

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



5146

L. nrw.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299209

Vorträge
über
Mechanik

als Grundlage für das
Bau- und Maschinenwesen.

Von
Wilh. Keck,
Geh. Regierungsrat,
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Dritter Teil:
Allgemeine Mechanik.

Zweite Auflage,
bearbeitet von
Dr. Ing. Ludwig Hotopp,
Geheimer Baurat,
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Mit 235 Holzschnitten.



Hannover.
Helwingsche Verlagsbuchhandlung.
1915.

W 5/3
56/2



II 5146

Druck von Th. Schäfer, Hannover.

Akc. Nr.

4454/56

Vorwort zur ersten Auflage.

Der vorliegende dritte und letzte Band meiner „Vorträge über Mechanik“ mit der Bezeichnung „Allgemeine Mechanik“ kehrt noch einmal zu den Anfangsgründen dieser Wissenschaft zurück, um die Grundbegriffe allgemeiner zu fassen, als es bei der ersten Einführung im ersten Teile rätlich erschien.

Das Buch behandelt zunächst das wichtigste aus der geometrischen Bewegungslehre der Punkte und Körper. Dann folgt die Mechanik des Massenpunktes, wobei zur Ergänzung des im ersten Bande Gegebenen namentlich die Wirkung veränderlicher Kräfte berücksichtigt wird mit Anwendung auf elastische und ähnliche Schwingungen, Planetenbewegung, Einwirkung des Luftwiderstandes u. dgl. Hieran schließt sich die Mechanik beliebiger Massengruppen und starrer Körper.

Bei allen diesen Untersuchungen habe ich besonderes Gewicht auf die Durchrechnung von Zahlenbeispielen gelegt; auch wurde angestrebt, durch Vergleiche zwischen den verschiedenen Fällen zum Nachdenken über den inneren Zusammenhang der Formelergebnisse anzuregen. Von Anwendungen auf praktische Fälle mögen genannt werden: die Einwirkung der schwingenden Glocke auf den Glockenstuhl (S. 249), die Schwingungen der Unruhe einer Taschenuhr (S. 274), die Schwingungen eines Eisenbahnwagens (S. 296), die Bewegung eines Eisenbahnzuges unter Einwirkung des Luftwiderstandes und der Bremsen (S. 284), die Bewegung des Geschosses in einem Kanonenrohr und außerhalb desselben (S. 307).

Den Schluß des Buches bilden kurze Mitteilungen über die wesentlichsten Förderer der Mechanik; greiflicher Weise sind hierbei

die noch in vollem Schaffen stehenden Männer nicht mit aufgeführt worden.

Bei der Bearbeitung dieses Teiles wurden besonders folgende Werke benutzt: Lehrbuch der Analytischen Mechanik, von A. Ritter; Theorie der Bewegung und der Kräfte, von Wilh. Schell; Mechanik, von Woldemar Voigt; die Mechanik in ihrer Entwicklung, von Ernst Mach; Allgemeine Mechanik, von E. Budde; Lehrbücher der Statik und Dynamik fester Körper, von Jul. Petersen; Geschichte der Mechanik, von M. Rühlmann.

Alphabetische Verzeichnisse des Inhaltes und der in den Formeln benutzten Buchstaben sind auch diesem Bande beigelegt.

Hannover, im März 1898.

Keck.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Nachdem der erste und zweite Teil des vorzüglichen K e c k -schen Lehrbuches über Technische Mechanik bereits in vierter und dritter Auflage erschienen sind, ist nun auch eine Neuauflage des dritten, allgemeinen Teiles erforderlich geworden und deren Bearbeitung, wie die der beiden ersten Teile, von mir übernommen.

Die Umgrenzung des Stoffes hat einige Erweiterung erfahren, die Stoffbehandlung aber ist wiederum nach den vom Urheber des Werkes befolgten Gesichtspunkten geschehen.

In der ersten Abteilung haben die vektoranalytischen Darstellungsmethoden für Zwecke der Mechanik eine kurze Erläuterung gefunden, um einer gelegentlichen Benutzung dieses neueren Hilfsmittels möglichst die Wege zu ebnen. Aus gleichem Grunde ist bei Durcharbeitung des Buches an geeignet scheinenden Stellen neben der kartesischen auch die vektoranalytische Darstellungsart benutzt worden.

In den Abteilungen Mechanik des Massenpunktes und eine Gruppe von Massenpunkten ist bei der Darstellung der Beziehungen zwischen der Arbeit einer Kraft oder eines Kraftfeldes und dem Arbeitsvermögen eines Massenpunktes oder einer Massengruppe der Begriff des Potentials allgemeiner und eingehender behandelt worden. Dasselbe gilt hinsichtlich der durch den Flächensatz ausgedrückten allgemeinen Beziehungen zwischen dem Antrieb einer Kraft oder Kräftegruppe und der Bewegungsgröße der unter der Kraftwirkung stehenden Masse.

Ferner ist in die Abteilung „Mechanik einer Massengruppe“ eine ausführliche Theorie des sogenannten Massenausgleichs und

deren Anwendung auf Kolbenkurbelgetriebe neu aufgenommen worden. Auch sind in einem besonderen Abschnitt die Biegemomente, Querkräfte usw. und die Spannungen und Formänderungen behandelt, die in beschleunigt bewegten elastisch-festen Körpern unter der Wirkung des Kampfes zwischen Kraft und träger Masse entstehen.

Trotz dieser gebotenen Ergänzungen hat das Buch auch in seiner neuen Auflage in der Hauptsache noch als das Werk seines verdienten Urhebers zu gelten.

Hannover, im September 1914.

L. Hotopp.

Inhalt.

Erste Abteilung.

Gerichtete Größen, ihre Darstellung und Behandlung in der Mechanik.

	Seite
A. Allgemeines, Begriffserklärung.	1
B. Mathematische Behandlung der Vektoren.	
1. Die Addition von Vektoren	2
2. Multiplikation	6
a) Das äußere Produkt zweier Vektoren	6
b) Das innere Produkt	10

Zweite Abteilung.

Geometrische Bewegungslehre.

A. Bewegung eines geometrischen Punktes.

1. Geradlinige Bewegung eines Punktes	14
2. Krummlinige Bewegung eines Punktes	15
a) Darstellung in einem rechtwinkligen Achsenkreuz	15
b) Darstellung durch Vektoren	21

B. Bewegung eines geometrischen Körpers

1. Verschiebung eines geometrischen Körpers	26
2. Ebene Bewegung eines Körpers; Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene	27
3. Endliche Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene. Rollbewegung der Polbahnen	32
4. Drehung eines Körpers um einen festen Punkt. Bewegung einer sphärischen Figur auf ihrer Kugelfläche	36
5. Allgemeine Bewegung eines Körpers; Schraubenbewegung	39

C. Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen eines geometrischen Körpers.

1. Drehung und Verschiebung	43
2. Drehungen um parallele Achsen	45
3. Drehungen um sich schneidende Achsen	49
4. Drehungen um Achsen, die nicht in derselben Ebene liegen	50
5. Bewegung eines Punktes in einer Bahnlinie mit beliebiger Bewegung	51

	Seite
D. Scheinbare (relative) Bewegung	58
1. Scheinbare Bewegung eines Punktes in bezug auf einen anderen	60
2. Scheinbare Bewegung in bezug auf einen beliebig bewegten Raum	63
 Dritte Abteilung. Mechanik des Massenpunktes.	
A. Geradlinige Bewegung des Massenpunktes	66
1. Geradlinige Schwingung eines Massenpunktes	68
a) Schwingungen infolge elastischer Aufhängung	74
b) Lotrechte Schwingung schwimmender Körper	76
c) Eintauchen eines ins Wasser fallenden lotrechten Stabes	78
2. Fall eines Massenpunktes aus sehr großer Höhe ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand	80
3. Bewegung unter alleiniger Einwirkung eines Flüssigkeitswiderstandes	86
4. Lotrechte Wurf- und Fallbewegung in einem widerstehenden Mittel	89
a) Steigen	89
b) Fallen	91
c) Bestimmung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit k	94
d) Übergang zur widerstandslosen Bewegung	97
B. Freie krummlinige Bewegung eines Massenpunktes	98
1. Der Satz der Flächen	99
2. Der Satz des Arbeitsvermögens. Potential oder Kräftefunktion; Niveauflächen	103
3. Bewegung eines Massenpunktes unter Wirkung einer von einem Zentrum ausgehenden, mit der Entfernung von diesem verhältnismäßigen Anziehungskraft	113
4. Bewegung der Himmelskörper unter Einwirkung der Massenanziehung nach dem Newtonschen Gesetze	118
Umlaufzeit	125
Der Mittelpunkt der Erde als Zentrum	125
Der Mittelpunkt der Sonne als Zentrum	126
Verhältnis der Masse der Sonne zu der eines Planeten	128
5. Wurfbewegung mit Luftwiderstand	129
Besonderer Fall einer flachen Wurfbahn	131
C. Bewegung eines Massenpunktes auf vorgeschriebener Bahnlinie	133
1. Bewegung eines Massenpunktes längs einer in lotrechter Ebene befindlichen Kreislinie unter Berücksichtigung der Reibung	134
2. Reibungslose Bewegung eines Massenpunktes unter Einwirkung der Schwere auf einer in lotrechter Ebene befindlichen Bahnlinie	137
3. Das Kreispendel	138
4. Das Zykloidenpendel	143
5. Bewegung eines schweren Punktes in einer Parabel mit lotrechter Achse	148

	Seite
D. Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugelfläche; räumliches Pendel	150
E. Scheinbare (relative) Bewegung eines Massenpunktes . .	155
1. Bewegung eines Massenpunktes in einem geraden, sich gleichförmig drehenden Rohr ohne Reibung	157
2. Bewegung eines Massenpunktes in einem gekrümmten, sich gleichförmig drehenden Rohre	160
3. Vorgeschriebene Bewegung längs eines Meridians der sich drehenden Erde Unmittelbare Berechnung der seitlichen Abweichung.	162 165
4. Vorgeschriebene Bewegung längs einer lotrechten Bahn auf der sich drehenden Erde	166
5. Einfluß der Drehung der Erde auf die Pendelschwingung; Foucaultscher Pendelversuch	168
6. Scheinbare Bewegung der Planeten in bezug auf die Sonne	170

Vierte Abteilung.

Mechanik einer Gruppe von Massenpunkten.

A. Gleichgewicht einer Massengruppe.

1. Satz der willkürlichen Verrückungen; Satz der virtuellen Verrückungen	172
2. Anwendungen der Sätze der willkürlichen bzw. der virtuellen Verrückungen	179
a) Hebel	179
b) Schiefe Ebene	180
c) Aufzugsmaschinen	183
d) Gelenkstangenverbindungen	185
e) Klappbrücken	189

B. Bewegung einer Massengruppe.

1. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes; Satz vom Antriebe . .	192
2. Anwendungen des Satzes von der Bewegung des Schwerpunktes und des Satzes vom Antriebe	195
a) Gerader, zentraler Stoß	195
b) Verhalten eines auf dem Wasser schwimmenden Kannes . .	196
c) Der Schwerpunkt als Mittelpunkt einer Massengruppe . . .	197
3. Der Satz des Arbeitsvermögens	198
Bewegung einer Kette	199
Schwingung des Wassers in einer gekrümmten Röhre	201
Querschwingungen eines elastischen, eingespannten Stabes . .	203
4. Zerlegung des Arbeitsvermögens einer beliebigen Massengruppe . .	205
5. Potential einer Massengruppe	208
a) Potential einer dünnen Hohlkugel	209
b) Potential einer Hohlkugel von endlicher Wandstärke	210
c) Potential einer Vollkugel	212
d) Selbstpotential einer Vollkugel	213

	Seite
6. Bewegungsgröße und Flächensatz in bezug auf eine Massengruppe	215
7. Zwangläufige Bewegung einer Massengruppe gegen einen festen Körper, Massenausgleich	219
C. Bewegung starrer Körper.	
1. Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Richtung der Achse	239
2. Trägheitsellipsoid und Zentralellipsoid	240
3. Berechnung der Trägheitsmomente einiger Körper	243
a) Hauptträgheitsmomente des Parallelepipeds	244
b) Hauptträgheitsmomente eines Zylinders	245
c) Hauptträgheitsmomente eines Kegels	246
d) Hauptträgheitsmomente eines Ellipsoides	247
4. Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse	248
5. Widerstände der Achse einer schwingenden Glocke	249
6. Aus Lotrechter Stellung umfallender Stab	254
7. Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt	256
8. Bewegung des Kreisels	261
9. Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne Einwirkung bewegender Kräfte	269
10. Bewegung eines freien Körpers	270
11. Schwingungen eines Schiffes	271
12. Drehungspendel; Unruhe	274
13. Umfallende, auf dem Boden reibungslos ausgleitende Stange	277
14. Rollbewegung auf schiefer Ebene	280
15. Anhalten eines Eisenbahnzuges durch Bremsung	284
16. Elastische Schwingungen eines Eisenbahnwagens	290
17. Wälzendes oder wiegendes Pendel	294
a) Auf ebener Fläche	294
b) Wiegendes Pendel in einer Hohlfläche; Hypozykloidenwiege	299
c) Wiegendes Pendel auf einer gewölbten Fläche; Epizykloidenwiege	302
d) Die Wippe	303
e) Hängende Wiege	304
18. Wirkung des Pulvers in einer Kanone	307
D. Elastisch-feste Körper in Beschleunigungszuständen.	
1. Allgemeines	313
2. Um eine wagerechte Querachse sich drehender Stab	314
3. Pleuelstange im Kurbelmechanismus	319
4. Biegung einer rotierenden Welle, kritische Geschwindigkeit	324
5. Spannungen in kreiszylindrischen Ringkörpern durch Rotation oder Radialkräfte	332

Vierte Abteilung.

Kurze Mitteilungen über die wesentlichsten Förderer der Mechanik.

1. Archimedes	339
2. Heron	339

	Seite
3. Pappus	339
4. Leonardo da Vinci	339
5. Stevin	340
6. Galilei	340
7. Huyghens	340
8. Newton	340
9. Johann Bernoulli	341
10. Daniel Bernoulli	341
11. Leonhard Euler	341
12. d'Alembert	341
13. Lagrange	341
14. Coulomb	342
15. Poincot	342
16. Navier	342
17. Coriolis	342
18. Poncelet	342
19. de Saint-Venant	342
20. Weisbach	343
21. Rankine	343
22. Clapeyron	343
23. Culmann	343
24. Winkler	343
25. Grashof	343
26. Bauschinger	344
27. Castigliano	344
28. H. Scheffler	344
29. v. Tetmajer	344
30. W. Ritter	344
31. A. Ritter	344

Alphabetisches Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln vorkommen- den Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Seiten des Buches	345
Alphabetisches Verzeichnis der behandelten Gegenstände	347

Erste Abteilung.

Gerichtete Grössen, ihre Darstellung und Behandlung in der Mechanik.

A. Allgemeines, Begriffserklärung.

Die in der Mechanik vorkommenden Grössen sind, abgesehen von ihrer Verschiedenheit im einzelnen, allgemein von zweierlei Art. Den einen ist neben ihrer Grösse an sich noch eine Richtung im Raume eigen; sie sind erst durch beide Merkmale, Grösse und Richtung eindeutig bestimmt. Man nennt sie daher „gerichtete Grössen“ oder „Vektoren“. Die andern „richtunglosen Grössen“ sind schon durch ihre Grösse an sich, d. h. bei gegebener Maßeinheit, durch eine einzige Zahl eindeutig bestimmt. Man nennt sie in dieser Unterscheidung von den „gerichteten Grössen“ „Skalare“.

Zu den Skalaren sind u. a. die Begriffe: Arbeit, Zeit, Masse, Dichte usw. zu zählen. Als Vektoren sind außer den Begriffen: Kraft, Geschwindigkeit, geradlinige Bewegung eines Punktes usw. nach den Darlegungen Bd. I Auflage 4 S. 139 z. B. auch Drehmomente usw., anzusprechen.

Jeder Vektor kann geometrisch durch eine Strecke dargestellt werden, deren Länge, nach irgendeinem Maßstabe gemessen, die Grösse des Vektors, seinen „Betrag“ oder „Tensor“ ausdrückt, und deren Richtung auch diejenige des Vektors kennzeichnet. Zur eindeutigen Bestimmung eines Vektors in einem rechtwinkligen dreiachsigen Koordinatenkreuz sind daher drei Zahlenangaben erforderlich, nämlich entweder die seiner Grösse und seiner Richtungswinkel gegen zwei Achsen, oder die seiner drei rechtwinkligen Projektionen gegen die Koordinatenachsen, d. i. seiner drei Komponenten.

Unter Umständen können gewisse mathematische Operationen mit Vektoren vorteilhaft und übersichtlich ohne Darstellung in einem bestimmten Koordinatensystem mit den Vektoren selbst in kurzer Bezeichnung durchgeführt werden. Für solche Zwecke pflegt man die Vektoren zum Unterschiede von den Skalaren mit deutschen, letztere dagegen mit lateinischen Buchstaben zu bezeichnen. Die Buchstaben \mathfrak{A} , \mathfrak{B} usw. drücken also aus, daß es sich um gerichtete Größen mit den ihnen eigenen, zunächst nicht besonders gekennzeichneten Merkmalen handelt. Will man, wie zuweilen erwünscht, nur die Größe des Vektors an sich, seinen „Tensor“ zum Ausdruck bringen, so kann das nach dem Vorgange von R. Gans durch eine besondere Bezeichnung etwa wie folgt geschehen: $|\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{B}|$ usw.

Die besonderen mathematischen Operationen mit Vektorgrößen sind Gegenstand der sogen. Vektoranalysis, die neuerdings in steigendem Maße, insbesondere bei Untersuchung elektromechanischer und hydrodynamischer Vorgänge mit Vorteil Anwendung findet.

B. Mathematische Behandlung der Vektoren.

1. Die Addition von Vektoren.

Bei der Zusammensetzung von Kräften an starren Körpern mit Hilfe des sogen. Kräftecks (Bd. I, Aufl. 4, S. 43), eines Streckenzuges, welcher durch Parallelverschiebung der die Kräfte geometrisch darstellenden Strecken entsteht und in dessen Schlußseite die sogen. Mittelkraft oder Resultante der gegebenen Kräftegruppe erhalten wird, pflegt man diese Mittelkraft, die die gleiche Wirkung auf den Bewegungszustand des starren Körpers ausübt, als alle die Einzelkräfte zusammen, als deren Summe, und zwar, da es sich bei Bildung derselben nicht um eine algebraische Summierung handelt, als geometrische oder graphische Summe zu bezeichnen. Man schreibt

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \dots,$$

wobei aus der deutschen Schreibweise der Kräfte ihre Vektoreigenschaft kenntlich wird. Dieselbe Darstellungsweise läßt sich in

bezug die gleichsinnige Zusammenfügung beliebiger anderer gleichartiger Vektorgrößen benutzen, so daß die Gleichung

$$1) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \dots$$

allgemein aussagt: der Vektor \mathfrak{R} ist die Schlußseite eines aus den Vektoren $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ usw. durch Parallelverschiebung gebildeten Streckenzuges (vgl. Fig. 1).

Fig. 1.

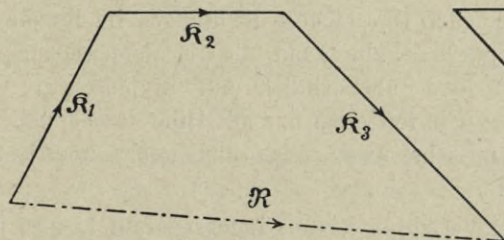
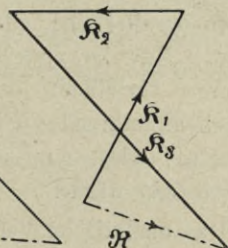


Fig. 2.



Ist einer der zusammenzufügenden Vektoren mit negativen Vorzeichen behaftet, so ist die ihn darstellende Strecke in dem zu bildenden Streckenzug mit entgegengesetztem Pfeil einzufügen, so daß die Beziehung

$$2) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \dots$$

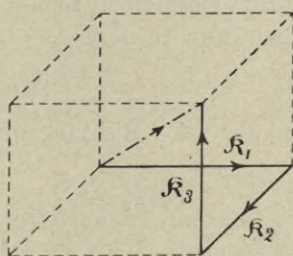
durch die Fig. 2 geometrisch dargestellt erscheint. Allgemein kann man auch die geometrische Zusammenfügung oder Addition von Vektoren ausdrücken durch das Summenzeichen

$$3) \quad \mathfrak{R} = \sum \mathfrak{R}.$$

Sind die zu vereinigenden Vektoren alle von gleicher Richtung, so nimmt der zu bildende Streckenzug die Form einer geraden Linie an. Die Schlußseite als geometrische Summe der Einzelstrecken ist nun zugleich algebraische Summe derselben.

Die in Gl. 1 und 2 gegebene Darstellungsweise des resultierenden Vektors \mathfrak{R} aus den Einzelvektoren $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ usw. bleibt auch gültig, wenn die die letzteren ausdrückenden Strecken nicht in einer Ebene liegen. Der zu bildende Streckenzug ist dann ein räumliches Gebilde (vgl. Bd. I, Aufl. 4, S. 41 und hier Fig. 3).

Fig. 3.



Die Gleichungen 1 und 2 drücken nur aus, daß der resultierende Vektor allgemein durch geometrische Summation der Einzelvektoren zu bilden ist. Zur wirklichen Durchführung dieser Operation aber, die auf analytischem oder graphischem Wege geschehen kann, bedarf es einer Darstellung der zu vereinigenden Vektoren in einem etwa rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem oder einer maßstäblich zeichnerischen Darstellung in ein oder zwei Zeichenebenen, je nachdem die Vektoren alle in einer Ebene liegen, bezw. einer solchen parallel sind, oder verschiedene Richtungen im Raume aufweisen. Nur im ersteren Falle kann die Zusammensetzung der Vektoren vorteilhaft und übersichtlich auf graphischem Wege geschehen, während sie in letzterem nur mit Hilfe der darstellenden Geometrie, also nur sehr umständlich und wenig übersichtlich, möglich sein würde.

Das analytische Verfahren kommt immer darauf hinaus, jeden der zu summierenden Vektoren durch seine Komponenten in den zwei oder drei Achsrichtungen eines ebenen oder räumlichen Koordinatenkreuzes auszudrücken, die Komponenten in den einzelnen Achsrichtungen algebraisch zu summieren und die so in den Achsrichtungen erhaltenen zwei bezw. drei Vektoren \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} , bezw. \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} und \mathfrak{Z} durch geometrische Addition zu einem einzigen resultierenden Vektor \mathfrak{R} zusammenzusetzen. Sind \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 usw. die gegebenen Einzelvektoren α_1 , α_2 usw., β_1 , β_2 usw., γ_1 , γ_2 usw., deren Richtungswinkel in bezug auf die drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatenkreuzes, so erhält man

$$4) \quad \mathfrak{X} = \sum \mathfrak{R} \cdot \cos \alpha, \quad \mathfrak{Y} = \sum \mathfrak{R} \cdot \cos \beta \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z} = \sum \mathfrak{R} \cdot \cos \gamma,$$

wo in den Summengliedern nacheinander die Einzelwerte von \mathfrak{R} , α , β und γ einzusetzen sind. Den Tensor des resultierenden Vektors erhält man zu

$$5) \quad |\mathfrak{R}| = \sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}$$

und für seine Richtungswinkel

$$6) \quad \cos \alpha_r = \frac{\mathfrak{X}}{|\mathfrak{R}|}, \quad \cos \beta_r = \frac{\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{R}|}, \quad \cos \gamma_r = \frac{\mathfrak{Z}}{|\mathfrak{R}|}.$$

Liegen die Vektoren alle in einer der Koordinatenebenen, etwa in derjenigen $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, oder sind sie dieser parallel, so daß alle Richtungs-

winkel $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\cos \gamma = 0$, so wird auch $\mathfrak{B} = \sum \mathfrak{R} \cdot \cos \gamma = 0$ und Gl. 4 geht über in

$$7) \quad |\mathfrak{R}| = \sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2}.$$

Sind die Vektoren Kräfte, deren Richtungslinien durch einen Punkt gehen, so ist durch die Gl. 5 und 6 deren Mittelkraft nach Größe und Richtung bestimmt (vgl. Bd. I, Aufl. 4, S. 42). Stellen die Vektoren Drehmomente \mathfrak{M} in verschiedenen Drehungsebenen auf einen starren Körper wirkend dar, so kann man ihre mechanische Zusammenfügung gleichfalls allgemein ausdrücken durch die Gleichung

$$3a) \quad \mathfrak{M}_r = \sum \mathfrak{M} = \sum \mathfrak{R} \cdot r.$$

Zur wirklichen Durchführung der Operation aber würden auch hier in bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz die Gleichungen

$$4a) \quad \mathfrak{M}_x = \sum \mathfrak{M} \cdot \cos \delta, \quad \mathfrak{M}_y = \sum \mathfrak{M} \cos \varepsilon, \quad \mathfrak{M}_z = \sum \mathfrak{M} \cdot \cos \eta,$$

$$5a) \quad |\mathfrak{M}_r| = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2} \quad \text{und}$$

$$6a) \quad \cos \delta_r = \frac{\mathfrak{M}_x}{|\mathfrak{M}_r|}, \quad \cos \varepsilon_r = \frac{\mathfrak{M}_y}{|\mathfrak{M}_r|}, \quad \cos \eta_r = \frac{\mathfrak{M}_z}{|\mathfrak{M}_r|}$$

zu benutzen sein.

Sind bei Lösung der jeweils vorliegenden Aufgabe noch über die Gl. 4—6, bzw. 4a—6a hinausgehende allgemeine Entwicklungen notwendig, in denen der mechanische Wert einer gegebenen Vektorgruppe eine Rolle spielt, so kann man diesen unter Umständen mit Vorteil, anstatt durch die Gl. 4—6, zunächst bequemer und kürzer durch die Gl. 3 bzw. 3a ausdrücken.

Sind die Vektoren Kräfte im Raume, die in verschiedenen Angriffspunkten und Richtungen auf einen starren Körper einwirken, so würde die völlige Darstellung ihres mechanischen Wertes in bezug auf ein dreiachsiges rechtwinkliges Koordinatenkreuz der sechs Gleichungen 4—6 und 4a—6a bedürfen (vgl. Bd. I, 4. Aufl., S. 142), während er in allgemeiner und einfacher Form auch durch die Gleichungen 3 und 3a eindeutig festgelegt erscheint.

Will man ausdrücken, daß die Kräfte miteinander im Gleichgewicht stehen, ihr mechanischer Wert gleich Null ist, so kann das in der Vektorenschreibweise allgemein durch die beiden Gleichungen

$$8) \quad \dots \sum \mathfrak{R} = 0 \quad \text{und} \quad \sum \mathfrak{M} = \sum \mathfrak{R} \cdot r = 0$$

geschehen, während die Darstellung dieses Zustandes in bezug auf ein dreiaxsiges Koordinatenkreuz sechs Gleichungen, nämlich

$$9) \quad \dots \sum \mathfrak{K} \cdot \cos \alpha = 0, \quad \sum \mathfrak{K} \cdot \cos \beta = 0, \quad \sum \mathfrak{K} \cdot \cos \gamma = 0, \\ \sum \mathfrak{M} \cdot \cos \delta = 0, \quad \sum \mathfrak{M} \cdot \cos \varepsilon = 0, \quad \sum \mathfrak{M} \cdot \cos \eta = 0$$

erfordert.

Wenn es sich aber im gegebenen Falle um die wirkliche numerische Lösung einer Gleichgewichtsaufgabe handelt, etwa bestimmte Kräfte (Stützwiderstände) zu bestimmen sind, die mit andern im Gleichgewicht stehen, so wird man sich dabei immer auf ein Koordinatensystem stützen und zweckmäßig die sechs Gleichungen der Gruppe (9) benutzen. Soll dagegen nur allgemein ausgedrückt werden, daß die Kräfte im Gleichgewicht sind, so kann das unter Umständen vorteilhaft durch die beiden Gleichungen Gruppe (8) geschehen.

2. Multiplikation.

Wir wollen zunächst an zwei typischen und zugleich für die Anwendung wichtigen Beispielen der Multiplikation von Vektorgrößen diese Rechnungsart darlegen. Es wird sich zeigen, daß sie in zwei charakteristisch voneinander verschiedenen Weisen ausgeführt werden kann.

a) Das äußere Produkt zweier Vektoren.

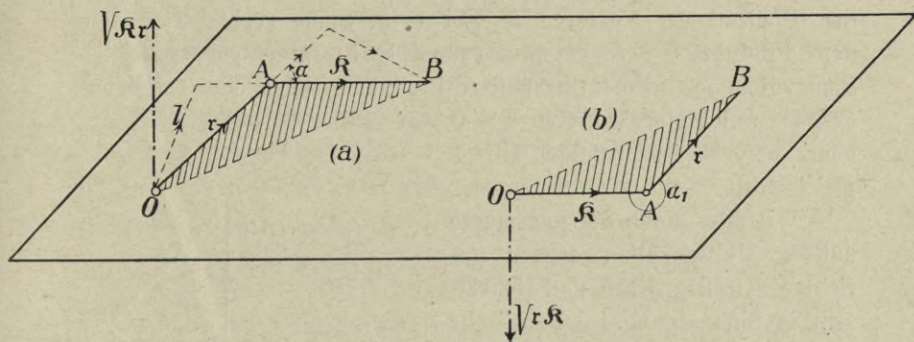
Das Drehbestreben, das eine Kraft \mathfrak{K} auf einen in einem Punkte O drehbar festgehaltenen starren Körper ausübt, wird bekanntlich mathematisch ausgedrückt durch das sogen. statische Moment \mathfrak{M} der Kraft in bezug auf jenen Punkt, bzw. in bezug auf eine durch den Punkt gehende, senkrecht gegen die Drehebene gerichtete Gerade als Drehungsachse.

Man schreibt $\mathfrak{M} = \mathfrak{K} \cdot l$, worin l die Länge des Lotes, vom Drehpunkte auf die Kraftrichtung gefällt, den Hebelsarm der Kraft bezeichnet (vgl. Fig. 4a). Ist r der Radiusvektor des Angriffspunktes A der Kraft \mathfrak{K} in bezug auf den Drehpunkt O als Nullpunkt und α der Winkel, den die Vektoren \mathfrak{K} und r miteinander einschließen, so läßt sich das Moment auch ausdrücken als

$$1) \quad \dots \mathfrak{M} = \mathfrak{K} \cdot r \cdot \sin \alpha.$$

Das Moment erscheint geometrisch als doppelter Flächeninhalt des Dreiecks OAB , das durch die Vektoren \mathfrak{R} und \mathfrak{r} festgelegt ist. Einer der Vektoren wird mit der zu ihm rechtwinkligen

Fig. 4.



„äußeren“ Komponente des andern multipliziert. Das Ergebnis wird als „äußeres Produkt“ bezeichnet. Man benutzt dafür in abgekürzter Schreibweise die Bezeichnung

$$2) \quad \dots \mathfrak{M} = V \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{r}$$

und pflegt in diesem allgemeinen Sinne auch \mathfrak{r} als Hebelarm zu bezeichnen. Dabei wollen wir uns erinnern, daß nach Bd. I, 4. Aufl., S. 139 das Moment \mathfrak{M} gleichfalls durch eine Pfeilstrecke, einen Vektor, dargestellt werden kann, der rechtwinklig auf der durch \mathfrak{r} und \mathfrak{R} festgelegten Drehungsebene des Momentes steht. Der Winkel α kann naturgemäß alle möglichen Werte von 0 bis 2π annehmen und würde zwischen 0 und π zu positiven, zwischen π und 2π zu negativen Momenten führen.

In der Vektor-Analyse pflegt man, um das positive oder negative Ergebnis der „äußeren Multiplikation“ zweier Vektoren durch diese allein unterschiedlich auszudrücken, die Reihenfolge der Faktoren in dem Produkte dafür zu benutzen, derart, daß

$$3) \quad \dots V \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{r} = -V \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{R}$$

gesetzt wird (vgl. Fig. 4a und 4b). Der Winkel α bleibt dabei auf Werte zwischen Null und π , sein Sinus auf positive Werte beschränkt. Für alle Winkelwerte zwischen Null und π ist das

äußere Produkt gleich $\mathcal{V} \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{r}$, für alle Werte zwischen π und 2π gleich $\mathcal{V} \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{R}$. Es werde hier noch besonders darauf hingewiesen, daß die Ungleichsinnigkeit der Vorzeichen beider Produkte bei absoluter Gleichheit derselben sich auch dadurch kennzeichnet, daß die dem Produkte $\mathcal{V} \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{r}$ entsprechende Dreiecksfläche OAB durch den Pfeilzug der Vektoren \mathfrak{R} und \mathfrak{r} im Sinne rechtsherum, die dem Produkte $\mathcal{V} \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{R}$ entsprechende (Fig. 5) im entgegengesetzten Sinne umlaufen wird. Das äußere Produkt gleicher oder entgegengesetzt gerichteter Vektoren $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$ ist zufolge Gl. 1 gleich Null.

Wie hier durch die sogenannte äußere Multiplikation zweier gerichteter Größen, Kraft und Hebelarm, im Sinne der Gl. 1 das statische Moment gebildet wurde, so läßt sich allgemein das äußere Produkt zweier Vektoren, einerlei, welche mechanische Bedeutung sie haben mögen, durch Gl. 1 definieren und durch die Schreibweise Gl. 2 ausdrücken. Gl. 3 könnte man für Vektoren im allgemeinen als Vervollständigung der gegebenen Definition des äußeren

Produktes ansehen. Wenn oben das statische Moment der Kraft P in bezug auf den Punkt O gleich dem doppelten Inhalt der Fläche des Dreiecks OAB erkannt wurde, so muß man sich vergegenwärtigen, daß es sich dabei nicht um eine rein geometrische Größe, sondern in gleichem Sinne um eine mechanische Größe handelt, als die Länge einer Strecke, nach bestimmtem Maßstabe gemessen, die Größe einer Kraft darstellt. Hier drückt ein bestimmtes Längsstück die Krafteinheit (Kilogramm oder Tonne usw.), dort ein bestimmtes Flächenstück die Momenteneinheit (kg/m , ton/m usw.) aus. Grundsätzlich nicht anders würde die Sache liegen, wenn das äußere Produkt irgendeiner anderen mechanischen Vektorgröße und eines reinen Längensvektors in Frage käme.

Fig. 5.

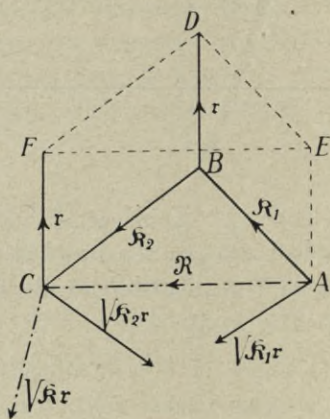
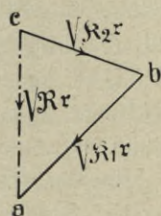


Fig. 5a.



Besonders wertvoll und wichtig an dem Ergebnis der äußeren Multiplikation ist, daß das äußere Produkt zweier Vektoren wiederum als Vektor durch eine einfache gerade Strecke darstellbar ist, so daß mehrere gleichartige äußere Produkte, etwa statische Momente, durch einfache geometrische Addition ihrer Vektoren zu einer einzigen Vektorgröße vereinigt werden können.

Kommen in einer Untersuchung gleichzeitig mehrere äußere Produkte vor, die alle einen gemeinsamen Faktor haben, so kann man die anderen Faktoren geometrisch summieren und die Summe mit dem gemeinsamen Faktor auf äußere Art multiplizieren

$$4) \quad \dots V \mathfrak{R}_1 \cdot \mathbf{r} + V \mathfrak{R}_2 \cdot \mathbf{r} = V [\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2] \cdot \mathbf{r},$$

wobei indes zu beachten ist, daß im Hinblick auf Gl. 3

$$4a) \quad \dots V \mathfrak{R}_1 \cdot \mathbf{r} + V \mathbf{r} \cdot \mathfrak{R}_2 = V [\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2] \cdot \mathbf{r}$$

sein würde.

Diese an sich schon einleuchtende Wahrheit ist durch vorstehende geometrische Darstellung (Fig. 5) nachweislich erkennbar. Es ist

$$\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 = AB + BC = AC = \mathfrak{R}$$

$V \mathfrak{R}_1 \cdot \mathbf{r} =$ Fläche $ABDE$ und rechtwinklig zu dieser

$V \mathfrak{R}_2 \cdot \mathbf{r} =$ „ $BCFD$ „ „ „ „

$V \mathfrak{R} \cdot \mathbf{r} =$ „ $ACFE$ „ „ „ „

Die geometrische Addition der Vektoren $\mathfrak{R}_1 \cdot \mathbf{r}$ und $\mathfrak{R}_2 \cdot \mathbf{r}$ ergibt den Streckenzug abc (Fig. 5a), dessen Schlußlinie $ca = V \mathfrak{R} \cdot \mathbf{r}$ ist. Die Dreiecke ABC und abc sind einander ähnlich

$$V \mathfrak{R}_1 \cdot \mathbf{r} + V \mathfrak{R}_2 \cdot \mathbf{r} = V \mathfrak{R} \cdot \mathbf{r} = V [\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2] \cdot \mathbf{r}.$$

Wenngleich nun das äußere Produkt zweier Vektoren, insbesondere das statische Moment \mathfrak{M} einer Kraft \mathfrak{R} in bezug auf einen Punkt O (Fig. 4) durch die Gleichung $\mathfrak{M} = V \mathfrak{R} \cdot \mathbf{r}$ eindeutig bestimmt und in dieser Form im Verlauf etwaiger weiterer Untersuchungen bequem ausdrückbar ist, so muß man sich zu seiner wirklichen Auswertung doch meist eines rechtwinkligen Achsenkreuzes bedienen. Sind \mathfrak{R}_x , \mathfrak{R}_y und \mathfrak{R}_z die Komponenten von \mathfrak{R} in den drei Achsrichtungen, ebenso x , y und z die Komponenten des Vektors \mathbf{r} , so daß also $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_x + \mathfrak{R}_y + \mathfrak{R}_z$ und $\mathbf{r} = x + y + z$ wird, so hat man

$$\mathfrak{M} = V (\mathfrak{R}_x + \mathfrak{R}_y + \mathfrak{R}_z) \cdot (x + y + z) = V \mathfrak{R}_x \cdot x + V \mathfrak{R}_x \cdot y + V \mathfrak{R}_x \cdot z + V \mathfrak{R}_y \cdot x + V \mathfrak{R}_y \cdot y + V \mathfrak{R}_y \cdot z + V \mathfrak{R}_z \cdot x + V \mathfrak{R}_z \cdot y + V \mathfrak{R}_z \cdot z.$$

Anstatt des einen Vektorproduktes $\mathbb{V} \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{r}$ erscheinen hier der gleichen 9, wobei allerdings zu beachten ist, daß $\mathbb{V} \mathfrak{R}_x \cdot \mathfrak{r}$, $\mathbb{V} \mathfrak{R}_y \cdot \mathfrak{r}$ und $\mathbb{V} \mathfrak{R}_z \cdot \mathfrak{r}$ je gleich Null sind, weil die auf äußere Art multiplizierten Vektoren den Winkel $\alpha = 0$ miteinander einschließen. Ordnet man in den verbleibenden sechs Vektorprodukten die Faktoren durchweg so, daß sie in der Reihenfolge der Achsen x, y, z aufeinander folgen, setzt also $\mathbb{V} \mathfrak{R}_x \cdot \mathfrak{r} = -\mathbb{V} \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{R}_x$, $\mathbb{V} \mathfrak{R}_y \cdot \mathfrak{r} = -\mathbb{V} \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{R}_y$ und $\mathbb{V} \mathfrak{R}_z \cdot \mathfrak{r} = -\mathbb{V} \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{R}_z$, so erhält man

$$\mathfrak{M} = (\mathbb{V} \mathfrak{R}_x \cdot \mathfrak{r} - \mathbb{V} \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{R}_x) + (\mathbb{V} \mathfrak{R}_y \cdot \mathfrak{r} - \mathbb{V} \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{R}_y) + (\mathbb{V} \mathfrak{R}_z \cdot \mathfrak{r} - \mathbb{V} \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{R}_z).$$

Die drei Klammerwerte drücken jetzt die statischen Momente der Kraft \mathfrak{R} , bzw. ihrer Komponenten \mathfrak{R}_x , \mathfrak{R}_y und \mathfrak{R}_z in bezug auf die drei Koordinatenachsen aus (vgl. Bd. I, Aufl. 4, S. 144).

Nur wenn der Winkel α , den die beiden Vektoren \mathfrak{R} und \mathfrak{r} miteinander einschließen, gegeben oder aus den Richtungswinkeln der Vektoren \mathfrak{R} und \mathfrak{r} bereits berechnet ist, kann die Berechnung des Momentenvektors \mathfrak{M} unmittelbar mit Hilfe der Gl. 2 erfolgen.

b) Das innere Produkt zweier Vektoren.

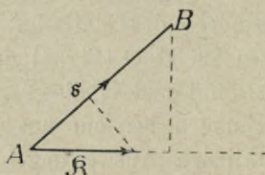
Die mechanische Arbeit, die eine Kraft auf einen sich bewegenden Massenpunkt ausübt, ist nach Bd. I, S. 44, gleich dem Produkte aus der Kraft und der in ihrer Richtung von dem Punkte zurückgelegten Wegslänge, wobei es einerlei ist, auf welche Ursache die Bewegung zurückzuführen ist (Fig. 6). Ist die Bahn des Punktes

eine gerade Linie, so kann seine Bewegung als gerichtete Größe gelten. Ersetzt man sie durch ihre Komponenten in der Richtung der Kraft und rechtwinklig zu dieser, so pflegt man erstere $\mathfrak{s} \cdot \cos \alpha$, den Weg in der Kraftrichtung, als innere, letztere $\mathfrak{s} \cdot \sin \alpha$ als äußere Komponente der Bewegung in bezug auf die arbeitende Kraft zu bezeichnen. Das

Produkt aus der inneren Komponente der Bewegung und der Kraft, das „innere Produkt“ beider gerichteten Größen, drückt also hier die Arbeit der Kraft aus

$$5) \quad \dots \mathfrak{A} = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{s} \cdot \cos \alpha.$$

Fig. 6.



Zu demselben Ergebnis würde man aber auch gelangen, wenn man die Kraft als gerichtete Größe durch ihre innere und äußere Komponente in bezug auf die geradlinige Bewegung des Punktes ersetzt

$$\dots \mathcal{A} = \mathfrak{K} \cdot \cos \alpha \cdot \mathfrak{s}.$$

Um auszudrücken, daß es sich um das innere Produkt gerichteter Größen handelt, schreibt man zum Unterschiede von dem äußeren Produkte ($\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{s} \cdot \sin \alpha = V \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{s}$) einfach $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{s} \cos \alpha = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{s}$. Wie hier bei dem Begriff der Arbeit, so hat man sich allgemein unter dem in gleicher Weise gebildeten inneren Produkte zweier gerichteter Größen, einerlei, welche mechanische Bedeutung ihnen zukommt, eine nicht gerichtete, skalare Größe vorzustellen. Die Summe mehrerer innerer Produkte gerichteter Größen kann also durch einfache algebraische Addition gebildet werden. Auch ist die Stellung der Faktoren des inneren Produktes, wie Gl. 5 u. 5a erkennen lassen, im Gegensatz zum äußeren Produkte (vgl. Gl. 3) ohne Belang. Es ist

$$6) \quad \dots \mathcal{A} = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{s} = \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{K}.$$

Das innere Produkt zweier Vektoren fällt positiv oder negativ aus, je nachdem der Winkel α , den sie einschließen, ein spitzer oder stumpfer ist, was bei Summationen beachtet werden muß.

Ist die Bahn des sich bewegenden Massenpunktes, während die Kraft auf ihn einwirkt, eine krumme Linie und vielleicht auch die Kraft \mathfrak{K} nach Richtung und Größe veränderlich, so kann man das Bahnelement $d\mathfrak{s}$ jedenfalls als gerade, und während es vom Massenpunkte durchlaufen wird, die Kraft \mathfrak{K} nach Richtung und Größe als konstant ansehen, also die geleistete Arbeit $d\mathcal{A}$ nach Gl. 6 als inneres Produkt berechnen

$$d\mathcal{A} = \mathfrak{K} \cdot d\mathfrak{s}.$$

Durch algebraische Summation erhält man dann

$$7) \quad \mathcal{A} = \int \mathfrak{K} \cdot d\mathfrak{s}.$$

Die Arbeit erscheint damit als sogen. Linienintegral der Kraft. In gleicher Weise kann die Summe der inneren Produkte zweier beliebiger veränderlicher Vektoren gebildet werden.

Anwendung.

Es möge hier zunächst nur die Anwendung der Regeln für die graphische Addition von Vektoren auf die Ermittlung des Schwerpunktes dargelegt werden.

Für die Bestimmung des Schwerpunktes eines starren Körpers wurden in Bd. I, Aufl. 4, S. 151, die Gleichungen aufgestellt

$$1) \dots M \cdot x_0 = \Sigma m \cdot x, \quad M \cdot y_0 = \Sigma m \cdot y, \quad M \cdot z_0 = \Sigma m \cdot z.$$

Dazu war man gelangt, indem man den Schwerpunkt als Mittelpunkt von Parallelkräften $m \cdot p$ ansah, die an den einzelnen Massenpunkten angreifend sich verhältnismäßig der Masse über den Körper verteilen und allen Massenteilchen m die gleiche Beschleunigung p beibringen, etwa die Beschleunigung der Schwere $p = g$. Die Mittelkraft war dann gleich $\Sigma m \cdot p = p \cdot \Sigma m = p \cdot M$, und aus den Momentengleichungen in bezug auf die drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatenkreuzes konnte der gemeinsame Faktor p aller Glieder fortgelassen werden. Das führte zu obigen Gleichungen. Die Kräfte $m \cdot p$, bzw. ihre Mittelkraft $M \cdot p$ sind durch Fortfall der gerichteten Größe p in richtungslose Größen übergegangen. Die Koordinaten x, y und z , bzw. x_0, y_0 und z_0 können als Komponenten der Radienvektoren \mathbf{r} , bzw. \mathbf{r}_0 der einzelnen Massenpunkte, bzw. des Schwerpunktes S gelten und verdienen als solche die Bezeichnung ξ, η und ζ , bzw. ξ_0, η_0 und ζ_0 . Durch graphische Addition der drei Gleichungen erhält man dann

$$M \cdot (\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0) = \Sigma m (\xi + \eta + \zeta), \quad \text{oder da}$$

$$\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 = r_0 \quad \text{und} \quad \xi + \eta + \zeta = r \quad \text{auch}$$

$$2) \dots M \cdot \mathbf{r}_0 = \Sigma m \cdot \mathbf{r}.$$

Durch diese Gleichung ist der Radiusvektor \mathbf{r}_0 des Schwerpunktes S und damit auch die Lage dieses letzteren ebenso eindeutig bestimmt, wie durch die drei Gleichungen 1.

Freilich, zur analytischen Auswertung der Gl. 2 im Sinne einer wirklichen Schwerpunktsbestimmung wird man sich meist doch der drei Gleichungen 1 bedienen müssen.

Die graphische Ermittlung der Vektorensomme $\Sigma m \cdot \mathbf{r}$ führt im allgemeinen zu einem räumlichen Streckenzuge, läßt sich also nur mit den Hilfsmitteln der darstellenden Geometrie durchführen. Nur in den allerdings nicht seltenen Fällen der Anwendung, in denen es sich um die Bestimmung der Schwerpunkte ebener Flächen oder einfach gekrümmter Linien handelt, führt die Bildung der $\Sigma m \cdot \mathbf{r}$ zu einem ebenen Streckenzuge, in dessen Schlußlinie $\Sigma m \cdot \mathbf{r}$ erhalten wird. Dabei treten an Stelle der Massenteilchen m die Flächenteilchen ΔF , bzw. die Längenteilchen Δs .

Mit Bezug auf die Fig. 7 und 8 erhält man

$$r_0 = \frac{\Sigma \Delta s \cdot r}{s}, \text{ bzw. } r_0 = \frac{\Sigma \Delta F \cdot r}{F}.$$

Besonders einfach und bequem fällt die Anwendung dieser Regeln aus, wenn man die Teile Δs der Gesamtlänge s der Linie, bzw. die Teile ΔF der Gesamtfläche F ohne umständliche Einteilung

Fig. 7.

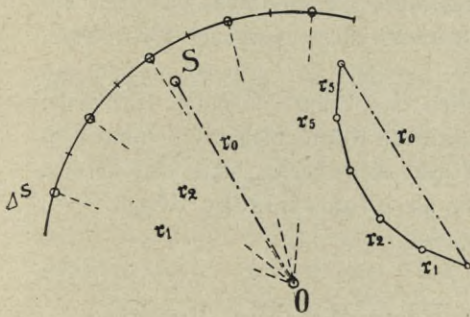
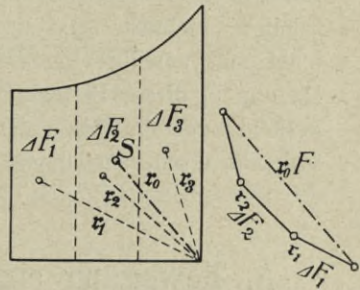


Fig. 8.



einander gleich machen kann (vgl. Fig. 7). Ist dann ihre Anzahl gleich n , so hat man $n \cdot \Delta s = s$, bzw. $n \cdot \Delta F = F$ und damit

$$r_0 = \frac{\Delta s \cdot \Sigma r}{n \cdot \Delta s} = \frac{\Sigma r}{n}, \text{ bzw. } r_0 = \frac{\Delta F \cdot \Sigma r}{n \cdot \Delta F} = \frac{\Sigma r}{n}.$$

Man hat also, um r_0 nach Richtung und Größe zu finden, nur den Streckenzug Σr zu bilden. Die Richtung seiner Schlußlinie ist auch die von r_0 , und $1/n$ derselben ist gleich der Größe von r_0 .

Trägt man die Vektoren r von vornherein in $1/n$ ihrer Länge auf, was auch schon um deswillen vorteilhaft sein kann, damit die Größe der Figur sich in bequemen Grenzen hält, so ergibt die Schlußlinie ohne weiteres r_0 .

Zweite Abteilung.

Geometrische Bewegungslehre.

Die geometrische Bewegungslehre verfolgt nicht das Ziel, die Bewegung eines Körpers aus der Wirkung gegebener Kräfte herzuleiten; vielmehr setzt sie die Bewegung als gegeben voraus und untersucht nur ihre Eigenschaften und kennzeichnenden Merkmale. Da nun in dieser Bewegungslehre die Kräfte nicht vorkommen, so braucht auch die Masse der Körper nicht berücksichtigt zu werden, vielmehr erscheinen letztere nur als geometrische Körper.

A. Bewegung eines geometrischen Punktes.

1. Geradlinige Bewegung eines Punktes.

Bewegt sich ein Punkt auf einer geraden Linie AB (Fig. 9), so ist die Bewegung völlig gegeben, wenn für jeden Zeitwert (Zeitpunkt) t der Abstand s des beweglichen Punktes P von einem auf der Bahnlinie AB befindlichen Festpunkt A bekannt ist, etwa durch die Gleichung

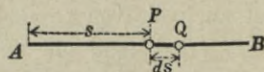
$$1) \quad s = f(t).$$

Ändert sich während des Zeiteilchens dt der Abstand s um $PQ = ds$, so ist ds die während der Zeit dt zurückgelegte Wegeslänge, und das Verhältnis

$$2) \quad v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

heißt die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes in dem Zeitpunkte t . Mißt man die Wegeslänge nach Metern, die Zeit nach Sekunden, so bedeutet die Geschwindigkeit Meter in der Sekunde ($\frac{m}{s}$, s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 7) Richtung und Sinn (Pfeil-

Fig. 9.



richtung) der Geschwindigkeit stimmen mit derjenigen der Bewegung überein.

Die nach Gl. 2 berechnete Geschwindigkeit v ist im allgemeinen mit der Zeit t veränderlich; erfährt sie während der Zeit dt einen Zuwachs um dv , so nennt man das Verhältnis

$$3) \quad p = \frac{dv}{dt} = f''(t)$$

die Beschleunigung des Punktes im Zeitpunkte t , und zwar mit der Bedeutung Meter in der Quadratsekunde (m/s^2 , s. 1. Teil, Aufl. 4 S. 13). Die Richtung der Beschleunigung p stimmt bei geradliniger Bewegung mit deren Richtung überein; bei positivem $\frac{dv}{dt}$ hat p mit v gleichen Sinn, bei negativem Wert entgegengesetzten Sinn.

Bekommt ein Punkt, der sich zu Anfang, d. h. für den Zeitpunkt $t = 0$, im Festpunkt A befindet und die anfängliche Geschwindigkeit c hat, eine Bewegung mit gleichbleibender Beschleunigung p , so wird nach Gl. 3

$$dv = p \cdot dt, \text{ also } v = pt + C,$$

worin, weil für $t = 0$ $v = c$ sein soll, $C = c$; aus Gl. 2 folgt dann $ds = v \cdot dt = (c + pt) dt$, also durch Integration

$$s = ct + \frac{pt^2}{2} + C_1,$$

oder, weil für $t = 0$ auch $s = 0$ sein soll, $C_1 = 0$, daher

$$4) \quad s = ct + \frac{pt^2}{2}.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $c = 0$, so wird die Wegeslänge

$$5) \quad s = \frac{pt^2}{2}.$$

2. Krummlinige Bewegung.

a) Darstellung im rechtwinkligen Achsenkreuz.

Bewegt sich ein Punkt in einer räumlichen Kurve, so kann man den augenblicklichen Ort P desselben mittels der Koordinaten x , y und z auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz beziehen. Sowohl die Bahnlinie, wie auch die Bewegung in derselben sind völlig bestimmt durch die 3 Gleichungen

$$6) \quad x = f(t); \quad y = F(t); \quad z = \varphi(t);$$

denn auf Grund dieser Gleichungen kann man für jeden Zeitpunkt t den Ort P des beweglichen Punktes berechnen. Entfernt man t aus den Gleichungen, so ergeben sich zwei Gleichungen zwischen x , y und z als die Gleichungen der Bahnlinie. Bewegt sich der Punkt während der Zeit dt von P nach P_1 (Fig. 10), also um die Wegeslänge $ds = PP_1$, so versteht man auch bei der krummlinigen Bewegung unter

$$7) \quad v = \frac{ds}{dt}$$

die Geschwindigkeit des Punktes im Zeitpunkte t und bezeichnet auch Richtung und Sinn derselben als mit denen der Bewegung übereinstimmend. Die Richtung der Geschwindigkeit ist also tangential zur Bahnlinie, insofern die unendlich kleine Sehne PP_1 mit der Tangente an P zusammenfällt. Nennt man α , β und γ die Neigungswinkel der im Punkte P gezogenen Bahnlinien-Tangente gegen die drei Achsen, so sind

$$8) \quad ds \cdot \cos \alpha = dx, \quad ds \cdot \cos \beta = dy \quad \text{und} \quad ds \cdot \cos \gamma = dz$$

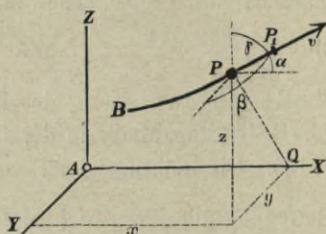
die Projektionen von ds auf die Achsen. In Fig. 10 ist aber die projizierende Gerade PQ rechtwinklig zur AX , der Punkt Q also die Projektion des Punktes P auf die AX und somit die Gleichung $x = f(t)$ das Gesetz, nach welchem sich die Projektion des Punktes P längs der AX bewegt. Dasselbe gilt für die Bewegung der Projektionen des Punktes längs der Achsen AY und AZ . Die Geschwindigkeiten dieser Projektionsbewegungen sind nach Gl. 6 und Gl. 2

$$9) \quad v_x = f'(t) = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{und} \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

und zufolge Gl. 8 auch

$$10) \quad v_x = \frac{ds}{dt} \cos \alpha = v \cdot \cos \alpha, \quad v_y = \frac{ds}{dt} \cos \beta = v \cdot \cos \beta \quad \text{und} \\ v_z = \frac{ds}{dt} \cdot \cos \gamma = v \cdot \cos \gamma$$

Fig. 10.



d. h. die Geschwindigkeiten der Projektionen des Punktes P auf die drei Achsen sind gleich den Projektionen der Geschwindigkeit v der wahren Bewegung des Punktes P auf dieselben Achsen.

Da nun $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, so wird

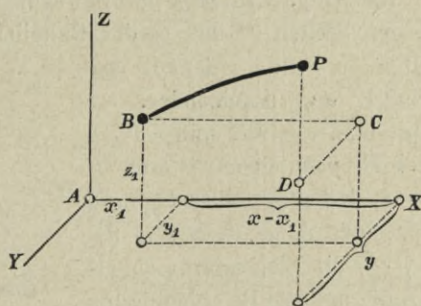
$$\frac{v_x^2}{v^2} + \frac{v_y^2}{v^2} + \frac{v_z^2}{v^2} = 1, \text{ oder}$$

$$11) \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Es ist daher die Geschwindigkeit v des Punktes P nach Größe und Richtung die Diagonale eines Parallelepipeds aus den Geschwindigkeiten der Projektionsbewegungen längs dreier, winkelrecht zueinander stehenden Achsen, oder die geometrische Summe derselben (vergl. 1. Teil. Aufl. 4, S. 20).

Man kann dem Punkte P seine Bewegung längs der räumlichen Bahnlinie BP auch dadurch erteilen, daß man ihn von dem Punkte B aus (dessen Koordinaten x_1, y_1, z_1) nach dem Gesetz $x = f(t)$ parallel der x -Achse um $BC = x - x_1$ bewegt (Fig. 11), gleichzeitig der Geraden BC eine Parallelverschiebung um CD , parallel der y -Richtung, erteilt, so daß jeder Punkt der BC der Gleichung $y = F(t)$ folgt und auch noch zu derselben Zeit der

Fig. 11.



Ebene BCD eine Parallelverschiebung um DP im Sinne der z -Achse nach dem Gesetze $z = \varphi(t)$ gibt. Vermöge dieser drei gleichzeitigen Bewegungen um BC, CD, DP gelangt der Punkt von B nach P , und weil die einzelnen Bewegungen den Gleichungen 6 folgen, so gelangt der bewegliche Punkt auch in jedem Zwischenzeitpunkt an die richtige Stelle seiner Bahnlinie BP . Die drei Einzelbewegungen heißen die Seitenbewegungen der wahren oder Mittelbewegung BP . Die Projektionen der wahren Geschwindigkeit v auf die drei Achsen sind zugleich die Geschwindig-

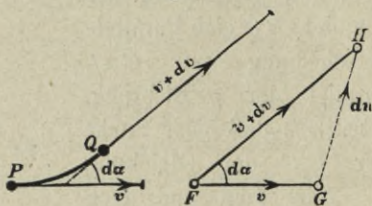
keiten der drei Seitenbewegungen oder die Seitengeschwindigkeiten.

Die vorstehenden Entwicklungen gelten in ihren Hauptzügen auch für ein schiefwinkliges Achsenkreuz, nur bekommen dann die Gl. 10 und 11 eine etwas andere Form. Das Ergebnis dreier gleichzeitiger Geschwindigkeiten ist also stets eine wahre oder Mittelgeschwindigkeit v , welche sich nach Größe, Richtung und Sinn als die Diagonale eines Parallelepipedes aus den Seitengeschwindigkeiten oder als die geometrische Summe der Seitengeschwindigkeiten ergibt.

Bei der krummlinigen Bewegung ändert sich während eines Zeitteilchens dt im allgemeinen sowohl die Größe, wie auch die Richtung der Geschwindigkeit; diejenige Geschwindigkeit du nun, welche mit der im Zeitpunkte t vorhandenen Geschwindigkeit v zusammengesetzt werden muß, um mit ihr die im Zeitpunkte $t + dt$ geltende Geschwindigkeit $v + dv$ nach Größe, Richtung und Sinn zu ergeben, heißt die Elementarbeschleunigung und liefert, durch dt geteilt, die **Beschleunigung** p der krummlinigen Bewegung im Zeitpunkte t nach Größe, Richtung und Sinn.

Ist (Fig. 12) PQ ein Bewegungsteilchen ds und bilden die an den Stellen P und Q der Bahnlinie vorhandenen Geschwindigkeiten v und $v + dv$ den Winkel $d\alpha$ miteinander, so trage man $v = FG$ und $v + dv = FH$ von einem Punkt F aus nach Größe, Richtung und Sinn auf; dann ist $GH = du = p \cdot dt$ die Elementarbeschleunigung, und die Beschleunigung $p = du : dt$ stimmt nach Richtung und Sinn mit GH überein.

Fig. 12.



Bei krummliniger Bewegung weicht hiernach die Richtung der Beschleunigung p von der Richtung der Geschwindigkeit v ab. Da $v + dv$ die geometrische Summe von v und du ist, so kann die Elementarbeschleunigung als geometrische Differenz von $v + dv$ und v , oder, weil sie unendlich klein ist, als das geometrische Differential von v , die Beschleunigung als die geometrische Abgeleitete von v bezeichnet werden.

Projiziert man das beliebig im Raume liegende Geschwindigkeitsdreieck FGH (Fig. 13) auf die Achse AX , so ist F_1G_1 die Projektion

von v , also nach S. 18 die Seitengeschwindigkeit v_x in der x -Richtung im Zeitpunkte t , $F_1 H_1$ die Projektion von $v + dv$, d. h. die Seitengeschwindigkeit $v_x + dv_x$ im Zeitpunkte $t + dt$.

Somit ist $G_1 H_1 = dv_x$ die Elementarbeschleunigung der Seitenbewegung in der x -Richtung. Zugleich ist aber $G_1 H_1$ auch die Projektion der Elementarbeschleunigung GH der krummlinigen Bewegung,

d. h. wenn $du = GH$ mit der x -Achse den Winkel δ bildet, $dv_x = du \cdot \cos \delta$. Sodann wird, wenn man mit $p_x = \frac{dv_x}{dt}$ die Beschleunigung der Seitenbewegung oder die Seitenbeschleunigung in der x -Richtung bezeichnet,

$$12) \quad \begin{cases} p_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \cos \delta = p \cos \delta, \\ p_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \cos \varepsilon = p \cos \varepsilon, \\ p_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \cos \zeta = p \cos \zeta, \end{cases}$$

oder mit Bezug auf die Gl. 9 auch

$$13) \quad \dots p_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad p_y = \frac{d^2y}{dt^2} \quad \text{und} \quad p_z = \frac{d^2z}{dt^2},$$

wenn ε und ζ die Neigungswinkel der Beschleunigung p gegen die AY und die AZ sind; d. h. die Beschleunigung der Projektions- oder Seitenbewegung ist gleich der Projektion der Beschleunigung der wahren Bewegung auf dieselbe Achse. Es wird

$$14) \quad p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}.$$

Also ist die Beschleunigung p des Punktes P nach Größe und Richtung die Diagonale eines Parallelepipedes aus den Seitenbeschleunigungen längs dreier, rechtwinklig zueinander stehenden Achsen, oder die geometrische Summe derselben. Auch wenn die drei Achsen schief zueinander stehen, bleibt p die Diagonale des

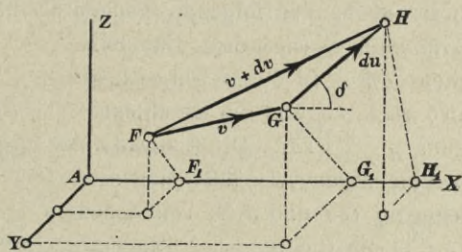


Fig. 13.

Parallelepiped aus p_x , p_y und p_z ; nur ändern sich dann die Gleichungen 12 und 14, wohingegen Gleichung 13 ihre Form beibehält.

Das Geschwindigkeitsdreieck FGH (Fig. 14) liegt in der durch zwei aufeinander folgende Tangenten bestimmten Ebene, der sog. Krümmungsebene des Bahnteilchens PQ . In dieser Ebene liegt also auch du und die Beschleunigung $p = du : dt$. Die Elementarbeschleunigung du läßt sich zerlegen in GJ und JH , von denen GJ in die Richtung der Tangente an die Bahnlinie, JH in die Richtung der in der Krümmungsebene liegenden Normalen zur Bahnlinie, der sog. Hauptnormalen fällt. Entsprechendes gilt von der wahren Beschleunigung p , insofern man dieselbe in die Tangentialbeschleunigung $p_t = \overline{GJ} : dt$ und die Normalbeschleunigung $p_n = \overline{JH} : dt$ zerlegen kann. Nach der Figur 14 ist

$$GJ = (v + dv) \cos d\alpha - v = dv$$

(wegen $\cos d\alpha = 1$), also

$$15) \quad p_t = \frac{dv}{dt}.$$

$$JH = (v + dv) \sin d\alpha = v \cdot d\alpha$$

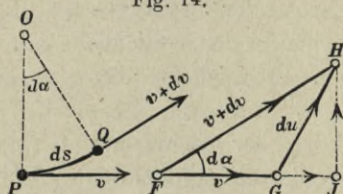
(weil $\sin d\alpha = d\alpha$ und $dv \cdot d\alpha$ unendlich klein zweiter Ordnung). Weil ferner $d\alpha = ds : \rho$ ($\rho = OP$ der erste Krümmungshalbmesser) und $ds = v \cdot dt$, so wird

$$JH = v \cdot \frac{v}{\rho} dt = \frac{v^2}{\rho} dt, \text{ also}$$

$$16) \quad p_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Die **Tangentialbeschleunigung** bringt die Größenänderung der Geschwindigkeit zum Ausdruck, während die **Normalbeschleunigung** die Richtungsänderung der Geschwindigkeit darstellt. Die Normalbeschleunigung wird noch bestimmter **Zentripetalbeschleunigung** genannt, weil ihr Sinn nach dem ersten Krümmungsmittelpunkte der Bahnlinie gerichtet ist.

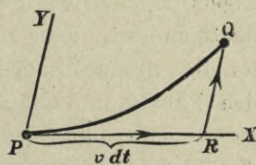
Fig. 14.



Die vorstehenden Lehren finden sich dem Wesen nach schon im 1. Teil, S. 3—30 eingehend behandelt und sind hier nur des Zusammenhanges wegen noch einmal kurz wiederholt.

Ablenkung (Deviation). Hätte der Punkt, der in Wirklichkeit eine ungleichförmige, krummlinige Bewegung mit der Gesamtbeschleunigung p ausführt, vom Zeitpunkte t an keine Beschleunigung erfahren, so würde er mit der damaligen Geschwindigkeit v sich geradlinig und gleichförmig fortbewegt haben; er wäre in dem nächsten Zeitteilchen dt , statt von P nach Q , von P nach R gelangt (Fig. 15), worin $PR = v \cdot dt$ ist. Der Ortsunterschied RQ ist das Ergebnis der Beschleunigung p . Er heißt die Ablenkung oder Deviation (nämlich von der geradlinig-gleichförmigen Bewegung).

Fig. 15.



Zerlegt man die wahre Bewegung PQ in zwei Seitenbewegungen, von denen die eine in die Richtung PX der im Punkte P an die Bahnlinie gelegten Tangente, die andere in die Richtung PY der im Punkte P vorhandenen Beschleunigung fällt, so ist im Zeitpunkte t die Seitengeschwindigkeit in der x -Richtung $v_x = v$, in der y -Richtung $v_y = 0$, weil die wahre Geschwindigkeit v in der x -Richtung liegt; es ist die Seitenbeschleunigung in der x -Richtung Null, in der y -Richtung $p_y = p$, weil die wahre Beschleunigung in der y -Richtung liegt. Daher ist die Seitenbewegung in der x -Richtung eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit v , die Seitenbewegung in der y -Richtung eine gleichförmig-beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung p , der Anfangsgeschwindigkeit Null und der Wegeslänge $p \cdot \frac{dt^2}{2}$ (nach Gl. 5, S. 15). Hieraus folgt, daß die

$$17) \quad \text{Ablenkung } RQ = p \frac{dt^2}{2}$$

ist und nach Richtung und Sinn mit der Beschleunigung p übereinstimmt.

b) Darstellung durch Vektoren.

Wie die geradlinige Bewegung eines Massenpunktes eindeutig mit allen ihren Eigentümlichkeiten durch die Gleichung $s = f(t)$ (vgl. S. 14 Gl. 1) dargestellt werden konnte, so kann dies auch geschehen bei einer beliebig krummlinigen Bewegung eines Massen-

punktes, wenn man unter \mathfrak{s} den Radiusvektor des Massenpunktes in bezug auf irgendeinen Festpunkt A versteht (vgl. Fig. 16). Statt der drei Gleichungen (6) auf S. 16 genügt dann die eine Gleichung

$$18) \quad \mathfrak{s} = f(t)$$

zur eindeutigen Darstellung auch einer krummlinigen Bewegung mit allen ihren Eigentümlichkeiten. Freilich sind zur eindeutigen Bestimmung der Radienvektoren \mathfrak{s} für die einzelnen Lagen des sich bewegenden Punktes im Raume immer drei Angaben notwendig, nämlich entweder die drei Komponenten des Vektors \mathfrak{x} , \mathfrak{y} und \mathfrak{z} in bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz oder seine Größe (s) und zwei Richtungswinkel.

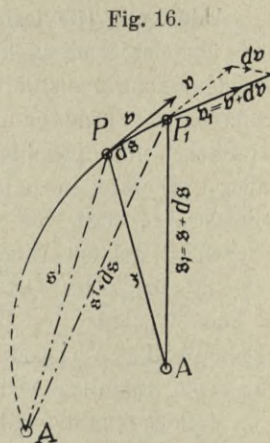


Fig. 16.

Wie unter s in Gl. 1 die algebraische Summe aller Bahnelemente verstanden ist, die in der Zeit t durchlaufen sind, so ist unter \mathfrak{s} in Gl. 18 die geometrische Summe aller Bahnelemente $d\mathfrak{s}$ zu verstehen, die zurzeit t durchlaufen sind, vorausgesetzt, daß man wie bei der geradlinigen Bewegung den Nullpunkt A auf der Bahnlinie und zum Anfangspunkt der Bewegung wählt, was indes im allgemeinen nicht erforderlich und vielfach nicht zweckmäßig ist. Bei der geradlinigen Bewegung war es allerdings sehr zweckmäßig, wenn auch nicht unbedingt notwendig, den Nullpunkt A auf der Bahnlinie zu wählen.

Zur Darstellung der Vektoren der Geschwindigkeit und Beschleunigung gelangt man durch folgende Überlegung.

Während der Punkt das Bahnelement $PP_1 = d\mathfrak{s}$ durchläuft, das als gerichtete Größe gelten muß, findet eine Vergrößerung des Radiusvektors im geometrischen Sinne um ein gleiches Maß statt, ausgedrückt durch die Beziehung $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s} + d\mathfrak{s}$; $d\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}$ ist also zugleich das geometrische Differential des Radiusvektors \mathfrak{s} . Der Vektor \mathfrak{v} der Geschwindigkeit, zur Zeit t , hat die Richtung des Bahnelementes $d\mathfrak{s}$ und berechnet sich zu

$$19) \quad \mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{s}}{dt}. \quad (\text{Vgl. Gl. 7.})$$

Während der Punkt das Bahnelement $d\mathfrak{s}$ durchläuft, ändert sich seine Geschwindigkeit nach Richtung und Größe von \mathbf{v} auf \mathbf{v}_1 , also um $d\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ und zwar so, daß der veränderliche Vektor der Geschwindigkeit stets in der Krümmungsebene des Bahnelements $d\mathfrak{s}$ und tangential zu diesem gerichtet bleibt. $d\mathbf{v}$ ist nach Richtung und Größe gleich der Elementarbeschleunigung $d\mathbf{u}$ (Fig. 16) während des Zeitelementes dt . Den Vektor der wirklichen Beschleunigung erhält man daher zu

$$20) \quad \dots \mathfrak{p} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

oder mit bezug auf Gl. 19

$$21) \quad \dots \mathfrak{p} = \frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}.$$

Wie das durch die drei Gl. 6 ausgedrückte Bewegungsgesetz hier durch die eine Gl. 18 dargestellt ist, so sind die in den je drei Gl. 9 und 13 ermittelten Geschwindigkeits- und Beschleunigungsgesetze hier durch je eine Gl. 19 und 21 ausgedrückt.

Bei der zahlenmäßigen Ausrechnung wird man freilich meist von den bequemen Vektorgleichungen zu den Komponentengleichungen übergehen müssen.

Beispiel: Ein Punkt bewege sich nach den auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz bezogenen Gleichungen:

$$22) \quad x = r \sin \frac{c}{r} t; \quad y = r \cos \frac{c}{r} t; \quad z = ut,$$

worin r , c und u unveränderlich sein sollen. Entfernt man mit $t = \frac{z}{u}$ die Zeitgröße aus den Gleichungen, so entsteht

$$23) \quad x = r \sin \frac{c}{ru} z; \quad y = r \cos \frac{c}{ru} z$$

als die beiden Gleichungen der räumlichen Bahnlinie. Es bezeichnet dies eine zylindrische Schraubenlinie. Quadrierung und Addition der Gl. 23 liefern nämlich

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

d. h. die Projektion der Bahnlinie auf die xy -Ebene ist ein Kreis vom Halbmesser r . Die Seitengeschwindigkeiten sind

$$v_x = \frac{dx}{dt} = c \cos \frac{c}{r} t; \quad v_y = -c \sin \frac{c}{r} t; \quad v_z = u.$$

Betrachtet man nur die Seitenbewegungen in der xy -Ebene, so wird deren Geschwindigkeit

$$24) \quad w = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = c,$$

d. h. der Kreis vom Halbmesser r wird von der Projektion des Punktes auf die xy -Ebene gleichförmig durchlaufen, und da der Punkt in der z -Richtung eine ebenfalls gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit u hat, so beschreibt er gleichmäßig eine zylindrische Schraubenlinie (Fig. 17) von dem Halbmesser r und dem Ansteigungsverhältnisse

$$25) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{u}{c},$$

der Ganghöhe $h = 2 r \pi \frac{u}{c}$

mit der Geschwindigkeit

$$26) \quad v = \sqrt{c^2 + u^2} = c \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = c \sec \alpha.$$

Die Seitenbeschleunigungen sind:

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{c^2}{r} \sin \frac{c}{r} t = -\frac{c^2}{r} \frac{x}{r};$$

$$p_y = -\frac{c^2}{r} \cos \frac{c}{r} t = -\frac{c^2}{r} \frac{y}{r} \quad \text{und} \quad p_z = 0.$$

Die Projektionsbewegung in der xy -Ebene erfolgt mit einer Beschleunigung

$$27) \quad p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \frac{c^2}{r};$$

sie ist, weil diese Bewegung eine gleichförmige Kreisbewegung, eine reine Zentripetalbeschleunigung (vgl. Gl 16, S. 20), d. h. stets nach dem Mittelpunkt A des Kreises gerichtet. Weil aber $p_z = 0$, so ist auch die Gesamtbeschleunigung der Schraubenlinienbewegung

$$p = \frac{c^2}{r},$$

deren Richtung und Sinn an jeder Stelle der Schraubenlinie nach der Achse derselben gekehrt und zu dieser rechtwinklig ist.

Bezeichnet aber ρ den ersten Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie, so muß nach Gl. 16, S. 20 und Gl. 27 auch

$$p_n = p = \frac{v^2}{\rho} = \frac{c^2}{r}$$

sein, also wird

$$\rho = r \frac{v^2}{c^2}, \quad \text{oder nach Gl. 26}$$

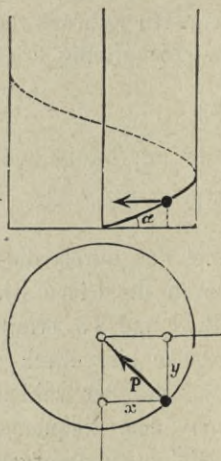
$$28) \quad \rho = r \sec^2 \alpha.$$

Die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte liegen auf den Richtungen von p , jedoch um $\rho - r = r \operatorname{tg}^2 \alpha$ jenseits der Achse. Ihr geometrischer Ort ist also eine Schraubenlinie vom Halbmesser $r \operatorname{tg}^2 \alpha$ und der Ganghöhe h .

In Vektorform würde das durch die drei Gleichungen 22 gegebene Bewegungsgesetz lauten:

$$29) \quad \dots \vec{s} = r \sin \frac{c}{r} \cdot t + r \cos \frac{c}{r} t + u \cdot t;$$

Fig. 17.



die wirkliche Geschwindigkeit sich berechnen zu

$$30) \quad \dots v = \frac{d\mathfrak{s}}{dt} = c \cdot \cos \frac{c}{r} \cdot t - c \cdot \sin \frac{c}{r} \cdot t + u$$

und die wirkliche Beschleunigung zu

$$31) \quad \dots p = \frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = -\frac{c^2}{r} \sin \frac{c}{r} t - \frac{c^2}{r} \cos \frac{c}{r} t.$$

Die Tensoren von \mathfrak{s} , v und p sind

$$32) \quad \dots |\mathfrak{s}| = \sqrt{\left(r \cdot \sin \frac{c}{r} t\right)^2 + \left(r \cdot \cos \frac{c}{r} t\right)^2 + (ut)^2} = \sqrt{r^2 + (ut)^2},$$

$$33) \quad \dots |v| = \sqrt{\left(c \cdot \cos \frac{c}{r} t\right)^2 + \left(-c \cdot \sin \frac{c}{r} t\right)^2 + u^2} = \sqrt{c^2 + u^2},$$

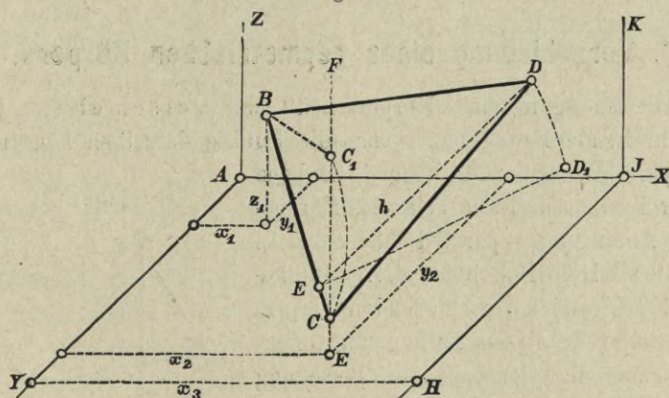
$$34) \quad \dots |p| = \sqrt{\left(-\frac{c^2}{r} \sin \frac{c}{r} t\right)^2 + \left(-\frac{c^2}{r} \cos \frac{c}{r} t\right)^2} = -\frac{c^2}{r}.$$

Das Minuszeichen des Wertes von $|p|$ läßt erkennen, daß es sich um eine nach der Achse der Schraubenlinie zurückgerichtete Zentripetalbeschleunigung handelt.

B. Bewegung eines geometrischen Körpers.

Drei nicht in einer Geraden befindliche Punkte B , C und D eines Körpers unveränderlicher Form bestimmen die Lage desselben.

Fig. 18.



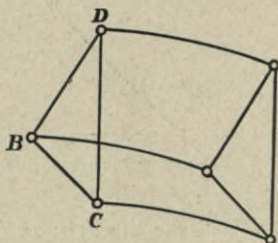
Es seien $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ die rechtwinkligen Koordinaten der drei Punkte. Sind nun zunächst x_1, y_1, z_1 gegeben, so ist dadurch der Punkt B bestimmt (Fig. 18). Zur Festlegung von C sind dann aber nicht mehr drei, sondern nur zwei Koordinaten, etwa x_2

und y_2 erforderlich, da der an dem unveränderlichen Körper gegebene Abstand von B und C die dritte Koordinate ersetzt. Auf der zur z -Achse parallelen, durch die Koordinaten x_2 und y_2 bestimmten Geraden EF liegen freilich im allgemeinen zwei Punkte C und C_1 , die von B den gegebenen Abstand BC haben; aus den besonderen Umständen des Falles muß dann hervorgehen, welcher von beiden in Frage kommt. Zur Festlegung des Punktes D ist nur noch eine der Koordinaten erforderlich, etwa x_3 , weil die Abstände dieses Punktes von B und C die anderen beiden ersetzen. Nach der gegenseitigen Lage, der Punkte B, C, D im Körper hat die von D auf BC gefällte Winkelrechte eine bestimmte Länge h und trifft die BC in einem bestimmten Punkte E , der nun im Raume schon eine bestimmte Lage hat. Beschreibt man um E als Mittelpunkt und mit h als Halbmesser einen Kreis, dessen Ebene rechtwinklig zu BC steht, so schneidet dieser Kreis die zu YAZ parallele, durch die Abszisse x_3 gegebene Ebene HJK in zwei Punkten, welche mögliche Lagen des Punktes D im Raume sind; wiederum muß aus den besonderen Umständen des Falles entschieden werden, welcher von beiden der richtige ist. Abgesehen von diesen Zweideutigkeiten, ist hiernach die Lage eines Körpers im Raume durch sechs Koordinaten bestimmt.

1. Verschiebung eines geometrischen Körpers.

Die Bewegung eines Körpers heißt eine Verschiebung (oder fortschreitende Bewegung), wenn alle Punkte desselben kongruente und parallel zueinander liegende Bahnen beschreiben, so daß alle Teile des Körpers ihrer Anfangslage parallel bleiben. In Fig. 19 sind die Bahnlinien dreier Punkte B, C, D des sich verschiebenden Körpers dargestellt. In diesem Falle genügt offenbar schon die Kenntnis der Bewegung eines einzigen Punktes zur Bestimmung der Bewegung des ganzen Körpers, so daß die vorstehenden Lehren über die Bewegung eines Punktes auch auf die Verschiebung eines Körpers unmittelbare Anwendung finden.

Fig. 19.

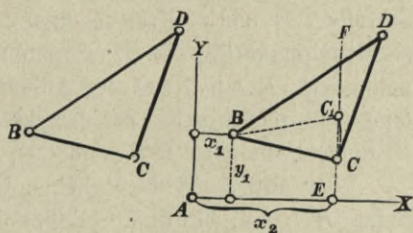


2. Ebene Bewegung eines Körpers; Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene.

Sind die Bahnlinien dreier Punkte eines Körpers, welche nicht in derselben Geraden liegen, einer gegebenen festen Ebene parallel, so bewegen sich sämtliche Punkte des Körpers parallel der gegebenen Ebene, und jeder zu dieser letzteren parallel geführte Schnitt des Körpers bewegt sich in seiner Ebene. Eine derartige Bewegung des Körpers heißt eine ebene Bewegung, und zu ihrer Kenntnis genügt die Kenntnis der Bewegung einer solchen ebenen Schnittfigur in ihrer Ebene.

Die Lage einer Figur in einer Ebene ist schon durch die Lage zweier Punkte B und C bestimmt, sobald ein Umklappen der Figur in eine symmetrische Lage ausgeschlossen ist. Um z. B. das Dreieck BCD (Fig. 20) gegen ein ebenes Achsenkreuz XAY festzulegen, mögen für den Punkt B die beiden Koordinaten x_1 und y_1 gegeben sein. Für einen zweiten Punkt C sind dann nicht mehr zwei Koordinaten

Fig. 20.

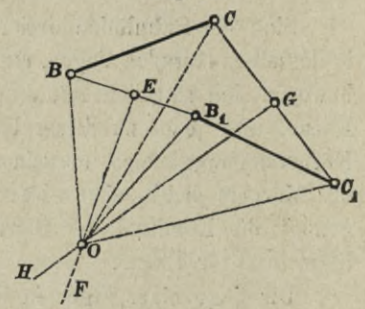


erforderlich, sondern nur eine derselben, nämlich x_2 , weil der gegebene Abstand BC der beiden Punkte die Ordinate y_2 ersetzt. Auf der zur y -Achse parallelen, durch die Abszisse x_2 bestimmten Geraden EF liegen freilich im allgemeinen zwei Punkte C und C_1 , die von B den gegebenen Abstand BC haben; aus den besonderen Umständen des Falles muß dann hervorgehen, welcher von beiden in Frage kommt. Hiervon abgesehen, ist also die Lage einer ebenen Figur in ihrer Ebene durch drei Koordinaten bestimmt.

Ist nun BC (Fig. 21) die Verbindungsgerade zweier Punkte, deren Lage die Lage einer ebenen Figur bestimmt, und ist B_1C_1 eine zweite Lage derselben Geraden in der Ebene der Figur, so läßt sich die Überführung der Geraden aus der Anfangslage BC in die andere Lage B_1C_1 durch Drehung um einen in der Ebene befindlichen Punkt O bewirken. Zieht man die Verbindungsgerade

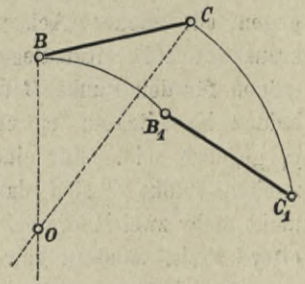
BB_1 und zu ihr in ihrem Mittelpunkt E eine Winkelrechte EF , so haben alle Punkte der EF gleichen Abstand von B und B_1 ; durch Drehung um irgendeinen Punkt der EF würde daher B in die neue Lage B_1 gelangen. Dasselbe gilt bezüglich der Punkte C und C_1 von jedem Punkte der Geraden GH , welche in der Mitte von CC_1 rechtwinklig zu CC_1 gezogen ist. Wird nun die Drehung um den Schnittpunkt O von EF und GH ausgeführt, so gelangt dadurch B nach B_1 und, weil $OBC \cong OB_1C_1$, gleichzeitig C nach C_1 , d. h. die bewegliche Gerade BC in ihre zweite Lage B_1C_1 .

Fig. 21.



Bei dieser Drehung um O beschreiben B und C Kreisbögen um O als Mittelpunkt (Fig. 22). Die Drehungshalbmesser BO und CO der Anfangslage sind rechtwinklig zu den kreisförmigen Bahnlinien BB_1 und CC_1 .

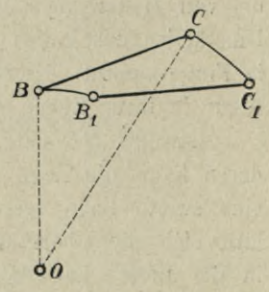
Fig. 22.



Sind außer der beweglichen Geraden BC noch bestimmte Bahnlinien der Punkte B und C gegeben (Fig. 23) und wählt man auf der Bahnlinie des Punktes B einen sehr nahe bei B gelegenen Punkt B_1 , so findet man den

zugehörigen Punkt C_1

Fig. 23.



leicht durch Abtragen der Länge BC , so daß $B_1C_1 = BC$ ist. Dann ist B_1C_1 eine der Anfangslage BC der beweglichen Geraden benachbarte Lage. Konstruiert man nun in B eine Normale zu der Kurve BB_1 , in C eine solche zu CC_1 , so mögen sich beide in dem Punkt O schneiden. Bei einer Drehung der beweglichen Geraden um O werden die von B und C beschriebenen Kreise um so mehr mit den wahren Bahnlinien BB_1 und CC_1 zusammenfallen, je

kleiner BB_1 gewählt

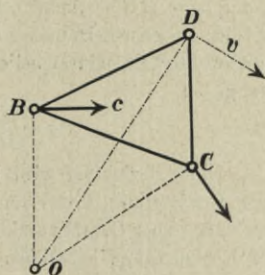
wurde. Denkt man sich BB_1 unendlich klein, BC und B_1C_1 als zwei unendlich wenig voneinander abweichende Lagen der beweglichen Geraden, so kann man die unendlich kleine Bewegung der Geraden BC als mit der Drehung um O übereinstimmend ansehen. Dieser Punkt O heißt deshalb der **augenblickliche Drehpunkt** oder der **Pol** für die bewegliche Gerade in der Lage BC . Also: Die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene kann man in jedem Augenblick auffassen als Drehung um einen Punkt O in ihrer Ebene, den augenblicklichen Drehpunkt oder Pol. Dieser ist bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte der Figur.

Die Aufsuchung des Poles O für die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene bietet den Vorteil, daß aus den Bewegungs- oder Geschwindigkeitsrichtungen zweier Punkte und der Geschwindigkeitsgröße eines Punktes die Größe und Richtung der Geschwindigkeit jedes anderen Punktes ermittelt werden kann. Geben z. B. in Fig. 24 die in den Punkten B und C angebrachten Pfeile die Bewegungsrichtungen dieser Punkte an, so sind die zugehörigen Drehungshalbmesser oder Polstrahlen BO und CO rechtwinklig zu den Bewegungsrichtungen. Zieht man von dem Pol O einen Polstrahl nach einem beliebigen Punkte D der Figur, so ist die Richtung der Geschwindigkeit dieses Punktes rechtwinklig zu OD . Da nun bei einer Drehung die Umfangsgeschwindigkeiten den Drehungshalbmessern, hier also den Polstrahlen verhältnismäßig sind, so gilt für die Geschwindigkeitsgrößen v und c der Punkte B und D die Gleichung

$$v = c \frac{OD}{OB};$$

bei gegebenem c ist also v bestimmt. Ebenso wie die Lage einer ebenen Figur in ihrer Ebene nach S. 27 durch drei Koordinaten gegeben war, so ist ihr augenblicklicher Geschwindigkeitszustand durch ebenfalls drei Stücke, nämlich zwei Richtungen und eine Größe c , bestimmt.

Fig. 24.



Sind die Bewegungsrichtungen zweier Punkte einander parallel (Fig. 25), so liegt der Pol O in unendlicher Ferne; infolgedessen haben alle Punkte der Figur Geschwindigkeiten, die nach Richtung, Größe und Sinn übereinstimmen, d. h. die Bewegung ist in dem betreffenden Augenblick eine **Verschiebung** (oder eine rein fortschreitende Bewegung).

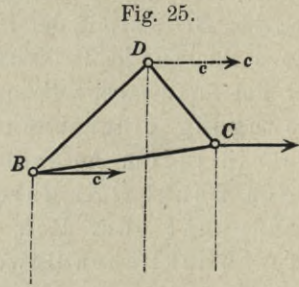


Fig. 25.

Beispiel 1: Bewegung einer Kurbelstange. Der Punkt C der Kurbelstange BC (Fig. 26) wird durch die Kurbel AC in einem Kreise mit dem Mittelpunkt A geführt, während der Punkt B vermöge der Geradföhrung gezwungen ist, sich längs einer Geraden AB zu bewegen. Die Winkelrechte zu der Bewegungsrichtung des Punktes C ist die Verlängerung der Kurbel AC , während der zu dem Punkte B gehörige Polstrahl BO rechtwinklig zu AB steht. Hierdurch ist der Pol O der Kurbelstange in der Lage BC bestimmt. Ist nun c die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens C , so ergibt sich die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes Q der Stange zu

$$v = c \cdot \frac{OQ}{OC}.$$

Diese Beziehung wird benutzt, wenn man behufs Ermittlung des erforderlichen Schwungradgewichtes einer Dampfmaschine das Arbeitsvermögen der Kurbelstange berechnen will.

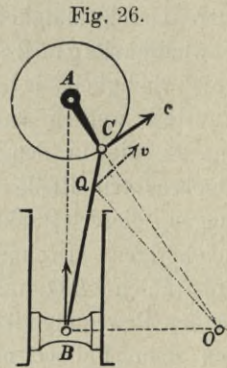


Fig. 26.

Beispiel 2: Pol einer Gelenkstange. Ist $ABCE$ (Fig. 27) eine

an den Widerlagergelenken A und E aufgehängte Gelenkstangenverbindung, so kann der Punkt B sich nur rechtwinklig zu AB , der Punkt C sich nur rechtwinklig zu EC bewegen. Für die mittlere Stange BC sind daher ABO und ECO zwei Polstrahlen, die den Pol O bestimmen. Mit Hilfe des Poles läßt sich leicht derjenige Punkt der Stange BC angeben, der bei einer unendlich kleinen Verrückung der Stangenverbindung sich wagerecht

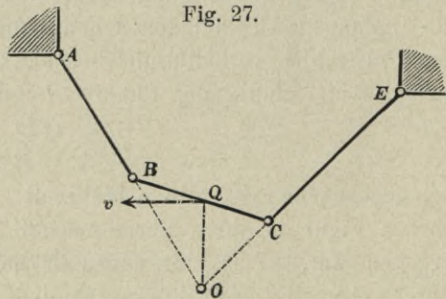


Fig. 27.

bewegen wird; es ist dies derjenige Punkt Q , dessen Polstrahl OQ lotrecht steht. Wie weiter unten gezeigt werden wird, hängt diese Eigenschaft des Punktes Q damit zusammen, daß die Figur $ABCE$ die Gleichgewichtsform ist für eine bei Q an der sonst unbelastet gedachten Stangenverbindung aufgehängte lotrechte Last (vgl. 1. Teil, Aufl. 4, S. 221 und Fig. 255).

Beispiel 3: Ellipsenzeichner. Ein Stab BC (Fig. 28) werde so geführt, daß ein Punkt B derselben sich nur auf einer Geraden AX , ein Punkt C derselben sich nur auf einer Geraden AY bewegen kann, wobei AX und AY irgendeinen Winkel α miteinander bilden. Wird nun an einer Stelle Q des beweglichen Stabes ein Zeichenstift eingesetzt, der von B und C um b bzw. a absteht, so beschreibt der Stift eine Ellipse mit dem Mittelpunkt A . Bezeichnet man nämlich die auf AX und AY bezogenen schiefwinkligen Koordinaten des Punktes Q mit x und y ; setzt $AC - y = u$ und $AB - x = v$, so ist in dem Dreiecke CQR :

$$a^2 = u^2 + x^2 - 2 \cos \alpha \cdot u \cdot x.$$

Ferner ist nach der Figur $\frac{u}{y} = \frac{a}{b}$, mithin

$$a^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2 + x^2 - 2 \cos \alpha \cdot \frac{a}{b} y x \quad \text{oder}$$

$$1) \quad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2 \cos \alpha}{ab} xy.$$

Diese Gleichung bezeichnet eine Ellipse, weil

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} - \frac{\cos^2 \alpha}{a^2 b^2} > 0 \quad \text{ist.}$$

Wird im besonderen $\alpha = 90^\circ$ (Fig. 29), so geht Gl. 1 über in

$$2) \quad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

d. h. die Ellipse hat die Halbachsen a und b .

Der Polstrahl des Punktes B ist $\perp AX$, derjenige des Punktes $C \perp AY$; sonach ist der Pol O der vierte Eckpunkt eines Rechtecks $ABOC$ und hat, weil die Diagonalen eines Rechtecks gleich lang sind, vom Punkt A den Abstand $AO = BC = a + b$.

Da zum Punkte Q der Ellipse ein Polstrahl OQ gehört, der beschreibende Punkt Q sich also für einen Augenblick rechtwinklig zu OQ bewegen muß, so ist auch die Tangente an die Ellipse im Punkte Q rechtwinklig zu OQ , d. h. es ist der Polstrahl OQ eine Normale der Ellipse im Punkte Q .

Fig. 28.

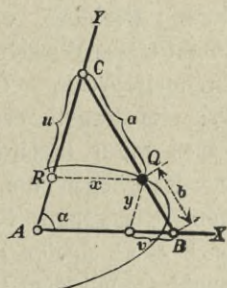
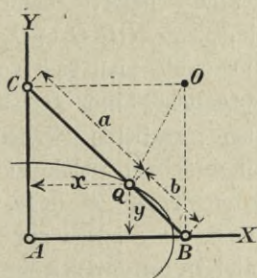


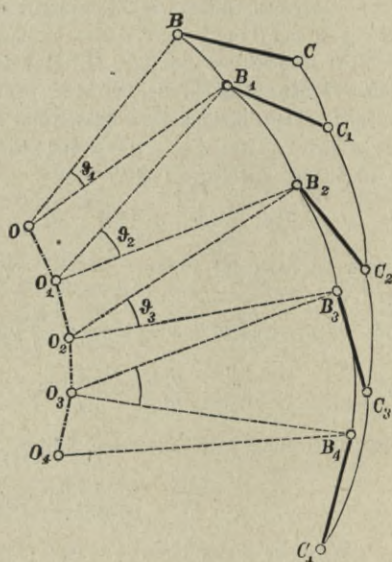
Fig. 29.



3. Endliche Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene. Rollbewegung der Polbahnen.

Sind $BC, B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, B_4C_4$ verschiedene Lagen der beweglichen Geraden BC (Fig. 30) in einer Ebene, u. zw. einstweilen in endlichen Abständen voneinander, so läßt sich nach S. 28 die Überführung aus der Lage BC in die Lage B_1C_1 bewirken durch Drehung um einen Punkt O ; der Winkelweg dieser Drehung $BOB_1 = COC_1$ sei ϑ_1 ; alle Punkte der beweglichen Figur beschreiben bei ihr Kreisbögen um O . Zu dem Übergange von B_1C_1 nach B_2C_2 gehöre der Drehpunkt O_1 mit dem Drehungswinkel ϑ_2 , u. s. f. Die Verbindung der Drehpunkte durch Gerade liefert dann den Linienzug $OO_1O_2O_3O_4 \dots$. Nun stelle man sich vor, die bewegliche Figur BC sei auf einer größeren Scheibe S aufgezeichnet, welche auf einer festen Tafel T liege. Die Punkte O gehören zur festen Tafel T ; auf ihr sei der Linienzug $OO_1O_2O_3O_4$ gezeichnet. Während die Drehung um O erfolgt, möge ein Punkt P der beweglichen Scheibe S mit O zusammenfallen; diese beiden Punkte verschieben sich während der Drehung nicht gegeneinander; man kann sich deshalb während der ersten Drehung durch P und O eine Nadel gesteckt denken; es wird hierdurch die Drehung nicht gehindert werden. Sobald aber BC in der zweiten Lage B_1C_1 angelangt ist, hört der Punkt O auf, Drehpunkt zu sein; es tritt dafür O_1 an die Stelle, und es wird während der zweiten Drehung ein Punkt P_1 (Fig. 31) der Scheibe S mit O_1 zusammenfallen. Da in

Fig. 30.



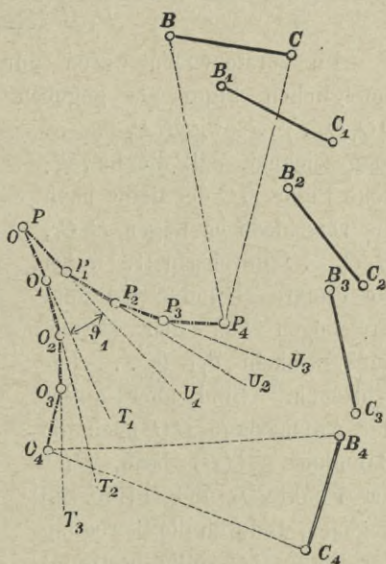
dem Augenblicke, wo BC in der Lage B_1C_1 sich befindet, P noch mit O zusammenfällt, so muß P_1 , welches gleichzeitig mit O_1 sich deckt, um die Länge $PP_1 = OO_1$ von P entfernt sein. Ebenso wird während der Dréhung um O_2 ein Punkt P_2 der beweglichen Scheibe mit O_2 in Berührung sein, so daß wiederum eine durch P_2 und O_2 gesteckte Nadel die Bewegung nicht hindern kann. Offenbar muß nun $P_1P_2 = O_1O_2$ sein. Die Lage von P_1 und P_2 findet man folgendermaßen: Damit nach einer Drehung um den Winkel ϑ_1 der Punkt P_1 auf O_1 falle, muß der Winkel $O_1OP_1 = \vartheta_1$ sein; hiermit ist P_1 gefunden. Verlängert man OO_1 nach T_1 , O_1O_2 nach T_2 , u. s. f.; ebenso PP_1 nach U_1 , so fällt nach der ersten Drehung PU_1 auf OT_1 . Damit nun nach der Zurücklegung eines weiteren Drehungswinkels ϑ_2 der Punkt P_2 auf O_2 , d. h. die Gerade $P_1P_2U_2$ auf $O_1O_2T_2$ falle, muß

$$U_1P_1U_2 + T_1O_1T_2 = \vartheta_2, \text{ also}$$

$$U_1P_1U_2 = \vartheta_2 - T_1O_1T_2$$

gemacht werden. Hiernach steht mit $P_1P_2 = O_1O_2$ der Punkt P_2 fest. In derselben Weise findet man $P_3, P_4, P_5 \dots$. Wenn nun die Punkte P der beweglichen Scheibe der Reihe nach mit den Punkten O der festen Tafel T in der beschriebenen Weise zusammenfallen, so führt das Vieleck $PP_1P_2 \dots$ offenbar eine Rollbewegung (ohne Gleiten) auf dem Vieleck $OO_1O_2 \dots$ aus. Die Folge dieser Rollbewegung ist dann, daß die bewegliche Figur BC der Reihe nach die vorgeschriebenen Lagen B_1C_1, B_2C_2 u. s. f. einnimmt. Solange die bewegliche Figur BC ihre Anfangslage innehat, liegt

Fig. 31.

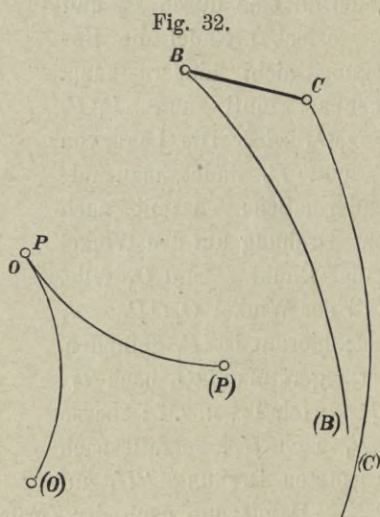


der Punkt, der demnächst mit O_4 zusammenfällt, in P_4 ; wenn aber BC die Lage B_4C_4 hat, so fällt P_4 mit O_4 zusammen; daher muß P_4 gegen BC ebenso liegen, wie O_4 gegen B_4C_4 , d. h.

$$P_4BC \cong O_4B_4C_4, \quad \text{ebenso ist}$$

$$P_1BC \cong O_1B_1C_1 \quad \text{u. s. f.}$$

Im vorstehenden waren nur einzelne bestimmte Lagen der beweglichen Figur als gegeben angenommen und die Vielecke $OO_1O_2\dots$, sowie $PP_1P_2\dots$ so gezeichnet, daß die bewegliche Figur BC der Reihe nach die verschiedenen Lagen B_1C_1 , $B_2C_2\dots$ durchschritt, wobei die Punkte B und C jedesmal Kreisbögen von den Mittelpunkts winkeln $\vartheta_1, \vartheta_2\dots$ beschrieben. Sind aber außer der Anfangslage BC noch die Bahnlinien $B(B)$ bzw. $C(C)$ der Punkte B und C (Fig. 32) gegeben, wodurch die Bewegung der Figur BC völlig bestimmt ist, so entspricht jeder unendlich kleinen Verrückung der Figur ein augenblicklicher Drehpunkt O



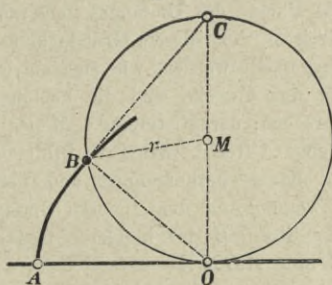
auf der festen Tafel, sowie im Sinne der vorstehenden Entwicklung ein Punkt P der beweglichen Scheibe S , auf welcher sich die Figur BC gezeichnet findet. Statt des Vielecks $OO_1O_2\dots$ erhält man dann eine Kurve $O(O)$ als geometrischen Ort der augenblicklichen Drehpunkte O der festen Tafel T , sowie statt des Vielecks $PP_1P_2\dots$ eine Kurve $P(P)$ als geometrischen Ort derjenigen Punkte P der beweglichen Scheibe, welche nach und nach mit den Punkten O zusammenfallen. Die Kurven $O(O)$ und $P(P)$ heißen die feste bzw. die bewegliche Polbahn, und bei der gegebenen Bewegung erfolgt eine Rollbewegung der beweglichen Polbahn auf der festen Polbahn.

Hiernach ist jede Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene gleichwertig mit dem Rollen einer mit

der Figur verbundenen Polbahn auf einer festen Polbahn. Dementsprechend ist die ebene Bewegung eines Körpers gleichwertig mit dem Rollen einer mit dem Körper verbundenen Zylinderfläche P auf einer festen Zylinderfläche O ; die Leitlinien dieser Zylinderflächen sind die vorstehend behandelten Polbahnen; die Erzeugenden stehen rechtwinklig zu den Ebenen, in denen die Körperpunkte sich bewegen.

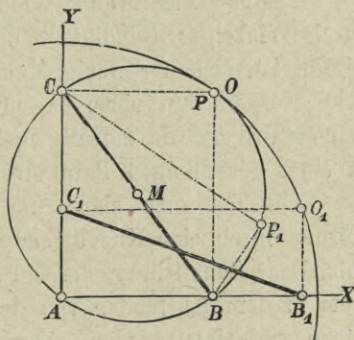
Beispiel 1: Bei der Erzeugung der gemeinen Zykloide ist die Gerade AO (Fig. 33) die feste, der erzeugende Kreis OBC die bewegliche Polbahn. Der Berührungspunkt O beider ist der augenblickliche Drehpunkt, daher OB der Drehungshalbmesser, also auch die Normale für den Punkt B der Zykloide, BC also die Tangente; diese mittels der Analytischen Geometrie nachzuweisenden Eigenschaften folgen hier ohne jede Rechnung.

Fig. 33.



Beispiel 2: Für die in Beispiel 3, S. 31 behandelte Bewegung mit $\alpha = 90^\circ$ sollen die Polbahnen bestimmt werden. Schon auf S. 31 wurde gezeigt, daß der Pol O der beweglichen Geraden BC sich in einem Abstand $AO = BC = a + b$ von dem Schnittpunkt A der Leitlinien AX und AY befindet. Da dieser Abstand keine veränderliche Größe enthält, so ist der Ort des Punktes O , d. h. die feste Polbahn, ein mit dem Halbmesser $R = AO = BC$ aus dem Mittelpunkt A beschriebener Kreis (Fig. 34). Für eine andere Lage B_1C_1 der beweglichen Figur ist O_1 der Pol, wobei $B_1O_1C_1$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse B_1C_1 . Um nun den zu dem Punkte O_1 der festen Polbahn gehörigen Punkt P_1 der beweglichen Polbahn zu finden, haben wir über BC als Hypotenuse ein zu $B_1O_1C_1$ kongruentes Dreieck BP_1C zu zeichnen, dann ist P_1 der gesuchte Punkt. Der Ort der Rechtwinkelpunkte aller über der Hypotenuse BC gezeichneten rechtwinkligen Dreiecke ist aber bekanntlich ein Kreis mit dem Durchmesser $BC = R = 2r$; dieser muß mithin die bewegliche Polbahn P sein. Die gegebene Bewegung also, bei

Fig. 34.



welcher der Stab BC mit den Punkten B und C den Achsen AX bzw. AY folgt, kann auch bewirkt werden durch eine Rollbewegung des kleineren Kreises mit dem Durchmesser $BC = R = 2r$ auf dem inneren Umfange des größeren Kreises vom Halbmesser $R = BC$. Wenn ein Kreis auf dem inneren Umfange eines größeren Kreises rollt, so beschreibt jeder Punkt des Umfanges des ersteren eine Hypozykloide. Ist das Verhältnis der Halbmesser r und R der beiden Kreise aber $1:2$, so geht die Hypozykloide bekanntlich in eine Gerade, einen Durchmesser des großen Kreises über, zu denen beispielsweise die Achsen AX und AY als Bahnen der Kreispunkte B und C gehören. — Jeder Punkt im Inneren des kleinen Kreises beschreibt allgemein eine verkürzte Hypozykloide, die aber für das Verhältnis $1:2$ der Halbmesser beider Kreise mit einer Ellipse übereinstimmt, wie es nach S. 31 der Fall sein muß. Der Mittelpunkt des beweglichen Kreises beschreibt im besonderen einen Kreis; die übrigen Punkte bewegen sich in Ellipsen der verschiedensten Exzentrizitäten, die Punkte des Umfanges in geraden Linien, nämlich Durchmessern des festen Kreises. Aus diesem Grunde kann mittels der beiden Kreise eine Geradföhrung hergestellt werden, wie man sie wohl bei älteren Druckmaschinen noch findet. Zu dem Zwecke sind die beiden Kreise mit äußerer und innerer Verzahnung versehen; der Mittelpunkt M des kleineren Kreises wird mittels einer um die Achse A (rechtwinklig zur Bildebene) drehbaren Kurbel von der Länge $r = AM$ im Kreise herumgeföhrt und hierbei durch die Verzahnung zu einer Rollbewegung auf dem inneren Umfange des großen Kreises gezwungen. Ein an der Stelle B des kleineren Rades angebrachter Zapfen beschreibt dann die Gerade ABX .

4. Drehung eines Körpers um einen festen Punkt; Bewegung einer sphärischen Figur auf ihrer Kugelfläche.

Während die Drehung eines Körpers um eine feste Achse durch Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung völlig bestimmt ist, also nur wenig Mannigfaltigkeit besitzt, ist die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt noch in demselben Grade mannigfaltiger, wie die allgemeine ebene Bewegung im Vergleich zu einer geradlinigen Parallelverschiebung.

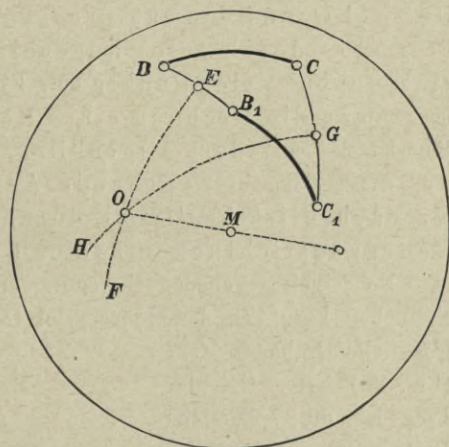
Schneidet man einen um einen festen Punkt M drehbaren Körper durch eine Kugelfläche vom Halbmesser r , so entsteht eine sphärische Schnittfigur, deren Punkte bei der Bewegung des Körpers stets in dem Abstand r von dem Punkt M , d. h. in ihrer Kugelfläche, verbleiben werden. Durch die Bewegung der Schnittfigur ist die Drehung des Körpers völlig bestimmt, und umgekehrt. Für die Bewegung der Figur auf der Kugel und demgemäß für die Drehung des Körpers um den festen Punkt lassen sich nun ähnliche

Beziehungen finden, wie vorstehend für die ebene Bewegung entwickelt wurden.

