$$

Setzt man in die Form:

$$4x + 1$$

den Wert für x ein, so kommt:

$$4\,(4 + 5\,n) + 1 = 17 + 20\,n$$

also auch:

$$\begin{aligned} 24z + 9 &= 17 + 20\,n\\ 24z &= 8 + 20\,n\\ 6z &= 5n + 2. \end{aligned}$$

Es ist also:

$$\begin{array}{r}
6z \equiv 2 \pmod{5} \\
5n \equiv -2 \pmod{6} \\
\hline
6z \equiv 2 \pmod{5} \\
5z \equiv 0 \pmod{5} \\
\hline
z \equiv 2 \pmod{5} \\
5n \equiv -2 \pmod{6} \\
6n \equiv 0 \pmod{6} \\
\hline
n \equiv 2 \pmod{6}
\end{array}$$

also allgemein:

$$z = 2 + 5m$$
$$n = 2 + 6m.$$

Setzt man diesen Wert in die Form der Zahl ein, so kommt:

$$17 + 20(2 + 6m) = 57 + 120m,$$

worin m jede ganze positive Zahl sein kann.

Gesuchte Zahlen sind:

$$\begin{array}{rr}
n = 0: & 57 \\
n = 1: & 177 \\
n = 2: & 297 \\
n = 3: & 417 \\
\ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

11. Welche Zahl gibt, durch 3, 5, 7 und 11 dividiert, die Reste 1, 4, 1 und 9.

Die gesuchte Zahl hat die Formen:

$$21x + 1$$
$$5y + 4$$
$$11z + 9$$

Es ist also zunächst:

$$21x + 1 = 5y + 4$$
$$21x = 5y + 3$$

und hieraus:

$$\begin{array}{r}
21x \equiv 3 \pmod{5} \\
5y \equiv -3 \pmod{21} \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
21x \equiv 3 \pmod 5 \\
20x \equiv 0 \pmod 5 \\
\hline
x \equiv 3 \pmod 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
5y \equiv -3 \pmod{21} \\
20y \equiv -12 \pmod{21} \\
21y \equiv 0 \pmod{21} \\
\hline
y \equiv 12 \pmod{21}
\end{array}$$

also allgemein:

$$x = 3 + 5n$$
$$y = 12 + 21n$$

Die gesuchte Zahl hat daher die Form:

$$21(3 + 5n) + 1 = 64 + 105n$$

Es ist daher ferner:

$$11z + 9 = 64 + 105n$$
$$11z = 55 + 105n$$

und hieraus:

$$\begin{array}{r}
11z \equiv 55 \pmod{105} \\
105n \equiv -55 \pmod{11} \\
\hline
z \equiv 5 \pmod{105}
\end{array}$$

$$21n \equiv -11 \pmod{11}$$
$$21n \equiv -11 + 11 \pmod{11}$$
$$n \equiv 0 \pmod{11}$$

also allgemein:

$$z = 5 + 105n$$
$$n = 0 + 11m.$$

Die gesuchte Zahl hat also die allgemeine Form:

$$64 + 105(0 + 11m) = 64 + 1\,155m$$

und hieraus erhalten wir als einige der gesuchten Zahlen:

$$\begin{array}{rr}
n = 0: & 64 \\
n = 1: & 1219 \\
n = 2: & 2374 \\
n = 3: & 3529 \\
\ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

12. Ein Gärtner hat weniger als 1000 Stück Bäume. Pflanzt er dieselben in Reihen, so daß in jede Reihe 37 kommen, so

bleiben ihm 8 Stück übrig; pflanzt er sie aber in Reihen, so daß in jede Reihe 43 kommen, so bleiben ihm 11 Stück übrig. Wieviel Bäume sind es?

Die gesuchte Anzahl der Bäume muß die Form haben:

$$37x + 8$$

und ebenso die Form:

$$43y + 11.$$

Es muß also: $37x + 8 = 43y + 11$

$$37x = 43y + 3$$

und hieraus ergibt sich:

$$\begin{array}{c} 37x \equiv 3 \pmod{43} \\ 43y \equiv -3 \pmod{37} \\ \hline 37x \equiv 3 \pmod{43} \\ 43x \equiv 0 \pmod{43} \\ \hline 6x \equiv -3 \pmod{43} \\ 36x \equiv -18 \pmod{43} \end{array}$$

hierzu:

$$\begin{array}{c} 37x \equiv 3 \pmod{43} \\ \hline x \equiv 21 \pmod{43} \\ 43y \equiv -3 \pmod{37} \\ 37y \equiv 0 \pmod{37} \\ \hline 6y \equiv -3 \pmod{37} \\ 36y \equiv -18 \pmod{37} \end{array}$$

hierzu;

$$\begin{array}{c} 37y \equiv 0 \pmod{37} \\ \hline y \equiv 18 \pmod{37} \end{array}$$

also allgemein:

$$x = 21 + 43n$$
$$y = 18 + 37n$$

und hieraus erhalten wir als allgemeine Form der gesuchten Zahl:

$$37(21 + 44n) + 8 = 37 \cdot 21 + 37 \cdot 43n + 8$$

Da die Anzahl der Bäume kleiner sein soll als 1000, so ist dieselbe:

$$z = 37 \cdot 21 + 8 = 785.$$

13. Welche Zahl gibt, durch 28 dividiert, den Rest 20, durch 19 dividiert, den Rest 12 und, durch 15 dividiert, den Rest 10? (Vergl. auch Bd. III, Aufgabe 3, Seite 150).

Die gesuchte Zahl muß die Formen haben:

$$28x + 20$$
$$19y + 12$$
$$15z + 10.$$

Es ist also zunächst?

$$28x + 20 = 19y + 12$$
$$28x = 19y - 8$$

oder:

$$19y = 28x + 8$$

und hieraus:

$$28x \equiv -8 \pmod{19}$$
$$19y \equiv 8 \pmod{28}$$

$$7x \equiv -2 \pmod{19}$$
$$7x \equiv -2 + 6 \cdot 19 \pmod{19}$$
$$7x \equiv 112 \pmod{19}$$
$$x \equiv 16 \pmod{19}$$

$$28y \equiv 0 \pmod{28}$$
$$9y \equiv -8 \pmod{28}$$
$$27y \equiv -24 \pmod{28}$$

$$y \equiv 24 \pmod{28}$$

Allgemein also:

$$x = 16 + 19n$$
$$y = 24 + 28n.$$

Setzt man den Wert für x in die entsprechende Form der Zahl ein, so kommt:

$$28(16 + 19n) + 20 = 468 + 532m$$

Es muß also auch:

$$15z + 10 = 468 + 532n$$

oder:

$$15z = 532n + 458$$

und hieraus ergibt sich:

$$15z \equiv 458 \pmod{532}$$
$$532n \equiv -458 \pmod{15}$$

$$15z \equiv 458 + 532 \pmod{532}$$
$$15z \equiv 990 \pmod{532}$$

$$z \equiv 66 \pmod{532}$$

$$532\,n \equiv -458 \pmod{15}$$
$$525\,n \equiv 0 \pmod{15}$$

$$7\,n \equiv -458 \pmod{15}$$
$$7\,n \equiv -458 + 31 \cdot 15 \pmod{15}$$
$$7\,n \equiv 7 \pmod{15}$$
$$n \equiv 1 \pmod{15}$$

also allgemein.

$$z = 66 + 532\,m$$
$$n = 1 + 15\,m,$$

daher die allgemeine Form der Zahl:

$$468 + 532\,(1 + 15\,m) = 1000 + 7980\,n.$$

Für $n = 0$ kommt: $z = 1000$

Für $n = 1$ kommt: $z = 8980$

Für $n = 2$ kommt: $z = 16960.$

. . . .

. . . .

14. Dreißig Personen, Männer, Weiber und Kinder, verzehrten zusammen für 232 Mark; ein Mann bezahlte 14 Mark, eine Frau $5^1/_2$ Mark und 1 Kind 1 Mark. Wieviel Männer, Weiber und Kinder waren es?

Es seien x Männer, y Weiber und z Kinder gewesen, dann bestehen nach den Angaben der Aufgabe die beiden Gleichungen:

$$x + y + z = 30$$
$$14\,x + 5{,}5\,y + z = 232$$

$$28\,x + 11\,y + 2\,z = 464$$
$$2\,x + 2\,y + 2\,z = 60$$

$$26\,x + 9\,y = 404.$$

Hieraus ergibt sich:

$$26\,x \equiv 404 \pmod 9$$
$$9\,y \equiv 404 \pmod{26}$$

$$13\,x \equiv 202 \pmod 9$$
$$13\,x \equiv 202 - 8 \cdot 9 \pmod 9$$

$$13x \equiv 130 \pmod 9)$$
$$x \equiv 10 \bmod 9)$$

$$9y \equiv 404 - 26 \pmod{26}$$
$$9y \equiv 378 \pmod{26}$$
$$y \equiv 42 \pmod{26}$$
$$y \equiv 16 \pmod{26}$$

also allgemein:

$$x = 10 + 9n$$
$$y = 16 + 26n.$$

Es waren also 10 Männer, 16 Weiber und 4 Kinder.

15. Es wird angezeigt, daß 3 Reisfässer, deren jedes gleichviel Reis enthält, von Dieben zum Teil geleert worden sind. Man wußte nicht, wieviel Reis im Ganzen sich darin befand, jedoch in jedem Faß weniger als 1000 Ho, aber es ergab sich, daß in dem einen Fasse noch 1 Ho übrig gelassen war, in dem zweiten noch 11 Ho und in dem dritten noch 1 Ho. Als man der Diebe habhaft wurde, gestand A, daß er mit einer Schaufel mehrere Male aus dem ersten Faß den Reis in einen Sack gefüllt habe; B, daß er in der Eile einen hölzernen Schuh ergriffen und diesen mehrere Male aus dem zweiten Fasse voll geschöpft, und C, daß er eine Schüssel mehrere Male aus dem dritten Faß gefüllt habe. Diese drei Gefäße, deren sich die Diebe bedient haben, sind zur Stelle und es ergibt sich, daß die Schaufel 11 Ho, der Holzschuh 17 Ho und die Schüssel 12 Ho enthalten. Wie viel Reis befand sich in jedem Fasse?

(Vergl. auch Bd. III, Aufgabe 4, Seite 153.)

Nach den Bestimmungen der Aufgabe enthält das erste Faß: $11x + 1$ Ho, das zweite $17y + 11$ und das dritte $12z + 1$ Ho. Da in jedem gleichviel Reis ist, so ist vorerst:

$$11x + 1 = 17y + 11$$
$$11x = 17y + 10$$

und hieraus:

$$11x \equiv 10 \pmod{17}$$
$$17y \equiv -10 \pmod{11}$$

$$11x \equiv 10 + 2 \cdot 17 \pmod{17}$$
$$11x \equiv 44 \pmod{17}$$
$$x \equiv 4 \pmod{17}$$

$$17y \equiv -10 + 4 \cdot 11 \pmod{11}$$
$$17y \equiv 34 \pmod{11}$$
$$y \equiv 2 \pmod{11}$$

also allgemein:

$$2 = 4 + 17n$$
$$y = 2 + 11n$$

Hiernach ist auch:

$$12z + 1 = 17(2 + 11n) + 11$$
$$12z = 187n + 44$$

und hieraus:

$$12z \equiv 44 \pmod{187}$$
$$187n \equiv -44 \pmod{12}$$

$$3z \equiv 11 \pmod{187}$$
$$3z \equiv 11 + 1 \cdot 187 \pmod{187}$$
$$3z \equiv 198 \pmod{187}$$
$$z \equiv 66 \pmod{187}$$

$$187n \equiv -44 \pmod{12}$$
$$17n \equiv -4 \pmod{12}$$
$$17n \equiv -4 + 6 \cdot 12 \pmod{12}$$
$$17n \equiv 68 \pmod{12}$$
$$n \equiv 4 \pmod{12}$$

also:

$$z = 66 + 187m$$
$$n = 4 + 12m.$$

Also allgemein der Faßinhalt:

$$\boldsymbol{187(4 + 12m) + 45.}$$

Da aber der Inhalt nicht größer als 1000 Ho sein soll, so muß $m = 0$ gewählt werden, und es kommt:

$$J = 187 \cdot 4 + 45 = 748 + 45 = 793 \text{ Ho}.$$

Ein Faß enthielt also 793 Ho.

16. Eine Gesellschaft nimmt von ihren ordentlichen Mitgliedern je 10 Mark, von den außerordentlichen je 3 Mark als Vierteljahresbeitrag, ihre Gesamteinnahme im Vierteljahr stellt sich auf 800 Mark. Wieviel Mitglieder jeder Art zählt sie, wenn die Gesamtzahl aller Mitglieder zwischen 90 und 100 liegt?

Angenommen es seien x ordentliche und y außerordentliche Mitglieder, dann betragen nach den Festsetzungen der Aufgabe die Vierteljahreseinnahmen:

$$(10\,x + 3\,y) \text{ Mark.}$$

Nach Aufgabe soll diese Einnahme 800 Mark betragen, so daß die Gleichung besteht:

$$10\,x + 3\,y = 800$$

und hieraus ergibt sich:

$$10\,x \equiv 800 \pmod 3$$
$$3\,y \equiv 800 \pmod{10}$$

$$x \equiv 80 \pmod 3$$
$$x \equiv 80 - 26 \cdot 3 \equiv 2 \pmod 3$$

allgemein:

$$x = 80 - 3\,n$$
$$3\,y \equiv 800 + 10 \cdot 10 \pmod{10}$$
$$3\,y \equiv 900 \pmod{10}$$
$$y \equiv 300 \pmod{10}$$

allgemein:

$$y = 0 + 10\,n.$$

Lassen wir nun für n den Wert 2 eintreten, so kommt:

$$x = 80 - 6 = 74$$
$$y = 0 + 2 \cdot 10 = 20$$

so daß es also insgesamt 94 Mitglieder sind, 74 ordentliche und 20 außerordentliche.

§ 3.

Lineare Kettendivision.

Erklärung der Gaußschen Klammer [ ].

Wir unterscheiden im folgenden zwischen Endwert und seinen Vorwerten.

Der Ausdruck: $[5]$

bedeutet so viel als 5 selbst, sein Vorwert ist 1. Eine leere Klammer ist also gleich einer algorithmischen Eins zu erachten, also:

$$[\cdot] = 1.$$

Wird hierzu noch ein Vorwert nötig, so ist er 0.

Bei zwei Elementen ist der Klammerausdruck gleich dem um 1 vermehrten Produkt der in der Klammer stehenden beiden Elementen, wie wir in dieser Angelegenheit die Zahlen in der Klammer nennen. Es ist also:

$$[7,5] = 35 + 1 = 36$$

$$[6,9] = 54 + 1 = 55$$

oder:

$$[2,7] = 14 + 1 = 15 \text{ etc.}$$

Der Endwert in diesen Beispielen ist 36, resp. 55, resp. 15; der Vorwert ist 5, resp. 9, resp. 7.

Ist jeweils noch ein Vorwert nötig, so ist dieser in allen Fällen 1. Bei drei Elementen:

$$[2, 7, 5]$$

werden der vorige Vorwert 5 und der vorige Endwert 36 als Vorwerte benützt und in die linke und rechte Kolonne geschrieben. Nun wird der Endwert von oben, hier also 36, mit dem neuen Element 2 multipliziert, das Produkt in die linke Kolonne geschrieben und zu dem darüber stehenden Wert addiert. Dies ergibt den Endwert, hier 77

Wir haben das Schema:

Linke Kolonne	Rechte Kolonne
5	
	36
72	
77	

Bei vier und mehreren Elementen wird jeder Vorwert mit dem entsprechenden neu hinzugekommenen Element multipliziert, dieses Produkt in die andere Kolonne geschrieben und zu dem bereits in dieser Kolonne stehenden Wert addiert.

Also z. B.

$$[3, 2, 7, 5]:$$

Linke Kolonne	Rechte Kolonne
5	
	36
72	
77	
	231
	267

Der Endwert ist also 267, die Vorwerte sind 5, 36, 77 oder:

[6, 3, 2, 7, 5]:

Linke Kolonne	Rechte Kolonne
5	
	36
72	
77	
	231
	267
1602	
1679	

Der Endwert ist 1679. Vorwerte sind: 5, 36, 77, 267.

Aus diesem Schema erhellt ohne weiteres der Satz:

Ist das letzte Element 1, so darf es fortgelassen werden, wenn man das vorletzte um eine Einheit erhöht:

So gibt z. B. [2, 3, 6, 7, 1]

und: [2, 3, 6, 8]

denselben *Endwert*; nämlich:

Linke Kolonne	Rechte Kolonne
1	
	8
48	
49	
	147
	155
310	
359	

und:

Linke Kolonne	Rechte Kolonne
8	
	49
147	
155	
	310
	359

Es leuchtet nun auch ein, daß der Vorwert einer einzelnen Zahl 1 ist. Ferner ist leicht einzusehen, daß derselbe Endwert resultiert, wenn man die Klammer von links nach rechts, d. h.

vom Anfang an berechnet. Man kann diesen Satz als Probe benützen.

Für obiges Beispiel erhalten wir:

[2, 3, 6, 8]:

Linke Kolonne	Rechte Kolonne
2	
	7
42	
44	
	352
	359,

also derselbe Endwert.

Man berechne:

[7, 6, 2, 9, 5, 14]

Man erhält „vom Ende“ aus

Linke Kolonne	Rechte Kolonne
14	
	71
639	
653	
	1306
	1377
8262	
8915	
	62405
	63782

Der Endwert ist also 63782.

Ferner: [0, 8, 9, 12]

Vom Ende aus kommt:

Linke Kolonne	Rechte Kolonne
12	
	109
872	
884	
	0
	109

Der Endwert ist also 109. Vorwerte sind 12, 109, 884. Faßt man nur den Endwert ins Auge, so gilt der Satz:

Ist das erste Element eine Null, so darf sie mit samt ihrem folgenden Element fortgelassen werden.

Man berechne ferner:

$$[-2, 14, 11, 5] = ?$$

Vom Ende aus: Linke Kol.	Vom Ende aus: Rechte Kol.	Vom Anfang aus: Linke Kol.	Vom Anfang aus: Rechte Kol.
5		— 2	
	56		— 27
784		— 297	
789		— 299	
	— 1578		— 1495
	— 1522		— 1522

Der Endwert ist also — 1522.

Ferner zu berechnen:

$$[-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

Linke Kolonne	Rechte Kolonne
1	
	2
2	
3	
	3
	5
5	
8	
	8
	13
— 13	
— 5	

Der Endwert ist also — 5.

Es sei nun ein unechter Bruch $\frac{314}{100}$ gegeben. Man suche nach der in Bd. I, § 7 gezeigten Weise den größten gemeinschaftlichen Teiler:

$$\begin{array}{r|r|l}
100 & 314 & 3 \\
 & 300 & \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r|l}
14 & 100 & 7 \\
 & 98 & \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r|l}
\underline{2} & 14 & 7 \\
 & 14 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

2 ist der größte Teiler.

Will man eine gerade Anzahl von Quotienten, so erhält man:

$$\begin{array}{r|r|l}
100 & 314 & 3 \\
 & 300 & \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r|l}
14 & 100 & 7 \\
 & 98 & \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r|l}
2 & 14 & 6 \\
 & 12 & \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r|l}
\underline{2} & 2 & 1 \\
 & 2 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Der Zähler des vereinfachten Bruches

$$\frac{314}{100} = \frac{157}{50}$$

ist, wenn wir die einzelnen Quotienten als Elemente nehmen, Klammer von allen Elementen, und der Nenner-Klammer von allen Elementen mit Ausnahme des Anfangselementes.

$$\frac{157}{50} = \frac{[3,\ 7,\ 6,\ 1]}{[7,\ 6,\ 1]} = (3,\ 7,\ 6,\ 1).$$

Soll man nun einen bestimmten Näherungswert ermitteln, z. B. den dritten, so bilde man die Klammer von den drei ersten Elementen und berechne sie vom Ende aus, ihr Endwert ist der Zähler und der unmittelbar vorhergehende Vorwert der Nenner des verlangten Näherungswertes.

Für unser Beispiel erhalten wir:

Linke Kolonne	Rechte Kolonne
6	
	43
129	
135	

also: dritter Näherungswert:

$$\frac{\text{Endwert}}{\text{vorhergehender Vorwert}} = \frac{135}{43}.$$

Der erste Näherungswert wird:

$$\frac{3}{[\cdot]} = \frac{3}{1} = 3.$$

Braucht man aber *alle* Näherungswerte, so bilde man zwei Klammern und zwar die von allen Elementen, und die von allen mit Ausnahme des ersten Elementes, und zwar beide vom Anfang aus; dann geben die Quotienten der einzelnen Vorwerte die gesuchten Näherungswerte.

Für unser Beispiel erhalten wir:

[3, 7, 6, 1] und [7, 6, 6, 1]

Linke Kol.	Rechte Kol.	Linke Kol.	Rechte Kol.
3		7	
	22		43
$\frac{132}{135}$		$\frac{43}{50}$	
	$\frac{135}{157}$		

Die Vorwerte sind also: 3. 22, 135

und: 1, 7, 43

und hieraus ergeben sich die Näherungswerte:

$$3, \frac{22}{7} \text{ und; } \frac{135}{43}.$$

Man soll die Näherungswerte von

443,296 : 139,130

bestimmen.

Man erhält:

139130	443296	3
	417390	
25906	139130	5
	129530	
9600	25906	2
	19200	
6706	9600	1
	6706	
2894	6706	2
	5788	
918	2894	3
	2754	
140	918	6
	840	
78	140	1
	78	
62	78	1
	62	
16	62	3
	48	
14	16	1
	14	
2	14	7
	14	
0		

Um die erlangten Näherungswerte zu erhalten, haben wir die Klammern zu berechnen:

[3, 5, 2, 1, 2, 3, 6, 1, 1, 3, 1, 7]

und:

[5, 2, 1, 2, 3, 6, 1, 1, 3, 1, 7]

und zwar beide vom Anfang aus. Wir erhalten:

Linke Kolonne	Rechte Kolonne
3	
	16
$\frac{32}{35}$	
	$\frac{35}{51}$
$\frac{102}{137}$	
	$\frac{411}{462}$
$\frac{2772}{2909}$	
	$\frac{2909}{3371}$
$\frac{3371}{6280}$	
	$\frac{18840}{22211}$
$\frac{22211}{28491}$	
	$\frac{199437}{221648}$

Für die zweite Klammer erhalten wir:

Linke Kolonne	Rechte Kolonne
5	
	11
$\frac{11}{16}$	
	$\frac{32}{43}$
$\frac{129}{145}$	
	$\frac{870}{913}$
$\frac{913}{1058}$	
	$\frac{1058}{1971}$
$\frac{5913}{6971}$	
	$\frac{6971}{8942}$
$\frac{62594}{69565}$	

Die beiden Klammern haben also die Vorwerte:

3, 16, 35, 51, 137, 462, 2909, 3371, 6280, 22211, 28491.
1, 5, 11, 16, 43, 145, 913, 1058, 1971, 6971, 8942.

und hieraus ergeben sich die Näherungswerte:

$$\frac{3}{1}, \frac{16}{5}, \frac{35}{11}, \frac{51}{16}, \frac{137}{43}, \frac{462}{145}, \frac{2909}{913}, \frac{3371}{1058}, \frac{6280}{1971},$$
$$\frac{22211}{6971}, \frac{28491}{8942}.$$

Man soll ferner die Näherungswerte des Verhältnisses des Durchmessers einer Kugel zur Seite des ihr an Inhalt gleichen Würfels:

$$1 : 0805996 \ldots .$$

bestimmen.

