ET DE MÉTAPHYSIQUE POSITIVES.

ARITHMÉTIQUE GRAPHIQUE.

LES

ESPACES ARITHMÉTIQUES HYPERMAGIQUES,

PAR GABRIEL ARNOUX,

ANCIEN OFFICIER DE MARINE.

> C'est une remarque que nous pouvons faire dans toutes nos recherches mathématiques : ces quantités auxiliaires, ces calculs longs et difficiles où l'on se trouve entraîné, y sont presque toujours la preuve que notre esprit n'a point, dès le commencement, considéré les choses en elles-mêmes et d'une vue assez directe, puisqu'il nous faut tant d'artifices et de détours pour y arriver; tandis que tout s'abrège et se simplifie, sitôt qu'on se place au vrai point de vue.
>
> POINSOT, *Théorie nouvelle de la rotation des corps.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

Hommage de l'auteur
Gabriel Arnoux

ARITHMÉTIQUE GRAPHIQUE.

LES

ESPACES ARITHMÉTIQUES HYPERMAGIQUES.

20134 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

ESSAIS DE PSYCHOLOGIE ET DE MÉTAPHYSIQUE POSITIVES.

ARITHMÉTIQUE GRAPHIQUE.

LES
ESPACES ARITHMÉTIQUES HYPERMAGIQUES,

PAR GABRIEL ARNOUX,

ANCIEN OFFICIER DE MARINE.

> C'est une remarque que nous pouvons faire dans toutes nos recherches mathématiques : ces quantités auxiliaires, ces calculs longs et difficiles où l'on se trouve entraîné, y sont presque toujours la preuve que notre esprit n'a point, dès le commencement, considéré les choses en elles-mêmes et d'une vue assez directe, puisqu'il nous faut tant d'artifices et de détours pour y arriver; tandis que tout s'abrège et se simplifie, sitôt qu'on se place au vrai point de vue.
>
> POINSOT, *Théorie nouvelle de la rotation des corps.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

DÉDICACE.

A MONSIEUR CHARLES DE FREYCINET,

ANCIEN PRÉSIDENT DU CONSEIL DES MINISTRES,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE ET DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Monsieur,

Alors que vous étiez au pouvoir, vous avez bien voulu accepter la dédicace de ce modeste Livre. Aujourd'hui, je tiens d'autant plus à user de cette gracieuse autorisation, que je ne m'étais pas adressé à l'homme politique, mais bien à l'auteur d'une des œuvres les plus remarquables qui aient été publiées dans ce siècle sur la Métaphysique scientifique.

La Science, en effet, rapproche les hommes et tend à apaiser les passions; la politique, au contraire, ne sème trop souvent que des divisions et des haines.

Le jour où j'ai lu votre Étude sur la Métaphysique du haut calcul, *il s'est fait en moi une sorte de révélation.*

En dehors du Calcul différentiel, auquel je ne comprenais rien, n'y étant pas initié, je sentis qu'il y avait là une considération bien supérieure à l'Analyse mathématique.

Cette lecture entraînait forcément celle des œuvres de Lazare Carnot, qui ne sont que des études de Métaphysique sur des sujets divers.

Une fois sur la voie, je fus d'abord conduit à étudier les œuvres de Cournot, puis à rechercher chez tous nos grands hommes les traces de cette grande considération.

J'en arrivai à conclure, non seulement que tous nos grands hommes ont été Métaphysiciens et cela de leur aveu, mais encore que c'était à la Métaphysique qu'ils devaient leur grandeur. Descartes, Laplace, Poncelet, etc., le disent en termes précis.

Chez tous elle est à l'état intuitif.

Il me semble résulter de la synthèse de leurs œuvres qu'il existe une Analyse métaphysique, infiniment plus importante que l'Analyse mathématique, qui domine cette dernière, l'éclaire, lui donne sa raison d'existence et la sanctionne.

C'est un essai de cette Analyse que j'ai l'honneur de soumettre à votre haute appréciation, sollicitant votre indulgence et vous priant d'agréer l'assurance de mon profond respect.

Gabriel ARNOUX.

PRÉFACE.

Cette étude a fait primitivement l'objet d'une Communication présentée en 1885, à Grenoble, au Congrès de l'*Association française pour l'avancement des Sciences.*

Dans la Note sommaire qui mentionne cette Communication (p. 94 du premier Volume des *Comptes rendus*) j'annonçais la publication ultérieure du présent Livre.

Diverses circonstances personnelles ont entraîné d'assez longs retards. En outre, dès que je voulus m'occuper de la rédaction de mon Travail, je ne tardai pas à m'apercevoir que j'allais me trouver en présence de difficultés dont je n'avais pas tout d'abord exactement mesuré l'étendue. Préoccupé du côté psychologique et métaphysique, beaucoup plus philosophe que mathématicien, j'aurais eu, à moi seul, beaucoup de peine à offrir au public mathématique une œuvre de cette nature sous une forme qui pût correspondre aux habitudes admises et au langage couramment adopté. Tout au moins me serais-je trouvé conduit à donner des proportions démesurées à un travail que je désirais rendre concis, tout en lui conservant le maximum de clarté possible.

Une collaboration, à mon avis, s'imposait donc. Ce n'est qu'en 1891, au Congrès de Marseille, que je pus trouver l'occasion que je recherchais. M. Laisant, dont je fis alors la connaissance, voulut bien s'intéresser à mes travaux, et accepter, après examen, de me prêter son concours pour la rédaction. C'est donc grâce à lui que je peux aujourd'hui tenir la promesse que j'avais faite au public et que je m'étais faite à moi-même; je lui en adresse ici mes bien sincères remercîments.

Non seulement mon collaborateur m'a permis de donner à cet

Ouvrage sa forme actuelle, mais quelques points lui sont dus entièrement. C'est ainsi, par exemple, que le décompte des directions dans les espaces à modules composés, et l'extension de la théorie de l'Indicateur, qui s'y rattache, lui appartiennent en propre. Il en est de même de la démonstration analytique rigoureuse du théorème donnant le module premier minimum, nécessaire à la constitution d'un espace diabolique.

Chose remarquable : sur ces questions même, j'avais à l'avance les idées qui ont été exposées clairement par M. Laisant; elles existaient chez moi à l'état intuitif, d'une façon suffisamment nette pour me permettre de continuer mes travaux de *cérébration inconsciente;* mais il m'aurait été bien difficile, sinon impossible, de les exposer d'une façon convenable. Ceci est une preuve de plus de la nécessité scientifique de la collaboration. C'est un sujet que je ne peux développer ici, mais sur lequel je me réserve de revenir plus tard, si ma santé et mon âge me le permettent.

Le Livre que j'ai l'honneur de présenter au public n'est pas, à proprement parler, un travail mathématique; il a été entrepris dans un double but :

1° Me rendre compte, par une expérience sur ma personne, de la valeur des études de psychologie positive auxquelles je me suis adonné depuis longtemps, en observant ce qui se passe dans le cerveau d'un vieillard qui invente;

2° Mesurer la puissance théorique et pratique de l'analyse métaphysique, et voir si l'on ne pourrait pas la considérer comme une science suprême qui, indifférente aux sujets auxquels on l'applique, domine et crée, pour ainsi dire, toutes les sciences spéciales, leur donnant à la fois la sanction et l'existence.

Dans mon travail d'invention sur les espaces magiques, voici comment j'ai procédé :

A dessein, j'ai voulu ne connaître aucune des œuvres de mes prédécesseurs, imbu de cette idée paradoxale que, pour bien traiter un sujet, il faut commencer par l'ignorer complètement.

L'étude des travaux des autres laisse dans le cerveau des ornières profondes dans lesquelles on s'embourbe et dont il est bien difficile de sortir; l'histoire scientifique tout entière est là pour l'affirmer.

D'un autre côté, s'il existe une *raison des choses,* elle doit être contenue dans tous les phénomènes du même genre; et si l'on parvient à se procurer un nombre suffisant de faits vraiment différents et irréductibles les uns aux autres, l'*Analyse métaphysique* doit fournir le moyen d'en dégager la loi, sorte d'échelle de récurrence qui permet de parcourir toute la série.

Partant de ces idées, j'ai débuté par prendre dans les *Récréations mathématiques* d'Ed. Lucas trois carrés magiques, ceux dont l'arête est de 3, 4 et 5 cases; dans l'Ouvrage de M. Frolov (*le Problème d'Euler et les carrés magiques*) j'ai trouvé trois carrés de 8 cases de côté; sur ces bases, j'ai cherché à constituer la théorie, aussi complète que possible, des *Espaces arithmétiques hypermagiques à un nombre quelconque de dimensions.*

Dans aucun cas, je ne me suis servi de l'*Analyse mathématique;* je n'ai jamais employé que l'*Analyse métaphysique,* tournant et retournant les faits, les observant sous le plus grand nombre de points de vue possible, pour découvrir *leur raison d'existence.*

Étudiant les faits particuliers d'abord, les faits de plus en plus généraux ensuite, et m'efforçant de trouver *la raison fondamentale qui les comprend tous,* la symbolie ne m'a jamais été d'aucun secours; elle ne me servait qu'à enregistrer d'une façon claire, nette et concise ce que j'avais trouvé sans elle.

C'était donc la méthode expérimentale dans toute sa pureté, opérant sur les choses elles-mêmes, jamais sur des symboles.

En analysant métaphysiquement les carrés que j'avais sous les yeux, je me suis bien vite aperçu que la nature du nombre de cases de l'arête joue un rôle considérable, suivant qu'il est premier ou non.

L'expérience était là pour m'indiquer que les procédés de construction qui réussissaient pour les uns échouaient pour les autres. La question du *pourquoi* se posait naturellement; après quelques essais, *la raison* sautait aux yeux.

Le carré de 5 m'a donné la méthode pour construire tous les espaces à un nombre quelconque de dimensions, dont l'arête est un nombre premier.

Les nombres multiples sont venus ensuite; après quelques tâtonnements infructueux, j'en suis arrivé à conclure que, pour obtenir des carrés dans lesquels l'hypermagie fût apparente, il fallait expérimenter sur des nombres dont les facteurs ne fussent pas inférieurs à 5 : de là des essais sur les nombres 25 et 35. L'*Analyse métaphysique* me donna une partie des résultats que je cherchais; mais les nombres contenant des facteurs moindres que 5 présentaient des anomalies dont je ne pouvais me rendre compte; les carrés de 9 et de 12 contribuèrent puissamment à avancer la question.

Les carrés qui contiennent des facteurs égaux à 2 ou à ses puissances opposèrent longtemps une résistance invincible; mais, dans l'Ouvrage précité de M. Frolov, je trouvai trois carrés de 8; j'avais donc entre les mains tout ce qu'il fallait pour découvrir la loi des carrés de module 2^n.

J'en arrivai ainsi à construire tous les carrés de 1 à 35; il y avait là plus qu'il n'était nécessaire pour trouver *la raison* des espaces arithmétiques à 2 dimensions.

Il s'agissait alors de savoir si les mêmes méthodes ne pourraient pas s'étendre aux espaces à 3 dimensions.

Ce qui s'était passé pour les espaces à 2 dimensions me mit sur la voie; j'avais vu que la *grandeur du nombre* jouait un rôle au moins aussi important que sa *nature;* j'augmentai l'arête successivement et, arrivé à 11, je trouvai des cubes diaboliques (on verra plus loin la définition de ce terme); pour les modules premiers 11 était donc un minimum.

Une fois sur la voie, il n'y avait plus à s'arrêter; pourquoi ne pas franchir le Rubicon des 3 dimensions?

Au bout de peu de jours, cette question céda comme les autres à l'*Analyse métaphysique;* et j'en arrivai à conclure que l'espace diabolique minimum à 4 dimensions devait avoir 17 cases d'arête, quand le nombre est premier.

Je m'amusai pendant quelque temps à manipuler ces espaces, sans jamais employer l'*Analyse mathématique*.

L'extension se faisant d'une manière indéfinie, ce côté de la question ne présentait plus aucune difficulté.

C'était donc le moment d'attaquer la synthèse complète et la symbolie.

Très ignorant de la science de l'Analyse, je me fis à ma façon des hiéroglyphes et des théories qui répondaient à peu près à mes besoins.

Dans cette période d'invention, je n'ai imploré le secours de personne, j'ai tout découvert par moi-même ; et j'ai gardé sans exceptions tout ce que j'ai produit.

J'ai voulu ainsi me rendre compte de la succession des idées par lesquelles j'ai passé, et en outre déterminer en quelque sorte mon équation personnelle, froide, impartiale, scientifique, tant en bien qu'en mal, ne considérant mon cerveau que comme un appareil qui m'est imposé, que je puis modifier dans de certaines limites, et dont il m'est permis de corriger les défectuosités (défectuosités qu'il m'importe avant tout de connaître), de manière à en tirer le meilleur parti possible.

Bien loin de détruire les sottises et les insanités que cet appareil cérébral produit trop souvent, je les conserve et les étudie avec un soin infini, comme les manifestations d'un état de choses que je dois corriger.

Quand je relis ces tentatives primitivement informes, je suis obligé de reconnaître, pour ce qui me concerne, la vérité de cette pensée de Fontenelle : « Les hommes n'arrivent à se faire une opinion raisonnable qu'après avoir épuisé toutes les idées absurdes qu'on s'en peut faire. »

Mes études sur les espaces magiques m'ont d'ailleurs donné de profondes leçons d'humilité. Toute cette magie cache des faits d'une simplicité si colossale, que j'ai été honteux le jour où j'en ai découvert la raison, de ne pas l'avoir vue au premier coup d'œil et sans aucune hésitation ; je vais en donner un exemple entre mille.

Ce n'est qu'après un travail acharné de trois mois que m'apparurent un beau jour les faits qui vont suivre.

Prenez des dés cubiques, comme ceux que l'on emploie au trictrac; empilez-les suivant les trois dimensions de manière à obtenir un cube dont l'arête soit un nombre premier n quelconque.

Numérotez vos dés par ordre en suivant une arête d'abord, une face ensuite, puis tout le volume.

Si vous prenez au hasard deux dés et si vous les joignez par une ligne droite, cette droite passera par n cases déterminées, puis reviendra continuellement sur le chemin parcouru, sans pouvoir en sortir.

Si cette ligne est parallèle à une des arêtes, la somme des numéros est différente dans tous les cas; si elle est oblique à chacune d'elles, la somme est constante.

Maintenant faites glisser horizontalement les plans qui constituent votre cube les uns sur les autres, de manière à obtenir une inclinaison régulière et rectiligne; vous obtenez un parallélépipède oblique; coupez-le verticalement, au hasard, par tranches de n plans, réunissez toutes ces tranches en une seule, vous reconstituez un cube droit. Si vous exécutez la même opération sur chacune des arêtes, vous obtenez une transformation dans laquelle toutes les lignes droites orthogonales donnent une somme constante, ce qui vous fait éprouver un sentiment étrange, celui de la constatation d'un résultat en apparence extraordinaire et qui semble merveilleux.

Mais par l'Analyse métaphysique vous vous rendez compte de la *raison* du fait; tout est expliqué, le merveilleux disparaît, la science commence et avec la science le pouvoir de créer des résultats qu'au premier abord on serait tenté d'accorder à une puissance occulte, et qui, après un mûr examen, ne sont que les conséquences naturelles de la loi des combinaisons, dont *la sym-*

bolie, par sa concision et sa netteté, permet de saisir la constitution en faisant abstraction de l'élément auquel on l'applique.

Tout dans la nature obéit à ces lois, qui sont simples, quand on ne les considère que sur les faits généraux, et ne deviennent complexes qu'à mesure que les restrictions créent des anomalies en particularisant.

En étudiant un genre quelconque de faits, on peut y découvrir l'application de ces lois primordiales, puis par analogie les transporter dans un autre genre par une simple substitution d'élément; chose à laquelle notre organisation cérébrale se prête avec une grande facilité.

C'est ainsi qu'au cours de mes expériences je ne tardai pas à m'apercevoir que je tombais en plein dans la théorie des congruences. J'ignorais alors cette théorie, et, systématiquement, je ne cherchai pas à la connaître, préférant toujours découvrir par moi-même, au fur et à mesure, ce qui m'était nécessaire. Je fus par exemple conduit à imaginer des tables de multiplication et de division congruentes pour chacun des modules que je voulais étudier.

Il en fut de même pour le symbole $((m))$ que l'on verra plus loin, ainsi que pour la représentation symbolique des directions $ax + by + cz, \ldots.$

Si je suis entré dans ces explications, c'est pour donner une idée de la méthode d'invention que j'ai suivie, et pour réhabiliter la Métaphysique scientifique, beaucoup trop oubliée et décriée de nos jours. Ce mot de *métaphysique* a d'ailleurs été employé en tant de sens divers qu'il n'y a pas lieu d'être trop surpris de la confusion actuelle. C'est pour éviter une telle confusion que j'emploie constamment le terme *métaphysique positive;* mais, comme il pourrait y avoir dans l'association de ces deux mots quelque chose de choquant pour certains esprits, le lecteur me permettra de rappeler ici les opinions de quelques hommes illustres, afin de m'abriter sous leur autorité, et de démontrer que mes opinions psychologiques et métaphysiques ne sont pas aussi extraordinaires qu'on pourrait le croire au premier coup d'œil.

En janvier 1639, à propos d'un papier de Desargues que lui avait transmis le P. Mersenne, Descartes écrivait :

La façon dont il commence son raisonnement, en l'appliquant tout ensemble aux lignes droites et aux courbes, est d'autant plus belle qu'elle est plus générale, et semble être prise dans ce que j'ai coutume de nommer LA MÉTAPHYSIQUE DE LA GÉOMÉTRIE, QUI EST UNE SCIENCE DONT JE N'AI JAMAIS REMARQUÉ QU'AUCUN AUTRE SE SOIT SERVI, SINON ARCHIMÈDE. POUR MOI, JE M'EN SERS TOUJOURS POUR JUGER EN GÉNÉRAL DES CHOSES QUI SONT TROUVABLES, ET EN QUEL LIEU JE DOIS LES TROUVER.

Wallis (né en 1616, mort en 1703), qui possédait à fond toutes les connaissances de son temps, s'exprime ainsi :

Dès mon enfance, j'ai, dans toutes sortes de sciences, toujours voulu savoir le fond des choses, non par routine, ce qui les fait oublier bientôt, mais par raison et par principes, afin de former mon jugement.

Nous citerons encore :

COURNOT, *De la marche des idées et des événements dans les temps modernes,* t. II, p. 232 :

Le but de l'explication scientifique est de mettre en relief la *raison des choses,* sous quelque aspect qu'elle se montre, bien plutôt que de percer le nuage qui enveloppe la notion de *cause* proprement dite presque autant que celle de substance.

Le but de la statistique et, comme nous l'avons expliqué au début de cet Ouvrage, le but de la philosophie de l'histoire est précisément d'*éliminer tout ce qui rappelle la relation de cause à effet, pour dégager ce qu'on n'appelle qu'improprement cause, et ce qui est effectivement la raison des phénomènes observés.*

Poursuivre la critique de toutes les parties de la construction scientifique à l'aide de cette idée régulatrice, *voilà ce qui constitue la philosophie des sciences* et ce qui la fera, suivant nous, survivre à tous les systèmes, sans excepter celui des positivistes.

COURNOT, *Id.,* p. 324 :

En proclamant son principe de la *raison suffisante* et en l'opposant au principe de contradiction, dont les vieilles écoles faisaient le pivot de leurs démonstrations, *Leibnitz est le premier* à indiquer nettement le but essentiel de toute étude philosophique, à savoir *les conceptions des choses dans l'ordre où elles rendent raison* (*et le mieux raison*) *les unes des autres :* ordre qu'il ne faut pas confondre avec l'enchaînement des prémisses et des conséquences logiques, ni avec l'enchaînement des causes et des effets, dans le vrai sens du mot cause (selon la remarque déjà faite, liv. I, Chap. I).

Toutes les histoires exactes rendent exactement compte des causes et des effets; tous les traités exacts de Géométrie respectent l'enchaînement logique des propositions : après quoi il faut encore que le sens philosophique intervienne pour faire connaître et préférer l'ordre qui exprime le mieux l'*enchaînement des faits ou des théorèmes, en tant qu'ils rendent raison les uns des autres.* D'un autre côté, on doit remarquer la forme négative sous laquelle Leibnitz met en œuvre le principe éminemment rationnel, ou l'idée que nous avons de la *raison des choses;* de manière à en faire un moyen de démonstration rigoureuse, *more geometrico,* par le tour de réduction à l'absurde; mais de manière aussi à en restreindre singulièrement les applications, et même à laisser de côté les plus importantes applications de ce principe, celles qui justifient sa prérogative de *principe régulateur et dominant, dans la critique de l'entendement humain comme dans toute espèce de critique.*

Ce qui a péri sans retour dans le système de Leibnitz peut être regardé comme ayant péri par suite de ce vice originel.

Cournot, *Essai sur les fondements de nos connaissances*, t. I, p. 21 :

Une des facultés, que nous considérons comme éminente entre toutes les autres, est celle de *concevoir et de rechercher la raison des choses.*

Que cette faculté ait besoin, comme le goût littéraire, comme le sentiment du beau, d'exercice et de culture pour se développer; qu'elle puisse être entravée dans son développement par certains défauts d'organisation, par des circonstances extérieures défavorables, telles que celles qui concentrent toute l'activité extérieure de l'homme vers des travaux ou plaisirs grossiers, il y aurait absurdité à le nier.

Chez tous les hommes réputés raisonnables, on retrouve, à certains degrés, cette tendance à s'enquérir *de la raison des choses;* ce désir de connaître, *non pas seulement comment les choses sont, mais* pourquoi *elles sont de telle façon plutôt que d'une autre;* et partant, cette intelligence d'un rapport qui ne tombe pas sous les sens; cette notion *d'un lien abstrait en vertu duquel une chose est subordonnée à une autre qui la détermine et qui l'explique.*

COURNOT, *De l'enchaînement des idées fondamentales,* t. I, p. 72 :

Saisir les caractères essentiels des choses, c'est saisir la manière dont elles procèdent rationnellement les unes des autres, ou s'engendrent les unes les autres.

CONDILLAC, *La langue des calculs,* p. 270 :

Pour contracter la routine du calcul, non seulement il faudrait s'exercer sur beaucoup d'exemples, il faudrait encore s'exercer continuellement; autrement on oublierait bientôt tout ce qu'on croirait avoir appris.

Ce n'est donc point par la routine que l'on s'instruit, c'est par sa propre réflexion. Et *il est essentiel de contracter l'habitude de se rendre raison de ce qu'on fait :* cette habitude s'acquiert plus facilement qu'on ne pense; et, une fois acquise, elle ne se perd plus.

PONCELET, *Analyse des transversales,* p. 108 :

La Géométrie intuitive comme la Géométrie analytique nous présentent, à l'envi, des courbes et des surfaces, dont certains points, certaines branches ou nappes sont imaginaires, confondues, réduites à des lignes ou à des points isolés, etc., soit en totalité, soit en partie seulement, sans qu'elles cessent, pour cela, de jouir de certaines propriétés, sans qu'elles doivent cesser, d'une manière absolue, de faire l'objet de nos raisonnements et de nos investigations géométriques; *car toutes ces bizarreries ne nous répugnent que parce que nous ne possédons pas bien encore la Métaphysique de la science qui a pour objet la grandeur figurée.*

LAPLACE, *Essai philosophique sur les probabilités,* p. 56 :

Les résultats transcendants du calcul sont, comme toutes les abstractions de l'entendement, DES SIGNES GÉNÉRAUX DONT ON NE PEUT CONNAITRE LA VÉRITABLE ÉTENDUE QU'EN REMONTANT PAR L'ANALYSE MÉTAPHYSIQUE AUX IDÉES ÉLÉMENTAIRES QUI Y ONT CONDUIT : ce qui présente souvent de grandes difficultés; car l'esprit humain en éprouve moins à se porter en avant qu'à se replier sur lui-même.

LAZARE CARNOT, *Métaphysique du Calcul infinitésimal,* p. 5 :

Je cherche à savoir en quoi consiste le véritable esprit du Calcul infinitésimal.

Id., p. 174 :

La ressource des idées premières est sans doute commode pour éviter les difficultés, mais elle est peu philosophique quand elle n'est pas indispensable. *La métaphysique des sciences* peut ne pas contribuer beaucoup au progrès des méthodes, mais il y a des personnes qui en font une étude favorite, et c'est pour elles que j'ai composé cet opuscule.

On pourrait également renvoyer la notion de l'infini mathématique aux idées premières, et les calculs fondés sur cette notion n'en seraient pas moins susceptibles de toutes les applications qu'on en fait. Cependant, dit D'ALEMBERT, *cette métaphysique, dont on a tant écrit, est encore plus importante et peut-être plus difficile à développer que les règles mêmes de ce calcul.*

Il me semble qu'on peut dire la même chose des quantités négatives isolées, et l'on peut en juger par les discussions dont elles ont été l'objet parmi les plus célèbres géomètres.

VALLÈS, *Des formes imaginaires en Algèbre*, t. I, p. 203 :

C'est que cet illustre géomètre (*Poinsot*) avait profondément réfléchi sur toutes ces choses; *qu'il voyait la science plus encore dans ses bases que dans ses formules*, et ce qui l'intéressait le plus dans ces dernières, c'étaient *les rapports nécessaires qu'elles doivent avoir avec les principes.* Aussi ajoutait-il avec autant de raison que de vérité :

« Je ne présente, en passant, ces réflexions que dans l'intérêt de *la philosophie de la science, partie trop négligée par la plupart des auteurs et peut-être la plus digne d'être cultivée,* CAR NOS FORMULES ET NOS THÉORÈMES LES PLUS REMARQUABLES SONT BIEN MOINS UTILES ET MOINS PRÉCIEUX EN EUX-MÊMES QUE CETTE SORTE DE MÉTAPHYSIQUE QUI LES DOMINE ET LES ÉCLAIRE ET QUI SEULE PEUT RENDRE A L'ESPRIT DE NOUVELLES FORCES QUAND IL FAUT SE CONDUIRE ET S'AVANCER DANS LES SCIENCES. » (*Analyse des sections angulaires*, p. 5).

DUHAMEL :

On a toujours gagné quand l'on a appris à mieux comprendre ce que l'on fait, et quand on connaît bien *les raisons des choses, on est plus apte à en découvrir de nouvelles.*

SETCHENOFF, *Études psychologiques*, p. 211 :

Le fait est que, dans les phénomènes où intervient la volonté, les conditions qui déterminent les divers caractères des actions finales échappent à la conscience journalière, et celle-ci, au lieu de considérer les faits scientifiquement, objectivement, invente une force intermédiaire *qui n'explique rien.* N'est-il pas plus naturel, dans les cas semblables, de chercher *la raison de la chose* dans les conditions du lien qui existe incontestablement entre la cause initiale et sa fin?

VALLÈS, *Des formes imaginaires en Algèbre,* t. II, Préf., v :

Notre but, dans cet écrit, n'est pas de courir après de nouveaux procédés de calcul, et d'ajouter quelques termes à la série des formules déjà acquises par la Science, *mais bien de nous éclairer sur la véritable signification* de celles de ces formules qui sont déjà connues, *d'étudier l'esprit de ces méthodes* à l'aide de celles qui ont été obtenues, *de scruter autant qu'il nous est permis de le faire* LA RAISON DES CHOSES, LE POURQUOI DES FAITS ANALYTIQUES.

Id., T. III, p. 66 :

Mais il ne suffit pas de signaler une erreur, il est encore très utile de faire connaître *pourquoi* on l'a commise.

DE FREYCINET, *Étude sur la métaphysique du haut calcul.* Épigraphe :

Je cherche à savoir en quoi consiste le véritable esprit du Calcul infinitésimal. (CARNOT, *Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal*).

Id., Préf., VII :

J'ai remarqué qu'une première étude de l'Analyse infinitésimale laissait dans l'esprit beaucoup d'incertitude et d'obscurité. *On ne pénètre pas immédiatement la métaphysique* de cette Science et l'on ne se rend pas compte de ce qui assure la rigueur des résultats à travers l'apparente inexactitude des procédés. Ainsi, *tout en acceptant des résultats d'une incontestable exactitude, on ne se sent pas satisfait de la voie suivie pour les obtenir. C'est assurément un grave défaut de logique : il ne s'agit pas d'atteindre le but, il faut encore savoir de quelle manière on y parvient.*

Id., Préf., X :

Évidemment, les considérations que je présente ne sont pas nouvelles pour les géomètres; on en retrouverait les principes à divers endroits de leurs écrits. Mais, comme elles y sont généralement associées aux calculs, il n'est pas toujours aisé, pour les commençants, *d'en saisir la filiation naturelle;* c'est ce qui m'a fait juger utile de les réunir en corps de doctrine séparé, où l'enchaînement devient plus sensible.

Id., Préf., XII :

Les réflexions de Carnot sur *la métaphysique* du Calcul infinitésimal éclairent supérieurement plusieurs notions essentielles, entre autres celle des infiniment petits. Mais je n'ai pu suivre cet auteur dans sa conclusion générale, qui consiste à *fonder l'exactitude des résultats* SUR LE FAIT de la disparition des quantités infinitésimales dans les équations dernières.

UN TEL ARGUMENT, BIEN QUE VRAI AU FOND, N'EST PAS SATISFAISANT POUR L'ESPRIT, car il semble confondre *le signe de l'effet avec la cause elle-même,* et l'on peut dire QU'IL PROUVE, MAIS N'EXPLIQUE PAS.

Id., Préf., XIII :

Tout en accordant à la théorie des fonctions analytiques et au calcul des fonctions de Lagrange le tribut d'admiration dû à ces œuvres immortelles, *je n'ai pu m'empêcher d'en combattre la pensée dominante.* L'entreprise de ramener l'Analyse infinitésimale à un point de vue purement algébrique et de suppléer une conception naturelle par des artifices de calcul a définitivement échoué contre les impossibilités de l'application, sans parler de l'insuffisance et même *du paralogisme de la proposition fondamentale.*

Id., P. 219 :

Carnot *fonde la rigueur* de la méthode leibnitzienne sur une conception très ingénieuse, généralement connue sous le nom de *principe de compensation des erreurs.* Son argumentation *repose essentiellement sur ce que* les erreurs, s'il y en avait dans le résultat final, seraient nécessairement *de même nature* que les quantités infiniment petites qui les ont engendrées. Or, ces quantités disparaissant toujours par le fait même de la différentiation et de l'intégration, *il n'en subsiste plus aucune trace dans* les équations finales. Celles-ci sont donc *nécessairement et rigoureusement exactes.*

UNE TELLE DÉMONSTRATION, BIEN QUE VRAIE AU FOND, N'EST PAS SATISFAISANTE POUR L'ESPRIT, *car elle semble confondre* LE SIGNE *de l'effet* avec LA CAUSE ELLE-MÊME. ON VOIT BIEN QUE, si les quantités infiniment petites ont disparu, le résultat ne peut être erroné, mais on ne voit PAS POURQUOI ces infiniment petits disparaissent inévitablement, *et pourquoi* en les supprimant on *rétablit l'exactitude des relations.*

Id., P. 223 :

C'est à de semblables résultats que s'applique justement notre objection. *Car pourquoi les erreurs se compensent-elles?* NOUS VOYONS BIEN QUE CELA A LIEU, MAIS NOUS NE DISCERNONS PAS PAR QUELLE CAUSE.

Id., P. 223 :

Cette difficulté a été profondément sentie par *Lagrange*, et c'est ainsi qu'il la met en relief dans sa théorie des fonctions analytiques :

« Il me semble que, comme dans le Calcul différentiel, tel qu'on l'emploie, on considère et on calcule, en effet, les quantités infiniment petites ou supposées infiniment petites elles-mêmes; *la véritable métaphysique de ce calcul consiste en ce que* l'erreur résultant de cette fausse supposition est redressée ou compensée par celle qui naît des procédés mêmes du calcul suivant lesquels on ne retient dans la différentiation que les quantités infiniment petites du même ordre. Par exemple, en regardant une courbe comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, et dont le prolongement est la tangente de la courbe, *il est clair qu'on fait une supposition erronée;* mais l'erreur se trouve corrigée dans le calcul par l'omission qu'on y fait des quantités infiniment petites. *C'est ce qu'on peut faire voir par des exemples, mais dont il serait peut-être difficile de donner une démonstration générale.* »

Id., P. 193 :

Cette démonstration paraîtra peut-être longue, beaucoup plus longue assurément que celle donnée dans la plupart des traités; *mais il s'agit ici, avant tout, de montrer* CE QUI ASSURE LA RIGUEUR *de la méthode infinitésimale. Il ne nous était donc pas loisible de passer légèrement sur les points intermédiaires, et* IL FALLAIT METTRE EN ÉVIDENCE, CHAQUE FOIS, LES PRINCIPES QUI DONNENT LE DROIT de remplacer telle quantité infinitésimale par telle autre. *Si les démonstrations ordinaires sont plus rapides,* C'EST PARCE QU'ON Y SOUS-ENTEND *les considérations que nous avons tenu à formuler explicitement.*

Id., P. 235 :

Ce n'est pas tout encore. Non seulement il faut, *en bien des cas, con-*

traindre les notions naturelles pour approprier les questions au calcul, — car ce n'est plus le calcul qui est approprié aux questions; — mais lorsque le problème se complique, l'instrument même cesse d'être maniable. Rien de plus significatif à cet égard que l'exemple offert par *son propre inventeur. Lagrange lui-même, malgré sa prodigieuse facilité, n'a pu conserver sa méthode et a suivi exclusivement celle de Leibnitz* dans le système entier de la Mécanique analytique.

Cela nous prouve que LES ARTIFICES MIS EN ŒUVRE PAR LES PLUS GRANDS ESPRITS NE SUFFISENT POINT POUR SUPPLÉER LES CONCEPTIONS SUGGÉRÉES PAR LA NATURE MÊME DES CHOSES.

Les notions de limite et d'infiniment petits sont en rapport direct avec les phénomènes, et correspondent à des objets dont la considération se présente d'elle-même à l'esprit.

Il faut donc les accepter franchement, et ne pas les rejeter sous le prétexte qu'elles n'interviennent pas dans l'analyse ordinaire.

Chaque branche de science est caractérisée par les conceptions spéciales qui lui servent de bases, et l'on ne doit pas s'étonner que l'Analyse infinitésimale ait les siennes propres.

C'est en se plaçant à un semblable point de vue que les théories peuvent être édifiées avec rigueur et sans contrarier les penchants de l'esprit. Sous ce rapport, *l'effort vainement tenté* par l'immortel Lagrange nous paraît offrir un enseignement qu'on ne saurait trop méditer.

M. Marie, *Histoire des Mathématiques,* t. II, p. 235 :

La méthode de Paracelse consistait à rechercher dans toutes les substances la partie active et à la séparer. Il doit être considéré, dit M. Dumas, comme l'auteur de cette direction de la Chimie médicale *dans laquelle on se propose d'écarter des matières médicamenteuses les substances inertes, pour ne s'attacher qu'aux substances actives,* ou d'augmenter l'énergie de celles-ci en leur communiquant la solubilité qui leur manque.

Carnot, *De la corrélation des figures en Géométrie,* p. 55 :

On voit qu'il n'est pas toujours nécessaire, pour trouver les changements à opérer dans les formules, d'établir en entier la corrélation des figures; il suffit le plus souvent d'une légère attention pour reconnaître quelles sont les quantités qui deviennent inverses, et dont les valeurs doivent par conséquent changer de signe.

Mais il est essentiel d'en connaître le principe; et dans les cas compliqués, il est nécessaire de l'appliquer dans toute son étendue.

CHASLES, *Géométrie supérieure*, Préf., XVII :

Une étude attentive des différents procédés de démonstration qui peuvent s'appliquer à une même question m'a convaincu qu'à côté d'une démonstration facile fondée sur *quelques propriétés accidentelles ou contingentes* d'une figure, *doivent s'en trouver* toujours d'autres, FONDÉES SUR DES PROPRIÉTÉS ABSOLUES *et subsistantes dans tous les cas* que peut présenter la figure en raison de la diversité de position de ses parties ; et j'ai éprouvé que la recherche de ces démonstrations complètement rigoureuses est d'autant plus utile, qu'elle met nécessairement sur la voie des propositions les plus importantes, *de celles qui établissent tous les liens qui doivent exister entre les diverses parties d'un même sujet.*

MONTESQUIEU, *L'Esprit des lois*, p. 3 :

Les lois, dans la signification la plus étendue, sont les rapports nécessaires qui résultent de LA NATURE DES CHOSES.

Il y a donc une RAISON PRIMITIVE ; *et les lois sont les rapports qui se trouvent entre elle et les différents êtres, et les rapports de ces divers êtres entre eux.*

Gauss, enfin, parlant de Bolyaï, disait que « c'était le seul homme qui eût complètement saisi SES VUES MÉTAPHYSIQUES sur les Mathématiques ».

Après tous ces extraits, auxquels j'en pourrais ajouter tant d'autres, il est temps de me résumer.

En quoi consiste cette *raison des choses,* cette *nature des choses,* ce *pourquoi,* ce *qu'est-ce que,* etc.? ne sont-ce pas là autant d'expressions différentes d'une considération fondamentale : LA MÉTAPHYSIQUE?

Tout raisonnement n'implique-t-il pas forcément le *parce que qui sert de sanction?* ne consiste-t-il pas à donner la raison de ce qu'on fait? n'est-il donc pas impossible de raisonner et de calculer (le calcul n'étant qu'un raisonnement symbolique) *sans faire de la métaphysique?*

Sans métaphysique, pas de sanction, pas de droit, pas de certitude. On va au hasard, à l'aventure, sans principes fondamentaux ; on dit tout aussi bien une éclatante vérité qu'une formidable sottise.

La raison d'existence des choses est la condition fondamentale sans laquelle la chose n'existerait pas, dont la présence la fait naître, dont l'absence la fait cesser d'exister, *la seule chose essentielle* nécessaire, active, à laquelle il faille s'attacher, *toutes les autres considérations étant d'ordre secondaire.*

Quant à la *cause,* qu'il ne faut pas confondre avec la *raison des choses,* c'est l'antécédent complexe dont le conséquent suit; *l'effet n'étant que la transformation de la cause.*

Dire qu'il n'y a pas d'effet sans cause, c'est dire qu'il n'y a pas de conséquent sans antécédent.

La science d'une chose n'existe réellement que quand on en a fait la métaphysique. Tout le reste n'est qu'empirisme.

En commençant par Archimède, Descartes, passant par Leibnitz, Laplace, Poinsot, Poncelet, Gauss, Lagrange, Carnot, Cournot, Vallès, pour finir par M. de Freycinet, la liste qui précède me semble suffisante pour donner gain de cause à mon opinion.

Avec de pareils avocats, mon procès doit être gagné.

ARITHMÉTIQUE GRAPHIQUE.

LES

ESPACES ARITHMÉTIQUES HYPERMAGIQUES.

CHAPITRE I.

HISTORIQUE.

Les carrés magiques.

1. Si l'on dispose les m^2 premiers nombres sur un damier de m cases de côté, de manière que la somme des nombres compris dans les cases d'une même ligne ou d'une même colonne, prise indifféremment, soit constante, et qu'il en soit de même pour les m nombres compris dans chacune des diagonales, on dit que l'on a construit *un carré magique*.

Cette disposition a de tout temps préoccupé l'esprit de l'homme, puisque, avant même de savoir compter, il a fait des carrés magiques.

Ainsi, il y a environ 4000 ans, on trouve chez les Chinois le carré magique de trois cases de côté qui sera reproduit plus loin.

2. Nous extrayons textuellement de la *Théorie des nombres*, d'ÉDOUARD LUCAS (préface, p. XIX) la citation suivante :

C'est ainsi que, parmi les principales propriétés des nombres, on trouve dès le commencement cette proposition que l'on doit considérer comme l'axiome fondamental des Mathématiques :

Le nombre est indépendant de l'ordre et des divers groupements de ses unités.

Dans le *Lo-chou,* que nous figurons avec des chiffres au lieu de boules, les neuf premiers nombres sont rangés sur les neuf cases d'un carré.

Fig. 1.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

La somme des nombres renfermés :

dans une même ligne,
dans une même colonne,
dans chacune des diagonales

est constamment égale à quinze.

Et pourtant cette figure, qui représentait peut-être une boîte portative de poids dans laquelle on avait cherché et trouvé l'équilibre et que l'on appelle actuellement *un carré magique, doit être considérée comme le plus ancien document de l'Arithmétique,* puisqu'elle renferme quelques-unes des propriétés élémentaires des nombres.

3. On attribue habituellement la découverte des *carrés magiques* au moine grec Emmanuel Moscopule (¹) qui vivait vers l'an 420 de l'ère chrétienne (Bossut, *Histoire des Mathématiques,* t. I, p. 232).

M. de la Loubère, dans la relation de son voyage fait en 1687, comme envoyé extraordinaire auprès du Roi de Siam, rapporte ce qui suit :

M. Vincent, dont j'ai souvent parlé dans ma relation, me voyant un jour dans le vaisseau, pendant notre retour, ranger par amusement des *carrés magiques* à la manière de Bachet, me dit que les Indiens de Surate les rangeaient avec bien plus de facilité, et m'enseigna leur méthode pour les carrés impairs seulement, ayant, dit-il, oublié celle des pairs (M. de la Loubère, *Du royaume de Siam,* t. II, p. 233. Amsterdam, 1691).

(¹) Ou *Moschopulos.*

Il est donc impossible d'assigner une origine à la méthode des Indiens de Surate.

Cependant, dit Ed. Lucas (*Récréations mathématiques*, t. I, préf., p. xv), il y a beaucoup d'apparence que ces carrés ont tiré leur nom des opérations superstitieuses auxquelles ils étaient employés, telles que la construction des talismans, car, selon la puérile philosophiede ceux qui donnaient des vertus aux nombres, quelle vertu ne devaient pas avoir des nombres si merveilleux!