Die Lage einer sphärischen Figur auf ihrer Kugel ist schon durch die Lage zweier Punkte bestimmt, u. zw. sind dazu nur drei Koordinaten erforderlich.

Es genügt daher die Beobachtung der Bewegung einer Seite BC einer sphärischen Figur (Fig. 35).

Fig. 35.



Die Überführung der Seite aus der Anfangslage BC in eine andere Lage B_1C_1 läßt sich durch Drehung um einen Punkt O der Kugelfläche bewirken. Man findet O nach demselben Gedankengange wie bei der ebenen Bewegung auf S. 28; wo aber dort von geraden

Linien die Rede war, treten jetzt Größtkreise der Kugel an ihre Stelle. Zieht man durch B und B_1 einen Größtkreis und zu ihm durch die Mitte E des Bogens BB_1 einen dazu rechtwinkligen Größtkreis EF , so haben alle Punkte des letzteren gleichen Abstand von B und B_1 ; durch Drehung um irgendeinen Punkt des Größtkreises EF würde daher B in die neue Lage B_1 gelangen. Dasselbe gilt bezüglich der Punkte C und C_1 von jedem Punkte des Größtkreises GH , welcher in der Mitte G von CC_1 rechtwinklig zu CC_1 gezogen ist. Wird nun der Schnittpunkt O von EF und GH zum Drehpunkte gewählt, so gelangt dadurch B nach B_1 und, weil $ABC \cong OB_1C_1$, gleichzeitig C nach C_1 , d. h. die Seite BC in ihre zweite Lage B_1C_1 . Eine Drehung der BC um den Punkt O ist auch gleichbedeutend mit der Drehung um den Kugelhalbmesser OM als Achse.

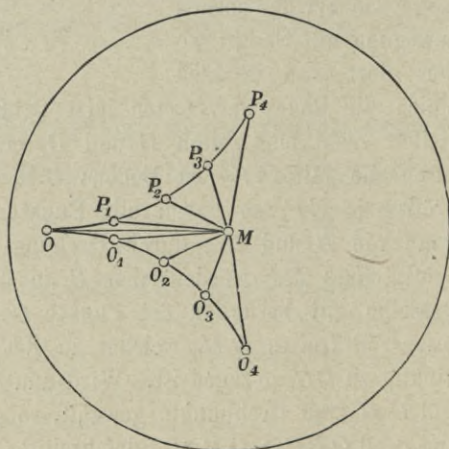
Sind BC und B_1C_1 zwei Lagen von unendlich kleinem Abstand, und legt man durch B und C Größtkreise rechtwinklig zu den Bahnlagen BB_1 und CC_1 , so schneiden sich diese in dem Pol

oder augenblicklichen Drehpunkt O , dem ein Halbmesser OM der Kugel als augenblickliche Drehachse entspricht. Also:

Die Bewegung einer Figur auf der Kugelfläche kann man in jedem Augenblick auffassen als Drehung um einen Pol O auf der Kugelfläche oder um einen Halbmesser OM der Kugel als augenblickliche Drehachse. Der Pol O und die entsprechende Drehachse OM sind bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte der Figur. Dementsprechend kann man die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt M in jedem Augenblick auffassen als Drehung um eine durch M gehende Achse; die Richtung der Drehachse ist bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte.

Bei einer gegebenen Bewegung entspricht jeder Lage der beweglichen Figur ein besonderer Pol O und eine besondere augenblickliche Drehachse OM (Fig. 36). Der Ort der Pole ist die sphärische Polbahn (O), der Ort der augenblicklichen Drehachsen die Kegelfläche (OM) mit der Spitze im Mittelpunkt M der Kugel.

Fig 36.



Denkt man sich nun die feste Kugel mit einem ihr genau aufgepaßten Überzuge versehen und auf letzteren die Figur BC gezeichnet, so wird bei der Bewegung der Figur der ganze Überzug auf der festen Kugel gleiten. Dort wo der augenblickliche Pol O liegt, wird man Kugel und Überzug durch eine Nadel gegeneinander feststellen können, ohne daß dadurch die vorgeschriebene Bewegung des Überzuges mit der aufgezeichneten Figur gehindert wird. Nennt man P den Punkt des Überzuges, der mit dem Pol O der festen Kugel zusammenfällt, so wird ebenso wie bei der ebenen Bewegung

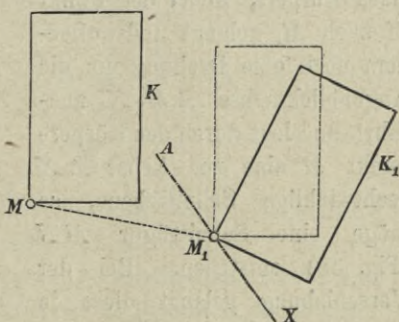
(S. 34) jedem Punkt O ein bestimmter Punkt P entsprechen. Der Ort der Punkte P ist eine sphärische Kurve des Überzuges; d. h. mit der beweglichen Figur verbunden, und heißt die bewegliche Polbahn. Sie ist die Leitlinie einer Kegelfläche (PM) mit der Spitze im Mittelpunkt M der Kugel. Die bewegliche Polbahn (P) hat mit der festen Polbahn (O) stets einen Punkt gemeinsam, der auf beiden Bahnen stets um gleiche Bogenlängen sich verschiebt; die bewegliche Polbahn rollt auf der festen Polbahn, oder auch: die bewegliche, mit der Figur verbundene Kegelfläche (PM) rollt auf der festen Kegelfläche. Also:

Jede Bewegung einer sphärischen Figur auf ihrer Kugelfläche kann man auffassen als das Rollen einer mit der Figur verbundenen sphärischen Polbahn auf einer festen sphärischen Polbahn. Dementsprechend ist die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt M gleichwertig mit dem Rollen einer mit dem Körper verbundenen Kegelfläche auf einer festen Kegelfläche; die Kegel haben den festen Drehpunkt M gemeinsam zur Spitze.

5. Allgemeine Bewegung eines Körpers; Schraubenbewegung.

K und K_1 (Fig. 37) seien zwei unendlich benachbarte Lagen eines Körpers; irgendein Punkt M beschreibe beim Übergang aus der einen in die andere die Bahnlinie MM_1 ; dann kann man den Übergang dadurch bewerkstelligen, daß man dem Körper zunächst eine Verschiebung um MM_1 erteilt, wodurch der Körper in die punktierte Zwischenlage gelangt, und ihn sodann noch um den Punkt M_1 dreht. Diese unendlich kleine Drehung um den Punkt M_1 ist nach S. 38 zurückzuführen auf eine Drehung um eine durch M_1 gehende Achse AX .

Fig. 37.



Also: Jede Bewegung eines Körpers kann für einen Augenblick aufgefaßt werden als zusammengesetzt aus einer Verschiebung und einer Drehung um eine augenblickliche Drehachse.

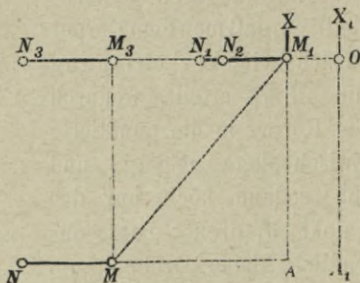
Befinden sich die beiden Lagen K und K_1 aber in endlichem Abstände, so muß man, wenn der eine Punkt des Körpers in der gegebenen Bahnlinie MM_1 geführt wird, dem Körper, damit er eine gegebene Bewegung ausführe, gleichzeitig eine Drehung um den richtig geführten Punkt M erteilen, welche nach S. 39 gleichwertig ist dem Rollen einer mit dem Körper verbundenen Kegelfläche auf einer anderen Kegelfläche, die mit dem richtig geführten Punkt M parallel verschoben wird. Die Kegel haben den Punkt M gemeinsam zur Spitze. Also:

Die beliebige Bewegung eines Körpers ist gleichwertig dem Rollen eines mit dem Körper verbundenen Kegels auf einem zweiten Kegel, der eine Verschiebung erleidet. Die Verschiebung stimmt überein mit der Bahnlinie desjenigen Körperpunktes, der die gemeinsame Spitze der Kegel bildet.

Je nachdem der führende Punkt M am Körper anders gewählt wird, ergeben sich andere Verschiebungen und Rollbewegungen; es läßt sich daher eine Bewegung in unendlich vielen verschiedenen Weisen auf Verschiebung und Rollen zurückführen. Einfacher und zugleich bestimmter läßt sich aber die Bewegung eines Körpers auf **Schraubenbewegungen** zurückführen.

Betrachtet man wiederum eine unendlich kleine Bewegung eines Körpers, wobei der Punkt M nach M_1 gelangt und außerdem noch eine Drehung um die Augenblicksachse AM_1X ausführt, und legt durch den Körperpunkt M eine zur Achse AX rechtwinklige Schnittebene, so möge eine Schnittfigur MN (Fig. 38) entstehen. Bei der Verschiebung gelangt diese in die Lage M_1N_1 , dann ist aber noch eine Drehung um AX erforderlich, durch welche die

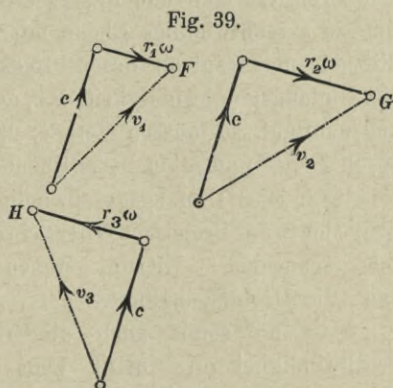
Fig. 38.



Figur in die Endlage $M_1 N_2$ gelangen möge. Enthält die Schnittfigur mindestens drei nicht in dieselbe Gerade fallende Punkte, so bestimmt sie (nach S. 27) die Bewegung des Körpers vollständig. Man verschiebe nun die Schnittfigur MN zunächst rechtwinklig zu ihrer Ebene in ihre neue, durch M_1 gehende Parallelebene, in der sie die Zwischenlage $M_3 N_3$ einnehmen möge; dann ist nur noch eine Überführung in die derselben Ebene angehörende Lage $M_1 N_2$ erforderlich. Diese Bewegung kann man aber nach S. 28 durch Drehung um einen in der Ebene liegenden Pol O oder um eine zur Ebene rechtwinklige Achse $A_1 O X_1$ ausführen. Diese letztere Achse fällt im allgemeinen nicht mit AX zusammen, ist aber dazu parallel. Hiermit ist die Bewegung der Schnittfigur MN und damit diejenige des Körpers zurückgeführt auf eine Verschiebung und eine Drehung um eine zur Verschiebungsrichtung parallele Achse; eine solche Bewegung aber (Drehung um eine Achse und Verschiebung parallel oder längs derselben) nennt man nach Bd. I, Aufl. 4, S. 365, eine Schraubenbewegung.

Ist c die Verschiebungsgeschwindigkeit längs der Achse und ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Schraubenachse, so sind die Geschwindigkeiten

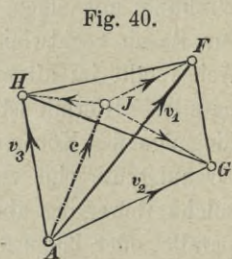
v_1, v_2 und v_3 dreier Punkte in den Abständen r_1, r_2 und r_3 von der Achse nach dargestellt als Hypothenusen über den Katheten c und $r_1\omega, c$ und $r_2\omega$ und c und $r_3\omega$ (Fig. 39). Sind für einen Augenblick die Lage der Schraubenachse, die Geschwindigkeiten c und ω gegeben, so ist für jeden Punkt des Körpers die Geschwindigkeit



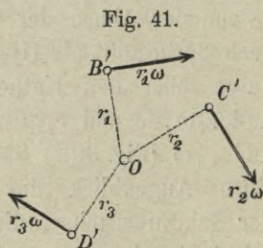
v mittels eines Geschwindigkeitsdreiecks nach Größe und Richtung bestimmbar. Dabei ist bemerkenswert, daß die Kathete c bei allen diesen Dreiecken nach Größe und Richtung dieselbe ist. Denkt man sich die Geschwindigkeitsdreiecke nicht wie in Fig. 39 in die Zeichenebene niedergeschlagen, sondern mit den wahren Richtungen im Raume konstruiert und mit den Katheten c aneinander gelegt, so

bilden die Umfangsgeschwindigkeiten der Drehung $r_1 \omega$, $r_2 \omega$ und $r_3 \omega$ Strahlen, die zu c rechtwinklig stehen, d. h. in einer zu c rechtwinkligen Ebene liegen. In dieser Ebene befinden sich also auch die Endpunkte F , G , H der wahren Geschwindigkeiten v_1 , v_2 und v_3 .

Hierauf gründet sich die zeichnerische Festlegung der Schraubensachse $X_1 X_1$, wenn von drei Punkten B , C und D des Körpers die wahren Geschwindigkeiten v_1 , v_2 und v_3 nach Größe und Richtung gegeben sind. Man trägt nämlich diese drei Geschwindigkeiten von einem Punkt A aus nach Größe und Richtung auf (Fig. 40), legt durch deren Endpunkte F , G und H eine Ebene E und zieht von A aus eine Rechtwinklige AJ zur Ebene, so ist $AJ = c$ die Verschiebungsgeschwindigkeit der Schraubensachse. Zugleich ist nach Größe und Richtung $JF = r_1 \omega$; $JG = r_2 \omega$; $JH = r_3 \omega$.



Projiziert man nun die Punkte B , C und D des Körpers auf eine zu c rechtwinklige Ebene mit den Projektionen B' , C' und D' (Fig. 41) und trägt an diesen Projektionen die Umfangsgeschwindigkeiten $r_1 \omega$, $r_2 \omega$ und $r_3 \omega$ auf, so müssen Gerade, die man durch B' , C' und D' in dieser Ebene rechtwinklig zu jenen Umfangsgeschwindigkeiten zieht, sich in der Projektion O der Schraubensachse schneiden. Hiermit stehen dann auch die Drehungshalbmesser r_1 , r_2 und r_3 fest und somit auch die Winkelgeschwindigkeit ω . Da die Lage des Punktes O schon durch zwei Gerade $B'O$ und $C'O$ bestimmt ist, so ist die Gerade $D'O$ zur Bestimmung überflüssig. Auch ist ω schon aus $r_1 \omega$ und $OB' = r_1$ gefunden, mithin sind hierzu die Größen r_2 und r_3 nicht mehr nötig. In den Geschwindigkeiten v_1 , v_2 und v_3 von drei bestimmten Punkten B , C und D des Körpers liegen also drei Größen mehr vor, als für die Ermittlung der augenblicklichen Schraubensachse erforderlich sind. Es hängt dies damit zusammen, daß nach S. 26



zur Bestimmung der Lage eines Körpers nicht neun, sondern nur sechs Stücke erforderlich sind.

Sämtliche Punkte der Schraubenachse haben Geschwindigkeiten von der übereinstimmenden Größe c , deren Richtungen sämtlich in diese Achse fallen, weil die Drehungshalbmesser r Null sind. Legt man durch den Körper irgendeine Gerade, welche der Schraubenachse parallel ist, so haben deren Punkte wohl auch Geschwindigkeiten gleicher Größe und Richtung, doch bildet letztere mit der Schraubenachse einen Winkel α , für den $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r\omega}{c}$, der also von Null verschieden ist. Legt man aber durch den Körper eine Gerade, die mit der Schraubenachse nicht parallel ist, deren Punkte also verschiedene Abstände von der Schraubenachse haben, so sind die Geschwindigkeiten dieser Punkte nach Größe und Richtung verschieden. Hiernach kommt die kennzeichnende Eigenschaft der Schraubenachse, daß die Geschwindigkeiten aller ihrer Punkte in der Richtung der Achse liegen, nur der einen Geraden zu. Während also der augenblickliche Bewegungszustand eines Körpers (nach S. 40) in unendlich vielen verschiedenen Weisen auf eine Verschiebung und eine Drehung zurückgeführt werden kann, ist die Zurückführung auf eine Schraubenbewegung nur in einer Weise möglich. Daher hat man den Satz:

Jede Bewegung eines Körpers kann für einen Augenblick, und zwar nur in einer Weise, auf eine Schraubenbewegung zurückgeführt werden.

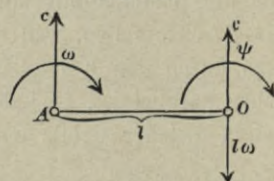
C. Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen eines Körpers.

1. Drehung und Verschiebung.

Ein Körper habe eine Drehung um eine Achse A mit einer Winkelgeschwindigkeit ω und erleide gleichzeitig eine Verschiebung in einer Richtung, rechtwinklig zu der Achse, mit der Geschwindigkeit c (Fig. 42). Dieser Fall kommt z. B. vor, wenn sich ein

Rad um eine Achse dreht, die Achse aber nicht festliegt, sondern verschoben wird. (Ein besonderer Fall hiervon ist jedes rollende Rad.) Schneidet man den Körper durch eine zur Achse A rechtwinklige Ebene E , so bewegt sich die Schnittfigur nur in ihrer Ebene; es ist daher diese zusammengesetzte Bewegung eine ebene Bewegung, die nach S. 29 für jeden Augenblick als Drehung um einen Pol O oder um eine rechtwinklig zur Ebene

Fig. 42.



stehende Achse O aufgefaßt werden kann. Legt man durch A in der Ebene E eine Gerade $AO = l$, rechtwinklig zu c , so bekommt der Endpunkt O infolge der Winkelgeschwindigkeit ω eine Geschwindigkeit $l\omega$ nach unten, infolge der Verschiebungsgeschwindigkeit c , an der alle Punkte übereinstimmend teilnehmen, eine Geschwindigkeit c nach oben. Ist nun

$$1) \quad l\omega = c,$$

so wird die Geschwindigkeit in O zu Null; hierdurch kennzeichnet sich der Pol O und die in O rechtwinklig zur Bildebene errichtete augenblickliche Drehachse. Nennt man ψ die zu suchende Winkelgeschwindigkeit um O , so muß ψ derartig bestimmt werden, daß daraus der gegebene Geschwindigkeitszustand wieder hervorgeht. Die mit der Achse A zusammenfallenden Punkte des Körpers hatten aber nur die Geschwindigkeit c , rechtwinklig zu OA ; durch ψ bekommen sie eine Geschwindigkeit $l\psi$ in derselben Richtung mit c , daher muß

$$l\psi = c$$

sein, und weil auch $l\omega = c$ (Gl. 1), so wird

$$2) \quad l = \frac{c}{\omega} \quad \text{und} \quad \psi = \omega. \quad \text{Das heißt:}$$

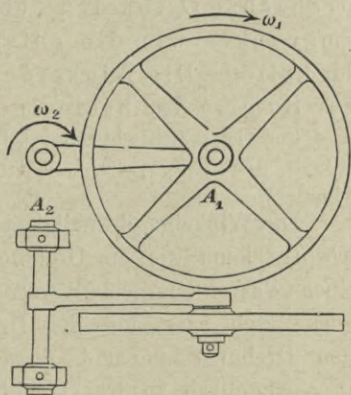
Eine Drehung um eine Achse A mit der Winkelgeschwindigkeit ω und einer gleichzeitigen Verschiebung rechtwinklig zu A mit der Geschwindigkeit c lassen sich zu einer einzigen Drehung um eine Achse $O \parallel A$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω zusammensetzen. A und O liegen in einer zu c rechtwinkligen Ebene; ihr Abstand ist $l = c:\omega$. Umgekehrt

läßt sich natürlich eine Drehung um O mit der Winkelgeschwindigkeit ω zerlegen in eine Drehung um eine zu O parallele Achse A im Abstände l von O mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω und eine gleichzeitige Verschiebung rechtwinklig zu der durch O und A gelegten Ebene mit der Geschwindigkeit $c = l\omega$.

2. Drehungen um parallele Achsen.

Dreht sich (Fig. 43) ein Körper, vielleicht ein Rad, um eine Achse A_1 mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_1 , befindet sich aber die Achse A_1 an einem Kurbelarme von der Länge l , der sich zugleich mit der Geschwindigkeit ω_2 um eine Achse A_2 dreht, so hat der Körper eine von beiden Drehungen beeinflusste Bewegung, die aber, weil sie eine ebene Bewegung ist, in jedem Augenblick auf eine einzige Drehung um eine Achse O zurückgeführt werden kann.

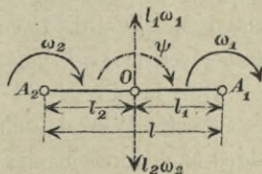
Fig. 43.



Haben ω_1 und ω_2 übereinstimmenden Drehsinn, so wähle man in der durch A_1 und A_2 gehenden Ebene (Fig. 44) eine zu beiden parallele Achse O , welche

von A_1 und A_2 die Abstände l_1 und l_2 hat; diese Achse empfängt von ω_1 eine Geschwindigkeit $l_1\omega_1$ aufwärts, von ω_2 eine Geschwindigkeit $l_2\omega_2$ abwärts. Die Gesamtgeschwindigkeit der Achse O ist also Null, wenn

Fig. 44.



$$3) \quad l_1 \omega_1 = l_2 \omega_2 \quad \text{oder} \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Hierdurch ist die augenblickliche Drehachse gefunden. Für ihre Winkelgeschwindigkeit ψ ist Bedingung, daß die zurzeit in den gegebenen Achsen befindlich gedachten Körperpunkte ihre wahren Geschwindigkeiten wiedererhalten. A_1 bekommt durch ω_2 eine Geschwindigkeit

$(l_1 + l_2) \omega_2$, durch ψ eine Geschwindigkeit $l_1 \cdot \psi$. Ein Körperpunkt A_2 würde durch ω_1 eine Geschwindigkeit $(l_1 + l_2) \omega_1$, durch ψ eine Geschwindigkeit $l_2 \psi$ erhalten. Daher muß stattfinden:

$$l_1 \psi = (l_1 + l_2) \omega_2 \quad \text{und} \quad l_2 \psi = (l_1 + l_2) \omega_1, \quad \text{d. h.}$$

$$(l_1 + l_2) \psi = (l_1 + l_2) (\omega_1 + \omega_2) \quad \text{oder}$$

$$4) \quad \psi = \omega_1 + \omega_2. \quad \text{Also:}$$

Zwei gleichzeitige Drehungen von übereinstimmendem Sinn um Parallelachsen A_1 und A_2 können in jedem Augenblicke zu einer einzigen Drehung um eine in der Ebene der A_1 und A_2 , zwischen beiden liegende und zu ihnen parallele Achse O ersetzt werden. Die Abstände l_1 und l_2 der augenblicklichen Drehachse O von den beiden gegebenen verhalten sich umgekehrt wie die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten. Die Winkelgeschwindigkeit um O ist gleich der Summe der beiden gegebenen.

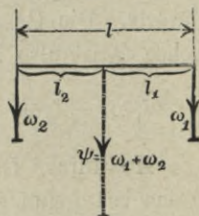
Für die vorstehende Entwicklung ist es gleichgültig, ob sich der Körper in erster Linie mit ω_1 um A_1 und in zweiter Linie mit ω_2 um A_2 dreht, oder umgekehrt.

Die Winkelgeschwindigkeit eines sich um eine Achse drehenden Körpers kann wie ein Drehmoment durch eine gerichtete Strecke, einen „Vektor“, dargestellt werden, der rechtwinklig auf der Drehungsebene steht, also mit der Drehachse zusammenfällt, dessen Pfeil den Drehungssinn und dessen Länge die Größe der Winkelgeschwindigkeit ausdrückt (vgl. Bd. I, Aufl. 4, S. 139).

Danach kann man auch bei mehreren gleichzeitigen Drehbewegungen eines Körpers um verschiedene Achsen, die Winkelgeschwindigkeiten, durch ihre Vektoren ausgedrückt, wie Einzelkräfte behandeln und nach den dafür in Bd. I entwickelten Regeln zusammensetzen (vgl. hier auch S. 7 u. 8).

Die in Figur 44 durch Drehungspfeile gezeichneten Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 bilden nach vorstehender Erklärung zwei parallele Vektoren ω_1 und ω_2 gleichen Sinnes im Abstände l (Fig. 45). Der Mittelvektor ist gleich der Summe der gegebenen, liegt mit ω_1 und ω_2 in derselben Ebene zwischen beiden und ist mit ihnen parallel. Seine Abstände von

Fig. 45.



den gegebenen Geschwindigkeitsvektoren ω_1 und ω_2 verhalten sich umgekehrt wie diese

$$l_1 : l_2 = \omega_2 : \omega_1.$$

Der so erhaltene Mittelvektor $\psi = \omega_1 + \omega_2$ entspricht genau dem Ergebnisse der Zusammensetzung der Winkelgeschwindigkeiten auf Seite 46.

Ist der Drehsinn von ω_1 dem von ω_2 entgegengesetzt (Fig. 46), so liegt die augenblickliche Drehachse O auch in der Ebene der A_1 und A_2 und zu ihnen parallel, aber nicht zwischen ihnen, sondern außerhalb derselben, u. zw. auf der Seite der Achse mit der größeren Winkelgeschwindigkeit. Wählt man nämlich für $\omega_1 > \omega_2$ rechts von A_1 eine Achse O mit den Abständen l_1 und l_2 von A_1 und A_2 , so empfängt O vermöge ω_1 eine Geschwindigkeit $l_1 \omega_1$ abwärts, vermöge ω_2 eine Geschwindigkeit $l_2 \omega_2$ aufwärts, so daß die Gesamtgeschwindigkeit von O wiederum Null wird für

$$5) \quad l_1 \omega_1 = l_2 \omega_2 \quad \text{oder} \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Für die Winkelgeschwindigkeit ψ der augenblicklichen Drehachse O gilt wieder

$$\begin{aligned} l_2 \psi &= \omega_1 l = \omega_1 (l_2 - l_1) \\ l_1 \psi &= \omega_2 l = \omega_2 (l_2 - l_1) \quad \text{also} \\ (l_2 - l_1) \psi &= (\omega_1 - \omega_2) (l_2 - l_1), \quad \text{d. h.} \end{aligned}$$

$$6) \quad \psi = \omega_1 - \omega_2.$$

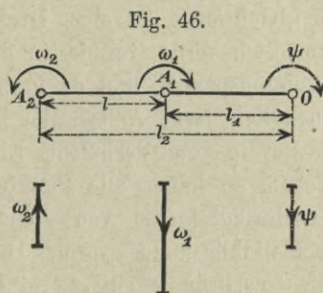
Die Zusammensetzung der Vektoren ω_1 und ω_2 zu einem Mittelvektor ψ nach der Lehre von der Zusammensetzung paralleler Kräfte liefert nach Fig. 46 dasselbe Ergebnis.

Gl. 5 kann man auch schreiben:

$$\frac{l_1}{l_2 - l_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \quad \text{oder}$$

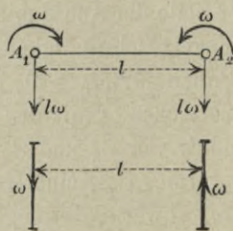
$$7) \quad l_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} l.$$

Stellt man sich nun vor, daß ω_2 unverändert bleibt, daß aber das ursprünglich größere ω_1 sich allmählich ω_2 nähert, so daß



$\psi = \omega_1 - \omega_2$ mehr und mehr gegen Null geht, so wird l_1 größer und größer, und im Grenzfalle $\omega_1 = \omega_2$ wird $\psi = 0$ und $l_1 = \infty$, d. h. für zwei gleiche und entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeiten um Parallelachsen gibt es keine in der Endlichkeit liegende augenblickliche Drehachse (ebensowenig, wie zwei gleiche Parallelkräfte entgegengesetzten Sinnes eine in der Endlichkeit liegende Mittelkraft haben). Zwei solche gleiche parallele Drehungsvektoren entgegengesetzten Sinnes nennt man ein **Drehungspaar** (entsprechend der Bezeichnung Kräftepaar, 1. Teil, Aufl. 4, S. 115 u. 119. Da es gleichwertig ist einer Drehung um eine unendlich ferne Gerade in der Ebene des Drehungspaares, und da in bezug auf eine unendlich ferne Achse alle Drehungshalbmesser in dem Verhältnis Eins zueinander stehen, so haben alle Punkte des Körpers Geschwindigkeiten von gleicher Größe c , rechtwinklig zur Ebene des Drehungspaares. Die Geschwindigkeit c ergibt sich einfach durch Beobachtung der Geschwindigkeit der Punkte der Achse A_1 (Fig. 47), nämlich $c = l\omega$ nach unten, ebenso für A_2 zu $c = l\omega$ nach unten.

Fig. 47.

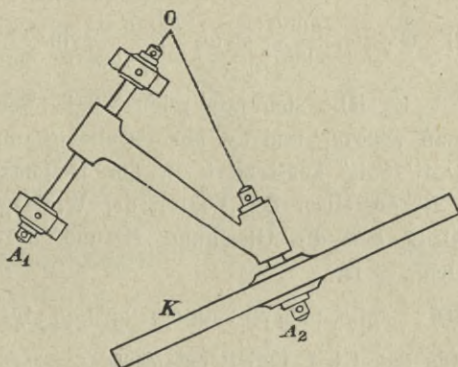


Ein Drehungspaar ist gleichwertig einer Verschiebung, rechtwinklig zur Ebene des Paares. Das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Abstand l der beiden Achsen heißt das Moment des Paares und bezeichnet die Größe $c = l\omega$ der Verschiebungsgeschwindigkeit. Da die Verschiebungsgeschwindigkeit c allen Punkten des Körpers gemeinsam ist, c also keine bestimmte Lage hat, so haben auch die Achsen eines Drehungspaares keine bestimmte Lage, können vielmehr, ebenso wie Kräftepaare, nicht nur in ihrer Ebene, sondern auch in Parallelebenen beliebig verschoben und verwandelt werden; es kommt bei ihnen nur auf die Größe ihres Momentes, d. h. der gleichwertigen Verschiebungsgeschwindigkeit $c = l\omega$, auf die Richtung dieser zu ihren Ebenen rechtwinkligen Geschwindigkeit c und den Sinn von c an. Eine einzelne Drehungsstrecke dagegen hat wie eine Einzelkraft (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 139) eine bestimmte Lage. Jede Verschiebungsgeschwindigkeit kann durch ein Drehungspaar ausgedrückt werden.

3. Drehungen um sich schneidende Achsen.

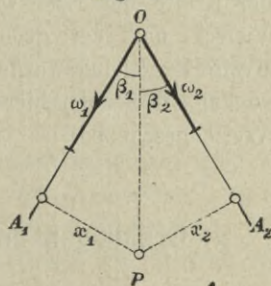
Dreht sich der Körper K um die Achse OA_2 (Fig. 48) und diese wieder um die Achse OA_1 , so sagt man, der Körper habe gleichzeitig zwei Drehungen um OA_1 und OA_2 mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 , welche in Fig. 49 als Drehungsvektoren (Drehungsstrecken) aufgetragen sind. Würde sich ein Körperpunkt bei O befinden, so hätte dieser die Geschwindigkeit Null; daher kann die Bewegung des Körpers als Drehung um einen festen Punkt O und nach S. 38 für jeden

Fig. 48.



Augenblick als Drehung um eine durch O gehende augenblickliche Drehachse OP aufgefaßt werden. Es ist die Richtung von OP und ihre Winkelgeschwindigkeit ψ zu bestimmen, u. zw. im Hinblick darauf, daß ein beliebiger Punkt P der Achse die Geschwindigkeit Null hat. Wählt man OP in der Ebene OA_1A_2 und hat der Punkt P von OA_1 und OA_2 die rechtwinkligen Abstände x_1 und x_2 , so bekommt P durch ω_1 eine Geschwindigkeit $x_1\omega_1$ nach unten, durch ω_2 eine Geschwindigkeit $x_2\omega_2$ nach oben; ist also $x_1\omega_1 = x_2\omega_2$, so hat P die Gesamtgeschwindigkeit Null. Nennt man die Winkel der OP mit OA_1 und OA_2 bzw. β_1 und β_2 , ihre Summe $\beta_1 + \beta_2 = \alpha$, so ist

Fig. 49.



daher muß

$$x_1\omega_1 = x_2\omega_2, \quad \text{d. h.} \quad \omega_1 \sin \beta_1 = \omega_2 \sin \beta_2,$$

$$8) \quad \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ sein.}$$

Um die Winkelgeschwindigkeit ψ der Achse OP zu erhalten fällt man von A_2 aus die Winkelrechten A_2Q und A_2R (Fig. 50), dann muß

$$\psi \cdot \overline{QA_2} = \omega_1 \cdot \overline{RA_2} \quad \text{oder}$$

$$\psi \cdot \overline{OA_2} \cdot \sin \beta_2 = \omega_1 \cdot \overline{OA_2} \cdot \sin \alpha, \quad \text{d. h.}$$

$$9) \quad \psi = \omega_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta_2} = \omega_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta_1} \quad \text{sein.}$$

Es läßt sich nun zeigen, daß, wenn man aus ω_1 und ω_2 ein Parallelogramm $OA_1'P'A_2'$ konstruiert, in der Diagonale OP' desselben der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ψ erhalten wird, der die Gleichung 8 und 9 erfüllt.

Denn es ist

$$10) \quad \sin \beta_1 : \sin \beta_2 : \sin \alpha = \omega_2 : \omega_1 : \psi,$$

was den Gl. 8 und 9 entspricht.

Daraus folgt, daß auch sich schneidende Drehungsvektoren wie Einzelkräfte zusammengesetzt werden können.

Wie aus dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte der Satz vom Parallelepiped, vom Vieleck und der geometrischen Summe der Kräfte hergeleitet wurde (1. Teil, Aufl. 4 S. 40—43 und hier S. 3 u. f.), so kann dies auch hier bezüglich der Drehungsstrecken in gleicher Weise geschehen.

4. Drehungen um Achsen, die nicht in derselben Ebene liegen.

Sind (Fig. 52) $A_1B_1 = \omega_1$ und $A_2B_2 = \omega_2$ zwei zueinander windschiefe Drehungsvektoren, so lege man durch A_2 zwei Drehungsvektoren A_2C_2 und A_2D_2 , beide $=$ und $\parallel A_1B_1$, aber unter sich von entgegengesetztem Sinne. Diese beide heben sich gegenseitig auf, denn zwei gleiche entgegengesetzte Drehungen um dieselbe Achse tilgen sich gegenseitig. A_2B_2 und A_2C_2 lassen sich nach dem Parallelogrammgesetze zu einer Drehungsachse $A_2E_2 = \psi$

Fig. 50.

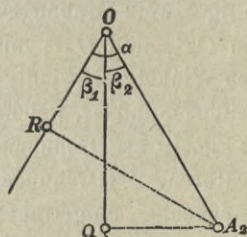
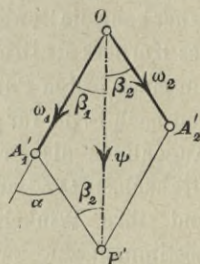


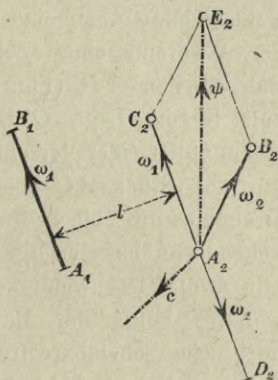
Fig. 51.



vereinigen. $A_1 B_1$ und $A_2 D_2$ aber bilden ein Drehungspaar von dem Momente $l \cdot \omega_1$, wenn l der Abstand des Punktes A_2 von der Richtung $A_1 B_1$; dies Drehungspaar ist gleichbedeutend mit einer zur Ebene $B_1 A_1 A_2$ rechtwinkligen Verschiebungsgeschwindigkeit $c = l \cdot \omega_1$. Hiermit sind die gegebenen Drehungsvektoren ω_1 und ω_2 zurückgeführt auf einen Drehungsvektor ψ und eine Verschiebungsgeschwindigkeit c .

Auf Grund dieses Verfahrens kann man beliebig viele im Raume zerstreute Drehungsvektoren zusammensetzen, indem man sie wie Einzelkräfte behandelt und mit ihnen genau so verfährt, wie in 1. Teil, Aufl. 4 S. 141 und hier S. 3 u. f. ausführlich beschrieben wurde. Auch gleichzeitig noch gegebene Verschiebungsgeschwindigkeiten erschweren die Aufgabe nicht, da man sie als Drehungspaare darstellen kann. Wie man bei der Zusammenstellung von Kräften zu einer Einzelkraft und einem Kräftepaare gelangt, so erhält man hier als Endergebnis einen Drehungsvektor und ein Drehungspaar, d. h. einen Drehungsvektor und eine Verschiebungsgeschwindigkeit; und wie man dort durch geeignete Parallelverschiebung der Einzelkraft erreichen konnte, daß die Kräftepaarsachse so klein wie möglich und parallel der Einzelkraft wurde, so kann man in entsprechender Weise auch hier dazu gelangen, daß die Verschiebungsgeschwindigkeit so klein wie möglich und parallel dem Drehungsvektor werde, d. h. daß schließlich eine Schraubenbewegung entsteht. Die Achse der Schraubenbewegung entspricht also der Zentralachse (1. Teil, Aufl. 4 S. 145) einer Kräftegruppe.

Fig. 52.



5. Bewegung eines Punktes in einer Bahnlinie mit beliebiger Bewegung.

Wenn ein Punkt sich in einer beliebigen Bahnlinie bewegt, die selbst eine Verschiebung erleidet, so gilt nach 1. Teil Aufl. 4 S. 26

für die wahre Bewegung des Punktes, sowie auch für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung derselben einfach das Parallelogrammgesetz. Das Ergebnis wird aber zum Teil ein anderes, wenn die Bahnlinie eine beliebige Bewegung ausführt, d. h. neben der Verschiebung auch eine Drehung erleidet.

Während eines Zeiteilchens dt durchlaufe der Punkt das Bahnteilchen AB (Fig. 53), dieses aber gehe während derselben Zeit in die Lage CD über,

indem außer einer Verschiebung um das Stück AC noch eine Drehung um eine durch C gehende Achse erfolge. Ist nun w die Geschwindigkeit des Punktes längs der Bahnlinie oder seine scheinbare (relative) Geschwindigkeit in bezug auf dieselbe, u die Geschwindigkeit,

mit welcher sich der Anfangspunkt A des relativen Bahnteilchens bewegt, v endlich die Geschwindigkeit der wahren (resultierenden) Bewegung von A nach D , so ist, wenn man die Sehnen \overline{AB} , \overline{AC} und \overline{AD} zieht, nach dem Begriffe der Geschwindigkeit einer krummlinigen Bewegung (S. 16 u. f.) $\overline{AB} = w \cdot dt$; $\overline{AC} = u \cdot dt$; $\overline{AD} = v \cdot dt$. Infolge der Drehung der Bahnlinie verändert sich nun der Winkel α zwischen den Sehnen \overline{AB} und \overline{AC} auf $\overline{ACD} = \alpha + d\alpha$. Daher wird, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor dt in $w dt$, $u dt$ und $v dt$ fortläßt,

$$v = \sqrt{u^2 + w^2 - 2uw \cos(\alpha + d\alpha)};$$

da aber $\cos(\alpha + d\alpha) = \cos \alpha - \sin \alpha \cdot d\alpha$, sich also von $\cos \alpha$ nur um ein unendlich kleines unterscheidet, so wird

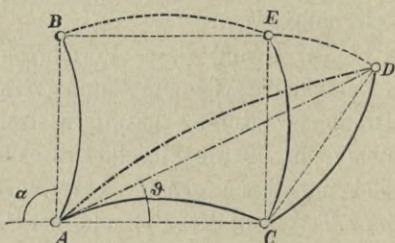
$$1) \quad v = \sqrt{u^2 + w^2 - 2uw \cos \alpha} \quad \text{und}$$

$$\sin \vartheta : \sin(\alpha + d\alpha) = w : v, \quad \text{d. h.}$$

$$2) \quad \sin \vartheta = \frac{w}{v} \sin \alpha.$$

Richtung und Größe der wahren Geschwindigkeit v ändern sich hiernach infolge der Drehung der Bahnlinie nicht um eine endliche Größe. Die wahre Geschwindigkeit v ist die

Fig. 53.



geometrische Summe aus der scheinbaren Geschwindigkeit w und der Geschwindigkeit u , mit welcher sich der Anfangspunkt des Teilchens der scheinbaren Bahnlinie bewegt.

Anders ist es aber mit der Beschleunigung. Erfährt die Bahnlinie nur eine Verschiebung, aber keine Verdrehung, so ist, wie im 1. Teil, Aufl. 4 S. 26 bewiesen wurde, die wahre Beschleunigung die Resultierende aus der Beschleunigung des Punktes in seiner beweglichen Bahnlinie und der Beschleunigung, mit der die Verschiebung der Bahnlinie erfolgt. Dieses Ergebnis soll hier, um das Verständnis des Folgenden zu erleichtern, noch einmal mittels des Begriffes Ablenkung (Deviation) (s. S. 21) gezeigt werden.

Erfolgte die Bewegung in der sich verschiebenden Bahnlinie ohne Beschleunigung, d. h. geradlinig und gleichförmig, so würde der Punkt etwa von A nach B_1 (Fig. 54) gelangen, und die Strecke $B_1 B$ ist die Ablenkung infolge der Beschleunigung p_1 der scheinbaren Bewegung, d. h. nach Gl. 17, S. 21

$$B_1 B = \frac{p_1 dt^2}{2}.$$

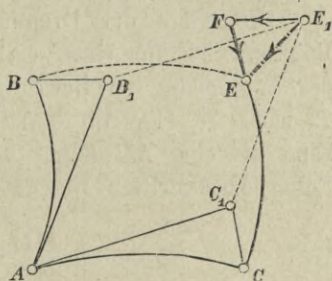
Würde die Bahnlinie sich gleichförmig und geradlinig verschieben, so gelangte ihr Anfangspunkt nach C_1 anstatt nach C . Ist nun p_2 die Beschleunigung, mit welcher sich der Anfangspunkt des relativen Bahnteilchens bewegt, so ist deren Wirkung die Ablenkung $C_1 C$, d. h.

$$C_1 C = p_2 \frac{dt^2}{2}.$$

Würden beide Seitenbewegungen ohne Beschleunigung erfolgen, so müßte der Punkt die Diagonale $A E_1$ des aus den geraden Linien $A B_1$ und $A C_1$ gezeichneten Parallelogramms beschreiben; da er aber in Wirklichkeit nach E gelangt, so muß, wenn seine wahre Beschleunigung p genannt wird, seine wahre Ablenkung

$$E_1 E = p \frac{dt^2}{2} \text{ sein.}$$

Fig. 54.



Man erkennt nun leicht $E_1 E$ als geometrische Summe von $B_1 B$ und $C_1 C$. Würde man nämlich AB um die Strecke AC_1 parallel verschieben, so würde sich AB tangential an $C_1 E_1$ legen und B nach F fallen, wenn $E_1 F \parallel B_1 B$ und $E_1 F = \frac{1}{2} p_1 dt^2$, und durch nochmalige Verschiebung um $C_1 C \parallel FE$ gelangt AB aus der (nicht gezeichneten) Zwischenlage $C_1 F$ in die Endlage CE , so daß $FE = C_1 C = \frac{1}{2} p_2 dt^2$. Ebenso nun, wie die wahre Ablenkung $E_1 E = \frac{1}{2} p dt^2$ die geometrische Summe der Seitenablenkungen $\frac{1}{2} p_1 dt^2$ und $\frac{1}{2} p_2 dt^2$ ist, muß auch die wahre Beschleunigung p die geometrische Summe der Seitenbeschleunigungen p_1 und p_2 sein.

Die Folge der Drehung der Bahnlinie ist nun eine Verrückung des Endpunktes der Bewegung von E nach D (Fig. 55), und diese kann als eine Ablenkung von der reinen Verschiebung, d. h. als Folge einer dritten Beschleunigung p_3 aufgefaßt werden, so daß

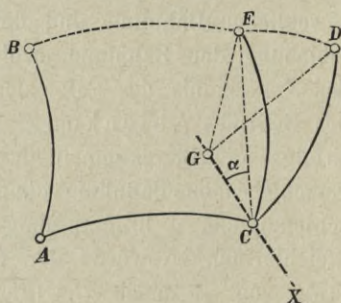
$$ED = p_3 \frac{dt^2}{2} \text{ wird.}$$

Ist nun CX die augenblickliche Drehachse für die Bahnlinie, um welche sie noch gedreht werden muß, nachdem man sie (gemäß S. 39) entsprechend der Bahnlinie AC des Punktes A verschoben hat, und fällt man von E eine Winkelrechte EG auf die Drehachse, so wird, wenn man $\sphericalangle EGD = d\vartheta$ setzt, $ED = EG \cdot d\vartheta$. Nennt man ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Achse CX , α den Winkel, den letztere mit dem relativen Bahnteilchen CE bildet, so ist, weil $CE = w \cdot dt$, $EG = CE \cdot \sin \alpha = w \cdot dt \cdot \sin \alpha$ und $d\vartheta = \omega dt$,

$$ED = p_3 \frac{dt^2}{2} = w dt \sin \alpha \cdot \omega dt = w \cdot \omega \cdot \sin \alpha \cdot dt^2.$$

Da nun diese Ablenkung infolge der Drehung der Bahnlinie zu den vorstehend berechneten Ablenkungen $B_1 B$ und $C_1 C$ (Fig. 53) hinzukommt, so muß die gesamte Ablenkung die geometrische Summe von $B_1 B$, $C_1 C$ und ED sein; mithin wird die wahre

Fig. 55.



Beschleunigung p des Punktes die geometrische Summe der drei Beschleunigungen p_1 , p_2 und p_3 oder

$$3) \quad p \equiv p_1, p_2, p_3, *)$$

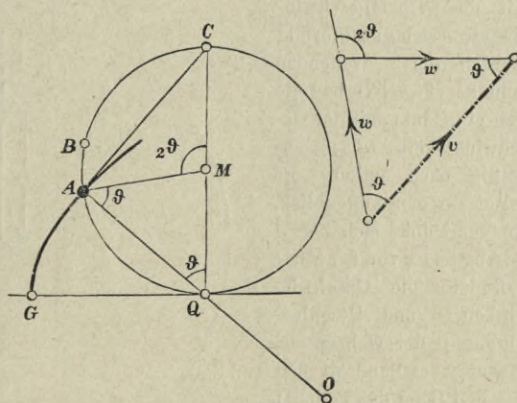
von denen die dritte den Wert hat

$$4) \quad p_3 = 2 w \cdot \omega \cdot \sin \alpha. **)$$

Daher der Satz: Die Beschleunigung eines Punktes, der sich in bezug auf eine Bahnlinie scheinbar (relativ) bewegt, ist die geometrische Summe von drei Beschleunigungen: 1. der Beschleunigung p_1 der scheinbaren Bewegung; 2. der Beschleunigung p_2 , mit welcher sich der Anfangspunkt A des Teilchens AB der beweglichen Bahnlinie bewegt; 3. einer Beschleunigung $p_3 = 2 \cdot w \cdot \omega \cdot \sin \alpha$, worin w die Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung, ω die Winkelgeschwindigkeit der Bahnlinie um die augenblickliche Drehachse, α der Winkel, den das Teilchen der scheinbaren Bahnlinie mit ihrer augenblicklichen Drehachse bildet; Richtung und Sinn dieser Beschleunigung p_3 stimmen überein mit Richtung und Sinn der Drehung des Endpunktes B des Bahnteilchens AB um seine augenblickliche Drehachse.

Beispiel 1: Die Rollbewegung des Kreises, bei welcher ein Punkt A desselben eine Zykloide GA (Fig. 56) beschreibt, kann zerlegt werden in eine Drehung um M mit der Umfangsgeschwindigkeit w und eine gleichzeitige Verschiebung, parallel der Geraden GQ mit derselben Geschwindigkeit w . Man kann sich also vorstellen, daß der beschreibende Punkt sich in dem Kreise von A nach B bewegt, während diese Bahnlinie sich wagerecht verschiebt. Es ist hiernach die wahre Geschwindigkeit v

Fig. 56.



*) In der Vektorschreibweise $p = p_1 + p_2 + p_3$.

**) In der Vektorschreibweise $p_3 = 2 \cdot V w \cdot \omega$.

die geometrische Summe aus der scheinbaren Geschwindigkeit w in der Richtung AB und der wagerechten Verschiebungsgeschwindigkeit w nach rechts. Bildet die scheinbare Geschwindigkeit w mit der Wagerechten den Winkel 2ϑ , so schließt v mit der Wagerechten den Winkel ϑ ein und hat die Größe

$$v = 2w \cos \vartheta.$$

Es ist in diesem Falle p_1 die Zentripetalbeschleunigung $w^2 : r$; $p_2 = 0$, weil die Verschiebung der scheinbaren Kreisbahn gleichförmig und geradlinig erfolgt; p_3 ebenfalls $= 0$, weil die scheinbare Bahnlinie nur eine Verschiebung, aber keine Verdrehung erleidet, also $\omega = 0$ ist. Hiernach ist die wahre Beschleunigung p gleichbedeutend mit der Zentripetalbeschleunigung $p_1 = w^2 : r$ und rechtwinklig zu AB , d. h. von A nach M gerichtet. Zerlegt man diese Beschleunigung p der Zykloidenbewegung in Tangential- und Normalbeschleunigung, so wird letztere, weil nach S. 35 die Normale zur Zykloide die Richtung AQ hat und mit AM den Winkel ϑ bildet, $p_n = \frac{w^2}{r} \cos \vartheta$. Ist aber ρ der Krümmungshalbmesser der Zykloide, so muß auch $p_n = \frac{v^2}{\rho}$ sein. Hiernach kann man den Krümmungshalbmesser ρ berechnen:

$$\rho = \frac{r v^2}{w^2 \cos \vartheta},$$

also nach Gl. 5

$$\rho = r \cdot 4 \cos \vartheta = 2 \cdot 2r \cos \vartheta,$$

also weil die Normale

$$AQ = 2r \cos \vartheta:$$

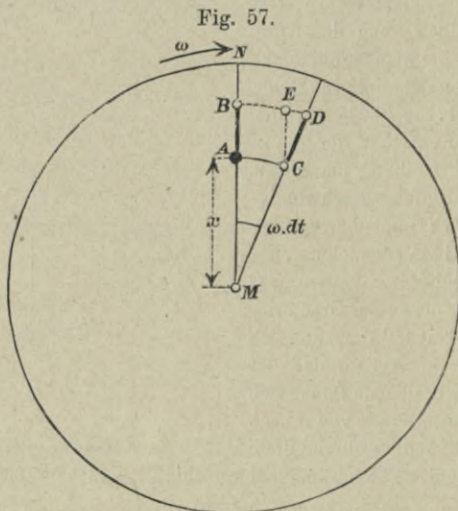
6)

$$\rho = 2 \text{ Norm.},$$

d. h. der Krümmungshalbmesser OA gleich der doppelten Normalen AQ .

Beispiel 2: Auf dem Halbmesser MN einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich gleichförmig rechtsherum drehenden Scheibe (Fig. 57) bewege sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit w gleichmäßig nach außen. Es sollen für den Augenblick, wo der Punkt sich bei A im Abstand x von der Mitte befindet, die Geschwindigkeit v und Beschleunigung p der wahren Bewegung bestimmt werden.

AB sei das Teilchen dx der scheinbaren Bahnlinie. Der Anfangspunkt A desselben hat eine Geschwindigkeit $x\omega$ nach rechts; setzt man diese (Fig. 58) mit w (aufwärts)



geschwindigkeit $x\omega$ nach rechts; setzt man diese (Fig. 58) mit w (aufwärts)

zusammen, so ergibt sich v , und zwar schließt v mit dem Halbmesser einen Winkel γ ein, für den

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x \omega}{w}.$$

Man hat sich im Sinne der Herleitung auf S. 54 den Übergang des Teilchens AB in die Nachbarlage CD (Fig. 57) in der Weise vorzustellen, daß man demselben eine Verschiebung um den Bogen AC in die Zwischenlage CE erteilt denkt und nun um eine durch C gehende augenblickliche Drehachse, rechtwinklig zur Bildebene, eine Drehung von CE nach CD um den Winkel $\omega \cdot dt$ ausführt. In diesem Fall ist $p_1 = 0$,

weil die scheinbare Bewegung ohne Beschleunigung erfolgt. Der Punkt A erfährt bei seiner Bewegung längs AC eine Zentripetalbeschleunigung $p_2 = x \cdot \omega^2$; es ist, weil die Drehachse zur scheinbaren Bahnlinie rechtwinklig steht, in Gl. 4 $\alpha = 90^\circ$, daher $p_3 = 2w \cdot \omega$ mit dem Sinne rechtwinklig zu CE nach rechts, weil der Punkt E sich in diesem Sinne von E nach D bewegt. p (Fig. 58) schließt mit dem Halbmesser einen Winkel β ein, für den

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2w \cdot \omega}{x \cdot \omega^2} = \frac{2w}{x \cdot \omega}.$$

Verlängert man das Geschwindigkeitsdreieck (Fig. 58) um $FJ = w$ nach unten, so ist

$$\operatorname{tg} GHJ = \frac{2w}{x \cdot \omega} = \operatorname{tg} \beta,$$

mithin ist p rechtwinklig zu HJ . Die wahre Bewegung des Punktes erfolgt bekanntlich in einer archimedischen Spirale (Fig. 59); die Beschleunigung p läßt sich zerlegen in eine Zentripetalbeschleunigung p_n nach dem Krümmungsmittelpunkte der Spirale und eine Tangentialbeschleunigung p_t , die offenbar nach außen gerichtet sein muß, weil die Geschwindigkeit v mit wachsendem x zunimmt.

Fig. 58.

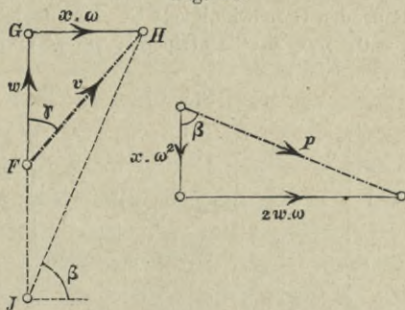


Fig. 59.

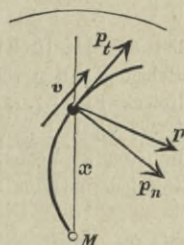
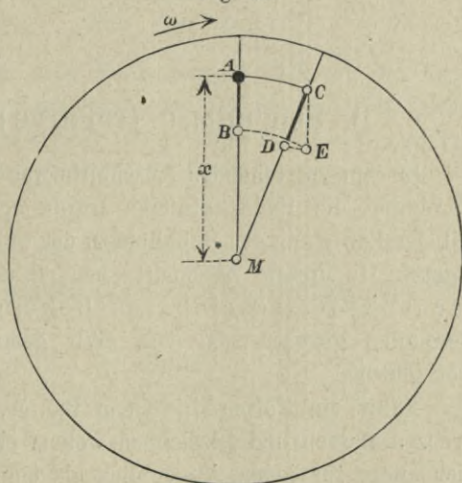


Fig. 60.



Beispiel 3: Die scheinbare Bahnlinie sei ebenfalls ein Halbmesser einer sich gleichmäßig drehenden Scheibe; die scheinbare Bewegung erfolge aber nicht nach außen, sondern nach der Mitte hin (Fig. 60) mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit w . Man findet v mittels Fig. 61. Es ist wiederum $p_1 = 0$; $p_2 = x\omega^2$ zentripetal; $p_3 = 2w\omega$ aber nach links gerichtet, weil

Fig. 61.

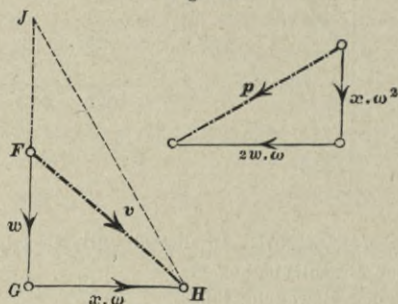
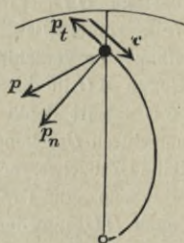


Fig. 62.



sich bei der Drehung um C der Endpunkt E von E nach D bewegt. Die Richtung von p wird wiederum rechtwinklig zu HJ in dem Geschwindigkeitsdreieck Fig. 61, an welches man $JF = w$ anreicht. Die Zerlegung von p liefert diesmal in tangentialer Richtung eine Verzögerung (Fig. 62), weil die Geschwindigkeit v mit kleiner werdendem x abnimmt. Die wahre Bahnlinie ist wiederum eine archimedische Spirale.

D. Scheinbare (relative) Bewegung.

In dem vorstehenden Abschnitte war schon von der scheinbaren Bewegung die Rede; dieselbe wurde als gegeben behandelt und mit der Bewegung der Bahnlinie zu der wahren Bewegung zusammengesetzt. In diesem Abschnitte handelt es sich aber um die Aufsuchung der scheinbaren Bewegung, während die wahre Bewegung gegeben sein soll. Wir gelangen dazu durch folgende Betrachtung.

Führt ein Körper in einem Raume, den wir als ein Achsenkreuz auffassen und bezeichnen wollen, eine Bewegung aus, so läßt sich diese für jeden Augenblick als eine Schraubenbewegung dar-

stellen. Bewegt sich nun auch das Achsenkreuz gleichzeitig, so kann man auch dessen Bewegung für jeden Augenblick auf eine Schraubenbewegung zurückführen. Die erstgenannte Bewegung heißt die scheinbare oder relative Bewegung des Körpers in bezug auf das Achsenkreuz, weil ein an der Bewegung des Achsenkreuzes teilnehmender Beobachter nur diese Bewegung mit seinen Sinnen wahrnehmen (sehen und fühlen) kann, wie z. B. die Bewegungen in einem fahrenden Eisenbahnwagen oder Schiffe, oder auch in einem Zimmer, welches doch an den verschiedenen Bewegungen der Erde teilnimmt. Durch die Zusammensetzung der beiden Schraubenbewegungen nach der S. 50 angedeuteten Weise erhält man die wahre Bewegung. Bezeichnen wir die scheinbare Bewegung mit B_{sch} , die Bewegung des Achsenkreuzes mit B_{achs} , die wahre Bewegung mit B_w , so gilt die Gleichwertigkeit (\equiv)

$$1) \quad B_{sch}, B_{achs} \equiv B_w,$$

welche nur andeuten soll, daß die geometrische Summe von B_{sch} und B_{achs} auf der einen Seite des Zeichens \equiv zu demselben End-ergebnis führt wie die Bewegungen auf der anderen Seite. Erteilen wir nun sowohl dem Körper wie auch dem Achsenkreuz noch eine fernere, beliebige Bewegung B , so wird dadurch an dem gegenseitigen Verhalten des Körpers und des Achsenkreuzes, also auch an der scheinbaren Bewegung nichts geändert, man kann daher auch schreiben:

$$2) \quad B_{sch}, B_{achs}, B \equiv B_w, B.$$

Wählt man nun diese neue Bewegung so, daß sie das Entgegengesetzte der Bewegung des Achsenkreuzes ist, d. h. für jeden Augenblick eine Schraubenbewegung um dieselbe Achse mit gleichen, aber entgegengesetzten Geschwindigkeiten der Drehung und Verschiebung, was wir durch

$$3) \quad B \equiv - B_{achs}$$

ausdrücken wollen, so heben sich B_{achs} und B vollständig auf, und es wird aus Gl. 2:

$$4) \quad B_{sch} \equiv B_w, (- B_{achs});$$

d. h. die scheinbare Bewegung eines Körpers in bezug auf ein bewegliches Achsenkreuz ist in jedem Augenblicke die geometrische Summe aus der wahren Be-

wegung des Körpers und dem Entgegengesetzten der Bewegung des Achsenkreuzes.

1. Scheinbare Bewegungen eines Punktes in bezug auf einen anderen.

Wir denken uns durch den zweiten Punkt P_1 (Fig. 63) ein Achsenkreuz gelegt, welches, da ein Punkt eine Drehbewegung nicht hat, nur eine Parallelverschiebung mit dem Punkte P_1 ausführt. Die Bewegung des ersten Punktes P gegen dieses Achsenkreuz ist dann die gesuchte scheinbare Bewegung, während seine wahre Bewegung auf ein zu obigem paralleles festes Achsenkreuz mit dem Anfangspunkt A bezogen wird. Die scheinbare Bewegung von P gegen P_1 ist die geometrische Summe der wahren Bewegung von P und dem Entgegengesetzten der Verschiebung von P_1 ; die scheinbare Geschwindigkeit w ist die geometrische Summe aus der wahren Geschwindigkeit v und dem Entgegengesetzten der Geschwindigkeit u des Punktes P_1 , d. h.

$$w \equiv v, (-u); *$$

ebenso ist die scheinbare Beschleunigung p_1 die geometrische Summe aus der wahren Beschleunigung p und dem Entgegengesetzten der Beschleunigung p_2 des Punktes P , d. h.

$$p_1 \equiv p, (-p_2). *$$

(p_3 kommt hier noch nicht in Frage, weil das bewegliche Achsenkreuz keine Drehung ausführt, also in Gl. 4, S. 55 $\omega = 0$ ist.)

Hat der Punkt P in bezug auf ein festes Achsenkreuz die Koordinaten x, y, z , der Punkt P_1 in bezug auf dasselbe Achsenkreuz die Koordinaten x_1, y_1, z_1 , so gilt für die (scheinbaren) Koordinaten ξ, η, ζ des Punktes P in bezug auf das mit P_1 bewegliche Achsenkreuz

$$\xi = x - x_1; \quad \eta = y - y_1; \quad \zeta = z - z_1.$$

*) In Vektorschreibweise $w = v - u$, $p_1 = p - p_2$.

Fig. 63.

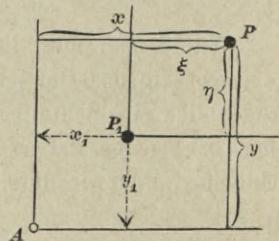


Fig. 63 zeigt den Fall, wo die Bewegungen nur in einer Ebene vor sich gehen. Dann kann man auch schreiben:

$$w_x = v_x - u_x \quad \text{oder} \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt},$$

$$w_y = v_y - u_y \quad \text{oder} \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}$$

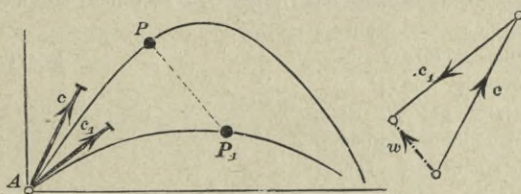
und ebenso für die Beschleunigungen

$$p_{1x} = p_x - p_{2x} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2},$$

$$p_{2y} = p_y - p_{2y} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y_1}{dt^2}.$$

Beispiel 1: In derselben lotrechten Ebene werden (Fig. 64) gleichzeitig zwei Punkte P und P_1 mit den Geschwindigkeiten c und c_1 unter den Neigungswinkeln α und α_1 fortgeworfen; welches ist die scheinbare Bewegung von P in bezug auf P_1 (wenn man sich vorstellt, daß ein Beobachter [wie Münchhausen auf der Kanonenkugel] die Bewegung von P_1 mitmacht). Auf

Fig. 64.



die Punkte soll nur die Schwerkraft, kein Luftwiderstand wirken. Dann ist nach dem 1. Teile, Aufl. 4 S. 53

$$\begin{aligned} x &= c \cos \alpha t; & x_1 &= c_1 \cos \alpha_1 t; \\ y &= c \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}; & y_1 &= c_1 \sin \alpha_1 t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} \xi &= (c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1) t, \\ \eta &= (c \sin \alpha - c_1 \sin \alpha_1) t, \\ w_x &= c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1, \\ w_y &= c \sin \alpha - c_1 \sin \alpha_1, \end{aligned}$$

also offenbar

$$w \equiv c, \quad (-c_1); \quad p_1 = 0,$$

d. h. die scheinbare Bewegung erfolgt gleichförmig und geradlinig mit der Geschwindigkeit w .

Es ergibt sich dies noch einfacher, wenn man die Wurfbewegungen zerlegt in die gleichförmig geradlinigen ct bzw. $c_1 t$ nach den Richtungen der Anfangsgeschwindigkeiten, und die lotrecht abwärts gerichteten $\frac{1}{2}gt^2$ bzw. $\frac{1}{2}gt^2$. Da die beschleunigten Fallbewegungen beiden Punkten gemeinsam sind, so kann die scheinbare Bewegung nur von den beschleunigungslosen Bewegungen ct und $c_1 t$ abhängig sein.

Beispiel 2: Zwei Punkte P und P_1 durchlaufen mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten zwei Kreise mit gemeinsamem Mittelpunkt A (Fig. 65). Die scheinbare Bewegung von P in bezug auf P_1 soll untersucht werden.

Es seien r und r_1 die Halbmesser AP und AP_1 der Kreise, α der Winkel, den die gleichzeitigen Fahrstrahlen r und r_1 miteinander bilden, ϑ der veränderliche Neigungswinkel von AP gegen die AX ; dann ist

$$\begin{aligned}x &= r \cos \vartheta; & y &= r \sin \vartheta; \\x_1 &= r_1 \cos (\alpha + \vartheta); & y_1 &= r_1 \sin (\alpha + \vartheta); \\ \xi &= x - x_1 = r \cos \vartheta - r_1 \cos (\alpha + \vartheta); \\ \eta &= y - y_1 = r \sin \vartheta - r_1 \sin (\alpha + \vartheta).\end{aligned}$$

Bildet man hiernach $\xi^2 + \eta^2$, so erhält man dafür

$$r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos \alpha = l^2 = \overline{PP_1}^2,$$

was übrigens auch schon daraus folgt, daß wegen gleicher Winkelgeschwindigkeit beider Punkte das Dreieck APP_1 seine Form unverändert behält, während es sich um A dreht.

Die scheinbare Bewegung von P in bezug auf P_1 ist also eine Bewegung in einem Kreise von Halbmesser

$$l = PP_1.$$

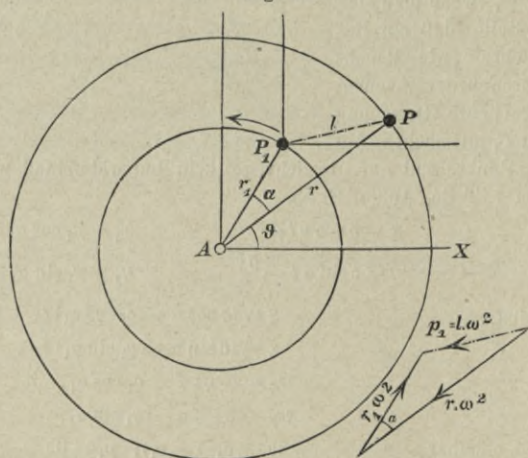
Die wahre Beschleunigung von P ist $p = r \cdot \omega^2$ in der Richtung von P nach A ; die Beschleunigung

$$p_2 = r_1 \omega^2$$

hat die Richtung von P_1 nach A , daher ist $-p_2$ von A nach P_1 gerichtet.

(S. das Beschleunigungsdreieck in Fig. 64, rechts.) Da nun p und p_2 mit r und r_1 verhältnismäßig sind, auch den Winkel α miteinander bilden, so wird das aus ihnen gezeichnete Dreieck ähnlich mit PAP_1 , daher die geometrische Summe $p_1 = l \cdot \omega^2$ und mit PP_1 parallel. Die scheinbare Bewegung in einem Kreise von Halbmesser l erfolgt also mit überall gleicher Beschleunigung. Daher ist die scheinbare Bewegung eine gleichförmige Kreisbewegung mit der Umfangsgeschwindigkeit $w = l \cdot \omega$, der Winkelgeschwindigkeit ω .

Fig. 65.



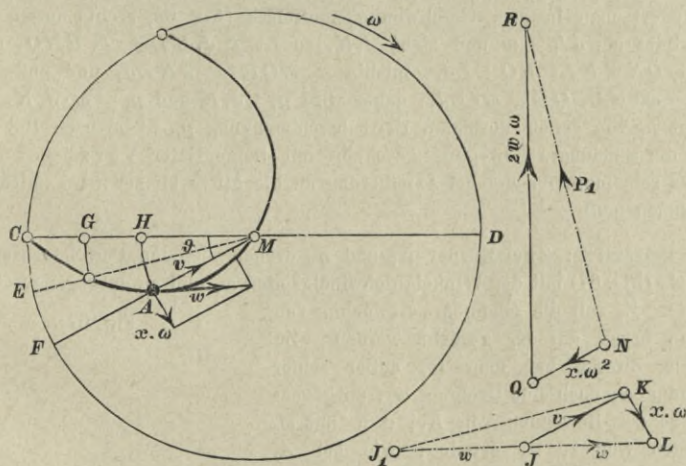
2. Scheinbare Bewegung in bezug auf einen beliebig bewegten Raum.

In diesem Falle sind u und p_2 selbstverständlich Geschwindigkeit und Beschleunigung derjenigen Stelle des bewegten Raumes, an dem der Punkt oder Körper sich gerade befindet. Da ferner nach Gl. 3, S. 55 $p \equiv p_1, p_2, p_3$, so wird hieraus

$$1) \quad p_1 \equiv p, (-p_2), (-p_3).$$

Beispiel 1: Eine wagerechte Scheibe (Fig. 66) drehe sich gleichförmig rechtsherum mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre lotrechte Achse; oberhalb derselben führe ein Punkt eine gleichmäßige Bewegung längs einer wagerechten Geraden aus, die durch den Mittelpunkt der Scheibe geht. Diese wirkliche Bewegung erfolge mit der Geschwindigkeit v . Es soll die scheinbare Bewegung in bezug auf die Scheibe bestimmt werden. Man stelle sich etwa vor, daß die Kante eines gegen die Scheibe erhöht liegenden Lineals die wirkliche Bahnlinie des Punktes, und daß der Punkt die Spitze eines Bleistiftes sei, den man gleichmäßig an dem Lineale entlang bewegt, während die darunter

Fig. 66.



befindliche Scheibe sich gleichmäßig dreht; dann zeichnet der Bleistift die scheinbare Bahnlinie auf. Ist C der Anfangspunkt der Bewegung, so erhält man leicht eine Anzahl von Punkten der scheinbaren Bahnlinie, indem man, von C beginnend, linksherum den Winkel $\omega = CME = EMF$ u. s. f. hintereinander aufträgt und ebenso die Längen $v = CG = GH$ u. s. f. auf der

Geraden CDM abmißt. Schneidet ein durch H gelegter Kreisbogen mit dem Mittelpunkt M den Halbmesser MF in A , so ist A ein Punkt der scheinbaren Bahnlinie. Denn es muß der Geraden CMD , auf der sich der Punkt bewegt, eine Drehung um M erteilt werden, welche der wahren Drehung der Scheibe gleich und entgegengesetzt ist.

Setzt man $\sphericalangle CMA = \vartheta$, $MA = x$, $CM = r$, so ist

$$r - x = vt; \quad \vartheta = \omega t;$$

daraus entsteht

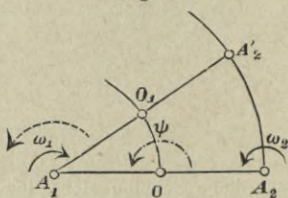
$$x = r - \frac{v}{\omega} \vartheta;$$

diese Gleichung bedeutet, weil die Beziehung zwischen x und ϑ linear ist, eine archimedische Spirale. Die scheinbare Geschwindigkeit w im Punkt A ist die Diagonale eines Rechtecks aus v in der Richtung AM und dem dazu rechtwinkligen $x\omega$. — Zur Bestimmung der scheinbaren Beschleunigung ist zu bedenken, daß $p = 0$, weil die wahre Bewegung gleichförmig erfolgt; daher muß $p_1 \equiv (-p_2)$, $(-p_3)$ sein. Es bedeutet darin $-p_2$ die Zentrifugalbeschleunigung $x \cdot \omega^2$, in der Richtung MA , d. h. rechtwinklig zu $KL = x \cdot \omega$ (Fig. 66, rechts unten) aufgetragen. Es ist $p_3 = 2w \cdot \omega$, weil $\alpha = 90^\circ$ ist. Richtung und Sinn von p_3 stimmt überein mit der Bewegung des Endpunkts von $w \cdot dt$, also auch von w bei einer Drehung um A mit der Winkelgeschwindigkeit ω der Scheibe, d. h. rechtsherum. Daher ist $+p_3$ rechtwinklig zu w nach unten, $-p_3$ also nach oben gerichtet. Hiermit ist p_1 bestimmt. Verlängert man in dem Geschwindigkeitsdreieck (Fig. 66, rechts unten) LJ nach links um $JJ_1 = w$ und zieht J_1K , so ist $\triangle J_1KL \sim \triangle RNQ$, denn es ist $QN \perp KL$; $RQ \perp LJ_1$, mithin $\sphericalangle NQR = \sphericalangle KLJ_1$ und außerdem $\overline{NQ} = \omega \cdot \overline{KL}$, $\overline{QR} = \omega \cdot \overline{LJ_1}$; daher wird $p_1 \perp J_1K$ und $p_1 = \omega \cdot \overline{J_1K}$. Es weicht p_1 von seiner normalen Seitenbeschleunigung $p_n (\perp w)$ nach links ab, d. h. die scheinbare Bewegung geschieht mit tangentialer Verzögerung, wie es sein muß, da $x\omega$ bei Annäherung an die Mitte kleiner wird, mithin w abnehmen muß.

Beispiel 2: Zwei Körper K_1 und K_2 drehen sich um Parallelachsen A_1 und A_2 (Fig. 67) mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 entgegengesetzten Sinnes. Es soll die scheinbare Bewegung von K_2 in bezug auf K_1 gesucht werden. Zu diesem Zwecke hat man K_2 außer seiner Drehung ω_2 noch eine Drehung ω_1 , entgegengesetzt der Bewegung von K_1 , d. h. mit ω_2 gleichen Sinnes, zu erteilen, wie bei A_1 punktiert angegeben. Diese beiden Drehungen um A_1 und A_2 lassen sich nach S. 46 für jeden Augenblick vertauschen mit einer Drehung um eine Achse $O \parallel A_1$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\phi = \omega_1 + \omega_2$, u. zw. ist

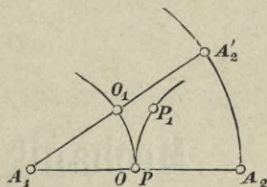
$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Fig. 67



Nach der Zeit t hat die Achse A_2 sich in ihrer scheinbaren Bewegung nach A_2' bewegt, wenn $A_2 A_1 A_2' = \omega_1 t$ ist. Dann liegt, wenn ω_1 und ω_2 sich nicht ändern, die augenblickliche Drehachse bei O_1 . Der Zylinder OO_1 mit der Achse A_1 und dem Halbmesser $A_1 O$ ist der Ort der augenblicklichen Drehachsen, und da O auch von A_2 einen unveränderlichen Abstand hat, so ist ein mit dem Körper K_2 verbundener Zylinder PP_1 (Fig. 68) der Ort derjenigen Geraden des Körpers K_2 , welche der Reihe nach mit den augenblicklichen Drehachsen $O, O_1 \dots$ zusammenfallen. Die scheinbare Bewegung von K_2 in bezug auf K_1 ist nach S. 34 ein Rollen des Zylinders PP_1 auf dem Zylinder OO_1 . Sind diese Zylinderflächen an den Körpern tatsächlich vorhanden, so haben sie an der Berührungsstelle stets die Gleitgeschwindigkeit Null. Es beruht auf diesem Verhalten die Lehre von der Verzahnung der Zahnräder.

Fig. 68.



Dritte Abteilung.

Mechanik des Massenpunktes.

A. Geradlinige Bewegung des Massenpunktes.

Nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 32 erteilt eine Kraft K einem Massenpunkt m die Beschleunigung

$$p = \frac{K}{m}$$

in der Richtung und im Sinne der Kraft K . Da bei geradliniger Bewegung nach S. 15 die Richtung der Beschleunigung mit der Richtung der Geschwindigkeit zusammenfällt, so muß auch die Richtung der wirkenden Kraft stets mit der Richtung der Geschwindigkeit übereinstimmen, damit eine geradlinige Bewegung entstehe.

Wir betrachten hier im wesentlichen Bewegungen unter Wirkung veränderlicher Kräfte. Um aus der gegebenen Kraft und der daraus unmittelbar bestimmten Beschleunigung p die Geschwindigkeit v und den Abstand x des Massenpunktes von einem Festpunkt A seiner Bahnlinie zu finden, müssen Integrationen ausgeführt werden. Der einzuschlagende Weg der Rechnung ist abhängig von der Art der Veränderlichkeit der gegebenen Kraft.

1. Ist K eine Funktion der Zeit, also $K : m = p = F(t)$, so wird nach S. 15

$$dv = p \cdot dt = F(t) \cdot dt \quad \text{und}$$

$$v = \int F(t) \cdot dt + C, \quad \text{wofür}$$

$$v = \varphi(t)$$

geschrieben werden möge.

Daraus folgt weiter nach S. 14

$$dx = v \cdot dt = \varphi(t) \cdot dt \quad \text{und}$$

$$x = \int \varphi(t) dt + C_1, \quad \text{oder}$$

$$x = f(t)$$

als gesuchtes Bewegungsgesetz.

2. Ist K eine Funktion des Ortes des Massenpunktes, also

$$K: m = p = F(x), \quad \text{so wird}$$

$$dv = p \cdot dt = F(x) \cdot dt.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \text{so entsteht}$$

$$v dv = F(x) \cdot dx \quad \text{und}$$

$$v^2 = 2 \int F(x) \cdot dx + C \quad \text{oder}$$

$$v = \varphi(x). \quad \text{Daraus folgt weiter}$$

$$dx = v \cdot dt = \varphi(x) \cdot dt.$$

In dieser Gleichung muß man behufs der Integration die Veränderlichen trennen, d. h. alles mit x behaftete auf einer Seite vereinigen. Dann wird

$$dt = \frac{dx}{\varphi(x)} \quad \text{und}$$

$$t = \int \frac{dx}{\varphi(x)} + C = \psi(x),$$

hiermit hat man t als Funktion von x , woraus in vielen Fällen

$$x = f(t)$$

als Bewegungsgesetz entwickelt werden kann.

3. Ist die Kraft K eine Funktion der Geschwindigkeit, also

$$K: m = p = F(v), \quad \text{so wird}$$

$$dv = p \cdot dt = F(v) \cdot dt$$

und nach Trennung der Veränderlichen

$$dt = \frac{dv}{F(v)}.$$

Daraus

$$t = \int \frac{dv}{F(v)} + C = \varphi(v).$$

Die Entwicklung dieser Gleichung nach v liefert $v = \psi(t)$.
Dann wird

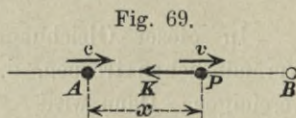
$$dx = v \cdot dt = \psi(t) \cdot dt,$$

woraus sich $x = \int \psi(t) \cdot dt + C_1 = f(t)$ ergibt.

Die folgenden Untersuchungen liefern Beispiele zu diesen allgemeinen Andeutungen. Der Fall, daß die Kraft als Funktion der Zeit gegeben sei, ist außerordentlich einfach, kommt aber in der Anwendung kaum vor. Daher gehen wir sogleich zu einem Falle der zweiten Art über.

1. Geradlinige Schwingung eines Massenpunktes.

Ein Massenpunkt m stehe unter Einwirkung einer von einem festen Punkt A ausgehenden Anziehungskraft, welche stets das Bestreben hat, ihn nach A hinzuziehen (Fig. 69). Diese Anziehungskraft K sei verhältnisgleich mit dem Abstand x des Massenpunktes m von dem Festpunkt A . Befindet sich der Massenpunkt in A , so hat die Kraft den Wert Null, es ist daher A die Gleichgewichtslage des Massenpunktes. In ihr befindet sich der Massenpunkt zu Anfang, erfahre nun aber, etwa durch einen Stoß, eine Anfangsgeschwindigkeit c , die ihn aus der Gleichgewichtslage A entfernt. Dann wirkt auf ihn in derselben Richtung, aber in entgegengesetztem Sinne, die Kraft K , so daß die Bewegung eine geradlinige werden muß. Da K mit x verhältnisgleich ist, so kann man die Beschleunigung setzen



$$1) \quad p = -\frac{K}{m} = -k^2 x.$$

Dann bedeutet k^2 die absolute Größe der Beschleunigung im Abstände = 1 von der Gleichgewichtslage, und man erhält

$$2) \quad \frac{dv}{dt} = -k^2 \cdot x;$$

multipliziert man mit $v dt = dx$, so wird

$$v dv = -k^2 x dx, \text{ also}$$

$$v^2 = -k^2 x^2 + C$$

und weil $v = c$ war, für $x = 0$:

$$3) \quad v = \sqrt{c^2 - k^2 x^2}.$$

Setzt man nun $v = \frac{dx}{dt}$, so wird

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{c^2 - k^2 x^2}} = \frac{1}{k} \frac{dx}{\sqrt{\frac{c^2}{k^2} - x^2}} = \frac{1}{k} \frac{d\left(\frac{k}{c} x\right)}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2} x^2}};$$

dies gibt

$$4) \quad t = \frac{1}{k} \arcsin \frac{kx}{c} + C_1$$

(mit $C_1 = 0$, weil $x = 0$ für $t = 0$). Hiernach ist

$$5) \quad x = \frac{c}{k} \sin kt$$

die Bewegungsgleichung, aus der noch die Geschwindigkeitsgleichung

$$6) \quad v = \frac{dx}{dt} = c \cdot \cos kt \text{ entsteht.}$$

Für $t = 0$	$\frac{\pi}{2k}$	$\frac{\pi}{k}$	$\frac{3\pi}{2k}$	$\frac{2\pi}{k}$	
wird $x = 0$	$\frac{c}{k}$	0	$-\frac{c}{k}$	0	
und $v = c$	0	$-c$	0	c	
(Punkt	A	B	A	C	A Fig. 70.)

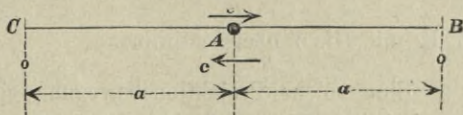
$$x = \frac{c}{k} \quad \text{und} \quad x = -\frac{c}{k}$$

sind größte und kleinste Werte von x ; nach einer Zunahme der Zeit um je $\frac{2\pi}{k}$, d. h.

nach einer Zunahme der Größe kt um je 2π , kehren in den periodischen Funktionen der

Gl. 5 und 6 stets die gleichen Werte wieder.

Fig. 70.



Während der Zeit $\frac{2\pi}{k}$ wird die Bahnlinie BC von dem Massenpunkte hin und her durchlaufen. Eine solche Bewegung nennt man eine Schwingungsbewegung oder kurz Schwingung. Der Massenpunkt schwingt um die Gleichgewichtslage als Mitte; es ist $\frac{2\pi}{k}$ die Zeit einer Doppelschwingung,

$$7) \quad t_1 = \frac{\pi}{k}$$

die Dauer einer einfachen Schwingung.

Die Schwingungsdauer ist nach Gl. 7 nur von der Beschleunigungsgröße k^2 (im Abstände gleich Eins) abhängig; die Geschwindigkeit c , mit welcher der Massenpunkt durch die Gleichgewichtslage geht, beeinflusst nur die halbe Schwingungsweite a ; diese wird für $t = \frac{\pi}{2k}$ nach Gl. 5

$$8) \quad a = \frac{c}{k}.$$

Solche Schwingungsbewegung kann man sehr einfach zur Darstellung bringen, wenn man einen Punkt mit gleichbleibender Geschwindigkeit c in einem Kreisumfange vom Halbmesser $a = c:k$ führt und diese Bewegung auf einen Durchmesser projiziert (Fig. 71). Beginnt die Bewegung in D , so ist $DQ = ct$, daher

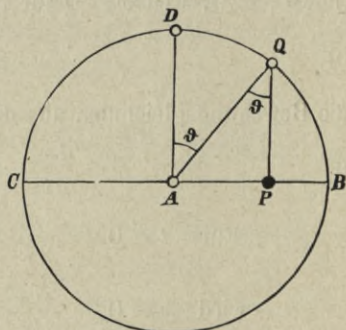
$$\sphericalangle DAQ = \sphericalangle AQP = ct : a = kt,$$

$$AP = x = a \sin kt,$$

d. h. mit Gl. 5 übereinstimmend.

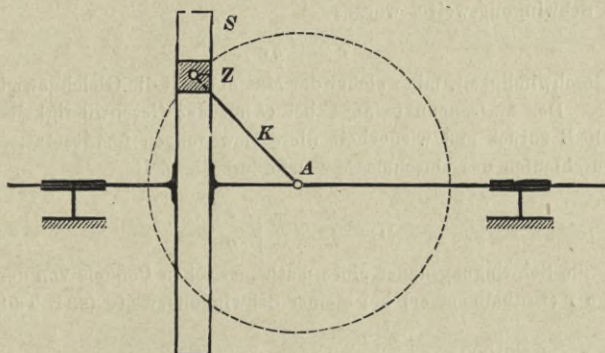
Eine solche Projektionsbewegung einer Kreisbewegung kommt vor bei der Kurbelschleife (Fig. 72). Dreht sich die Kurbel K gleichmäßig um die Achse A , so gleitet der auf den Kurbelzapfen Z

Fig. 71.



gesteckte würfelförmige „Stein“ in dem Schlitz der wagrecht geführten Kurbelschleife S und überträgt auf sie nur die wagerechte

Fig. 72.



Seitenbewegung des Kurbelzapfens. Die Bewegung der Schleife erfolgt daher nach der Gleichung

$$9) \quad x = a \cdot \sin kt = a \cdot \sin \frac{c \cdot t}{a},$$

wenn a der Kurbelhalbmesser, c die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens ist.

Beispiel 1: Stellt man sich vor, durch die Erde, deren Dichte überall gleich angenommen werden soll, sei längs eines Durchmessers eine Röhre geführt (Fig. 73), so erfährt ein in der Röhre befindlicher Massenpunkt bei einem Abstand x vom Erdmittelpunkt A nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 62, Gl. 7, eine Fallbeschleunigung

$$g_x = g \frac{x}{r},$$

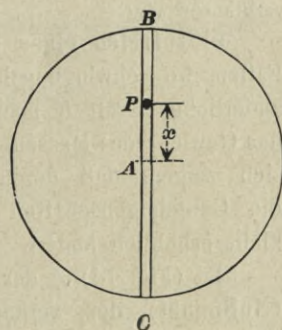
wenn r der Erdhalbmesser und g die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche ist. Da die nach dem Punkt A gerichtete Anziehungskraft mit x verhältnismäßig, so ist die Bedingung der Schwingung nach Gl. 5 erfüllt. Für $x = 1$ wird

$$g_x = \frac{g}{r} = k^2, \quad \text{daher ist}$$

10)

$$k = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

Fig. 73.



Hatte nun der Massenpunkt an der Stelle B die Geschwindigkeit Null, so ist nach Gl. 8

$$AB = r = a = \frac{c}{k} = c \sqrt{\frac{r}{g}}$$

die halbe Schwingungsweite, woraus

$$11) \quad c = \sqrt{gr}$$

folgt als Geschwindigkeit, mit welcher der Massenpunkt die Gleichgewichtslage A durchläuft. Der Massenpunkt langt bei C mit der Geschwindigkeit Null an, kehrt nach B zurück und wiederholt diese Bewegungen fortgesetzt. Das einmalige Durchlaufen des Durchmessers erfordert die Zeit

$$12) \quad t_1 = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}};$$

es ist dies die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels von der Schwingungslänge r (Erddurchmesser) bei kleiner Schwingungsweite (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 83).

Mit $r = 6370000$ m und $g = 9,81$ m/s.² wird

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{6370000}{9,81}} = 2532 \text{ s.} = 42,2 \text{ min.};$$

$$c = \sqrt{9,81 \cdot 6370000} = 7905 \text{ m/s.}$$

Würde man einen zweiten Punkt mit dieser Geschwindigkeit um die Erde führen, so würde er stets in derselben Zeit in B und C eintreffen wie der erste, den Durchmesser BC durchschwingende Punkt. Übrigens braucht dieser zweite Punkt nicht einmal geführt zu werden, vielmehr wird er, bei B mit der wagerechten Geschwindigkeit $c = \sqrt{gr}$ versehen, wenn kein Luftwiderstand auftritt, die Erde frei umkreisen, ohne einen Druck auf die Erde auszuüben, weil die Schwere mg allein zur Zentripetalbeschleunigung

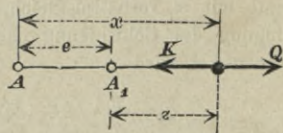
$$p_n = \frac{c^2}{r} = \frac{gr}{r} = g$$

verbraucht wird.

Hinzutreten einer unveränderlichen Kraft. In den meisten Fällen, wo Schwingungsbewegungen auftreten, wirkt außer der veränderlichen Kraft K noch eine unveränderliche Kraft Q , gewöhnlich das Gewicht des Massenpunktes. Es läßt sich zeigen, daß deren Hinzukommen die Grundeigenschaften der Bewegung nicht erheblich ändert.

Ist (Fig. 74) A der Ausgangspunkt (Nullpunkt) der veränderlichen Kraft $K = m \cdot k^2 \cdot x$, von welchem aus x gemessen wird, und tritt nun vielleicht in entgegengesetztem

Fig. 74.



Sinne die Kraft Q hinzu, so wird die Mittelkraft $= m \cdot k^2 x - Q$. Diese wird Null für

$$13) \quad x = \frac{Q}{m k^2} = e = A A_1,$$

d. h. die Stelle A_1 ist jetzt die Gleichgewichtslage. Nennt man $z = x - e$ den Abstand des Massenpunktes von A_1 , so wird unter Einsetzung von $x = z + e$ die Mittelkraft nunmehr

$$m \cdot k^2 (z + e) - Q = m \cdot k^2 (z + e) - m \cdot k^2 e = m \cdot k^2 z,$$

weil nach Gl. 13 $Q = m k^2 e$ ist. Diese Mittelkraft ist nach der Gleichgewichtslage gerichtet und erteilt dem Massenpunkt eine Beschleunigung

$$14) \quad p = -k^2 z$$

im Sinne des wachsenden z . Hierin bedeutet k^2 die absolute Beschleunigungsgröße im Abstände $= 1$ von der Gleichgewichtslage. Die Vergleichung mit Gl. 1 (S. 68) zeigt nur eine Vertauschung des Buchstaben x mit z ; beide bedeuten aber den Abstand des Massenpunktes von der Gleichgewichtslage. Bezeichnet daher wieder

c die Geschwindigkeit in der Gleichgewichtslage,

a die halbe Schwingungsweite,

t_1 die Dauer einer einfachen Schwingung,

so gilt nach Gl. 7 und 8:

$$15) \quad t_1 = \frac{\pi}{k}; \quad a = \frac{c}{k}; \quad c = k a.$$

Ist die unveränderliche Kraft Q die Schwerkraft mg , so wird nach Gl. 13

$$16) \quad e = \frac{g}{k^2}, \quad \text{also} \quad k^2 = \frac{g}{e}, \quad \text{mithin}$$

$$17) \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{e}{g}}; \quad a = c \sqrt{\frac{e}{g}}; \quad c = a \sqrt{\frac{g}{e}},$$

d. h. die Dauer einer Schwingung ist nun gleich derjenigen eines mathematischen Pendels von der Länge $e =$ dem Abstände der Gleichgewichtslage von dem Nullpunkte der veränderlichen Kraft $=$ der Verschiebung der Gleichgewichtslage infolge des Hinzutretens der Kraft $Q = mg$.

Vorstehende Entwicklungen finden auf die meisten elastischen (Feder-)Schwingungen Anwendung, wenn man die eigene Masse des elastischen Körpers gegenüber der angehängten Masse vernachlässigen darf.

a) Schwingungen infolge elastischer Aufhängung.

Hängt an einer lotrechten elastischen Stange (Fig. 75) vom Querschnitt F , der Länge l in (spannungslosem Zustande) und dem Elastizitätsmaß E eine Masse m , so bewirkt deren Gewicht mg eine Gleichgewichtsverlängerung

$$\Delta l = \frac{l}{E} \frac{mg}{F}$$

(2. Teil, Aufl. 3, S. 5), während eine Verlängerung um x , verbunden mit einer gleichen Verschiebung des Punktes m aus der Lage A nach unten eine Spannkraft

$$K = \frac{EF}{l} x$$

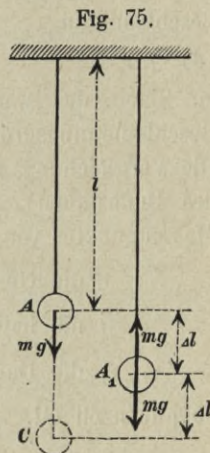
hervorbringt. Die Kraft K entspricht also der Gl. 1 (S. 68); es ist A der Nullpunkt der veränderlichen Kraft. Für $x = \Delta l$ heben sich K und mg auf, daher ist

$$18) \quad e = \Delta l$$

die Verschiebung der Gleichgewichtslage A_1 des Punktes von dem Nullpunkt A der Spannkraft. Wird also der elastisch aufgehängte Punkt m etwa durch einen Stoß oder Schlag derartig in Bewegung gesetzt, daß er mit einer lotrechten Geschwindigkeit c durch die Gleichgewichtslage A_1 geht, so führt er Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus, deren Dauer gleich der eines Pendels von einer Schwingungslänge = der Gleichgewichtsverlängerung Δl ; d. h.

$$19) \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{\Delta l}{g}}; \quad \text{ferner} \quad a = c \sqrt{\frac{\Delta l}{g}}; \quad c = a \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}.$$

Ob die Schwingungslänge $2a$ groß oder klein, hat auf t_1 keinen Einfluß, sofern nur die Gleichung für die Spannkraft



$K = \frac{E \cdot F}{l} x$ gültig bleibt; es darf also der Stab nicht über die Proportionalitätsgrenze verlängert werden; auch darf der Stab bei der Aufwärtsbewegung sich nicht ausbiegen. Solange die halbe Schwingungsweite $a \leq \Delta l$ ist, wird der Stab nur Zugkräfte auszuhalten haben. Ist aber gerade $a = \Delta l$, so fällt die höchste Lage des Punktes m mit A zusammen, wobei der Stab eben spannungslos wird.

Dieser Fall tritt ein, wenn die Masse m mit der spannungslosen Stange verbunden und plötzlich losgelassen wird. Dann hat m zu Anfang die Geschwindigkeit Null, die Beschleunigung g nach unten. Es fällt die obere Grenzlage des Punktes mit A zusammen, während die andere Grenzlage C um $2a = 2 \cdot \Delta l$ tiefer liegt. Der Massenpunkt geht mit der Geschwindigkeit

$$20) \quad c = \sqrt{\Delta l \cdot g}$$

durch die Gleichgewichtslage A_1 . Die stärkste Verlängerung des Stabes beträgt $2 \cdot \Delta l$, d. h. das Doppelte der Gleichgewichtsverlängerung, die stärkste Spannung also auch das Doppelte derjenigen Spannung, welche entstehen würde, wenn die Masse m ruhend an der Stange hänge (vgl. 2. Teil, Aufl. 3, S. 114).

Die Messung der Schwingungsdauer t_1 kann zur Bestimmung des Elastizitätsmaßes E benutzt werden. Denn es ist (Gl. 19)

$$\Delta l = \frac{l}{E} \frac{m g}{F} = g \frac{t_1^2}{\pi^2}, \quad \text{also}$$

$$21) \quad E = \frac{\pi^2 m g \cdot l}{t_1^2 g F}.$$

Beispiel 2: Für einen Stahlstab sei $E = 2\,500\,000 \text{ at}$; $F = 1 \text{ qcm}$; $l = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$; $m g = 1000 \text{ kg}$. Dann ist die Gleichgewichtsspannung $\sigma_0 = 1000 \text{ at}$, die entsprechende Verlängerung

$$\Delta l = \frac{1000 \cdot 500}{2\,500\,000} = 0,2 \text{ cm}.$$

Die Schwingungsdauer entspricht einer Pendellänge $= 0,2 \text{ cm}$ und beträgt mit $g = 981 \text{ cm/s.}^2$

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{0,2}{981}} = \frac{1}{22} \text{ Sekunden.}$$

Beginnt die Bewegung bei A , dem spannungslosen Zustande der Stange entsprechend, so geht die Masse m mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{0,2 \cdot 981} = 14 \text{ cm/s.}$$

durch die Gleichgewichtslage A_1 .

Querschwingungen. Annähernd gelten die Gl. 15—17 auch wenn ein leichter elastischer Stab durch die daran befestigte Masse m nach Fig. 76 in Biegungsspannungen versetzt wird, weil innerhalb der Elastizitätsgrenze die Durchbiegung verhältnismäßig mit der biegenden Kraft wächst. Die Lage A entspricht dem spannungslosen Zustande des Stabes. Die Gleichgewichtslage A_1 befindet sich um das Maß der einer Last mg zugehörigen Durchbiegung

$$22) \quad f = \frac{m \cdot g \cdot l^3}{3 E J} = e$$

(2. Teil, Aufl. 3, S. 46, Gl. 7) tiefer als A , wenn l die Länge des Stabes, J das Trägheitsmoment seines Querschnitts. Die Schwingungsdauer entspricht einer Pendellänge f .

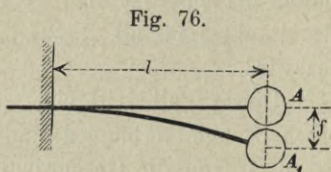


Fig. 76.

Kommt die Masse etwa durch einen nach unten gerichteten Schlag aus der Gleichgewichtslage, so ist die halbe Schwingungsbreite a nach Gl. 17 von der dem Massenpunkte durch den Schlag erteilten Geschwindigkeit c abhängig. Wird nun der Schlag nach einer oder nach mehreren Doppelschwingungen, d. h. in Zwischenzeiten $2t_1$, $4t_1$ oder allgemein $2nt_1$ wiederholt (worin n eine Ganzzahl bedeutet), so entsteht dadurch jedesmal eine Vergrößerung der Geschwindigkeit c und infolgedessen auch der stärksten Durchbiegung und Spannung. Solche Wiederholung von Schlägen oder Stößen kann also einen in elastischen Schwingungen befindlichen Stab zum Bruche führen. Aus diesem Grunde können Brückenträger, für welche die Dauer einer einfachen Schwingung t_1 beträgt, gefährdet werden, wenn Menschen in gebundenem Schritt über die Brücke marschieren und die Dauer eines Schrittes ein ganzes Vielfaches von $2t_1$ beträgt. Auch die Stöße eines Eisenbahnzuges erfolgen in einem gewissen Takte; daher spricht man von einer „kritischen“ Geschwindigkeit eines Zuges in bezug auf eine Brücke. Wiederholen sich aber die Stöße in der Zwischenzeit t_1 , der Dauer einer einfachen Schwingung, so hebt jeder zweite Stoß die Wirkung des ersten wieder auf, so daß gefährliche Schwingungen weniger leicht zu erwarten sind.

b) Lotrechte Schwingung schwimmender Körper.

Ein prismatischer Stab von dem Querschnitt F und der Länge d (Fig. 77) sei am unteren Ende derartig beschwert, daß er, um die

Länge h in Wasser eingetaucht, in lotrechter Schwimmelage im Gleichgewicht ist. Dann heben sich an dem Stabe das Gewicht mg und der Auftrieb $A = \gamma F h$ (vgl. 2. Teil, Aufl. 3, S. 196) auf, wenn γ das Gewicht der Kubikeinheit des Wassers. Beträgt die eingetauchte Länge des Stabes x , so hat der Auftrieb die Größe $K = \gamma \cdot F \cdot x$, ist also eine mit der Tiefe x des unteren Stabendes unter dem Wasserspiegel verhältnismäßige Kraft. Unter Vernachlässigung der Bewegungswiderstände des Stabes im Wasser kann man die Sätze S. 73 auf die Bewegung des Stabschwerpunktes anwenden.

Wenn das untere Ende des Stabes den Wasserspiegel eben berührt, befindet sich der Stabschwerpunkt in der Lage, die dem Werte Null der Kraft K entspricht. Ruhig schwimmend, liegt der Stab um h tiefer als in der eben genannten Lage für $K=0$; es ist daher die S. 73 eingeführte Größe e hier

$$23) \quad e = h.$$

Wird der Stab durch einen leichten Stoß aus der Ruhelage gebracht, so schwingt er um die Gleichgewichtslage als Mitte, und die Dauer einer einfachen Schwingung entspricht einer Pendellänge, gleich der Eintauchungstiefe h im Ruhezustande. Es darf nur die Bewegung nicht so bedeutend sein, daß der Stab ganz unter Wasser oder ganz aus dem Wasser komme, denn in beiden Fällen verschwindet die Veränderlichkeit des Auftriebes K .

Obige Betrachtungen bleiben auch gültig, wenn der eingetauchte Körper nicht prismatisch ist; es muß nur derjenige Teil des schwimmenden Körpers, der bei der Schwingung durch die Wasserspiegelebene hindurchgeht, eine lotrechte Prisma von dem wagerechten Querschnitt F sein. Nennt man V den eingetauchten Rauminhalt des Körpers im Ruhezustande, so daß

$$24) \quad \gamma V = mg,$$

Fig. 77.

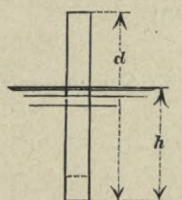
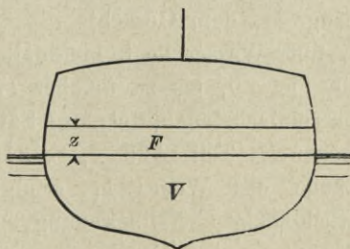


Fig. 78.



so vergrößert sich infolge einer Vermehrung der Eintauchung um z der Auftrieb um γFz . Dies ist also die Kraft, welche den Körper in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt und ihm eine Beschleunigung

$$p = -\frac{\gamma Fz}{m} = -k^2 z$$

(Gl. 14) erteilt. Dann ist

$$k^2 = \frac{\gamma F}{m} = \frac{\gamma Fg}{mg} = \frac{\gamma Fg}{\gamma V}$$

(nach Gl. 24), mithin $k^2 = \frac{F}{V}g$ und

$$25) \quad t_1 = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{V}{Fg}}.$$

Die Schwingungslänge wird also nach Gl. 16 hier allgemein

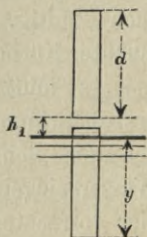
$$26) \quad e = \frac{V}{F},$$

anstatt des besonderen Wertes h bei prismatischen Körpern.

c) Eintauchen eines ins Wasser fallenden lotrechten Stabes.

Läßt man einen prismatischen Stab vom Querschnitt F , der Länge d , dem Gewichte mg , dessen unteres Ende zu Anfang um h_1 über Wasser liegt, hinabfallen (Fig. 79), so kann die Tiefe y , bis zu welcher er überhaupt einsinkt, am einfachsten mittels des Satzes vom Arbeitsvermögen (1. Teil, Aufl. 4, S. 315) berechnet werden. Längs des Weges h_1 erfolgt eine gleichförmig beschleunigte Fallbewegung, längs des weiteren Weges y eine Bewegung unter Einwirkung eines veränderlichen Auftriebs, d. h. nach den auf S. 68 u. ff. gegebenen Regeln, und schließlich ist die Aufwärtsbewegung der Abwärtsbewegung symmetrisch. Bei der Berechnung der Arbeit braucht man aber auf die Einzelheiten der Bewegung nicht einzugehen. Einer Eintauchung y entspricht

Fig. 79.



ein Auftrieb $K = \gamma F y$, und die Arbeit dieser veränderlichen Kraft beträgt bis zu einer Eintauchung y :

$$27) \quad \mathfrak{A} = - \int_0^y K dy = -1/2 \gamma F y^2.$$

Da nun in der höchsten und in der tiefsten Lage die Geschwindigkeit des Stabes Null ist, so muß die Gesamtarbeit der Schwere und des Auftriebs auch Null sein, daher

$$m g (h_1 + y) = 1/2 \gamma F y^2.$$

Bezeichnet man wieder die Eintauchungstiefe im Gleichgewichte mit h , so ist

$$m g = \gamma \cdot F \cdot h \quad \text{und}$$

$$2 h (h_1 + y) = y^2; \quad \text{dies gibt}$$

$$28) \quad y = h \left(1 \pm \sqrt{1 + 2 \frac{h_1}{h}} \right)$$

von den doppelten Vorzeichen ist hier nur das Zeichen $+$ verwendbar. Diese Gleichung ist aber nur gültig, solange $y \leq d$ bleibt, weil für $y > d$ der Auftrieb nicht mehr veränderlich sein würde. Demnach muß die Höhe des freien Falles

$$29) \quad h_1 \leq \left(\frac{d}{2h} - 1 \right) d$$

sein. Dies ist nur möglich für $d > 2h$. Hierbei sind freilich die Bewegungswiderstände und der Arbeitsverlust beim Aufschlagen auf das Wasser vernachlässigt.

Beispiel 3: Es sei $d = 1$ m, die Gleichgewichtseintauchung $h = 0,4$ m, dann muß

$$h_1 \leq \frac{d}{4}, \quad \text{d. h.} \quad h_1 \leq 0,25 \text{ m}$$

sein. Läßt man nun den Stab aus der Höhe $h_1 = 0,2$ m fallen, so beträgt die stärkste Eintauchung

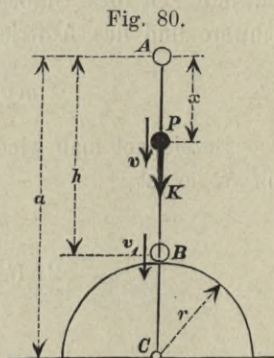
$$y = 0,4 (1 + \sqrt{1 + 1}) = 0,966 \text{ m.}$$

2. Fall eines Massenpunktes aus sehr großer Höhe ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand.

Fällt der Massenpunkt aus so großer Höhe, daß die Fallbeschleunigung nicht mehr als konstant angesehen werden kann, so hat man für dieselbe

$$1) \quad g_x = g \frac{r^2}{(a-x)^2}$$

zu setzen (1. Teil, Aufl. 4, S. 61), wenn g die Fallbeschleunigung = 9,81 an der Erdoberfläche, r der Erdradius, $a-x$ die augenblickliche Entfernung des Massenpunktes von dem Erdmittelpunkte C (Fig. 80). (Der Kreis im unteren Teile der Figur soll die Erde andeuten.) Die Bewegung beginne bei A in der Höhe h über der Erdoberfläche, im Abstand $a = h + r$ vom Mittelpunkte der Erde, mit der Geschwindigkeit Null. Nach t Sekunden habe der Punkt x Meter zurückgelegt, habe die Geschwindigkeit v und befinde sich bei P ; dann ist nach Gl. 1



$$\frac{dv}{dt} = \frac{gr^2}{(a-x)^2};$$

dies gibt, mit $v dt = dx$ multipliziert:

$$v dv = gr^2 \frac{dx}{(a-x)^2} = -gr^2 \frac{d(a-x)}{(a-x)^2};$$

mithin ist

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gr^2}{a-x} + C$$

und wegen $v = 0$ für $x = 0$:

$$0 = \frac{gr^2}{a} + C, \text{ also}$$

$$v^2 = 2gr^2 \left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} \right) = 2gr^2 \frac{x}{a(a-x)} \quad \text{und}$$

$$2) \quad v = r \sqrt{\frac{2gx}{a(a-x)}}.$$

Für $x = h$, $a = r + h$ und $a - x = r$ wird v zur Endgeschwindigkeit v_1 , mit der der Punkt bei B an der Erdoberfläche anlangt, nämlich

$$3) \quad v_1 = r \sqrt{\frac{2gh}{(r+h)r}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{h}{r}}}$$

Hieraus ist zu ersehen, daß man, sobald die Fallhöhe h gegen den Erdhalbmesser klein ist, $v_1 = \sqrt{2gh}$ setzen darf. Bemerkenswert ist ferner, daß man, ebenso wie beim barometrischen Höhenmessen (2. Teil, Aufl. 3, S. 226), in der für konstante Fallbeschleunigung gültigen Formel $v_1 = \sqrt{2gh}$ die Fallhöhe h durch $\frac{h}{1 + \frac{h}{r}}$ ersetzen

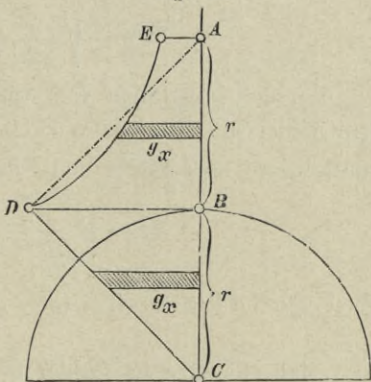
muß, um den für veränderliche Fallbeschleunigung gültigen Wert zu erhalten.

Für $h = r$ entsteht aus Gl. 3

$$4) \quad v_1 = \sqrt{gr}$$

Die gleiche Geschwindigkeit würde sich auch ergeben, wenn der Massenpunkt die Strecke $BC = r$ (Fig. 81) im Innern der homogen gedachten Erde zurücklegte (siehe S. 72, Gl. 11). Daraus folgt, daß auch die Arbeiten der Schwerkraft längs dieser beiden Wege AB und BC gleich sein müssen. Die auf die Masseneinheit entfallende Schwerkraftarbeit ist aber offenbar $\int g_x \cdot dx$, d. h. gleich der der durchfallenen Höhe entsprechenden Fläche derjenigen Kurve, welche das veränderliche g_x darstellt. Für das Innere der Erde ist nach dem 1. Teile, Aufl. 4, S. 61 die Darstellung von g_x eine Gerade CD mit $BD = g = 9,81$, für die Bewegung außerhalb der Erde eine hyperbelartige Kurve DE mit $AE = \frac{1}{4}g$. Mithin muß

Fig. 81.



$BCD = ABDE$, also auch $ABDE = ABD = \frac{1}{2}gr$ sein.