Wir erhalten:

805996	1000000	1
	805996	
194004	805996	4
	776016	
29980	194004	6
	179880	
14124	29980	2
	28248	
1732	14124	8
	13856	
268	1732	6
	1608	
124	268	2
	248	
20	124	6
	120	
4	20	5
	20	
	0	

Um nun die Vorwerte und aus ihnen die Näherungswerte zu erhalten, haben wir die Klammern zu berechnen:

$$[1,\ 4,\ 6,\ 2,\ 8,\ 6,\ 2,\ 6,\ 5]$$

und:

$$[4,\ 6,\ 2,\ 8,\ 6,\ 2,\ 6,\ 5].$$

Wir erhalten:

Linke Kol.	Rechte Kol.
1	
	5
$\frac{30}{31}$	
	$\frac{62}{67}$
$\frac{536}{567}$	
	$\frac{3402}{3469}$
$\frac{6938}{7505}$	
	$\frac{45030}{48499}$
$\frac{242495}{250000}$	

Ferner:

Linke Kol.	Rechte Kol.
4	
	25
$\frac{50}{54}$	
	$\frac{432}{457}$
$\frac{2742}{2796}$	
	$\frac{5592}{6049}$
$\frac{36294}{39090}$	
	$\frac{195450}{201499}$

Wir haben also die Vorwerte:

5, 31, 67, 567, 3469, 7505, 48499

4, 25, 54, 457, 2796, 6049, 39090

und hieraus die Näherungswerte:

$$\frac{5}{4}, \quad \frac{31}{25}, \quad \frac{67}{54}, \quad \frac{577}{457}, \quad \frac{3469}{2796}, \quad \frac{7505}{6049}, \quad \frac{48499}{39090}.$$

Ist in einem Bruch der Zähler negativ, so wird das erste Element negativ, muß aber, damit nicht auch alle folgenden Elemente negativ werden, numerisch um eine Einheit erhöht werden. Es sei z. B der Näherungswert zu bestimmen von:

$$-\frac{43}{19}.$$

Man erhält:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
19 & \multicolumn{1}{|r|}{-\ 43} & -\ 3 & & & & \\
 & \multicolumn{1}{|r|}{-\ 57} & & & & & \\
\hline
 & 14 & \multicolumn{1}{|r|}{19} & 1 & & & \\
 & & \multicolumn{1}{|r|}{14} & & & & \\
\hline
 & & 5 & \multicolumn{1}{|r|}{14} & 2 & & \\
 & & & \multicolumn{1}{|r|}{10} & & & \\
\hline
 & & & 4 & \multicolumn{1}{|r|}{5} & 1 & \\
 & & & & \multicolumn{1}{|r|}{4} & & \\
\hline
 & & & & 1 & \multicolumn{1}{|r|}{4} & 4 \\
 & & & & & \multicolumn{1}{|r|}{4} & \\
\hline
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Man hat also zu bereehnen:

$$[-3, 1, 2, 1]$$

und zwar vom Ende aus, man erhält:

Linke Kol.	Rechte Kol.
1	
	3
$\frac{3}{4}$	
	-12
	-9

Der vierte Näherungswert ist also: $\frac{9}{4}$.

Will man alle Näherungswerte, so hat man von Anfang aus zu berechnen:

$$[-3, 1, 2, 1, 4]$$
$$[1, 2, 1, 4]$$

Man erhält:

Linke Kol.	Rechte Kol.	und:	Linke Kol.	Rechte Kol.
-3			1	
	-2			3
-4			$\frac{3}{4}$	
-7				
	-7			$\frac{16}{19}$
	-9			
-36				
-43				

Man hat also die Vorwerte:

$$-3, -2, -7, -9;$$
$$1, \quad 1, \quad 3, \quad 7;$$

und hieraus die Näherungswerte:

$$-3, -2, -\frac{7}{3}, -\frac{9}{4}.$$

Wollte man einen fünften Näherungswert, so hätte man zu berechnen:

$$[-3, 1, 2, 1, 3, 1]$$

und:

$$[1, 1, 1, 3, 1]$$

und es käme:

Linke Kol.	Rechte Kol.	und:	Linke Kol.	Rechte Kol.
— 3			1	
	— 2			3
— 4			3	
— 7			4	
	— 7			12
	— 9			15
— 27			15	
— 34			19	
	— 34			
	— 43			

also die Vorwerte:

$$\begin{matrix} -3, & -2, & -7, & -9, & -34 \\ 1, & 1, & 3, & 4, & 15 \end{matrix}$$

und hieraus den fünften Näherungswert, nach Heis Nebennäherungswert: $\frac{-34}{15}$.

§ 4.

Unbestimmte Gleichungen I. Grades.

Lösung mittels Kettendivision.

Wir geben im folgenden nur das Verfahren an, nach welchem man diophantische Gleichungen I. Grades mittels Kettendivision lösen kann; auf den Beweis der Richtigkeit des Verfahrens können wir hier nicht eingehen.

Ist:
$$ax + by + c = 0$$
die Normalform, und sind a, b, und c relativ prim, so dividiert man mit dem ersten Koeffizienten in den negativ genommenen zweiten, so zwar, daß man eine ***gerade*** Anzahl Elemente erhält. Dann bildet man die Klammer von allen Elementen mit Ausnahme des letzten und berechnet die Klammer vom Ende aus.

x ist dann das c-fache des Endwertes vermehrt um ein n-faches des negativ genommenen zweiten Koeffizienten.

y ist das c-fache des letzten Vorwertes vermehrt um dasselbe n-fache des ersten Koeffizienten.

Natürlich wählen wir für das allgemeine Resultat n wieder so, daß man das kleinste positive x erhält.

Beispiel.

$$47x - 89y - 1 = 0$$

$$\begin{array}{r|r|l}
47 & 89 & 1 \\
 & 47 & \\
\hline
42 & 47 & 1 \\
 & 42 & \\
\hline
5 & 42 & 8 \\
 & 40 & \\
\hline
2 & 5 & 2 \\
 & 4 & \\
\hline
1 & 2 & 1 \\
 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 1 \\
 & 1 & \\
\hline
0 & &
\end{array}$$

[1, 1, 8, 2, 1]

Linke Kol.	Rechte Kol.
1	
	3
24	
25	
	35
	18
28	
53	

Also

$$x = -53 + 89n$$

$$x = -53 + 89 \cdot 1 = 36$$

$$y = -28 + 47n$$

$$y = -28 + 47 \cdot 1 = 19$$

Andere Werte erhält man durch Einsetzen von $n = 2, 3, 4 \cdots$

Beispiel: $23x + 72y - 1 = 0.$

$$\begin{array}{r|r|l} 23 & -72 & -4 \\ & \mp 92 & \\ \hline 20 & 23 & 1 \\ & 20 & \\ \hline 3 & 20 & 6 \\ & 18 & \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ & 2 & \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

$$[-4, 1, 6, 1, 1] = ?$$

Linke Kol.	Rechte Kol.
1	
	2
12	
13	
	13
	15
— 60	
— 47	

Also:

$$x = -1 \cdot (-47) - 72n = 47 - 72n$$
$$y = -1 \cdot 15 + 23n = -15 + 23n$$

$$x = 47$$
$$y = -15.$$

Weitere Werte erhält man durch Einsetzen von $n = 1, 2, 3 \cdots$

Beispiel: $5x + 3y - 70 = 0$

$$\begin{array}{r|r|l} 5 & -3 & -1 \\ & \mp 5 & \\ \hline 2 & 5 & 2 \\ & 4 & \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

$[\mp 1, 2, 1] = ?$

Linke Kol.	Rechte Kol.
1	
	3
— 3	
— 2	

Also:

$$x = -2 \cdot -70 - 3n = 140 - 3n$$
$$y = -70 \cdot 3 + 5n = -210 + 5n$$

$$x = 140 - 46 \cdot 3 = 2$$
$$y = -210 + 5 \cdot 46 = 20$$

Die weiteren Werte erhält man wie oben.

Beispiel. $6x + 17y - 500 = 0$

$$\begin{array}{r|r|l}
6 & -17 & -3 \\
 & \mp 18 & \\
\hline
+ & 1 & 6 \; 6 \\
 & & 6 \\
\hline
 & & 0
\end{array}$$

Endwert: — 3, Vorwert 1.

Hieraus:

$$x = -500 \cdot (-3) - 17n = 1500 - 17n.$$
$$y = -500 + 6n$$

$$x = 1500 - 88 \cdot 17 = 4$$
$$y = -500 + 6 \cdot 88 = 28.$$

$16x + 39y - 1111 = 0$

$$\begin{array}{r|r|l}
16 & -39 & -3 \\
 & \mp 48 & \\
\hline
9 & 16 & 1 \\
 & 9 & \\
\hline
7 & 9 & 1 \\
 & 7 & \\
\hline
2 & 7 & 3 \\
 & 6 & \\
\hline
1 & 2 & 1 \\
 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 1 \\
 & 1 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

$$[-3, 1, 1, 3, 1] = ?$$

Linke Kol.	Rechte Kol.
1	
	4
4	
5	
	5
	9
− 27	
− 22	

und hieraus:

$$x = -1111 \cdot (-22) - 39n = 24442 - 39n$$
$$y = -1111 \cdot 9 + 16n = -9999 + 16n$$

$$x = 24442 - 626 \cdot 39 = 28$$
$$y = -9999 + 10016 = 17$$

Weitere Werte sind leicht zu berechnen.

Wie man bei zwei Gleichungen mit 3 Unbekannten zu verfahren hat, möge das folgende Beispiel zeigen.

Beispiel:

$$x + 2y + 3z = 22$$
$$4x - 3y + 2z = 14$$

$$2x + 4y + 6z = 44$$
$$12x - 9y + 6z = 42$$

$$10x - 13y = -2$$
$$10x - 13y + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|r}
10 & +13 & 1 & & \\
 & 10 & & & \\
\hline
 & 3 & 10 & 3 & \\
 & & 9 & & \\
\hline
 & & 1 & 3 & 2 \\
 & & & 2 & \\
\hline
 & & & 1 & 1 \quad 1 \\
 & & & & 1 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}$$

$$[1, 3, 2] = ?$$

Linke Kol.	Rechte Kol.
2	
	7
7	
9	

Also:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot 9 + 13n = 18 + 13n \\ y &= 2 \cdot 7 + 10n = 14 + 10n \\ \hline x &= 5 + 13n \\ y &= 4 + 10n \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werte in die erste der gegebenen Gleichungen ein, so kommt:

$$5 + 13n + 8 + 20n + 3z - 22 = 0$$

oder:

$$3z + 33n - 9 = 0$$

$$z + 11n - 3 = 0$$

Hierin ist also n und z zu bestimmen.

$$\begin{array}{r|r|l} 1 & -\ 11 & -\ 12 \\ & \mp\ 12 & \\ \hline & 1 & 1 \\ & 1 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$$[-12] = -12.$$

Der Endwert ist — 12, der Vorwert 1.

Also; $z = (-3) \cdot (-12) - 11m = 36 - 11m$

$$\begin{aligned} n &= -3 + m \\ \hline z &= 36 - 3 \cdot 11 = 3 \\ n &= -3 + 3 = 0 \end{aligned}$$

also:

$$\boldsymbol{x = 5}$$
$$\boldsymbol{y = 4}$$
$$\boldsymbol{z = 3.}$$

Weitere Werte sind:

$m = 2$: $\quad n = -1$

$x = -8$

$y = -6$

$z = 14$ usw.

Beispiel:
$$\begin{array}{r}
16x + 9y + 4z = 46 \\
9x + 4y + z = 20 \\ \hline
16x + 9y + 4z = 46 \\
36x + 16y + 4y = 80 \\ \hline
20x + 7y \qquad = 34 \\
20x + 7y - 34 = 0.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
20 & \multicolumn{1}{|r|}{-\ 7} & -1 & & & & & \\
 & \multicolumn{1}{|r|}{+\ 20} & & & & & & \\ \cline{1-2}
 & 13 & \multicolumn{1}{|r|}{20} & 1 & & & & \\
 & & \multicolumn{1}{|r|}{13} & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 7 & \multicolumn{1}{|r|}{13} & 1 & & & \\
 & & & \multicolumn{1}{|r|}{7} & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 6 & \multicolumn{1}{|r|}{7} & 1 & & \\
 & & & & \multicolumn{1}{|r|}{6} & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 1 & \multicolumn{1}{|r|}{6} & 5 & \\
 & & & & & \multicolumn{1}{|r|}{5} & & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 1 & \multicolumn{1}{|r|}{1} & 1 \\
 & & & & & & \multicolumn{1}{|r|}{1} &
\end{array}$$

$[-1, 1, 1, 1, 5] = ?$

Linke Kol.	Rechte Kol.
5	
	6
$\frac{6}{11}$	
	$\frac{11}{17}$
$\frac{-17}{-6}$	

und hieraus:

$$\begin{array}{l}
x = (-34)(-6) - 7n = 204 - 7n \\
y = -34 \cdot 17 + 20n = -578 + 20n \\ \hline
x = 204 - 29 \cdot 7 = 1 - 7n \\
y = -578 + 20 \cdot 29 = 2 + 2n
\end{array}$$

Diese Werte in die zweite der gegebenen Gleichungen eingesetzt:

$$9 - 63n + 8 + 80n + z - 20 = 0$$

oder: $$z + 17n - 3 = 0$$

hierin ist z und n zu bestimmen; wir erhalten nach derselben Methode:

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1 & -\,17 & -\,18 & \\
 & \mp\,18 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}$$

Der Endwert ist — 18, der Vorwert 1, und es kommt:

$$z = (-3)\cdot(-18) - 17m = 54 - 17m$$
$$n = -3 + m$$

$$z = 54 - 3 \cdot 17 = 3$$
$$n = 0,$$
$$x = 1,$$
$$y = 2.$$

Weitere Werte sind leicht zu finden.

§ 5.

Weitere Bemerkungen über lineare Kongruenzen.

In § 1 dieses Kapitels haben wir uns beeilt, möglichst rasch an die Anwendung der Kongruenzen zu kommen, um dem Schüler ein gewisses Interesse für diese ihm noch ungewohnten Lehren abzugewinnen. In diesem Paragraphen sei noch einiges über Zahlenkongruenzen ersten Grades, oder wie man auch sagt, über lineare Kongruenzen angeführt.

Lehrsatz 1. Führt man in eine ganze Funktion*) mit ganzzahligen Koeffizienten für die Variable x zwei Zahlen ein, welche nach irgend einem Modul p kongruent sind, so sind auch die sich ergebenden Funktionswerte nach diesem Modul p kongruent.

Eine ganze Funktion f (x) hat die allgemeine Form:

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots a_{m-1} x + a_m\,.$$

Gibt man nun in diesem Ausdruck der Variablen x zuerst den Wert M und dann den Wert N und ist:

*) Vergl. Band VI.

$$M \equiv N \pmod p$$

so ist auch bei ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \cdots a_m$, der Wert, den obiger Ausdruck für M erhält, dem nach p kongruent, der sich für $x = N$ ergibt, oder es ist symbolisch:

$$f(M) \equiv f(N) \pmod p.$$

Beweis. Aus: $M \equiv N \pmod p$

folgt:

$$M^m \equiv N^m \pmod p$$
$$M^{m-1} \equiv N^{m-1} \pmod p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M^0 \equiv N^0 \pmod p$$

Durch Multiplikation mit a_0, a_1 etc. ergibt sich:

$$a_0 M^m \equiv a_0 N^m \pmod p$$
$$\left.\begin{array}{l} a_1 M^{m-1} \equiv a_1 N^{m-1} \\ a_2 M^{m-2} \equiv a_2 N^{m-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m-1} M \equiv a_{m-1} N \end{array}\right\} \pmod p$$
$$a_m \equiv a_m$$

Addiert man diese Kongruenzen gliedweise, so kommt:

$$a_0 M^m + a_1 M^{m-1} + a_2 M^{m-2} + \cdots\cdots\cdots a_{m-1} M + am$$
$$\equiv a_0 N^m + a_1 N^{m-1} + a_2 N^{m-1} \cdots\cdots a_{m-1} N + am (\mathrm{mod}\ p$$

oder wenn wir die Summe links mit

$$f(M)$$

und die rechts mit $f(N)$

bezeichnen, $f(M) \equiv f(N) \pmod p,$

was zu beweisen war.

Lehrsatz 2. Sind zwei oder mehrere Zahlen nach mehreren Modulen zueinander kongruent und sind diese Module zueinander relativ prim, so sind die Zahlen auch nach dem Produkt dieser Module kongruent.

Ist z. B.

$$a \equiv b \pmod p$$

und: $a \equiv b \pmod q$

so heißt dies:

$$a - b$$

ist durch p sowohl, als auch durch q teilbar, also auch durch das Produkt $p \cdot q$, was in Kongruenzform heißt:

$$\boldsymbol{a \equiv b \pmod{p \cdot q}}.$$

Lehrsatz 3. Eine Kongruenz bleibt richtig, wenn man ihren Modul durch einen seiner Teiler ersetzt.

Ist also:

$$a \equiv b \pmod{p \cdot q}$$

so ist auch:

$$a \equiv b \pmod{p}$$

oder:

$$a \equiv b \pmod{q}.$$

Es folgt dies aus folgender Beweisführung:

$$a \equiv b \pmod{p \cdot q}.$$

$$a \cdot q \equiv b \cdot q \pmod{p \cdot q}$$

also:

$$\boldsymbol{a \equiv b \pmod{p}}.$$

Lehrsatz 4. Ist

$$\underline{x = a}$$

eine Lösung der Kongruenz:

$$\underline{f(x) \equiv 0 \pmod{p},}$$

so sind auch alle Zahlen, die zu a nach dem Modul p kongruent sind, Lösungen dieser Kongruenz.

Bezeichnen wir die zu a kongruenten Zahlen mit x, so folgt aus:

$$x \equiv a \pmod{p}$$

$$f(x) \equiv f(a) \pmod{p}.$$

Da aber nach Voraussetzung a eine Lösung von $f(x) = 0$ sein soll, so ist:

$$f(a) \equiv 0 \pmod{p}$$

folglich:

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

d. h. die Zahlen x befriedigen die Kongruenz ebenfalls.

Von all den Lösungen nehmen besonders zwei unser Interesse in Anspruch, nämlich diejenige positive Zahl, welche unter allen zu a nach dem Modul p kongruenten Zahlen die kleinste ist, und diejenige negative Zahl, welche unter allen den kleinsten Zahlenwert hat. Von diesen beiden kann man dann noch den absolut kleinsten Wert auswählen.

Ist:

$$a \equiv x \pmod{p}$$

so ist: $$\frac{a - x}{p} = N \text{ (= einer ganzen Zahl)}$$

und hieraus: $$x = a - Np,$$

als allgemeine Form aller Zahlen, welche mit a nach dem Modul p kongruent sind. Wir haben von dieser Form bereits in § 2 ausgiebigen Gebrauch gemacht. Schreiben wir:

$$x = p\left(\frac{a}{p} - N)\right),$$

so erkennen wir, daß wir einen positiven oder negativen Wert erhalten, je nachdem N algebraisch kleiner oder größer als $\frac{a}{p}$ ist. Den kleinsten positiven Wert erhalten wir offenbar, wenn wir für N eine Zahl nehmen, die $\frac{a}{p}$ am nächsten kommt und nicht größer ist als $\frac{a}{p}$. Ist a positiv, so hat man als N den Quotienten $\frac{a}{p}$ mit Vernachlässigung des Restes zu wählen; ist a negativ, so hat man für N den um 1 vermehrten Quotienten zu nehmen, und zwar mit negativem Zeichen.

Über die A n z a h l d e r L ö s u n g e n einer Kongruenz sei folgendes bemerkt. Wir haben oben gezeigt, daß wenn a die Kongruenz

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

befriedigt oder eine Lösung derselben ist, auch alle Zahlen X, welche mit a nach p kongruent sind, diese Kongruenz befriedigen oder Lösungen derselben sind, daß also:

$$f(X) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Solche Zahlen X gibt es unbeschränkt viele, sie alle aber sind mit a und folglich auch untereinander kongruent, u n d m a n b e z e i c h n e t d i e g a n z e R e i h e a l s ***eine*** L ö s u n g d e r K o n g r u e n z. G e n ü g e n a l s o e i n e r K o n g r u e n z

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

n u r s o l c h e Z a h l e n X, f ü r d i e d i e K o n g r u e n z b e s t e h t:

$$X \equiv a \pmod{p}$$

s o s a g t m a n, d i e K o n g r u e n z

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

h a b e n u r ***eine*** L ö s u n g.

Hat dagegen die Kongruenz

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

Lösungen, von denen die einen durch die Kongruenz:

$$x \equiv a \pmod{p}$$

definiert sind, die andern in der Kongruenz:

$$x \equiv a_1 \pmod{p}$$

enthalten sind, und besteht zwischen a und a_1 nach dem Modul p keine Kongruenz, so sagt man, die Kongruenz habe zwei Lösungen.

Allgemein also hat die Kongruenz

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

n Lösungen, wenn derselben nur Zahlen genügen, welche in den Kongruenzen:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv a \\ x \equiv a_1 \\ x \equiv a_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x \equiv a_{n-1} \end{array}\right\} \pmod{p}$$

enthalten sind, wobei zwischen a, a_1, $a_2 \cdots a_{n-1}$ keine Kongruenz nach dem Modul p besteht.

Lehrsatz 5. Eine Kongruenz

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

hat so viele Lösungen, als ihr Zahlen aus der Reihe

$$0, 1, 2, 3 \cdots p - 1$$

genügen, und sind

$$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$$

diese Zahlen, so sind:

$$x \equiv a_1, x \equiv a_2, x \equiv a_3 \cdots x \equiv a_n \pmod{p}$$

die Lösungen dieser Kongruenz.

Wir haben zu beweisen, daß einerseits außer den Zahlen

$$x \equiv a_1, x \equiv a_2, x \equiv a_3 \cdots x \equiv a_n \pmod{p}$$

keine andern der Kongruenz genügen, und daß andrerseits diese Zahlen $a_1, a_2, a_3, \cdot \cdot \cdot \cdot a_n$ nicht kongruent sind nach dem Modul p.

Nehmen wir an, außer den angegebenen Zahlen sei A noch eine Lösung der Kongruenz, ohne in einer der obigen Kongruenzen enthalten zu sein; es genügt dann auch jede Zahl der Kongruenz, die mit A nach p kongruent ist. Die kleinste positive Zahl dieser Lösungsreihe sei a, dann ist:

$$A \equiv a \pmod p$$

$$f(a) \equiv o \text{ (mod } p,$$

wobei a als kleinster positiver Wert von A unter den Zahlen

$$0, 1, 2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, p - 1$$

sein muß. Ist aber a in dieser Reihe und befriedigt $f(x) \equiv 0 \pmod p$, so muß a eine der Zahlen $a_1, a_2, a_3 \cdot \cdot \cdot \cdot a_n$ sein, weil nach Voraussetzung $a_1, a_2, a_3 \cdot \cdot \cdot \cdot a_n$ die einzigen Zahlen sind, die der gegebenen Kongruenz genügen. Daß aber a eine dieser Zahlen ist, ist deshalb unmöglich, weil nach Annahme A keiner der Kongruenzen:

$$x \equiv a_1, x \equiv a_2, x \equiv a_3 \cdot \cdot \cdot \cdot x \equiv a^n \text{ (mod (p)}$$

genügen soll. Es kann also in Tatsache keine Zahl außer a_1, $a_2, a_3 \cdot \cdot \cdot \cdot a_n$ geben, die die gegebene Kongruenz befriedigt.

Daß keine der Zahlen $a_1\ a_2\ a_3 \cdot \cdot \cdot \cdot a_n$ zu einer zweiten der Reihe nach p kongruent ist, läßt sich ebenfalls indirekt beweisen. Wir nehmen an, es sei

$$a_1 \equiv a_2 \pmod p.$$

Hieraus würde folgen

$$\frac{a_1 - a_2}{p} = N = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Dies ist aber unmöglich, da a_1 und a_2 kleiner sind als p, also auch der absolute Wert von $a_1 - a_2$ kleiner als p sein muß und folglich nicht durch p teilbar sein kann.

Lehrsatz 6. ***Die Kongruenz***

$$\boldsymbol{ax - b \equiv 0 \pmod p}$$

hat, wenn a und p relativ prim zueinander sind, immer eine, aber auch nur eine Lösung.