Ce qui a commencé par être une vaine pratique de faiseurs de talismans ou de devins est devenu dans la suite le sujet d'une recherche sérieuse pour les mathématiciens, non qu'ils aient cru qu'elle pût mener à rien d'utile ni de solide; les carrés magiques se sentent toujours de leur origine sur ce point, *ils ne peuvent être d'aucun usage*. Ce n'est qu'un jeu dont la difficulté fait le mérite et qui peut seulement faire naître sur les nombres quelques idées nouvelles dont les mathématiciens ne veulent pas perdre l'occasion (*Histoire de l'Académie des Sciences* pour l'année 1705, p. 70. Paris, 1706).

4. Ainsi qu'on vient de le voir, l'étude des carrés magiques était regardée (et l'est encore aujourd'hui) *comme un jeu d'une extrême difficulté, mais ne pouvant être d'aucun usage*. C'était aussi l'opinion de Franklin qui, dans une lettre à Collinson (Franklin, *Experiments and observations on Electricity*, p. 350, London, 1764) les appelle *difficiles nugæ* (Ed. Lucas, *Récr. math.*, t. I, préf., p. xvi).

Nous empruntons également ce qui suit au même Ouvrage :

Parmi les savants qui se sont occupés avant Euler de ce problème, on doit citer : Moschopulos, dans une intéressante monographie sur les carrés magiques; M. Gunther, membre du Parlement de Berlin, a publié le texte grec du manuscrit de Moschopulos, auteur byzantin de la fin du moyen âge; Agrippa, Théophraste, Paracelse, Cardan, Stifel, Bachet, Kircher, Frénicle et plus spécialement Fermat, de la Hire et Sauveur.

M. Mansion, professeur à l'Université de Gand, a exposé dans l'*Abeille* le principe de la méthode de Sauveur, qui repose sur la considération des systèmes de numération et diffère peu de la méthode d'Euler.

Au XIXe siècle les principaux auteurs sont en Allemagne Molweïde, Hungel, Pessl qui s'occupe des cylindres magiques; en Angleterre, Horner, Drach, Thompson et Frost; en France, Violle, qui écrit un grand Traité sur ce sujet.

5. Ce sujet a préoccupé l'esprit d'un grand nombre d'hommes distingués :

Claude-Gaspard Bachet de Méziriac, né à Bourg en Bresse, 1581, mort en 1638, membre de l'Académie française en 1625;

Frénicle de Bessy (l'un des plus anciens membres de l'Académie des Sciences, profond arithméticien, dit Bossut (*Histoire des Math.*, t. I, p. 235);

Philippe de la Hire, né à Paris en 1640, mort en 1718; « il formait à lui seul, dit Fontenelle, une Académie tout entière » (Marie, *Histoire des Math.*, t. V, p. 126).

« Lahire, dit Marie, affichait sa préférence pour les méthodes expérimentales. »

« Parmi tous les auteurs qui se sont occupés de carrés magiques, Lahire est sans contredit celui qui a le plus approfondi la matière » (Violle, *Traité complet des carrés magiques*, t. I, préf., p. vi).

Ozanam, né à Bouligneux (Ain) en 1640, mort en 1717, membre de l'Académie des Sciences en 1701; opinion de Leibnitz (lettre à Oldembourg, 1674) : « Il sera digne d'être lu..., il montre partout le mode analytique de l'invention. »

Sauveur (Joseph), né à la Flèche en 1653, mort à Paris en 1716; il entra à l'Académie des Sciences en 1696.

Nous ne citons que pour mémoire :

Poignard, chanoine de Bruxelles, qui publia en 1703 un livre sur les carrés magiques (Bossut, *loc. cit.*, t. I, p. 236).

Dons en Bray, qui dans les *Mémoires de l'Académie* a donné quelque chose sur les carrés magiques (Violle, *loc. cit.*, t. I, préf. p. v).

Pajot Osembray envisagea la question sous un nouveau point de vue (Bossut, *loc. cit.*, t. I, p. 237).

Rallier des Ourmes a perfectionné et étendu encore toutes ces méthodes dans un excellent Mémoire présenté à l'Académie des Sciences (Bossut, *loc. cit.*, t. I, p. 238).

Quant à Fermat, dans une lettre au P. Mersenne, il termine ainsi :

En voilà assez pour donner de l'exercice à M. de Frénicle, *car je ne sais rien de plus beau en Arithmétique que les nombres que quelques-uns appellent planetarios, les autres magicos;* or, de fait, j'ai vu plusieurs talismans où quelques-uns de ces carrés rangés de la sorte sont décrits et, parmi plusieurs, un grand d'argent qui contient le 49 rangé selon la méthode de Bachet, *ce qui fait croire que personne n'a connu la générale, ni le nombre de solutions qui peuvent arriver à chaque carré.* Si la chose est sue à Paris, vous m'en éclaircirez; en tout cas, je ne la dois qu'à moi seul (Brassine, *Œuvres mathématiques de Fermat*, p. 146).

D'autres lettres du même recueil prouvent que Fermat pratiquait la méthode dite des enceintes, qui constitue un carré magique au moyen de *bordures magiques* que l'on encadre les unes dans les autres de manière à en former un carré.

6. Un savant russe très distingué, M. le général Frolov, qui a écrit sur les carrés magiques deux brochures fort intéressantes, s'exprime ainsi dans l'une d'elles (p. 6) :

Ce problème (ainsi que celui du cavalier aux échecs) n'appartient nullement à la théorie des équations, qui ne s'occupe que de la grandeur des quantités, mais non pas de l'ordre de leur disposition relative; et les égalités qui expriment les conditions des carrés magiques ne sont aucunement des équations algébriques, *parce qu'il s'agit non pas de trouver des nombres inconnus, mais de savoir disposer des nombres donnés d'avance sur des cases d'une figure donnée aussi.* Ces deux problèmes appartiennent entièrement à la science des nombres. A ce qu'il paraît, c'est l'opinion de Legendre, qui s'est occupé de ces problèmes et de quelques problèmes analogues dans sa *Théorie des nombres,* et même de Fermat, qui a dit qu'il ne connaissait *rien de plus beau en Arithmétique* que les carrés magiques; or la théorie des nombres n'est que l'Arithmétique supérieure.

7. Dans les *Récréations mathématiques* dont nous avons déjà parlé plus haut, Ed. Lucas nous apprend (t. I, préf., p. XIII) que le troisième Mémoire d'Euler, publié dans les *Comptes rendus de la Société des Sciences de Flessingue,* a pour titre : *Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques.* Il commence ainsi :

Une question fort curieuse et qui a exercé pendant quelque temps la sagacité de bien du monde m'a engagé à faire les recherches suivantes *qui semblent avoir ouvert une nouvelle carrière dans l'analyse et en particulier dans la doctrine des combinaisons.*

Cette question roulait sur une assemblée de trente-six officiers de six différents grades et tirés de six régiments différents, qu'il s'agissait de ranger dans un carré de manière que sur chaque ligne tant horizontale que verticale il se trouvât six officiers tant de différents caractères que de régiments différents.

Or, après toutes les peines qu'on s'est données pour résoudre ce problème, on est obligé de reconnaître qu'un tel arrangement est absolument impossible, QUOIQU'ON NE PUISSE PAS EN DONNER UNE DÉMONSTRATION RIGOUREUSE.

Ce Mémoire d'Euler de 154 pages in-8° donne sous une forme intéressante, ajoute Lucas, la solution du problème des carrés magiques.

Le problème d'Euler est tout bonnement de la magie littérale : c'est le carré de six cases de côté; il est effectivement impossible, et la raison en est très simple : c'est que les facteurs de 6 sont les nombres 2 et 3, trop petits pour qu'on puisse obtenir un degré de magie suffisante.

Si l'on prenait le nombre premier 5, on obtiendrait non seulement 5 officiers de différentes armes, de différents grades, mais, si cela pouvait plaire, de différentes nations et au besoin d'une autre différence facultative.

C'est là un problème de magie littérale multiple.

On trouvera dans nos figures un cas assez joli de ce genre de problème, concernant un cube littéral de 4 cases de côté et de magie double.

8. Nous arrêtons là les citations de documents historiques; elles donneront une idée très superficielle de l'importance qui a été accordée à ce genre d'exercices.

Un très intéressant travail à faire, ce serait celui de l'exposition et de la critique des diverses méthodes, de la filiation, de la parenté et de la variation des idées. Il y aurait là certainement, au point de vue psychologique, une étude fort curieuse, mais nous la renverrons *ubi vacaverit,* comme disait Leibnitz, *à plus tard,* l'étendue de notre travail sur les espaces arithmétiques hypermagiques étant à notre avis déjà beaucoup plus considérable que nous ne l'aurions désiré. Nous ne devons pourtant pas passer sous silence la fameuse gravure d'Albert Dürer, appelée *Mélancholie, parce que* l'auteur avait voulu peindre ce que la réflexion humaine peut avoir de plus profond; c'est ainsi que l'on a donné au nouveau monde le nom d'*Amérique,* parce que Christophe Colomb l'avait découverte. L'humanité, qui a inventé la logique, s'en sert si souvent à rebours!!!

Fig. 2.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Sur cette gravure, Albert Dürer a buriné le carré ci-dessus.

On peut se rendre compte qu'il est *semi-diabolique* (¹), $14 + 12 + 5 + 3$ ainsi que $15 + 9 + 8 + 2$, donnant la somme magique, aussi bien que $4 + 6 + 11 + 13$ et $1 + 7 + 10 + 16$, de sorte que, si l'on divise le carré en deux parties égales et si l'on intervertit les deux moitiés ainsi obtenues, on a encore un carré magique.

Les carrés diaboliques.

9. Les carrés diaboliques, dit Lucas (*Récréations mathématiques*, t. I, préf., p. XVII), ont été entrevus par de la Hire, Euler et Sauveur.

Voici, par exemple, deux carrés diaboliques :

Fig. 3 et 4.

15	6	9	4
10	3	16	5
8	13	2	11
1	12	7	14

23	6	19	2	15
4	12	25	8	16
10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9

Ce sont des carrés diaboliques de 16 et 25 cases.

Si l'on divise un tel carré en deux rectangles égaux ou inégaux par une ligne

(¹) *Voir* même Chapitre, numéro suivant.

horizontale ou verticale, *le carré doit rester magique après l'échange des deux fragments du carré.* Par suite, un nombre quelconque du carré peut occuper une case quelconque.

Pour les distinguer des autres, nous appellerons ceux-ci *carrés diaboliques.*

Ces carrés ont *des propriétés encore beaucoup plus diaboliques* que ne croyait Lucas, car le second est *hypermagique,* c'est-à-dire que toutes les directions (en appelant ainsi l'ensemble des lignes parallèles que l'on peut tracer dans un espace à nombre de dimensions quelconque) sont magiques à l'exception de deux, qui sont ici $+3x+1y$, $+2x+1y$, d'après les notations que nous emploierons dans cette étude.

Mais, pour rester *dans la diabolie,* les carrés diaboliques peuvent être définis : *ceux dont toutes les directions orthogonales et celles inclinées de 45° sont magiques.*

Une de leurs propriétés les plus remarquables et les plus apparentes est celle qui consiste en ce que la permutation circulaire d'un nombre quelconque de lignes ou de colonnes donne naissance à un carré magique.

10. Dans le plus récent des deux Ouvrages de M. le général Frolov, que nous avons signalés plus haut, nous trouvons le renseignement qui suit, au sujet des carrés diaboliques :

> Le révérend A.-H. Frost, de l'Université de Cambridge, nous a fait part de ses recherches. Elles nous ont appris qu'il a donné d'excellentes méthodes pour la construction *des carrés diaboliques* qu'il a nommés *carrés de Nasik,* du nom de la localité des Indes où il les a construits il y a plus de vingt ans.

Sans nous livrer ici à une discussion quelconque de l'intéressante et remarquable étude de M. Frolov, nous ne pouvons qu'engager le lecteur à la méditer. Tout ce qui sort de la plume de cet auteur est fait avec soin et consciencieusement.

CHAPITRE II.

ESPACES ARITHMÉTIQUES CONGRUENTS A PLUSIEURS DIMENSIONS.

Congruences.

11. Nous rappellerons qu'en Arithmétique on dit que deux nombres a et b sont *congrus* ou *équivalents* par rapport au *module* m, lorsque, étant divisés par le nombre entier m, ils donnent le même reste. La relation qui existe entre ces deux nombres est dite une *congruence*, et elle s'écrit

$$a \equiv b \quad (\text{mod.}\, m).$$

Il s'ensuit évidemment que la différence des deux nombres a, b est divisible par m.

En particulier, si l'on prend le reste α de la division de a par m, on a

$$a \equiv \alpha \quad (\text{mod.}\, m).$$

Sur les congruences, on peut faire la plupart des transformations applicables aux équations. Il y a lieu de remarquer en outre que dans une congruence quelconque on peut, sans altérer la congruence, supprimer tous les multiples du module, c'est-à-dire tous les termes de la forme pm, si bien que *tout se passe comme si le module était supposé égal à zéro*.

Les congruences les plus intéressantes, et en même temps les plus faciles à étudier, sont celles dont le module est un nombre premier. Il arrive cependant qu'on peut avoir à considérer des congruences à module composé. Dans tous les cas, pour les applications que nous avons en vue, il est inutile de pénétrer plus avant dans le calcul des congruences; et il nous suffit d'en avoir bien fait comprendre la définition et l'idée générale.

12. Il y a cependant une notion simple dont il est bon de donner dès à présent l'idée. Un nombre quelconque étant toujours congru à un nombre inférieur au module, le produit de deux nombres (ou de plusieurs nombres) sera lui-même congru à un nombre inférieur à ce module. Si nous avons

$$a \equiv \alpha, \qquad b \equiv \beta \qquad (\text{mod.}\, m),$$

il en résulte

$$ab \equiv \alpha\beta \equiv \gamma \qquad (\text{mod.}\, m),$$

le nombre γ étant plus petit que m. Il y a évidemment un grand avantage à connaître cette valeur de γ qui résulte de α et β, c'est-à-dire à construire une *Table de multiplication congruente* s'étendant aux valeurs de α, β depuis o jusqu'à $m - 1$.

Réciproquement, au moyen de cette Table de multiplication, il est aisé d'obtenir une *Table de division congruente*, c'est-à-dire une Table qui donne immédiatement l'une des deux valeurs α, β lorsqu'on connaît l'autre et en outre γ.

Pour ne laisser aucun doute dans l'esprit sur cette notion si simple, nous donnerons ici, pour le module premier 7, la Table de multiplication et celle de division congruentes dont nous venons de parler.

Fig. 5 et 6.

Table de multiplication.

0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Table de division.

d

D	0	1	2	3	4	5	6
	1	1	2	3	4	5	6
	2	4	1	5	2	6	3
	3	5	3	1	6	4	2
	4	2	4	6	1	3	5
	5	3	6	2	5	1	4
	6	6	5	4	3	2	1

Un autre exemple va nous faire toucher du doigt la différence fondamentale qui existe entre les congruences à module premier et celles dont le module est composé. Cherchons à faire la Table de multiplication congruente pour le module 12.

Tandis que tout à l'heure, pour le module 7, chaque ligne ou chaque colonne contenait tous les nombres inférieurs au module, et ne contenait qu'une fois chacun d'eux, nous voyons ici, dans certaines colonnes, des répétitions et des lacunes se produire. Par conséquent, si l'on voulait former la Table de division correspondante, certaines cases resteraient vides, et dans d'autres, au contraire, il y aurait lieu d'inscrire plusieurs nombres pouvant également se présenter.

Fig. 7.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

C'est que la division, par exemple, d'un multiple de $7 + 5$ par un multiple de $7 + 4$, ne peut jamais donner comme quotient qu'un multiple de $7 + 3$; tandis qu'un multiple de $12 + 8$ étant divisé par un multiple de $12 + 4$ peut donner un multiple de $12 + 2$, 5, 8 ou 11. Au contraire, un multiple de $12 + 7$ divisé par un multiple de $12 + 8$ ne saurait jamais être entier. Ce sont là du reste des notions bien connues, très simples, et dont il est aisé de se rendre compte d'une façon générale. Nous donnons ici, comme exemples, les Tables de division qui correspondent aux modules 8 et 12.

Fig. 8.

Table de division (mod 8).

D \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0,4	〃	1,5	〃	2,6	〃	3,7	〃
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0,2 4,6	〃	〃	〃	1,3 5,7	〃	〃	〃
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0,4	〃	3,7	〃	2,6	〃	1,5	〃
7	0	7	6	5	4	3	2	1

Fig. 9.

Table de division (mod 12).

D \ d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0,6	〃	1,7	〃	2,8	〃	3,9	〃	4,10	〃	5,11	〃
3	0, 4,8	〃	〃	1, 5,9	〃	〃	2, 6,10	〃	〃	3, 7,11	〃	〃
4	0,3 6,9	〃	〃	〃	1,4 7,10	〃	〃	〃	2,5 8,11	〃	〃	〃
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0;2,4 6,8,10	〃	〃	〃	〃	〃	1,3,5 7,9,11	〃	〃	〃	〃	〃
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0,3 6,9	〃	〃	〃	2,5 8,11	〃	〃	〃	1,4 7,10	〃	〃	〃
9	0, 4,8	〃	〃	3 7,11	〃	〃	2 6,10	〃	〃	1, 5,9	〃	〃
10	0,6	〃	5,11	〃	4,10	〃	3,9	〃	2,8	〃	1,7	〃
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Lignes arithmétiques; congruences sur une ligne.

13. Prenons une ligne droite indéfinie, et supposons-la sur toute sa longueur garnie de points équidistants. Nous avons une *ligne arithmétique* ou un *espace arithmétique* à une dimension.

Admettant qu'un mobile puisse avancer sur cette ligne en se posant exclusivement sur les points, c'est-à-dire en se déplaçant d'une façon discontinue, la position de ce mobile, à partir d'une origine quelconque choisie en l'un des points, sera représentée par $\pm a$, a étant un nombre entier, et un sens déterminé étant admis comme positif, le sens contraire comme négatif, selon la convention cartésienne.

A partir de l'origine choisie, portons indéfiniment de part et d'autre, sur notre ligne arithmétique, m intervalles, m étant un nombre entier. Nous aurons ainsi divisé la ligne indéfinie en segments ou espaces limités de longueur m, en prenant l'équidistance des points pour unité.

Tout fait arithmétique peut être traduit graphiquement sur la ligne arithmétique; mais si dans l'opération qui en résulte nous convenons de revenir à l'origine, pour continuer, chaque fois que nous viendrons à atteindre la frontière du premier *espace modulaire* que nous venons de définir, il s'ensuit que le fait arithmétique en question se trouvera représenté sur cet espace modulaire unique, et par conséquent fini. Nous substituons ainsi à l'espace indéfini à une dimension un espace arithmétique fini qui nous en fournira la représentation.

On remarquera la coïncidence complète entre l'opération graphique que nous venons d'indiquer et l'idée de congruence dont il a été question plus haut. L'une est la traduction, l'image fidèle de l'autre. C'est pourquoi nous emploierons en général le nom d'*espace congruent* (à une dimension) ou de *ligne arithmétique congruente,* de module m, pour caractériser cette conception graphique, laquelle est fondamentale dans notre théorie.

Congruences sur un espace à deux dimensions. Carrés arithmétiques.

14. Une ligne arithmétique étant donnée, considérons une direction perpendiculaire, issue de l'origine par exemple, ou d'un point quelconque, et sur laquelle se trouve ainsi constitué un espace arithmétique à une dimension. Par chacun des points de cette nouvelle ligne arithmétique, menons des droites parallèles, identiques à la ligne arithmétique primitive, et supposons l'équidistance égale suivant les deux directions perpendiculaires. Nous aurons ainsi établi un espace arithmétique à deux dimensions.

Désignons par la lettre x la première direction, par la lettre y la direction perpendiculaire. Un déplacement quelconque, ayant pour effet de passer d'un point à un autre sur notre espace arithmétique, pourra être caractérisé par la notation $ax + by$, a et b étant deux nombres entiers positifs ou négatifs; x et y doivent ici être considérés comme de véritables symboles, analogues à i dans la théorie des équipollences et à ceux du Calcul des quaternions.

Dans nos études sur l'Algèbre graphique, nous avons considéré l'Algèbre comme la théorie des déplacements dans des espaces continus. Ici, les espaces sont discontinus, les nombres employés sont forcément des nombres entiers, et nous nous trouvons dans le domaine de l'*Arithmétique graphique* à deux dimensions.

Au point de vue du déplacement seul, ici comme dans l'Algèbre graphique, nous pourrons substituer un chemin à un autre, pourvu qu'ils aient tous deux même origine et même extrémité.

15. Si maintenant, par analogie avec ce que nous avons fait plus haut pour la ligne, nous admettons qu'on fasse choix d'un module, et qu'on étudie les phénomènes arithmétiques qui s'ensuivent, nous aurons la représentation complète de l'espace arithmétique indéfini à deux dimensions au moyen d'un carré de m intervalles de côté, à l'intérieur duquel viendront fidèlement s'enregistrer les circonstances arithmétiques pouvant se présenter dans toute l'étendue de l'espace considéré. Il suffira, comme précédemment, de s'assujettir à ne jamais dépasser les limites de cette enceinte, et de revenir à la frontière primitive comme point de départ pour continuer les opérations et les constructions, chaque fois que cela pourra être nécessaire. Ces retours auront lieu pour chacune des directions x et y d'une manière isolée et indépendante; on reviendra sur l'axe des x si l'on a atteint une frontière parallèle à Ox et sur l'axe des y si l'on a atteint une frontière parallèle à Oy.

Ce carré arithmétique sera l'*espace arithmétique modulaire* ou l'*espace congruent,* de module m, à deux dimensions.

Cubes arithmétiques.

16. Sans qu'il soit besoin de plus amples explications, nous concevons, par simple analogie, la constitution de l'espace arithmétique à trois dimensions, où un déplacement serait caractérisé par le symbole $ax + by + cz$, a, b et c étant des nombres entiers.

On voit aussi, immédiatement, comment la notion de congruence de module m nous amènera à la constitution d'un cube arithmétique, dont le côté présentera m intervalles, et dans lequel viendront se représenter tous les faits arithmétiques de l'espace indéfini à trois dimensions. Ce cube sera l'*espace modulaire* ou l'*espace congruent,* de module m, à trois dimensions.

Il va sans dire que la troisième direction z est supposée perpendiculaire aux deux autres.

Espaces arithmétiques en général. — Groupes linéaires, binaires ou ternaires.

17. Un espace arithmétique à trois dimensions étant constitué, admettons qu'il puisse exister une quatrième direction, perpendiculaire à la fois à x, y, z et distincte de chacune de celles-ci. Par chacun des points de l'espace à trois dimensions, menons dans cette nouvelle direction t des droites arithmétiques identiques à la droite primitive. Nous aurons ainsi un espace à quatre dimensions.

Ce pas franchi, rien ne s'oppose à ce que nous admettions successivement de nouvelles directions perpendiculaires à chacune des précédentes et distinctes de chacune d'elles. Nous arrivons ainsi à la construction graduelle d'espaces arithmétiques à un nombre quelconque de dimensions. Nous aurons occasion de voir que symboliquement et graphiquement tout se passe comme si ces directions existaient.

Il est évident qu'en représentant par x, y, z, t, ... les diverses directions considérées, la formule générale d'un déplacement dans un espace à un nombre quelconque de dimensions sera

$$ax + by + cz + dt + \ldots,$$

a, b, c, d, ... étant des nombres entiers positifs ou négatifs.

18. Si nous ramenons à un cube arithmétique l'espace à trois dimensions (n° 16), c'est-à-dire si nous passons de l'espace indéfini à l'espace congruent de module m, qui le représente, il devient facile de se faire une idée des espaces successifs ; ceux-ci cessent alors de se présenter comme le résultat d'hypothèses plus ou moins fictives. Ils prennent un caractère frappant de réalité, et deviennent pour ainsi dire tangibles.

En effet, de même que le carré arithmétique de module m est une collection de m lignes, de même que le cube est une collection de m carrés, nous pouvons concevoir une collection de m cubes congruents de module m. Si chacun d'eux est numéroté, on pourra considérer ce numéro d'ordre comme constituant la quatrième coordonnée d'un point quelconque. Deux points homologues, par exemple, dans deux de ces cubes numérotés d et d' respectivement, auront pour coordonnées

$$a,\ b,\ c,\ d \quad \text{et} \quad a,\ b,\ c,\ d'.$$

Une ligne de cubes nous donnera ainsi l'espace arithmétique congruent à quatre dimensions.

Un carré de cubes fournira un espace arithmétique congruent à cinq dimensions.

Un cube de cubes fournira un espace arithmétique congruent à six dimensions.

En continuant de la même manière, nous matérialisons, pour ainsi parler, les espaces à un nombre quelconque de dimensions, et nous voyons qu'un espace sera toujours représenté par un groupement de carrés ou de cubes.

A la rigueur, on pourrait représenter un espace à deux dimensions par m lignes droites placées à la suite les unes des autres, m étant le module ; puis un espace à trois dimensions par m de ces ensembles de droites ; et ainsi de suite. Cela nous donnerait des groupements *linéaires*, n'offrant d'ailleurs que peu d'avantages au point de vue des applications.

De même, un espace à trois dimensions peut être représenté par une file de carrés; un espace à quatre dimensions, par un carré formé par ces files de carrés; et ainsi de suite. Ce sont là les groupements *binaires*, permettant de représenter sur un plan un espace à un nombre quelconque de dimensions. Si le nombre de dimensions est pair, on aura un carré; et s'il est impair, une file de carrés.

Enfin, comme nous venons de le voir ci-dessus, une file de cubes nous donne un espace à quatre dimensions; un carré de cubes, un espace à cinq dimensions; un cube de cubes, un espace à six dimensions; et ainsi de suite. De telle sorte que, par ces groupements *ternaires*, nous avons en général un cube, une file de cubes, ou un carré de cubes suivant que le nombre des dimensions est mult. 3, mult. $3+1$ ou mult. $3+2$.

Tores arithmétiques.

19. Il est encore possible de se rendre compte des espaces arithmétiques modulaires à plusieurs dimensions de la manière suivante.

Prenons sur une ligne droite $(m+1)$ points équidistants; roulons la droite en cercle et faisons coïncider le $(m+1)^{\text{ième}}$ point avec le premier. Nous avons ce que nous pouvons appeler *un tore à une dimension* de module m. Superposons $(m+1)$ fois ce tore à des hauteurs équidistantes, nous formons ainsi un cylindre; courbons ce cylindre de manière que la $(m+1)^{\text{ième}}$ tranche coïncide avec la première, et nous avons un *tore à deux dimensions*. En continuant indéfiniment le même procédé, on obtient des *tores à un nombre quelconque de dimensions* et de module m.

Il est possible d'étudier les faits de magie soit dans des constructions cubiques, comme ci-dessus, soit dans des *constructions torées*; sous cette dernière forme, elles prennent un aspect pour ainsi dire tout autre, donnant une autre tournure aux idées et fournissant aux considérations de congruence une sorte de continuité.

Si l'on parcourt un tore par une route régulière, en retournant au point de départ, on rencontre des considérations de congruence et de magie qui se présentent sous une forme peut-être nouvelle.

L'étude des déplacement ou chemins, d'une complexité toujours croissante, l'application à cette étude des méthodes graphiques et symboliques, présenteraient, croyons-nous, un réel intérêt. C'est un soin que nous laissons au lecteur, nous bornant à ces brèves indications, et désireux de nous détourner le moins possible de l'objet principal que nous avons en vue.

CHAPITRE III.

ESPACES HYPERMAGIQUES EN GÉNÉRAL.

Notation $((m))$.

20. Le présent Chapitre est surtout destiné à des définitions, indispensables pour la compréhension de l'exposé des méthodes. Mais comme, dans l'application de celles-ci, nous aurons fréquemment à faire usage d'un symbole particulier dont l'emploi est utile et commode, il nous semble convenable d'en donner tout d'abord la définition, avec quelques propriétés essentielles.

Ce symbole, que nous figurons par la notation $((m))$, m étant un nombre entier, représente l'*un quelconque* des nombres 0, 1, 2, ..., $m-1$ inférieurs à m. On pourrait dire, en d'autres termes, que $((m))$ est un *chiffre* quelconque dans le système de numération de base m.

Nous désignerons ce symbole sous le nom de COLLECTEUR de m.

Il y aura souvent intérêt à considérer aussi la somme

$$0+1+2+\ldots+m-1=\frac{m(m-1)}{2},$$

que nous représenterons par $\Sigma((m))$, le signe de sommation Σ s'étendant à toutes les valeurs possibles de $((m))$.

21. Un nombre m étant égal à un produit de deux facteurs p et q, il est clair qu'en divisant par q un nombre quelconque inférieur à m, on aura pour quotient un nombre inférieur à p et, pour reste, un nombre inférieur à q. Par conséquent, nous pouvons écrire

$$((pq))=((p))\,q+((q)),$$

formule qui subsiste même lorsque les facteurs p et q sont égaux.

En supposant qu'un nombre m soit le produit de plusieurs facteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on voit immédiatement que la formule ci-dessus, appliquée de proche en proche, nous conduirait à la suivante :

$$((a_1 a_2 a_3 \ldots a_n))$$
$$= ((a_1))a_2 a_3 \ldots a_n + ((a_2))a_3 \ldots a_n + \ldots + ((a_{n-1}))a_n + ((a_n)).$$

On peut évidemment opérer la décomposition en facteurs dans un ordre quelconque, et il s'ensuit que la formule générale ci-dessus n'est pas altérée, par une permutation quelconque des indices. Cette observation pourra présenter dans ce qui suivra une utilité sérieuse.

Dans le cas particulier où tous les facteurs sont égaux entre eux, et à un nombre a par exemple, la formule devient

$$((a^n)) = ((a))\,a^{n-1} + ((a))a^{n-2} + \ldots + ((a))a + ((a)).$$

On aurait pu l'obtenir immédiatement, en remarquant qu'un nombre quelconque inférieur à a^n s'écrit au moyen de n chiffres dans le système de numération de base a.

On peut, pour plus de concision, mettre, si l'on veut, cette relation sous la forme

$$((a^n)) = ((a))[a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots a + 1];$$

mais il importe bien de remarquer que l'indétermination du symbole $((a))$ doit s'appliquer à chacun des termes entre crochets; de telle sorte qu'on ne pourrait pas, par exemple, effectuer la somme de ceux-ci et écrire le second membre sous la forme $((a))\,\dfrac{a^n - 1}{a - 1}$ qui serait beaucoup trop particulière.

Si, au contraire, on fait la sommation dans les deux membres, il y aura lieu de remarquer que le signe Σ s'étendant de 0 à $a^n - 1$ dans le premier membre, et seulement de 0 à a dans le second, les résultats ne concorderaient pas. Mais on vérifie immédiatement qu'on a alors

$$\Sigma((a^n)) = a^{n-1}\Sigma((a))\,[a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1] = a^{n-1}\Sigma((a))\,\frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

Cette dernière relation peut s'écrire encore sous la forme plus symétrique et intéressante

$$\frac{\Sigma((a^n))}{a^n(a^n - 1)} = \frac{\Sigma((a))}{a(a - 1)} = \frac{1}{2}.$$

Ce symbole $\frac{\Sigma((x))}{x(x-1)}$ est donc totalement indépendant de la valeur entière donnée à x, remarque d'ailleurs évidente, mais non pas inutile.

Nous signalerons enfin la relation suivante, très facile à vérifier :

$$\Sigma((p+q)) = \Sigma((p)) + \Sigma((q)) + pq.$$

Des alternances.

22. Supposons que sur un espace arithmétique à une dimension, nous ayons distribué successivement et dans leur ordre les m nombres 0, 1, 2, 3, ..., $m-1$ indéfiniment répétés. Prenant, par exemple, $m=7$, ce qui n'enlève rien à la généralité de nos explications, nous aurons

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\quad 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\quad 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \ldots,$$

espace indéfini représentable par un espace congruent de module 7, comme nous l'avons expliqué plus haut dans le Chapitre précédent.

Si, sur cette ligne, on marche d'un pas régulier p, en supposant $p \equiv 0 \pmod 7$, on trouvera toujours des nombres identiques. En partant de 0, par exemple, on trouverait toujours 0.

Si $p \equiv 1 \pmod 7$, on rencontre les nombres dans leur ordre naturel.

Si $p \equiv 2 \pmod 7$, on trouve

$$0\ 2\ 4\ 6\ 1\ 3\ 5\ 0\ 2\ 4\ 6\ \ldots.$$

Si $p \equiv 3 \pmod 7$, on trouve

$$0\ 3\ 6\ 2\ 5\ 1\ 4\ 0\ 3\ \ldots$$

et ainsi de suite.

En marchant d'un pas régulier quelconque, on trouve toujours les nombres dans un ordre régulier qui se reproduit périodiquement.

Ce sont ces divers arrangements réguliers que nous nommons les *alternances* de la suite donnée. Il est clair qu'au lieu de nombres nous aurions aussi bien pu imaginer des objets différents représentés par ces nombres.

Si le module est premier, comme dans l'exemple particulier que nous venons de prendre, pourvu que le pas p ne soit pas congru à zéro, c'est-à-dire multiple du module, l'alternance correspondante comprendra nécessairement *tous* les objets.

Les alternances sont évidemment des progressions arithmétiques par congruence, dont les termes sont ramenés à être inférieurs au module, et dont la raison est précisément le pas. Autrement dit, ce sont les lignes successives qu'on obtient dans la formation de la table de multiplication congruente.

Si l'on marchait d'un pas irrégulier, on produirait un désordre complet dans la succession des objets.

En somme, cette formation des alternances n'est autre que la traduction graphique de l'idée arithmétique de congruence, s'appliquant à toutes les progressions arithmétiques imaginables. Ici comme dans la pure science du calcul, et grâce à la notion d'espace congruent, deux distances congrues sont considérées comme équivalentes.

Cette façon de procéder peut s'appliquer à n'importe quel genre de considérations; *au fond, c'est toujours la relation fondamentale d'égalité considérée à un point de vue spécial.*

Ainsi, dans la théorie des *équipollences*, qui n'est autre que celle des déplacements dans un espace à deux dimensions, on a commencé par écrire l'*égalité* de deux déplacements : $a \triangleq b$; M. Laisant, traduisant et appliquant cette théorie, conduit par son esprit essentiellement rationnel et pratique, a proposé de se servir du *symbole d'égalité pur et simple, en admettant une fois pour toutes qu'il s'agit d'équipollences ou d'un cas spécial d'égalité.*

Dans la théorie des congruences, on représente l'égalité par $\equiv$; c'est à peu près comme si l'on supposait toujours $m = 0$ dans des égalités; ce point de vue admis, tout le reste s'ensuit.

Lignes magiques.

23. Nous considérerons, sur un espace modulaire à une dimension, toutes les *lignes,* de divers pas, indiquées au numéro précédent. Si cette ligne rencontre successivement *tous les objets différents,* nous dirons que cette ligne est MAGIQUE.

Si cette circonstance ne se produit pas, on dira que la ligne est *non magique.*

Si la ligne ne rencontre jamais qu'un seul et même objet, nous l'appellerons *ligne d'invariation*.

Ainsi, dans l'exemple que nous avons indiqué, et en général toutes les fois que le module m est un nombre premier, toutes les lignes sont magiques, à l'exception de celles dont le pas est $\equiv 0 \pmod{m}$; celles-ci (qui doivent être regardées comme se confondant entre elles) sont des lignes d'invariation.

Cette dénomination de *magie* pourra d'abord sembler ici un peu étrange, s'appliquant à une propriété aussi simple. Nous aurons occasion plus loin de revenir sur ce sujet.

Carrés hypermagiques.

24. *Directions.* — En nous reportant à ce qui a été exposé au Chapitre précédent sur les espaces arithmétiques à deux dimensions, nous rappellerons que sur un tel espace on caractérise le chemin qui conduit d'un point à un autre par le symbole $ax+by$, a représentant le chemin qu'il faut faire dans le sens des x, et b celui qu'il faut faire dans le sens des y pour passer du premier point au second.

Si l'on continue à cheminer dans la même direction et du même pas, on tombera sur des points successifs qui seront atteints évidemment par les chemins $2(ax+by)$, $3(ax+by)$, ... comptés à partir du premier point.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un espace congruent de module m; tous les points auxquels nous pouvons arriver dans l'espace indéfini, à partir de l'origine par exemple, se ramènent à l'espace congruent, c'est-à-dire aux m^2 points d'un carré unique. Il suffira, pour cela, de substituer aux nombres a et b du symbole $ax+by$ des nombres α et β inférieurs à m, et tels que $a\equiv\alpha$, $b\equiv\beta \pmod{m}$.

Pour fixer les idées, prenons un espace congruent de module 7, et considérons la direction représentée par $2x+1y$. Nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
1(2x+1y)&\equiv 2x+1y,\\
2(2x+1y)&\equiv 4x+2y,\\
3(2x+1y)&\equiv 6x+3y,\\
4(2x+1y)&\equiv 1x+4y,\\
5(2x+1y)&\equiv 3x+5y,\\
6(2x+1y)&\equiv 5x+6y
\end{aligned}$$

et

$$7(2x + 1y) \equiv 0.$$

Toutes ces formules sont comprises dans la suivante

$$((7))\,(2x + 1y);$$

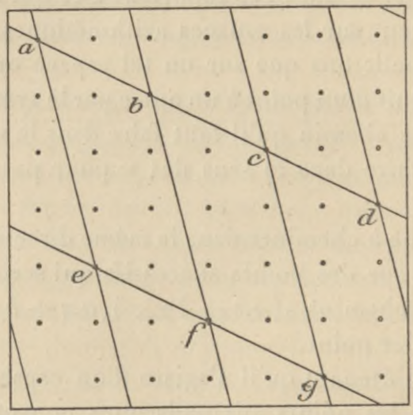
et, en général,

$$((m))\,(ax + by)$$

caractérisera une *direction* sur l'espace congruent.

Il est aisé d'établir la correspondance graphique de cette notation symbolique. En gardant le même exemple que ci-dessus, prenons la droite (*fig.* 10) qui passe par les points a, b, c, d, e, f, g, symbolisée par $+2x + 1y$.

Fig. 10.



Quels que soient les deux points choisis, on peut se rendre directement de l'un à l'autre en poursuivant ensuite son chemin, conformément aux règles des espaces modulaires; chaque route correspondra à une expression symbolique. Ainsi, la route *abcdefg* correspond à

$$+2x + 1y;$$

la route *aebfcgd* à l'expression

$$+1x + 4y = 4(+2x + 1y).$$

Dans les espaces congruents, on peut donc se rendre d'un point à un autre par un certain nombre de chemins rectilignes différents.

Pour ne pas encombrer la figure, nous ne traçons que deux chemins, mais le lecteur peut suppléer facilement à cette lacune volontaire et tracer telle route qu'il lui plaira en faisant un autre choix.

En résumé, chacune des formes symboliques a sa forme graphique correspondante, et réciproquement.

25. *Nombres complémentaires au module.* — Comme rien n'oblige à partir de l'origine, il semble que, pour considérer toutes les directions, il y aurait lieu d'étendre le symbole $ax + by$ au cas où a et b seraient négatifs. Mais si nous désignons, comme plus haut, par α et β les restes de la division de a et b par m, ce qui nous ramène à $\alpha x + \beta y$, puis si nous prenons les compléments au module de α et β, c'est-à-dire $\alpha' = m - \alpha$, $\beta' = m - \beta$, il s'ensuit $-\alpha \equiv \alpha'$, $-\beta \equiv \beta'$. Si donc l'un des nombres α et β (ou même l'un et l'autre) est précédé du signe $-$, on n'aura qu'à le remplacer par son complément au module pris avec le signe $+$. En résumé, il n'y aura lieu d'étudier la formule $ax + by$ que pour des valeurs positives de a et de b, à moins que, par une raison spéciale, on ne veuille conserver les signes $-$ au lieu de se servir des nombres complémentaires.

Par exemple, dans le cas du module 7,

$$1x + 6y \equiv 1x - 1y,$$
$$1x + 1y \equiv 1x - 6y,$$
$$3x + 5y \equiv 3x - 2y \equiv -4x - 2y,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

26. *Nombre de directions d'un espace congruent de module premier.* — Dans un espace à deux dimensions, dont le module est premier, choisissons un point pour origine, et prenons la ligne contiguë à ce point et parallèle aux y par exemple. Si nous joignons l'origine à chacun des points de cette ligne, nous aurons m directions, caractérisées par $1x + ((m))y$. Chacune de ces directions, le module étant premier, comprendra m points, en comptant l'origine; soit $m(m-1)$ points en tout, sans la compter. Nous avons, en outre, la direction issue de l'origine et parallèle aux y, qui comprend m points. Les $m + 1$ directions considérées comprennent donc $m(m-1) + m = m^2$ points, c'est-à-dire le plan tout entier. Donc le nombre des directions possibles est $m + 1$.

Une direction étant donnée, on peut prendre pour origine un point quelconque; et il y a alors m points sur la ligne correspondante. Mais, comme on peut prendre pour origine un point quelconque, et qu'il y en a m^2, il en résulte qu'une direction donnée comprend m lignes parallèles.

De même, dans un espace à trois dimensions, il y aurait m^2 lignes parallèles comprises dans une direction donnée; et, en général, m^{n-1} dans un espace à n dimensions (1).