Die Nachrechnung ergibt auch mit $g_x = \frac{gr^2}{(a-x)^2}$ und $a = 2r$

$$5) \quad \int_{x=0}^{x=r} g_x dx = \frac{gr}{2}.$$

Schreibt man Gl. 3 in der Form

$$6) \quad v_1 = \sqrt{\frac{2ghr}{r+h}} = \sqrt{\frac{2gr}{\frac{r}{h}+1}},$$

so erhält man für Fallhöhen h , gegen die selbst der Erdhalbmesser r vernachlässigt werden darf, d. h. für $\frac{h}{r} = \infty$:

$$7) \quad v_1 = \sqrt{2gr}.$$

D. h. wenn ein Punkt nach dem allgemeinen Gesetze der Massenanziehung (1. Teil, Aufl. 4, S. 59) aus unendlicher Ferne von der Erde angezogen wird, so ist seine Geschwindigkeit an der Erdoberfläche dieselbe, als ob er mit konstanter Fallbeschleunigung g eine Höhe, gleich dem Erdhalbmesser r , durchfallen hätte. Die Gesamtfläche der bis ins Unendliche über E (Fig. 81) hinaus fortgesetzten Linie DE der Fallbeschleunigung muß daher $= gr$ sein.

Die zur Fallbewegung erforderliche Zeit ergibt sich, wenn man in Gl. 2 $v = dx:dt$ setzt und schreibt

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}} \sqrt{\frac{a-x}{x}} dx.$$

Bei der Integration von Ausdrücken dieser Art muß man aus dem Zähler ein etwaiges Wurzelzeichen zu beseitigen suchen; daher multipliziere man Zähler und Nenner mit $\sqrt{a-x}$, um zu erhalten

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}} \frac{a-x}{\sqrt{ax-x^2}} dx.$$

Weil nun $d(ax-x^2) = (a-2x) dx = 2\left(\frac{a}{2}-x\right) dx$,

so vertausche man im Zähler a mit $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ und ordne

$$8) \quad dt = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{a-x}{\sqrt{ax-x^2}} dx + \frac{a}{2} \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} \right\}$$

Das Integral des ersten Summanden in der Klammer ist $\sqrt{ax - x^2}$; um den zweiten Summanden auf eine der Grundformeln zurückzuführen, setze man vorübergehend $x = b - y$ mit $dx = -dy$; dann wird

$$\sqrt{ax - x^2} = \sqrt{ab - ay - b^2 + 2by - y^2}.$$

Man bestimmt nun die bis jetzt willkürliche Größe b so, daß unter dem Wurzelzeichen die Glieder mit der ersten Potenz von y verschwinden, also $2b = a$, d. h. $b = \frac{1}{2}a$ werde; dann wird

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} &= -\frac{dy}{\sqrt{ab - b^2 - y^2}} = -\frac{dy}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2}} \\ &= -\frac{dy}{\frac{a}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{a}y\right)^2}} = -\frac{d\left(\frac{2}{a}y\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{a}y\right)^2}} = d\left(\arccos \frac{2}{a}y\right) \\ &= d\left(\arccos \frac{a - 2x}{a}\right). \end{aligned}$$

Hiernach liefert die Integration der Gl. 8:

$$9) \quad t = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}} \left\{ \sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2} \arccos \frac{a - 2x}{a} \right\}.$$

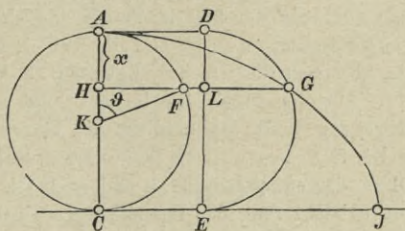
Eine Integrationskonstante braucht nicht mehr hinzugefügt zu werden, weil für $x = 0$ richtig

$$t = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}} \left(0 + \frac{a}{2} \arccos 1 \right) = 0 \text{ entsteht.}$$

Gl. 9 ist nach x nicht auflösbar, doch läßt sich der Klammerausdruck der rechten Seite leicht mittels einer Zykloide darstellen. Läßt man (Fig. 82) einen Kreis vom Durchmesser a auf der Geraden JC rollen und von einem Punkt des Umfanges die Zykloide JA erzeugen und zieht in einer Tiefe $AH = x$ unter dem Scheitelpunkt der Zykloide eine Parallele zu CJ , so ist

$$HF = \sqrt{x(a - x)} = \sqrt{ax - x^2}.$$

Fig. 82.



Ferner ist

$$\cos HKF = \cos \vartheta = \frac{1/2 a - x}{1/2 a} = \frac{a - 2x}{a},$$

mithin der Kreisbogen

$$, AF = \frac{a}{2} \arccos \frac{a - 2x}{a}.$$

Macht man also $\overline{AD} = \widehat{AF}$ und zeichnet den Halbkreis DGE , so ist $LG = HF$, $HL = AD = \widehat{AF}$, mithin

$$HG = \sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2} \arccos \frac{a - 2x}{a}.$$

Für $a = 2r$ und $x = r$, d. h. für den Fall aus der Höhe r über der Erdoberfläche bis zu dieser, ist eine Zeit erforderlich

$$t = \sqrt{\frac{2r}{2gr^2}} \left\{ \sqrt{2r^2 - r^2} + r \arccos 0 \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{gr}} r \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) = \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{\frac{r}{g}},$$

während der Fall von der Oberfläche bis zum Mittelpunkte der Erde nach Gl. 12, S. 72 nur die Zeit

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$$

in Anspruch nehmen würde. Der Unterschied erklärt sich dadurch, daß in dem jetzt vorliegenden Falle die Beschleunigung zu Anfang nur den geringen Wert $1/4 g$ hat, daß daher die Geschwindigkeit nur langsam zunimmt, während in dem auf S. 71/72 behandelten Falle die Bewegung mit der Maximalbeschleunigung g beginnt.

Einen noch klareren Einblick in diese Verhältnisse gewinnt man, wenn man für jede der hier in Vergleich stehenden Bewegungen die Geschwindigkeitskurve (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 10) aufzeichnet, d. h. zu den Zeiten als Abszissen die Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt.

Für die außerhalb der Erde von A nach B (Fig. 81) verlaufende Bewegung fehlt es allerdings an einer unmittelbaren Beziehung zwischen v und t ; führt man aber die Wegeslängen x als Hilfsgrößen ein, so kann man mittels Gl. 2 das entsprechende v und nach Gl. 9 das zugehörige t ermitteln, wobei zur Erleichterung der Berechnung noch die Fig. 82 benutzt werden kann.

So entspricht beispielsweise $x = 0,1 r$, wenn man dies in Gl. 9 einführt und gleichzeitig $a = 2 r$ setzt, $t = 0,887 \sqrt{\frac{r}{g}}$; Gl. 2 aber liefert mit den

gleichen Werten für a und x $v = 0,229 \sqrt{gr}$. Diese Koordinaten t und v bestimmen einen Punkt der Geschwindigkeitskurve, und in gleicher Weise findet man eine beliebige Zahl anderer;

wählt man für $\sqrt{\frac{r}{g}}$ das Maß

2 cm, für \sqrt{gr} ebenfalls das Maß 2 cm, so ergibt sich die Geschwindigkeitskurve Fig. 83. Die Beschleunigung erscheint nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 15 als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitskurve; es ist

$$GH = \sqrt{g \cdot r} \quad FH = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{r}{g}} = 2,57 \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Da nun die Fallbeschleunigung in der Höhe r über der Erdoberfläche $\frac{1}{4}g$, an der Erdoberfläche g beträgt, so muß $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \alpha_1$ sein, wenn α und α_1 die Neigungswinkel der Kurve bei F und G bedeuten.

Für die Bewegung im Inneren der Erde von B nach C (Fig. 81) gilt, wenn man von der Stelle B aus die Wege und Zeiten mißt, ein Bewegungsgesetz von etwas anderer Form als Gl. 5, S. 69. Es würde nämlich jetzt in Fig. 71, S. 70 $BQ = ct$ und $BP = x = r \left(1 - \cos \frac{ct}{r}\right)$ sein, oder, weil

$c = \sqrt{g \cdot r}$, $x = r \left(1 - \cos t \sqrt{\frac{g}{r}}\right)$; und das Geschwindigkeitsgesetz:

$$v = \sqrt{g \cdot r} \sin t \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Setzt man hierin beispielsweise $t = 0,1 \sqrt{\frac{r}{g}}$, so wird $v = \sqrt{g \cdot r} \sin 0,1$.

Der Bogengröße $0,1$ entspricht die Gradzahl $5,73$ oder rund $5^\circ 44'$ und der Sinus $0,0999$, womit genau genug $\sin 0,1 = 0,1$ und $v = 0,1 \sqrt{g \cdot r}$ gefunden ist. In dieser Weise ergeben sich die Koordinaten der Geschwindigkeitskurve JK (Fig. 84), welche einen Teil einer Sinuslinie bildet. Es ist $KL = \sqrt{g \cdot r}$,

$$JL = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} = 1,57 \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Das Ansteigungsverhältnis der Kurve JK an der Stelle J ist $\operatorname{tg} \alpha_1$, d. h. von derselben Größe wie $\operatorname{tg} \alpha_1$ in Fig. 83. Da nach 1. Teil, S. 11 der Inhalt der Geschwindigkeitskurve die Wegeslänge bezeichnet, und diese in beiden Fällen $= r$ ist, so müssen die Flächen FGH und JKL einander gleich

Fig. 83.

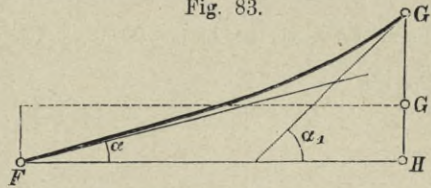
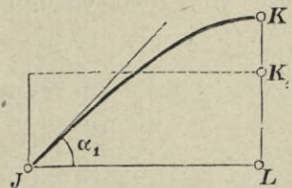


Fig. 84.



sein. Die Figur $F'GH$ läßt sich in ein Rechteck von der Breite $2,57 \sqrt{\frac{r}{g}}$ und der Höhe $0,39 \sqrt{g \cdot r}$ verwandeln, was der Fläche $= r$ entspricht; die Figur JKL ebenso in ein Rechteck von der Breite $1,57 \sqrt{\frac{r}{g}}$ und der Höhe $0,64 \sqrt{g \cdot r}$.

3. Bewegung unter alleiniger Einwirkung eines Flüssigkeitswiderstandes.

Wird ein schwimmender Körper mit einer Geschwindigkeit c in Bewegung gesetzt und sodann der alleinigen Einwirkung des Wasser- und Luftwiderstandes überlassen, so wird er, weil der Auftrieb der Schwerkraft das Gleichgewicht hält, eine verzögerte Bewegung in wagerechter gerader Linie ausführen. Man kann den Flüssigkeitswiderstand W mit dem Quadrate der veränderlichen Geschwindigkeit v verhältnismäßig annehmen, also setzen

$$1) \quad W = A v^2.$$

Es empfiehlt sich nun, zur Abkürzung der Ergebnisse eine Geschwindigkeit k einzuführen, bei welcher der Körper oder Massenpunkt m einen Widerstand, gleich seinem Gewichte mg , erfährt. Dann wird aus Gl. 1:

$$mg = A k^2,$$

woraus durch Verbindung mit Gl. 1

$$2) \quad W = mg \frac{v^2}{k^2}$$

entsteht. Hiernach wird die Beschleunigung

$$3) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{W}{m} = -g \frac{v^2}{k^2} \quad \text{oder}$$

$$dt = -\frac{k^2}{g} \frac{dv}{v^2} = \frac{k^2}{g} d\left(\frac{1}{v}\right), \quad \text{mithin}$$

$$t = \frac{k^2}{g} \frac{1}{v} + C;$$

weil für $t = 0$, $v = c$ war, so muß

$$0 = \frac{k^2}{g} \frac{1}{c} + C \quad \text{sein;}$$

also folgt (durch Abziehen)

$$4) \quad t = \frac{k^2}{g} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c} \right) \quad \text{und hieraus}$$

$$5) \quad v = \frac{c}{1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t}.$$

Setzt man $v = \frac{dx}{dt}$, und verwandelt $c \cdot dt$ in

$$\frac{k^2}{g} d \left(1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t \right), \quad \text{so wird}$$

$$dx = \frac{k^2}{g} \frac{d \left(1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t \right)}{1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t}, \quad \text{also}$$

$$6) \quad x = \frac{k^2}{g} \ln \left(1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t \right).$$

(Die Integrationskonstante verschwindet hier, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ wird.) Weil nach Gl. 5

$$1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t = \frac{c}{v},$$

so kann man durch Einsetzung dieses Wertes in Gl. 6 eine unmittelbare Beziehung zwischen Geschwindigkeit v und Länge x erhalten, nämlich

$$7) \quad x = \frac{k^2}{g} \ln \left(\frac{c}{v} \right) \quad \text{oder} \quad v = c \cdot e^{-\frac{g}{k^2} x}.$$

Nach diesen Ergebnissen ist die Bewegung des schwimmenden Körpers weder der Zeit noch dem Orte nach begrenzt. Es wird v erst zu Null für $t = \infty$ (Gl. 5) und für $x = \infty$ (Gl. 7). Ein einmal in Bewegung gesetzter schwimmender Körper wird also, wenn der Widerstand genau proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit (Gl. 2) und die Wasserfläche unbegrenzt ist, niemals und nirgends zur

Ruhe kommen. Er würde, wenn keine Störungen eintreten, das ganze Weltmeer durchschwimmen. In Wirklichkeit dürfte dies nicht zutreffen, weil der Widerstand des Wassers der Gl. 2 nicht genau entspricht, weil das Wasser eine gewisse Klebrigkeit hat, die den Widerstand, nachdem die Geschwindigkeit sehr klein geworden ist, erheblich beeinflussen kann, weil endlich Luft und Wasser nie ganz ruhig bleiben.

Beispiel: Ergibt ein Schiff von $mg = 3000 \text{ t} = 3\,000\,000 \text{ kg}$ Gewicht bei einer Geschwindigkeit von 7 m/s , einen Widerstand von $15\,000 \text{ kg}$, so ist nach Gl. 2

$$k^2 = \frac{mg}{W} v_2 = \frac{3000}{15} \cdot 49 = 9800, \text{ d. h.}$$

$$k \text{ rund} = 100 \text{ m.}$$

Ermittelt man nun dem Schiff eine Anfangsgeschwindigkeit $c = 10 \text{ m/s}$, so würde ohne weitere Triebkraft zur Zurücklegung einer Strecke von 1000 m eine Zeit erforderlich sein, die aus Gl. 6 (mit $g = 10$)

$$1000 = \frac{10\,000}{10} \ln \left(1 + \frac{10}{10\,000} 10 t \right)$$

gefunden werden kann. Es müßte

$$\ln \left(1 + \frac{t}{100} \right) = 1, \text{ oder}$$

$$1 + \frac{t}{100} = e = 2,7183, \text{ also}$$

$$t = 172 \text{ s. betragen.}$$

Das Schiff hat in diesem Augenblicke noch eine Geschwindigkeit (nach Gl. 5)

$$v = \frac{10}{1 + 0,01 t} = \frac{10}{2,72} = 3,68 \text{ m/s.}$$

Von der Arbeit, welche nötig war, um dem Schiffe die Anfangsgeschwindigkeit zu erteilen, nämlich

$$3\,000\,000 \cdot \frac{c^2}{2g} = 15\,000\,000 \text{ mkg,}$$

sind noch

$$mg \cdot \frac{v_2}{2g} = \text{rund } 2\,030\,000 \text{ mkg,}$$

d. h. $13,5\%$ vorhanden, $86,5\%$ durch den Wasserwiderstand aufgezehrt.

Nach einer Stunde ($t = 3600$) würde $v = 0,27 \text{ m/s}$, $x = 3611 \text{ m}$ betragen;

nach 2 Stunden: $v = 0,137 \text{ m/s}$, $x = 4290 \text{ m}$;

nach 10 Stunden: $v = 0,0277 \text{ m/s}$, $x = 5889 \text{ m}$.

4. Lotrechte Wurf- und Fallbewegung in einem widerstehenden Mittel (Luft oder Wasser).

a) Steigen.

Wird der Massenpunkt m bei A (Fig. 85) mit der Geschwindigkeit c lotrecht aufwärts geworfen und wirken auf ihn die Schwere mg und der Widerstand W eines Mittels (etwa der Luft) verzögernd, so mag er nach t Sekunden einen Weg $AP = x$ zurückgelegt und die Geschwindigkeit v erhalten haben. Führt man, wie Gl. 2, S. 86, den Widerstand in der Form

$$1) \quad W = mg \frac{v^2}{k^2}$$

ein, so wird die Beschleunigung

$$2) \quad \frac{dv}{dt} = -g - \frac{W}{m} = -g \left(1 + \frac{v^2}{k^2} \right).$$

Hieraus erhält man die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Zeit, indem man die Veränderlichen trennt, nämlich schreibt:

$$-g \cdot dt = \frac{dv}{1 + \left(\frac{v}{k}\right)^2} = k \frac{d\left(\frac{v}{k}\right)}{1 + \frac{v^2}{k^2}},$$

so daß entsteht $g \cdot t = -k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v}{k} + C$.

Weil $v = c$ war für $t = 0$, so muß ferner sein

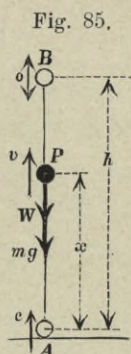
$$0 = -k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{k} + C,$$

also nach Entfernung von C mittels Abziehens der letzten Gleichung von der vorhergehenden

$$3) \quad t = \frac{k}{g} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{k} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v}{k} \right).$$

Will man die Zeit t wissen, nach welcher die aufwärts gerichtete Geschwindigkeit v zu Null geworden ist, so setze man $v = 0$ in Gl. 3 ein und erhält dadurch die

$$4) \quad \text{Steigdauer } t_1 = \frac{k}{g} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{k}.$$



Zur Ermittlung der Steighöhe ist es am einfachsten, x als $f(v)$ zu entwickeln. Zu dem Zwecke multipliziere man Gl. 2 mit $v dt = dx$; dann wird

$$v dv = -g \left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right) dx,$$

oder nach Trennung der Veränderlichen

$$dx = -\frac{1}{2g} \frac{2v \cdot dv}{1 + \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{k^2}{2g} \frac{2 \frac{v \cdot dv}{k^2}}{1 + \frac{v^2}{k^2}}, \quad \text{also}$$

$$x = -\frac{k^2}{2g} \ln \left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right) + C.$$

Weil $x = 0$ für $v = c$, so wird

$$C = \frac{k^2}{2g} \ln \left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right) \quad \text{und}$$

$$5) \quad x = \frac{k^2}{2g} \ln \left(\frac{k^2 + c^2}{k^2 + v^2}\right).$$

Will man die Höhe $x = h$ wissen, bei welcher die Geschwindigkeit zu Null geworden ist, so setze man $v = 0$ in Gl. 5 ein, und erhält die

$$6) \quad \text{Steighöhe } h = \frac{k^2}{2g} \ln \left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right).$$

Eine unmittelbare Beziehung zwischen x und t ist nicht sehr bequem, kann aber in folgender Weise aus Gl. 3 erhalten werden:

Man setze $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{k} = \alpha$, also

$$v = \frac{dx}{dt} = k \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{gt}{k}\right) \quad \text{und}$$

$$dx = \frac{k^2}{g} \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{gt}{k}\right) d\left(\frac{gt}{k}\right) = -\frac{k^2}{g} \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{gt}{k}\right) d\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right).$$

Nun ist

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln(\cos x), \quad \text{daher}$$

$$x = \frac{k^2}{g} \ln \left(\cos \left(\alpha - \frac{gt}{k}\right)\right) + C = \frac{k^2}{g} \ln \left\{ \cos \alpha \cdot \cos \frac{gt}{k} + \sin \alpha \cdot \sin \frac{gt}{k} \right\} + C,$$

$$0 = \frac{k^2}{g} \ln(\cos \alpha) + C,$$

also
$$x = \frac{k^2}{g} \ln \left\{ \cos \frac{gt}{k} + \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{gt}{k} \right\}$$

und, weil
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{k}:$$

7)
$$x = \frac{k^2}{g} \ln \left\{ \cos \frac{gt}{k} + \frac{c}{k} \sin \frac{gt}{k} \right\}.$$

b) Fallen.

Nachdem die Höhe h erstiegen wurde, beginnt das Fallen mit der Beschleunigung g , die aber mit wachsender Geschwindigkeit durch den Widerstand des Mittels vermindert wird. Nach t Sekunden sei die Höhe x durchgefallen (Fig. 86), die Geschwindigkeit v geworden, dann ist die Beschleunigung

8)
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{W}{m} = g \left(1 - \frac{v^2}{k^2} \right).$$

Es möge zunächst die Geschwindigkeit v_1 berechnet werden, mit der der Massenpunkt unten bei A wieder anlangt. Zu diesem Zwecke multipliziere man Gl. 8 mit $v dt = dx$:

$$v dv = g \left(1 - \frac{v^2}{k^2} \right) dx$$

und schreibe
$$\frac{-2 \frac{v}{k} d \left(\frac{v}{k} \right)}{1 - \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{2g}{k^2} dx, \quad \text{woraus entsteht:}$$

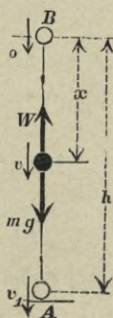
$$\ln \left(1 - \frac{v^2}{k^2} \right) = -\frac{2g}{k^2} x,$$

da (wegen $x=0$; $v=0$) die Konstante zu Null wird. Hieraus folgt für $x=h$ und $v=v_1$:

9)
$$\ln \left(1 - \frac{v_1^2}{k^2} \right) = -\frac{2g}{k^2} h \quad \text{oder}$$

10)
$$v_1 = k \left(1 - e^{-\frac{2gh}{k^2}} \right)^{1/2}.$$

Fig. 86.



Einfacher führt man v_1 auf die Geschwindigkeit c des Aufwurfes an derselben Stelle A zurück, indem man aus Gl. 6 und 9 die Höhe h entfernt, und erhält

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{v_1^2}{k^2}\right) &= -\ln\left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right) \quad \text{oder} \\ 1 - \frac{v_1^2}{k^2} &= \frac{1}{1 + \frac{c^2}{k^2}}, \quad \text{mithin} \end{aligned}$$

$$11) \quad \frac{v_1}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{k^2}}}, \quad \text{d. h. } v_1 < c.$$

Um nun die Falldauer zu erhalten, schreibe man Gl. 8:

$$\frac{g}{k^2} dt = \frac{dv}{k^2 - v^2},$$

so daß
$$t = \frac{k^2}{g} \int \frac{dv}{k^2 - v^2} + C \quad \text{wird.}$$

Behufs der Integration bedenke man, daß

$$\frac{1}{k^2 - v^2} = \frac{A}{k + v} + \frac{B}{k - v} = \frac{Ak - Av + Bk + Bv}{k^2 - v^2}$$

geschrieben werden kann, worin, damit

$$(A + B)k - (A - B)v = 1$$

werde (für jeden beliebigen Wert von v),

$$A = B \quad \text{und} \quad 2Ak = 1$$

sein muß. Hiermit wird

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{k^2 - v^2} &= \frac{1}{2k} \int \frac{dv}{k + v} + \frac{1}{2k} \int \frac{dv}{k - v} \\ &= \frac{1}{2k} \ln(k + v) - \frac{1}{2k} \ln(k - v), \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$12) \quad t = \frac{k}{2g} \ln\left(\frac{k + v}{k - v}\right),$$

indem $C = 0$ wird, weil $v = 0$ richtig $t = 0$ liefert. — Setzt man nun $v = v_1$, so wird aus t die **Falldauer** t_2 , d. h.

$$13) \quad t_2 = \frac{k}{2g} \ln\left(\frac{k + v_1}{k - v_1}\right).$$

Aus Gl. 11 ergibt sich aber

$$\frac{k + v_1}{k - v_1} = \frac{(c + \sqrt{c^2 + k^2})^2}{k^2}, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{k + v_1}{k - v_1} \right) = \ln \left(\frac{c + \sqrt{c^2 + k^2}}{k} \right);$$

die Einsetzung dieses Wertes in Gl. 13 liefert:

$$14) \quad t_2 = \frac{k}{g} \ln \left(\frac{c + \sqrt{c^2 + k^2}}{k} \right);$$

hiermit ist die Falldauer unmittelbar auf gegebene Größen zurückgeführt.

Die unmittelbare Beziehung zwischen x und t wird wieder etwas unständiglich. Gl. 12 läßt sich schreiben

$$k + v = (k - v) e^{\frac{2g}{k} t},$$

woraus sich ergibt:

$$v = \frac{dx}{dt} = k \frac{e^{\frac{2g}{k} t} - 1}{e^{\frac{2g}{k} t} + 1} = k \frac{e^{\frac{g}{k} t} - e^{-\frac{g}{k} t}}{e^{\frac{g}{k} t} + e^{-\frac{g}{k} t}}$$

$$dx = \frac{k^2 e^{\frac{g}{k} t} - e^{-\frac{g}{k} t}}{e^{\frac{g}{k} t} + e^{-\frac{g}{k} t}} d \left(\frac{g}{k} t \right);$$

da nun der Zähler die Abgeleitete des Nenners darstellt, so ist

$$x = \frac{k^2}{g} \ln \left\{ e^{\frac{g}{k} t} + e^{-\frac{g}{k} t} \right\} + C_1.$$

Weil $t = 0$ auch $x = 0$ geben muß, so wird

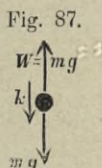
$$0 = \frac{k^2}{g} \ln 2 + C_1,$$

daher durch Abziehen

$$15) \quad x = \frac{k^2}{g} \ln \left\{ \frac{e^{\frac{g}{k} t} + e^{-\frac{g}{k} t}}{2} \right\}.$$

Die Beschleunigung der Abwärtsbewegung würde zu Null werden, wenn die Geschwindigkeit v den Wert k erreichte, weil für diesen Fall der Widerstand $W = mg$ werden würde (Fig. 87). Erteilt man also dem Massenpunkt in dem Sinne abwärts die Geschwindigkeit k , so führt er eine gleichmäßige Bewegung aus. Daher wollen wir k die Gleichgewichtsgeschwindigkeit nennen. Bei der

mit der Geschwindigkeit Null beginnenden Fallbewegung kann die Geschwindigkeit v nach Gl. 12 den Wert k aber erst nach unendlich langer Zeit erreichen, denn $v = k$ gibt in dieser Gl. $t = \infty$. Die mit einer Geschwindigkeit, kleiner als k , beginnende Fallbewegung nähert sich daher asymptotisch der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit k . Bei sehr großer Fallhöhe kann annähernd die Endgeschwindigkeit $v_1 = k$ gesetzt werden. Erteilt man dem Punkt im Sinne abwärts eine Geschwindigkeit $> k$, so ist seine Bewegung eine verzögerte, nähert sich aber mit abnehmender Geschwindigkeit, und zwar ebenfalls asymptotisch, wie man leicht findet, der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit k .



Läßt man den Massenpunkt von einer Höhe $h = \frac{k^2}{2g}$ herabfallen, so würde er ohne Wirkung des Luftwiderstandes eine Endgeschwindigkeit k erhalten. Mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes aber wird nach Gl. 10:

$$16) \quad v_1 = k \sqrt{1 - \frac{1}{e}} = 0,795 k$$

oder rund $0,8 k$.

c) Bestimmung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit k .

Ist γ das Gewicht von 1 cbm des widerstehenden Mittels; F der größte Querschnitt des Körpers, rechtwinklig zur Bewegungsrichtung genommen; V der Rauminhalt, $\gamma_1 V$ das Gewicht des Körpers; ζ eine von der Form und Oberflächenbeschaffenheit des Körpers abhängige Widerstandsziffer, so wird nach 2. Teil, Aufl. 3, S. 369, Gl. 3

$$W = \zeta \gamma F \frac{v^2}{2g},$$

daher, nach Gl. 1 (S. 89), für $v = k$:

$$mg = \gamma_1 V = \zeta \gamma F \frac{k^2}{2g}, \quad \text{also}$$

$$17) \quad \frac{k^2}{2g} = \frac{\gamma_1 V}{\gamma F} \frac{1}{\zeta} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{\gamma_1 V}{\gamma F} \frac{2g}{\zeta}.$$

Setzt man für kugelförmige Körper vom Halbmesser r
 $\zeta = 0,5$; $V = \frac{4}{3}r^3\pi$; $F = r^2\pi$, so entsteht

$$18) \quad \frac{k^2}{2g} = \frac{8}{3} \frac{\gamma_1}{\gamma} r \quad \text{und} \quad k^2 = 52,32 \frac{\gamma_1}{\gamma} r.$$

Für Gußeisenkugeln ($\gamma_1 = 7200$) in Luft ($\gamma = 1,29$) wird

$$19) \quad \frac{k^2}{2g} = 14\,884 r \quad \text{und} \quad k^2 = 292\,014 r.$$

Für Wassertropfen oder Eiskugeln ($\gamma_1 = 1000$) in Luft ($\gamma = 1,29$)

$$20) \quad \frac{k^2}{2g} = 2067 r \quad \text{und} \quad k^2 = 40\,561 r.$$

Für Gußeisenkugeln ($\gamma_1 = 7200$) in Wasser ($\gamma = 1000$) darf der Auftrieb γV des Wassers nicht vernachlässigt werden, oder es kommt bei der Berechnung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit k nur das scheinbare Gewicht der Kugel in bezug auf Wasser $(\gamma_1 - \gamma)V$ (s. 2. Teil, Aufl. 3, S. 198) in Frage; d. h.

$$(\gamma_1 - \gamma)V = \gamma \zeta F \frac{k^2}{2g} \quad \text{oder}$$

$$\frac{k^2}{2g} = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma} \frac{V}{F} \frac{1}{\zeta} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma} \frac{V}{F} \frac{2g}{\zeta}.$$

Dies gibt:

$$21) \quad \frac{k^2}{2g} = 6,2 \cdot \frac{8}{3} r = 16,5 r \quad \text{und} \quad k^2 = 324 r.$$

Beispiel 1: Eine Gußeisenkugel von $r = 0,04$ m Halbmesser werde mit einer Geschwindigkeit $c = 500$ m/s. lotrecht aufwärts geschossen. Es sollen h , t_1 , v_1 und t_2 berechnet werden.

Zunächst ist nach Gl. 19

$$\frac{k^2}{2g} = 14\,884 \cdot 0,04 = 595; \quad k^2 = 292\,014 \cdot 0,04 = 11\,681 \quad \text{und} \quad k = 108 \text{ m};$$

$$\frac{c}{k} = 4,63; \quad \frac{k}{g} = 11.$$

Dann wird die Steigdauer (Gl. 4)

$$t_1 = 11 \cdot \text{arc tg } 4,63 = 11 \cdot \text{arc } 77^\circ 49' = 11 \cdot 1,3582 = 14,9 \text{ s.}$$

$$\left(\text{gegen } \frac{500}{g} = 51 \text{ s.} \quad \text{ohne Luftwiderstand.}\right)$$

Die Steighöhe (Gl. 6)

$$h = 595 \cdot (1 + 4,63^2) = 595 \cdot 3,090 = 1839 \text{ m}$$

$$\left(\text{gegen } \frac{500^2}{2g} = 12\,742 \text{ m} \quad \text{ohne Luftwiderstand.}\right)$$

Die Aufschlaggeschwindigkeit unten (Gl. 11)

$$v_1 = \frac{500}{\sqrt{1 + 21,44}} = 105,5,$$

mithin nur wenig kleiner als $k = 108$ (gegen $c = 500$ ohne Luftwiderstand).

Die Falldauer (Gl. 13)

$$t_2 = \frac{11}{2} \ln \left(\frac{108 + 105,5}{108 - 105,5} \right) = 5,5 \cdot 4,4427 = 24,4 \text{ s.}$$

also selbstverständlich $t_2 > t_1$ (gegen 51 s. ohne Luftwiderstand).

Bei geringer Geschwindigkeit c ist die Wirkung des Luftwiderstandes unerheblich. Dieselbe Kugel mit $k = 108$ erreicht mit $c = 21,6 \text{ m}$ Geschwindigkeit eine Höhe $h = 23,3 \text{ m}$ (gegen $23,8 \text{ m}$ ohne Luftwiderstand).

Beispiel 2: Die aus großer Höhe herabfallenden Regentropfen, Schloßen, Hagelkörner u. dergl. bewegen sich in der Nähe des Erdbodens nahezu gleichförmig mit der Geschwindigkeit k . Nach Gl. 20 ist k verhältnismäßig mit \sqrt{r} ; kleine Tropfen haben daher sehr geringe Geschwindigkeit, während dicke Tropfen mit größerer Geschwindigkeit auf den Boden schlagen. Für solche kann $r = 2,5 \text{ mm} = 0,0025 \text{ m}$ sein, dann wird

$$\frac{k^2}{2g} = 5,16 \text{ m} \quad \text{und} \quad k = 10,1 \text{ m.}$$

Derartige Regen hat also beim Aufschlagen eine Geschwindigkeitshöhe von nur $5,16 \text{ m}$, mag er aus noch so großer Höhe fallen.

Hagelkörner kommen vor von $0,03 \text{ m}$ Halbmesser und $0,1 \text{ kg}$ Gewicht. Für diese ist die Geschwindigkeitshöhe

$$\frac{k^2}{2g} = 62 \text{ m}, \quad \text{die Geschwindigkeit } k \text{ rund } 35 \text{ m.}$$

Die Schlagwirkung eines Hagelkorns ist nach dem Werte seines Arbeitsvermögens $\frac{1}{2} m \cdot k^2$ zu beurteilen. Da nun m mit r^3 verhältnismäßig, k^2 aber mit r in gleichem Verhältnisse wächst, so ist die Schlagwirkung proportional mit der vierten Potenz von r . Ein Hagelkorn vom doppelten Durchmesser hat also die 16fache Wirkung eines solchen mit einfachem Durchmesser.

Beispiel 3: Wie lange gebraucht eine Gußeisenkugel von $r = 0,3 \text{ m}$ Halbmesser, um eine Meerestiefe von 8000 m zu durchsinken. Wegen der großen Tiefe wird die Fallgeschwindigkeit bald dem Grenzwerte k sehr nahe kommen. Es ist (Gl. 21)

$$k^2 = 324 \cdot 0,3 = 97,2, \quad \text{also}$$

$$k = 9,86$$

und die Zeit, wegen nahezu gleichmäßiger Bewegung,

$$t_2 = 8000 : 9,86 = 811 \text{ s.} = 13\frac{1}{2} \text{ min.}$$

d) Übergang zur widerstandslosen Bewegung.

Der einfache Fall, in welchem nur die Schwere wirkt, läßt sich aus den vorstehenden Untersuchungen ableiten. Soll nämlich der Widerstand W zu Null werden, so muß in Gl. 1 die für W maßgebende Größe $k = \infty$ gesetzt werden. Dabei liefern dann die Gleichungen 3, 4, 5, 6, 7, 9 bis 14 Ergebnisse, die zunächst in unbestimmten Formen $\infty \cdot 0$ und $\frac{0}{0}$ auftreten, aber nach den Lehren der Differentialrechnung oder durch sonstige geeignete Umformung in die einfachen Gleichungen der gleichförmig beschleunigten Bewegung übergeführt werden können. Es möge dies beispielsweise an Gl. 4 durchgeführt werden:

Mit wachsendem k , also abnehmendem $\frac{c}{k}$ verschwindet mehr und mehr der Unterschied zwischen dem Bogen $\frac{c}{k}$ und seiner Tangente, so daß $\text{arc tg } \frac{c}{k}$ mit $\frac{c}{k}$ vertauscht werden kann. Somit wird aus Gl. 4:

$$t_1 = \frac{k}{g} \cdot \frac{c}{k} = \frac{c}{g},$$

wie es sein muß.

Durch entsprechende Behandlung gehen die übrigen Gleichungen für $k = \infty$ über in:

$$\text{Gl. 5) } x = \frac{c^2 - v^2}{2g},$$

$$\text{Gl. 6) } h = \frac{c^2}{2g},$$

$$\text{Gl. 7) } x = \frac{ct}{2},$$

$$\text{Gl. 9) } h = \frac{v_1^2}{2g},$$

$$\text{Gl. 10) } v_1 = \sqrt{2gh},$$

$$\text{Gl. 11) } v_1 = c,$$

$$\text{Gl. 12)} \quad t = \frac{v}{g},$$

$$\text{Gl. 13)} \quad t_2 = \frac{x_1}{g},$$

$$\text{Gl. 14)} \quad t_2 = \frac{c}{g},$$

$$\text{Gl. 15)} \quad x = \frac{gt^2}{2}.$$

B. Freie krummlinige Bewegung eines Massenpunktes.

Eine krummlinige Bewegung entsteht, wenn Krafrichtung und Geschwindigkeitsrichtung nicht übereinstimmen.

Die Bewegung eines Punktes im Raum ist bestimmt entweder durch die Bewegungen seiner Projektionen auf drei Achsen oder durch seinen Radiusvektor in bezug auf einen festen Punkt (vgl. S. 15 u. 21). Die Projektionsbewegungen nennt man auch die Seitenbewegungen der Gesamtbewegung. Ist R die auf den Massenpunkt wirkende Mittelkraft, p die Beschleunigung, also $R = mp$, sind X , Y und Z die Projektionen von R auf die drei Achsen oder die Seitenkräfte in der Richtung der Achsen, p_x , p_y , p_z die entsprechenden Beschleunigungen, d. h. die Projektionen von p auf die Achsen, so sind diese nach S. 19 zugleich die Beschleunigungen der drei Seiten- oder Projektionsbewegungen. D. h., wenn x , y , z die veränderlichen Koordinaten des Punktes sind, ist

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{X}{m}; \\ p_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{Y}{m}; \\ p_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt} = \frac{Z}{m}. \end{array} \right.$$

Für die Gesamtbewegung gilt ebenso in der Vektorschreibweise

$$2) \quad \mathfrak{p} = \frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\mathfrak{R}}{m}.$$

Es liegt dann die Aufgabe vor, durch Integration aus den Gleichungen 1 die Gleichungen der Projektionsbewegungen $x = f(t)$ usw. oder aus der Gl. 2 die Gleichung der Gesamtbewegung $\mathfrak{s} = f(t)$ zu entwickeln.

Zur Erleichterung der Ausführung der Rechnungen in bestimmten Fällen dienen einige allgemeine Sätze, bei deren Ableitung diejenigen Schritte ein für alle Mal gemacht werden, die man ohne diese Sätze in jedem besonderen Falle tun müßte.

1. Der Satz der Flächen.

Dieser Satz ist besonders nützlich für solche Bewegungen, bei denen die wirkende Kraft stets durch einen festen Punkt, das Zentrum O , hindurchgeht, und soll zunächst für diesen Sonderfall dargelegt werden.

Es ist leicht zu erkennen, daß eine solche Bewegung in einer ebenen Bahnlinie erfolgen muß, daß sie nicht aus der durch die Anfangsgeschwindigkeit c und das Zentrum O bestimmten Ebene E heraustreten kann. Da nämlich (Fig. 88) die Geschwindigkeit c und auch die Kraft K , mithin auch die Elementarbeschleunigung $p \cdot dt$ in der Ebene E liegen, so wird die Geschwindigkeit nach einem Zeitteilchen, welche die geometrische Summe von c und $p \cdot dt$ ist, auch in der Ebene E liegen, und da dieser Vorgang sich für jedes weitere Zeitteilchen in gleicher Weise abspielt, so bleibt die Geschwindigkeit v stets in der Ebene E . Man kann nun durch O zwei zueinander rechtwinklige, ebenfalls in der Ebene E liegende Achsen OX und OY ziehen, dann bleibt die Bewegung gänzlich in der Ebene XOY , und man bedarf der dritten Achse OZ gar nicht bei der Untersuchung solcher Bewegungen

Ist nun PQ (Fig. 89) ein unendlich kleines Bewegungsteilchen $ds = v \cdot dt$ und bezeichnet man den rechtwinkligen Abstand des Zentrums O von der Richtung der Geschwindigkeit v mit h , so ist leicht einzusehen, daß $v \cdot h$ konstant sein muß. Denn haben v und h zu Anfang die Werte v_0 und h_0 , so ist v die Resultierende oder die geometrische Summe

Fig. 88.

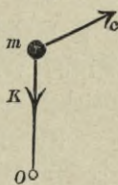
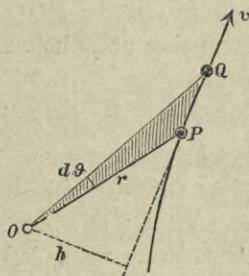


Fig. 89.



aus v_0 und den Elementarbeschleunigungen $p \cdot dt$, welche während der Bewegung vom Anfange bis zu der Stelle P durch die Kraft K geliefert wurden. Da nun nach Bd. I, Aufl. 4, S. 107 der Satz der Drehmomente auch für Geschwindigkeiten gilt und die Elementarbeschleunigungen sämtlich durch O gehen, also in bezug auf O das Moment Null haben, so muß

$$-v h = -v_0 h_0 \quad \text{oder} \quad v h = v_0 h_0 \quad \text{sein.}$$

Zieht man nun die Fahrstrahlen OP und OQ , bezeichnet $\sphericalangle POQ$ mit $d\vartheta$, die Fläche POQ mit dF , so ist

$$dF = \frac{1}{2} PQ \cdot h = \frac{1}{2} v \cdot dt \cdot h = \frac{1}{2} v_0 h_0 \cdot dt, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} v_0 h_0, \quad \text{d. h. konstant.}$$

Setzt man $v_0 h_0 = v \cdot h = A$, so wird

$$1) \quad \frac{dF}{dt} = \frac{A}{2} \quad \text{und} \quad dF = \frac{A}{2} dt,$$

d. h. in jedem Zeiteilchen dt wird von dem Fahrstrahl OP eine mit dt verhältnisgleiche Fläche dF beschrieben, folglich auch in gleichen endlichen Zeiten gleiche Flächen. Daher hat man den Satz:

Bei Bewegungen, bei denen die Kraft stets durch ein festes Zentrum geht, liegt die Bahnlinie in der durch das Zentrum und die Anfangsgeschwindigkeit bestimmten Ebene, und die von dem Zentrum nach dem beweglichen Massenpunkte gezogenen Fahrstrahlen beschreiben in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Die Fläche POQ kann mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen höherer Ordnung

$$2) \quad dF = \frac{1}{2} r^2 \cdot d\vartheta$$

geschrieben werden (Fig. 90). Will man diese Größe durch die rechtwinkligen Koordinaten x und y des Punktes P ausdrücken, so bedenke man, daß

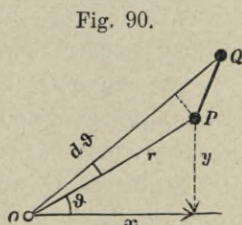


Fig. 90.

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}, \quad \text{also} \quad \vartheta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x},$$

mithin

$$d\vartheta = d\left(\arctg \frac{y}{x}\right) = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2 + y^2}$$

3) und $r^2 d\vartheta = x \cdot dy - y \cdot dx$ wird.

Im Anschluß an die Bezeichnung $ds:dt =$ Geschwindigkeit und $\omega = d\alpha:dt =$ Winkelgeschwindigkeit, nennt man $dF:dt$, d. h. die in der Zeiteinheit beschriebene Fahrstrahlfläche, die Flächengeschwindigkeit. Eine Bewegung, bei der die Kraft stets durch ein festes Zentrum geht, erfolgt also mit gleichbleibender Flächengeschwindigkeit. Der analytische Ausdruck dafür ist

$$4) \quad \frac{dF}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{dt} = \frac{A}{2},$$

wenn A eine Konstante bedeutet.

Dieser Satz rührt schon von Newton her. Ein Sonderfall ist das erste Keplersche Gesetz (S. 127).

Der hier bewiesene Satz ergibt sich auch als Sonderfall einer aus dem Grundgesetz der Beschleunigung herzuleitenden allgemeineren Beziehung zwischen Kraft, Masse und Geschwindigkeit. Ist r der veränderliche Radiusvektor eines sich unter der Wirkung einer beliebigen Kraft \mathfrak{R} bewegenden Massenpunktes m in bezug auf irgendeinen Festpunkt O , so erhält man aus der Grundgleichung der Beschleunigung in der Vektorschreibweise durch Multiplikation mit r auf äußere Art

$$5) \quad \dots \mathfrak{V}\mathfrak{R} \cdot r = \mathfrak{V}m \cdot \frac{dv}{dt} r.$$

Durch Differentiation des äußeren Produktes $\mathfrak{V}m \cdot v \cdot r$ nach der Zeit erhält man

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{V}m \cdot v \cdot r = m \left[\mathfrak{V} \frac{dv}{dt} \cdot r + \mathfrak{V}v \cdot \frac{dr}{dt} \right] = m \left[\mathfrak{V} \frac{dv}{dt} \cdot r + \mathfrak{V}v \cdot v \right],$$

weil nach S. 22 mit $\mathfrak{s} = r$, $\frac{dr}{dt} = v$ ist.

Da nun $\mathfrak{V}v \cdot v$ als äußeres Produkt zweier gleichgerichteter Vektoren den Wert Null hat, so ist auch

$$6) \quad \frac{d}{dt} \mathfrak{V}m \cdot v \cdot r = \mathfrak{V}m \cdot \frac{dv}{dt} r,$$

wonach Gl. 5 auch ergibt

$$7) \quad \dots V\mathfrak{R} \cdot \mathbf{r} = \frac{d}{dt} Vm \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}.$$

Die linke Seite der Gl. 7 stellt das statische Moment der Kraft \mathfrak{R} in bezug auf den Festpunkt O dar; auf der rechten Seite ist der Vektor $Vm \cdot \mathbf{v}$ die sogenannte Bewegungsgröße des Massenpunktes und $Vm \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$ deren statisches Moment in bezug auf O . Die letztere Größe möge hier kurz mit dem Buchstaben \mathfrak{B} bezeichnet werden. Dann schreibt sich Gl. 7 als

$$7a) \quad V\mathfrak{R} \cdot \mathbf{r} = V \frac{d\mathfrak{B}}{dt}.$$

Ist die Kraft \mathfrak{R} dauernd durch den Festpunkt O gerichtet, so liegt der oben behandelte Sonderfall vor. Das statische Moment der Kraft ist dann

$$\begin{aligned} V\mathfrak{R} \cdot \mathbf{r} &= \frac{d}{dt} Vm \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0, \text{ also} \\ Vm \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} &= C \text{ konstant und ebenso} \\ V\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} &= \frac{C}{m} = A \text{ konstant.} \end{aligned}$$

Multipliziert man beiderseits mit dt , so folgt

$$8) \quad V\mathbf{v} \cdot dt \cdot \mathbf{r} = A \cdot dt.$$

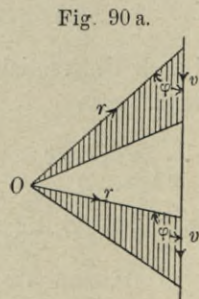
Der Ausdruck linksseits der Gl. 8 stellt ersichtlich die doppelte Fläche dF dar, die der Radiusvektor \mathbf{r} in der Zeit dt beschreibt. Gleichung 8 stimmt daher inhaltlich völlig mit Gl. 1 überein.

Setzt man nämlich $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \cdot dt}{2} = dF$ und dividiert beiderseits durch dt , so folgt

$$9) \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{2} = \frac{A}{2}.$$

Auch wenn die Kraft \mathfrak{R} zwar nicht durch den Festpunkt O gerichtet ist, aber den Wert Null hat, ist $\frac{d}{dt} Vm \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$, also $V\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = C$

(konstant). Jetzt ist auch \mathbf{v} konstant; die Bewegung geradlinig gleichförmig. Die schraffierten Dreiecksflächen (Fig. 90 a) stellen die Flächen-



geschwindigkeit dar. Ihr Inhalt, gleich $V \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{2} \left(\frac{v \cdot r \sin \varphi}{2} \right)$, ist konstant.

Gleichung 7 enthält den Flächensatz in allgemeinerer Form. Um ihn in dieser Form tunlichst kurz in Worten auszudrücken, möge die Größe $V_{m \cdot v \cdot r} = \mathfrak{B}$, d. i. das statische Moment der Bewegungsgröße $m v$ in bezug auf den Festpunkt O nach dem Vorschlage von Föppel kurz als Drall bezeichnet werden. Der der Gl. 7 entsprechende Satz lautet dann: Bewegt sich ein Massenpunkt unter der Wirkung einer Kraft, so ist die Änderungsgeschwindigkeit $\left(\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right)$ seines Dralles in bezug auf irgend einen Festpunkt O in jedem Augenblicke gleich dem statischen Moment der Kraft in bezug auf denselben Festpunkt.

Dieser Satz gilt für jede beliebig veränderliche Kraft \mathfrak{K} und demnach auch für jede beliebige Bewegung eines Massenpunktes.

2. Der Satz des Arbeitsvermögens. Potential oder Kräftefunktion; Niveauflächen.

Der Satz des Arbeitsvermögens wurde freilich im 1. Teil, Aufl. 4, S. 51 schon allgemein bewiesen; er soll hier aber noch einmal in anderer Weise entwickelt und zu weiteren Schlüssen benutzt werden.

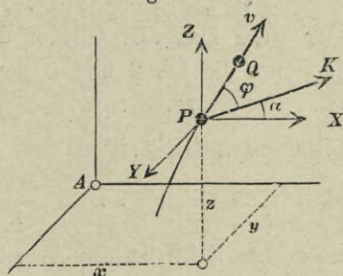
Zerlegt man die auf den Massenpunkt m wirkende Kraft K (Fig. 91) nach drei Achsenrichtungen in X , Y , Z und sind x , y , z die augenblicklichen Koordinaten von m , so ist

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X;$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y;$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z;$$

Fig. 91.



Multipliziert man diese Gleichungen bezw. mit dx , dy und dz und zählt sie zusammen, so entsteht

$$m \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = X dx + Y dy + Z dz.$$

Nun ist
$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt} = \frac{1}{2} d \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

und weil
$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

so kann man obige Gleichung auch schreiben:

1)
$$m d \left(\frac{v^2}{2} \right) = d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = X dx + Y dy + Z dz.$$

Die linke Seite ist die während der Zeit dt erfolgende Zunahme des Arbeitsvermögens (1. Teil, Aufl. 4, S. 46) des Punktes m , die rechte Seite aber die Summe der Arbeiten der drei Seitenkräfte X , Y und Z . Denn ist $PQ = ds$ das in der Zeit dt beschriebene Bahnteilchen, sind dx , dy , dz dessen Projektionen auf die Achsen, so ist nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 44 $X \cdot dx$ die von X geleistete Arbeit. Im 1. Teil, Aufl. 4, S. 45 wurde schon bewiesen, daß die Arbeitssumme von X , Y und Z gleich der Arbeit ihrer Mittelkraft K sei. Es ergibt sich dies auch leicht in folgender Weise: Sind α , β und γ die Richtungswinkel von K gegen die Achsen, also

2)
$$K \cos \alpha = X; \quad K \cos \beta = Y; \quad K \cos \gamma = Z;$$

sind ferner α_1 , β_1 und γ_1 die Richtungswinkel von ds oder v , d. h.

3)
$$ds \cdot \cos \alpha_1 = dx; \quad ds \cdot \cos \beta_1 = dy; \quad ds \cdot \cos \gamma_1 = dz;$$

und nennt man φ den Winkel, welchen K mit ds (oder v) einschließt, so gilt (vgl. 2. Teil, Aufl. 3, S. 241).

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \gamma \cdot \cos \gamma_1,$$

oder wenn man alle Glieder dieser Gleichung mit $K \cdot ds$ multipliziert und die Gl. 2 und 3 benutzt:

4)
$$K \cdot ds \cdot \cos \varphi = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz,$$

mithin nach Gl. 1:

5)
$$\dots d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = K \cdot ds \cdot \cos \varphi;$$

die rechte Seite ist die Arbeit der Kraft K , weil $ds \cdot \cos \varphi$ die in der Richtung von K zurückgelegte Wegeslänge bedeutet.

Gleichung 5 erhält man in der Vektorschreibweise mit Bezug auf Gl. 21, S. 23 kurz auch wie folgt:

Es ist allgemein

$$m \cdot \mathfrak{p} = m \cdot \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{R},$$

wobei zu bemerken, daß das Kurvendifferenzial $d\mathfrak{s}$ als gerichtete Größe gleich dem geometrischen Differenzial des Radiusvektors \mathbf{r} ist. Multipliziert man obige Gleichung beiderseits mit $d\mathbf{r}$ auf innere Art, so folgt

$$m \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot d\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \mathfrak{R} \cdot d\mathbf{r}; \text{ oder auch da } \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} = \mathbf{v}$$

$$5a) \quad \dots m \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m \frac{d(v^2)}{2} = d \frac{mv^2}{2} = \mathfrak{R} \cdot d\mathbf{r}.$$

Diese Gleichung stimmt, da $d\mathbf{r} = d\mathfrak{s}$, genau mit der Gleichung 5 überein.

Hat der Punkt m an dem Orte x_0, y_0, z_0 die Geschwindigkeit v_0 , an dem Orte x_1, y_1, z_1 die Geschwindigkeit v_1 , so ergibt sich für diese endliche Bewegung der Satz des Arbeitsvermögens

$$6) \quad \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int (Xdx + Ydy + Zdz) = \int K \cdot ds \cdot \cos \varphi.$$

Die Grenzen für die Integrationen auf der rechten Seite sind durch Anfangs- und Endlage des Punktes m bedingt. Gl. 6 ist offenbar der Satz des Arbeitsvermögens (der kinetischen Energie oder der lebendigen Kraft), d. h. es ist die Zunahme des Arbeitsvermögens gleich der verrichteten Arbeit.

Diese Beziehungen zwischen Kraft, Masse und Geschwindigkeit lassen sich sehr übersichtlich auch vermittelt des sogenannten Potentials verfolgen. Um zu diesem Begriffe zu gelangen, möge nun angenommen werden, daß die Bewegung des Massenpunktes innerhalb eines sogenannten Kraftfeldes vor sich gehe, d. h. unter der Wirkung von Kräften, die ihm bei seiner Bewegung folgen und mit seiner Lage nach einem bestimmten, zeitlich konstanten Gesetz stetig veränderlich sind, derart, daß sie an demselben Punkte immer wieder denselben Wert annehmen. Der Ursprung der Kräfte möge dahingestellt bleiben; er könnte beispielsweise in anderen Massenpunkten zu suchen sein. Auf alle Fälle soll das Kraftfeld aber so beschaffen sein, daß andere als rein mechanische Kraftwirkungen auf den Massenpunkt ausgeschlossen sind.

Hat der Massenpunkt, um dessen Bewegung es sich handelt, in irgendeiner Lage eine Geschwindigkeit \dot{v} und also unabhängig von deren Richtung ein Arbeitsvermögen (kinetische Energie) $\frac{mv^2}{2}$,

so wird auch dieser Arbeitsbetrag des Massenpunktes mit seiner Bewegung, von seiner jeweiligen Lage abhängig veränderlich sein, weil die Kräfte ständig arbeitend auf den Punkt einwirken.

Schließt in irgendeiner Lage des Punktes seine Bewegungsrichtung mit der Richtungslinie der Mittelkraft aller auf ihn wirkenden Kräfte einen Winkel φ ein, so ist, weil die Arbeit der Mittelkraft der Summe der Arbeiten ihrer Seitenkräfte gleichkommt (vgl. Teil I, Aufl. 4, S. 45), die beim Durchlaufen eines Wegelementes ds geleistete Arbeit gleich $K \cdot \cos \varphi \cdot ds$ oder in Vektorschreibweise gleich dem inneren Produkt $\mathfrak{K} \cdot d\mathfrak{s}$.

In allen Lagen des Massenpunktes, in denen $\varphi < \pi/2$ (vgl. Punkt I Fig. 92), ist die Arbeit der Kräfte positiv, findet eine Beschleunigung des Massenpunktes, eine Vermehrung seines Arbeits-

vermögens $\frac{mv^2}{2}$ statt. Gleichzeitig aber vermindert sich mit dieser

Leistung und zwar in gleichem Verhältnis die Arbeitsfähigkeit des Kraftfeldes in bezug auf den Massenpunkt, die ja bei endlichen Kräften und endlichen Bewegungen nur eine begrenzte sein kann. Diese „Arbeitsfähigkeit“ des Kraftfeldes in bezug auf den Massenpunkt pflegt man das Potential oder die potentielle Energie des Feldes in bezug auf den Punkt zu bezeichnen. Sie vermindert sich mit jeder positiven Arbeitsleistung $K \cdot \cos \varphi ds$ ($\mathfrak{K} \cdot d\mathfrak{s}$) des Feldes um einen gleichen Betrag, ist also in ihrem mechanischen Werte gleichfalls von der jeweiligen Lage des Punktes abhängig, eine Funktion seines Ortes (Kräftefunktion). Bezeichnet man diese Funktion mit V , so ist

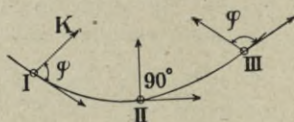
$$7) \quad dV = -K \cdot \cos \varphi ds = -\mathfrak{K} \cdot d\mathfrak{s},$$

oder ausgedrückt durch die Komponentengleichungen in einem rechtwinkligen Achsenkreuz

$$8) \quad \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx = -X \cdot dx, \quad \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy = -Y \cdot dy, \quad \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz = -Z \cdot dz.$$

Die negativen Vorzeichen rechtsseits der Gl. 7 und 8 drücken die

Fig. 92.



Abnahme des Potentials bei positiver Arbeitsleistung des Kraftfeldes aus.

Ist in irgendeiner Lage des Punktes $\varphi = \pi/2$ (vgl. Punkt II Fig. 92), seine Bahnlinie also rechtwinklig zur Richtungslinie der Mittelkraft, so ist $dV = 0$, d. h. während jetzt der Punkt ein Bahnelement ds durchläuft, leistet das Kraftfeld keine Arbeit, bleibt seine Arbeitsfähigkeit, sein Potential, unverändert; ebenso aber auch das Arbeitsvermögen des Massenpunktes. An allen den Stellen der Bahnlinie des Punktes, an denen $\varphi > \pi/2$, ist $dV > 0$, findet eine Vermehrung der Arbeitsfähigkeit des Kraftfeldes statt und zwar auf Kosten des im Massenpunkte angehäuften Arbeitsvermögens, das eine gleich große Verminderung erleidet. Nach vorstehenden Darlegungen sind also die Änderungen, welche die Arbeitsfähigkeit, das Potential, des Kraftfeldes in bezug auf den Massenpunkt und des Arbeitsvermögens des letzteren für jeden Teil seiner Bewegung erleiden, einander entgegengesetzt gleich; die Summe beider ist demnach konstant, ausgedrückt durch die Gleichung

$$V + \frac{m \cdot v^2}{2} = C \text{ (konstant).}$$

Diese wichtige Eigentümlichkeit des Summenwertes rechtfertigt es, ihm eine einheitliche Bezeichnung beizulegen. Er möge als Gesamtarbeitsvermögen oder Gesamtenergie des Massenpunktes bezeichnet werden, der als sein Träger zu gelten hat. Wenn nun auch die beiden Teile der Summe insoweit mechanisch gleichartig sind, daß sie sich durch einfache Addition zu deren konstantem Gesamtwert ergänzen können, so sind sie doch andererseits in ihrer Form und insbesondere in der Art, wie sie mit dem Massenpunkte verbunden sind, so verschieden, daß eine unterschiedliche Bezeichnung beider, wie sie weiter oben bereits eingeführt ist, zweckmäßig erscheint. Ist nun die Abhängigkeit der Funktion V , des Potentials, von der Lage des Massenpunktes entweder in bezug auf den Radiusvektor r des Punktes in der Form

$$9) \quad \dots V = F(r)$$

oder in bezug auf seine Koordinaten x , y und z in der Form

$$10) \quad V = f(x, y, z)$$

gegeben, so kann man daraus durch Differentiation auch die Kraft $K(\mathcal{R})$ des Feldes als Funktion von der Lage des Massenpunktes ableiten.

Nach Gl. 7 erhält man

$$11) \quad \dots K = -\frac{dV}{\cos \varphi \cdot ds} \quad \text{bzw. 11a)} \quad \dots \mathfrak{K} = -\frac{dV}{d\mathfrak{s}}$$

und nach den Komponentengleichungen (8)

$$12) \quad X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Mit Hilfe der Grundgleichung der Beschleunigung

$$\mathfrak{K} = m \cdot \mathfrak{p} = m \cdot \frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2}$$

erhält man aus Gl. 7

$$-\frac{dV}{d\mathfrak{s}} = m \cdot \frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2}, \quad \text{oder} \quad -dV = m \cdot \frac{d\mathfrak{s}}{dt} \cdot d\frac{d\mathfrak{s}}{dt}.$$

Beachtet man, daß $\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = v$, und integriert linksseits zwischen den Grenzen V_0 und V und rechtsseits zwischen den Grenzen v_0 und v , so erhält man

$$-V + V_0 = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2} \quad \text{oder}$$

$$13) \quad V + \frac{m \cdot v^2}{2} = V_0 + \frac{m \cdot v_0^2}{2},$$

worin V und V_0 die Potentialwerte des Kraftfeldes in bezug auf irgend zwei Lagen des Massenpunktes, v und v_0 dessen Geschwindigkeit in diesen Punkten sind. Durch Gleichung 13 wird die oben in Worten bereits allgemein ausgesprochene Wahrheit, daß die Gesamtenergie eines sich in einem Kraftfelde bewegenden Massenpunktes konstant ist, mathematisch ausgedrückt.

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man mit Hilfe der Komponentengleichungen 8, wenn man darin

$$X = m \cdot p_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad Y = m p_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad \text{usw. setzt.}$$

Durch Addition der drei Gleichungen erhält man dann

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= -m \cdot \left(\frac{dx}{dt} \cdot d\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot d\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot d\frac{dz}{dt} \right). \end{aligned}$$

Linksseits dieser Gleichung steht das vollständige (totale) Differential dV von V , rechtsseits ist

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

folglich $dV = -m(v_x \cdot dv_x + v_y \cdot dv_y + v_z \cdot dv_z)$

oder auch, da $v_x \cdot dv_x = d\frac{v_x^2}{2}$ usw.

$$dV = -\frac{m}{2} d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = -m d\frac{v^2}{2}.$$

Die Integration führt wieder zu Gl. 13.

Denkt man sich nun alle Punkte, in bezug auf die des Potential des Kraftfeldes denselben Wert V besitzt, durch eine Fläche verbunden, so erhält man eine sogenannte Niveaufläche (Äquipotentialfläche). Eine solche kann man sich auch entstanden denken, indem man den Massenpunkt von einer bestimmten Lage ausgehend auf solche Bewegungen beschränkt, deren Richtung überall rechtwinklig ist zur Richtungslinie der Mittelkraft des Kraftfeldes. Führt der Massenpunkt alle danach möglichen Bewegungen aus, so beschreibt er eine Niveaufläche; denn für alle seine Bahnelemente ds ist nach S. 107 $dV = 0$, folglich ist auch für seine Gesamtbewegung das Potential V konstant. Nur wenn die Bahnlinie des Massenpunktes die durch seine augenblickliche Lage bestimmte Niveaufläche schneidet, also seine Bewegungsrichtung mit der Richtungslinie der auf ihn wirkenden Kraft einen von $\pi/2$ abweichenden Winkel φ einschließt, ändert sich V , und zwar um so schneller, je steiler die Niveaufläche von der Bahnlinie geschnitten wird; ($dV = -K \cos \varphi \cdot ds$) am schnellsten, wenn der Schnitt rechtwinklig erfolgt $\varphi = 0$ oder $= \pi$ ist, die Bewegung in die Krafrichtung fällt, oder ihr entgegengesetzt gerichtet ist. Im ersten Falle ist $dV = -K \cdot ds$, im zweiten $dV = +K \cdot ds$.

Allgemein wird die Schnelligkeit der Änderung des Potentials mit der Bewegung des Massenpunktes ausgedrückt durch den Quotienten $\frac{dV}{ds} = -K \cdot \cos \varphi$, das sogenannte Potentialgefälle. Es ist stets gleich der Komponente der Kraft K in der Richtung, in der sich der Massenpunkt jeweils bewegt. Damit stimmen auch die Gl. 12 überein, deren rechte Seiten die Potentialgefälle in den

drei Achsrichtungen und deren linken Seiten die Seitenkräfte von K in derselben Richtung ausdrücken. Mit $\varphi = 0$ ist das Gefälle gleich $-K$, mit $\varphi = \pi$ gleich $+K$.

Denkt man sich das Feld mit Niveauflächen erfüllt und daneben mit Linien, die alle sämtliche Niveauflächen rechtwinklig schneiden, so bezeichnet man jene Linien als Kraftlinien, weil sie in jedem Punkte die Richtung der Kraft angeben.

Ist die Bewegung eines Massenpunktes in einem Kraftfelde so geregelt, daß sie in einer bestimmten Fläche erfolgen muß, so lassen sich mit Hilfe der Niveauflächen wichtige Beziehungen zwischen der Kraft und der Bewegung des Punktes erkennen. Sind beispielsweise die krummen Linien $V_0 V_0$ und VV (Fig. 93) Schnittlinien der Fläche mit den Niveauflächen V_0 und V , in bezug auf deren sämtliche Punkte das Potential den Wert V_0 bzw. V besitzt, so ist ersichtlich, daß, wenn sich der Massenpunkt auf irgendeinem Wege $B_0 B$ oder $C_0 C$ usw. von der Kurve $V_0 V_0$ nach der Kurve VV unter entsprechender Arbeitsleistung der Kraft des Feldes bewegt, das Potential sich von V_0 auf V ändert und ebenso die Geschwindigkeit des Massenpunktes von v_0 auf v . Beide Änderungen sind nach Maßgabe der Gl. 13

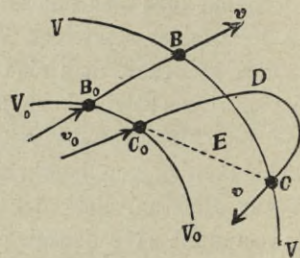
$$V_0 - V = \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) = \int_{B_0}^B K \cdot \cos \varphi \cdot ds = \int_{C_0}^C K \cdot \cos \varphi \cdot ds.$$

Würde der Massenpunkt auf irgendeinem Wege von C nach C_0 zurückkehren, also im ganzen von C_0 aus über C nach C_0 eine geschlossene Linie beschreiben, so würde er, wieder in C_0 angekommen, seine ursprüngliche Geschwindigkeit v_0 und die Kraft ihr ursprüngliches Potential V_0 wieder erlangt haben; die im ganzen von der Kraft geleistete Arbeit muß der Gleichung genügen

$$\int_{C_0}^C \text{über } D K \cdot \cos \varphi \cdot ds + \int_C^{C_0} \text{über } E K \cdot \cos \varphi \cdot ds = \int_{C_0}^{C_0} \text{über } D, C \text{ und } E K \cdot \cos \varphi \cdot ds = 0.$$

Diese Nullgleichheit des Linienintegrals der Kraft, über irgendeine geschlossene Kurve erstreckt, ist eine charakteristische

Fig. 93.



Eigentümlichkeit des Potentialbegriffes, ja geradezu die Bedingung für das Vorhandensein eines solchen im Sinne obiger Darlegungen. Das mathematische Kennzeichen für die Existenz eines Potentials in einem Kraftfelde ist die Möglichkeit der Aufstellung einer für alle Punkte des Feldes gültigen Differentialgleichung in Form der Gl. 7 oder 8.

Die Linien $V_0 V_0$ und VV sind Niveaulinien, denn die Bewegung des Massenpunktes auf ihnen erfordert keine Arbeitsleistung der Kraft, hat keine Änderung des Potentials im Gefolge.

Das bekannteste und für die technische Mechanik wichtigste Kraftfeld ist dasjenige der Anziehungskraft der Erde, das „Schwerefeld“. Steigt ein Massenpunkt mit der augenblicklichen Geschwindigkeit v_0 lotrecht aufwärts von einer Höhe h_0 bis zu einer Höhe h , in welchem Falle dauernd $\varphi = \pi$, $\cos \varphi = -1$, also $dV = -G \cdot \cos \varphi dh = Gdh$ ist, so erhält man die Potentialänderung durch Integration zwischen den Grenzen V_0 und V bzw. h_0 und h mit konstant angenommenem G zu $V - V_0 = G(h - h_0)$, somit, da $h > h_0$ positiv; die Änderung des Arbeitsvermögens im Massenpunkte aber gemäß Gl. 13 $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -(V - V_0) = -G(h - h_0)$, d. h. negativ.

Mit einer Zunahme des Potentials geht eine gleich große Abnahme des Arbeitsvermögens einher. In der höchsten Lage $h = h_1$, die der Punkt erreicht, ist $v = v_1 = 0$; der Massenpunkt hat sein anfängliches Arbeitsvermögen $\frac{mv_0^2}{2}$ völlig verloren, während gleichzeitig das Potential der Schwere auf seinen Höchstwert V_1 um $V_1 - V_0 = G(h_1 - h_0)$ angewachsen ist. Bei der Abwärtsbewegung kehren alle Vorgänge sich um, ist $\varphi = 0$, $\cos \varphi = +1$. Bis zur Höhe h_0 nehmen Potential und Arbeitsvermögen ihre anfänglichen Werte wieder an. Der Absolutbetrag des Potentialgrößtwertes V_1 hängt davon ab, welche tiefste Lage der Massenpunkt einnehmen kann, wie groß der mögliche Arbeitsweg der Schwere ist. Sobald dieser zurückgelegt ist, ist die Arbeitsfähigkeit der Schwere erschöpft, ihr Potential gleich Null und gleichzeitig ist das Arbeitsvermögen des Massenpunktes auf seinen Höchstwert gestiegen. Wäre es möglich, eine solche Öffnung durch die Erde hindurch herzustellen, daß der Massenpunkt sich unbehindert, d. h. unter der einzigen Wirkung seiner Schwere bis zum Erdmittelpunkte und beliebig darüber hinaus fortbewegen könnte, so würde damit die Schwere in ihrer größtmöglichen Ausdehnung wirksam werden.

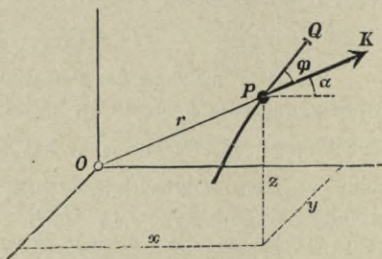
Bis zu dem Augenblicke, wo der Massenpunkt sich durch den Erdmittelpunkt hindurch bewegt, ist $\varphi = 0$, nimmt das Potential der Schwere bis auf Null ab, während die Geschwindigkeit des Massenpunktes und damit sein Arbeitsvermögen ihren Höchstwert erreicht haben. Von da ab wächst das Potential mit $\varphi = \pi$ wieder seinem Höchstwert entgegen, während v und $\frac{mv^2}{2}$ gegen Null abnehmen, worauf die Bewegungsrichtung sich wieder um-

kehrt. Dieses Spiel, der Kampf zwischen Kraft und Masse, würde sich ebenso dauernd fortsetzen, als die Bewegung des Mondes um die Erde und der Planeten um die Sonne.

Ein weiteres einfaches Beispiel für den Potentialbegriff bietet die Wirkung der Schwere auf die Bewegung des Kreispendels. Hier ist die Bewegung des Massenpunktes auf einen Kreisbogen beschränkt, in dessen tiefstem Punkte jedesmal das Potential der Schwere V gleich Null ist und v und $\frac{m v^2}{2}$ ihre Größtwerte annehmen, und in dessen höchsten Punkten V seinen Größtwert erreicht, während v und $\frac{m v^2}{2}$ gleich Null werden.

Die hier besprochenen Sonderfälle der Bewegung eines Massenpunktes unter der Wirkung seiner Schwere gehören zu der Gruppe der sogenannten Zentralbewegungen; das sind solche Bewegungen, bei denen die wirkende Kraft stets durch einen festen Punkt, das Zentrum O hindurch gerichtet ist, während zugleich die Größe der Kraft eine Funktion der Entfernung des Punktes vom Zentrum O , des sog. Fahrstrahls, ist. Ist die Kraft $K = F(r)$ und geht ihre Richtung stets durch O (Fig. 94), so ist bei einer unendlich kleinen Bewegung PQ die in der Kraftrichtung zurückgelegte Wegeslänge, d. h. die Projektion von PQ auf die Richtung von r , einfach dr , daher das Arbeitsteilchen

Fig. 94.



$$K \cdot ds \cdot \cos \varphi = K \cdot dr = F(r) \cdot dr$$

und $dV = -K \cdot dr = -F(r) dr$ ist die Differentialgleichung des Potentials, der Kräftefunktion, aus der man diese selbst erhält zu

$$14) \quad V = \int K dr + C,$$

wobei zu erwähnen, daß je nachdem $\varphi \leq \pi/2$ $\cos \varphi \geq 0$ ist, V mit wachsendem r abnimmt oder größer wird.

Die Kraftlinien sind vom Zentrum nach allen Richtungen ausgehende geradlinige Strahlen. Da diese Kraftlinien von den Niveauflächen rechtwinklig geschnitten werden müssen, so sind letztere offenbar Kugelflächen mit dem gemeinsamen Mittelpunkt O .

Sobald neben der Zentralkraft noch Reibungs- oder sogen. Mittelwiderstände auftreten, die stets entgegengesetzt der Bewegungsrichtung wirken, sich also mit der Umkehrung der Bewegung ebenfalls umkehren, gibt es kein Potential, keine Kräftefunktion, und also auch keine Niveauflächen.

3. Bewegung eines Massenpunktes unter Wirkung einer von einem Zentrum ausgehenden, mit der Entfernung von diesem verhältnismäßigen Anziehungskraft.

Da diese Bewegung eine Zentralbewegung ist, so muß sie nach S. 99 in einer ebenen Bahnlinie erfolgen, die daher auf nur zwei Achsen OX und OY bezogen zu werden braucht. Der Punkt befinde sich (Fig. 95) zu Anfang an der auf der OY befindlichen Stelle A im Abstand $OA = y_0$ vom Zentrum O und habe eine beliebig gerichtete Anfangsgeschwindigkeit c , welche in c_x und c_y zerlegt werden kann. Da c im allgemeinen nicht mit der Kraft- richtung AO zusammenfällt, so muß nach S. 98 eine krummlinige Bewegung entstehen. Dieser Fall ist eine Verallgemeinerung der S. 68 behandelten geradlinigen Schwingung, insofern die Anziehungskraft K demselben Gesetz unterworfen ist. Wir drücken deshalb K auch wieder in derselben Weise

$$1) \quad K = m \cdot k^2 \cdot r$$

aus, so daß k^2 die Beschleunigung im Abstand Eins von dem Zentrum bedeutet.

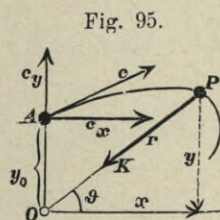
Da die Seitenkräfte von K in der Richtung der beiden Achsen im Sinne dieser Achsen negativ sind, so wird in der x -Richtung die Beschleunigung

$$p_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 r \cdot \cos \vartheta = -k^2 x,$$

weil $r \cos \vartheta = x$ ist. Entsprechendes gilt für die y -Richtung. Die beiden Beschleunigungsgleichungen

$$2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 y$$

lassen sich in diesem Falle ganz unabhängig voneinander integrieren. Wir bedürfen hier der allgemeinen Lösung der Differential-



gleichungen 2. und müssen deshalb etwas anders verfahren als auf S. 69. $\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x$ multiplizieren wir auf beiden Seiten mit $2 dx$ und schreiben

$$2 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt} = -2k^2 \cdot x \cdot dx.$$

Dies gibt, integriert:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -k^2 x^2 + e^2,$$

wo e^2 die noch unbestimmt gelassene Integrationskonstante bedeutet. Trennung der Veränderlichen führt auf

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{e^2 - k^2 x^2}} = \frac{1}{k} \frac{d\left(\frac{kx}{e}\right)}{\sqrt{1 - \frac{k^2 x^2}{e^2}}}$$

mit

$$t = \frac{1}{k} \arcsin \frac{kx}{e} + \frac{\alpha}{k},$$

worin $\frac{\alpha}{k}$ wieder eine Integrationskonstante ausdrückt. Letztere Gleichung läßt sich umschreiben in

$$\frac{k}{e} x = \sin(kt - \alpha) \quad \text{oder}$$

$$x = \frac{e}{k} \sin(kt - \alpha) = \frac{e}{k} \sin kt \cdot \cos \alpha - \frac{e}{k} \cos kt \cdot \sin \alpha$$

oder, wenn man die noch unbestimmten Konstanten

$$\frac{e}{k} \cos \alpha \quad \text{und} \quad \frac{e}{k} \sin \alpha$$

mit A bzw. $-B$ vertauscht:

$$3) \quad x = A \sin kt + B \cos kt$$

und ebenso für die andere Achsenrichtung

$$4) \quad y = C \sin kt + D \cos kt.$$

Die noch unbestimmten Werte A , B , C und D müssen aus dem Anfangszustand ermittelt werden. Für $t = 0$ ist

$$\begin{aligned} x &= 0; & y &= y_0; \\ v_x &= c_x; & v_y &= c_y. \end{aligned}$$

Aus Gl. 3 und 4 ergibt sich aber durch Differentiation:

$$5) \quad v_x = \frac{dx}{dt} = Ak \cdot \cos kt - Bk \cdot \sin kt,$$

$$6) \quad v_y = \frac{dy}{dt} = Ck \cdot \cos kt - Dk \cdot \sin kt.$$

Setzt man in die Gl. 3—6 die Anfangswerte mit $t=0$ ein, so erhält man

$$0 = A \cdot \sin 0 + B \cdot \cos 0, \text{ d. h. } 0 = B \cdot 1 \text{ oder } B = 0;$$

$$y_0 = C \cdot 0 + D \cdot 1, \text{ d. h. } D = y_0;$$

$$c_x = A \cdot k \cdot 1 - 0 \cdot k \cdot 0, \text{ d. h. } A = \frac{c_x}{k};$$

$$c_y = C \cdot k \cdot 1 - D \cdot k \cdot 0, \text{ d. h. } C = \frac{c_y}{k}.$$

Hiermit geben Gl. 3 und 4 die bestimmten Bewegungsgleichungen

$$7) \quad x = \frac{c_x}{k} \cdot \sin kt,$$

$$8) \quad y = \frac{c_y}{k} \cdot \sin kt + y_0 \cdot \cos kt.$$

Um die Gleichung der Bahnlinie zu erhalten, also t zu entfernen, muß man Gl. 7 und 8 nach $\sin kt$ und $\cos kt$ auflösen, beide quadrieren und die Summe der Quadrate gleich 1 setzen. Es wird aus Gl. 7:

$$\sin kt = \frac{k}{c_x} \cdot x$$

und, mit Einführung dieses Wertes in Gl. 8, aus dieser

$$\cos kt = \frac{y}{y_0} - \frac{c_y}{k \cdot y_0} \cdot \sin kt = \frac{y}{y_0} - \frac{c_y}{c_x \cdot y_0} \cdot x; \text{ mithin}$$

$$1 = \frac{k^2 x^2}{c_x^2} + \left(\frac{y}{y_0} - \frac{c_y}{c_x \cdot y_0} \cdot x \right)^2.$$

Dies gibt, geordnet:

$$9) \quad x^2(k^2 y_0^2 + c_y^2) + y^2 c_x^2 - 2xy c_x c_y = c_x^2 y_0^2.$$

Diese Gleichung zweiten Grades bedeutet eine Kegelschnittlinie u. zw., da

$$\begin{aligned} (k^2 y_0^2 + c_y^2) c_x^2 - (c_x \cdot c_y)^2 &= k^2 y_0^2 c_x^2 + c_x^2 \cdot c_y^2 - c_x^2 \cdot c_y^2 \\ &= k^2 y_0^2 c_x^2 > 0, \end{aligned}$$

eine Ellipse; da in Gl. 9 Glieder mit x und y allein in der ersten Potenz nicht vorkommen, so fällt der Mittelpunkt der elliptischen

Bahnlinie mit dem Zentrum O zusammen; nur liegen, wegen des mit $x \cdot y$ behafteten Gliedes, die Hauptachsen $2a$ und $2b$ der Ellipse schief gegen das Achsenkreuz, was durch die schiefe Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c verursacht wird (Fig. 96).

In der gekrümmten Bahnlinie kann die Geschwindigkeit an keiner Stelle Null werden, weil an einer solchen Stelle die Bewegung in eine geradlinige, nach O gerichtete übergehen müßte, was aber der elliptischen Bahnlinie widersprechen würde. Die Ellipse muß also in dem gleichen Umlaufsinne fortwährend durchlaufen werden. Die Zeit eines Umlaufes ist

$$10) \quad t_1 = \frac{2\pi}{k},$$

weil x, y, v_x und v_y nach der Gl. 3—6 stets wieder dieselben Werte annehmen, wenn sich der Winkel kt um 2π , also t um $2\pi:k$ geändert hat.

Die Umlaufszeit nach Gl. 10 entspricht der Dauer einer Doppelschwingung nach S. 70. Für $y_0 = 0$, d. h. für den Fall, daß der Punkt m in der Gleichgewichtslage, dem Zentrum, die Geschwindigkeit c bekommt, geht die Gl. 9 in die Gleichung einer geraden, mit der Richtung von c zusammenfallenden Linie

$$y = \frac{c_y}{c_x} \cdot x \quad \text{über.}$$

Für den einfacheren Fall, daß die Anfangsgeschwindigkeit c im Punkt A parallel der OX ist (Fig. 97), also $c_x = c$, $c_y = 0$, geht Gl. 9 über in

$$x^2 k^2 y_0^2 + y^2 c^2 = y_0^2 c^2 \quad \text{oder}$$

$$11) \quad \frac{x^2}{\left(\frac{c}{k}\right)^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1.$$

Fig. 96.

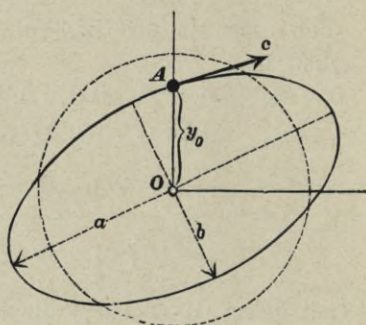
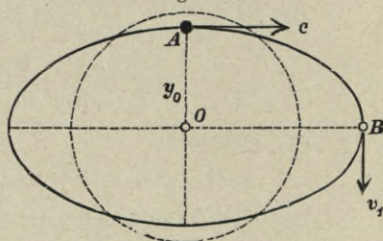


Fig. 97.



Dies ist die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf ihre Hauptachsen mit den Halbachsen

$$a = \frac{c}{k} = OB \quad \text{und} \quad b = y_0 = OA.$$

Für diese Zentralbewegung gibt es eine Kräftefunktion, welche nach Gl. 14, S. 112

$$12) \quad \dots V = mk^2 \int r \cdot dr + C = \frac{mk^2 r^2}{2} + C$$

sein muß. Der Vorzeichenunterschied ist dadurch begründet, daß die Kraft K auf S. 112 nach außen gerichtet angenommen war, hier aber den Sinn nach dem Zentrum hat, so daß bei zunehmendem r eine negative Arbeit geleistet wird, die das Arbeitsvermögen des Massenpunktes vermindert und das Potential der Kraft vermehrt. Ersteres und die Geschwindigkeit v sind in den dem Zentrum am nächsten gelegenen Punkten der Bahnlinie am größten (A Fig. 97) und in den fernsten Punkten am kleinsten (B Fig. 97). Beim Potential der Kraft ist es gerade umgekehrt.

Ist v die Geschwindigkeit in irgendeinem Punkte P der Bahnlinie, V das diesem entsprechende Potential der Kraft und V_0 dasjenige in der Anfangslage, so hat man nach Gl. 13, S. 108 mit $v_0 = c$ und unter Beachtung der Gl. 12

$$13) \quad V - V_0 = \frac{mc^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{mk^2}{2} (r^2 - y_0^2)$$

und daraus

$$14) \quad \dots v = \sqrt{c^2 - k^2(r^2 - y_0^2)}.$$

Von den Niveaueugeln (S. 112) kommen nur die Größtkreise als Niveauekreise in Betracht. An den vier Schnittpunkten der Bahnlinie mit einem solchen (in Fig. 96 und 97 punktierten) Kreise hat der Punkt m die gleiche Geschwindigkeit. Je mehr er sich vom Zentrum entfernt, desto kleiner wird seine Geschwindigkeit.

Ist in dem Falle der Fig. 97 $a = \frac{c}{k} > y_0$, also $c > k \cdot y_0$, so ist a die größere Halbachse. Am Endpunkte derselben, bei B , herrscht eine Geschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{c^2 - k^2 a^2 + k^2 y_0^2} = k \cdot y_0,$$

weil $c_2 = a^2 k^2$; es ist also, wenn man y_0 mit b vertauscht,

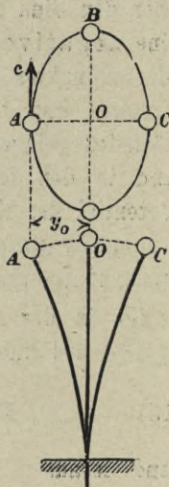
$$c = k \cdot a \quad \text{und} \quad v_1 = k \cdot b,$$

d. h. die Geschwindigkeit am Ende der einen Halbachse ist verhältnisgleich mit der Länge der anderen Halbachse. Es ist in dem Falle der Fig. 97 c die größte, v_1 die kleinste Geschwindigkeit.

Soll die Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser y_0 und daher auch mit gleichbleibender Geschwindigkeit erfolgen, so muß, weil $c = k \cdot a$ ist und $a = y_0$ werden soll, $c = k \cdot y_0$ gemacht werden,

Diese Bewegung kommt, wenigstens annäherungsweise, vor, wenn die Kraft K durch den nach allen Richtungen gleichen Biegungswiderstand eines geraden elastischen Stabes von kreisförmigem Querschnitte geliefert wird. Der Stab sei unten lotrecht eingespannt (Figur 98) und trage oben eine Kugel, die so schwer ist, daß dagegen die Masse des Stabes vernachlässigt werden kann. Bringt man die Kugel um $y_0 = OA$ aus der Gleichgewichtslage O und erteilt ihr etwa mit der Hand oder mittels eines Hammers eine Geschwindigkeit c in wagerechter Ebene, so wird der Mittelpunkt der Kugel die behandelte Ellipsenbewegung ausführen. Läßt man die Kugel einfach los ($c = 0$), so schwingt sie in einem Bogen AOC , und ihre wagerechte Seitenbewegung folgt annähernd den Gesetzen der geradlinigen Schwingung (S. 68).

Fig. 98.



4. Bewegung der Himmelskörper unter Einwirkung der Massenanziehung nach dem Newtonschen Gesetze.

Für eine von einem Zentralpunkt m_1 angezogene Masse m im Abstand r vom Zentrum kann man (nach Bd. I, Aufl. 4, S. 59) die Anziehungskraft

$$1) \quad K = \frac{k \cdot m_1 m}{r^2} = \frac{m q}{r^2}$$

schreiben. Darin bedeutet k die Anziehungskraft zwischen zwei Masseneinheiten in dem Abstand $r=1$, q die Anziehungs-

beschleunigung der Masse m im Abstand $r=1$ vom Zentrum. Zerlegt man (Fig. 99) K in $K \cos \vartheta$ und $K \sin \vartheta$, so wird, weil $r \cdot \cos \vartheta = x$, $r \cdot \sin \vartheta = y$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -q \frac{x}{r^3}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -q \frac{y}{r^3}$$

oder mit $r^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -q \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -q \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Diese Gleichungen lassen sich, weil sie beide x und y enthalten, nicht voneinander unabhängig integrieren, wie dies mit Gl. 2, S. 113 leicht geschehen konnte. Vielmehr gelangt man am bequemsten zur Gleichung der Bahnlinie, wenn man unmittelbar vom Satze der Flächen und vom Satze des Arbeitsvermögens ausgeht und zugleich Polarkoordinaten anwendet. Es ist nach Gl. 4, S. 101

$$2) \quad r^2 \cdot d\vartheta = A \cdot dt.$$

Ferner ist das Potential des Kraftfeldes nach Gl. 14, S. 112

$$\begin{aligned} V &= \int K \cdot dr + C = k \cdot m_1 m \cdot \int \frac{dr}{r^2} + C \\ &= -\frac{k \cdot m_1 m}{r} + C = -\frac{m q}{r} + C, \end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, daß der Unterschied im Vorzeichen gegenüber Gl. 14 sich aus der entgegengesetzten Kraftrichtung erklärt; das Potential wächst mit zunehmendem r .

Ist zu Anfang $r = r_0$ und $v = v_0$, so wird nach Gl. 13, S. 108

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \frac{m q}{r} - \frac{m q}{r_0}, \quad \text{also}$$

$$v^2 = \frac{2 q}{r} - \left(\frac{2 q}{r_0} - v_0^2 \right),$$

oder, wenn man den konstanten Wert

$$\frac{2 q}{r_0} - v_0^2 = h \quad \text{setzt:}$$

$$3) \quad v^2 = \frac{2 q}{r} - h.$$

Fig. 99.



Gl. 2 und 3 müssen nun so umgewandelt werden, daß man aus ihnen nach Entfernung von t die Differentialgleichung der Bahnlinie erhält.

Es ist (Fig. 100)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2, \text{ also}$$

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}{dt^2};$$

führt man hierin aus Gl. 2 den Wert

$dt = \frac{r^2}{A} d\vartheta$ ein, so wird mit Benutzung von Gl. 3:

$$\frac{2q}{r} - h = \frac{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}{r^4 d\vartheta^2} \cdot A^2,$$

oder, nach $d\vartheta$ aufgelöst:

$$4) \quad d\vartheta = \frac{A \cdot dr}{\sqrt{2qr^3 - hr^4 - A^2r^2}}.$$

Zum Zwecke der Integration setzt man $r = \frac{1}{u}$ mit $dr = -\frac{du}{u^2}$.

$$\text{dann wird } d\vartheta = -\frac{A \cdot du}{u^2 \sqrt{\frac{2q}{u^3} - \frac{h}{u^4} - \frac{A^2}{u^4}}} = -\frac{A \cdot du}{\sqrt{2qu - h - A^2u^2}}.$$

Um das Glied mit der ersten Potenz der Veränderlichen im Nenner zu entfernen, setze man $u = z + b$; dann wird

$$2qu - h - A^2u^2 = 2qz + 2qb - h - A^2z^2 - 2bA^2z - A^2b^2.$$

Man wählt nun b derartig, daß $2qz - 2bA^2z = 0$ werde, d. h.

$$5) \quad b = \frac{q}{A^2} \quad \text{und} \quad z = u - \frac{q}{A^2}.$$

Hiermit wird

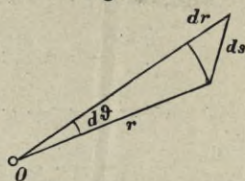
$$2qu - h - A^2u^2 = \frac{2q^2}{A^2} - h - A^2z^2 - \frac{q^2}{A^2} \quad \text{und}$$

$$d\vartheta = -\frac{A dz}{\sqrt{\left(\frac{q^2}{A^2} - h\right) - A^2z^2}}.$$

Hieraus folgt das unbestimmte Integral

$$\vartheta = \text{arc cos} \frac{Az}{\sqrt{\frac{q^2}{A^2} - h}} = \text{arc cos} \frac{\frac{A^2}{q} z}{\sqrt{1 - h \frac{A^2}{q^2}}},$$

Fig. 100.



also wegen

$$z = u - \frac{q}{A^2} = \frac{1}{r} - \frac{q}{A^2}:$$

$$\vartheta - \alpha = \arccos \frac{\frac{A^2}{qr} - 1}{\sqrt{1 - h \frac{A^2}{q^2}}},$$

worin α die Integrationskonstante bedeutet. Wird diese Gleichung nach r aufgelöst, so erhält man

$$6) \quad r = \frac{\frac{A^2}{q}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h A^2}{q^2} \cdot \cos(\vartheta - \alpha)}}.$$

Dies ist die Polargleichung eines auf seinen Brennpunkt F als Pol bezogenen Kegelschnittes.

Geht man nämlich von der Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

aus, so findet man (Fig. 101) den Brennpunkt F , indem man $BF = a$ macht. Der Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte wird bekanntlich $= a \cdot \varepsilon$ gesetzt und ε die numerische Exzentrizität des Kegelschnittes genannt (für den Kreis würde $\varepsilon = 0$ sein). Hiermit und mit

$$7) \quad b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$$

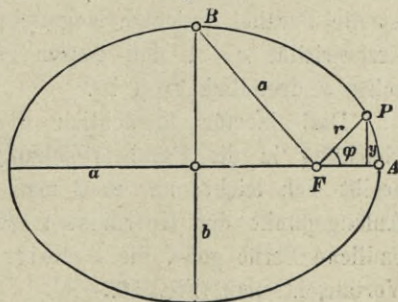
wird die Mittelpunktsgleichung

$$8) \quad y^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Ist nun F der Pol, FA die Polarachse, so gilt für einen Punkt P , dessen Polarkoordinaten φ und r sind,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{y^2 + (x - a\varepsilon)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - a^2\varepsilon^2 - x^2 + \varepsilon^2 x^2 + x^2 - 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 2a\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2} = a - \varepsilon x; \end{aligned}$$

Fig. 101.



da ferner

$$x = a \cdot \varepsilon + r \cdot \cos \varphi,$$

so wird

$$r = a - a \cdot \varepsilon^2 - \varepsilon \cdot r \cos \varphi, \text{ also}$$

9)

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos \varphi} = \frac{p}{1+\varepsilon \cos \varphi}.$$

Der Zähler $a(1-\varepsilon^2)$ ist nämlich die dem Brennpunkt F entsprechende Ordinate und werde mit p bezeichnet; denn $x = a \varepsilon$ gibt nach Gl. 8:

$$y = a(1-\varepsilon^2).$$

Bei der Ellipse ist b reell, daher $b^2 > 0$, also nach Gl. 7

$$(1-\varepsilon^2) > 0, \text{ d. h. } \varepsilon^2 < 1.$$

Die Hyperbel unterscheidet sich von der Ellipse dadurch, daß b imaginär, b^2 negativ, nach Gl. 7 somit

$$(1-\varepsilon^2) < 0, \text{ d. h. } \varepsilon^2 > 1 \text{ ist.}$$

Läßt man ε^2 durch stetige Änderung von Werten < 1 zu Werten > 1 übergehen, so hat man in dem Zwischenwert

$$\varepsilon^2 = 1$$

den Übergangsfall zwischen Ellipse und Hyperbel, der als Grenzfall sowohl der Ellipse wie der Hyperbel zugerechnet werden kann. Damit nun für $\varepsilon^2 = 1$ der Brennstrahl r in Gl. 9 nicht zu Null werde, muß offenbar $a = \infty$ sein. Daher ist die Parabel derjenige Kegelschnitt, dessen Exzentrizität $\varepsilon = 1$ und dessen große Halbachse a unendlich groß ist.

Daß hierfür tatsächlich die Ellipsengleichung in die Parabelgleichung übergeht, ergibt sich leicht; nur muß man, damit der Anfangspunkt der Koordinaten nicht in unendliche Ferne gehe, die Scheitelgleichung der Ellipse benutzen. Vertauscht man (Fig. 102) in

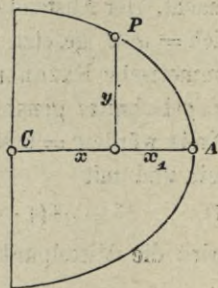
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

x mit $a - x_1$, b^2 mit $a^2(1-\varepsilon^2)$, so wird

$$\frac{(a-x_1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1$$

und daraus $y^2 = 2a(1-\varepsilon^2)x_1 - (1-\varepsilon^2)x_1^2$.

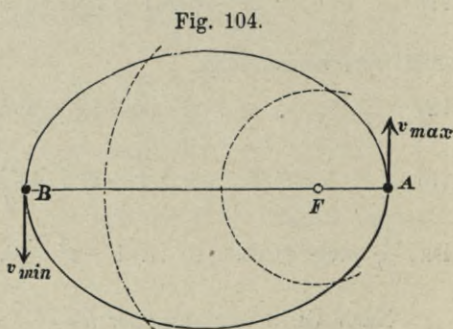
Fig. 102.



stand r vom Zentrum nur eine solche Geschwindigkeit v haben, daß $rv^2 < 2q$ ist, wenn eine elliptische Bahnlinie entstehen soll. Damit die Bahnlinie aber im besonderen kreisförmig werden könne, muß die Anziehungsbeschleunigung $\frac{q}{r^2}$ der erforderlichen Zentripetalbeschleunigung $\frac{v^2}{r}$ gleich sein, d. h. $rv^2 = q$. Für $rv^2 = 2q$ wird $h = 0$, $\varepsilon^2 = 1$, die Bahnlinie eine Parabel; für $rv^2 > 2q$ wird $h < 0$, $\varepsilon^2 > 1$, die Bahnlinie eine Hyperbel; oder, zusammengestellt, die Bahnlinie wird

$$14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{ein Kreis} & \text{für } v^2 r = q, \\ \text{eine Ellipse} & \text{„ } v^2 r < 2q, \\ \text{„ Parabel} & \text{„ } v^2 r = 2q, \\ \text{„ Hyperbel} & \text{„ } v^2 r > 2q. \end{array} \right.$$

Bekommt also der Massenpunkt m in einem Abstand r vom Zentrum die Geschwindigkeit v etwa durch einen Stoß, eine Explosion oder dergl., so hängt es nur von der Größe der Geschwindigkeit ab, ob er eine geschlossene Ellipse mit dem Zentrum als Brennpunkt beschreibt, oder in einer hyperbolischen Bahnlinie in unendliche Ferne geht. Diese Fälle einer elliptischen Bahnlinie unterscheiden sich von der auf S. 113 behandelten elliptischen Bewegung dadurch, daß das Zentrum dort den Mittelpunkt, jetzt aber den einen Brennpunkt der Ellipse bildet, daß also die Niveaureise eine völlig andere Lage gegen die Bahnlinie haben (vgl. Fig. 104 mit Fig. 97). Da



$$v^2 = \frac{2q}{r} - h$$

(Gl. 3) ist, so wird die Geschwindigkeit am größten für r_{min} , d. h. in der Zentrumsnähe bei A , am kleinsten für r_{max} , d. h. in der Zentrumsferne bei B .

Umlaufszeit.

Die Zeit, in welcher die elliptische Bahnlinie einmal durchlaufen wird, ergibt sich einfach aus dem Satze der Flächen, Gl. 4, S. 101:

$$dF = \frac{1}{2} A \cdot dt, \text{ daher}$$

$$F = \frac{1}{2} A \cdot t \text{ oder}$$

$$t = \frac{2F}{A},$$

wenn F die ganze während eines Umlaufes von dem Fahrstrahle beschriebene Fläche der Ellipse ist. Da nun $F = a \cdot b \cdot \pi$; $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ und nach Gl. 11 $A = \sqrt{a q (1-\varepsilon^2)}$, so wird

$$15) \quad t = \frac{2 a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} \pi}{\sqrt{a q (1-\varepsilon^2)}} = 2 \pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{q}}.$$

Der Mittelpunkt der Erde als Zentrum.

Jeder Punkt außerhalb der Erde erfährt von dieser eine Anziehungskraft, welche nach Gl. 1

$$K = \frac{m q}{r^2}$$

zu setzen ist. Nennen wir nun den Halbmesser der Erde R , so wird für $r = R$ die Kraft $K = m g$, dem Gewicht eines Massenpunktes an der Erdoberfläche. Daraus folgt $m g = \frac{m q}{R^2}$, d. h.

$$16) \quad q = g R^2$$

für die Erde als Zentralkörper.

Hat ein Massenpunkt m in der Nähe der Erdoberfläche, d. h. für $r = R$, eine Geschwindigkeit v , so führt er eine Bewegung in einer Kegelschnittlinie aus, deren einer Brennpunkt in dem Erdmittelpunkte liegt. Da für diesen Fall

$$\frac{q}{r} = \frac{g R^2}{R} = g R = 9,81 \cdot 6\,370\,000 = 62\,490\,000,$$

so wird die Bahnlinie nach Gl. 14

$$17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{ein Kreis} & \text{für } v = \sqrt{g R} = 7\,905 \text{ m/s.} \quad (\text{vgl. S. 72}); \\ \text{eine Ellipse} & \text{„ } v < \sqrt{2 g R} = 11\,179 \text{ m/s.}; \\ \text{„ Parabel} & \text{„ } v = \sqrt{2 g R} = 11\,179 \text{ m/s.}; \\ \text{„ Hyperbel} & \text{„ } v > \sqrt{2 g R} = 11\,179 \text{ m/s.} \end{array} \right.$$

Die gewöhnlichen Wurfbewegungen geschehen hiernach in Ellipsen, und zwar befindet sich der entferntere Brennpunkt im Mittelpunkte M der Erde (Fig. 105), während der andere Brennpunkt F in geringer Tiefe unter dem Anfangspunkt A der Bewegung liegt.

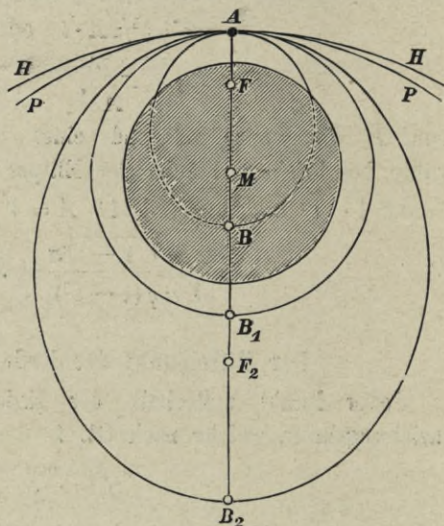
Hiernach ist die Wurfbewegung, die im 1. Teil, Aufl. 4, S. 52 als parabolisch bezeichnet wurde, richtiger eine elliptische zu nennen. Betrachtet man aber, wie es dort geschah, die Fallbeschleunigung als unveränderlich nach Größe und Richtung, so wird dadurch der Erdradius als unendlich groß gegenüber der Länge der Bahnlinie eingeführt; dann ist auch die Halbachse a der Ellipse unendlich, und es wird die Ellipse nach S. 122 gleichbedeutend mit der Wurfparabel.

Wird die wagerecht gedachte Anfangsgeschwindigkeit größer und größer, so rückt der Brennpunkt F mehr und mehr nach M hin und fällt bei $v = 7905$ mit ihm zusammen; in diesem Fall ist die Bahnlinie der Kreis AB_1 . Bei weiterer Zunahme von v rückt F über M hinaus, etwa nach F_2 , und der Erdmittelpunkt M ist der dem Ausgangspunkt A nähere Brennpunkt der elliptischen Bahnlinie, welche sich nun bei B_2 weit von der Erde entfernen kann, aber immer noch wieder nach A zurückführt. Eine parabolische und hyperbolische Bahnlinie PAP und HAH für $v \geq 11179$ sind in der Figur ebenfalls angedeutet.

Der Mittelpunkt der Sonne als Zentrum

Die Bewegung der Planeten und Kometen des Sonnensystems erfolgt unter Einwirkung einer von der Sonne ausgehenden An-

Fig. 105.



ziehungskraft $K = m q : r^2$. Weil nun allgemein (Bd. I, Aufl. 4, S. 59)

$$18) \quad K = k \frac{m m_1}{r^2} = \frac{m q}{r^2}$$

ist, so muß mit m_1 als Sonnenmasse,

$$q = k m_1,$$

d. h. nur von der Sonnenmasse abhängig sein. Mithin ist für alle die Sonne umlaufenden Planeten und Kometen q eine und dieselbe Größe. Sind daher für zwei dieser Himmelskörper, deren Bahnlinien geschlossene Kurven bilden, a und a_1 die Halbachsen der Ellipsen, t und t_1 ihre Umlaufzeiten, so wird nach Gl. 15

$$19) \quad \frac{t}{t_1} = \frac{a^{3/2}}{a_1^{3/2}}; \quad \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{a^3}{a_1^3}.$$

Die vorstehenden Ergebnisse enthalten die von Kepler (geb. 1571 in Weil (Württemberg), gest. 1630 in Regensburg) im Jahre 1618 aufgestellten Gesetze der Planetenbewegung, welche in etwas abgeänderter Form folgendermaßen lauten:

1. Die Mittelpunkte der Planeten bewegen sich in ebenen Kurven, deren Ebenen durch den Sonnenmittelpunkt gehen; der vom Mittelpunkt der Sonne nach dem Mittelpunkte eines Planeten gezogen gedachte Fahrstrahl beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
2. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, deren einer Brennpunkt der Mittelpunkt der Sonne ist.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen.

Das erste Gesetz sagt aus, daß die Planeten Zentralbewegungen ausführen mit der Sonne als Zentralkörper (s. S. 100).

Das zweite Gesetz folgt aus der Annahme einer mit r^2 umgekehrt proportionalen Anziehungskraft. Für die auf S. 113 behandelte Bewegung, bei der K mit r direkt proportional war, ergab sich zwar auch eine elliptische Bahn, doch lag dort das Zentrum im Mittelpunkte der Ellipse, während es jetzt in dem einen Brennpunkte sich befindet.

Das dritte Gesetz ist der Inhalt der Gl. 19, welche entstand, indem man q für alle Planeten als von gleicher Größe annahm.

Kepler folgerte diese Gesetze aus seinen und Tycho de Brahes (geb. 1546 in Knudstrup (Dänemark), gest. 1601 in Prag) Beobachtungen und gab damit eine Beschreibung der vorhandenen Bewegungen, die er aus den sehr verwickelten scheinbaren Bewegungen in bezug auf die Erde abgeleitet hatte. Die mechanische Entwicklung erfolgte erst 67 Jahre später durch Newton, der eben aus den nach den Keplerschen Gesetzen erfolgenden Bewegungen die Ursache derselben, nämlich die Massenanziehung nach Gl. 18, folgerte.

Verhältnis der Masse der Sonne zu der eines Planeten.

Gl. 15 gibt die Möglichkeit, die Masse der Sonne mit derjenigen eines Planeten zu vergleichen, falls letzterer von einem Mond umkreist wird. Beziehen sich nämlich q , a und t auf den Umlauf eines Mondes um seinen Planeten, q_1 , a_1 und t_1 auf den Umlauf des Planeten um die Sonne, so ist nach Gl. 15

$$t^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{q}; \quad t_1^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{a_1^3}{q_1}; \quad \text{daher}$$

$$20) \quad \frac{q_1}{q} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_1}{a}\right)^3;$$

das gleiche Verhältnis gilt nach Gl. 18 auch für die Massen der Zentralkörper, d. h. der Sonne und des Planeten.

Die große Halbachse a_1 der Erdbahn ist 398,87 mal so groß wie die große Halbachse a der Mondbahn; die Umlaufzeit der Erde ist $t_1 = 365,26$ Tage, die des Mondes $t = 27,32$ Tage. Hiermit wird

$$\frac{q_1}{q} = \left(\frac{27,32}{365,26}\right)^2 \cdot 398,87^3 = 355\,000,$$

d. h. die Masse der Sonne ist 355 000 mal so groß wie die der Erde.

Für die Erde als Zentralkörper war $q = g \cdot R^2 = 9,81 \cdot 6\,370\,000^2$ (Gl. 16); für die Sonne als Zentralkörper wird hiernach

$$q_1 = 355\,000 \cdot 9,81 \cdot 6\,370\,000^2 = 1\,413 \cdot 10^{17}.$$

Sollte die Erde in einem Abstand $r = 148\,472 \cdot 10^6$ Meter von der Sonne (dies ist etwa die große Halbachse der Erdbahn) sich kreisförmig bewegen, so müßte sie nach Gl. 14 eine Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{q_1}{r}} = \left(\frac{1413 \cdot 10^{17}}{148\,472 \cdot 10^6}\right)^{1/2} = 30\,850 \text{ m/s. haben.}$$

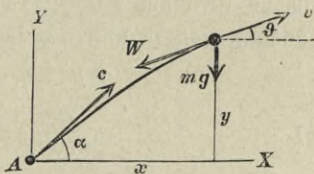
Diese Bedingung ist wirklich nahezu erfüllt, und daher ist die Bahn der Erde nur sehr wenig exzentrisch; die beiden Achsen der Ellipse verhalten sich wie 7001:7000. Wäre die Geschwindigkeit $\sqrt{2}$ mal größer, so würde die Bahnlinie nicht mehr geschlossen sein können.

5. Wurfbewegung mit Luftwiderstand.

Legt man durch die Anfangsgeschwindigkeit c der Bewegung eine lotrechte Ebene, nimmt in dieser die AX wagerecht, die AY lotrecht nach oben, so muß die Bewegung in der Ebene XAY (Fig. 106) erfolgen, weil dieselbe die Anfangsgeschwindigkeit, sowie auch die Kräfte mg und den Widerstand $W = mg \cdot v^2 : k^2$ enthält (s. S. 89).

Es ergibt sich dann, wenn ϑ der Neigungswinkel der Bahn an beliebiger Stelle ist,

Fig. 106.