Aus obigem folgt, daß die Kongruenz soviele Lösungen hat, als es Zahlen in der Reihe

$$0, 1, 2, 3 \quad . \quad . \quad . \quad , \ p - 1$$

gibt, die der Kongruenz $f(x) = 0 \pmod{p}$ genügen, oder als es mit andern Worten Zahlen in der Reihe

$$a \cdot 0 - b,\quad a \cdot 1 - b,\ a \cdot 3 - b,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ a \cdot (p - 1) - b$$

gibt, die durch p teilbar sind. Diese Reihe ist eine arithmetische (siehe Band V) mit der Differenz a, die relativ prim zu p ist und mit der Gliederanzahl p; es wird also ***ein,*** aber auch nur ***ein*** Glied vorhanden sein, das durch p teilbar ist und die Kongruenz

$$ax - b \equiv 0 \pmod{p}$$

hat nur eine Lösung.

Wie man die Lösung einer Kongruenz

$$ax - b \equiv 0 \pmod{p}$$

oder:

$$ax \equiv b \pmod{p}$$

löst, haben wir bereits gesehen. Wir haben auch gefunden, daß eine Gleichung:

$$ax - py = b$$

lediglich nur eine andere Schreibweise für unsere Kongruenz ist, wenn man in y eine beliebige ganze Zahl voraussetzt; die Lösung der Kongruenz

$$ax - b \equiv 0 \pmod{p}$$

ist also auch eine Lösung der Gleichung.

Für die Lösung von linearen Kongruenzen sei aber nunmehr noch auf nachstehende Methode aufmerksam gemacht, soweit der Schüler noch nicht selbst darauf gekommen ist.

Wir haben oben den Fermatschen Satz bewiesen:

$$\boldsymbol{a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}}$$

worin p eine Primzahl ist, und haben auch die von Euler aufgestellte allgemeine Form des Fermatschen Satzes

$$\boldsymbol{a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{p}}$$

angegeben. Diese beiden Sätze lassen sich auch vorteilhaft zur Lösung von Kongruenzen verwenden.

Es sei zu lösen:

$$ax - b \equiv 0 \pmod{p}$$

p sei eine Primzahl und a nicht durch p teilbar.

Nach dem Fermatschen Satz ist:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

oder:

$$a^{p-1} \cdot b \equiv b \pmod{p}$$

oder:

$$a^{p-1} \cdot b - b \equiv 0 \pmod{p}$$

oder: $$a \cdot b \cdot a^{p-2} - b \equiv 0 \pmod{p}$$
hierzu: $$a \cdot x - b \equiv 0 \pmod{p}$$
gibt durch Vergleichung:
$$\boldsymbol{x = b \cdot a^{p-2}}$$
oder die vollständige Lösung
$$\boldsymbol{x \equiv b \cdot a^{p-2} \pmod{p}.}$$

Beispiel.
$$5x - 71 \equiv 0 \pmod{3}$$
$$x = 71 \cdot 5^{3-2} = 5 \cdot 71 = 355$$
$$x = 355 + 3n = 1 + 3n.$$

Ist p keine Primzahl, sondern zusammengesetzt, so erhalten wir nach der Eulerschen Form des Fermatschen Satzes
$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{p}$$
$$a \cdot b \cdot a^{\varphi(n)-1} \equiv b \pmod{p}$$
$$a \cdot b \cdot a^{\varphi(n)-1} - b \equiv 0 \pmod{p}$$
hierzu:
$$ax - b \equiv 0 \pmod{p}$$
gibt durch Vergleichung:
$$\boldsymbol{x = b \cdot a^{\varphi(n)-1}}$$
oder allgemein: $$\boldsymbol{x \equiv b \cdot a^{\varphi(n)-1} \pmod{p}.}$$

Die Formel zur Berechnung von $\varphi(n)$ haben wir ebenfalls bereits aufgestellt, es ist:
$$\boldsymbol{\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot}$$
wenn p, q, r · · · · die sämtlichen voneinander verschiedenen Primzahlen, die in n enthalten sind.

Beispiel. Es sei:
$$8x - 13 \equiv 0 \pmod{63}$$
Es ist:
$$x = 13 \cdot 8^{\varphi(63)-1} = 13 \cdot 8^{35}$$
oder allgemein: $$x \equiv 13 \cdot 8^{35} \pmod{63}$$
was noch weiter zu berechnen ist.

Der Schüler mag erkennen, wie mit Hilfe des Fermatschen Satzes die linearen Kongruenzen leicht und oft rasch gelöst werden können.

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch einiges anführen über Kongruenzen, bei denen Modul und Koeffizient der Unbekannten einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen.

Wir kennen bereits:

Lehrsatz 7. Die Kongruenz

$$ax - b \equiv 0 \pmod{p}$$

hat keine Lösung, wenn ein gemeinschaftlicher Teiler von a und p nicht auch ein Teiler von b ist.

Für den Fall, daß auch b diesen Teiler (oder diese Teiler) hat, haben wir:

Lehrsatz 8. Haben a und p den größten gemeinschaftlichen Teiler d und ist d auch zugleich Teiler von b, so hat die Kongruenz

$$ax - b \equiv 0 \pmod{p}$$

d Lösungen, welche enthalten sind in den Kongruenzen:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv \alpha \\ x \equiv \alpha + \frac{p}{d} \\ x \equiv \alpha + \frac{2p}{d} \\ \vdots \\ x \equiv \alpha + \frac{(d-1)p}{d} \end{array}\right\} \pmod{p}$$

worin:

$$0 < \alpha < \frac{p}{d}$$

und α eine Lösung der Kongruenz ist.

Beweis: Aus der Kongruenz:

$$ax - b \equiv 0 \pmod{p}$$

erhalten wir, wenn d der größte gemeinschaftliche Teiler von a und p ist:

$$\frac{a}{d}x - \frac{b}{d} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{d}\right)$$

worin:

$$\frac{a}{d},\ \frac{b}{d},\ \frac{p}{d}$$

ganze Zahlen sind. $\frac{a}{d}$ und $\frac{p}{d}$ sind relativ prim zueinander, denn sonst wäre ja d nicht der größte gemeinschaftliche Teiler. Wenn aber $\frac{a}{d}$ und $\frac{p}{d}$ relativ prim zueinander sind, so hat die Kongruenz immer eine Lösung. Möge nun α eine Zahl sein aus der Reihe

$$0, 1, 2, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{p}{d} - 1$$

und zugleich die Kongruenz

$$\frac{a}{x} x - \frac{b}{d} \equiv \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{d}\right)$$

befriedigen, so sind alle Lösungen dieser Kongruenz enthalten in der Kongruenz

$$x = \alpha \left(mod\ \frac{p}{d}\right).$$

Dieselben Zahlen, und aber auch nur diese befriedigen auch die Kongruenz:

$$a x - b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p),$$

da sich diese von der Kongruenz

$$\frac{a}{d} x - \frac{b}{d} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{d}\right)$$

ja nur durch einen gemeinschaftlichen Faktor unterscheidet, wodurch bekanntlich die Kongruenz in keiner Weise beeinflußt wird.

Somit sind alle Werte, welche die Kongruenz

$$a x - b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$$

befriedigen, enthalten in der Kongruenz;

$$x \equiv \alpha \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{d}\right).$$

Wir haben nun noch zu bestimmen, wie viele Zahlen aus der Reihe

$$0, 1, 2, 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, p - 1$$

die Kongruenz

$$a x - b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$$

befriedigen. Eingangs dieses Paragraphen haben wir für die die Zahlen, welche die Kongruenz

$$x \equiv \alpha \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{d}\right)$$

befriedigen, die allgemeine Form aufgestellt:

$$x = \alpha - N \frac{p}{d}.$$

Hierin darf nun α nicht größer werden als der Modul

$\frac{p}{d}$, muß aber größer sein als 0; wir erhalten also aus der Formel Werte von x, die zwischen 0 und p — 1 liegen, nur für:

$$N = 0, -1, -2, \cdot \cdot \cdot \cdot -(d-2), -(d-1)$$

folglich sind unter den Zahlen der Reihe

$$0, 1, 2, 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot p - 1$$

folgende d Zahlen:

$$\begin{gathered} \alpha \\ \alpha + \frac{p}{d} \\ \alpha + \frac{2p}{d} \\ \alpha + \frac{3p}{d} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \alpha + \frac{(d-1)p}{d} \end{gathered}$$

und auch nur diese enthalten Werte, welche die Kongruenz

$$x \equiv \alpha \left(\operatorname{mod} \frac{p}{d}\right)$$

und damit auch die gegebene Kongruenz

$$ax - b \equiv 0 \pmod{p}$$

befriedigen. Die Kongruenz besitzt also die allgemeinen Lösungen:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv \alpha \\ x &\equiv \alpha + \frac{2p}{d} \\ x &\equiv \alpha + \frac{p}{d} \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x &\equiv \alpha + \frac{(d-1)p}{d} \end{aligned}\right\} \pmod{p}$$

wie behauptet wurde.

So hat z. B. die Kongruenz:

$$15x - 9 \equiv 0 \pmod{12}$$

drei Lösungen. Um diese zu bestimmen, dividieren wir durch 3 und erhalten

$$5x - 3 \equiv 0 \pmod 4$$

Nach dem allgemeinen Fermatschen Satz also:

$$x = 3 \cdot 5^{2^2 \cdot \frac{2-1}{2} - 1} \pmod 4$$

allgemein: $x \equiv 15 \pmod 4$

oder: $x \equiv 3 \pmod 4$

Daraus ergeben sich für die gegebene Kongruenz:

$$15x - 9 \equiv 0 \pmod{12}$$

die Lösungen:

$$x = 3 + 12n$$
$$x = 7 + 12n$$
$$x = 11 + 12n$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \\ x &\equiv 7 \\ x &\equiv 11 \end{aligned}\right\} \pmod{12}$$

Weitere Beispiele möge und der Schüler selbst lösen; wir wollen nunmehr zu den Kongruenzen höheren Grades übergehen.

§ 6.

Über Kongruenzen höheren Grades.

Wir betrachten hier nur Kongruenzen, deren Modul eine Primzahl ist. Die allgemeine Form einer Kongruenz höheren Grades ist:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m \equiv 0 \pmod p,$$

worin wir also p als Primzahl voraussetzen.

Ist in dem Ausdruck links ein Koeffizient durch p teilbar, so kann offenbar ein solches Glied immer weggelassen werden. Denn wäre z. B. A_2 durch p teilbar, so wäre:

$$A_2 \equiv 0 \pmod p$$

folglich auch: $A_2 \cdot x^{m-2} \equiv 0 \pmod p$

Subtrahieren wir aber diese Kongruenz von der gegebenen, so befreien wir diese von dem Glied $A_2 x^{m-2}$, wodurch unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir nehmen also für das folgende an, daß solche Glieder bereits entfernt sind, so daß keiner der Koeffizienten durch p teilbar ist. Der Koeffizient der höchsten Potenz x^m ist A_0; da dieser relativ prim ist zum Modul, so wird sich nach dem vorigen Paragraphen stets eine Zahl α so bestimmen lassen, daß die Kongruenz gilt:

$$A_0 \cdot \alpha - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

Multiplizieren wir nun diese Kongruenz mit

$$\begin{array}{l} A_1 x^{m-1} \\ A_2 x^{m-2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{m-1} x \\ A_m \end{array}$$

so erhalten wir die entsprechenden Kongruenzen:

$$\left.\begin{array}{r} A_0 A_1 \alpha \cdot x^{m-1} - A_1 x^{m-1} \equiv 0 \\ A_0 A_2 \alpha x^{m-1} - A_2 x^{m-2} \equiv 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_0 A_{m-1} \alpha x^{m-1} - A_{m-1} x^{m-1} \equiv 0 \\ A_0 A_m \alpha - A_m \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{p}$$

Addieren wir nun all diese Kongruenzen zu der gegebenen:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdot\ \cdot\ \cdot + A_{m-1} x^{m-1} + A_m \equiv 0 \pmod{p}$$

so erhalten wir:

$$A_0 x^m + A_0 A_1 \alpha \cdot x^{m-1} + A_0 A_2 \alpha x^{m-2} + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot + A_0 A_{m-1} \alpha x^{m-1} + A_0 A_m \alpha \equiv 0 \pmod{p}.$$

Nun ist aber A relativ prim zum Modul p, wir dürfen also nach Satz 7 in § 1 die Kongruenz durch A_0 dividieren und es kommt:

$$x^m + A_1 \alpha \cdot x^{m-1} + A_2 \alpha \cdot x^{m-2} + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot + A_{m-1} \cdot \alpha x + A_m \alpha \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wir haben hiermit den Nachweis erbracht, *daß man eine solche Kongruenz immer so umformen kann, daß der Koeffizient der höchsten Potenz Eins ist. Unsere ursprüngliche Kongruenz hat aber dieselben Lösungen, wie die, auf die wir sie redu-*

ziert haben, wie leicht einzusehen ist. Die beiden Kongruenzen unterscheiden sich also nur in der Form; wir wählen aber die reduzierte Form, weil sie für unsere Betrachtungen günstiger ist.

Beispiel. Es sei die Kongruenz:

$$2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 7x + 11 \equiv 0 \pmod{13}$$

in eine andere umzuformen, in der x^4 den Koeffizient 1 hat.

Wir haben eine Zahl α zu bestimmen, so daß

$$2 \cdot \alpha - 1 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Eine solche Zahl ist: $\alpha = 7$

also: $$2 \cdot 7 - 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

Multiplizieren wir diese Kongruenz mit den übrigen Gliedern, so kommt:

$$2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot x^3 - 3x^3 \equiv 0 \pmod{13}$$
$$2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot x^2 - 5x^2 \equiv 0 \pmod{13}$$
$$2 \cdot 7 \cdot 5x - 7x \equiv 0 \pmod{13}$$
$$2 \cdot 7 \cdot 11 - 11 \equiv 0 \pmod{13}$$

Addieren wir nun diese Kongruenzen zu der gegebenen, so kommt:

$$2x^4 + 2 \cdot 7 \cdot 3x^3 + 2 \cdot 7 \cdot 5x^2 + 2 \cdot 7 \cdot 7x + 2 \cdot 7 \cdot 11 \equiv 0 \pmod{13}$$

oder durch 2 dividiert:

$$x^4 + 21x^3 + 35x^2 + 49x + 77 \equiv 0 \pmod{13};$$

in dieser hat x^4 den verlangten Koeffizienten 1.

Wir haben ferner den

Lehrsatz 1. Ist p eine Primzahl, so kann die Kongruenz m^{ten} Grades

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m \equiv 0 \pmod{p}$$

nicht mehr als m Lösungen haben.*)

Für n = 1 haben wir die Richtigkeit dieses Satzes bereits bewiesen. Um nun den Satz für jeden beliebigen Grad zu beweisen, zeigen wir, daß derselbe für jede Kongruenz m^{ten} Grades gelten muß, wenn er für Kongruenzen vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade erwiesen ist.

Den Beweis führen wir indirekt. Wir nehmen an, daß die Kongruenz:

*) Die Koeffizienten A_1, A_2 etc. sind natürlich hier andere, als die in der Form $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2}$ etc.

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdot \cdot \cdot \cdot + A_{m-1} x + A_m \equiv 0 \pmod{p}$$

kann nur dann mehr als m Lösungen haben, wenn dieselbe aus der Reihe

$$0, 1, 2, 3, \cdot \cdot \cdot \cdot, p - 1$$

mehr als m Zahlen, nach unserer Annahme also $m + 1$ Zahlen, befriedigen. Diese $m + 1$ Zahlen seien:

$$a_0, a_1, a_2, a_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot a_m.$$

Wir nehmen aus diesen eine beliebige, etwa a_0 heraus und dividieren den Ausdruck links durch

$$x - a_0$$

und erhalten hierdurch offenbar einen Quotienten von der Form:

$$x^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdot \cdot \cdot \cdot + Qx + S$$

und hierzu noch einen gewissen Rest R, so daß wir unsere Kongruenz schreiben können:

$$(x - a_0)(x^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdot \cdot \cdot \cdot + Qx + S) + R \equiv 0 \pmod{p}$$

Setzen wir hierin:

$$x = a_0,$$

so ergibt sich

$$R \equiv 0 \pmod{p}$$

Diese von x **vollständig unabhängige** Kongruenz subtrahieren wir von der letzten Kongruenz und erhalten unsere ursprüngliche Kongruenz in der Form:

$$(x - a_0) x^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + Qx + S) \equiv 0 \pmod{p}$$

Hat nun eine Kongruenz von der Form:

$$x^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdot \cdot \cdot \cdot + Qx + S \equiv 0 \pmod{p}$$

nicht mehr als $m - 1$ Lösungen, so können nicht alle aus der Reihe

$$0, 1, 2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, p - 1$$

entnommenen m-Zahlen die Kongruenz befriedigen.

Es möge nun a_1 diejenige Zahl der Reihe

$$a_0, a_1, a_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot a_m$$

sein, die der Kongruenz nicht genügt. Setzen wir nun diese Zahl in den linken Ausdruck der obigen Kongruenz **ein**, so wird:

$$a_1^{m-1} + B a_1^{m-2} + C a_1^{m-3} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; Q a_1 + S$$

eine Zahl darstellen, welche durch p nicht teilbar ist, welche also, da p eine Primzahl ist, zu p relativ prim ist. Dasselbe müssen wir aber auch über

$$a_1 - a_0$$

sagen, denn beide sind nicht größer als p — 1 und immer größer als 0, sie können also in ihrer Differenz jedenfalls keine durch p teilbare Zahl darstellen, so daß also sowohl

$$a_1 - a_0$$

wie auch

$$a_1^{m-1} + B a_1^{m-2} + O a_1^{m-3} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + Q a_1 + S$$

zwei Zahlen darstellen, die beide relativ prim sind zu p; mithin ist aber auch ihr Produkt

$$(a_1 - a_0)\,(a_1^{m-1} + B a_1^{m-2} + C a_1^{m-3} + \cdots + Q a_1 + S)$$

relativ prim zu p. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß a_1 die Kongruenz befriedigt; unsere Annahme, die Kongruenz m^{ten} Grades könne mehr als m Lösungen haben, muß also falsch sein. Aus diesem Satz ergibt sich der

Lehrsatz 1a. Sind nicht alle Koeffizienten der allgemeinen Kongruenz m^{ten} Grades:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots \cdots + A_{m-1} x + A_m \equiv 0 \pmod p$$

durch p teilbar, so kann die Kongruenz nicht mehr als m Lösungen haben.

Wären alle Koeffizienten durch p teilbar, so könnten alle Glieder eliminiert werden und die Kongruenz würde sich auf die Identität reduzieren:

$$0 \equiv 0 \pmod p$$

Für den Fall aber, daß nicht alle Koeffizienten durch p teilbar sind, werden wir dieselbe auf eine Form reduzieren, in der kein Koeffizient mehr durch p teilbar ist, und deren höchster Exponent höchstens m sein kann. Wir können aber dann der Kongruenz eine solche Form geben, daß die m^{te} Potenz von x den Koeffizienten 1 hat und diese kann, wie wir oben bewiesen haben, nie mehr als m Lösungen haben.

Lehrsatz 2. Satz von Wilson:

Ist p eine Primzahl, so ist:

$$\boldsymbol{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (p-1) + 1 \equiv 0 \pmod p.}$$

Bemerkung. Ein Produkt von der Form $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ schreibt man auch abgekürzt durch

$$n!$$

gelesen „n Faccultät“, so daß der Wilson'sche Satz auch geschrieben werden kann:

$$\boldsymbol{(p - 1)! + 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p).}$$

Aus der Tatsache, daß die Kongruenz:

$$ax - b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$$

eine und nur eine Lösung x aus der Reihe der Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot p - 1$$

hat, folgt der spezielle Satz:

Ist a eine durch p nicht teilbare Zahl, so gibt es immer eine Zahl a' aus der Reihe

$$1,\ 2,\ 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot p - 1$$

die der Kongruenz

$$a \cdot a' - 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$$

oder:

$$a \cdot a' \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p)$$

genügt.

Diese Zahl a' ist offenbar dann und nur dann gleich a, wenn $a \equiv 1$ oder $a \equiv -1$ oder, was dasselbe ist: $a \equiv p - 1$ ist; denn:

$$a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$$

ist nur dann durch p teilbar, wenn $a - 1$ oder $a + 1$ durch p teilbar ist.

Die Zahlen $2,\ 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot p - 2$ zerfallen daher in $\frac{p-3}{2}$ Paare von Zahlen a und a', deren Produkt mit 1 kongruent ist; das Produkt der beiden übrigen Zahlen, nämlich 1 und $p - 1$, ist mit -1 kongruent, folglich ist das Produkt

$$\boldsymbol{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots (p - 1) \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ p)}$$

oder:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots (p - 1) + 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$$

was auch für $p = 2$ richtig ist, weil $+1 \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ 2)$ ist.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Ist p eine natürliche Zahl, und $(p - 1)! + 1$ durch p teilbar, so ist p eine Primzahl.

Der Satz von Wilson gibt uns also ein Mittel an die Hand, eine Primzahl zu erkennen.

Aus dem Wilson'schen Satz ergibt sich ferner folgendes:

Ist p wieder eine ungerade Primzahl, so gibt es zu jeder Zahl a der Reihe

$$1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots\cdots p - 1$$

eine Zahl a'', die der Kongruenz

$$a \cdot a'' \equiv -1 \pmod{p}$$

genügt. Hat nun die Kongruenz:

$$x^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

keine Lösung, so kann niemals a'' = a sein, und die Zahlen 1, 2, 3 ⋯⋯ p — 1 zerfallen in $\frac{p-1}{2}$ Paare, deren Produkt nach dem Modul p mit — 1 kongruent ist, daher ist:

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

und nach dem Wilsonschen Satz auch:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p},$$

so daß also:

$$\frac{p-1}{2}$$

eine ungerade Zahl sein muß.

Ist aber die Kongruenz:

$$x^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

lösbar und ist $x = \alpha$ eine Lösung, so ist (x — a) oder (x + a) durch p teilbar, also:

$$x \equiv +\alpha \text{ oder } x \equiv -\alpha.$$

Es gibt also zwei und nur zwei Lösungen aus der Reihe

$$1, 2, 3 \cdots\cdots\cdots p - 1,$$

und deren Produkt:

$$\alpha \cdot (p - \alpha) \text{ ist} \equiv -\alpha^2 \equiv 1.$$

Die Zahlen 1, 2, 3 ⋯⋯⋯, p — 1 zerfallen also jetzt in $\frac{p-3}{2}$ Paare von Zahlen a und a'', deren Produkt mit - 1 kongruent ist und es bleiben zwei Zahlen α und p — α übrig, für die

$$\alpha \cdot (p - \alpha) \equiv +1 \pmod{p}$$

ist. Bilden wir wieder das Produkt, so kommt:

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}} \equiv -(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

es muß also:

$$\frac{p-1}{2}$$

eine gerade Zahl sein.

Alle ungeraden Zahlen p, für die $\frac{p-1}{2}$ eine gerade Zahl ist, können auf die Form

$$4n + 1$$

gebracht werden, während alle ungeraden Zahlen, für die $\frac{p-1}{2}$ eine ungerade Zahl ist, in der Form

$$4n + 3 \text{ oder } 4n - 1$$

enthalten sind.

Für die Primzahlen, die zu der ersten Klasse gehören, ist nun die Kongruenz:

$$x^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

lösbar, für die der zweiten Klasse aber nicht; dies ergibt den

Lehrsatz 3. (Euler.) Ist p eine Primzahl von der Form $4n + 1$, so kann man für x eine solche ganze Zahl setzen, daß $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ wird, während dies für eine Primzahl von der Form $4n - 1$ nicht möglich ist.

Die Lösung der Kongruenz

$$x^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

für die Primzahlen der ersten Klasse gestaltet sich nach dem Wilson'schen Satz einfach.

Es ist:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \equiv -(p-1) \\ 2 \equiv -(p-2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \bmod p.$$

$$\frac{p-1}{2} \equiv -\left(p - \frac{p-1}{2}\right)$$

Ist also: $p = 4n + 1$

so zerfallen die Zahlen des Produktes $(p-1)!$ in zwei Hälften:

$$1, 2, \cdots\cdots 2n$$

und:

$$2n+1,\ 2n+2, \cdots\cdots p-1$$

in der Art, daß das Produkt der ersten Reihe mit dem der zweiten kongruent ist.