27. *Directions perpendiculaires.* — La direction symbolisée par $ax + by$ exprime, en coordonnées rectangulaires, une droite dont le coefficient angulaire est $\frac{b}{a}$. La direction perpendiculaire ayant pour coefficient angulaire $-\frac{a}{b}$ sera caractérisée par

$$-bx + ay \quad \text{ou} \quad b'x + ay$$

si nous voulons employer le complément b' au module, ainsi que nous l'avons expliqué plus haut. Cette considération de perpendicularité, que nous aurons occasion d'étendre, nous sera d'une grande utilité dans notre étude.

28. *Lignes magiques d'un carré arithmétique.* — Considérons un carré dans lequel on fait figurer les m^2 premiers nombres entiers $0, 1, 2, \ldots, m^2 - 1$. Leur somme est $\frac{m^2(m^2-1)}{2}$; cette somme, divisée par m, donne

$$\frac{m(m^2-1)}{2} = \frac{(m-1)m(m+1)}{2}.$$

C'est cette dernière expression que nous appelons *somme magique* du carré.

Si toutes les lignes comprises dans une direction rencontrent l'espace modulaire ainsi défini en m points, tels que la somme

(1) Nous serons souvent conduit, pour la commodité du langage, à adopter le mot *direction* avec sa signification géométrique ordinaire, afin de ne pas employer à tout instant l'adjectif *arithmétique* ou *géométrique*. Mais il n'en saurait résulter aucune confusion pour le lecteur un peu attentif et prévenu d'avance.

des éléments correspondants soit précisément la somme magique, on dit que c'est une *direction magique*.

Une ligne particulière ayant cette propriété sera une *ligne magique*. Toute ligne comprise dans une direction magique est magique.

Les *carrés magiques* sont ceux dont les lignes parallèles aux x et aux y, ainsi que les lignes diagonales, sont magiques.

Cette dernière définition coïncide avec celle qui a généralement cours, à une nuance près; c'est qu'on a jusqu'ici considéré les m^2 premiers nombres $1, 2, \ldots, m^2$, au lieu de $0, 1, 2, \ldots, m^2-1$. La somme magique est alors $\frac{m^2(m^2+1)}{2m} = \frac{m(m^2+1)}{2}$. *Cette différence dans le point de départ est, à notre avis, pour beaucoup dans les difficultés qui ont si longtemps arrêté les progrès en cette matière.*

Il est clair, d'ailleurs, qu'un carré magique étant formé, si l'on ajoute un même nombre à tous ses éléments, les sommes qui étaient égales resteront égales, étant également augmentées, et qu'à ce point de vue le carré restera encore magique.

29. *Définition d'un carré hypermagique.* — Nous appellerons *carré hypermagique* un carré arithmétique contenant le plus grand nombre possible de directions magiques.

Les *carrés diaboliques* examinés par Édouard Lucas ne sont qu'un cas particulier des carrés hypermagiques. On sait qu'ils doivent rester magiques quand on les coupe en deux parallèlement aux x ou aux y et qu'on permute les deux éléments ainsi obtenus. Cela revient à dire que les lignes comprises dans les *directions* des diagonales sont magiques, en même temps que celles dirigées parallèlement aux x et aux y, tandis que, dans les carrés magiques, on ne s'attache qu'aux *lignes* diagonales.

On peut s'étonner que la définition de la magie d'une ligne, que nous venons de donner, diffère de celle établie plus haut (**22**), et concernant la magie d'une ligne dans un espace à une seule dimension. Tout cela s'éclaircira sans peine au Chapitre suivant, et l'on verra facilement comment toutes ces notions s'accordent et sont les conséquences les unes des autres.

Cubes hypermagiques.

30. Les considérations, un peu détaillées, dans lesquelles nous venons d'entrer sur les espaces à deux dimensions, vont nous permettre d'abréger beaucoup ce que nous avons à dire sur les espaces à trois dimensions, l'analogie aidant.

Un chemin quelconque sur un tel espace modulaire sera caractérisé par le symbole $ax+by+cz \equiv \alpha x+\beta y+\gamma z$ si $a \equiv \alpha$, $b \equiv \beta$, $c \equiv \gamma \pmod{m}$.

Une direction sera caractérisée par

$$((m))(ax+by+cz).$$

A chaque forme symbolique répond un chemin graphique dans l'espace considéré.

Les nombres α, β, γ peuvent être remplacés par $-\alpha'$, $-\beta'$, $-\gamma'$, α', β', γ' étant les compléments au module de α, β, γ.

Le nombre des directions possibles dans un espace à trois dimensions, de module premier, est facile à déterminer. Nous avons d'abord toutes les $m+1$ directions du plan des xy par exemple, comprenant m^2 points, comme on l'a vu; plus les directions de la forme $((m))x+((m))y+1z$, c'est-à-dire m^2, contenant chacune $m-1$ points, sans compter l'origine, ce qui donne $m^2(m-1)+m^2$ points ou m^3, c'est-à-dire la totalité des points de l'espace. Il y a donc en tout $m^2+m+1 = \dfrac{m^3-1}{m-1}$ directions.

Deux directions distinctes déterminent un plan.

Si une direction est perpendiculaire à deux directions distinctes, elle est perpendiculaire au plan déterminé par ces deux directions, et, naturellement, à tous les plans parallèles.

Pour que deux directions $ax+by+cz$, $a'x+b'y+c'z$ soient perpendiculaires, il faut la condition $aa'+bb'+cc' \equiv 0 \pmod{m}$.

31. Un cube arithmétique étant formé des nombres $0, 1, 2, \ldots, m^3-1$, la somme des éléments est $\dfrac{m^3(m^3-1)}{2}$.

$\dfrac{m^2(m^3-1)}{2}$ est la *somme magique* du cube.

Une *direction magique* est celle dont chacune des lignes qui la composent rencontre l'espace modulaire en m points, dont les éléments ont pour somme la somme magique.

Une ligne particulière présentant cette propriété est une *ligne magique*.

Un *cube hypermagique* est celui qui contient le plus grand nombre possible de directions magiques.

Espaces hypermagiques.

32. Nous pouvons maintenant étendre sans peine les notions qui précèdent aux espaces arithmétiques à un nombre quelconque de dimensions, après les avoir établies pour les espaces à deux et à trois dimensions.

Un chemin est caractérisé dans un tel espace par le symbole $(ax + by + cz + dt + \ldots)$, le nombre des termes étant celui des dimensions de l'espace considéré. Une direction a pour symbole $((m))\,(ax + by + cz + dt + \ldots)$, m étant le module. Tout peut se ramener à l'espace congruent, en remplaçant a, b, c, d, ... par les nombres inférieurs à m, savoir α, β, γ, δ, ..., qui leur sont respectivement congrus.

Les nombres a, b, ... peuvent être changés de signe, en les remplaçant par leurs compléments au module.

Le nombre des directions qu'on peut faire passer par un point quelconque dans un espace de module premier à n dimensions, ainsi qu'on le verrait par un raisonnement facile, généralisant celui du n° 30, est

$$m^{n-1} + m^{n-2} + \ldots + m + 1 = \frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

La *somme magique* des éléments $0, 1, 2, \ldots, m^n - 1$, composant un espace arithmétique de module m à n dimensions, est $\dfrac{m^{n-1}(m^n - 1)}{2}$.

Toute direction telle que chacune des lignes qui la composent rencontre l'espace en m points, dont les éléments ont pour somme la somme magique, est une *direction magique*.

Un *espace hypermagique* est celui qui contient le plus grand nombre possible de directions magiques.

En ce qui concerne les directions perpendiculaires, comme nous ne prétendons pas écrire un Traité didactique complet, et comme nous désirons abréger, nous nous contenterons d'énoncer, sans développements, quelques définitions ou propositions qui peuvent être utiles. Pour la définition précise des directions *irréductibles*, expression que nous sommes conduit à employer, nous prions le lecteur de vouloir bien se reporter au numéro suivant.

I. Deux directions

$$((m))(ax + by + cz + dt + \ldots),$$
$$((m))(a'x + b'y + c'z + d't + \ldots)$$

sont perpendiculaires quand est satisfaite la congruence

$$aa' + bb' + cc' + dd' + \ldots \equiv 0 \pmod{m}.$$

II. Si une direction est perpendiculaire à n directions irréductibles d'un espace à n dimensions, elle est perpendiculaire à toutes les directions que l'on peut tracer dans cet espace.

III. Pour savoir si plusieurs droites sont perpendiculaires entre elles, on peut les combiner deux à deux, et vérifier si, dans l'espace à deux dimensions qu'elles déterminent, elles remplissent les conditions de perpendicularité.

On peut ainsi ramener toutes les études au plan, où seulement s'exécutent avec facilité les expériences graphiques.

IV. Nous dirons que deux espaces à n et n' dimensions sont perpendiculaires entre eux, quand n directions irréductibles du premier sont perpendiculaires à n' directions irréductibles du second.

33. La question des directions est si importante dans cette étude, que nous croyons devoir ajouter les considérations suivantes à ce que nous avons déjà dit à ce sujet.

Quand on considère un espace à deux dimensions, nous avons dit qu'une direction quelconque de cet espace est caractérisée par le symbole $((m))(ax + by)$. Si dans cette formule on donne à $((m))$ les diverses valeurs $1, 2, \ldots, m - 1$, on change le *pas* duquel on marche dans la direction $ax + by$, mais non pas cette direction elle-même.

Deux directions quelconques $ax + by$, $a'x + b'y$ sont donc *distinctes,* pourvu qu'on n'ait pas $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$; et il est évident que deux directions distinctes ne peuvent pas former un contour qui se ferme.

Lorsqu'on passe à un espace à trois dimensions, deux directions $ax + by + cz$, $a'x + b'y + c'z$ sont distinctes l'une de l'autre tant qu'on n'a pas $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Mais trois directions quelconques $ax + by + cz$, $a'x + b'y + c'z$, $a''x + b''y + c''z$ peuvent très bien appartenir à un même plan, et l'on dit alors que ces trois directions, tout en étant distinctes les unes des autres, ne sont pas *irréductibles.* Il est aisé de se rendre compte de la condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi : il faut que les points dont les coordonnées sont a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' soient situés dans un même plan passant par l'origine, c'est-à-dire que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta$$

soit nul.

S'il arrivait que deux des trois directions ne fussent pas distinctes, les trois directions ne seraient pas non plus irréductibles.

En ce cas, le déterminant ci-dessus serait encore nul.

En d'autres termes, pour que les trois directions considérées soient *irréductibles,* il faut et il suffit que le déterminant Δ ne soit pas nul.

Il s'ensuit que les trois directions ne doivent pas appartenir à un même espace à deux dimensions, et que deux quelconques d'entre elles ne doivent pas appartenir à un même espace à une dimension.

On peut encore exprimer cette condition en disant que les trois directions, prises avec des pas quelconques, ne sauraient former un contour qui se ferme. En effet, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait, en appelant m_1, m'_1, m''_1 les valeurs de $((m))$ qui caractérisent ces pas, qu'on eût

$$m_1(ax + by + cz) + m'_1(a'x + b'y + c'z) + m''_1(a''x + b''y + c''z) = 0,$$

c'est-à-dire, puisque x, y, z représentent des symboles irréductibles,

$$\begin{aligned} am_1 + a'm'_1 + a''m''_1 &= 0, \\ bm_1 + b'm'_1 + b''m''_1 &= 0, \\ cm_1 + c'm'_1 + c''m''_1 &= 0. \end{aligned}$$

Pour avoir un contour fermé, il faudrait donc la condition

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Lorsqu'on prend trois directions irréductibles, l'espace à trois dimensions qui en résulte se trouve entièrement déterminé. On peut alors obtenir une nouvelle direction quelconque au moyen de celles-là. Posons, à cet effet,

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= \xi, \\ a'x + b'y + c'z &= \eta, \\ a''x + b''y + c''z &= \zeta; \end{aligned}$$

et soit $Ax + By + Cz$ une direction quelconque donnée. Si nous écrivons

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = Ax + By + Cz,$$

il en résulte, en égalant les coefficients de x, y, z,

$$\begin{aligned} a\alpha + a'\beta + a''\gamma &= A, \\ b\alpha + b'\beta + b''\gamma &= B, \\ c\alpha + c'\beta + c''\gamma &= C, \end{aligned}$$

et ce système, dans l'hypothèse où nous sommes, que le déterminant n'est pas nul, donnera les valeurs de α, β, γ sans aucune ambiguïté.

On remarquera que, pour simplifier l'écriture, nous avons supprimé les coefficients $((m))$ qui doivent affecter les divers termes; il est facile de comprendre que cela n'altère en rien la démonstration; seulement, comme il faut que les valeurs de α, β, γ soient entières, on devra introduire les coefficients en question.

Tout ce que nous venons de dire s'étend sans aucune peine à un espace à un nombre quelconque de dimensions. Une direction est caractérisée par la formule $ax + by + cz + dt + \ldots$, le nombre des termes étant celui des dimensions de l'espace considéré.

Deux directions $ax + by + \ldots$, $a'x + b'y + \ldots$ sont distinctes, pourvu qu'on n'ait pas

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \ldots;$$

n directions

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + \ldots, \\ a_2 x + b_2 y + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n x + b_n y + \ldots \end{array}$$

sont irréductibles tant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots \\ a_2 & b_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & \ldots \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

S'il arrive que ce déterminant soit nul, les n directions considérées sont comprises dans un espace d'un nombre de dimensions inférieur à n. Cela a lieu, en particulier, lorsque deux des directions coïncident, ou lorsque trois sont dans un même plan, ou quatre dans un même espace à trois dimensions, et ainsi de suite; en ce cas, le déterminant est nul parce que toute une suite correspondante de ses déterminants mineurs sont nuls séparément.

Il y a, sans qu'il soit nécessaire d'insister plus longuement sur ce point, une analogie et même une identité complète entre cette théorie et celle des équations linéaires.

On reconnaît, comme plus haut, que n directions irréductibles, avec des pas quelconques, ne peuvent donner un contour fermé.

Une direction quelconque, dans un espace à n dimensions, peut s'obtenir sans peine au moyen des n directions irréductibles données ξ, η, ζ, τ, ..., sous la forme $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta\tau + \ldots$, et cela par une méthode identique à celle que nous avons employée plus haut.

Toutes ces notions, en grande partie évidentes pour un espace à deux dimensions, assez faciles à imaginer pour l'espace à trois dimensions, deviennent plus pénibles à saisir lorsqu'on passe au delà, en raison de la difficulté qu'on éprouve à matérialiser les conceptions dont il s'agit. Mais l'analyse algébrique permet d'étendre ces notions, ainsi que nous venons de le voir, sans détruire l'*homogénéité,* la *parité* qui doit exister entre les diverses dimensions. C'est ce que ne permettent pas les artifices divers exposés au Chapitre II, et parmi lesquels les tores arithmétiques (19) présentent cependant de réels avantages.

Il y a lieu de donner encore quelques indications sur des opérations d'un usage souvent utile. Nous voulons parler des rotations qu'on peut faire subir aux directions.

Si nous considérons d'abord un plan, ou espace à deux dimensions, nous pouvons faire tourner une direction $ax + by$ quelconque, autour d'un axe perpendiculaire à l'espace considéré, en appliquant les coefficients $((m))$ soit à l'un, soit à l'autre des deux termes, ce qui donne

$$((m))\,ax + by \quad \text{ou} \quad ax + ((m))\,by.$$

L'une ou l'autre de ces formules, multipliée naturellement par $((m))$, permet d'obtenir toutes les directions du plan.

L'interversion de x et y, qui transforme $ax + by$ en $bx + ay$, fait tourner tout le plan d'un *demi-tour*, autour d'un axe situé dans le plan lui-même, c'est-à-dire autour de la direction $1.x + 1.y$. La répétition de la même opération ramène à l'espace (plan) primitif.

Dans un espace à trois dimensions, la substitution de

$$ax + by + ((m))\,cz \quad \text{à} \quad ax + by + cz$$

a pour résultat de faire tourner la direction considérée autour d'un axe situé dans le plan des xy et perpendiculaire à cette direction, c'est-à-dire autour de la direction $bx - ay + 0.z$.

Les permutations circulaires de x, y, z à y, z, x, puis z, x, y transforment $ax + by + cz$ en $cx + ay + bz$, puis $bx + cy + az$ et font ainsi tourner tout l'espace à trois dimensions, de $\frac{1}{3}$, puis de $\frac{2}{3}$ de tour, autour de l'axe formant des angles égaux avec les axes coordonnés, c'est-à-dire autour de la direction

$$1.x + 1.y + 1.z.$$

Si un espace à trois dimensions est défini par les trois axes coordonnés des x, des y et des z, et qu'on imagine un quatrième axe (des t) perpendiculaire à chacun des trois premiers, on définit ainsi un espace à quatre dimensions. Par l'opération

$$ax + ((m))\,by + ((m))\,cz$$

on fera tourner dans l'espace à trois dimensions, autour de l'axe des t, une direction $ax + by + cz$, et l'on pourra ainsi obtenir toutes les directions de l'espace à trois dimensions primitivement considéré.

On ferait tourner la direction $ax + by + cz + dt$ dans un espace à quatre dimensions, autour de la direction

$$1.x + 1.y + 1.z + 1.t,$$

de $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ de tour, en écrivant successivement

$$\begin{aligned} &dx + ay + bz + ct, \\ &cx + dy + az + bt, \\ &bx + cy + dz + at. \end{aligned}$$

On comprend comment ces notions s'étendent à un nombre de dimensions quelconque.

Revenons, pour préciser les idées, à un espace à trois dimensions. Dans cet espace, deux directions $ax + by + cz$, $a'x + b'y + c'z$ déterminent un plan.

Nous pouvons appeler *axe* de ce plan la direction perpendiculaire à la fois sur les deux premières.

Il est clair que nous faisons tourner la direction $ax + by + cz$ autour de cet axe en écrivant

$$ax + by + cz + ((m))(a'x + b'y + c'z).$$

Quant à la direction de l'axe, nous la déterminons aisément par cette remarque, que, si elle est représentée par $\alpha x + \beta y + \gamma z$, il faut qu'on ait à la fois

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c\gamma &= 0, \\ a'\alpha + b'\beta + c'\gamma &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}} = \frac{\beta}{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}} = \frac{\gamma}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}.$$

Les trois coefficients α, β, γ doivent donc être proportionnels aux déterminants mineurs $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$. Il va sans dire que, dans tous les résultats, il y a lieu de prendre les restes ou résidus, par rapport au module, puisque nous nous occupons d'espaces modulaires, c'est-à-dire de congruences.

Par analogie, si l'on a, dans l'espace à quatre dimensions, les trois directions irréductibles

$$\begin{aligned} &a\,x+b\,y+c\,z+d\,t,\\ &a'x+b'y+c'z+d't,\\ &a''x+b''y+c''z+d''t, \end{aligned}$$

elles déterminent un espace à trois dimensions dont l'*axe* sera donné par $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t$, α, β, γ, δ étant proportionnels aux déterminants mineurs

$$\begin{vmatrix} b & c & d \\ b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c & d & a \\ c' & d' & a' \\ c'' & d'' & a'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d & a & b \\ d' & a' & b' \\ d'' & a'' & b'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

et une rotation autour de cet axe amènera la direction

$$ax+by+cz+dt$$

à devenir

$$\begin{aligned}(ax+by+cz+dt)+((m))\,(a'x+b'y+c'z+d't)\\ +((m))\,(a''x+b''y+c''z+d''t),\end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on obtiendra ainsi une direction quelconque de l'espace à trois dimensions considéré.

Principe de l'étude des espaces hypermagiques.

34. Ainsi qu'on le verra dans les Chapitres qui vont suivre, l'étude des espaces hypermagiques comprend essentiellement deux problèmes généraux :

1° *Étant donné un espace hypermagique, le décomposer en ses éléments simples.*

2° *Étant donnés les nombres* $0, 1, 2, \ldots, m^n-1$, *former au moyen de ces nombres un espace hypermagique à n dimensions.*

C'est en quelque sorte l'analyse et la synthèse des espaces arithmétiques.

Dans l'un comme dans l'autre de ces deux problèmes, et particulièrement pour le cas des deux dimensions, beaucoup plus aisé à imaginer et à suivre, l'étude peut se faire, soit par des moyens symboliques et par de purs raisonnements, soit par des moyens graphiques, en appelant l'expérience à notre secours. Dans ce dernier cas, on peut faire tout aussi bien de l'analyse que lorsqu'on se borne à l'emploi des symboles. C'est par une sorte d'abus grapuel du langage qu'on a pris l'habitude de donner le nom d'*Analyse* à la science du calcul, laquelle peut parfaitement avoir à procéder par synthèse à l'occasion.

Quand on a réuni les résultats que peut donner l'analyse sous toutes ses formes, symbolique ou graphique, en ayant recours au calcul et à l'expérience, on peut, alors, voir tout ce qui se passe, se rendre compte du POURQUOI *des choses, déterminer leur* RAISON D'EXISTENCE, *et atteindre ainsi à* L'ANALYSE MÉTAPHYSIQUE, *l'analyse par excellence, la seule vraiment complète.*

L'avantage réel de l'analyse symbolique consiste dans la concision de l'écriture et dans sa précision.

Si votre symbolie est bien faite, si la composition des symboles suit exactement celle des faits, vous pouvez étudier cette composition sur les symboles comme vous l'étudieriez sur les faits eux-mêmes; mais de la substitution résultera une facilité immense, puisque vous faites d'un seul coup abstraction de tout ce qui n'est pas la composition seule. Seule aussi cette dernière opère alors sur votre appareil cérébral; de là, une puissance bien supérieure de la faculté de combinaison et de spéculation.

En outre, vous pouvez alors opérer mécaniquement sur vos symboles et (comme nous l'avons dit en 1891, au congrès de Marseille de l'Association française pour l'avancement des Sciences), faire passer *la syntactique dans la période de l'industrie.*

Comme *moyen de solution,* il est clair que si vous possédez la composition complète d'une considération quelconque, ce que l'on nomme la *loi* ou la *formule générale,* toute question spéciale y trouvera sa solution par le simple mécanisme des transformations; c'est une manivelle à tourner pour faire passer le système des formules d'une forme à une autre qui vous est désignée, et, comme l'a fort bien exposé M. Laisant dans son beau livre sur les *équipollences,* vous n'avez plus besoin alors de vous préoccuper du sujet auquel vous appliquez votre méthode, mais simplement de *suivre des règles de calcul fixes et invariables.* Nous demandons au lecteur la permission de reproduire *in extenso* ce passage dont la beauté le frappera sans aucun doute :

Les questions qui se présenteront consisteront généralement, soit dans la démonstration d'une vérité géométrique, soit dans la recherche de certains éléments inconnus, au moyen d'éléments connus.

Dans l'un comme dans l'autre cas, il s'agira tout d'abord de mettre le problème en équipollence, en écrivant les relations que fournissent les données; cela fait, par des transformations convenables de calcul, au moyen des règles que nous avons exposées, nous transformerons ces équipollences, de manière à mettre en évidence l'objet de notre recherche. Dans ce travail de transformation d'équipollences, qui peut être plus ou moins compliqué analytiquement suivant les cas, *les considérations géométriques ne jouent plus aucun rôle*. Nous les introduisons au début dans les données; nous aurons à les examiner dans les résultats, en interprétant ceux-ci; mais, *dans l'intervalle, elles disparaissent;* et c'est là un des grands avantages de la méthode, pour deux raisons faciles à comprendre. La première, *c'est que nous suivons des règles de calcul fixes et invariables qui dispensent l'esprit de toute étude spéciale des conditions de la question,* ce qui n'a pas lieu en Géométrie. La seconde, c'est que, les règles établies étant générales, les transformations de calcul se trouveront indépendantes de telle ou telle situation particulière des figures; si bien que souvent même on n'aura pas besoin de tracer celles-ci. On sait qu'au contraire, dans les solutions purement géométriques, il faut particulariser, et que l'extension au cas le plus général d'une solution trouvée avec une disposition particulière des figures nécessite souvent une discussion délicate et laborieuse.

Enfin, lorsqu'il s'agit surtout d'un problème proprement dit, si une droite inconnue X est obtenue, une fois les calculs faits, au moyen d'opérations indiquées, à effectuer sur les droites données A, B, C, ..., *ces opérations correspondront à des constructions géométriques bien définies.* Par conséquent, *la forme même de la solution* $X = f(A, B, C, \ldots)$ *nous donnera un procédé graphique pour obtenir la solution désirée.* Ce procédé, le plus souvent, égalera ou même surpassera en simplicité et en élégance ceux que donnerait la Géométrie pure.

S'il est vrai de dire qu' « un sonnet sans défaut vaut seul un long poème », et je suis de cet avis, il me semble qu'il y a dans cette page infiniment plus de vraie science mathématique que dans beaucoup de longs traités que l'on expose à notre admiration et que la postérité laissera plus tard dormir avec un respect religieux dans la poussière des bibliothèques.

Au congrès de Marseille, nous avons essayé de montrer rapidement la lutte de la *symbolie* et de la *graphie* (qu'il ne faut pas confondre avec *la Géométrie, celle-ci n'en étant qu'un cas spécial et très restreint*). Sans critiquer en rien la page que nous venons de citer, nous pensons pouvoir plus tard émettre nos idées complètes sur la GÉNÉRALISATION ABSOLUE DE TOUT FAIT EXPÉRIMENTAL. Ainsi le procédé de la *caractérisation des points schématiques par des lettres spéciales* nous semble donner à la graphie un pouvoir généralisateur au moins égal à celui des symbolies les plus habiles. L'exposition de cette théorie en ce moment nous entraînerait trop loin.

Nous ne pouvons cependant résister au désir de faire une nouvelle citation, empruntée, celle-ci, à l'Ouvrage de M. de Freycinet : *Étude sur la métaphysique du haut calcul.*

> On dit que deux quantités sont *fonction* l'une de l'autre lorsque la valeur de l'une d'elles étant fixée, la valeur de l'autre s'ensuit, et réciproquement (p. 5). La considération des fonctions est aussi ancienne que l'étude des phénomènes, ou plutôt ne s'en distingue pas, car *qu'est-ce que la définition des fonctions, sinon la définition même de la loi des phénomènes?*
>
> Disons plus, il n'est pas un problème, en apparence le plus étranger à la recherche des lois, qui ne conduise à une fonction, où l'expression d'une *loi* se trouve implicitement. En sorte que, par une généralisation naturelle, *on est conduit à enlever à l'équation son caractère étroit de solution pour y voir désormais une fonction* (p. 12-13).

Voilà la façon dont on devrait entendre et enseigner les Mathématiques et toutes les sciences en général. Un métaphysicien seul était à même de l'exprimer, en montrant que la considération étroite, restreinte, de *solution* devrait n'être considérée que comme une particularisation tout à fait spéciale du but réel de toutes les sciences. Nous nous abstenons de tout éloge sur l'Ouvrage de M. de Freycinet : comme certains vins renommés, il n'en a pas besoin ; on ne peut qu'engager à le lire et à le méditer.

Il est certain qu'en ces matières, comme dans toutes les sciences, même dans celles réputées purement abstraites, l'expérience et l'observation sont à la base de toutes nos connaissances. *Une fois les faits bien constatés*, le calcul s'en empare ; il les traduit dans sa langue symbolique, les associe, les généralise, donne une forme systématique aux lois d'enchaînement. Mais croire à la puissance intrinsèque de cette langue, au point de ne plus tenir compte des premières vérités, c'est à notre avis commettre une grosse erreur philosophique et s'éloigner de la grande route de la vérité scientifique.

Autant que personne, nous admirons les progrès auxquels a pu conduire cette langue mathématique des symboles, et les grands perfectionnements qu'elle a subis. Mais ce n'est pas en diminuer la valeur que de la ramener à son rôle véritable. Admirer la langue symbolique du calcul, au point de dédaigner la Géométrie, les méthodes graphiques et les vérifications arithmétiques, c'est à peu près l'équivalent d'un culte effréné pour la forme littéraire, sans aucun souci des idées que cette littérature a pour mission d'exprimer, et sans lesquelles jamais elle n'aurait paru dans le monde. Nous ne disons pas qu'il n'existe des esprits ayant cette tournure, mais nous ne pouvons nous mettre au rang de leurs imitateurs. Défenseur des idées qui seules peuvent donner une base solide à la science, en la faisant reposer sur la Métaphysique positive et rationnelle, nous ne nous résignerons jamais au mépris des faits, de l'observation et de l'expérience, qui ont leur place en Arithmétique comme dans toutes les connaissances humaines; moyens précieux de recherche et de découverte, sans lesquels l'humanité n'aurait guère progressé dans le domaine intellectuel.

Le lecteur nous pardonnera cette courte digression; elle est moins en dehors de notre sujet qu'elle ne pourrait le lui paraître.

Magie et Magico-Magie.

35. Si l'on place au hasard les nombres entiers de o à $m^n - 1$ sur les points d'un espace arithmétique congruent de module m, à n dimensions, il sera toujours possible de relier m points donnant la somme moyenne (ou somme magique) par des lignes polygonales de forme quelconque. Si au lieu de placer ces points au hasard, on les dispose régulièrement, de manière que les lignes qui les contiennent soient des lignes droites, il en résultera une sorte d'effet cérébral, de surprise, auquel on a donné le nom de *Magie*.

Si ces lignes droites épuisent les diverses combinaisons qui peuvent donner la *somme magique,* il y aura magie simple.

Si au contraire, comme par exemple dans l'espace arithmétique congruent à deux dimensions, présentant 4 cases sur chaque côté, toutes les combinaisons ne sont pas épuisées, les combinaisons non employées seront situées sur des lignes polygonales de formes diverses.

Si ces lignes présentent une certaine régularité, soit comme forme, soit comme disposition, il en résultera un effet d'étonnement analogue à celui produit par la magie simple et l'on peut donner à ces faits le nom de *Magico-magie*.

En construisant des carrés de quatre, Fermat avait été frappé de ces résultats, et c'est lui qui avait appelé ces carrés *magico-magiques*.

L'art des espaces magiques consiste à disposer les nombres désignés de manière à obtenir un maximum de régularité ; d'où le nom, employé plus haut, d'*Hypermagie*.

CHAPITRE IV.

CARRÉS HYPERMAGIQUES DE MODULE PREMIER.

Position fondamentale.

36. Considérons un carré de m^2 cases, m étant premier, et supposons que les m^2 nombres $0, 1, 2, \ldots, m^2 - 1$ aient été placés dans ces cases successives de la manière suivante : les m premiers $0, 1, 2, \ldots, m - 1$ sur la première ligne dans leur ordre ; les m suivants $m, m + 1, \ldots, 2m - 1$ sur la deuxième ligne dans leur ordre, et ainsi de suite. Nous dirons que le carré de module m ainsi formé est à sa *position fondamentale*.

Par exemple, si, pour fixer les idées, nous supposons $m = 7$, la position fondamentale du carré de 7 est

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34
35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48

On peut notamment constater que l'axe horizontal contient la suite naturelle des nombres $0, 1, 2, \ldots, m - 1$, et l'axe vertical la suite $0.m, 1.m, 2.m, \ldots, (m - 1)m$ des multiples de m.

Dans le carré ainsi formé, prenons pour axe des x la direction de la première ligne, et pour axe des y celle de la première colonne. La case dont le centre a pour abscisse a et pour ordonnée b contiendra évidemment le nombre $7b + a$, ou en général $mb + a$.

Admettons maintenant que le carré ainsi formé soit indéfiniment reproduit, dans le sens des x et dans celui des y, de manière à couvrir l'espace entier à deux dimensions.

Une direction quelconque, partant de l'origine, sera caractérisée par $((m))(ax+by)$. Si, partant de l'origine o, nous donnons successivement au symbole $((m))$ toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$ qu'il peut prendre, nous aurons, pour les abscisses des divers centres de cases rencontrés par cette direction,

$$0.a, \quad 1.a, \quad 2a, \quad \ldots, \quad (m-1)a,$$

et pour les ordonnées

$$0.b, \quad 1.b. \quad 2b, \quad \ldots, \quad (m-1)b,$$

ou, en prenant les résidus par rapport au module m, ce qui n'altère pas les résultats, tout en ramenant les constructions au premier carré,

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m-1$$

dans un certain ordre, aussi bien pour les abscisses que pour les ordonnées.

Ceci résulte de cette propriété arithmétique bien connue, que les m multiples successifs d'un nombre quelconque, inférieur au nombre premier m, donnent, si on les divise par m, tous les restes différents

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m-1$$

dans un certain ordre.

Il y a cependant une exception évidente : c'est celle où le nombre qu'on multiplie est zéro, ou un multiple de m (ce qui revient au même au point de vue des congruences); car tous les résultats sont nécessairement alors congrus à zéro.

Si donc nous prenons la direction $((m))(ax+by)$, en supposant que ni a, ni b ne soit nul, cette direction passera par m points successifs ayant pour abscisses $0, 1, 2, \ldots, m-1$ et pour ordonnées les mêmes nombres (ces points étant ramenés au premier carré). La somme de tous les nombres placés dans les cases correspondantes sera donc

$$m\Sigma((m)) + \Sigma((m)) = (m+1)\Sigma((m)) = \frac{(m-1)m(m+1)}{2},$$

c'est-à-dire précisément la somme magique.

La ligne considérée est donc une ligne magique.

Si maintenant, au lieu de partir de o, on part d'une case quelconque (α, β), les abscisses seront évidemment dans un certain ordre

$$\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \ldots, \alpha+(m-1),$$

et les ordonnées

$$\beta, \beta+1, \beta+2, \ldots, \beta+(m-1),$$

c'est-à-dire encore, pour les unes comme pour les autres,

$$0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Tout ce que nous venons de dire subsiste donc; et, par suite, non seulement la *ligne* considérée est magique, mais la *direction* elle-même l'est aussi.

En résumé, le carré, à sa position fondamentale, a toutes ses directions magiques, à l'exception des directions $a.x + 0.y$ et $0.x + by$, c'est-à-dire des directions des x et des y.

C'est donc, en réalité, un carré hypermagique, bien que ses propriétés de magie n'apparaissent pas tout d'abord aux regards. Pour les mettre en évidence, il suffit, en partant d'une case quelconque, de construire un quinconce sur deux directions distinctes partant de ce point et de transformer ensuite ces quinconces en simples carrés. Les nouveaux carrés qu'on obtient de la sorte sont des carrés hypermagiques; leurs propriétés magiques *sautent aux yeux* dès qu'on les examine; ils présentent toujours deux directions non magiques, lesquelles sont les transformées des directions des x et des y dans la position fondamentale; seulement, et à cause même de la transformation, ces directions se trouvent un peu *masquées*, pour ainsi dire, de telle sorte que les propriétés magiques *frappent seules l'esprit*.

Il est vraiment digne de remarque que tant d'efforts aient été dépensés pour la formation de carrés simplement magiques, alors qu'en écrivant tout bonnement les nombres a la suite les uns des autres, c'est-a-dire en formant la position fondamentale, on obtient un maximum de magie. C'est ce que notre méthode fait ressortir avec un caractère de quasi-évidence; mais, par d'autres moyens plus artificiels, il eût été sans doute assez difficile de le découvrir. Nous croyons que cette étude de la magie est l'un des exemples les plus frappants de la supériorité des *méthodes* sur les *procédés*. Les plus ingénieuses combinaisons ne sauraient permettre d'obtenir des résultats auxquels on parvient tout naturellement, quand on suit une marche attentive, régulière et simple, fondée sur l'*essence même des choses* et sur leur *raison d'être métaphysique* et, à l'origine, sur l'observation des faits.

37. Nous avons vu plus haut qu'en partant d'un point quelconque le nombre des directions différentes qu'on peut obtenir sur un espace congruent de module premier m, à deux dimensions, est $m+1$. En combinant deux à deux ces directions de toutes les façons possibles, on a $\frac{(m+1)m}{2}$ combinaisons. Sur chacune des directions, on peut marcher de $(m-1)$ pas différents; le nombre des carrés hypermagiques qui en résultent est donc $(m-1)^2$. En multipliant ce nombre par celui des combinaisons, on obtient $\frac{(m-1)^2(m+1)m}{2}$. Or on peut prendre pour origine l'un quelconque des m^2 nombres $0, 1, 2, \ldots, m^2-1$.

Nous avons ainsi $\frac{(m-1)^2 m^3(m+1)}{2}$ carrés hypermagiques différents. Si l'on considère même comme différant l'un de l'autre deux carrés dans lesquels les lignes sont changées en colonnes et les colonnes en lignes, il y a lieu de tenir compte des arrangements deux à deux des diverses directions, et non pas de leurs combinaisons, de telle sorte que le nombre total des carrés hypermagiques ainsi obtenus est $(m-2)^2 m^3(m+1)$.

Le nombre total des carrés quelconques de m^2 éléments étant évidemment $(m^2)! = 1.2.3\ldots m^2$, il s'ensuit que, si l'on jette au hasard les m^2 nombres $0, 1, 2, \ldots, m^2-1$ sur les cases d'un carré de module premier m, la probabilité pour que le carré ainsi formé soit l'un des carrés hypermagiques ci-dessus est donc

$$\frac{(m-1)^2 m^3(m+1)}{1.2.3\ldots m^2} = \frac{(m-1)m}{(m^2-1)!}.$$

Par exemple, la probabilité pour que les neuf premiers nombres jetés au hasard dans les neuf cases d'un carré forment un des carrés hypermagiques dont nous venons de parler est

$$\frac{2.3}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{1}{4.5.6.7} = \frac{1}{720}.$$

Des abaques.

38. Imaginons un carré de m^2 cases, m étant un nombre premier. Portons sur la première ligne m objets différents et, pour fixer les idées, nous ferons comme plus haut $m = 7$; puis formons le carré avec des lignes identiques, si bien que chaque colonne ne contienne qu'un même objet. Nous obtiendrons ainsi ce que nous appelons un *abaque,* dont le type, dans l'hypothèse faite plus haut, sera

$$\begin{array}{ccccccc}
A & B & C & D & E & F & G \rightarrow x \\
A & B & C & D & E & F & G \\
A & B & C & D & E & F & G \\
A & B & C & D & E & F & G \\
A & B & C & D & E & F & G \\
A & B & C & D & E & F & G \\
A & B & C & D & E & F & G \\
\downarrow & & & & & & \\
y & & & & & &
\end{array}$$

Les axes coordonnés des x et des y jouissent de propriétés très différentes; celui des x rencontre tous les objets différents (et chacun d'eux une seule fois): c'est un *axe de variation.* Celui des y ne rencontre jamais que l'objet A : c'est un *axe d'invariation.*

Si l'on considère une direction quelconque dans l'espace congruent ainsi formé, elle rencontrera successivement tous les objets différents dans un certain ordre, pourvu qu'elle ne soit pas parallèle à l'axe des y. Ce sera donc une *direction magique,* dans le sens que nous avons donné à ce mot en étudiant les espaces à une dimension. La direction des y ou direction d'invariation est, au contraire, une direction *non magique.*

Si nous transformons un abaque, tel que celui formé ci-dessus, en construisant un quinconce sur deux directions quelconques, prises avec un pas quelconque, ainsi que nous l'avons fait au n° 36, nous obtiendrons encore un abaque; par exemple

A	C	E	G	B	D	F
E	G	B	D	F	A	C
B	D	F	A	C	E	G
F	A	C	E	G	B	D
C	E	G	B	D	F	A
G	B	D	F	A	C	E
D	F	A	C	E	G	B

est encore un abaque de sept éléments. Seulement, la direction d'invariation ou direction non magique, au lieu d'être caractérisée par $0.x$ comme dans le cas précédent, l'est ici par $3x + 2y$ ou par $1x + 3y$ ou, en général, par $((7))(1.x + 3y)$. Toutes les autres directions sont magiques.

En prenant la position fondamentale de l'abaque, envisagée au commencement du présent numéro, il est d'ailleurs évident qu'une permutation quelconque des lignes ou des colonnes n'en altère en rien les propriétés magiques.

39. Cette notion des abaques va nous fournir un moyen d'investigation précieux pour l'étude que nous avons en vue. Revenons, comme exemple, à la position fondamentale du carré de 7 (n° 36) et recopions la figure ainsi formée, en écrivant cette fois tous les nombres dans le système de numération ayant 7 pour base. Nous obtiendrons

00	01	02	03	04	05	06
10	11	12	13	14	15	16
20	21	22	23	24	25	26
30	31	32	33	34	35	36
40	41	42	43	44	45	46
50	51	52	53	54	55	56
60	61	62	63	64	65	66

Si nous prenons maintenant à part les chiffres des *septaines* et ceux des unités, nous avons les deux figures

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6

qui sont l'une et l'autre des abaques.

Si nous multiplions les nombres de la première par 7 (ou, en général, par m) et si nous y ajoutons les nombres correspondants de la seconde, nous reconstituons la position fondamentale du carré 7 (ou de m). Cette position fondamentale est donc un *bloc* de *deux abaques*, respectivement multipliés par 1 et par m, et ajoutés ensemble.

Puisqu'un carré hypermagique résulte de la position fondamentale par une transformation en quinconce que nous avons montrée plus haut, il n'y a qu'à faire subir la même transformation aux deux abaques ci-dessus pour avoir les abaques composants, correspondant au carré hypermagique dont il s'agit.

Réciproquement, en prenant deux abaques quelconques, pourvu que leurs directions d'invariation ne soient pas les mêmes, et en les composant comme nous venons de le dire, le bloc ainsi obtenu sera un carré hypermagique. On voit combien cette considération est de nature à faciliter l'analyse et la synthèse des carrés hypermagiques.

Il y a plus encore. La remarque faite à la fin du n° 38 nous montre que, dans un abaque à sa position fondamentale, on peut permuter arbitrairement, soit les lignes, soit les colonnes, sans altérer en rien ses propriétés magiques. Si nous effectuons à la fois *la même* permutation arbitraire sur les lignes des deux abaques composants, puis une permutation, également arbitraire, sur les colonnes, cela reviendra à permuter arbitrairement les lignes et les colonnes du bloc formé par l'ensemble des deux abaques.