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{W}{m} \cos \vartheta = -\frac{g}{k^2} v^2 \cdot \cos \vartheta$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{W}{m} \sin \vartheta = -g \left(1 + \frac{v^2}{k^2} \cdot \sin \vartheta \right).$$

Setzt man nun

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad \cos \vartheta = \frac{dx}{ds}; \quad \sin \vartheta = \frac{dy}{ds}, \quad \text{so wird}$$

$$1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{k^2} \frac{ds}{dt} \frac{dx}{ds} \quad \text{und}$$

$$2) \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{ds}{dt} \frac{dy}{ds} \right).$$

Schreibt man Gl. 1:

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt} \right)}{\left(\frac{ds}{dt} \right)} = -\frac{g}{k^2} ds,$$

so folgt

$$\mathfrak{L}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{g}{k^2}s + \mathfrak{L}(c \cdot \cos \alpha) \quad (\text{weil } \frac{dx}{dt} = c \cdot \cos \alpha \text{ f\u00fcr } s = 0) \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\frac{dx}{dt}}{c \cdot \cos \alpha}\right) = -\frac{g}{k^2}s, \quad \text{oder}$$

$$3) \quad \frac{dx}{dt} = v_x = c \cdot \cos \alpha \cdot e^{-\frac{g}{k^2}s}.$$

F\u00fchrt man f\u00fcr die weitere Behandlung die Hilfsgr\u00f6\u00dfe

$$\varphi = \frac{dy}{dx}$$

ein, so wird aus $dy = \varphi \cdot dx$, wenn man nach dt differenziert und bedenkt, da\u00df φ und dx beide von t abh\u00e4ngen:

$$d^2y = \varphi \cdot d^2x + dx \cdot d\varphi, \quad \text{also}$$

$$4) \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Aus Gl. 2 wird aber, wenn man auch darin $dy = \varphi \cdot dx$ setzt:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{g}{k^2} \frac{ds}{dt} \varphi \cdot \frac{dx}{dt},$$

oder, weil nach Gl. 1:

$$-\frac{g}{k^2} \frac{ds}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + \varphi \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Verbindet man dies mit Gl. 4, so erh\u00e4lt man

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

also, wenn man beiderseits mit $dx:dt$ dividiert:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

woraus wegen Gl. 3 entsteht:

$$5) \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{g}{c^2 \cos^2 \alpha} \cdot e^{\frac{2g}{k^2}s}.$$

Die weitere Behandlung der Aufgabe ist nur mittels zeichnerischer Flächenermittelung oder mittels Hilfstabellen möglich. Ein näheres Eingehen auf diesen für die Militärwissenschaft sehr wichtigen Gegenstand liegt außerhalb des Rahmens dieses Buches. Es möge hier auf das Kompendium der theoretischen äußeren Ballistik, von Professor Dr. Cranz (Stuttgart), 1896, Verlag von B. G. Teubner (Leipzig) verwiesen werden.

Besonderer Fall einer flachen Wurfbahn.

Eine annähernde Lösung in geschlossener Form ergibt sich für flache Wurfbahnen, bei denen man die Bogenlängen mit ihren wagerechten Projektionen vertauschen, also $ds = dx$; $s = x$; $\cos \alpha = 1$; $\cos \vartheta = 1$; $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$; $\operatorname{tg} \vartheta = \varphi = \vartheta$ setzen darf. Dann ergibt Gl. 3:

$$6) \quad v_x = \frac{dx}{dt} = c \cdot e^{-\frac{g}{k^2}x}, \text{ also}$$

$$dt = \frac{1}{c} \cdot e^{\frac{g}{k^2}x} \cdot dx \quad \text{und daraus}$$

$$7) \quad t = \frac{k^2}{c \cdot g} \left(e^{\frac{g}{k^2}x} - 1 \right), \quad \text{oder}$$

$$8) \quad x = \frac{k^2}{g} \cdot \vartheta \left(1 + \frac{g \cdot c}{k^2} t \right).$$

Aus Gl. 5 wird

$$d\varphi = d\vartheta = -\frac{g}{c^2} e^{\frac{2g}{k^2}x} dx \quad \text{und gibt}$$

$$9) \quad \vartheta = \alpha - \frac{k^2}{2c^2} \left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1 \right);$$

$$\text{daher} \quad dy = \vartheta \cdot dx = \alpha \cdot dx - \frac{k^2}{2c^2} \left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1 \right) dx$$

und durch Integration

$$10) \quad y = x \left(\alpha + \frac{k^2}{2c^2} \right) - \frac{k^4}{4gc^2} \left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1 \right).$$

Setzt man $y = 0$ und $x =$ der Wurfweite l , so wird aus Gl. 10, wenn man nach dem Steigungswinkel α auflöst:

$$11) \quad \alpha = \frac{k^4}{4g \cdot c^2 l} \left(e^{\frac{2g}{k^2} l} - 1 \right) - \frac{k^2}{2c^2}.$$

Für den Scheitelpunkt C der Bahnlinie (Fig. 107) sei $x = b$, $y = h$; die Bedingung dafür ist $\vartheta = 0$; hiermit gibt Gl. 9, nach $x = b$ aufgelöst:

$$12) \quad b = \frac{k^2}{2g} \ln \left(1 + \frac{2c^2}{k^2} \alpha \right).$$

Die Pfeilhöhe h der Wurfbahn findet man, indem man den Zahlenwert von b in die Gl. 10 der Bahnlinie einsetzt; es ist dann $h = y$.

Die Zeiten t_1 und t_2 , nach denen der Massenpunkt in C bzw. B angelangt ist, ergeben sich, wenn man in Gl. 7 für x die Werte b bzw. l einführt.

Beispiel: Eine Kruppsche Kanone von 0,305 m lichter Weite, also 0,07306 qm Öffnungsquerschnitt, schießt Granaten von 1 m Länge und 455 kg Gewicht. Die Granate hat eine annähernd kegelförmige Spitze, deren Kegelseite mit der Achse einen Winkel ε bildet, u. zw. ist ungefähr $\sin \varepsilon = 0,5$. Dann beträgt der Luftwiderstand nach Bd. II, Aufl. 3, S. 373, Gl. 13 bei einer Geschwindigkeit v

$$W = 0,83 \frac{\gamma}{g} F v^2 \sin \varepsilon,$$

oder mit $\gamma = 1,2$; $F = 0,07306$; $\sin \varepsilon = 0,5$:

$$W = 0,00371 \cdot v^2.$$

Für $W = mg = 455$ wird $v = k$ (Gleichgewichtsgeschwindigkeit), also

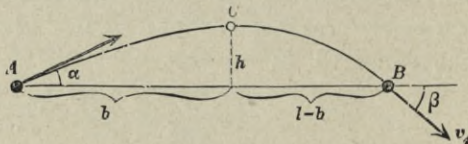
$$k = \sqrt{\frac{455}{0,00371}} = 350 \text{ m/s.}$$

Für eine Wurfweite $l = 8460$ m sollen der Höhenwinkel (Steigungswinkel) α und die Einzelseiten der Bewegung berechnet werden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $c = 630$ m/s.

Gl. 11 liefert für den Steigungswinkel $\alpha = 0,1740 = \text{rund } 10^\circ$, was mit dem Schießversuch übereinstimmt. Für die Gesamtdauer t_2 des Wurfes gibt Gl. 7 mit $x = 8460$:

$$t_2 = 19,14 \text{ s.}$$

Fig. 107.



Die Geschwindigkeit $v = v_x$ bei B (Fig. 107) wird nach Gl. 6:

$$v_x = 630 \cdot e^{-\frac{g l}{k^2}} = 320 \text{ m/s.};$$

die Neigung β der Bahn nach Gl. 9:

$$\beta = -0,270 = -15,5^\circ.$$

Der Scheitelpunkt der Bahn liegt nach Gl. 12 um $b = 4251 \text{ m}$ vom Ausgangspunkt entfernt und nach Gl. 10 in einer Höhe $h = 462 \text{ m}$. Die Zeit, nach welcher dieser Scheitelpunkt erreicht wird, beträgt nach Gl. 7: $t_1 = 9,12 \text{ s.}$; der abfallende Teil der Bahnlinie von 3739 m wagerechter Projektion wird in $t_2 - t_1 = 10,02 \text{ s.}$ zurückgelegt.

C. Bewegung eines Massenpunktes auf vorgeschriebener Bahnlinie.

Bei den vorstehenden Untersuchungen war der Massenpunkt nur gegebenen Kräften unterworfen und führte unter deren Einwirkung mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit eine freie Bewegung aus. Ist der Massenpunkt aber mit festen, unbeweglichen Körpern in Berührung, die ihm für seine Bewegung eine bestimmte Bahnlinie vorschreiben, ihn auf diese beschränken, so kann man diesen Zwang, diese Einwirkung auf die Bewegung des Punktes, durch eine Widerstandskraft ausdrücken. Nachdem diese Widerstandskraft an dem Massenpunkt angebracht ist, kann seine Bewegung wie eine freie Bewegung behandelt werden.

Der Widerstand der vorgeschriebenen Bahnlinie kann zerlegt werden in einen **Normalwiderstand** N (rechtwinklig zur Bahnlinie) (vgl. Bd. I, Aufl. 4, S. 71) und eine tangential gerichtete Kraft, den **Reibungswiderstand** $f \cdot N$, dessen Sinn stets der Bewegung entgegengesetzt ist (vgl. 1. Teil, Aufl. 4, S. 235); darin bedeutet f die Reibungsziffer (den Reibungskoeffizienten).

Der Normalwiderstand N ist zunächst unbekannt hinsichtlich seiner Größe, seiner Richtung innerhalb der zur Bahnlinie winkelrechten Ebene und seines Sinnes; er tritt in solcher Größe und

Richtung, in solchem Sinne auf, wie erforderlich ist, damit der Massenpunkt sich längs der vorgeschriebenen Bahn bewege. N ist daher von der Form der Bahnlinie, von den gegebenen bewegenden Kräften K und der Anfangsgeschwindigkeit abhängig.

Während in den Fällen der freien Bewegung sämtliche Kräfte gegeben waren, die Form der Bahnlinie und die Bewegung in derselben gesucht wurden, so bleibt in den Fällen der Bewegung auf vorgeschriebener Bahn die Aufsuchung dieser letzteren natürlich fort; es sind aufzusuchen der Normalwiderstand N und das Gesetz der Bewegung längs der Bahn. Es ist dazu erforderlich, die Kräfte nach tangentialer und normaler Richtung zu zerlegen und die Werte der Tangential- und Zentripetalbeschleunigung (s. S. 20) zu benutzen.

1. Bewegung eines Massenpunktes längs einer in lot-rechter Ebene befindlichen Kreislinie unter Berücksichtigung der Reibung.

Der Massenpunkt m habe im tiefsten Punkt A des Kreises (Fig. 108) die Geschwindigkeit c . An der durch den Winkel ϑ bestimmten Stelle P sei die Geschwindigkeit v ; es wirken die Kräfte mg , N und, der Bewegung entgegen, $f \cdot N$.

Als gesamte Zentripetalkraft ergibt sich $N - mg \cos \vartheta$, als Tangentialkraft im Sinne der Bewegung $-mg \sin \vartheta - fN$.

Daher wird nach S. 20

$$m \cdot p_t = -mg \sin \vartheta - fN \quad \text{oder}$$

$$1) \quad p_t = \frac{dv}{dt} = -g \sin \vartheta - f \frac{N}{m};$$

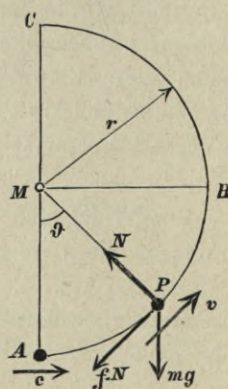
$$p_n = \frac{v^2}{r} = \frac{N}{m} - g \cos \vartheta, \quad \text{also}$$

$$\frac{N}{m} = \frac{v^2}{r} + g \cos \vartheta$$

und hiermit aus Gl. 1:

$$\frac{dv}{dt} = -g (\sin \vartheta + f \cos \vartheta) - f \frac{v^2}{r}.$$

Fig. 108.



Multipliziert man mit

$$2v \cdot dt = 2ds = 2r \cdot d\vartheta,$$

so ergibt sich die Gleichung

$$2) \quad 2v \cdot dv = -2gr(\sin \vartheta + f \cdot \cos \vartheta) d\vartheta - 2f \cdot v^2 d\vartheta,$$

aus der das Bewegungsgesetz entwickelt werden kann.

Setzt man behufs der Lösung vorübergehend

$$3) \quad v^2 = y; \quad \vartheta = x,$$

so nimmt Gl. 2 die Form an:

$$\frac{dy}{dx} = -2gr(\sin x + f \cdot \cos x) - 2f \cdot y \quad \text{und mit}$$

$$4) \quad 2gr(\sin x + f \cdot \cos x) = X:$$

$$5) \quad \frac{dy}{dx} = -X - 2fy.$$

Zur Integration dieser Gleichung wird

$$6) \quad y = u \cdot v, \quad \text{also} \quad dy = u \cdot dv + v \cdot du$$

eingeführt, wodurch entsteht:

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} = -X - 2f \cdot u \cdot v, \quad \text{oder}$$

$$7) \quad u \left(\frac{dv}{dx} + 2f \cdot v \right) + v \frac{du}{dx} = -X.$$

Man wählt nun den einen Faktor v in $u \cdot v = y$ derartig, daß in Gl. 7 das erste Glied verschwinde, d. h.

$$\frac{dv}{dx} = -2f \cdot v, \quad \text{was}$$

$$8) \quad v = C \cdot e^{-2fx} \quad \text{bedingt.}$$

Dann wird aus Gl. 7:

$$du = -\frac{X \cdot dx}{v} = -\frac{X \cdot e^{2f \cdot x} dx}{C}, \quad \text{also}$$

$$9) \quad u = C_1 - \frac{1}{C} \int e^{2f \cdot x} X \cdot dx;$$

und aus Gl. 6 mit Hilfe von Gl. 8 und 9:

$$y = u \cdot v = C \cdot C_1 \cdot e^{-2f \cdot x} - e^{-2f \cdot x} \int e^{2f \cdot x} \cdot X \cdot dx,$$

oder wenn man $C \cdot C_1 = A$ und für X den Wert (Gl. 4) wieder einführt:

$$10) \quad y = A \cdot e^{-2f \cdot x} - 2gr \cdot e^{-2f \cdot x} \int (\sin x + f \cdot \cos x) e^{2f \cdot x} dx.$$

Die beiden, nach Auflösung der Klammer im letzten Gliede entstehenden Integrale ermittelt man durch sog. teilweise Integration. Um

$$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx$$

zu finden, setzt man vorübergehend

$$u_1 = e^{2f \cdot x}; \quad dv_1 = \sin x \cdot dx; \quad \text{dann ist}$$

$$du_1 = 2f \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx; \quad v_1 = -\cos x, \quad \text{daher}$$

$$11) \quad \int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx = u_1 \cdot v_1 - \int v_1 \cdot du_1 = -\cos x \cdot e^{2f \cdot x} + 2f \int \cos x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx.$$

Nunmehr wird geschrieben

$$u_2 = e^{2f \cdot x}; \quad dv_2 = \cos x \cdot dx; \quad \text{dann ist}$$

$$du_2 = 2f \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx; \quad v_2 = \sin x, \quad \text{mithin}$$

$$\int \cos x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx = u_2 \cdot v_2 - \int v_2 \cdot du_2 = \sin x \cdot e^{2f \cdot x} - 2f \int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx.$$

Die Einführung dieser Gleichung in Gl. 11 ergibt

$$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx = -\cos x \cdot e^{2f \cdot x} + 2f \sin x \cdot e^{2f \cdot x} - 4f^2 \int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx, \quad \text{somit}$$

$$12) \quad \int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx = \frac{e^{2f \cdot x}}{1 + 4f^2} (2f \cdot \sin x - \cos x).$$

In derselben Weise findet man

$$13) \quad \int \cos x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx = \frac{e^{2f \cdot x}}{1 + 4f^2} (2f \cdot \cos x + \sin x).$$

Mit Hilfe dieser Werte wird Gl. 10, wenn man zugleich wieder y mit v^2 , ϑ mit x vertauscht,

$$14) \quad v^2 = e^{-2f \cdot \vartheta} \left\{ A + 2gr \frac{e^{2f \cdot \vartheta}}{1 + 4f^2} [(1 - 2f^2) \cos \vartheta - 3f \sin \vartheta] \right\}.$$

Setzt man zur Ermittlung von A die Geschwindigkeit $v = c$ für $\vartheta = 0$, also

$$c^2 = 1 \left\{ A + 2gr \frac{1}{1 + 4f^2} (1 - 2f^2) \right\},$$

so ergibt sich $A = c^2 - \frac{2gr}{1 + 4f^2} (1 - 2f^2)$, also Gl. 14:

$$15) \quad v^2 = \frac{2gr}{1 + 4f^2} \left\{ (1 - 2f^2) \cos \vartheta - 3f \cdot \sin \vartheta \right\} + \left\{ c^2 - \frac{2gr}{1 + 4f^2} (1 - 2f^2) \right\} e^{-2f \cdot \vartheta}.$$

Soweit läßt sich die Aufgabe in einfacher Weise behandeln.

Des weiteren $v = r \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ zu setzen und daraus t als $f(\vartheta)$ zu entwickeln, ist in geschlossener Form nicht möglich.

Gl. 15 gibt die Geschwindigkeit v für jeden Wert von ϑ , d. h. für jede Stelle des Kreises. Auch kann man berechnen, wie groß die Anfangsgeschwindigkeit c genommen werden muß, damit der Punkt an einer bestimmten Stelle α mit der Geschwindigkeit Null anlange. Mit $v=0$, $\vartheta=\alpha$ ergibt nämlich Gl. 15:

$$16) \quad c^2 = \frac{2gr}{1+4f^2} \left\{ 1 - 2f^2 - \left[(1 - 2f^2) \cos \alpha - 3f \cdot \sin \alpha \right] e^{2f \cdot \alpha} \right\}.$$

(Für $f=0$ wird $c^2 = 2gr(1 - \cos \alpha)$.)

Soll der Punkt gerade noch den Punkt B (Fig. 108) erreichen, so wird mit $\alpha = 90^\circ$:

$$17) \quad c_1^2 = \frac{2gr}{1+4f^2} \left\{ 1 - 2f^2 + 3f \cdot e^{f\pi} \right\},$$

während der Endpunkt C (mit $\alpha = \pi$) die Geschwindigkeit c_2 bedingt, wobei

$$18) \quad c_2^2 = \frac{2gr}{1+4f^2} \left\{ 1 - 2f^2 + (1 - 2f^2) e^{2f\pi} \right\} = \frac{2gr}{1+4f^2} (1 - 2f^2) (1 + e^{2f\pi})$$

ist.

Der Massenpunkt erlangt bei der Abwärtsbewegung die ursprüngliche Geschwindigkeit nicht wieder, da die Reibung mit der Umkehrung des Bewegungssinnes ebenfalls ihren Sinn wechselt, d. h. keine Funktion des Ortes ist, keiner Kräftefunktion entspricht (s. S. 91).

Beispiel: Für $f=0,1$ wird (Gl. 17)

$$c_1^2 = 1,337 \cdot 2gr; \quad c_1 = 1,156 \sqrt{2gr};$$

$$(Gl. 18) \quad c_2^2 = 2,70 \cdot 2gr = 1,35 (4gr); \quad c_2 = 1,162 \sqrt{4gr}.$$

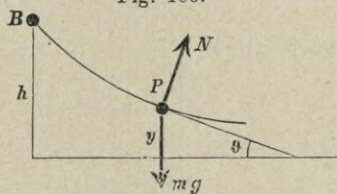
2. Reibungslose Bewegung eines Massenpunktes unter Einwirkung der Schwere auf einer in lotrechter Ebene befindlichen Bahnlinie.

In diesem Falle verrichtet nur die Schwere eine Arbeit, so daß wagerechte Linien Niveaulinien darstellen (s. S. 111).

Liegt die Stelle B , an der die Bewegung mit der Geschwindigkeit Null begann, um h über der x -Achse, so gilt für die Geschwindigkeit v in der Höhe y :

$$v^2 = 2g(h - y).$$

Fig. 109.



Hat die Bahnlinie hier die Neigung ϑ gegen die Wagerechte, so muß

$$\frac{mv^2}{\rho} = N - mg \cos \vartheta, \text{ also}$$

$$N = mg \cos \vartheta + \frac{2mg}{\rho} (h - y) \text{ oder}$$

$$1) \quad N = mg \left(\cos \vartheta + 2 \frac{h - y}{\rho} \right) \text{ sein.}$$

Für die Bewegung findet man

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(h - y)}, \text{ also}$$

$$2) \quad dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{\sqrt{h - y}}.$$

3. Das Kreispendel.

Im 1. Teile, Aufl. 4 wurde auf S. 82—84 der Normalwiderstand schon vollständig behandelt, die Schwingungsdauer aber nur für kleine Schwingungen; hier soll die Aufgabe auch für beliebig große Schwingungen durchgeführt werden (Fig. 110).

Es ist, weil bei der Bewegung von B nach C die Ordinate y abnimmt,

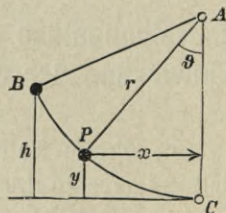
$$ds = -dy : \sin \vartheta,$$

$$\sin \vartheta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{y} \cdot \sqrt{2r - y},$$

daher (Gl. 2):

$$\begin{aligned} dt &= -\frac{r}{\sqrt{2g}} \frac{dy}{\sqrt{2r - y} \sqrt{hy - y^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}} \cdot \left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Fig. 110.



Ist nun t_1 die Zeit einer einfachen Schwingung, so wird der Weg BC in der Zeit $\frac{1}{2}t_1$ zurückgelegt, wofür gilt

$$\frac{t_1}{2} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}} \cdot \left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2}, \quad \text{oder}$$

$$1) \quad t_1 = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}} \left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2}.$$

Der letzte Faktor wird nach der binomischen Reihe entwickelt:

$$\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{y}{2r} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} \left(\frac{y}{2r}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{y}{2r}\right)^3 + \dots$$

$$\text{oder} \quad \left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{y}{2r} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{y}{2r}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{y}{2r}\right)^3 + \dots$$

Hiermit ergibt sich aus Gl. 1 die Reihe von Integralen:

$$2) \quad t_1 = \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2r} \int_0^h \frac{y \cdot dy}{\sqrt{hy - y^2}} \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{1}{2r}\right)^2 \int_0^h \frac{y^2 dy}{\sqrt{hy - y^2}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{1}{2r}\right)^3 \int_0^h \frac{y^3 dy}{\sqrt{hy - y^2}} + \dots \right\}.$$

Das erste dieser Integrale ist sehr leicht zu lösen:

$$\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}} = \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + hy - y^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}} \\ = \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2} - y\right)^2}} = \int_0^h \frac{dy}{\frac{h}{2} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2y}{h}\right)^2}} \\ = - \int_0^h \frac{d\left(1 - \frac{2y}{h}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2y}{h}\right)^2}} = \left[\arcsin \left(1 - \frac{2y}{h}\right) \right]_h^0 \\ 3) \quad = \arcsin 1 - \arcsin (-1) = 2 \cdot \arcsin 1 \\ = \pi.$$

Die übrigen Integrale lassen sich auf das erste zurückführen.

Um $\frac{y^n dy}{\sqrt{hy-y^2}}$ zu integrieren, teile man im Zähler und Nenner durch \sqrt{y} , so daß entsteht $\frac{y^{n-1/2} dy}{\sqrt{h-y}}$. Nun setze man

$$y^{n-1/2} = u; \quad \frac{dy}{\sqrt{h-y}} = dv, \quad \text{dann ist}$$

$$(n-1/2) \cdot y^{n-3/2} dy = du;$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{h-y}} = -\int (h-y)^{-1/2} d(h-y) = -2\sqrt{h-y} = v, \quad \text{und es wird}$$

$$\int \frac{y^n dy}{\sqrt{hy-y^2}} = uv - \int v \cdot du = -2y^{n-1/2} \sqrt{h-y}$$

$$+ (2n-1) \int \sqrt{h-y} \cdot y^{n-3/2} dy$$

$$= -2y^{n-1} \sqrt{hy-y^2} + (2n-1) \int \frac{(h-y)}{\sqrt{hy-y^2}} \cdot y^{n-1} dy$$

oder
$$\int \frac{y^n dy}{\sqrt{hy-y^2}} = -2y^{n-1} \sqrt{hy-y^2} + (2n-1)h \int \frac{y^{n-1} \cdot dy}{\sqrt{hy-y^2}} - (2n-1) \int \frac{y^n dy}{\sqrt{hy-y^2}},$$

also, wenn man das letzte Glied auf die linke Seite bringt und durch $2n$ teilt:

$$\int \frac{y^n dy}{\sqrt{hy-y^2}} = -\frac{1}{n} y^{n-1} \cdot \sqrt{hy-y^2} + \frac{2n-1}{2n} \cdot h \int \frac{y^{n-1} \cdot dy}{\sqrt{hy-y^2}}.$$

Nimmt man dies zwischen den Grenzen 0 und h , so wird das erste Glied der rechten Seite Null, und man erhält

$$4) \quad \int_0^h \frac{y^n \cdot dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \frac{2n-1}{2n} \cdot h \int_0^h \frac{y^{n-1} \cdot dy}{\sqrt{hy-y^2}}.$$

Dies ist die allgemeine Zurückführungsformel für Gl. 2.

$$n=1 \text{ gibt } \int_0^h \frac{y dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \frac{1}{2} h \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \frac{1}{2} h \cdot \pi \quad \text{nach Gl. 3.}$$

$$n=2 \text{ gibt } \int_0^h \frac{y^2 dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \frac{3}{4} h \int_0^h \frac{y \cdot dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} h^2 \pi.$$

$$n = 3 \text{ gibt } \int_0^h \frac{y^3 dy}{\sqrt{hy - y^2}} = \frac{5}{6} h \int_0^h \frac{y^2 dy}{\sqrt{hy - y^2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} h^3 \pi$$

und so fort.

Hiermit wird Gl. 2:

$$5) \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h}{2r} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{h}{2r}\right)^3 + \dots \right\}.$$

Der Quotient des $(n + 1)$ ten Gliedes dieser Reihe durch das n te Glied ist

$$\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \frac{h}{2r}.$$

Da dieser Ausdruck mit wachsendem n sich mehr und mehr dem unter der Einheit liegenden Grenzwert $\frac{h}{2r}$ nähert, so ist die Reihe konvergent.

Durchläuft der Massenpunkt den ganzen unteren Halbkreis, ist also $h = r$, so wird

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{8} + \frac{9}{256} + \frac{225}{72 \cdot 256} + \dots \right\},$$

oder in Dezimalbrüchen:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + 0,125 + 0,0352 + 0,0122 + \dots \right\}.$$

Dies gibt

$$6) \quad t_1 = 1,180 \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Für nicht so große Schwingungen genügen die beiden ersten Glieder der Reihe in Gl. 5, nämlich

$$7) \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{h}{r} \right);$$

für kleine Schwingungen ergibt sich, wie im ersten Teile,

$$8) \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Da
$$\frac{h}{2r} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

kann man Gl. 5 auch schreiben

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right\}.$$

Die Reihe liefert

für $\alpha = 1^\circ$	den Wert	1,000 019,
„ $\alpha = 5^\circ$	„ „	1,000 476,
„ $\alpha = 10^\circ$	„ „	1,001 907,
„ $\alpha = 20^\circ$	„ „	1,007 670.

Betrachtet man für kleine Schwingungen die kreisförmige Bahnlinie als übereinstimmend mit ihrer Horizontalprojektion (Fig. 111), so ist, weil die Tangentialbeschleunigung

$$p_t = g \sin \vartheta = g \cdot \frac{x}{r}$$

beträgt, aber im Sinne einer Abnahme von x gerichtet ist,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{r} \cdot x.$$

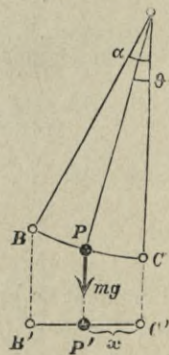
Da dies mit Gl. 2, S. 68 übereinstimmt, wenn man

$$k^2 = g : r$$

setzt, so ist eine Pendelbewegung von geringem Ausschlage nach den Gesetzen einer geradlinigen Schwingungsbewegung zu betrachten; man erhält für die Dauer einer einfachen Schwingung nach Gl. 7, S. 70 auch auf diese Weise

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Fig. 111.

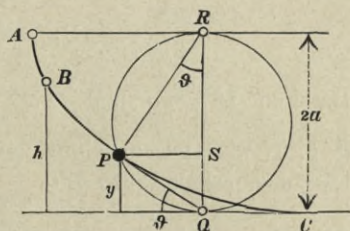


4. Das Zykloidenpendel.

Ist der Massenpunkt gezwungen, sich unter Einwirkung der Schwere auf einer Zykloide zu bewegen (Fig. 112), so nennt man die Vorrichtung ein Zykloidenpendel.

Die Zykloide ABC sei dadurch entstanden, daß der Kreis vom Halbmesser a auf der oberen Wagerechten AR rollt. In B sei die Geschwindigkeit Null gewesen; zu beliebiger Zeit t befinde sich der Punkt in P . Dann ist (vgl. S. 35), wenn QR den lotrechten Durchmesser des erzeugenden Kreises bezeichnet, PQ die Tangente, PR die Normale der Zykloide.

Fig. 112.



Um zunächst den Normalwiderstand N zu finden, bedenke man, daß (S. 56) der Krümmungshalbmesser der Zykloide $\rho = 2PR$ ist, also weil

$$PR = \sqrt{RQ \cdot RS} = \sqrt{2a(2a-y)} \quad \text{und}$$

$$1) \quad \cos \vartheta = \frac{PR}{QR} = \frac{\sqrt{2a(2a-y)}}{2a} = \sqrt{\frac{2a-y}{2a}},$$

nach Gl. 1, S. 138 stattfindet:

$$N = -mg \left\{ \frac{\sqrt{2a-y}}{\sqrt{2a}} + \frac{h-y}{\sqrt{2a(2a-y)}} \right\},$$

$$2) \quad N = -mg \frac{h+2(a-y)}{\sqrt{2a(2a-y)}}.$$

Für $y = h$ wird

$$N_0 = mg \sqrt{1 - \frac{h}{2a}};$$

begänne die Bewegung im Punkt A , so würde dort, mit $h = 2a$, $N_0 = 0$ sein.

Beim Kreispendel wird N am größten im tiefsten Punkte (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 72), weil dort $\vartheta = 0$, v am größten, ρ überall gleich ist. Beim Zykloidenpendel aber ist im tiefsten Punkte ρ am größten, daher nicht ohne weiteres selbstverständlich, daß dort

N am größten werden muß. Aus Gl. 2 wird nach entsprechender Vereinfachung

$$3) \quad \frac{dN}{dy} = \frac{mg}{\sqrt{2a}} \frac{\frac{1}{2}h - 3a + y}{(2a - y)^{3/2}}.$$

Da der Nenner für den hier vorliegenden Fall ($y \leq 2a$) stets positiv, so ist

$$\frac{dN}{dy} = \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0, \quad \text{wenn} \quad \frac{h}{2} + y - 3a \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0.$$

Da nun $\frac{1}{2}h \leq a$ und auch $y \leq 2a$, so wird überall $\frac{dN}{dy} < 0$, d. h. es wird mit abnehmendem y die Druckkraft N stetig größer, und man erhält für $y = 0$

$$4) \quad N_{max} = mg \left(1 + \frac{h}{2a} \right).$$

Zur Berechnung der Schwingungsdauer t_1 wird Gl. 2, S. 138 mit

$$ds = -\frac{dy}{\sin \vartheta} \quad \text{und}$$

$$\sin \vartheta = \frac{PQ}{a} = \frac{\sqrt{2a \cdot y}}{2a} = \sqrt{\frac{y}{2a}},$$

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{y}} \frac{dy}{\sqrt{h-y}} = -\sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}},$$

also für die Bewegung von B bis C

$$\frac{t_1}{2} = -\sqrt{\frac{a}{g}} \int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}},$$

mithin die ganze Dauer einer Schwingung

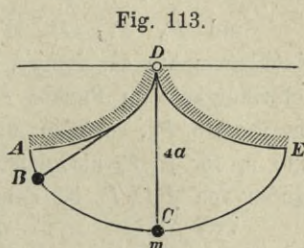
$$t_1 = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}}.$$

Das Integral hat nach Gl. 3, S. 139 den Wert π , daher kann man schreiben

$$5) \quad t_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} = \pi \sqrt{\frac{4a}{g}},$$

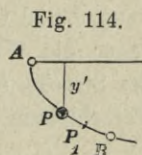
d. h. die Schwingungsdauer eines gegebenen Zykloidenpendels ist völlig unabhängig von der Größe des Schwingungsbogens, was beim Kreispindel nur für kleine Schwingungen gilt.

Dieses Pendel läßt sich am einfachsten dadurch verwirklichen, daß man (Fig. 113) zwei Zykloidenhälften vom Rollkreishalbmesser a als Schienen oder dergl. AD und DE körperlich ausbildet, in D einen unten mit einem dichten Körper m beschwerten biegsamen Faden von der Länge $4a$ befestigt und den Körper m in Bewegung setzt. Da die Evolvente der Zykloidenhälften AD und DE eine gleiche Zykloide ACE ist, so wird der Körper m in der Zykloide ACE schwingen, weil der in D befestigte Faden sich gegen die Evolute ADE legen wird. Die Fadenlänge $4a$ erscheint auch in Gl. 4 als Schwingungslänge.



Professor Stampfer in Wien hat ein solches Zykloidenpendel für eine Turmuhr der Stadt Lemberg verwendet. Diese Verwirklichung des Zykloidenpendels, überhaupt die Lehre von seinen Eigenschaften rührt schon von Huyghens (vgl. Bd. I, Aufl. 4, S. 36) her, der die Lehre von den Evoluten und Evolventen, die Theorie der Kettenlinie begründete, die Theorie des Pendels ausbildete, auch die Optik und ihre Anwendung auf die Astronomie erheblich förderte.

Die Zykloide ist auch die Linie des schnellsten Falles zwischen zwei nicht in derselben Lotrechten befindlichen Punkten, die sog. Brachistochrone (von $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$ = kürzeste und $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$ = Zeit), d. h. wenn ein schwerer Punkt in kürzester Zeit von A nach B gelangen soll (Fig. 114), so muß man ihn längs einer Zykloide APB gleiten lassen, deren Rollgerade eine durch A gelegte Wagerechte ist.



Dies läßt sich (nach Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte) in folgender Art beweisen: Ist die Kurve AB die Linie des schnellsten Falles zwischen den Punkten A und B , so muß sie es auch zwischen je zwei zwischen-

liegenden Punkten P und P_1 sein; man würde sonst den Bogen PP_1 der Kurve mit einem Stück einer anderen Kurve vertauschen können, auf welchem der Punkt in kürzerer Zeit von P nach P_1 gelangte, und infolgedessen würde die Zeit der Bewegung von A nach B auf der ursprünglichen Kurve nicht die kürzeste sein.

Sind P, P_1, P_2 (Fig. 115) drei Nachbarpunkte der Kurve, ist v die Geschwindigkeit im Punkte P , v_1 diejenige im Punkte P_1 , so kann man v für PP_1 und v_1 für P_1P_2 als gleichbleibend ansehen. Die Zeit zum Durchlaufen von PP_1P_2 ist dann

$$\frac{PP_1}{v} + \frac{P_1P_2}{v_1}.$$

Würde anstatt P_1 der Punkt Q derselben Wagerechten in unendlich kleinem Abstände dx von P_1 gewählt, so würde PQP_2 in der Zeit

$$\frac{PQ}{v} + \frac{QP_2}{v_1}$$

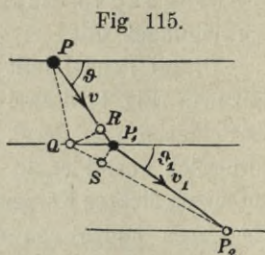
durchlaufen. Macht man $PR = PQ$, $P_2S = P_2P_1$, so kann man die beiden Zeiten auch schreiben

$$\frac{PP_1}{v} + \frac{P_2S}{v_1} \quad \text{und} \quad \frac{PR}{v} + \frac{QP_2}{v_1},$$

der Unterschied beträgt dann

$$\frac{P_1R}{v} - \frac{QS}{v_1} \quad \text{oder} \quad P_1Q \left(\frac{\cos \vartheta}{v} - \frac{\cos \vartheta_1}{v_1} \right),$$

wenn ϑ und ϑ_1 die Neigungswinkel der Bahnstrecken PP_1 und P_1P_2 gegen die Wagerechte sind. — Soll nun die Zeit zum Durchlaufen der Strecke PP_1P_2 ein Minimum sein, so muß die unendlich kleine Verschiebung des Punktes P_1 nach Q eine Änderung der Zeit von der Größe Null hervorbringen, d. h. es muß $\frac{\cos \vartheta}{v} = \frac{\cos \vartheta_1}{v_1}$, oder $\frac{\cos \vartheta}{v}$ überall gleich, die Geschwindigkeit v proportional dem Cosinus



des Gefällwinkels ϑ der Kurve sein. Man setze also $\cos \vartheta = v \cdot \text{Const.}$ Zu Anfang, wo v noch = Null, ist, muß also auch $\cos \vartheta = 0$, d. h. $\vartheta = 90^\circ$ sein, d. h. die Kurve muß mit lotrechter Richtung beginnen. Es ist nun nach S. 138 $v = \sqrt{2gy'}$, wobei y' die durchsunkene Höhe, d. h. die Tiefe des beliebigen Punktes unter dem Anfangspunkt A der Bewegung bedeutet; es muß also

$$6) \quad \cos \vartheta = \text{Const.} \sqrt{2gy'} = C_1 \sqrt{y'}$$

sein. — Nach Gl. 1, S. 143, ist aber eine kennzeichnende Eigenschaft der Zykloide:

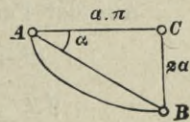
$$\cos \vartheta = \sqrt{\frac{2a - y}{2a}},$$

oder, wenn man nach dem obigen die Tiefe des Punktes P in Fig. 114 unter der Stelle A , wo die Kurve lotrecht ist, mit y' bezeichnet, d. h. $2a - y = y'$ setzt,

$$\cos \vartheta = \sqrt{\frac{y'}{2a}},$$

was mit der notwendigen Bedingung 6 der Brachistochrone übereinstimmt; mithin ist die durch die gegebenen Punkte A und B (Fig. 114) gelegte Zykloide mit der Spitze in A die Linie des schnellsten Falles zwischen A und B .

Fig. 116.



Liegen z. B. die beiden Punkte A und B (Fig. 116) so gegeneinander, daß man zwischen dieselben gerade eine halbe Zykloide legen kann mit $AC = a\pi$, $BC = 2a$, so gebraucht ein schwerer Punkt zum Durchlaufen der Zykloidenhälfte nach Gl. 5 die Zeit

$$\frac{t_1}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Läßt man den schweren Punkt aber die Sehne $AB = a\sqrt{4 + \pi^2}$ durchlaufen, so ist seine Beschleunigung

$$p = g \cdot \sin \alpha = g \cdot \frac{2a}{AB}$$

und, weil $AB = \frac{p t_2^2}{2}$, die Zeit

$$\begin{aligned} t_2 &= \sqrt{\frac{2}{p} \cdot AB} = \sqrt{\frac{2 \overline{AB} \cdot AB}{g \cdot 2a}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \sqrt{4 + \pi^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4a}{g}} \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} = 1,186 \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4a}{g}}. \end{aligned}$$

Das Durchlaufen der Geraden \overline{AB} erfordert also 1,186 mal soviel Zeit wie das Durchlaufen der Zykloidenhälfte \widehat{AB} .

5. Bewegung eines schweren Punktes in einer Parabel mit lotrechter Achse.

Der Punkt sei gezwungen, sich auf der Parabel AP (Fig. 117) vom Parameter a zu bewegen und habe im Punkt A die Geschwindigkeit c , bei P die Geschwindigkeit

(nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 73)

$$v = \sqrt{c^2 + 2g \cdot y};$$

es soll der Normalwiderstand N in P berechnet werden.

Aus der Parabelgleichung

$$x^2 = 2a \cdot y \text{ folgt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \frac{2y}{a}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a},$$

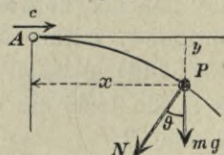
daher der Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = p \left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}.$$

Daher wird mittels der Formel für die Zentripetalbeschleunigung

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{c^2 + 2gy}{p \left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}} = \frac{N + mg \cos \vartheta}{m},$$

Fig. 117.



also, weil

$$\begin{aligned}\cos \vartheta &= \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2y}{a}}}, \\ N &= m \left\{ \frac{c^2 + 2gy}{\left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}} - \frac{g}{\sqrt{1 + \frac{2y}{a}}} \right\} \\ N &= \frac{m}{\left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}} \left\{ \frac{c^2}{a} + \frac{2gy}{a} - g \left(1 + \frac{2y}{a}\right) \right\} \\ &= \frac{mg}{\left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}} \left(\frac{c^2}{ga} - 1 \right).\end{aligned}$$

Für $c^2 = g \cdot a$ wird durchweg $N = 0$, d. h. der Massenpunkt bedarf in diesem Fall einer Stützung seitens der Bahn nicht, durchläuft dieselbe vielmehr als freie Bahnlinie.

Bekanntlich ist ja für die freie Bewegung eines mit der Geschwindigkeit c wagerecht geworfenen Punktes (Bd. I, Aufl. 4, S. 54)

$$x = ct; \quad y = \frac{1}{2}gt^2, \quad \text{mithin}$$

$$y = \frac{gx^2}{2c^2} \quad \text{oder}$$

$$x^2 = 2 \frac{c^2}{g} y,$$

was eine parabolische Bahnlinie mit dem Parameter $a = \frac{c^2}{g}$ bedeutet und mit obiger Bedingung $c^2 = g \cdot a$ für $N = 0$ übereinstimmt.

D. Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugelfläche; räumliches Pendel.

Der Massenpunkt sei mittels eines Fadens von der Länge r an den Mittelpunkt A der Kugelfläche gefesselt (Fig. 118 a). Bildet der Faden in der Lage AP mit den drei Achsen die Winkel α , β , γ , so ist

$$r \cos \alpha = x;$$

$$r \cos \beta = y;$$

$$r \cos \gamma = z.$$

In der x -Richtung wirkt nur $-N \cdot \cos \alpha$, in der y -Richtung nur $-N \cdot \cos \beta$, in der z -Richtung $mg - N \cdot \cos \gamma$. Daher erhält man die Gleichungen

$$1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{N}{m} \frac{x}{r};$$

$$2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{N}{m} \frac{y}{r};$$

$$3) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = g - \frac{N}{m} \frac{z}{r}$$

und wenn man das Quadrat der unbekanntenen Kraft N durch die Summe der Quadrate ihrer Seitenkräfte $N \frac{x}{r}$ usw. ausdrückt, die Gleichung der Kugel

$$4) \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Da der Normalwiderstand N keine Arbeit verrichtet, so gilt, wenn zu Anfang der Massenpunkt sich in einer Tiefe $z = h$ unter dem Mittelpunkt A befand und die Geschwindigkeit c hatte, für die Geschwindigkeit v an der beliebigen Stelle P :

$$5) \quad v^2 = c^2 + 2g(z - h) = c^2 - 2gh + 2gz.$$

Fig. 118 a.

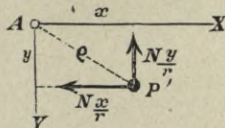
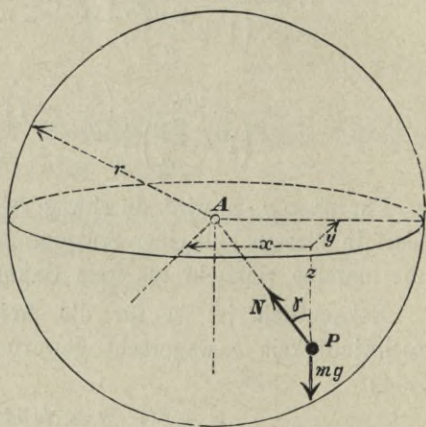


Fig. 118 b.

Um nun zunächst N zu bestimmen, multipliziere man die Gleichungen 1, 2 und 3 bezw. mit x , y , z und zähle sie zusammen; man erhält dann:

$$6) \quad \frac{x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z}{dt^2} = gz - \frac{N}{m} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = gz - \frac{N}{m} r.$$

Gl. 4 gibt aber, zweimal nach t differenziert:

$$7) \quad \begin{aligned} x dx + y dy + z dz &= 0 \quad \text{und} \\ x d^2 x + d x^2 + y d^2 y + d y^2 + z d^2 z + d z^2 &= 0, \quad \text{d. h.} \\ \frac{x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z}{dt^2} &= - \frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{dt^2} \\ &= -v^2 = -(c^2 - 2gh + 2gz) \end{aligned}$$

(nach Gl. 5). Verbindet man letztere Gl. mit Gl. 6, so ergibt sich

$$gz - \frac{N}{m} r = -c^2 + 2gh - 2gz, \quad \text{also}$$

$$8) \quad N = m \left(3g \frac{z}{r} + \frac{c^2}{r} - 2g \frac{h}{r} \right).$$

Hiermit ist N als Funktion von z gefunden.

Eine Gleichung für die lotrechte Seitengeschwindigkeit $v_z = \frac{dz}{dt}$ läßt sich ziemlich leicht entwickeln. Die Seitenbewegung parallel der xy -Ebene (Fig. 118 b) erfolgt nämlich nur unter Einwirkung der beiden Kräfte $N \cdot \frac{x}{r}$ und $N \cdot \frac{y}{r}$, welche, da $AP' = \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, eine stets nach A gerichtete Mittelkraft $N \cdot \frac{\varrho}{r} = N \sin \gamma$ liefern. Daher muß für diese Projektionsbewegung nach S. 100 der Satz der Flächen gelten, so daß nach Gl. 4, S. 101, wenn man darin r mit ϱ vertauscht,

$$9) \quad \varrho^2 d\vartheta = A \cdot dt \quad \text{oder nach Gl. 3, S. 101}$$

$$10) \quad x \cdot dy - y \cdot dx = A \cdot dt \quad \text{wird.}$$

Bildet man aus Gl. 7:

$$x dx + y dy = -z \cdot dz,$$

quadriert diese und addiert sie zu der quadrierten Gl. 10, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x^2 dx^2 + 2xy \cdot dx \cdot dy + y^2 dy^2 &= z^2 dz^2 \\ y^2 dx^2 - 2xy \cdot dx \cdot dy + x^2 dy^2 &= A^2 dt^2 \\ \frac{(x^2 + y^2) dx^2 + (x^2 + y^2) dy^2}{(x^2 + y^2) dx^2 + (x^2 + y^2) dy^2} &= \frac{z^2 \cdot dz^2 + A^2 \cdot dt^2}{(x^2 + y^2) dx^2 + (x^2 + y^2) dy^2} \end{aligned}$$

Vertauscht man nun, um x und y zu entfernen, x^2 und y^2 mit $r^2 - z^2$ (nach Gl. 4), so wird

$$(r^2 - z^2)(dx^2 + dy^2) = A^2 dt^2 + z^2 dz^2,$$

und wenn man weiter, um auch dx und dy zu beseitigen, links noch $r^2 dz^2 - r^2 d^2 z^2$ hinzufügt,

$$(r^2 - z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - r^2 dz^2 = A^2 dt^2, \text{ also, weil}$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 = v^2 dt^2 = (c^2 - 2gh + 2gz) dt^2 \quad (\text{Gl. 5}):$$

$$(r^2 - z^2)(c^2 - 2gh + 2gz) dt^2 - r^2 dz^2 = A^2 dt^2.$$

Hieraus ergibt sich

$$11) \quad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{(r^2 - z^2)(c^2 - 2gh + 2gz) - A^2}{r^2}.$$

Eine interessante Beziehung für die Höhe der Kugelzone, innerhalb welcher die Bewegung überhaupt erfolgt, erhält man unter der Voraussetzung, daß die Anfangsgeschwindigkeit c waagrecht gerichtet war. Dann ist nämlich, wenn der Anfangswert von ϱ mit

$$\varrho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{r^2 - h^2}$$

bezeichnet wird (Fig. 119),

$$\varrho_0 \cdot d\vartheta = c \cdot dt,$$

also nach Gl. 9 für den Anfang der Bewegung

$$A = \varrho_0^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \varrho_0 c = c\sqrt{r^2 - h^2}, \text{ d. h.}$$

$$A^2 = c^2(r^2 - h^2).$$

Mit Einführung dieses Wertes wird aus Gl. 11:

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{(r^2 - z^2)(c^2 - 2gh + 2gz) - c^2(r^2 - h^2)}{r^2},$$

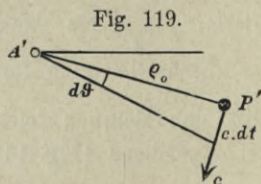
was sich leicht zu

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{2g(r^2 - z^2)(z - h) - c^2(z^2 - h^2)}{r^2}$$

und dann auch zu

$$12) \quad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{z - h}{r^2} \{2g(r^2 - z^2) - c^2(z + h)\}$$

umschreiben läßt.



Will man diejenigen Werte von z kennen, für welche $\frac{dz}{dt} = 0$ wird, so setze man die rechte Seite gleich Null. Dem entspricht zunächst $z = h$, was selbstverständlich ist, weil ja angenommen war, daß die Anfangsgeschwindigkeit c wagerecht sei. Setzt man aber den eingeklammerten zweiten Faktor der rechten Seite der Gl. 12 gleich Null, so folgt, daß für

$$13) \quad z = -\frac{1}{2} \frac{c^2}{2g} \pm \sqrt{r^2 - h \cdot \frac{c^2}{2g} + \frac{1}{4} \left(\frac{c^2}{2g}\right)^2}$$

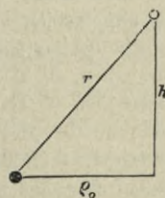
ebenfalls $\frac{dz}{dt}$ zu Null wird. Von den beiden Werten z_1 und z_2 , welche durch Gl. 13 bestimmt werden, ist, wie Zahlenrechnungen zeigen, der eine, absolut genommen, stets kleiner als r , der andere stets größer als r . Da aber bei der vorgeschriebenen Bewegung auf der Kugelfläche vom Halbmesser r ein Wert von z , der größer als r ist, nicht vorkommen kann, so liefert Gl. 13 nur einen brauchbaren Wert z_1 . Die beiden Werte $z = h$ und $z = z_1$, welche $\frac{dz}{dt}$ zu Null machen, bezeichnen Maximum und Minimum von z , begrenzen also diejenige Kugelzone, innerhalb deren die Bewegung erfolgt. An den wagerechten Rändern dieser Zone hört der Punkt auf zu steigen bzw. zu fallen, kehrt also seine lotrechte Seitenbewegung um.

Fig. 120.

Bei bestimmtem Halbmesser r der Halbkugel und bestimmter Tiefe h des Anfangspunktes der Bewegung gibt es auch eine Anfangsgeschwindigkeit c , für welche die beiden äußersten Werte h und z_1 von z einander gleich werden, so daß dann die Bewegungszone zu einem wagerechten Kreise mit konstantem $z = h$ zusammenschrumpft. Man findet diese Geschwindigkeit c , indem man in Gl. 13 $z = h$ einführt. Dann folgt

$$\left(h + \frac{1}{2} \frac{c^2}{2g}\right)^2 = r^2 - h \cdot \frac{c^2}{2g} + \frac{1}{4} \left(\frac{c^2}{2g}\right)^2 \quad \text{oder}$$

$$14) \quad \frac{c^2}{2g} = \frac{r^2 - h^2}{2h} = \frac{\varrho_0^2}{2h} \quad (\text{Fig. 120}) \quad \text{und} \quad c = \varrho_0 \sqrt{\frac{g}{h}}.$$



Die Vorrichtung bildet mit dieser Geschwindigkeit c das im 1. Teile, Aufl. 4, S. 73 behandelte Kegelpendel. Die Bewegung in dem wagerechten Kreis erfolgt gleichförmig, die Umlaufzeit ist

$$t_1 = \frac{2 \rho_0 \pi}{c} = 2 \pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Beispiel: An dem Endpunkt eines bei A (Fig. 118) befestigten Fadens von $r = 1$ m Länge befinde sich eine kleine Bleikugel; der Faden sei derartig ausgestreckt, daß die Kugel sich anfänglich in einer Tiefe $h = 0,5$ m unter A befinde. Es soll die Kugel nun wagerecht und rechtwinklig zum Faden mit einer Geschwindigkeit c fortgeschwungen und der Wert z_1 ermittelt werden, welcher mit h die Bewegungszone begrenzt. Für c sollen der Reihe nach verschiedene Größen eingeführt werden.

Für $\frac{c^2}{2g} =$	4 m	3 m	2 m	1 m	0,75 m	0,5 m	0,25 m
d. h. $c =$	8,56	7,67	6,26	4,43	3,84	3,13	2,215

weil nach Gl. 13

$$z_1 = -0,268 \quad -0,18 \quad 0 \quad +0,366 \quad +0,5 \quad +0,651 \quad +0,819$$

$$z_2 = -3,732 \quad -2,83 \quad -2 \quad -1,366 \quad -1,25 \quad -1,151 \quad -1,069.$$

Negative Werte von z bedeuten Stellen der Kugelfläche, welche oberhalb des Mittelpunktes liegen. Bei Geschwindigkeitshöhen $> 0,75$ steigt der Massenpunkt von der um $h = 0,5$ m unterhalb des Mittelpunktes gelegenen Anfangslage bis zu der durch z_1 angegebenen Höhe empor, um dann wieder zu der ursprünglichen wagerechten Ebene zurückzusinken. Diese Bewegung auf- und abwärts wiederholt sich fortwährend, wobei der Massenpunkt übrigens im allgemeinen nicht wieder die gleichen Stellen durchläuft. Bei einer Geschwindigkeitshöhe $= 0,75$ m fallen (in Übereinstimmung mit Gl. 14) z_1 und h zusammen, d. h. der Punkt bleibt stets in gleicher Höhe. Bei Geschwindigkeitshöhen $< 0,75$ m ist $z_1 > h_1$, d. h. der Massenpunkt sinkt aus der Anfangshöhe herab. Bei allen vorstehend angenommenen Werten von c und daraus berechneten Größen z_1 bleibt N durchweg positiv, kann also durch einen Faden ausgeübt werden.

Kleine Schwingungen. Befindet sich der Massenpunkt zu Anfang in nur geringer Entfernung vom tiefsten Punkte der Kugelfläche und bekommt er eine so wenig erhebliche Geschwindigkeit, daß er sich nur unbedeutend heben kann, so wird annähernd (mit $z = h = r$ und kleinem $\frac{c^2}{2g}$) nach Gl. 8:

$$N = mg.$$

Hiermit gehen Gl. 1 und 2 (S. 150) über in

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -g \frac{x}{r}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g \frac{y}{r}.$$

Diese stimmen mit der Gl. 2, S. 113 überein, wenn $k^2 = g : r$ gesetzt wird, bezeichnen daher eine elliptische Bewegung um den tiefsten Punkt der Kugel als Mittelpunkt und mit der Umlaufszeit (Gl. 10, S. 116)

$$t_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

(Vgl. auch S. 142, Fig. 111).

Auch der allgemeinere, S. 150–153 behandelte Fall führt, wie in Dr. Woldemar Voigts Mechanik gezeigt wird, zu einer Bahnlinie, deren Horizontalprojektion Ähnlichkeit mit einer Ellipse hat, deren Hauptachsen sich aber fortgesetzt drehen.

E. Scheinbare (relative) Bewegung eines Massenpunktes.

Auf S. 63, Gl. 1, wurde gezeigt, daß die scheinbare oder relative Beschleunigung p_1 eines Punktes in bezug auf einen beliebig bewegten Raum zu finden ist als geometrische Summe der wahren oder absoluten Beschleunigung p und zweier Ergänzungsbeschleunigungen ($-p_2$) und ($-p_3$). Davon bedeutet p_2 die Beschleunigung, mit welcher sich diejenige Stelle A der scheinbaren Bahnlinie bewegt, an welcher sich der Massenpunkt augenblicklich, d. h. im Zeitpunkte t , befindet; ($-p_2$) ist das Entgegengesetzte von p_2 . Ferner ist nach S. 55 $p_3 = 2 \cdot w \cdot \omega \cdot \sin \alpha$, wenn w die augenblickliche scheinbare Geschwindigkeit des Massenpunktes, ω die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die scheinbare Bahnlinie um die durch den Punkt A derselben gelegt gedachte augenblickliche Drehachse dreht, α der Winkel, den diese Achse mit der scheinbaren Bahnlinie bildet. Ist AB das während des folgenden Zeitteilchens dt beschriebene Bahnteilchen der scheinbaren Bewegung, so stimmt p_3

nach Richtung und Sinn mit der Bewegung des Punktes B bei der Drehung um die Augenblicksachse überein; $-p_3$ ist das Entgegengesetzte von p_3 .

Die wahre Beschleunigung p ist die Folge der Mittelkraft K der wirklich vorhandenen Kräfte, es ist also

$$p = K : m \quad \text{oder} \quad K - m p = 0$$

und da $p \equiv (p_1), (p_2), (p_3)$, so ist auch

$$1) \quad K, (-m p_1), (-m p_2), (-m p_3) \equiv 0$$

oder in Vektorschreibweise

$$1 a) \quad \mathfrak{K} - m p_1 - m p_2 - m p_3 = 0,$$

d. h. die beschleunigende Kraft ist entgegengesetzt gleich der geometrischen Summe der den Einzelbeschleunigungen entsprechenden Trägheitswiderstände (Ergänzungskräfte). Gl. 1 drückt den Kampf zwischen Kraft und Massen, und in diesem die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung aus. Sind in Gl. 1 die Kraft K , die Beschleunigungen p_2 und p_3 bekannt, so kann daraus die scheinbare oder relative Beschleunigung p_1 des Massenpunktes leicht ermittelt werden. Man erhält

$$2) \quad m p_1 \equiv K; (-m p_2); (-m p_3).$$

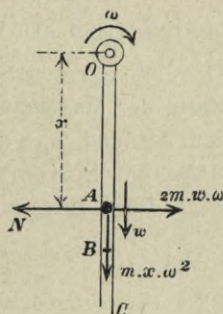
Die so ermittelte Kraft $m p_1$ ist ebenso bestimmend für die scheinbare oder relative Bewegung des Massenpunktes, wie irgend eine wirkliche Kraft für die wahre oder absolute Bewegung eines solchen. Man bezeichnet sie daher auch wohl als scheinbare Kraft. Die Trägheitswiderstände $(-m p_2)$ und $(-m p_3)$ nennt man in diesem Sinne Ergänzungskräfte, welche die wirkliche Kraft K zu der scheinbaren ergänzen. Ist so die der scheinbaren Beschleunigung entsprechende scheinbare Kraft gefunden, so kann erstere daraus ohne Berücksichtigung der Eigenbewegung der Bahnlinie ermittelt werden.

Die dritte Beschleunigung, entsprechend der Drehung der Bahnlinie mit der Winkelgeschwindigkeit ω ist nach S. 55 $p_3 = 2 w \omega \cdot \sin \alpha$, wird daher zu Null, wenn $\omega = 0$ ist, d. h. wenn die Bahnlinie oder der Raum, in bezug auf welche die scheinbare Bewegung betrachtet wird, sich nur verschiebt, nicht aber dreht, und ferner, wenn $w = 0$ ist, d. h. wenn der Massenpunkt in dem sich drehenden Raume scheinbar ruht, also dessen Drehung einfach mitgemacht. Diese beiden, erheblich einfacheren Fälle wurden schon im 1. Teile, Aufl. 4, S. 84 und 92 behandelt.

1. Bewegung eines Massenpunktes in einem geraden, sich gleichförmig drehenden Rohre ohne Reibung.

Die Drehung des Rohres OC (Fig. 121) erfolge mit der gleichbleibenden Winkelgeschwindigkeit ω (rechts herum) um eine das Rohr rechtwinklig schneidende Achse O . Der Massenpunkt befinde sich im Zeitpunkte t bei A im Abstand x von O und habe in bezug auf das Rohr eine Geschwindigkeit w mit dem Sinne nach außen. Die Schwere mg werde vernachlässigt oder stehe rechtwinklig zur Bildebene, so daß sie durch einen gleichen Gegendruck des Rohres aufgehoben wird; es sollen nur die in der Bildebene auftretenden Bewegungen und Kräfte betrachtet werden. Dann ist der in der Bildebene wirkende Normaldruck N des Rohres die einzige an dem Massenpunkte wirklich vorhandene Kraft.

Fig. 121.



Wir bestimmen zunächst den Normaldruck N mit Hilfe der Gl. 1, S. 156, indem wir darin $K = N$ setzen.

Die Beschleunigung p_2 des Punktes A der Mittellinie des Rohres, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig im Kreise vom Radius x dreht, ist gleich dessen Zentripetalbeschleunigung $x \cdot \omega^2$ und die Beschleunigung p_3 nach den auf S. 156 gegebenen Darlegungen, weil für die hier vorliegende Drehbewegung $\alpha = 90^\circ$ $p_3 = 2w \cdot \omega$ mit der Richtung rechtwinklig zur Achse des Rohres. Danach muß also sein

$$1) \quad N, \quad (-m p_1); \quad (-m x \omega^2); \quad (-2m w \cdot \omega) \equiv 0.$$

Die durch das zweite und dritte Glied dieser Gleichung ausgedrückten Trägheitswiderstände treten wie die entsprechenden Beschleunigungen in der Achse des Rohres auf, die beiden anderen Werte rechtwinklig zu dieser.

Gl. 1 bedingt daher, daß jedes der beiden Wertpaare den Wert Null hat, die Einzelwerte eines jeden Paares also einander entgegengesetzt gleich sind. Daraus folgt

$$2) \quad N = 2m \cdot w \cdot \omega \quad \text{und}$$

$$3) \quad p_1 = x \omega^2,$$

wobei zu bemerken ist, daß, da der Pfeilsinn von p_2 stets nach der Drehungsachse hinzeigt, p_1 nach außen gerichtet ist, die zugehörigen Trägheitswiderstände aber beide entgegengesetzten Pfeilsinn haben. (Vgl. in Fig. 122 das schließende Krafteck 1, 2, 3, 4, 5.)

Da ferner

$$p_1 = \frac{dw}{dt} \quad \text{und} \quad w = \frac{dx}{dt},$$

so ergibt sich aus Gl. 3

$$4) \quad \dots w \cdot dw = x \cdot dx \cdot \omega^2.$$

Hatte der Massenpunkt zu Anfang für $t = 0$ den Abstand $x = a$ von der Achse O und längs des Rohres die Geschwindigkeit $w = c$, so erhält man aus Gl. 4 durch Integration zwischen den Grenzen c und w bzw. a und x

$$w^2 - c^2 = \omega^2 (x^2 - a^2), \quad \text{also}$$

$$5) \quad w = \sqrt{c^2 + \omega^2 (x^2 - a^2)} \quad \text{und}$$

$$6) \quad N = 2m \cdot \omega \cdot \sqrt{c^2 + \omega^2 (x^2 - a^2)}, \quad \text{also}$$

beides Funktionen des Ortes.

Um das Gesetz der Bewegung längs des Rohres zu erhalten, schreibe man

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x \cdot \omega^2$$

und integriere diese Gleichung zweimal. Das Ergebnis der ersten Integration liegt schon in Gl. 3, weil $dx = w \cdot dt$ ist, nämlich

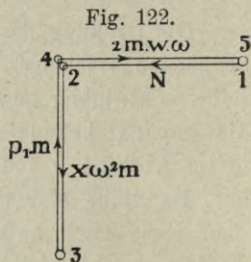
$$\frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2}, \quad \text{also}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2}} = \omega \cdot dt.$$

Hieraus folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2}} = \omega \cdot t;$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2} = \left(a + \frac{c}{\omega}\right) e^{\omega t} - x$$



Hieraus findet man leicht

$$7) \quad x = \frac{1}{2} \left\{ \left(a + \frac{c}{\omega} \right) e^{\omega t} + \left(a - \frac{c}{\omega} \right) e^{-\omega t} \right\},$$

worin man noch den Drehungswinkel $\vartheta = \omega t$ des Rohres einführen kann. Die Geschwindigkeit längs des Rohres als Funktion der Zeit wird

$$8) \quad w = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{2} \left\{ \left(a + \frac{c}{\omega} \right) e^{\omega t} - \left(a - \frac{c}{\omega} \right) e^{-\omega t} \right\}.$$

Die wahre Bahnlinie des Punktes ist nach Gl. 4, mit $\vartheta = \omega t$ eine Spirale OAX (Fig. 123).

Mit Hilfe des Satzes der Arbeit gelangt man auf folgendem Wege zu einer Lösung. Die wahre Geschwindigkeit des Massenpunktes zur Zeit t ist $v = \sqrt{w^2 + \omega^2 x^2}$ und also sein Arbeitsvermögen

$$9) \quad \dots \mathfrak{A} = \frac{m}{2} (w^2 + \omega^2 x^2).$$

In der Zeit dt ändert sich w um dw , x um dx und \mathfrak{A} um $d\mathfrak{A}$; Gl. 9 geht also über in

$$10) \quad \mathfrak{A} + d\mathfrak{A} = \frac{m}{2} (w + dw)^2 + w^2 (x + dx)^2.$$

Durch Subtraktion der Gl. 9 und 10 folgt bei Außerachtlassung unendlich kleiner Größen zweiter Ordnung

$$11) \quad d\mathfrak{A} = m (w dw + \omega^2 x dx).$$

Diese Arbeit wird lediglich durch N geleistet und ist danach auch gleich $N \cdot \omega \cdot x \cdot dt$, womit Gl. 11, wenn man beiderseits mit dt dividiert, übergeht in

$$N = \frac{m}{\omega \cdot x} \left(w \frac{dw}{dt} + \omega^2 x \frac{dx}{dt} \right), \text{ oder weil}$$

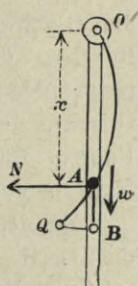
$$\frac{dw}{dt} = p_1 = \omega^2 x \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt} = w \text{ auch}$$

$$12) \quad N = m (w \cdot \omega + w \omega) = 2 m w \omega,$$

übereinstimmend mit Gl. 2.

Von den beiden einander gleichen Summanden in der Klammer Gl. 13 entspricht der erste der Beschleunigung des Massenpunktes im Rohr relativ zu diesem, der zweite derjenigen rechtwinklig zum Rohr. Der Arbeitsaufwand für beide ist also in jedem Zeiteilchen dt derselbe, nämlich je gleich $\frac{d\mathfrak{A}}{2}$ (Gl. 12). Die weitere Lösung verläuft wie oben.

Fig. 123.



2. Bewegung eines Massenpunktes in einem gekrümmten, sich gleichmäßig drehenden Rohre.

Eine in wagerechter Ebene befindliche Scheibe drehe sich mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ω um eine lotrechte Achse O (Fig. 124). Auf dem Ringe der Scheibe, welche von dem inneren Halbmesser r_1 zu dem äußeren Halbmesser r_2 reicht, befinde sich ein gekrümmtes Rohr. Der Punkt möge bei C eine Geschwindigkeit w_1 gegen das Rohr gehabt haben; bei A in dem Abstände $OA = x$ von der Achse sei w die Geschwindigkeit gegen das Rohr, ρ der Krümmungshalbmesser des Rohres, ϑ der Winkel zwischen dem Drehungshalbmesser $OA = x$ und der Normalen zum Rohre. Dann ist N wie S. 157 die einzige wirklich vorhandene Kraft in der Drehungsebene.

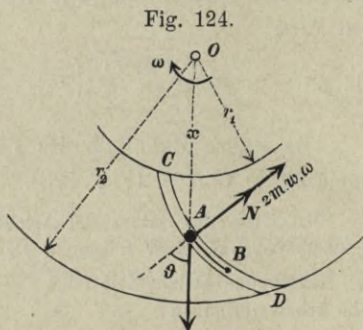


Fig. 124.

Zu den drei Beschleunigungen p_1 , p_2 und p_3 tritt jetzt noch die vierte p_4 als Zentripetalbeschleunigung in der gekrümmten relativen Bahnlinie, so daß an Stelle der Gl. 1 S. 156 jetzt die Gleichung

$$1) \quad N, (-mp_1), (-mp_2), (-mp_3), (-mp_4) \equiv 0$$

den Kampf zwischen Kraft und Masse ausdrückt. Darin ist wieder $p_2 = x \cdot \omega^2$, $p_3 = 2 \cdot w \cdot \omega$ und $p_4 = \frac{w^2}{\rho}$, wobei indes zu bemerken, daß p_3 und p_4 , beide in die Normale zur relativen Bahnlinie fallend, entgegengesetzten Pfeilsinn haben. Gl. 1 geht damit über in

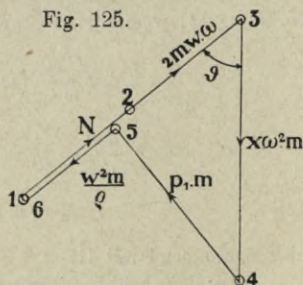


Fig. 125.

$$2) \quad N, (-mp_1), (-m \cdot x \cdot \omega^2), (-2m \cdot w \cdot \omega), \left(+ \frac{mw}{\rho} \right) \equiv 0.$$

Fig. 125 zeigt das der Gl. 2 entsprechende schließende Kräfteck (1, 2, 3, 4, 5, 6). Daraus können ohne weiteres in bezug auf die

zueinander rechtwinkligen Achsrichtungen normal und tangential zur relativen Bahnlinie in A folgende beiden Komponentengleichungen abgelesen werden:

$$3) \quad N + 2m \cdot w \cdot \omega - x\omega^2 m \cos \vartheta - \frac{mw^2}{\rho} = 0.$$

$$4) \quad p_1 m - x\omega^2 m \sin \vartheta = 0.$$

Aus der Gl. 3 erhält man sofort

$$5) \quad N = m \left\{ \frac{w^2}{\rho} + x\omega^2 \cos \vartheta - 2w \cdot \omega \right\}.$$

Gl. 4 liefert mit $p_1 = \frac{dw}{dt}$ und $w = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{\sin \vartheta \cdot dt}$.

$$6) \quad w \cdot dw = \omega^2 x dx,$$

woraus durch Integration zwischen den Grenzen w_1 und w , bzw. r_1 und x folgt, wenn man für w löst

$$7) \quad w = \sqrt{w_1^2 + \omega^2(x^2 - r_1^2)}.$$

Zu dem Ergebnis der Gl. 6 gelangt man auch, wenn man beachtet, daß die relative Beschleunigung p_1 unter der Wirkung der der Winkelgeschwindigkeit ω entsprechenden Fliehkraft (relative Kraft) zustande kommt. Nach dem Satz der Arbeit erhält man

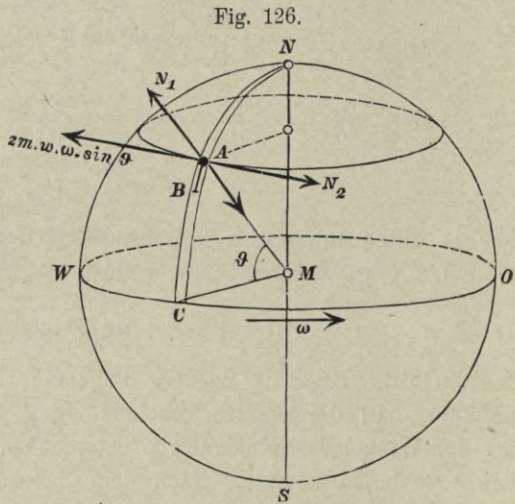
$$m\omega^2 \int_{r_1}^x x \cdot dx = \frac{m}{2} (w_2^2 - w_1^2),$$

woraus Gl. 6 ohne weiteres hervorgeht.

Bei den Radialturbinen bewegen sich die Wassertheilchen an Schaufeln entlang, die etwa die Form $CABD$ haben, und üben dabei nach dem Gesetze der Wechselwirkung auf die Schaufel eine der Kraft N entgegengesetzte Druckkraft aus, welche eben die Triebkraft für das Rad bildet und daher an jeder Stelle positiv sein soll. Dagegen würde $N=0$ die Bedingung sein für die Form derjenigen scheinbaren Bahnlinie, welche der Massenpunkt ohne Einwirkung wahrer Kräfte auf der sich drehenden Scheibe beschreiben würde. Die wahre Bahnlinie ist in diesem Falle eine Gerade.

3. Vorgeschriebene Bewegung längs eines Meridians der sich drehenden Erde.

Ein Massenpunkt m werde auf der nördlichen Halbkugel der Erde mit der Geschwindigkeit w längs eines Meridians im Sinne von Norden nach dem Äquator bewegt; dann wird außer der Anziehungskraft der Erde noch der Widerstand der Bahnlinie wirken, welcher sich in eine Seitenkraft N_1 in einer Meridianebene und in eine Seitenkraft N_2 rechtwinklig zur Meridianebene und tangential zum Parallelkreise des augenblicklichen Ortes A (Fig. 126) zerlegen läßt. Um N_1 und N_2 , besonders die letztere, leicht bestimmen zu können, denkt man sich die Drehung der Erde weg und dafür die den beiden Beschleunigungen p_2 und p_3 entsprechenden Trägheitswiderstände



(Ergänzungskräfte) angebracht. Die erste Ergänzungskraft ist die dem augenblicklichen Ort A entsprechende Zentrifugalkraft; sie kann unberücksichtigt bleiben, wenn man als Schwere sogleich die scheinbare Schwere $m \cdot g_\vartheta$ nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 98, die wir allein wahrnehmen und messen können, einführt und welche schon die Mittelkraft aus der wahren Schwere und der Zentrifugalkraft wegen der Erddrehung darstellt. Die Richtung dieser scheinbaren Schwere fällt mit der Richtung des Lotes zusammen.

Schneidet der Meridian den Äquator in C und ist M der Mittelpunkt der Erde, so bezeichnet der Winkel $AMC = \vartheta$ die geographische Breite des Ortes A . Legt man durch A eine Drehachse parallel der Erdachse, so bildet diese mit dem Bahnteilchen AB ebenfalls den Winkel ϑ , weil die Erdachse zu CM recht-

winklig ist. Dreht man das Bahnteilchen AB um die durch A gelegte Achse im Sinne der Erddrehung, d. h. von West nach Ost, so bewegt sich dadurch B in seinem Parallelkreise nach Osten; die der Beschleunigung entsprechende Ergänzungskraft tangential zum Parallelkreise ist daher nach S. 156 $mp_3 = 2 \cdot m \cdot w \cdot \omega \sin \vartheta$ mit dem Sinne nach Westen. Da nun der Massenpunkt bei seiner scheinbaren Bewegung die Meridianebene nicht verläßt, so müssen sich die rechtwinklig zu dieser Ebene wirkenden Kräfte aufheben, d. h. es muß die zweite Ergänzungskraft durch einen eben so großen Gegendruck

$$1) \quad N_2 = 2 \cdot m \cdot w \cdot \omega \cdot \sin \vartheta$$

aufgehoben werden. Diesen Seitendruck muß die westliche Seitenwand der vorgeschriebenen Bahn leisten.

In der Meridianebene führt der Punkt eine gleichförmige Kreisbewegung aus, wenn man die Abweichung der Erdform von einer Kugel nicht beachtet. Ist r der Erdhalbmesser, so entspricht dieser Kreisbewegung eine Zentripetalbeschleunigung $w^2 : r$, welche von der Zentripetalkraft $mg_\beta - N_1$ erzeugt werden muß. Sonach ist

$$2) \quad N_1 = mg_\beta - \frac{mw^2}{r}.$$

N_1 ist der Widerstand des Erdbodens, also, lotrecht nach unten genommen, der Druck, den der Massenpunkt auf den Erdboden ausübt. Derselbe vermindert sich nach Gl. 2 mit zunehmender Geschwindigkeit w . Er wird zu Null für

$$2) \quad w = \sqrt{g_\beta \cdot r} = 7905 \text{ m/s.}$$

(s. S. 72 und 125), wenn man $g_\beta = 9,81$ und $r = 6\,370\,000 \text{ m}$ einführt (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 99). Für Geschwindigkeiten, wie sie im menschlichen Verkehr auf fester Bahn vorkommen, z. B. auf Eisenbahnen, ist genau genug $N_1 = mg_\beta$ wie im Ruhezustande.

Blickt man im Sinne der Bewegung die Bahn entlang, so ist bei der Bewegung von Norden nach dem Äquator die westliche Seitenwand der Bahn, die den Druck N_2 zu leisten hat, die rechtsseitige. Der Massenpunkt übt also bei der Bewegung einen wagerechten Seitendruck nach rechts aus und äußert dadurch das Bestreben nach rechts von der Bahn abzuweichen. Erfolgt die Bewegung umgekehrt vom Äquator nach Norden hin, so ver-

tauschen die beiden Nachbarpunkte A und B des Bahnteilchens ihre Rollen, ähnlich wie in dem Beispiele S. 56—58; der Endpunkt des Bahnteilchens bewegt sich dann, wenn man das Teilchen um eine durch den Anfangspunkt gelegte Achse übereinstimmend mit der Erde sich drehen läßt, nach Westen; daher erhält die zweite Ergänzungskraft einen Sinn nach Osten, der Seitendruck N_2 einen solchen nach Westen. Diese muß von der östlichen Seitenwand ausgeübt werden; das ist für den nunmehrigen Sinn der Bewegung des Punktes wiederum die rechtsseitige Wand.

In gleicher Weise findet man, daß ein Massenpunkt, der auf der südlichen Halbkugel längs des Meridians bewegt wird, sich stets gegen die linke Seitenwand preßt.

Die Druckkraft ist nach Gl. 1 verhältnismäßig mit der Geschwindigkeit w und dem Sinus der geographischen Breite, ist also am Äquator Null, am Pol am größten.

Nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 98 ist

$$\omega = 2\pi : 86164 = 0,000073.$$

Für Hannover ist

$$\vartheta = 52^\circ 23', \quad \sin \vartheta = 0,7921, \quad \omega \cdot \sin \vartheta = 0,0000578,$$

$$\frac{N_2}{mg} = \frac{2 \cdot w \cdot 0,0000578}{9,81} = 0,00001178 w.$$

Hiernach übt auf der nördlichen Halbkugel ein mit $20 \frac{m}{s}$ Geschwindigkeit längs des Meridians fahrender Eisenbahnzug von 150000 kg Gewicht eine wagerechte Druckkraft gegen die rechtsseitige Schiene aus von

$$N_2 = 150000 \cdot 0,00001178 \cdot 20 = 35,3 \text{ kg}.$$

Auf einer zweigleisigen Bahn, wo jedes Gleis stets in derselben Fahrriichtung benutzt wird, also stets dieselbe Schiene den Seitendruck N_2 empfängt, würde man trotz der Kleinheit von N_2 im Verhältnis zu mg vielleicht auf den Gedanken kommen können, der Gefahr einer seitlichen Verschiebung des Gleises oder gar einer Entgleisung nach rechts durch eine Überhöhung der rechtsseitigen Schiene vorzubeugen, wie man in Eisenbahnkurven die äußere Schiene überhöht (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 77). Für den Winkel α ,

um den die Querlinie des Gleises gegen die Wagerechte gedreht werden müßte, gilt

$$2) \quad \alpha = \frac{N_2}{m g} = \frac{35,3}{150\,000} = 0,000\,235\,6,$$

was bei 1500^{mm} Schienenentfernung einer Überhöhung der rechtsseitigen Schiene um 0,35^{mm} entspricht. Eine so geringe Überhöhung hat aber praktisch weder Sinn noch Zweck. Da in einer Kurve vom Halbmesser ϱ für den Winkel α gilt (1. Teil, Aufl. 4, S. 77)

$$\alpha = \frac{w^2}{g \varrho},$$

so würde obiger Wert von α bei $w = 20^m/s$, einem Krümmungshalbmesser $\varrho = 173\,100^m$ entsprechen.

Wird ein Massenpunkt mit der Geschwindigkeit w längs des Meridians in Bewegung gesetzt, ist aber eine vorgeschriebene Bahn, welche die Druckkraft ausüben könnte, nicht vorhanden, so wird er mit einer der zweiten Ergänzungskraft entsprechenden Beschleunigung $2 w \cdot \omega \cdot \sin \vartheta$ vom Meridiane nach rechts hin abweichen. Bleibt diese Beschleunigung während der Zeit t unverändert, so erfährt der Punkt eine seitliche Abweichung

$$3) \quad z = w \cdot \omega \cdot \sin \vartheta \cdot t^2 = l \cdot \omega \cdot \sin \vartheta \cdot t,$$

wenn man $w \cdot t$ mit l vertauscht. Diese Abweichung kommt z. B. in Frage, wenn ein Massenpunkt in der Richtung des Meridians geworfen wird. Darin bedeutet w die mittlere wagerechte Seitengeschwindigkeit.

In dem Beispiel auf S. 132 wurde die Wurfweite von 8460^m in 19,14^s. zurückgelegt. Die hiernach berechnete rechtsseitige Abweichung ergibt sich zu

$$z = 8460 \cdot 0,000\,057\,8 \cdot 19,14 = 9,36^m,$$

wenn das Geschütz in der Richtung des Meridians in der geographischen Breite Hannovers abgefeuert wird.

Unmittelbare Berechnung der seitlichen Abweichung.

Die Beseitigung der Bewegung des Raumes, in welchem die scheinbare Bewegung erfolgt, und die Ersetzung derselben durch die Ergänzungskräfte ist zwar für die Beantwortung mancher Frage sehr vorteilhaft, verdunkelt aber den wirklichen Vorgang; es ist

deshalb nützlich, in geeigneten Fällen die scheinbare Bewegung auch durch Betrachtung der wirklichen Bewegungsverhältnisse zu untersuchen. Solches möge hier hinsichtlich der seitlichen Abweichung nach rechts (auf der nördlichen Halbkugel) geschehen.

Bei dem Übergange des Massenpunktes von A nach B (Fig. 127) ändert sich der Drehungshalbmesser von x auf $x + dx$, d. h. von $r \cos \vartheta$ auf $r (\cos \vartheta - \sin \vartheta \cdot d\vartheta)$. Der Punkt A der Erdoberfläche hat die Umdrehungsgeschwindigkeit $x \cdot \omega$, der Punkt B aber die um $r \cdot \omega \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta$ kleinere. Der von

A nach B kommende Massenpunkt bringt nun außer der scheinbaren Geschwindigkeit w längs des Meridianes die Drehungsgeschwindigkeit $x \cdot \omega = r \cdot \omega \cdot \cos \vartheta$ längs des Parallelkreises mit und ist nun, nachdem er in B angekommen, der hier langsamer sich bewegenden Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit $r \cdot \omega \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta$ nach Osten vorausgeeilt. Dem entspricht in der Zeit dt eine östliche Voreilung um

$$dz = r \cdot \omega \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot dt,$$

oder, weil $r \cdot d\vartheta = AB = w \cdot dt$ ist, um $dz = w \cdot \omega \cdot \sin \vartheta \cdot dt^2$, also für kleine endliche Bewegungen in kurzem Zeitraume t um

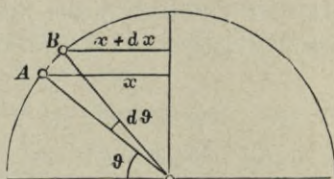
$$z = w \cdot \omega \cdot \sin \vartheta \cdot t^2,$$

oder auch, wenn man die Wegeslänge $AB = w \cdot t = l$ setzt;

$$z = l \cdot \omega \cdot \sin \vartheta \cdot t,$$

übereinstimmend mit Gl. 3.

Fig. 127.



4. Vorgeschriebene Bewegung längs einer lotrechten Bahn auf der sich drehenden Erde.

In einem lotrechten Rohre AB (Fig. 128) von der Höhe h falle ein Massenpunkt; dann ist zunächst die Schwere eine der wirklichen Kräfte. Von den Ergänzungskräften ist die erste schon berücksichtigt, wenn man mit der scheinbaren Schwere rechnet. Legt man nun durch A eine zur Erdachse SN parallele Achse

und erteilt der Bahn AB eine Drehung ω , so bewegt sich der Endpunkt B nicht nach vorn, sondern nach rückwärts im Sinne nach Westen; die Bahnlinie bildet mit der Drehachse einen Winkel $\alpha = 90^\circ - \vartheta$, wenn ϑ die geographische Breite des Ortes A ; daher ist die zweite Ergänzungskraft $2m \cdot w \cdot \omega \cdot \cos \vartheta$, u. zw. mit dem Sinne nach Osten, und da die scheinbare Bahnlinie AB geradlinig ist, so wird diese Ergänzungskraft aufgehoben durch eine entgegengesetzte Kraft

$$1) \quad N_2 = 2m \cdot w \cdot \omega \cdot \cos \vartheta,$$

welche nach Westen gerichtet ist, also von der östlichen Rohrwandseite ausgeübt wird.

Der Massenpunkt drückt daher mit einer Kraft N_2 gegen die östliche Seite der Rohrwand und wird, wenn man das Rohr entfernt, den Punkt also frei fallen läßt, mit der Beschleunigung $2w \cdot \omega \cdot \cos \vartheta$ von der Lotrechten in östlichem Sinn abweichen. Ist AB (Fig. 129) die Lotrechte, APC die Bahn des freien Falles in bezug auf die sich drehende Erde, z die östliche Abweichung, so ist

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 2 \cdot w \cdot \omega \cdot \cos \vartheta.$$

Die Geschwindigkeit w längs APC kann wegen der Geringfügigkeit von z nach den gewöhnlichen Fallgesetzen beurteilt werden; dann ist $w = gt$, also

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 2 \cdot g \cdot t \cdot \omega \cdot \cos \vartheta.$$

Dies gibt $\frac{dz}{dt} = g \cdot \omega \cdot \cos \vartheta \cdot t^2,$

wobei die Integrationskonstante fortbleibt, weil für $t = 0$ auch

$$w = 0, \quad N_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

sein muß. Weiter wird

$$z = g \cdot \omega \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{t^3}{3};$$

Fig. 128.

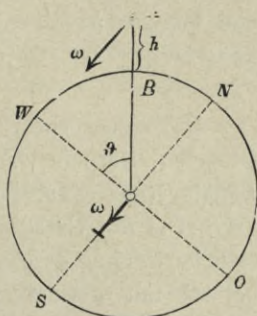
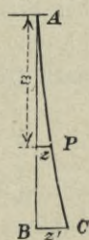


Fig. 129.



hieraus kann mit $x = \frac{gt^2}{2}$ also $t^2 = \frac{2x}{g}$ die Zeit entfernt werden.

Es wird
$$z = g \cdot \omega \cdot \frac{\cos \vartheta}{3} \left(\frac{2x}{g} \right)^{3/2},$$

und für $x = h$:

$$2) \quad z' = \frac{2}{3} \omega \cdot \cos \vartheta \cdot h \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Die eigentliche Ursache dieser östlichen Abweichung eines frei fallenden Körpers von der Lotrechten, die am Pole Null, am Äquator (mit $\cos \vartheta = 1$) am größten ist, liegt natürlich darin, daß der bei A freigelassene Körper die seiner Anfangslage entsprechende östliche Umfangsgeschwindigkeit der Erddrehung mitbringt und der bei B mit geringerer Umfangsgeschwindigkeit sich bewegenden Stelle der Lotrechten also vorausseilt. Daher ist auch auf beiden Halbkugeln der Erde die Abweichung übereinstimmend nach Osten gerichtet.

Versuche über diesen Vorgang sind besonders in einem Schachte bei Freiberg in Sachsen angestellt worden. Dort ist die geographische Breite $\vartheta = 51^\circ$; die Fallhöhe betrug 158,5 m. Dann ist nach Gl 2:

$$z' = \frac{2}{3} \cdot 0,000\,073 \cdot 158,5 \cdot \cos 51^\circ \sqrt{\frac{2 \cdot 158,5}{9,81}} = 0,0276 \text{ m},$$

während die Beobachtung 0,0283 m ergab. Der Unterschied beider Zahlen ist leicht dadurch zu erklären, daß wegen des Luftwiderstandes die Falldauer $> \sqrt{\frac{2h}{g}}$ werden muß.

5. Einfluß der Drehung der Erde auf die Pendelschwingung; Foucaultscher Pendelversuch.

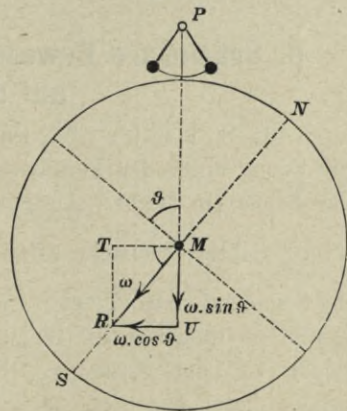
Bei kleinem Ausschlagwinkel kann die Pendelbewegung nach S. 142/43 annähernd als geradlinige Schwingungsbewegung aufgefaßt werden. Das S. 142 entwickelte Gesetz der Pendelschwingung galt unter der Annahme, daß die Erde in Ruhe sei; unter dieser Voraussetzung erfolgt die Schwingung in einer unveränderlichen lotrechten Ebene. Untersucht man aber die scheinbare Bewegung

eines Pendels in bezug auf die sich drehende Erde, so ergibt sich eine von dem französischen Physiker Foucault (geboren am 18. September 1819 zu Paris, gestorben daselbst am 11. Februar 1868) im Jahr 1852 gefundene Abweichung. Bei einem am Äquator schwingenden Pendel haben Aufhängepunkt, Erdoberfläche, sowie auch der Massenpunkt des Pendels die sehr große Umfangsgeschwindigkeit der Erde nahezu gemeinsam. Daher sind die Verhältnisse mit großer Annäherung dieselben, als ob das Pendel in einem Raum aufgehängt wäre, der eine geradlinige, gleichförmige Verschiebung erfährt; die scheinbare Schwingung erfolgt daher ganz so, wie es bei ruhender Erde geschehen würde; nur kommt statt der wahren Fallbeschleunigung die scheinbare Fallbeschleunigung am Äquator, d. h. $g_0 = 9,781$ (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 98) bei der Berechnung der Schwingungsdauer zur Anwendung.

Ist ein Pendel aber am Pol aufgehängt, so hat der Aufhängepunkt keine Bewegung. Auf den Massenpunkt wirkt die wahre Schwere mit der Fallbeschleunigung $g = 9,831$ (1. Teil, Aufl. 4, S. 100) und die Fadenspannkraft.

Die wahre Pendelschwingung erfolgt in einer unveränderlichen Ebene. Die Erde bildet einen Raum, der sich gegen diese unveränderliche Ebene in einem Sterntage ein Mal in dem Sinne von Westen nach Osten dreht; umgekehrt wird also die Schwingungsebene des Pendels in einem Sterntage sich ein Mal in dem Sinne von Osten nach Westen scheinbar gegen die Erde drehen.

Fig. 130.



Ist das Pendel aber bei P (Fig. 130) in einer nördlichen geometrischen Breite ϑ aufgehängt, so kann man, um die scheinbare Bewegung der Schwingungsebene des Pendels zu finden, die Winkelgeschwindigkeit ω der Erde als Strecke MR auftragen und nach dem Satze vom Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten (S. 20) in die Teilstrecken $UR = \omega \cdot \cos \vartheta$ und $MU = \omega \cdot \sin \vartheta$ zerlegen. Von diesen beiden hat $\omega \cdot \cos \vartheta$,

wie vorstehend für das am Äquator aufgehängte Pendel erläutert, keinen Einfluß auf die Schwingungsebene des Pendels, sondern nur eine verkleinernde Wirkung auf die scheinbare Fallbeschleunigung $g_{\vartheta} = 9,806 - 0,025 \cos 2 \vartheta$ (1. Teil, Aufl. 4, S. 100). Die Winkelgeschwindigkeit $\omega \cdot \sin \vartheta$, deren Achse durch den Aufhängepunkt P des Pendels geht, bedingt aber, nach Vergleich mit dem für ein am Pol aufgehängtes Pendel, eine scheinbare Drehung der Schwingungsebene mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \cdot \sin \vartheta$ in einem Sinne, welcher der Drehung der Erde entgegengesetzt ist, d. h. in demselben Sinne, in welchem der scheinbare Umlauf der Sonne um die Erde erfolgt, nämlich für die nördliche Halbkugel von Ost über Süd nach West, für die südliche Halbkugel von Ost über Nörd nach West. Da die Winkelgeschwindigkeit ω der Erde einer Umlaufszeit gleich einem Sterntag entspricht, so wird bei der kleineren Geschwindigkeit $\omega \cdot \sin \vartheta$ ein Umlauf die Zeit von $1 : \sin \vartheta$ Tagen erfordern. Für Hannover mit $\sin \vartheta = 0,7921$ ergibt dies 1,26 Tage. In dieser Zeit dreht sich die Schwingungsebene des Pendels scheinbar um die durch den Aufhängepunkt desselben gelegte Lotrechte.

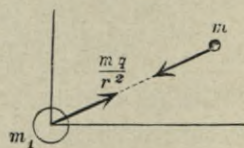
6. Scheinbare Bewegung der Planeten in bezug auf die Sonne.

Auf S. 118 bis 122 wurde die Bewegung der Planeten um die Sonne unter der Voraussetzung behandelt, daß der Mittelpunkt der Sonne ein festes Anziehungszentrum sei. Dies ist aber nicht streng richtig; vielmehr wirkt die Kraft $\frac{m q}{r^2}$ (Gl. 1, S. 118), welche die Sonne auf einen Planeten von der Masse m ausübt, in umgekehrtem Sinne auch auf die Sonne von der Masse m_1 (Fig. 131) und erteilt dieser eine stets nach dem Planeten gerichtete Beschleunigung

$$p_2 = \frac{m q}{m_1 r^2}.$$

Die Keplerschen Gesetze betreffen nur die scheinbare Bewegung der Planeten in bezug auf die Sonne, d. h. in bezug auf ein durch den Mittelpunkt der Sonne gelegtes, mit diesem sich

Fig. 131



parallel verschiebendes Achsenkreuz. Um die scheinbare Beschleunigung zu erhalten, muß man zu der wahren Beschleunigung $p = q : r^2$ des Planeten im Sinne nach der Sonne noch das entgegengesetzte der Beschleunigung p_2 hinzufügen. Da nun $+p_2$ den Sinn von der Sonne nach dem Planeten hat, so ist der Sinn der Ergänzungsbeschleunigung $-p_2$ ebenso wie p vom Planeten nach der Sonne gerichtet, und die scheinbare Beschleunigung p_1 wird die Summe beider, nämlich

$$p_1 = \frac{q}{r^2} \left(1 + \frac{m}{m_1} \right).$$

Da die früheren Untersuchungen S. 118 auf einer Beschleunigung $q : r^2$ beruhten, so sind deren Ergebnisse noch in der Weise zu berichtigen, daß der von der Sonnenmasse abhängige Festwert q durchweg noch mit $1 + \frac{m}{m_1}$ multipliziert wird. Für die Bewegung der Planeten ist diese Änderung unbedeutend, da $m : m_1$ meist eine kleine Zahl, für die Erde 1 : 355 000, für den Jupiter freilich etwa 1 : 1000. Für die Bewegung des Mondes um die Erde ist dieser Umstand schon erheblicher, da deren Massenverhältnis etwa 1 : 77 beträgt.

Vierte Abteilung.

Mechanik einer Gruppe von Massenpunkten.

Jede beliebige Anzahl von Massenpunkten, deren Bewegungen in irgendwelchen Beziehungen zueinander stehen, oder deren gleichzeitige Bewegungen wir betrachten, kann in ihrer Gesamtheit als eine Massengruppe angesehen werden. In der Regel werden die einzelnen Massenpunkte einer Gruppe gegenseitige Kräfte aufeinander ausüben, die man als innere Kräfte der Gruppe bezeichnet; infolge davon wird die Bewegung eines Punktes der Gruppe einen gewissen Einfluß auf die Bewegung der anderen Punkte ausüben. Aber auch, wenn diese Kräfte Null sind, so daß die Massenpunkte gar nicht aufeinander einwirken, kann man sie als eine Gruppe von Massenpunkten auffassen.

A. Gleichgewicht einer Massengruppe.

1. Satz der willkürlichen Verrückungen; Satz der virtuellen Verrückungen.

Man bezeichnet eine Massengruppe als im Gleichgewichte befindlich, wenn jeder ihrer Massenpunkte im Gleichgewicht ist, d. h. ruht, oder sich gleichförmig, geradlinig bewegt. Damit dieser Fall sei, müssen die an jedem Massenpunkte wirkenden Kräfte sich aufheben, d. h. eine Mittelkraft von der Größe Null liefern.

Diese Mittelkraft Null verrichtet bei jeder Bewegung des Massenpunktes auch eine Arbeit von der Größe Null. Da nun für einen Massenpunkt die Arbeit der Mittelkraft gleich der Arbeitssumme der Einzelkräfte ist (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 45), so muß, wenn die an einem Massenpunkte wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sein sollen, die Arbeitssumme dieser Kräfte bei jeder Bewegung des Massenpunktes sich zu Null ergeben. Auch wenn der Massenpunkt in Wirklichkeit sich gar nicht bewegt, kann man, um aus der Nullsetzung der Arbeitssumme der an ihm wirkenden Kräfte die erforderlichen Bedingungen für das Gleichgewicht dieser Kräfte abzuleiten, ihm irgendeine beliebige Bewegung erteilt denken und kann diese gedachte Bewegung stets so wählen, wie es für die gerade gewünschte Bedingungsgleichung zweckmäßig erscheint.

Befindet sich z. B. ein Massenpunkt in Ruhe unter Einwirkung eines gegebenen Gewichtes Q und zweier Kräfte K_1 und K_2 , deren Größen unbekannt sind, deren Richtungen aber mit der Lotrechten gegebene Winkel α_1 und α_2 bilden (Fig. 132), so kann man die Größen der Kräfte K_1 und K_2 durch Nullsetzung der Arbeitssumme bei zwei beliebigen Bewegungen finden. Denkt man zunächst dem Massenpunkt eine wagerechte Bewegung AB erteilt, so verrichtet die Schwerkraft Q dabei keine Arbeit (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 45), weil Q rechtwinklig zu AB ist. Die Wegeslänge AB gibt auf der Richtung von K_1 eine Projektion $AB \cdot \sin \alpha_1$, auf der Richtung von K_2 eine Projektion $-AB \cdot \sin \alpha_2$. Sonach liefert die Nullsetzung der Arbeitssumme

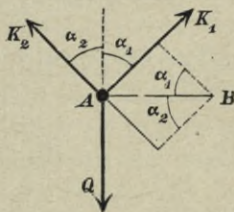
$$0 = K_1 \cdot AB \cdot \sin \alpha_1 - K_2 \cdot AB \cdot \sin \alpha_2 \quad \text{oder}$$

$$1) \quad 0 = K_1 \cdot \sin \alpha_1 - K_2 \sin \alpha_2.$$

Denkt man dagegen dem Massenpunkt eine lotrechte Bewegung AC erteilt (Fig. 133), so verrichtet

$$\begin{aligned} Q \text{ die Arbeit} & - Q \cdot AC, \\ K_1 \text{ „ „} & K_1 \cdot AC \cdot \cos \alpha_1, \\ K_2 \text{ „ „} & K_2 \cdot AC \cdot \cos \alpha_2. \end{aligned}$$

Fig. 132.



Sonach liefert die Nullsetzung der Arbeitssumme:

$$0 = -Q \cdot AC + K_1 \cdot AC \cdot \cos \alpha_1 + K_2 \cdot AC \cdot \cos \alpha_2 \quad \text{oder} \\ 2) \quad 0 = -Q + K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2.$$

Diese Gleichungen 1 und 2 sind offenbar nichts anderes als die im 1. Teil, Aufl. 4, S. 70 gegebene Regel: Es muß die Summe aller wagerechten Seitenkräfte Null sein und die Summe aller lotrechten Seitenkräfte ebenfalls. Nach Gl. 1 ist

$$K_2 = K_1 \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2};$$

setzt man dies in Gl. 2 ein, so wird

$$Q = K_1 \cos \alpha_1 + K_1 \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cos \alpha_2 \\ = K_1 \frac{(\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \sin \alpha_1)}{\sin \alpha_2} \quad \text{oder}$$

$$3) \quad K_1 = Q \frac{\sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad \text{ebenso wird}$$

$$4) \quad K_2 = Q \frac{\sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Diese gedachten Bewegungen AB und AC waren für die Berechnung von K_1 und K_2 nicht gerade sehr bequem, weil sie auf zwei Gleichungen mit je zwei Unbekannten führten. Man kann die gedachte Bewegung aber auch so einrichten, daß man für jede der Unbekannten nur je eine Gleichung bekommt. Wählt man die gedachte Bewegung AD rechtwinklig zu K_2 (Fig. 134), so verrichtet K_2 bei der Bewegung AD die Arbeit Null; AD liefert auf den Richtungen K_1 und Q die Projektionen $AD \cdot \sin (\alpha_1 + \alpha_2)$ bzw. $-AD \cdot \sin \alpha_2$. Die Nullsetzung der Arbeitssumme gibt:

$$0 = K_1 \cdot AD \cdot \sin (\alpha_1 + \alpha_2) - Q \cdot AD \cdot \sin \alpha_2$$

und führt unmittelbar auf Gl. 3. Man kann also durch zweckmäßige Wahl der gedachten Bewegung denselben Vorteil erreichen

Fig. 133.

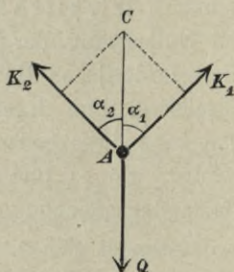
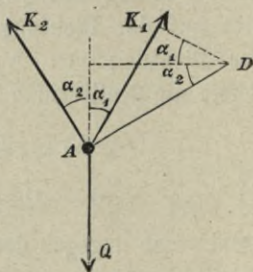


Fig. 134.



wie durch Anwendung der Momentengleichung unter Benutzung eines auf der Richtungslinie von K_2 gelegenen Drehpunktes. Dieses Verfahren wird besonders dann wertvoll sein, wenn es sich gar nicht um die Entwicklung aller unbekanntener Kräfte handelt, sondern z. B. in dem Falle der Fig. 134 vielleicht nur K_1 ermittelt werden soll.

Wendet man dies nun auf eine Massengruppe an, so kann man jedem Punkte derselben beliebige Bewegungen erteilt denken und die für jeden Punkt berechnete Arbeitssumme gleich Null setzen. Solche ganz willkürliche Lageänderungen nennt man Verrückungen. An jedem Punkte muß die Arbeitssumme von der Größe Null sein, mithin auch die Arbeitssumme an der ganzen Massengruppe. Daher hat man den **Satz der willkürlichen Verrückungen**: Ist eine Massengruppe im Gleichgewichte, so muß die Summe der von sämtlichen an der Massengruppe wirkenden Kräften bei jeder willkürlichen oder gedachten Verrückung verrichteten Arbeiten sich gleich Null ergeben.

In dieser allgemeinen Form freilich ist vorstehender Satz wenig verwendbar, denn in den meisten Fällen der Anwendung besteht die Massengruppe aus sehr vielen Punkten, die durch Kräfte aufeinander wirken, so daß in der Arbeitssumme sehr viel Unbekannte auftreten würden. Die Kräfte lassen sich aber derartig in zwei Gruppen zerlegen, daß die Arbeitssumme der einen Gruppe unter gewissen Bedingungen ohne besondere Untersuchung gleich Null gesetzt werden kann, so daß man nur noch die Arbeitssumme der zweiten Gruppe aufzustellen braucht. In vielen Fällen nämlich sind die einzelnen Massenpunkte nicht ganz frei beweglich, sondern hinsichtlich ihrer Verrückbarkeit an bestimmte Bedingungen gebunden, die sich durch geometrische Gleichungen ausdrücken lassen. Jede Beschränkung der freien Beweglichkeit kann aber auch aufgefaßt werden als Wirkung von Kräften, die genau so beschaffen sind, daß sie eine Abweichung von den beschränkenden Bedingungen verhindern. Diese Kräfte mögen Bedingungs- oder bedingte Kräfte genannt werden, während die übrigen Kräfte als unbedingte Kräfte bezeichnet werden sollen.

Bei einer ganz willkürlichen Verrückung der Massenpunkte, welche auf die beschränkenden Bedingungen keine Rücksicht nimmt, würden sowohl die bedingten, wie auch die unbedingten Kräfte-

Arbeiten ergeben; erteilt man aber der Massengruppe nur solche Verrückungen, welche mit den die freie Beweglichkeit beschränkenden Bedingungen verträglich sind, so liefern, wie sich zeigen läßt, die bedingten Kräfte für sich allein die Arbeitssumme Null, so daß man dann zur Prüfung des Gleichgewichtszustandes nur die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null zu setzen braucht. Solche mit gegebenen Bedingungsgleichungen verträgliche Bewegungen einer Massengruppe nennt man **virtuelle Verrückungen** (von *virtus* = Fähigkeit, Möglichkeit) und die dabei sich ergebenden Arbeiten der bedingten Kräfte **virtuelle Arbeiten**.

Die Beschränkungen der freien Beweglichkeit können verschiedener Art sein:

1. Es können einzelne Punkte unbeweglich, also feste Punkte sein. Sind x, y, z die Koordinaten eines solchen Punktes P , so sind die geometrischen Bedingungsgleichungen für die Unbeweglichkeit:

$$x = a; \quad y = b; \quad z = c,$$

worin a, b, c unveränderliche Größen bedeuten sollen. Die entsprechende Bedingungskraft ist aber ein Widerstand W , der den Punkt P unbeweglich erhält. Virtuelle Verrückungen würden in diesem Falle solche sein, bei denen der Punkt P seine Lage nicht ändert; dann ergibt aber auch die bedingte Kraft W keine Arbeit.

2. Es können einzelne Punkte gezwungen sein, auf gegebenen Flächen zu verbleiben. Für einen solchen Punkt wäre dann die Gleichung der Fläche $f(x, y, z) = 0$ die Bedingungsgleichung, der Normalwiderstand N der Fläche die Bedingungskraft. Virtuelle Verrückungen wären solche, bei denen der betreffende Punkt längs der Fläche, d. h. rechtwinklig zu N bewegt wird, wobei (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 45) von N keine Arbeit verrichtet wird.

3. Es kann auch ein Teil der Punkte miteinander in starrer Verbindung sein. Die Bedingungsgleichungen sind dann von der Form

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = a^2,$$

wenn x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Koordinaten zweier Punkte und a eine unveränderliche Länge ist. Die Bedingungskräfte sind die inneren Kräfte des starren Körperteiles, virtuelle Verrückungen solche, bei denen die starr verbundenen Punkte ihre gegenseitigen

Abstände nicht ändern. Die virtuellen Arbeiten der bedingten Kräfte sind dann (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 175) Null. Auch bei einer Verbindung einzelner Massenteile durch Ketten, Fäden oder dergl. von unveränderlicher Länge sind die virtuellen Arbeiten Null, wenn die Ketten oder Fäden bei der Verrückung nicht schlaff werden.

Auch jeder beliebige Teil eines elastisch-festen oder flüssigen Körpers oder überhaupt einer beliebig veränderlichen Massengruppe kann, wenn er im Gleichgewicht ist, hinsichtlich der Bedingungen des Gleichgewichts wie ein starrer Körper, wie eine Gruppe von starr miteinander verbundenen Massenpunkten behandelt werden. Denn es muß die Arbeitssumme aller an dem betreffenden Teile wirkenden Kräfte (nach S. 175) bei jeder willkürlichen Verrückung Null sein. Als Verrückung kann man daher auch eine solche wählen, bei der die einzelnen Massenpunkte genau in ihrer gegenseitigen Lage verbleiben. D. h. man kann sich jeden beliebigen Teil einer im Gleichgewichte befindlichen Massengruppe, z. B. eines elastisch-festen oder flüssigen Körpers, zur Untersuchung der **Bedingungen** des Gleichgewichts erstarrt denken und auf ihn die Bedingungen des Gleichgewichts starrer Körper anwenden. Die inneren Kräfte der Massengruppe, also die Spannkkräfte elastisch-fester Körper, sowie die inneren Normalkräfte flüssiger Körper sind dann bedingte Kräfte und liefern daher keine Arbeit.

Die sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht starrer Körper (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 178) sind mittels des S. 159 folgenden Satzes der virtuellen Verrückungen sehr leicht zu finden. Die inneren Kräfte kommen dabei nicht in Frage. Sind $K_1, K_2 \dots$ die äußeren Kräfte, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \dots$ die Winkel derselben gegen drei rechtwinklig zueinander stehende Achsen, so ergibt sich, wenn man dem Körper eine Parallelverschiebung parallel der x -Achse um dx erteilt, die Arbeitssumme $\sum K \cdot \cos \alpha \cdot dx = dx \sum K \cos \alpha$. Diese muß Null sein, mithin

$$1) \quad \sum K \cos \alpha = 0; \quad \text{ebenso}$$

$$2) \quad \sum K \cos \beta = 0;$$

$$3) \quad \sum K \cos \gamma = 0.$$

Erteilt man nun dem Körper eine Drehung um die x -Achse mit dem Drehungswinkel $\omega \cdot dt$, so ist, wenn man mit \mathfrak{M}_x die Summe der Momente der Kräfte K in bezug auf die x -Achse bezeichnet und zugleich bedenkt, daß nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 268 die Arbeit eines Kräftepaares gleich seinem Momente mal dem Drehungswinkel ist, die virtuelle Arbeit

$$0 = \mathfrak{M}_x \cdot \omega \cdot dt, \text{ mithin}$$

- 4) $\mathfrak{M}_x = 0$; ebenso
 5) $\mathfrak{M}_y = 0$;
 6) $\mathfrak{M}_z = 0$.

4. Wenn die Teile eines Triebwerkes, Zahnräder (Fig. 135), Reibungsräder, Riemenscheiben (Fig. 136) u. dergl. derartig ineinander greifen oder miteinander gekuppelt sind, daß sie an den Stellen des Eingriffes oder der Kuppelung Geschwindigkeiten von genau derselben Größe haben müssen, so liegen in dem geometrischen Zusammenhange des Triebwerkes die Bedingungsgleichungen. Die bedingten Kräfte sind die durch den Eingriff oder die Kuppelung ausgeübten. Da diese auf die miteinander gekuppelten Maschinenteile gleich und entgegengesetzt wirken, ihre Angriffspunkte auch genau gleiche Geschwindigkeiten haben, so verrichten diese Kräfte bei jeder virtuellen, d. h. mit dem geometrischen Zusammenhange verträglichen Ver-rückung, Arbeiten, die sich gegenseitig aufheben.

Unter einen dieser vier Hauptfälle ist jede Aufgabe zu bringen, bei welcher eine Massengruppe im Gleichgewicht ist und zugleich durch gewisse Bedingungsgleichungen in der freien Beweglichkeit der einzelnen Punkte beschränkt ist.

Fig. 135.