Nach dem Wilsonschen Satz ist daher:

$$(p-1)! \equiv \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

also:

$$x \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p$$

Ist z. B. $p = 17$, so ist:

$$x \equiv 8! \pmod{17}$$

$$x \equiv 40\,320 \pmod{17}$$

$$x \equiv 13 \pmod{17}$$

also muß:

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{17}$$

und es ist tatsächlich:

$$169 + 1 \equiv 0 \pmod{17}$$

Lehrsatz 4. Ist p eine Primzahl, so kann die Kongruenz m^{ten} Grades

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \cdots\cdots + A_{m-1} x + A_m \equiv 0 \pmod p$$

immer durch eine Kongruenz $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$B_1 x^{p-1} + B_2 x^{p-2} + \cdots\cdots + B_{p-1} x + B^p \equiv 0 \pmod p$$

ersetzt werden, wobei das Polynom

$$B_1 x^{p-1} + B_2 x^{p-2} + \cdots\cdots + B_{p-1} x + B_p$$

der Rest ist, welcher bei der Division des gegebenen Polynoms

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + A_{m-1} x + A_m$$

durch: $\qquad x^p - x$

erhalten wird.

Dividiert man

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + A_{m-1} x + A_m$$

durch $\qquad x^p - x,$

so werden Quotient und Rest ganze Funktionen von x mit ganzzahligen Koeffizienten sein; der Grad des Restes wird offenbar nicht größer sein als $p - 1$ und wir bezeichnen ihn mit:

$$B_1 x^{p-1} + B_2 x^{p-2} + \cdots\cdots + B_{p-1} x + B_p$$

und den Quotienten mit $F(x)$, so daß:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + A_{m-1} x + A_m = F(x)(x^p - x) + B_1 x^{p-1} + B_2 x^{p-2} + \cdots\cdots + B_{p-1} x + B_p.$$

Nun ist offenbar der Ausdruck

$$x^p - x$$

für beliebige Werte von x kongruent Null nach p, denn schreibt man

$$x^p - x = x(x^{p-1} - 1$$

so erkennt man, daß, wenn x ein Vielfaches von p ist, der erste Faktor durch p teilbar ist, und wenn nicht, so genügt der zweite der Kongruenz:

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Hieraus folgt, daß für beliebige Werte für x:

$$F(x)(x^p - x) \equiv 0 \pmod{p}$$

und hieraus folgt, daß ich von der gegebenen Kongruenz:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + A_{m-1} x + A_m \equiv 0 \pmod{p}$$

die Kongruenz $F(x)(x^p - x) \equiv 0 \pmod{p}$
subtrahieren darf, ohne die Kongruenz zu beeinträchtigen. Es ergibt sich also:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + A_{m-1} x + A_m - F(x)(x_p - x) \equiv 0 \pmod{p},$$

der Ausdruck links reduziert sich auf:

$$B_1 x^{p-1} + B^2 x^{p-2} + \cdots\cdots + B_{p-1} x + B_p$$

so daß wir erhalten:

$$\boldsymbol{B_1 x^{p-1} + B_2 x^{p-2} + \cdots\cdots + B_{p-1} x + B_p \equiv 0 \pmod{p},}$$

was zu beweisen war.

So können wir z. B.

$$x^5 + x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

auf den $3 - 1 = 2^{\text{ten}}$ Grad reduzieren.

Es kommt:

$$(x^5 + x^2 - 1) : (x^3 - x) = x^2 + 1$$

$$\begin{array}{l}
x^2 \mp x^3 \\
+ \quad - \\
\hline
+ x^3 + x^2 - 1 \\
\quad x^3 - x \\
\quad - \quad + \\
\hline
\qquad x^2 + x - 1.
\end{array}$$

Der Rest ist $x^2 + x - 1$, so daß wir die gegebene Kongruenz ersetzen können durch:

$$x^2 + x - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Lehrsatz 5. Hat die Kongruenz:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots A_{m-1} - x + A_m \equiv 0 \pmod{p}$$

m Lösungen, so sind die Koeffizienten in dem Reste der Division von $x^p - x$ durch

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m$$

alle durch p teilbar.

Bezeichnen wir den Quotienten von $x^p - x$ durch

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m$$

mit $\Phi(x)$ und den Rest mit $\varphi(x)$, so ist:

$$x^p - x - \Phi(x)(x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m) = \varphi(x).$$

Bilden wir nun die Kongruenz:

$$x^p - x - \Phi(x)(x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A^m) \equiv 0 \pmod{p},$$

so läßt sich leicht zeigen, daß diese unter der gemachten Voraussetzung nicht weniger als m Lösungen hat; denn der Ausdruck

$$x^p - x$$

ist für beliebige Werte von x kongruent Null nach dem Modul p und das Produkt:

$$\Phi x(x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A^m)$$

wird für alle die Werte kongruent Null nach p, welche die Kongruenz:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m \equiv 0 \pmod{p}$$

befriedigen. Diese Kongruenz hat aber nach Voraussetzung m Lösungen, somit hat die Kongruenz:

$$p^p - x - \Phi(x)(x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m) \equiv 0 \pmod{p}$$

mindestens m Lösungen. Diese Kongruenz ist aber, da

$$x^p - x - \Phi(x)(x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m) = \varphi(x)$$

zurückführbar auf:

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Nun ist aber $\varphi(x)$ sicherlich von kleinerem Grade als vom m^{ten}, da es ja den Rest von $x^p - x$ durch

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A^{m-1} x + A^m$$

darstellt, es müssen also nach Lehrsatz 1a alle Koeffizienten von $\varphi(x)$ durch p teilbar sein.

Von diesem Lehrsatz gilt auch die Umkehrung:

Lehrsatz 5a. Sind in dem Reste der Division von $x^p - x$ durch:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A^{m-1} x + A_m$$

alle Koeffizienten Vielfache von p, so hat die Kongruenz

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m \equiv 0 \pmod{p}$$

m Lösungen.

Den Beweis möge der Schüler selbst ableiten, da er ihm nach Vorausgegangenem nicht schwer fallen kann.

Wir haben durch diese beiden Sätze ein Kriterium, ob eine Kongruenz m^{ten} Grades m Lösungen hat oder nicht; man dividiert

$$x^p - x$$

durch die linke Seite der Kongruenz und wenn dann die Koeffizienten in dem sich ergebenden Reste alle Vielfache von p sind, so hat die Kongruenz m Lösungen; sind aber diese Koeffizienten nicht alle durch p teilbar, so hat auch die Kongruenz keine m Lösungen.

§ 7.

Kongruenzen zweiten Grades.

Die allgemeine Form einer Kongruenz zweiten Grades ist:

$$\boldsymbol{a x^2 + b x + c \equiv 0 \pmod{p}}.$$

Diese Kongruenz kann man in zwei Fällen auf eine Kongruenz ersten Grades reduzieren, und zwar:

1. wenn der Modul $p = 2$. Denn nach dem Lehrsatz 4 des vorigen Paragraphen ist die Reduktion einer Kongruenz m^{ten} Grades auf eine solche $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades immer möglich, wenn p eine Primzahl ist.

Man hat in diesem Falle die linke Seite durch

$$x^2 - x$$

zu dividieren und erhält:

$$\begin{array}{l} (ax^2 + bx + c) : (x^2 - x) = a, \\ \underline{\begin{array}{l} ax^2 \mp ax \\ - \quad + \end{array}} \\ ax + bx + c, \end{array}$$

also erhält man die identische Kongruenz vom ersten Grad:

$$ax + bx + c \equiv 0 \pmod 2$$

oder:

$$(a + b)\,x + c \equiv 0 \pmod 2.$$

2. Kann die Kongruenz ersten Grades auf eine solche ersten Grades zurückgeführt werden, wenn in der Form

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$$

a ein Multiplum von p ist; denn in diesem Fall ist:

$$a \equiv 0 \pmod p$$

oder

$$ax^2 \equiv 0 \pmod p$$

und diese Kongruenz von der gegebenen subtrahiert:

$$ax^2 + bx + c - ax^2 \equiv 0 \pmod p$$

$$bx + c \equiv 0 \pmod p.$$

Wir wollen nun den Fall betrachten, daß weder $p = 2$ noch a ein Multiplum von p ist.

Da p eine ungerade Primzahl ist und a kein Vielfaches von p ist, so wird auch 4 a relativ prim zu p sein und es wird infolgedessen die Kongruenz:

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$$

und die Kongruenz:

$$4a\,(ax^2 + bx + c) \equiv 0 \pmod p$$

identisch sein. Die letzte Kongruenz können wir aber schreiben

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac \equiv 0 \pmod p$$

oder:

$$(2ax + b)^2 \equiv b^2 - 4ac \pmod p$$

Wir setzen nun: $2ax + b = z$

und erhalten: $z^2 \equiv b^2 - 4ac \pmod p$

Die Lösung dieser Kongruenz wird nach dem, was wir über die Lösungen von Kongruenzen in der Form

$$f(x) \equiv 0 \pmod p$$

gesagt haben, durch eine oder mehrere Kongruenzen in der Form:

$$z \equiv \alpha \pmod p$$

dargestellt werden; wir werden also zur Bestimmung von x nur noch die Kongruenz e r s t e n Grades:

$$2ax + b \equiv \alpha \pmod{p}$$

zu lösen haben. Die ganze Aufgabe dreht sich also darum, die Kongruenz:

$$z^2 \equiv b^2 - 4ac \pmod{p}.$$

zu lösen.

Wir setzen der Kürze halber:

$$b^2 - 4ac = q$$

also:

$$z^2 \equiv q \pmod{p}$$

Aus dieser Form erkennen wir sofort, daß die Kongruenz, wenn:

$$q \equiv 0 \pmod{p}$$

durch:

$$z \equiv 0 \pmod{p}$$

befriedigt wird und daß dies die e i n z i g m ö g l i c h e Lösung ist, denn sobald die Kongruenz

$$q \equiv 0 \pmod{p}$$

besteht, drückt die Kongruenz:

$$z^2 \equiv q \pmod{p}$$

nichts anderes aus, als daß z^2 durch p teilbar ist; da aber p als Primzahl nicht durch das Quadrat einer Zahl teilbar sein kann, so muß z selbst durch p teilbar sein nach dem Satz: Ist b ein Teiler des Quadrats einer Zahl a, ohne selbst durch das Quadrat irgend einer Zahl teilbar zu sein, so ist b auch Teiler von a.

Wir merken uns also:

I s t i n d e r K o n g r u e n z:

$$z^2 \equiv q \pmod{p}$$

q k o n g r u e n t N u l l n a c h p, s o i s t:

$$z \equiv 0 \pmod{p}$$

d i e ***einzige Lösung*** d e r g e g e b e n e n K o n g r u e n z.

Ist q nicht kongruent Null nach p, so gilt der

Lehrsatz: I s t q n i c h t k o n g r u e n t N u l l n a c h d e m M o d u l p, s o h a t d i e K o n g r u e n z

$$z^2 \equiv q \pmod{p}$$

e n t w e d e r g a r k e i n e o d e r z w e i L ö s u n g e n.

Beweis: Es möge a diejenige Zahl aus der Reihe

$$1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots p - 1$$

sein, die der Kongruenz Genüge leistet; diese Zahl a kann nicht Null sein, denn sonst würde die Substitution $z = 0$ die Kongruenz

$$0 \equiv q \pmod{p}$$

ergeben, was gegen unsere Voraussetzung ist. Wenn aber die Kongruenz durch a befriedigt wird, so muß dieselbe auch durch p — a befriedigt werden, weil $(p - a)^2 = p^2 - 2ap + a^2$ kongruent a^2 nach p ist. Es ist also p — a immer eine zweite Lösung der Kongruenz, wenn p — a unter den Zahlen 1, 2, 3 . . . . . . p — 1 enthalten und von a verschieden ist. Das Erstere folgt daraus, daß a nicht größer als p und nicht kleiner als 1 ist, während p — a von a verschieden sein muß, weil sonst:

$$p - a = a$$
$$p = 2a$$

sein müßte, was unmöglich ist, da p eine *ungerade Primzahl* ist. Da nun *eine* Lösung immer eine zweite bedingt, außerdem aber eine Kongruenz zweiten Grades nicht mehr als zwei Lösungen haben kann, so hat also die Kongruenz:

$$z^2 \equiv q \pmod p$$

für den Fall, daß q nicht kongruent 0 nach p ist, *zwei oder gar keine Lösung*. Wir wollen nun zusehen, ob wir nicht ein Kriterium aufstellen können, nachdem wir entscheiden können, ob die Kongruenz:

$$z^2 - q \equiv 0 \pmod p$$

zwei Lösungen oder gar keine hat.

Nach den Sätzen in § 6 finden wir leicht ein solches Kriterium. Wir haben den Rest zu bestimmen, welcher bei der Division:

$$\frac{z^p - z}{z^2 - q}$$

bleibt. Um diesen leichter bestimmen zu können, schreiben wir:

$$z_p - z = z_p - z \cdot q^{\frac{p-1}{2}} + z\, q^{\frac{p-1}{2}} - z = z\left[(z^2)^{\frac{p-1}{2}} - q^{\frac{p-1}{2}}\right] + z\left[q^{\frac{p-1}{1}} - 1\right].$$

In diesem Ausdruck ist:

$$(z^2)^{\frac{p-1}{2}} - q^{\frac{p-1}{2}}$$

durch: $$z^2 - q$$

teilbar, es wird also:

$$z\left[q^{\frac{p-1}{2}} - 1\right]$$

der gesuchte Rest sein.

Nach Lehrsatz 5a in § 6 schließen wir also, daß die Kongruenz:

$$z^2 - q \equiv 0 \pmod p$$

zwei Lösungen hat, wenn:

$$q^{\frac{p-1}{2}} - 1$$

ein Vielfaches von p ist, oder wenn nach unserer Schreibweise in Kongruenzform:

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$$

ist. Sollte aber diese Kongruenz nicht bestehen, so hat die gegebene Kongruenz:

$$z^2 \equiv q \pmod p$$

gar keine Lösung.

Wir fassen diese Tatsache in dem Satz zusammen:

Die Kongruenz:

$$z^2 \equiv q \pmod p$$

hat zwei Lösungen, wenn die Kongruenz besteht:

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p;$$

besteht aber diese Kongruenz nicht, so hat die gegebene Kongruenz gar keine Lösung.

Es sei zu untersuchen, ob folgende Kongruenzen Lösungen haben:

1) $z^2 \equiv 2 \pmod 5$
2) $z^2 \equiv 2 \pmod 7$
3) $z^2 \equiv 2 \pmod{11}$
4) $z^2 \equiv 3 \pmod 5$
5) $z^2 = 3 \pmod 7$
6) $z^2 \equiv 3 \pmod{11}$
7) $z^2 \equiv 5 \pmod 7$
8) $z^2 \equiv 5 \pmod{11}$
9) $z^2 \equiv 7 \ (\mathrm{mnd}\ 11)$

Es ist:

$2^{\frac{5-1}{2}} = 4$ (4 ist nicht kongruent 1 nach 5)

$2^{\frac{7-1}{2}} = 3$ (8 ist kongruent 1 nach 7)

$2^{\frac{11-1}{2}} = 32$ (32 ist nicht kongruent 1 nach 11)

$4^{\frac{5-1}{2}} = 9$ (9 ist nicht kongruent 1 nach 5)

$3^{\frac{7-1}{2}} = 27$ (27 ist nicht kongruent 1 nach 7)

$3^{\frac{11-1}{2}} = 343$ (343 ist nicht kongruent 1 nach 11).

$5^{\frac{7-1}{2}} = 125$ (125 ist nicht kongruent 1 nach 7)

$5^{\frac{11-1}{2}} = 3125$ (3125 ist kongruent 1 nach 11)

$7^{\frac{11-1}{2}} = 16807$ (16807 ist nicht kongruent 1 nach 11).

Von den gegebenen Kongruenzen haben also nur die zweite und die achte zwei Lösungen; die Lösungen erhält man durch Probieren:

$$z^2 \equiv 2 \pmod 7$$
$$z \equiv 3 \pmod 7$$
$$z \equiv 4 \pmod 7$$

und:

$$z^2 \equiv 5 \pmod{11}$$
$$z \equiv 4 \pmod{11}$$
$$z \equiv 7 \pmod{11}$$

Sind p und q keine großen Zahlen, so ist leicht zu berechnen, ob die Kongruenz

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$$

besteht oder nicht. Sind jedoch p und q große Zahlen, so wird diese Untersuchung beschwerlich und wir wollen nun zusehen, ob man nicht die Existenz dieser Kongruenz nachweisen kann, ohne den Wert von $q^{\frac{p-1}{2}}$ zu berechnen.

Wenn q und p relativ prim sind und p eine ungerade Primzahl ist, und dies haben wir vorausgesetzt, so muß offenbar eine der beiden Kongruenzen bestehen:

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p).$$

oder:

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p).$$

Denn bestände keine dieser Kongruenzen, so müßte sowohl:

$$q^{\frac{p-1}{2}} - 1$$

wie auch:

$$q^{\frac{p-1}{2}} + 1$$

relativ prim zu p sein, also auch ihr Produkt:

$$\left(q^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(q^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = q^{p-1} - 1,$$

was aber unmöglich ist, da nach dem Fermatschen Satz:

$$q^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p$$

ist. Es muß also eine der beiden Kongruenzen:

$$\left.\begin{array}{l} q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \\ q^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \end{array}\right\} \pmod p$$

bestehen; beide gleichzeitig können nicht bestehen, denn man erhielte hieraus:

$$1 \equiv -1 \pmod p$$

was bei einer ungeraden Primzahl unmöglich ist.

Wir haben also:

$$\boldsymbol{q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod p.}$$

Wird nun diese Kongruenz mit dem Zeichen + befriedigt, so hat die Kongruenz:

$$z^2 \equiv 9 \pmod p$$

zwei Lösungen und man nennt q einen quadratischen Rest der Zahl p; wird die Kongruenz aber mit dem Zeichen — befriedigt, so hat die Kongruenz:

$$z^2 \equiv q \pmod p$$

keine Lösung und man nennt q einen quadratischen Nichtrest der Zahl p. Man ist nun übereingekommen, anstatt zu schreiben:

„p und q befriedigen die Kongruenz

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$$

und die Kongruenz:

$$z^2 \equiv q \pmod p$$

hat daher zwei Lösungen“, kurz das Symbol zu gebrauchen:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = 1$$

und im entgegengesetzten Falle:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = -1.$$

Nach unserm obigen Beispiel wäre also zu schreiben:

$$\left(\frac{2}{7}\right) = 1$$

und:

$$\left(\frac{5}{11}\right) = 1$$

oder man wird sagen:

„Die Zahl 2 ist ein quadratischer Rest von 7“,
und: „Die Zahl 5 ist ein quadratischer Rest von 11“.

Dagegen wird z. B. sein:

$$\left(\frac{2}{11}\right) = -1$$

ebenso:

$$\left(\frac{3}{5}\right) = -1$$

oder:

$$\left(\frac{3}{11}\right) = -1 \text{ etc.}$$

oder man wird sagen:

„Die Zahl 2 und ebenso die Zahl 3 ist ein quadratischer Nichtrest von 11“ etc.

Umgekehrt werden wir aus obigen Ausdrucksweisen schließen, daß die Kongruenz:

$$z^2 \equiv 2 \pmod 7$$

zwei Lösungen hat, die Kongruenz

$$z^2 \equiv 3 \pmod{11}$$

aber keine.

Wir wollen nunmehr die Eigenschaften des Symbols $\left(\frac{q}{p}\right)$ etwas näher betrachten.

Lehrsatz. Das Symbol $\left(\frac{1}{p}\right)$ hat den Wert 1 und das Symbol $\left(\frac{-1}{p}\right)$ den Wert $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

Wir wissen, das Symbol $\left(\frac{q}{p}\right)$ befriedigt stets die Kongruenz:

$$q^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{q}{p}\right) \pmod{p}.$$

Setzen wir hierin: $q = 1$ und $q = -1$, so erhalten wir:

$$1 \equiv \left(\frac{1}{p}\right) \text{ und: } (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{-1}{p}\right) \bmod p.$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{p}\right) &\equiv 0 \\ (-1)^{\frac{p-1}{2}} - \left(\frac{-1}{p}\right) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{p}.$$

Der Zahlwert beider Symbole ist aber 1, es müssen also:

$$\left(\frac{1}{p}\right) = +1$$

und:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

sein, wenn nicht die beiden Differenzen 2 resp. — 2 werden sollen. Nun kann aber weder 2 noch — 2 kongruent Null nach dem Modul p sein, da p eine von 2 verschiedene Primzahl ist, es muß also wirklich:

$$\left(\frac{1}{p}\right) = 1$$

und:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

sein.

Lehrsatz. Setzt man das Produkt

$$q_1 \cdot q_2 \cdot q^3 \cdot \dots\dots \cdot qn = Q,$$

so ist:

$$\left(\frac{Q}{p}\right) = \left(\frac{q_1}{p}\right) \cdot \left(\frac{q_2}{p}\right) \cdot \left(\frac{q_3}{p}\right) \cdot \dots\dots \left(\frac{q_n}{p}\right).$$

Die obigen Symbole befriedigen die Kongruenzen:

$$\left.\begin{array}{l}
Q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{Q}{p}\right) \\
q_1^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{q_1}{p}\right) \\
q_2^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{q_2}{p}\right) \\
q_3^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{q^3}{p}\right) \\
\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots \\
q_n^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{q_n}{p}\right)
\end{array}\right\} (\mathrm{mod}\ p)$$

Multipliziert man all diese Kongruenzen miteinander, mit Ausnahme der ersten, so kommt:

$$[q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \dots . q n]^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{q_1}{p}\right)\left(\frac{q_2}{p}\right)\left(\frac{q_3}{p}\right) \dots \left(\frac{q_n}{p}\right) (\mathrm{mod}\ p),$$

oder da das Produkt links $= Q$:

$$Q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{q_1}{p}\right)\left(\frac{p_2}{p}\right)\left(\frac{q_3}{p}\right) \dots\dots \left(\frac{q_n}{p}\right)$$

oder da:

$$Q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{Q}{p}\right)$$

$$\left(\frac{Q}{p}\right) - \left(\frac{q_1}{p}\right)\left(\frac{q_2}{p}\right)\left(\frac{q_3}{p}\right) \dots \left(\frac{q_n}{p}\right) \equiv 0\, (\mathrm{mod}\, p).$$

Da nun der absolute Zahlwert der Symbole

$$\left(\frac{Q}{p}\right), \left(\frac{q_1}{p}\right), \left(\frac{q_2}{2}\right) \dots\dots \left(\frac{q_n}{p}\right).$$

jedenfalls 1 ist, so muß, da p von 2 verschieden ist, der Minuend gleich dem Subtrahend sein, also:

$$\left(\frac{Q}{p}\right) = \left(\frac{q_1}{p}\right)\left(\frac{q_2}{p}\right) \dots\dots \left(\frac{q_n}{p}\right).$$

Mit Hilfe dieses Lehrsatzes kann man die Berechnung des Symbols $\left(\frac{Q}{p}\right)$, wenn Q eine zusammengesetzte Zahl ist, auf die Bestimmung der Symbole $\left(\frac{q_1}{p}\right)$, $\left(\frac{q_2}{p}\right)$ etc. zurückführen, wobei $q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$ die in Q enthaltenen Primzahlen bedeuten.