Donc, un carré de ces éléments étant écrit à sa position fondamentale, on peut permuter à volonté, soit les lignes, soit les colonnes, sans altérer en rien ses propriétés magiques, et sans modifier les directions non magiques, qui restent toujours celles des x et des y. On peut considérer que la disposition qui en résulte est encore une *position fondamentale*, et, au besoin, pour éviter toute confusion, nous appellerons *position fondamentale principale* celle que nous avons définie plus haut et qui consiste à écrire simplement les éléments dans leur ordre, afin de la distinguer des autres.

Ainsi, la position fondamentale principale du carré de module 5 est

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

mais la figure suivante

13	11	12	10	14
3	1	2	0	4
23	21	22	20	24
18	16	17	15	19
8	6	7	5	9

est encore une position fondamentale du même carré.

Voici, à titre d'exemple, l'un des carrés hypermagiques de 7 fournis par une transformation en quinconce de la position fondamentale principale :

0	8	16	24	32	40	48
25	33	41	42	1	9	17
43	2	10	18	26	34	35
19	27	28	36	44	3	11
37	45	4	12	20	21	29
13	14	22	30	38	46	5
31	39	47	6	7	15	23

Les deux abaques composants qui correspondent à ce carré sont :

0	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	0	1	2
6	0	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	0	1
5	6	0	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	0
4	5	6	0	1	2	3

0	1	2	3	4	5	6
4	5	6	0	1	2	3
1	2	3	4	5	6	0
5	6	0	1	2	3	4
2	3	4	5	6	0	1
6	0	1	2	3	4	5
3	4	5	6	0	1	2

Les directions d'invariation sont respectivement, dans ces deux abaques,

$$((7))(1.x + 2y) \quad \text{et} \quad ((7))(-1.x + 2y).$$

Comme elles ne sont pas pareilles, le carré écrit ci-dessus est hypermagique.

Si les deux directions d'invariation se superposaient, il est évident qu'en formant le bloc des deux abaques on arriverait à reproduire sur certains carrés des nombres identiques. On aurait bien alors un carré hypermagique, mais on n'aurait pas un carré contenant tous les m^2 nombres $0, 1, \ldots, m^2 - 1$.

En résumé, tout carré hypermagique résulte de la composition de deux abaques présentant les propriétés suivantes : 1° dans chacun d'eux, *une* direction, différente de l'un à l'autre, doit être non magique, toutes les autres étant magiques ; 2° deux nombres correspondants, dans les deux abaques, doivent toujours donner un arrangement différent.

Sous cette double condition, on pourra toujours arriver à composer un carré hypermagique, par la formation de deux abaques, et à reconnaître, par l'analyse des deux abaques en lesquels on le décompose, si un carré donné est hypermagique ou non, le module m, bien entendu, étant toujours supposé premier.

Pour avoir un carré diabolique, il faut et il suffit que les axes d'invariation, dans l'un et l'autre des deux abaques, ne soient menés suivant aucune des quatre directions données par les formules

$$((m))(0.x + by),\quad ((m))(ax + 0.y),\quad ((m))(1.y + 1.y),\quad ((m))(1.x - 1.y).$$

Formules de construction.

40. En reprenant la position fondamentale d'un carré de module premier, et supposant qu'on en tire un carré hypermagique par la formation d'un quinconce, ainsi que nous l'avons expliqué, cela revient, en supposant d'abord l'origine au zéro, à écrire

$$ax + by = \xi,$$
$$a'x + b'y = \eta,$$

puis

$$((m))\,\xi + ((m))\,\eta = ((m))\,(ax + by) + ((m))\,(a'x + b'y)$$

pour avoir successivement les cases à adopter. On aura la première ligne en donnant au premier signe $((m))$ les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m - 1$ et faisant le second égal à zéro ; puis la deuxième ligne en faisant le deuxième signe $((m))$ égal à 1 ; et ainsi de suite.

Cela nous donne, pour les coordonnées des cases de la première ligne :

$$\begin{array}{llllll} x & 0, & a, & 2a, & \ldots, & (m-1)a, \\ y & 0, & b, & 2b, & \ldots, & (m-1)b; \end{array}$$

pour celles de la deuxième ligne :

$$\begin{array}{llllll} x & a', & a+a', & 2a+a', & \ldots, & (m-1)a+a', \\ y & b', & b+b', & 2b+b', & \ldots, & (m-1)b+b', \end{array}$$

et ainsi de suite; enfin, pour les cases de la $m^{\text{ième}}$ ligne, nous obtenons :

$$\begin{array}{llllll} x & (m-1)a', & a+(m-1)a', & 2a+(m-1)a', & \ldots, & (m-1)a+(m-1)a', \\ y & (m-1)b', & b+(m-1)b', & 2b+(m-1)b', & \ldots, & (m-1)b+(m-1)b'. \end{array}$$

Il est bien entendu que ces divers nombres doivent être ramenés, par voie de congruence, à des valeurs inférieures à m. De là une règle des plus simples pour obtenir le carré hypermagique.

Connaissant les deux nombres $bm+a$, $b'm+a'$, qui servent à la formation de la première ligne et de la première colonne, on les écrit dans le système de numération de base m, et on forme les multiples de leurs chiffres en considérant seulement les restes; puis on complète le carré, suivant la même règle, comme s'il s'agissait de former une table d'addition.

Ainsi, l'exemple du n° 39 repose sur l'emploi de 8 et de 25 pour la première ligne et la première colonne; 8 s'écrivant 11 et 25 s'écrivant 34 dans le système de base 7, nous avons pour la première ligne

00 11 22 33 44 55 66.

La première colonne sera formée des nombres

00 34 61 25 52 16 43.

Partant de là, nous obtenons dans le système dont il s'agit :

00	11	22	33	44	55	66
34	45	56	60	01	12	23
61	02	13	24	35	46	50
25	36	40	51	62	03	14
52	63	04	15	26	30	41
16	20	31	42	53	64	05
43	54	65	06	10	21	32

Si, au lieu de partir de la case origine o, on partait d'une quelconque, il est facile de voir que cela n'introduirait pas la plus légère difficulté. Il n'y aurait qu'à ajouter un terme constant à chacun des chiffres et à procéder ensuite exactement de la même manière.

Les directions d'invariation sont faciles à obtenir au moyen des deux relations

$$ax + by = \xi, \qquad a'x + b'y = \eta.$$

On en tire, en effet,

$$x = \frac{b'\xi - b\eta}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{a\eta - a'\xi}{ab' - ba'},$$

de sorte que $b'\xi - b\eta$ et $-a'\xi + a\eta$ sont les deux directions cherchées.

Par exemple, en prenant 8 et 25 comme bases de construction, ainsi que nous l'avons fait plus haut, cela revient à employer les formules

$$\xi = 1.x + 1.y, \qquad \eta = 4x + 3y,$$

d'où

$$x = 1.\eta - 3\xi, \qquad y = 4\xi - 1.\eta.$$

On reconnaît, en effet, que ces deux directions $((7))\,(1.\eta - 3\xi)$, $((7))\,(4\xi - 1.\eta)$ sont les directions non magiques du carré ci-dessus.

Carrés de module 2.

41. Ce qui précède suffit, nous semble-t-il, pour donner une idée assez précise de la méthode dont nous proposons l'emploi pour l'étude des carrés hypermagiques de module premier. Au lieu d'entrer dans de plus longues considérations, nous nous bornerons, pour terminer ce Chapitre, à un examen très sommaire des exemples concernant les plus petits modules.

Le carré de 2, à sa position fondamentale, s'écrit $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}$, ou dans le système binaire $\begin{matrix} 00 & 01 \\ 10 & 11 \end{matrix}$. Il n'y a en tout, dans ce carré, que trois directions; deux ne sont pas magiques; la somme magique ne saurait donc être obtenue que suivant une direction seulement, ce qui ne permet de constater aucune propriété magique. C'est ce qu'on voit aussi par la considération des deux abaques

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}.$$

Carrés de module 3.

42. Dans le carré de module 3, à sa position fondamentale, il ne peut rester que deux directions magiques, puisque le nombre des directions est 4 et que nous avons toujours deux directions non magiques. On ne peut donc former un carré magique de 3 que suivant deux directions, les lignes et les colonnes, par exemple. La disposition suivante

Fig. 11.

3	8	1
2	4	6
7	0	5

ou

Fig. 12.

10	22	01
02	11	20
21	00	12

semble contradictoire avec ce que nous avançons ici, car il y a magie des deux diagonales. Mais c'est une simple illusion, car les lignes 8, 6, 7, ou 1, 2, 0, ... par exemple, comprises dans les directions des diagonales, ne sont pas magiques. Les deux abaques composants

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}$$

permettent de se rendre compte de ce qui se passe. La diagonale ↘ du premier et la diagonale ↙ du second sont composées l'une et l'autre de trois fois le nombre moyen 1.

Le même fait se produira chaque fois que les diagonales de deux abaques contiendront ainsi m fois le nombre moyen $\frac{m-1}{2}$. Car nous aurons, par l'addition,

$$\frac{m(m-1)}{2} = 0 + 1 + 2 + \ldots + m - 1,$$

c'est-à-dire que le résultat sera le même en apparence que si la direction de la diagonale était magique. Mais c'est une simple magie de *ligne,* non pas de *direction.*

Il suit de ce court examen que les carrés de 2 et de 3 ne peuvent jamais être diaboliques.

Carrés de modules 5, 7, 11.

43. D'après les explications qui précèdent, le carré de 5 est le plus petit qui puisse être diabolique. Il possède, en effet, six directions, sur lesquelles deux forcément seront non magiques. Pour que les quatre directions magiques restantes donnent lieu à un carré diabolique, il faut qu'elles soient parallèles aux axes et aux diagonales.

Si nous écrivons, comme au n° 40, les formules

$$ax + by = \xi, \qquad a'x + b'y = \eta,$$

qui permettent la construction d'un carré en partant d'une position fondamentale, il faut que les directions

$$1.\xi + 0.\eta, \quad 0.\xi + 1.\eta, \quad 1.\xi + 1.\eta, \quad -1.\xi + 1.\eta$$

ne soient parallèles ni aux x, ni aux y. Autrement dit, les quatre coefficients a, b, a', b', plus petits que 5, doivent être différents de zéro, et tels que a ne soit congru ni à a' ni à $-a'$, et b ni à b', ni à $-b'$, par rapport au module 5.

Par exemple,

$$1.x + 1.y = \xi, \qquad 2x + 3y = \eta$$

conduiraient au carré diabolique

0	6	12	18	24
17	23	4	5	11
9	10	16	22	3
21	2	8	14	15
13	19	20	1	7

Les directions non magiques sont $2\xi + \eta$, $\xi + 2\eta$.

On pourrait à son gré multiplier les exemples, et c'est un exercice facile que nous recommandons au lecteur pour les carrés de 5, de 7 et de 11 qui ne demandent pas trop d'écritures. En formant la position fondamentale principale, puis en se servant du procédé graphique, des formules de transformation, des systèmes de numération ayant le module pour base, et de la décomposition en abaques, on arrivera à s'assimiler complètement l'esprit de la méthode et à pouvoir construire avec une facilité extrême des carrés hypermagiques à module premier.

Il sera toujours très important, une fois le résultat obtenu, de reconnaître les directions non magiques, lesquelles permettent de revenir du carré obtenu à la position fondamentale, par une transformation inverse.

Il nous sera permis d'insister ici auprès du lecteur pour lui signaler d'une façon toute spéciale les grands avantages que présente cette méthode des abaques, et sa puissance analytique. *Sur chaque abaque isolément, les propriétés qui se trouvaient effacées dans le bloc d'ensemble apparaissent avec la plus extrême clarté; cela tient à ce que chacune de ces figures ne met en lumière que les propriétés de l'objet spécial qu'on veut étudier, en faisant disparaître les considérations accessoires, ce qui est* LE PRINCIPE MÊME DE L'ANALYSE MÉTAPHYSIQUE. *Cette élimination des propriétés secondaires, cette* ABSTRACTION, *qui a pour but de simplifier l'étude en concentrant tous les efforts et toute l'attention sur un objet principal, en laissant momentanément de côté tout le reste, est l'un des instruments les plus puissants qu'ait à sa disposition l'esprit humain pour parvenir à la découverte de la vérité. Dans les Mathématiques en particulier, elle occupe une place considérable et rend les plus grands services. Ce procédé est d'ailleurs fondé sur la construction même du mécanisme cérébral dont il diminue les défauts, augmente les qualités, et auquel il s'adapte merveilleusement.*

CHAPITRE V.

CUBES ET ESPACES HYPERMAGIQUES DE MODULE PREMIER.

Position fondamentale.

44. Il sera facile, dans presque tout le présent Chapitre, de suivre les analogies avec le précédent. Les méthodes et les principes que nous avons à établir ne sont en effet qu'une extension des méthodes et des principes relatifs à l'espace à deux dimensions, et que nous allons appliquer aux espaces d'ordres supérieurs. Mais les idées essentielles restent les mêmes; si bien que, dans beaucoup de cas, cela nous permettra d'abréger considérablement, sans nuire cependant à la clarté.

Considérons d'abord un cube de m^3 cases, m étant premier, et supposons que les m^2 éléments $0, 1, 2, \ldots, m^2-1$ aient été placés à la base de ce cube de manière à former un carré présentant la position fondamentale principale (36). Sur cette première *couche* de cubes, nous en plaçons une deuxième, telle que chaque élément soit égal à celui qui lui correspond, augmenté de m^2; et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous ayons formé le cube tout entier, c'est-à-dire qu'il y ait m couches. Nous aurons alors le cube de module m à sa *position fondamentale* principale. Les x et les y étant définis comme au n° 36, si nous appelons z la direction perpendiculaire au plan des xy, et partant de l'origine, nous reconnaissons que les trois axes contiennent :

L'axe des x, les nombres	$0,$	$1,$	$2,$	$3,$	$\ldots,$	$m-1,$
L'axe des y, »	$0,$	$m,$	$2m,$	$3m,$	$\ldots,$	$(m-1)m,$
L'axe des z, »	$0,$	$m^2,$	$2m^2,$	$3m^2,$	$\ldots,$	$(m-1)m^2.$

Une case quelconque, dont les coordonnées sont a, b, c, sera occupée par l'élément dont la valeur est $m^2c+mb+a$.

Nous supposerons maintenant que le cube ainsi formé est indéfiniment reproduit suivant les trois directions des x, des y et des z, de manière à remplir tout l'espace indéfini à trois dimensions.

Une direction, partant de l'origine, s'exprimera par

$$((m))(ax+by+cz).$$

En faisant varier $((m))$ de 0 à $m-1$, les coordonnées des centres des cases successivement rencontrées seront :

$$\begin{array}{lccccc}
x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0.a, & 1.a, & 2.a, & \ldots, & (m-1)a, \\
y\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0.b, & 1.b, & 2.b, & \ldots, & (m-1)b, \\
z\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0.c, & 1.c, & 2.c, & \ldots, & (m-1)c.
\end{array}$$

En prenant les résidus, pour tout ramener au premier cube, on aura toujours, dans un certain ordre,

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,$$

à moins que le facteur par lequel on multiplie m ne soit nul.

Donc la direction $((m))(ax+by+cz)$, a, b et c étant différents de zéro, passera par m points successifs (dans le premier cube) dont les coordonnées seront $0, 1, 2, \ldots, m-1$. La somme totale des éléments rencontrés dans ces cases sera donc

$$m^2\Sigma((m))+m\Sigma((m))+\Sigma((m))=\frac{m(m^3-1)}{2},$$

c'est-à-dire la somme magique, si bien que la ligne considérée est magique.

En partant d'une autre case (α, β, γ), on aurait encore une ligne magique, ce qui démontre que la direction est magique.

Le cube, à sa position fondamentale, est donc hypermagique. Il a pour directions non magiques celles des trois axes coordonnés, et toutes celles tracées dans l'un quelconque des trois plans coordonnés.

Directions ; directions irréductibles.

45. Il semble, en voyant un cube arithmétique, qu'on y trouve autant de directions qu'on peut mener de droites de la case origine aux autres. Cependant, si le module est premier, il est aisé de reconnaître que le nombre de ces directions se réduit beaucoup et d'en faire le compte. En effet, comme nous l'avons remarqué déjà, toute direction $((m))(ax+by+cz)$ passe par les centres de m cases, y compris l'origine, ce qui fait $m-1$, en ne tenant pas compte de celle-ci. Pour occuper le cube tout entier, qui comprend m^3 cases, il faut donc, en appelant N le nombre des directions, que nous ayons

$$(m-1)\mathrm{N}+1=m^3,$$

d'où

$$\mathrm{N}=\frac{m^3-1}{m-1}=m^2+m+1.$$

En prenant trois quelconques de ces directions irréductibles, partant d'un même point, l'origine zéro par exemple, de la position fondamentale principale du cube, et construisant un quinconce cubique de module m dans l'espace indéfini, exactement comme nous l'avons fait sur l'espace à deux dimensions en ce qui concerne les carrés, nous aurons évidemment un nouveau cube hypermagique.

Par conséquent, en prenant le nombre des arrangements 3 à 3 des N directions, ou $\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)(\mathrm{N}-2)$, nous aurons celui des systèmes d'axes sur lesquels on peut former des cubes hypermagiques de même origine, déduits d'une position fondamentale. Or le nombre de ces positions fondamentales est $(m!)^3$, puisqu'on peut faire suivant les trois axes toutes les permutations de tranches imaginables. Nous avons donc pour le nombre total des cubes hypermagiques de module m

$$\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)(\mathrm{N}-2)(m!)^3=m(m+1)(m^2+m+1)(m^2+m-1)(m!)^3.$$

La probabilité pour que les m^3 nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m^3-1,$$

jetés au hasard dans les m^3 cases d'un cube, forment un cube hypermagique, est par conséquent

$$\frac{m(m+1)(m^2+m+1)(m^2+m-1)(m!)^3}{(m^3)!}.$$

La probabilité, par exemple, pour que les 27 premiers nombres forment un cube hypermagique est

$$\frac{3.4.13.11.6^3}{27!} = \frac{528}{25!},$$

c'est-à-dire extrêmement petite.

Détermination d'un plan arithmétique.

46. Dans un cube arithmétique, si nous prenons deux directions irréductibles quelconques

$$((m))(ax+by+cz) \quad \text{et} \quad ((m))(a'x+b'y+c'z)$$

et si nous les ajoutons, en donnant à chacun des symboles indéterminés $((m))$ toutes les valeurs possibles $0, 1, 2, \ldots, m-1$, nous aurons un ensemble de cases auxquelles nous pouvons donner le nom de *plan arithmétique*. Il est évident d'après cela que le nombre des points d'un plan arithmétique, le module m étant premier, est m^2.

On voit toute l'analogie qui existe entre cette détermination et celle d'un plan géométrique, au moyen des quaternions, par la formule

$$\lambda\mathrm{A}+\mu\mathrm{B},$$

A et B étant deux vecteurs donnés, λ et μ deux coefficients réels indéterminés.

Toutes les questions de Géométrie analytique dans l'espace sur la droite et le plan trouvent ici leurs analogies. On pourra, par exemple, écrire l'équation cartésienne d'un plan passant par l'origine et par les deux directions données ci-dessus, sous la forme

$$\begin{vmatrix} x & a & a' \\ y & b & b' \\ z & c & c' \end{vmatrix} = 0.$$

Réciproquement toute équation du premier degré en x, y, z représentera un plan. Un plan sera déterminé par une droite et un point. Deux plans déterminent une droite; deux plans quelconques parallèles à deux plans donnés déterminent une direction. On pourra obtenir l'équation générale des plans passant par une droite donnée, etc. Il faut seulement retenir toujours que les coefficients sont essentiellement entiers, et que toutes les relations qu'on écrit sont des congruences de module m, et non plus des équations ordinaires.

Nous remarquerons que, dans le cube hypermagique que donne la position fondamentale, les trois plans coordonnés, ayant pour équations $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, contiennent toutes les directions non magiques, et qu'au contraire toutes les autres directions sont magiques.

Des abaques cubiques.

47. Soit un cube arithmétique de m^3 cases, m étant premier. Sur le carré de base, dans le plan des xy par exemple, plaçons m^2 objets identiques; puis formons une deuxième couche de m^2 objets différents des premiers, mais identiques entre eux, et ainsi de suite. Le cube ainsi obtenu sera un *abaque cubique* de module m.

Dans l'hypothèse où nous nous sommes placé, le plan des xy est un plan d'invariation. Toute ligne dans ce plan (ou parallèle) ne rencontre jamais que le même objet. Au contraire, toute ligne en dehors du plan des xy est une ligne magique, en ce sens qu'elle rencontre tous les m objets différents.

Si l'on vient à construire un quinconce cubique dans l'espace indéfini rempli par la reproduction de cette figure, en prenant pour bases trois directions quelconques, ainsi que nous l'avons fait pour les carrés, le plan des xy se transformera en un certain plan, une fois que ce quinconce aura été ramené à la forme d'un cube. La figure obtenue par cette transformation sera encore un abaque contenant un plan d'invariation. Toutes les lignes contenues dans ce plan, ou parallèles, seront non magiques; toutes les autres lignes seront magiques.

48. Les abaques cubiques nous permettront l'étude des cubes arithmétiques, exactement comme les abaques carrés nous ont servi (n° 39) pour les espaces à deux dimensions. Il suffira d'écrire tous les m^3 nombres $0, 1, 2, \ldots, m^3 - 1$ dans le système de numération de base m, ce qui exigera trois chiffres, puis de former les cubes remplis par les premiers, les deuxièmes et

les troisièmes chiffres. Ces trois cubes seront des abaques, et si nous avons pris, par exemple, une position fondamentale, les plans d'invariation seront, respectivement, celui des xy, des xz et des yz.

En appelant A_0 l'abaque des chiffres des unités simples, A_1 celui des chiffres des unités du deuxième ordre et A_2 celui du chiffre des unités du troisième ordre, le cube résultera de l'addition des éléments correspondants de A_0, A_1, A_2, respectivement multipliés par 1, m, m^2.

En faisant subir la même transformation en quinconce au cube total et à ses trois abaques composants, ces propriétés subsisteront.

Réciproquement, avec trois abaques cubiques quelconques, pourvu que leurs plans d'invariation ne coïncident pas, nous obtiendrons un *bloc,* par l'addition de leurs éléments multipliés par 1, m, m^2, et ce bloc sera un cube hypermagique présentant trois plans non magiques, ceux des trois abaques composants. Toutes les autres lignes de ce cube seront magiques.

Des exemples numériques seraient faciles à former, mais tiendraient ici trop de place, chaque cube de module m ne pouvant être représenté sur le papier que par m figures donnant les carrés qui le composent, tranche par tranche. Néanmoins, pour de petits nombres, tels que 5 par exemple, ou même 3, le lecteur pourra utilement s'y exercer.

En 1887, le 17 avril, j'ai adressé à l'Académie des Sciences un cube hypermagique de module 17. Ce cube avait été construit d'après les principes qui précèdent, en partant d'une position fondamentale obtenue par permutations de la position fondamentale principale, puis par des transformations en quinconce. Il était diabolique suivant toutes les diagonales, aussi bien celles du cube lui-même que celles de ses faces.

J'avais formé ce cube de 17 pour obtenir ensuite un espace diabolique à quatre dimensions; mais j'avais dû reculer devant le nombre énorme des figures qui eussent été nécessaires pour représenter un tel espace.

Il est clair que les plans non magiques doivent se couper suivant trois directions distinctes; si, par exemple, les trois plans comprenaient une direction commune, c'est-à-dire si cette direction était non magique sur les trois abaques, elle conduirait dans le bloc à une répétition d'éléments identiques, ce qui ne se peut.

Pour avoir un cube diabolique, il faut et il suffit que les directions suivantes soient magiques :

$$
\begin{gathered}
((m))\,(a.x + 0.y + 0.z),\\
((m))\,(0.x + b\,y + 0.z),\\
((m))\,(0.x + 0.y + c\,z),\\
((m))\,(0.x + 1.y \pm 1.z),\\
((m))\,(1.x + 0.y \pm 1.z),\\
((m))\,(1.x \pm 1.y + 0.z),\\
((m))\,(1.x \pm 1.y \pm 1.z).
\end{gathered}
$$

Ces directions représentent, en effet, les axes coordonnés, les diagonales des faces et celles du cube lui-même. Autrement dit, les trois plans non magiques ne doivent passer par aucune des directions dont il s'agit. Ils ne doivent donc pas passer par ces directions, non plus dans chacun des abaques composants.

On peut remarquer que, dans un abaque cubique de module premier, il y a $m+1$ directions non magiques ou d'invariation, et, par conséquent, m^2 directions magiques, puisque le nombre total des directions est $m^2 + m + 1$.

Formules de construction.

49. Comme au n° **40**, il est visible que la transformation d'un cube arithmétique en quinconce, en conservant la même origine, s'opérera par les formules

$$
\begin{aligned}
a\,x + b\,y + c\,z &= \xi,\\
a'x + b'y + c'z &= \eta,\\
a''x + b''y + c''z &= \zeta;
\end{aligned}
$$

puis on formera l'expression

$$((m))\xi + ((m))\eta + ((m))\zeta$$

pour avoir les différentes cases, en donnant au symbole $((m))$ successivement toutes les valeurs qu'il peut prendre.

Si l'on est parti de la position fondamentale, la case qui avait pour coordonnées X, Y, Z était occupée par l'élément ayant pour valeur $X + mY + m^2Z$.

Si cette même case, dans le nouveau système, a pour coordonnées X', Y', Z', nous aurons donc

$$X'\xi + Y'\eta + Z'\zeta = (aX' + a'Y' + a''Z')x + (bX' + b'Y' + b''Z')y + (cX' + c'Y' + c''Z')z.$$

Par conséquent

$$X = aX' + a'Y' + a''Z',$$
$$Y = bX' + b'Y' + b''Z',$$
$$Z = cX' + c'Y' + c''Z',$$

et la valeur de l'élément est

$$(a + mb + m^2c)X' + (a' + mb' + m^2c')Y' + (a'' + mb'' + m^2c'')Z',$$

c'est-à-dire que les trois chiffres, en commençant par les unités simples, sont

$$aX' + a'Y' + a''Z', \quad bX' + b'Y' + b''Z', \quad cX' + c'Y' + c''Z',$$

ou plutôt congrus à ces expressions.

De là un moyen, tout à fait analogue à celui que nous avons exposé au Chapitre précédent, pour construire successivement toutes les cases du cube nouveau, en donnant à X', Y', Z' qui ne sont autres que des expressions particulières du symbole $((m))$ toutes leurs valeurs successives possibles $0, 1, 2, \ldots, m - 1$.

50. Les formules de transformation du numéro précédent nous permettent aisément d'avoir les transformées des axes; on en tire effectivement

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \xi & b & c \\ \eta & b' & c' \\ \zeta & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \xi & c \\ a' & \eta & c' \\ a'' & \zeta & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & \xi \\ a' & b' & \eta \\ a'' & b'' & \zeta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}.$$

Si bien que les trois numérateurs D_x, D_y, D_z, ou plutôt $((m))D_x$, $((m))D_y$, $((m))D_z$ représentent les trois directions dont il s'agit.

Les plans de non-magie sont, par conséquent, représentés par

$$((m))D_x + ((m))D_y,\quad ((m))D_y + ((m))D_z,\quad ((m))D_z + ((m))D_x.$$

Par exemple, si dans un cube de module 11 on transforme la position fondamentale au moyen des formules

$$\begin{aligned} 1.\xi &= x + 3y + z, \\ 1.\eta &= 2x + y + z, \\ 1.\zeta &= 2x + y + 2z, \end{aligned}$$

les transformées des axes des x, des y et des z seront respectivement

$$1.\xi + 5\eta + 2\zeta,\quad 2\xi - 1.\zeta,\quad 1.\eta - 1.\zeta,$$

ainsi qu'il est facile de le vérifier, et les plans de non-magie seront déterminés par

$$\begin{aligned} &((11))(1.\xi + 5\eta + 2\zeta) + ((11))(2\xi - 1.\zeta), \\ &((11))(2\xi - 1.\zeta) \qquad + ((11))(1.\eta - 1.\zeta), \\ &((11))(1.\eta - 1.\zeta) \qquad + ((11))(1.\xi + 5\eta + 2\zeta). \end{aligned}$$

Cubes diaboliques.

51. Rappelons qu'un cube diabolique est celui qui présente une magie parfaite suivant les directions :

1° Des arêtes	3	directions
2° Des diagonales des faces	6	»
3° Des diagonales du cube	4	»

soit en tout 13 directions.

Ces directions sont formulées par les symboles

x......	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	−1	1
y......	0	1	0	1	−1	1	1	0	0	1	−1	1	1
z......	0	0	1	0	0	1	−1	1	−1	−1	1	1	1

Le nombre total des directions de l'espace à trois dimensions considéré est $m^2 + m + 1$. Comme il y a trois plans de non-magie, comprenant chacun $m + 1$ directions, il s'ensuit qu'on a forcément $3m$ directions non magiques, car, en ajoutant le nombre des directions de chaque plan, on compte deux fois chacune des directions communes à deux de ces plans, ce qui fait bien

$$3(m+1)-3=3m.$$

Le nombre des directions restantes, qui peuvent être magiques, est donc

$$m^2+m+1-3m=(m-1)^2.$$

Il semble donc que, si $(m-1)^2>13$, on pourrait avoir un cube diabolique, c'est-à-dire qu'il suffirait d'avoir $m=5$ pour qu'il en fût ainsi.

Mais il importe de remarquer que, dans le cube diabolique, les directions pour lesquelles on exige la magie ne sont pas quelconques; au contraire, elles se trouvent situées dans des plans déterminés.

Dans le plan des xy, par exemple, il y en a quatre

$$\begin{gathered}
1.x+0.y+0.z,\\
0.x+1.y+0.z,\\
1.x+1.y+0.z,\\
1.x-1.y+0.z.
\end{gathered}$$

Or, un plan quelconque, qui n'est pas un plan non magique, coupe les trois plans non magiques suivant trois droites différentes, forcément non magiques en direction. Comme ce plan contient en tout $m+1$ directions, on voit qu'il ne peut lui rester que $(m+1)-3=m-2$ directions magiques.

Il faut donc, pour la diabolie, qu'on ait au moins $m-2=4$, d'après ce que nous venons de voir, c'est-à-dire $m=7$, puisque m est premier.

Ceci encore n'est qu'une illusion, à cause des formes particulières qu'exige la diabolie. Si nous reprenons les formules

$$\begin{aligned}
1.\xi &= ax+by+cz,\\
1.\eta &= a'x+b'y+c'z,\\
1.\zeta &= a''x+b''y+c''z,
\end{aligned}$$

il faut, en effet, pour $m=7$, que les trois nombres a, a', a'', compris parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, soient différents entre eux et tels qu'aucune des expressions

$$\begin{gathered}
a+a',\quad a'+a'',\quad a''+a,\\
a+a'+a'',\quad a+a'-a'',\quad a'+a''-a,\quad a''+a-a'
\end{gathered}$$

ne soit congrue à zéro ; de même pour les b et les c. On reconnaît sans peine que c'est impossible et que, par conséquent, le plus petit cube diabolique à module premier que l'on puisse construire est celui de module 11.

Nous ne donnerons ici, à titre d'exemple, la construction d'aucun cube hypermagique, pour éviter des complications de figures qui n'ajouteraient rien à la théorie. Le lecteur que ces applications intéresseraient pourra s'y exercer sans peine, en choisissant par exemple le module 11.

Ultérieurement, nous nous réservons, si l'occasion s'en présente, de publier de semblables applications dans des journaux périodiques spéciaux où elles seront mieux à leur place.

Espaces hypermagiques de module premier.

52. Si l'on veut bien se reporter aux définitions et aux principes exposés dans les Chapitres II et III sur les espaces arithmétiques et sur la définition générale de la magie, il sera facile de suivre les notions très sommaires qu'il nous reste à exposer ici pour montrer comment l'analogie nous conduit naturellement à étendre aux espaces quelconques ce que nous avons dit pour les carrés et les cubes.

Un cube de module premier m étant construit, une collection de m cubes semblables constituera un espace à quatre dimensions. En réalité, comme nous l'avons déjà dit, cet espace modulaire pourra se représenter par un tore formé lui-même par des assemblages de tores, ce qui rend plus *visibles* peut-être les diverses dimensions. Mais pour ce que nous avons à dire ici, cette représentation matérielle n'est pas nécessaire. Il suffit, *par la pensée,* de nous représenter la collection de m cubes de module m et d'imaginer la répétition possible indéfinie de chacun de ces cubes dans tout l'espace réel, puis de la collection des cubes en ligne droite par exemple, et toujours dans le même ordre.

Dans *un* des cubes, on pourra cheminer suivant les trois premières dimensions x, y, z ; quand nous passerons *d'un cube à un autre* en restant dans deux cases homologues, nous cheminerons suivant la quatrième dimension t ; et ainsi de suite pour les espaces à 5, 6, ..., n dimensions.

On peut donc dire qu'un espace à quatre dimensions est construit sur un espace à trois dimensions pris pour base, et sur un espace à une dimension, extérieure à cette base, comme le cube se construit sur le carré et sur une droite extérieure au plan de ce carré. On peut même supposer que l'espace à une dimension est perpendiculaire à celui à trois dimensions, par analogie.

En général, un espace à n dimensions pourra être considéré comme construit sur un espace à $n-1$ dimensions, et sur un autre à une dimension, extérieur au premier.

C'est ici le cas de généraliser les considérations présentées à la fin du n° 51, en recherchant la valeur minimum que doit présenter le module premier d'un espace à n dimensions, pour que cet espace puisse être diabolique.

Les formules de transformation, dans un espace de cette nature, sont

$$\begin{aligned} 1\,\xi &= a_1 x + b_1 y + \ldots, \\ 1\,\eta &= a_2 x + b_2 y + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Comme une diagonale quelconque résulte de l'application à x, y, z, ... des facteurs 0, $+1$, -1, à l'exclusion de tout autre, et comme, dans le résultat, il faut pour la diabolie qu'on ne rencontre jamais *le coefficient zéro, qui est le signe de l'invariation,* il en résulte que toutes les quantités dont le Tableau suit doivent différer de zéro :

$$\begin{array}{lll} a_1, & a_2, & \ldots, \quad a_n, \\ \pm a_1 \pm a_2, & \pm a_1 \pm a_3, & \ldots, \\ \pm a_1 \pm a_2 \pm a_3, & \ldots, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \multicolumn{3}{l}{\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n.} \end{array}$$

La dernière ligne contient 2^n quantités toutes différentes ; car, si deux quelconques étaient congrues entre elles, l'une des quantités comprises dans les lignes précédentes deviendrait congrue à zéro. Il est donc nécessaire que le module soit au moins égal à 2^n ; et puisqu'il est premier, nous pouvons formuler la proposition suivante :

Dans un espace de module premier m à n dimensions, on *ne peut obtenir la diabolie que si m est au moins égal au nombre premier qui surpasse immédiatement* 2^n.

Par exemple, ainsi que nous l'avons déjà vu, le plus petit carré diabolique possible de module premier m est celui où

$$m = 5 \qquad (5 > 2^2).$$

Le plus petit cube diabolique est celui où

$$m = 11 \qquad (11 > 2^3).$$

Le plus petit espace diabolique à quatre dimensions est celui où

$$m = 17 \qquad (17 > 2^4).$$

Et ainsi de suite.

53. Un cube de m^3 cases, à sa position fondamentale, étant pris pour base, construisons successivement, sur la dimension nouvelle extérieure, un nouveau cube contenant les éléments de m^3 à $2m^3 - 1$, puis un troisième contenant ceux de $2m^3$ à $3m^3 - 1$, et ainsi de suite; enfin un m^e contenant les éléments $(m-1)m^3$, $(m-1)m^3 + 1, \ldots, m^4 - 1$, toujours en suivant dans chacun des cubes le même ordre successif que dans le premier. Nous aurons un espace hypermagique de module m à quatre dimensions, à sa position fondamentale principale.

La première dimension, celle des x, contient les nombres $0, 1, 2, \ldots, m-1$; la deuxième (des y), les nombres $0.m$, $1.m$, $2.m, \ldots, (m-1)m$; la troisième (des z), les nombres $0.m^2$, $1.m^2$, $2.m^2, \ldots, (m-1)m^2$; enfin la quatrième dimension, celle des t, les nombres $0.m^3$, $1.m^3$, $2.m^3, \ldots, (m-1)m^3$.

Une case quelconque ayant pour coordonnées a, b, c, d, c'est-à-dire a, b, c dans le cube, et placée dans le cube de rang d, on pourra formuler la droite qui va de l'origine zéro à cette case en écrivant

$$ax + by + cz + dt.$$

La valeur de l'élément occupé par cette case sera

$$a + bm + cm^2 + dm^3,$$

c'est-à-dire que a, b, c, d seront justement les *chiffres* qu'on devra employer pour écrire le nombre en question dans le système de numération de base m.

Nous appellerons *directions* tous les ensembles d'espaces à une dimension, parallèles à une droite donnée, que peut contenir l'espace considéré. Une direction partant de l'origine s'exprimera par

$$((m))(ax + by + cz + dt).$$

Si aucun des coefficients a, b, c, d n'est nul, elle passera par m cases, telles que la somme des éléments contenus sera

$$(m^3 + m^2 + m + 1)\Sigma((m)) = \frac{m(m^4 - 1)}{2},$$

somme magique, et il en serait de même en partant de toute autre case. La position fondamentale principale est donc hypermagique, ainsi que toutes celles qu'on en peut déduire par permutations.

Les directions des x, des y, des z et des t sont non magiques, et il en est de même des directions appartenant à l'un des quatre espaces à trois dimensions que l'on peut construire sur trois quelconques d'entre elles.

Le nombre des directions de l'espace considéré est

$$\frac{m^4 - 1}{m - 1} = m^3 + m^2 + m + 1.$$

En général, dans un espace de module premier m à n dimensions, il y a $\frac{m^n - 1}{m - 1}$ directions irréductibles différentes, et dans un tel espace la somme magique est $\frac{m(m^n - 1)}{2}$.

On comprend aisément maintenant ce que c'est qu'une position fondamentale d'un espace de module m à n dimensions, et comment cet espace est hypermagique. Dans un tel espace, les directions non magiques sont celles des x, des y, des z, ..., des v, et de tous les n espaces à $(n - 1)$ dimensions que l'on peut construire sur $n - 1$ d'entre elles. On voit aussi qu'une case quelconque ayant pour coordonnées a, b, c, ..., f, l'élément qui occupe cette case s'écrira $(f\ldots cba)$ dans le système de numération de base m.

Deux espaces à n dimensions ont en général un espace à $n - 1$ dimensions qui leur est commun. Par exemple, deux espaces à deux dimensions ont une direction commune. Les n espaces non magiques à $n-1$ dimensions, dont nous avons parlé ci-dessus, contiennent chacun $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ directions, ce qui semblerait faire $n\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ directions non magiques. Mais on en compterait trop ainsi, puisque deux à deux ils ont $\frac{m^{n-2}-1}{m-1}$ directions communes. Il faut défalquer évidemment $C_n^2\frac{m^{n-2}-1}{m-1}$ pour tenir compte de toutes les combinaisons deux à deux comptées en trop. Le nombre total des directions $\frac{m^n-1}{m-1}$ se décompose donc ainsi :

Directions non magiques.. $n\frac{m^{n-1}-1}{m-1}-\frac{n(n-1)}{2}\frac{m^{n-2}-1}{m-1}$.

Directions magiques...... $\frac{m^n-1}{m-1}-n\frac{m^{n-1}-1}{m-1}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{m^{n-2}-1}{m-1}$.

Toutes les dimensions, toutes les directions, dans un espace quelconque, doivent être considérées comme homogènes. En en choisissant n, si l'espace a n dimensions, on pourra donc opérer une transformation de la position fondamentale, absolument analogue aux quinconces plans ou cubiques, et qui donnera toujours un espace hypermagique. Si nous posons $N=\frac{m^n-1}{m-1}$, nous aurons pour le nombre des arrangements différents n à n

$$N(N-1)\ldots(N-n+1).$$

Comme on peut permuter suivant chaque direction des $x, y, \ldots$, de $m!$ manières différentes, nous avons donc

$$N(N-1)(N-2)\ldots,(N-n+1)(m!)^n$$

pour le nombre total des espaces hypermagiques à n dimensions, de module premier m.

Comme complément à ce qui précède, il n'est pas inutile d'ajouter quelques considérations nouvelles sur cette constitution des espaces arithmétiques à un nombre quelconque de dimensions. Peut-être en dehors de notre sujet immédiat, elles n'en tendent pas moins à éclaircir des notions, simples en elles-mêmes, mais qui s'obscurcissent parfois à cause de la difficulté qu'on éprouve à en imaginer une représentation matérielle.

Lorsque nous construisons un espace arithmétique à deux dimensions, les deux axes qui nous servent de point de départ sont deux axes coordonnés.

Pour un espace à trois dimensions, nous partons de trois axes coordonnés; ces axes, combinés deux à deux, nous donnent trois plans coordonnés.

Pour un espace à quatre dimensions, nous avons de même un système coordonné comprenant : 4 axes, 6 plans, 4 espaces à trois dimensions; et ainsi de suite.

Le lecteur a déjà remarqué que ces suites (2) (3, 3) (4, 6, 4), ... représentent les coefficients des puissances successives du binôme, en supprimant les deux termes extrêmes, et il est facile de généraliser ces notions, et de reconnaître qu'un système coordonné servant à la construction d'un espace à n dimensions contient : n axes; $\frac{n(n-1)}{1.2}$ plans; $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ espaces à trois dimensions; ..., enfin n espaces à $n-1$ dimensions.