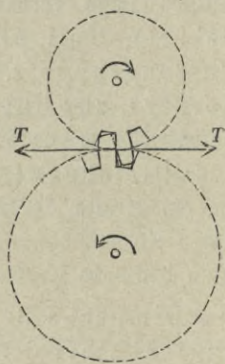
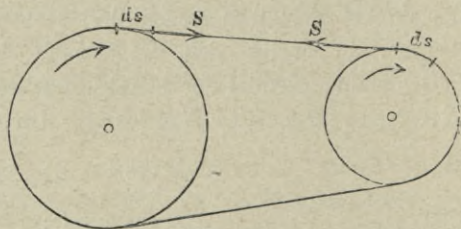


Fig. 136.



Da der Gleichgewichtszustand in manchen Fällen nur bei einer bestimmten Lage der Massengruppe besteht, also bei einer endlichen Verrückung gestört werden könnte, so darf man im allgemeinen zur Ermittlung der Bedingungen des Gleichgewichts nur unendlich kleine Verrückungen benutzen.

Hiernach lautet der **Satz der virtuellen Verrückungen**:

Befindet sich eine Massengruppe im Gleichgewichte, so ist für jede unendlich kleine virtuelle Verrückung die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null; die Arbeiten dieser unbedingten Kräfte bei virtuellen Verrückungen heißen virtuelle Arbeiten. Die Normalwiderstände einer vorgeschriebenen Fläche oder Linie, die Kräfte, welche Zahnräder aufeinander ausüben, sind zwar bedingte Kräfte, die keine virtuellen Arbeiten liefern; dies gilt aber nicht von etwaigen Reibungswiderständen, die beim Gleiten unter Einwirkung dieser Kräfte entstehen und von ihnen abhängig sind. Die Reibungswiderstände verrichten auch bei virtuellen Verrückungen Arbeit und sind deshalb den unbedingten Kräften beizuzählen. Aus diesem Grunde eignet sich der Satz der virtuellen Verrückungen besonders für die Behandlung solcher Aufgaben, bei denen Reibungswiderstände nicht zu berücksichtigen sind, so daß dann auch die betreffenden Normaldrücke gar nicht ermittelt zu werden brauchen.

2. Anwendungen der Sätze der willkürlichen bzw. der virtuellen Verrückungen.

a) Hebel.

Es sei O (Fig. 137) die feste Drehachse des Hebels, A der Angriffspunkt der Last Q , B derjenige der bewegenden Kraft K . Drehachse und Gelenkbolzen seien reibungslos. Eine unendlich kleine virtuelle Verrückung besteht in einer unendlich kleinen Drehung des Hebels um die feste Achse O . Der Drehungswinkel sei $d\alpha$. Dann beschreiben A und B Drehungsbogen

$$\widehat{AA_1} = \overline{AO} \cdot d\alpha \quad \text{und} \quad \widehat{BB_1} = \overline{BO} \cdot d\alpha,$$

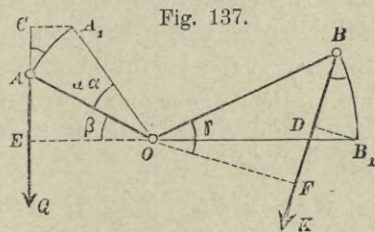


Fig. 137.

welche als geradlinig und rechtwinklig zu AC und BO angesehen werden können. Ist β der Winkel, den AO mit der Rechtwinkligen OE zu der Last Q bildet, so findet sich der gleiche Winkel β auch zwischen AA_1 und der Last Q , so daß die Projektion von AA_1 auf die Richtung von Q ist

$$AC = AA_1 \cos \beta = AO \cdot d\alpha \cdot \cos \beta = OE \cdot d\alpha.$$

Ebenso wird auf der rechten Seite

$$BD = BB_1 \cdot \cos \gamma = OB \cdot \cos \gamma \cdot d\alpha = OF \cdot d\alpha.$$

Der Widerstand der Drehachse O sowie die inneren Spannungen des als starr angenommenen Hebels sind bedingte Kräfte. Unbedingte Kräfte sind nur die Last Q und die treibende Kraft K ; daher gilt nach dem Satze der virtuellen Verrückungen

$$0 = -Q \cdot AC + K \cdot BD, \text{ oder}$$

$$K \cdot OF \cdot d\alpha = Q \cdot OE \cdot d\alpha, \text{ d. h.}$$

$$K \cdot OF = Q \cdot OE.$$

Dies ist nichts anderes als die Momentengleichung für den Hebel in bezug auf seine Drehachse (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 197).

b) Schiefe Ebene.

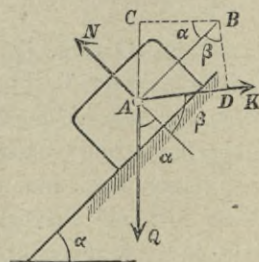
Soll ein Körper vom Gewichte Q auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel α durch eine Kraft K , welche mit der Normalen der Ebene den Winkel β einschließt, gleichförmig aufwärts gezogen werden (Fig. 138) und soll dabei die Reibung zunächst unberücksichtigt bleiben, so fassen wir eine Gleitbewegung des Körpers längs der Ebene um die Strecke AB als virtuelle Verrückung auf. Dann kann man den Normalwiderstand N als bedingte Kraft außer acht lassen. Es ist

$\sphericalangle ABC = \alpha$; $\sphericalangle ABD = \beta$, somit

$$1) \quad 0 = -Q \cdot AB \cdot \sin \alpha + K \cdot AB \cdot \sin \beta, \text{ oder}$$

$$2) \quad K = Q \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Fig. 138.



Diese Gleichung gilt auch für gleichförmige Abwärtsbewegung und auch für die Ruhe des Körpers.

Soll aber die Reibung $f \cdot N$ mit berücksichtigt werden, etwa für die Aufwärtsbewegung, so ergibt sich zunächst leicht wie Gl. 1:

$$0 = -Q \cdot AB \cdot \sin \alpha + K \cdot AB \cdot \sin \beta - fN \cdot AB, \text{ oder}$$

$$3) \quad K \cdot \sin \beta = Q \cdot \sin \alpha + fN.$$

Nun aber muß man noch N finden, und dies ist mittels einer virtuellen Verrückung, d. h. einer solchen längs der Ebene, nicht möglich; man muß hierzu den allgemeinen Satz der willkürlichen Verrückungen (S. 175) anwenden. Wir erteilen (Fig. 139) dem Körper eine Parallelverschiebung um die Strecke AE im Sinne von N und behandeln diese nur insofern als eine virtuelle Verrückung in beschränkter Form, indem wir den Körper als eine starre Massengruppe sich parallel verschieben lassen. N gehört nun zu den unbedingten Kräften. Der Verschiebungsweg AE gibt auf den Richtungen von Q , K und $f \cdot N$ die Projektionen: $AE \cdot \cos \alpha$; $AE \cdot \cos \beta$ und Null. Daher wird

$$0 = N \cdot AE - Q \cdot AE \cdot \cos \alpha - K \cdot AE \cdot \cos \beta, \text{ also}$$

$$N = Q \cdot \cos \alpha + K \cdot \cos \beta.$$

Setzt man dies in Gl. 3 ein, so ergibt sich

$$K \sin \beta = Q \sin \alpha + fQ \cos \alpha + fK \cos \beta \text{ oder}$$

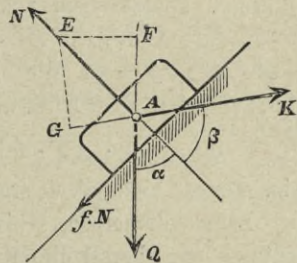
$$K = Q \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\sin \beta - f \cos \beta}.$$

Vertauscht man noch f mit $\operatorname{tg} \varphi$ ($\varphi =$ Reibungswinkel) und multipliziert in Zähler und Nenner mit $\cos \varphi$, so läßt sich die letzte Gleichung leicht zusammenziehen in

$$4) \quad K = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)}$$

(vgl. 1. Teil, Aufl. 4, S. 240, Gl. 6).

Fig. 139.



Allerdings kann man diese Gleichung auch unmittelbar erhalten, indem man für den zu betrachtenden Sinn der Gleitbewegung (in diesem Fall also nach aufwärts) die Richtung des Gesamtwiderstandes W der schiefen Ebene, d. h. der Mittelkraft aus N und $f \cdot N$, bestimmt, welche von N um den Reibungswinkel φ abweicht, und dem Körper dann eine Verschiebung AF , rechtwinklig zu W erteilt (Fig. 140). Sind dann AC und AD die rechtwinkligen Projektionen von AF auf Q und K , so ist $\sphericalangle AFC = \alpha + \varphi$, $\sphericalangle AFD = \beta - \varphi$; die Projektion von AF auf W wird Null, und es muß

$$0 = -Q \cdot AF \cdot \sin(\alpha + \varphi) + K \cdot AF \cdot \sin(\beta - \varphi)$$

sein, woraus sich Gl. 4 ergibt.

Längs derselben schiefen Ebene bleiben die Gleichgewichtsbedingungen überall dieselben; daher war es in diesem Falle gleichgültig, ob die Verrückung endlich oder unendlich klein gewählt wurde. Sollte aber der Körper auf einer gekrümmten Fläche durch die Kraft K gehalten, oder langsam aufwärts bewegt oder auch langsam hinabgelassen werden (Fig. 141), so würde die Kraft K von dem Winkel α abhängig sein; daher muß man in diesem Fall unendlich kleine Verrückungen benutzen.

Geschichtliches. Aus der Behandlung des Körpers auf schiefer Ebene ist leicht zu erkennen, daß die Benutzung des Satzes der virtuellen Verrückungen eigentlich nur für solche Fälle bequem ist, bei denen die Reibung nicht berücksichtigt werden soll. Dieses Ergebnis prägt sich auch in der Weise aus, wie der Satz in der Mechanik Anwendung gefunden hat. Er wurde nämlich für den Hebel, für Rollen und Flaschenzüge von Stevin (geb. 1548 zu Brügge, gest. 1620 zu Haag) als gültig erkannt, für die schiefe Ebene und den Keil 1655 von Galilei (geb. 18. Februar 1564 zu Pisa, gest. 8. Januar 1642 zu Arcetri). Joh Bernoulli

Fig. 140.

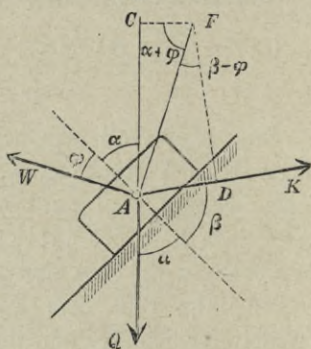
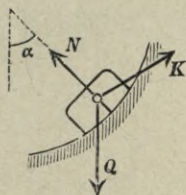


Fig. 141.



(geb. 1667 zu Basel, gest. daselbst 1748) zeigte 1717, daß der allgemeine Satz der willkürlichen Verrückungen zur Lösung aller Aufgaben des Gleichgewichts benutzt werden könne, und Lagrange (geb. 1736 zu Turin, gest. 1813 zu Paris) hat ihn 1788 zu einer der Grundlagen seines Werkes über analytische Mechanik gemacht. Bis gegen das Ende des 18. Jahrhunderts berechnete man die Wirkung von Maschinen noch ohne eingehende Berücksichtigung der Reibung und konnte daher mit der Behandlung einer Maschine als Ganzes nach dem Satze der virtuellen Verrückungen sich begnügen. Die Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper wurden von Poinsot (geb. 1774 zu Paris, gest. daselbst 1859) in der jetzt gebräuchlichen Form entwickelt.

Mit den Fortschritten des Maschinenbaues ergab sich die Notwendigkeit einer genaueren Berechnung unter Berücksichtigung aller Reibungswiderstände; dies führte zu einer eingehenden Betrachtung der einzelnen Maschinenteile und aller an ihnen auftretenden Kräfte, wozu die Gleichgewichtsbedingungen in der im 1. Teile, Aufl. 4, S. 178 mitgeteilten Form besser geeignet waren als der Satz der willkürlichen Verrückungen. Erleichtert wurden diese Rechnungen noch durch die Benutzung des Reibungswinkels (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 235), des Kraftecks und des Seilecks (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 131). Erneute Anwendung hat nun aber der Satz der virtuellen Verrückungen gefunden für die Berechnung der Fachwerke, u. zw. 1864 durch Clerk Maxwell (geb. 1830, gest. 1879) und im Jahre 1874 durch Mohr in Dresden (s. Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, 2. Aufl., 2. Teil, S. 22 u. 32).

Da die Fachwerke als Verbindungen von Stäben mit reibungslosen Gelenken aufgefaßt werden, so sind sie für die Anwendung des Satzes der virtuellen Verrückungen in hervorragender Weise geeignet (s. Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, 2. Aufl., 2. Teil, S. 333 u. f.).

c) Aufzugsmaschinen.

Bei der in Fig. 142 dargestellten Bockwinde sind die einzelnen Teile des Triebwerks derartig miteinander verkuppelt, daß irgend einer Geschwindigkeit v der Kurbel eine dadurch genau bestimmte Geschwindigkeit c der Last Q entspricht. Es ist $v:c$ das durch den geometrischen Zusammenhang bedingte Übersetzungsver-

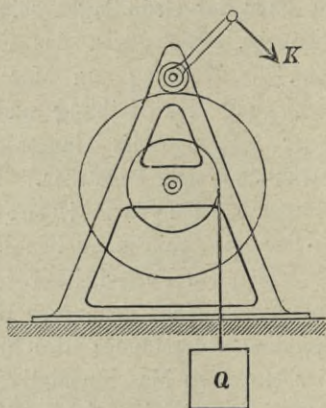
hältnis der Winde. Die Triebkraft K und die Last Q sind die einzigen unbedingten Kräfte, während alle anderen Kräfte, nämlich die inneren Spannungen der Kurbel, des Kurbelarmes und der übrigen Teile des Triebwerks und des Gestelles, die Widerstände der Achsen, die Kräfte zwischen den Zähnen zu den bedingten Kräften gehören. Unter Vernachlässigung der Reibungswiderstände wird dann für ein Zeitteilchen dt

$$0 = K \cdot v \cdot dt - Q \cdot c \cdot dt$$

oder $Q : K = v : c$. Hierin liegt der schon von Galilei ausgesprochene Satz: „Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit verloren“ (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 262). Aus der hier benutzten Weise der Herleitung erkennt man, daß der Satz für alle einfachen Maschinen gelten muß, solange man die Reibungswiderstände vernachlässigt.

Ein Körper, der an einem Punkt oder einer Achse befestigt ist, kann im Gleichgewichtszustande sich nur befinden, indem er ruht; denn die Drehbewegung um den festen Punkt oder die feste Achse, welche die einzig möglichen Bewegungen sind, erteilen den einzelnen Massenpunkten krummlinige Bewegungen, während das Gleichgewicht eines Massenpunktes durch Ruhe oder geradlinige, gleichförmige Bewegung bedingt ist. Erteilt man aber der Kurbel der in Fig. 142 dargestellten Bockwinde eine gleichmäßige Drehbewegung, so wird, wie die vorstehende Entwicklung zeigt, die Summe der virtuellen Arbeiten gleich Null. Wollte man also den auf S. 179 ausgesprochenen Satz der virtuellen Verrückungen in der umgekehrten Fassung bringen: Eine Massengruppe befindet sich im Gleichgewichte, wenn für jede unendlich kleine virtuelle Verrückung die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null ist, so müßte noch hinzugefügt werden: unter der Voraussetzung, daß in der Massengruppe nicht etwa schon Winkelgeschwindig-

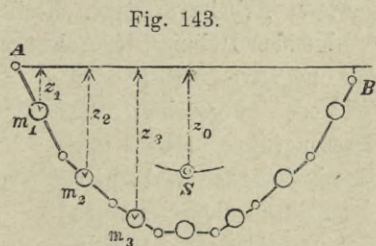
Fig. 142.



keiten um feste Achsen oder Punkte bestehen. Denn der Umstand, daß die virtuelle Arbeit Null ist, schließt nur beschleunigte, nicht aber gleichförmige Drehbewegungen aus. Eine gleichförmige Drehung hat auf die Beziehung zwischen den unbedingten Kräften keinen Einfluß, wenn man von der Reibung absieht. Durch eine solche Drehung werden in den umlaufenden Teilen besondere, von der Winkelgeschwindigkeit abhängende Spannungen (s. 2. Teil, Aufl. 3, S. 103) hervorgerufen. Im allgemeinen werden auch die Widerstände der festen Achsen dadurch beeinflußt; doch fällt der letztere Einfluß fort, wenn die Drehachsen freie Achsen sind (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 337). Die durch die Umlaufgeschwindigkeit erzeugten inneren Spannungen sind in sehr vielen Fällen, z. B. bei den durch Muskelkraft bewegten Aufzugsmaschinen, im Vergleiche mit den bei der Geschwindigkeit Null auftretenden Spannungen verschwindend klein; daher man auf den Unterschied zwischen gleichförmiger Drehbewegung und Ruhezustand meist gar keine Rücksicht nimmt. Bei Körpern mit großer Umlaufgeschwindigkeit, z. B. Schwungrädern, Mühlsteinen (s. 2. Teil, Aufl. 3, S. 105), Schleudermaschinen (s. 2. Teil, Aufl. 3, S. 212) haben diese Spannungen aber maßgebende Bedeutung.

d) Gelenkstangenverbindungen.

A und B (Fig. 143) seien die Aufhängegelenke einer Gelenkstangenverbindung. Die einzelnen Stäbe seien starr und durch reibungslose Gelenke miteinander verbunden. Das Gewicht jedes Stabes sei zu einem Massenpunkt m vereinigt gedacht. Diese Massen $m_1, m_2, m_3 \dots$ mögen um $z_1, z_2, z_3 \dots$ unter einer festen wagerechten Ebene liegen; es soll eine Beziehung für die Ruhelage der Stangenverbindung gesucht werden.



Wird der Stangenverbindung eine unendlich kleine virtuelle Verrückung aus der Ruhelage erteilt, so sind die inneren Spankräfte der Stäbe, die Widerstände der Widerlagergelenke, die gegenseitigen Kräfte in den Zwischengelenken durchweg bedingte Kräfte;

virtuelle Arbeiten werden nur von den Gewichten $m_1 g, m_2 g \dots$ verrichtet. Erfährt nun eine der Massen m bei der unendlich kleinen Verrückung eine Senkung um dz , so ist die entsprechende virtuelle Arbeit $m g \cdot dz$, und es muß, von der Ruhelage aus gerechnet,

$$0 = \Sigma (m g \cdot dz) = g \{ m_1 \cdot dz_1 + m_2 \cdot dz_2 + \dots \} \text{ sein.}$$

Dafür kann man, weil die Massen unveränderlich sind, auch schreiben

$$0 = g \cdot d (m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots).$$

Hat der Schwerpunkt S der Massen m in der Ruhelage eine Tiefe z_0 unter der festen wagerechten Ebene, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$\Sigma m \cdot z = M \cdot z_0$$

(s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 169), wenn $m = \Sigma m$ die Gesamtmasse bedeutet. Daher wird

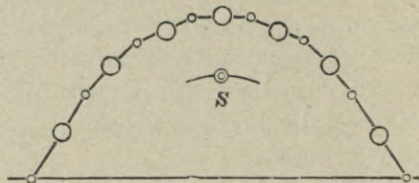
$$0 = d (M \cdot z_0) = M \cdot dz_0 \text{ oder } dz_0 = 0$$

die Bedingung für die Ruhelage der Gelenkstangenverbindung.

Bei einer unendlich kleinen virtuellen Verrückung darf der Schwerpunkt der gesamten Masse sich weder heben noch senken, d. h. er muß in der Ruhelage entweder möglichst tief oder möglichst hoch liegen.

Befindet sich der Schwerpunkt S in der Ruhelage so tief wie möglich, so wird einer endlichen virtuellen Verrückung eine Bahnlinie des Schwerpunktes entsprechen, wie in Fig. 143 angedeutet. Erfolgt die Verrückung aus der Gleichgewichtslage etwa durch einen leichten seitlichen Stoß, welcher der Massengruppe ein gewisses Arbeitsvermögen erteilt, so wird dieses bei der nunmehr erfolgenden Hebung des Schwerpunktes aus der tiefsten Lage durch die negative Arbeit der Schwere aufgezehrt; die Massengruppe erhält die Geschwindigkeit Null, wird dann durch die Schwere zu der ursprünglichen Gleichgewichtslage zurückgeführt, führt um diese Schwin-

Fig. 144.



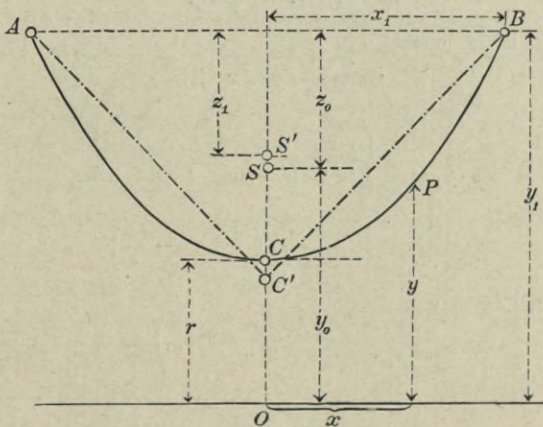
gungen aus und kommt, nachdem letztere durch Widerstände vernichtet sind, schließlich in der sicheren (stabilen) Gleichgewichtslage zur Ruhe. Lag der Schwerpunkt aber im Gleich-

gewichtszustände so hoch wie möglich (Fig. 144), so wird der, einem kleinen Anstoße folgenden Senkung des Schwerpunktes eine positive Arbeit der Schwere entsprechen, d. h. die Massengruppe wird sich beschleunigt immer weiter aus der ursprünglichen Ruhelage entfernen und erst in einer neuen sicheren Gleichgewichtslage mit tiefliegendem Schwerpunkte zur Ruhe gelangen.

Die tiefste Lage des Schwerpunktes entspricht also der natürlichen sicheren Gleichgewichtsform, die höchste Lage der künstlichen, unsicheren (labilen) Gleichgewichtsform. Bei unendlich vielen Stangen geht die erstere Form in die Kettenlinie, die zweite Form in die Drucklinie über (s. Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, 2. Teil, Aufl. 2, S. 160 u. f.).

Die Gleichgewichtsform einer Kette, die der Bogenlänge nach gleichmäßig belastet wird, ist die gemeine Kettenlinie

Fig. 145.



(Fig. 145), deren Gleichung, bezogen auf den Anfangspunkt O (nach Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, 2. Teil, Aufl. 2, S. 169) lautet:

$$1) \quad y = \frac{1}{2} r \left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}} \right).$$

Darin bedeutet r den Krümmungshalbmesser im Scheitel C . Da dem sicheren Gleichgewichtszustande die möglichst tiefe Lage des Schwerpunktes entspricht, so kann man auch aus dieser Bedingung die Gleichung der gemeinen Kettenlinie finden, indem man die

Frage stellt: Nach welcher Kurve muß eine bei A und B befestigte Kette von gegebener Länge geformt sein, damit ihr Schwerpunkt so tief wie möglich liege. Die Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe der Variationsrechnung führt tatsächlich auf die Gleichung 1. Diese Behandlung überschreitet den Rahmen unseres Buches; doch möge der Nachweis geführt werden, daß, wenn man die im Gleichgewichte befindliche Kette ACB bei C lotrecht abwärts zieht und dadurch (annähernd) in die geknickte Form $AC'B$ überführt, der Gesamtschwerpunkt sich von S nach S' hebt.

Hat der Aufhängepunkt B die Koordinaten x_1 und y_1 , so findet man die Bogenlänge $CB = s$ leicht zu

$$2) \quad s = \frac{1}{2} r \left(e^{\frac{x_1}{r}} - e^{-\frac{x_1}{r}} \right).$$

Für die Höhe des Schwerpunktes S der Kettenlinie $ACB = 2s$ über O gilt dann, wenn man den Faktor 2 beiderseits fortläßt:

$$s \cdot y_0 = \int_0^{x_1} ds \cdot y = \frac{1}{r} \int_0^{x_1} y_2 \cdot dx,$$

weil, wie man leicht erkennt,

$$ds = \frac{1}{r} \cdot y \cdot dx \text{ ist.}$$

$$\text{Dann wird} \quad s \cdot y_0 = \frac{r}{4} \int_0^{x_1} \left(e^{\frac{2x}{r}} + 2 + e^{-\frac{2x}{r}} \right) dx \text{ oder}$$

$$s \cdot y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2} + \frac{r^2}{8} \left(e^{\frac{2x_1}{r}} - e^{-\frac{2x_1}{r}} \right).$$

Weil aber nach Gl. 1 und 2

$$y_1 s = \frac{r^2}{4} \left(e^{\frac{2x_1}{r}} - e^{-\frac{2x_1}{r}} \right),$$

so kann man schreiben

$$s \cdot y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2} + \frac{y_1 \cdot s}{2}; \text{ mithin}$$

$$y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2s} + \frac{y_1}{2},$$

oder für die Tiefe des Schwerpunktes S unter der Sehne AB :

$$z_0 = y_1 - y_0 = \frac{y_1}{2} - \frac{r \cdot x_1}{2s}.$$

Wird die Kette von der Länge $2s$, aber in die Form $AC'B$ gebracht, so ist $AC' = s$ und die Tiefe des Schwerpunktes unter AB

$$z_1 = \frac{1}{2} \sqrt{s^2 - x_1^2}.$$

Es ist zu beweisen, daß $z_0 > z_1$, oder $z_0^2 > z_1^2$; zu dem Ende setzen wir $z_0^2 - z_1^2 = U$ und untersuchen, ob $U > 0$ ist. Es wird

$$U = \frac{1}{4} \left\{ y_1^2 - \frac{2y_1 r \cdot x_1}{s} + \frac{r^2 \cdot x_1^2}{s^2} - s^2 + x_1^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ x_1^2 \left(\frac{r^2 + s^2}{s^2} \right) - \frac{2y_1 r \cdot x_1}{s} + y_1^2 - s^2 \right\}.$$

Nach den Gl. 1 und 2 findet man leicht

$$r^2 + s^2 = y_1^2; \quad y_1^2 - s^2 = r^2, \quad \text{so daß}$$

$$U = \frac{1}{4} \left\{ \frac{x_1^2 \cdot y_1^2}{s^2} - \frac{2x_1 y_1 r}{s} + r^2 \right\};$$

da dies ein Quadrat ist, nämlich

$$U = \left(\frac{1}{2} \left[\frac{x_1 y_1}{s} - r \right] \right)^2,$$

so ist $U > 0$, also bewiesen, daß $z_0 > z_1$, daß also beim Geradestrecken der Schwerpunkt sich wirklich gehoben hat.

e) Klappbrücken.

Soll ein Getriebe, an welchem als unbedingte Kräfte nur Schwerkraft wirken, in jeder Lage im Gleichgewichte sein, so daß bei einer langsamen Bewegung nur Reibungswiderstände überwunden zu werden brauchen, so muß für jede Lage

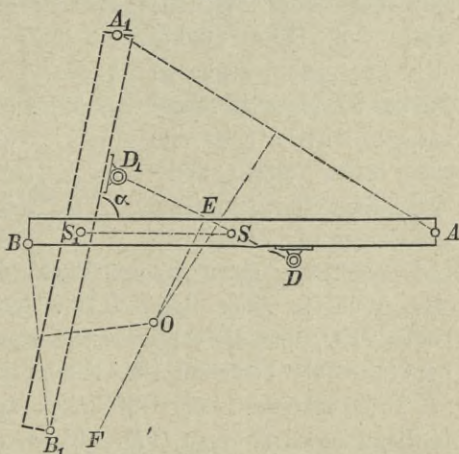
$$dz_0 = 0$$

sein, d. h. es muß die Ordinate z_0 des Schwerpunktes der gesamten Massengruppe stets denselben Wert behalten. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn der Gesamtschwerpunkt sich bei einer virtuellen Verrückung entweder gar nicht bewegt,

oder doch stets in derselben wagerechten Ebene verbleibt.

Derartige Erwägungen finden Anwendung beim Entwerfen größerer beweglicher Brücken, insbesondere Klappbrücken. Soll etwa (Fig. 146) der Brückenkörper AB in die Lage $A_1 B_1$ gebracht

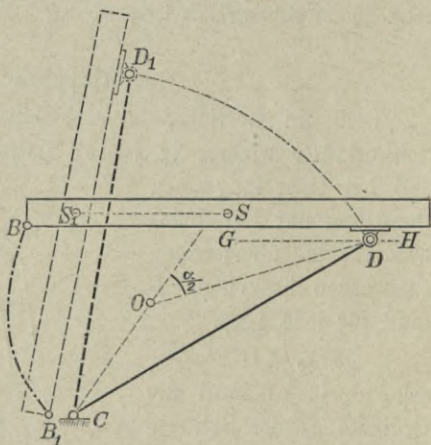
Fig. 146.



werden, so ist dies nach S. 28 am einfachsten durch Drehung um den Punkt O zu erreichen, den man findet, indem man $\overline{AA_1}$ zieht und in der Mitte derselben eine Winkelrechte errichtet, ebenso B mit B_1 verbindet und in der Mitte von BB_1 eine Normale zu BB_1 zeichnet; dann ist O der Schnittpunkt der beiden Normalen. Bei einer Drehung um O würde aber jeder Punkt, also auch der Schwerpunkt S des Brückenkörpers einen Kreisbogen beschreiben, so daß hierdurch die gestellte Bedingung nicht erfüllt wird. Soll die Bewegung nun so geregelt werden, daß der Schwerpunkt eine Wagerechte beschreibt, so könnte man zunächst auf den Gedanken kommen, den Schwerpunkt unmittelbar längs einer Gleitbahn SS_1 zu führen. Diese Lösung

ist aber nicht brauchbar, weil der rechts von der aufgerichteten Klappe befindliche Raum von festen Teilen größtenteils freibleiben soll, um Schiffen die Durchfahrt zu gestatten. Man führt daher (Fig. 147) einen dem Schwerpunkte nicht zu nahe liegenden Punkt D des Brückenkörpers mittels einer um einen festen Punkt C drehbaren Gelenkstange in einem Kreisbogen von D nach D_1

Fig. 147.



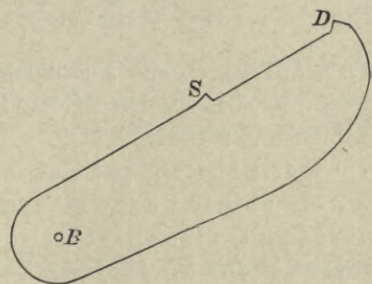
und gleichzeitig einen anderen Punkt des Körpers, etwa B , mittels einer Rolle in einer Bahn BB_1 , deren Form durch den Kreisbogen DD_1 und die vorgeschriebene gerade Bahn SS_1 des Schwerpunktes völlig bestimmt ist. Nimmt man die Lage des Punktes D am Brückenkörper nach Gutdünken an, so daß dadurch auch D_1 festliegt, so ziehe man (Fig. 146) DD_1 und in der Mitte E von DD_1 eine Rechtwinklige EF zu DD_1 . Dann muß der feste Drehpunkt C der Gelenkstange DC jedenfalls auf EF liegen. Da bei einer Drehung des Brückenkörpers um O (Fig. 146) D auch nach D_1 gelangen würde, so muß die Gerade EF auch den Punkt O enthalten. Auf EF kann der Drehpunkt C beliebig

gewählt werden. Da aber die Gelenkstange CD in dem geöffneten Zustande der Brücke eine Lage CD_1 (Fig. 147) haben muß, welche den Raum für die freie Durchfahrt nicht beengt, da es ferner für die feste Lagerung des Drehpunktes C erwünscht sein wird, denselben etwa in gleicher Tiefe mit B_1 anzuordnen, so wird die Gerade EF (Fig. 146) vielleicht einen zweckmäßig liegenden Drehpunkt C nicht enthalten, so daß also die willkürliche Annahme des Punktes D nicht glücklich war. Man kann dann auch umgekehrt den Drehpunkt C an passend erscheinender Stelle annehmen, für den Angriffspunkt D der Gelenkstange aber vielleicht nur eine gewisse Tiefe, d. h. einen gewissen Abstand von der Brückentafel, gegeben durch eine Gerade GH (Fig. 147), festsetzen und nun die Lage des Angriffspunktes D in der Geraden GH durch Zeichnung in folgender Weise finden. Eine Gerade CO bestimmt diejenige Linie, welche in Fig. 146 EF genannt wurde. Ist nun α der gesamte Winkel, um den die Brückentafel gedreht werden soll, so ist α zugleich der gemeinschaftliche Zentriwinkel aller Kreisbögen, die bei einer Drehung um O von sämtlichen Teilen der Brückenbahn, also auch von D , beschrieben werden würden. Trägt man im Punkte O an die nach oben verlängerte CO den Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ an, so schneidet der zweite Winkelschenkel die GH in D . Hat man somit die Gelenkstange CD festgelegt, so bleibt nur noch die Form des Führungsschlitzes für die bei B anzubringende Leitrolle zu bestimmen. Eine analytische

Entwicklung der Gleichung der Bahnlinie BB_1 ist so umständlich, daß man die zeichnerische Ermittlung vorziehen wird. Die in der Brückentafel gegeneinander festliegenden Punkte D , S und B (Fig. 147) bilden ein Dreieck; läßt man D auf dem Kreisbogen DD_1 , S auf der Wagerechten SS_1 sich bewegen, so beschreibt B die Bahnlinie BB_1 der

Führungsrolle. Man bestimmt daher die Punkte der Kurve BB_1 am bequemsten und sichersten, indem man das Dreieck DSB auf Pauspapier zeichnet oder aus starkem Kartenpapier so aus-

Fig. 148.



schneidet (Fig. 148), daß man D und S auf DD_1 bzw. SS_1 verschiedene Lagen geben und bei B jedesmal einen Zirkelstich machen kann.

B. Bewegung einer Massengruppe.

1. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes; Satz vom Antriebe.

Schon im 1. Teil, Aufl. 4, S. 172 wurden die Gleichungen abgeleitet:

$$1) \quad \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = X; \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y; \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.$$

Darin bedeuteten x , y und z die augenblicklichen Koordinaten eines Massenpunktes m ,

$$X = \Sigma K \cos \alpha, \quad Y = \Sigma X \cos \beta, \quad Z = \Sigma K \cos \gamma$$

die Summe der in den einzelnen Achsenrichtungen auftretenden Seitenkräfte der äußeren Kräfte K . Daraus folgten nach der Lehre vom Schwerpunkte die Gleichungen

$$2) \quad \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{X}{M}; \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{Y}{M}; \quad \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{Z}{M},$$

worin x_0 , y_0 , z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes der Massengruppe bezeichnen, deren Gesamtmasse M ist. Diese Gleichungen 2 enthielten den Satz:

Der Schwerpunkt einer Massengruppe bewegt sich so, als ob die ganze Masse der Gruppe in ihm vereinigt wäre und als ob sämtliche äußere Kräfte (parallel verschoben) an ihm wirkten. Die inneren Kräfte der Massengruppe haben auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluß.

Sind äußere Kräfte nicht vorhanden, so kann der Schwerpunkt der Massengruppe sich nur geradlinig und gleichförmig bewegen.

Die erste der Gleichungen 1 kann man auch schreiben

$$\sum m \cdot \frac{\delta \left(\frac{dx}{dt} \right)}{\delta t} = X,$$

oder wenn v die Geschwindigkeit eines Punktes, v_x die Seitengeschwindigkeit desselben in der x -Richtung bezeichnet,

$$\frac{\delta \sum m v_x}{\delta t} = X.$$

Ist $v = c$ und $v_x = c_x$ für $t = 0$, so ergibt die Integration vorstehender Gleichung

$$3) \quad \sum m v_x - \sum m c_x = \int_0^t X \cdot dt.$$

Das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit $= mv$ nennt man die **Bewegungsgröße** der Masse, mv_x die Bewegungsgröße in der x -Richtung. Das Produkt aus einer Kraft und der Zeit ihrer Einwirkung $= Kt$ heißt der **Antrieb der Kraft**; für veränderliche Kräfte ist der Antrieb also allgemein $\int K \cdot dt$; es ist $\int_0^t X \cdot dt$ der Antrieb der in der x -Richtung wirkenden äußeren Kräfte.

Gl. 3 stellt den **Satz vom Antrieb und der Bewegungsgröße** dar; er lautet in Worten:

In einer bestimmten Achsenrichtung ist während irgendeines Zeitraumes die Zunahme der Bewegungsgröße einer Massengruppe gleich dem Antriebe der in dieser Richtung wirkenden äußeren Kräfte.

Ist in einer Achsenrichtung die Summe der äußeren Kräfte Null, d. h. $X = \sum K \cos \alpha = 0$, so erfährt in dieser Achsenrichtung die gesamte Bewegungsgröße der Massengruppe keine Änderung.

Wegen $\sum m x = M x_0$ ist

$$4) \quad \sum m v_x = M \cdot \frac{dx_0}{dt};$$

d. h. in einer bestimmten Achsenrichtung ist die Bewegungsgröße der ganzen Massengruppe gleich der ganzen Masse mal der Geschwindigkeit des Schwerpunktes; ändert sich also in einer Achsenrichtung die Bewegungsgröße nicht, so behält der Schwerpunkt die gleiche Geschwindigkeit bei.

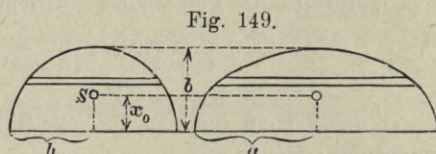
Ergänzende Bemerkung zu den Schwerpunktsbestimmungen
im 1. Teile, Aufl. 4, S. 159 und 164.

Der Abstand des Schwerpunktes einer Halbkreisfläche von dem Durchmesser wurde im 1. Teile, Aufl. 4, S. 159 gefunden zu

$$x_0 = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi},$$

oder, wenn der Halbmesser b genannt wird,

$$x_0 = \frac{4}{3} \frac{b}{\pi}.$$



Die Halbellipse von dem Durchmesser $2a$ und der Höhe b (Fig. 149) kann man sich in der Weise aus dem Halbkreis entstanden denken, daß jeder zu dem begrenzenden Durchmesser parallele Flächenstreifen in dem Verhältnis $a:b$ verlängert ist. Infolge dieser Verlängerung ändert sich das statische Moment des Flächenstreifens in demselben Verhältnis $a:b$. Da nun das statische Moment = Fläche mal Schwerpunktsordinate, so bleibt letztere unverändert, wenn das statische Moment und der Flächeninhalt sich in gleichem Verhältnis ändern. Man kann daher ohne Rechnung schließen, daß der Schwerpunkt der Fläche einer Halbellipse von der Höhe b in dem Abstände

$$5) \quad \frac{4}{3} \frac{b}{\pi}$$

von dem begrenzenden Durchmesser $2a$ liegen muß.

Eine ähnliche Beziehung besteht zwischen dem Schwerpunkt eines Halbkugelkörpers und des Körpers eines Halbellipsoids. Vergrößert man, von einem Halbmesser c ausgehend, sämtliche Längen in der x -Richtung in dem Verhältnis $a:c$, sämtliche Längen in der y -Richtung in dem Verhältnis $b:c$, so entsteht ein Halbellipsoid, dessen Grundfläche eine Ellipse der Halbachsen a und b , dessen Höhe = c ist. Jede zur Grundfläche parallele Scheibe hat sich auf das $\frac{ab}{c^2}$ fache vergrößert, das statische Moment jeder Scheibe in bezug auf die Grundfläche also in demselben Verhältnisse. So-

b) Verhalten eines auf dem Wasser schwimmenden Kahn.

Befindet sich in einem Kahn ein Mensch und haben beide die Geschwindigkeit Null, so hat auch der Gesamtschwerpunkt von Kahn und Mensch die Geschwindigkeit Null und wird, wenn keine äußeren Kräfte in wagerechter Richtung auftreten, auch keine wagerechte Bewegung erfahren. Bewegt sich der Mensch in dem Kahne nach vorn, so wird der Kahn unter ihm zurückgehen, u. zw. wenn man den Bewegungswiderstand des Kahnnes vernachlässigt, um genau so viel, daß der Gesamtschwerpunkt an derselben Stelle verbleibt. Die Ursache dieses Verhaltens besteht darin, daß der Mensch beim Vorwärtsschreiten einer Kraft bedurfte, die zwischen seinen Füßen und dem Boden des Kahnnes auftrat, den Schreitenden vorwärts, den Kahn aber, nach dem Gesetze der Wechselwirkung, rückwärts trieb.

Hat der Mann den Kahn ans Ufer gerudert und zieht die Ruder ein, um ans Land zu steigen, so wird er, wenn er von der Ruderbank nach dem Vorderende des Kahnnes gelangt ist, bemerken, daß dieser das Ufer nun nicht mehr berührt. Ist der Kahn sehr leicht, so wird der Mann nun vielleicht den Uferrand nicht mehr ergreifen können. Befinden sich in der Mitte des Kahnnes zwei Menschen, so läßt sich dieses Zurückweichen vom Ufer dadurch vermeiden, daß, während der eine nach dem Vorderende ging, der andere nach dem Hinterende schreitet. Dann heben sich die Wirkungen an dem Kahne gegenseitig auf. Der erstere kann sich am Lande festhalten, und nun darf auch der Gefährte nach vorn schreiten, ohne den Kahn zurückzutreiben, da die Hand des ersteren jetzt eine Kraft ausübt, die den Gefährten und somit auch den Gesamtschwerpunkt nach dem Ufer hinzieht.

Befinden sich in dem Kahne Steine oder dergl., so kann man durch Fortwerfen derselben nach rückwärts den Kahn vorwärts treiben; denn zum Fortschleudern eines Steines ist eine wagerechte Kraft erforderlich, die sich nach dem Gesetze der Wechselwirkung durch den Körper des Werfenden auf den Kahn überträgt und diesen in entgegengesetztem Sinne fortreibt. Auch durch Abfeuern von Gewehren nach rückwärts wird man einen Kahn vorwärts bewegen können.

c) Der Schwerpunkt als Mittelpunkt einer Massengruppe.

Der den Bedingungen

$$Mx_0 = \sum mx, \quad My_0 = \sum my, \quad Mz_0 = \sum mz$$

entsprechende Punkt S mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 , welcher im 1. Teile, Aufl. 4, S. 170 als Massenmittelpunkt bezeichnet wurde, läßt sich noch in anderer Weise als Mittelpunkt einer Massengruppe erklären, insofern er derjenige Punkt ist, welcher von der Gesamtheit der Massengruppe den kleinsten Abstand hat (im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate verstanden). Denn es läßt sich der Satz beweisen:

In einer Massengruppe wird die Summe der Produkte, die durch Multiplikation eines jeden Massenpunktes m mit dem Quadrate des Abstandes von einem bestimmten Punkt entstehen, ein Minimum, wenn dieser bestimmte Punkt der Schwerpunkt der Massengruppe ist.

Hat ein beliebig in der Massengruppe gewählter Festpunkt B (Fig. 151) die Koordinaten x_1, y_1, z_1 , der Schwerpunkt S die Koordinaten x_0, y_0, z_0 , ein Massenpunkt m die Koordinaten x, y, z , so gilt für den Abstand s des Punktes m von B :

$$s^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Bezeichnet man die fragliche Produktensumme in bezug auf den Punkt B mit W , so ist

$$W = \sum m \{ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \};$$

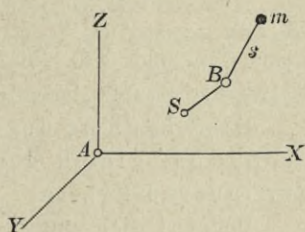
dieselbe wird in bezug auf den Schwerpunkt S :

$$W_0 = \sum m \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \}.$$

Der Unterschied beider Summen beträgt:

$$W - W_0 = \sum m \{ (x - x_1)^2 - (x - x_0)^2 + (y - y_1)^2 - (y - y_0)^2 + (z - z_1)^2 - (z - z_0)^2 \}.$$

Fig. 151.



Führt man die Quadrate aus, bedenkt, daß x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 konstant, daß $\sum m x = M x_0$ usw. geschrieben werden kann, so ergibt sich nach einfacher Zusammenziehung

$$\begin{aligned} W - W_0 &= M(x_1^2 - 2x_1x_0 + x_0^2) \\ &\quad + M(y_1^2 - 2y_1y_0 + y_0^2) \\ &\quad + M(z_1^2 - 2z_1z_0 + z_0^2) \quad \text{oder} \\ W - W_0 &= M\{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2\}. \end{aligned}$$

Nennt man aber e den Abstand der beiden Punkte B und S , so ist

$$e^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2, \quad \text{daher}$$

$$W - W_0 = M e^2.$$

Da dies wegen des Quadrates ≥ 0 , so ist stets $W \geq W_0$ und erreicht seinen kleinsten Wert Null für $e = 0$, d. h. wenn B mit S zusammenfällt.

3. Der Satz des Arbeitsvermögens.

Ist c die Anfangs-, v die Endgeschwindigkeit eines Massenpunktes m einer Massengruppe, so ist nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 174

$$1) \quad \sum^{1/2} m v^2 - \sum^{1/2} m c^2 = \sum \mathfrak{A}_k + \sum \mathfrak{A}_i,$$

wenn $\sum \mathfrak{A}_k$ und $\sum \mathfrak{A}_i$ die Arbeitssumme der äußeren bzw. inneren Kräfte der Gruppe bedeuten, oder:

Die Zunahme des Arbeitsvermögens einer Massengruppe ist gleich der Arbeitssumme der äußeren und der inneren Kräfte.

Befinden sich unter den äußeren oder inneren Kräften sog. Bedingungskräfte (s. S. 175), deren Wirkung sich durch gewisse geometrische Bedingungsbeziehungen für die Bewegung der Massengruppe ausdrücken läßt, so verrichten diese bei jeder virtuellen Verrückung, mithin auch bei der wirklichen Bewegung nach S. 176 eine Arbeit gleich Null, können also bei der Aufstellung der Arbeitssumme unberücksichtigt bleiben. Dahin gehören nach S. 177 und 1. Teil, Aufl. 4, S. 175 die inneren Kräfte starrer Körper, ebenso auch nach 2. Teil, Aufl. 3, S. 241 die inneren Kräfte tropfbarflüssiger Körper, für welche die Bedingung unveränderlichen Raum-inhalts besteht und bei der Bewegung durch ein Gefäß noch die

Bedingung, daß Querschnitt mal Geschwindigkeit für alle Teile des Gefäßes in irgendeinem Zeitpunkte den gleichen Wert haben. Dahin gehören auch nach S. 178 die inneren Kräfte eines Maschinengetriebes. Dieser Satz, daß die Arbeit der Bedingungskräfte Null sei, gilt aber nur, solange diese Kräfte endliche Größe haben. In solchen Fällen jedoch, wo zur Aufrechterhaltung der Bedingungen unendlich große Kräfte erforderlich werden, erscheint ihre Arbeit in der Form $\infty \cdot 0$ und muß durch besondere Verfahren näher bestimmt werden. Mit derartigen Fällen hat man es stets zu tun, wenn die Bedingungen der in Bewegung befindlichen Massengruppe plötzliche Geschwindigkeitsänderungen erfordern. Diese sind nur durch unendlich große Kräfte zu bewirken, und da es unendlich große Kräfte an einer endlichen Massengruppe in Wirklichkeit nicht gibt, so werden die entsprechenden Bedingungen tatsächlich nicht in aller Schärfe, sondern nur annäherungsweise gültig bleiben.

Diese Betrachtung findet auf alle Fälle Anwendung, wo als starr angenommene Körper mit verschiedenen Geschwindigkeiten zusammenstoßen. Würden die Körper beim Stoße völlig starr bleiben, so müßten zwischen ihnen und in ihrem Inneren unendlich große Kräfte auftreten; in Wirklichkeit aber werden zusammenstoßende feste Körper gewisse Formänderungen erfahren, und die inneren Kräfte werden beim Stoße Arbeiten leisten, die (s. 2. Teil, Aufl. 3, S. 140 u. f.) sich nach dem Verhalten der Körper während des Stoßes richten und in den meisten Fällen negativ gefunden werden. Ähnlich verhält es sich bei der Bewegung des Wassers durch Gefäße mit plötzlichen Querschnittsänderungen (s. 2. Teil, Aufl. 3, S. 260). Auch in solchen Fällen werden die bei der Ableitung der Grundgleichung I (2. Teil, Aufl. 3, S. 246) angenommenen Bedingungen nicht mehr scharf zutreffen, es wird daher auch die Arbeit der inneren Kräfte nicht mehr Null sein, sondern einen negativen Wert haben. Diese negativen Arbeiten, die sich durch einen Verlust an äußerem Arbeitsvermögen zu erkennen geben, verwandeln sich (nach 2. Teil, Aufl. 3, S. 348) in Wärme.

Der Satz der Arbeit gilt daher nur unter Berücksichtigung der durch etwaige Stöße veranlaßten Arbeitsverluste.

Beispiel 1: Bewegung einer Kette. Ist eine Kette bei *A* (Fig. 152) derartig aufgewickelt oder niedergelegt, daß beim Abziehen des freien Endes *B*

kein Klemmen und keine Reibung entsteht, und wird dem bereits gerade gestreckten vorderen Teile von der Länge a eine wagerechte Geschwindigkeit c erteilt, so wird, wenn äußere Kräfte nicht wirken, die Kette sich weiter abwickeln und an der Bewegung teilnehmen. Es soll berechnet werden, welche Geschwindigkeit v der gerade gestreckte Teil der Kette in einem Zeitpunkte hat, wo eine Länge x abgewickelt ist (Fig. 153). Hierbei muß nach dem

Fig. 152.

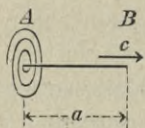
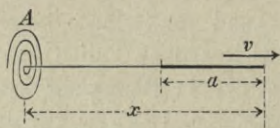


Fig. 153.



Satze vom Antriebe (S. 193) wegen des Fehlens äußerer Kräfte die Bewegungsgröße stets den gleichen Wert behalten. Ist die Masse der Kette gleichmäßig über deren Länge verteilt, so kann man die Masse der Längeneinheit = 1 setzen. Zu Anfang war (Fig. 152) die gesammte Bewegungsgröße $a \cdot c$; nachdem x Längeneinheiten die Geschwindigkeit v erhalten haben (Fig. 153), beträgt sie $x \cdot v$; daher wird

$$2) \quad x \cdot v = a \cdot c, \quad \text{oder} \quad v = c \cdot \frac{a}{x}.$$

Setzt man nun $v = dx : dt$, so erhält man

$$x \cdot dx = a \cdot c \cdot dt$$

und daraus, weil $x = a$ für $t = 0$ werden muß,

$$3) \quad x^2 = a^2 + 2act \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{a(a + 2ct)}.$$

Dies ist die Bewegungsgleichung, welche in Verbindung mit Gl. 2 die Geschwindigkeitsgleichung

$$4) \quad v = \frac{c}{\sqrt{1 + 2\frac{c}{a}t}}$$

liefert. Nach Gl. 2 und 4 wird erst $v = 0$ für $x = \infty$ und für $t = \infty$. Das Abwickeln der Kette würde also bei Abwesenheit aller Widerstände niemals aufhören, wie groß auch die Länge der bei A (Fig. 152) aufgeschichteten Kette sein mag. Diese Betrachtung gilt auch für den Fall, daß die ursprünglich mit der Geschwindigkeit c in Bewegung gesetzte Kette von der Länge a mit einer steifen Stange, etwa einer Harpune vertauscht wird, welche gleiche Masse mit einer Ketten- oder Seillänge a hat und infolge der ihr erteilten Bewegungsgröße $a \cdot c$ Kette oder Seil nach sich zieht. Auch auf einen sog. Raketenapparat zur Rettung Schiffbrüchiger findet Gl. 4 Anwendung.

Man kann diese Aufgabe auch mittels des Satzes der Arbeit lösen. Würde man, da äußere Kräfte nicht wirken, unter der Annahme, daß die

inneren Kräfte der undeformbar gedachten Kette keine Arbeit verrichten, die Änderung des Arbeitsvermögens = Null setzen, so müßte

$$\frac{1}{2} x v^2 = \frac{1}{2} a c^2, \text{ mithin}$$

$$v = c \sqrt{\frac{a}{x}}$$

sein, was mit Gl. 2 in Widerspruch steht und unrichtig ist, weil in jedem Zeitteilchen dt ein Kettenstück dx stoßweise aus der Geschwindigkeit Null in die Geschwindigkeit v des Kettenstückes x übergeführt wird. Hierbei erfolgt während der Zeit dt ein Verlust an Arbeitsvermögen, der (nach 2. Teil, Auf 3, S. 141, Gl. 13 bzw. 14) mit $M = x$; $M_1 = dx$; $c = v$; $c_1 = 0$; $k = 0$ sich zu

$$5) \quad \frac{x \cdot dx}{x + dx} \cdot \frac{v^2}{2} = dx \cdot \frac{v^2}{2}$$

bestimmt. Das Arbeitsvermögen der Kette, $\frac{1}{2} x v^2$ erfährt während der Zeit dt eine Zunahme $\frac{1}{2} d(xv^2)$ und diese ist offenbar $\doteq -dx \cdot \frac{v^2}{2}$ (Gl. 5) zu setzen.

Da x und v beide mit t veränderlich sind, so wird aus

$$d(xv^2) = -dx \cdot v^2:$$

$$x \cdot 2v dv + v^2 \cdot dx = -v^2 dx$$

$$2v dv \cdot x = -2v^2 \cdot dx \text{ oder}$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dv}{v}, \text{ also}$$

$$\ln x = \ln\left(\frac{1}{v}\right) + C,$$

und, weil für $x = a$ sein muß $v = c$:

$$\ln a = \ln\left(\frac{1}{c}\right) + C, \text{ also}$$

$$\ln\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(\frac{c}{v}\right) \text{ und}$$

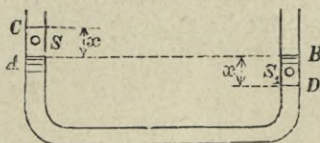
$$x = a \cdot \frac{c}{v},$$

was mit Gl. 2 übereinstimmt.

Beispiel 2: Schwingung des Wassers in einer gekrümmten Röhre.

Das in einer nach Fig. 154 geformten Röhre befindliche Wasser bilde im Gleichgewichtszustande den Wasserspiegel AB . Der Querschnitt der Röhre sei F ; sie sei auf eine Länge b mit Wasser gefüllt, so daß die Wassermenge das Gewicht $Mg = \gamma \cdot F \cdot b$ habe. Durch irgendeine Ursache werde der Ruhezustand des Wassers derartig gestört, daß das Wasser in der ruhenden Röhre mit der Geschwindigkeit c durch die Gleichgewichtslage hindurchgeht. In dem Augenblicke, wo sich die

Fig. 154.



linksseitige Oberfläche bei C , die rechtsseitige bei D befindet, d. h. um x über bzw. unter der Gleichgewichtslage, sei die Geschwindigkeit der ganzen Wassermasse v ; dann ist die Änderung des Arbeitsvermögens der Wassermasse von der Gleichgewichtslage ($x=0$) bis zu der beliebigen Lage ($x=x$):

$$\frac{\gamma}{g} F \cdot b \cdot \frac{v^2 - c^2}{2}.$$

Arbeit wird bei dieser Bewegung, wenn man die Reibung vernachlässigt, nur von der Schwerkraft verrichtet, denn die Druckkräfte der Röhre gegen das Gefäß stehen überall rechtwinklig zur Bewegung des Wassers längs der Wandungen, und die inneren Kräfte des Wassers verrichten in diesem Falle keine Arbeit, weil plötzliche Querschnittsänderungen nicht vorhanden sind und die Krümmungen mit genügend großem Halbmesser angenommen werden (s. 2. Teil, Aufl. 3, S. 297). Die Arbeit der Schwere kann man am einfachsten berechnen, indem man sich das zwischen B und D ursprünglich vorhandene Wassergewicht $\gamma \cdot F \cdot x$ nach AC verrückt denkt, wobei der Schwerpunkt von S_1 nach S , d. h. um x gehoben wird. Dann ist die Arbeit $-\gamma \cdot F \cdot x^2$. Aus

$$\frac{\gamma}{g} F \cdot b \cdot \frac{v^2 - c^2}{2} = -\gamma \cdot F \cdot x^2$$

ergibt sich dann
$$v = \sqrt{c^2 - \frac{2g}{b} x^2}.$$

Setzt man zugleich
$$v = \frac{dx}{dt},$$
 so wird

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{c^2 - \frac{2g}{b} x^2}}.$$

Wandelt man die rechte Seite um in

$$\sqrt{\frac{b}{2g}} \frac{d\left(\frac{x}{c} \sqrt{\frac{2g}{b}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2g}{b} \frac{x^2}{c^2}}},$$

so ergibt die Integration

$$t = \sqrt{\frac{b}{2g}} \cdot \arcsin \frac{x}{c} \sqrt{\frac{2g}{b}},$$

wobei die Konstante verschwindet, weil für $t=0$ auch $x=0$ sein muß.

Diese Gleichung für die Bewegung der beiden Wasserspiegel und somit auch für die ganze Wassermasse entspricht der Gl. 4, S. 69 für die geradlinige Schwingungsbewegung

$$t = \frac{1}{k} \arcsin \frac{k}{c} \cdot x,$$

wenn man $k = \sqrt{\frac{2g}{b}}$ setzt. Daher ist die Bewegung eine Schwingung um die Gleichgewichtslage als Mitte; die halbe Schwingungsweite, d. h. die größte

Hebung und Senkung der beiden Wasserspiegel von der Gleichgewichtslage aus, beträgt (nach Gl. 8, S. 70)

$$a = \frac{c}{k} = c \sqrt{\frac{b}{2g}},$$

die Dauer einer einfachen Schwingung (nach Gl. 7, S. 70)

$$t_1 = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{b}{2g}},$$

entsprechend einer Pendellänge $\frac{1}{2} b$.

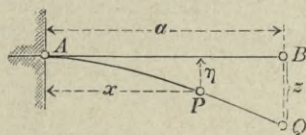
Beispiel 3: Querschwingungen eines elastischen eingespannten Stabes.

Der Fall, wo ein eingespannter Stab am freien Ende eine Masse trägt, gegen welche die eigene Masse des Stabes vernachlässigt werden kann, und mit dieser Masse Querschwingungen ausführt, wurde auf S. 76 behandelt.

An dieser Stelle möge nun der Fall betrachtet werden, wo der prismatisch gedachte Stab nur mit seiner eigenen Masse schwingt.

In einem Zeitpunkte t habe die Mittellinie des Stabes die Form APQ (Fig. 155); der Punkt P weiche um η , der Endpunkt Q um z von der Form im spannungslosen Zustand AB ab; unter Verachlässigung einer etwaigen Durchbiegung infolge des eigenen Gewichtes ist AB auch die Gleichgewichtsform des Stabes.

Fig. 155.



Die Biegelinie APQ ist zunächst unbekannt. Der beliebige Punkt P derselben hat eine aufwärts gerichtete Beschleunigung r ; beachtet man, daß an jedem Massenteilchen $m = \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot dx$

der abwärts gerichtete Trägheitswiderstand $\frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot dx \cdot r$ wirkt, so halten diese Widerstände den wirklich vorhandenen Kräften das Gleichgewicht; mithin ist APQ die Biegelinie für eine ruhende stetige Belastung, welche an der beliebigen Stelle P für die Längeneinheit die Größe

$$1) \quad p = \frac{\gamma}{g} F \cdot r \text{ hat.}$$

Befindet sich die Schwingung des Stabes im Beharrungszustande, so erfolgt die Bewegung der Punkte P und Q nach ähnlichen Gesetzen, und da nun beide Punkte in der gleichen Zeit die verschiedenen Wegelängen η und z durchlaufen, so müssen sowohl die Geschwindigkeiten wie auch die Beschleunigungen der Punkte P und Q den Wegen η und z proportional sein. Für die Geschwindigkeiten u und v , die Beschleunigungen r und q beider Punkte gilt daher

$$2) \quad u = \frac{v}{z} \eta; \quad r = \frac{q}{z} \eta.$$

Hiernach ist die Trägheitsbelastung bei P

$$p = \frac{\gamma}{g} F \frac{q}{z} \eta.$$

Nach Keck-Hotopp, Elastizitätslehre I. Teil Aufl. 2 S. 178 Gl. 3 wird, wenn man die für den vorliegenden Fall gültigen Vorzeichen beachtet,

$$3) \quad EJ \frac{d^4 \eta}{dx^4} = p = \frac{\gamma}{g} F \frac{q}{z} \eta.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung gibt die Gleichung der Biegelinie APQ . Weil dieselbe aber transzendent und ziemlich verwickelter Form ist, so möge eine tunlichst einfache Annäherungslösung versucht werden. Da nämlich die dem wirklichen Verhalten entsprechende Belastung nach Maßgabe der Fläche ABQ von der Einspannungsstelle nach dem freien Ende hin stark zunimmt, so wird von den einfachsten Belastungsfällen, deren Biegelinien noch in bequemer Weise zu behandeln sind, wohl derjenige mit einer Einzelast am freien Ende den vorliegenden Bedingungen einigermaßen nabekommen, d. h. eine Biegelinie ergeben, die von derjenigen des schwingenden Stabes in den allgemeinen Verhältnissen nicht zu sehr abweicht. Unter diesen Annahmen möge der Satz vom Arbeitsvermögen auf den Stab angewendet werden.

Sind die Punkte P und Q mit den Geschwindigkeiten u_0 und c durch die Gleichgewichtslage AB gegangen, so ist die Zunahme des Arbeitsvermögens des Stabes beim Übergange aus der Gleichgewichtslage in die beliebige Lage APQ gleich der Biegearbeit desselben, d. h.

$$4) \quad \frac{\gamma}{g} F \int_0^a \frac{u^2 - u_0^2}{2} dx = \mathfrak{A}.$$

Einer Einzellast K entspricht aber (2. Teil, Aufl. 3, S. 120 u. 121) eine Durchbiegung

$$z = \frac{K \cdot a^3}{3 EJ}$$

und eine innere Arbeit

$$5) \quad \mathfrak{A} = -\frac{K}{2} z = -\frac{3}{2} \frac{E \cdot J \cdot z^2}{a^3}, \quad \text{weil } K = \frac{3 E \cdot J \cdot z}{a^3}.$$

Wegen Gl. 2 und 5 wird aber aus Gl. 4:

$$\frac{\gamma}{g} F \frac{v^2 - c^2}{2 z^2} \int_0^a \eta^2 dx = -\frac{3}{2} \frac{E \cdot J \cdot z^2}{a^3}.$$

Nach 2. Teil, Aufl. 3, S. 46 ist die Gleichung der Biegelinie für eine Last K :

$$\eta = \frac{K}{EJ} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) = \frac{3z}{2a^3} \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} \right), \quad \text{somit}$$

$$6) \quad \int_0^a \eta^2 dx = \frac{9}{4} \frac{z^2}{a^6} \int_0^a \left(a^2 x^4 - \frac{2}{3} a \cdot x^5 + \frac{x^6}{9} \right) dx = 0,236 z^2 a.$$

Hieraus folgt

$$7) \quad \frac{\gamma}{g} F \frac{c^2 - v^2}{2z^2} \cdot 0,236 z^2 a = \frac{3}{2} \frac{E \cdot J \cdot z^2}{a^3} \quad \text{und}$$

$$v^2 = c^2 - 12,71 \frac{E \cdot J \cdot g}{a^4 \gamma \cdot F} z^2.$$

Dies entspricht nach S. 69 mit

$$8) \quad k^2 = 12,71 \frac{E \cdot J \cdot g}{a^4 \gamma \cdot F}$$

der Geschwindigkeitsgleichung einer geradlinigen Schwingung des Stabendes Q . Mithin ist die Schwingungslänge nach S. 73

$$9) \quad l = \frac{g}{k^2} = \frac{a^4 \gamma \cdot F}{12,71 E \cdot J} = 0,62 f, \quad \text{wenn}$$

$$f = \frac{\gamma \cdot F \cdot a^4}{8 E \cdot J}$$

die Durchbiegung unter dem eigenen Gewichte des Stabes bedeutet. Die Dauer einer einfachen Schwingung ist nach S. 73

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \cdot a^2 \sqrt{\frac{\gamma \cdot F}{12,71 E \cdot J \cdot g}} = a^2 \sqrt{\frac{0,777 \gamma \cdot F}{E \cdot J \cdot g}},$$

oder mit $J = F \cdot i^2$:

$$10) \quad t_1 = \frac{a^2}{i} \sqrt{\frac{0,777 \gamma}{E \cdot g}}$$

Für einen eingespannten Stahlstab rechteckigen Querschnittes von $a = 0,1^m$ freier Länge und $h = 0,001^m$ Dicke sei $\gamma = 7800$, $E = 2 \cdot 10^{10} \text{ kg/qm}$, dann wird wegen $i^2 = 1/12 h^2$ und $i = 0,289 h$

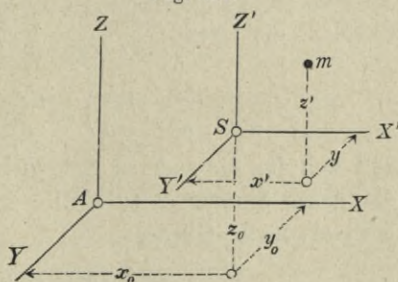
$$t_1 = \frac{0,01}{0,289 \cdot 0,001} \sqrt{\frac{0,777 \cdot 7800}{2 \cdot 10^{10} \cdot 9,81}} = 0,0061 \text{ Sekunden,}$$

entsprechend 164 einfachen Schwingungen in der Sekunde.

4. Zerlegung des Arbeitsvermögens einer beliebigen Massengruppe.

Hat ein Massenpunkt m (Fig. 156) in bezug auf ein festes Achsenkreuz AX, AY, AZ , die Koordinaten x, y, z und der Schwerpunkt S der ganzen Massengruppe die Koordinaten x_0, y_0, z_0 , so denke man sich durch S ein Achsenkreuz SX', SY', SZ' gelegt, welches zu dem festen Achsenkreuz stets parallel bleibt, sich also mit dem Schwerpunkt S verschiebt. Der Punkt m habe in bezug auf das bewegliche Achsenkreuz die

Fig. 156.



Koordinaten x' , y' , z' . Wenn nun m von der Ebene $Y'SZ'$ um x' , die Ebene $Y'SZ'$ von der Ebene YAZ um x_0 entfernt ist, so muß der Punkt m von der Ebene YAZ um $x = x_0 + x'$ entfernt sein. Daher hat man die Gleichungen:

$$x = x_0 + x'; \quad y = y_0 + y'; \quad z = z_0 + z'.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{dx'}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{dy'}{dt}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + \frac{dz'}{dt}.$$

Für die Geschwindigkeit v des Punktes m gilt aber bekanntlich

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2; \quad \text{daher wird}$$

$$1) \quad \Sigma \frac{mv^2}{2} = \Sigma \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{dx_0}{dt} + \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt} + \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt} + \frac{dz'}{dt}\right)^2 \right\}.$$

Führt man die Quadrate der rechten Seite aus, so bekommt man einmal die Glieder

$$\Sigma \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2 \right\},$$

u. zw. ist diese Summe $= \frac{M \cdot u^2}{2}$, wenn u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes S und M die ganze Masse der Gruppe bedeutet. Ferner entstehen die Glieder

$$2) \quad \Sigma \frac{m}{2} \left\{ 2 \frac{dx_0}{dt} \cdot \frac{dx'}{dt} + 2 \frac{dy_0}{dt} \cdot \frac{dy'}{dt} + 2 \frac{dz_0}{dt} \cdot \frac{dz'}{dt} \right\}.$$

Nun ist aber in bezug auf die Schwerpunktschene $Y'SZ'$ der Wert $\Sigma mx' = 0$, mithin auch $\Sigma m \frac{dx'}{dt} = 0$. Da ferner in dem Gliede 2 die Größe $\frac{dx_0}{dt}$ eine Konstante bedeutet, so wird

$$\Sigma \frac{m}{2} \left(2 \frac{dx_0}{dt} \cdot \frac{dx'}{dt} \right) = \frac{dx_0}{dt} \Sigma m \frac{dx'}{dt}, \quad \text{mithin} = 0,$$

und weil für die anderen Achsenrichtungen das gleiche gilt, so wird die ganze Summe 2 zu Null. — Schließlich erhält man in Gl. 1 noch als letzte Glieder:

$$\Sigma \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 \right\}.$$

Nennt man aber w die relative Geschwindigkeit des Punktes m in bezug auf den Schwerpunkt S der Massengruppe, so sind

$$\frac{dx'}{dt}, \quad \frac{dy'}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt}$$

die Seitengeschwindigkeiten von w , also

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 = w^2,$$

so daß die letzte Summe einfach $\Sigma \frac{m}{2} w^2$ geschrieben werden kann.

Hiernach wird

$$3) \quad \Sigma \frac{m v^2}{2} = \frac{M}{2} u^2 + \Sigma \frac{m w^2}{2},$$

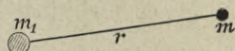
d. h. es kann das Arbeitsvermögen einer Massengruppe in zwei Teile zerlegt werden: der eine Teil ist das Arbeitsvermögen des Schwerpunktes, wenn man sich in demselben die ganze Masse der Gruppe vereinigt denkt: der andere Teil ist das Arbeitsvermögen, welches der relativen Bewegung der einzelnen Punkte gegen den Schwerpunkt entspricht. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des im 1. Teile, Aufl. 4 S. 344/45 für starre Körper bewiesenen; bei starren Körpern kann die relative Bewegung gegen den Schwerpunkt nur in einer Drehung um denselben bestehen, und diese kann nach S. 38 für jeden Zeitpunkt als Drehung um eine durch den Schwerpunkt gelegte augenblickliche Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω aufgefaßt werden, so daß $\Sigma \frac{m w^2}{2}$ für starre Körper gleichbedeutend ist mit $\frac{1}{2} J \omega^2$ (s. 1. Teil, Aufl. 4 S. 316).

Innere Kräfte haben nach S. 192 auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluß, können daher nur das Arbeitsvermögen $\Sigma \frac{m w^2}{2}$ der relativen Bewegung gegen den Schwerpunkt ändern. Äußere Kräfte können sowohl die Bewegung des Schwerpunktes wie auch die relative Bewegung gegen den Schwerpunkt beeinflussen.

5. Potential einer Massengruppe.

Bewegt sich ein Massenpunkt m unter der alleinigen Wirkung der Anziehungskraft $K = k \cdot \frac{m_1 m}{r^2}$ eines anderen festen Zentralmassenpunktes m_1 (Fig. 157), so gilt nach S. 106 Gl. 7 für das Potential oder die Arbeitsfähigkeit der Kraft in bezug auf den Punkt m , mit $\cos \varphi \cdot ds = dr$ die Differenzialgleichung

Fig. 157.



$dV = -K \cdot dr = -\frac{k \cdot m \cdot m_1}{r^2} dr$. Wenn der Massenpunkt m sich in der unendlichen Ferne befindet und auf irgendeinem Wege sich dem Punkte m_1 bis auf eine Entfernung r zu nähern vermag, so erhält man durch Integration zwischen den Grenzen ∞ und r

$$1) \quad \dots V_{\infty}^r = -\int_{\infty}^r K dr = -k m_1 m \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{k m_1 m}{r}.$$

Der geometrische Ausdruck für die durch Gl. 1 bestimmte Abhängigkeit zwischen V_{∞}^r und r ist eine gleichseitige Hyperbel.

Befindet der Massenpunkt m sich in irgendeiner endlichen Entfernung r_0 von dem Zentralpunkt m_1 , die infolge der Bewegung in r übergeht, so ist

$$2) \quad V_{r_0}^r = -\int_{r_0}^r K dr = -k m_1 m \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = k m_1 m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right),$$

wofür man auch schreiben kann mit bezug auf Gl. 1

$$2a) \quad V_{r_0}^r = V_{\infty}^r - V_{\infty}^{r_0}$$

Beginnt die Bewegung des Massenpunktes m im Unendlichen mit der Geschwindigkeit $v = 0$, so ist nach Gl. 1, wenn v_r die Geschwindigkeit in der Entfernung r bezeichnet,

$$3) \quad \frac{k m_1 m}{r} = \frac{m v_r^2}{2}.$$

Das Potential V_{∞}^r der Kraft in bezug auf den Massenpunkt m hat sich in ein gleich großes Arbeitsvermögen des letzteren verwandelt.

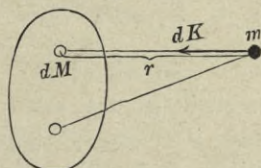
Beginnt der Massenpunkt m seine Bewegung in der Entfernung r_0 mit der Geschwindigkeit c , so gilt für seine Geschwindigkeit v_r in der Entfernung r die Gleichung

$$4) \quad \dots k m_1 m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = V_{r_0}^r = \frac{m \cdot v_r^2}{2} - \frac{m c^2}{2}.$$

Ist die Bahnlinie des Massenpunktes m so beschaffen, daß dessen Radiusvektor r in stetiger Änderung durch sein Minimum hindurchgeht, so ist in dem Augenblicke, in dem dieses eintritt, das Potential der Kraft in bezug auf den Massenpunkt erschöpft, um alsdann mit r auf Kosten des im Massenpunkte angehäuften Arbeitsvermögens von neuem wieder anzuwachsen.

Wird nun der Massenpunkt m von einer Gruppe von Massenpunkten, etwa von einem festen Körper mit der Gesamtmasse M angezogen (Fig. 158), so ist die gesamte Anziehungskraft K , die der Punkt m von der Massengruppe M erfährt, die Mittelkraft der Anziehungskräfte dK , welche die einzelnen Massenteilchen dM auf m ausüben, wobei $dK = k \cdot \frac{dM \cdot m}{r^2}$ ist.

Fig. 158.



Dieser Anziehungskraft entspricht nach Gl. 1 mit $m_1 = dM$ für die Bewegung des Massenpunktes aus der Unendlichkeit bis zur Entfernung r ein Potential

$$dV_{\infty}^r = \frac{k \cdot dM \cdot m}{r}.$$

Da nun bei der Bewegung eines Massenpunktes die Arbeit der Mittelkraft gleich ist der Arbeitssumme der Einzelkräfte, so ist auch das Potential der Gesamtanziehungskraft

$$5) \quad \dots V_{\infty}^r = k \cdot m \cdot \int \frac{dM}{r}.$$

Darin ist V_{∞}^r die Arbeit, welche die Gesamtanziehungskraft der Masse M auf den Punkt m während dessen Bewegung aus der Unendlichkeit bis in die verschiedenen Entfernungen r von den einzelnen Massenpunkten der Gruppe M ausüben würde, das Potential der Massengruppe.

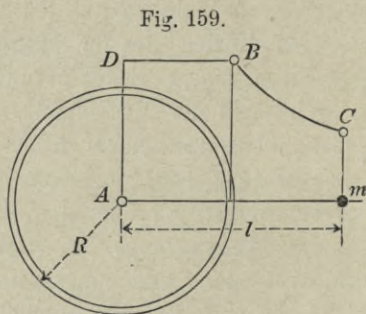
a) Potential einer dünnen, gleichartigen Kugelschale vom Halbmesser R und der Masse M .

Bleibt (Fig. 159) der Massenpunkt m während seiner Bewegung außerhalb der Kugelschale, so ist (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 60) die gesamte Anziehungskraft K dieselbe, als ob die Masse M der

Kugelschale in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Gleiches muß dann auch von der Arbeit der Kraft K , also auch vom Potential derselben gelten. Es ist demnach das Potential der Kugelschale in bezug auf den aus der Unendlichkeit bis zur Entfernung l vom Kugelmittelpunkte sich heran bewegendem Massenpunkt m , solange $l > R$:

$$6) \quad V_{\infty}^l = k \cdot \frac{M \cdot m}{l}.$$

Bei veränderlichem l ist die Darstellung des von l abhängigen V_{∞}^l wieder eine gleichseitige Hyperbel, von der in Fig. 159 nur das Stück BC gezeichnet ist.



Befindet sich der Massenpunkt innerhalb der Kugelschale, ist also $l \leq R$, so ist die Anziehungskraft der Kugelschale gegen den Punkt gleich Null (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 60/61). Bei der Bewegung des Punktes m aus der unendlichen Ferne her arbeitet daher die Anziehungskraft nur solange, bis der Punkt durch die Kugelfläche ins Innere derselben tritt, $l = R$ wird. Zwischen $l < R$ und $l = 0$ bleibt also V konstant, dargestellt durch die Gerade BD (Fig. 159). Setzt man also in Gl. 6 für l den Wert R ein, so wird

$$7) \quad V_{\infty}^0 = V_{\infty}^R = \frac{k M m}{R}.$$

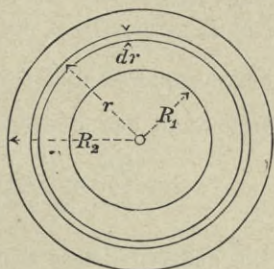
b) Potential einer gleichartigen Hohlkugel von endlicher Wandstärke.

Der innere Halbmesser sei R_1 , der äußere R_2 , die Masse sei M (Fig. 160). Man zerlege dieselbe in lauter konzentrische Schalen von unendlich geringer Wandstärke. Hat eine solche Schale einen Halbmesser r und eine Wandstärke dr , so ist ihre Masse

$$8) \quad dM = \frac{\gamma}{g} \cdot 4r^2 \cdot \pi \cdot dr.$$

Da nun das Potential eines endlichen Körpers nach Gl. 5 in Form eines Integrals, d. h. einer Summe der Beiträge einzelner Massenteilchen erscheint und da diese Summationen für dünne Kugelschalen durch die Gl. 6 und 7 bereits ermittelt sind, so können nun die Beiträge, welche die einzelnen, die Hohlkugel bildenden Schalen zu den Potentialwerten der Hohlkugel liefern, wiederum summiert werden, wobei nur stets diejenigen Kugelschalen, in die der Massenpunkt nach der Form und Lage seiner Bahnlinie hineintreten kann, nach Gl. 7 zu behandeln sind, während für diejenigen Schalen, außerhalb deren der Punkt stets bleibt, Gl. 6 anzuwenden ist.

Fig. 160.



Je nach der Form und Lage der Bahnlinie des Massenpunktes und dem danach sich ergebenden Kleinstwert von l , d. i. l_{min} , sind hier drei verschiedene Fälle zu unterscheiden, nämlich:

- $b_1)$ $l_{min} \geq R_2$, der Punkt m bleibt außerhalb der Schalen,
 $b_2)$ $l_{min} \leq R_1$, der Punkt tritt in den Hohlraum der Schale hinein,
 $b_3)$ $R_1 < l_{min} < R_2$, der Punkt tritt in die Wandung der Schale, aber nicht in deren Hohlraum.

$b_1)$. . . Für einen außerhalb der Hohlkugel bleibenden Punkt m , d. h. für $l_{min} \geq R_2$, gilt für alle dünnen Schalen übereinstimmend Gl. 6, daher wird

$$9) \quad V \stackrel{l_{min}}{\infty} \frac{k m}{l_{min}} \int dM = k \frac{m M}{l_{min}}.$$

$b_2)$. . Für einen in den Hohlraum der Hohlkugel hineintretenden Punkt m , d. h. für $l_{min} \leq R_1$, gilt für alle dünnen Schalen übereinstimmend Gl. 7, doch muß in derselben, da R für die einzelnen Schalen verschieden ist, das dortige

$$\frac{M}{R} \quad \text{mit} \quad \frac{\gamma}{g} \frac{4 r^2 \pi \cdot dr}{r} = \frac{\gamma}{g} 4 r \pi \cdot dr$$

vertauscht werden.

Man erhält dann für die ganze Hohlkugel

$$10) \quad V \stackrel{l_{min}}{\infty} k \cdot m \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot 4 \pi \int_{R_1}^{R_2} r dr = k m \frac{\gamma}{g} \cdot 2 \pi (R_2^2 - R_1^2).$$

$b_3)$... Für einen aus der Unendlichkeit her auf irgendeiner Bahnlinie in die Wandung der Schale hinein, aber nicht durch diese hindurch in den Hohlraum derselben tretenden Massenpunkt ($R_2 > l_{min} > R_1$) ist für die dünnen Schalen, deren Halbmesser $r \leq l_{min}$, die Gl. 6, für die übrigen die Gl. 7 anzuwenden. Erstere liefern zum Potential der Hohlkugel, wenn man M mit $4 \frac{\gamma}{g} \cdot r^2 \pi \cdot dr$ vertauscht, den Beitrag

$$\frac{k m}{l} 4 \frac{\gamma}{g} \pi \int_{R_1}^{l_{min}} r^2 dr = k m \frac{4}{3} \frac{\gamma}{g} \pi \left(l_{min}^3 - \frac{R_1^3}{l_{min}} \right).$$

Die anderen liefern den Beitrag

$$k m 4 \frac{\gamma}{g} \pi \int_{l_1}^{R_2} r dr = k m 2 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \pi (R_2^2 - l_{min}^2).$$

Man erhält dann nach einfacher Zusammenziehung

$$11) \quad \dots V_{\infty}^{l_{min}} k m \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot 2 \pi \left(R_2^2 - \frac{l_{min}^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{R_1^3}{l_{min}} \right).$$

c) Potential einer gleichartigen Vollkugel vom Halbmesser R .

Man hat in den vorstehenden Gl. 8 u. 10 nur $R_1 = 0$ und $R_2 = R$ zu setzen und zu beachten, daß für den Fall b_3 $l_{min} = 0$ ist. Für einen außerhalb der Kugel bleibenden Punkt, d. h. für $l_{min} \geq R$, wird einfach

$$12) \quad V_{\infty}^{l_{min}} = k \frac{m M}{l_{min}};$$

für einen ins Innere der Kugel hineintretenden Punkt ($l_{min} < R$) (nach Gl. 11):

$$13) \quad V_{\infty}^{l_{min}} = k \cdot m \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot 2 \pi \left(R^2 - \frac{l_{min}^2}{3} \right),$$

was mit $M = \frac{4}{3} \frac{\gamma}{g} R^3 \pi$ auch geschrieben werden kann

$$14) \quad V_{\infty}^{l_{min}} = \frac{k \cdot m \cdot M}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{l_{min}^2}{2 R^2} \right).$$

Führt die Bahnlinie des Punktes bis zum Mittelpunkte der Kugel heran ($l_{min} = 0$), so wird

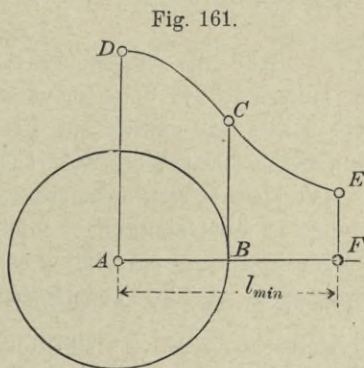
$$V_{\infty}^0 = \frac{k m M}{R} \cdot \frac{3}{2} = AD \text{ in Fig. 161.}$$

Führt die Bahnlinie des Punktes bis an die Kugeloberfläche heran, so erhält man mit $l_{min} = R$ aus Gl. 11 u. 13 übereinstimmend

$$15) \quad V_{\infty}^R = \frac{k m M}{R} = BC$$

in Fig. 161.

Trägt man $V_{\infty}^{l_{min}}$ in seiner Abhängigkeit von l_{min} als Ordinaten auf, so erhält man die gleichseitige Hyperbel CE der Gl. 12, welcher sich im Punkte C die Parabel DC der Gl. 14 mit der Achse DA tangential anschließt.



d) Selbstpotential einer gleichartigen Vollkugel.

Eine Massengruppe von der Gesamtmasse M erfülle den Raum einer Vollkugel gleichmäßig und zwar derart, daß die Einzelmasspunkte unter Aufrechterhaltung ihrer gleichmäßigen Verteilung sich beliebig zu nähern oder zu entfernen vermögen, der von der Masse erfüllte Kugelraum seinen Radius also beliebig ändern kann; zu irgendeiner Zeit habe dieser die Größe R . Die Massenteilchen unterliegen nur der Wirkung ihrer gegenseitigen Anziehung nach Maßgabe der Gl. $K = \frac{k \cdot m_1 m}{l^2}$.

Es fragt sich nun, welches Potential dem Kraftfelde der gegenseitigen Anziehung der Massenspunkte innewohnt, d. h. welche Arbeit die Anziehungskräfte leisten, wenn der Kugelradius sich von einer Länge R auf eine solche R_1 ändert.

Auf ein Massenelement von der Form einer konzentrischen Kugelschale vom Radius x und der Dicke dx (vgl. Fig. 162), also

von der Masse $4 \cdot \pi \cdot x^2 dx \frac{\gamma}{g}$, übt nur die von ihm umschlossene Masse $\frac{4}{3} \pi \cdot x^3 \frac{\gamma}{g}$ eine Anziehungskraft von der Größe

$$dK = 4 \cdot \pi \cdot x^2 dx \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot x^3 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{16}{3} \pi^2 \cdot \frac{\gamma^2}{g^2} \cdot x^3 dx$$

aus, während die Anziehungskraft, mit der die außerhalb des Schalenelementes befindliche Masse im ganzen auf dieses einwirkt, nach S. 210 den Wert Null hat.

Verkleinert sich nun der augenblickliche Radius R der Gesamtkugel infolge der Anziehungskraft um ein Maß dR , so erfährt der Radius x des Schalenelementes eine Verkleinerung $dR \cdot \frac{x}{R}$ und die dabei von der Kraft dK geleistete Arbeit berechnet sich zu

$$dK \cdot x \cdot \frac{dR}{R} = \frac{16}{3} \pi^2 \cdot \frac{\gamma^2}{g^2} \cdot \frac{dR}{R} x^4 \cdot dx.$$

Für die der Zusammenziehung dR der Kugel entsprechende Gesamtarbeit erhält man durch Integration zwischen den Grenzen $x = 0$ bis $x = R$.

$$16) \quad dV = - \frac{16}{15} \pi^2 \cdot \frac{\gamma^2}{g^2} R^4 \cdot dR.$$

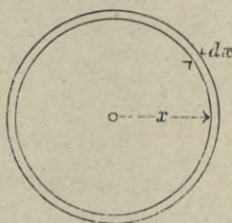
Um aus Gl. 16 durch Integration zwischen den Grenzen $R = R$ und $R = R_1$ das Potential $V_R^{R_1}$ zu erhalten, ist noch zu beachten, daß die Dichte γ mit R veränderlich und nur die Gesamtmasse M konstant ist. Daraus folgt $M = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$, also $\frac{\gamma}{g} = \frac{3}{4} \frac{M}{\pi R^3}$, womit Gl. 16 übergeht in

$$17) \quad dV = - \frac{3}{5} M^2 \cdot \frac{dR}{R^2}.$$

Die Integration ergibt nun

$$18) \quad V_R^{R_1} = \frac{3}{5} M^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right).$$

Fig 162.



War die Masse zuerst über den unendlichen Raum gleichmäßig verteilt, also gewissermaßen zerstäubt, $R = \infty$, so entspricht der Zusammenziehung bis auf den äußeren Radius R_1 ein Potential von der Größe

$$19) \quad \dots \quad V_{\infty}^{R_1} = \frac{3}{5} \frac{M^2}{R_1}.$$

Diese bei dem Ballungsvorgange geleistete Arbeit setzt sich in dem Verhältnisse

$$424 \text{ mkg} \equiv 1 \text{ Wärmeeinheit}$$

(s. 2. Teil, Aufl. 3, S. 349) in Wärmemenge um und erteilt der Kugel eine entsprechend hohe Temperatur.

6. Bewegungsgröße und Flächensatz in bezug auf eine Massengruppe.

Nach der Lehre vom Schwerpunkt bestehen zwischen den Koordinaten x , y und z der Punkte einer Massengruppe und denjenigen x_0 , y_0 und z_0 des Schwerpunktes derselben in bezug auf ein dreiachsiges Kreuz die Gleichungen

$$1) \quad \dots \quad \begin{cases} M \cdot x_0 = \Sigma m \cdot x, \\ M \cdot y_0 = \Sigma m \cdot y, \\ M \cdot z_0 = \Sigma m \cdot z. \end{cases}$$

Differenziert man obige Gleichungen beiderseits nach der Zeit und beachtet, daß

$$\frac{dx_0}{dt} = v_{x_0}, \quad \frac{dy_0}{dt} = v_{y_0} \quad \text{und} \quad \frac{dz_0}{dt} = v_{z_0}, \quad \text{ferner} \quad \frac{dx}{dt} = v_x \text{ usw.},$$

so folgt

$$2) \quad \dots \quad \begin{cases} M \cdot v_{x_0} = \Sigma m \cdot v_x, \\ M \cdot v_{y_0} = \Sigma m \cdot v_y, \\ M \cdot v_{z_0} = \Sigma m \cdot v_z. \end{cases}$$

Durch geometrische Addition der gerichteten Größen beiderseits der Gl. 2 erhält man mit v_0 als wirkliche Geschwindigkeit des Schwerpunktes und v der verschiedenen wirklichen Geschwindigkeiten der einzelnen Massenpunkte

$$3) \quad M \cdot v_0 = \Sigma m \cdot v.$$

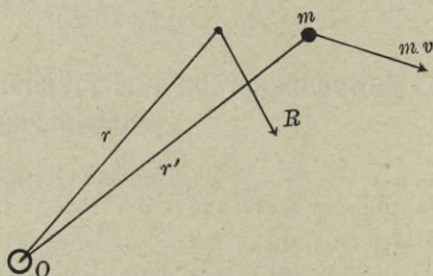
In der Vektorschreibweise erhält man aus der Schwerpunkts-
gleichung $M \cdot r_0 = \Sigma m \cdot r$ (S. 12) durch Differentiation nach der
Zeit mit $dr_0 : dt = v_0$ und $dr : dt = v$ direkt

$$3a) \quad M \cdot v_0 = \Sigma m \cdot v,$$

d. h. in Worten: Die Summe der Bewegungsgrößen der
Punkte einer Massengruppe ist eben so groß, als wenn
die ganze Masse in deren Schwerpunkte konzentriert
wäre und sich mit dessen Geschwindigkeit bewegte.

Wirkt nun auf irgend-
einen Punkt m der Massen-
gruppe mit der augenblick-
lichen Geschwindigkeit v
im ganzen eine Kraft K ,
so gilt nach S. 102 Gl. 7
für diesen Massenpunkt in
bezug auf irgendeinen Fest-
punkt O (Fig. 163) in der
Vektorschreibweise die Be-
ziehung

Fig. 163



$$V\mathfrak{K} \cdot r = \frac{d}{dt} \cdot Vm \cdot v \cdot r,$$

worin r den Radiusvektor des Massenpunktes, $V\mathfrak{K} \cdot r$ das statische
Moment der Kraft und $Vm \cdot v \cdot r$ das statische Moment der Be-
wegungsgröße $m \cdot v$ des Massenpunktes oder dessen „Drall“ in
bezug auf den Punkt O bezeichnen. Die Kraft \mathfrak{K} wird im all-
gemeinen aus einer äußeren Kraft \mathfrak{K}_a und aus einer inneren von
den anderen Punkten der Gruppe herrührenden Kraft \mathfrak{K}_i bestehen.
Damit geht obige Gleichung über in

$$V\mathfrak{K}_a \cdot r + V\mathfrak{K}_i \cdot r = \frac{d}{dt} \cdot Vm \cdot v \cdot r.$$

Für jeden anderen Punkt der Massengruppe kann eine ähnliche
Gleichung aufgestellt werden, und durch geometrische Summation
aller dieser Gleichungen erhält man

$$V\Sigma \cdot \mathfrak{K}_a \cdot r + V\Sigma \mathfrak{K}_i \cdot r = \frac{d}{dt} \cdot \Sigma Vm \cdot v \cdot r.$$

Beachtet man, daß die inneren Kräfte \mathfrak{R}_i zwischen den Massenpunkten wechselweise in entgegengesetzter gleicher Größe auftreten, sich im ganzen also aufheben, so bleibt linksseits nur die geometrische Summe der statischen Momente aller äußeren Kräfte bestehen, die nun wieder, da eine Unterscheidung nicht mehr erforderlich ist, mit \mathfrak{R} bezeichnet werden mögen. $\sum m \cdot v \cdot r$, die Summe der statischen Momente der Bewegungsgrößen aller Massenpunkte, soll als „Drall“ der Massengruppe in bezug auf O mit \mathfrak{B} bezeichnet werden. Damit schreibt sich obige Gleichung

$$4) \quad V \Sigma \cdot \mathfrak{R} \cdot r = \frac{d\mathfrak{B}}{dt}.$$

Diese Gleichung drückt den Flächensatz für eine Massengruppe aus. Er lautet in Worten: Die Änderungsgeschwindigkeit des Dralles in bezug auf einen beliebigen Momentenfestpunkt ist gleich der geometrischen Summe der statischen Momente aller äußeren Kräfte in bezug auf denselben Punkt. Dieser Satz gilt in bezug auf jeden beliebigen Festpunkt O und für jede Art der Bewegung einer Massengruppe oder auch eines starren Körpers.

Um die räumliche Darstellung der in Gl. 4 auftretenden Vektoren mehr als durch zeichnerische Darstellung möglich und zweckmäßig ist, zu unterstützen und ihre Entstehung dem geistigen Auge des Lesers ersichtlicher zu machen, sei dazu noch folgendes hervorgehoben: Die Radienvektoren r der Angriffspunkte der verschiedenen Kräfte \mathfrak{R} und der Massenpunkte mit den verschiedenen Geschwindigkeiten v sind im allgemeinen verschiedene Größen und man wird bei Anwendungen zweckmäßig die Gruppe der ersteren und die der letzteren im Sinne der Fig. 163 mit verschiedenen Buchstaben, vielleicht mit r und r' bezeichnen, womit dann Gl. 4 lauten würde

$$V \Sigma \cdot \mathfrak{R} \cdot r = \frac{d}{dt} V \Sigma \cdot m \cdot v \cdot r'.$$

Einzelne Werte von r können natürlich mit solchen von r' zusammenfallen. Die Einzelvektoren der Momente $\mathfrak{R} \cdot r$ haben wir uns mit entsprechendem Pfeilsinn rechtwinklig auf der durch den Festpunkt O und die betreffende Einzelkraft festgelegten Ebene zu denken und ebenso die Einzelvektoren der Momente $m \cdot v \cdot r'$ rechtwinklig zu der durch O und die Geschwindigkeit v des betreffenden Massen-

punktes festgelegten Ebene. Die Vereinigung beider Vektorengruppen $\Sigma \cdot \mathbf{r}$ und $m \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'$ kann man sich je durch einen räumlichen Streckenzug vorstellen, dessen Schlußlinie die geometrische Summe $\sqrt{\Sigma \cdot \mathbf{r}}$ bzw. $\sqrt{\Sigma \cdot m \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'}$ darstellen. Zur analytischen Durchführung der Summierung könnte man sich die Einzelvektoren beider Gruppen in einem Punkte, etwa dem Festpunkte O zusammengetragen denken und dort in bekannter Weise in ihre Komponenten zerlegen und so vereinigen.

Wäre die Massengruppe oder der starre Körper in einem Punkte drehbar festgehalten und dieser als Festpunkt O angenommen, so könnte die Bewegung derselben in jedem Augenblicke als Drehung um eine durch O gehende Achse angesehen werden. Bei der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω würde dann die Geschwindigkeit v irgendeines Massenpunktes im rechtwinkligen Abstände $\rho = r' \sin \alpha$ von der augenblicklichen Achse $v = \rho \cdot \omega$ sein und das Ergebnis der Projektion aller Vektoren $m \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'$ auf die Achse würde sein

$$\sqrt{\Sigma \cdot m \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}' \sin \alpha} = \frac{d}{dt} \sqrt{\omega \cdot \Sigma \cdot m \cdot \rho^2} = \frac{d}{dt} \sqrt{\omega \cdot J},$$

mit J als Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Achse. Die Projektion der Momentenvektoren $\Sigma \mathbf{r}$ auf die Achse würde zum Drehmoment \mathfrak{M} aller Kräfte in bezug auf dieselbe führen und Gl. 4 würde nun lauten

$$\mathfrak{M} = \frac{d\omega}{dt} \cdot J = \varepsilon \cdot J$$

mit ε als augenblicklicher Winkelbeschleunigung. Diese Beziehung ist nichts anderes als das Gesetz der Winkelbeschleunigung (vgl. Teil I, Aufl. 4, S. 325, Gl. 2).

Ist $\mathfrak{M} = 0$ und demnach auch $\frac{d(\omega J)}{dt} = 0$, so wird $\omega \cdot J$ konstant. Würde also bei einem ohne äußeres Kraftmoment sich drehenden Körper das Trägheitsmoment sich ändern, so müßte die Winkelgeschwindigkeit ω sich umgekehrt ändern. Würde z. B. die Erde sich infolge von Abkühlung zusammenziehen, so daß J sich verkleinerte, so müßte ihre Winkelgeschwindigkeit ω größer werden. Der Umstand, daß zufolge astronomischer Beobachtungen, soweit dieselben zurückreichen, die Zeit der Umdrehung der Erde sich nicht merkbar geändert hat, läßt darauf schließen, daß auch eine wesentliche Abkühlung der Erde in dieser Zeit nicht mehr erfolgt ist.

7. Zwangläufige Bewegung einer Massengruppe gegen einen festen Körper, Massenausgleich.

Eine Massengruppe sei mit einem festen Körper so verbunden, daß beide sich gegenseitig nur zwangläufig, d. h. nur so bewegen können, daß irgendeine mögliche Bewegung eines Massenteilchens relativ zum festen Körper eindeutig bestimmte Bewegungen aller übrigen unabwendbar zur Folge hat. Im übrigen sei die Gesamtmasse der Massengruppe und des festen Körpers frei beweglich. Wirken dann von außen her auf die Gesamtmasse Kräfte nicht ein, oder heben sich etwa angreifende Kräfte in ihrer Wirkung gegenseitig auf, so bewegt sich der Schwerpunkt der Gesamtmasse geradlinig gleichförmig, oder er ruht, wenn er anfänglich in Ruhe war. Es fragt sich nun, wie unter dieser Voraussetzung die zwangläufige Bewegung der Massengruppe gegen den festen Körper geregelt werden müßte, damit dieser eine etwa vorhandene gleichförmig geradlinige Verschiebung (ohne jede Drehung) beibehalte, oder in Ruhe verharre, wenn er zu Anfang ruhte.

Die Zwangläufigkeit der Bewegung der Massengruppe gegen den festen Körper bringt es mit sich, daß im allgemeinen zwischen beiden wechselweise Kräfte übergehen (vgl. S. 175; bedingte Kräfte), die dann eine gegenseitige (relative) beschleunigte Bewegung der Massengruppe gegen den Körper und umgekehrt nach Maßgabe der zwangläufigen Verbindung beider zur Folge haben.

Ist $[K]$ die Gruppe der vom festen Körper auf die Massengruppe ausgeübten Kräfte, $[p]$ die Gruppe der relativen Beschleunigungen der einzelnen Massenteile der letzteren in Bezug auf den Körper, also $[-mp]$ die Gruppe der entsprechenden Trägheitswiderstände (Ergänzungskräfte), so gilt nach dem Satze von d'Alembert (I. Teil, Aufl. 4, S. 171)

$$1) \quad [K], [-mp] \equiv 0,$$

wofür man auch schreiben kann, wenn in der Vektorschreibweise $\mathfrak{K} = \sum \mathfrak{K}$ die Mittelkraft aller Kräfte, $\mathfrak{M}_r = \sum \mathfrak{K} \cdot \mathbf{r}$ deren resultierendes Moment, $\sum -mp$ die geometrische Summe aller Trägheitswiderstände und $\sum -mp \cdot \mathbf{r}$ deren Momentensumme alles in bezug auf einen Festpunkt O bezeichnen

$$2) \quad \mathfrak{K} - \sum mp = 0 \quad \text{und}$$

$$3) \quad \mathfrak{M}_r - \sum mp \cdot \mathbf{r} = 0;$$

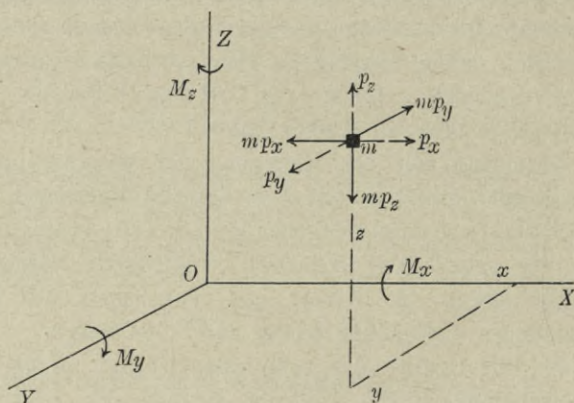
oder in Komponentengleichungen in bezug auf ein mit dem festen Körper unverrückbar verbundenes Achsenkreuz

$$4) \quad \dots \begin{cases} X - \Sigma m p_x = 0, \\ Y - \Sigma m p_y = 0, \text{ und} \\ Z - \Sigma m p_z = 0, \end{cases}$$

$$5) \quad \dots \begin{cases} M_x - (\Sigma m p_z \cdot y - \Sigma m p_y \cdot z) = 0, \\ M_y - (\Sigma m p_x \cdot z - \Sigma m p_z \cdot x) = 0, \\ M_z - (\Sigma m p_y \cdot x - \Sigma m p_x \cdot y) = 0. \end{cases}$$

(Bezüglich der Klammerwerte in den Gleichungen 5 vgl. Fig. 164.)

Fig. 164.



Darin sind die Beschleunigungen

$$\mathfrak{p} = \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2}, \quad p_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad p_y = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad \text{und} \quad p_z = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

aus den Bewegungsarten der einzelnen Massenpunkte, wie sie durch die Zwangläufigkeit derselben gegeben sind, zu entnehmen.

Mit denselben Kräften und Momenten \mathfrak{K} und \mathfrak{M}_r (Gl. 2 und 3) bzw. X , Y und Z und M_x , M_y und M_z (Gl. 4 und 5), welche der feste Körper auf die Massengruppe ausübt, wirkt diese vermöge ihrer Trägheit auf jenen zurück. Die Schwerpunkte beider werden also im allgemeinen beschleunigte Bewegungen gegen-

einander ausführen und ebenso werden Massengruppe und fester Körper infolge des wechselweise von ein zum andern übergehenden Momentes sich gegeneinander drehen. Da nun nach der Voraussetzung der Schwerpunkt der Gesamtmasse beider keinerlei beschleunigte Bewegung und die Gesamtmasse selbst auch keine beschleunigte Drehung ausführen können, so müssen die Einzelschwerpunkte beider Massen beschleunigte Bewegungen und beide Massen selbst beschleunigte Drehungen auch im absoluten Sinne und zwar beides in entgegengesetzter Richtung ausführen.

Bei der im technischen Sinne gedachten zwangsläufigen Verbindung der Massengruppe mit dem festen Körper kann sowohl die gegenseitige als auch die absolute Bewegung beider nur eine räumlich beschränkte, also periodische sein, nur in Schwingungen bestehen. Ist die zwangsläufige Verbindung zwischen Massengruppe und festem Körper so gestaltet, daß in den Gleichungen 2 und 3 $\Sigma m \cdot p$ und $\Sigma m \cdot p \cdot r$ je gleich Null werden, so müssen auch die von beiden Massen zufolge ihrer zwangsläufigen Verbindung wechselweise aufeinander ausgeübten bedingten Kräfte in ihrer Gesamtwirkung sich aufheben, \mathfrak{R} und \mathfrak{M}_r je gleich Null sein. Die gegen den festen Körper zwangsläufig bewegliche Massengruppe wird also dessen Bewegungszustand im ganzen nicht beeinflussen. Eine solche Regelung der zwangsläufigen Bewegung der Massengruppe gegen den festen Körper bezeichnet man als **Massenausgleich**.

Unter dem festen Körper kann man sich z. B. das Gestell einer Maschine unter der beweglichen Massengruppe die Bewegungsorgane derselben, ihre sogenannten Getriebeteile vorstellen. Von besonderer Bedeutung ist der Massenausgleich für mobile Maschinen, Lokomotiven, Schiffsmaschinen usw. Der ruhige Gang eines Schiffes in ruhigem Wasser ist wesentlich bedingt durch den tunlichst vollkommenen Ausgleich der bewegten Massen (Kolben, Kurbeln und Gestänge) der Schiffsmaschinen.

Die infolge ihrer zwangsläufigen Bewegung zwischen den einzelnen Getriebeteilen und von diesen auf das Gestell wechselweise übergehenden Kräfte, die in der Trägheit der Massen ihren Ursprung haben, pflegt man auch als Massendrucke zu bezeichnen. Ihr Auftreten hat naturgemäß auch eine Inanspruchnahme der Festigkeit sowohl der Getriebe selbst als auch des Maschinengestelles im Gefolge.

Aus den Gleichungen 4 und 5 ergeben sich für den Massenausgleich folgende sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \dots \sum m p_x = 0, & 7) \quad & \dots \sum m p_y = 0, & 8) \quad & \dots \sum m p_z = 0, \\
 9) \quad & \dots \sum m p_z \cdot y - \sum m p_y \cdot z = 0, \\
 10) \quad & \dots \sum m p_x \cdot z - \sum m p_z \cdot x = 0 \quad \text{und} \\
 11) \quad & \dots \sum m p_y \cdot x - \sum m p_x \cdot y = 0.
 \end{aligned}$$

Die bei den beweglichen Teilen von Kolbenmaschinen mit Kurbelmechanismen in Frage kommenden Bewegungen, für welche hier das Problem des Massenausgleichs weiter verfolgt werden soll, sind stets eben; und zwar sind die Ebenen, in denen sich alle Massenteile bewegen, rechtwinklig zur Maschinenwelle gerichtet. In der Richtung der letzteren finden daher keinerlei Bewegungen statt. Ordnet man nun das Koordinatenkreuz, auf das sich die Gl. 6 bis 11 beziehen, so an, daß der Nullpunkt in die Achse der Maschinenwelle und die z -Achse in deren Richtung zu liegen kommt, (vergl. Fig. 165 und 166) so muß für alle bewegten Massenteile $p_z = 0$ sein. Von den den Massenausgleich darstellenden Gleichungen kommt daher zunächst die Gl. 8 in Fortfall und in den Gl. 9 und 10 werden mit $p_z = 0$ auch $\sum m p_z \cdot y$ und $\sum m p_z \cdot x$ je gleich Null. Die Bedingungen für den Massenausgleich reduzieren sich danach auf folgende fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 12) \quad & \dots \sum m p_x = 0, & 13) \quad & \dots \sum m p_y = 0, \\
 14) \quad & \dots \sum m p_x \cdot z = 0, & 15) \quad & \dots \sum m p_y \cdot z = 0 \quad \text{und} \\
 16) \quad & \sum m p_x \cdot y - \sum m p_y \cdot x = 0.
 \end{aligned}$$

Es werde nun weiterhin angenommen, daß die Achsen der Zylinder und Kolbenstangen mit der Achse der Maschinenwelle in einer Ebene liegen. In die Richtung der ersteren werde die X -Achse des Koordinatenkreuzes gelegt, womit dieses festliegt (vgl. Fig. 165 und 166).

Die Anzahl n der zu einem Maschinensystem verbundenen Zylinder und zugehörigen Kurbelgetriebe bleibe einstweilen dahingestellt, jedoch sei schon hier darauf hingewiesen, daß bei einer einzylindrigen Maschine ein die Gl. 12 bis 16 erfüllender Massenausgleich ersichtlich ausgeschlossen ist.

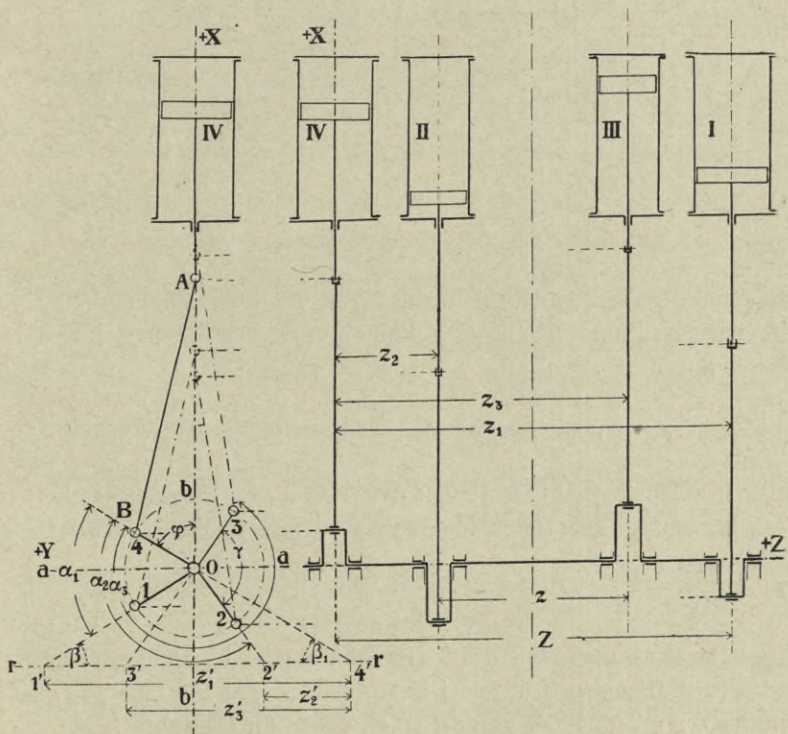
Es soll nun zunächst untersucht werden, welche Beiträge die beweglichen Massen eines Getriebes zu den Summenwerten der

Gl. 12 u. 13 liefern. In Betracht kommen für jedes Getriebe folgende drei Massen, bzw. Massengruppen:

1. Der Kolben mit Kolbenstange und Kreuzkopf als lediglich in der X -Richtung hin- und hergehende Masse m .
2. Die mit der Maschinenwelle fast verbundenen und mit ihr lediglich rotierenden Teile, als Kurbel nebst Gegengewicht, Schwungrad usw. von der Gesamtmasse m' .
3. Die Schubstange von der Masse m'' .

Fig. 165.

Fig. 166.