Beispiel. Man berechne das Symbol:

$$\left(\frac{30107}{13}\right).$$

Dieses Symbol läßt sich zurückführen auf:

$$\left(\frac{30107}{13}\right) = \left(\frac{7}{13}\right)\left(\frac{11}{13}\right)\left(\frac{17}{13}\right)\left(\frac{23}{13}\right).$$

Wählt man in obigem Satze speziell:

$$q_1 = q_2 = q_3 = \ldots\ldots\ldots = q_n,$$

so kommt:

$$\left(\frac{Q}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^n,$$

so ist also z. B.:

$$\left(\frac{81}{7}\right) = \left(\frac{3^4}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}\right)^4.$$

Ist $n = 2$, so ist:

$$\left(\frac{Q}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^2;$$

da nun $\left(\frac{q}{p}\right)$ entweder $= +1$ oder $= -1$ ist, so ist stets:

$$\left(\frac{q^2}{p}\right) = 1.$$

Daraus folgt, daß man in der Form:

$$\left(\frac{N \cdot q^2}{p}\right) = \left(\frac{N}{p}\right) \cdot \left(\frac{q^2}{p}\right)$$

$\left(\frac{q^2}{p}\right)$ stets weglassen kann, was in Worten heißt:

Bei der Berechnung des Symboles $\left(\frac{Q}{p}\right)$ kann man jeden Faktor von Q, der ein vollständiges Quadrat bildet, weglassen.

Lehrsatz. Sind q und q_1 nach dem Modul p kongruent, so ist:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{q_1}{p}\right).$$

Es ist nach Voraussetzung:

$$q \equiv q_1 \pmod p$$

folglich

$$q^{\frac{p-1}{p}} \equiv q_1^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

Es bestehen aber die beiden Kongruenzen:

$$\left.\begin{aligned} q^{\frac{p-1}{2}} &\equiv \left(\frac{q}{p}\right) \\ q_1^{\frac{p-1}{2}} &\equiv \left(\frac{q_1}{p}\right) \end{aligned}\right\} \pmod p$$

folglich:

$$\left(\frac{q}{p}\right) \equiv \left(\frac{q_1}{p}\right) \pmod p, \text{ oder:}$$

$$\left(\frac{q}{p}\right) - \left(\frac{p_1}{p}\right) \equiv 0 \pmod p,$$

woraus sich, da p eine ungerade Primzahl (also nicht 2),

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{q_1}{p}\right).$$

Aus diesem Lehrsatz ergibt sich folgende wichtige Tatsache:

Ist r der Rest der Division von q durch p, so ist:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{r}{p}\right).$$

Es ist ja stets in diesem Fall:

$$r \equiv q \pmod p.$$

Um das Symbol $\left(\frac{Q}{p}\right)$ berechnen zu können, haben wir noch zwei Sätze zu erwähnen, auf deren Beweis wir hier des beschränkten Raumes wegen nicht eingehen wollen.

Satz 1. ***Ist $p = 8n \pm 1$. so ist***

$$\left(\frac{2}{p}\right) = 1,$$

ist aber $p = 8n \pm 3$, so ist:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = -1.$$

Satz 2.) (**Legendresches Reziprozitätsgesetz zweier Primzahlen**).*

Sind v und s zwei ungerade Primzahlen, so ist:

$$\left(\frac{v}{s}\right) = \left(\frac{s}{v}\right) \cdot (-1)^{\frac{v-1}{2} \cdot \frac{s-1}{2}}.$$

---

*) Siehe auch geschichtl. Anhang in Band V.

Hieraus ergibt sich folgende Berechnung des Symbols $\left(\frac{q}{p}\right)$:

1. Ist q größer als p, so setze man für q den Rest seiner Division durch p oder den kleinsten negativen Rest von q nach p, falls dieser wesentlich kleiner als jener.

$$\left(\text{Man hat dann: } \left(\frac{-q}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{-1}{p}\right)\right).$$

2. Zerlegt man R in seine Primfaktoren und vernachlässigt alle Faktoren, welche ein vollständiges Quadrat bilden. Man erhält so:

$$\left(\frac{R}{p}\right) = \left(\frac{r_1}{p}\right)\left(\frac{r_2}{p}\right) \cdots\cdots$$

3. Ist nun $\qquad r = 2,$

so bestimmt sich der Wert nach obigem Satz 1. Ist r ungerade, so drücken wir nach dem Reziprozitätsgesetz $\left(\frac{r}{p}\right)$ durch $\left(\frac{p}{r}\right)$ aus und verfahren hiermit ebenso wie mit $\left(\frac{q}{p}\right)$ und erhalten schließlich:

$$\left(\frac{r'}{p}\right)$$

worin $r' < r$.

4. So fahren wir fort, bis wir schließlich auf:

$$\left(\frac{1}{r_n}\right)$$

oder auf:

$$\left(\frac{2}{r_n}\right)$$

kommen, deren Wert wir leicht bestimmen können.

Wir wollen hiernach einige Beispiele lösen.

Beispiel 1. $\left(\frac{1123}{877}\right) = ?$

Man erhält:

$$\left(\frac{1123}{877}\right) = \frac{246}{877} = \left(\frac{2}{877}\right)\left(\frac{3}{877}\right)\left(\frac{41}{877}\right).$$

Nun ist:

$$\left(\frac{2}{877}\right) = -1, \text{ da}$$

$$877 = 8 \cdot 110 - 3.$$

Ferner:

$$\left(\frac{3}{877}\right) = \left(\frac{877}{3}\right)(-1)^{\frac{877-1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \left(\frac{877}{3}\right) \cdot (-1)$$

$$= -\left(\frac{877}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) = -1.$$

Ferner ist: $\left(\frac{41}{877}\right) \cdot \left(\frac{877}{41}\right)(-1)^{\frac{877-1}{2} \cdot \frac{41-1}{2}} = \left(\frac{877}{41}\right) \cdot 1$

$$= \left(\frac{16}{41}\right) = \left(\frac{4^2}{41}\right) = +1$$

also:

$$\left(\frac{1123}{877}\right) = (-1)(-1)(+1) = +1$$

also ist die Kongruenz:

$$z^2 - 1123 \equiv 0 \pmod{877}$$

lösbar, d. h. es genügen ihr zwei Werte.

Beispiel 2. $\left(\frac{2319}{1151}\right) = ?$

Wir erhalten:

$$\left(\frac{2319}{1151}\right) = \left(\frac{17}{1151}\right)$$

$$\left(\frac{17}{1151}\right) = \left(\frac{1151}{17}\right) \cdot (-1)^{\frac{1151-1}{2} \cdot \frac{17-1}{2}} = \left(\frac{1151}{17}\right) \cdot (-1)^{4600}$$

$$= \left(\frac{1151}{17}\right) = \left(\frac{12}{17}\right) = \left(\frac{2^2 \cdot 3}{17}\right) = \left(\frac{2^2}{17}\right) \cdot \left(\frac{3}{17}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{17}\right) = \left(\frac{17}{3}\right) \cdot (-1)^{\frac{17-1}{2} \cdot \frac{3-1}{2}}$$

$$= \left(\frac{17}{3}\right) \cdot (-1) = \left(\frac{17}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right).$$

Hierin ist:

$$p = 3 = 8 \cdot 0 + 3,$$

also:

$$\left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

d. h. die Kongruenz:

$$z^2 - 2319 \equiv 0 \pmod{1151}$$

hat keine Lösung.

Beispiel 3. $\left(\frac{4407}{1451}\right) = ?$

Man erhält:

$$\left(\frac{4407}{1451}\right) = \left(\frac{54}{1451}\right) = \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 3^2}{1451}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{1451}\right)\left(\frac{3}{1451}\right)\left(\frac{3^2}{1451}\right) = \left(\frac{2}{1451}\right)\left(\frac{3}{1451}\right).$$

Nun ist:

$$\left(\frac{2}{1451}\right) = -1,$$

denn:

$$1451 = 181 \cdot 8 + 3.$$

Ferner ist:

$$\left(\frac{3}{1451}\right) = \left(\frac{1451}{3}\right) \cdot (-1)^{\frac{1451-1}{2} \cdot \frac{3-1}{2}} = \left(\frac{1453}{3}\right) \cdot (-1)^{725}$$

$$= -\left(\frac{1453}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) = -1,$$

also:

$$\left(\frac{4407}{1451}\right) = (-1)(-1) = 1$$

d. h. die Kongruenz:

$$z^2 - 4407 \equiv 0 \pmod{1451}$$

ist lösbar.

Beispiel 4. $\left(\frac{14631}{7307}\right) = ?$

Es kommt:

$$\left(\frac{14631}{7307}\right) = \left(\frac{17}{7307}\right) = \left(\frac{7307}{17}\right)(-1)^{\frac{7307-1}{2} \cdot \frac{17-1}{2}}$$

$$= \frac{7307}{17} \cdot (-1^{29224} = \left(\frac{7307}{17}\right) = \left(\frac{14}{17}\right) = \left(\frac{2 \cdot 7}{17}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{17}\right) \cdot \left(\frac{7}{17}\right).$$

Nun ist:

$$17 = 8 \cdot 2 + 1, \text{ also:}$$

$$\left(\frac{2}{17}\right) = 1.$$

Ferner ist:

$$\left(\frac{7}{17}\right) = \left(\frac{17}{7}\right)(-1)^{\frac{17-1}{2} \cdot \frac{7-1}{2}} = \left(\frac{17}{7}\right) \cdot (-1)^{24} = \left(\frac{17}{7}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{7}\right) = \left(\frac{7}{3}\right) \cdot (-1)^{\frac{7-1}{2} \cdot \frac{3-1}{2}} = \left(\frac{7}{3}\right) \cdot (-1)^3$$

$$= -\left(\frac{7}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

also:

$$\left(\frac{14631}{7307}\right) = (+1)(-1) = -1$$

d. h. die Kongruenz:

$$z^2 - 14631 \equiv 0 \pmod{7307}$$

hat keine Lösung.

Wir haben nunmehr gezeigt, wie man das Symbol $\left(\frac{q}{p}\right)$ berechnen und hiermit entscheiden kann, ob die Kongruenz

$$z^2 - q \equiv 0 \pmod{p}$$

Lösungen hat oder nicht; wir gehen jetzt dazu über, die Lösung der umgekehrten Aufgabe zu finden, nämlich in dem Symbol $\left(\frac{x}{p}\right)$ die Unbekannte zu bestimmen, wenn die Gleichungen bestehen:

$$\left(\frac{x}{p}\right) = 1$$

oder:

$$\left(\frac{x}{p}\right) = -1.$$

Die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{p}\right) = 1$$

drückt aus, daß die Kongruenz besteht:

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Diese Kongruenz hat $\frac{p-1}{2}$ Lösungen, weil:

$$x^p - x$$

durch:

$$x^{\frac{p-1}{2}} - 1$$

teilbar ist, dann ist:

$$x^p - x = x\left(x^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1\right).$$

Diese $\frac{p-1}{2}$ Lösungen befinden sich in der Reihe der Zahlen: $1, 2, 3 \ldots . p-1;$

die Zahl 0 scheidet aus, weil diese die Kongruenz offenbar nicht befriedigen kann. In der Reihe

$$1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots p - 1$$

sind also $\frac{p-1}{2}$ Zahlen quadratische Reste nach dem Modul p, die übrigen $\frac{p-1}{2}$ sind quadratische Nichtreste nach p, d. h. sie genügen der Gleichung:

$$\left(\frac{x}{p}\right) = -1.$$

Man könnte nun die Zahlen, die quadratische Reste nach p sind, einfach durch Probieren aufsuchen, dies wäre aber bei großem p außerordentlich mühsam und umständlich. Wir suchen daher eine andere Lösungsart.

Wir wissen, daß die Kongruenz:

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

die Bedingung ist für die Möglichkeit der Kongruenz:

$$z^2 \equiv a \pmod{p}.$$

Wir haben auch gefunden, daß wenn α eine Lösung der Kongruenz ist, die andere Lösung durch $p - \alpha$ dargestellt wird; keine der beiden Lösungen kann ferner größer sein als $\frac{p-1}{2}$, denn ihre Summe ist p und die eine muß größer sein als die andere.

Ist daher:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$$

oder:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1,$$

so wird sich in der Reihe der Zahlen

$$1, 2, 3 \ldots\ldots \frac{p-1}{2}$$

immer eine Zahl finden, welche, für z gesetzt, die Kongruenz:

$$z^2 - a \equiv 0 \pmod{p}$$

befriedigt, es wird mit anderen Worten eine der Kongruenzen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} 1^2 \equiv a \\ 2^2 \equiv a \\ 3^2 \equiv a \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv a \end{array}\right\} (\operatorname{mod} p).$$

Da nun a kleiner ist als p, so muß sich a unter den Resten der Division der Zahlen

$$1^2, 2^2, 3^2 \ldots\ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

durch p befinden. Sind $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_{\frac{p-1}{2}}$ die Zahlen aus obiger Reihe, die die Kongruenz

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$$

befriedigen, so sind die Lösungen enthalten in den Kongruenzen:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv a_1 \\ x \equiv a_2 \\ x \equiv a_3 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ x \equiv a_{\frac{p-1}{2}} \end{array}\right\} (\operatorname{mod} p)$$

Die Gleichung: $\left(\frac{x}{p}\right) = 1$

hat also die Lösungen:

$$\begin{array}{l} x = a_1 + n \cdot p \\ x = a_2 + np \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ x = a_{\frac{p-1}{2}} + n \cdot p. \end{array}$$

Beispiel. Es seien die Lösungen der Gleichung zu bestimmen:

$$\left(\frac{x}{p}\right) = 1.$$

Diese Gleichung hat:

$$\frac{13 - 1}{2} = 6.$$

Lösungen, welche sich durch die Kongruenz darstellen lassen:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv a_1 \\ x \equiv a_2 \\ x \equiv a_3 \\ x \equiv a_4 \\ x \equiv a_5 \\ x \equiv a_6 \end{array}\right\} \pmod{13},$$

wenn a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 die Reste sind, die sich bei der Division der Zahlen:

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2$$

durch 13 ergeben.

Diese Reste sind:

$$1,\ 4,\ 9,\ 3,\ 12,\ 10,$$

also sind die Lösungen der Gleichung

$$\left(\frac{x}{13}\right) = 1$$

enthalten in den Kongruenzen:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \\ x \equiv 4 \\ x \equiv 9 \\ x \equiv 3 \\ x \equiv 12 \\ x \equiv 10 \end{array}\right\} \pmod{13},$$

oder es heißen die Lösungen:

$$\begin{array}{l} x = 1 + 13n \\ x = 3 + 13n \\ x = 4 + 13n \\ x = 9 + 13n \\ x = 10 + 13n \\ x = 12 + 13n. \end{array}$$

Die Lösungen der Gleichung:

$$\left(\frac{x}{p}\right) = -1$$

sind nun leicht zu finden.

Wir haben vorausgesetzt, daß x und p relativ prim sind und dann, daß diejenigen Zahlen, welche der Gleichung

$$\left(\frac{x}{p}\right) = 1$$

nicht genügen, notwendig die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{p}\right) = -1$$

befriedigen müssen. Hieraus ergibt sich, daß wir, um die Lösungen von;

$$\left(\frac{x}{p}\right) = -1$$

zu erhalten, von all den Zahlen, die nicht durch p teilbar sind, diejenigen fortlassen müssen, welche die Gleichung

$$\left(\frac{x}{p}\right) = 1$$

befriedigen.

Es lassen sich nun alle Zahlen darstellen durch die Formen:

$np,\ np + 1,\ np + 2,\ np + 3, \ldots\ldots\ldots np + p - 1;$

die Vielfachen von p kommen für uns in Wegfall, so daß als Lösungen der beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{x}{p}\right) = 1$$

$$\left(\frac{x}{p}\right) = -1$$

die Zahlen bleiben:

$$np + 1,\ np + 2,\ np + 3, \ldots\ldots np + p - 1.$$

Lassen wir nun aus dieser Reihe die Zahlen fort, die die Gleichung

$$\left(\frac{x}{p}\right) = 1$$

befriedigen, so erhalten wir die Lösungen der Gleichung:

$$\left(\frac{x}{p}\right) = -1.$$

Beispiel.

$$\left(\frac{x}{13}\right) = -1.$$

Wir haben oben als Lösungen von $\left(\frac{x}{p}\right) = +1$ gefunden:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 13\,n \\ x &= 3 + 13\,n \\ x &= 4 + 13\,n \\ x &= 9 + 13\,n \\ x &= 10 + 13\,n \\ x &= 12 + 13\,n, \end{aligned}$$

so daß sich für die gegebene Gleichung die Lösungen ergeben:

$$\begin{aligned} x &= 2 + 13\,n \\ x &= 5 + 13\,n \\ x &= 6 + 13\,n \\ x &= 7 + 13\,n \\ x &= 8 + 13\,n \\ x &= 11 + 13\,n. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir als quadratische Reste nach 13:

1, 3, 4, 9, 10, 12;

und als quadratische Nichtreste:

2, 5, 6, 7, 8, 11.

Es seien ferner die Lösungen zu bestimmen von:

$$\left(\frac{x}{23}\right) = 1$$

und:

$$\left(\frac{x}{23}\right) = -1.$$

Jede der beiden Gleichungen hat:

$$\frac{23-1}{2} = 11$$

Lösungen.

Wir erhalten als Reste der Division der Zahlen

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9^2,\ 10^2,\ 11^2$$

durch 23 die Reste:

1, 4, 9, 16, 2, 13, 3, 18, 12, 8, 6,

also als Lösungen der Gleichung:

$\left(\frac{x}{23}\right) = 1$ und hieraus für: $\left(\frac{x}{23}\right) = -1$

$x = 1 + 23n$	$x = 5 + 23n$
$x = 2 + 23n$	$x = 7 + 23n$
$x = 3 + 23n$	$x = 10 + 23n$
$x = 4 + 23n$	$x = 11 + 23n$
$x = 6 + 23n$	$x = 14 + 23n$
$x = 8 + 23n$	$x = 15 + 23n$
$x = 9 + 23n$	$x = 17 + 23n$
$x = 12 + 23n$	$x = 19 + 23n$
$x = 13 + 23n$	$x = 20 + 23n$
$x = 16 + 23n$	$x = 21 + 23n$
$x = 18 + 23n$	$x = 22 + 33n$

Wir haben also als quadratische Reste nach 23:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18;

und als quadratische Nichtreste:

5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22.

Es erübrigt nun noch, zu zeigen, wie man die Lösungen der Kongruenz:

$$z^2 \equiv q \pmod p$$

findet.

Wir werden später eine allgemeine und sehr einfache Methode zur Auflösung der Kongruenz:

$$a^x \equiv A \pmod p$$

angeben, hier wollen wir nur den Fall behandeln, in dem p eine Primzahl von der Form $4n + 3$ ist, da dieser eine unmittelbare Lösung zuläßt.

Die Lösbarkeit der Kongruenz:

$$z^2 \equiv q \pmod p$$

setzt die Kongruenz:

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$$

voraus. Wir setzen hierin:

$$p = 4n + 3$$

und erhalten: $q^{\frac{4n+3-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$

$$q^{2n+1} \equiv 1 \pmod p$$

oder beide Seiten mit q multipliziert:

$$q^{2n+2} \equiv q \pmod p.$$

Vergleichen wir diese Kongruenz mit der gegebenen;

$$z^2 \equiv q \pmod p$$

so erkennen wir, daß dieser letzteren der Wert:

$$z = q^{n+1}$$

genügt.

Hat man nun eine Zahl gefunden, die der Kongruenz

$$z^2 \equiv q \pmod p$$

genügt, so findet man deren unendlich viele aus der Kongruenz

$$z^2 \equiv q^{n+1} \pmod p.$$

Eine von diesen Zahlen muß positiv und zugleich kleiner sein als p, und zwar ist dies der Rest der Division von q^{n+1} durch p. Ist dieser α, so ist die zweite Lösung enthalten in der Kongruenz:

$$z \equiv p - \pmod p,$$

Beispiel. $z^2 - 3 \equiv 0 \pmod{11}$.

Wir erhalten:

$$z = \text{Rest von: } \frac{3^{2+1}}{11} = 5$$

$$z = 5$$

oder allgemein:

$$z \equiv 5 \pmod{11}$$

$$z = 5 + 11n$$

und:

$$z = 11 - 5 = 6$$

$$z = 6 \pmod{11}$$

$$z = 6 + 11n.$$

§ 8.

Binomische Kongruenzen.

Unter einer binomischen Kongruenz versteht man eine Kongruenz von der Form:

$$x^n \equiv A \pmod p$$

worin n, A und p irgend welche ganze Zahlen bezeichnen.

Ist p = 2, so läßt sich nach Lehrsatz 4 des § 6 dieses

Kapitels auf eine Kongruenz 1^{ten} Grades zurückführen. Wir nehmen also p von 2 verschieden an und betrachten zunächst die Kongruenz:

$$x^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wir stellen über diese Kongruenz den Lehrsatz auf:

„Genügt die Zahl a gleichzeitig den beiden Kongruenzen

$$x^n \equiv 1 \pmod{p}$$

$$x^m \equiv 1 \pmod{p},$$

so genügt a auch der Kongruenz

$$x^\tau \equiv 1 \pmod{p}$$

wenn τ der größte gemeinschaftliche Teiler von und n ist.

Auf den Beweis, der leicht zu führen ist, gehen wir der Kürze halber nicht ein. Aus diesem Lehrsatz ergeben sich sofort die Sätze:

1. Die Lösungen von

$$x^m - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

sind auch Lösungen von

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

2. Ist τ der größte gemeinschaftliche Teiler von m und p — 1, so hat die Kongruenz:

$$x^m - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

τ Lösungen, welche sich aus der Kongruenz

$$x^\tau - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ergeben.

Der Kongruenz

$$x^m - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

können offenbar nur Zahlen genügen, die nicht durch p teilbar sind, denn für jedes x, das ein Vielfaches von p wäre, bestände die Kongruenz

$$x^m \equiv 0 \pmod{p}.$$

Für jedes x aber, das nicht durch p teilbar ist, gilt nach dem Fermat'schen Satz:

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Es genügen also alle Zahlen, die die Kongruenz

$$x^m - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

befriedigen, auch der Kongruenz

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ist also τ der größte gemeinschaftliche Teiler von m und p — 1, so erfüllen alle diese Werte von x auch die Kongruenz:

$$x^{\tau} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Es ist nun noch zu zeigen, daß diese Kongruenzen wirklich τ Lösungen haben.

Da τ ein Teiler von p — 1 ist, so ist:

$$\frac{p-1}{\tau}$$

eine ganze Zahl, die wir mit n bezeichnen wollen. Es ist also

$$p - 1 = \tau \cdot n$$

Man kann also schreiben:

$$x^p - x = x\,(x^{\tau \cdot n} - 1) = x\,[(x^{\tau})^n - 1^n].$$

Aus dieser Form erkennt man, daß $x^p - x$ durch $x^{\tau} - 1$ teilbar ist, weil $a^n - b^n$ stets durch $a - b$ teilbar ist. Nach einem früheren Lehrsatz (welchem?) hat aber dann die Kongruenz

$$x^{\tau} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

τ Lösungen. Da aber, wie oben gezeigt, diese Kongruenz nur durch Werte befriedigt wird, die der Kongruenz

$$x^m - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

genügen, so hat auch diese letztere Kongruenz τ Lösungen und findet man diese Lösungen aus der Kongruenz

$$x^{\tau} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Beispiel. $x^9 - 1 \equiv 0 \pmod{13}$,

Der größte gemeinschaftliche Teiler von 9 und 13 — 1 = 12 ist 3, also hat die Kongruenz:

$$x^9 - 1 = 0 \pmod{13}$$

drei Lösungen, die aus der Kongruenz

$$x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

gefunden werden.

Man erkennt leicht, daß diese Kongruenz die Lösungen hat

$$x = 1$$
$$x = 3$$
$$x = 9$$

oder allgemein:

$$x = 1 + 13n$$
$$x = 3 + 13n$$
$$x = 9 + 13n.$$

Diese Lösungen genügen also auch der Kongruenz:

$$x^9 - 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

z. B. ist:

$$3^9 - 1 = 19683 - 1 = 19682$$

$$19682 : 13 = \text{ganze Zahl.}$$

Beispiel. $x^{21} - 1 \equiv 0 \pmod{31}$.