Dans un espace de cette nature, une équation linéaire entre les coordonnées d'un point variable représente un espace à $(n-1)$ dimensions, appartenant à l'espace supérieur (et rappelons ici une fois de plus que le mot *équation* dans le domaine arithmétique où nous sommes équivaut à celui d'équation arithmétique ou de congruence). Deux équations simultanées représentent un espace à $n-2$ dimensions; et ainsi de suite. En d'autres termes, le nombre de dimensions d'un espace d'ordre inférieur et le nombre des équations nécessaires à la détermination de cet espace ont toujours pour somme le nombre n des dimensions de l'espace dans lequel on opère.

Ceci nous permet d'arriver à des considérations intéressantes sur la nature des intersections communes à deux ou à plusieurs espaces donnés dans un espace à n dimensions.

Soient en effet p et p' les nombres des dimensions de deux espaces. Ceux des équations correspondantes sont $n-p$ et $n-p'$, soit en tout $2n-p-p'$. Les points appartenant à la partie commune sont donc représentés par $2n-p-p'$ équations, c'est-à-dire que l'espace auquel ils appartiennent a pour nombre de dimensions

$$n-(2n-p-p')=p+p'-n.$$

Si $p+p'>n$, les deux espaces ont un espace commun; si $p+p'=n$, ils ont en commun un point seulement; enfin, si l'on avait $p+p'<n$, il n'y aurait pas d'espace commun. Par exemple, dans l'espace réel ($n=3$) deux plans ($p=p'=2$) se coupent suivant une droite parce que $2+2-3=1$; mais deux droites ne se coupent pas; car $1+1-3=-1$.

Il suit de là que l'intersection commune de k espaces dont les nombres de dimensions sont

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_k$$

est un espace ayant pour nombre de dimensions

$$p_1+p_2+\ldots+p_k-(k-1)n.$$

Il est bien entendu que, ces conclusions sont vraies *en général,* mais qu'il peut se présenter des cas particuliers où il n'en serait pas ainsi, ce que montrerait la résolution des systèmes d'équations auxquels on serait conduit.

C'est ainsi que, dans l'espace réel, deux droites, tout en ne se coupant pas en général, peuvent exceptionnellement se rencontrer en un point; qu'une droite, au lieu de couper un plan, peut être contenue dans ce plan; que trois plans, au lieu de se rencontrer en un seul point, peuvent avoir une droite commune, etc., ce qui ne porte aucune atteinte aux propriétés générales de la Géométrie. Il en est de même ici.

54. Un abaque à n dimensions sera l'espace arithmétique obtenu en remplissant un espace à $n-1$ dimensions d'objets identiques (A), puis en construisant une direction extérieure à cet espace et garnie d'objets différents, sauf à l'origine, commune au premier espace et qui est, par suite, occupée par (A). Sur la première case de cette direction, occupée par l'objet (B), on établira un espace pareil au premier, et rempli dans toutes ses cases par l'objet (B); et ainsi de suite (*voir* n° 47).

Ici, le décompte des directions magiques ou d'invariation est facile; en effet, nous avons en tout

$$\frac{m^n-1}{m-1} = m^{n-1}+m^{n-2}+m^{n-3}+\ldots+m+1$$

directions.

Dans l'espace d'invariation pris pour *base* de l'abaque, il y en a

$$\frac{m^{n-1}-1}{m-1} = m^{n-2} + m^{n-3} + \ldots + m + 1.$$

Il reste donc m^{n-1} directions magiques.

On comprend comment les abaques représentent isolément les chiffres des éléments, si l'on part de la position fondamentale principale, et comment, en général, le module étant premier, il faut un bloc de n abaques, respectivement multipliés par 1, m, m^2, ..., m^{n-1} pour composer un espace hypermagique à n dimensions.

Il n'est pas besoin d'insister sur la transformation des abaques par la méthode des quinconces.

55. Il est évident, comme généralisation du n° 49, que la transformation en quinconce dont nous venons de parler, et qui est si visible et si commode pour les espaces réels à deux et à trois dimensions, se traduit analytiquement par les formules générales

$$\begin{aligned}
1\,\xi &= ax + by + cz + \ldots + fv,\\
1\,\eta &= a'x + b'y + c'z + \ldots + f'v,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
1\,\upsilon &= a^{(n-1)}x + b^{(n-1)}y + c^{(n-1)}z + \ldots + f^{(n-1)}v,
\end{aligned}$$

si bien qu'il y a en somme une connexité profonde entre la théorie des espaces magiques et celle des équations linéaires. Il importe seulement, nous ne saurions trop y insister, de se rappeler que les coefficients sont supposés entiers et que les relations sont des congruences de module m, vu qu'il s'agit ici d'une étude arithmétique et non pas algébrique.

La construction expérimentale de ces espaces arithmétiques hypermagiques supérieurs serait évidemment fastidieuse dès que le module et le nombre des dimensions s'élèveraient quelque peu.

Mais il est intéressant de remarquer que la théorie en est, au fond, tout aussi simple que celle des carrés et que rien n'est plus facile que de donner la valeur d'un élément contenu dans une case quelconque, et de dire si une direction déterminée est magique ou non.

En effet, les formules de transformation étant celles que nous avons écrites, si X', Y', Z', ..., V' sont les coordonnées d'une case dans le nouvel espace, les chiffres de l'élément correspondant, écrit dans le système de base m, seront les résidus de

$$\begin{array}{l} aX' + a'Y' + \ldots + a^{(n-1)}V', \\ bX' + b'Y' + \ldots + b^{(n-1)}V', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ fX' + f'Y' + \ldots + f^{(n-1)}V', \end{array}$$

par rapport au module m.

Quant à une direction $\alpha\xi + \beta\eta + \ldots + \lambda\upsilon$, il suffira de l'exprimer linéairement en x, y, z, ..., v à l'aide des formules. Si aucun des coefficients ne s'annule, la direction est magique; si l'un d'eux s'annule (ou plusieurs), cette direction est non magique.

On aura les transformées des axes anciens en résolvant le système d'équations par rapport à x, y, ..., v.

Il serait facile d'établir des analogies au point de vue de la diabolie, mais cela ne semble plus présenter un grand intérêt en ce qui concerne les espaces supérieurs, parce qu'on cesse de se la figurer réellement comme dans les carrés et les cubes.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE D'UN ESPACE DE MODULE COMPOSÉ.

Observations générales.

56. Nous allons aborder à présent une étude qui se distingue de tout ce qui précède par la nature du module; nous l'avons jusqu'ici supposé premier, tandis que nous le considérerons, au contraire, maintenant comme composé. De là une différence essentielle dans les méthodes et les résultats; nous aurons cependant à utiliser les notions précédemment acquises.

On doit remarquer que l'ensemble des développements contenus dans les Chapitres précédents repose principalement sur ce fait arithmétique bien connu, à savoir que si un nombre a est inférieur à m et si l'on forme les nombres

$$0.a, \quad 1.a, \quad 2.a, \quad \ldots, \quad (m-1)a,$$

ils seront respectivement congrus, dans un certain ordre, à

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m-1.$$

Si m, au lieu d'être premier, est composé, ceci n'est plus exact d'une manière générale. La proposition subsiste encore si a est premier avec m; mais elle cesse d'être vraie dans l'hypothèse contraire. *En somme, la base arithmétique des carrés hypermagiques n'est autre que la théorie des congruences.* Les congruences à module premier sont d'une étude beaucoup plus simple et facile que celles dont le module est composé.

Pour aborder cette question d'une façon progressive et arriver d'échelon en échelon aux vérités que nous avons à reconnaître et à exposer, nous devrons partir tout d'abord de l'hypothèse relativement simple où le module m ne comprend que deux facteurs, c'est-à-dire où il a la forme pq, p et q étant premiers.

Nous commencerons par l'examen des espaces composés à une seule dimension. Mais, auparavant, nous tenons à reprendre en tête de ce Chapitre quelques notions arithmétiques, peut-être un peu nouvelles, au moins dans la forme, et dont nous aurons à faire un continuel usage dans les développements qui vont suivre. Tout en ayant donné dans un Chapitre précédent quelques indications à ce sujet, il est bon d'y revenir ici rapidement.

Systèmes de numération à bases multiples.

57. Nous avons déjà remarqué que tous les nombres de o à $m^2 - 1$ peuvent s'écrire avec deux chiffres dans le système de numération de base m et, qu'en appelant μ le chiffre qui représente $m - 1$ le dernier nombre $m^2 - 1$ s'écrit $\mu\mu$. Tous les nombres de o à $m^3 - 1$ s'écrivent avec trois chiffres, depuis ooo jusqu'à $\mu\mu\mu$, et ainsi de suite. Nous avons utilisé cette remarque pour la construction des abaques de module premier, et nous avons vu combien elle était précieuse pour simplifier le problème de l'hypermagie. Au fond, c'est la traduction des identités

$$((m^2)) = ((m))m + ((m)),$$
$$((m^3)) = ((m))m^2 + ((m))m + ((m)), \quad \ldots.$$

Si, au lieu de considérer ainsi une puissance exacte quelconque m^2, m^3, ..., nous prenons un nombre composé, tel que pq, il est clair que tout nombre inférieur à pq, étant divisé par q, donnera un reste inférieur à q et un quotient inférieur à p. Donc

$$((pq)) = ((p))q + ((q)),$$

que les facteurs p, q soient d'ailleurs premiers ou composés. Par suite,

$$((pqr)) = ((pq))r + ((r)) = ((p))qr + ((q))r + ((r)),$$

et l'on voit facilement, d'une manière générale, que

$$((pqr\ldots t)) = ((p))qr\ldots t + ((q))r\ldots t + \ldots + ((t)).$$

Un nombre inférieur à un nombre composé m peut donc s'écrire ainsi dans un certain système de numération dont les chiffres $((p))$, $((q))$, $((r))$, ..., $((t))$ sont respectivement inférieurs à p, q, r, ..., t

et doivent être multipliés par $\frac{m}{p}, \frac{m}{pq}, \ldots, \frac{m}{m} = 1$. C'est la somme de tous ces produits qui donne le nombre considéré.

Les facteurs p, q, ... peuvent d'ailleurs être égaux ou inégaux sans que cela change rien à ce que nous disons ici.

Lorsqu'un nombre inférieur à m aura été écrit sous cette forme, nous dirons, pour abréger, qu'il est écrit dans le *système de numération de base multiple* $(p, q, r, \ldots, t)$.

Pour savoir comment un nombre, donné dans le système décimal, doit s'écrire dans le système $(p, q, r, \ldots, t)$, il n'y a qu'à faire une opération des plus simples : le diviser par t, diviser le quotient par le facteur précédent, et ainsi de suite; la série des restes donnera les chiffres successifs correspondant à $t, \ldots, r, q, p$, pris de droite à gauche.

Ainsi, 19, dans le système de base multiple (3, 7), s'écrirait 2 5; dans le système de base (7, 3), il s'écrirait 6 1; 57, dans le système (5,3,2,2) s'écrirait 4 2 0 1.

Dans ce système de numération, les nombres inférieurs à m s'écrivent tous avec un nombre de chiffres au plus égal à celui des éléments de la base multiple. *Il y a grand avantage à employer toujours ce nombre de chiffres, en complétant au besoin par des* 0 *à la gauche, et c'est même une obligation au point de vue des applications que nous aurons à étudier*. Ainsi nous écrirons 9 dans le système (5, 3, 2, 2) sous la forme 0 2 0 1.

La conversion d'un nombre du système $(p, q, r, \ldots, t)$ dans le système décimal se fera avec une grande facilité. On devra multiplier le premier chiffre par q et ajouter le second chiffre; multiplier le résultat par r et ajouter le troisième chiffre, et ainsi de suite. Si par exemple un nombre est écrit 5102 dans le système de base (6, 2, 4, 3), on aura

$$5 \times 2 = 10, \qquad 10 + 1 = 11, \qquad 11 \times 4 = 44,$$
$$44 + 0 = 44, \qquad 44 \times 3 = 132, \qquad 132 + 2 = 134.$$

Le nombre considéré est 134.

Il peut être avantageux souvent de représenter un nombre indiqué de cette manière dans le système de numération $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ en l'écrivant $\overset{\alpha}{a}, \overset{\beta}{b}, \overset{\gamma}{c}, \overset{\delta}{d}$. Ainsi, dans l'exemple précédent,

$$\overset{6}{5}\ \overset{2}{1}\ \overset{4}{0}\ \overset{3}{2}$$

signifiera qu'on doit multiplier 5 par 2.4.3, 1 par 4.3, 0 par 3, 2 par 1, et ajouter les résultats, ce qui nous donnera

$$120 + 12 + 0 + 2 = 134,$$

c'est-à-dire le même nombre que ci-dessus.

Quand un nombre m est composé de plusieurs facteurs, p, q, r par exemple, et que l'on considère son carré $m^2 = p^2 q^2 r^2$, on peut en particulier écrire tous les nombres inférieurs à m^2 dans le système de base (p^2, q^2, r^2) ou dans le système (pqr, pqr), c'est-à-dire (m, m). On peut aussi les écrire dans le système (p, p, q, q, r, r) ou (p, q, r, p, q, r); enfin dans tous les systèmes obtenus par la décomposition de m^2 en facteurs d'une manière quelconque. De même pour les puissances m^3, m^4, ...

Nous n'aurons pas à effectuer d'opérations dans les systèmes de numération dont nous venons de parler, mais ces modes d'écriture, nous le répétons, nous seront très avantageux.

Espace à une dimension de module pq.

58. Si pq objets différents sont placés en ligne droite en des points équidistants marqués 0, 1, 2, ..., $pq - 1 = m - 1$, et si cette disposition est indéfiniment reproduite sur toute l'étendue de la droite, de manière à former un espace arithmétique indéfini de module m, l'espace limité s'étendant de zéro à $m - 1$ sera en quelque sorte *l'image sur laquelle viendront se traduire tous les phénomènes de l'espace arithmétique indéfini*. Si nous y ajoutons, à la suite du point marqué $m - 1$, le point 0 qui doit suivre, nous aurons un segment de pq intervalles égaux, qui peut se décomposer, soit en p sections de q points, soit en q sections de p points. Les points qui terminent chaque section seront ce que nous appellerons les *points anomaux* de l'espace considéré, p et q étant supposés premiers. Par exemple, pour $m = 15$, nous pouvons écrire

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \mid 6\ 7\ 8\ 9\ 10 \mid 11\ 12\ 13\ 14\ 0$$

ou

$$0\ 1\ 2\ 3 \mid 4\ 5\ 6 \mid 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12 \mid 13\ 14\ 0,$$

et les points anomaux seront ceux qui se trouvent soulignés ci-dessous :

$$\underline{\underline{0}}\ 1\ 2\ \underline{3}\ 4\ \underline{5}\ \underline{6}\ 7\ 8\ \underline{9}\ \underline{10}\ 11\ \underline{12}\ 13\ 14\ \underline{0}.$$

L'origine zéro est par essence un point anomal, même dans le cas des modules premiers.

Si, sur cet espace arithmétique, garni des objets différents a_0, $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$, nous venons à marcher d'un pas régulier marqué par le nombre α, nous aurons, dans l'espace indéfini, les points successifs :

$$0.\alpha,\ 1.\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ (m-1)\alpha,\ m\alpha \equiv 0,\ \ldots,$$

c'est-à-dire qu'au bout de m pas nous rencontrerons forcément l'origine.

Si α n'est multiple ni de p, ni de q, cette suite rencontrera nécessairement les m objets différents; et nous dirons que nous avons suivi une *marche parfaite.*

Si α est multiple de l'un des facteurs, q par exemple, chaque pas fait avancer d'une section de q objets à une autre section, les points de départ et d'arrivée restant homologues. On arrivera donc au zéro après avoir marché seulement de p pas, c'est-à-dire après avoir rencontré seulement p des m objets; en continuant, on repasserait indéfiniment par les mêmes points.

Une telle marche sera dite *imparfaite.*

Il ressort de cette définition même que, sur un espace de module m, le nombre des marches parfaites est $\varphi(m)$, cette notation représentant ce qu'on appelle en Arithmétique l'*indicateur* de m, c'est-à-dire le nombre des nombres premiers avec m qui lui sont inférieurs. Ceci est vrai quelle que soit la composition de m. S'il est simplement de la forme pq, on a, comme on le sait, $\varphi(m) = (p-1)(q-1)$. Le nombre des marches imparfaites est par suite $m - \varphi(m)$ (en y comprenant la marche de pas $0m$). C'est le nombre des nombres qui parmi $0, 1, 2, \ldots, m-1$ ont des facteurs communs avec m. Nous le désignerons constamment par $\psi(m)$; d'où $m = \varphi(m) + \psi(m)$.

Dans le cas où $m = pq$, $\psi(m) = p + q - 1$. Pour un nombre premier p, on a $\varphi(p) = p - 1$, $\psi(p) = 1$. Ce nombre unique, non premier avec p, est zéro. L'INTRODUCTION, DANS LA SÉRIE DES NOMBRES ENTIERS, DE CE NOMBRE 0, CONGRU AVEC UN MODULE QUELCONQUE, EST D'UNE HAUTE IMPORTANCE ET CONTRIBUE A ÉCLAIRER BEAUCOUP LA THÉORIE DE L'INDICATEUR. C'est ce qui nous a conduit à présenter ci-après une nouvelle exposition de cette théorie.

59. Il est intéressant, et il nous sera très utile pour ce qui va suivre, d'étudier la répartition des nombres o, 1, 2, ..., $m-1$ au point de vue de leurs relations de divisibilité avec le module m.

Supposons comme plus haut $m=pq$, en admettant maintenant que p, q soient des facteurs premiers entre eux, mais qui peuvent être isolément des nombres composés.

Les m nombres o, 1, ..., $m-1$ peuvent s'écrire suivant q lignes de p termes, comme il suit :

$$\begin{array}{llllll}
0, & 1, & 2, & \ldots, & k, & \ldots, \; p-1 \\
p, & p+1, & p+2, & \ldots, & p+k, & \ldots, \; 2p-1 \\
2p, & 2p+1, & 2p+2, & \ldots, & 2p+k, & \ldots, \; 3p-1 \\
\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \; \ldots\ldots, \\
(q-1)p, & (q-1)p+1, & (q-1)p+2, & \ldots, & (q-1)p+k, & \ldots, \; qp-1
\end{array}$$

Chaque ligne contient p termes d'une progression arithmétique de raison 1, parmi lesquels $\varphi(p)$ sont premiers avec p et $\psi(p)$ ont avec p un diviseur commun.

Chaque colonne contient q termes d'une progression arithmétique dont la raison p est un nombre premier avec q; parmi ces termes, il y en a donc $\varphi(q)$ premiers avec q et $\psi(q)$ ayant avec q un diviseur commun.

Mais, en outre, si la colonne considérée commence par un nombre k, non premier avec p, tous les termes de cette colonne jouiront de la même propriété. Il y a évidemment $\psi(p)$ colonnes dans ce cas.

Si nous les enlevons par la pensée, nous avons donc $q\,\psi(p)$ nombres non premiers avec p, et il nous reste $\varphi(p)$ colonnes dans chacune desquelles il y a $\varphi(q)$ termes premiers avec q, et par conséquent avec $m=pq$, puisque tous les nombres non premiers avec p n'existent plus. Le nombre total des nombres premiers avec m ou $\varphi(m)$ est donc $\varphi(p)\,\varphi(q)$.

Quant aux nombres non premiers avec q, il y en a $\psi(q)$ dans chacune des $\varphi(p)$ colonnes, et par suite en tout $\varphi(p)\,\psi(q)$.

Reprenons maintenant les $\psi(p)$ colonnes que nous avions enlevées et qui ne renferment que des nombres non premiers avec p. Chacune d'elles contient toujours $\varphi(q)$ nombres premiers avec q et $\psi(q)$ admettant avec q un diviseur commun. Donc, il y a

$\varphi(q).\psi(p)$ termes premiers avec q, mais pas avec p, et $\psi(p).\psi(q)$ qui ne sont premiers, ni avec p ni avec q.

En résumé, nous avons le décompte suivant, qui classe d'une façon complète les pq nombres $0, 1, \ldots, m-1$:

A	Nombres premiers avec m....................	$\varphi(p)\varphi(q)$
B	Nombres premiers avec p, mais pas avec q....	$\varphi(p)\psi(q)$
C	Nombres premiers avec q, mais pas avec p....	$\varphi(q)\psi(p)$
D	Nombres ayant des diviseurs communs avec p et q *à la fois*...........................	$\psi(p)\psi(q)$

La formule connue

$$\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q) \tag{1}$$

se trouve en même temps démontrée d'une façon générale.

Pour compléter cette théorie de l'indicateur, considérons maintenant un nombre $p^n = m$, le nombre p étant premier. Nous pouvons écrire les nombres $0, 1, 2, \ldots, m-1$ sur p^{n-1} lignes de p termes, comme il suit :

$$\begin{array}{ccccccc}
0, & 1, & 2, & \ldots, & k, & \ldots, & p-1, \\
p, & p+1, & p+2, & \ldots, & p+k, & \ldots, & 2p+1, \\
\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
(p^{n-1}-1)p, & (p^{n-1}-1)p+1, & (p^{n-1}-1)p+2, & \ldots, & (p^{n-1}-1)p+k, & \ldots, & (p^{n-1}-1)p+p-1=m-1
\end{array}$$

Dans chaque ligne, il y a $\varphi(p)$ termes premiers et $\psi(p)$ non premiers avec p. Donc

$$\varphi(p^n) = p^{n-1}\varphi(p) = p^{n-1}(p-1) = p^n\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

puisque $\varphi(p) = p-1$, le nombre p étant supposé premier.

On a en même temps $\psi(p^n) = p^{n-1}$, car $\psi(p) = 1$.

Si maintenant nous avons un nombre composé m quelconque, de la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, il nous est aisé d'obtenir son indicateur. En effet

$$\varphi(a^\alpha) = a^\alpha\left(1-\frac{1}{a}\right), \qquad \varphi(b^\beta) = b^\beta\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

et

$$\varphi(a^\alpha b^\beta) = a^\alpha b^\beta\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right),$$

en vertu de la formule (1) ci-dessus.

Or $\varphi(c^\gamma) = c^\gamma\left(1 - \frac{1}{c}\right)$. Donc, toujours en vertu de la même formule,

$$\varphi(a^\alpha b^\beta c^\gamma) = a^\alpha b^\beta c^\gamma\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right),$$

et, en continuant de la même manière,

$$(2) \qquad \varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\cdots,$$

formule classique bien connue.

On remarquera que la démonstration concernant le nombre p^n s'applique aussi bien lorsque p n'est pas premier, et donne les formules

$$\varphi(p^n) = p^{n-1}\varphi(p), \qquad \psi(p^n) = p^{n-1}\psi(p).$$

Directions d'un espace à deux dimensions de module composé.

60. Considérons un espace à deux dimensions de module $m = pq$ sans faire quant à présent aucune hypothèse sur la nature des nombres entiers p et q, qui sont seulement supposés premiers entre eux.

Cet espace est représentable par un carré de p^2q^2 cases. Si nous prenons sur cet espace les directions ordinaires des x et des y, chaque case est spécifiée par ses deux coordonnées a, b.

En joignant l'origine à la case en question, il semble qu'on obtient ainsi une direction caractérisée par le symbole $((m))(ax + by)$. Mais il y a une distinction capitale à établir.

Nous devons en effet former les expressions correspondantes $((m))a$ et $((m))b$, ou

$$\begin{array}{llllll} 1a, & 2a, & \ldots, & ka, & \ldots, & (m-1)a \\ 1b, & 2b, & \ldots, & kb, & \ldots, & (m-1)b. \end{array}$$

Si a et b sont premiers avec m, ces deux suites représentent des marches parfaites sur les x et les y ; on aura donc des abscisses et des ordonnées toutes différentes les unes des autres, et la direction considérée passera par m points différents de l'espace de module m.

Si l'un de ces nombres, a par exemple, est premier avec m, et que b ne le soit pas, on n'obtiendra que certaines ordonnées, et non pas toutes; mais, toutes les abscisses étant différentes, on aura encore m points différents.

Si a a un facteur commun avec p seulement, et b un facteur commun avec q seulement, on n'aura que certaines abscisses et certaines ordonnées. Cependant la direction passera encore par m points distincts. En effet, s'il en était autrement, on aurait, en donnant à $((m))$ deux valeurs h et k :

$$h(ax + by) = k(ax + by),$$

d'où

$$ha = ka, \quad hb = kb,$$

c'est-à-dire que $(h - k)a$, $(h - k)b$ devraient être séparément des multiples du module $m = pq$, d'où il résulte qu'il en serait de même pour la différence $(h - k)(a - b)$. Mais a, b, m n'ayant aucun facteur commun possible d'après nos hypothèses, et $h - k$ étant inférieur à m, on voit que cela ne se peut.

Enfin, si a et b ont un facteur commun avec p, ou avec q, ou avec p et q à la fois, si nous appelons δ ce facteur, et si nous posons $m = \delta\mu$, $a = \delta\alpha$, $b = \delta\beta$, la direction

$$((m))(ax + by) = ((m))(\alpha x + \beta y)\delta$$

arrivera évidemment au zéro après une marche de μ pas, et par conséquent ne rencontrera jamais que μ points différents de l'espace.

Une telle direction sera dite une direction *imparfaite*.

Une direction qui rencontre au contraire m points distincts est une *direction parfaite*.

Ce sont surtout les directions parfaites que nous aurons à examiner au point de vue des propriétés magiques. Cependant, il est nécessaire d'introduire ici une notion importante : c'est celle des *lignes géométriques*. Sur la figure qui sert de représentation à l'espace tout entier, une ligne *arithmétique* de direction imparfaite ne rencontre qu'un sous-multiple du nombre m des cases qui composent le module; mais cependant la ligne graphique ou géométrique passe par les centres d'autres cases, et c'est à cause du pas duquel on marche qu'on ne peut atteindre celles-ci. En partant comme origine de l'une de ces cases, et marchant encore du même pas, on aura une nouvelle ligne de direction imparfaite, comprenant encore le même nombre de points; et répétant la même chose autant que faire se pourra, on obtiendra ainsi m cases. Une ligne géométrique, dans ce cas, sera donc la superposition d'un certain nombre de lignes arithmétiques et comprendra toujours un nombre de points égal au module. On arrivera donc à pouvoir vérifier en fait sur les carrés certaines propriétés magiques suivant des directions imparfaites.

Nous devons du reste remarquer que graphiquement une direction imparfaite est toujours superposée à une direction parfaite. Si $ax + by$ représente en effet une direction imparfaite, c'est que a et b ont un certain facteur commun δ avec le module. En divisant a et b par δ, on voit que la direction équivaut à $\delta(a'x + b'y)$ et que $a'x + b'y$ est une direction parfaite. L'imperfection ne résulte que de la nature du pas, et non de la direction graphique.

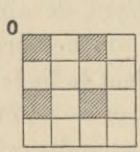
La ligne géométrique dont nous avons parlé tout à l'heure se superposera toujours avec la ligne de direction parfaite $a'x + b'y$.

61. Si nous considérons les p^2q^2 cases de notre espace, les deux coordonnées de l'une d'elles peuvent avoir un *même* facteur commun avec $m = pq$. Dans ce cas, la direction ayant pour premier pas l'intervalle entre l'origine et cette case serait imparfaite. Dans tous les autres cas, la direction sera parfaite.

Nous appellerons *cases anomales* toutes celles de l'espace qui donnent ainsi naissance à des directions imparfaites.

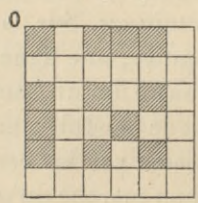
Avant de pousser plus loin cette étude, donnons ci-dessous, pour les modules 4, 6, 15, l'indication des cases anomales, que nous avons ombrées sur les figures relatives à ces trois exemples.

Fig. 13.



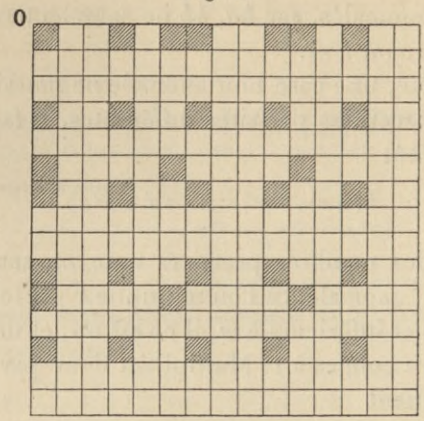
Mod 4.

Fig. 14.



Mod 6.

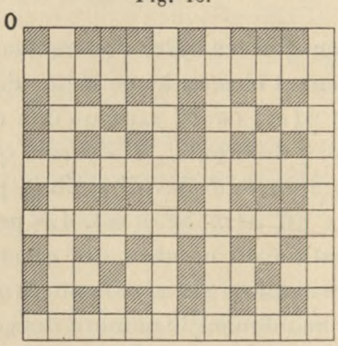
Fig. 15.



Mod 15.

Donnons encore l'exemple suivant, relatif au module 12 :

Fig. 16.



62. Nous pouvons maintenant aborder le problème ayant pour but de déterminer le nombre des directions parfaites. Si l'on joint l'origine à une case non anomale quelconque, on a évidemment une direction parfaite. Mais il faudrait bien se garder de croire que le nombre des directions soit celui des cases non anomales, car plusieurs d'entre elles appartiennent à une même direction.

Si a, b sont les coordonnées d'une case non anomale, et si nous formons toutes les expressions $k(ax+by)$, k représentant l'un quelconque des $\varphi(m)$ nombres premiers avec m et inférieurs à m, nous aurons, en donnant à k toutes ses valeurs possibles, des cases de coordonnées ka, kb rencontrées par cette direction. Ce seront des cases non anomales, car ka, kb ne sauraient avoir un facteur commun appartenant à m.

D'un autre côté, une case non anomale ne saurait appartenir à la fois à deux directions parfaites différentes. Il faudrait en effet pour cela qu'on eût

$$k(ax + by) = k'(a'x + b'y).$$

k et k' sont des nombres premiers avec m, sans quoi la case considérée serait anomale. Si l'on multiplie k par tous les nombres premiers avec m et inférieurs à m, il en est un, et un seule, k_1, qui donne un produit congru à 1. Multipliant donc par k_1 la relation ci-dessus, on obtient

$$ax + by = k_1 k'(a'x + b'y) = \mathrm{K}(a'x + b'y).$$

K étant aussi un nombre premier avec m, on voit que les deux directions $ax + by$, $a'x + b'y$ n'en font qu'une, ce qui démontre la propriété.

Nous voyons donc que les cases non anomales se présenteront par groupes appartenant chacun à une même direction, et chaque groupe comprenant $\varphi(m)$ cases, sans qu'une case puisse appartenir à deux groupes différents. Il s'ensuit que, si nous appelons $\Delta(m)$ le nombre cherché des directions parfaites, celui des cases non anomales est $\Delta(m) \times \varphi(m)$. Le problème se ramène ainsi à la détermination du nombre des cases non anomales; il suffira de diviser ce nombre par $\varphi(m)$ pour avoir $\Delta(m)$.

Pour déterminer maintenant le nombre des cases non anomales, considérons le module m comme décomposé d'une façon quelconque en deux facteurs p, q, premiers entre eux, et reprenons la classification du n° 59 qui divise en quatre catégories, (A), (B), (C), (D), les nombres 0, 1, 2, ..., $m - 1$. Appelons A, B, C, D les nombres de termes appartenant à chaque catégorie et formons le carré $(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D})^2$ ou

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2 + 2\mathrm{AB} + 2\mathrm{AC} + 2\mathrm{AD} + 2\mathrm{BC} + 2\mathrm{BD} + 2\mathrm{CD}.$$

On voit immédiatement que A^2 représente le nombre des cases dont les deux coordonnées sont des nombres premiers avec m; B^2 celui des cases dont les deux coordonnées sont des nombres ayant un facteur commun avec p, mais pas avec q, et ainsi des autres termes; par exemple, $2\mathrm{AD}$ est le nombre des cases dont une coordonnée est un nombre premier avec m et dont l'autre coordonnée admet un facteur commun avec p et q à la fois.

Par conséquent, on aura le nombre des cases non anomales, en supprimant dans l'expression précédente les termes $\mathrm{B}^2, \mathrm{C}^2, \mathrm{D}^2$, $2\mathrm{BD}$, $2\mathrm{CD}$, ce qui donne

$$\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{AB} + 2\mathrm{AC} + 2\mathrm{AD} + 2\mathrm{BC}.$$

Pour faire le calcul de ce nombre nous devons remplacer A, B, C, D par leurs expressions données au n° 59. Pour abréger l'écriture nous poserons

$$\varphi(p) = \varphi_1, \qquad \varphi(q) = \varphi_2, \qquad \psi(p) = \psi_1, \qquad \psi(q) = \psi_2.$$

Nous avons donc

$$\varphi_1^2\varphi_2^2 + 2\varphi_1^2\varphi_2\psi_2 + 2\varphi_1\varphi_2^2\psi_1 + 2\varphi_1\varphi_2\psi_1\psi_2 + 2\varphi_1\varphi_2\psi_1\psi_2.$$

Cette expression est divisible par

$$\varphi_1\varphi_2 = \varphi(p)\varphi(q) = \varphi(m).$$

Le quotient sera donc justement

$$\begin{aligned}\Delta(m) &= \varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\psi_2 + 2\varphi_2\psi_1 + 4\psi_1\psi_2 \\ &= (\varphi_1 + 2\psi_1)(\varphi_2 + 2\psi_2) \ = (\varphi(p) + 2\psi(p))(\varphi(q) + 2\psi(q)) \\ &= (p + \psi(p))(q + \psi(q)) = pq\left(1 + \frac{\psi(p)}{p}\right)\left(1 + \frac{\psi(q)}{q}\right).\end{aligned}$$

En suivant pas à pas la marche du n° 59, et déterminant directement le nombre des directions pour le cas d'un module de la forme p^n, chose facile, ce dont nous laissons le soin au lecteur, nous avons, en décomposant m en ses facteurs premiers sous la forme $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$:

$$\Delta(m) = m\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)\cdots,$$

expression remarquable, qui mérite d'être rapprochée de la formule (2) *du n°* 58, *donnant l'indicateur.*

Le nombre $\Delta(m)\varphi(m)$ des cases non anomales est

$$m^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)\left(1 - \frac{1}{c^2}\right)\cdots,$$

ce qui permet d'écrire encore $\Delta(m)$ sous cette forme nouvelle et bien symétrique

$$\Delta(m) = \frac{m^2\left(1-\frac{1}{a^3}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\cdots}{\varphi(m)}.$$

Une remarque intéressante à faire, c'est que, si la fonction *arithmétique* de m qui donne l'indicateur est mise sous la forme d'une fonction *algébrique*

$$F(a, b, c, \ldots)$$

des divers facteurs premiers de m, le nombre des cases non anomales est donné par

$$F(a^2, b^2, c^2, \ldots),$$

et, par conséquent, celui des directions par

$$\frac{F(a^2, b^2, c^2, \ldots)}{F(a, b, c, \ldots)}.$$

Si le module ne contient que des facteurs premiers a, b, c, ... à la première puissance, les formules ci-dessus deviennent simplement

$$\Delta(m) = (a+1)(b+1)(c+1)\ldots,$$
$$\varphi(m) = (a-1)(b-1)(c-1)\ldots.$$

Nous donnons ci-dessous le Tableau des indicateurs $\varphi(m)$ et des nombres de directions $\Delta(m)$ pour quelques modules composés, parmi lesquels nous pourrons avoir à étudier plus tard des exemples numériques :

m.	$\varphi(m)$.	$\Delta(m)$.
4	2	6
6	2	12
8	4	12
9	6	12
10	4	18
12	4	24
14	6	24
15	8	24
16	8	24
18	6	36
20	8	36

m.	$\varphi(m)$.	$\Delta(m)$.
21	12	32
22	10	36
24	8	48
25	20	30
26	12	42
27	18	36
28	12	48
30	8	72
32	16	48
33	20	48
34	16	54
35	24	48

Des transformations.

63. Si nous avons un espace modulaire à deux dimensions dont chaque case ait son individualité propre, ou, ce qui revient au même, porte un objet déterminé, on peut imaginer que ces cases (ou ces objets) viennent à être rangées dans un autre ordre de manière à former un nouvel espace de même module. Nous dirons alors qu'il a subi une *transformation*. Il y a nécessairement $(m^2)! - 1$ transformations possibles d'un espace donné, puisque $(m^2)!$ est le nombre total des espaces possibles de module m.

Si, x et y étant les directions des axes, la case dont les coordonnées sont a, b dans ce système x, y doit avoir pour nouvelles coordonnées α, β après la transformation; et si, de plus, on a les équations ou plutôt les congruences

$$\alpha = F(a, b), \qquad \beta = F_1(a, b),$$

ces relations exprimeront la transformation dont il s'agit. En les résolvant par rapport à a et b, ce qui donnerait

$$a = f(\alpha, \beta), \qquad b = f_1(\alpha, \beta),$$

on exprimerait la transformation inverse, permettant de revenir du second espace au premier.

Une transformation est *complète* lorsque chaque case du premier espace a pour transformée une case et une seule du second, et inversement. Les transformations complètes sont les seules qui puissent avoir pour nous une utilité, au point de vue de l'étude que nous poursuivons ici.

Il est donc très important de rechercher à quelles conditions nous pouvons opérer une transformation complète d'un espace à deux dimensions de module composé. D'abord, toutes les permutations arbitraires de lignes et de colonnes nous donnent évidemment des transformations complètes. Si ces permutations sont désordonnées, en général elles ne conduiront à rien. Si on les effectue au contraire avec une certaine régularité, en suivant des *lois*, nous aurons là un instrument précieux de recherche, et qui pourra souvent être utilisé.

En dehors de ces permutations, les seules transformations utiles seront les transformations en quinconces, puisqu'elles seules s'expriment par des fonctions linéaires, et permettent de revenir réciproquement du second espace au premier par des fonctions qui, elles aussi, soient linéaires. Prenons donc une telle transformation représentée par les formules

$$1\xi = ax + by, \qquad 1\eta = a'x + b'y.$$

On aura

$$\alpha\xi + \beta\eta = (\alpha a + \beta a')x + (\alpha b + \beta b')y,$$

et, par conséquent, à la case de coordonnées α, β dans le nouveau carré correspond celle qui, dans le carré primitif, avait pour coordonnées

$$\alpha a + \beta a', \qquad \alpha b + \beta b',$$

à des multiples près du module m.

Pour que la transformation soit complète, il faut que deux cases $\alpha\xi + \beta\eta$ et $\alpha'\xi + \beta'\eta$ ne correspondent pas à une même case du premier carré. En d'autres termes, la condition est que les deux congruences

$$(\alpha - \alpha')a + (\beta - \beta')a' \equiv 0,$$
$$(\alpha - \alpha')b + (\beta - \beta')b' \equiv 0$$

ne puissent avoir lieu simultanément, sauf lorsque $\alpha \equiv \alpha'$, $\beta \equiv \beta'$.

En multipliant la première par b' et la seconde par a', elles nous donnent par soustraction

$$(\alpha - \alpha')(ab' - ba') \equiv 0.$$

Mais $\alpha - \alpha'$, pouvant passer par toutes les valeurs inférieures au module $m = pq$, prendra en particulier celle d'un diviseur d de ce module. Si alors $ab' - ba'$ contient en facteur le quotient $\frac{m}{b}$, la congruence ci-dessus sera vérifiée, et l'on n'aura par conséquent aucune garantie que la transformation sera complète. Pour qu'elle le soit, il faut donc que $ab' - ba'$ soit premier avec le module; en d'autres termes, les deux directions $ax + by$, $a'x + b'y$ doivent être distinctes, non seulement dans le carré de module m, mais aussi dans tous les carrés ayant pour modules des facteurs de m.

Il faut évidemment aussi que chacune de ces directions soit parfaite dans le carré de module m, sans quoi on n'aurait pas m cases différentes suivant les axes des ξ et des η.

Sous cette double restriction, nous pourrons effectuer la transformation en quinconce d'un carré de module composé. Mais on voit tout de suite combien cette possibilité se trouvera réduite dans certains cas. Par exemple, elle pourra disparaître dans le cas des modules pairs, puisqu'un carré de 2 n'admet que trois directions, y compris les axes.

De toutes façons, avant d'effectuer une transformation en quinconce, il faudra toujours commencer par s'assurer que les conditions indiquées ci-dessus sont bien remplies.

Lorsqu'on pourra en user, ces transformations seront précieuses, car elles présentent une propriété remarquable entre toutes : c'est qu'une direction se transforme toujours en une direction et en une seule. De telle sorte que toutes les propriétés particulières qu'on pourra vérifier sur une direction de l'un des espaces se retrouveront *identiquement* sur l'autre. *Il faudra les lire d'une autre manière, mais voilà tout.*

Pour plus de simplicité dans les calculs, nous avons toujours supposé que dans les transformations en quinconce nous conservons la même origine; mais il est bien clair que cela ne particularise en rien, puisque, par une simple permutation tournante des colonnes, puis des lignes, on peut prendre pour origine telle case que l'on veut.

Une remarque s'impose ici, bien qu'elle soit d'une simplicité telle que nous en demandons pardon au lecteur. Si un espace arithmétique porte sur chacune de ses cases un *nombre* (et non plus seulement un objet quelconque) différent d'une case à une autre, et si le nombre A porté par une case est décomposable en une somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; si l'on forme en outre n espaces portant chacun, dans la même case, les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$; il suffira de superposer par la pensée tous ces espaces les uns sur les autres, c'est-à-dire d'additionner les nombres contenus dans les cases homologues, pour reconstituer l'espace donné.