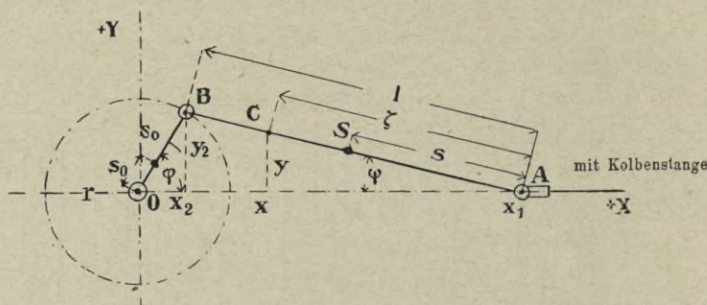


Es wird sich zeigen, daß die Masse m'' der Schubstange mit einem Teil zu der lediglich hin- und hergehenden Masse m und mit dem anderen zu den lediglich rotierenden Massen m' gerechnet werden kann, ohne daß das Ergebnis in seiner Genauigkeit irgendwie

beeinträchtigt wird. Um zu dieser Verteilung der Masse m'' der Schubstange zu gelangen, wollen wir zuerst deren Beiträge zu den Summenwerten der Gleichungen 12 und 13 untersuchen.

x_1 und $y_1 = 0$ seien die Koordinaten des mit dem Kreuzkopf lediglich hin- und hergehenden Endpunktes A der Schubstange (Fig. 167) x_2 und y_2 diejenigen des um O sich drehenden anderen

Fig. 167.



Endpunktes B . Dann erhält man für die Koordinaten x und y irgendeines Punktes C der Mittellinie der Schubstange im Abstand ζ von A

$$17) \quad x = x_1 \frac{l - \zeta}{l} + x_2 \cdot \frac{\zeta}{l} \quad \text{und} \quad 18) \quad y = y_2 \cdot \frac{\zeta}{l}.$$

Durch zweimalige Differentiation der Gl. 17 und 18 nach der Zeit t erhält man für die Beschleunigungen p_x und p_y des Punktes C

$$p_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \cdot \frac{l - \zeta}{l} + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \cdot \frac{\zeta}{l} \quad \text{und} \quad p_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y_2}{dt^2} \cdot \frac{\zeta}{l}.$$

Ein Massenteilchen dm'' der Schubstange im Punkte C liefert zu den Summenwerten der Gl. 12 und 13 die Beiträge $p_x \cdot dm''$ und $p_y \cdot dm''$ und die ganze Stange daher die Beiträge

$$19) \quad \int p_x \cdot dm'' = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \cdot \int \frac{l - \zeta}{l} \cdot dm'' + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \cdot \int \frac{\zeta}{l} \cdot dm'',$$

$$20) \quad \dots \int p_y \cdot dm'' = \frac{d^2 y_2}{dt^2} \cdot \int \frac{\zeta}{l} \cdot dm''.$$

Bei den aus Fig. 167 ersichtlichen Bezeichnungen ist

$$\int (l - \xi) dm'' = m''(l - s) \quad \text{und} \quad \int \xi dm'' = m'' \cdot s,$$

wenn s den Abstand des Stangenschwerpunktes S von A bezeichnet.

Man hat daher auch

$$21) \quad \int p_x dm'' = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \cdot m'' \cdot \frac{l-s}{l} + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \cdot m'' \cdot \frac{s}{l} \quad \text{und}$$

$$22) \quad \int p_y \cdot dm'' = \frac{d^2 y_2}{dt^2} \cdot m'' \cdot \frac{s}{l}.$$

Der Anteil $m'' \frac{l-s}{l}$ der Gesamtmasse m'' der Schubstange unterliegt also der Beschleunigung $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ des Punktes A und der Anteil $m'' \frac{s}{l}$ den Beschleunigungen $\frac{d^2 x_2}{dt^2}$ und $\frac{d^2 y_2}{dt^2}$ des Punktes B . Die Beiträge der Gesamtmasse m'' zu den Summenwerten Gl. 12 und 13 sind danach genau dieselben, als wenn die Masse von vornherein mit $m'' \frac{l-s}{l}$ und $m'' \frac{s}{l}$, d. h. so auf die Punkte A und B verteilt wäre, wie das Gewicht der Stange sich verteilen würde, wenn sie in den Punkten A und B gestützt wäre. Der nach B übertragene Massenanteil $m'' \frac{s}{l}$ gesellt sich also zu der Masse m' der lediglich um die Achse der Maschinenwelle rotierenden Getriebteile, während der nach A hin übertragene $m'' \frac{l-s}{l}$ zu der Masse m der nur hin und her sich bewegenden Teile hinzutritt, die wir uns danach insgesamt im Punkt A konzentriert denken können.

In gleicher Weise kann man sich die Masse m' der nur rotierenden Teile, deren gemeinsamer Schwerpunkt S_0 sein möge, mit $\frac{s_0}{r} \cdot m'$ und $\frac{r-s_0}{r} m'$ auf den Punkt B und die Achse O verteilt denken. Letzterer Anteil ruht und ersterer erfährt die Beschleunigungen $\frac{d^2 x_2}{dt^2}$ und $\frac{d^2 y_2}{dt^2}$ des Punktes B .

Für ein ganzes Getriebe ist demnach

$$23) \quad \dots \Sigma m \cdot p_x = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \left(m + m'' \frac{l-s}{l} \right) + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \left(m' \frac{s_0}{r} + m'' \cdot \frac{s}{l} \right) \text{ und}$$

$$24) \quad \dots \Sigma m \cdot p_y = \frac{d^2 y_2}{dt^2} \cdot \left(m' \cdot \frac{s_0}{r} + m'' \cdot \frac{s}{l} \right).$$

Es sind jetzt noch die zweiten Ableitungen $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 x_2}{dt^2}$ und $\frac{d^2 y_2}{dt^2}$ aus der Bewegungsart der Punkte *A* und *B* zu bilden.

Man hat nach Fig. 167

$$25) \quad x_1 = r \cos \varphi + l \cdot \cos \psi.$$

$$26) \quad y_1 = 0.$$

$$27) \quad x_2 = r \cos \varphi.$$

$$28) \quad y_2 = r \sin \varphi.$$

Um alle Koordinaten allein auf den Drehungswinkel φ der Kurbel zurückzuführen, beachten wir, daß nach Fig. 167

$$r \sin \varphi = l \sin \psi, \text{ also } \sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi \text{ und } \cos \psi = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi}$$

ist, oder in eine Reihe entwickelt

$$\cos \psi = 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} \frac{r^4}{l^4} \sin^4 \varphi - \dots \text{ ist.}$$

Bei den für die höheren Potenzen von $r:l$ in Frage kommenden kleinen Werten kann schon das dritte Glied gegen die Einheit völlig vernachlässigt werden. Ersetzt man noch $\sin^2 \varphi$ durch $\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$, so erhält man

$$25a) \quad x_1 = r \cdot \cos \varphi + l \left(1 - \frac{r^2}{4l^2} \right) + \frac{r^2}{4 \cdot l} \cos 2\varphi.$$

Die zweimalige Differentiation der Gleichungen 25a, 27 und 28 nach der Zeit t ergibt, wenn die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ konstant angenommen wird,

$$29) \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -r \cos \varphi \omega^2 - \frac{r^2}{l} \cdot \cos 2\varphi \omega^2,$$

$$30) \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -r \cos \varphi \cdot \omega^2 \quad \text{und} \quad 31) \quad \dots \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -r \sin \varphi \omega^2.$$

Setzt man weiterhin die im Kreuzkopf (A) und im Kurbelzapfen (B) wirkenden Massen

$$32) \dots m + m'' \left(\frac{l-s}{l} \right) = M_a \text{ und } 33) \dots \frac{m' s_0}{r} + \frac{m'' \cdot s}{l} = M_b,$$

so erhält man aus den Gleichungen 23 und 24 nach entsprechender Ordnung

$$34) \quad \Sigma m p_x = - \left[\cos \varphi (M_a + M_b) + \frac{r}{l} \cos 2 \varphi \cdot M_b \right] r \omega^2 \text{ und}$$

$$35) \quad \Sigma m p_y = - \sin \varphi M_b r \omega^2.$$

Findet, wie üblich, durch Anbringung von Gegengewichten an den Kurbeln von vornherein ein solcher Massenausgleich statt, daß der Gesamtschwerpunkt der nur rotierenden Massen einschließlich des auf den Kurbelzapfen (B) entfallenden Anteiles $\frac{m'' \cdot s}{l}$ der Masse der Schubstange in die Wellenachse O fällt, so verschwindet die Masse M_b in den Gleichungen 34 und 35, welche letztere damit überhaupt ihre Bedeutung verliert. Es kommen jetzt nur noch Massendrücke in der X -Richtung in Betracht, herrührend von den nur hin- und hergehenden, in A konzentriert gedachten Massen m und von den auf den Punkt A entfallenden Anteil $\frac{m'' l-s}{l}$ der Masse m'' der Schubstange. Es wird demnach

$$36) \quad \dots \Sigma \cdot m p_x = - \left[\cos \varphi + \frac{r}{l} \cdot \cos 2 \varphi \right] M_a r \omega^2.$$

Ähnliche Beiträge, wie die hier für ein einzylindriges Getriebe berechneten, liefert jedes andere Getriebe einer mehrzylindrigen Maschine zu den Massendrücken $\Sigma m \cdot p_x$ in der X -Richtung. Ein solches Getriebe, dessen Drehungswinkel φ' von dem des bisher behandelten stets um den Schräkungswinkel α abweicht, für das also $\varphi' = \varphi + \alpha$ ist, liefert den Beitrag

$$36a) \quad \dots \Sigma m p_x = - \left[\cos (\varphi + \alpha) + \frac{r}{l} \cos 2 (\varphi + \alpha) \right] M_a r \omega^2.$$

$\Sigma m p_y$ ist für jedes Einzelgetriebe unter der oben gemachten Voraussetzung gleich Null.

Es ist nun immer möglich, die Schräkungswinkel α der Kurbeln für die zu einem Maschinensystem vereinigten Einzelgetriebe so zu

wählen, daß die Vorzeichen der Werte $\cos(\varphi + \alpha)$ und $\cos 2(\varphi + \alpha)$ für die einzelnen Getriebe und somit auch deren Beiträge zu dem Gesamtmassendruck $\Sigma m p_x$ teils positiv, teils negativ ausfallen. Bei einer gewissen Mindestzahl n der verbundenen Einzelgetriebe läßt es sich auch erreichen, daß $\Sigma m p_x$ aller Getriebe gleich Null wird, also der Massendruck in der X -Richtung verschwindet.

Summiert man die in Gleichung 36a für ein Getriebe dargestellten Massendrucke für das ganze Maschinensystem und fordert, daß die Summe gleich Null werde, so führt das zu der Gleichung

$$37) \quad \Sigma(\Sigma m p_x) = -\Sigma[\cos(\varphi + \alpha) + \frac{r}{l} \cdot \cos 2(\varphi + \alpha)] M_a r \cdot \omega^2 = 0,$$

worin den einzelnen Getrieben sowohl verschiedene Schränkungs-
winkel α , als auch verschiedene Massen M_a entsprechen. Die Winkelgeschwindigkeit ω ist für alle Getriebe gleich und zumeist auch der Kurbelradius r und das Verhältnis $r:l$. Unter dieser Voraussetzung ergibt die weitere Entwicklung der Gl. 37

$$38) \quad -\cos \varphi \Sigma M_a \cos \alpha + \sin \varphi \Sigma M_a \sin \alpha - \frac{r}{l} \cdot \cos 2 \varphi \Sigma M_a \cos 2 \alpha \\ + \frac{r}{l} \cdot \sin 2 \varphi \Sigma M_a \sin 2 \alpha = 0.$$

Soll diese Gleichung für alle Drehungswinkel φ erfüllt werden, so muß jeder der Summenwerte für sich gleich Null sein, woraus sich folgende vier Gleichungen ergeben:

$$38a) \quad \dots \Sigma M_a \cos \alpha = 0, \quad 38b) \quad \dots \Sigma M_a \sin \alpha = 0,$$

$$38c) \quad \dots \Sigma M_a \cos 2 \alpha = 0 \quad \text{und} \quad 38d) \quad \dots \Sigma M_a \sin 2 \alpha = 0.$$

Wir wollen jetzt zunächst noch untersuchen, unter welchen Bedingungen die Gl. 14 und 15 erfüllt, die Massendruckmomente in bezug auf die X -Achse (Gl. 15) und in bezug auf die Y -Achse (Gl. 14) je gleich Null werden.

Da die Massen der zu einem jeden Einzelgetriebe gehörigen Getriebeteile (Kolben, Schubstange und Kurbel) als in einer Ebene rechtwinklig zur Z -Achse (Achse der Maschinenwelle) wirkend angesehen werden können, so haben alle auch dieselbe Koordinate z (vgl. Fig. 165 und 166). Man braucht daher, um die Ausdrücke $\Sigma m p_x \cdot z$ und $\Sigma m p_y \cdot z$ für das ganze Maschinensystem zu bilden, die für die Einzelgetriebe bereits bekannten Massendrucke $\Sigma m p_x$

und $\Sigma m p_y$ je nur mit der zugehörigen Ordinate z zu multiplizieren und das Ergebnis für das ganze System zu addieren.

Die Massendrücke $\Sigma m p_y$ sind aber unter der S. 227 gemachten Voraussetzung für jedes Getriebe gleich Null; daher wird von selbst auch für das ganze System $\Sigma m p_y \cdot z = 0$.

Nach Gl. 36a liefert jedes Einzelgetriebe zu dem Massendruckmomente $\Sigma m \cdot p_x \cdot z$ einen Beitrag

$$-\left[\cos(\varphi + \alpha) + \frac{r}{l} \cdot \cos 2(\varphi + \alpha)\right] M_a r \cdot \omega^2 \cdot z,$$

woraus durch Summierung für das ganze Maschinensystem nach Gl. 14 folgt

$$39) \quad \Sigma \left[\cos(\varphi + \alpha) + \frac{r}{l} \cdot \cos 2(\varphi + \alpha) \right] M_a r \cdot \omega^2 z = 0$$

und unter Fortlassung der für alle Getriebe gleichen r und ω^2 und Entwicklung der \cos -Werte, wenn man die \cos - und \sin -Werte des für alle Einzelgetriebe gleichen Drehungswinkels φ bzw. 2φ absondert

$$40) \quad -\cos \varphi \Sigma M_a \cos \alpha \cdot z + \sin \varphi \Sigma M_a \sin \alpha \cdot z - \cos 2\varphi \Sigma M_a \cos 2\alpha \cdot z + \sin 2\varphi \Sigma M_a \sin 2\alpha \cdot z = 0.$$

Soll diese Gleichung für alle Drehungswinkel φ erfüllt werden, so müssen die vier Summenwerte je für sich gleich Null sein, woraus die vier Gleichungen folgen

$$39a) \quad \dots \Sigma M_a \cdot \cos \alpha \cdot z = 0, \quad 39b) \quad \dots \Sigma M_a \sin \alpha \cdot z = 0,$$

$$39c) \quad \dots \Sigma M_a \cos 2\alpha \cdot z = 0 \text{ und } 39d) \quad \dots \Sigma M_a \cdot \sin 2\alpha \cdot z = 0.$$

Bevor zu der weiteren Besprechung dieser für den Massenausgleich ausschlaggebend wichtigen Bedingungsgleichungen (Gl. 38a bis 38d und Gl. 39a bis 39d) übergegangen wird, soll nun zunächst noch untersucht werden, inwieweit sich aus der in Gl. 16 ausgedrückten Bedingung der Nullgleichheit des Gesamtmassendruckmomentes in bezug auf die Z -Achse (Achse der Maschinenwelle) etwa weitere brauchbare und nützliche Regeln für den Massenausgleich gewinnen lassen.

Wir erkennen zunächst, daß alle in der Richtung der X -Achse lediglich hin- und hergehenden Massen keine Beiträge zu den Summenwerten $\Sigma m p_x y$ und $\Sigma m p_y \cdot x$ liefern können, weil für alle sowohl $y = 0$, als auch $p_y = 0$ ist.

Ebenso liefern die lediglich um die Z -Achse rotierenden Massen unter der Voraussetzung konstanter Winkelgeschwindigkeit ω keinen

Beitrag zu obigen Summenwerten; denn alle unterliegen nur Zentripetalbeschleunigungen und setzen diesen nur radial nach außen gerichtete Trägheitswiderstände (Zentrifugalkräfte) entgegen, die also keinerlei Momente in bezug auf die Z -Achse haben können. Das ergibt sich auch aus folgender Betrachtung. Ist ζ der radiale Abstand eines Massenteilchens dm und sind $y = \zeta \cdot \sin \varphi$, $x = \zeta \cdot \cos \varphi$ dessen Koordinate, dann ist $p_x = -\frac{d^2x}{dt^2} = -\zeta \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\zeta \cdot \cos \varphi \cdot \omega^2$ und $p_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \zeta \cdot \sin \varphi \cdot \omega^2$ und der Beitrag zu der Differenz obiger Summenwerte wird

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot y dm - \frac{d^2y}{dt^2} \cdot x dm = -\zeta^2 \cdot \cos \varphi \omega^2 \sin \varphi - (-\zeta^2 \cdot \sin \varphi \omega^2 \cdot \cos \varphi)$$

d. i. Null. Bleibt nur noch der Beitrag der in der Schubstange enthaltenen Masse, die gleichzeitig eine hin- und hergehende und eine Drehbewegung ausführt, zu untersuchen.

Mit den in den Gl. 17 und 18 ausgedrückten Koordinaten x und y eines Punktes C der Achse der Schubstange und den daraus ermittelten Beschleunigungen

$$p_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} \frac{l-\zeta}{l} + \frac{d^2x_2}{dt^2} \frac{\zeta}{l} \quad \text{und} \quad p_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_2}{dt^2} \cdot \frac{\zeta}{l}$$

ist der Beitrag eines Massenelementes dm'' in jenem Punkte (einer dünnen Scheibe, die wir uns in C konzentriert denken können) zu der Differenz der Summenwerte $\Sigma m p_x y - \Sigma m p_y x$ (Gl. 16)

$$\begin{aligned} & dm'' \left(\frac{d^2x}{dt^2} y - \frac{d^2y}{dt^2} x \right) \\ &= dm'' \left\{ \left(\frac{d^2x_1}{dt^2} \frac{l-\zeta}{l} + \frac{d^2x_2}{dt^2} \cdot \frac{\zeta}{l} \right) y_2 \frac{\zeta}{l} - \frac{d^2y_2}{dt^2} \frac{\zeta}{l} \left(x_1 \frac{l-\zeta}{l} + x_2 \cdot \frac{\zeta}{l} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Summiert man für alle Massenteile dm'' der Schubstange, wobei nur ζ , nicht aber x_1 , x_2 und y_2 als veränderlich anzusehen sind, so erhält man den Beitrag der ganzen Schubstange zu

$$\begin{aligned} & \int dm'' \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot y - \frac{d^2y}{dt^2} \cdot x \right) \\ &= \frac{d^2x_1}{dt^2} y_2 \left[\int \frac{\zeta \cdot dm''}{l} - \int \frac{\zeta^2 dm''}{l^2} \right] + \frac{d^2x_2}{dt^2} \cdot y_2 \int \frac{\zeta^2 dm''}{l^2} \\ & \quad - \frac{d^2y_2}{dt^2} \left\{ x_1 \left[\int \frac{\zeta dm''}{l} - \int \frac{\zeta^2 dm''}{l^2} \right] + x_2 \int \frac{\zeta^2 dm''}{l^2} \right\}. \end{aligned}$$

Mit $\int \frac{\xi dm''}{l} = \frac{s \cdot m''}{l}$ und $\int \frac{\xi^2 dm''}{l^2} = \frac{J}{l^2} = \frac{i^2}{l^2} \cdot m''$ und nach entsprechender Ordnung geht obiger Ausdruck über in

$$\int dm'' \left[\frac{d^2 x}{dt^2} \cdot y - \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot x \right] = m'' \cdot \left(\frac{s}{l} - \frac{i^2}{l^2} \right) \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} \cdot y_2 - \frac{d^2 y_2}{dt^2} \cdot x_1 \right) + m'' \frac{i^2}{l^2} \left(\frac{d^2 x_2}{dt^2} \cdot y_2 - \frac{d^2 y_2}{dt^2} \cdot x_2 \right),$$

wobei zu beachten ist, daß der Klammerwert des zweiten Gliedes verschwindet, weil der Punkt *B* (Fig. 167) sich, wie angenommen, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im Kreise bewegt. Der zweite Klammerwert des ersten Gliedes läßt sich umwandeln in

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} \cdot y_2 - \frac{d^2 y_2}{dt^2} \cdot x_1 = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \cdot y_2 - \frac{d y_2}{dt} \cdot (x_1 - x_2) \right\};$$

die Durchführung der rechts angedeuteten Differentiation führt nämlich wieder zu dem Ausdruck linksseits zurück, wenn man berücksichtigt, daß bei konstanter Winkelgeschwindigkeit ω der Maschinenwelle $\frac{d^2 x_2}{dt^2} \cdot y_2 - \frac{d^2 y_2}{dt^2} \cdot x_2 = 0$ ist. Setzt man nun in vorstehender Gleichung $x_1 - x_2 = l \cos \psi$; weiter

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = -l \sin \psi \frac{d\psi}{dt}, \quad y_2 = l \sin \psi \quad \text{und} \quad \frac{d y_2}{dt} = l \cos \psi \frac{d\psi}{dt},$$

so geht sie über in

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} \cdot y_2 - \frac{d^2 y_2}{dt^2} \cdot x_1 = -l^2 \cdot \frac{d}{dt} (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) \frac{d\psi}{dt} = -l^2 \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2}$$

und das Massendruckmoment für eine ganze Schubstange wird

$$40) \quad \dots \int dm'' \left(\frac{d^2 x}{dt^2} y - \frac{d^2 y}{dt^2} x \right) = -m'' l^2 \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2} \left(\frac{s}{l} - \frac{k^2}{l^2} \right);$$

es ist also abhängig von der Winkelbeschleunigung, mit der sich die Schubstange um den Punkt *A* dreht, und damit natürlich auch abhängig von der Winkelgeschwindigkeit ω der Maschinenwelle. Es soll noch auf diese zurückgeführt werden. Man hat

nach S. 226 $\sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi$ und mit genügender Annäherung

$\cos \psi = 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi$. Durch Differentiation der letzten Gleichung

erhält man unter Beachtung der ersteren zunächst $\frac{d\psi}{dt} = \frac{r}{l} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}$
 $= \frac{r}{l} \cos \varphi \omega$ und daraus weiter $\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{r}{l} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \omega = -\frac{r}{l} \sin \varphi \omega^2$,
 womit Gl. 40 übergeht in

$$41) \quad \dots \int dm'' \cdot \left(\frac{d^2x}{dt^2} y - \frac{d^2y}{dt^2} x \right) = m'' \left(\frac{s}{l} - \frac{k^2}{l^2} \right) r \cdot l \cdot \omega^2 \sin \varphi.$$

Das ist das Massendruckmoment einer Schubstange und kann nicht für alle Drehungswinkel φ verschwinden, weil $\frac{s}{l} - \frac{k^2}{l^2}$, wenn auch unter Umständen verhältnismäßig klein, doch stets größer als Null sein muß. Nur bei dem Vorhandensein mehrerer Kurbelgetriebe können deren Massendruckmomente in bezug auf die Maschinenwelle bei geeigneter Stellung der Kurbeln zueinander sich aufheben, weil je nach den Drehungswinkeln φ der einzelnen Kurbeln deren sin-Werte positiv oder negativ ausfallen. Sind α' , α'' usw. wieder die Schräkungswinkel der Kurbeln im Sinne der Fig. 165 und 167, so ergibt die Summierung der Massendruckmomente, wenn man den Kurbelradius r und die Schubstangenlänge l für alle Getriebe gleich annimmt

$$42) \quad \dots \sum m'' p_x \cdot y - \sum m'' p_y \cdot x = r l \cdot \omega^2 \sum m'' \left(\frac{s}{l} - \frac{i^2}{l^2} \right) \sin(\varphi + \alpha).$$

Die Bedingung für das Verschwinden des Massendruckmomentes in bezug auf die Achse der Maschinenwelle (Z-Achse) lautet damit

$$r \cdot l \cdot \omega^2 \sum m'' \cdot \left(\frac{s}{l} - \frac{i^2}{l^2} \right) \sin(\varphi + \alpha) = 0.$$

Es läßt sich nun aber auch erreichen, daß die Größen $\frac{s}{l} - \frac{i^2}{l^2}$ für alle Schubstangen den gleichen Wert annimmt. Dividiert man dann obige Gleichung durch diesen Wert und gleichzeitig durch $r l \omega^2$, so geht sie nach Entwicklung des sin-Wertes und Absonderung der allen Summengliedern gemeinsamen Faktoren $\sin \varphi$ bzw. $\cos \varphi$ über in

$$43) \quad \sin \varphi \sum m'' \cos \alpha + \cos \varphi \cdot \sum m'' \sin \alpha = 0.$$

Soll diese Bedingung für alle Drehungswinkel φ erfüllt sein, so ergeben sich daraus folgende beiden Gleichungen

$$43a) \quad \dots \sum m'' \cos \alpha = 0 \quad \text{und} \quad 43b) \quad \dots \sum m'' \sin \alpha = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind den Gleichungen 38a und 38b völlig ähnlich; sie unterscheiden sich lediglich durch die Faktoren m'' und M_a in den einzelnen Summengliedern. Läßt es sich erreichen, was praktisch kaum erhebliche Schwierigkeiten bieten dürfte, daß das Verhältnis $M_a : m''$ für alle Einzelgetriebe annähernd denselben Wert erhält, so sind die Gleichungen 38a und 43a bzw. 38b und 43b sogar identisch, so daß mit der Erfüllung der durch die Gleichungen 38a und 38b ausgedrückten Bedingungen ohne weiteres auch das Massendruckmoment in bezug auf die Maschinenachse verschwindet.

Macht man diese Voraussetzung, so ist für den gesamten Massenausgleich lediglich die Erfüllung der acht Gleichungen 38a bis 38d und 39a bis 39d erforderlich und hinreichend.

Die hier angestellten Betrachtungen über den Ausgleich des Massendruckmomentes in bezug auf die Maschinenwelle haben eine konstante Winkelgeschwindigkeit ω derselben zur Voraussetzung und haben nur unter dieser zumeist auch erfüllten Bedingung volle Gültigkeit. Bei starken Änderungen der Winkelgeschwindigkeit ω würden allerdings erhebliche Massendruckmomente in Ebenen rechtwinklig zur Maschinenwelle entstehen können.

Ist nun n die Anzahl der zu einem Maschinensystem verbundenen Kolben-Kurbelgetriebe, dann schließen die 1te bis $n-1$ te Kurbel mit der n ten $n-1$ Schränkungswinkel α_1, α_2 usw. bis α_{n-1} ein. Legt man den Anfangspunkt des Koordinatenkreuzes in den Schnittpunkt der Achsen der n ten Kolbenstange und der Maschinenwelle (Fig. 166), dann haben die 1te bis $n-1$ te Kolbenstange, bezw. Getriebeebene von der n ten Abstände $z_1, z_2 \dots z_{n-1}$. Sind endlich M_{a1}, M_{a2} bis M_{an} die hin- und hergehenden Massen, die wir uns im Kreuzkopfe konzentriert denken können und die nach Maßgabe der Gleichung 32 auch den dahin entfallenden Teil der Masse m'' der Schubstange umfassen, so schreiben sich die Gleichungen 38a bis 38d und 39a bis 39d, da der Schränkungswinkel der n ten Kurbel gleich Null, sein \cos also gleich 1 und sein $\sin = 0$ ist, wie folgt

$$44) \dots M_{a1} \cos \alpha_1 + M_{a2} \cos \alpha_2 + M_{a3} \cos \alpha_3 + \dots M_{a_{n-1}} \cos \alpha_{n-1} + M_{an} = 0,$$

$$45) \dots M_{a1} \sin \alpha_1 + M_{a2} \sin \alpha_2 + M_{a3} \sin \alpha_3 + \dots M_{a_{n-1}} \sin \alpha_{n-1} = 0,$$

$$46) \quad \dots M_{a_1} \cos 2 \alpha_1 + M_{a_2} \cos 2 \alpha_2 + M_{a_3} \cos 2 \alpha_3 \\ + \dots M_{a_{n-1}} \cos 2 \alpha_{n-1} + M_{a_n} = 0,$$

$$47) \quad \dots M_{a_1} \sin 2 \alpha_1 + M_{a_2} \sin 2 \alpha_2 + M_{a_3} \sin 2 \alpha_3 \\ + \dots M_{a_{n-1}} \sin 2 \alpha_{n-1} = 0,$$

$$48) \quad \dots M_{a_1} \cos \alpha_1 z_1 + M_{a_2} \cos \alpha_2 z_2 + M_{a_3} \cos \alpha_3 z_3 \\ + \dots M_{a_{n-1}} \cos \alpha_{n-1} z_{n-1} = 0,$$

$$49) \quad \dots M_{a_1} \sin \alpha_1 z_1 + M_{a_2} \sin \alpha_2 z_2 + M_{a_3} \sin \alpha_3 z_3 \\ + \dots M_{a_{n-1}} \sin \alpha_{n-1} z_{n-1} = 0,$$

$$50) \quad \dots M_{a_1} \cos 2 \alpha_1 z_1 + M_{a_2} \cos 2 \alpha_2 z_2 + M_{a_3} \cos 2 \alpha_3 z_3 \\ + \dots M_{a_{n-1}} \cos 2 \alpha_{n-1} z_{n-1} = 0,$$

$$51) \quad \dots M_{a_1} \sin 2 \alpha_1 z_1 + M_{a_2} \sin 2 \alpha_2 z_2 + M_{a_3} \sin 2 \alpha_3 z_3 \\ + \dots M_{a_{n-1}} \sin 2 \alpha_{n-1} z_{n-1} = 0.$$

Da die Massen M_a und die Abstände z in allen Gliedern in derselben (1ten) Potenz auftreten, kommt es für die Erfüllung der 8 Bedingungsgleichungen nicht auf die Absolutwerte M_a und z , sondern nur auf deren Verhältniszahlen an. Dividiert man die Gleichungen 44 bis 47 durch M_{a_n} und diejenigen 48 bis 51 mit $M_{a_n} \cdot z_{n-1}$ und setzt die auftretenden Verhältniszahlen $M_{a_1} : M_{a_n} = \mu_1$, $M_{a_2} : M_{a_n} = \mu_2 \dots M_{a_{n-1}} : M_{a_n} = \mu_{n-1}$ ferner $z_1 : z_{n-1} = \varepsilon_1$, $z_2 : z_{n-1} = \varepsilon_2 \dots z_{n-2} : z_{n-1} = \varepsilon_{n-2}$, so schreiben sich obige Gleichungen wie folgt

$$44a) \quad + \mu_1 \cos \alpha_1 + \mu_2 \cos \alpha_2 + \dots \mu_{n-1} \cos \alpha_{n-1} + 1 = 0,$$

$$45a) \quad \mu_1 \sin \alpha_1 + \mu_2 \sin \alpha_2 + \dots \mu_{n-1} \sin \alpha_{n-1} = 0,$$

$$46a) \quad + \mu_1 \cos 2 \alpha_1 + \mu_2 \cos 2 \alpha_2 + \dots \mu_{n-1} \cos 2 \alpha_{n-1} + 1 = 0,$$

$$47a) \quad \mu_1 \sin 2 \alpha_1 + \mu_2 \sin 2 \alpha_2 + \dots \mu_{n-1} \sin 2 \alpha_{n-1} = 0,$$

$$48a) \quad \mu_1 \cos \alpha_1 \cdot \varepsilon_1 + \mu_2 \cos \alpha_2 \varepsilon_2 + \dots \mu_{n-2} \cdot \cos \alpha_{n-2} \cdot \varepsilon_{n-2} \\ + \mu_{n-1} \cdot \cos \alpha_{n-1} = 0,$$

$$49a) \quad \mu_1 \sin \alpha_1 \cdot \varepsilon_1 + \mu_2 \sin \alpha_2 \varepsilon_2 + \dots \mu_{n-2} \sin \alpha_{n-2} \varepsilon_{n-2} \\ + \mu_{n-1} \cdot \sin \alpha_{n-1} = 0,$$

$$50a) \quad \mu_1 \cos 2 \alpha_1 \cdot \varepsilon_1 + \mu_2 \cos 2 \alpha_2 \varepsilon_2 + \dots \mu_{n-2} 2 \cdot \cos \alpha_{n-2} \varepsilon_{n-2} \\ + \mu_{n-1} \cdot \cos 2 = 0 \quad \text{und}$$

$$51a) \quad \mu_1 \sin 2 \alpha_1 \cdot \varepsilon_1 + \mu_2 \sin 2 \alpha_2 \varepsilon_2 + \dots \mu_{n-2} 2 \cdot \sin \alpha_{n-2} \varepsilon_{n-2} \\ + \mu_{n-1} \sin 2 \alpha_{n-1} = 0.$$

In diesen 8 Gleichungen treten $n-1$ unbekannte Winkel α , $n-1$ unbekannte Verhältniszahlen μ und $n-2$ unbekannte Verhältniszahlen ε , im ganzen also $n-1 + n-1 + n-2 = 3n-4$ Unbekannte auf. Sollen sie lösbar sein, so muß die Zahl der Unbekannten, über die im ganzen verfügt werden kann, mindestens $3n-4 = 8$, d. h. n , die Anzahl der Kurbelgetriebe mindestens gleich 4 sein. Mit dieser Annahme wird

$$44b) \quad 1 + \mu_1 \cos \alpha_1 + \mu_2 \cos \alpha_2 + \mu_3 \cos \alpha_3 = 0,$$

$$45b) \quad \mu_1 \sin \alpha_1 + \mu_2 \sin \alpha_2 + \mu_3 \sin \alpha_3 = 0,$$

$$46b) \quad 1 + \mu_1 \cos 2\alpha_1 + \mu_2 \cos 2\alpha_2 + \mu_3 \cos 2\alpha_3 = 0,$$

$$47b) \quad \mu_1 \sin 2\alpha_1 + \mu_2 \sin 2\alpha_2 + \mu_3 \sin 2\alpha_3 = 0,$$

$$48b) \quad \mu_1 \cos \alpha_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \cos \alpha_2 \varepsilon_2 + \mu_3 \cos \alpha_3 = 0,$$

$$49b) \quad \mu_1 \sin \alpha_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \sin \alpha_2 \varepsilon_2 + \mu_3 \sin \alpha_3 = 0,$$

$$50b) \quad \mu_1 \cos 2\alpha_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \cos 2\alpha_2 \varepsilon_2 + \mu_3 \cos 2\alpha_3 = 0,$$

$$51b) \quad \mu_1 \sin 2\alpha_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \sin 2\alpha_2 \varepsilon_2 + \mu_3 \sin 2\alpha_3 = 0.$$

Zur Auswertung dieser Gleichungen erhält man zunächst aus der Subtraktion der Gl. 45 b und 49 b

$$52) \quad \mu_1 \sin \alpha_1 (\varepsilon_1 - 1) + \mu_2 \sin \alpha_2 (\varepsilon_2 - 1) = 0$$

und aus Gl. 48 b und 49 b, wenn man die erste mit $\sin \alpha_3$, die zweite mit $\cos \alpha_3$ multipliziert und beide voneinander abzieht

$$53) \quad \mu_1 \varepsilon_1 \sin (\alpha_3 - \alpha_1) + \mu_2 \varepsilon_2 \sin (\alpha_3 - \alpha_2) = 0.$$

Beide Gleichungen führen weiter zu

$$54) \quad \dots \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_2 - 1} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \cdot \frac{\sin (\alpha_3 - \alpha_1)}{\sin (\alpha_3 - \alpha_2)}$$

und mit $\varepsilon_1 = z_1 : z_3$, $\varepsilon_2 = z_2 : z_3$ zu

$$54a) \quad \dots \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \cdot \frac{\sin (\alpha_3 - \alpha_1)}{\sin (\alpha_3 - \alpha_2)}$$

In gleicher Weise kann man aus den Gl. 47 b, 50 b und 51 b die Beziehungen

$$55) \quad \dots \mu_1 \sin 2\alpha_1 (\varepsilon_1 - 1) + \mu_2 \sin 2\alpha_2 (\varepsilon_2 - 1) = 0,$$

$$56) \quad \dots \mu_1 \varepsilon_1 \sin 2(\alpha_3 - \alpha_1) + \mu_2 \varepsilon_2 \sin 2(\alpha_3 - \alpha_2) = 0 \quad \text{und}$$

$$57) \quad \dots \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sin 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_1} \cdot \frac{\sin 2(\alpha_3 - \alpha_1)}{\sin 2(\alpha_3 - \alpha_2)}$$

herleiten.

Die gleichzeitige Erfüllung der Gl. 56 und 53 bedingt, daß entweder $\alpha_3 - \alpha_1 = 0$ und $\alpha_3 - \alpha_2 = 0$, d. h. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ oder $\cos(\alpha_3 - \alpha_1) = \cos(\alpha_3 - \alpha_2)$, d. h. $\alpha_3 - \alpha_1 = \pm(\alpha_3 - \alpha_2)$, also $\alpha_2 = \alpha_1$ oder $\alpha_2 + \alpha_1 = 2\alpha_3$ sei.

Die Bedingung $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ ist praktisch nicht erfüllbar, wenn, wie bei Schiffsmaschinen und Lokomotiven, das Anlaufen der Maschinen aus der Ruhe von jedem beliebigen Drehwinkel φ aus verlangt werden muß.

Die gleichzeitige Erfüllung der Gl. 54a und 57 bedingt weiterhin, daß neben der oben schon genannten Bedingung $\cos(\alpha_3 - \alpha_1) = \cos(\alpha_3 - \alpha_2)$, auch noch die Bedingung $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$, also $\alpha_1 = \pm \alpha_2$ erfüllt werde. Das ergibt zusammen mit dem oben bereits gefundenen Ergebnis $\alpha_2 + \alpha_1 = 2\alpha_3$, entweder $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ oder $\alpha_3 = 0$. Beide Bedingungen sind wiederum praktisch nicht erfüllbar, wenn man verlangt, daß nicht gleichzeitig zwei oder drei Kurbelgetriebe in die Todstellung gelangen sollen.

Aus vorstehenden Darlegungen ergibt sich, daß die Erfüllung der Gl. 57, die den Ausgleich zweiter Ordnung der Massendruckmomente in bezug auf die Y -Achse ausdrückt, mit den Anforderungen an die Manöverierfähigkeit der Maschine nicht vereinbar ist, man sich also bei vierzylindrigen Maschinen bezüglich des Massendruckmomentes in bezug auf die Y -Achse auf den durch die Gl. 54a ausgedrückten Ausgleich erster Ordnung beschränken muß.

Die in Gl. 54a enthaltenen Beziehungen zwischen den Schräkungswinkeln α_1 , α_2 und α_3 der Kurbeln und den Zylinderabständen z_1 , z_2 und z_3 lassen sich geometrisch durch den Schnitt der Kurbelrichtungen mit einer Geraden rr parallel der y -Achse darstellen (vgl. Fig. 165). O sei der Schnitt der Achse der Maschinenwelle mit der Bildebene, $\overline{O1}$, $\overline{O2}$, $\overline{O3}$, und $\overline{O4}$ seien die Richtungen der vier Kurbeln zueinander, die hier, wie üblich, symmetrisch zu einer Geraden aa (Fig. 165) angenommen werden mögen. Die Schnittpunkte $1'$, $2'$, $3'$ und $4'$ der Kurbelrichtungen mit der Geraden rr liegen dann symmetrisch zu der auf aa rechtwinkligen Geraden bb und die Strecken $4'1'$, $4'2'$ und $4'3'$ erfüllen die Gl. 54a.

Nach dem Sinussatze und bei der Symmetrie der Figur $O 1' 4'$ folgt nämlich aus

$$\Delta O 1' 3' \dots 1' 3' : O 3' = -\sin(\alpha_3 - \alpha_1) : \sin \beta,$$

$$\Delta O 3' 2' \dots 2' 3' : O 3' = \sin(\alpha_3 - \alpha_2) : \sin O 2' 3',$$

$$\Delta O 2' 4' \dots 2' 4' : O 4' = \sin \alpha_2 : \sin O 2' 3',$$

$$\Delta O 1' 4' \dots 1' 4' : O 4' = \sin \alpha_1 : \sin \beta.$$

Dividiert man zunächst die erste Gleichung durch die zweite, dann die dritte durch die vierte und multipliziert die beiden Ergebnisse miteinander, so folgt

$$\frac{1' 3' \cdot 2' 4'}{2' 3' \cdot 1' 4'} = -\frac{\sin \alpha_2 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\sin \alpha_1 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2)},$$

oder mit den aus Fig. 165 ersichtlichen Bezeichnungen

$$1' 3' = z'_1 - z'_3, \quad 2' 3' = -(z'_2 - z'_3), \quad 2' 4' = z'_2 \quad \text{und} \quad 1' 4' = z'_1,$$

$$\text{auch} \quad \frac{z'_1 - z'_3}{z'_2 - z'_3} \cdot \frac{z'_2}{z'_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \cdot \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Die Strecken z'_1 , z'_2 und z'_3 sind also den Abständen z_1 , z_2 und z_3 der einzelnen Getriebe verhältnisgleich. Je nach dem Abstände der Geraden rr von der Wellenmitte O fallen sie größer oder kleiner aus. Lediglich praktische Gesichtspunkte bestimmen die Absolutmaße z_1 , z_2 und z_3 .

Bei der symmetrischen Stellung der Kurbeln zueinander sind deren Richtungen lediglich durch die beiden Winkel α_1 und $\alpha_3 - \alpha_2 = \gamma$ bestimmt. Die Entfernung der beiden äußersten Getriebe z_1 werde hinfort mit Z , die der beiden inneren $z_3 - z_2$ mit z bezeichnet. Nach Fig. 165 besteht zwischen α_1 und γ die Beziehung $z'_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = (z'_3 - z'_2) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, wofür man, da z'_1 und $z'_3 - z'_2$ (Fig. 165) verhältnisgleich sind, den Strecken Z und z (Fig. 166) auch schreiben kann

$$58) \quad Z \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = z \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Die angenommene Symmetrie erfordert nun weiterhin, daß die in den Kurbelpunkten 4 u. 1 und 2 u. 3 angreifenden reduzierten Massen M_a je einander gleich sein müssen, so daß $\mu_1 = 1$ und

$\mu_2 = \mu_3$ werden muß. Setzt man $\mu_2 = \mu_3 = \mu$, so erhält man aus den Gleichungen 45b und 47b

$$59) \quad \dots \sin \alpha_1 + \mu (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3) = 0,$$

$$60) \quad \dots \sin 2 \alpha_1 + \mu (\sin 2 \alpha_2 + \sin 2 \alpha_3) = 0$$

und nach Beseitigung von μ aus beiden Gleichungen

$$2 \cos \alpha_1 (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3) = \sin 2 \alpha_2 + \sin 2 \alpha_3,$$

wofür nach den Regeln der Goniometrie auch gesetzt werden kann

$$2 \cos \alpha_1 \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2} = \sin (\alpha_2 + \alpha_3) \cdot \cos (\alpha_2 - \alpha_3).$$

Nach Fig. 165 ist ferner $\alpha_2 + \alpha_3 = 360 + \alpha_1$ und $\alpha_2 - \alpha_3 = -\gamma$. Damit geht vorstehende Gleichung nach entsprechender Umwandlung über in

$$61) \quad \dots \cos \frac{\alpha_1}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$$

und Gl. 45b nach Lösung für μ

$$62) \quad \dots \mu = \cos \frac{\alpha_1}{2} : \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Diese beiden Gleichungen und Gl. 58 stehen also als letztes Ergebnis für die Berechnung des nach den Beschränkungen S. 236 noch möglichen Massenausgleiches zur Verfügung.

Läßt man in Gl. 58 das Verhältnis der Entfernungen der beiden inneren Kurbelmechanismen z und der beiden äußeren Z erscheinen, so schreibt sie sich

$$63) \quad \dots \frac{z}{Z} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} : \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

In den drei Gleichungen 61 bis 63 sind die 4 Unbekannten γ , α_1 , μ und das Verhältnis $z:Z$ enthalten, von denen man nach Belieben innerhalb gewisser durch praktische Rücksichten gebotener Grenzen eine frei wählen kann.

Wählt man beispielsweise den Winkel $\alpha_1 = 65^\circ$, also $\cos \frac{\alpha_1}{2} = 0,843$, so wird $\gamma = \text{rund } 107^\circ$ und $\cos \frac{\gamma}{2} = 0,593$; $\mu = 0,843 : 0,593 = 1,42$ und $Z:z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = 1,35 : 0,637 = 2,12$.

C. Bewegung starrer Körper.

I. Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Richtung der Achse.

In einem starren Körper werde ein Punkt A gewählt, durch diesen ein rechtwinkliges Achsenkreuz gelegt und außerdem eine Achse AP , welche mit den Koordinatenachsen die Winkel α , β , γ bildet (Fig. 168). Hat ein Massenteilchen m die Koordinaten x , y , z und von der Achse AP den rechtwinkligen Abstand r , so liefert es zu dem Trägheitsmoment J des Körpers in bezug auf die Achse AP den Beitrag

$$dJ = m \cdot r^2.$$

Die Verbindungsgerade AQ von A nach dem Massenpunkt m bilde mit AP den Winkel ϑ ; dann ist

$$r = AQ \cdot \sin \vartheta, \quad \text{mithin}$$

$$1) \quad dJ = m \cdot \overline{AQ}^2 \sin^2 \vartheta = m \cdot \overline{AQ}^2 (1 - \cos^2 \vartheta).$$

Hat AQ die Richtungswinkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, so gilt für den Winkel ϑ zwischen den Geraden AQ und AP nach den Lehren der Analytischen Geometrie des Raumes die Beziehung

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \gamma \cdot \cos \gamma_1.$$

Ferner ist

$$\overline{AQ}^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

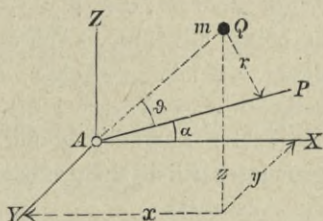
$$x = \overline{AQ} \cdot \cos \alpha_1; \quad y = \overline{AQ} \cdot \cos \beta_1; \quad z = \overline{AQ} \cdot \cos \gamma_1 \quad \text{und somit}$$

$$\overline{AQ} \cdot \cos \vartheta = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma.$$

Aus Gl. 1 wird hiermit

$$2 \quad dJ = m \{ x^2 + y^2 + z^2 - x^2 \cos^2 \alpha - y^2 \cos^2 \beta - z^2 \cos^2 \gamma - 2xy \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2xz \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cdot \cos \gamma \}.$$

Fig. 168.



Da nun bekanntlich

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \text{ also}$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma,$$

so kann man $x^2 - x^2 \cos^2 \alpha$ mit $x^2 \cos^2 \beta + x^2 \cos^2 \gamma$ vertauschen, ebenso $y^2 - y^2 \cos^2 \beta$ mit $y^2 \cos^2 \alpha + y^2 \cos^2 \gamma$ und $z^2 - z^2 \cos^2 \gamma$ mit $z^2 \cos^2 \alpha + z^2 \cos^2 \beta$. Führt man dies in Gl. 2 ein und ordnet nach den Winkeln, so wird

$$3) \quad dJ = m \left\{ \cos^2 \alpha (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta (x^2 + z^2) + \cos^2 \gamma (x^2 + y^2) \right. \\ \left. - 2xy \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2xz \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma - 2yz \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \right\}.$$

Der rechtwinklige Abstand des Massenteilchens m von der Achse AX ist aber $\sqrt{y^2 + z^2}$, das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die x -Achse also $J_x = \Sigma m (y^2 + z^2)$, dasjenige in bezug auf die y -Achse $J_y = \Sigma m (x^2 + z^2)$, in bezug auf die z -Achse $J_z = \Sigma m (x^2 + y^2)$. Bei einer über den ganzen Körper erstreckten Summierung der Gl. 3, bei welcher die Winkel α, β, γ gemeinschaftlich sind, entstehen aus den letzten drei Gliedern noch die Ausdrücke

$$\Sigma mxy, \quad \Sigma mxz \quad \text{und} \quad \Sigma myz;$$

Diese Werte heißen nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 337 Zentrifugalmomente und werden abgekürzt mit C_z, C_y und C_x bezeichnet, wobei man als Index diejenige Koordinate wählt, welche in der betreffenden Summe nicht vorkommt. Hiermit wird das Trägheitsmoment J_{AP} des Körpers in bezug auf eine Achse AP mit den Richtungswinkeln α, β, γ :

$$4) \quad J_{AP} = \cos^2 \alpha \cdot J_x + \cos^2 \beta \cdot J_y + \cos^2 \gamma \cdot J_z - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot C_z \\ - 2 \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot C_y - 2 \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot C_x.$$

Sind nun für einen gegebenen Körper und ein festes Achsenkreuz AX, AY, AZ die Trägheits- und die Zentrifugalmomente $J_x, J_y, J_z, C_z, C_y, C_x$ bekannt, so liefert Gl. 4 für jede beliebige, durch die Richtungswinkel α, β, γ bestimmte, durch den festen Punkt A gehende Achse AP das Trägheitsmoment J_{AP} .

2. Trägheits-Ellipsoid und Zentral-Ellipsoid.

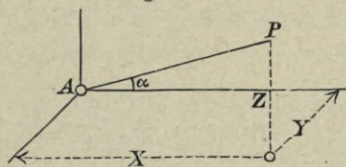
Die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes J von den Winkeln α, β, γ läßt sich für sämtliche durch den festen Punkt A des

Körpers gehende Achsen zur Anschauung bringen mittels einer Ellipsoidfläche. Trägt man auf der Achse AP eine Länge ab, welche mit J in einer bestimmten Beziehung steht, macht man nämlich

$$5) \quad AP = \frac{1}{\sqrt{J}} \quad (\text{Fig. 169}),$$

so ergibt sich aus dem Fahrstrahl AP ein bestimmter Endpunkt P ; läßt man nun den Winkel α , β , γ alle möglichen Werte annehmen, so ergibt sich als geometrischer Ort des Endpunktes P eine krumme Fläche, deren Gestalt durch Gl. 4 bedingt sein muß. Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes P mit den großen Buchstaben X , Y , Z zum Unterschiede von den

Fig. 169.



Koordinaten x , y , z des Massenteilchens, so ist nach Fig. 169

$$\cos \alpha = \frac{X}{AP} = X \cdot \sqrt{J}; \quad \text{ebenso}$$

$$\cos \beta = Y \cdot \sqrt{J}; \quad \cos \gamma = Z \cdot \sqrt{J}.$$

Führt man diese Werte in Gl. 4 ein, so entsteht in allen Gliedern der rechten Seite, weil in denselben nur die Quadrate der Kosinus oder die Produkte zweier Kosinus vorkommen, der gemeinschaftliche Faktor J . Teilt man die Gleichung dann durch diesen gemeinschaftlichen Faktor, so verbleibt

$$6) \quad 1 = J_x X^2 + J_y Y^2 + J_z Z^2 - 2C_x X \cdot Y - 2C_y X \cdot Z - 2C_z Y \cdot Z.$$

Diese Gleichung zweiten Grades nach X , Y , Z mit den Koeffizienten J_x , J_y , J_z , C_x , C_y und C_z bedeutet die Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoides, u. zw. mit dem Mittelpunkt A , weil in ihr Glieder mit einfachem X , Y und Z nicht vorkommen. Die Hauptachsen dieses Ellipsoides, des sog. **Trägheits-Ellipsoides**, fallen im allgemeinen nicht mit den beliebig gewählten Koordinatenachsen zusammen. Da aber die Hauptachsen des Ellipsoides zueinander rechtwinklig stehen, so ist es stets möglich, den Koordinatenachsen solche Richtungen zu geben, daß sie mit den Hauptachsen des Ellipsoides zusammenfallen. Und weil die auf die Hauptachsen bezogene Gleichung des Ellipsoides die drei letzten Glieder der

Gl. 6 mit den Produkten zweier Koordinaten nicht enthält, so folgt, daß die Koeffizienten C_x , C_y und C_z dieser drei letzten Glieder zu Null werden, wenn man die Hauptachsen des Ellipsoides als Koordinatenachsen benutzt. Es gibt also durch jeden Punkt A eines Körpers ein rechtwinkliges Achsenkreuz, in bezug auf welches die Zentrifugalmomente zu Null werden; diese Achsen heißen die **Hauptachsen** des Körpers für den Punkt A . Die Trägheitsmomente in bezug auf diese heißen **Haupt-Trägheitsmomente**; bezeichnet man sie mit J_1 , J_2 und J_3 , so wird die Gl. 4, S. 240, bezogen auf das Kreuz der Hauptachsen,

$$7) \quad J_{AP} = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \cos^2 \beta + J_3 \cos^2 \gamma,$$

wenn die Achse AP mit den Hauptachsen die Winkel α , β , γ bildet. Die Gleichung des Trägheits-Ellipsoides wird in bezug auf die Hauptachsen nach Gl. 6 (S. 241) einfacher

$$8) \quad 1 = J_1 X^2 + J_2 Y^2 + J_3 Z^2,$$

und es sind

$$\frac{1}{\sqrt{J_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{J_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{J_3}}$$

die Halbachsen des Ellipsoides; es entspricht also der kleinsten Halbachse das größte der drei Haupt-Trägheitsmomente und umgekehrt. Kennt man diese, so ist nach Gl. 7 für jede andere durch den Punkt A gelegte Achse AP das Trägheitsmoment J zu berechnen.

Sind von den drei Haupt-Trägheitsmomenten zwei einander gleich, so wird das Trägheits-Ellipsoid zu einem Umdrehungs-Ellipsoide. Sind alle drei von gleicher Größe, so wird das Trägheit-Ellipsoid zu einer Kugel. In diesem Falle sind die Trägheitsmomente in bezug auf alle durch den Punkt A gehende Achsen von gleicher Größe, auch hat dann jede dieser Achsen die Eigenschaften einer Hauptachse.

Ist der Punkt A der Schwerpunkt des Körpers, so wird das Trägheits-Ellipsoid im besonderen **Zentral-Ellipsoid** genannt. Kennt man die Schwerpunkts-Hauptachsen und deren Trägheitsmomente, so kann man nach Gl. 7 das Trägheitsmoment für jede Schwerpunktsachse SP berechnen und daraus wiederum das Trägheitsmoment für jede zu SP parallele Achse AP_1 , welche von SP um eine Länge e entfernt ist, weil nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 317

das Trägheitsmoment für eine beliebige Achse gleich ist dem Trägheitsmomente für eine dazu parallele Schwerpunktsachse $+ M \cdot e^2$.

Im 1. Teile, Aufl. 4, S. 338 wurden solche Drehachsen eines Körpers, für welche die Zentrifugalkräfte sich vollständig aufheben, **freie Achsen** genannt. Die Bedingungen dafür waren, daß diese Achsen durch den Schwerpunkt gehen mußten, und daß außerdem, wenn SX eine freie Achse sein sollte, und SY nebst SZ zwei andere zu SX und zueinander rechtwinklige Achsen waren, noch die Zentrifugalmomente $\Sigma mxy = C_z$ und $\Sigma mxz = C_y$ Null sein mußten. Für gewisse einfache Fälle wurden a. a. O. solche freie Achsen nachgewiesen. Aus den vorstehenden Untersuchungen ergibt sich nun, daß die Schwerpunkts-Hauptachsen eines Körpers die Bedingungen freier Achsen erfüllen, daß somit jeder Körper mindestens drei zueinander rechtwinklige freie Achsen hat.

Die im vorstehenden entwickelten Eigenschaften des Trägheits- und Zentral-Ellipsoides rühren von Poinsot (geb. 1777 zu Paris, gest. 1859 daselbst) her (vom Jahre 1834); sie bilden Verallgemeinerungen der in Keck-Hotopp, Vorträge über Elastizitätslehre, Aufl. 2, I. Teil, S. 34 behandelten Eigenschaften der Trägheits- und Zentral-Ellipse für ebene Figuren.

3. Berechnung der Trägheitsmomente einiger Körper.

Ein Körperteilchen vom Rauminhalte $dx \cdot dy \cdot dz$ hat, wenn γ das Gewicht der Raumeinheit ist, die Masse $m = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ und einen rechtwinkligen Abstand von der z -Achse $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, liefert daher zu dem Trägheitsmoment in bezug auf die z -Achse den Beitrag

$$dJ_z = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz (x^2 + y^2);$$

somit ist der allgemeine Ausdruck für das Trägheitsmoment J_z eines Körpers überall gleicher Dichte

$$1) \quad J_z = \frac{\gamma}{g} \iiint (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Die Grenzen der Integrationen sind durch die Form des Körpers bedingt. Doch hat man in den meisten Fällen die allgemeine Gl. 1

nicht nötig, wenn man bereits bekannte Ergebnisse zu Hilfe nimmt. Die Werte der Trägheitsmomente drückt man schließlich meist als vielfache der Masse M aus; bei der Berechnung kann man also den selbstverständlichen physikalischen Faktor $\frac{\gamma}{g}$ (Masse der Raumeinheit fortlassen, wenn man nachher auch statt der Masse den Rauminhalt des Körpers einführt.

a) Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipeds von den Kanten a , b , c in bezug auf eine zu der Kante c parallele Schwerpunktsachse.

Eine zur z -Achse rechtwinklige Scheibe des Körpers (Fig. 170) ist eine rechteckige Platte von den Seiten a und b und der Dicke dz . Eine Rechteckfläche von den Seiten a und b hat in bezug auf die Mittellinien die achsialen Trägheitsmomente $\frac{1}{12} a \cdot b^3$ und $\frac{1}{12} b \cdot a^3$, mithin das polare Trägheitsmoment $\frac{1}{12} a \cdot b (b^2 + a^2)$ (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 320). Die Scheibe von der Dicke dz liefert daher zu J_z einen Beitrag

$$dJ_z = \frac{1}{12} a \cdot b (b^2 + a^2) dz,$$

also ist

$$2) \quad J_z = \frac{1}{12} a \cdot b (b^2 + a^2) \cdot c = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

Ebenso ist

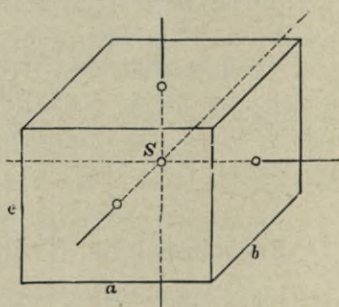
$$3) \quad J_x = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2); \quad J_y = \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + c^2).$$

Sind von den drei Kanten zwei einander gleich, z. B. $b = a$, so wird

$$J_z = \frac{1}{6} M \cdot a^2; \quad J_x = J_y = \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + c^2)$$

und das Zentral-Ellipsoid ein Umdrehungs-Ellipsoid. In diesem Fall ist jede in der xy -Ebene liegende Schwerpunktsachse eine freie Achse mit dem Trägheitsmoment $\frac{1}{12} M (a^2 + c^2)$. — Für

Fig. 170.



den Würfel ist mit $b = c = a$ $J_x = J_y = J_z = \frac{1}{6} Ma^2$, das Zentral-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

b) Haupt-Trägheitsmomente eines Zylinders, bezogen auf den Schwerpunkt.

Da das Durchmesser-Trägheitsmoment einer Kreisfläche vom Halbmesser r die Größe $\frac{1}{4} r^4 \pi$ hat (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 322), so hat eine kreisförmige Scheibe von dem Halbmesser r und der Dicke dz (Fig. 171) das Durchmesser-Trägheitsmoment $\frac{1}{4} r^4 \pi \cdot dz$ und ein auf die rechtwinklig zur Bildebene liegende Schwerpunktsachse SY bezogenes Trägheitsmoment

$$4) \quad dJ_y = \frac{1}{4} r^4 \pi \cdot dz + r^2 \pi \cdot dz \cdot z^2,$$

weil z die Entfernung dieser beiden Achsen ist. Hiernach wird

$$J_y = \frac{1}{4} r^4 \pi h + r^2 \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz, \quad \text{oder}$$

$$J_y = \frac{1}{4} r^4 \pi h + 2 r^2 \pi \cdot \frac{1}{3} \frac{h^3}{8} = \frac{r^2 \pi h}{4} \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right). \quad \text{Also ist}$$

$$5) \quad J_x = J_y = \frac{1}{4} M \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right).$$

In bezug auf die z -Achse aber ist (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 321)

$$6) \quad J_z = \frac{M}{2} r^2.$$

Das Zentral-Ellipsoid ist offenbar ein Umdrehungs-Ellipsoid. Dasselbe wird zu einer Kugel für

$$\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{6} = r^2,$$

d. h. für $h^2 = 3r^2$, oder für

$$7) \quad h = r\sqrt{3} = 1,73 \cdot r.$$

Fig. 171.

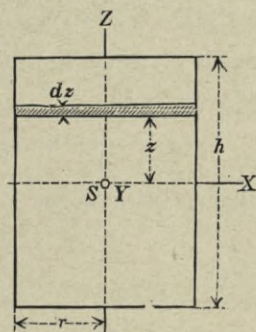
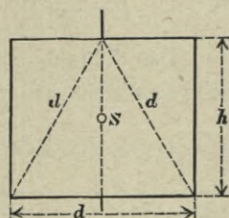


Fig. 172.



Diese Höhe ist diejenige eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite $d = 2r$ (Fig. 172). Von einem Zylinder von diesem Höhenverhältnis ist das Zentral-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

c) Trägheitsmomente eines Kegels.

In bezug auf eine zur Grundfläche parallele Achse AX durch die Spitze A des Kegels (Fig. 173) ergibt sich das Trägheitsmoment einer kreisförmigen Scheibe vom Halbmesser x und im Abstände z von der Spitze gelegen, entsprechend der Gl. 4, zu

$$dJ_x = \frac{1}{4} x^4 \pi \cdot dz + x^2 \pi \cdot dz \cdot z^2.$$

Hieraus wird wegen

$$x = \frac{r}{h} \cdot z:$$

$$dJ_x = \frac{1}{4} \frac{r^4}{h^4} \cdot \pi \cdot z^4 \cdot dz + \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot z^4 \cdot dz, \quad \text{also}$$

$$J_x = \frac{r^2}{h^2} \pi \left\{ \frac{1}{4} \frac{r^2}{h^2} + 1 \right\} \cdot \int_0^h z^4 dz = \frac{r^2 \pi}{h^2} \left(\frac{1}{4} \frac{r^2}{h^2} + 1 \right) \frac{h^5}{5}, \quad \text{oder}$$

$$J_x = r^2 \pi h \left(\frac{r^2}{20} + \frac{h^2}{5} \right), \quad \text{also mit } r^2 \pi h = 3M:$$

$$8) \quad J_x = \frac{3}{20} M (r^2 + 4h^2).$$

Schwingt der Kegel als physisches Pendel um die x -Achse, so ist seine Schwingungslänge (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 328), weil der Schwerpunkt um $3/4 h$ von der Spitze entfernt ist,

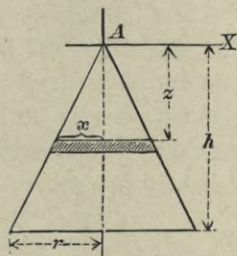
$$9) \quad l = \frac{J_x}{M \cdot 3/4 h} = \frac{3}{20} \cdot \frac{4}{3 h} (r^2 + 4h^2) = \frac{h}{5} \left(4 + \frac{r^2}{h^2} \right).$$

Das Trägheitsmoment in bezug auf eine mit AX parallele Schwerpunktsachse wird $J_1 = J_2 = J_x - M \cdot (3/4 h)^2$, also

$$J_1 = J_2 = M \left(\frac{3}{20} r^2 + \frac{3}{5} h^2 - \frac{9}{16} h^2 \right)$$

$$10) \quad = M \left(\frac{3}{30} r^2 + \frac{3}{80} h^2 \right) = \frac{3}{80} M \left(r^2 + \frac{h^2}{4} \right).$$

Fig. 173.



In bezug auf die geometrische Achse des Kegels ist (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 273)

$$11) \quad J_3 + \frac{3}{10} M r^2.$$

Es wird $J_1 = J_2 = J_3$ für $r^2 + \frac{h^2}{4} = 2r^2$, d. h. für $h = 2r$.

In diesem Fall ist das Zentral-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

d) Haupt-Trägheitsmomente für den Schwerpunkt eines dreiachsigen Ellipsoides.

Wird eine Kreisfläche vom Halbmesser v in einer Richtung gleichmäßig gedehnt (Fig. 174), so entsteht eine Ellipse der Halbachsen v und u . Bei dieser Dehnung ändern sich der Flächeninhalt und das Trägheitsmoment in bezug auf den Durchmesser $2u$ in demselben Verhältnisse. Daher bleibt für dieses Trägheitsmoment die für die Kreisfläche entwickelte Formel $J = \frac{1}{4} F \cdot v^2$ auch für die Ellipse gültig. Dies gibt, mit $F = u \cdot v \cdot \pi$,

$$J = \frac{\pi}{4} u \cdot v^3.$$

Ebenso gilt für den Durchmesser $2v$

$$J = \frac{\pi}{4} v \cdot u^3,$$

also für das polare Trägheitsmoment

$$J_0 = \frac{\pi}{4} u \cdot v (u^2 + v^2).$$

Schneidet man nun aus einem Ellipsoide rechtwinklig zur Achse AZ eine elliptische Scheibe von den Halbachsen u und v und der Dicke dz heraus (Fig. 175), so liefert diese zu dem Trägheitsmomente des Ellipsoides in bezug auf die z -Achse einen Beitrag

$$dJ_z = \frac{\pi}{4} u \cdot v (u^2 + v^2) dz.$$

Fig. 174.

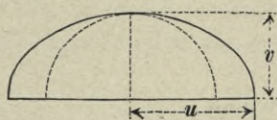
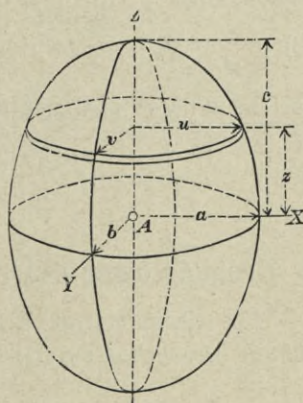


Fig. 175.



Wird dies von $z = 0$ bis $z = c$ summiert, so ergibt sich das Trägheitsmoment des halben Ellipsoides, und für dasjenige des ganzen gilt das doppelte:

$$J_z = \frac{\pi}{2} \int_0^c u \cdot v (u^2 + v^2) dz.$$

Nun sind u und z die Koordinaten eines Punktes des einen elliptischen Hauptschnittes von den Halbachsen a und c , daher

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{oder} \quad u^2 = a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right); \quad \text{ebenso} \quad v^2 = b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Hiermit wird
$$J_z = \frac{\pi a \cdot b}{2} \frac{a^2 + b^2}{c^2} \int_0^c (c^2 - z^2)^2 dz$$

und nach einfacher Ausführung

$$J_z = \frac{4}{15} \pi \cdot a \cdot b \cdot c (a^2 + b^2).$$

Da nun
$$M = \frac{4}{3} a \cdot b \cdot c \cdot \pi \quad \text{ist, so folgt schließlich}$$

$$12) \quad J_z = \frac{M}{5} (a^2 + b^2).$$

Ebenso wird

$$13) \quad J_y = \frac{M}{5} (a^2 + c^2); \quad J_x = \frac{M}{5} (b^2 + c^2).$$

Für die Kugel wird mit $b = c = a$

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} M a^2 \quad (\text{s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 322}).$$

4. Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

Bei einem starren Körper ist das Trägheitsmoment in bezug auf die Drehachse unveränderlich, daher wird aus Gl. 6, S. 218

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Hierin ist $\frac{d\omega}{dt}$ die Winkelbeschleunigung; bezeichnet man dieselbe mit ε , so hat man die aus 1. Teil, Aufl. 4, S. 325 bekannte

Gleichung für die ungleichförmige Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse

$$1) \quad \varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J},$$

wenn \mathfrak{M} die Momentensumme der äußeren Kräfte, J das Trägheitsmoment des Körpers, beide bezogen auf die Drehachse, bedeuten.

Auch kann man, wenn für irgend einen Zeitraum ω_1 den Anfangswert, ω den Endwert der Winkelgeschwindigkeit, \mathfrak{A}_k die Arbeit der äußeren Kräfte bedeutet, nach dem Satze der Arbeit schreiben (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 316)

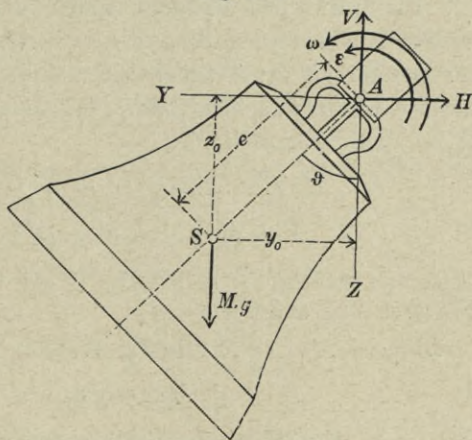
$$2) \quad (\omega^2 - \omega_1^2) \frac{J}{2} = \mathfrak{A}_k.$$

Die Berechnung der Widerstände, welche an der Drehachse eines Körpers angreifen müssen, um sie unbeweglich zu erhalten, ist auch schon im 1. Teile, Aufl. 4, S. 336 allgemein gezeigt worden. Hier sollen noch einige Beispiele dieser Art durchgeführt werden.

5. Widerstände der Achse einer schwingenden Glocke.

Die an der Achse einer Turmglocke auftretenden Kräfte sind von besonderer Wichtigkeit, da sie nicht nur die Abmessungen des sog. Glockenstuhles, sondern, wegen der hohen Lage des letzteren, häufig auch die Standsicherheit des Turmes bedingen. Die zur wagerechten Drehachse (x -Achse) der Glocke rechtwinklige y_2 -Ebene durch den Schwerpunkt S ist eine Symmetrieebene (Fig. 176), daher muß in ihr auch der Gesamtwiderstand der Drehachse liegen und sich in zwei

Fig. 176.



Hälften auf die symmetrisch angeordneten beiden Drehzapfen verteilen. Aus diesem Grunde kommen bei dieser Aufgabe nur die

Projektionen der Kräfte auf die yz -Ebene in Frage, wodurch die Untersuchung so vereinfacht wird, daß wir nicht auf die allgemeinen Gleichungen (1. Teil, Aufl. 4, S. 337) zurückgreifen, sondern die Aufgabe unmittelbar behandeln wollen.

In einem beliebigen Zeitpunkte t weiche der Drehungshalbmesser $AS = e$ des Schwerpunktes um den Winkel ϑ von der Lotrechten ab, Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung seien ω und ε , die Koordinaten des Schwerpunktes

$$1) \quad y_0 = e \cdot \sin \vartheta; \quad z_0 = e \cdot \cos \vartheta.$$

Einem Massenteilchen m der Glocke im Abstand r von der Drehachse und mit den Koordinaten

$$y = r \sin \varphi; \quad z = r \cos \varphi$$

(Fig. 177) entsprechen nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 326 die Trägheitswiderstände (Ergänzungskräfte) $m \cdot r \cdot \omega^2$ und $m \cdot r \cdot \varepsilon$, welche in den Richtungen der positiven y - und z -Achse zusammen die Seitenkräfte liefern

$$\begin{aligned} m \cdot r \cdot \omega^2 \sin \varphi + m \cdot r \cdot \varepsilon \cos \varphi &= m \cdot y \cdot \omega^2 + m \cdot z \cdot \varepsilon \quad \text{und} \\ m \cdot r \cdot \omega^2 \cos \varphi - m \cdot r \cdot \varepsilon \sin \varphi &= m \cdot z \cdot \omega^2 - m \cdot y \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Die wirklichen äußeren Kräfte H , V und Mg (Fig. 176) müssen nun nach dem Satze d'Alemberts (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 169) der Gesamtheit der Trägheitswiderstände das Gleichgewicht halten, wenn V und H die Seitenkräfte des Gesamtwiderstandes der Drehachse sind. Hiernach wird

$$2) \quad H = \sum m \cdot y \cdot \omega^2 + \sum m \cdot z \cdot \varepsilon \quad \text{und}$$

$$3) \quad V = M \cdot g + \sum m \cdot z \cdot \omega^2 - \sum m \cdot y \cdot \varepsilon,$$

oder, weil in diesen Summen die Größen ω^2 und ε gemeinschaftliche Faktoren und außerdem

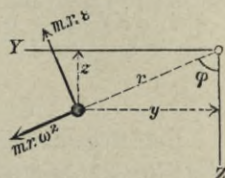
$$\sum m y = M y_0 = M e \sin \vartheta, \quad \sum m z = M z_0 = M e \cos \vartheta \quad \text{sind,}$$

$$4) \quad H = \omega^2 \cdot M \cdot e \cdot \sin \vartheta + \varepsilon \cdot M \cdot e \cdot \cos \vartheta,$$

$$5) \quad V = M \cdot g + \omega^2 \cdot M \cdot e \cdot \cos \vartheta - \varepsilon \cdot M \cdot e \cdot \sin \vartheta.$$

Ist nun α der größte Wert von ϑ , entsprechend der höchsten Lage des Schwerpunktes mit der Geschwindigkeit Null, so hat sich

Fig. 177.



der Schwerpunkt bis zu der beliebigen Zwischenlage um $e \cdot \cos \vartheta - e \cos \alpha$ gesenkt. Wenn man daher die Bewegungswiderstände der Glocke und auch die zu deren Überwindung aufzuwendende Triebkraft vernachlässigt, so ist nach dem Satze der Arbeit (S. 249)

$$6) \quad \omega^2 \frac{J}{2} = M \cdot g \cdot e (\cos \vartheta - \cos \alpha)$$

und die Winkelbeschleunigung

$$7) \quad \varepsilon = \frac{M \cdot g \cdot y_0}{J} = \frac{M \cdot g \cdot e \cdot \sin \vartheta}{J}.$$

Führt man noch mit $J = M \cdot i^2$ den Trägheitshalbmesser i der Glocke ein, so ergibt sich

$$\omega^2 = 2 \frac{M \cdot e}{J} g (\cos \vartheta - \cos \alpha) = \frac{2 e g}{i^2} (\cos \vartheta - \cos \alpha),$$

$$\varepsilon = \frac{M \cdot e}{J} \cdot g \cdot \sin \vartheta = \frac{2 e g}{i^2} \sin \vartheta,$$

und hiermit wird aus den Gl. 4 und 5

$$8) \quad H = M g \frac{e^2}{i^2} (3 \sin \vartheta \cos \vartheta - 2 \cos \alpha \sin \vartheta),$$

$$9) \quad V = M g \left(1 + \frac{e^2}{i^2} [3 \cos^2 \vartheta - 2 \cos \alpha \cos \vartheta - 1] \right).$$

Die Größe des wagerechten Widerstandes H wird zu Null für $\vartheta = 0$, d. h. für die tiefste Stellung der Glocke und für $\cos \vartheta = \frac{2}{3} \cos \alpha$, was nur bei $\alpha > 90^\circ$ Sinn hat. H wechselt selbstverständlich sein Vorzeichen übereinstimmend mit ϑ , ist also bald nach rechts, bald nach links gerichtet. Wichtig ist die Kenntnis des Größtwertes von H ; diesen findet man leicht durch Nullsetzung der ersten Abgeleiteten von Gl. 8 nach ϑ , d. h.

$$3 \cos^2 \vartheta - 3 \sin^2 \vartheta - 2 \cos \vartheta \cos \alpha = 0,$$

woraus mit $\sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta$ schließlich sich ergibt:

$$10) \quad \cos \vartheta_1 = \frac{1}{6} \cos \alpha \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{\cos \alpha}{6}\right)^2}.$$

Die äußersten Werte für V ergeben sich für

$$-6 \cos \vartheta \sin \vartheta + 2 \cos \alpha \sin \vartheta = 0;$$

d. h. für $\sin \vartheta = 0$, oder $\vartheta = 0$ entsteht V_{max} ,

für $\cos \vartheta = \frac{1}{3} \cos \alpha$ entsteht V_{min} .

Die Einsetzung dieser Werte in Gl. 9 liefert

$$11) \quad V_{max} = Mg \left(1 + 2 \frac{e^2}{i^2} [1 - \cos \alpha] \right),$$

$$12) \quad V_{min} = Mg \left(1 - \frac{e^2}{i^2} \left[1 + \frac{\cos^2 \alpha}{3} \right] \right).$$

Für die Berechnung der Größtwerte von H und V ist besonders die Kenntnis der Größen e und i erforderlich. Ist nun Fig. 178 der Querschnitt der Glocke und AX die Drehachse, so kann man sich die Glocke in sehr viele wagerechte Ringe zerlegt denken. Ein solcher Ring habe den inneren und äußeren Halbmesser x_1 bzw. x_2 , die Höhe dz , den Abstand z von der AX . Dann liefert dieser Ring zum statischen Momente \mathfrak{S} den Beitrag

$$d\mathfrak{S} = \frac{\gamma}{g} (x_2^2 - x_1^2) \pi \cdot dz \cdot z;$$

das statische Moment der metallenen Glocke ist also

$$\frac{\gamma}{g} \cdot \pi \int (x_2^2 - x_1^2) z \cdot dz$$

(γ das Gewicht von 1 cbm Glockenmetall); dazu kommt noch das statische Moment des (gewöhnlich) hölzernen Helmes der Glocke, welches sich bei gegebenen Abmessungen leicht berechnen läßt. Bezeichnet man dies mit \mathfrak{S}_h , so ist das ganze statische Moment der Glocke

$$13) \quad \mathfrak{S} = \frac{\gamma}{g} \pi \int (x_2^2 - x_1^2) z \cdot dz + \mathfrak{S}_h.$$

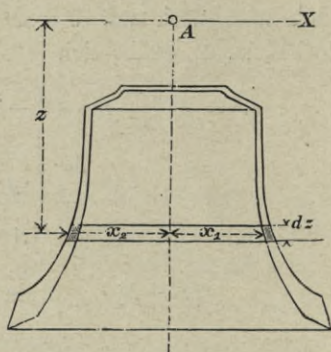
\mathfrak{S}_h wird übrigens < 0 , da der Helm (Fig. 176) größtenteils oberhalb der Achse AX liegt. Offenbar ist das Gewicht

$$Mg = \gamma \pi \int (x_2^2 - x_1^2) dz + M_h \cdot g,$$

wenn $M_h g$ das Gewicht des Helmes bedeutet. Dann findet sich leicht

$$14) \quad e = \frac{\mathfrak{S}}{M}.$$

Fig. 178.



Das polare Trägheitsmoment des Ringes ist

$$\frac{1}{2}(x_2^4 - x_1^4) \pi \cdot dz,$$

das Durchmesser-Trägheitsmoment mithin

$$\frac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4) \pi \cdot dz$$

und dasjenige in bezug auf die AX :

$$\frac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4) \pi \cdot dz + (x_2^2 - x_1^2) \pi \cdot dz \cdot z^2. \text{ Daher wird}$$

$$15) \quad J_x = \frac{\gamma}{g} \cdot \pi \left\{ \sum \frac{1}{4} (x_2^4 - x_1^4) \cdot dz + \sum (x_2^2 - x_1^2) z^2 \cdot dz \right\} + J_h,$$

wenn J_h das Trägheitsmoment des Helmes bedeutet. Hiernach findet man

$$16) \quad i^2 = \frac{J_x}{M}.$$

Beispiel: Der Geh. Finanzrat Köpcke zu Dresden hat im Jahre 1871 (s. Protokoll des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins vom 18. November 1871, S. 58) nach Zeichnungen und ausgeführten Glocken ermittelt, daß, wenn R den unteren Halbmesser der Glocke bezeichnet, etwa folgende Beziehungen stattfinden:

$$17) \quad e = 1,225 R; \quad i^2 = 1,895 R^2; \quad \text{also} \quad \frac{e^2}{i^2} = 0,7919,$$

wofür rund 0,8 gesetzt werden möge. An einer vorhandenen Glocke lassen sich diese Werte prüfen durch Beobachtung der Schwingungsdauer t und Herleitung der Schwingungslänge l aus dieser. Es ist nämlich für die Glocke als Pendel (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 328)

$$18) \quad l = \frac{J}{M \cdot e} = \frac{i^2}{e} = \frac{1,895}{1,225} R = 1,547 R;$$

dies muß $= \frac{g t^2}{\pi^2}$ oder rund $= t^2$ sein (weil g nahezu $= \pi^2$ ist).

Nimmt man noch an, daß die Mittellinie der Glocke beim größten Ausschlage sich um 20° über die Wagerechte erhebe, daß also $\alpha = 110^\circ$ sei, so wird nach Gl. 10 mit $\cos \alpha = -0,342$:

$$\cos \vartheta_1 = -0,037 \pm \sqrt{0,5 + 0,037^2} = 0,652 \quad \text{und} \quad -0,766.$$

Dem entsprechen $\vartheta_1 = 49^\circ 18'$ mit $\sin \vartheta_1 = 0,758$, sowie $\vartheta_1 = 130^\circ$, welcher letztere Wert hier aber keine Bedeutung hat, da er wegen $\alpha = 110^\circ$ nicht vorkommt. Mit $\vartheta_1 = 49^\circ 18'$ wird dann aus Gl. 8:

$$H_{max} = Mg \cdot 0,8 (3 \cdot 0,758 \cdot 0,652 + 2 \cdot 0,342 \cdot 0,758) = 1,60 \cdot Mg.$$

Für $\vartheta = 0$, d. h. in der tiefsten Lage der Glocke entsteht (Gl. 11)

$$V_{max} = Mg \cdot (1 + 2 \cdot 0,8 [1 + 0,342]) = 3,147 Mg;$$

für $\cos \vartheta_2 = \frac{1}{3} \cos \alpha = -0,114$, d. h. $\vartheta_2 = 96^\circ 33'$ entsteht (Gl. 12)

$$V_{min} = Mg (1 - 0,8 [1 + 0,039]) = 0,17 Mg.$$

Bei heftigerem Läuten, d. h. größerem Winkel α würde V_{min} selbst < 0 werden können; bleiben die Verhältnisse der Glocke im übrigen ungeändert, so erfolgt dies für $\cos \alpha < -0,866$ oder $\alpha > 150^\circ$. Bei so großem Schwingungswinkel würde $V_{min} < 0$ werden, d. h. die Glocke das Bestreben haben, aus den Lagern zu springen.

Wegen des starken Wechsels der Kraftgrößen empfiehlt es sich, die einzelnen Teile des Glockenstuhles so zu bemessen, daß die bei einer statischen Berechnung auf Grund obiger Kräfte entstehenden Spannungen σ ein Drittel der Spannungen an der Elastizitätsgrenze nicht überschreiten; für Stabeisen wäre etwa $\sigma = 500 \text{ kg/qcm}$ zu setzen. Die gedrückten Teile sollen mindestens 7fache Sicherheit gegen Zerknicken haben.

Bezüglich der Bedingungen für ein gutes Anschlagen des Klöppels möge auf die Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1877, S. 151 verwiesen werden.

6. Aus lotrechter Stellung umfallender Stab.

Der stabförmige Körper, dessen Schwerpunkt S in dem Abstand e vom unteren Ende A liegt (Fig. 179), sei um das untere Ende drehbar, ursprünglich nahezu lotrecht gestellt und falle um. In einer beliebigen Zwischenstellung, in welcher AS mit der Lotrechten den Winkel ϑ einschließt, ist nach S. 251 die Winkelbeschleunigung

$$1) \quad \varepsilon = \frac{Mge \sin \vartheta}{J} = g \frac{e}{i^2} \sin \vartheta,$$

und für die Winkelgeschwindigkeit ω gilt

$$\omega^2 \frac{J}{2} = Mge(1 - \cos \vartheta), \quad \text{also}$$

$$2) \quad \omega^2 = 2g \frac{e}{i^2} (1 - \cos \vartheta).$$

Die Widerstände H und V , welche der untere Drehpunkt A im Sinne der Fig. 179 leisten muß, bestimmen sich in der bei dem vorigen Beispiele gezeigten Weise leicht zu

$$H = M \cdot e \cdot \varepsilon \cdot \cos \vartheta - M \cdot e \cdot \omega^2 \sin \vartheta \quad \text{und}$$

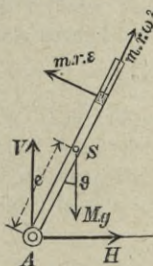
$$V = Mg - M e \varepsilon \sin \vartheta - M e \omega^2 \cos \vartheta,$$

oder mittels der Gl. 1 und 2 zu

$$3) \quad H = Mg \frac{e^2}{i^2} \sin \vartheta (3 \cos \vartheta - 2) \quad \text{und}$$

$$4) \quad V = Mg \left(1 - \frac{e^2}{i^2} [1 + 2 \cos \vartheta - 3 \cos^2 \vartheta] \right).$$

Fig. 179.



Der Wert von H ist zu Anfang, d. h. für $\vartheta = 0$, ebenfalls Null; er wird wiederum zu Null für $\cos \vartheta = 2/3$, d. h. für $\vartheta = 48^\circ$ (vgl. 1. Teil, Aufl. 4, S. 80). Für $\vartheta < 48^\circ$ ist $\cos \vartheta > 2/3$ und $H > 0$, d. h. (Fig. 179) nach derjenigen Seite gerichtet, nach welcher die Stange umfällt. Es hat also, wenn die Stange nach rechts umfällt, das untere Ende derselben anfänglich das Bestreben, nach links auszugleiten. Zwischen den beiden Nullwerten von H liegt ein Maximum für einen Wert von $\cos \vartheta$, den man leicht durch Nullsetzung der ersten Abgeleiteten von Gl. 3 nach ϑ ermittelt zu

$$\cos \vartheta = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = 0,8933 \quad \text{mit} \quad \vartheta = 26^\circ 40'$$

(ein $\cos \vartheta < 0$ hat hier keinen Sinn); der entsprechende Wert von H selbst ergibt sich dann zu

$$H_{max} = Mg \frac{e^2}{i^2} \cdot 0,305.$$

Für $\vartheta > 48^\circ$ ist $\cos \vartheta < 2/3$ und $H < 0$; es hat nunmehr das untere Ende der Stange das Bestreben, nach rechts auszugleiten. Für $\vartheta = 90^\circ$, d. h. beim Aufschlagen der Stange auf den waagrecht gedachten Boden ist

$$H = -2 Mg \frac{e^2}{i^2}.$$

Was die Größe des lotrechten Widerstandes V anlangt, so ist zu Anfang, d. h. für $\vartheta = 0$, $V = Mg$. Mit wachsendem ϑ nimmt V zunächst ab. Ein Kleinstwert von V ergibt sich leicht für $\cos \vartheta = 1/3$ oder $\vartheta = 70^\circ 30'$, nämlich

$$V_{min} = Mg \left(1 - \frac{4}{3} \frac{e^2}{i^2}\right).$$

Dann nimmt V wieder zu, und für $\vartheta = 90^\circ$ wird

$$V = Mg \left(1 - \frac{e^2}{i^2}\right).$$

Der in vorstehenden Gleichungen auftretende Wert $\frac{e^2}{i^2}$, gleichbedeutend mit $\frac{e}{l}$ (vgl. S. 253, Gl. 18), wenn l die Schwingungslänge des am unteren Ende A aufgehängten Stabes ist, richtet sich

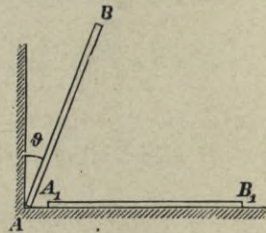
nach der Massenverteilung des Stabes. Ist die Masse gleichmäßig über die Länge a verteilt, so ist

$$e = \frac{a}{2}, \quad i^2 = \frac{a^2}{3}, \quad l = \frac{2}{3}a, \quad \text{daher} \quad \frac{e^2}{i^2} = \frac{e}{l} = \frac{3}{4},$$

womit man für H und V leicht bestimmtere Ausdrücke aus vorstehenden Gleichungen erhält. Dieselben Werte gelten offenbar für eine rechteckige, lotrecht aufgestellte, um die Unterkante drehbare Platte von gleichmäßiger Gewichtsverteilung.

Ist die Anordnung so getroffen, daß durch einen Vorsprung oder eine lotrechte Wand wohl ein Ausgleiten des unteren Endes nach links, nicht aber nach rechts verhindert wird (Fig. 180), so gelten die vorstehend entwickelten Gleichungen nur bis zu dem Drehungswinkel $\vartheta = 48^\circ$ und vermöge des in Wirklichkeit meist auftretenden Reibungswiderstandes noch um ein gewisses Maß darüber hinaus. Bei weiterer Annäherung des Körpers an den wagerechten Boden kann die erforderliche, jetzt negative, d. h. nach links gerichtete Kraft H durch die Reibung nicht mehr geliefert werden, und es findet nun ein Ausgleiten des unteren Endes der Stange nach rechts hin wirklich statt, so daß der umgefallene Körper sich schließlich in einer Lage A^1B^1 auf dem Boden findet. Weiteres s. S. 278.

Fig. 180.



7. Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

Ein Körper drehe sich unter Einwirkung äußerer Kräfte um einen festen Punkt A , dann läßt sich nach S. 38 seine Bewegung in jedem Zeitpunkte zurückführen auf die Drehung um eine durch den Punkt A gehende augenblickliche Drehachse AP . Es wird nun

1. der Körper seine Lage im Raume ändern;
2. die augenblickliche Drehachse ihre Lage sowohl im Raume wie auch gegen den Körper ändern;
3. wird auch die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω eine Größenänderung erfahren.

Die drei Hauptachsen des Körpers für den Punkt A seien bekannt; dieselben liegen gegen den Körper fest, werden daher ihre Richtung im Raum ändern.

Wir denken uns durch den festen Punkt A (Fig. 181) drei feste Achsen gelegt, die so gewählt sind, daß sie im Zeitpunkte t mit den Hauptachsen zusammenfallen.

Die diesem Zeitpunkt entsprechende Winkelgeschwindigkeit ω kann nach S. 50 (genau wie eine Kraft) zerlegt werden in die Seitengeschwindigkeiten

$$\varphi = \omega \cdot \cos \alpha;$$

$$\chi = \omega \cdot \cos \beta;$$

$$\psi = \omega \cdot \cos \gamma$$

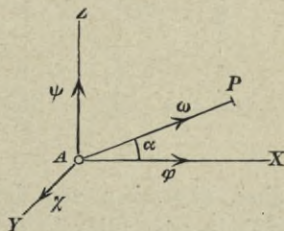
um die Hauptachsen; α, β, γ seien die Richtungswinkel der AP ; ferner seien J_1, J_2, J_3 die drei Hauptträgheitsmomente, $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$ die Momentensummen der äußeren Kräfte in bezug auf die Hauptachsen.

Um die Beziehung zwischen der Drehbewegung um den festen Punkt A und den äußeren Kräften zu erhalten, wendet man den Satz der Flächen an (vgl. S. 215). Den Drall \mathfrak{B} in bezug auf den Punkt A denken wir uns nach den drei Achsrichtungen zerlegt in seine Komponenten $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y$ und \mathfrak{B}_z . Anstatt der Gl. 4 S. 217 erscheinen dann die drei Komponentengleichungen

$$1) \quad \mathfrak{M}_x = \frac{d\mathfrak{B}_x}{dt}, \quad \mathfrak{M}_y = \frac{d\mathfrak{B}_y}{dt} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_z = \frac{d\mathfrak{B}_z}{dt}.$$

Um die Drallkomponenten $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y$ und \mathfrak{B}_z in bezug auf zunächst mit den Hauptachsen zusammenfallenden Koordinatenachsen zu finden, bedenke man, daß ein Massenpunkt m (Fig. 182) mit den Koordinaten x, y, z und einem Abstand r_1 von der x -Achse wegen der Winkelgeschwindigkeit φ um die x -Achse eine Geschwindigkeit $\varphi \cdot r_1$ mit dem Hebelarme r hat, also einen Beitrag $m\varphi \cdot r_1^2$ zu \mathfrak{B}_x liefert. Ist r_2 der rechtwinklige Abstand des Massenpunktes von der y -Achse (Fig. 183), so entspricht der Winkelgeschwindigkeit χ um die y -Achse eine Geschwindigkeit $\chi \cdot r_2$, welche sich leicht in $\chi \cdot z$ und $-\chi \cdot x$ im Sinne der x - bzw. z -Achse zerlegen läßt. Ebenso erhält man wegen der Winkel-

Fig. 181.



geschwindigkeit ψ um die z -Achse die Seitengeschwindigkeiten $-\psi \cdot y$ und $+\psi \cdot x$ im Sinne der x - bzw. der y -Achse. Zum Drall \mathfrak{B}_x in bezug auf die x -Achse liefern die parallel der x -Achse gerichteten Seitengeschwindigkeiten keinen Beitrag; es kommen

Fig. 182.

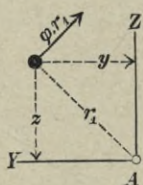


Fig. 183.

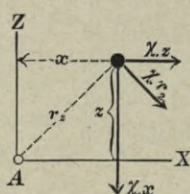
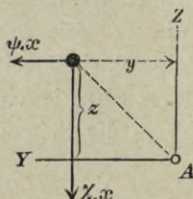


Fig. 184.



daher, abgesehen von dem schon erledigten Beitrage $m\varphi \cdot r_1^2$ der Winkelgeschwindigkeit φ , nur noch die beiden in Fig. 184 angegebenen Geschwindigkeiten mit den Momenten $-\chi \cdot x \cdot y$ und $-\psi \cdot x \cdot z$ in Frage.

Sonach wird der Drall \mathfrak{B}_x in bezug auf die x -Achse im Zeitpunkte t :

$$\mathfrak{B}_x = \Sigma(m\varphi \cdot r_1^2) - \Sigma(m \cdot \chi \cdot x \cdot y) - \Sigma(m \cdot \psi \cdot x \cdot z).$$

Da nun die Winkelgeschwindigkeiten φ , χ , ψ für diese Summen konstante Faktoren sind und da $\Sigma(m \cdot r_1^2)$ das Trägheitsmoment J_1 bedeutet, so wird

$$\mathfrak{B}_x = J_1 \cdot \varphi - \chi \Sigma m x y - \psi \Sigma m x z.$$

Weil aber in bezug auf die Hauptachsen die Zentrifugalmomente gleich Null sind, so vereinfacht sich obige Momentensumme zu

$$2) \quad \dots \mathfrak{B}_x = J_1 \cdot \varphi,$$

und ebenso erhält man

$$3) \quad \mathfrak{B}_y = J_2 \chi \quad \text{und} \quad 4) \quad \dots \mathfrak{B}_z = J_3 \psi.$$

Zur Ermittlung der entsprechenden Drallwerte für den Zeitpunkt $t + dt$ darf man nun nicht etwa in dem Ausdruck $J_1 \cdot \varphi$ einfach φ mit $\varphi + d\varphi$ vertauschen. Wohl ist $J_1(\varphi + d\varphi)$ der Drall in bezug auf die erste Hauptachse; jedoch ist zu bedenken, daß die mit der Bewegung des Körpers veränderlichen Drallkomponenten sich immer auf die mit konstanter Richtung durch den Punkt A gehenden festen Koordinatenachsen beziehen, daß die Hauptachsen des Körpers sich aber während der Zeit dt um gewisse,

wenn auch unendlich kleine Winkel gegen ihre ursprüngliche Richtung, d. h. gegen die festen Koordinatenachsen, verdreht haben. Es müssen daher zunächst die Winkel bestimmt werden, welche die Hauptachsen im Zeitpunkte $t + dt$ mit der x -Achse einschließen.

Zu dem Ende denken wir uns auf den Hauptachsen, welche im Zeitpunkte t noch mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, die Längen $AG = AH = AK = 1$ abgetragen (Fig. 185).

Vermöge der Winkelgeschwindigkeit χ um die AY bewegt sich G nach G_1 um $GG_1 = \chi \cdot dt$. Vermöge der Winkelgeschwindigkeit ψ um die AZ bewegt sich G um $GG_2 = \psi \cdot dt$. Die Folge beider Geschwindigkeiten ist eine Verrückung des Punktes G nach G_3 , d. h. eine Verdrehung der ersten Hauptachse um den Winkel

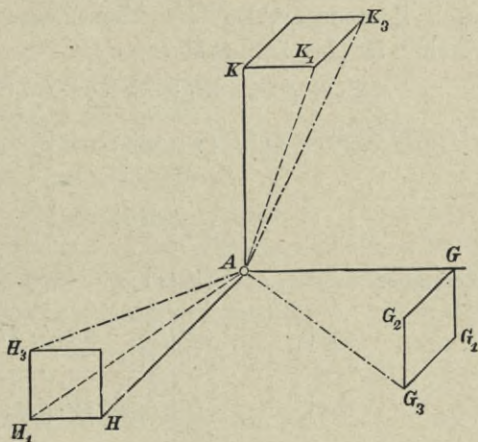
$$GAG_3 = dt\sqrt{\chi^2 + \psi^2}.$$

Die zweite Hauptachse schließt anfangs mit der x -Achse den Winkel $\frac{\pi}{2}$ ein. Dieser Winkel wird nicht geändert durch die Drehung um AX und um AY , sondern nur durch die Drehung um AZ , so daß im Zeitpunkte $t + dt$ die zweite Hauptachse mit der x -Achse den Winkel $H_3AG = \frac{\pi}{2} + \psi \cdot dt$ einschließt.

Der Winkel der dritten Hauptachse gegen AX wird nur durch die Winkelgeschwindigkeit χ verändert und geht in

$$K_3AG = \frac{\pi}{2} - \chi \cdot dt \text{ über.}$$

Fig. 185.



Multipliziert man die Drallwerte (Momentensummen der Bewegungsgrößen) in bezug auf die drei Hauptachsen für den Zeitpunkt $t + dt$, also

$$J_1(\varphi + d\varphi), \quad J_2(\chi + d\chi), \quad J_3(\psi + d\psi),$$

mit den Kosinus der soeben bestimmten Winkel, so bekommt man durch Zusammenzählen der Momentensumme in bezug auf die x -Achse für den Zeitpunkt $t + dt$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_x + d\mathfrak{B}_x &= J_1(\varphi + d\varphi) \cdot \cos(dt\sqrt{\chi^2 + \psi^2}) \\ &+ J_2(\chi + d\chi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi \cdot dt\right) \\ &+ J_3(\psi + d\psi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi \cdot dt\right). \end{aligned}$$

Weil aber $\cos(dt \cdot \sqrt{\chi^2 + \psi^2}) = 1$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi \cdot dt\right) = -\sin(\psi \cdot dt) = -\psi \cdot dt,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi \cdot dt\right) = \sin(\chi \cdot dt) = \chi \cdot dt$$

ist, so wird auch

$$\mathfrak{B}_x + d\mathfrak{B}_x = J_1(\varphi + d\varphi) - J_2(\chi + d\chi) \psi \cdot dt + J_3(\psi + d\psi) \cdot \chi \cdot dt.$$

Zieht man hiervon den Anfangswert der Gl. 2 ab, vernachlässigt die Unendlichkleinen zweiter Ordnung und teilt schließlich durch dt , so ergibt sich

$$5) \quad \dots \quad \frac{d\mathfrak{B}_x}{dt} = J_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} - J_2 \cdot \chi \cdot \psi + J_3 \cdot \chi \cdot \psi$$

und unter Beachtung der Gl. 1

$$6) \quad J_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} - (J_2 - J_3) \chi \cdot \psi = \mathfrak{M}_x.$$

Ebenso folgt für die anderen Achsen

$$7) \quad J_2 \cdot \frac{d\chi}{dt} - (J_3 - J_1) \psi \cdot \varphi = \mathfrak{M}_y,$$

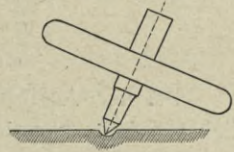
$$8) \quad J_3 \cdot \frac{d\psi}{dt} - (J_1 - J_2) \varphi \cdot \chi = \mathfrak{M}_z.$$

Dies sind die von Leonhard Euler im Jahre 1758 entwickelten Gleichungen für die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

8. Bewegung des Kreisels.

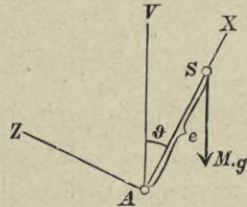
Unter einem Kreisel denken wir uns einen Körper, bestehend aus einer Achse mit einem darauf befestigten Schwungringe. Dem Körper werde eine bedeutende Winkelgeschwindigkeit φ_0 um seine zunächst festgehaltene Achse erteilt; setzt man ihn dann in beliebig schiefer Lage mit dem unteren Ende A der Achse in ein Kugellager, welches den Punkt A (nahezu) unbeweglich macht, oder befand er sich schon, bevor er in Drehung versetzt wurde, in einem solchen

Fig. 186.



(Fig. 186), so fällt der Kreisel unter Einwirkung der Schwere nicht etwa um, wie es ohne die Drehung geschehen würde, vielmehr beschreibt die geometrische Achse des Kreisels bekanntlich eine Kegelfläche, deren Achse die durch A gelegte Lotrechte ist, wobei aber die Leitlinie nicht ein Kreis, sondern eine von zwei konzentrischen Kreisen eingeschlossene, epizykloidenartige Kurve ist. Dies ergibt sich wie folgt:

Fig. 187.



Die geometrische Achse ist offenbar eine Hauptachse des Kreisels für den Punkt A und werde zur x -Achse genommen. Jede durch A rechtwinklig zur x -Achse gelegte Gerade ist ebenfalls eine Hauptachse. Wählt man die durch $A X$ bestimmte lotrechte Ebene zur xz -Ebene, so liegen hierdurch die Achsen $A Z$ und $A Y$ fest; letztere ist in Fig. 187 rechtwinklig zur Bildebene zu denken. Die Lotrechte durch den Punkt A werde $A V$ genannt; sie schließe mit $A X$ den veränderlichen Winkel ϑ ein. Da wegen der regelmäßigen Gestalt des Kreisels das Trägheitsellipsoid für den Punkt A offenbar ein Umdrehungsellipsoid, so ist $J_3 = J_2$.

Die Winkelgeschwindigkeiten sind

in Zeitpunkte $t = 0$: $\varphi_0, \chi_0 = 0, \psi_0 = 0,$

in Zeitpunkte t : $\varphi, \chi, \psi.$

Die Kraftmomente rühren, wenn man die Reibung im Kugellager vernachlässigt, nur vom Gewichte her; dann ist

$$\mathfrak{M}_x = 0; \quad \mathfrak{M}_y = M \cdot g \cdot e \sin \vartheta; \quad \mathfrak{M}_z = 0.$$

Hiernach wird aus den Eulerschen Gleichungen 6 bis 8, S. 260:

$$1) \quad J_1 \frac{d\varphi}{dt} = 0;$$

$$2) \quad J_2 \frac{d\chi}{dt} - (J_2 - J_1) \psi \cdot \varphi = Mge \sin \vartheta;$$

$$3) \quad J_2 \frac{d\psi}{dt} - (J_1 - J_2) \varphi \cdot \chi = 0.$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen folgen wir im wesentlichen Schells Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1. Aufl., S. 831.

Nach der ersten Gleichung ist φ unveränderlich, d. h.

$$4) \quad \varphi = \varphi_0.$$

Aus den Annahmen ergibt sich unmittelbar

$$5) \quad \chi = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Multipliziert man Gl. 2 mit $\chi \cdot dt = d\vartheta$ und Gl. 3 mit $\psi \cdot dt$, so entsteht

$$J_2 \chi \cdot d\chi - (J_2 - J_1) \varphi \cdot \chi \cdot \psi \cdot dt = Mge \sin \vartheta \cdot d\vartheta,$$

$$J_2 \psi \cdot d\psi - (J_1 - J_2) \varphi \cdot \chi \cdot \psi \cdot dt = 0.$$

Daraus wird durch Zusammenzählen:

$$J_2 (\chi \cdot d\chi + \psi \cdot d\psi) = Mge \sin \vartheta \cdot d\vartheta.$$

Integriert man dies zwischen den Grenzen

$$\chi = 0, \quad \psi = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{und}$$

$$\chi, \quad \psi, \quad \vartheta, \quad \text{so wird}$$

$$6) \quad J_2 (\chi^2 + \psi^2) = 2 Mge (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta).$$

In bezug auf die drei Koordinatenachsen, welche im Zeitpunkte t mit den Hauptachsen zusammenfallen (vgl. S. 257), sind die Drallkomponenten

$$\mathfrak{B}_x = J_1 \varphi = J_1 \varphi_0, \quad \mathfrak{B}_y = J_2 \cdot \chi \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_z = J_2 \cdot \psi.$$

Projizieren wir diese Strecken auf die Lotrechte AV , so ist die Summe dieser Projektionen der Drall in bezug auf AV . Dies gibt

$$\mathfrak{B} = J_1 \varphi_0 \cdot \cos \vartheta + J_2 \psi \cdot \sin \vartheta.$$

Dieser Wert muß, weil $M \cdot g \parallel AV$, d. h. das Kraftmoment in bezug auf AV Null ist, nach S. 217 unveränderlich, also gleich seinem Anfangswerte sein.

Sonach wird $J_1 \varphi_0 \cos \vartheta + J_2 \psi \cdot \sin \vartheta = J_1 \varphi_0 \cos \vartheta_0$, oder

$$7) \quad J_1 \varphi_0 (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) = J_2 \psi \cdot \sin \vartheta.$$

Aus den Gl. 6 und 7 läßt sich ψ entfernen und χ berechnen, nämlich

$$8) \quad \chi = \pm \frac{1}{\sqrt{J_2}} \sqrt{(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \left(2 M g e - \frac{J_1^2 \varphi_0^2}{J_2} \cdot \frac{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \right)}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist ϑ die einzige Veränderliche. Da nun χ nicht imaginär werden kann, wird sich ϑ nur innerhalb solcher Werte ändern können, für welche der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv bleibt; diejenigen Werte von ϑ , welche jenen zu Null machen, sind Grenzwerte. Einer dieser Grenzwerte ist nach Gl. 8 offenbar der Anfangswert $\vartheta = \vartheta_0$. Ein anderer Grenzwert ϑ_1 ergibt sich, wenn man

$$2 M \cdot g \cdot e - \frac{J_1^2}{J_2} \varphi_0^2 \frac{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta_1}{\sin^2 \vartheta_1} = 0$$

setzt, wofür man wegen $\sin^2 \vartheta_1 = 1 - \cos^2 \vartheta_1$ auch schreiben kann:

$$9) \quad \frac{2 M \cdot g \cdot e}{\varphi_0^2} \frac{J_2}{J_1^2} (1 - \cos^2 \vartheta_1) = \cos \vartheta_0 - \cos \vartheta_1.$$

Der Einfachheit wegen sollen im weiteren nur solche Fälle berücksichtigt werden, in denen die anfängliche Winkelgeschwindigkeit φ_0 sehr groß oder, bestimmter ausgedrückt, das ursprüngliche Arbeitsvermögen $\frac{J_1 \varphi_0^2}{2}$ sehr groß im Vergleiche mit $M g \cdot e J_2$ ist; dann wird die linke Seite der Gl. 9 sehr klein, mithin auch die rechte; d. h. die Grenzwerte ϑ_0 und ϑ_1 sind nur wenig voneinander verschieden, oder ϑ ändert sich nur wenig.