Der Exponent 21 und $31 - 1 = 30$ haben als größten gemeinschaftlichen Teiler 3, wir erhalten also die drei Lösungen für die gegebene Kongruenz aus der Kongruenz:

$$x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{31}$$

Als Lösungen erhalten wir

$$x = 1$$
$$x = 45$$
$$x = 25$$

oder allgemein:

$$x = 1 + 31n$$
$$x = 5 + 31n$$
$$x = 25 + 31n,$$

Die Lösung der Kongruenz:

$$x^m - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ist somit auf die Lösung der Kongruenz

$$x^\tau - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

zurückgeführt, wenn τ ein Teiler von $p - 1$ ist. Für die Kongruenz $x^\tau - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ gilt nun folgender Lehrsatz:

Ist τ ein Teiler von $p - 1$, so genügt der Kongruenz

$$x^\tau - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

eine Zahl

$$a = n^{\frac{p-1}{\tau}},$$

wenn n relativ prim zu p ist.

Aus

$$a = n^{\frac{p-1}{\tau}}.$$

folgt:

$$a^\tau = n^{p-1}$$

oder:

$$a^\tau - 1 = n^{p-1} - 1.$$

Nach dem Fermatschen Satz aber ist:

$$n^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

da n relativ prim zu p angenommen ist; folglich auch:

$$a^{\tau} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Beispiel. $x^7 - 1 \equiv 0 \pmod{29}$

Der größte gemeinschaftliche Teiler von 7 und 28 ist 7, also hat die gegebene Konkurrenz 7 Lösungen.

Lösungen sind:

$$x = 1 + 29n$$

$$x = 2^{\frac{29-1}{7}} = 2^4 = 16.$$

$$x = 16 + 29n$$

Nach dieser Art kann man unter Umständen Lösungen einer binomischen Kongruenz von obiger Form finden. Um alle Lösungen zu erhalten, benützen wir folgenden Lehrsatz:

Sind $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Teiler von τ (die 1 mit ein begriffen) und genügt k der Kongruenz

$$x^{\tau} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ohne aber eine der Kongruenzen

$$\left.\begin{array}{l} x^{\alpha} - 1 \equiv 0 \\ x^{\beta} - 1 \equiv 0 \\ x^{\gamma} - 1 \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \pmod{p}$$

zu befriedigen, so erhält man die τ Lösungen der gegebenen Kongruenz durch die fortschreitenden Potenzen von k, also

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv k \\ x \equiv k^2 \\ x \equiv k^3 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ x \equiv k^{\tau} \end{array}\right\} \pmod{p}.$$

Der Beweis dieses Satzes ist einfach und müssen wir hier denselben dem Schüler überlassen.

Beispiel. Es sollen die Lösungen gefunden werden von

$$x^4 - 1 \equiv 0 \pmod{17}.$$

Dieser Kongruenz genügt offenbar die Zahl 4, denn es ist:

$$4^4 - 1 = 255$$

und

$$255 : 17 = 15 \text{ (eine ganze Zahl).}$$

Die Zahl 4 genügt aber nicht den Kongruenzen:

$$x - 1 \equiv 0 \pmod{17}$$

und:

$$x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{17}.$$

Wir erhalten also als Lösungen:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 4 \\ x \equiv 4^2 \\ x \equiv 4^3 \\ x \equiv 4^4 \end{array}\right\} \pmod{17}$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 4 \\ x \equiv 16 \\ x \equiv 13 \\ x \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod{17}.$$

Beispiel. Es sollen die Lösungen gefunden werden von:

$$x^6 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

Wir erkennen, es ist 2 eine Wurzel der Kongruenz, denn es ist:

$$64 - 1 = 63$$

$$\frac{63}{7} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Es ist nun noch zu untersuchen, ob 2 keiner der Kongruenzen

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 \equiv 0 \\ x^2 - 1 \equiv 0 \\ x^3 - 1 \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{7}$$

genügt; wir sehen, 2 genügt der Kongruenz $x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$, wir können also die Lösung 2 nicht gebrauchen zum Aufsuchen der übrigen Wurzeln.

Es genügt der gegebenen Kongruenz auch die Zahl 3; diese genügt keiner der Kongruenzen:

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 \equiv 0 \\ x^2 - 1 \equiv 0 \\ x^3 - 1 \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod 7,$$

wir erhalten daher als Lösungen der gegebenen Kongruenz:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 3 \\ x \equiv 3^2 \\ x \equiv 3^3 \\ x \equiv 3^4 \\ x \equiv 3^5 \\ x \equiv 3^6 \end{array}\right\} \pmod 7$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 3 \\ x \equiv 2 \\ x \equiv 6 \\ x \equiv 4 \\ x \equiv 5 \\ x \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod 7,$$

Lösungen, die direkt abgelesen werden konnten.

Wir wollen nunmehr zu dem allgemein eren Fall übergehen in dem A nicht 1, sondern eine beliebige, nicht durch p teilbare Zahl darstellt. p sei wieder eine von 2 verschiedene Primzahl.

Ueber diese Kongruenzen haben wir die beiden grundlegenden Sätze:

1. Die Kongruenz

$$x^m - A \equiv 0 \pmod p$$

ist nur dann möglich, wenn

$$A^{\frac{p-1}{\tau}} \equiv 1 \pmod p$$

ist, τ den grösten gemeinschaftlichen Teiler von m und p — 1 darstellt.

2) Ist die Kongruez

$$x^m - A \equiv 0 \pmod p$$

möglich, so hat dieselbe τ Lösungen, welche aus er Kongruenz]

$$x^\tau - A^\pi \equiv 0 \pmod{p}$$

erhalten werden, wenn π der Bedingung genügt:

$$\frac{m}{\tau} \cdot \pi \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{p-1}{\tau}\right).$$

Auf den Beweis dieser beiden Sätze können wir des beschränkten Raumes halber nicht eingehen.

Beispiel.

$$x^6 - 3 \equiv 0 \pmod{11}$$

sei zu lösen.

Diese Kongruenz ist möglich, d. h. sie hat Lösungen, denn es ist:

$$3^{\frac{11-1}{2}} - 1 = 242$$

durch 11 teilbar, d. h. es gilt die Kongruenz

$$243 \equiv 1 \pmod{11}.$$

Ferner erkennen wir, daß die gegebene Kongruenz 2 Lösungen hat, die aus der Kongruenz

$$x^2 - 3^\pi \equiv 0 \pmod{11}$$

zu finden sind.

Es handelt sich nun zunächst darum, π zu bestimmen. π muß der Kongruenz genügen:

$$\frac{m}{\tau}\ \pi \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{p-1}{\tau}\right)$$

oder die Werte eingesetzt:

$$\frac{6}{2}\ \pi \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{10}{2}\right)$$

$$3\,\pi \equiv 1 \pmod{5}$$

Wir können für π also 2 setzen. Es ist daher zu lösen:

$$x^2 - 3^2 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$x^2 - 9 \equiv 0 \pmod{11}$$

Dieser Kongruenz genügt offenbar $x = 3$ und $x = 11 - 3 = 8$. Die Lösungen der Kongruenz

$$x^6 - 3 \equiv 0 \pmod{11}$$

sind also:

$$x \equiv 3 \pmod{11}$$

$$x \equiv 8 \pmod{11}.$$

§ 9.

Kongruenzen von der Form $a^x \equiv A \pmod{p}$.

Über diese Art von Kongruenzen, in denen die Unbekannte als Exponent auftritt, müssen wir uns hier kurz fassen.

p soll eine, weder in a noch in A enthaltene beliebige Primzahl bedeuten.

Wir haben folgende Lehrsätze:

1. Wird die Kongruenz

$$a^x \equiv A \pmod{p}$$

durch eine Zahl $x = \alpha$ befriedigt, so genügen auch alle zu α nach $(p - 1)$ kongruenten Zahlen dieser Kongruenz.

Es sei.

$$z \equiv \alpha \pmod{p - 1}$$

$$z - \alpha = (p - 1) \cdot \varrho$$

$$a^{z - a} = a^{(p-1) \cdot \varrho}$$

Nun ist nach dem Fermatschen Satz:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

also auch:

$$a^{(p-1)\varrho} \equiv 1 \pmod{p}$$

also auch:

$$a^{z-\alpha} \equiv 1 \pmod{p}$$

hierzu:

$$a^{\alpha} \equiv A \pmod{p}$$

folglich:

$$a^{z} \equiv A \pmod{p},$$

was zu beweisen war.

Wir fassen auch hier wieder α und alle zu ihm nach $(p - 1)$ kongruenten Zahlen als eine Lösung der Kongruenz

$$a^x \equiv A \pmod{p}$$

auf.

Wählen wir $A = 1$, so erhalten wir:

Lehrsatz 2. Genügt $x = \alpha$ der Kongruenz:

$$a^x \equiv 1 \pmod{p},$$

so genügen ihr auch alle Vielfache von α.

Lehrsatz 3. Genügt $x = \alpha$ der Kongruenz:

$$a^x \equiv 1 \pmod{p}$$

so genügt ihr auch der größte gemeinschaftliche Teiler von α und $p - 1$.

Lehrsatz 4. Die kleinste Zahl, welche der Kongruenz

$$a^x \equiv 1 \pmod{p}$$

genügt (Null ausgenommen), ist ein Teiler von $p - 1$; alle übrigen Lösungen sind Vielfache von diesem Teiler.

Die Kongruenz

$$a^x \equiv 1 \pmod{p}$$

hat immer die $\frac{p-1}{\alpha}$ Lösungen, die dargestellt werden durch:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 0 \\ x \equiv \alpha \\ x \equiv 2\alpha \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ x \equiv a \cdot \left(\frac{p-1}{\alpha} - 1\right) \end{array}\right\} \pmod{p-1}.$$

Ist die kleinste Zahl, welche die Kongruenz

$$a^x \equiv 1 \pmod{p}$$

befriedigt, $(p - 1)$, so hat die Kongruenz nur *eine* Lösung, die dargestellt wird durch:

$$x \equiv 0 \pmod{p-1}.$$

Ist A nicht 1, sondern eine durch p nicht teilbare Zahl, so gilt der

Lehrsatz 5. Wird die Kongruenz

$$a^x \equiv A \pmod{p}$$

durch eine Zahl λ befriedigt, und ist α die kleinste Zahl, welche der Kongruenz:

$$a^x \equiv 1 \pmod{p}$$

genügt, so hat die erste Kongruenz

$$\frac{p-1}{\alpha}$$

Lösungen, die dargestellt sind durch:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv \lambda \\ x \equiv \lambda + a \\ x \equiv \lambda + 2a \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ x \equiv \lambda + \left(\frac{p-1}{a} - 1\right) a \end{array}\right\} \pmod{p-1}$$

Hat die Kongruenz:

$$a^x \equiv 1 \pmod{p}$$

nur eine Lösung, ist also $p - 1$ die kleinste, von Null verschiedene Zahl, welche der gegebenen Kongruenz genügt, so sagt man:

„a ist primitive Wurzel der Primzahl p."

Lehrsatz 6. Ist a primitive Wurzel von p und A nicht teilbar durch p, so hat die Kongruenz:

$$a^x \equiv A \pmod{p}$$

eine und nur eine Lösung.

Eine solche Zahl x, welche diese Kongruenz befriedigt, nennt man: „den Index der Zahl A". Die primitive Wurzel a nennt man die Basis der Indices. Ich muß es mir leider versagen, weiter auf diese Lehren einzugehen.

§ 10.

Kongruenzen II. Grades mit zwei Unbekannten.

Von den Kongruenzen II. Grades mit zwei Unbekannten beschäftigen wir uns hier mit der Kongruenz:

$$x^2 + Ay^2 + B \equiv 0 \pmod{p}$$

Wir haben als

Lehrsatz 1. Ist p eine Primzahl und kein Teiler von A, so hat die Kongruenz:

$$x^2 + Ay^2 + B \equiv 0 \pmod{p}$$

stets Lösungen.

Auf den Beweis müssen wir des beschränkten Raumes halber verzichten. Wir wollen nun annehmen, daß $B = 0$ sei, und wollen untersuchen, wie p beschaffen sein muß, wenn die Kongruenz

$$x^2 + Ay^2 \equiv 0 \pmod p$$

durch Zahlen für x und y, die relativ prim zu einander sind, befriedigt werden soll.

Ist die Kongruenz möglich, so sagen wir: p sei ein Teiler der quadratischen Form $x^2 + Ay^2$; ist die Kongruenz aber nicht möglich, so sagen wir, p sei ein Nichtteiler der quadratischen Form.

Die Teiler der quadratischen Form $x^2 + Ay^2$ stellen wir dar in der Form:

$$mz + \alpha,$$

worin z eine beliebige Zahl darstellt, oder in der Form

$$au^2 + 2buv + cv^2,$$

worin u und v beliebige ganze Zahlen sind.

Mit den Teilern von der ersten Form beschäftigt sich die „Theorie der linearen Teiler quadratischer Formen"; mit denen von der zweiten Form die „Theorie der quadratischen Teiler quadratischer Formen".

Wir beschäftigen uns hier nur mit der ersten Theorie.

Lehrsatz 2. Genügen irgend welche Zahlen x, y, die zueinander relativ prim sind, der Kongruenz:

$$x^2 + Ay^2 \equiv 0 \pmod p$$

so hat die Kongruenz:

$$u^2 + A \equiv 0 \pmod p$$

jedenfalls eine Lösung.

Es muß jedenfalls y relativ prim zu p sein und es läßt sich daher jedenfalls eine Zahl u finden, welche die Kongruenz befriedigt:

$$u \cdot y \equiv x \pmod p$$

oder:

$$u^3 y^2 \equiv x^2 \pmod p$$

hierzu:

$$x^2 + Ay^2 \equiv 0 \pmod p$$

ergibt:

$$y^2 \cdot u^2 + Ay^2 \equiv 0 \pmod p$$

$$u^2 + A \equiv 0 \pmod p$$

Ist also die Kongruenz:

$$x^2 + Ay^2 \equiv 0 \pmod p$$

für teilerfremde x und y möglich, so besteht auch die Kongruenz:

$$u^2 + A \equiv 0 \pmod p).$$

Besteht umgekehrt diese letzte Kongruenz, so kann die Kongruenz dadurch befriedigt werden, daß man

$$y = 1$$
$$x = u$$

setzt.

Beispiel. Es sei zu untersuchen, ob die Kongruenz:

$$x^2 + Ay^2 \equiv 0 \pmod{p}$$
$$x^2 - 2y^2 \equiv 0 \pmod{7}$$

Lösungen hat.

Der Wert des Legendreschen Symbols

$$\left(\frac{2}{7}\right)$$

ist $+1$; daraus schließen wir, daß die Kongruenz:

$$u^2 - 2 \equiv 0 \pmod{7}$$

Lösungen hat; diese sind:

$$\left.\begin{array}{l} u \equiv 3 \\ u \equiv 4 \end{array}\right\} \bmod 7.$$

Daraus ergibt sich, daß es möglich ist, die Kongruenz:

$$x^2 - 2y^2 \equiv 0 \pmod{7}$$

in ein Vielfaches von 7 zu verwandeln.

Beispiel. Es sei zu untersuchen, ob die Kongruenz:

$$x^2 - 3y^2 \equiv 0 \pmod{11}$$

möglich ist.

Der Wert des Legendreschen Symbols

$$\left(\frac{3}{11}\right)$$

ist -1; daraus folgt, daß die Kongruenz

$$u^2 - 3 \equiv 0 \pmod{11}$$

keine Lösungen hat. Hieraus ergibt sich, daß man unmöglich ein Vielfaches von 11 in der Form:

$$x^2 - 3y^2$$

darstellen kann, so zwar, daß x und y relativ prim zueinander sind.

Beispiel. Es sei zu untersuchen, ob man ein Vielfaches von 11 in der Form

$$x^2 - 5y^2$$

darstellen kann, so zwar, daß die Werte x und y relativ prim zueinander sind.

Soll dies möglich sein, so muß die Kongruenz möglich sein:

$$x^2 - 5y^2 \equiv 0 \pmod{11}$$

Der Wert des Legendreschen Symbols

$$\left(\frac{5}{11}\right)$$

ist $+1$, also hat die Kongruenz

$$u^2 - 5 \equiv 0 \pmod{11}$$

Lösungen (4 und 7), folglich kann auch die Kongruenz:

$$x^2 - 5y^2 \equiv 0 \pmod{11}$$

durch Werte für x und y, die zueinander relativ prim sind, befriedigt werden oder es lassen sich Vielfache von 11 in der Form

$$x^2 - 5y^2$$

darstellen.

Beispiel. Hat die Kongruenz:

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

Lösungen, wenn p eine Primzahl ist von der Form:

$$p = 4n + 3.$$

Wir wissen, daß das Legendresche Symbol

$$\left(\frac{-1}{p}\right)$$

für $p = 4n + 3$ stets -1 ist, folglich hat die Kongruenz

$$u^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

in diesem Fall keine Lösung und es ist deshalb unmöglich, ein Vielfaches einer Primzahl von der Form

$$4n + 3$$

als Summe der Quadrate von zwei Zahlen, die relativ prim zueinander sind, darzustellen.

Beispiel. Ist die Kongruenz:

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

möglich, wenn p eine Primzahl ist von der Form:

$$p = 4n + 1.$$

Wir wissen, das Legendresche Symbol

$$\left(\frac{-1}{p}\right)$$

hat für diesen Fall den Wert $+1$, es hat also die Kongruenz:

$$u^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

Lösungen und es ist also möglich, n so zu bestimmen, daß die Summe der Quadrate zweier teilerfremden Zahlen durch $p = 4n + 1$ teilbar ist.

Bevor wir uns nun weiter mit den Teilern von quadratischen Formen beschäftigen, sind noch einige Lehrsätze zu erwähnen, die wir hier ohne Beweis zusammenstellen.

Lehrsatz 3. Ist A eine Primzahl von der Form $4n + 3$ und p ein Teiler der quadratischen Form

$$x^2 + Ay^2$$

so ist:

$$\left(\frac{p}{A}\right) = +1.$$

Lehrsatz 4). Ist A eine Primzahl von der Form $4n + 1$ und p ein Teiler der quadratischen Form

$$x^2 + Ay^2,$$

so ist:

$$\left(\frac{p}{A}\right) = +1, \textit{ wenn } p = 4m + 1$$

und:

$$\left(\frac{p}{A}\right) = -1, \textit{ wenn } p = 4m + 3 \text{ ist.}$$

Lehrsatz 5. Ist A eine Primzahl von der Form $4n + 1$ und p ein Teiler der Form:

$$x^2 - Ay^2,$$

so ist:

$$\left(\frac{p}{A}\right) = +1.$$

Lehrsatz 6. Ist A eine Primzahl in der Form $4n + 3$, und p ein Teiler der quadratischen Form:

$$x^2 - Ay^2,$$

so ist:

$$\left(\frac{p}{A}\right) = +1, \textit{ wenn } p = 4m + 1, \text{ und}$$

$$\left(\frac{p}{A}\right) = -1, \textit{ wenn } d = 4m + 3 \text{ ist.}$$

Bei diesen Lehrsätzen ist p als eine ungerade Primzahl vorausgesetzt. Mit Hilfe dieser Lehrsätze ist es nun leicht, die linearen Teiler einer quadratischen Form:

$$x^2 \pm Ay^2$$

zu bestimmen, wenn A eine Primzahl ist.

Wir haben gefunden, daß die ungeraden Teiler bestimmt werden durch eine der beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{p}{A}\right) = 1$$

$$\left(\frac{p}{A}\right) = -1,$$

je nachdem:

1. $x^2 \pm Ay^2$ mit $+$ oder $-$ gegeben ist
2. A die Gestalt $4n + 3$ oder $4n + 1$ hat
3. in gewissen Fällen p die Form $4m + 1$ oder $4m + 3$ hat.

Wir haben aber früher gelernt, die Gleichungen

$$\left(\frac{p}{A}\right) = 1$$

$$\left(\frac{p}{A}\right) = -1$$

zu lösen.

Die Zahl p hat als lineare Teiler die Form:

$$nA + a$$

Dieser Form müssen wir nun eine Gestalt, die zugleich die Zahlen von der Form $4m + 1$ und $4m + 3$ d. h. alle ungeraden Zahlen liefert. Wir müssen also n so zu bestimmen suchen, daß $nA + a$ in $2m + 1$ (Form jeder ungeraden Zahl, verwandelt wird.

Nach unserer Schreibart muß:

$$nA + a \equiv 1 \pmod 2$$

oder:

$$nA \equiv (1 - a) \pmod 2$$

Ist a eine ungerade Zahl, so genügt der Kongruenz

$$n = 0.$$

Man erhält also als Lösung:

$$n \equiv 0 \pmod 2$$

woraus:

$$n \equiv 2z.$$

Ist aber a eine gerade Zahl, so genügt $n = 1$ der obigen Kongruenz und man erhält:

$$n = 2z + 1.$$

Setzt man diese Werte in die Form von p ein, so kommt

$$p = 2Az + a$$

und:

$$p = 2Az + A + a,$$

je nachdem a ungerade oder gerade ist.

Beispiel. Man soll die Form aller ungeraden Teiler der quadratischen Form:

$$x^2 + 7y^2$$

suchen.

7 ist eine Primzahl von der Gestalt $4n + 3$, folglich muß nach obigem Lehrsatz 3:

$$\left(\frac{p}{7}\right) = 1$$

sein. Um die Zahlen zu finden, die dieser Gleichung genügen, dividieren wir:

$$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2$$

durch 7 und bestimmen die Reste. Wir erhalten:

$$1 \quad 4 \quad 2.$$

Die Zahlen, welche obige Gleichung befriedigen, werden also durch eine der Formeln dargestellt:

$$7n + 1$$
$$7n + 4$$
$$7n + 2.$$

Damit diese Formen aber ungerade Zahlen darstellen, müssen wir

$$7n + 1 \text{ durch } 2 \cdot 7 \cdot z + 1$$
$$7n + 4 \text{ durch } 2 \cdot 7 \cdot z + 7 + 4$$
$$7n + 2 \text{ durch } 2 \cdot 7 \cdot z + 7 + 2$$

ersetzen. Wir erhalten also als Formen für die ungeraden Teiler der quadratischen Form:

$$x^2 + 7y^2$$

die nachfolgenden:

$$14z + 1$$
$$14z + 9$$
$$14z + 11.$$

Wir haben also hiermit die notwendige Gestalt gefunden für alle ungeraden Zahlen, welche Teiler einer Summe $x^2 + 7y^2$ sein können, wenn x und y teilerfremd sind.

Die Zahl:

$$24283$$

ist dargestellt durch:

$$154^2 + 7 \cdot 9^2$$

also müssen ihre Teiler, wenn solche existieren, in den Formen enthalten sein:

$$14z + 1$$
$$14z + 9$$
$$14z + 11.$$

Der Schüler möge versuchen, Teiler ausfindig zu machen.

Ist $A = 2$, so gilt der

Lehrsatz 7. Die ungeraden Teiler von

$$x^2 + 2y^2$$

haben die Form:

$$8m + 1 \text{ oder } 8m + 3$$

und die Teiler von:

$$x^2 - 2y^2$$

die Form:

$$8m + 1 \text{ oder } 8m - 1$$

Beispiele möge der Schüler nun selbst berechnen.

§ 11.
Zerlegung von Zahlen in Primfaktoren.

Wenn man eine Zahl in ihre Primfaktoren zerlegt, so erreicht man dies in der Arithmetik einfach durch Probieren; man sucht die Division der Zahl N durch alle Primzahlen, die kleiner als $\sqrt{N}$ sind auszuführen. Bei großen Zahlen und insonderheit bei großen Primzahlen kann man hierbei zeitraubende Rechnungen nicht umgehen, wenn man nur die Lehren der Arithmetik benützt. Bedeutend vereinfachen aber läßt sich die ganze Arbeit durch Anwendung der Kongruenzen. Wir beschränken uns auf Zahlen von der Form $a^m \pm 1$.

Es gelten hierfür die Lehrsätze:

1. Die ungeraden Primzahlfaktoren einer Zahl

$$a^{2n+1} + 1$$

müssen entweder die Formen

$$2(n + 1)z + 1$$

haben, oder Teiler von

$$a + 1$$

sein.