Il en résulte que, si à tous les espaces (E_1), (E_2), ... nous avons fait subir séparément *une même* transformation, le résultat de l'addition donnera l'espace d'où l'on est parti, transformé suivant la même loi.

On reconnaît là le principe qui nous a servi dans la théorie des abaques pour les modules premiers, et dont nous aurons encore souvent à faire usage.

Nous bornerons là ces considérations d'ordre général sur les transformations. Elles se préciseront plus complètement sur les exemples numériques que nous pourrons rencontrer.

Extension aux espaces à plus de deux dimensions.

64. Nous voudrions, d'une façon aussi sommaire que possible, indiquer maintenant comment les notions précédentes peuvent s'appliquer aux espaces à plus de deux dimensions. Si l'on reprend ce qui a été dit au n° 60, en appliquant d'abord ces principes à l'espace à trois dimensions, on verra qu'il faut, là encore, établir une distinction entre les directions parfaites et les directions apparentes, mais imparfaites, c'est-à-dire qui ne contiennent pas m points, m étant le module.

Pour qu'une direction $((m))(ax + by + cz)$ soit parfaite, il faut que les trois coordonnées a, b, c n'admettent pas à la fois un même facteur commun avec m. Les cases dont les coordonnées admettent en commun avec m un facteur sont les cases anomales. Les autres sont non anomales.

Chaque direction parfaite rencontre $\varphi(m)$ cases non anomales; et le nombre des directions est égal par conséquent à celui des cases non anomales divisé par $\varphi(m)$.

Tout cela s'étend immédiatement à un espace d'un nombre de dimensions quelconque.

Pour calculer, dans le cas de trois dimensions, le nombre des cases non anomales qui doit donner celui des directions, on devra s'y prendre comme au n° 62, mais en formant le cube, et non plus le carré, de $A+B+C+D$. Dans le développement de ce cube, il faudra supprimer les termes en B^3, C^3, D^3, B^2D, C^2D, BD^2, CD^2. Il reste ainsi

$$A^3+3A^2(B+C+D)+3A(B+C+D)^2+3BC(B+C)+6BCD.$$

En remplaçant A, B, C, D par leurs valeurs du n° 59, un calcul un peu long, mais facile en somme, permet de reconnaître que cette expression peut prendre la forme

$$m^3\left(1-\frac{\psi^3(p)}{p^3}\right)\left(1-\frac{\psi^3(q)}{q^3}\right)$$

et que le nombre des directions parfaites $\Delta(m)$ peut en conséquence s'écrire

$$\Delta(m)=\frac{m^3\left(1-\frac{1}{a^3}\right)\left(1-\frac{1}{b^3}\right)\left(1-\frac{1}{c^3}\right)\cdots}{\varphi(m)}$$

ou encore

$$\Delta(m)=m^2\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}\right)\left(1+\frac{1}{c}+\frac{1}{c^2}\right)\cdots,$$

a, b, c, ... étant les facteurs premiers de m.

L'induction et l'analogie conduisent à deviner que pour un espace à n dimensions on aurait

$$\Delta(m)\varphi(m)=m^n\left(1-\frac{1}{a^n}\right)\left(1-\frac{1}{b^n}\right)\left(1-\frac{1}{c^n}\right)\cdots,$$

mais nous n'avons pas trouvé de méthode simple pour abréger les calculs, lesquels, au delà du cas de trois dimensions, deviendraient interminables.

Les considérations sur les transformations contenues dans le n° 63 s'étendent avec une grande simplicité aux espaces quelconques. Il n'y a lieu toujours, bien entendu, que de considérer les transformations complètes, dans lesquelles toutes les cases se transforment, une case ayant toujours une transformée, et une seule, et réciproquement.

Les transformations en quinconces, ou linéaires, se feront toujours par les formules analogues à $1\xi = ax + by$, $1\eta = a'x + a'y$, et devront être entourées de précautions pareilles à celles que nous avons indiquées. Nous ferons seulement remarquer, en laissant au lecteur, s'il le désire, le soin de la démonstration, que pour s'assurer que n directions

$$a_1 x + b_1 y + \ldots, \qquad a_2 x + b_2 y + \ldots, \qquad \ldots$$

sont distinctes et irréductibles, c'est-à-dire que plusieurs directions ne sont pas comprises dans un même espace d'ordre inférieur à n, il faut examiner le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}$$

et vérifier qu'il n'est pas multiple du module m, non plus qu'aucun de ses mineurs. Pour qu'elles soient distinctes dans tout espace dont le module est un facteur de m, il faut en outre que ce déterminant soit premier avec m.

Quant aux permutations suivant les directions des x, des y, des z, ..., elles se feront par des principes analogues à ceux que nous avons exposés, et donneront lieu à autant de transformations.

Dans un cube, par exemple, on permutera les tranches, dans un espace à quatre dimensions, les espaces à trois dimensions, et ainsi de suite.

CHAPITRE VII.

ESPACES HYPERMAGIQUES DE MODULE pq.

Méthodes générales pour un espace à deux dimensions.

65. Nous commencerons par examiner les espaces à deux dimensions seulement, dont le module m est le produit de deux facteurs premiers p, q, différents l'un de l'autre.

La première idée qui se présente à l'esprit est celle qui consiste, par analogie avec ce que nous avons fait pour les modules premiers, à écrire les m premiers nombres sur une ligne, les m suivants sur la ligne suivante, et ainsi de suite, de manière à former un carré, à sa position fondamentale principale, qui contienne les m^2 premiers nombres $0, 1, 2, \ldots, m^2 - 1$.

Comme exemple très simple, bien qu'il ne se prête pas aux applications à cause du petit nombre des directions qu'il présente, prenons le carré de $6 = 2.3$.

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35

ou, en écrivant les nombres dans le système de base 6,

00	01	02	03	04	05
10	11	12	13	14	15
20	21	22	23	24	25
30	31	32	33	34	35
40	41	42	43	44	45
50	51	52	53	54	55

Ce carré peut se décomposer suivant les deux abaques

$$(A_1)\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(A_0)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

et, au premier abord, faute d'une étude suffisante, on pourrait le croire hypermagique aussi bien que si le module était premier.

Il est bien magique en un certain sens, mais il n'a pas le maximum de magie, par une raison très simple. Marcher sur l'abaque (A_1) suivant une direction parfaite quelconque, autre que la direction d'invariation des x, et représentée par $((6))\,(ax+by)$ revient identiquement à marcher du pas b sur la direction des y, c'est-à-dire dans un espace à une dimension. Or, si b est premier avec 6, la marche dont il s'agit sera parfaite et, par conséquent, magique. Mais si b n'est pas premier avec 6, on ne rencontrera qu'une partie des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, et, par conséquent, la magie disparaîtra. On peut dire la même chose de l'abaque (A_0) et de a. Donc, pour qu'une direction caractérisée par $ax+by$ soit magique, il faut, non seulement qu'elle soit parfaite, mais en outre que les coefficients a et b, isolément, soient premiers avec le module.

Cela restreint singulièrement le nombre des directions magiques. Dans l'exemple choisi, c'est-à-dire pour le module 6, nous avons vu qu'il y a 12 directions parfaites, et les directions magiques qui subsistent, en tenant compte de ce que nous venons de dire, se réduisent à deux, qui sont $((6))(1x+1y)$ et $((6))(5x+1y)$.

Cela suffit à montrer combien pourront se restreindre les considérations applicables aux modules premiers, et à quel point il serait dangereux de s'en rapporter trop hâtivement à une induction faite à la légère.

Ajoutons que, dans les transformations en quinconce qui nous ont constamment servi, et dont nous pourrons à l'occasion profiter encore, de nouvelles restrictions s'imposeront, puisqu'il faudra nous entourer de toutes les précautions signalées au Chapitre précédent.

Malgré cela, il n'en est pas moins utile et intéressant d'étudier certaines méthodes générales d'une application constante, et surtout d'établir les principes essentiels qui servent de base à ces méthodes. Dans plusieurs d'entre elles, la position fondamentale principale jouera un rôle important, et il était bon d'en rappeler tout d'abord la notion.

Au fond, toute disposition offrant des propriétés magiques à un degré quelconque peut toujours être considérée comme une certaine transformation de la position fondamentale, obtenue, soit par des permutations convenables de lignes et de colonnes, soit par des déformations en quinconce, soit par des opérations plus ou moins artificielles, mais effectuées toujours, cependant, d'une façon ordonnée et méthodique.

Une autre idée, utilisée précédemment, et qu'on retrouvera aussi, est celle de la décomposition de chaque élément d'un carré en éléments plus simples, au moyen des systèmes de numération à bases multiples. C'est celle des abaques, convenablement étendue, comme le comporte la nature même du sujet, et sur laquelle nous n'allons pas tarder à revenir.

Quant à l'exemple du carré de 6, qui nous a servi plus haut à préciser quelques explications, nous ne saurions trop répéter qu'il n'offre aucun intérêt pratique au point de vue de la magie, et que nous ne l'avons utilisé que comme une sorte de schéma. Cela tient à ce que les facteurs 2 et 3 que contient 6 sont trop faibles pour permettre aux propriétés de se manifester. La règle devient alors l'exception, les anomalies s'accumulent; il se produit en grand, et avec plus de complication, ce qui avait lieu dans le cas des modules premiers pour $m = 2$. Malgré cela, pour certains cas analogues, on dispose de ressources particulières pouvant permettre d'atteindre un degré de magie qui semblait tout d'abord inespéré; ces procédés spéciaux seront exposés plus loin en temps et lieu, autant toutefois qu'ils auront un assez haut caractère de généralité, embrasseront un assez grand nombre de cas pour pouvoir être regardés comme méthodiques, au lieu d'être de simples artifices plus ou moins ingénieux.

Méthode des carrés mineurs.

66. Reprenons le module $m = pq$, où nous supposons p et q premiers.

Si $((m))(ax + by)$ est une direction quelconque, a et b étant inférieurs à m, nous pouvons poser, en divisant a et b par q,

$$a = a'q + \alpha, \qquad b = b'q + \beta,$$

et cette direction prendra la forme

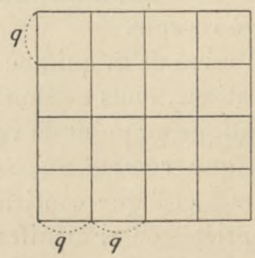
$$(1) \qquad ((m))[q(a'x + b'y) + \alpha x + \beta y].$$

a' et b' sont inférieurs à p, α et β inférieurs à q.

La direction considérée est donc, en quelque sorte, la *somme géométrique* ou la *composée* des deux directions $a'x + b'y$ et $\alpha x + \beta y$ dans des carrés de modules respectifs p et q, le déplacement relatif à la première composante étant multiplié par q.

Tout carré arithmétique de module pq peut être décomposé en p^2 carrés de module q, comme l'indique la figure.

Fig. 17.



Toute direction parfaite partant par exemple de la case origine aboutira à cette case après avoir franchi en tout pq points.

Elle aura donc parcouru p fois un carré *mineur* de module q; les cases qu'elle rencontre successivement sur son passage seront obtenues au moyen de la formule (1) en donnant successivement à $((m))$ les valeurs 0, 1, 2, ..., $m - 1$.

Actuellement, supposons que la figure tracée ci-dessus soit remplie, au centre de chacune de ses grandes cases, par l'un des éléments o, 1, ..., $p^2 - 1$ d'un carré arithmétique de module p. Puis, chacun de ces éléments étant multiplié par q^2, admettons qu'on ait superposé à chaque case un *même* carré arithmétique de module q et qu'on ajoute les deux résultats. Cela veut dire que a', b' étant les coordonnées du centre d'un des petits carrés qui composent le grand, et α, β celles d'une case comprise dans ce petit carré, nous aurons, en appelant

$u_{a',b'}$ l'élément placé dans le centre du petit carré;
$v_{\alpha,\beta}$ celui placé dans la case considérée;
$U_{a,b}$ celui placé dans la case correspondante du carré définitif.

$$U_{ab} = q^2 u_{a',b'} + v_{\alpha,\beta}. \tag{2}$$

Admettons maintenant que les directions $a'x + b'y$, et $\alpha x + \beta y$ soient magiques dans les carrés arithmétiques considérés, de modules p et q.

La direction (1), lorsque nous allons faire varier $((m))$ de o à $pq - 1 = m - 1$ rencontrera q fois chaque élément considéré du carré p, et p fois chaque élément du carré q, la suite

$$0, 1, 2, \ldots, pq - 1$$

pouvant s'écrire indifféremment

$$\underbrace{\underbrace{0, 1, 2, \ldots, p-1}, \quad \underbrace{p, \ldots, 2p-1}, \quad \ldots, \quad \underbrace{(q-1)p, \ldots, pq-1}}_{q \text{ groupes.}}$$

ou

$$\underbrace{\underbrace{0, 1, 2, \ldots, q-1}, \quad \underbrace{q, \ldots, 2q-1}, \quad \ldots, \quad \underbrace{(p-1)q, \ldots, pq-1}}_{p \text{ groupes.}}.$$

Par conséquent, la somme des éléments rencontrés, dans le carré de module p, sera

$$q \sum u = q \frac{p(p^2-1)}{2},$$

et, dans le carré de module q,

$$p \sum v = p \frac{q(q^2-1)}{2},$$

puisque nous supposons que les sommes Σu et Σv sont magiques, comme nous l'avons dit plus haut. D'après la formule (2), nous aurons donc

$$(3)\quad \begin{cases} \Sigma U = q^3 \dfrac{p(p^2-1)}{2} + p\dfrac{q(q^2-1)}{2} \\ \quad = \dfrac{pq}{2}(q^2(p^2-1)+q^2-1) = \dfrac{pq}{2}(p^2q^2-1) = \dfrac{m(m^2-1)}{2}, \end{cases}$$

c'est-à-dire la somme magique correspondant au carré de module pq.

Si donc nous formons deux carrés hypermagiques, l'un de module p, l'autre de module q, et si nous plaçons le second dans chacune des cases du premier, nous aurons, en opérant comme il a été dit plus haut, les éléments nécessaires pour obtenir le carré de module pq, d'après la formule (2), lequel sera hypermagique.

Il est important, pour la clarté, de bien remarquer que dans la formule (1) la première partie correspondant à $a'x+b'y$ contribue à fixer le carré de module q sur lequel on tombe, et que la seconde, correspondant à $\alpha x+\beta y$, fixe, dans ce carré, la position de la case. Chaque fois qu'on avance d'un pas, en faisant varier $((m))$, c'est donc exactement comme si l'on cheminait réellement suivant les directions $q(a'x+b'y)$ dans l'un des carrés et $\alpha x+\beta y$ dans l'autre.

Pour obtenir dans le carré résultant un maximum de magie, c'est-à-dire pour le rendre hypermagique, il est clair qu'il faudra rendre minimum le nombre des directions non magiques, ce qu'on obtiendra par la superposition des directions non magiques dans chacun des deux carrés, autant qu'elle sera possible.

Rien dans ce qui précède ne suppose premier l'un ou l'autre des facteurs pq : on admet seulement que l'on sait construire un carré hypermagique de module p ou de module q; mais la méthode permet d'obtenir les carrés hypermagiques de module pq, p et q étant premiers, puisque nous avons appris antérieurement comment on obtient les carrés hypermagiques de module premier. Partant de là, nous aurons donc la possibilité de construire les carrés de module pqr ou $(pq)r$, et ainsi de suite. Ainsi se trouve résolu le problème de la construction des carrés hypermagiques de module quelconque. Quant à présent, nous supposerons que ces divers facteurs premiers sont tous différents entre eux.

Un carré étant obtenu, on en pourra déduire d'autres par la transformation en quinconce, en effectuant cette transformation avec les précautions et sous les réserves mentionnées au Chapitre précédent. Comme les directions se transforment alors en directions, celles qui étaient magiques ne cesseront pas de l'être, et nous aurons simplement une déformation de la figure, une autre manière de la lire, exactement comme pour les modules premiers.

Si la méthode des carrés mineurs est avantageuse au point de vue de la construction, elle ne l'est pas moins pour l'analyse d'un carré déterminé. Le procédé à suivre consiste alors à diviser chaque élément par q^2, le module m étant pq, et à écrire les restes d'une part, dans les cases correspondantes d'un carré (A) et les quotients, dans celles d'un carré (B). On cherche alors à faire subir au carré (B) une transformation en quinconce ayant pour résultat de masser tous les 0 (au nombre de q^2) dans un même carré de module q, puis tous les 1, tous les 2, ..., tous les $(p^2 - 1)$ dans des carrés pareils.

Si le carré qu'on étudie est hypermagique et a été construit par la méthode des carrés mineurs, on obtiendra rapidement ce résultat, et l'on verra, dans la transformation correspondante effectuée sur le carré (A), les éléments identiques de celui-ci venir se placer dans les cases homologues de carrés mineurs de module q, lesquels seront tous pareils et présenteront une disposition hypermagique.

Méthode des bi-abaques.

67. Un espace de module $m = pq$, représenté par un carré p^2q^2 cases, étant donné, supposons cet espace rempli par q objets différents, dont chacun soit répété $\frac{m^2}{q}$ ou p^2q fois. Une telle figure sera un *bi-abaque de base* q. La figure obtenue par p objets différents, répétés chacun $\frac{m^2}{p}$ ou pq^2 fois, serait un bi-abaque de base p.

Lorsque, dans un bi-abaque de module m et de base q, on trace une ligne de direction parfaite, elle rencontrera m cases; si dans ces cases il se trouve que chacun des q objets différents se rencontre le même nombre de fois, c'est-à-dire p fois, la ligne sera dite magique. Une direction ne comprenant que des lignes magiques sera une direction magique.

Un bi-abaque dont toutes les directions sauf une sont magiques sera dit un *bi-abaque hypermagique*. Nous montrerons comment il est possible d'obtenir des bi-abaques de cette nature et quelle en est l'utilité. Il est bien certain en effet que des bi-abaques formés au hasard et sans aucun ordre ne sauraient nous servir à rien pour la formation d'espaces hypermagiques.

Au lieu de q objets quelconques, nous pouvons supposer que le bi-abaque à base q contienne les nombres $0, 1, 2, \ldots, q-1$ dont la somme est $\frac{(q-1)q}{2}$. La somme totale sera donc alors $p^2 q \frac{(q-1)q}{2} = m^2 \frac{q-1}{2}$. Celle des éléments rencontrés par une ligne magique sera $p \frac{(q-1)q}{2} = m \frac{q-1}{2}$; ce sera la somme magique du bi-abaque en question; et celle d'un bi-abaque de base p serait $m \frac{p-1}{2}$.

68. Supposons qu'un espace de module $pq = m$ soit rempli par les m^2 nombres $0, 1, 2, \ldots, m^2-1$, et divisons tous ses éléments par l'un des facteurs de m, q par exemple. Si nous inscrivons les restes de ces divisions dans les cases correspondantes nous obtiendrons nécessairement un bi-abaque de base q, puisqu'il y a parmi ces m^2 nombres $p^2 q$ multiples de q, autant de multiples de q, plus 1, etc. Le quotient de la division, forcément inférieur à $p^2 q$, pourra lui-même être divisé par l'un de ces facteurs, p par exemple, et les restes des nouvelles divisions ainsi opérées formeront, dans les cases correspondantes, un bi-abaque de base p. Divisant encore les quotients par p, on aurait de nouveau un bi-abaque de base p; enfin les quotients inférieurs à q formeraient eux-mêmes un bi-abaque de base q.

Nous aurions pu énoncer plus rapidement ce résultat en disant que, si nous écrivons chacun des nombres de l'espace de module pq dans le système de numération multiple (q, p, p, q) sous la forme $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, l'ensemble des nombres δ formera un bi-abaque de base q, celui des nombres γ un bi-abaque de base p, celui des nombres β un bi-abaque de base p, et celui des nombres α un bi-abaque de base q.

Il est clair que rien ne nous aurait empêché de prendre un autre ordre que celui (q, p, p, q). Et comme il y a six manières d'écrire les quatre facteurs, savoir

$$p, q, p, q, \quad p, p, q, q, \quad p, q, q, p,$$
$$q, p, q, p, \quad q, q, p, p, \quad q, p, p, q,$$

il en résulte qu'il y a aussi six manières de décomposer l'espace de module pq en quatre bi-abaques, lesquels, multipliés par des facteurs convenables et réunis ensuite par addition, reconstitueraient par leur bloc l'espace lui-même tel qu'il existe.

On pourrait dire, sous une forme symbolique, que les quatre bi-abaques (α), (β), (γ), (δ) sont les *chiffres* de cet espace, écrit dans un certain système de numération multiple, et exprimer ainsi cet espace, dans l'hypothèse de l'exemple indiqué, par la formule

$$p^2q(\alpha)+pq(\beta)+q(\gamma)+(\delta)$$

qui en indique la décomposition et la reconstruction d'une manière bien précise.

69. Une telle décomposition étant effectuée, si une ligne déterminée est magique à la fois dans chacun des bi-abaques composants, il est bien certain, et facile à vérifier, qu'elle donnera ainsi dans le bloc la somme magique, c'est-à-dire que ce sera une ligne magique de l'espace. Ce qui est vrai pour une ligne l'est aussi pour une direction. Et lorsque le maximum des directions magiques sera atteint pour chacun des bi-abaques, et qu'en outre on trouvera, s'il est possible, superposées les directions non magiques, l'espace sera hypermagique.

Inversement, si nous arrivons à former isolément des bi-abaques hypermagiques, et à les réunir ensuite en un bloc, nous aurons ainsi un espace hypermagique.

Mais il faut bien remarquer dans cette réunion des bi-abaques qu'un principe essentiel s'impose : CELUI DE LA NON-RÉPÉTITION D'ASSOCIATION, sans quoi l'on arriverait à retrouver deux fois le même nombre dans deux cases différentes, puisqu'il serait écrit avec *les mêmes chiffres* dans *le même système* de numération.

Il y aurait donc dans l'espace des nombres identiques et par conséquent d'autres nombres manqueraient.

Cette non-répétition d'association se traduit par ce fait que deux ensembles de cases homologues sur les bi-abaques ne peuvent jamais présenter les mêmes éléments. Mais il est clair que, si l'on considère deux ensembles de cette nature, on devra toujours pouvoir les choisir de telle sorte que tous leurs éléments correspondants, *sauf un seul*, soient identiques. Cela résulte de ce fait que parmi les m^2 nombres $0, 1, \ldots, m^2 - 1$, il y en a assurément deux qui s'écrivent de la même manière, à l'exception d'un seul chiffre, dans un système de numération multiple donné.

En somme, les principes fondamentaux qui commandent la construction d'un espace hypermagique par la méthode des bi-abaques sont les suivants :

1° Hypermagie individuelle des bi-abaques ;

2° Non-répétition d'association ;

3° Superposition la plus grande possible des lignes non magiques des bi-abaques.

70. Le lecteur a déjà remarqué que la méthode des carrés mineurs, exposée plus haut, rentre en réalité dans celle des bi-abaques, tout en offrant un très grand caractère de généralité. Si l'on remplit toutes les cases de chaque carré mineur avec l'élément correspondant du carré de module p, on a effectivement un bloc de deux bi-abaques de base p ; et si l'on répète sur tout le grand carré le carré mineur hypermagique de module q, on a un bloc de deux bi-abaques de base q.

Cette méthode des carrés mineurs va nous fournir immédiatement la preuve de la possibilité de réaliser les conditions exprimées au numéro précédent, c'est-à-dire de construire un carré hypermagique de module pq. Nous avons en effet établi les bases de cette méthode, d'une part sur l'emploi du système de numération de base multiple (p^2, q^2), ce qui garantit d'avance contre toute répétition possible d'association, et de l'autre sur l'hypermagie de chacun des carrés, sans aucune hypothèse sur les directions non magiques de chacun d'eux. *Il nous est donc possible de superposer ces deux directions non magiques,* que nous savons être au nombre de deux, et en procédant ainsi nous n'aurons également dans le résultat obtenu *que deux directions non magiques.*

Deux méthodes de formation des bi-abaques.

71. Parmi les méthodes permettant la formation des bi-abaques composants d'un espace de module pq, il en est deux surtout qui ont une assez grande généralité pour qu'il soit bon de les définir. Dans la première, que nous appellerons *méthode par carrés,* nous écrirons par exemple :

$$\underbrace{0\;0\;\ldots\;0}_{q \text{ fois}}\;\underbrace{1\;1\;\ldots\;1}_{q \text{ fois}}\;2\;\ldots\;\underbrace{(p-1)(p-1)\;\ldots\;(p-1)}_{q \text{ fois}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et nous formerons ainsi pq lignes pareilles, ce qui nous donnera un bi-abaque (A) de base p.

Écrivons maintenant

$$\underbrace{0\;1\;2\;\ldots\;(q-1)\quad 0\;1\;2\;\ldots\;(q-1)\quad\ldots\quad 0\;1\;2\;\ldots\;(q-1)}_{p \text{ fois}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et formons encore pq lignes pareilles, ce qui donne un bi-abaque (B) de base q.

Changeant dans (A) et dans (B) les lignes en colonnes (ou, ce qui revient au même, faisant tourner chaque figure autour de la diagonale $1x + 1y$), nous avons encore deux bi-abaques (A′), (B′).

Ces quatre bi-abaques peuvent servir à la composition de l'espace hypermagique, en en formant le bloc, ainsi que nous l'avons expliqué plus haut, après les avoir multipliés par des facteurs convenables. On pourra, sous une forme symbolique commode, dire que l'espace total s'écrit au moyen des *chiffres* (A) (B) (A′) (B′) dans un système de numération à base multiple, par exemple au moyen de la notation que nous avons indiquée, sous la forme

$$(\overset{p}{\mathrm{A}})(\overset{q}{\mathrm{B}})(\overset{p}{\mathrm{A}'})(\overset{q}{\mathrm{B}'}),$$

équivalente à

$$pq^2(\mathrm{A}) + pq(\mathrm{B}) + q(\mathrm{A}') + \mathrm{B}'.$$

On peut permuter comme on le voudra les quatre bi-abaques, mais à la condition de toujours surmonter chacun d'eux de la lettre qui représente sa base, sans quoi la formation n'aurait aucun sens et conduirait à de simples absurdités.

Dans la pratique, il pourra être avantageux de former des blocs partiels de bi-abaques, tels que $(\overset{p}{A'})(\overset{q}{B'})$, $(\overset{q}{B})(\overset{p}{A'})$, ... Ce sera surtout commode pour découvrir les véritables directions des identiques dans les bi-abaques composants.

72. Nous allons maintenant définir la *méthode par rectangles*, dont l'emploi est également très simple et facile à saisir.

Prenons la ligne

$$\underbrace{0\ 1\ 2\ \dots\ (p-1)}\quad \underbrace{0\ 1\ 2\ \dots\ (p-1)}\quad \underset{q \text{ fois}}{\dots}\quad \underbrace{0\ 1\ 2\ \dots\ (p-1)}$$

....

et répétons-la q fois, ce qui nous donnera un rectangle de base m et de hauteur q.

Actuellement, dans la suite

$$0\ 1\ 2\ \dots\ (p-1),$$

prenons une alternance de pas quelconque, que nous supposerons ici égal à 1, et formons successivement les $p-1$ permutations circulaires qui s'ensuivent, en partant des éléments que fournit cette alternance, savoir :

$$1\ 2\ \dots\ (p-1)\ 0,\quad 2\ 3\ \dots\ 0\ 1,\quad \dots\quad (p-1)\ 0\ 1\ \dots\ (p-2).$$

Avec chacune de ces permutations répétée q fois en ligne, nous formerons des rectangles analogues à celui que nous venons d'obtenir.

Tous ces p rectangles, placés successivement les uns au-dessous des autres, formeront un carré qui sera un bi-abaque p. Soit (A) ce bi-abaque.

Écrivons maintenant

$$\underbrace{0\ 1\ 2\ \dots\ (q-1)}\quad \underset{p \text{ fois}}{0\ 1\ 2\ \dots}\quad \underbrace{0\ 1\ 2\ \dots\ (q-1)};$$

formons un rectangle au moyen de p lignes pareilles, puis q nouveaux rectangles en remplaçant $0\ 1\ 2\ \dots\ (q-1)$ par les permutations circulaires résultant d'une alternance régulière quelconque. Ces rectangles formeront par leur ensemble, exactement comme plus haut, un bi-abaque (B) de base q. Si (A′) et (B′) sont les résultats obtenus par la rotation de (A) et de (B) autour de la diagonale, les quatre bi-abaques (A) (B) (A′) (B′) serviront à la composition de l'espace total, exactement comme au numéro précédent. Il est inutile d'entrer à ce sujet dans aucun détail.

73. Nous ne nous occuperons pas de l'étude détaillée de ces deux méthodes de construction, et de la recherche des directions d'invariation dans chacun des bi-abaques composants, parce que nous ne voulons pas allonger indéfiniment cette étude, et surtout parce qu'on pourrait sans doute imaginer encore d'autres procédés reposant sur les mêmes principes.

Il nous suffira de rappeler ici une proposition très simple, mais en même temps très féconde malgré sa simplicité, à savoir que *toute transformation effectuée sur les bi-abaques composants équivaut à une transformation pareille effectuée sur l'espace résultant.*

Il s'ensuit que si l'on arrive à transformer chacun des bi-abaques, soit par quinconce, soit par permutations, soit de toute autre manière, de façon à conserver à chacun d'eux ses propriétés magiques, l'espace total jouira toujours des mêmes propriétés.

On remarquera notamment, dans ces procédés de construction par la méthode des bi-abaques, qu'on peut faire arbitrairement permuter entre eux les groupes de colonnes, et dans chaque groupe qu'on peut faire permuter les colonnes, pourvu que la permutation effectuée dans chacun des groupes soit la même.

Une observation identique s'applique aux lignes et aux groupes de lignes.

74. Nous devons prévenir le lecteur que s'il cherchait à appliquer les procédés que nous venons d'indiquer à de petits nombres, comme 6 par exemple, il pourrait s'exposer à des mécomptes qui lui suggéreraient des doutes, et tomberait sur des impossibilités. Cela tient à la faible valeur des facteurs 2 et 3, qui engendrent d'innombrables anomalies. D'une part, en effet, dans un espace de module 2 ou de module 3, le nombre des directions possibles se réduit au point d'effacer les propriétés magiques, ainsi que nous l'avons déjà vu. D'un autre côté, le système de numération de base

2 ne permet de disposer que des chiffres 0 et 1, et jouit en conséquence de cette propriété bizarre que le plus petit de ses chiffres significatifs est égal au plus grand, puisqu'il n'y en a qu'un seul. Il s'ensuit qu'on ne peut parfois éviter certaines répétitions d'association qui cependant ne se produisent jamais dans les autres cas.

Il résulte de ces anomalies que les espaces dont le module contient le facteur premier 2, ou 3, à la première puissance seulement, ne présentent qu'un intérêt très secondaire en ce qui touche la magie, quand on leur applique les méthodes générales. Ils offrent seulement un intérêt de curiosité, et les problèmes auxquels ils peuvent donner matière ne sont abordables que par des procédés particuliers, sur lesquels nous donnerons plus tard seulement quelques indications très sommaires, comme la méthode des bordures, par exemple (1).

Pour le module $6 = 2 \times 3$, les anomalies s'accumulent.

Ce sont là des exemples frappants, et bien simples, de l'obstacle fondamental qu'opposent les anomalies dans la recherche de la raison des choses. C'est même une des principales causes de notre ignorance.

Dans tout cas anomal, une partie de la formule générale de composition reste sans effet apparent, de sorte que, dans les phénomènes anomaux, il reste des lacunes dont rien ne décèle l'existence. Tout phénomène non anomal, au contraire, contient l'expression *complète* de la loi générique correspondante ; c'est ce que j'ai appelé la *généralisation absolue du fait expérimental.* La traduction symbolique du phénomène est dans ce cas l'expression de la loi.

Ceci est un principe universel, qui s'applique a tout genre d'étude et de recherche ; *c'est en Physiologie peut-être qu'on en rencontre les exemples les plus éclatants.* Quand on parvient, dans une étude quelconque, a se procurer un cas sans anomalie, il suffit de le formuler pour avoir la loi générale.

Un autre grand principe est celui qu'on pourrait appeler de la *cache,* qui a pour but de parer, par un procédé d'abstraction quelconque, à la fusion et au mélange des impressions dans le mécanisme cérébral (ce mot *abstraction* étant pris dans son sens le plus général et pouvant avoir les significations les plus diverses).

---

(1) *Voir* Note I, à la fin du Volume.

Toute la théorie des espaces hypermagiques repose presque entièrement sur ces deux considérations fondamentales.

Par exemple, la théorie de l'Indicateur, telle que nous l'avons présentée, donne la raison des anomalies. Les tables de multiplication et de division congruentes pour les modules composés rendent les anomalies sensibles.

On pourrait dire, en principe, que l'anomalie résulte de l'annulation de l'un des paramètres qui entrent dans la composition de la formule générale.

On est souvent amené, pour n'y avoir pas regardé d'assez près, à prendre le cas anomal pour règle, ce qui est le contraire de la vérité.

C'est ainsi, par exemple, que pendant longtemps on a avancé de véritables énormités sur la question des imaginaires. On voulait *étendre* les règles des quantités réelles aux quantités imaginaires, alors que, dans l'échelle des quantités, le réel est un cas particulier (ou anomal) relativement à l'imaginaire.

Pour revenir aux questions de magie arithmétique, nous avons vu tout à l'heure que l'anomalie produit ses plus grands effets lorsque 2 et 3 figurent dans le module à la première puissance. Dans les carrés de module 4 ou de module 9, la diabolie peut déjà se manifester; cela résulte de la puissance des bi-abaques comme éléments de composition.

Composition et décomposition d'un espace.

75. Il nous suffira de peu de mots, après ce qui précède, pour montrer tout l'intérêt de la méthode des bi-abaques, soit pour la synthèse, soit pour l'analyse d'un espace hypermagique, ou plutôt d'un espace quelconque de module pq.

On formera un tel espace en construisant ses bi-abaques composants, conformément aux principes exposés.

La recherche des propriétés magiques à donner à chacun d'eux sera d'une simplicité relative extrême, en regard du même problème proposé sur l'ensemble.

Cette réduction a des éléments plus simples, cette abstraction qui permet d'examiner isolément chacun de ces éléments,

EN NÉGLIGEANT MOMENTANÉMENT TOUS LES AUTRES, CONSTITUENT L'UNE DES PLUS PUISSANTES MÉTHODES QUE LA PHILOSOPHIE PUISSE METTRE A LA DISPOSITION DE LA SCIENCE.

Quant à la *dissection,* si nous pouvons ainsi parler, d'un espace donné, dans le but de découvrir si cet espace présente ou non des propriétés magiques, elle se fera aussi assez facilement. Il n'y aura qu'à écrire chaque élément dans l'un des systèmes de numération à base multiple correspondant aux bases p, q, p, q prises dans un certain ordre, et à examiner les bi-abaques formés par les quatre chiffres successifs qui servent à cette écriture. Aussitôt que dans ces bi-abaques on verra apparaître un défaut de régularité, on pourra affirmer à coup sûr que l'ordre adopté pour les éléments p, q, p, q n'est pas le bon, c'est-à-dire que le carré hypermagique n'a pas été formé par une méthode s'appuyant sur cet ordre; ou bien que le carré ne présente pas les propriétés magiques qu'on soupçonnait.

S'il est magique, au contraire, à un degré plus ou moins considérable, et formé d'après le système qu'on essaye, on trouvera dans les bi-abaques composants un degré correspondant *de régularité, d'ordre, d'harmonie.* L'examen de chacun de ces bi-abaques donnera *la clef de l'énigme*, *la raison d'être des propriétés de l'ensemble,* et pourra par exemple révéler les lignes ou les directions non magiques.

Il va sans dire qu'à ces moyens viendront s'ajouter les transformations simples dont nous avons déjà parlé souvent, et tout particulièrement la transformation en quinconce dont l'usage sera des plus précieux.

Espaces diaboliques de module pq.

76. Parmi tous les caractères de l'hypermagie, la diabolie est celui qui présente le plus d'intérêt, à cause de la possibilité d'une vérification rapide, provenant de la netteté de la direction des diagonales.

La seule condition à remplir, pour qu'un carré de module pq devienne diabolique, c'est que les directions $0x + 1y$, $1x + 0y$, $1x + 1y$, $1x - 1y$ soient magiques. On y parviendra dès que l'on pourra disposer de six directions au moins, puisque nous devons toujours en avoir deux non magiques.

Il ne nous semble pas intéressant de nous en occuper plus longuement ici, les principes étant posés. On pourra vérifier plus loin les propriétés en question sur l'exemple du carré de module 35; parmi ceux de module pq, ce carré est d'ailleurs le plus petit qu'il soit intéressant d'étudier pour l'application des méthodes générales, puisque les facteurs 2 et 3 doivent être laissés de côté, en raison des anomalies qu'ils présentent.

Espaces à plus de deux dimensions.

77. On se rend aisément compte de la possibilité d'étendre les notions contenues dans le présent Chapitre, soit aux cubes, soit aux espaces supérieurs de module pq. La position fondamentale principale joue le même rôle important. Les transformations en quinconce sont possibles sous les mêmes réserves, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent se faire que sur des directions distinctes, irréductibles, et telles que le déterminant des formules donnant ces directions, base du quinconce, ne s'annule pas.

La méthode des carrés mineurs sera remplacée par celle des espaces mineurs de module q, ou p, ce qui équivaudra à la décomposition des éléments de l'espace à n dimensions écrits dans le système de numération (p^n, q^n) ou (q^n, p^n).

Il en sera de même de la méthode plus générale des bi-abaques à n dimensions, qui correspondent à l'écriture des nombres dans un système multiple ayant pour bases élémentaires

$$\underbrace{p,\ p,\ \ldots,}_{n \text{ fois.}}\ \underbrace{q,\ q,\ \ldots,}_{n \text{ fois.}}$$

dans un certain ordre.

Il fallait quatre bi-abaques pour la construction d'un carré; il en faudra $2n$ pour la construction de notre espace.

Les principes de magie des bi-abaques composants, de non-répétition d'association et de superposition des lignes d'identiques subsisteront en leur entier.

Le nombre des directions non magiques obligées sera n.

Il sera possible d'imaginer, notamment pour les cubes, des modes de formation des bi-abaques analogues à ceux que nous avons indiqués précédemment. Les transformations pourront s'opérer simultanément sur les bi-abaques composants et sur l'ensemble.

Les anomalies provenant des petits facteurs ne feront que s'accroître. La diabolie exigera des modules de plus en plus grands, ainsi que nous l'avons vu pour les modules premiers. Enfin les considérations concernant la composition et la décomposition d'un espace subsistent sans y rien modifier, du moins en théorie; car elles donneraient lieu, dans l'application, à des calculs extraordinairement longs et pénibles, tandis qu'ils se réduisent à une étendue beaucoup moindre lorsqu'il s'agit simplement de carrés.

Application au carré de 35.

78. Pour terminer le présent Chapitre, nous donnerons ici, à titre d'exemple, l'ensemble de quatre bi-abaques servant à la construction d'un carré hypermagique de module 35. Nous ne croyons pas utile de reproduire le bloc résultant, d'autant plus qu'on pourra le former comme on voudra par la permutation des éléments $(\overset{5}{A})(\overset{5}{B})(\overset{7}{C})(\overset{7}{D})$; le lecteur que cela intéresserait procédera facilement lui-même à ces diverses compositions. Nous nous bornerons, pour le module 35, à ce seul exemple, afin de ne pas étendre indéfiniment le nombre des figures, dont le seul but est de donner le plus de clarté possible à l'exposé des principes.

On remarquera qu'ici les bi-abaques sont obtenus au moyen de la méthode par carrés, mais cependant sans suivre exactement le procédé qui a été exposé plus haut, car, dans chaque bi-abaque, nous n'avons que des carrés mineurs identiques entre eux. C'est une preuve de plus des ressources qu'offrent les principes établis, lesquels peuvent s'introduire dans les applications d'une foule de manières différentes.

Bi-abaques du carré hypermagique de trente-cinq.

(A)

0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3
1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4
2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0
3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1
4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2
0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3
1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4
2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0
3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1
4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2
0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3
1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4
2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0
3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1
4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2
0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3
1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4
2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0
3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1
4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2
0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3
1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4
2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0
3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1
4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2
0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3
1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4
2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0
3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1
4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2
0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3
1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4
2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0
3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1
4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2

Bi-abaques du carré hypermagique de trente-cinq (suite).

(B)

0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2
1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3
2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4
3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0
4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1
0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2
1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3
2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4
3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0
4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1
0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2
1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3
2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4
3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0
4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1
0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2
1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3
2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4
3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0
4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1
0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2
1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3
2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4
3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0
4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1
0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2
1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3
2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4
3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0
4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1
0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2
1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3
2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4
3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0
4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0	3	1

Bi-abaques du carré hypermagique de trente-cinq (suite).

(C)

0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4
1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5
2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6
3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0
4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1
5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2
6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3
0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4
1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5
2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6
3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0
4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1
5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2
6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3
0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4
1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5
2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6
3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0
4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1
5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2
6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3
0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4
1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5
2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6
3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0
4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1
5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2
6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3
0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4
1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5
2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6
3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0
4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1
5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2
6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3

Bi-abaques du carré hypermagique de trente-cinq (suite).

(D)

0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3
1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4
2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5
3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6
4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0
5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1
6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2
0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3
1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4
2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5
3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6
4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0
5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1
6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2
0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3
1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4
2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5
3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6
4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0
5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1
6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2
0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3
1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4
2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5
3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6
4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0
5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1
6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2
0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3
1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4
2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5
3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6
4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0
5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1
6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2

La construction du carré de module 35 ci-dessus est basée au fond sur le principe de la non-répétition d'association dans les blocs d'abaques résultant de la répétition identique d'espaces premiers entre eux; nous appelons ainsi ceux dont les modules sont premiers entre eux.