Wir schreiben daher

$$10) \quad \vartheta = \vartheta_0 + \delta,$$

worin für große Drehgeschwindigkeit des Kreisels δ ein kleiner Winkel ist. Hiermit wird

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \cos (\vartheta_0 + \delta) = \cos \vartheta_0 \cdot \cos \delta - \sin \vartheta_0 \cdot \sin \delta \\ &= \cos \vartheta_0 - \delta \cdot \sin \vartheta_0 \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$11) \quad \cos \vartheta_0 - \cos \vartheta = \delta \cdot \sin \vartheta.$$

Vertauscht man noch annäherungsweise $\sin \vartheta$ mit dem Anfangswert $\sin \vartheta_0$, so wird aus Gl. 8 unter Benutzung von Gl. 11:

$$12) \quad \chi = \pm \sqrt{2 \frac{Mg}{J_2} \cdot e \cdot \delta \cdot \sin \vartheta_0 - \frac{J_1^2}{J_2^2} \varphi_0^2 \delta^2}.$$

Nach Gl. 5 und 10 ist

$$13) \quad \chi = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\delta}{dt}.$$

Der größte Wert δ_1 von δ ergibt sich für $\frac{d\delta}{dt} = 0$, also für $\chi = 0$ nach Gl. 12 zu

$$14) \quad \delta_1 = \frac{2 Mg \cdot e}{\varphi_0^2} \frac{J_2}{J_1^2} \sin \vartheta_0 = \vartheta_1 - \vartheta_0.$$

Um zu erfahren, innerhalb welcher Zeit ϑ von ϑ_0 in ϑ_1 , also δ von 0 in δ_1 übergeht, muß man aus Gl. 13 und 12

$$dt = \frac{d\delta}{\chi} = \frac{d\delta}{\frac{J_1}{J_2} \varphi_0 \sqrt{2 \frac{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin \vartheta_0}{J_1^2 \varphi_0^2} \delta - \delta^2}}$$

entnehmen und integrieren. Setzt man zur Abkürzung vorübergehend

$$\frac{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin \vartheta_0}{J_1^2 \varphi_0^2} = a, \quad \text{so wird}$$

$$dt = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \frac{d\delta}{\sqrt{2a\delta - \delta^2}}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} d \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{\delta}{a} \right) &= - \frac{d \left(1 - \frac{\delta}{a} \right)}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\delta}{a} \right)^2}} \\ &= \frac{1}{a} \frac{d\delta}{\sqrt{2 \frac{\delta}{a} - \frac{\delta^2}{a^2}}} = \frac{d\delta}{\sqrt{2a\delta - \delta^2}}, \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$t = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{\delta}{a} \right) + C, \quad \text{oder}$$

$$15) \quad t = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{J_1^2 \varphi_0^2}{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin \vartheta_0} \cdot \delta \right) + C.$$

Rechnet man die Zeit von dem Augenblick an, in welchem $\delta = 0$, also $\vartheta = \vartheta_0$ war, so wird

$$0 = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \text{arc cos } 1 + C, \text{ d. h. } C = 0.$$

Löst man Gl. 15, mit $C = 0$, nach δ auf, so entsteht

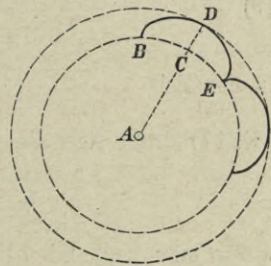
$$16) \quad \delta = \frac{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin \vartheta_0}{J_1^2 \varphi_0^2} \left(1 - \cos \frac{J_1}{J_2} \varphi_0 \cdot t \right).$$

Diese Gleichung gibt δ als $f(t)$; jedesmal, wenn $\frac{J_1}{J_2} \varphi_0 t$ sich um 2π geändert hat, kehren für δ dieselben Werte wieder; in der Zeit

$$17) \quad t_1 = \frac{2\pi J_2}{\varphi_0 J_1}$$

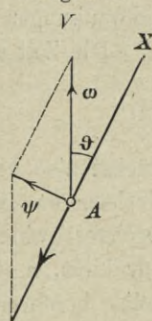
wird also der Zwischenraum von ϑ_0 bis ϑ_1 einmal hin und her durchlaufen. Die Achse AX des Kreisels beschreibt also um die Lotrechte AV einen Kegel mit einer nach Fig. 188 geformten Leitlinie. — Fig. 188 sei der Grundriß der Bahnlinie des Kreiselschwerpunktes S . Die Größe des Ausschlages CD in radialer Richtung

Fig. 188.



ist durch δ_1 (Gl. 14) gegeben, die Zeit zum Durchlaufen eines Bogens BDE durch Gl. 17. Um auch noch die Länge BCE eines Bogens zu finden, müssen wir die Winkelgeschwindigkeit ω berechnen, mit der sich die Ebene VAX (Fig. 187) um AV dreht. Diese erhält man, indem man die Winkelgeschwindigkeit ψ um die Achse AZ zerlegt nach den Richtungen AV und AX (Fig. 189), dann ist die in erstere Richtung fallende Seitengeschwindigkeit der gesuchte Wert

Fig. 189.



$$\omega = \frac{\psi}{\sin \vartheta}.$$

Nun ist nach Gl. 7:

$$\psi = \frac{J_1}{J_2} \cdot \varphi_0 \frac{(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)}{\sin \vartheta},$$

also mittels Gl. 11, wenn man zugleich nach S. 264 wieder $\sin \vartheta$ mit $\sin \vartheta_0$ vertauscht,

$$\psi = \frac{J_1}{J_2} \varphi_0 \cdot \delta, \quad \text{mithin}$$

$$18) \quad \omega = \frac{J_1}{J_2} \varphi_0 \cdot \frac{\delta}{\sin \vartheta_0}.$$

Da nun δ von Null bis δ_1 schwankt, so ist auch ω zwischen Null und einem Größtwerte (für $\delta = \delta_1$) veränderlich. Einen Mittelwert von ω erhält man, wenn man für δ den Mittelwert

$$\frac{\delta_1}{2} = \frac{Mg \cdot e}{\varphi_0^2} \frac{J_2}{J_1^2} \sin \vartheta_0$$

(Gl. 14) einsetzt, nämlich

$$19) \quad \omega = \frac{Mg \cdot e}{J_1 \varphi_0}.$$

In der Zeit

$$t_1 = \frac{2\pi J_2}{\varphi_0 J_1}$$

(Gl. 17) dreht sich die Ebene VAX also um den Winkel

$$\eta = \omega \cdot t_1 = 2\pi \frac{Mg \cdot e}{\varphi_0^2} \frac{J_2}{J_1^2},$$

wofür man nach Gl. 14 kürzer

$$20) \quad \eta = \pi \frac{\delta_1}{\sin \vartheta_0}$$

schreiben kann. Auf eine Umdrehung der Ebene VAX kommen sonach

$$21) \quad n = \frac{2\pi}{\eta} = 2 \frac{\sin \vartheta_0}{\delta_1}$$

Schwankungen der Kreiselachse.

Die Zeit einer vollständigen Drehung der Ebene VAX beträgt

$$22) \quad t_2 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{J_1 \cdot \varphi_0}{Mg \cdot e},$$

wächst also verhältnismäßig mit der Winkelgeschwindigkeit φ_0 des Kreisels und ist unabhängig von dem Winkel ϑ_0 . Bei sehr großer Drehgeschwindigkeit φ_0 des Kreisels ist nach Gl. 14 der Winkel δ_1 nur klein, n (Gl. 21) groß und t_2 (Gl. 22) groß, d. h. die Kreiselachse beschreibt sehr langsam einen Kegel mit vielen, aber kleinen Rippen, so daß der Kegel fast wie ein Kreiskegel erscheint. Wird

die Drehgeschwindigkeit des Kreisels um seine Achse infolge von Reibung und Luftwiderstand allmählich kleiner, so werden die Schwankungen δ_1 größer, bis der Kiesel schließlich die Grundebene berührt und umfällt oder sonst in seiner Bewegung gestört wird, und die Zeit t_2 einer Drehung der Ebene VAX verkleinert sich. Der Sinn der Winkelgeschwindigkeiten ω und φ_0 (Gl. 19) stimmt in bezug auf den Drehpunkt überein; ist φ_0 , von oben betrachtet, rechts drehend, so gilt dies auch für ω , und umgekehrt. Über die Form der Kurve BDE (Fig. 188) erhält man noch bestimmteren Aufschluß, wenn man mittels der Gl. 12 und 18 bildet

$$\frac{\chi^2}{\omega^2} = \frac{2Mg \cdot e \cdot \sin^3 \vartheta_0 \cdot J_2}{J_1^2 \varphi_0^2 \delta} - \sin^2 \vartheta_0.$$

Für $\delta = 0$ wird $\frac{\chi^2}{\omega^2} = \infty$, d. h. die Kurve BDE ist bei B und E radial; für $\delta = \delta_1$ (Gl. 14) aber wird $\frac{\chi^2}{\omega^2} = 0$, d. h. die Kurve BDE ist bei D rechtwinklich zu AD . Weil $AC = e \cdot \sin \vartheta_0$, so ist $BCE = AC \cdot \eta = e \cdot \delta_1 \cdot \pi$ (Gl. 20). Betrachtet man annähernd CD als $= e \cdot \delta_1$, so paßt auch das Verhältnis $BCE : CD = \pi$ auf eine sphärische Epizykloide, welche beim Rollen eines spitzen Kegels auf dem äußeren Mantel eines stumpferen entstehen würde.

Beispiel: Ein Kiesel (Fig. 189) bestehe aus einem Schwungring von 0,045 m mittlerem Halbmesser, der so schwer ist, daß gegen seine Masse diejenige der Achse und der Radarme vernachlässigt werden kann. Die Spitze liege um 0,02 m unter der Mitte des Schwungringes und sei in einem glatten Grübchen drehbar, so daß man ihre Bewegung als Drehung in einem Kugellager ansehen kann. Dann ist annähernd

$$J_1 = M \cdot 0,045^2 = 0,002 \cdot M,$$

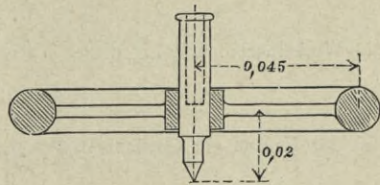
$$J_2 = M \left(\frac{0,045^2}{2} + 0,02^2 \right) = 0,0014 \cdot M,$$

$$e = 0,02.$$

Für diesen Kiesel ist die Schwankung

$$(Gl. 14) \quad \delta_1 = \frac{2M \cdot 9,81 \cdot 0,02 \cdot 0,0014 M \cdot \sin \vartheta_0}{\varphi_0^2 \cdot 0,002^2 \cdot M^2} = 137 \frac{\sin \vartheta_0}{\varphi_0^2};$$

Fig. 190.



die Zeit einer Hin- und Herschwankung

$$(Gl. 17) \quad t_1 = 2\pi \frac{0,0014}{0,002 \cdot \varphi_0} = \frac{4,4}{\varphi_0};$$

die Zeit eines Umlaufes der Kreiselachse um die Lotrechte

$$(Gl. 22) \quad t_2 = 2\pi \frac{0,002}{9,81 \cdot 0,02} \varphi_0 = 0,064 \varphi_0;$$

die Zahl der Schwankungen der Achse während eines Umlaufes, d. h. Zahl der Rippen des Kegels

$$(Gl. 21) \quad n = 2 \frac{\sin \vartheta_0}{137 \cdot \sin \vartheta_0} \cdot \varphi_0^2 = 0,015 \cdot \varphi_0^2.$$

Um die Achse des Kreisels sei eine Schnur gewickelt; die Mitte derselben sei von der Mittellinie der Achse um 4 mm entfernt, so daß eine Umwicklung einer Fadenlänge von rund 25 mm entspricht. Wird an dem freien Ende des Fadens mit möglichst gleich bleibender Kraft gezogen und zugleich die (hohle) Achse des Kreisels mittels eines hineingesteckten Stiftes festgehalten, so erfährt der Kegel eine gleichförmig beschleunigte Drehbewegung. Werden bei dieser in einer Zeit von drei Sekunden 800 mm Fadenlänge abgezogen, so ist die Endgeschwindigkeit des Fadens (nach 1. Teil, S. 12, Gl. 4, mit $c = 0$)

$$v = \frac{2 \cdot 800}{3} = 533 \text{ mm/s.},$$

entsprechend einer Drehgeschwindigkeit von

$$\frac{533}{25} = 21$$

Umdrehungen in der Sekunde, oder einer Winkelgeschwindigkeit

$$\varphi_0 = 21 \cdot 2\pi = 132.$$

Die Winkelbeschleunigung dieser Antriebbewegung ist

$$\varepsilon = \frac{\varphi_0}{t} = \frac{132}{3} = 44.$$

Hat der Kegel ein Gewicht $Mg = 0,3 \text{ kg}$, so ist

$$J_1 = \frac{0,3}{9,81} \cdot 0,002;$$

somit erfordert ε ein Moment

$$\mathfrak{M} = \varepsilon \cdot J_1 = 0,0027 \text{ mkg.},$$

also an einem Hebelarme von 0,004 m eine Zugkraft $K = 0,7 \text{ kg}$.

Aus $\varphi_0 = 132$ folgt die Zeit einer Hin- und Herschwankung

$$t_1 = \frac{4,4}{132} = 0,033 \text{ s.};$$

die Zeit eines Umlaufes der Kreiselachse $t_2 = 0,064 \cdot 132 = 8,4 \text{ s.}$; die Zahl der Rippen eines Kegels $n = 0,015 \cdot 132^2 = 261,4$. Einer Schrägstellung der Kreiselachse um den Winkel $\vartheta_0 = 10^\circ$ mit $\sin \vartheta_0 = 0,17$ entspricht dann

$$\vartheta_1 = \frac{137 \cdot 0,17}{132^2} = 0,0014 = 5'.$$

Ist die Winkelgeschwindigkeit φ_0 nur halb so groß, wie vorstehend angenommen, so wird t_1 doppelt so groß, d. h. $0,066$ s.; t_2 halb so groß, d. h. $4,2$ s.; die Zahl n der Rippen vermindert sich auf ein Viertel, d. h. auf $65,4$; während δ_1 auf das Vierfache, nämlich auf $20'$ zunimmt.

9. Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne Einwirkung bewegender Kräfte.

Der vorstehend behandelte Fall der Kreiselbewegung wurde dadurch verhältnismäßig leicht lösbar, daß das Trägheitsellipsoid ein Umdrehungsellipsoid war, daß außerdem die Winkelgeschwindigkeit φ_0 sehr groß, die anderen beiden χ_0 und ψ_0 aber gleich Null vorausgesetzt wurden und daß die Achse des resultierenden Kräftepaars in eine Hauptachse fiel. Ohne diese vereinfachenden Annahmen wird die Aufgabe, die Drehbewegung eines Körpers um einen festen Punkt zu untersuchen, meist so schwierig, daß wir von deren allgemeiner Behandlung hier absehen.

Wirken auf dem Körper außer dem Widerstande des festen Punktes keine äußeren Kräfte, sind also die Drehmomente in bezug auf alle durch den festen Punkt zu legende Achsen gleich Null, so nehmen die Eulerschen Drehgleichungen (S. 260) allerdings die etwas einfachere Gestalt

$$J_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = (J_2 - J_3)\chi \cdot \psi, \quad J_2 \cdot \frac{d\chi}{dt} = (J_3 - J_1)\psi \cdot \varphi,$$

$$J_3 \cdot \frac{d\psi}{dt} = (J_1 - J_2)\varphi \cdot \chi \quad \text{an.}$$

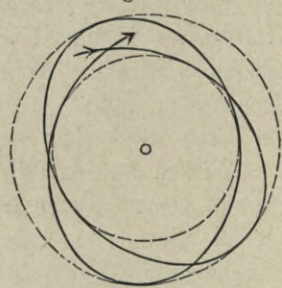
Die Entwicklung dieser Gleichungen, welche Poinso't im Jahre 1834 gezeigt hat, soll hier nur in ihren Ergebnissen beschrieben werden.

Die Drehbewegung des Körpers um den festen Punkt A ohne Einwirkung von Kraftmomenten geschieht hiernach in der Weise, daß das auf den festen Punkt bezügliche Trägheitsellipsoid des Körpers eine Rollbewegung auf einer Ebene ausführt, die eine unveränderliche Lage hat. Die Lage dieser sog. unveränderlichen Ebene hängt von den anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten φ_0 , χ_0 und ψ_0 um die Hauptachsen ab. Der Fahrstrahl, von dem festen Punkt A nach dem Berührungspunkt O zwischen der Ebene und dem Ellipsoide gezogen, ist die augenblickliche Drehachse, und zugleich

ist die Winkelgeschwindigkeit ω um diese Achse mit der Länge des Fahrstrahles AO verhältnismäßig. Geschieht die anfängliche Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine der Hauptachsen des Trägheitsellipsoides, so ist der Fahrstrahl AO rechtwinklig zu der unveränderlichen Ebene; der Berührungspunkt O hat in diesem Falle eine feste Lage im Körper und im Raume; die Drehung erfolgt daher mit gleichbleibender Geschwindigkeit dauernd um die Achse AO , als wäre diese eine feste Achse.

Die Drehung um den festen Punkt A kann nach S. 39 auch als das Rollen zweier Kegel aufeinander betrachtet werden. In dem hier vorliegenden Falle, wo die Momente Null sind, schneidet der mit dem Körper verbunden gedachte Kegel das um den Punkt A gelegte Trägheitsellipsoid in einer Kurve, deren Gleichung Ähnlichkeit mit der Ellipsengleichung hat. Der andere, unbewegliche, Kegel ist transzendenter Natur; er hat eine etwa nach Fig. 191 geformte Leitlinie (vgl. Budde, Allgemeine Mechanik, S. 833).

Fig. 191.



Ist das Trägheitsellipsoid ein Umdrehungsellipsoid, so werden die aufeinander rollenden Kegel beide zu Kreiskegeln.

Ist das Trägheitsellipsoid eine Kugel, so daß jede durch A gelegte Achse eine Hauptachse ist, so gehen die Kegel in eine einzige Gerade über; die Drehachse ändert dann ihre Richtung und ihre Winkelgeschwindigkeit ω gar nicht. Dieses letzte Ergebnis folgt auch schon aus 1. Teil, Aufl. 4, S. 339.

10. Bewegung eines freien Körpers.

Das vorstehend über die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt Mitgeteilte findet auch sinngemäße Anwendung auf die Bewegung eines freien Körpers. Vereinigt man nämlich die an einem starren Körper von der Masse M wirkenden äußeren Kräfte zu einer durch den Schwerpunkt S des Körpers gehenden Einzelkraft R und einem Achsenmoment \mathfrak{M} , so wird die Bewegung

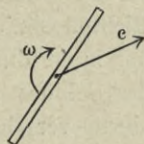
des Schwerpunktes S nach S. 192 nur durch die Kraft R beeinflusst; diese erteilt dem Körper eine Verschiebungsbeschleunigung

$$p = \frac{R}{M}$$

im Sinne der Kraft R . Außer der Verschiebung mit dem Schwerpunkte führt der Körper im allgemeinen noch eine Drehung um den Schwerpunkt aus, welche nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 346 unabhängig von der Verschiebung so behandelt werden kann, als wäre der Schwerpunkt ein fester Punkt und als drehe sich der Körper um ihn unter Einwirkung des Moments \mathfrak{M} . Für diese Drehung gilt daher das S. 256 bis S. 269 Gesagte. Erfolgt die Bewegung unter alleiniger Einwirkung der Schwere, so beschreibt der Schwerpunkt die bekannte (1. Teil, Aufl. 4, S. 52) Wurfparabel, und die Drehung um den Schwerpunkt erfolgt ohne Einwirkung von Momenten, also nach S. 269 und 270 (vgl. auch 1. Teil, Aufl. 4, S. 346).

Wirft man z. B. einen geraden Stab (eine materielle gerade Linie) mit der Hand derartig fort, daß der Stab außer der Geschwindigkeit c des Schwerpunktes noch eine Winkelgeschwindigkeit ω in einer durch die Mittellinie des Stabes gehenden Ebene, also um eine rechtwinklig zu dieser Mittellinie stehende Achse, bekommt (Fig. 192), so wird, wenn man vom Luftwiderstand absieht, die Geschwindigkeit c die parabolische Wurfbewegung des Schwerpunktes bedingen, die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω daneben aber unverändert erhalten bleiben. Steht die Achse der Winkelgeschwindigkeit ω aber schief gegen den Stab, so wird die Drehung um den Schwerpunkt eine veränderliche, wirbelnde Bewegung sein.

Fig. 192.



11. Schwingungen eines Schiffes.

Die lotrecht auf und niedergehende Bewegung, das sog. Tauchen oder Steigen eines Schiffes wurde bereits S. 77/78 behandelt. Die Dauer einer einfachen Schwingung dieser Art ergab sich zu

$$1) \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{V}{F \cdot g}},$$

entsprechend der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels von der Länge

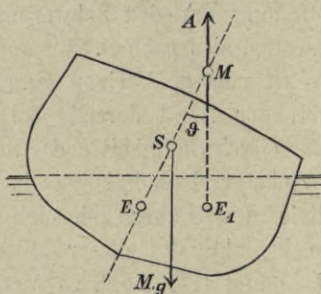
$$2) \quad l = \frac{V}{F} = t_1^2 \frac{g}{\pi^2} = 0,994 t_1^2,$$

wenn V den Inhalt des eingetauchten Raumes im Gleichgewichtszustand, F den Inhalt der wagerechten Schwimmfläche bedeuten.

Von besonderer Wichtigkeit ist das Rollen des Schiffes, worunter man eine Drehung um die zum Kiele parallele Schwerpunktsachse (Längsachse) versteht.

Ein aufrecht (gerade) schwimmendes Schiff werde durch vorübergehende Einwirkung eines Kräftepaares derartig in eine schräge Lage gebracht, daß die Querschnitte in ihrer ursprünglichen Ebene verbleiben, und stehe dann wieder unter alleiniger Wirkung des Gewichtes Mg und des ebenso großen Auftriebes $A = \gamma \cdot V = Mg$, worin γ das Gewicht einer Raumeinheit des Wassers. Das Schiff sei von solcher Gestalt, daß auch die Richtungslinie des Auftriebes sich nur in der durch den Schwerpunkt S des Schiffes gelegten Querschnittsebene verschoben hat. Dann fällt die durch den Schwerpunkt S gelegte Achse des wirkenden Kräftepaares (Mg und A) mit der Längsachse des Schiffes zusammen, welche annähernd als eine freie Achse angesehen werden möge.

Fig. 193.



Die Entfernung aus der Gleichgewichtslage werde als nur gering, der Neigungswinkel ϑ (Fig. 193) als klein vorausgesetzt, dann schneidet nach 2. Teil, Aufl. 3, S. 201 der Auftrieb des Schiffes die Schwimmachse ES desselben in einem festen Punkte, dem Metazentrum M , welches vom Schwerpunkt S um die metazentrische Höhe SM entfernt ist. Liegt der Schwerpunkt E des eingetauchten Raumes oder der Verdrängung V bei aufrechter Lage des Schiffes um

$$ES = e$$

unterhalb des Schwerpunktes S des Schiffes, so ist (2. Teil, Aufl. 3, S. 201, Gl. 5 und 6)

$$3) \quad SM = \frac{3}{V} - e$$

und das aufrichtende Moment

$$4) \quad \mathfrak{M} = \gamma \cdot V \left(\frac{\mathfrak{J}}{V} - e \right) \vartheta,$$

worin \mathfrak{J} das Trägheitsmoment der Schwimmfläche (Fig. 194), in bezug auf ihre Längsachse OX bedeutet. Bei der Rückkehr in die Gleichgewichtslage verkleinert sich der Winkel ϑ , es ist daher die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung

$$\omega = - \frac{d\vartheta}{dt},$$

die Winkelbeschleunigung

$$\varepsilon = - \frac{d^2\vartheta}{dt^2}.$$

Bezeichnet man nun mit J das Trägheitsmoment des Schiffes in bezug auf die Längsachse S , so ist (1. Teil, Aufl. 4, S. 325)

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = - \frac{\mathfrak{M}}{J} = - \frac{\gamma \cdot V}{J} \left(\frac{\mathfrak{J}}{V} - e \right) \vartheta, \quad \text{oder}$$

$$5) \quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -k^2 \cdot \vartheta,$$

wenn man zur Abkürzung

$$6) \quad k^2 = \gamma \frac{\mathfrak{J} - e \cdot V}{J}$$

setzt. Nach S. 113/14 hat Gl. 5 die allgemeine Lösung

$$\vartheta = A \sin kt + B \cos kt.$$

Eine Zunahme von kt um 2π führt das Schiff in den vorhergehenden Zustand zurück, daher entspricht die Zeit $\frac{2\pi}{k}$ einer Doppelschwingung; die Dauer einer einfachen Schwingung ist also

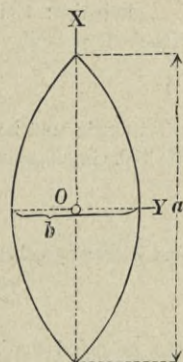
$$7) \quad t_1 = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{J}{\gamma(\mathfrak{J} - e \cdot V)}},$$

und dies entspricht einer Schwingungslänge, die sich analog Gl. 2 ergibt zu

$$8) \quad l_1 = \frac{J \cdot g}{\gamma(\mathfrak{J} - e \cdot V)} = \frac{J}{M \cdot SM} = \frac{i^2}{SM},$$

wenn i der Trägheitshalbmesser.

Fig. 194.



Eine Schwingung um die Querachse des Schiffes wird das Stampfen genannt. Für die Dauer desselben gilt

$$9) \quad t_2 = \pi \sqrt{\frac{J_2}{\gamma(\mathfrak{S}_2 - e \cdot V)}},$$

wenn J_2 das Trägheitsmoment des Schiffes in bezug auf die Querachse, \mathfrak{S}_2 das Trägheitsmoment der Schwimmfläche in bezug auf die Querachse bezeichnen.

Beispiel: Ein Schiff von $a = 120$ m Länge, $b = 12$ m Breite, $e = 8,5$ m Höhe wiegt 5845 t, dann ist im Seewasser ($\gamma = 1025$ kg)

$$V = \frac{5845}{1,025} = 5702 \text{ cbm.}$$

Die Schwimmfläche betrage $F' = 0,82 a \cdot b = 0,82 \cdot 120 \cdot 12 = 1181$ qm, dann ist die Schwingungslänge des Tauchens (Gl. 2)

$$l = \frac{V}{F'} = \frac{5702}{1181} = 4,83 \text{ m}$$

und die entsprechende Dauer einer einfachen Schwingung (1. Teil, Aufl. 4, S. 83)

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 1,003 \sqrt{l} = 2,2 \text{ s.}$$

Das geometrische Trägheitsmoment \mathfrak{S} der Schwimmfläche wird auf das Trägheitsmoment des umschließenden Rechtecks ($a \cdot b$) zurückgeführt und möge wegen der Zuschärfung 60% desselben betragen; dann ist

$$\mathfrak{S} = 0,68 \cdot \frac{a b^3}{12} = \frac{0,68 \cdot 120 \cdot 12^3}{12} = 11750 \text{ m}^4.$$

Die Höhe des Schiffsschwerpunktes S über dem Schwerpunkt E der Verdrängung betrage $e = 1,46$ m, dann wird die metazentrische Höhe

$$\frac{SM}{V} - e = \frac{11750}{5702} - 1,46 = 0,6 \text{ m.}$$

Für das Trägheitsmoment J des beladenen Schiffes gibt es keine Annäherungsformeln; vielmehr muß man zu dessen unmittelbarer Bestimmung die Masse eines jeden Teiles des Schiffes mit dem Quadrate seines Abstandes von der Schwerpunktsachse multiplizieren und diese Produkte summieren. Gewöhnlich unterläßt man diese mühsame Rechnung, beobachtet vielmehr die Schwingungsdauer t_1 , berechnet daraus die Schwingungslänge l_1 und schließlich nach Gl. 8 das Trägheitsmoment J .

Das vorliegende Schiff gebrauche zu einer einfachen Rollschwingung $t_1 = 8$ s.; dem entspricht eine Schwingungslänge

$$l_1 = \frac{t_1^2}{1,003^2} = \frac{64}{1,003^2} = 63,62 \text{ m.}$$

Hiermit wird nach Gl. 8

$$i^2 = l_1 \cdot \frac{SM}{V} = 63,62 \cdot 0,6 = 38,17 \quad \text{und} \quad i = 6,18 \text{ m.} \quad \text{Schließlich}$$

$$J = M i^2 = \frac{5845 \cdot 1000}{g} \cdot 38,17 = 22743000.$$

12. Drehungspendel.

Ein elastischer, prismatischer Stab oder Draht sei an seinem oberen Ende fest eingespannt, auch gegen Drehung gesichert; an seinem unteren Ende sei ein Körper von solcher Massenverteilung befestigt, daß die lotrechte Mittellinie des Stabes eine freie Achse des Körpers bilde (Fig. 195). Zu Anfang befinde sich das Ganze im Gleichgewichte. Wird nun der untere Körper um die lotrechte Achse gedreht, so entstehen in dem mitverdrehen Stabe Schubspannungen, die innerhalb der Elastizitätsgrenze mit dem Drehungswinkel verhältnismäßig sich ändern. Wird der Körper sodann losgelassen, so erteilt das Spannungsmoment des Stabes dem Körper eine Winkelbeschleunigung, welche demnach verhältnismäßig ist der Winkelabweichung von der Gleichgewichtslage. Wird die Winkelabweichung für einen beliebigen Zeitpunkt mit ϑ bezeichnet, so ist, weil die Bewegung eine rückläufige, die Winkelgeschwindigkeit $\omega = -\frac{d\vartheta}{dt}$, die Winkelbeschleunigung

$$1) \quad \varepsilon = -\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{\mathfrak{M}}{J},$$

wenn \mathfrak{M} das mit ϑ verhältnismäßige Verdrehungs-, J das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die lotrechte Achse bezeichnen. Die einfache Gl. 1 für ε ist hier verwendbar, weil nur Winkelbeschleunigungen und Drehungen um eine freie Achse in Frage kommen, so daß (nach Teil I, Aufl. 4, S. 338) die Bewegung wie eine Drehung um eine feste lotrechte Achse geschehen muß.

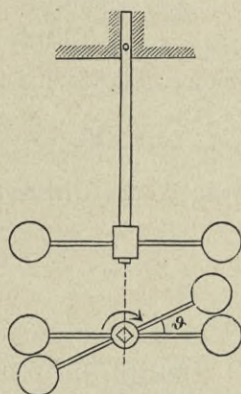
Für Gl. 1 kann man schreiben:

$$2) \quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -k^2 \cdot \vartheta; \quad \text{dann bedeutet}$$

$$3) \quad k^2 = \frac{\mathfrak{M}}{J\vartheta}$$

die Winkelbeschleunigung für einen Verdrehungswinkel $\vartheta = 1 = 57,3^\circ$. Da Gl. 2 mit Gl. 5, S. 273 übereinstimmt, so ist sie die Differential-

Fig. 195.



gleichung einer Schwingungsbewegung um die Gleichgewichtslage als Mitte, und die Dauer einer einfachen Schwingung ist nach Gl. 7, S. 273

$$4) \quad t_1 = \frac{\pi}{k}.$$

Hat der Stab oder Draht den Halbmesser r und die freie Länge h , so ist bei einer stärksten Schubspannung τ nach Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, I. Teil, Aufl. 2, S. 291

$$\mathfrak{M} = \tau \cdot \frac{r^3 \pi}{2} \quad \text{und zugleich} \quad \tau = \frac{G \cdot r \cdot \vartheta}{h},$$

wenn G das Gleitmaß des Stoffes, also

$$\mathfrak{M} = G \frac{r^4 \pi}{2h} \vartheta \quad \text{und nach Gl. 3}$$

$$5) \quad k^2 = G \frac{r^4 \pi}{2h \cdot J}.$$

Beispiel: Der Draht habe $r = 0,1$ cm Halbmesser und $h = 100$ cm Länge. Am unteren Ende sei ein Schwungring von 2 kg Gewicht und 30 cm mittlerem Halbmesser befestigt. Dann ist, weil bei der Rechnung mit Zentimetern $g = 981$ gesetzt werden muß, $J = \frac{2 \cdot 30^2}{981}$ und mit $G = 800\,000$ at,

$$k^2 = \frac{800\,000 \cdot 0,1^4 \pi \cdot 981}{2 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 30^2} = 0,685;$$

$$k = 0,828; \quad t_1 = \frac{\pi}{0,828} = 3,8 \text{ s.}$$

Kennt man Stärke und Gleitmaß des Drahtes nicht genau genug, so kann k^2 auch durch einen Verdrehungsversuch ermittelt werden. Ist R der Halbmesser des Schwungringes und setzt man $J = \mu R^2$, so ist $\mu \cdot g$ annähernd das Gewicht des Ringes. Bringt man nun mit Hilfe zweier Rollen und zweier Gewichtsstücke $= \frac{1}{2} \mu g$ an dem Ringe zwei wagerechte Kräfte $= \frac{1}{2} \mu g$ so an, daß sie auf die lotrechte Achse ein Kräftepaar vom Momente

$$\frac{1}{2} \mu g \cdot 2R = \mu g \cdot R$$

übertragen, so wird nach Gl. 3

$$6) \quad k^2 = \frac{\mu g \cdot R}{\mu \cdot R^2 \vartheta} = \frac{g}{R \vartheta}.$$

Mißt man sodann an dem Ringe die durch das Kräftepaar erzeugte Verdrehung $R \vartheta = s$ im Abstände R von der Mitte, so ist

$$7) \quad k^2 = \frac{g}{s} \quad \text{und} \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{s}{g}},$$

d. h. gleich der Dauer einer kleinen Schwingung eines Pendels von der Schwingungslänge s .

Die Gleichungen 1—4, 6 und 7 gelten auch für die Schwingungen der sog. Unruhe einer Uhr. Die mit der Achse des Schwungrädchens verbundene Spiralfeder setzt der Verdrehung des Rades aus der Gleichgewichtslage ein Spannungsmoment entgegen, welches sich mit dem Verdrehungswinkel annähernd verhältnismäßig ändert.

Die Spiralfeder (Fig. 196) sei am äußeren Ende bei B eingespannt; in der Mitte, wo sich die Drehachse des Schwungrädchens befindet, werde auf das innere Ende der Feder eine in X und Y zerlegte Einzelkraft und ein Kräftepaar \mathfrak{M}_0 übertragen. Dann ist an einem Punkte P mit den Koordinaten x und y das Biegemoment

$$8) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 - Xy + Yx.$$

Wird das Schwungrädchen aus der dem spannungslosen Zustande der Feder entsprechenden Lage um den Winkel ϑ gedreht, wobei es auf die Feder das Moment \mathfrak{M}_0 und die Kräfte X und Y ausübt, so ist ϑ der gesamte Verbiegungswinkel der Feder von der Mitte bis zum Endpunkte B . Für diesen gilt nach Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, II. Teil, Aufl. 2, S. 53, Gl. 6a:

$$9) \quad EJ_1 \vartheta = \int_0^a \mathfrak{M} \cdot ds = \mathfrak{M}_0 a - X \int_0^a y \cdot ds + Y \int_0^a x \cdot ds,$$

wenn a die Gesamtlänge der Feder bezeichnet. Da nun der Schwerpunkt der ganzen Spirale von der Länge a bei vielen Windungen derselben nahezu im Anfangspunkte der Koordinaten liegt, so sind

$$\int_0^a y \cdot ds \quad \text{und} \quad \int_0^a x \cdot ds$$

annähernd Null, und es ist

$$10) \quad \mathfrak{M}_0 = \frac{EJ_1}{a} \vartheta,$$

wenn J_1 das Trägheitsmoment des Querschnittes der Feder bedeutet. Somit wird

$$11) \quad k^2 = \frac{EJ_1}{aJ} \quad (\text{Gl. 3})$$

an Stelle von Gl. 5 treten, wobei J das Trägheitsmoment der Unruhe bedeutet, und die entsprechende Pendellänge

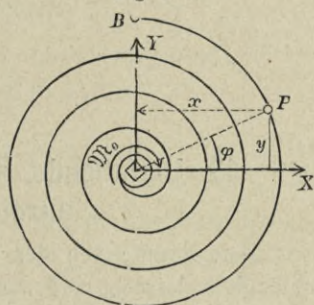
$$12) \quad l = \frac{g}{k^2} = g \frac{J}{EJ_1} a$$

ist mit der Federlänge a verhältnismäßig.

Es sei der Querschnitt der Feder $0,5 \cdot 0,04 \text{ mm}$, das Trägheitsmoment also

$$J_1 = \frac{0,5 \cdot 0,04^3}{12} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-6} \text{ mm}^4,$$

Fig. 196.



die Länge der Feder $a = 200$ mm; das Gewicht des Schwungrädchens $\mu g = 0,00025$ kg, sein Halbmesser 8 mm, sein Trägheitsmoment, bezogen auf Kilogramm und Millimeter, $J = \frac{0,016}{g}$, $E = 25000$ kg/qmm, somit

$$l = \frac{0,016 \cdot 200}{25000 \cdot \frac{8}{3} 10^{-6}} = 48 \text{ mm}$$

und die Dauer einer einfachen Schwingung

$$t_1 = 1,003 \sqrt{0,048} = 0,22 \text{ Sekunden.}$$

13. Umfallende, auf dem Boden reibungslos ausgleitende Stange.

Eine Stange von der Länge a und dem Gewichte $M \cdot g$, die anfänglich lotrecht auf wagerechtem Boden stand (Fig. 197), falle nach rechts um; dann wird, wenn das untere Ende A der Stange nicht festgehalten ist, auch an demselben keine Reibung auftritt, der Boden nur einen lotrechten Normalwiderstand N auf die Stange übertragen. Der im Abstand e vom unteren Ende befindliche

Fig. 197.

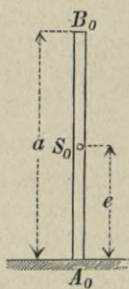


Fig. 198.

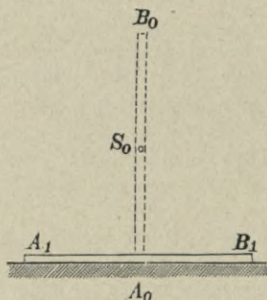
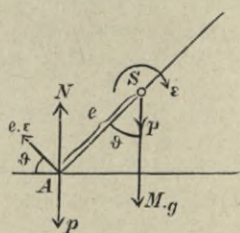


Fig. 199.



Schwerpunkt S der Stange wird sich, weil nur lotrechte Kräfte wirken, lotrecht abwärts bewegen, so daß, wenn die Stange auf dem Boden anlangt (Fig. 198), das untere Ende um $A_0 A_1 = e$ nach links gegliitten sein wird. Es sollen die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten in beliebiger Zwischenlage und beim Aufschlagen berechnet werden.

In der beliebigen Zwischenlage (Fig 199), wo die Mittellinie der Stange mit der Lotrechten den Winkel ϑ bildet, sei p die

lotrecht gerichtete Beschleunigung des Schwerpunktes, ε die Winkelbeschleunigung um die rechtwinklig zur Bildebene gedachte Schwerpunktsachse, welche als freie Achse angenommen wird. Dann ist nach dem Satze von der Beschleunigung des Schwerpunktes

$$1) \quad p = \frac{Mg - N}{M} \quad \text{und}$$

$$2) \quad \varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J} = \frac{N \cdot e \cdot \sin \vartheta}{J} \quad (\text{s. S. 249, Gl. 1}),$$

wenn $J = M \cdot i^2$ das Trägheitsmoment in bezug auf die bezeichnete Schwerpunktsachse bedeutet.

Das untere Ende der Stange hat die lotrechte Beschleunigung p , die Umfangsbeschleunigung $e \cdot \varepsilon$. Da seine Gesamtbeschleunigung aber nur wagerecht sein kann, so muß p durch $e \cdot \varepsilon \sin \vartheta$ aufgehoben werden, mithin

$$3) \quad \varepsilon = \frac{p}{e \cdot \sin \vartheta}$$

sein. Aus Gl. 2 und 3 ergibt sich

$$N = \frac{p \cdot J}{e^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Hiermit bestimmt sich aus Gl. 1:

$$4) \quad p = \frac{g}{1 + \frac{i^2}{e^2 \cdot \sin^2 \vartheta}},$$

$$5) \quad \text{ferner} \quad \varepsilon = \frac{g}{e \cdot \sin \vartheta + \frac{i^2}{e \cdot \sin \vartheta}} \quad \text{und}$$

$$6) \quad N = \frac{Mg}{1 + \frac{i^2}{e^2 \sin^2 \vartheta}}.$$

Aus diesen Gleichungen kann man die Beschleunigung jedes Punktes der Stange berechnen; diejenige des unteren Endes beträgt nach Fig. 199: $e \cdot \varepsilon \cdot \cos \vartheta$.

Die Geschwindigkeiten lassen sich am einfachsten nach dem Satze der Arbeit berechnen. In der beliebigen Zwischenlage (Fig. 200) sei u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes (lotrecht

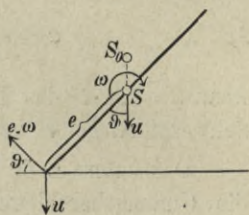
gerichtet), ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um den Schwerpunkt. Dann ist das Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$ nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 345. Die Arbeit der Schwerkraft ist $Mg \cdot \overline{SS_0}$; es wird daher, weil $\overline{SS_0} = e(1 - \cos \vartheta)$, wenn man zugleich noch $J = M \cdot i^2$ setzt,

$$\frac{M u^2}{2} + \frac{M \cdot i^2}{2} \omega^2 = Mg \cdot e(1 - \cos \vartheta), \quad \text{Fig. 200.}$$

oder weil, entsprechend Gl. 3, $\omega = \frac{u}{e \cdot \sin \vartheta}$ ist,

$$7) \quad u^2 = \frac{2g \cdot e(1 - \cos \vartheta)}{1 + \frac{i^2}{e^2 \cdot \sin^2 \vartheta}} \quad \text{und}$$

$$8) \quad \omega^2 = \frac{2g \cdot e(1 - \cos \vartheta)}{e^2 \cdot \sin^2 \vartheta + i^2}.$$



Für die Geschwindigkeit w des unteren Endes gilt $w = e \cdot \omega \cos \vartheta$, also

$$9) \quad w^2 = \frac{2g \cdot e(1 - \cos \vartheta)}{tg^2 \vartheta + \frac{i^2}{e^2 \cos^2 \vartheta}}.$$

Für die Anfangsstellung, d. h. $\vartheta = 0$, $\sin \vartheta = 0$, $\cos \vartheta = 1$, geben diese Gleichungen selbstverständlich

$$p = 0; \quad \varepsilon = 0; \quad N = Mg; \quad u = 0; \quad \omega = 0; \quad w = 0.$$

Für die Endlage, d. h. $\vartheta = 90^\circ$, $\sin \vartheta = 1$, $\cos \vartheta = 0$, wird

$$p = \frac{g}{1 + \frac{i^2}{e^2}}; \quad \varepsilon = \frac{g}{e + \frac{i^2}{e}}; \quad N = \frac{Mg}{1 + \frac{i^2}{e^2}}; \quad u^2 = \frac{2g \cdot e}{1 + \frac{i^2}{e^2}};$$

$$\omega^2 = \frac{2g \cdot e}{e^2 + i^2}; \quad w^2 = 0;$$

und, wenn v die Geschwindigkeit des anderen Endes,

$$v = u + (a - e) \omega, \quad \text{also}$$

$$v = a \sqrt{\frac{2g \cdot e}{e^2 + i^2}},$$

d. h. $v = a \cdot \omega$, wie es wegen $w = 0$ auch sein muß.

Da in der Endlage $w = 0$ ist, so stimmt beim Aufschlagen der Stange ihr Geschwindigkeitszustand mit dem einer unten drehbar befestigten (S. 254) überein, nicht aber der Beschleunigungs- und

Kräftezustand. Bei der Vergleichung dieser Formeln mit denen auf S. 254–256 ist zu bedenken, daß i^2 , bezogen auf den unteren Endpunkt (S. 254), gleichbedeutend ist mit $i^2 + e^2$ in den Formeln der S. 278–280.

Für eine materielle Gerade, d. h. einen Stab mit gleichmäßig über seine Länge verteilter Masse, also $e = 1/2 a$; $i^2 = 1/12 a^2$;

$\frac{i^2}{e_1} = \frac{1}{3}$ wird in der Endlage

$$p = \frac{3}{4} g; \quad \varepsilon = \frac{3}{2} \frac{g}{a}; \quad N = \frac{1}{4} M g; \quad w^2 = \frac{3}{4} g \cdot a; \quad \omega^2 = \frac{3g}{a};$$

$$w^2 = 0; \quad v^2 = 3g \cdot a.$$

Hieraus folgt, wie es wegen $w = 0$ sein muß, $v = 2u$.

14. Rollbewegung auf schiefer Ebene.

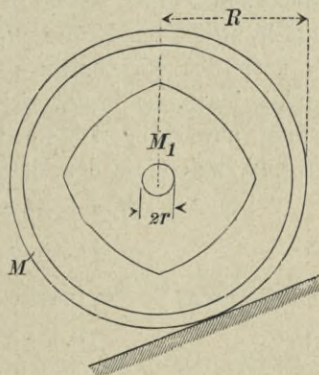
Auf einer schiefen Ebene von der Neigung α rolle ein Umdrehungskörper von der Masse M (Fig. 201), dem Rollkreishalbmesser R und einem auf die Drehachse bezogenen Trägheitsmoment $J = \mu R^2$; er trage mittels einer Achse vom Durchmesser $d = 2r$ einen Körper von der Masse M_1 und dem auf dieselbe Achse bezogenen Trägheitsmoment $J_1 = \mu_1 R^2$. Die Drehachse sei für beide Massen M und M_1 eine freie Achse. An der Tragachse der Masse M_1 möge Reibung auftreten.

Zu Anfang seien beide Massen in Ruhe. Auf schiefer Ebene erfährt nun die Masse M eine abwärts gerichtete beschleunigte Rollbewegung. Die Beschleunigung des Schwerpunktes sei p , dann muß die Winkelbeschleunigung der Drehung um die Achse (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 349) betragen

$$\varepsilon = \frac{p}{R}.$$

Die Masse M_1 muß nun die Verschiebung mit der Beschleunigung p vollständig mitmachen; eine Drehbeschleunigung ε_1 wird ihr nur durch das Moment der Zapfenreibung mitgeteilt, und

Fig. 201.



zwar tritt dieses Reibungsmoment in verschiedener Größe auf, je nachdem die Winkelgeschwindigkeit ω_1 der Masse M_1 kleiner ist als diejenige der Masse M , oder den gleichen Wert hat. Im ersteren Falle kommt die volle Zapfenreibung zur Wirkung, im anderen Falle nur ein Teil derselben. Da nun beide Massen zu Anfang die Geschwindigkeit Null hatten und gleichförmig beschleunigte Bewegungen ausführen, so ist das Verhältnis von ω_1 zu ω gleich mit demjenigen von ε_1 zu ε .

Erster Fall, geringe Zapfenreibung: Die Zapfenreibung sei so gering, daß sie nicht imstande ist, der Masse M_1 dieselbe Winkelbeschleunigung ε zu erteilen, welche die Masse M erleidet. Dann tritt an den Zapfen ein Gleiten auf, und somit ein volles Reibungsmoment $D \cdot f \cdot r$, worin D der Zapfendruck, f die Reibungsziffer.

Der Zapfendruck D stimmt mit dem Gewicht $M_1 g$ nach Größe und Richtung nicht ganz überein. Seine Richtung weiche von der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene um den Winkel β ab (s. 1. Teil, Aufl. 4, S. 352). Zerlegt man die auf M_1 wirkenden Kräfte $M_1 g$ und D nach den Richtungen parallel zur schiefen Ebene und rechtwinklig dazu, so ergibt sich (Fig. 202) in ersterer Richtung eine schräg abwärts gerichtete Gesamtkraft $M_1 g \sin \alpha - D \sin \beta$, und es muß, weil diese der Masse M_1 die Beschleunigung p erteilt,

$$M_1 p = M_1 g \sin \alpha - D \sin \beta, \quad \text{oder}$$

$$1) \quad D \cdot \sin \beta = M_1 g \sin \alpha - M_1 p$$

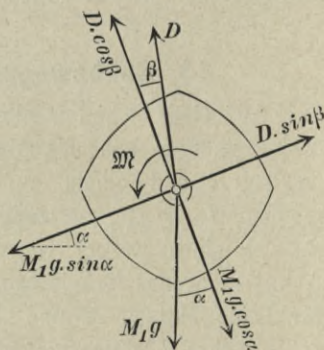
sein, während in der zweiten Richtung

$$2) \quad D \cdot \cos \beta = M_1 g \cos \alpha \quad \text{wird.}$$

Das in Fig. 202 links herum drehende Reibungsmoment $\mathfrak{M} = D \cdot f \cdot r$ erteilt der Masse M_1 eine Winkelbeschleunigung

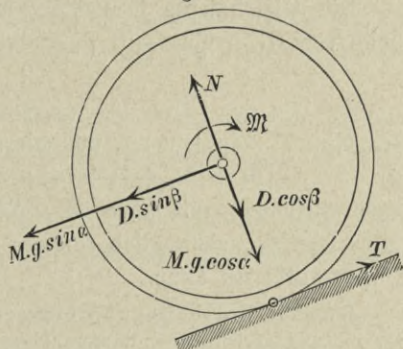
$$3) \quad \varepsilon_1 = \frac{D \cdot f \cdot r}{J_1} = \frac{D \cdot f \cdot r}{\mu_1 R^2}.$$

Fig. 202.



An der rollenden Masse M wirken die Schwere Mg , der Zapfendruck D , das Zapfenreibungsmoment \mathfrak{M} im Sinne rechts herum und die an der Rollbahn auftretende Normal- und Tangentialkraft N und T ; Fig. 203 zeigt diese Kräfte nach zweckmäßiger Zerlegung.

Fig. 203.



Dann gilt für die Beschleunigung des Schwerpunktes

$$Mp = Mg \cdot \sin \alpha + D \cdot \sin \beta - T,$$

oder wegen Gl. 1:

$$4) \quad Mp = Mg \cdot \sin \alpha + M_1 g \cdot \sin \alpha - M_1 p - T.$$

Da nun bei der Rollbewegung die Umfangsbeschleunigung der Drehung $\varepsilon \cdot R$ gleich der Beschleunigung p des Schwerpunktes sein muß, so wird (vgl. 1. Teil, Aufl. 4, S. 352)

$$5) \quad \mu \cdot p = T - \frac{D \cdot f \cdot r}{R}.$$

Setzt man den hieraus folgenden Wert von T in obige Gleichung ein, so entsteht

$$6) \quad (M + M_1 + \mu) p = (M + M_1) g \cdot \sin \alpha - D f \frac{r}{R},$$

worin mit genügender Annäherung $D = M_1 g$ gesetzt werden kann. Diese Gleichung gilt, so lange an der Achse ein Gleiten stattfindet, so lange also $\varepsilon > \varepsilon_1$, oder $p R > R^2 \varepsilon$, d. h.

$$7) \quad \frac{(M + M_1) g \cdot \sin \alpha \cdot R - M_1 g \cdot f \cdot r}{M + M_1 + \mu} > \frac{M_1 g \cdot f \cdot r}{\mu_1}$$

ist. — Für reibungslose Lagerung ($f = 0$) ist Bedingung 7 erfüllt, daher Gleichung 6 gültig, mit $f = 0$.

Zweiter Fall; größere Zapfenreibung, die das Gleiten an dem Zapfen verhindert. Ist die Bedingung 7 nicht erfüllt, ist vielmehr die Zapfenreibung genügend groß, um die Masse M_1 vollständig an der Drehung von M teilnehmen zu lassen, so wird $\varepsilon = \varepsilon_1$, und es tritt das Reibungsmoment \mathfrak{M} nur in derjenigen

Größe auf, welche nötig ist, der Masse M_1 die Winkelbeschleunigung $\varepsilon_1 = \varepsilon$ zu erteilen, d. h., da wieder $\varepsilon \cdot R = p$,

$$8) \quad \mathfrak{M} = \varepsilon \cdot J_1 = \varepsilon \cdot \mu_1 \cdot R^2 = p \cdot \mu_1 R.$$

Die Gleichungen 1 und 2 bleiben gültig, ebenso Gl. 4; an Stelle von Gl. 5 aber tritt die folgende:

$$\mu \cdot p = T - \frac{\mathfrak{M}}{R} = T - \mu_1 \cdot p;$$

dies gibt $T = (\mu + \mu_1) p$, und hiermit wird aus Gl. 4:

$$9) \quad (M + M_1 + \mu + \mu_1) p = (M + M_1) g \cdot \sin \alpha.$$

Diese Gleichung gilt auch für solche Fälle, in denen M und M_1 gegeneinander unbeweglich sind, so daß man sie wie einen einzigen Körper auffassen kann.

Beispiel: Rollbewegung eines mit Wasser gefüllten Gefäßes. Der rollende Körper sei ein dünnwandiges zylindrisches Gefäß von der Masse M und der auf den Umfang bezogenen Masse μ ; er sei mit Wasser gefüllt von der Masse M_1 und der auf den Umfang bezogenen Masse μ_1 . Betrachten wir das Wasser als vollkommen flüssig, d. h. ohne Fähigkeit, Reibungswiderstände auszuüben, so wird es beim Abwärtsrollen des Gefäßes nur an der Verschiebungsbeschleunigung p , nicht aber an der Drehung teilnehmen. Es gilt daher Gl. 6 mit $f = 0$, d. h.

$$10) \quad (M + M_1 + \mu) p = (M + M_1) g \cdot \sin \alpha.$$

Ist das Wasser aber durch radiale Wandungen an der relativen Drehung gegen das Gefäß verhindert, oder etwa zu Eis erstarrt und an dem Gefäße festgefroren, so muß es an der Drehung teilnehmen, und es gilt nun Gl. 9, welche für p einen kleineren Wert ergibt als Gl. 10.

Werden zwei im Äußeren übereinstimmende Gefäße der ersten und der zweiten Art auf eine schiefe Ebene nebeneinander gesetzt und losgelassen, so wird das erste Gefäß schneller laufen als das zweite.

Ist das Gefäß so dünnwandig, daß man seine Massen M und μ gegen die des Wassers M_1 und μ_1 vernachlässigen kann, so wird im ersten Falle

$$11) \quad p = g \sin \alpha,$$

im andern Falle mit $\mu_1 = \frac{1}{2} M_1$:

$$12) \quad p = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

Man würde daher durch einen Rollversuch feststellen können, ob die Wasserfüllung sich gegen das Gefäß frei drehen kann oder nicht.

15. Anhalten eines Eisenbahnzuges durch Bremsung.

Die beschleunigte oder verzögerte Bewegung der Fuhrwerke wurde schon im 1. Teile, Aufl. 4, S. 351, jedoch ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand, behandelt. Bei schnell fahrenden Eisen-

bahnzügen ist aber, wie schon im 1. Teile, Aufl. 4, S. 303, gesagt wurde, der Luftwiderstand so erheblich, daß er die übrigen Widerstände übersteigt. Daher soll an dieser Stelle der besonders wichtige Fall des Anhaltens eines Eisenbahnzuges mit Rücksicht auf den Luftwiderstand als Ergänzung des früher gegebenen behandelt werden.

Die Untersuchung bezieht sich auf einen einzelnen Wagen (Fig. 203), wie dieselbe dann auf einen ganzen Zug angewandt werden kann, soll im Beispiele gezeigt werden,

Wie schon im 1. Teile, Aufl. 4, S. 351, erläutert, müssen bei einem beschleunigten Fuhrwerke drei Massen voneinander unterschieden werden:

1. die Masse M der rollenden Teile, d. h. der Achsen und Räder;
2. die auf den Halbmesser R des Rollkreises bezogene Masse μ der rollenden Teile;
3. die Masse M_1 der übrigen Teile des Fuhrwerks, welche nur an der Verschiebung, nicht an der Drehung, teilnehmen.

Ist v die Geschwindigkeit des Zuges, F seine Querschnittsfläche, γ das Gewicht von 1^{cbm} Luft, so kann der Luftwiderstand nach 2. Teil, Aufl. 3, S. 370, Gl. 4

$$1) \quad W = \kappa \frac{\gamma}{g} F \cdot v^2,$$

worin κ eine Erfahrungsziffer ≤ 1 ist, gesetzt werden.

Unter Hinzufügung dieser Kraft W wird aus Gl. 10, 1. Teil, Aufl. 4, S. 352

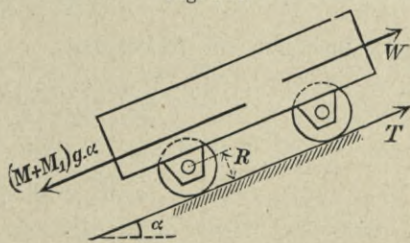
$$M p = M g \sin \alpha + M_1 g \sin \alpha - M_1 p - T - W,$$

wenn p die abwärts gerichtete Beschleunigung des Wagens bedeutet; oder, wenn man für schwache Gefälle $\sin \alpha$ mit α vertauscht (Fig. 204):

$$2) \quad (M + M_1) p = (M + M_1) g \cdot \alpha - T - W.$$

Für die Umfangsbeschleunigung p der Drehung der Räder ist die zwischen Rad und Schiene auftretende Reibung T die beschleunigende Kraft mit dem Momente $T \cdot R$. Als Widerstandsmomente wirken demselben entgegen: 1. das Zapfenreibungsmoment,

Fig. 204.



welches mit genügender Genauigkeit aus einem Zapfendrucke $M_1 g$ zu $M_1 g \cdot f \cdot r$ abgeleitet werden kann (wenn r der Zapfenhalbmesser); 2. das Moment des Rollwiderstandes, welches, ebenfalls annähernd, mit $(M + M_1) g \cdot e$ eingeführt werden darf (wenn e der Arm des Rollwiderstandes, s. 1. Teil, 4. Aufl., S. 294 u. flg.); 3. das Moment der Bremsreibung $P \cdot f_1 \cdot R$, wenn P die Summe der Bremsdrücke, f_1 die Reibungsziffer der Bremsklötze bedeuten. Hiernach wird

$$\mu \cdot p \cdot R = T \cdot R - M_1 g \cdot f \cdot r - (M + M_1) g \cdot e - P \cdot f_1 R$$

und somit $T = \mu p + M_1 g \cdot f \cdot \frac{r}{R} + (M + M_1) g \cdot \frac{e}{R} + P \cdot f_1$.

Nennt man aber α_0 das Gleichgewichtsgefälle für sehr langsame Bewegung ohne Wirkung von Zugkraft, Bremskraft und Luftwiderstand, so kann für die Summe vom Zapfenreibungs- und Rollwiderstand nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 353, abgekürzt gesetzt werden:

$$M_1 g \cdot f \cdot \frac{r}{R} + (M + M_1) g \cdot \frac{e}{R} = (M + M_1) g \cdot \alpha_0,$$

womit $T = \mu p + (M + M_1) g \cdot \alpha_0 + P \cdot f_1$

wird. Führt man dies in Gl. 2 ein, so entsteht

$$3) \quad p = \frac{(M + M_1) g (\alpha - \alpha_0) - P \cdot f_1 - \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot v^2}{M + M_1 + \mu}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$4) \quad \frac{(M + M_1) g (\alpha - \alpha_0) - P \cdot f_1}{M + M_1 + \mu} = -A,$$

$$5) \quad \frac{\gamma}{g} \frac{F}{M + M_1 + \mu} = B,$$

so wird $p = -A - B \cdot v^2 = -(A + B \cdot v^2)$, oder

$$6) \quad \frac{dv}{dt} = -(A + B \cdot v^2).$$

Hieraus folgt $dt = -\frac{dv}{A + B v^2} = -\frac{1}{A} \frac{dv}{1 + \frac{B}{A} \cdot v^2}$, oder

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{A \cdot B}} \frac{d\left(v \sqrt{\frac{B}{A}}\right)}{1 + \frac{B}{A} \cdot v^2}.$$

Somit ergibt sich durch Integration

$$t = -\frac{1}{\sqrt{A \cdot B}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} v \sqrt{\frac{B}{A}} + C.$$

War für $t=0$ die Geschwindigkeit $v=c$ und soll sie für $t=t_1$ zu Null geworden sein, so ist die zum Anhalten des Zuges erforderliche Zeit t_1 leicht bestimmt zu

$$7) \quad t_1 = \frac{1}{\sqrt{A \cdot B}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} c \sqrt{\frac{B}{A}}.$$

Um die zum Anhalten erforderliche Wegeslänge a zu erhalten, multipliziere man Gl. 6 mit

$$2v \cdot dt = 2 dx;$$

dann wird

$$\frac{2v \cdot dv}{A + B \cdot v^2} = -2 \cdot dx,$$

$$\frac{2B \cdot v \cdot dv}{A + B \cdot v^2} = -2B \cdot dx, \quad \text{also}$$

$$\ln(A + B \cdot v^2) = -2B \cdot x + C_1.$$

Mit $v=c$ für $x=0$ wird $C_1 = \ln(A + Bc^2)$, also

$$8) \quad \ln \frac{A + B \cdot c^2}{A + B \cdot v^2} = B \cdot x;$$

die Bremsstrecke $x=a$ folgt für $v=0$ zu

$$9) \quad a = \frac{1}{2B} \ln \left(1 + \frac{B}{A} c^2 \right), \quad \text{oder}$$

$$10) \quad a = \frac{2,3026}{2B} \log \left(1 + \frac{B}{A} c^2 \right).$$

Das Gleichgewichtsgefälle α_1 mit Rücksicht auf den Luftwiderstand ergibt sich für eine Geschwindigkeit c , indem man in Gl. 3 einführt:

$$p = 0 \quad \text{und} \quad P = 0.$$

Dann wird

$$11) \quad \alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\gamma}{g} \frac{\kappa F \cdot c^2}{(M + M_1)g},$$

Beispiel: Ein Schnellzug, bestehend aus Lokomotive, Tender, Gepäckwagen, Postwagen und fünf Personenwagen, fahre mit der Geschwindigkeit $c = 20 \text{ m/s.} = 72 \text{ km/h.}$; es soll die zum Anhalten erforderliche Bremszeit t_1 und Bremsstrecke a berechnet werden, u. zw. auf wagerechter Strecke ($\alpha=0$) und auf einem Gefälle $\alpha=1:200$.

Die Lokomotive wiege 42^t , der Tender 20^t , der übrige Zug 105^t , der ganze Zug also $(M + M_1)g = 167^t$. Das auf den Rollkreis bezogene Gewicht der Achsen und Räder, d. h. nahezu das Gewicht der sämtlichen Radreifen, betrage $\mu g = 14^t$. Die Summe aller Bremsdrücke sei etwa gleich dem halben Gewichte des Zuges, nämlich rund $P = 84^t$, die Reibungsziffer der Bremsklötze $f_1 = 1/7$. Dann wird nach Gl. 4:

$$A = \frac{84 \cdot 1/7 - 167 (\alpha - \alpha_0)}{167 + 14} \cdot 9,81,$$

oder, wenn man (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 302) $\alpha_0 = 0,0058$ annimmt,

$$12) \quad A = 0,715 - 9,05 \alpha.$$

Bei mittlerem Barometerstande und bei 0°C . wiegt 1 cbm Luft $1,29 \text{ kg}$, bei einer mittleren Temperatur von 10°C . daher (nach 2. Teil, Aufl. 3, S. 222)

$$\gamma = 1,29 \cdot \frac{273}{283} = 1,24 \text{ kg}.$$

Der Lufwiderstand ist nun aber bei einem längeren Zuge nicht allein von der Querschnittsfläche abhängig, sondern auch von der Länge des Zuges, weil mit letzterer der Reibungswiderstand der Luft wächst, der ebenfalls in W nach Gl. 1 enthalten sein muß. Nach Versuchen vom Geh. Reg.-Rat Alb. Frank (Hannover) liefert eine Lokomotive mit Tender zu F den Beitrag 7^{qm} , der dann folgende Gepäckwagen $1,7^{\text{qm}}$, jeder folgende Post- und Personenwagen $0,5^{\text{qm}}$. Also ist hier zu schreiben:

$$F = 7 + 1,7 + 6 \cdot 0,5 = 11,7^{\text{qm}}.$$

Hiermit wird nach Gl. 5:

$$13) \quad B = 1,24 \cdot \frac{11,7}{181000} = 0,0000802.$$

Die zum Anhalten auf wagerechter Bahn erforderliche Zeit wird nach Gl. 7:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{0,715 \cdot 0,0000802}} \arctg 20 \sqrt{\frac{0,0000802}{0,715}},$$

$$14) \quad t_1 = 132,5 \cdot \arctg 0,2183 = 132,5 \cdot \arct(12^\circ 19') = 132,5 \cdot 0,215 = 28,5 \text{ sek.}$$

Die Bremsstrecke aber wird nach Gl. 9:

$$15) \quad a = \frac{2,3026}{2 \cdot 0,0000802} \log \left(1 + \frac{0,0000802}{0,715} \cdot 20^2 \right) = 262,5 \text{ m.}$$

Für $\alpha = 1/200 = 0,005$ ist nach Gl. 11

$$A = 0,715 - 0,045 = 0,670,$$

$$B \text{ wie vorstehend} = 0,0000802, \text{ somit}$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{0,670 \cdot 0,0000802}} \arctg 20 \sqrt{\frac{0,0000802}{0,670}}$$

$$t_1 = 30,4 \text{ sek.}$$

$$17) \quad a = \frac{2,3026}{0,0001604} \log \left(1 + \frac{0,0000802 \cdot 400}{0,670} \right) = 292,5 \text{ m.}$$

Das Gleichgewichtsgefälle für diesen Zug mit $c = 20$ ist nach Gl. 11 mit $x = 1$

$$\alpha_1 = 0,0058 + \frac{1,24}{9,81} \frac{11,7 \cdot 400}{167000},$$

$$18) \quad \alpha_1 = 0,0058 + 0,0035 = 0,0093 = \frac{1}{108}.$$

Will man Bremszeit t_1 und Bremsstrecke a unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes berechnen, so hat man B mit Null zu vertauschen. Hiermit nehmen nun die Gleichungen 7 und 9 die scheinbar unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Man kann diese Unbestimmtheit in bekannter Weise durch Differentiation beseitigen, kann aber auch durch einfache Überlegung das Ergebnis finden. In Gl. 7 wird nämlich bei sehr kleinem B auch der Unterschied zwischen dem Bogen und seiner Tangente sehr klein, so daß man dann (wie S. 97)

$$\text{arc tg } c \sqrt{\frac{B}{A}} = c \sqrt{\frac{B}{A}}$$

setzen kann; hiermit verwandelt sich Gl. 7 in das einfache

$$19) \quad t_1 = \frac{c}{A}.$$

In Gl. 7 kann, weil bei kleinem x $\ln(1+x) = x$ wird, bei kleinem B

$$\ln\left(1 + \frac{B}{A} c^2\right) = \frac{B}{A} c^2$$

gesetzt werden, womit dann Gl. 9 die einfache Form

$$20) \quad a = \frac{c^2}{2A} \text{ annimmt.}$$

Da übrigens für $B = 0$ die Verzögerung nach Gl. 6 einfach $= A$ wird, so folgt $t_1 = \frac{c}{A}$ auch einfach aus dem Begriffe der Verzögerung und

$$a = \frac{c t_1}{2} = \frac{c^2}{2A}$$

aus der Grundeigenschaft der gleichförmig veränderten Bewegung.

Für wagerechte Bahn mit $A = 0,715$ (Gl. 12) und $c = 20 \text{ m/s}$, wird

$$t_1 = \frac{20}{0,715} = 28 \text{ s.}; \quad a = 280 \text{ m.}$$

Für $\alpha = 1/200$ mit $A = 0,670$ wird

$$t_1 = \frac{20}{0,670} = 30 \text{ s.}; \quad a = 300 \text{ m.}$$

Diese Zahlen weichen von den mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes erhaltenen nur so wenig ab, daß es zulässig ist, bei der Berechnung der Bremswirkung den Luftwiderstand zu vernachlässigen. Beim Bremsen genügt schon eine geringe Vermehrung des Bremsdruckes P oder der Reibungsziffer f_1 , welche beide niemals ganz scharf zu bestimmen sind, um die Vernachlässigung des Luftwiderstandes auszugleichen.

Für die Ermittlung der erforderlichen Zugkraft hat der Luftwiderstand bei großer Geschwindigkeit dagegen erheblichen Einfluß, insofern nach Gl. 18

bei dem angenommenen Zuge das Gleichgewichtsgefälle α_1 , welches gleichbedeutend ist mit dem Verhältnisse der auf wagerechter Bahn erforderlichen Zugkraft zu dem Gewichte des Eisenbahnzuges, durch den Luftwiderstand von 0,0058 auf 0,0093 vergrößert wird.

Auch für den Antrieb des **Fahrrades** spielt der Luftwiderstand eine nicht unbedeutende Rolle. Ist c die Geschwindigkeit des Radfahrers, so kann das Gleichgewichtsgefälle des besetzten Rades in Übereinstimmung mit Gl. 11, S. 287 und $x = 1$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\gamma}{g} \frac{F c^2}{(M + M_1) g}$$

gesetzt werden. Darin bezieht sich α_0 auf den Einfluß der Reibungswiderstände an den Achsen, Kettengelenken u. dergl., sowie des Rollwiderstandes am Boden, das zweite Glied auf den Luftwiderstand. Zugleich bedeutet α_0 das Gefälle, auf dem das Rad mit sehr geringer Geschwindigkeit c ohne Kraftaufwand läuft. Die Reibungswiderstände sind an einem gut gearbeiteten und gut unterhaltenen Rade sehr gering; nicht unerheblich aber ist der Rollwiderstand auch auf guter Fahrstraße, weil das Eindringen des Luftreifens bei der Berührung mit dem Boden Quetschungen verursacht, die, wie schon im 1. Teile, Aufl. 4, S. 298 erläutert wurde, Gleitungen und daher Reibungswiderstände zur Folge haben. Eingehende Versuche darüber fehlen noch. Einstweilen möchten wir nach Angaben des Herrn Landes-Bauinspektors Gloystein in Celle für gute Straße und gutes Rad $\alpha_0 = 0,007$ schätzen. Die Widerstandsfläche F , welche der Radfahrer der Luft darbietet, kann man unter günstigen Umständen zu $0,5 \text{ qm}$ annehmen. Mit $\gamma = 1,24 \text{ kg/cbm}$ Luftgewicht ergibt sich dann der Luftwiderstand zu

$$\frac{\gamma}{g} F \cdot c^2 = \frac{1,24}{9,81} \cdot 0,5 \cdot c^2 = 0,063 \cdot c^2$$

in Kilogrammen, wenn c in m/s ausgedrückt ist. Bei einem Gesamtgewichte des besetzten Rades $(M + M_1) g = 90 \text{ kg}$ würde hiernach das Gleichgewichtsgefälle

$$\alpha_1 = 0,007 + \frac{0,063}{90} c^2 = 0,007 \left(1 + \frac{c^2}{10} \right),$$

also bei

$$c = 4,5 \text{ m/s. } (= 16,2 \text{ km/h.})$$

$$\alpha_1 = 0,007 \left(1 + \frac{4,5^2}{10} \right) = 0,021 = \frac{1}{47} \text{ werden.}$$

Daher ist auf wagerechter Bahn zur gleichmäßigen Bewegung des Rades eine parallel zur Bahn wirkend gedachte Zugkraft

$$K = (M + M_1) g \cdot \alpha_1 = 90 \cdot 0,021 = 1,89 \text{ kg}$$

und eine sekundliche Arbeit

$$E = K \cdot c = 1,89 \cdot 4,5 = 8,51 \text{ mkg/s erforderlich.}$$

Ist die Kettenübertragung so eingerichtet, daß bei der Geschwindigkeit von $4,5 \text{ m/s}$. die Kurbelachse in der Sekunde eine Umdrehung macht und beträgt der Kurbelhalbmesser $0,17 \text{ m}$, der Hub der Füße also $0,34 \text{ m}$, so ist die mittlere Druckkraft des Fußes auf die Tretkurbel

$$P = \frac{8,51}{0,34} = 25 \text{ kg.}$$

16. Elastische Schwingungen eines Eisenbahnwagens.

Von den Schwingungsbewegungen eines Eisenbahnwagens treten besonders hervor: die lotrechte Verschiebung, das Wogen, und die Drehschwingung um die wagerechte Querachse durch den Schwerpunkt, das Nicken. Ist die der Gleichgewichtsbelastung entsprechende Durchbiegung der Tragfedern f , so ist nach S. 76 diese Länge zugleich die Schwingungslänge l des Wagens und die Dauer einer einfachen Schwingung

$$1) \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{f}{g}}.$$

Die Bewegung des Nickens werde an einem von vier Federn getragenen Fuhrwerk entwickelt. Fig. 205 stelle dasselbe im Gleichgewichtszustande dar. Wird der Wagen um einen kleinen Winkel ϑ um die Querachse S gedreht, so wird (Fig. 206) das linksseitige Federpaar um $c - y_1$ stärker, das rechtsseitige um $y_2 - c$ weniger stark zusammengedrückt als im Gleichgewichtszustande. Die Federdrücke gehen infolgedessen aus den Werten $\frac{1}{2} Mg$ über in P_1 und P_2 , wobei

$$\frac{P_1 - \frac{1}{2} M \cdot g}{\frac{1}{2} M g} = \frac{c - y_1}{f} \quad \text{also}$$

$$2) \quad P_1 = \frac{Mg}{2} \left(1 + \frac{c - y_1}{f} \right) \quad \text{und ebenso}$$

$$3) \quad P_2 = \frac{Mg}{2} \left(1 - \frac{y_2 - c}{f} \right) \quad \text{ist.}$$

Fig. 205.

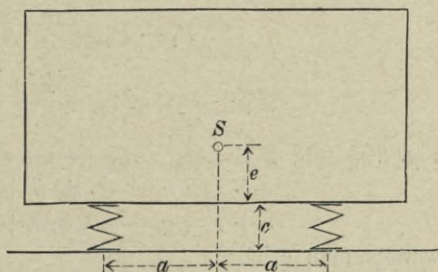
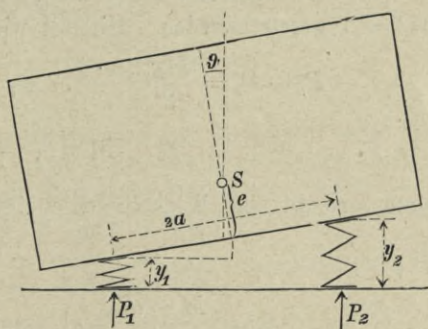


Fig. 206.



Der Hebelarm von P_1 in bezug auf S ist nach Fig. 206:

$$a \cos \vartheta - e \sin \vartheta,$$

der von P_2 :

$$a \cos \vartheta + e \sin \vartheta.$$

Daher entsteht ein der Vergrößerung des Drehungswinkels ϑ entgegenwirkendes Moment

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= P_1 (a \cdot \cos \vartheta - e \cdot \sin \vartheta) - P_2 (a \cdot \cos \vartheta + e \cdot \sin \vartheta) \\ &= (P_1 - P_2) a \cdot \cos \vartheta - (P_1 + P_2) e \cdot \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Nach Gl. 2 und 3 ist nun

$$P_1 - P_2 = \frac{Mg}{2} \frac{y_2 - y_1}{f};$$

$$P_1 + P_2 = Mg + \frac{Mg}{2} \frac{2c - (y_2 + y_1)}{f}.$$

Fig. 205 und 206 liefern die geometrischen Beziehungen

$$e + c = y_1 + a \cdot \sin \vartheta + e \cdot \cos \vartheta \quad \text{und}$$

$$e + c = y_2 - a \cdot \sin \vartheta + e \cdot \cos \vartheta,$$

woraus man erhält

$$y_2 - y_1 = 2a \cdot \sin \vartheta, \quad y_2 + y_1 = 2c + 2e(1 - \cos \vartheta).$$

Da der Winkel ϑ meist klein bleibt, so möge $\sin \vartheta = \vartheta$ und $\cos \vartheta = 1$ gesetzt werden. Hiermit wird dann

$$P_1 - P_2 = \frac{Mg}{2} \frac{2a \cdot \vartheta}{f}, \quad P_1 + P_2 = Mg \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{M} = Mg \left(\frac{a^2}{f} - e \right) \vartheta.$$

Dieses erzeugt eine Winkelbeschleunigung (analog S. 275)

$$4) \quad \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -\frac{\mathfrak{M}}{J} = -k^2 \vartheta, \quad \text{wenn}$$

$$k^2 = \frac{Mg}{J} \left(\frac{a^2}{f} - e \right) \quad \text{und} \quad J = M \cdot i^2$$

das Trägheitsmoment des Wagens in bezug auf die Querachse S bedeutet, womit man auch schreiben kann

$$5) \quad k^2 = \frac{g}{i^2} \left(\frac{a^2}{f} - e \right).$$

Gl. 4 ist wieder (s. S. 275) die Differentialgleichung einer Schwingungsbewegung von der Schwingungslänge

$$6) \quad l = \frac{g}{k^2} = \frac{i^2}{\frac{a^2}{f} - e}.$$

Für einen dreiachsigen Wagen, dessen Endachsen den Abstand a von der Mittelachse haben, bleibt letztere von der Schwingung ziemlich unberührt. Unter der Voraussetzung, daß im Gleichgewichtszustande sämtliche Federn gleich stark belastet sind, wird dann

$$P_1 - P_2 = \frac{2}{3} Mg \frac{a \cdot \vartheta}{f}; \quad P_1 + P_2 = \frac{2}{3} Mg;$$

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{3} Mg \left(\frac{a^2}{f} - e \right) \vartheta;$$

$$7) \quad k^2 = \frac{2}{3} \frac{g}{i^2} \left(\frac{a^2}{f} - e \right) \quad \text{und}$$

$$8) \quad l = \frac{3}{2} \frac{i^2}{\frac{a^2}{f} - e}.$$

Beispiel: Nach überschlägiger Berechnung ist für einen dreiachsigen Personenwagen mit $a = 3,15 \text{ m}$ gefunden $e = 1,15 \text{ m}$, $i^2 = 9,03 \text{ qm}$. Es kann bei mittlerer Belastung die Gleichgewichtsdurchbiegung der Federn $f = 0,16 \text{ m}$ angenommen werden. Hiermit ergibt sich

$$l = \frac{3}{2} \frac{9,03}{\frac{9,03}{0,16} - 1,15} = \frac{13,55}{62 - 1,15} = 0,22 \text{ m}.$$

Da das zweite Glied im Nenner gegen das erste sehr unerheblich ist, so kann man es wohl vernachlässigen und erhält dann ebenfalls $0,22 \text{ m}$. Mit Rücksicht auf dieses Ergebnis kann man statt Gl. 8 kürzer schreiben:

$$9) \quad l = \frac{3}{2} f \frac{i^2}{a^2},$$

oder, wenn man die auf den Abstand a bezogene Masse μ mit

$$J = M \cdot i^2 = \mu \cdot a^2 \quad \text{also} \quad \frac{i^2}{a^2} = \frac{\mu}{M} \quad \text{einführt,}$$

$$10) \quad l = \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} f.$$

Bei dem hier in Frage stehenden Personenwagen ergibt sich

$$\frac{3}{2} \frac{\mu}{M} \quad \text{zu} \quad 1,37, \quad \text{daher}$$

$$11) \quad l = 1,38 \cdot f = 1,37 \cdot 0,16 = 0,22 \text{ m}.$$

Die einfache Schwingungsdauer des Wagens ist (Gl. 1) $t_1 = 0,4 \text{ s}$, mit $2^{1/2}$ einfachen oder $1^{1/4}$ Doppelschwingungen in der Sekunde; diejenige des Nickens $t_2 = 0,47 \text{ s}$, mit $2,13$ einfachen oder $1,06$ Doppelschwingungen in der Sekunde. Bei etwa 9 m Schienenlänge und 20 m sekundlicher Geschwindigkeit erfolgen

die Stöße an den Schienennücken, welche die wesentlichste Ursache der Schwingungen darstellen, in Zeiträumen von $0,45$ s. Dies Verhältnis ist ein günstiges, weil jeder zweite Stoß die Einwirkung des ersten auf das Nicken ziemlich wieder aufhebt.

17. Wälzendes oder wiegendes Pendel.

a) Auf ebener Fläche.

Nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 206 ist ein gleichförmiger Kugel- oder Zylinderabschnitt, der mit der gekrümmten Fläche sich auf eine wagerechte Ebene

stützt, in gesichertem Gleichgewichte. Wird er aus der Gleichgewichtslage gebracht, so führt er unter

Einwirkung der Schwere Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus; setzt man nun die Berührungsfächen als

genügend rauh voraus, daß ein Gleiten an denselben verhütet wird, so entsteht eine Roll- oder Wälzbewegung, und man nennt solche Vorrichtung (Fig. 207) ein wälzendes oder wiegendes Pendel; auch die Kinderwiege gehört zu diesen.

In der Mittellage befindet sich der Schwerpunkt S_0 lotrecht unter dem Mittelpunkt B_0 des Rollkreises und zugleich in seiner tiefsten Lage. Beim Wiegen beschreibt der Schwerpunkt einen Teil einer verkürzten Zykloide $S_1 S_0 S_2$. Die größte Abweichung von der Mittellage werde durch den Winkel α gemessen.

Um die Dauer einer einfachen Schwingung $S_1 S_0 S_2$ zu ermitteln, betrachten wir den Körper in einer Zwischenlage (Fig. 208), die

Fig. 207.

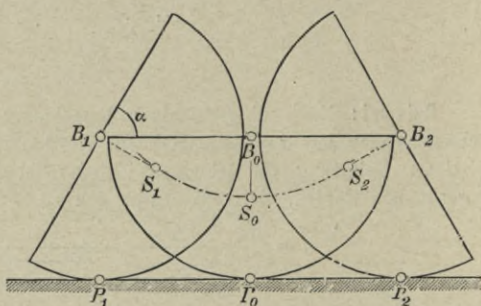
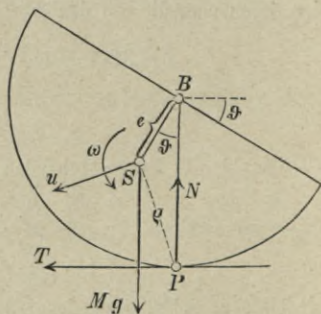


Fig. 208.



von der Gleichgewichtslage um den beliebigen Winkel ϑ abweicht. Die Wälzbewegung besteht aus einer Verschiebung des Schwerpunktes S mit der Geschwindigkeit u und einer gleichzeitigen Drehung um die rechtwinklig zur Bildebene stehende Schwerpunktsachse S mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Dann ist das augenblickliche Arbeitsvermögens des Körpers nach S. 207 $\frac{Mu^2}{2} + \frac{J}{2}\omega^2$, worin J das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die genannte Schwerpunktsachse S bedeutet. Es wirken auf den Körper die äußeren Kräfte Mg (durch den Schwerpunkt) und die Widerstände N und T der Berührungsstelle. Die letzteren beiden verrichten bei der Wälzung keine Arbeit, weil ihr Angriffspunkt P die Geschwindigkeit Null hat. Zur Arbeitsverrichtung kommt daher nur die Schwerkraft in Frage. Der Schwerpunkt S liegt um $SB \cdot \cos \vartheta = e \cdot \cos \vartheta$ unterhalb des Punktes B , also, da B stets in gleicher Höhe verbleibt, um $e(\cos \vartheta - \cos \alpha)$ unter seiner Höchstlage. Weil nun in letzterer die Geschwindigkeiten u und ω Null waren, so ist nach dem Satze der Arbeit

$$1) \quad \frac{M \cdot u^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2} = Mg \cdot e (\cos \vartheta - \cos \alpha).$$

Für die in der Bildfläche erfolgende ebene Bewegung bildet der Berührungspunkt P den Augenblicksdrehpunkt, sonach muß $u = \omega \cdot PS = \omega \cdot \rho$ und auch rechtwinklig zu PS sein. Führt man dies in Gl. 1 ein und außerdem $J = M \cdot i^2$, so wird

$$2) \quad \frac{M\omega^2}{2} \cdot \rho^2 + \frac{M\omega^2}{2} \cdot i^2 = Mg \cdot e (\cos \vartheta - \cos \alpha).$$

Bezeichnet man aber mit r den Halbmesser PB des Rollkreises, so ist in dem Dreieck PSB

$$\rho^2 = e^2 + r^2 - 2e \cdot r \cdot \cos \vartheta;$$

fügt man rechts noch $+ 2e \cdot r$ und $- 2e \cdot r$ hinzu, so kann auch geschrieben werden

$$\rho^2 = (r - e)^2 + 2er(1 - \cos \vartheta).$$

Hiermit wird aus Gl. 2:

$$3) \quad \omega = \sqrt{\frac{2g \cdot e (\cos \vartheta - \cos \alpha)}{(r - e)^2 + 2er(1 - \cos \vartheta) + i^2}}.$$

Weil nun ϑ der bis zur Mittellage noch zurückzulegende Drehungswinkel ist, der sich bei der jetzt betrachteten Bewegung verkleinert,

so ist
$$\omega = -\frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{und}$$

$$4) \quad dt = -d\vartheta \sqrt{\frac{(r-e)^2 + i^2 + 2e \cdot r(1 - \cos \vartheta)}{2g \cdot e(\cos \vartheta - \cos \alpha)}}.$$

Die Integration dieser Gleichung wird nur unter Annahme kleiner Schwingungswinkel α einfach; alsdann kann man $2e \cdot r(1 - \cos \vartheta)$ gegen die übrigen Glieder des Zählers vernachlässigen; führt man nun noch zur Abkürzung

$$5) \quad \frac{(r-e)^2 + i^2}{e} = l$$

ein, so ergibt sich

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\cos \vartheta - \cos \alpha)}}.$$

Weil diese Gleichung mit der entsprechenden Gleichung für das mathematische Pendel von der Länge l (1. Teil, Aufl. 4, S. 83) übereinstimmt, so hat das wälzende Pendel unter Voraussetzung **kleiner** Schwingungswinkel gleiche Schwingungsdauer mit einem mathematischen Pendel von der Länge l nach Gl. 5, nämlich

$$6) \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Würde der Körper sich als gewöhnliches physisches Pendel um die Achse B drehen, so wäre nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 328, Gl. 5 die Schwingungslänge

$$7) \quad l_1 = \frac{J_B}{Me} = \frac{J_S + Me^2}{Me} = \frac{i^2 + e^2}{e}.$$

Es ist also

$$8) \quad l \underset{\leq}{\geq} l_1, \quad \text{wenn} \quad (r-e)^2 \underset{\leq}{\geq} e^2.$$

Für den wiegenden Halbzylinder ist (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 159)

$$e = \frac{4}{3\pi} r = 0,424 r.$$

In bezug auf die Achse B ist das Trägheitsmoment (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 321)

$$J_B = \frac{Mr^2}{2},$$

daher $J_S = J_B - M \cdot e^2 = M \left(\frac{r^2}{2} - 0,424^2 \cdot r^2 \right)$ und

$$i^2 = \frac{J_S}{M} = 0,320 r^2.$$

Hiernach wird die Schwingungslänge der halbzylindrischen Wiege (Gl. 5)

$$9) \quad l = r \frac{(1 - 0,424)^2 + 0,320}{0,424} = 1,537 r,$$

während für den an der Achse B aufgehängten Halbzylinder die Schwingungslänge

$$10) \quad l_1 = \frac{J_B}{M \cdot e} = \frac{\frac{1}{2} r^2}{0,424 r} = 1,179 r$$

wird. Es ist also tatsächlich $l > l_1$, weil $(r - e)^2 = 0,332 r^2$, e^2 aber nur $= 0,180 r^2$.

Für die wiegende Halbkugel ist (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 164 und 322)

$$e = \frac{3}{8} r \quad J_B = 0,4 M \cdot r^2; \quad J_S = M(0,4 - \frac{9}{64}) r^2;$$

$$i^2 = 0,259 r^2. \quad \text{Daher}$$

$$11) \quad l = r \frac{(1 - \frac{3}{8})^2 + 0,259}{\frac{3}{8}} = 1,732 r;$$

während für die an der Achse B aufgehängte Halbkugel die Schwingungslänge

$$12) \quad l_1 = \frac{J_B}{M \cdot e} = \frac{0,4}{\frac{3}{8}} r = 1,067 r$$

wird. Es ist also wieder $l > l_1$.

Für eine wiegende dünne Halbkugelschale ergibt sich das Trägheitsmoment J_B leicht aus dem des Halbkugelkörpers. Für letzteren ist

$$J_B = 0,4 M r^2 = 0,4 \cdot \frac{2}{3} r^5 \pi = \frac{4}{15} r^5 \pi;$$

ändert sich r um dr , so ist die Zunahme von J_B das Trägheitsmoment einer Halbkugelschale von der Wandstärke dr , nämlich $\frac{4}{3} r^4 \pi \cdot dr$; läßt man hierin den Faktor dr fort, so ergibt sich $\frac{4}{3} r^4 \pi$ als Trägheitsmoment einer Halbkugelfläche, und weil deren Größe $2 r^2 \pi$ beträgt, so wird für dieselbe

$$J_B = M \cdot \frac{4}{3} \frac{r^4 \pi}{2 r^2 \pi} = \frac{2}{3} M \cdot r^2.$$

Da nun (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 162 und 208) $e = \frac{r}{2}$, so gilt für die Schwerpunktsachse

$$i^2 = \frac{2}{3} r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{5}{12} r^2, \text{ daher}$$

$$13) \quad l = r \frac{(1-0,5)^2 + 5/12}{0,5} = \frac{4}{3} r;$$

für die an der Achse B hängende Kugelschale aber wird nach Gl. 7

$$14) \quad l_1 = \frac{2/3 r^2}{0,5 r} = \frac{4}{3} r;$$

d. h. $l = l_1$, weil $(r - 0,5 r)^2 = (0,5 r)^2$ ist.

Wird ein prismatischer Stab von der Länge a nach Fig. 209 zu einem wälzenden Pendel gestaltet, indem man oben an zwei Seiten kleine Halbzylinder vom Halbmesser r befestigt und diese auf je einer wagerechten Schiene wiegen läßt, so ist $e = 0,5 a$; $i^2 = \frac{a^2}{12}$;

$$15) \quad l = a \frac{\left(\frac{r}{a} - 0,5\right)^2 + \frac{1}{12}}{0,5} \\ = a \left(\frac{2}{3} - 2 \frac{r}{a} + 2 \frac{r^2}{a^2} \right),$$

Fig. 209.

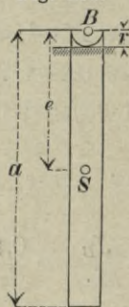
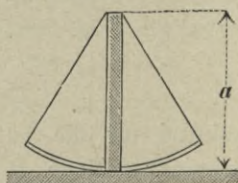


Fig. 210.



während für die Drehung um die Achse B (nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 332) einfach $l_1 = 2/3 a$ ist. Für zwei Werte von $\frac{r}{a}$ wird Gl. 15 zu $l = 2/3 a$, nämlich

1. selbstverständlich für $r = 0$;

2. für $r = a = 2e$,

d. h. für eine Wiege, bei welcher der Rollkreis nach Fig. 210 aus einem sehr leichten Kreisbogen vom Halbmesser a gebildet ist.

Für $\frac{r}{a} < 1$ ist $l < 2/3 a$.

b) Wiegendes Pendel in einer Hohlfläche; Hypozykloidenwiege.

Die aufeinander rollenden Kreise (Fig. 211) mögen die Halbmesser r und R haben. Der Schwerpunkt S des wiegenden Körpers liege wieder um e unterhalb des Mittelpunktes B seines Rollkreises vom Halbmesser r . Im Gleichgewichtszustande möge der Körper die Hohlfläche bei P_0 berühren; erteilt man ihm eine Rollbewegung rechts herum, bis die Berührung in P erfolgt (Fig. 212), bezeichnet mit Q denjenigen Punkt, der vorher mit P_0 zusammenfiel, so muß $\widehat{PQ} = \widehat{PP_0}$ sein, oder wenn man

$$\sphericalangle QBP = \psi,$$

$$\sphericalangle P_0AB = \vartheta_1$$

setzt,

$$r \cdot \psi = R \cdot \vartheta_1,$$

mithin $\psi = \vartheta_1 \frac{R}{r}$.

Weicht die Gerade BSQ , welche ursprünglich lotrecht

war (als $B_0S_0P_0$), um ϑ von der Lotrechten ab, so ist ϑ der Winkel, um den sich der Körper gedreht hat, als er aus der Gleichgewichtslage in die jetzige Zwischenlage kam, u. zw. ist nach der Figur

$$\vartheta = \psi - \vartheta_1 = \vartheta_1 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) = \frac{R-r}{r} \vartheta_1 \quad \text{also}$$

16) $\vartheta_1 = \frac{r}{R-r} \vartheta.$

Legt man durch den Mittelpunkt A des festen Kreises vom Halbmesser R eine Wagerechte, so liegt der Mittelpunkt B des beweglichen Kreises in der Tiefe $z = AB \cdot \cos \vartheta_1 = (R-r) \cos \vartheta_1$

Fig. 211.

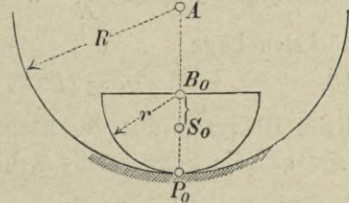
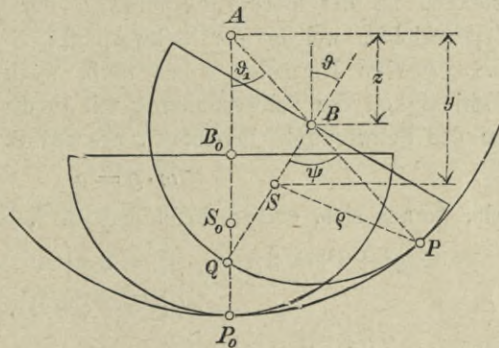


Fig. 212.



unter dem festen Punkt A , der Schwerpunkt S aber noch um $e \cdot \cos \vartheta$ tiefer, d. h. in der Tiefe

$$17) \quad y = (R-r) \cos \vartheta_1 + e \cdot \cos \vartheta$$

unter A . In der höchsten Lage, die bei einer Schwingung vorkommt, möge ϑ den Wert α erreichen; setzt man dann noch (entsprechend Gl. 16) $\frac{r-r}{R} \alpha = \alpha_1$; so ist der Wert y in der

höchsten Lage

$$18) \quad y_1 = (R-r) \cos \alpha_1 + e \cdot \cos \alpha.$$

Beim Übergang aus der höchsten Lage in die beliebige Zwischenlage hat die Schwere die Arbeit geleistet

$$19) \quad Mg(y-y_1) = Mg \{ (R-r) (\cos \vartheta_1 - \cos \alpha_1) + e (\cos \vartheta - \cos \alpha) \}.$$

Für die ebene Rollbewegung des kleineren Kreises in dem größeren ist der Berührungspunkt P der Pol; für die verkürzte Hypozykloide, welche der Schwerpunkt S beschreibt, ist daher $PS = \rho$ eine Normale; daher muß, wenn man mit u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, mit ω die Winkelgeschwindigkeit um den Schwerpunkt bezeichnet, wie auf S. 295,

$$\omega \cdot \rho = u$$

sein, woraus sich, entsprechend der Gl. 2, S. 295, ergibt:

$$\omega^2 (\rho^2 + i^2) = 2g(y-y_1) = 2g \{ (R-r) (\cos \vartheta_1 - \cos \alpha_1) + e (\cos \vartheta - \cos \alpha) \}.$$

Mit $\omega = -\frac{d\vartheta}{dt}$ wird dann

$$dt = -d\vartheta \sqrt{\frac{\rho^2 + i^2}{2g(y-y_1)}}.$$

Auch in diesem Falle möge nur auf sehr kleine Schwingungen weiter eingegangen werden, so daß annähernd

$$\rho = r - e;$$

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2}; \quad \cos \vartheta_1 = 1 - \frac{\vartheta_1^2}{2} = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} \frac{r^2}{(R-r)^2};$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}; \quad \cos \alpha_1 = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \frac{r^2}{(R-r)^2}$$

gesetzt werden kann.

Dann wird nach Gl. 17 und 18.

$$2g(y-y_1) = 2g \left\{ (R-r) \left(\frac{\alpha^2 - \vartheta^2}{2} \right) \frac{r^2}{(R-r)^2} + e \frac{\alpha^2 - \vartheta^2}{2} \right\}$$

$$= g(\alpha^2 - \vartheta^2) \left(\frac{r^2}{(R-r)} + e \right) \quad \text{und}$$

$$dt = - \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} \sqrt{\frac{(r-e)^2 + i^2}{\left(\frac{r^2}{(R-r)} + e \right) g}}. \quad \text{Setzt man}$$

$$20) \quad l = \frac{(r-e)^2 + i^2}{\frac{r^2}{R-r} + e},$$

so nimmt der Ausdruck für dt die einfache Form an:

$$21) \quad dt = - \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}},$$

was nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 83 mit der Gleichung für die Bewegung eines einfachen Pendels von der Länge l übereinstimmt; somit ist für sehr kleine Schwingungen die Schwingungslänge l der Hypozykloidenwiege durch Gl. 20 ausgedrückt. Für $R = \infty$ stimmt Gl. 20 mit der Gl. 5, S. 296 für die gemeine Wiege überein.

Bei dieser Hypozykloidenwiege darf $e = 0$ werden, d. h. S mit B zusammenfallen; dann wird

$$l = \frac{r^2 + i^2}{r^2} (R-r),$$

oder, wenn man $J = M \cdot i^2 = \mu r^2$ setzt,

$$l = (R-r) \left(1 + \frac{\mu}{M} \right) \quad \text{und} \quad t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

was dem Sinne nach mit Gl. 8 im 1. Teile, Aufl. 4, S. 351, übereinstimmt.

Die Hypozykloidenwiege hat unter sonst gleichen Umständen eine kleinere Schwingungslänge, mithin auch eine kleinere Schwingungsdauer als die gemeine Wiege.

Eine wiegende Bewegung ist nur möglich, wenn der Körper in der tiefsten Lage Standsicherheit besitzt, wenn also (Fig. 212) bei einer kleinen Drehung nach rechts die Schwerpunktslotrechte links von der Berührungsstelle P liegt. Bei wagerechter Unterstützungsfläche (Fig. 208) beträgt die linksseitige Entfernung der Schwerpunktslotrechten von dem Stützpunkte P nur $e \sin \vartheta$; diese

Größe muß positiv, d. h. $e > 0$ sein, oder es muß der Schwerpunkt S unter dem Mittelpunkt B liegen. Für $e = 0$ wird die Standsicherheit Null und zugleich $l = \infty$, d. h. es kommt keine Schwingung mehr zustande, und für $e < 0$ wird auch die Schwingungslänge < 0 , was für ein Pendel widersinnig ist.

Bei der Hypozykloidenwiege aber darf der Schwerpunkt S auch oberhalb des Mittelpunktes B liegen, wie aus Fig. 212 ersichtlich. Der linksseitige Abstand der Schwerpunktslotrechten von dem Stützpunkte P beträgt nämlich

$$r \sin \vartheta_1 + e \sin \vartheta,$$

also für kleine Winkel

$$r \vartheta_1 + e \vartheta = \vartheta \left(\frac{r^2}{R-r} + e \right);$$

dieser Wert muß > 0 sein. Es wird also eine Hypozykloidenwiege auch noch bei negativem e möglich sein, wenn nur der absolute Wert des negativen e kleiner ist als $\frac{r^2}{R-r}$, oder

$$22) \quad \frac{r^2}{R-r} > -e.$$

Für $\frac{r^2}{R-r} = -e$ würde wiederum $l = \infty$. Es würde z. B.

$$\text{für } R = 2r \quad r > -e$$

sein müssen, d. h. der Schwerpunkt dürfte nur um weniger als r oberhalb des Punktes B liegen.

c) Wiegendes Pendel auf einer gewölbten Fläche; Epizykloidenwiege (Fig. 213).

In diesem Falle muß für Standsicherheit in der Gleichgewichtslage die Bedingung erfüllt sein

$$e \sin \vartheta > r \sin \vartheta_1,$$

oder für kleine Winkel $e \cdot \vartheta > r \cdot \vartheta_1$, und weil

$$r \cdot \varphi = R \cdot \vartheta_1, \quad \text{und zugleich}$$

$$\vartheta = \vartheta_1 + \varphi = \vartheta_1 \left(1 + \frac{R}{r} \right), \quad \text{also}$$

$$\vartheta_1 = \vartheta \frac{r}{R+r}.$$

so folgt als Bedingung der Standsicherheit

$$23) \quad e > \frac{r^2}{R+r}.$$

Bei der Epizykloidenwiege muß der Schwerpunkt also tiefer liegen als bei der einfachen Zykloidenwiege.

Die gleichen Erwägungen, wie sie bei der Hypozykloidenwiege angestellt wurden, führen hier zu den Gleichungen

$$24) \quad l = \frac{(r-e)^2 + i^2}{e - \frac{r^2}{R+r}} \quad \text{und}$$

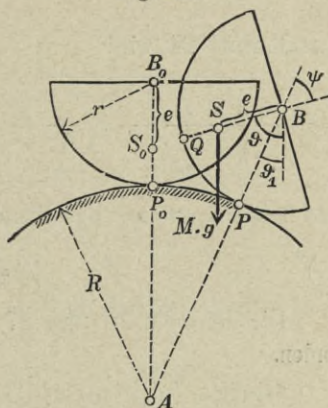
$$25) \quad dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{d\vartheta}{\alpha^2 - \vartheta^2}},$$

worin l wieder die Schwingungslänge der Wiege bedeutet. $R = \infty$

führt auch hier wieder zur einfachen Zykloidenwiege mit

$$l = \frac{(r-e)^2 + i^2}{e}.$$

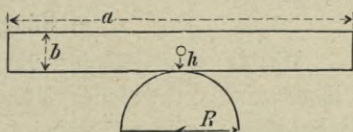
Fig. 213.



d) Die Wippe.

Wird in Fig. 213 der Halbmesser r des rollenden Kreises unendlich groß, so haben wir es mit dem Abwälzen einer ebenen Fläche, z. B. der Unterfläche einer Bohle, auf einem zylindrischen Baume, mit einer Wippe (Fig. 214), zu tun. Doch sind für diesen Fall die Formeln 23 und 24 nicht unmittelbar zu verwenden, weil $r = \infty$ auch $e = \infty$ bedingen würde. Vielmehr muß die Höhe des Schwerpunktes der wippenden Bohle über ihrer Unterfläche etwa mit h eingeführt, und in den

Fig. 214.



Formeln 23 und 24 $r - e$ mit h und e mit $r - h$ vertauscht werden. Dann wird aus Formel 23:

$$r - h > \frac{r^2}{R + r}; \quad h < r - \frac{r^2}{R + r} = \frac{Rr}{R + r} = \frac{R}{\frac{R}{r} + 1}$$

und, weil $r = \infty$, verlangt die Standsicherheit der Wippe

$$26) \quad h < R$$

Aus Formel 24 wird

$$l = \frac{h^2 + i^2}{r - h - \frac{r^2}{R + r}} = \frac{h^2 + i^2}{Rr - h(R + r)} (R + r) = \frac{(h^2 + i^2) \left(\frac{R}{r} + 1\right)}{R - h \left(\frac{R}{r} + 1\right)}$$

und mit $r = \infty$ als Schwingungslänge der Wippe

$$27) \quad l = \frac{h^2 + i^2}{R - h}.$$

Die Formeln 26 und 27 lassen sich auch leicht unmittelbar finden.

Beispiel: Es sei (Fig. 214) $a = 2 \text{ m}$; $b = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$; $h = 0,025 \text{ m}$; $R = 0,1 \text{ m}$. Dann wird für das polare Trägheitsmoment des Rechtecks nach 1. Teil, Aufl. 4, S. 320:

$$i^2 = \frac{a^2 + b^2}{12} = \frac{4 + 0,05^2}{12} = 0,334, \text{ daher}$$

$$l = \frac{0,0006 + 0,334}{0,1 - 0,025} = 4,46 \text{ m}$$

und die Dauer einer einfachen Schwingung

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \text{rund } \sqrt{l} = 2,1 \text{ s.}$$

Offenbar ist für derartige Bohlenwippen genügend genau

$$l = \frac{a^2}{12(R - h)} = \frac{a^2}{12 \left(R - \frac{b}{2}\right)} = 4,44 \text{ m.}$$

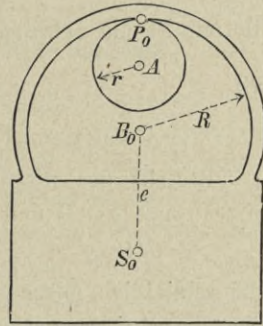
e) Hängende Wiege.

Mittels eines Ringes vom Halbmesser R sei ein mit dem Ringe starr verbundener Körper über einen festen Zylinder vom Halbmesser r gehängt, wobei $r < R$ (Fig. 215). Der Schwerpunkt S der Wiege liege um e unter dem Mittelpunkte des Ringes vom Halbmesser R . Erteilt man dem Körper eine Rollbewegung links herum, bis der Berührungspunkt sich in P befindet (Fig. 216),

und bezeichnet mit Q denjenigen Punkt, der vorher mit P_0 zusammenfiel, so muß $\widehat{PQ} = \widehat{PP_0}$ oder $R\psi = r \cdot \vartheta_1$ sein. Weicht die Gerade QRS , welche ursprünglich lotrecht war ($P_0B_0S_0$) um ϑ von der Lotrechten ab, so ist ϑ der Winkel, um den sich der Körper gedreht hat, und zwar ist nach der Figur

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_1 - \psi = \vartheta_1 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \\ &= \vartheta_1 \frac{R-r}{R} \quad \text{und} \\ \vartheta_1 &= \frac{R}{R-r} \vartheta. \end{aligned}$$

Fig. 215.



Legt man durch den Mittelpunkt A des festen Kreises eine Wagerechte, so liegt der Mittelpunkt B des beweglichen Kreises in der Tiefe

$$\begin{aligned} z &= \overline{AB} \cdot \cos \vartheta_1 = (R-r) \cos \vartheta_1, \\ \text{der Schwerpunkt } S &\text{ aber in der Tiefe} \\ y &= (R-r) \cos \vartheta_1 + e \cdot \cos \vartheta. \end{aligned}$$

In der höchsten Lage, die bei einer Schwingung vorkommt, möge ϑ den Wert α erreichen; setzt man dann auch noch

$$\frac{R}{R-r} \alpha = \alpha_1,$$

so ist der Wert y in der höchsten Lage

$$y_1 = (R-r) \cos \alpha_1 + e \cos \alpha.$$

Beim Übergang aus der höchsten Lage in die Zwischenlage hat die Schwere die Arbeit geleistet

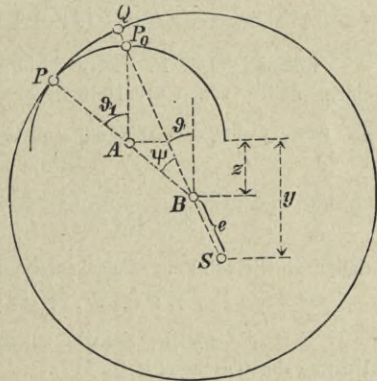
$$Mg(y - y_1) = Mg \left\{ (R-r) (\cos \vartheta_1 - \cos \alpha_1) + e (\cos \vartheta - \cos \alpha) \right\}.$$

Es wird daher nach dem Satze der Arbeit (wie auf S. 300) mit

$$\varrho = PS = \text{annähernd } R + e, \quad \omega^2 (\varrho^2 + i^2) = 2g(y - y_1)$$

$$dt = -d\vartheta \sqrt{\frac{(R+e)^2 + i^2}{2g(y-y_1)}}.$$

Fig. 216.



Daraus folgt in ähnlicher Weise wie auf S. 256

$$dt = -\frac{d\vartheta}{\alpha^2 - \vartheta^2} \sqrt{\frac{(R+e)^2 + i^2}{\left(\frac{R^2}{R-r} + e\right)g}}$$

Hiermit ist die Schwingungslänge der hängenden Wiege

$$28) \quad l = \frac{(R+e)^2 + i^2}{\frac{R^2}{R-r} + e}$$

Besteht der wiegende Körper nur aus einem dünnen Ringe, so wird mit $e=0$ und $i^2=R^2$:

$$l = 2(R-r),$$

und schließlich mit $r=0$ für den ein physisches Pendel bildenden Ring $l=2R$, wie schon im 1. Teile, Aufl. 4, S. 333 gefunden wurde.

Mit $R+e=-h$ und schließlich $R=\infty$ wird aus der hängenden Wiege wiederum die Wippe mit

$$l = \frac{h^2 + i^2}{Rr - (R-r)h} (R-r) = \frac{h^2 + i^2}{r-h}$$

Beispiel: Der in Fig. 217 dargestellte Körper (Taschenuhr) hänge auf einem Stifte von 1 mm Halbmesser; es ist $R=8$ mm;

$r=1$ mm; $e=37$ mm; i^2 annähernd $=\frac{22^2}{2}$; also (Gl. 28)

$$l = \frac{(8+37)^2 + 242}{\frac{64}{7} + 37} = 49,5 \text{ mm,}$$

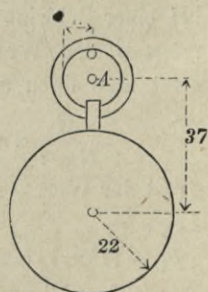
daher die Schwingungsdauer annähernd

$$t = \sqrt{0,0495} = 0,22 \text{ s.}$$

Fast die gleiche Schwingungsdauer hat auch die Unruhe der Taschenuhr (S. 278).

Denkt man sich diese Uhr auf einem schwimmenden Brettchen liegend, so wird, weil die schwingende Unruhe nur unter dem Einfluß innerer Kräfte der Uhr steht, die Momentensumme der Bewegungsgrößen der Uhr sich nicht ändern können (S. 217). Behielte nun das Gehäuse der Uhr seine ursprüngliche Lage, so würde vermöge der Schwingung der Unruhe die Momentensumme der Bewegungsgrößen in bezug auf die Achse der Unruhe und auch in bezug auf eine dazu parallele Schwerpunktsachse sich fortwährend ändern. Diese Änderung muß dadurch aufgehoben werden, daß die übrige Uhr kleine Drehschwingungen um die lotrechte Schwerpunktsachse ausführt, welche den Schwingungen der Unruhe stets entgegengesetzt gerichtet sind. Diese Anregung zur Schwingung

Fig. 217.



macht sich auch geltend, wenn man die Uhr nach Fig. 217 aufhängt; stimmt die Schwingungsdauer der aufgehängten Uhr mit derjenigen der Unruhe überein, so kann die aufgehängte Uhr unter günstigen Umständen infolge der Bewegung der Unruhe in deutlich sichtbare Schwingungen geraten.

18. Wirkung des Pulvers in der Kanone.

Infolge der Ausdehnung der entwickelten Pulvergase wird dem Geschosse, welches zu Anfang, ebenso wie die Kanone, die Geschwindigkeit Null hatte, eine Geschwindigkeit v beim Verlassen des Rohres erteilt. Da nun der Gasdruck des Pulvers für die aus Geschöß, Kanone und Lafette bestehende Massengruppe eine innere Kraft ist, so muß, wenn äußere Kräfte von bedeutender Größe in wagerechter Richtung nicht auftreten, der Gesamtschwerpunkt an der ursprünglichen Stelle verbleiben, oder es muß die Bewegungsgröße in der Richtung des als nahezu wagerecht gedachten Rohres Null verbleiben (S. 195). Es werden daher Kanone und Lafette zu einem Rücklaufe mit der Geschwindigkeit v_1 veranlaßt. Ist M die Masse, welche das Rohr mit der Geschwindigkeit v verläßt, M_1 die Masse der Kanone und Lafette, so muß

$$-M_1 v_1 + Mv = 0, \text{ also}$$

$$1) \quad v_1 = \frac{M}{M_1} v \text{ sein.}$$

Die relative Geschwindigkeit des Geschosses in bezug auf die zurücklaufende Kanone ist offenbar

$$w = v + v_1 = v \left(1 + \frac{M}{M_1} \right).$$

Da das Rohr vom Halbmesser r schraubenlinienförmige Züge vom Anstiegswinkel α und der Ganghöhe h besitzt, so entspricht der Verschiebungsgeschwindigkeit

$$w = v \left(1 + \frac{M}{M_1} \right)$$

noch eine Winkelgeschwindigkeit φ von der Größe

$$2) \quad \varphi = \frac{v}{r \cdot \operatorname{tg} \alpha} \left(1 + \frac{M}{M_1} \right) = \frac{v \cdot 2 \pi}{h} \left(1 + \frac{M}{M_1} \right).$$

Ist nun μ die auf die Längsachse und den Abstand r bezogene Masse des Geschosses, so ist das gesamte Arbeitsvermögen in

dem Augenblicke, wo das Geschöß aus dem Rohre tritt, gleich der Ausdehnungsarbeit \mathfrak{A} der Pulvergase im Rohre, d. h.

$$\mathfrak{A} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{\mu \cdot r^2 \varphi^2}{2} \quad \text{oder}$$

$$3) \quad \mathfrak{A} = \frac{Mv^2}{2} \left\{ 1 + \frac{M_1}{M} + \frac{\mu}{M} \frac{4r^2 \pi^2}{h^2} \left(1 + \frac{M}{M_1} \right)^2 \right\}.$$

Ist l die nutzbare Rohrlänge, so ergibt sich die mittlere Triebkraft des Pulvers zu

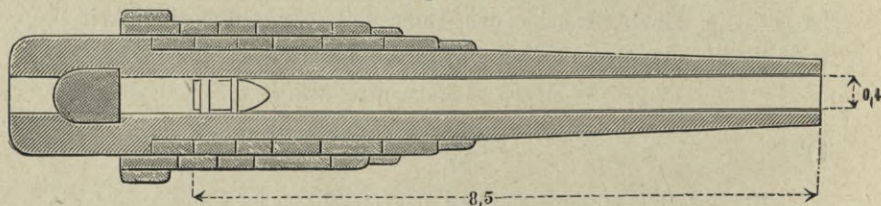
$$4) \quad K = \frac{\mathfrak{A}}{l}$$

und der mittlere Gasdruck zu

$$5) \quad p = \frac{\mathfrak{A}}{r^2 \pi l} = \frac{K}{r^2 \pi}.$$

Beispiel: Eine große Kruppsche Kanone von 0,4 m lichter Weite und $l = 8,5$ m nutzbarer Rohrlänge (Fig. 218) erteile mit 200 kg Pulverladung dem

Fig. 218.