2. Alle ungeraden Teiler von

$$2^{2^n} + 1$$

müssen die Form haben:

$$2^{n+1} \cdot z + 1.$$

Beispiel. Es sollen die Teiler von 65537 bestimmt werden. Diese Zahl hat die Form:

$$2^{2^4} + 1,$$

folglich müssen die Teiler von 65537 die Form haben

$$32z + 1.$$

Gibt man z die Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, so erhält man als Zahlen die kleiner als $\sqrt{65537}$ sind, die ersten 7 der folgenden Zahlen:

33, 65, 97, 129, 161, 193, 225, 257;

Von diesen sind nur 97 und 193 Primzahlen, diese sind aber keine Teiler von 65537, so daß wir schließen können, 65537 ist eine Primzahl.

Wer sich noch eingehender über die in diesem Kapitel entwickelten Lehren orientieren will, dem empfehle ich das Buch: „Theorie der Kongruenzen" von Tschebyscheff, dem ich in meinen Ausführungen gefolgt bin. Im Uebrigen siehe auch Band VII.

Anhang I.

Formeltabelle.

Ist eine Gleichung auf die Form gebracht:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

so heißt die Auflösungsformel:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Für die Normalform:

$$x^2 + px + q = 0$$

lautet die Auflösungsformel:

$$x = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right).$$

Für die Wurzeln x_1 und x_2 gilt:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Zur Diskussion einer quadratischen Gleichung diene der Satz:

„Ist eine gemischt quadratische Gleichung auf die Form: $x^2 + px + q = 0$ gebracht, so erhalten wir, wenn das absolute Glied q negativ ist, in allen Fällen zwei reelle Lösungen. Die Vorzeichen der Wurzeln sind verschieden. Ist p positiv und zugleich kleiner als $\frac{p^2}{4}$, so erhalten wir zwei reelle Lösungen mit gleichem Vorzeichen, und zwar ist dieses gleiche Vorzeichen demjenigen von p entgegengesetzt. Ist q positiv und größer als $\frac{p^2}{4}$, so sind die Wurzeln der Gleichung nicht reell, sondern komplex, und zwar konjugiert komplex.“ —

Häufig gebrauchte Formeln zu Textgleichungen.

Kreis vom Halbmesser r:

$$u = 2\pi r$$

$$J = r^2 \pi$$

$$(\pi = 3{,}14159265)$$

$$(\log \pi = 0{,}4971499).$$

Kreissektor mit Zentriwinkel α^0:

$$J = \frac{\alpha}{360} r^2 \pi.$$

Kreissegment vom Zentriwinkel α^0:

$$J = \left(\frac{\alpha}{180^0}\pi - \sin\alpha\right)\frac{r^2}{2}.$$

Ellipse mit Halbachsen a und b:

$$J = a b \pi.$$

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071068$$

$$\operatorname{tg} 45^0 = \operatorname{ctg} 45^0 = 1.$$

$$\sin 30^0 = \cos 60^0 = 0{,}5$$

$$\cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660254$$

$$\operatorname{tg} 30^0 = \operatorname{ctg} 60^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}5773503$$

$$\operatorname{ctg} 30^0 = \operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3} = 1{,}7320508.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \text{(Kosinussatz).}$$

Inhalt des geraden wie schiefen Prismas:

$$J = G \cdot H$$

Inhalt der geraden wie schiefen Pyramide:

$$J = \frac{1}{3} G \cdot H$$

Inhalt eines geraden wie schiefen Pyramidenstumpfes:

$$J = \frac{h}{3}(G + \sqrt{G \cdot g} + g)$$

Inhalt der Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders:

$$M = 2\pi r \cdot h$$

Gesamtoberfläche:

$$O = 2\pi r(h + r)$$

Inhalt des Zylinders:

$$J = \pi r^2 \cdot h$$

Inhalt der Mantelfläche eines Kreiskegels:

$$M = \pi r \cdot s$$

Gesamtoberfläche:

$$O = \pi r(s + r)$$

Inhalt des Kegels:

$$J = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h.$$

Inhalt des Mantels eines Kreiskegelstumpfes:

$$M = \pi s(R + r)$$

Inhalt des geraden wie schiefen Kegelstumpfes:

$$J = \frac{\pi \cdot h}{3} (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

Oberfläche einer Kugelzone:

$$O = 2\pi r \cdot h \quad \text{oder:}$$

$$O = \pi \cdot \sqrt{(\varrho_1 + \varrho_2)^2 + h^2} \cdot \sqrt{(\varrho_1 - \varrho_2)^2 - h^2}.$$

Inhalt einer körperlichen Zone oder einer Kugelschicht:

$$J = \frac{1}{6} \pi h \cdot (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$$

Oberfläche einer Kugelhaube oder Kalotte:

$$O = 2\pi r \cdot h$$

Oberfläche einer Kugel:

$$O = 4\pi r^2$$

Inhalt einer Kugel:

$$J = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

Inhalt eines Kugelsektors:

$$J = \frac{2}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Inhalt eines Kugelsegmentes:

$$J = \frac{\pi \cdot h^2}{3}(3r - h).$$

Gleichung einer Geraden durch den Anfangspunkt und Neigungswinkel α gegen x-Achse

$$y = mx,$$

wobei $m = \operatorname{tg} \alpha$.

Gleichung einer Geraden, welche mit der x-Achse den $\sphericalangle \alpha$ einschließt und auf der y-Achse den Abschnitt q bildet

$$y = mx + q.$$

Gleichung einer Geraden, die auf den beiden Achsen die Abschnitte a und b bildet

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Gerade durch $(x_1 y_1)$

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Gleichung einer Geraden, die durch die Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_1, y_2)$ geht

$$\frac{x - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Hessesche Normalform der Geradengleichung

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha - d_0 = 0.$$

Allgemeine Form der Geradengleichung

$$ax + by + c = 0.$$

Normalform der Kreisgleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Parameterform der Kreisgleichung

$$x = a + r \cos \varphi$$

$$y = b + r \sin \varphi.$$

Mittelpunktsgleichung der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Scheitelgleichung des Kreises

$$y^2 = 2rx - x^2.$$

Allgemeine Form der Kreisgleichung:

$$x^2 + y^2 + px + qy + s = 0,$$

($2a = -p$; $2b = -q$ und $a^2 + b^2 - r^2 = s$).

Gleichung einer Kreistangente im Punkte (x_1, y_1)

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = r^2.$$

Koordinaten der Berührungspunkte

$$x_1 = r \cdot \cos\alpha$$
$$y_1 = r \cdot \sin\alpha$$

Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis

$$K = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2.$$

Länge der Sehne, welche unter $\measuredangle\, \alpha$ gegen x-Achse durch den Peripheriepunkt (x_1 y_1) gezogen ist

$$s = 2\,[(x_1 - a)\cos\alpha + (y_1 - b)\sin\alpha].$$

Gleichung des Kreises in Polarkoordinaten

$$\varrho^2 - 2\varrho\varrho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r^2{}_0 - r^2 = 0.$$

Kreis durch den Anfangspunkt

$$\varrho - 2\varrho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) = 0.$$

Kreis um den Anfangspunkt

$$\varrho = r.$$

Mittelpunktsgleichung der ***Ellipse***

$$\frac{x^2}{a_2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

($b^2 = a^2 - c^2$).

Polargleichung der Ellipse

$$\frac{\varrho^2 \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\varrho^2 \sin^2\varphi}{b^2} = 1.$$

Gleichung der Ellipsentangente im Punkte (x_1 y_1)

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1.$$

Gleichung der Tangente aus dem Punkt (x_0, y_0)

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{-x_0 y_0 \pm \sqrt{b^2 x^2{}_0 + a^2 y^2{}_0 - a^2\ b^2}}{a^2 - x^2{}_0}$$

Mittelpunktsgleichung der ***Hyperbel***

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

($b^2 = c^2 - a^2$).

Asymptotenwinkel α:

$$tg\,\alpha = \pm \frac{b}{a}\cdot$$

Polargleichung der Hyperbel

$$\frac{\varrho^2 \cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\varrho^2 \sin^2\varphi}{b^2} = 1.$$

Gleichung der Hyperbeltangente im Punkte (x_1, y_1)

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1.$$

Gleichung der Tangenten im unendlich fernen Punkt

$$y = \pm \frac{b}{a}\, x.$$

Gleichung der Tangente aus einem Punkt $x_0, y_0)$ an eine Hyperbel

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{-x_0 y_0 \pm \sqrt{a^2 y_0^2 + a^2 b^2 - b^2 x_i^2}}{a^2 - x_0^2}.$$

Scheitelgleichung der ***Parabel***

$$y^2 = 2px.$$

Polargleichung der Parabel

$$\varrho = \frac{2p\varrho \cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Tangentengleichung für den Parabelpunkt $)x_1, y_1)$

$$y \cdot y_1 = p(x + x_1).$$

Ist $A \equiv a \pmod{m}$

so ist auch: $A k \equiv a \cdot k \pmod{m}$

ferner: $A^k \equiv a^k \pmod{p}$

$$\frac{A}{\tau} \equiv \frac{a}{\tau} \pmod{p},$$

wenn τ ein gemeinschaftlicher Teiler von A und a und relativ prim zu p ist.

Ferner:

$$\frac{A}{\tau} \equiv \frac{a}{\tau} \left(mod\, \frac{p}{\tau}\right),$$ wenn τ gemeinsamer Faktor von A a und p ist.

Ferner:

$$A \pm pm \equiv a \pmod{m}$$

$$A \equiv a \pm pm \pmod{m}$$

$$A \pm pm \equiv a \pm qm \pmod{m}$$

Ist $a \equiv b \pmod{m}$

$b \equiv c \pmod{m}$

so ist auch:

$$a \equiv c \pmod{p}.$$

Ist: $A \equiv a \pmod{m}$

$B \equiv b \pmod{m}$

so ist auch:

$$A \pm B \equiv a \pm b \pmod{m}$$

ebenso: $$AB \equiv a \cdot b \pmod{m}$$

$$\varphi(m) = m - 1$$

wenn m eine Primzahl, und

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{s}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

wenn p, q, s etc. die zueinander teilerfremden Faktoren von m sind.

$$g^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m},$$

wenn m teilerfremd zu g ist. (Allgemeiner Fermatscher Satz, aufgestellt von Euler.)

$$g^{m-1} \equiv 1 \pmod{m},$$

wenn m eine Primzahl ist.

Lösung einer unbestimmten Gleichung I. Grades mittels Kettendivision.

Ist: $$ax + by + c = 0$$

die Normalform und sind a, b und c relativ prim, so dividiert man mit dem ersten Koeffizienten in den negativ genommenen zweiten, so zwar, daß man eine ***gerade*** Anzahl Elemente erhält. Dann bildet man die Klammer von allen Elementen mit Ausnahme des letzten und berechnet die Klammer vom Ende aus.

x ist dann das c-fache des Endwertes vermehrt um ein n-faches des negativ genommenen zweiten Koeffizienten.

y ist das c-fache des letzten Vorwertes vermehrt um dasselbe n-fache des ersten Koeffizienten.

Wilsonscher Satz:

$$p - 1! + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

wenn p eine Primzahl ist.

Legendresches Reziprozitätsgesetz zweier Primzahlen:

$$\left(\frac{v}{s}\right) = \left(\frac{s}{v}\right)(-1)^{\frac{v-1}{2}\cdot\frac{s-1}{2}}.$$

Anhang II.

Vierstellige Logarithmen der Zahlen 1—1000.

Logarithmen der natürlichen Zahlen.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	40
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	37
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	33
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	31
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	29
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	27
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	25
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	24
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	23
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	21
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	21
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	20
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	19
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	18
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	17
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	17
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	16
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	16
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	15
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	14
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	14
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	13
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	13
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	13
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	13
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	12
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	12
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	12
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	12
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	11
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	11
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	10
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	10
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	10
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	10
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Logarithmen der natürlichen Zahlen.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
45	6533	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	10
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	9
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	9
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	8
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	8
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	8
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	8
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	8
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	7
64	8062	8069	8075	0828	8089	8096	8102	8109	8116	8122	7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	7
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	6
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	6
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	5
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	4
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Logarithmen der natürlichen Zahlen.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	5
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	5
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	5
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	4
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Anhang III.

Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.

Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.

°	′	sin	tang	cos	′	°
0	0	—	—	0,0000	60	90
	2	6,7648	6,7648	0,0000	58	
	4	7,0658	7,0658	0,0000	56	
	6	7,2419	7,2419	0,0000	54	
	8	7,3668	7,3668	0,0000	52	
	10	7,4637	7,4637	0,0000	50	
	12	7,5429	7,5429	0,0000	48	
	14	7,6099	7,6099	0,0000	46	
	16	7,6678	7,6678	0,0000	44	
	18	7,7190	7,7190	0,0000	42	
	20	7,7648	7,7648	0,0000	40	
	22	7,8061	7,8062	0,0000	38	
	24	7,8439	7,8439	0,0000	36	
0	26	7,8787	7,8787	0,0000	34	90
	28	7,9109	7,9109	0,0000	32	
	30	7,9408	7,9409	0,0000	30	
	32	7,9689	7,9689	0,0000	28	
	34	7,9952	7,9952	0,0000	26	
	36	8,0200	8,0200	0,0000	24	
	38	8,0435	8,0435	0,0000	22	
	40	8,0658	8,0658	0,0000	20	
	42	8,0870	8,0870	0,0000	18	
	44	8,1072	8,1072	0,0000	16	
	46	8,1265	8,1265	0,0000	14	
	48	8,1450	8,1450	0,0000	12	
1	0	8,2419	8,2419	9,9999	0	89
	5	8,2766	8,2767	9,9999	55	
	10	8,3088	8,3089	9,9999	50	
	15	8,3388	8,3389	9,9999	45	
	20	8,3668	8,3669	9,9999	40	
	25	8,3931	8,3932	9,9999	35	
	30	8,4179	8,4181	9,9999	30	
°	′	cos	cotg	sin	′	°

°	′	sin	tang	cos	′	°
1	30	8,4179	8,4181	9,9999	30	89
	35	8,4414	8,4416	9,9998	25	
	40	8,4637	8,4638	9,9998	20	
	45	8,4848	8,4851	9,9998	15	
	50	8,5050	8,5053	9,9998	10	
	55	8,5243	8,5246	9,9998	5	
2	0	8,5428	8,5431	9,9997	0	88
	5	8,5605	8,5608	9,9997	55	
	10	8,5776	8,5779	9,9997	50	
	15	8,5939	8,5943	9,9997	45	
	20	8,6097	8,6101	9,9996	40	
	25	8,6250	8,6254	9,9996	35	
	30	8,6397	8,6401	9,9996	30	
	35	8,6539	8,6544	9,9996	25	
	40	8,6677	8,6682	9,9995	20	
	45	8,6810	8,6815	9,9995	15	
	50	8,6940	8,6945	9,9995	10	
	55	8,7066	8,7071	9,9994	5	
3	0	8,7188	8,7194	9,9994	0	87
	5	8,7307	8,7313	9,9994	55	
	10	8,7423	8,7429	9,9993	50	
	15	8,7535	8,7542	9,9993	45	
	20	8,7645	8,7652	9,9993	40	
	25	8,7752	8,7760	9,9992	35	
	30	8,7857	8,7865	9,9992	30	
	35	8,7959	8,7967	9,9992	25	
	40	8,8059	8,8067	9,9991	20	
	45	8,8156	8,8165	9,9991	15	
	50	8,8251	8,8261	9,9990	10	
	55	8,8350	8,8355	9,9990	5	
4	0	8,8436	8,8446	9,9989	0	
°	′	cos	cotg	sin	′	°

Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.

°	′	sin	tang	cos	′	°	°	′	sin	tang	cos	′	°
4	0	8,8436	8,8446	9,9989	0	**86**	**11**	0	9,2806	9,2887	9,9919	0	**79**
	5	8,8525	8,8536	9,9989	55			10	9,2870	9,2953	9,9917	50	
	10	8,8613	8,8624	9,9989	50			20	9,2934	9,3020	9,9914	40	
	15	8,8699	8,8711	9,9988	45			30	9,2997	9,3085	9,9912	30	
	20	8,8783	8,8795	9,9988	40			40	9,3058	9,3149	9,9909	20	
	25	8,8865	8,8878	9,9987	35			50	9,3119	9,3212	9,9907	10	
	30	8,8946	8,8960	9,9987	30		**12**	0	9,3179	9,3275	9,9904	0	**78**
	35	8,9026	8,9040	9,9986	25			10	9,3238	9,3366	9,9901	50	
	40	8,9104	8,9118	9,9986	20			20	9,3296	9,3397	9,9899	40	
	45	8,9181	8,9196	9,9985	15			30	9,3353	9,3458	9,9896	35	
	50	8,9256	8,9272	9,9985	10			40	9,3410	9,3517	9,9893	20	
	55	8,9330	8,9346	9,9984	5			50	9,3466	9,3576	9,9890	10	
5	0	8,9403	8,9420	9,9983	0	**85**	**13**	0	9,3521	9,3634	9,9887	0	**77**
	10	8,9545	8,9563	9,9982	50			10	9,3575	9,3691	9,9884	50	
	20	8,9682	8,9701	9,9981	40			20	9,3629	9,3748	9,9781	40	
	30	8,9816	8,9836	9,9980	30			30	9,3682	9,3804	9,9878	30	
	40	8,9945	8,9966	9,9979	20			40	9,3734	9,3859	9,9875	20	
	50	9,0070	9,0093	9,9977	10			50	9,3786	9,3914	9,9872	10	
6	0	9,0192	9,0216	9,9976	0	**84**	**14**	0	9,3837	9,3968	9,9869	0	**76**
	10	9,0311	9,0336	9,9975	50			10	9,3887	9,4021	9,9866	50	
	20	9,0426	9,0453	9,9973	40			20	9,3937	9,4074	9,9863	40	
	30	9,0539	9,0567	9,9972	30			30	9,8986	9,4127	6,9859	30	
	40	9,0648	9,0678	9,9971	20			40	9,4035	9,4178	9,9856	20	
	50	9,0755	9,0786	9,9969	10			50	9,4083	9,4230	9,9853	10	
7	0	9,0859	9,0891	9,9968	0	**83**	**15**	0	9,4130	9,4281	9,9849	0	**75**
	10	9,0961	2,0995	9,9966	50			10	9,4177	9,4331	9,9846	50	
	20	9,1060	9,1096	9,9964	40			20	9,4223	9,4381	9,9843	40	
	30	9,1157	9,1194	9,9963	30			30	9,4269	9,4430	9,9839	30	
	40	9,1252	9,1291	9,9961	20			40	9,4314	9,4479	9,9836	20	
	50	9,1345	9,1385	9,9959	10			50	9,4359	9,4527	9,9832	10	
8	0	9,1436	9,1478	9,9958	0	**82**	**16**	0	9,4403	9,4575	9,9828	0	**74**
	10	9,1525	9,1569	9,9956	50			10	9,4447	9,4622	9,9825	50	
	20	9,1612	9,1658	9,9954	40			20	9,4491	9,4669	9,9821	40	
	30	9,1697	9,1745	9,9952	30			30	9,4533	9,4716	9,9817	30	
	40	4,1781	9,1831	9,9950	20			40	9,4576	9,4762	9,9814	20	
	50	9,1863	9,1915	9,9948	10			50	9,4618	9,4808	9,9810	10	
9	0	9,1943	9,1997	9,9946	0	**81**	**17**	0	9,4659	9,4853	9,9806	0	**73**
	10	9,2022	9,2078	9,9944	50			10	9,4700	9,4898	9,9802	50	
	20	9,2100	9,2158	9,9942	40			20	9,4741	9,4943	9,9798	40	
	30	9,2176	9,2236	9,9940	30			30	9,4781	9,4987	9,9794	30	
	40	9,2251	9,2313	9,9938	20			40	9,4821	9,5031	9,9790	20	
	50	9,2324	9,2389	9,9936	10			50	9,4861	9,5075	9,9786	10	
10	0	9,2397	9,2463	9,9934	0	**80**	**18**	0	9,4900	9,5118	9,9782	0	**72**
	10	9,2468	9,2536	9,9931	50			10	9,4939	9,5161	9,9778	50	
	20	9,2538	9,2609	9,9929	40			20	9,4977	9,5203	9,9774	40	
	30	9,2606	9,2680	9,9927	30			30	9,5015	9,5245	9,9770	30	
	40	9,2674	9,2750	9,9924	20			40	9,5052	9,5287	9,9765	20	
	50	9,2740	9,2819	9,9922	10			50	9,5090	9,5329	9,9761	10	
	0	9,2806	9,2887	9,9919	0			0	9,5126	9,5370	9,9757	0	
°	′	cos	cotg	sin	′	°	°	′	cos	cotg	sin	′	°

Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.

°	′	sin	tang	cos	′	°	°	′	sin	tang	cos	′	°
19	0	9,5126	9,5370	9,9757	0	**71**	**27**	0	9,6570	9,7072	9,9499	0	**64**
	10	9,5163	9,5411	9,9752	50			10	9,6595	9,7103	9,9492	50	
	20	9,5199	9,5451	9,9748	40			20	9,6620	9,7134	9,9486	40	
	30	9,5235	9,5491	9,9743	30			30	9,6644	9,7165	9,9479	30	
	40	9,5270	9,5531	0,9739	20			40	9,6668	9,7196	9,9473	20	
	50	9,5306	9,5571	9,9734	10			50	9,6692	9,7226	9,9466	10	
20	0	9,5341	9,5611	9,9730	0	**70**	**28**	0	9,6716	9,7257	9,9459	0	**63**
	10	9,5375	9,5650	9,9725	50			10	9,6740	9,7287	9,9453	50	
	20	9,5409	9,5689	9,9721	40			20	9,6763	9,7317	9,9446	40	
	30	9,5443	9,5727	9,9716	30			30	9,6787	9,7348	9,9439	30	
	40	9,5477	9,5766	9,9711	20			40	0,6810	9,7378	9,9432	20	
	50	9,5510	9,5804	9,9706	10			50	9,6833	9,7408	9,9425	10	
21	0	9,5543	9,5842	9,9702	0	**69**	**29**	0	9,6856	9,7438	9,9418	0	**62**
	10	9,5576	9,5879	9,9697	50			10	9,6878	9,7467	9,9411	50	
	20	9,5609	9,5917	9,9692	40			20	9,6901	9,7497	9,9404	40	
	30	9,5641	9,5954	9,9687	30			30	9,6923	9,7526	9,9397	30	
	40	9,5673	9,5991	9,9682	20			40	9,6946	9,7556	9,9390	20	
	50	9,5704	9,6028	9,9677	10			50	9,6968	9,7585	0,9383	10	
22	0	9,5736	9,6064	9,9672	0	**68**	**30**	0	9,6990	9,7614	9,9375	0	**61**
	10	9,5767	9,6100	9,9667	50			10	9,7012	9,7644	9,9368	50	
	20	9,5798	9,6136	9,9661	40			20	9,7033	9,7673	9,9361	40	
	30	9,5828	9,6172	9,9656	30			30	9,7055	9,7701	9,9353	30	
	40	9,5859	9,6208	9,9651	20			40	9,7076	9,7730	9,9346	20	
	50	9,5889	9,6243	9,9646	10			50	9,7097	9,7759	9,9338	10	
23	0	9,5919	9,6279	9,9640	0	**67**	**31**	0	9,7118	9,7788	9,9331	0	**60**
	10	9,5948	9,6314	9,9635	50			10	9,7139	9,7816	9,9323	50	
	20	9,5978	9,6348	9,9629	40			20	9,7160	9,7845	9,9315	40	
	30	9,6007	9,6383	9,9624	30			30	9,7181	9,7873	9,9308	30	
	40	9,6036	9,6417	0,9618	20			40	9,7201	9,7902	9,9300	20	
	50	9,6065	9,6452	9,9613	10			50	9,7222	9,7930	9,9292	10	
24	0	9,6093	9 6486	9,9607	0	**66**	**32**	0	9,7242	9,7958	9,9284	0	**59**
	10	9,6121	9,6520	9,9602	50			10	9,7262	9,7986	9,9276	50	
	20	9,6149	9,6553	9,9596	40			20	9,7282	9,8014	9,9268	40	
	30	9,6177	9,6587	9,9590	30			30	9,7302	9,8042	9,9260	30	
	40	9,6205	9,6620	9,9584	20			40	9,7322	9,8070	9,9252	20	
	50	9,6232	9,6654	9,9579	10			50	9,7342	9,8097	9,9244	10	
25	0	9,6259	9,6687	9,9573	0	**65**	**33**	0	9,7361	9,8125	9,9236	0	**58**
	10	9,6286	9,6720	9,9567	50			10	9,7380	9,8153	9,9228	50	
	20	9,6313	9,6752	9,9561	40			20	9,7400	9,8180	9,9219	40	
	30	9,6340	9,6785	9,9555	30			30	9,7419	9,8208	9,9211	30	
	40	9,6366	9,6817	9,9549	20			40	9,7438	9,8235	9,9203	20	
	50	9,6392	9,6850	9,9543	10			50	9,7457	9,8263	9,9194	10	
26	0	9,6418	9,6882	9,9537	0	**64**	**34**	0	9,7476	9,8290	9,9186	0	**57**
	10	9,6444	9,6914	9,9530	50			10	9,7494	9,8317	9,9177	50	
	20	9,6470	9,6946	9,9524	40			20	9,7513	9,8344	9,9169	40	
	30	9,6495	9,6977	9,9518	30			30	9,7531	9,8371	9,9160	30	
	40	9,6521	9,7009	9,9512	20			40	9,7550	9,8398	9,9151	20	
	50	9,6546	9,7040	9,9505	10			50	9,7568	9,8425	9,9142	10	
	0	9,6570	9,7072	9,9499	0			0	9,7586	9,8452	9,9134	0	
°	′	cos	cotg	sin	′	°	°	′	cos	cotg	sin	′	°

Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.