Le développement complet de cette théorie assez importante dans le sujet qui nous occupe nous entraînerait beaucoup trop loin; nous nous contenterons d'en signaler au lecteur une des applications les plus importantes, et d'élucider par un exemple ce qu'il pourrait y avoir de confus dans l'expression trop concise de notre pensée.

Si l'on prend un carré de module 5 à sa position fondamentale, et qu'on le répète identiquement sept fois dans le sens des x et autant de fois dans celui des y, si ensuite on en fait autant pour un carré de module 7 que l'on répétera cinq fois, on formera ainsi deux abaques ou blocs d'abaques dont la superposition ne pourra donner lieu à aucune répétition d'association; le bloc total pourrait donc être appelé la position fondamentale du carré de module 35.

De cette position fondamentale, on pourra tirer ensuite une foule de transformations, en employant tous les procédés qui n'altèrent pas la magie. On voit immédiatement toute la simplicité que cela apporterait et dans la théorie et dans la pratique.

Ce principe s'applique d'ailleurs, sans qu'il soit besoin de plus amples explications, à un nombre quelconque de facteurs premiers entre eux, et à un nombre quelconque de dimensions; mais, comme il ne peut s'appliquer qu'à des résultats de facteurs premiers entre eux, il ne sera peut-être pas hors de propos de donner une démonstration rapide de la certitude absolue d'arriver dans tous les cas possibles à la non-répétition d'association, dans toute l'étendue d'un espace de module quelconque.

Pour cela, nous ferons appel à la méthode d'abstraction, qui nous montrera une fois de plus sa puissance.

Considérons un espace à n dimensions, de module

$$m = abcd\ldots,$$

ces nombres étant égaux ou inégaux, simples ou composés, peu importe.

Cet espace contient m^n cases toutes identiques. Dans ces cases plaçons a objets un nombre égal de fois, *en faisant absolument abstraction de leur situation ou position;* on aura des cases garnies d'objets identiques au nombre de $\frac{m^n}{a}\cdot$ Si sur ces cases on applique b objets différents en nombre égal, on obtiendra $\frac{m^n}{ab}$ cases contenant des associations identiques; en continuant ainsi jusqu'à épuisement de tous les facteurs de m^n, le nombre final des cases contenant des associations identiques se réduira à $\frac{m^n}{a^n b^n c^n \ldots} = 1$; c'est-à-dire qu'il n'y aura pas de répétition d'association.

C'est là d'ailleurs une méthode que l'on emploie constamment dans les théories mathématiques et même dans les recherches scientifiques de toute nature, mais *sans se rendre compte* EXPLICITEMENT du principe sur lequel elle repose, qui consiste dans *la faculté d'étudier isolément les considérations indépendantes les unes des autres qui entrent dans un complexe quelconque;* faculté qui nous permet d'attaquer et de résoudre avec facilité des questions qui au premier abord paraîtraient hors de notre portée.

Ces réflexions, qui pourraient paraître naïves dans des complexes très simples, le deviennent beaucoup moins à mesure que l'on s'élève de degrés en degrés sur l'échelle des abstractions, et, pour peu que l'enchevêtrement augmente par suite des implications, il n'y a plus que les cerveaux d'élite, faisant appel à toute la puissance de leur organisation cérébrale, qui puissent s'y reconnaître; c'est alors que l'on peut constater toute la puissance des méthodes basées sur un petit nombre de principes simples, nets et précis.

CHAPITRE VIII.

ESPACES HYPERMAGIQUES DE MODULE p^n.

Considérations générales.

79. Lorsque, dans le Chapitre précédent, nous avons étudié les espaces de module pq, nous avons supposé différents les facteurs premiers p et q. Mais si l'on se reporte à ce Chapitre, on verra que toutes les propositions établies, toutes les méthodes indiquées ne supposent en aucune façon, ni que les facteurs soient différents, ni même qu'ils soient premiers, ni premiers entre eux. La seule chose qui différera alors sera la nature de l'espace lui-même, et, par conséquent, le nombre des directions de l'espace considéré. Mais, sauf ce nombre de directions, tout s'appliquera. Nous aurons donc autant de méthodes pour former des espaces de module p^2 et pour analyser ces espaces. Celle des carrés mineurs, celle des bi-abaques pourront être appliquées, exactement dans les mêmes conditions. Mais du module p^2 nous pourrons passer au module $p^2 \times p$ ou p^3, et ainsi de suite.

Il n'y aurait donc rien de nouveau à dire sur ces espaces de module p^n, s'ils ne nous fournissaient l'occasion de justifier nos théories précédentes par la présentation de quelques exemples particuliers, qui en sont des applications, et s'ils ne nous permettaient, en outre, de résoudre quelques problèmes, en apparence impossibles par ces théories. Nous voulons faire allusion aux anomalies que produisent les facteurs 2 et 3, ainsi que nous l'avons déjà signalé.

Lorsque ces facteurs sont élevés au moins à la deuxième puissance, il devient possible, en prenant ces puissances comme modules, d'obtenir des carrés qui présentent un caractère de magie plus élevé que si 2 et 3 figuraient à la première puissance seulement.

C'est ainsi que nous obtenons des carrés diaboliques de modules 4 et 9, tandis qu'il est impossible d'en obtenir de module 6.

Cela résulte de l'emploi de certains procédés particuliers, ou de certaines méthodes spéciales, dont l'application ne dispense jamais cependant de se conformer aux principes généraux que nous avons établis.

Parmi ces méthodes, il en est une notamment, celle des quarts complémentaires, applicable aux modules 2^n, et plus généralement $2^n.p$, et sur laquelle il est bon de donner tout d'abord quelques rapides explications.

Méthode des quarts complémentaires.

80. Lorsqu'on a pour module un nombre multiple de 2, on peut diviser le carré modulaire correspondant en quatre carrés mineurs A, B, A', B'.

Fig. 18.

A	B
B'	A'

En appelant $2m$ le module, plaçons dans deux cases homologues des carrés mineurs diagonaux A et A' deux éléments dont la somme soit égale à $m - 1$; puis faisons-en autant pour les deux autres carrés mineurs B, B'. Nous aurons ainsi formé un bi-abaque dans lequel toute ligne parallèle à une diagonale contiendra des éléments dont la somme sera $m(m - 1)$.

Si l'on s'arrange, chose facile, pour que la somme des éléments placés suivant les lignes ou suivant les colonnes de l'un quelconque des carrés mineurs donne une somme égale à $\frac{m(m-1)}{2}$, et il suffit pour cela que le carré mineur de module m soit rempli par les éléments d'un abaque simplement magique, on aura donc un bi-abaque diabolique de base m.

En formant de nouvelles figures analogues à celle-là, il semble donc qu'on aurait un moyen d'obtenir un carré diabolique de module $2m$, par la combinaison des bi-abaques ainsi obtenus.

C'est cependant impossible dans le cas où m est impair, et il est bien facile de s'en rendre compte en remarquant que, par la nature même des choses, la somme obtenue de la sorte suivant une diagonale quelconque serait paire, tandis que la somme magique doit être $\frac{2m(4m^2-1)}{2} = m(4m^2-1)$, c'est-à-dire nécessairement impaire.

Mais si, au contraire, m est pair, c'est-à-dire si le module contient le facteur 2 à une puissance supérieure à 1, nous aurons là un procédé général qui pourra être utilisé dans beaucoup de cas pour obtenir la diabolie.

Nous allons essayer de nous en rendre compte en supposant que m soit égal à 6, c'est-à-dire qu'il s'agisse d'un carré de module 12, bien que ce soit un type qui doive rentrer dans le cas tout à fait général que nous allons avoir à examiner au Chapitre suivant. Mais notre seul but étant d'appuyer nos explications sur un exemple, nous pouvons imaginer qu'en général $m = 2p$, p étant simplement égal à 3 dans le cas particulier dont nous parlons.

Fig. 19.

A	A'	A	A'
A	A'	A	A'
A	A'	A	A'
A	A'	A	A'

Chacun des quatre carrés en lesquels se décompose le carré total est alors de module pair $2p$ (6 dans notre exemple) et peut être traité comme nous l'avons dit au commencement de ce numéro. Si nous supposons, en outre, que B' soit identique à A, nous obtiendrons la figure ci-dessus. Ce sera un bi-abaque de base p, si nous remplaçons A par un abaque quelconque de base p.

Adoptons, par exemple, pour A et A', les deux abaques suivants, le second étant complémentaire du premier, d'après ce que nous avons dit :

A.				A'.		
2	0	1		0	2	1
0	1	2		2	1	0
1	2	0		1	0	2

La figure qui en résultera sera nécessairement un bi-abaque diabolique, ce qui se vérifie immédiatement.

Maintenant, formons un autre bi-abaque analogue d'après les mêmes principes. Puis, prenant l'un des quatre carrés de module 6 (ou $2p$) en lesquels l'espace donné peut se décomposer, plaçons-y les éléments 0 et 1 seulement dans un certain ordre de manière à avoir un abaque B dont nous déterminerons le complémentaire B' en changeant les 1 en 0 et les 0 en 1; nous aurons ainsi l'abaque

$$\begin{matrix} B & B', \\ B & B'. \end{matrix}$$

Formons enfin trois nouveaux abaques sur les mêmes données, mais différents de celui-là; et appelons

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4$$

les six abaques ainsi obtenus.

Si nous avons disposé ces figures de manière qu'elles soient magiques en lignes et en colonnes, et qu'il ne se reproduise pas de répétition d'association, nous aurons par la formation d'un bloc quelconque un espace diabolique, attendu que tous les abaques individuels sont eux-mêmes diaboliques.

Par conséquent, la formation dans un ordre quelconque

$$\overset{p}{\alpha_1}\,\overset{p}{\alpha_2}\,\overset{2}{\beta_1}\,\overset{2}{\beta_2}\,\overset{2}{\beta_3}\,\overset{2}{\beta_4}$$

nous donnera la construction d'un carré diabolique.

Nous verrons au Chapitre suivant, sur un exemple, comment il est possible de satisfaire aux conditions requises, et même assez facilement.

Une nouvelle méthode générale, pour les carrés de module $4p$, sera exposée, en même temps que nous produirons cet exemple du carré de 12.

Carrés de module 4.

81. En appliquant aux carrés de module 4 ce que nous venons de dire sur la méthode des quarts complémentaires, il n'y aura qu'à former les quatre abaques β_1, β_2, β_3, β_4 du numéro précédent, car α_1, α_2 disparaissent puisque $p = 1$.

Pour nous rendre compte que c'est possible et même facile, nous nous bornerons à placer ici l'exemple sous les yeux du lecteur.

Les quatre abaques sont ici désignés par A, B, C, D; nous pouvons les combiner de toutes les manières possibles dans le système binaire; et nous avons fait figurer au-dessus de chaque résultat la permutation qui lui a donné naissance.

Il semble donc que nous obtenons ainsi 24 carrés diaboliques de module 4; mais en réalité ils se rangent dans trois familles seulement, ou trois types, correspondant aux trois carrés donnés par M. Frolov dans son atlas (*fig.* 40, 41, 42).

On remarquera du reste que les abaques A, B, C, D se déduisent les uns des autres, soit par permutations circulaires de colonnes ou de lignes, soit par rotation autour de la diagonale, c'est-à-dire par changement des lignes en colonnes et réciproquement.

Le carré de module 4 va nous permettre de faire ressortir une éclatante confirmation de nos principes.

LA VÉRIFICATION D'UNE THÉORIE DANS LES CAS LES PLUS ANOMAUX EST LE CRITERIUM SUPRÊME DE SA VALEUR ET DE SON EXACTITUDE; c'est là ce qu'on peut appeler L'ÉPREUVE MÉTAPHYSIQUE, *basée sur l'absence absolue d'exceptions.*

Les abaques de module 4 ci-contre sont construits d'après la méthode générale, bien qu'en apparence on n'y voie que l'application de la méthode des quarts complémentaires. Les directions des identiques sont $1x + 2y$, $2x + 1y$, $2x + 1y$, $1x + 2y$, dans les abaques A, B, C, D. Elles sont toutes différentes de $0x + 1y$, $1x + 0y$, $1x + 1y$, $1x - 1y$, dont la magie constitue la diabolie.

Voilà LA RAISON DE L'EXISTENCE DES CARRÉS DIABOLIQUES DE MODULE 4. Nous rappellerons qu'un carré de module 4 contient en réalité six directions, et c'est ce qui nous permet d'obtenir la diabolie, en faisant passer les directions des identiques par les directions $1x + 2y$, $2x + 1y$, que nous pouvons appeler des directions *semi-imparfaites.*

Carrés diaboliques de module 4.

ABAQUES COMPOSANTS.

Fig. 20.

A

0	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0

B

0	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

C

0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1

D

0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0
0	1	0	1

Première famille (*Atlas Frolov, type n° 40*).

A	B	D	C
0	11	5	14
7	12	2	9
10	1	15	4
13	6	8	3

A	C	D	B
0	14	5	11
7	9	2	12
10	4	15	1
13	3	8	6

B	A	C	D
0	7	10	13
11	12	1	6
5	2	15	8
14	9	4	3

B	D	C	A
0	7	10	13
14	9	4	3
5	2	15	8
11	12	1	6

C	A	B	D
0	13	10	7
11	6	1	12
5	8	15	2
14	3	4	9

C	D	B	A
0	13	10	7
14	3	4	9
5	8	15	2
11	6	1	12

D	B	A	C
0	11	5	14
13	6	8	3
10	1	15	4
7	12	2	9

D	C	A	B
0	14	5	11
13	3	8	6
10	4	15	1
7	9	2	12

Deuxième famille (*Atlas Frolov, type n° 41*).

A	B	C	D
0	11	6	13
7	12	1	10
9	2	15	4
14	5	8	3

A	C	B	D
0	13	6	11
7	10	1	12
9	4	15	2
14	3	8	5

B	A	D	C
0	7	9	14
11	12	2	5
6	1	15	8
13	10	4	3

B	D	A	C
0	7	9	14
13	10	4	3
6	1	15	8
11	12	2	5

C	A	D	B
0	14	9	7
11	5	2	12
6	8	15	1
13	3	4	10

C	D	A	B
0	14	9	7
13	3	4	10
6	8	15	1
11	5	2	12

D	B	C	A
0	11	6	13
14	5	8	3
9	2	15	4
7	12	1	10

D	C	B	A
0	13	6	11
14	3	8	5
9	4	15	2
7	10	1	12

Troisième famille (*Atlas Frolov, type n° 42*).

A	D	B	C
0	13	3	14
7	10	4	9
12	1	15	2
11	6	8	5

A	D	C	B
0	14	3	13
7	9	4	10
12	2	15	1
11	5	8	6

B	C	A	D
0	7	12	11
13	10	1	6
3	4	15	8
14	9	2	5

B	C	D	A
0	7	12	11
14	9	2	5
3	4	15	8
13	10	1	6

C	B	A	D
0	11	12	7
13	6	1	10
3	8	15	4
14	5	2	9

C	B	D	A
0	11	12	7
14	5	2	9
3	8	15	4
13	6	1	10

D	A	B	C
0	13	3	14
11	6	8	5
12	1	15	2
7	10	4	9

D	A	C	B
0	14	3	13
11	5	8	6
12	2	15	1
7	9	4	10

Carrés de module 8.

82. Les principes de construction ont été assez développés pour que nous puissions nous borner maintenant à des exemples numériques.

Nous en donnons un ici, pour un carré diabolique de module 8, en montrant les six abaques composants A, B, C, D, E, F, qu'on pourra combiner comme l'on voudra dans le système binaire. Il faut six abaques, parce que 8 est égal à 2^3, et par conséquent $64 = 2^6$.

Carrés diaboliques de module 8.

ABAQUES COMPOSANTS.

Fig. 21.

(A)

1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1

(B)

1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1

(C)

1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1

(D)

0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1

(E)

1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0

(F)

1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0

Carrés de module 16.

83. Un seul exemple nous suffira également pour le carré de module 16. Il nous faut ici 8 abaques de base 2, A, B, C, D,

E, F, G, H, que nous composerons suivant un ordre quelconque dans le système binaire.

Avec ces seuls éléments, il est donc possible d'obtenir 8! ou 40320 carrés différents.

Carrés diaboliques de module 16.

ABAQUES COMPOSANTS.

Fig. 22.

(A)

1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

(B)

1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

(C)

1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

(D)

1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1

Carrés diaboliques de module 16 (suite).

ABAQUES COMPOSANTS.

(E)

1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

(F)

1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

(G)

0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1

(H)

0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

Carrés de module 9.

84. L'exemple que nous donnons ici, au moyen des 4 abaques de composition A, B, C, D et du carré résultant de l'ordre A, B, C, D, les nombres étant eux-mêmes écrits dans le système de base 3, est assez digne de remarque.

La méthode des bi-abaques par carrés a été appliquée ici ; à cause de l'identité des deux facteurs 3, elle permet d'obtenir de véritables abaques analogues à ceux des nombres premiers, si bien que nous avons là de l'hypermagie et non plus seulement de la diabolie, malgré la petitesse du facteur 3.

Il est à peine besoin de faire remarquer qu'avec ces 4 abaques on pourrait former 23 autres carrés par les permutations de A, B, C, D.

Carré hypermagique de module 9.

ABAQUES COMPOSANTS.

(A)

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2

(B)

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2

(C)

0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2

(D)

0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2

Carré résultant de la disposition ABCD.

0 0 0 0	0 0 1 0	0 0 2 0	1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 2 0	2 0 0 0	2 0 1 0	2 0 2 0
0 0 0 1	0 0 1 1	0 0 2 1	1 0 0 1	1 0 1 1	1 0 2 1	2 0 0 1	2 0 1 1	2 0 2 1
0 0 0 2	0 0 1 2	0 0 2 2	1 0 0 2	1 0 1 2	1 0 2 2	2 0 0 2	2 0 1 2	2 0 2 2
0 1 0 0	0 1 1 0	0 1 2 0	1 1 0 0	1 1 1 0	1 1 2 0	2 1 0 0	2 1 1 0	2 1 2 0
0 1 0 1	0 1 1 1	0 1 2 1	1 1 0 1	1 1 1 1	1 1 2 1	2 1 0 1	2 1 1 1	2 1 2 1
0 1 0 2	0 1 1 2	0 1 2 2	1 1 0 2	1 1 1 2	1 1 2 2	2 1 0 2	2 1 1 2	2 1 2 2
0 2 0 0	0 2 1 0	0 2 2 0	1 2 0 0	1 2 1 0	1 2 2 0	2 2 0 0	2 2 1 0	2 2 2 0
0 2 0 1	0 2 1 1	0 2 2 1	1 2 0 1	1 2 1 1	1 2 2 1	2 2 0 1	2 2 1 1	2 2 2 1
0 2 0 2	0 2 1 2	0 2 2 2	1 2 0 2	1 2 1 2	1 2 2 2	2 2 0 2	2 2 1 2	2 2 2 2

Carrés de module 27.

85. Le carré de module 27 exige 6 abaques pour sa composition, puisque $27 = 3^3$.

Ceux que nous donnons ici ont été formés d'après la méthode par rectangles. On pourra, bien entendu, les permuter comme l'on voudra pour la composition du bloc total, ce qui donnera 720 résultats différents, c'est-à-dire 720 carrés hypermagiques de module 27, au moyen de ces seuls abaques.

Carrés hypermagiques de module 27.

ABAQUES COMPOSANTS.

(A)

1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Carrés hypermagiques de module 27 (suite).

ABAQUES COMPOSANTS.

(B)

1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Carrés hypermagiques de module 27 (suite).

ABAQUES COMPOSANTS.

(C)

1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0
2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0
2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0
2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0
2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0
2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0
2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0
2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0
2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0
2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2

Carrés hypermagiques de module 27 (suite).

ABAQUES COMPOSANTS.

(D)

1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0
1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0
1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0
2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1
2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1
2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1
0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2
0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2
0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2
1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0
1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0
1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0
2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1
2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1
2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1
0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2
0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2
0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2
1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0
1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0
1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0
2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1
2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1
2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1
0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2
0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2
0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2

Carrés hypermagiques de module 27 (suite).

ABAQUES COMPOSANTS.

(E)

2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Carrés hypermagiques de module 27 (suite).

ABAQUES COMPOSANTS.

(F)

2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0
0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1
1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2
2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0
0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1
1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2
2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0
0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1
1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2
2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0
0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1
1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2
2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0
0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1
1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2
2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0
0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1
1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2
2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0
0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1
1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2
2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0
0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1
1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2
2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0
0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1
1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2

Carrés de module 25.

86. Les 4 abaques composants que nous donnons ici sont encore formés au moyen de la méthode par rectangles. On pourra, bien entendu, comme toujours, les combiner dans tel ordre que l'on voudra.

Carrés hypermagiques de module 25.

ABAQUES COMPOSANTS.

Fig. 25.

(A)

4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4

Carrés hypermagiques de module 25 (suite).

ABAQUES COMPOSANTS.

(B)

4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4

Carrés hypermagiques de module 25 (suite).

ABAQUES COMPOSANTS.

(c)

0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3

Carrés hypermagiques de module 25 (suite).

ABAQUES COMPOSANTS.

(D)

0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3

Espaces à plus de deux dimensions.

87. L'extension des méthodes se fait d'elle-même aux cubes et en général aux espaces à plus de deux dimensions. Mais les anomalies provenant des facteurs 2 et 3 engendrent des difficultés analogues à celles qu'on rencontre dans les carrés, plus grandes même, et contraignent à recourir à des procédés spéciaux pour en triompher.

Il serait facile, par exemple, pour le cube de module 8, d'imaginer une méthode des cubes diagonaux analogue à celle des quarts complémentaires. Il est très probable qu'on obtiendrait ainsi des cubes diaboliques de module 8, comme on a obtenu des carrés diaboliques de 4; le lecteur pourra s'y essayer; mais c'est en somme un simple exercice de patience.

D'autre part, il est très probable aussi que, soit pour les cubes, soit pour les espaces supérieurs, on pourrait, par des considérations analogues à celles que nous avons présentées à propos des carrés de module 4 (p. 123), arriver à obtenir, non seulement la diabolie, mais l'hypermagie, et peut-être à faire rentrer l'ingénieux procédé des quarts complémentaires, et ses analogues, comme cas particuliers, dans notre méthode générale.

Nous n'avons pas la prétention d'épuiser un pareil sujet; nous ne saurions trop répéter que nous voulons laisser beaucoup à faire au lecteur, et que nous nous bornons à poser des principes, en essayant de les faire comprendre par quelques exemples. Sinon, nous serions arrivé à grossir démesurément ce modeste volume, et à sortir du cadre que nous nous étions tracé, et dans lequel il nous a paru nécessaire de nous maintenir.

CHAPITRE IX.

ESPACES HYPERMAGIQUES DE MODULE COMPOSÉ QUELCONQUE.

Application des méthodes générales.

88. Au point où nous sommes parvenu, il n'est plus besoin de longues explications pour faire comprendre au lecteur comment il lui sera possible d'arriver de proche en proche à la composition d'un espace hypermagique dont le module est un nombre composé quelconque. En dehors du cas répondant aux anomalies, c'est-à-dire provenant des facteurs 2 et 3, la méthode générale reste immuablement la même. Du module premier p, nous avons pu passer au module pq. De pq nous passerons à pqr, et ainsi de suite; les facteurs premiers p, q, r, ... pouvant d'ailleurs devenir égaux ou inégaux *ad libitum*.

Le mode de composition sera constamment le même, plus compliqué seulement dans l'application. Avec les méthodes des bi-abaques, si le nombre des facteurs égaux ou inégaux p, q, r, ... est égal à f, et si le nombre des dimensions de l'espace considéré est n, celui des bi-abaques à employer sera nf, puisqu'il s'agira en somme d'écrire chaque nombre dans un système de numération multiple dont les bases élémentaires, dans un certain ordre, sont

$$\underbrace{pqr\ldots,\quad pqr\ldots,\quad \ldots,\quad pqr\ldots}_{n \text{ fois}}.$$

Les applications numériques pour des nombres un peu grands seraient fastidieuses et assurément inutiles. Mais nous attachons beaucoup plus d'importance, nous ne saurions trop le répéter, aux méthodes et aux théories elles-mêmes qu'à des constructions obtenues par des procédés de détail artificiels, fussent-ils très ingénieux.

On aura du reste remarqué la place que nous avons donnée à l'étude des espaces arithmétiques en eux-mêmes, en dehors de leurs propriétés magiques. Nous pourrions presque dire, sans rien exagérer, que celles-ci n'ont été qu'une occasion de mieux pénétrer la structure de ces espaces, en nous obligeant à en faire une analyse complète et à en rechercher les propriétés essentielles.

Peut-être quelque lecteur trouvera-t-il dans ces développements matière à des recherches arithmétiques nouvelles; nous le désirons vivement, car il nous semble que, dans un tel ordre d'idées, il peut y avoir encore beaucoup à faire.

Pour terminer ce Chapitre, nous n'aurons plus, avant de présenter un nouvel exemple se comprenant de lui-même, qu'à dire quelques mots rapides d'une méthode qui s'applique heureusement aux espaces de module $4p$, et qui nous paraît pouvoir se greffer heureusement sur celle des quarts complémentaires, d'où elle tire en somme son origine.

Méthode des carrés mineurs, pour $m = 4p$.

89. Nous avons vu précédemment de quelle manière, par l'emploi des carrés mineurs, on peut arriver à composer un espace de module pq tel que ses propriétés magiques soient précisément égales à celles des carrés de modules p et q qui ont servi à la composition.

Or, la méthode des quarts complémentaires nous a fourni le moyen d'obtenir des carrés diaboliques de module 4. Donc, si nous remplaçons q par 4, nous voyons qu'il pourra en être de même pour un carré de module $4p$.

Soit qu'on décompose ce carré en 16 autres de module p, ou bien en p^2 autres de module 4, on pourra toujours arriver à une composition, comme celle que nous indiquons, du moment que nous savons déjà construire un carré diabolique de module p.

Cette brève indication suffira au lecteur pour lui permettre de construire de tels carrés, s'il le désire, à titre d'exercice.

Carrés de module 12.

90. Comme dans le Chapitre qui précède, nous donnons ici un seul exemple, dont l'étude est facile sur les bi-abaques composants.

Ce carré de 12 est formé par la méthode double des quarts complémentaires, et de répétition identique.

Dans chaque quart des multi-abaques A, B, les quarts diagonaux sont complémentaires; deux numéros identiquement placés donnent 2 pour somme : 2 et 0, 1 et 1; il en résulte que dans chaque quart les directions des diagonales sont magiques.

Chaque quart des bi-abaques A et B est répété identiquement; on obtient ainsi la magie pour la direction $1x \pm 1y$.

Dans les bi-abaques C, D, E, F, chaque quart du bi-abaque entier est formé par la méthode des quarts complémentaires.

Les quatre quarts sont formés par la même méthode.

On a ainsi six bi-abaques diaboliques; leur bloc est donc diabolique, et comme ils sont disposés de manière à ne pas donner de répétition d'association, le bloc ou carré est diabolique et il contient tous les nombres de 0 *à* 143.

La figure des bi-abaques A′, B′, C′, D′, E′, F′ est un exemple de ce qui arrive quand, dans *l'analyse d'un espace magique,* on ne suit pas le même ordre pour les multiplicateurs.

Dans la construction, les multiplicateurs se suivent dans l'ordre $\overset{3}{A}$, $\overset{3}{B}$, $\overset{2}{C}$, $\overset{2}{D}$, $\overset{2}{E}$, $\overset{2}{F}$; dans l'analyse, l'ordre est $\overset{2}{A'}$, $\overset{2}{B'}$, $\overset{2}{C'}$, $\overset{2}{D'}$, $\overset{3}{E'}$, $\overset{3}{F'}$. Cette modification dans l'ordre des facteurs employés (2, 2, 2, 2, 3, 3 au lieu de 3, 3, 2, 2, 2, 2) engendre un certain défaut d'ordre dans les bi-abaques et produit des conséquences qu'il peut être intéressant d'étudier. C'est là un des nombreux avantages de la méthode graphique, qui, par une sorte de génération spontanée, place constamment des sujets d'expérimentations et d'études nouvelles sous les yeux de celui qui l'emploie.

Carré diabolique de module 12 (Abaques composants).

Fig. 26.

(A)

2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2	1
0	1	2	2	1	0	0	1	2	2	1	0
1	2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2
2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2	1
0	1	2	2	1	0	0	1	2	2	1	0
1	2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2
2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2	1
0	1	2	2	1	0	0	1	2	2	1	0
1	2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2
2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2	1
0	1	2	2	1	0	0	1	2	2	1	0
1	2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2

(B)

1	2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2
0	1	2	2	1	0	0	1	2	2	1	0
2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2	1
1	2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2
0	1	2	2	1	0	0	1	2	2	1	0
2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2	1
1	2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2
0	1	2	2	1	0	0	1	2	2	1	0
2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2	1
1	2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2
0	1	2	2	1	0	0	1	2	2	1	0
2	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2	1

(C)

0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

(D)

0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

(E)

1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

(F)

1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0

Carré diabolique de module 12 (composition: $\overset{3}{A}\overset{3}{B}\overset{2}{C}\overset{2}{D}\overset{2}{E}\overset{2}{F}$).

Fig. 27.

115	40	54	29	99	88	118	45	51	24	102	93
4	79	129	138	68	15	1	74	132	143	65	10
89	98	28	55	41	114	92	103	25	50	44	119
126	37	59	16	110	85	123	32	62	21	107	80
3	72	134	141	67	8	6	77	131	136	70	13
84	111	17	58	36	127	81	106	20	63	33	122
121	34	60	23	105	82	124	39	57	18	108	87
14	69	139	128	78	5	11	64	142	133	75	0
83	104	22	61	35	120	86	109	19	56	38	125
116	47	49	26	100	95	113	42	52	31	97	90
9	66	140	135	73	2	12	71	137	130	76	7
94	101	27	48	46	117	91	96	30	53	43	112

Abaques résultant de l'analyse du carré dans l'ordre : 2, 2, 2, 2, 3, 3.

Fig. 28.

(A′)

1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1

(B′)

1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1

(C′)

0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0

(D′)

0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0

(E′)

2	1	0	0	0	2	0	0	2	2	1	1
1	2	1	1	1	2	0	0	2	2	0	0
2	0	0	0	1	2	0	1	2	1	2	0
0	0	1	2	0	1	2	1	2	1	2	2
1	0	2	2	1	2	2	1	1	0	2	1
1	1	2	1	0	0	0	2	0	0	2	1
1	2	2	1	2	0	2	1	1	0	0	2
1	2	1	0	2	1	0	0	2	2	1	0
0	1	1	2	2	1	1	0	0	0	0	2
2	0	1	2	0	1	1	2	2	1	2	0
0	1	1	0	0	0	1	2	0	1	1	2
1	0	0	1	0	0	0	2	1	2	2	1

(F′)

1	1	0	2	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	2	0	1	2	0	2	2	1
2	0	1	1	2	0	2	1	1	2	2	2
0	1	2	1	2	1	0	2	2	0	2	2
0	0	2	0	1	2	0	2	2	1	1	1
0	0	2	1	0	1	0	1	2	0	0	2
1	1	0	2	0	1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	2	0	2	2	1	1	1	0	0
2	2	1	1	2	0	2	1	1	2	2	2
2	2	1	2	1	2	2	0	1	1	1	0
0	0	2	0	1	2	0	2	2	1	1	1
1	2	0	0	1	0	1	0	0	2	1	1

NOTE I.

APPLICATION A L'HYPERMAGIE DE LA THÉORIE DES DIRECTIONS.

Bien que dans les Chapitres VI et VII nous ayons établi tous les principes essentiels en ce qui concerne l'étude de l'hypermagie dans les espaces de module composé, nous tenons à ajouter ici quelques éclaircissements, et à montrer, sur deux simples exemples, l'application possible de ces principes. Il est essentiel, en effet, que, s'il reste quelque chose à faire au lecteur, il n'éprouve pas le moindre doute ni la moindre hésitation sur les idées fondamentales qui forment la base de notre théorie.

Rappelons qu'aux n^{os} 60 et 61, nous avons fait la classification des *cases* et des *directions* d'un espace à deux dimensions, ces notions pouvant s'étendre sans peine aux espaces supérieurs.

Une case *anomale* est celle dont les coordonnées a et b ont *toutes deux* un facteur commun avec le module m.

Toute direction caractérisée par le pas (complexe) qui sépare la case origine d'une case anomale est une direction *imparfaite*, qui ne rencontre pas sur l'espace considéré les centres de m cases différentes.

Parmi les cases non anomales, il peut être utile d'établir une distinction. Les unes ont leurs deux coordonnées représentées par des nombres premiers avec le module; elles donnent naissance à des directions *parfaites*, rencontrant toujours les centres de m cases différentes de l'espace; les autres cases ont pour l'une de leurs coordonnées un nombre premier avec le module, et pour la seconde un nombre possédant avec le module un facteur commun, *ou encore les deux coordonnées ont avec le module des facteurs communs, mais premiers entre eux*. Nous pouvons les appeler des cases *semi-anomales*, pour abréger le langage. Elles donnent naissance à des directions passant bien par m centres de cases différentes; mais les cases en question ne seront que dans certaines lignes, ou dans certaines colonnes de l'espace considéré. Nous désignerons ces directions par la qualification de *semi-imparfaites*.

Dans les figures des p. 84-85, les cases anomales seules ont été ombrées; les autres se subdivisent donc en deux catégories; et le lecteur pourra s'exercer sur ces exemples, s'il en a la curiosité, en marquant en *noir* les cases anomales, en *gris* les cases semi-anomales, et laissant blanches les autres. Alors toute case noire, en supposant qu'on parte de l'origine, caractérisera une direction imparfaite, toute case grise une direction semi-imparfaite, et toute case blanche une direction absolument parfaite.

Lorsque, partant de ces principes et de ces définitions, on veut, comme nous l'avons fait dans les Chapitres VII et VIII, essayer l'étude de l'hypermagie et constituer les abaques d'un espace dont le module est composé, on rencontre les difficultés que nous avons signalées, et l'on pourrait croire que l'hypermagie ne repose plus ici sur les mêmes bases que dans le cas des modules premiers, si l'on s'en rapportait aux premières apparences. Il n'en est rien, cependant, et c'est ce que les exemples, illustrant la théorie, vont nous faire voir dans quelques instants. Seulement, il faut en outre appliquer la méthode générale des transformations, dont les grandes lignes ont été indiquées au n° 63.

En faisant de cette méthode un usage raisonné, il sera facile de reconnaître que LES PRINCIPES RESTENT IMMUABLES, QUE LES EXCEPTIONS APPARENTES RENTRENT DANS UNE RÈGLE GÉNÉRALE, et que, par exemple, la position fondamentale principale d'un espace joue un rôle aussi important que dans le cas des modules premiers. C'est ce que le lecteur a déjà pu entrevoir, grâce à nos brèves remarques du n° 81, concernant les carrés de module 4. C'est ce que nous voulons montrer ici, avec un peu plus d'insistance, sur ce même exemple du module 4 et en outre sur un exemple du module 9 qui complétera utilement celui du n° 84. Mais nous ne saurions assez engager le lecteur à n'en pas rester là, et à construire lui-même des figures arithmétiques analogues, *une fois qu'il se sera bien pénétré des principes exposés.*

Nous rappelons encore ici que, pour l'étude de ces carrés de module p^2, p étant premier, il y a lieu à la formation de quatre abaques, et à l'écriture de chaque nombre dans le système de numération de base p, c'est-à-dire au moyen de quatre chiffres. Ce sont choses si complètement expliquées dans le corps de l'Ouvrage, que nous passerons ici très rapidement.

Exemple du carré de module 4.

La position fondamentale principale de ce carré peut s'écrire

Fig. 29.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

ou, dans le système de base 2,

Fig. 30.

0000	0001	0010	0011
0100	0101	0110	0111
1000	1001	1010	1011
1100	1101	1110	1111

De là, les quatre abaques

Fig. 31.

α

0	0	0	0
0	0	0	0
1	1	1	1
1	1	1	1

β

0	0	0	0
1	1	1	1
0	0	0	0
1	1	1	1

γ

0	0	1	1
0	0	1	1
0	0	1	1
0	0	1	1

δ

0	1	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1

Les abaques α, γ n'ont qu'une direction d'invariation, celle des x pour α, des y pour γ. Mais β en a deux : celle des x, et en outre la direction semi-imparfaite $((4))x + 2y$. De même δ en a deux : celle des y, et $2x + ((4))y$. Il y en a même davantage, à cause de la variabilité du symbole $((4))$, mais elles rentrent dans la même formule. Si nous pouvons, par une transformation convenable, réduire chacun de ces abaques β, δ à n'avoir plus pour direction d'invariation que les x, ou bien les y, nous aurons donc augmenté, par cela même, le nombre des directions magiques dans le bloc résultant. Et ce nombre pourra être de 4, puisque nous avons six directions en tout, et qu'il nous restera seulement deux directions d'invariation.

Or, cette transformation est chose facile, si nous y regardons d'un peu près. En effet, une permutation arbitraire des colonnes ne modifie pas les abaques α, β; et une permutation de colonnes dans l'une des moitiés de γ, composées chacune de deux colonnes, ne modifie pas non plus cet abaque γ. Effectuons donc la permutation des deux dernières colonnes. Nous reproduisons α, β, γ, et δ se transforme en

Fig. 32.

δ'

0	1	1	0
0	1	1	0
0	1	1	0
0	1	1	0

Il ne peut y avoir répétition d'association, puisque nous avons fait la *même* transformation sur *tous* les abaques, et il est visible que, maintenant, la seule direction d'invariation de δ' est celle des y.

Le même raisonnement, appliqué aux lignes à la place des colonnes, nous conduit à former

Fig. 33.

β'

0	0	0	0
1	1	1	1
1	1	1	1
0	0	0	0

Notre position fondamentale transformée nous donne donc les quatre abaques α, β', γ, δ', où les seules directions d'invariation sont celles des x (pour α et β') et des y (pour γ et δ'). Par conséquent, il nous est loisible d'effectuer une transformation en quinconce, soit sur les abaques composants, soit sur le bloc. Si, pour les formules de cette transformation, nous employons la relation

$$\xi = 2x + 1y, \qquad \eta = 1x + 2y,$$

il est clair que ni ξ, ni η, ni $\xi \pm \eta$ ne coïncideront avec les directions d'invariation, de telle sorte que nous aurons obtenu un carré hypermagique diabolique.

La transformation dont il s'agit nous donnera, à la place de

les abaques $\begin{matrix} \alpha & \beta' & \gamma & \delta' \\ \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{A} & \mathrm{D} \end{matrix}$

de la page 124. En les composant dans leur ordre, nous retrouverons donc le carré indiqué de cette façon à la même page (troisième famille).

De là, deux moyens pour construire un carré hypermagique de module 4 : ou bien procéder exactement comme nous venons de le faire, par les abaques (méthode analytique), ou bien, dans la position fondamentale principale, permuter les deux dernières colonnes, puis les deux dernières lignes, et appliquer ensuite une transformation en quinconce sur les deux mêmes bases ξ et η que ci-dessus (méthode synthétique). La première méthode pourrait presque s'appliquer sans figures, rien que par les formules; la seconde, sans calcul, rien que par des procédés graphiques. Dans la réalité des faits, elles coïncident absolument, le carré final n'étant que le bloc des abaques individuels.

Exemple du carré de module 9.

Formons la position fondamentale principale, en écrivant tout de suite les nombres dans le système de base 3 :

Fig. 34.

0000	0001	0002	0010	0011	0012	0020	0021	0022
0100	0101	0102	0110	0111	0112	0120	0121	0122
0200	0201	0202	0210	0211	0212	0220	0221	0222
1000	1001	1002	1010	1011	1012	1020	1021	1022
1100	1101	1102	1110	1111	1112	1120	1121	1122
1200	1201	1202	1210	1211	1212	1220	1221	1222
2000	2001	2002	2010	2011	2012	2020	2021	2022
2100	2101	2102	2110	2111	2112	2120	2121	2122
2200	2201	2202	2210	2211	2212	2220	2221	2222

Les quatre abaques correspondants sont

Fig. 35.

α

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2

β

0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2

γ

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2

δ

0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2

Les abaques β, δ présentent des directions d'invariation multiples, savoir $((9))x + 3y$, $((9))x + 6y$, et $3x + ((9))y$, $6x + ((9))y$, qui sont des directions semi-imparfaites, en dehors de celle des x et des y, respectivement. *Il s'agit de les faire disparaître par une transformation convenable.* Or, dans α, β, on peut permuter arbitrairement les colonnes. Dans γ, on peut permuter les colonnes entre elles dans chaque groupe de trois colonnes.

Si les colonnes étant numérotées 1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9, nous faisons la permutation 1, 2, 3; 5, 6, 4; 9, 7, 8 dont la loi est évidente, il est visible que δ ne présentera plus qu'une seule direction d'invariation, celle des y, car les éléments identiques seront maintenant dans des cases dont les abscisses seront 5 et 7, *c'est-à-dire des nombres premiers avec le module.* La même observation peut être faite pour les lignes, et les abaques α, β, γ, δ se trouvent remplacés par α, β', γ, δ', β' et δ' étant les abaques ci-dessous :

Fig. 36.