Geschosse von 1 m Länge und 700 kg Gewicht eine Geschwindigkeit $v = 500$ m/s. Das Rohr wiege 70 000 kg, die Lafette 40 000 kg. Die Steigung der Züge betrage $h = 18$ m.

Die Pulvergase treten zwar nicht durchweg mit der Geschwindigkeit v aus dem Rohre, aber doch der vorderste Teil derselben; daher wird man bei der Berechnung der Bewegungsgröße die Hälfte der Masse des Pulvers, bei derjenigen des Arbeitsvermögens ein Drittel dieser Masse mit zu M rechnen dürfen. Sonach ist die Geschwindigkeit des Rücklaufes

$$v_1 = 500 \cdot \frac{700 + 100}{70000 + 40000} = 3,6 \text{ m/s.}$$

Wollte man den Rücklauf ganz verhindern, so müßte man eine Widerstandskraft $= K$ (Gl. 4) wirken lassen; diese steht aber gewöhnlich nicht zur Verfügung. Übrigens beträgt auch derjenige Teil des Rücklaufes, während dessen die volle Pulverkraft das Rohr zurücktreibt, nur

$$l \cdot \frac{M}{M + M_1} = \frac{8,5 \cdot 800}{110000 + 800} = 0,061 \text{ m.}$$

Das entstandene Arbeitsvermögen der Kanone nebst Lafette

$$\frac{M_1 v_1^2}{2} = 110000 \cdot \frac{3,6^2}{2g} = 72660 \text{ mkg}$$

wird dann durch geeignete Bremsvorrichtungen aufgezehrt.

Die auf die Längsachse und den Abstand r bezogene Masse des Geschosses möge zu der Hälfte der Masse des Geschosses, also zu $\mu = \frac{350}{g}$ geschätzt werden. Dann ist die Arbeit der Pulvergase:

$$\mathfrak{A} = \left(700 + \frac{200}{4}\right) \frac{500^2}{2g} \left\{1 + \frac{800^2}{767 \cdot 110000} + \frac{350}{767} \cdot \frac{4 \cdot 0,2^2 \cdot \pi^2}{18^2} (1,0072)^2\right\},$$

$$\mathfrak{A} = 9768943 (1 + 0,0076 + 0,0025) = 9768943 \cdot 1,0101,$$

$$\mathfrak{A} = 9867609 \text{ mkg},$$

die mittlere Triebkraft des Pulvers

$$K = \frac{9867609}{8,5} = 1161000 \text{ kg},$$

der mittlere Druck (mit $20^2 \pi = 1257$)

$$\frac{1161000}{1257} = 923 \text{ kg/qcm} = 923 \text{ at}.$$

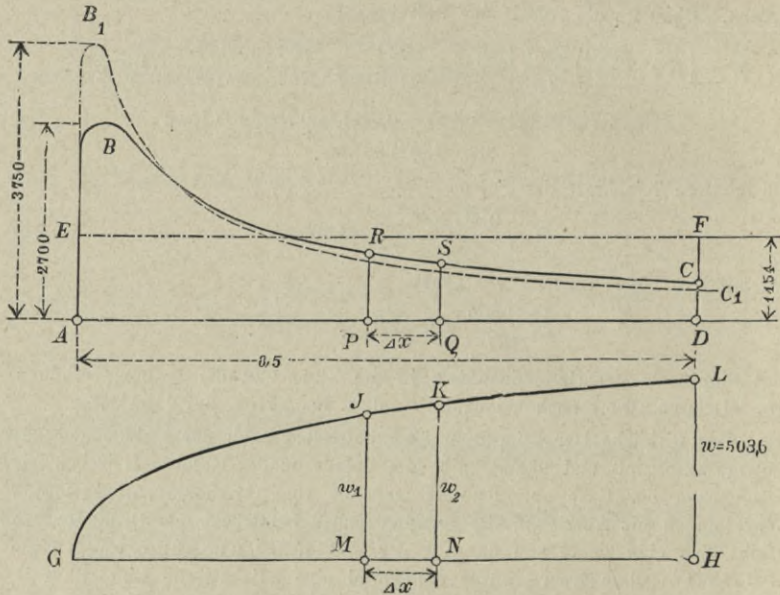
Das Einpressen des Geschoßmantels in die Züge und die Reibung erhöhen den mittleren Druck noch um etwa $\frac{1}{4}$, d. h. um 231 at , auf 1154 at .

Der wirkliche Druck im Rohr ist unmittelbar nach der Entzündung des Pulvers sehr groß und nimmt mit dem Vorrücken des Geschosses wegen der Ausdehnung der Gase ab. Benutzt man die vom Geschosse zurückgelegten Wegeslängen als Abszissen, die entsprechenden Gasdrücke als Ordinaten, so ergibt sich eine Kurve von der Art der in Fig. 219 ausgezogenen Linie $ABRSC$. Diese Kurve würde annähernd eine adiabatische Linie (2. Teil, Aufl. 3, S. 355) sein, wenn die ganze Pulvermenge sich gleichzeitig entzündete. Da aber stets ein gewisses Nachbrennen erfolgt, so wird dadurch die Kurve beeinflußt. Weil neuere Versuchsergebnisse bezüglich dieser Linie uns nicht zur Verfügung standen, haben wir den abfallenden Teil derselben als gleichseitige Hyperbel angenommen und so bemessen, daß die mit dem Flächeninhalte des Rohrquerschnittes multiplizierte Fläche $ABRSCD$ die Gesamtarbeit der Pulvergase darstellt, daß also die Fläche gleiche Größe hat mit dem Rechteck $AEPD$, dessen Höhe dem mittleren Druck 1154 at entspricht. Der größte Druck, den der hintere Teil des Rohres auszuhalten hat, beträgt etwa 2700 at . Ein schneller verbrennendes Pulver erzeugt eine Druckkurve von der Form der in Fig. 219 gestrichelten Linie AB_1C_1 mit einer größten Druckordinate von etwa 3750 at , welche dann aber bald stark abfällt, da ihre Fläche unter Annahme derselben Austrittsgeschwindigkeit des Geschosses von 500 m/s . den gleichen Wert haben muß wie die Fläche der ausgezogenen Druckkurve. Damit das Geschütz diese gewaltigen Drücke aushalten könne, ist der hintere Teil des eigentlichen Rohres durch mehrere Lagen warm aufgezogener Ringe (Fig. 218) verstärkt.

Es besteht eine bestimmte Beziehung zwischen der Druckkurve und der Art der Bewegung des Geschosses im Rohre.

Da wir den rechnungsmäßig erforderlichen mittleren Druck mit Rücksicht auf die Widerstände um $\frac{1}{4}$ erhöht haben, so folgt umgekehrt, daß von der

Fig. 219.



Gesamtarbeit der Pulvergase nur 80% auf die Bewegung übertragen werden, so daß stattfinden muß, wenn die ausgezogene Druckkurve benutzt und ihre Fläche $ABRSCD = F$ gesetzt wird, $0,8 r^2 \pi \cdot F = \mathfrak{A}$.

Schreibt man nun

$$\mathfrak{A} = \frac{Mv^2}{2} \alpha$$

(mit $\alpha = 1,0101$ in dem Zahlenbeispiele), so wird

$$v^2 = \frac{2r^2 \pi \cdot 0,8}{M \cdot \alpha} F.$$

Da die scheinbare (relative) Geschwindigkeit des Geschosses in bezug auf das Rohr

$$w = v \left(1 + \frac{M}{M_1} \right) \text{ ist,}$$

so wird

$$w^2 = \frac{2r^2 \pi \cdot 0,8}{M \cdot \alpha} \left(1 + \frac{M}{M_1} \right)^2 F.$$

Entspricht nun einer Wegeslänge $x = AP$ (Fig. 219) die scheinbare Geschwindigkeit w_1 , dem Werte $x + \Delta x$ die Geschwindigkeit w_2 , so muß entsprechend vorstehender Gleichung auch gelten

$$w_2^2 - w_1^2 = \frac{2r^2 \pi \cdot 0,8}{M \cdot \alpha} \left(1 + \frac{M}{M_1}\right)^2 \Delta F,$$

wenn $\Delta F = PRSQ$ ist. Dies gibt für den vorliegenden Fall

$$w_2^2 - w_1^2 = \frac{2 \cdot g \cdot 1257 \cdot 0,8}{767 \cdot 1,0101} 1,0072^2 \cdot \Delta F = 25,83 \Delta F.$$

Mittels dieser Gleichung läßt sich die Geschwindigkeit w_x an verschiedenen Stellen des Rohres berechnen und durch die Kurve $GJKL$ (Fig. 219, unten) darstellen.

In der Darstellung der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit (Fig. 220) muß die dem Zeitraume Δt entsprechende Fläche

$$DEFG = \Delta x,$$

daher annähernd

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\frac{1}{2}(w_1 + w_2)}$$

sein. Hiernach kann man die Zeiteile berechnen, die zu den einzelnen Geschwindigkeitszunahmen erforderlich sind, und erhält zugleich die Geschwindigkeitskurve $AGFC$ (Fig. 220) und die Gesamtzeit 0,028 s. für die Zurücklegung des 8,5 m langen Weges im Rohre. Die mittlere Geschwindigkeit im Rohr ist sonach $8,5 : 0,028 = 303,6 \text{ m/s}$.

Seitliche Ablenkung des Geschosses infolge seiner Drehung und des Luftwiderstandes.

Hätte das Geschöß beim Verlassen des Rohres keine Winkelgeschwindigkeit, so würde es im luftleeren Raume stets seiner Anfangslage parallel bleiben, in der Atmosphäre aber durch den Widerstand D derselben, welcher bei der üblichen Geschößform oberhalb des Schwerpunktes vorbeigeht, eine derartige Drehung (linksherum in der Fig. 221) erfahren, daß es in eine höchst ungünstige Richtung zur Flugbahn des Schwerpunktes gelangen würde. Die bedeutende Winkelgeschwindigkeit nun, welche die schraubenlinien-förmigen Züge des Rohres dem

Fig. 220.

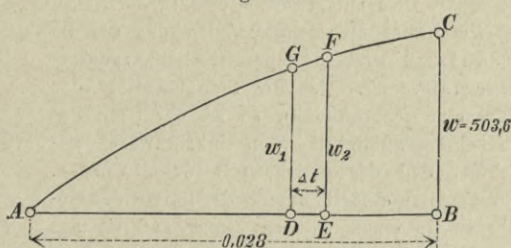
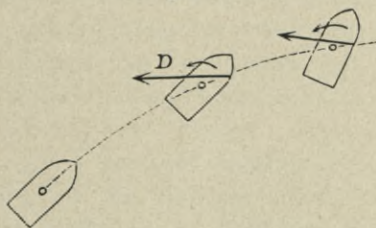
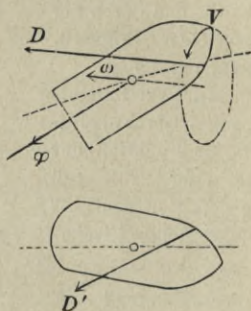


Fig. 221.



Geschoß erteilen, verhindert das Überschlagen des Geschosses in ähnlicher Weise, wie die schnelle Drehung eines Kreisels dem Umfallen desselben entgegenwirkt. Überträgt man die Erscheinungen bei der Drehung des Kreisels um den unteren Endpunkt der Achse sinngemäß auf die Drehung des Geschosses um seinen Schwerpunkt, so ergibt sich folgendes: Sobald die Achse des mit großer Geschwindigkeit φ in Drehung gesetzten Kreisels etwas schief gegen die Richtung der Schwere steht, so daß sein Gewicht nicht durch den Drehpunkt geht, beschreibt die Achse des Kreisels, statt umzufallen, einen fein gerippten Kegel, dessen Achse durch den Drehpunkt geht und parallel der Richtung des Gewichtes ist, mit einer Winkelgeschwindigkeit ω (S. 265). Dem entsprechend erfährt die Achse des Geschosses eine langsame Drehung um die zu dem Luftwiderstand D parallele Schwerpunktsachse (Fig. 222). Ist die Schraubenlinie der Züge eine rechtsgängige, so ist der Sinn der Winkelgeschwindigkeit φ nach rückwärts gerichtet, und das gleiche gilt dann von ω . Daraus folgt eine Bewegung der Spitze des Geschosses in einem solchen Sinne, daß sie aus der lotrechten Zielebene eine nach rechts gerichtete Ablenkung erfährt. Hierdurch bekommt nun der Luftwiderstand auch im Grundriß eine schiefe Richtung gegen das Geschöß, so daß auch dessen Schwerpunkt nun nach rechts aus der Zielebene hinausgedrängt wird. Freilich ändert die Richtung des Luftwiderstandes D mit der Drehung des Geschosses fortwährend seine Richtung, und die Kreiselung wird infolgedessen eine sehr unregelmäßige. Daher werden auf die erste Ablenkung nach rechts bald solche nach unten, nach links und nach oben folgen. Weil aber das Geschöß bei der ersten Ablenkung noch die größte Geschwindigkeit hat, so ist diese von überwiegendem Einfluß. Erfahrungsmäßig zeigen dann auch alle Geschosse aus rechtsgängig gezogenen Rohren eine nach rechts gerichtete Abweichung aus der lotrechten Zielebene. (Vergl. die hiervon unabhängige Abweichung wegen der Drehung der Erde, S. 166.)

Fig. 222.



D. Elastisch-feste Körper in Beschleunigungszuständen.

1. Allgemeines.

Wenn ein fester Körper unter der Wirkung von Kräften eine Bewegung ausführt, dann erleidet jeder seiner Massenpunkte in irgend einer Richtung eine Beschleunigung p , der er seinen Trägheitswiderstand entgegensetzt. In der Überwindung aller dieser im allgemeinen nach Richtung und Größe verschiedenen Trägheitswiderstände besteht der Einfluß der angreifenden Kräfte auf den Bewegungszustand des Körpers. Die Wirkung der Kräfte ruft die Gegenwirkung der Trägheitswiderstände hervor und nach d'Alembert sind beide in ihren mechanischen Gesamtwerten einander entgegengesetzt gleich, erfüllen zusammen die Bedingungen für das Gleichgewicht von Kräften an einem starren Körper (vgl. 1. Teil, Aufl. 4, S. 170).

Unter der Wirkung der Kräfte und der Gegenwirkung der Trägheitswiderstände entstehen nun in jedem elastisch-festen Körper im allgemeinen ebenso Spannungen und Formänderungen, als in einem gestützten Körper unter der Wirkung der angreifenden Kräfte und der durch diese hervorgerufenen Stützwiderstände. Nur in den Ausnahmefällen, in denen die angreifenden Kräfte sich in gleicher Weise über den Körper verteilen, wie die Trägheitswiderstände, beide sich an jedem Massenpunkte in entgegengesetzter Richtung und gleicher Größe entgegenwirken, treten Spannungen und Formänderungen am Körper nicht auf. Dieser Fall liegt immer dann vor, wenn ein Körper lediglich unter der Wirkung seiner Schwere oder anderer Massenkräfte sich rein verschiebend bewegt. Findet dagegen der Angriff der Kräfte nur in einzelnen Punkten des Körpers statt, so kann ihre Wirkung auf die einzelnen Massenpunkte nur durch den Zusammenhang aller, d. h. durch innere Kräfte oder Spannungen übertragen werden, mit denen dann sofort

auch entsprechende Formänderungen auftreten, und die, wenn sie die Festigkeit des Körpers überschreiten, seine Zerstörung im Gefolge haben können.

Im 2. Teil, Aufl. 3, sind auf S. 99—108 bereits für einige einfache Bewegungsarten die auftretenden Spannungen untersucht; hier sollen noch einige weitere schwierigere Fälle behandelt werden.

2. Um eine wagerechte Querachse sich drehender Stab.

Ein prismatischer Stab drehe sich unter der Wirkung seines Eigengewichts um eine wagerechte Querachse aus einer unter dem Winkel α geneigten Ruhelage und habe zurzeit t die Neigung φ (Fig. 223 a). Seine Querschnittsabmessungen seien gegenüber seiner Länge verhältnismäßig gering, so daß die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aller Punkte eines und desselben Querschnittes als annähernd gleich angenommen werden können. Das Gewicht des Stabes sei gleich q für die Längeneinheit, seine augenblickliche Winkelbeschleunigung ε . Dann erfährt ein Massenteilchen $dm = \frac{q \cdot dx}{g}$ im Abstände x von der Drehachse eine Beschleunigung $\varepsilon \cdot x$ und setzt dieser einen Trägheitswiderstand $dT = dm \cdot \varepsilon \cdot x = \frac{q \cdot \varepsilon}{g} \cdot x dx$ entgegen. Für die Verteilung des Gesamtträgheitswiderstandes über die Stablänge gilt daher die Gleichung

$$1) \quad w = \frac{dT}{dx} = \frac{q \cdot \varepsilon}{g} \cdot x,$$

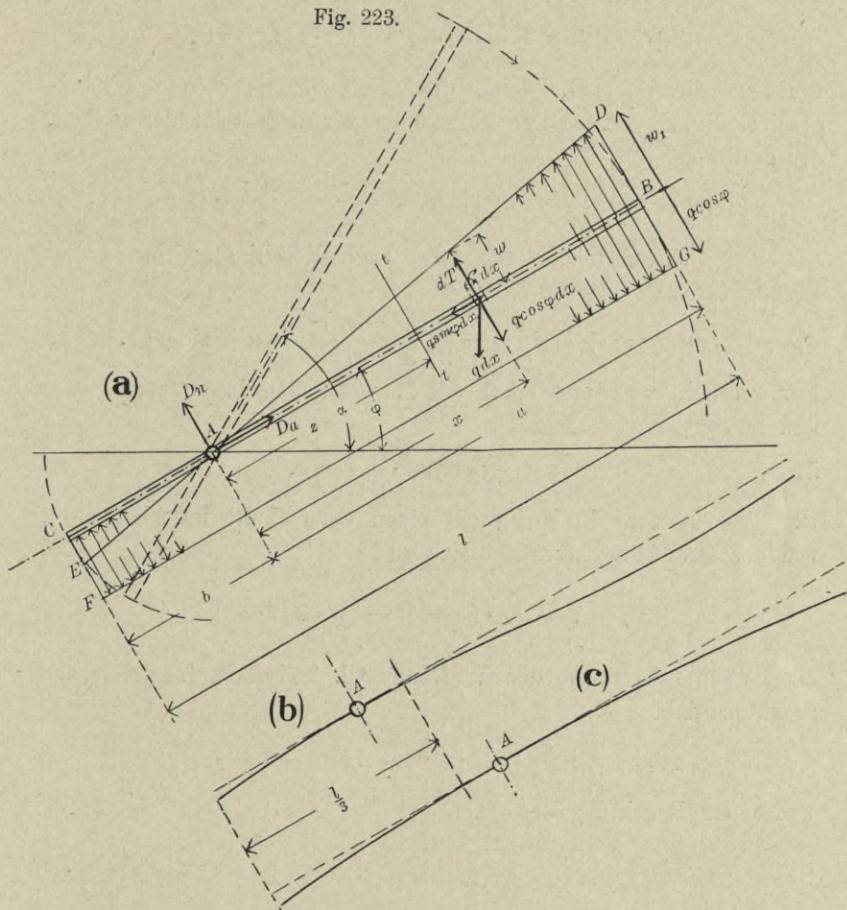
geometrisch dargestellt durch die Gerade DAE , bzw. die Dreiecksflächen ABD und ACE (Fig. 223 a). Denkt man sich nun die Gewichtskräfte der einzelnen Stabelemente zerlegt in Seitenkräfte in der Richtung der Stabachse und rechtwinklig zu ihr, so erscheint die Verteilung der letzteren über die Stablänge dargestellt durch das Rechteck $BCFG$.

Damit sind die auf Biegung des Stabes gerichteten mechanischen Einflüsse aus Fig. 223 a klar ersichtlich. Bevor zur Berechnung der Biegemomente selbst geschritten wird, sollen die Achsdrücke D_a und D_n in der Richtung der Stabachse und rechtwinklig zu ihr ermittelt werden.

Nach d'Alembert hat man bei den aus den Fig. 223a ersichtlichen Bezeichnungen für die Kräfte rechtwinklig zur Stabachse

$$\frac{w_1 \cdot a}{2} - \frac{w_1 \cdot b^2}{2a} - (a + b) q \cos \varphi + D_n = 0$$

Fig. 223.



und in bezug auf A die Momentengleichung

$$\frac{q \cdot \cos \varphi}{2} \cdot (a^2 - b^2) - \frac{w_1}{3a} (a^3 + b^3) = 0.$$

Hieraus folgt

$$2) \quad w_1 = \frac{3}{2} \cdot q \cos \varphi \cdot a \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^3 + b^3}$$

und damit aus der vorhergehenden Gleichung

$$3) \quad D_n = q \cdot \cos \varphi \left\{ a + b - \frac{3}{4} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^3 + b^3} \right\}.$$

Für die Kräfte in der Richtung der Stabachse erhält man unter Berücksichtigung der Fliehkraft die Gleichung

$$(a + b) q \sin \alpha - \frac{\omega^2 \cdot q}{2g} \cdot (a^2 - b^2) - D_n = 0,$$

worin ω die augenblickliche, dem $\sphericalangle \varphi$ entsprechende Winkelgeschwindigkeit ist. Diese entnehmen wir dem Satz der Arbeit, der ergibt

$$q(a + b) \left(\frac{a - b}{2} \right) (\sin \alpha - \sin \varphi) = \frac{\omega^2 \cdot J}{2} = \frac{\omega^2 \cdot q}{2g} \cdot \left(\frac{a^3 + b^3}{3} \right).$$

Aus beiden Gleichungen folgt nach Beseitigung von ω und Lösung für D_n

$$4) \quad D_n = q \left\{ (a + b) \sin \varphi - \frac{3}{2} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^3 + b^3} (\sin \alpha - \sin \varphi) \right\}.$$

Für ε erhält man aus Gl. 1 und 2, wenn man in ersterer $x = a$ und $w = w_1$ setzt

$$5) \quad \varepsilon = \frac{3}{2} g \cos \varphi \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^3 + b^3}.$$

Das Biegemoment in bezug auf einen Querschnitt im Abstände z von der Drehachse berechnet sich zu

$$M_z = \int_z^a w \cdot dx \cdot (x - z) - \int_z^a q dx (x - z),$$

oder, wenn man für w den Wert aus Gl. 1 einsetzt, integriert und zusammenzieht

$$M_z = \frac{q}{2} \left\{ \frac{\varepsilon}{3g} (2a^3 + z^3 - 3za^2) - (a - z)^2 \right\}$$

und unter Beachtung der Gl. 5

$$6) \quad \dots M_z = \frac{q}{2} \left\{ \frac{\cos \varphi}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^3 + b^3} (2a^3 + z^3 - 3za^2) - (a - z)^2 \right\}.$$

Eine ähnliche Gleichung würde sich für das Stabende b aufstellen lassen. Es möge nun noch der Abstand z_1 von der Achse ermittelt werden, für den M_z zu einem Maximum wird. Die Differentiation der Gl. 6 nach z ergibt

$$7) \quad \frac{dM_z}{dz} = q \left\{ \frac{3}{2} \cos \varphi \frac{a^2 - b^2}{a^3 + b^3} \left(\frac{z^2 - a^2}{2} \right) + (a - z) \right\}.$$

Aus $dM_z:dz=0$ erhält man

$$8) \quad z_1 = \frac{4}{3} \frac{a^3 + b^3}{\cos \varphi (a^2 - b^2)} - a.$$

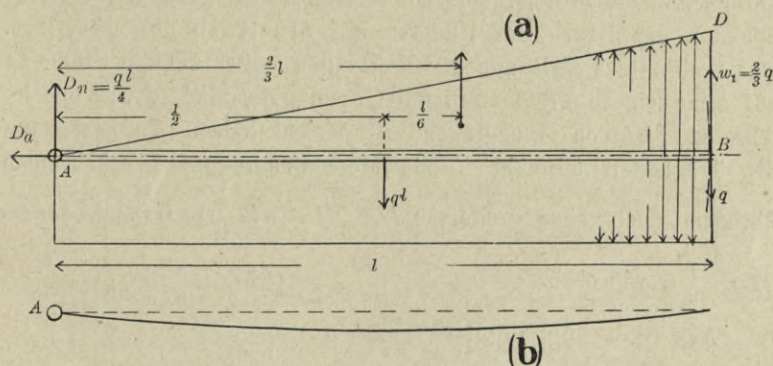
Von einer Einfügung dieses Wertes in Gl. 6 zur Bildung eines allgemeinen Ausdruckes für $M_{z_{max}}$ soll hier abgesehen werden.

Die Querkraft Q_z für irgend einen Querschnitt tt ist durch Gl. 7 bekannt (vgl. Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, 1. Teil, Aufl. 2, S. 178).

Die Achsialkraft im Schnitt tt erhält man aus der Fliehkraft und der achsialen Gewichtskomponente des Stabendes rechts vom Schnitt zu

$$9) \quad N_z = q \left\{ \frac{3}{2} \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - z^2)}{a^3 + b^3} (\sin \alpha - \sin \varphi) - (a - z) \sin \varphi \right\}.$$

Fig. 224.



Nachdem die Werte M_z , Q_z , und N_z für alle Stabquerschnitte bekannt geworden, können die auftretenden Spannungen und Formänderungen nach den Lehren der Elastizität in üblicher Weise berechnet werden.

Eine weitere Untersuchung ergibt, daß die Biegemomente in allen Stabquerschnitten gleichsinnig sind, in der Biegelinie also kein Wendepunkt existiert, wenn die Drehachse A innerhalb des mittleren Drittels der Stablänge sich befindet. Liegt sie in einem der äußeren Drittel, so gibt es in dem längeren Stabende a einen

Momenten-Nullquerschnitt, dessen Lage aus Gl. 6 mit $M_z = 0$ gefunden werden kann, und beiderseits desselben haben die Biegemomente entgegengesetzte Vorzeichen (vgl. Fig. 223 b u. c und 224 b).

Besonderes Interesse bietet der Fall, wo die Drehachse sich am Ende des Stabes befindet, eine der Längen, etwa b , gleich Null und die andere $a = l$ ist (Fig. 224 a). Damit folgt aus Gl. 2 $w_1 = \frac{3}{2} q \cos \varphi$ und für die wagerechte Lage des Stabes $\varphi = 0$, $w_1 = \frac{3}{2} q$. Aus Gl. 3 folgt weiter $D_n = \frac{1}{4} q \cdot l \cos \varphi$ und für die wagerechte Lage $\varphi = 0$ $D_n = \frac{1}{4} q \cdot l$. Der Stab drückt jetzt mit einem Viertel seines Gewichtes auf die Achse und ruft in ihr als Gegenwirkung einen gleichen Stützdruck hervor. Wäre der Stab an beiden Enden gestützt, so würde der Stützdruck in A gleich ein Halb seines Gewichtes sein. Beseitigt man also bei einem auf zwei Endstützen ruhenden, über seine Länge gleichmäßig belasteten Stabe plötzlich die eine Stütze, so daß er aus dem Zustande der Ruhe in den einer beschleunigten Drehbewegung um die andere Stütze übergeht, so vermindert sich dadurch augenblicklich der Druck der letzteren auf ein Halb des vorherigen. Der Stab stützt sich nun gewissermaßen außer auf die Stütze A auf seine eigene Trägheit, deren Gesamtwiderstand T wir uns im Abstände $\frac{2}{3}l$ von A angreifend zu denken haben. In bezug auf den Trägheitsmittelpunkt T als Momentendrehpunkt erhält man übrigens auch ohne weiteres $D_n \cdot \frac{2}{3}l - ql \cdot \frac{l}{6} = 0$ und daraus $D_n = \frac{ql}{4}$, wie oben.

Aus Gl. 4 folgt mit $b = 0$ und $a = l$

$$D_a = ql \cdot \left(\frac{5}{2} \sin \varphi - \frac{3}{2} \sin \alpha \right).$$

Mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, Bewegung aus lotrechter Ruhestellung, ist für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $D_a = ql$, für $\varphi = 0$, $D_a = -\frac{3}{2} \cdot ql$ und für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $D_a = -4ql$. Schwingt der Stab aus seiner lotrecht aufwärts gerichteten Ruhestellung abwärts, so ruft er in dem Augenblicke, in dem er sich lotrecht unter der Achse befindet, in dieser einen aufwärts gerichteten Stützdruck gleich seinem vierfachen Gewicht hervor. Ebenso würde ein Turner bei Ausführung der „Riesen-

der Pleuelstange nur verschwindend kleinen Einfluß hat, soll sie hier außer Acht bleiben und nur die Relativbewegung der Pleuelstange zum Maschinengestell in Betracht gezogen werden. — Sowohl die Verschiebung der Pleuelstange mit dem Punkt A als ihre Drehung um diesen Punkt sind periodisch beschleunigte Bewegungen.

Die Beschleunigung der reinen Verschiebung in der Richtung der Kolbenstange ist wie diejenige des Punktes A nach Gl. 30 S. 226 für alle Punkte der Stange $p = -r \cos \varphi \cdot \omega^2$, und die Winkelbeschleunigung nach S. 232

$$\varepsilon = \frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\frac{r}{l} \cdot \sin \varphi \omega^2.$$

Die der beschleunigten Verschiebung entsprechenden Trägheitswiderstände sind der Beschleunigung entgegengesetzt gerichtet und unter der Voraussetzung prismatischer Form der des Schaftes der Pleuelstange gleichmäßig über deren Länge verteilt (vgl. Fig. 225).

Es soll hier ausschließlich die Biegung der Pleuelstange durch die Trägheitswiderstände untersucht und Formeln für die Biegemomente aufgestellt werden.

Ist $m = \frac{q}{g}$ die Masse und q das Gewicht der Stange für die Längeneinheit, so ist für diese der Trägheitswiderstand im wagerechten Sinne $w = -m \cdot p$ und derjenige rechtwinklig zur Stangenrichtung $w_n = -m \cdot p \sin \psi$, oder, da $\sin \psi = (r:l) \sin \varphi$ und $p = -\cos \varphi r \omega^2$

$$w_n = m \frac{r^2}{l} \omega^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Dieser Trägheitswiderstand kann als gleichmäßig verteilte Belastung pro Längeneinheit der in A und B gestützten Stange angesehen werden. Er erzeugt in einem Querschnitte im Abstände x von A ein Biegemoment

$$1) \quad M'_x = w_n \frac{x}{2} (l - x) = \frac{m r^2}{l} \omega^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \frac{x}{2} (l - x),$$

das in der Stangenmitte für $x = l/2$ seinen relativen Größtwert

$$2) \quad M'_{x_{max}} = \frac{m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \sin 2 \varphi l}{16} \text{ annimmt.}$$

Mit $2 \varphi = \frac{\pi}{2}$ und $2 \varphi = \frac{3}{2} \pi$ geht $M'_{x_{max}}$ in seinen absoluten Größtwert $\pm (m \cdot r^2 \cdot \omega^2 l) : 16$ über.

Der der Winkelbeschleunigung ε entsprechende Trägheitswiderstand beträgt im Abstände x von A für die Längeneinheit der Stange $w = -\varepsilon \cdot x m$, d. i. mit $\varepsilon = -\frac{r}{l} \sin \varphi \cdot \omega^2$

$$3) \quad w = \frac{m r}{l} \omega^2 \sin \varphi \cdot x$$

und am Stangenende für $x = l$

$$4) \quad w_1 = m r \cdot \omega^2 \sin \varphi.$$

Das Dreieck ABC drückt die Verteilung der Trägheitswiderstände über die Stangenlänge aus. Die Stange erscheint dadurch ebenso belastet, wie ein in A und B gestützter Balken mit geradlinig ansteigender Belastung. Die dabei in A und B entstehenden Stützdrücke sind

$$A = \frac{w_1 l}{6} \quad \text{und} \quad B = \frac{w_1 l}{3}$$

und das in einem Stabquerschnitte im Abstände x von A erzeugte Biegemoment erhält man in bekannter Weise zu

$$M_x'' = A \cdot x - w_1 \frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3},$$

woraus nach Einfügung der Werte für A und w_1 folgt

$$5) \quad M_x'' = m \cdot \frac{r}{l} \omega^2 \sin \varphi \frac{(l^2 x - x^3)}{6}.$$

Im Abstände $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ wird M_x zu einem relativen Maximum,

$$M_{x_{max}}'' = m r \omega^2 \sin \varphi \frac{l^2}{9 \cdot \sqrt{3}}, \text{ dessen absoluter Größtwert für } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

und $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ gleich $\pm m r \omega^2 \frac{l^2}{9 \cdot \sqrt{3}}$ wird. Die in den Gl. 1 und 5

allgemein berechneten Biegemomente wirken natürlich in den einzelnen Stangenquerschnitten zusammen, und zwar sind sie im ersten Quadranten beide positiv, im vierten beide negativ, im zweiten und dritten Quadranten dagegen ungleichsinnig. Im Zusammenwirken beider werden also im ersten und vierten Quadranten größte Biegemomente entstehen.

Die Addition der Gl. 1 und 5 ergibt

$$6) \quad M_x = M_x' + M_x'' = m \cdot \frac{r}{l} \omega^2 \sin \varphi \left\{ \cos \varphi \cdot r x (l - x) + \frac{l^2 x - x^3}{3} \right\}.$$

M_x erscheint hier als Funktion der beiden Veränderlichen x und φ . Bei der Frage nach dem Größtwert von M_x stellen wir zunächst fest, daß das erste Glied in der Klammer der Gl. 6 bei allen Werten von φ für $x = \frac{l}{2}$, das zweite für $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,58l$ zu einem partiellen Maximum wird. Der Einfachheit halber werde hier ein Mittelwert für x , und zwar in Rücksicht auf den größeren Beitrag des zweiten Gliedes $x = 0,56l$ angenommen. Die damit in Kauf genommene Unsicherheit ist unerheblich, weil M_x in der Nähe seines Größtwertes mit x sich nur wenig ändert. Setzt man noch allgemein $r:l = n$, so geht Gl. 6 über in

$$7) \quad M_{x \max \text{ part}} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot n \cdot \sin \varphi \cdot l^3}{2} \{0,246 \cdot n \cdot \cos \varphi + 0,128\}.$$

Dieser Ausdruck geht hier

$$8) \quad \dots \cos \varphi = -\frac{0,13}{n} + \sqrt{0,50 + \left(\frac{0,15}{n}\right)^2}$$

in einen Größtwert $M_{x \max \text{ tot}}$ über.

Von einer Einführung der Werte von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ in Gl. 7 gemäß Gl. 8 soll hier abgesehen werden, da bei gegebenem n die Berechnung von $M_{x \max \text{ tot}}$ mit Hilfe beider Gleichungen in einfacher Weise geschehen kann. Ist beispielsweise $r:l = n = 0,30$, so wird $\cos \varphi = 0,40$, $\sin \varphi = 0,92$, $\varphi = 66\frac{1}{2}^\circ$, und man erhält

$$M_{x \max} = 0,15 \cdot m \cdot \omega^2 l^3 (0,0295 + 0,128) = 0,0235 \cdot m \omega^2 l^3.$$

Die erste Ziffer in der Klammer entspricht dem Einfluß der beschleunigten Parallelverschiebung, die zweite der beschleunigten Drehbewegung um A , in die wir die Gesamtbewegung der Stange zerlegt haben. Bei Vernachlässigung des Einflusses der ersteren auf das Biegemoment würde in dem obigen Werte für $M_{x \max}$ die erste Ziffer der Klammer und allgemein in dem Ausdruck für M_x (Gl. 6) der erste Summand in der Klammer verschwinden. Der verbleibende Ausdruck für M_x würde für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $x = l : \sqrt{3}$

$$\text{liefere (S. 321), } M_{x \max} = M_{x \max}'' = m r \omega^2 l^2 : (9 \cdot \sqrt{3}) = m \cdot \frac{r \omega^2 \cdot l^3}{l \cdot 9 \cdot \sqrt{3}} \\ = 0,064 m n \omega^2 \cdot l^3, \text{ und mit } n = 0,30 \text{ wie oben, } M_{x \max} = 0,0192 m \omega^2 l^3.$$

Durchmesser wie die Kurbelkreise beschreiben und folglich auch in jedem Augenblicke die gleiche Beschleunigung erfahren. Nur die Beschleunigung rechtwinklig zur Stabachse ist auf die hier allein zu behandelnde Biegung der Stange von Einfluß. Diese Beschleunigung ist nach S. 226 $p_n = -r \sin \varphi \omega^2$, und demnach der Trägheitswiderstand für die Längeneinheit des Stabes, wenn m dessen Masse gleichfalls per Längeneinheit ist

$$w_n = -m p_n = m r \cdot \sin \varphi \omega^2.$$

Das dadurch in der Stangenmitte erzeugte relativ größte Biegemoment erhält man danach zu

$$M_{max\ part} = \frac{w_n \cdot l^2}{8} = \frac{m r \cdot \sin \varphi \cdot \omega^2 \cdot l^2}{8}.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ erhält man

$$M_{max} = + \frac{m r \cdot \omega^2 \cdot l^2}{8}.$$

4. Biegung einer rotierenden Welle, kritische Geschwindigkeit.

Auf einer etwa zweifach drehbar gelagerten Welle BC (Fig. 227) sei ein Körper bei A so befestigt, daß sein Schwerpunkt um irgend ein kleines Maß c von der mathematischen Achse der Welle absteht. Die Masse der Welle sei im Verhältnis zu der des Körpers so gering, daß sie hier vernachlässigt werden kann. Wenn die Welle sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω dreht, so wird infolge der „Fliehkraft“, d. h. des Trägheitswiderstandes, den der Körper seiner Zentripetalbeschleunigung entgegensetzt, eine elastische Biegung der Welle um ein Maß z eintreten. Die infolge dieser Ausbiegung in den Stabquerschnitten auftretenden Spannungsmomente suchen die Welle an der Befestigungsstelle des Körpers, die in der Wellenmitte liegen möge, mit einer bestimmten z verhältnismäßigen Kraft K in seine gerade Form zurückzubiegen. Diese Biegekraft hat die erforderliche Zentripetalbeschleunigung zu leisten und ist dadurch, wie die Ausbiegung z der Welle, ihrer Größe nach bestimmt. Um hier den übrigens nur verhältnismäßig geringen Einfluß des Gewichtes

auf die Biegung der Welle auszuschließen, werde die Welle in lotrechter Lage angenommen.

Zwischen z und K besteht nun zunächst die Beziehung

$$1) \quad \dots z = \frac{K \cdot l^3}{48 J E},$$

Fig. 227.

(vgl. Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, I. Teil, Aufl. 2, S. 118). Ferner bedingt die Bewegung des Körperschwerpunktes im Kreise mit dem Radius $c + z$, wenn m die Masse des Körpers ist, eine Zentripetalkraft

$$2) \quad Z = m \cdot \omega^2 \cdot (c + z).$$

Setzt man die Werte für K und Z , wie sie aus den Gl. 1 und 2 sich ergeben, einander gleich und löst für z , so folgt

$$3) \quad \dots z = \frac{c}{\frac{48 J E}{m \omega^2 l^3} - 1}$$

oder, wenn man $\frac{48 J E}{l^3} = k$ setzt,

$$3a) \quad \dots z = c \frac{m \omega^2}{k - m \omega^2}.$$

Der Radius r des Kreises, in dem jetzt der Schwerpunkt S um BC sich bewegt, ist

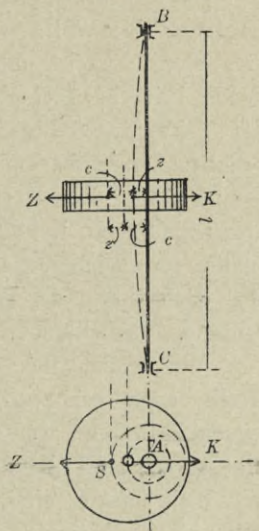
$$3b) \quad r = c + z = c \frac{k}{k - m \omega^2} \quad (\text{Fig. 229}).$$

Aus Gl. 1 und 3 folgt

$$4) \quad \dots K = c \frac{m \omega^2 k}{k - m \omega^2}.$$

Nachdem damit die biegende Kraft K bekannt geworden ist, können die Biegemomente in üblicher Weise berechnet werden.

Verschwindet die Exzentrizität, bzw. ist eine solche nicht vorhanden, so wird mit $c = 0$ im allgemeinen auch $z = 0$. Nur in dem wichtigen Sonderfalle, wo die Winkelgeschwindigkeit ω einen solchen Wert annimmt, daß auch der Nenner des Bruches rechts-seits der Gl. 3 gleich Null wird, erscheint z in der unbestimmten Form $0/0$, kann also jeden beliebigen Wert annehmen. Dieser Wert



von ω , die sogenannte „kritische Geschwindigkeit“ der Welle berechnet sich aus der Gleichung $k - \omega^2 m = 0$ zu

$$5) \quad \omega_K = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Der Ausdruck für ω_k bleibt derselbe auch für jede andere Lagerung der Welle, wobei nur k einen anderen Wert annimmt.

Beim Eintritt dieser kritischen Geschwindigkeit würde die Welle keinerlei Sicherheit gegen Bruch mehr bieten, auch wenn der Schwerpunkt des auf ihr befestigten Körpers so genau wie praktisch erreichbar mit der mathematischen Achse der Welle zusammenfällt. Der Körper befindet sich bei der aus Gl. 5 folgenden Geschwindigkeit im Sinne rechtwinklig zur Wellenachse gewissermaßen im unsicheren, labilen Gleichgewicht, ähnlich wie ein knickender Stab unter der Wirkung der sogen. Knickkraft (vgl. Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, Bd. I, Aufl. 2, S. 277f.).

Wir wollen uns den Vorgang der seitlichen Ausbiegung der Welle auch bei zentrischer Lage des Körperschwerpunkts noch einmal wie folgt vergegenwärtigen: Die Winkelgeschwindigkeit ω wachse von Null allmählich an. In irgend einem Augenblicke erfahre die Welle durch eine vorübergehend wirkende Ursache eine kleine seitliche Ausbiegung, die an der Befestigungsstelle des Körpers einen Wert δ aufweise. Die dieser Biegung sich widersetzen-
de elastische Kraft würde sein $K_\delta = 48 JE \delta : l^3 = k \cdot \delta$. Infolge der Ausbiegung δ bewegt sich der Körperschwerpunkt in einem Kreise von gleichem Radius δ und dies bedingt eine Fliehkraft $Z = m \cdot \delta \cdot \omega^2$. Solange nun $K_\delta > Z$ ist, kehrt die Welle nach Beseitigung der vorübergehend wirksamen biegenden Ursache in ihre gerade Form, der Körper in seine zentrale Lage zurück, in der $K_\delta = Z = 0$ ist. Sobald aber ω einen solchen Wert erreicht, daß $K_\delta = Z$, also $k \cdot \delta = m \delta \omega^2$ wird, kehrt die Welle nach Beseitigung der vorübergehend seitlich biegenden Ursache nicht wieder in ihre gerade Form zurück, sondern vermag, solange die mit der Ausbiegung in den Wellenquerschnitten eintretenden Spannungen sich innerhalb der Proportionalitätsgrenze halten, in jeder Ausbiegung δ zu verharren; sie setzt einer weiteren Ausbiegung bis zum Bruch keinerlei Widerstand mehr entgegen. Daraus folgt wie oben

$$\omega = \omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Ist von vornherein bereits eine gewisse endliche Exzentrizität c vorhanden, so ergibt Gl. 3 für den Eintritt der kritischen Geschwindigkeit ω_k (Gl. 5) $z = \infty$, der Bruch der Welle tritt aber schon bei kleinerer Geschwindigkeit ω ein. Wird er verhindert und wächst ω über den Wert ω_k (Gl. 5) hinaus, so wird der Nenner des Ausdrucks für z rechtsseits Gl. 3 und damit z selbst negativ. Absolut genommen, wird z mit wachsendem ω jetzt wieder kleiner und mit $\omega = \infty$ $z = -c$. Die Gesamtexzentrizität des Schwerpunktes in bezug auf die Verbindungsgerade BC der Lager ist jetzt $c + z = c - c = 0$, d. h. der Körper dreht sich um seinen Schwerpunkt und ebenso die Welle mit der jetzt vorhandenen Ausbiegung $z = -c$ um die durch den Körperschwerpunkt gerichtete Gerade BC . Für $c = 0$, zentrische Befestigung des Körpers auf der Welle, würde diese sich jetzt wieder in gerader Form um ihre mathematische Achse drehen und zwar würde dieser Zustand eintreten, sobald der Nenner des Ausdrucks für z rechtsseits Gl. 3 mit wachsendem ω durch Null gegangen ist.

Das Ergebnis dieser theoretischen Untersuchung stimmt mit der praktischen Erfahrung überein. Die überraschende Tatsache, daß Wellen über die kritische Geschwindigkeit hinaus laufen können, ohne zu brechen, ja daß sie selbst ruhiger laufen als bei Geschwindigkeiten, die sich von unten her der kritischen nähern, ist zuerst auf praktischem Wege, nämlich durch Versuche des schwedischen Ingenieurs Laval, für Zwecke der Konstruktion von Dampfturbinen angestellt, erkannt worden. Der Bewegungsvorgang und das elastische Verhalten der Welle bis zum Eintritt der kritischen Geschwindigkeit erscheinen in ihrer Wesenheit auch ohne weiteres durchaus erklärlich; nicht so unmittelbar verständlich sind die Bewegungs- und Formänderungsvorgänge des Körpers mit der Welle jenseits der kritischen Geschwindigkeit. Zur tunlichsten Klarlegung derselben wollen wir uns die Welle zunächst so schwach, d. h. so lang und so dünn und die Masse des Körpers so groß vorstellen, daß ein in die Welle hineingeschicktes Drehmoment nur eine Drehung des bis dahin ruhenden Körpers um seinen Schwerpunkt, aber selbst bei etwas exzentrischer Lage des letzteren zur Wellenachse keinerlei Bewegung desselben hervorrufen würde. Der Achspunkt A der Welle an der Befestigungsstelle des Körpers auf dieser würde dabei einen Kreis mit dem

Radius c um den Schwerpunkt des Körpers beschreiben und die Welle selbst bei jeder Umdrehung eine zwischen $z = 0$ und $z = 2c$ veränderliche Durchbiegung erfahren (Fig. 228). Die wirkliche, völlig genaue Herstellung dieses Bewegungszustandes würde allerdings praktischen Schwierigkeiten begegnen, aber als Grenzzustand ist er unserer Vorstellung durchaus zugänglich und wir wollen, von ihm ausgehend, den Bewegungsvorgang jenseits der kritischen Geschwindigkeit verfolgen. Die letztere würde sich bei der hier zunächst gemachten Annahme — sehr große Länge der Welle usw. — sehr klein ergeben, so daß sie alsbald nach beginnender Einwirkung des Drehmomentes bzw. nach Anfang der beschleunigten Drehbewegung überschritten wäre. Für $l = \infty$ würde die kritische Geschwindigkeit sogar schon mit dem Anfang der Bewegung eintreten. Für diesen Grenzwert von l würde nämlich nach Gl. 5 $\omega_k = 0$ sein. Zu irgend einer Zeit sei nun jedenfalls eine Drehgeschwindigkeit $\omega > \omega_k$ eingetreten und werde durch dauernde Einwirkung eines die passiven Bewegungswiderstände überwindenden Drehmomentes konstant erhalten. Die anfängliche Kreisbewegung des Achspunktes A mit dem Radius c um den noch ruhenden Schwerpunkt S des Körpers bestehe noch.

Jetzt wollen wir uns die Welle allmählich steifer werdend denken, etwa dadurch, daß wir ihre freie Länge l vermindern, indem wir vielleicht ihre Lager B und C einander nähern. Damit wächst dann auch die mit der Ausbiegung z im Achspunkt A auftretende, auf Verminderung der Biegung gerichtete Biegekraft $K = 48JEz : l^3$ (Gl. 1), die für $l = \infty$ gleich Null sein würde, allmählich an. Da ihre Richtung immer von der jeweiligen Lage des Achspunktes A_1 nach dem Punkte A auf der Lagergeraden BC zeigt (vergl. Fig. 228), so muß sie eine Annäherung des Körperschwerpunktes S an A und zwar in der Richtung A_1A zur Folge haben. Die Grenze dieser Annäherung hängt, wie sich zeigen wird, von der Drehgeschwindigkeit ω ab; und wenn die einem bestimmten ω entsprechende Annäherung eingetreten ist, werden sich sowohl S wie A_1 in Kreisen um A bewegen. Dabei können, wie weiter unten noch gezeigt werden soll, beide stets nur auf derselben Seite von A liegen und ihre Verbindungsgerade A_1S kann nach Eintritt der Beharrung des Bewegungszustandes nur durch A gerichtet sein. Die kreisförmige Bewegung beider Punkte

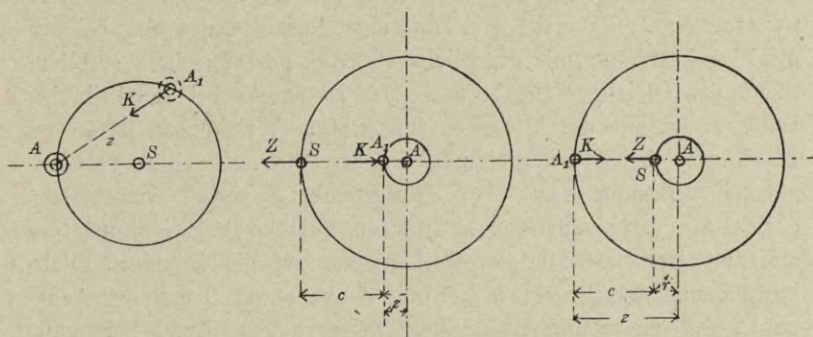
A_1 und S folgt aus der allseitigen Symmetrie des Bewegungsvorganges, die bei Ausschluß einseitig stoßweiser Einwirkungen auf die bewegte Masse angenommen werden kann.

Ist z die augenblickliche Ausbiegung AA_1 der Welle (Fig. 230), also $z \cdot k$ die entsprechende nach A gerichtete Biegekraft, $r = SA$ der Abstand des Körperschwerpunktes S von A , der Radius der

Fig. 228.

Fig. 229.

Fig. 230.



Kreisbahn von S , also $\omega^2 \cdot r$ die Zentripetalbeschleunigung von S , die nur durch die Biegekraft $k \cdot z$ geleistet werden kann, so erhält man aus dem Grundgesetz der Beschleunigung $k \cdot z = m \cdot \omega^2 \cdot r$ und mit $z = c + r$ (vgl. Fig. 230) und Lösung für r

$$6) \quad \dots r = c \cdot \frac{k}{m\omega^2 - k},$$

mit diesem Werte für r ergibt sich

$$7) \quad \dots z = c \cdot \frac{m\omega^2}{m\omega^2 - k}.$$

Die Ausdrücke für r und z (Gl. 6 und 7) unterscheiden sich von demjenigen in Gl. 3a und 3b nur durch das Vorzeichen, d. h. wenn ω den kritischen Wert ω_k überschreitet, ändern r und z beim Durchgang durch das Unendliche ihre Vorzeichen.

Geometrisch stellen die in Fig. 231 gezeichneten Linien die in Gl. 6 und 7 bzw. Gl. 3a und 3b ausgedrückten Abhängigkeiten zwischen dem Radius r der Kreisbahn des Körperschwerpunktes und der elastischen Ausbiegung z der Welle einerseits und der

Winkelgeschwindigkeit ω andererseits dar. Beide Linien weisen je einen positiven und einen negativen Zweig auf. Sie schmiegen sich der ω -Achse bzw. der zu dieser rechtwinkligen Geraden nn um so mehr an, je kleiner die Exzentrizität c ist. Im Grenzfalle $c = 0$ fallen sie völlig mit beiden Geraden zusammen.

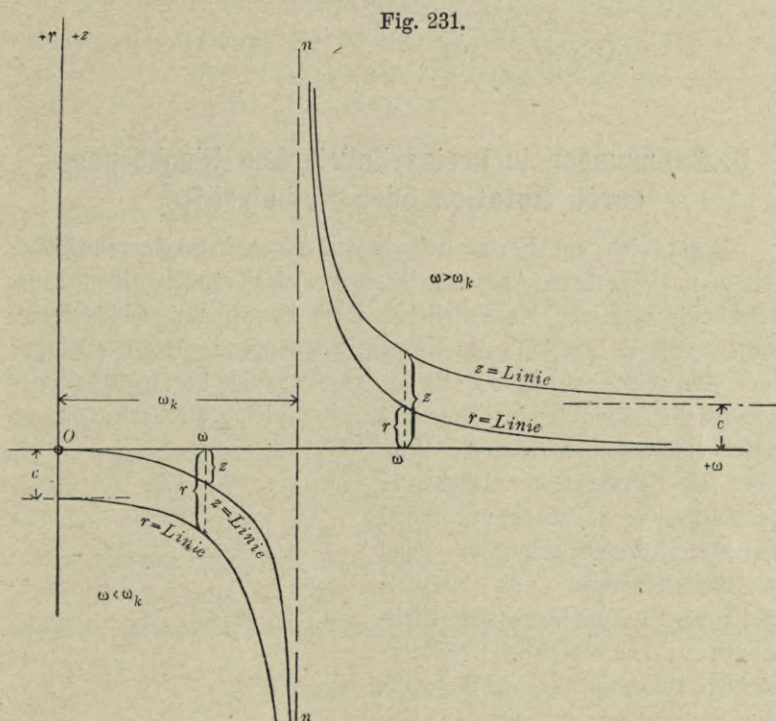
Es möge nun noch dargelegt werden, daß die Punkte SA_1 im Beharrungszustande der Bewegung immer auf derselben Seite des Punktes A der Lagergeraden BC liegen müssen. Bei Geschwindigkeiten ω unterhalb der kritischen (Fig. 229) ist das ohne weiteres klar. Es stellt sich diejenige Ausbiegung z ein, bei der die Biegekraft $k \cdot z$ mit der Fliehkraft $Z = r\omega^2 m$ sich in stabilem Sinne das Gleichgewicht halten. Das ist anders bei Geschwindigkeiten ω jenseits der kritischen (Fig. 230). Würde man jetzt etwa durch eine bei A_1 angreifende, in der Richtung $A_1 A$ vorübergehend wirksame Kraft den Schwerpunkt S soweit verschieben, daß S über A hinaustrete, so würden auch nach Beseitigung der störenden Ursache unter der Wirkung der nun gleichsinnigen Fliehkraft Z und der Biegekraft $k \cdot z$ der Schwerpunkt S und der Achspunkt A_1 sich in demselben Sinne weiter bewegen und Beharrung erst wieder eintreten, wenn beide Punkte nach einer nicht so leicht genau zu verfolgenden Zwischenbewegung sich wieder in der in Fig. 230 gezeichneten gegenseitigen Lage eingefunden haben.

Die Bewegung des Körpers in dieser Lage zur mathematischen Drehachse A ist in der Tat eine stabile. Das ergibt sich schon aus der Erwägung, daß eine Änderung der durch Gl. 6 bestimmten Kreisbahn des Körperschwerpunktes nur durch eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Winkelgeschwindigkeit ω , also durch eine Energieänderung herbeigeführt werden kann. Von einem weiteren Nachweise dieser auch durch die Erfahrung erhärteten Tatsache soll daher hier abgesehen werden.

Das hauptsächlichste Unterscheidungsmerkmal der Drehbewegungen unterhalb und oberhalb der kritischen Geschwindigkeit ist das, daß jedesmal im Beharrungszustande, d. h. bei konstantem ω und r von den Kreisen, welche der Schwerpunkt S und der Achspunkt A_1 beschreiben, im Falle $\omega < \omega_k$ der erstere außen und der letztere innen liegt, während es im Falle $\omega > \omega_k$ gerade umgekehrt ist. Der Abstand beider

konzentrischen Kreise ist in beiden Fällen gleich c . Mit $c = 0$ fallen beide, sofern $\omega \geq \omega_k$, in den Punkt A zusammen.

Die Nutzanwendung der vorstehend dargelegten Ergebnisse führt zu der Regel: „Jede Welle, die ihrem Zwecke entsprechend mit einer bestimmten Geschwindigkeit sich drehen muß, ist in ihrer Länge und Stärke so zu bemessen, daß ihre kritische Geschwindigkeit



$\omega_k = \sqrt{k:m}$ entweder größer oder kleiner ist als ihre Betriebsgeschwindigkeit ω_b .“ Ist bei schnell laufenden Wellen $\omega_k < \omega_b$, so ist es geboten, dafür zu sorgen, daß die Beschleunigung über ω_k hinaus tunlichst schnell geschieht, damit schädliche Beanspruchungen von Welle und Lager vermieden werden.

Beispiel: Es sei $l = 300$ cm, die Stärke der Welle 16 cm, $E = 2000000$ at, das Schwungrad habe eine Masse $m = G : g = 10000$ kg : 981 cm² = 10,16 kg/cm.

$$\text{Dann ist } k = \frac{48 \cdot JE}{l^3} = \frac{48 \cdot 3,14 \cdot 8^4 \cdot 2000000}{4 \cdot 300^3} = 11400 \text{ kg/cm}$$

$$\text{und } \omega_k = \sqrt{\frac{11400}{10,16}} = 33,5 = 10,07 \pi,$$

das sind 300 Umdrehungen per Minute. Läuft die Welle mit 250 Umdrehungen, so daß $\omega = 26$ ist, so ergibt sich bei einer Exzentrizität von 1 cm die elastische

$$\text{Ausbiegung zu } z = 1 \cdot \frac{10,16 \cdot 26^2}{10,16 \cdot 26^2 - 11400} = 1,5 \text{ cm.}$$

Die Biegekraft wird $z \cdot k = 1,5 \cdot 11400 = 17100 \text{ kg}$ und $r = z + c = 2,5 \text{ cm}$.

Läuft die Welle dagegen mit 750 Umdrehungen, also $\omega = 78$, so wird

$$z = 1 \cdot \frac{10,16 \cdot 78^2}{10,16 \cdot 78^2 - 11400} = 1,22 \text{ cm, } K = z \cdot k = 13900 \text{ kg}$$

$$\text{und } r = z - c = 0,22 \text{ cm.}$$

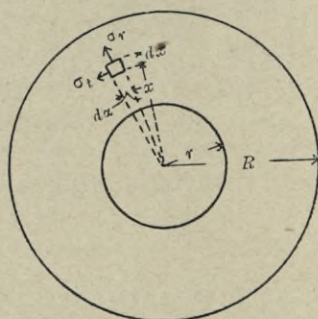
5. Spannungen in kreiszylindrischen Ringkörpern durch Rotation oder Radialkräfte.

Dreht sich ein Körper mit irgend einer Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse, so erzeugen die Trägheitswiderstände, welche die einzelnen Massenteilchen ihrer Zentripetalbeschleunigung entgegensetzen, innerhalb des Körpers Spannungen. Hat der Körper die Form eines an beiden Enden rechtwinklig begrenzten kreiszylindrischen Ringkörpers, dessen Achse zugleich Drehachse ist, so entstehen, wenn man von der Wirkung der Schwerkraft absieht, in konzentrischen Schnitten nur radial gerichtete Normalspannungen σ_r , und in Radialschnitten nur Normalspannungen σ_t , die tangentielle Richtungen zu konzentrischen Zylinderflächen aufweisen (vgl. Fig. 232). Die Spannungen σ_r verteilen sich über jede konzentrische Schnittfläche gleichmäßig, sind aber wie die Spannungen σ_t mit dem Radius x dieser Flächen veränderlich.

In Schnitten rechtwinklig zur Zylinderachse treten infolge der Rotation keine Normalspannungen auf.

Ähnliche Spannungen σ_r und σ_t erzeugen etwa an der äußeren oder inneren Oberfläche des Ringes oder an beiden angreifende, gleichmäßig

Fig. 232.



über sie verteilte Radialkräfte, wie sie etwa durch innere oder äußere Flüssigkeitsdrucke in geschlossenen, zylindrischen Gefäßen entstehen, mit dem einzigen Unterschiede, daß in solchen Fällen auch Normalspannungen σ_a in Schnitten rechtwinklig zur Zylinderachse auftreten.

Für die Verteilung der Spannungen σ_r und σ_t innerhalb des Ringkörpers, einerlei ob sie durch Rotation oder äußere, gleichmäßig über die Oberfläche verteilte Radialkräfte erzeugt werden, gelten denn auch, wie sich zeigen wird, dieselben Grundgleichungen.

Wir betrachten den Spannungszustand an einem durch zwei unter $d\alpha$ gegeneinander geneigte Radialschnitte und zwei im radialen Abstände dx voneinander verlaufende konzentrische Schnitte (vgl. Fig. 232) begrenzten Körperelement, dessen Länge (normal zur Bildfläche) gleich eins gesetzt werde.

Ist m die Masse der Volumeneinheit des homogen gedachten Körpers, so ist die Masse des bezeichneten Körperelementes

$$dm = d\alpha \cdot x \cdot dx \cdot m \quad (\text{vgl. Fig. 233}).$$

Sind dR und dR_1 , die in den Schnitten ab und cd , und dT die in den Schnitten ac und bd wirkenden Spannkraften und ist dZ die auf das Teilchen dm wirkende Zentrifugalkraft, so führt das Gleichgewicht dieser Kräfte, die wir uns in der Bildebene wirkend zu denken haben, zu folgenden beiden Gleichungen:

$$dR_1 + dZ - dR - 2 \cdot dT \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} = 0,$$

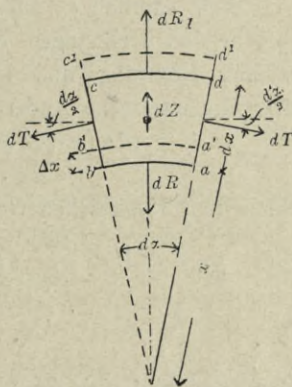
$$dT \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} - dT \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} = 0.$$

Die erste Gleichung vereinfacht sich mit $\sin \frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$, und wenn man $dR_1 = dR + d(dR)$ setzt, sofort in

$$1) \quad d(dR) + dZ - dT \cdot d\alpha = 0.$$

Die zweite Gleichung spricht nur aus, was von vornherein ersichtlich war, daß die Spannkraften dT und daher auch die Tangential-

Fig. 233.



spannungen $\sigma_t = \frac{dT}{dx}$ in gleichen Abständen x denselben Wert haben

Sind jetzt σ_r und $\sigma_r + d\sigma_r$ die Radialspannungen in den Schnitten ab und cd , so hat man $dR = x \cdot d\alpha \sigma_r$ und $d(dR) = dx \cdot d\alpha \cdot \sigma_r + x \cdot d\alpha \cdot d\sigma_r$; ferner $dT = dx \cdot \sigma_t$, $dZ = dm \cdot x \cdot \omega^2 = d\alpha \cdot x \cdot dx m x \cdot \omega^2 = d\alpha \cdot x^2 dx \cdot m \omega^2$. Damit geht Gl. 1, wenn man mit $d\alpha$ und dx dividiert, über in

$$2) \quad \sigma_r + x \cdot \frac{d\sigma_r}{dx} - \sigma_t + x^2 \cdot m \cdot \omega^2 = 0.$$

Diese eine Gleichung reicht zur Bestimmung der beiden Unbekannten σ_r und σ_t nicht aus; beide hängen aber noch durch die eintretenden Formänderungen zusammen, wodurch sich eine zweite Bestimmungsgleichung gewinnen läßt.

Sind nämlich ε_t und ε_r die den Spannungen σ_t und σ_r entsprechenden Dehnungen des Körperelementes in tangentialer und radialer Richtung und ist Δx die elastische Änderung von x , $d\Delta x$ die elastische Änderung von dx , so ist ersichtlich

$$\varepsilon_t = \frac{d\alpha(x + \Delta x - d\alpha \cdot x)}{d\alpha \cdot x} = \frac{\Delta x}{x} \quad \text{und} \quad \varepsilon_r = \frac{d\Delta x}{dx}.$$

Nach dem Hookeschen Gesetz ist nun ferner

$$3) \quad \sigma_r = \varepsilon_r E = \frac{d\Delta x}{dx} \cdot E; \quad 4) \quad \frac{d\sigma_r}{dx} = E \cdot \frac{d^2\Delta x}{dx^2} \quad \text{und}$$

$$5) \quad \dots \sigma_t = E \frac{\Delta x}{x}.$$

Damit schreibt sich Gl. 2, wenn man mit E dividiert

$$6) \quad \dots \frac{d\Delta x}{dx} + \frac{x d^2\Delta x}{dx^2} - \frac{\Delta x}{x} + \frac{m \omega^2}{E} x^2 = 0.$$

Der Kürze halber werde $m\omega^2 : E = A$ gesetzt. Durch Multiplikation der Gl. 6 mit $\frac{dx}{x}$ folgt zunächst nach entsprechender Ordnung

$$\frac{d\Delta x \cdot x - \Delta x dx}{x^2} = -d\left(\frac{d\Delta x}{dx}\right); -Ax \cdot dx.$$

Daraus erhält man durch erstmalige Integration

$$\frac{\Delta x}{x} = -\frac{d\Delta x}{dx} - \frac{Ax^2}{2} + C_1, \quad \text{oder auch}$$

$$\Delta x dx + d\Delta x \cdot x = -\frac{Ax^3 dx}{2} + C_1 x dx.$$

Die nochmalige Integration liefert

$$\Delta x \cdot x = -\frac{Ax^4}{8} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2,$$

woraus durch Division einmal mit x^2 und ein andermal mit x folgt

$$7) \quad \dots \frac{\Delta x}{x} = -\frac{Ax^2}{8} + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{x^2}, \quad \text{und}$$

$$\Delta x = -\frac{Ax^3}{8} + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}.$$

Diese letztere Gleichung nach x differenziert, liefert

$$8) \quad \dots \frac{d\Delta x}{dx} = -\frac{3}{8} Ax^2 + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{x^2}.$$

Aus den Gl. 3, 5, 7 und 8 erhält man jetzt

$$9) \quad \sigma_r = E \left(-\frac{3}{8} Ax^2 + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{x^2} \right) \quad \text{und}$$

$$10) \quad \sigma_t = E \left(-\frac{Ax^2}{8} + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{x^2} \right).$$

Diese beiden Gleichungen umfassen alle oben genannten Beanspruchungsarten; man braucht nur die Integrationskonstanten C_1 und C_2 danach zu bestimmen.

Wir wollen zunächst allgemein eine über die innere Oberfläche gleichmäßig verteilte Normalkraft p_i für die Flächeneinheit und für die äußere Oberfläche eine solche p_a voraussetzen. Dann erhält man aus Gl. 9, indem man einmal für $x=r$, $\sigma_r = p_i$ und für $x=R$, $\sigma_r = p_a$ setzt. Für die Konstanten C_1 und C_2 die beiden Bestimmungsgleichungen

$$11) \quad p_i = E \left(-\frac{3}{8} Ar^2 + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \right),$$

$$12) \quad p_a = E \left(-\frac{3}{8} AR^2 + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{R^2} \right).$$

Die Lösung C_1 und C_2 ergibt

$$13) \quad C_1 = \frac{2}{E} \left\{ \frac{p_a R^2 - p_i r^2}{R^2 - r^2} + \frac{3}{8} AE(R^2 + r^2) \right\} \quad \text{und}$$

$$14) \quad C_2 = \frac{R^2 r^2}{E} \left\{ \frac{p_a - p_i}{R^2 - r^2} + \frac{3}{8} AE \right\}.$$

Durch Einführung dieser Werte für C_1 und C_2 in Gl. 9 und 10 würde man Gleichungen für die Verteilung der Spannungen σ_r und σ_t in verschiedenen Abständen x von der Zylinderachse erhalten. Wir wollen aber, da in der Anwendung die gleichzeitige Beanspruchung durch innere oder äußere Oberflächenkräfte p_i und p_a und durch Fliehkräfte infolge Rotation kaum in Frage kommen, die Ausdrücke für σ_r und σ_t nur für die einzelnen Angriffsarten entwickeln. Ruht der Ringkörper und wirken nur Oberflächenkräfte p_a und p_i , so wird mit $\omega = 0$ auch A in obigen Ausdrücken und in Gl. 9 und 10 gleich Null, und die Einführung der Werte für C_1 und C_2 in Gl. 9 und 10 liefert

$$15) \quad \dots \sigma_r = \frac{R^2 \cdot p_a - r^2 p_i}{R^2 - r^2} - \frac{R^2 \cdot r^2 (p_a - p_i)}{x^2 (R^2 - r^2)},$$

$$16) \quad \dots \sigma_t = \frac{R^2 p_a - r^2 \cdot p_i}{R^2 - r^2} + \frac{R^2 r^2 (p_a - p_i)}{x^2 (R^2 - r^2)}.$$

Vgl. Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, II. Teil, Aufl. 2, S. 61.

Ist nur innerer Gefäßdruck vorhanden, $p_a = 0$ und p_i negativ, so wird

$$17) \quad \sigma_r = \frac{p_i r^2}{R^2 - r^2} \left(1 - \frac{R^2}{x^2} \right),$$

$$18) \quad \sigma_t = \frac{p_i r^2}{R^2 - r^2} \left(1 + \frac{R^2}{x^2} \right).$$

Am inneren Gefäßumfange $x = r$ ist $\sigma_{ri} = -p_i$, $\sigma_{ti} = p_i \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}$,
am äußeren Umfange $x = R$, $\sigma_{ra} = 0$, $\sigma_{ta} = \frac{2 p_i r^2}{R^2 - r^2}$.

Sind Oberflächenkräfte p_a und p_i nicht vorhanden, ist aber $\omega > 0$, so ergibt die Einführung der Werte für C_1 und C_2 in Gl. 9 und 10, mit $A = m \omega^2 : E$

$$19) \quad \sigma_r = \frac{3}{8} m \omega^2 \left(R^2 + r^2 - x^2 - \frac{R^2 \cdot r^2}{x^2} \right),$$

$$20) \quad \sigma_t = \frac{\omega^2 m}{8} \left(3 R^2 + 3 r^2 - x^2 + \frac{3 R^2 r^2}{x^2} \right).$$

Die Radialspannung σ_r ist nach Gl. 19 sowohl in der inneren Oberfläche $x = r$ als in der äußeren $x = R$ gleich Null, was auch

ohne besondere Untersuchung ersichtlich ist. Für $x = \sqrt{R \cdot r}$ wird σ_r zu einem Maximum, dessen Größe sich berechnet zu

$$21) \quad \sigma_{r \max} = \frac{3}{8} m \omega^2 (R - r)^2.$$

Das in Gl. 19 ausgedrückte Verteilungsgesetz für σ_r und σ_t ist durch die Linien abc und de bzw. dc in Fig. 234 und 235 geometrisch veranschaulicht. Ist $r = \frac{R}{4}$, so liegt der Scheitel der Kurve im Abstände $x = \sqrt{R \cdot r} = \frac{R}{2}$ von der Zylinderachse.

Fig. 234.

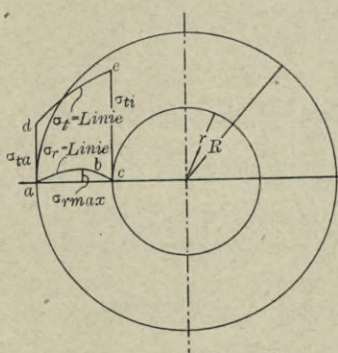
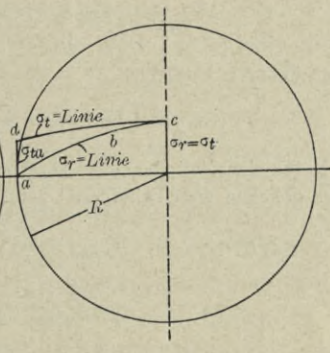


Fig. 235.



Die Tangentialspannung ist nach Gl. 20 in der inneren und äußeren Oberfläche d. h. für $x = r$ und $x = R$

$$22) \dots \sigma_{ti} = \frac{\omega^2 m}{4} (3R^2 + r^2) \quad \text{und} \quad 23) \dots \sigma_{ta} = \frac{\omega^2 m}{4} (R^2 + 3r^2).$$

Ein analytisches Maximum ist für σ_t nicht vorhanden; σ_{ti} stellt den absoluten Größtwerth dar (vgl. die Linie de , Fig. 234).

Handelt es sich um einen Vollzylinder, so verschwinden in den Gl. 19 bis 23 die Glieder mit r .

Es wird

$$19a) \quad \sigma_r = \frac{3}{8} m \omega^2 (R^2 - x^2);$$

$$20a) \quad \sigma_t = \frac{m \omega^2}{8} (3R^2 - x^2);$$

$$21a) \quad \sigma_{r \max} = \frac{3}{8} m \omega^2 R^2.$$

Der GrößtWert von σ_r tritt in der Zylinderachse mit $x = \sqrt{R \cdot 0} = 0$ ein und hat hier mit σ_t genau gleiche Größe, was übrigens auch aus der Überlegung erkenntlich wird, daß sich hier σ_r und σ_t überhaupt nicht unterscheiden.

Am äußeren Umfange des Zylinders wird jetzt nach Gl. 19a $\sigma_{ra} = 0$ und nach Gl. 20a $\sigma_{ta} = \frac{m\omega^2}{4} \cdot R^2$.

Beispiel: Es sei für einen Vollzylinder aus Gußeisen $R = 1,00$ m, $m = \frac{\gamma}{g} = \frac{7500}{9,18} = 764$ kg/m; $\omega = 10\pi = 31,4 = 300$ Umdrehungen in der Minute.

Dann ist in der Zylinderachse

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{3}{8} \cdot \frac{764 \cdot 31,4^2 \cdot 1^2}{10000} = 280 \text{ at,}$$

und am äußeren Umfange

$$\sigma_{ra} = 0 \text{ und } \sigma_{ta} = \frac{764 \cdot 31,4^2 \cdot 1^2}{4 \cdot 10000} = 187 \text{ at.}$$

Hätte der Zylinder eine zentrische Höhlung von $r = 0,50$ m, so würde bei der gleichen Geschwindigkeit sein,

$$\sigma_{ra} = \sigma_{ri} = 0, \quad \sigma_{r \max} = \frac{3}{8} \cdot \frac{764 \cdot 31,4^2 \cdot (1 - 0,5)^2}{10000} = 70 \text{ at,}$$

$$\sigma_{ti} = \frac{31,4^2 \cdot 764}{4} \cdot \frac{(3 \cdot 1^2 + 0,5^2)}{10000} = 610 \text{ at und}$$

$$\sigma_{ta} = \frac{31,4^2 \cdot 764}{4} \cdot \frac{(1 + 3 \cdot 0,5^2)}{10000} = 325 \text{ at.}$$

In zylindrischen Ringkörpern überwiegt also die Tangentialspannung bei weitem die Radialspannung.

Fünfte Abteilung.

Kurze Mitteilungen über die wesentlichsten
Förderer der Mechanik.

1. **Archimedes**, geboren 287 v. Chr. in Syrakus, gestorben dasselbst 212 v. Chr., ist als Schöpfer der heutigen Gleichgewichtslehre zu bezeichnen. Die von ihm verfaßten und auf uns überlieferten Schriften über Statik haben noch jetzt im wesentlichen Gültigkeit. Seine Untersuchungen bezogen sich auf das Gleichgewicht am Hebel und am Flaschenzuge. Er übersah klar, daß man durch entsprechende Wahl der Übersetzung mit einer gegebenen Kraft jeden beliebig großen Widerstand überwinden könne. Archimedes kannte auch die Schwerpunkte ebener Gebilde, sowie die Grundlehren vom Gleichgewichte flüssiger Körper, besonders vom Auftriebe des Wassers gegen eingetauchte feste Körper.

2. **Heron**, der um 120 v. Chr. in Alexandria lebte, erweiterte die von Archimedes am Hebel und am Flaschenzuge gezeigte Möglichkeit beliebig großer Kraftverstärkung (Übersetzung), indem er die Lehre von der Wirkungsweise des Keiles, der Schraube, der Zahnräder, des Rades an der Welle mit Seiltrommel entwickelte.

3. **Pappus**, um 390 n. Chr. ebenfalls in Alexandria lebend, zeigte die Entwicklung der Schwerpunkte von Körpern, sowie den Satz, daß der Inhalt eines Umdrehungskörpers gleich dem Produkt aus der erzeugenden Meridianschnittfläche und dem Drehungsweg ihres Schwerpunktes sei. Dann ruhte die Entwicklung der Mechanik bis zur Zeit von

4. **Leonardo da Vinci**, geboren 1452 zu Vinci bei Florenz, gestorben 1519 im Schlosse Cloux bei Amboise (Frankreich). Leonardo war von einer fast unbegreiflichen Vielseitigkeit; er zeichnete sich aus als Maler, Architekt, Ingenieur, Mathematiker, Philosoph, Dichter und Musiker. Er besaß eine bedeutende Einsicht in die Gesetze

der Bewegung auf schiefer Ebene und des freien Falles. Über das Verhältnis der Bewegungslehre zur Mathematik sagt er: „Die Mechanik ist das Paradies der mathematischen Wissenschaften, da man in ihr zur Frucht des mathematischen Wissens gelangt.“ Seine Schriften sind aber nach seinem Tode vergessen und erst am Ende des 18. Jahrhunderts wieder entdeckt worden. Seine Nachfolger in der Entwicklung der Mechanik scheinen nicht daraus geschöpft zu haben.

5. **Simon Stevin**, geboren 1548 zu Brügge, gestorben 1620 zu Haag, fand die Gleichgewichtsverhältnisse an der schiefen Ebene.

6. **Galileo Galilei**, geboren am 18. Februar 1564 zu Pisa, gestorben am 8. Januar 1642 zu Arcetri, ist der Begründer der Lehren von der bewegenden Wirkung der Kräfte, der Dynamik. Er sprach (1638) das Gesetz der Trägheit bestimmt aus, entdeckte, daß bei der Fallbewegung die Geschwindigkeit mit der Zeit verhältnismäßig wächst. Er stellte das Gesetz vom Parallelogramm der Bewegungen auf und gelangte durch Vereinigung der Fallbewegung mit gleichförmiger Bewegung zu der parabolischen Wurfbewegung. Er erkannte, daß die Schwingungsdauer des Pendels proportional mit \sqrt{l} sei, fand auch das Gesetz der parabolischen Kettenlinie.

7. **Christian Huyghens**, geboren am 14. April 1629 zu Haag, gestorben daselbst am 8. Juni 1695, war als bedeutender Mathematiker besonders befähigt, die neuen Bewegungsgesetze in mathematische Formeln zu kleiden und zu verallgemeinern. Er entwickelte die Lehre vom Schwingungspunkte des physischen Pendels, erfand die Pendeluhr, die Unruhe zur Hemmung der Taschenuhren, berechnete die Größe der Zentrifugalkraft, fand die Eigenschaften der Zykloide, die Lehre von den Evoluten, sowie auch die Veränderlichkeit der Fallbeschleunigung mit der geographischen Breite wegen der Drehung der Erde.

8. **Isaac Newton**, geboren am 5. Januar 1643 zu Woolstorp in Lincolnshire, gestorben am 20. März 1726 zu Kensington, hat die Grundlehren der heute geltenden Mechanik zum Abschlusse gebracht. Er übertrug mit bewundernswerter Kühnheit die auf der Erde gewonnenen Erfahrungen auf Stellen außerhalb derselben und gelangte so schrittweise zu dem Satze der allgemeinen Massenanziehung. Die Abhängigkeit dieser Anziehungskraft von dem Quadrate der Entfernung mutmaßte er aus der Vergleichung der

Zentripetalbeschleunigung des Mondes und der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche. Der Satz vom Parallelogramm wurde von Newton bestimmt gefaßt, auch der Satz von der Wechselwirkung aufgestellt und der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes abgeleitet.

9. **Johann Bernoulli**, geboren am 27. Juli 1667 zu Basel, gestorben daselbst am 1. Januar 1748, erkannte die allgemeine Bedeutung des Satzes der virtuellen Verrückungen für alle Aufgaben des Gleichgewichtes. Den Satz des Arbeitsvermögens hat er ohne Beweis ausgesprochen.

10. **Daniel Bernoulli**, der Sohn des Vorgenannten, geboren am 29. Januar 1700 zu Groningen, gestorben am 17. März 1782 zu Basel, verfaßte 1738 ein grundlegendes Werk über Hydrodynamik, entwickelte darin besonders die Formel für die Ausfließgeschwindigkeit $w = \sqrt{2gh}$ und folgerte daraus die Gleichungen für den hydraulischen Druck, für den Druck eines Flüssigkeitsstrahles gegen einen festen Körper und für die Reaktion ausfließenden Wassers, die er bereits als Triebkraft für Schiffe in Vorschlag brachte.

11. **Leonhard Euler**, geboren am 15. April 1707 zu Basel, gestorben am 18. September 1783 zu Petersburg, der bedeutendste Mathematiker seiner Zeit, schrieb 1736 das erste umfassende Werk über analytische Mechanik. Er führte darin u. a. den Begriff Trägheitsmoment ein, bestimmte die Schwerpunkthauptachsen eines Körpers und entwickelte die Gleichungen für die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt. Von Euler rühren auch schon die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung vollkommen flüssiger Körper her, sowie die Grundgleichung der Biegungslinie, mit deren Hilfe er die bekannte Formel für die Knickfestigkeit ableitete.

12. **Jean le Rond d'Alembert**, geboren am 16. November 1717 zu Paris, gestorben daselbst am 29. Oktober 1783, machte sich durch die Aufstellung und den Beweis des nach ihm benannten Satzes im Jahre 1743 besonders verdient um die systematische Formgebung der Mechanik behufs Erleichterung der Lösung von Bewegungsaufgaben.

13. **Joseph Louis Lagrange**, geboren am 25. Januar 1736 zu Turin, gestorben am 10. April 1813 zu Paris, war ein bedeutender

Nachfolger von Euler und d'Alembert; er verfaßte 1788 sein meisterhaftes Werk über analytische Mechanik.

14. **Charles Coulomb**, geboren am 14. Juni 1736 zu Augoulême, gestorben am 23. August 1806 zu Paris, hat sich besonders verdient gemacht durch die Begründung der Lehre vom Erddruck gegen Stützmauern und durch richtige Behandlung der gewöhnlichsten Aufgaben der Fertigungslehre.

15. **Louis Poinsot**, geboren 1777 zu Paris, gestorben daselbst 1859, führte die Kräftepaare ein und entwickelte mit deren Hilfe die 6 Gleichgewichtsgleichungen in der jetzt gebräuchlichen Form. Auch fand er das Trägheitsellipsoid und dessen Bedeutung für die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt sowie für die freie Bewegung eines Körpers, aufgefaßt als gleichzeitige Verschiebung und Rollbewegung oder auch als augenblickliche Schraubebewegung.

16. **Louis Navier**, geboren am 15. Februar 1785 zu Dijon, gestorben 1836 zu Paris, ist der Begründer der wissenschaftlichen Elastizitätslehre und Baumechanik. Er entwickelte die wichtigsten Fälle gebogener Balken, zeigte die Berechnung der Bogen- und Hängebrücken, sowie der Stäbe, Säulen und Pfeiler mit exzentrischer Druckbelastung.

17. **Gustav Coriolis**, geboren 1792, gestorben 1843 zu Paris, hat namentlich für die Ausbildung der Lehre von der scheinbaren (relativen) Bewegung gewirkt, indem er die beiden Ergänzungskräfte derselben einführte.

18. **J. V. Poncelet**, geboren am 1. Juli 1788 zu Metz, gestorben am 22. Dezember 1867 bei Paris, hat die Ausbildung aller Teile der Mechanik für praktische Zwecke gefördert, hat namentlich wichtige Versuche über Wasserbewegung angestellt; auch hat er der Ausbildung der graphischen Statik erheblich vorgearbeitet.

19. **Adhémar de Saint-Venant**, geboren am 23. August 1797 zu Portoiseau bei Melun, gestorben am 6. Januar 1886 zu Vendôme, hat sich um die wissenschaftliche Ausbildung der Elastizitätslehre hohe Verdienste erworben; gestützt auf Navier u. a., hat er besonders in den Jahren 1837, 1843, 1847, 1853 und 1858 bahnbrechende Abhandlungen über die verwickelteren Fälle der Biegungslehre mit Berücksichtigung der Schubspannungen verfaßt und die allgemeine Theorie der Drehungselastizität begründet.

20. **Julius Weisbach**, geboren am 10. August 1806 zu Mittelschmiedeberg im Königreiche Sachsen, gestorben am 24. Februar 1871 zu Freiberg, hat sich durch sorgfältige Versuche über Bewegungswiderstände fester, flüssiger und gasförmiger Körper hervorragende Verdienste, besonders um die technische Hydrodynamik, erworben, hat auch dem Studium und der Anwendung der Mechanik durch die Herausgabe eines umfassenden Werkes „Ingenieur- und Maschinenmechanik“ sehr genützt.

21. **Macquorn Rankine**, geboren am 5. Juli 1820 zu Edinburg, gestorben am 24. Dezember 1872 zu Glasgow, gehört zu den Begründern der Mechanischen Wärmetheorie, hat ferner die Lehre vom Gleichgewichte der Erdkörper, sowie die Lehre von der Knickfestigkeit gefördert und dem Ingenieurwesen durch das Buch „A Manual of applied mechanics“ genützt.

22. **B. P. E. Clapeyron**, geboren am 21. Februar 1779 zu Paris, gestorben daselbst am 28. Januar 1864, war ebenfalls ein wesentlicher Förderer der Mechanischen Wärmetheorie und ist den Bauingenieuren namentlich durch seine Weise der Berechnung durchgehender Träger bekannt.

23. **Carl Culmann**, geboren 1821 in Bergzabern (Rheinpfalz), gestorben am 8. Dezember 1881 in Zürich, begründete, gestützt auf Poncelet und andere, den besonderen Zweig der Gleichgewichtslehre, den er „Graphische Statik“ nannte, und zeigte deren Anwendung auf fast alle Teile des Bauwesens.

24. **Emil Winkler**, geboren 1835 in Falkenberg bei Torgau, gestorben am 27. August 1888, war einer der bedeutendsten Förderer der Elastizitätslehre und ihrer Anwendungen auf das Bauingenieurwesen. Er bildete die von de Saint Venant begründete neue Elastizitätslehre weiter aus und schuf unter anderem die Berechnungsarten der Bogenträger, wie sie noch jetzt meist in Gebrauch sind; auch die Lehre vom Erddrucke hat er nicht unwesentlich erweitert.

25. **Franz Grashof**, geboren am 11. Juli 1826 zu Düsseldorf, gestorben am 30. Oktober 1893 zu Karlsruhe, nimmt zu dem Maschinenwesen eine ganz ähnliche Stellung ein, wie sein Zeitgenosse Winkler zu dem Bauingenieurwesen, indem er, ebenfalls gestützt auf de Saint Venant, ein gleich vorzügliches Werk über

Elastizitätslehre verfaßte, dessen Anwendungen sich mehr auf Maschinenteile beziehen. Wie sich Winkler mit Erfolg bemühte, die Mechanik auf alle Teile des Bauingenieurwesens anzuwenden, so bearbeitete Grashof mit dem Werkzeuge der Mechanik alle Gebiete des Maschinenwesens.

26. **Joh. Bauschinger**, geboren am 11. Juni 1834 zu Nürnberg, gestorben am 25. November 1893 zu München, hat sich als Begründer und langjähriger Leiter des mechanisch-technischen Laboratoriums der Technischen Hochschule zu München besonders um die technisch-wissenschaftliche Untersuchung der Baumaterialien hervorragende Verdienste erworben.

27. **Alberto Castigliano**, geboren am 9. November 1847 zu Asti, gestorben am 25. Oktober 1884 zu Mailand, zeigte die Berechnung der Formänderung elastischer Körper, Träger, Fachwerke u. dgl. mittels der Formänderungsarbeit und benutzte diese Lehren für die Berechnung statisch unbestimmter Träger und Fachwerke.

28. **Hermann Scheffler**, geboren 1820 zu Braunschweig, gestorben daselbst 1903. Verfasste neben anderen Arbeiten über Gegenstände der Mechanik und Festigkeitslehre, insbesondere eine „Theorie der Gewölbe und Futtermauern“.

29. **v. Tetmajer**, geboren 1851, gestorben 1905 in Wien, hat sich u. a. durch Versuche und Aufstellung von Formeln um die Entwicklung der Lehre von der Knickfestigkeit verdient gemacht.

30. **Wilh. Ritter**, geboren 1847, gestorben 1906 zu Zürich, hat auf den von Culmann geschaffenen Grundlagen als Schüler desselben die graphische Statik der Baukonstruktionen weiter entwickelt, insbesondere durch Herausgabe eines Werkes über „Anwendungen der Statik“.

31. **August Ritter**, geboren 1826 zu Lüneburg, gestorben daselbst 1908, hat sich um die Entwicklung der Statik der ebenen Fachwerke und insbesondere durch Einführung der nach ihm benannten Momentenmethode zur Berechnung der Stabkräfte verdient gemacht.

Alphabetisches Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln vorkommenden Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Seiten des Buches.

- | | |
|---|---|
| <p><i>C</i> Zentrifugalmoment. 240.
 <i>E</i> Elastizitätsmaß. 204.
 <i>F</i> Fläche des Fahrstrahls. 100.
 <i>F</i> Querschnitt eines Stabes. 203.
 <i>G</i> Gleitmaß. 276.
 <i>J</i> Trägheitsmoment. 204, 218.
 <i>J₁, J₂, J₃</i> Hauptträgheitsmomente. 242.
 <i>K</i> Kraft. 66, 173.
 <i>M</i> Masse einer Gruppe von Punkten. 186.
 <i>M</i> Biegemoment. 316.
 <i>N</i> Normalwiderstand. 133.
 <i>Q</i> Gewicht eines Körpers. 180.
 <i>R</i> Halbmesser einer Kugel. 211.
 <i>T</i> Tangentialkraft. 283.
 <i>T</i> Trägheitswiderstand 314, 318.
 <i>V</i> Potential (Kräftefunktion). 106.
 <i>V</i> Verdrängung (Displacement) eines Schiffes. 77, 272.
 <i>V</i> Vektor. 7.
 <i>W</i> Gesamtwiderstand einer Fläche. 182.
 <i>W</i> Luftwiderstand. 285.
 <i>X</i> Kräftesumme in der <i>x</i>-Richtung. 192.
 <i>Y</i> Kräftesumme in der <i>y</i>-Richtung. 192.
 <i>Z</i> Kräftesumme in der <i>z</i>-Richtung. 192.</p> <p><i>a</i> Halbe Schwingungsweite. 70.
 <i>a</i> Länge eines Stabes. 203.</p> | <p><i>a</i> Abstand der Achsen eines Eisenbahnwagens von dessen Mitte. 291.
 <i>b</i> Länge der Wasserfüllung einer Röhre. 201.
 <i>c</i> Geschwindigkeit, besonders Anfangs-. 15, 193.
 <i>e</i> Abstand des Schwerpunktes eines Schiffes vom Schwerpunkte seiner Verdrängung. 272.
 <i>f</i> Reibungsziffer. 133.
 <i>f</i> Gleichgewichtsbiegung. 76, 291.
 <i>g</i> Fallbeschleunigung. 71.
 <i>i</i> Trägheitshalbmesser. 205.
 <i>k</i> Ziffer der Massenanziehung. 118, 208.
 <i>k</i> Gleichgewichtsgeschwindigkeit im widerstehenden Mittel. 94.
 <i>k²</i> Einheitsbeschleunigung einer Schwingung. 68.
 <i>l</i> Hebelarm einer Kraft 6.
 <i>l</i> Schwingungslänge. 272.
 <i>l</i> Abstand eines Massenpunktes vom Schwerpunkt eines Körpers. 210.
 <i>m</i> Masse eines Punktes. 66.
 <i>p</i> Beschleunigung. 15.
 <i>p_n</i> Normal- und Zentripetalbeschleunigung. 20.
 <i>p_t</i> Tangentialbeschleunigung. 20.
 <i>q</i> Ziffer der Sonnenanziehung. 118.
 <i>r</i> Erdhalbmesser. 71.</p> |
|---|---|

- r Krümmungshalbmesser einer Kettenlinie im Scheitel. 187.
 r Abstand zweier Punkte. 208.
 r Abstand eines Punktes von einer Achse. 216.
 s Wegelänge. 14.
 s Bogenlänge. 16, 188.
 t Zeit. 14.
 t Umlaufzeit. 116, 124.
 t_1 Dauer einer einfachen Schwingung. 70, 138, 205.
 u Geschwindigkeit des Schwerpunktes. 208.
 v Geschwindigkeit. 14.
 w Geschwindigkeit der scheinbaren (relativen) Bewegung. 52, 207.
 x_0, y_0, z_0 Koordinaten des Schwerpunktes. 192.
 Δl Gleichgewichtsverlängerung. 74.
 α Neigungswinkel einer Ebene 190.
 α Neigungswinkel gegen die x -Achse. 16.
 α_0 Gleichgewichtsgefälle eines Eisenbahnzuges. 286.
- β Neigungswinkel gegen die y -Achse. 16.
 γ Neigungswinkel gegen die z -Achse. 16.
 γ Gewicht der Körpereinheit. 201.
 ε Winkelbeschleunigung. 249.
 ϑ Drehungswinkel. 272.
 μ Auf den Umfang bezogene Masse. 281.
 ρ Krümmungshalbmesser. 20.
 τ Schubspannung. 276.
 φ Reibungswinkel. 181.
 φ, χ, ψ Winkelgeschwindigkeiten. 46, 257.
 ω Winkelgeschwindigkeit. 42.
 \mathfrak{A} Arbeit. 198.
 \mathfrak{B} Drall (Statisches Moment der Bewegungsgröße). 103, 217.
 \mathfrak{S} Trägheitsmoment der Schwimmfläche eines Schiffes. 273.
 \mathfrak{K} Kraft 2.
 \mathfrak{M} Drehmoment. 218.

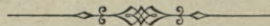
Alphabetisches Verzeichnis der behandelten Gegenstände.

- Ablenkung (Deviation). 21.
 Achsen, freie. 243.
 Achswiderstände einer schwingenden Glocke. 249.
 d'Alembert. 341.
 Antrieb einer Kraft. 193.
 Arbeit \mathcal{A} . 104, 198.
 Arbeitsvermögen. 103, 198, 207.
 Archimedes. 339.
 Aufzugsmaschinen. 183.
- Bauschinger. 344.
 Bernoulli. 341.
 Beschleunigung. 15, 18, 21.
 Beschleunigung der zusammengesetzten Bewegung. 53.
 Bewegung, allgemeine, eines Körpers. 39.
 Bewegung auf einem Kreise mit Reibung. 134.
 Bewegung auf einer Bahnlinie in lotrechter Ebene. 137.
 Bewegung auf einer Kugelfläche. 150.
 Bewegung auf vorgeschriebener Bahn. 133.
 Bewegung, ebene, eines Körpers. 27.
 Bewegung einer Kette. 199.
 Bewegung einer Massengruppe. 192.
 Bewegung eines freien Körpers. 270.
 Bewegung eines geometrischen Körpers. 25.
- Bewegungen, Zusammensetzung derselben. 43, 51.
 Bewegung, geradlinige. 14, 66.
 Bewegung im widerstehenden Mittel. 89, 129.
 Bewegung in einer Parabel. 148.
 Bewegung in einer sich drehenden Röhre. 157, 160.
 Bewegung, krummlinige. 15, 98.
 Bewegung längs eines Erdmeridians. 162.
 Bewegung, scheinbare (relative). 58, 155.
 Bewegung, zwangläufige einer Massengruppe. 219.
 Bewegungsgröße. 193, 215.
 Bewegungslehre, geometrische. 14.
 Brachistochrone. 145.
 Bremsung eines Eisenbahnzuges. 284.
- Castigliano. 344.
 Clapeyron. 343.
 Coriolis. 342.
 Coulomb. 342.
 Culmann. 343.
- Deviation (Ablenkung). 21.
 Drehbewegungen. 45.
 Drehpunkt, augenblicklicher, oder Pol. 29.
 Drehung eines Körpers um eine Achse. 248.

- Drehung eines Körpers um einen Punkt. 36, 256, 269.
 Drehungspaar. 48.
 Drehungspendel. 275.
- Eisenbahnwagen, Schwingungen desselben. 291.
 Eisenbahnzug, Bremsung desselben. 284.
 Elastische Schwingung. 74.
 Ellipsenzeichner. 31.
 Elliptische Bewegung. 113, 118.
 Erde als Anziehungszentrum. 125.
 Ergänzungskräfte (Trägheitswiderstände) der scheinbaren Bewegung. 156.
 Euler. 341.
- Fahrrad, Widerstand desselben. 290.
 Fall aus großer Höhe. 80.
 Fallbewegung im widerstehenden Mittel. 89.
 Fallbewegung in bezug auf die sich drehende Erde. 166.
 Foucaultscher Pendelversuch. 168.
 Freie Achsen. 243.
- Galilei. 182, 340.
 Gelenkstange, Pol einer. 30.
 Gelenkstangenverbindungen. 185.
 Geometrische Bewegungslehre. 14.
 Geschoß, Bewegung desselben in der Kanone. 307.
 Geschoß, seitliche Ablenkung desselben. 165, 311.
 Geschwindigkeit c , v . 14, 15.
 Gleichgewicht einer Massengruppe. 172.
 Gleichgewichtsgeschwindigkeit k im widerstehenden Mittel. 86.
 Glocke, Widerstände der Achse einer schwingenden. 249.
 Grashof. 343.
 Gravitation. 118.
- Hauptachsen eines Körpers. 242.
 Hauptträgheitsmomente J_1 , J_2 , J_3 . 242.
 Heron. 339.
 Himmelskörper, Bewegung derselben. 118, 170.
 Huyghens. 340.
 Hyperbolische Bewegung. 122.
- Innere Kräfte. 192, 207.
- Kanone, Wirkung des Pulvers in derselben. 307.
 Kegelpendel. 154.
 Kepler. 127.
 Kette, Bewegung einer. 199.
 Kettenlinie. 187.
 Klappbrücke. 189.
 Kräftefunktion (Potential). 106.
 Kahn, Verhalten eines schwimmenden Kahnes. 196.
 Kreiselbewegung. 261.
 Kreispendel. 138.
 Kurbelschleife. 70.
 Kurbelstange, Bewegung einer. 30.
- Lagrange. 183, 341.
 Leonardo da Vinci. 339.
 Luftwiderstand. 94.
- Massenanziehung. 118.
 Massenausgleich. 219.
 Massengruppe, Bewegung einer. 192.
 Massengruppe, Mechanik einer. 172.
 Massenpunkt m . 66.
 Maxwell. 183.
 Mechanik des Massenpunktes. 66.
 Mechanik einer Gruppe von Massenpunkten. 172.
 Mohr. 183.
 Momentensumme der Bewegungsgrößen (Drall). 217.

- Navier. 342.
 Newton. 340.
 Niveauflächen. 109.
 Niveaulinien. 111.
 Normalbeschleunigung p_n . 20.
 Normalwiderstand N . 180.
- P**
 Pappus. 339.
 Parabolische Bewegung. 148.
 Pendel, Zykloiden-. 143.
 Pendel, Drehungs-. 274.
 Pendel, Kegel-. 154.
 Pendel, Kreis-. 138.
 Pendel, räumliches. 150.
 Pendelversuch von Foucault. 168.
 Pendel, wälzendes. 294.
 Planetenbewegung. 118, 170.
 Poinot. 243, 269, 342.
 Polbahnen. 34, 39.
 Poncelet. 342.
 Potential einer Hohlkugel. 210.
 Potential einer Kugel. 212.
 Potential einer Kugelschale. 209.
 Potential einer Massengruppe. 208.
 Potential V . 106.
- R**
 Rankine. 343.
 Relative (scheinbare) Bewegung. 58, 155.
 Röhre, Schwingung des Wassers in einer. 201.
 Rollbewegung auf schiefer Ebene. 280.
 Rollbewegung der Polbahnen. 34, 39.
 Rollbewegung eines mit Wasser gefüllten Gefäßes. 283.
- de Saint-Venant. 342.
 Satz der Flächen. 99, 215.
 Satz der virtuellen Verrückungen. 172.
 Satz des Arbeitsvermögens. 103, 198.
 Scheinbare (relative) Bewegung. 58, 155.
- Schiff, Schwingungen desselben. 271.
 Schraubenbewegung eines Körpers. 39.
 Schraubenlinienbewegung. 24.
 Schwerpunkt als Mittelpunkt einer Massengruppe. 197.
 Schwerpunkt, Bewegung desselben. 192.
 Schwerpunkt der Fläche einer Halbellipse. 194.
 Schwerpunkt eines Halbellipsoides. 194.
 Schwingung des Wassers in einer Röhre. 201.
 Schwingungen eines Eisenbahnwagens. 290.
 Schwingungen eines Schiffes. 271.
 Schwingung, geradlinige. 68.
 Schwingung schwimmender Körper. 76.
 Schwingungslänge eines Kegels. 246.
 Sonne als Anziehungszentrum. 126.
 Spiralfeder der Unruhe einer Uhr. 277.
 Stab, umfallender. 254.
 Stange, reibungslos ausgleitende. 277.
 Stevin. 182, 340.
 Stoß. 195.
- T**
 Tangentialbeschleunigung p_t . 20.
 Torsionspendel. 274.
 Trägheitsellipsoid. 240.
 Trägheitsmoment eines Zylinders. 245.
 Trägheitsmoment eines Ellipsoides. 247.
 Trägheitsmoment eines Kegels. 246.
 Trägheitsmoment eines Parallelepipedes. 244.
 Trägheitsmoment J . 218.
 Trägheitswiderstand (Ergänzungskraft) 156, 162, 219, 313.
- Umlaufzeit t . 116, 125.
 Unruhe einer Uhr. 277.

Verschiebung eines geometrischen Körpers. 26.	Wippe. 303.
Virtuelle Verrückungen. 172.	Wurfbewegung mit Luftwiderstand. 129.
Vektor. 1, 7.	
	Zentralbewegung. 112.
Wälzendes Pendel. 294.	Zentralellipsoid. 240.
Weisbach. 343.	Zentrifugalmoment C. 240.
Wiege. 304.	Zentripetalbeschleunigung p_n. 20.
Winkelgeschwindigkeit ω, ψ . 42.	Zusammensetzung der Bewegungen eines Körpers. 43.
Winkler. 343.	Zykloidenpendel. 143.



Helwingsche Verlagsbuchhandlung in Hannover.

(Gegründet vor 1606.)

In unserem Verlage erscheint:

Bewegliche Brücken.

Ein Hand- und Lehrbuch
für Ingenieure und Studierende des Bauingenieurwesens.

I. Teil: Die Klappbrücken.

Von

Dr. Ing. Ludwig Hotopp,

Geheimer Baurat, Professor an der Technischen Hochschule in Hannover.

Mit 302 in den Text gedruckten Figuren.

Preis 12 Mark.

Mit der Entwicklung der Schiffsanlagen im allgemeinen hat auch das in diesem Buche behandelte Spezialgebiet der beweglichen Brücken in den letzten Jahrzehnten sowohl hinsichtlich der Zahl und der Abmessungen der ausgeführten Bauwerke, als auch bezüglich der verwirklichten Konstruktionsgedanken eine rasche Ausdehnung erfahren. Dieser Entwicklung und der Bedeutung, die das Gebiet für das Verkehrs- und Wirtschaftsleben gewonnen hat, ist die bezügliche neuere zusammenfassende Literatur nicht im gleichen Maße gefolgt. Verfügt doch die deutsche Buchliteratur nur über ein einziges neueres Werk auf dem Gebiete. Ich selbst empfand die Knappheit der literarischen Orientierungsmittel, als ich vor einer Reihe von Jahren neben meinem Lehrgebiet „Mechanik für Bauingenieure“ die Vorträge über bewegliche Brücken an der hiesigen Technischen Hochschule zu übernehmen hatte.

Da ich während der meiner akademischen Lehrtätigkeit vorausgegangenen praktischen Betätigung sowohl auf dem Gebiete des Wasserbaues als auch auf dem des einschlägigen Maschinenbaues Gelegenheit hatte mich eingehend mit dem nunmehr lehrweise zu behandelnden Stoffe zu beschäftigen, schien es mir alsbald geboten, mein bescheiden Teil zur Vervollständigung der Literatur des in Frage stehenden Gebietes beizutragen, die Ergebnisse meiner Erfahrung und meiner Forschung in einem Druckwerke der Öffentlichkeit zu übergeben.

Bei der Umgrenzung des zu bearbeitenden Stoffes wurde zugunsten einer tunlichst übersichtlichen Anordnung desselben alles ausgeschieden, was sich auf Grund der Lehren des allgemeinen Brücken- und Eisenbaues sowie der Statik behandeln läßt. Wo für die Anwendung bekannter Regeln besondere Gesichtspunkte in Frage kamen, wurden diese in Kürze dargelegt.

Das Buch will dem ausübenden Ingenieur, der vielleicht erstmalig vor die Lösung von Aufgaben auf dem Gebiete gestellt ist, und den Studierenden technischer Lehranstalten eine allgemeine Orientierung auf dem Gebiete der beweglichen Brücken bieten und ihnen nach Möglichkeit die an ausgeführten Bauwerken gesammelten Erfahrungen zugänglich machen. Der letztere Zweck konnte bei der Neuheit wichtiger Arten beweglicher Brücken naturgemäß nur

in beschränktem Maße erfüllt werden. Auftretende wichtige Fragen, wie die des Widerstandes von unter Druck aufeinander rollender Bauteile gegen Abnutzung und Bruch, konnten noch nicht endgültig beantwortet werden.

Dem bezeichneten Zwecke entsprechend beschränkt sich das Buch auf die Darlegung der verschiedenen Systeme beweglicher Brücken in ihrer grundsätzlichen Anordnung und mit den ihnen eigenen wichtigen Einzelheiten. Insbesondere werden die Bewegungsvorgänge verfolgt und die Bewegungsapparate besprochen. Daneben wird an einer größeren Anzahl von ausgeführten Bauwerken die Anwendung der den einzelnen Systemen zugrunde liegenden Konstruktionsprinzipien gezeigt.

Der hier vorliegende erste Teil des Buches umfaßt neben einer einleitenden allgemeinen Betrachtung über Zweck, Anwendung und Einteilung der beweglichen Brücken die Klappbrücken in ihren verschiedenen Systemen. Zu diesen wurden auch die herkömmlich als Zugbrücken bezeichnete Art von beweglichen Brücken gerechnet, weil die nur historisch begründete Unterscheidung dieser Brückenart von den Klappbrücken im allgemeinen bei der neueren Entwicklung der letzteren sich nicht mehr aufrecht erhalten läßt.

Die besondere Herausgabe dieses ersten Teiles des Gesamtwerkes findet ihre Begründung in dem Wunsche, die neueren Systeme der Klappbrücken, die in ihrer Bedeutung für den Verkehr alle anderen Arten beweglicher Brücken mehr und mehr überragen, den interessierten Kreisen alsbald in übersichtlicher Form vorzuführen.

Der zweite alle übrigen Arten beweglicher Brücken umfassende Teil wird in Bälde folgen. Ich hoffe, darin auch noch ergänzende Mitteilungen über die Erfahrungen mit den neueren Klappbrückensystemen machen zu können.

Am Schluß befindet sich ein Literaturverzeichnis, in dem auch die bei Bearbeitung des Buches benutzten Quellen kenntlich gemacht worden sind.

Der in Kürze erscheinende Teil II (Schluß) wird den Besitzern des ersten Teiles zu einem

um 20% ermäßigten Vorzugspreise

geliefert, sofern die Bestellung durch Vermittlung einer Buchhandlung der **Helwingschen Verlagsbuchhandlung in Hannover** vor Erscheinen eingesandt wird.

In unserem Verlage erschienen folgende weiteren Werke von

Wilh. Keck,

weil. Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule in Hannover.

Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen.

Bd. I: **Mechanik starrer Körper.** Vierte Auflage, bearbeitet von **Dr. Ludw. Hotopp.** Mit 433 Holzschnitten. M. 10.—, gebd. M. 11.50.

Bd. II: **Mechanik elastisch-fester und flüssiger Körper.** Dritte Auflage, bearb. von **Dr. Ludw. Hotopp.** Mit 365 Holzschnitten. M. 12.—, gebd. M. 13.50.

Vorträge über Elastizitätslehre als Grundlage für die Festigkeitsberechnung der Bauwerke. Zweite vermehrte Auflage, neu bearbeitet von **Dr. Ludw. Hotopp.**

Erster Teil. Mit 209 Holzschnitten. Preis M. 8.—, gebd. M. 9.—.

Zweiter Teil. Mit 214 Holzschnitten. Preis M. 10.—, gebd. M. 11.—.

Vorträge über graphische Statik mit Anwendung auf die Festigkeitsberechnung der Bauwerke, als Anhang zu den „**Vorträgen über Elastizitätslehre**“. (1. Aufl.) Mit 83 Figuren und 4 Tafeln. 2. Aufl. Gebd. M. 3.—.

Fragen über die wichtigsten Gegenstände aus dem Gebiet der **Mechanik.** 4. Auflage. M. —, 50.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299209