°	′	sin	tang	cos	′	°	°	′	sin	tang	cos	′	°
35	0	9,7586	9,8452	9,9134	0	**55**	**40**	0	9,8081	9,9238	9,8843	0	**50**
	10	9,7604	9,8479	9,9125	50			10	9,8096	9,9264	9,8832	50	
	20	9,7622	9,8506	9,9116	40			20	9,8111	9,9289	9,8821	40	
	30	9,7640	9,8533	9,9107	30			30	9,8125	9,9315	9,8810	30	
	40	9,7657	9,8559	9,9098	20			40	9,8140	9,9341	9,8800	20	
	50	9,7675	9,8586	9,9089	10			50	9,8155	9,9366	9,8789	10	
36	0	9,7692	9,8613	9,9080	0	**54**	**41**	0	9,8169	9,9392	9,8778	0	**49**
	10	9,7710	9,8639	9,9070	50			10	9,8184	9,9417	9,8767	50	
	20	8,7727	9,8666	9,9061	40			20	9,8198	9,9443	9,8756	40	
	30	9,7744	9,8692	9,9052	30			30	9,8213	9,9468	9,8745	30	
	40	9,7761	9,8718	9,9042	20			40	9,8227	9,9494	9,8733	20	
	50	9,7778	9,8745	9,9033	10			50	9,8241	9,9519	9,8722	10	
37	0	9,7795	9,8771	9,9023	0	**53**	**42**	0	9,8255	9,9544	9,8711	0	**48**
	10	9,7811	9,8797	9,9014	50			10	9,8269	9,9570	9,8699	50	
	20	9,7828	9,8824	9,9004	40			20	9,8283	9,9595	9,8688	40	
	30	9,7844	9,8850	9,8995	30			30	9,8297	9,9621	9,8676	30	
	40	9,7861	9,8876	9,8985	20			40	9,8311	9,9646	9,8665	20	
	50	9,7877	8,8902	9,8975	10			50	9,8324	9,9671	9,8653	10	
38	0	9,7893	9,8928	9,8965	0	**52**	**43**	0	9,8338	9,9697	9,8641	0	**47**
	10	9,7910	9,8954	9,8955	50			10	9,8351	9,9722	9,8629	50	
	20	9,7926	9,8980	9,8945	40			20	9,8365	9,9747	9,8618	40	
	30	9,7941	9,9006	9,8935	30			30	9,8378	9,9772	9,8606	30	
	40	9,7957	9,9032	9,8925	20			40	9,8391	9,9798	9,8594	20	
	50	9,7973	9,9058	9,8915	10			50	9,8405	9,9823	9,8582	10	
39	0	9,7989	9,9084	9,8905	0	**51**	**44**	0	9,8418	9.9848	9,8569	0	**46**
	10	9,8004	9,9110	9,8895	50			10	9,8431	9,9874	9,8557	50	
	20	9,8020	9,9135	9,8884	40			20	9,8444	9,9899	9,8545	40	
	30	9,8035	9,9161	9,8874	30			30	9,8457	9,9924	9,8532	30	
	40	9,8050	9,9187	9,8864	20			40	9,8469	9,9949	9,8520	20	
	50	9,8066	9,9212	9,8853	10			50	9,8482	9,9975	9,8507	10	
	0	9,8081	9,9238	9,8843	0		**45**	0	9,8495	0,0000	9,8495	0	**45**
°	′	cos	cotg	sin	′	°	°	′	cos	cotg	sin	′	

Anhang IV.

Primzahlen von 1—10000.

1—100	100—200	200—300	300—400	400—500	500—600
2	101	211	307	401	503
3	103	223	311	409	509
5	107	227	313	419	521
7	109	229	317	421	523
11	113	233	331	431	541
13	127	239	337	433	547
17	131	241	347	439	557
19	137	251	349	443	563
23	139	257	353	449	569
29	149	263	359	457	571
31	151	269	367	461	577
37	157	271	373	463	587
41	163	277	379	467	593
43	167	281	383	479	599
47	173	283	389	487	
53	179	293	397	491	
59	181			499	
61	191				
67	193				
71	197				
73	199				
79					
83					
89					
97					

600—800	800—1000	1000—1200	1200 – 1400	1400—1600
601	809	1009	1201	1409
607	811	1013	1213	1428
613	821	1019	1217	1427
617	823	1021	1223	1429
619	827	1031	1229	1433
631	829	1033	1231	1439
641	839	1039	1237	1447
643	853	1049	1249	1451
647	857	1051	1259	1453
653	859	1061	1277	1459
659	863	1063	1297	1471
661	877	1069	1283	1481
673	881	1087	1289	1483
677	883	1091	1291	1487
683	887	1093	1279	1489
691	907	1097	1301	1493
701	911	1103	1303	1499
709	919	1109	1307	1511
719	927	1117	1319	1523
727	937	1123	1321	1531
733	941	1129	1327	1543
739	942	1151	1361	1549
749	953	1153	1367	1553
751	967	1163	1373	1559
757	971	1171	1381	1567
761	977	1181	1399	1571
769	983	1187		1579
773	991	1193		1583
787	997			1597
797				

1600—1800	1800—2000	2000—2200	2200—2400	2400—2600
1601	1801	2003	2203	2411
1607	1811	2011	2207	2417
1609	1823	2017	2213	2423
1613	1831	2027	2221	2437
1619	1847	2029	2237	2441
1621	1861	2039	2239	2447
1627	1867	2053	2243	2459
1637	1871	2063	2251	2467
1657	1873	2069	2267	2473
1663	1877	2081	2269	2477
1667	1879	2083	2273	2503
1669	1889	2087	2281	2521
1693	1901	2089	2287	2531
1697	1907	2099	2293	2539
1699	1913	2111	2297	2543
1709	1931	2113	2309	2549
1721	1933	2129	2311	2551
1723	1949	2131	2333	2557
1733	1951	2137	2339	2579
1741	1973	2141	2341	2591
1743	1979	2143	2347	2593
1759	1987	2153	2351	
1757	1993	2161	2357	
1773	1997	2179	2371	
1787	1999		2377	
1787			2381	
1789			2383	
			2389	
			2393	
			2399	

2600—2800	2800—3000	3000—3200	3200—3400	3400—3600
2609	2801	3001	3203	3407
2617	2803	3011	3209	3413
2621	2819	3019	3217	3434
2633	2833	3023	3221	3449
2647	2837	3027	3229	3457
2657	2843	3041	3251	3461
2659	2851	3049	3253	3463
2663	2857	3061	3257	3467
2671	2861	3067	3259	3469
2677	2879	3079	3271	3491
2683	2887	3083	3299	3499
2687	2897	3089	3301	3511
2689	2903	3109	3307	3517
2693	2909	3119	3313	3527
2699	2917	3121	3319	3529
2707	2927	3137	3323	3533
2711	2939	3163	3329	3539
2713	2953	3167	3331	3541
2719	2957	3169	3343	3547
2729	2963	3189	3347	3557
2731	2969	3191	3359	3559
2741	2971		3361	3571
2749	2999		3371	3581
2753			3373	3583
2767			3389	3593
2777			3391	
2789				
2791				
2797				

3600—3800	3800—4000	4000—4200	4200—4400	4400—4600
3607	3803	4001	4201	4409
3613	3821	4003	4211	4421
3617	3823	4007	4217	4423
3623	3833	4013	4219	4441
3631	3847	4019	4229	4447
3637	3851	4021	4231	4451
3643	3853	4027	4241	4457
3659	3863	4049	4243	4463
3671	3877	4051	4253	4481
3673	3881	4057	4259	4483
3677	3889	4073	4261	4493
3691	3907	4079	4271	4507
3697	3911	4091	4273	4513
3701	3917	4093	4283	4517
3709	3919	4099	4289	4519
3719	3923	4111	4297	4523
3727	3929	4127	4327	4547
3733	3931	4129	4337	4549
3739	3943	4133	4339	4561
3761	3947	4139	4349	4567
3767	3967	4153	4357	4583
3769	3989	4157	4363	4591
3779		4159	4373	4597
3793		4177	4391	
3797			4397	

4600—4800	4800—5000	5000—5200	5200—5400	5400—5600
4603	4801	5003	5209	5407
4621	4813	5009	5227	5413
4637	4817	5011	5231	5417
4639	4831	5021	5233	5419
4643	4861	5023	5237	5431
4649	4871	5039	5261	5437
4651	4877	5051	5273	5441
4657	4889	5059	5279	5443
4663	4903	5077	5281	5449
4673	4909	5081	5297	5471
4679	4919	5087	5303	5477
4691	4931	5099	5309	5479
4703	4933	5101	5323	5483
4721	4937	5107	5333	5501
4723	4943	5113	5347	5503
4729	4951	5119	5351	5507
4733	4957	5147	5381	5519
4751	4967	5153	5387	5521
4759	4969	5167	5393	5527
4783	4973	5171	5399	5557
4787	4987	5179		5563
4789	4993	5189		5569
4793	4999	5197		5573
4799				5581
				5591

5600—5800	5800—6000	6000—6200	6200—6400	6400—6600
5623	5801	6007	6203	6421
5639	5807	6011	6211	6427
5641	5813	6029	6217	6449
5647	5821	6037	6221	6451
5651	5827	6043	6229	6469
5653	5839	6047	6247	6473
5657	5843	6053	6257	6481
5659	5849	6067	6263	6491
5669	5851	6073	6269	6521
5683	5857	6079	6271	6529
5689	5861	6089	6277	6547
5693	5867	6091	6287	6551
5701	5869	6101	6299	6553
5711	5879	6113	6301	6563
5717	5881	6121	6311	6569
5737	5897	6131	6317	6571
5741	5903	6133	6323	6577
5743	5923	6143	6329	6581
5749	5927	6151	6337	6599
5779	5939	6163	6343	
5783	5953	6173	6353	
5791	5981	6197	6359	
	5987	6199	6361	
			6367	
			6373	
			6379	
			6389	
			6397	

6600—6800	6800—7000	7000—7200	7200—7400	7400—7600
6617	6803	7001	7207	7411
6609	6823	7013	7211	7417
6637	6827	7019	7213	7433
6653	6829	7027	7219	7451
6659	6833	7039	7229	7457
6661	6841	7043	7237	7459
6673	6857	7057	7243	7477
6679	6863	7069	7247	7481
6689	6868	7079	7253	7487
6691	6871	7103	7283	7489
6701	6883	7109	7297	7499
6703	6899	7121	7307	7507
6709	6907	7127	7309	7517
6719	6911	7129	7321	7523
6733	6917	7151	7331	7529
6761	6947	7159	7333	7537
6763	6949	7177	7349	7541
6779	6959	7187	7351	7547
6781	6961	7193	7369	7549
6791	6967		7393	7559
6793	6971			7561
	6977			7573
	6983			7577
	6991			7583
	6997			7589
				7591

7600—7800	7800—8000	8000—8200	8200—8400	8400—8600
7603	7817	8009	8209	8419
7607	7823	8011	8219	8423
7621	7829	8017	8221	8429
7639	7841	8039	8231	8431
7643	7853	8053	8233	8443
7649	7867	8059	8237	8447
7669	7873	8069	8243	8461
7673	7877	8081	8263	8467
7681	7879	8087	8269	8501
7687	7883	8089	8273	8513
7691	7901	8093	8287	8521
7694	7907	8101	8291	8527
7703	7919	8111	8293	8537
7717	7927	8117	8297	8539
7723	7933	8123	8311	8543
7727	7937	8147	8317	8563
7741	7949	8161	8329	8573
7753	7951	8167	8353	8581
7757	7963	8171	8363	8597
7759	7993	8179	8369	8599
7789		8191	8377	
7793			8387	
			8389	

8600—8800	8800—9000	9000—9200	9200—9400	9400—9600
8609	8803	9001	9203	9403
8623	3807	9007	9209	9413
8627	8819	9011	9221	9419
8629	8821	9013	9227	9421
8641	8831	9029	9239	9431
8647	8837	9041	9241	9433
8663	8839	9043	9257	9437
8669	8849	9049	9277	9439
8677	8861	9059	9281	9461
8681	8863	9067	9283	9463
8689	8867	9091	9293	9467
8693	8887	9103	9311	9473
8699	8893	9109	9319	9479
8707	8923	9127	9323	9491
8713	8929	9133	9337	9497
8719	8933	9137	9341	9511
8731	8941	9151	9343	9521
8737	8951	9157	9349	9533
8741	8963	9161	9371	9539
8747	8969	9173	9377	9547
8753	8971	6181	9391	9551
8761	8999	9187	9397	9587
8779		9199		
8783				

9600—9800	9800—10000
9601	9903
9613	9811
9619	9817
9623	9829
9629	9833
9631	9839
9643	9851
9649	9857
9661	9859
9677	9871
9679	9883
9689	9887
9697	9901
9719	9907
9721	9923
9733	9929
9739	9931
9743	9941
9749	9949
9767	9967
9769	9973
9781	
9787	
9791	

Anhang V.

Perioden der Primzahlnenner von 1—100.

n	Anzahl der Perioden (e =)	Reihenfolge der Zähler	Periode (Reihenfolge für den erstgenannten Zähler)
7	1	1, 3, 2, 6, 4, 5	142857
11	5	1, 10	09
		2, 9	18
		3, 8	27
		4, 7	36
		5, 6	45
13	2	1, 10, 9, 12, 3, 4	076923
		2, 7, 5, 11, 6, 8	153846
17	1	1, 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12	0588235294117647
19	1	1, 10, 5, 12, 6, 3, 11, 15, 17, 18, 9, 14, 7, 13 16, 8, 4, 2	052631578947368421
23	1	1, 10, 8, 11, 18, 19, 6, 14, 2, 20, 16, 22, 13, 15, 12, 5, 4, 17, 9, 21, 3, 7	0434782608695652173913

n	Anzahl der Perioden (e =)	Reihenfolge der Zähler	Periode (Reihenfolge für den erstgenannten Zähler).
29	1	1, 10, 13, 14, 24, 8, 22, 17, 25, 18, 6, 2, 20, 26, 28, 19, 16, 15, 5, 21, 7, 12, 4, 11, 23, 27, 9, 3	0344827586206896551724137931
31	2	1, 10, 7, 8, 18, 25, 2, 20, 14, 16, 5, 19, 4, 9, 28	032258064516129
		3, 30, 21, 24, 23, 13, 6, 29, 11, 17, 15, 26, 12, 27, 22	096774193548387
37	12	1, 10, 26	027
		2, 20, 15	054
		3, 30, 4	081
		5, 13, 19	135
		6, 23, 8	162
		7, 33, 34	189
		9, 16, 12	243
		11, 36, 27	297
		14, 29, 31	378
		17, 22, 35	459
		18, 32, 24	486
		21, 25, 28	567

n	Anzahl der Perioden (e =)	Reihenfolge der Zähler	Periode (Reihenfolge für den erstgenannten Zähler)
41	8	1, 10, 18, 16, 37	02439
		2, 20, 36, 32, 33	04874
		3, 30, 13, 7, 29	07317
		4, 40, 31, 23, 25	09756
		5, 9, 8, 39, 21	12195
		6, 19, 26, 14, 17	14634
		11, 28, 34, 12, 38	26829
		15, 27, 24, 35, 22	36585
43	2	1, 10, 14, 11, 24, 25, 35, 6, 17, 41, 23, 15, 21, 38, 36, 16, 31, 9, 4, 40, 13	023255813953488372093
		2, 20, 28, 22, 5, 7, 27, 12, 34, 39, 3, 30, 42, 33, 29, 32, 19, 18, 8, 37, 26	046511627906976744186
47	1	1, 10, 6, 13, 36, 31, 28, 45, 27, 35, 21, 22, 32, 38, 4, 40, 24, 5, 3, 30, 18, 39, 14, 46, 37, 41, 34, 11, 16, 19, 2, 20, 12, 26, 25, 15, 9, 43, 7, 23, 42, 44, 17, 29, 8, 33,	0212765957446808510638297 8723404255319148936l7
53	4	1, 10, 47, 46, 36, 42, 49, 13, 24, 28, 15, 44, 16	018867924528
		2, 20, 41, 39, 19, 31, 45, 26, 48, 3, 30, 35, 32	0377358490566
		4, 40, 29, 25, 38, 9, 37, 52, 43, 6, 7, 17, 11	0754716981132
		5, 50, 23, 18, 21, 51, 33, 12, 14, 34, 22, 8, 27	0943396226415

n	Anzahl der Perioden (e =)	Reihenfolge der Zähler	Periode (Reihenfolge für den erstgenannten Zähler)
59	1	1, 10, 41, 56, 29, 54, 9, 31, 15, 32, 25, 14, 22, 43, 17, 52, 48, 8, 21, 33, 35, 53, 19, 13, 12, 2, 20, 23, 53, 58, 49, 18, 3, 30, 5, 50, 28, 44, 27, 34, 45, 37, 16, 42, 7, 11, 51, 38, 26, 24, 4, 40, 46, 47, 57, 39, 36, 6	0169491525423728813559322 0338983050847457627118644 06779661
61	1	1, 10, 39, 24, 57, 21, 27, 26, 16, 38, 14, 18, 58, 31, 5, 50, 12, 59, 41, 44, 13, 8, 19, 7, 9, 29, 46, 33, 25, 6, 60, 51, 22, 37, 4, 40, 34, 35, 45, 23, 47, 43, 3, 30, 56, 11, 49, 2, 20, 17, 48, 53, 42, 54, 52, 32, 15, 28, 36, 55	0163934426229508196721311 4754098360655737604918032 7868852459
67	2	1, 10, 33, 62, 17, 36, 25, 49, 21, 9, 23, 29, 22, 19, 56, 24, 39, 55, 14, 6, 60, 64, 37, 35, 15, 16, 26, 59, 54, 4, 40, 65, 47	0149253731343283582089552 23880597
		2, 20, 66, 57, 34, 5, 50, 31, 42, 18, 46, 58, 44, 38, 45, 48, 11, 43, 28, 12, 53, 61, 7, 3, 30, 32, 52, 51, 41, 8, 13, 63, 27	0298507462686567164179104 47761194

n	Anzahl der Perioden (e =)	Reihenfolge der Zähler	Periode (Reihenfolge für den erstgenannten Zähler)
71	2	1, 10, 29, 6, 60, 32, 36, 5, 50, 3, 30, 16, 18, 38, 25, 37, 15, 8, 9, 19, 48, 54, 43, 4, 40, 45, 24, 27, 57, 2, 20, 58, 12, 49, 64	01408450704225352112676056338028169
		7, 70, 61, 42, 65, 11, 39, 35, 66, 21, 68, 41, 55, 53, 33, 46, 34, 56, 63, 62, 52, 23, 17, 28, 67, 31, 26, 47, 44, 14, 69, 51, 13, 59, 22	09859154929577464788732394366197183
73	9	1, 10, 27, 51, 72, 63, 46, 22	01369863
		2, 20, 54, 29, 71, 53, 19, 44	02739726
		3, 30, 8, 7, 70, 43, 65, 66	04109589
		4, 40, 35, 58, 69, 33, 38, 15	05479452
		5, 50, 62, 36, 68, 23, 11, 37	06849315
		6, 60, 16, 14, 67, 13, 57, 59	08219178
		9, 17, 24, 21, 64, 56, 49, 52	12328767
		12, 47, 32, 28, 61, 26, 41, 45	16438356
		18, 34, 48, 42, 55, 39, 25, 31	24657534

n	Anzahl der Perioden (e =)	Reihenfolge der Zähler	Periode (Reihenfolge für den erstgenannten Zähler)
79	6	1, 10, 21, 52, 46, 65, 18, 22, 62, 67, 38, 64, 8	0126582278481
		2, 20, 42, 25, 13, 51, 36, 44, 45, 55, 76, 49, 16	0253164556962
		3, 30, 63, 77, 59, 37, 54, 66, 28, 43, 35, 34, 24	0379746835443
		4, 40, 5, 50, 26, 23, 72, 9, 11, 31, 73, 19, 32	0506329113924
		6, 60, 47, 75, 39, 74, 29, 53, 56, 7, 70, 68, 48	0759493670886
		12, 41, 15, 71, 78, 69, 58, 27, 33, 14, 61, 57, 17	1518987341772
83	2	1, 10, 17, 4, 40, 68, 16, 77, 23, 64, 59, 9, 7, 70, 36, 28, 31, 61, 29, 41, 78, 33, 81, 63, 49, 75, 3, 30, 51, 12, 37, 38, 48, 65, 69, 26, 11, 27, 21, 44, 25	01204819277108433734939759 036144578313253
		2, 20, 34, 8, 80, 53, 32, 71, 46, 45, 35, 18, 14, 57, 72, 56, 62, 39, 58, 82, 73, 66, 79, 43, 15, 67, 6, 60, 19, 24, 74, 76, 13, 47, 55, 52, 22, 54, 42, 5, 50	02409638554216867469879518 072289156626506

n	Anzahl der Perioden (e =)	Reihenfolge der Zähler	Periode (Reihenfolge für den erstgenannten Zähler)
89	2	1, 10, 11, 21, 32, 53, 85, 49, 45, 5, 50, 55, 16, 71, 87, 69, 67, 47, 25, 72, 8, 80, 88, 79, 78, 68, 57, 36, 4, 40, 44, 84, 39, 34, 73, 18, 2, 20, 22, 42, 64, 17, 81, 9	011235955056179775280898876404494382022471 91
		3, 30, 33, 63, 7, 70, 77, 58, 46, 15, 61, 76, 48, 35, 83, 29, 23, 52, 75, 38, 24, 62, 86, 59, 56, 26, 82, 19, 12, 31, 43, 74, 28, 13, 41, 54, 6, 60, 66, 37, 14, 51, 65, 27	03370786516853932584269662921348314606741573
97	1	1, 10, 3, 30, 9, 90, 27, 76, 81, 34, 49, 5, 50, 15, 53, 45, 62, 38, 89, 17, 73, 51, 25, 56, 75, 71, 31, 19, 93, 57, 85, 74, 61, 28, 86, 84, 64, 58, 95, 77, 91, 37, 79, 14, 43, 42, 32, 29, 96, 87, 94, 67, 88. 7, 70, 21, 16, 63, 48, 92, 47, 82, 44, 52, 35, 59, 8, 80, 24, 46, 72, 41, 22, 26, 66, 78, 4, 40, 12, 23, 36, 69, 11, 13, 33, 39, 2, 20, 6, 60, 18, 83, 54, 55, 65, 68	010309278350515463917525773195876288659793814432896907216494845360824742260412371134020618 5567

Richard Schmidt, Leipzig-Reudnitz.