β'

0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

δ'

0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	1	2	0	2	0	1

En opérant sur α, β', γ, δ' une transformation en quinconce, on aura un carré hypermagique de module 9, où les seules directions non magiques seront les transformées des x et des y. Comme il y a douze directions parfaites ou semi-imparfaites, il nous restera donc dix directions magiques, et, par conséquent, la diabolie sera facile à établir. On arriverait au même résultat en faisant d'autres permutations sur les groupes de trois colonnes, ou de trois lignes, **POURVU QU'ON S'ARRANGE DE MANIÈRE A ABOLIR LES DIRECTIONS D'INVARIATION SUPPLÉMENTAIRES QUE PRÉSENTENT LES ABAQUES PRIMITIFS** β, δ.

Pour mettre sous les yeux du lecteur un exemple des résultats qu'il est possible d'obtenir, nous supposerons qu'on adopte simplement, avec les abaques α, β', γ, δ' ci-dessus, la transformation en quinconce définie par les formules

$$\xi = 7x + 1y, \qquad \eta = 1x + 2y,$$

et nous nous contentons de donner dans une dernière figure le carré hypermagique de module 9 qui s'ensuit, les nombres étant écrits dans le système décimal, sans reproduire les abaques transformés. Mais nous ne saurions assez insister sur ce point, *qu'il s'agit uniquement d'éclaircir une théorie dont nous donnons les premiers principes*, et que le résultat signalé n'a pas d'autre importance. Nous ne nous dissimulons pas qu'il reste encore beaucoup à faire dans ce domaine de l'hypermagie et des espaces arithmétiques. L'arithmétique graphique, nous en avons la ferme assurance, fera de sérieux progrès et sera féconde en conséquences nouvelles et intéressantes lorsque les savants y porteront sérieusement leurs efforts. Nous nous sommes contenté d'en indiquer les grandes lignes, de marquer la voie à suivre. Nous avons tâché de le faire avec la plus grande précision et la plus grande clarté. Que d'autres nous dépassent, nous complètent, et arrivent à faire plus et mieux, c'est notre plus sincère désir.

Carré hypermagique de module 9.

Fig. 37.

0	15	21	40	46	34	80	59	65
19	43	53	32	74	54	69	3	13
47	27	78	57	67	1	16	26	41
76	55	70	8	14	20	36	51	30
68	2	9	24	39	49	28	79	62
12	22	37	52	35	77	56	63	6
44	50	29	72	60	66	4	10	25
33	75	58	64	7	17	23	38	45
61	71	5	11	18	42	48	31	73

Les directions non magiques sont, dans ce carré, $\xi + 4\eta$ et $\xi + 2\eta$.

NOTE II.

MÉTHODE DES BORDURES.

Nous avons vu qu'on ne peut, par les méthodes générales, obtenir de carrés diaboliques lorsque le module est de la forme $2p$, p étant impair. Il en est de même pour les modules de la forme $3p$, p ne contenant pas le facteur 3.

On a cherché, pour de semblables carrés, à obtenir un maximum de magie par une foule d'artifices, parmi lesquels l'un des plus ingénieux est assurément la méthode des bordures, inventée par Frénicle, indiquée par un grand nombre d'auteurs, et notamment par M. Frolov dans ses très intéressantes études.

Cette méthode consiste essentiellement à se servir d'un carré magique de module m, sorte de carré central ou noyau, autour duquel on vient grouper de nouveaux éléments, au nombre de $4m+4$, de manière à former un nouveau carré de module $m+2$.

Ces nouveaux éléments formeront ainsi une sorte de cadre ou bordure, autour du carré central; et si on les dispose suivant certaines règles, si au besoin on fait subir au carré central lui-même certaines modifications, on parviendra ainsi à donner au grand carré des propriétés magiques plus ou moins étendues.

Pour les modules de forme $2p$, p étant impair, le module du carré central sera $2(p-1)$, c'est-à-dire de la forme $4p$. Pour les modules de forme $3p$, p étant premier avec 3, le module du carré central sera de l'une des deux formes $9p+1$ ou $9p+4$.

Nous ne pouvons que renvoyer aux nombreux auteurs qui ont écrit sur cette question, pour l'explication des conditions dans lesquelles on emploie la méthode dont il s'agit.

Notre intention est d'en montrer simplement ici l'application à quelques exemples, pour indiquer des procédés que nous avons lieu de croire nouveaux et qui conduisent à des résultats magiques assez remarquables.

Tout d'abord, afin de n'avoir pas à revenir plus loin sur cette définition, nous rappellerons une fois pour toutes qu'on désigne sous le nom de *carré semi-diabolique* un carré magique de module pair qui reste magique quand, après l'avoir coupé suivant la ligne médiane, soit parallèlement aux x, soit parallèlement aux y, on fait permuter les deux moitiés.

Pour faire une bordure magique, il y a à remarquer que les éléments de cette bordure doivent être complémentaires : 1° sur chaque diagonale et 2° sur chacune des orthogonales restantes ; il faut de plus que la somme des éléments sur chaque côté du carré donne la somme magique : voilà les conditions imposées, le problème à résoudre.

Pour faciliter la compréhension, choisissons d'abord l'exemple le plus simple, en admettant qu'il s'agisse de construire une bordure entourant un carré de module 4.

Le carré central pourra être composé de tous les nombres moyens ; il contient 16 éléments, il en reste 20 pour la bordure. Ce seront les dix premiers et les dix derniers nombres :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
36, 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27.

Nous remarquerons qu'en décomposant la seconde ligne de ces nombres, et en isolant partout 26, ils peuvent s'écrire sur trois lignes comme il suit :

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \left\{\begin{array}{c} 10 \\ 26 \end{array}\right. \!\!\! & \begin{array}{c} 9 \\ 26 \end{array} & \begin{array}{c} 8 \\ 26 \end{array} & \begin{array}{c} 7 \\ 26 \end{array} & \begin{array}{c} 6 \\ 26 \end{array} & \begin{array}{c} 5 \\ 26 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ 26 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \\ 26 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 26 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 26 \end{array} \end{array}$$

Prenons comme éléments angulaires 1, 2, 9, 10 disposés de telle sorte que les sommes suivant les diagonales soient égales.

La somme de la première ligne $= 3$, celle de la dernière $= 19$; il faut donc horizontalement compenser cette différence.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & . & . & . & 2 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 9 & . & . & . & 10 \end{array}$$

De même, la 1ère colonne donne 10 pour somme, et la dernière 12 ; la différence est 2. Il suffira donc de prendre pour les éléments des colonnes des nombres dont la somme diffère de 2.

Remarquons que la somme de chaque bordure est 33, et que chacune d'elles comprend un nombre égal de grands nombres et de petits.

Si nous choisissons comme troisième petit le nombre 9, nous obtenons $1 + 9 + 2 = 12$, $33 - 12 = 21$.

Il s'agit de trouver trois nombres dont la somme soit égale à 21.

La théorie des partitions et l'analyse indéterminée, si l'on voulait traiter la question par le calcul, conduiraient à de grandes complications. Nous sommes contraints ici d'avoir recours à l'empirisme ; *empirisme raisonné* cependant, et dont nous donnons seulement les résultats avec quelques remarques sommaires.

Les nombres restants, sauf 26 qu'il faudra ajouter à un 1, un 2, …, un 10, sont

$$\begin{array}{cccccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Avec 9, 2 formons l'avant-dernière colonne de notre bordure ; avec 10, 1 formons l'avant-dernière ligne ; portons enfin les groupes 8, 7, 6 et 3, 4, 5 sur la 1^{re} et la dernière lignes :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 8 & 7 & 6 & 9 & 2 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 10 & & & & & 1 \\ 9 & 3 & 4 & 5 & 2 & 10 \end{array}$$

Il nous reste

$$\begin{array}{ccc} 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 3 \end{array}$$

Portant 7, 8 à la dernière colonne, 4, 3 à la 1^{re} (2^{e} et 3^{e} lignes respectivement), il ne nous reste plus à loger que 6 et 5 ; et notre bordure est ainsi constituée :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \dot{8} & \dot{7} & \dot{6} & 9 & 2 \\ \cdot 4 & & & & & 7 \\ \cdot 3 & & & & & 8 \\ 6 & & & & & 5\cdot \\ 10 & & & & & 1\cdot \\ \cdot 9 & 3 & 4 & 5 & \underset{\cdot}{2} & 10\cdot \end{array}$$

Nous ajoutons 26, ainsi qu'il a été dit plus haut, aux éléments accompagnés d'un point. On remarquera que deux éléments opposés, soit en ligne, soit en colonne, soit en diagonale, sont toujours, l'un pointé et l'autre non pointé.

En ne tenant pas compte des angles de la bordure, qui sont immobiles par destination, on peut permuter entre elles toutes les colonnes et toutes les lignes; cette faculté peut nous permettre d'obtenir un degré de magie de plus, comme on va le voir.

Il s'agit de disposer les nombres intermédiaires de manière à obtenir des sommes égales pour les lignes $\pm 1x + 1y$; pour cela il faut observer que la somme des 4 éléments à prendre sur chacune des bordures doit être égale à 22.

Si l'on prend 8, 4, par exemple, dont la somme est 12, il n'y a qu'à prendre 5 et 5 pour que la diagonale $-1x + 1y$ soit magique.

Si pour $+1x + 1y$, on prend 6, 7, dont la somme est 13, les compléments 6, 3 de 5 et 8 donneront également 22, de sorte qu'en définitive, on obtiendra :

Fig. 38.

1		**8**	6		**2**
4					7
6					5
9		3	**5**		10

Quant aux nombres restants, il n'existe aucune combinaison qui puisse donner 22 sur les deux diagonales.

Le maximum de magie sera donc de deux diagonales. On complétera la bordure comme on voudra, au moyen des deux lignes et des deux colonnes qui restent.

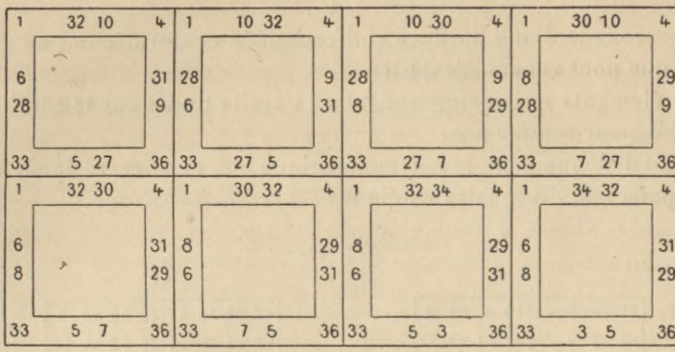
Au lieu de 1 et 2 pour les deux angles supérieurs, position qui représente le point de départ fondamental de ce procédé, on aurait pu prendre deux nombres de parité différente, cette condition s'imposant.

On pourrait ainsi obtenir en plaçant 1, 4 dans les deux angles supérieurs, et ajoutant maintenant 26 aux éléments pointés :

1	34	32	30	10	4
35					2
28					9
6					31
8					29
33	3	5	7	27	36

Mais ici une plus grande variété est permise, comme le montre la *fig.* 39 ci-dessous.

Fig. 39.



On pourrait de même prendre 1 et 8, ce qui donnerait :

1	27	35	33	7	8
9					28
6					31
34					3
32					5
29	10	2	4	30	36

et les variétés de cette bordure.

Il n'y aura plus maintenant qu'à appliquer ces bordures à un carré magique de module 4 convenablement choisi, et dont les éléments auront été majorés de façon à s'étendre de 11 à 26.

On obtiendra ainsi des carrés semi-diaboliques de module 6.

Pour compléter cette question, montrons comment on compose le carré central, en vue d'obtenir la semi-diabolie, et pour cela prenons comme point de départ pour ce carré central un carré hypermagique de 8 (*fig.* 40,I).

Ajoutons 1 à chaque élément; nous obtenons le carré de la *fig.* II. Divisons-le en quatre parties égales. Laissons le premier quart immobile : faisons subir à celui placé à sa droite une révolution autour de la médiane verticale; faisons subir de même une révolution, autour de la médiane horizontale, au quart situé au-dessous, et enfin une double révolution, successivement autour de ses deux médianes, au quatrième quart.

Nous obtenons la *fig.* III dans laquelle tous les nombres symétriques par rapport au centre ont deux à deux 65 pour somme.

Ajoutons maintenant 18 à chaque élément; nous obtenons le carré (*fig.* IV) dans lequel les lignes marquées d'un trait noir ont pour somme $303 = \frac{3}{5}\,505$, somme magique.

Entourons-le d'une bordure confectionnée conformément aux procédés que nous venons d'exposer.

Les éléments qui correspondent aux traits tracés sur le carré de 8 donnent pour somme 202.

Le total donne donc la somme magique 505 et le carré ayant ainsi deux paires de diagonales magiques est *semi-diabolique*.

Fig. 40.

I

61	26	9	46	19	52	39	0
48	22	4	34	31	57	43	13
27	60	47	8	53	18	1	38
23	49	35	5	56	30	12	42
44	11	24	63	2	37	54	17
32	6	20	50	15	41	59	29
10	45	62	25	36	3	16	55
7	33	51	21	40	14	28	58

II

62	27	10	47	20	53	40	1
49	23	5	35	32	58	44	14
28	61	48	9	54	19	2	39
24	50	36	6	57	31	13	43
45	12	25	64	3	38	55	18
33	7	21	51	16	42	60	30
11	46	63	26	37	4	17	56
8	34	52	22	41	15	29	59

III

62	27	10	47	1	40	53	20
49	23	5	35	14	44	58	32
28	61	48	9	39	2	19	54
24	50	36	6	43	13	31	57
8	34	52	22	59	29	15	41
11	46	63	26	56	17	4	37
33	7	21	51	30	60	42	16
45	12	25	64	18	55	38	3

IV

80	45	28	65	19	58	71	38
67	41	23	53	32	62	76	50
46	79	66	27	57	20	37	72
42	68	54	24	61	31	49	75
26	52	70	40	77	47	33	59
29	64	81	44	74	35	22	55
51	25	39	69	48	78	60	34
63	30	43	82	36	73	56	21

V

1	99	98	97	90	9	6	7	88	10
96									5
84									17
83									18
12									89
93									8
15									86
16									85
14									87
91	2	3	4	11	92	95	94	13	100

VI

1	99	98	97	90	9	6	7	88	10
96	80	45	28	65	19	58	71	38	5
84	67	41	23	53	32	62	76	50	17
83	46	79	66	27	57	20	37	72	18
12	42	68	54	24	61	31	49	75	89
93	26	52	70	40	77	47	33	59	8
15	29	64	81	44	74	35	22	55	86
16	51	25	39	69	48	78	60	34	85
14	63	30	43	82	36	73	56	21	87
91	2	3	4	11	92	95	94	13	100

NOTE III.

MAGIE LITTÉRALE ET MAGIES MULTIPLES.

Magie littérale.

Le problème de la magie littérale consiste à placer un certain nombre d'éléments en nombre m :

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,$$

dans les cases d'un carré, de telle sorte que, en suivant soit une ligne, soit une colonne, soit une diagonale, soit telle ou telle autre ligne de direction donnée, on ne rencontre jamais deux fois le même élément.

Une telle ligne est magique; et plus il y a de lignes magiques, plus le carré lui-même est magique, au point de vue de la magie littérale.

Cette magie est la magie *simple*. Si au lieu d'une série d'objets nous en considérons deux

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,$$
$$a,\ b,\ c,\ \ldots,$$

et si nous parvenons à former un carré dont chaque case contienne un élément de la série (A) et un de la série (a), de telle sorte que ce carré soit magique par rapport aux objets de la première série, tout comme aux objets de la seconde, nous aurons ainsi obtenu un carré de magie *double*.

De même, avec trois séries (A), (a), (α), ou plusieurs, on aurait des questions de magie littérale *triple*, ou *multiple* en général.

Il est clair qu'une association quelconque, telle que $Aa\alpha$ par exemple, ne devra pas se retrouver deux fois dans le Tableau.

Ces problèmes s'étendent aux espaces à un nombre quelconque de dimensions.

La constitution des bi-abaques nous a permis de créer l'hypermagie numérique. Nous avons défini magiques les lignes qui contenaient un même nombre de fois tous les chiffres; les sommes résultant des blocs de bi-abaques donnant des nombres entiers, ces nombres, grâce à la non-répétition d'association, étant tous différents, l'hypermagie numérique en est résultée.

Pour la magie littérale il n'en est point ainsi, puisque les éléments considérés n'ont plus de valeurs numériques; tant que nous avons affaire à des modules premiers, comme 5 et 7 par exemple, si nous les disposons régulièrement (*fig.* 41), nous avons une direction de non-variation et m directions où l'on rencontre tous les objets. Cela nous donne donc la solution du problème de la magie littérale simple.

Fig. 41.

A	B	C	D	E
A	B	C	D	E
A	B	C	D	E
A	B	C	D	E
A	B	C	D	E

Inclinons de 45° la direction d'invariation (*fig.* 42); nous voyons que les directions orthogonales sont magiques, mais que la diagonale $+1x+1y$ ne l'est pas.

Fig. 42.

A	B	C	D	E
E	A	B	C	D
D	E	A	B	C
C	D	E	A	B
B	C	D	E	A

Faisons une alternance de colonnes de 2 en 2 nous obtenons la *fig.* 43 dans laquelle la seule direction non magique est $+3x+1y$.

Notre opération d'alternance n'a eu d'autre effet que de faire tourner la direction d'invariation.

Fig. 43.

A	C	E	B	D
E	B	D	A	C
D	A	C	E	B
C	E	B	D	A
B	D	A	C	E

Au lieu d'alterner par colonnes, nous aurions pu alterner par lignes et nous aurions obtenu la *fig.* 44

Fig. 44.

A	B	C	D	E
D	E	A	B	C
B	C	D	E	A
E	A	B	C	D
C	D	E	A	B

dans laquelle horizontalement les lettres ont conservé le même ordre.

Si au lieu de 5 nous prenons le nombre 7 et que nous fassions varier l'inclinaison de la direction des identiques, nous obtenons

Fig. 45.

A	B	C	D	E	F	G
A	B	C	D	E	F	G
A	B	C	D	E	F	G
A	B	C	D	E	F	G
A	B	C	D	E	F	G
A	B	C	D	E	F	G
A	B	C	D	E	F	G

A						
	A					
		A				
			A			
				A		
					A	
						A

A						
		A				
				A		
						A
	A					
			A			
					A	

A						
			A			
						A
		A				
					A	
	A					
				A		

A						
				A		
	A					
					A	
		A				
						A
			A			

A						
					A	
			A			
	A					
						A
				A		
		A				

A						
						A
					A	
				A		
			A			
		A				
	A					

A	A	A	A	A	A	A

Nous n'avons pas ajouté les autres lettres pour rendre la chose plus sensible; mais on doit par la pensée supposer qu'à la suite des A les autres lettres suivent dans le même ordre.

Si nous associons ensemble un certain nombre de ces Tableaux dans lesquels les verticales, les horizontales et les directions $\pm 1x + 1y$

ne soient pas des directions d'invariation, nous aurons une magie littérale multiple.

Nous pourrons comme application ranger sept officiers de différents grades de sept régiments, de sept pays différents, de telle manière que dans aucune direction orthogonale ou diagonale on n'en trouve deux du même régiment, du même grade, de la même nation.

Le nombre des directions pour $m = 7$ étant 8, les directions orthogonales ou diagonales étant au nombre de 4, il reste 3 pour la *multiplicité possible de la magie.*

Supposons que le module augmente; soit 11 par exemple; nous avons 12 directions, et si nous en retranchons 4 il nous en reste 8 disponibles. En général, $(m+1)-4 = m-3$ nous donne la multiplicité possible de la magie suivant les directions des lignes, des colonnes et des diagonales.

Mais cette propriété n'existe que pour les nombres premiers; quand m devient un nombre multiple, tout ce que l'on peut obtenir est une simple magie et non une hypermagie.

Voici un procédé qui permet, pour la magie littérale simple, d'obtenir des Tableaux magiques pour les puissances de 2; nous prendrons comme exemple le nombre 16 afin que l'on puisse bien se rendre compte de la marche suivie.

Désignons par

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ \ A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ E_1,\ F_1,\ G_1,\ H_1$$

les seize objets différents dont il s'agit. Cette notation est commode, comme on va le voir, parce que le module est pair, et que chaque lettre occupe le même rang dans chaque moitié de cette suite.

Écrivons-la maintenant

$$\begin{matrix} A, & B, & C, & D, & E, & F, & G, & H, \\ A_1, & B_1, & C_1, & D_1, & E_1, & F_1, & G_1, & H_1 \end{matrix}$$

On a ainsi les deux premières demi-lignes du Tableau ci-dessous (*fig.* 46).

Renversons l'ordre des colonnes, et nous avons la division du Tableau immédiatement inférieur.

Prenons l'ensemble obtenu; divisons-le par la médiane verticale; et renversons, individuellement, l'ordre des colonnes de chaque moitié; nous obtenons les quatre demi-lignes suivantes, et l'ensemble donne le premier quart du carré total; le quart est formé de quatre colonnes doubles (1), (2), (3), (4); permutons les colonnes simples dans chacune d'elles, et faisons ensuite tourner l'ensemble autour de la médiane horizontale; nous avons le quart inférieur de gauche du carré total.

Chaque quart situé à droite s'obtiendra au moyen du quart situé à sa gauche en faisant subir à celui-ci un double renversement orthogonal autour de ses deux médianes.

Le Tableau total sera ainsi formé; ce sera, comme on peut le vérifier, un carré semi-diabolique.

Fig. 46.

A	B	C	D	E	F	G	H	D_1	C_1	B_1	A_1	H_1	G_1	F_1	E_1
A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1	G_1	H_1	D	C	B	A	H	G	F	E
H	G	F	E	D	C	B	A	E_1	F_1	G_1	H_1	A_1	B_1	C_1	D_1
H_1	G_1	F_1	E_1	D_1	C_1	B_1	A_1	E	F	G	H	A	B	C	D
D	C	B	A	H	G	F	E	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1	G_1	H_1
D_1	C_1	B_1	A_1	H_1	G_1	F_1	E_1	A	B	C	D	E	F	G	H
E	F	G	H	A	B	C	D	H_1	G_1	F_1	E_1	D_1	C_1	B_1	A_1
E_1	F_1	G_1	H_1	A_1	B_1	C_1	D_1	H	G	F	E	D	C	B	A
F_1	E_1	H_1	G_1	B_1	A_1	D_1	C_1	G	H	E	F	C	D	A	B
F	E	H	G	B	A	D	C	G_1	H_1	E_1	F_1	C_1	D_1	A_1	B_1
C_1	D_1	A_1	B_1	G_1	H_1	E_1	F_1	B	A	D	C	F	E	H	G
C	D	A	B	G	H	E	F	B_1	A_1	D_1	C_1	F_1	E_1	H_1	G_1
G_1	H_1	E_1	F_1	C_1	D_1	A_1	B_1	F	E	H	G	B	A	D	C
G	H	E	F	C	D	A	B	F_1	E_1	H_1	G_1	B_1	A_1	D_1	C_1
B_1	A_1	D_1	C_1	F_1	E_1	H_1	G_1	C	D	A	B	G	H	E	F
B	A	D	C	F	E	H	G	C_1	D_1	A_1	B_1	G_1	H_1	E_1	F_1

Ce procédé n'a rien d'intéressant au point de vue théorique; nous ne le donnons que comme curiosité; il en sera de même de ce qui va suivre concernant les cubes de magie double $m = 4$.

Cubes magiques.

Formons l'ensemble des huit Tableaux ci-dessous :

Fig. 47.

I				II				III				IV			
A	D	B	C	C	B	D	A	D	A	C	B	B	C	A	D
B	C	A	D	D	A	C	B	C	B	D	A	A	D	B	C
C	B	D	A	A	D	B	C	B	C	A	D	D	A	C	B
D	A	C	B	B	C	A	D	A	D	B	C	C	B	D	A

a	*b*	*c*	*d*	*c*	*d*	*a*	*b*	*d*	*c*	*b*	*a*	*b*	*a*	*d*	*c*
d	*c*	*b*	*a*	*b*	*a*	*d*	*c*	*a*	*b*	*c*	*d*	*c*	*d*	*a*	*b*
b	*a*	*d*	*c*	*d*	*c*	*b*	*a*	*c*	*d*	*a*	*b*	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*d*	*a*	*b*	*a*	*b*	*c*	*d*	*b*	*a*	*d*	*c*	*d*	*c*	*b*	*a*

Les Tableaux supérieurs s'obtiennent en opérant sur le premier : par renversement vertical pour le deuxième, par renversement horizontal pour le troisième, et par double renversement pour le quatrième.

Chaque Tableau inférieur s'obtient au moyen du Tableau supérieur par un renversement diagonal.

Si l'on associe chaque Tableau de petites lettres avec celui qui est au-dessus, il n'y a aucune répétition d'association pour les lettres de même nature, c'est-à-dire que chacune des lettres d'un Tableau se trouve associée avec chacune des lettres de l'autre.

Si, cette opération étant exécutée pour chaque couple vertical, on superpose les quatre Tableaux composés, dans leur ordre de succession, on possède un cube de magie double qui a les propriétés suivantes.

Quelle que soit la section perpendiculaire à l'une des arêtes que l'on exécute, le carré qui en résulte est magique, c'est-à-dire que dans chaque orthogonale et dans chacune des diagonales, on trouve chacune des grandes lettres et chacune des petites.

Il est à remarquer : 1° Que si au lieu de superposer les Tableaux dans l'ordre I, II, III, IV, on les superpose dans l'ordre I, III, IV, II, on obtient un résultat analogue, ce qui fait deux solutions en partant du premier Tableau ;

2° Que chacun des Tableaux de la ligne inférieure peut s'associer sans répétition d'association avec chacun des Tableaux de la ligne supérieure.

Par conséquent, toute superposition des Tableaux de la première ligne est susceptible pour ce qui la concerne isolément de donner un cube magique, qui pourra sans inconvénient s'associer avec une superposition des Tableaux de la seconde ligne, également susceptible de donner un cube magique.

Comme chacun des Tableaux I, II, III, IV peut servir de base au cube et comme chaque base donne deux associations différentes, cela fournit huit solutions différentes pour chaque série isolée de Tableaux et par conséquent $8 \times 8 = 64$ pour les associations possibles des deux séries.

Comme enfin l'ordre successif des lettres A, B, C, D peut donner lieu à six combinaisons différentes, à la condition de garder A à la case origine, on aura $64 \times 6 = 384$ solutions.

Espace littéral magique à quatre dimensions.

Fig. 48.

A	D	B	C	C	B	D	A	D	A	C	B	B	C	A	D
B	C	A	D	D	A	C	B	C	B	D	A	A	D	B	C
C	B	D	A	A	D	B	C	B	C	A	D	D	A	C	B
D	A	C	B	B	C	A	D	A	D	B	C	C	B	D	A

C	B	D	A	A	D	B	C	B	C	A	D	D	A	C	B
D	A	C	B	B	C	A	D	A	D	B	C	C	B	D	A
A	D	B	C	C	B	D	A	D	A	C	B	B	C	A	D
B	C	A	D	D	A	C	B	C	B	D	A	A	D	B	C

D	A	C	B	B	C	A	D	A	D	B	C	C	B	D	A
C	B	D	A	A	D	B	C	B	C	A	D	D	A	C	B
B	C	A	D	D	A	C	B	C	B	D	A	A	D	B	C
A	D	B	C	C	B	D	A	D	A	C	B	B	C	A	D

B	C	A	D	D	A	C	B	C	B	D	A	A	D	B	C
A	D	B	C	C	B	D	A	D	A	C	B	B	C	A	D
D	A	C	B	B	C	A	D	A	D	B	C	C	B	D	A
C	B	D	A	A	D	B	C	B	C	A	D	D	A	C	B

Ce Tableau est entièrement symétrique par rapport à chacune des diagonales.

Qu'on empile les carrés dans l'ordre de succession, soit horizontalement, soit verticalement, on obtient un espace magique à quatre dimensions, c'est-à-dire que si l'on place les cubes soit en long, soit en travers, soit en hauteur, toute coupe *orthosectrice* faite dans la direction de la ligne des cubes donnera un cube magique.

Le Tableau est semi-diabolique, c'est-à-dire qu'en permutant les moitiés horizontales ou verticales soit sur ce Tableau, soit sur ceux que l'on obtient par cette opération, sa qualité magique se maintient sur les transformés.

Si l'on fait la même opération sur le cube relatif aux petites lettres, on a une magie double à quatre dimensions.

Cube magique composé.

Nous allons enfin, en terminant, donner la description d'un cube matériel que nous avons exécuté, et qui présente les propriétés les plus curieuses de magie littérale double.

Il se compose de 64 petits cubes, analogues aux dés à jouer; sur les faces de chacun d'eux figure une indication double, telle qu'une des quatre lettres M, N, P, Q, et une des quatre *m*, *n*, *p*, *q*.

Si l'on coupe ce cube par un plan perpendiculaire à l'une des arêtes, comme l'on voudra, la section qui devient alors apparente est un carré de magie littérale double.

Dans les 24 Tableaux que nous employons pour le représenter, les grandes lettres ont été remplacées par les quatre couleurs : *cœur, carreau, pique, trèfle*, d'un jeu de cartes; et les petites par les quatre couleurs : *noir, rouge, bleu, jaune*. Les figures employées sont uniformément des as.

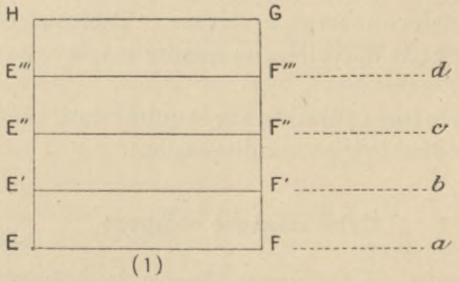
C'est en réalité une association de six cubes jouissant de propriétés magiques.

Le cube matériel étant exécuté, si on le pose sur une table comme on voudra, et si on le sépare comme on voudra par une coupe verticale, la figure qui apparaît est un carré magique de magie double.

Il en résulte en particulier un spectacle assez curieux, si l'on suppose que les 16 colonnes composant alors le cube soient isolées les unes des autres, disposées en quinconce, et qu'on vienne à tourner autour pour les regarder sous leurs divers aspects.

Pour l'intelligence de la figure, expliquons que les notations 1, 2, 3, 4, 5, 6 représentent les 6 faces des cubes, et *a*, *b*, *c*, *d* les sections successives que l'on peut faire parallèlement à chaque face. Si par exemple, le cube étant représenté en projection horizontale en EFGH, EF est la projection de la face 1, alors 1*a* représente cette face elle-même, et 1*b*, 1*c*, 1*d* les trois sections $E'F'$, $E''F''$, $E'''F'''$ pour un observateur placé à l'extérieur et regardant la face EF.

Fig. 49.



Le cube est magico-magique à un très haut degré, soit au point de vue des couleurs, soit en ce qui concerne la nature des as.

On peut remarquer notamment que tous les quarts de carrés sont magiques, comme on le voit rien qu'à l'inspection de la figure (*Pl. I*).

Bachet de Méziriac, qui aimait beaucoup à greffer des applications curieuses sur les théories mathématiques, aurait fait certainement de cette curiosité quelque *problème plaisant et délectable;* et de même qu'une fable fait passer un principe de morale, de même les espaces magiques peuvent intéresser à la théorie des nombres bien des personnes qui n'y auraient pas même jeté un coup d'œil.

Si quelqu'un prononçait le fameux : *A quoi bon?* on pourrait lui répondre : *A vous instruire en vous amusant.*

POSTFACE.

En terminant ce petit Volume qui résume le travail de plusieurs années, depuis 1883, et que je ne veux pas augmenter en y relatant les résultats de mes observations de Métaphysique et de Psychologie positives, je dois surtout insister sur les principes de ma méthode générale de recherche. Je n'étudie jamais que les questions qui m'intéressent; en commençant, je désire ignorer entièrement les travaux de mes prédécesseurs sur la même matière; et ce n'est que lorsque j'ai trouvé ma voie et que mon problème est résolu, que j'étudie ce qui a été obtenu par d'autres organisations cérébrales, pour faire une comparaison avec ce qui résulte de la mienne; et cela tant au point de vue scientifique qu'au point de vue métaphysique et psychologique; corrigeant alors ce que mes études ont de trop personnel, vu mon isolement.

Je recommande ma méthode à ceux qui inventent; c'est le seul moyen de faire quelque chose d'original et de sortir de l'ornière, en se dégageant des idées reçues. L'histoire tout entière des sciences est là pour montrer l'influence funeste des doctrines orthodoxes; il existe une sorte de moule officiel dont on varie peut-être les détails, mais dont le fond est immuable; on tourne dans un manège, sur une piste. Comme l'a si bien dit M. Charles Richet dans la belle leçon d'ouverture de son cours de Physiologie : « En fait de science, il faut être révolutionnaire ».

Et puis, c'est si bon de vagabonder au hasard, de suivre sa fantaisie sans licou ni bride, de s'arrêter sur ce qui plaît, passer sur ce qui ennuie, et, en tout et pour tout, d'être soi-même, dût-on paraître très inférieur ou même hérétique.

Il y aurait certainement encore beaucoup de choses à extraire des albums et des notes où ont été enregistrées au jour le jour mes études et mes expériences sur les espaces arithmétiques hypermagiques; mais, comme le dit Descartes en terminant sa *Géométrie :*

Mon dessein n'est pas de faire un gros Livre, je tâche plutôt de comprendre beaucoup en peu de mots... Ayant réduit à une même construction tous les problèmes d'un même genre, j'ai tout ensemble donné la façon de les réduire à une infinité d'autres diverses, et ainsi de résoudre chacun d'eux en une infinité de façons. ... Il ne faut que suivre la même voie pour construire tous ceux qui sont plus composés à l'infini, et j'espère que mes neveux me sauront gré non seulement des choses que j'ai ici expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement afin de leur laisser le plaisir de les inventer.

ERRATA.

Page 21, ligne 12, entre 3 et 5, *ajoutez* 4.

Page 37, ligne 12, *au lieu de* l'analyse, *lisez* analyse.

Page 88, ligne 3, *au lieu de* $\frac{1}{a^3}$, *lisez* $\frac{1}{a^2}$.

Page 104, ligne dernière, *au lieu de* ces deux directions, *lisez* ces directions.

Page 108, ligne dernière, *au lieu de* Note I, *lisez* Note II.

Page 141, ligne 9, en remontant, *au lieu de* multiple, *lisez* à base multiple.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Dédicace v

Préface vii

CHAPITRE I.

HISTORIQUE.

N°s.

1-8. Les carrés magiques 1

9-10. Les carrés diaboliques 7

CHAPITRE II.

ESPACES ARITHMÉTIQUES CONGRUENTS A PLUSIEURS DIMENSIONS.

11-12. Congruences 9

13. Lignes arithmétiques; congruences sur une ligne 13

14-15. Congruences sur un espace à deux dimensions. Carrés arithmétiques. 14

16. Cubes arithmétiques 15

17-18. Espaces arithmétiques en général. Groupes linéaires, binaires ou ternaires 15

19. Tores arithmétiques 17

CHAPITRE III.

ESPACES HYPERMAGIQUES EN GÉNÉRAL.

20-21. Notation $((m))$ 19

22. Des alternances 21

23. Lignes magiques 22

24-29. Carrés hypermagiques 23

30-31. Cubes hypermagiques 27

32-33. Espaces hypermagiques 29

34. Principe de l'étude des espaces hypermagiques 36

35. Magie et magico-magie 40

CHAPITRE IV.

CARRÉS HYPERMAGIQUES DE MODULE PREMIER.

36-37. Position fondamentale 42

38-39. Des abaques 46

40. Formules de construction 50

Nos.		Pages.
41.	Carrés de module 2	52
42.	Carrés de module 3	53
43.	Carrés de modules 5, 7, 11	54

CHAPITRE V.

CUBES ET ESPACES HYPERMAGIQUES DE MODULE PREMIER.

44.	Position fondamentale	56
45.	Directions; directions irréductibles	57
46.	Détermination d'un plan arithmétique	59
47-48.	Des abaques cubiques	60
49-50.	Formules de construction	62
51.	Cubes diaboliques	64
52-55.	Espaces hypermagiques de module premier	66

CHAPITRE VI.

ÉTUDE D'UN ESPACE DE MODULE COMPOSÉ.

56.	Observations générales	75
57.	Systèmes de numération à bases multiples	76
58-59.	Espace à une dimension de module pq	78
60-62.	Directions d'un espace à deux dimensions de module composé	82
63.	Des transformations	89
64.	Extension aux espaces à plus de deux dimensions	92

CHAPITRE VII.

ESPACES HYPERMAGIQUES DE MODULE pq.

65.	Méthodes générales pour un espace à deux dimensions	95
66.	Méthode des carrés mineurs	98
67-70.	Méthode des bi-abaques	101
71-74.	Deux méthodes de formation des bi-abaques	105
75.	Composition et décomposition d'un espace	109
76.	Espaces diaboliques de module pq	110
77.	Espaces à plus de deux dimensions	111
78.	Application au carré de 35	112

CHAPITRE VIII.

ESPACES HYPERMAGIQUES DE MODULE p^n.

79.	Considérations générales	119
80.	Méthode des quarts complémentaires	120
81.	Carrés de module 4	122
82.	Carrés de module 8	125
83.	Carrés de module 16	125
84.	Carrés de module 9	127
85.	Carrés de module 27	129
86.	Carrés de module 25	136
87.	Espaces à plus de deux dimensions	140

CHAPITRE IX.

ESPACES HYPERMAGIQUES DE MODULE COMPOSÉ QUELCONQUE.

Nos.		Pages.
88.	Applications des méthodes générales	141
89.	Méthode des carrés mineurs, pour $m = 4p$	142
90.	Carrés de module 12	143

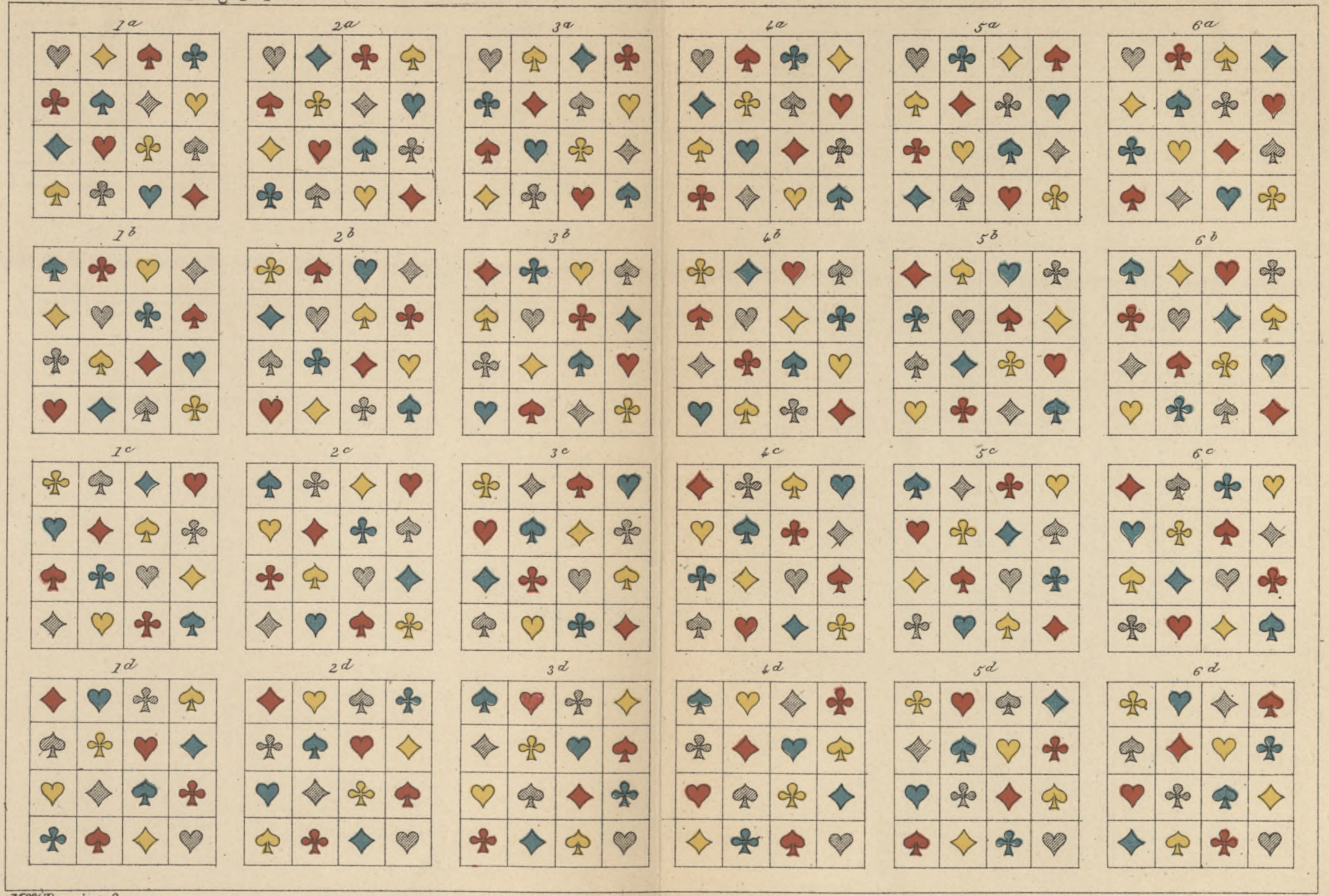
NOTES.

I.	Application à l'hypermagie de la théorie des directions	147
II.	Méthode des bordures	155
III.	Magie littérale et magies multiples	161

Postface	171
Errata	172
Table des matières	173

Planche I. — Cube magique composé.

20134 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.



M.me Perrin _ Sc.

Gauthier-Villars et Fils _ Éditeurs.

20822 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.