

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II

L. inw.

4983

I. Teil

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299135

Gauert

Techn. Büro  
Unger & Gauert  
staatl. vereid. Landmesser, Ingenieure,  
Schweidnitz.

N<sup>o</sup> 19

W<sub>2</sub>/  
411



# Hand- und Hülsbuch

zum

# Abstecken von Eisenbahn- und Strassenkurven

mit besonderer Rücksicht auf die

## Verwertung der Kegelschnitte

Nebst Anhang:

Theorie der Rechenschieber, Rechenschieber für Kreisabsteckung,  
Verständigungssignale.

Mit Tabellen, Figuren, Beispielen und einem Formular.

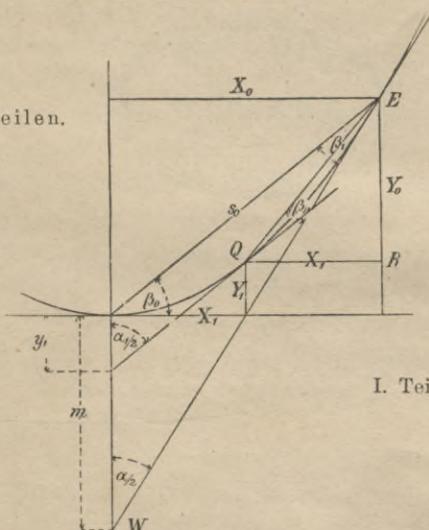
Zum praktischen Gebrauche für  
Eisenbahn- und Strassenbauingenieure und Vermessungsbeamte.

Bearbeitet von

**Karl Hecht,**

Ingenieur und Lehrer, vereid. Landmesser.

In zwei Theilen.



I. Teil: Text.

Motto:  
Wer die Sekunden  
ausnutzt, der nutzt das  
Leben aus.

Dresden,  
Verlag von Gerhard Kührtmann.  
1893.

W 2 / 411

Alle Rechte vorbehalten.



114983

Akc. Nr. 4026 50

## Vorwort.

Den Grundstein zur Bearbeitung des vorliegenden Werkes legte ich während der Tracierung der seiner Zeit projektierten Wien-Novibahn (Slavonien), bei welcher ich, um bei einigen Kurven eine günstige Massenverteilung zu erzielen, den Kreisbogen durch den Parabelbogen ersetzte. Eine mathematische Untersuchung in Bezug auf die Übergänge und eine Vergleichung mit der kubischen Parabel ergaben hierbei günstige Resultate. Das Ergebnis teilte ich später auch meinen Kollegen mit, welche letzteren wesentlich dazu beitrugen, dass ich im gleichen Sinne auch die beiden anderen Kegelschnitte als Ersatz für den Kreisbogen einer Untersuchung unterwarf. Das Gesamtergebnis derselben veröffentlichte ich später in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 8, 1891, Seite 207 etc. Damals lag bereits der Plan zu vorliegendem Werke fertig vor, und auch die Haupttabellen waren fast fertig gestellt. An der Berechnung der letzteren habe ich mehrere Jahre lang gearbeitet. Obgleich es ursprünglich in meiner Absicht lag, den Kreisbogen als besonderen Fall der Ellipse ganz ausser Acht zu lassen, so entschloss ich mich doch später zu einer Umrechnung der Kreistabellen; eine solche war dadurch geboten, dass ich, abweichend von den bestehenden und benutzten,\*) sämtliche Kreisformeln und Tabellen, um sie denen der Kegelschnitte anzupassen, auf die Tangentenwinkel (Winkelpunktswinkel,  $\sphericalangle P \sphericalangle$ ) beziehen musste. Der Vollständigkeit wegen fügte ich schliesslich noch die Haupttabellen der kubischen Parabel zu.

Die Berechnung der Tabellenwerte wurde mit Schrön's siebenstelligen Logarithmen und der zugehörigen Interpolationstafel\*\*) durchgeführt, dieselbe musste systematisch, ich möchte fast sagen fabrikmässig betrieben werden,

\*) Kröhnke, Absteckung der Kurven, Teubner, Leipzig; Absteckung von Kreisbögen v. O. Sarrazin und H. Oberbeck, Springer, Berlin; Strassen- und Eisenbahnkurven v. Morawitz, Hartleben's Verlag, Wien.

\*\*) Siebenstellige gemeine Logarithmen von Dr. Lud. Schrön; Interpolationstafel zur Berechnung der Proportionaltheile; beide bei Vieweg & Sohn, Braunschweig.

um eine möglichst günstige Übersicht der Tabellenwerte, Hilfstabellenwerte und deren Logarithmen zu bekommen, um namentlich das Ineinanderfliessen der einzelnen Werte besser zu übersehen. Dadurch waren von vornherein schon grobe Fehler ganz ausgeschlossen. Die Kontrollen liess ich theils auf graphischem Wege, theils aber auch durch einen anderen Rechnungsgang vornehmen, hier konnte eine Erleichterung Platz greifen, weil sich manche Tabellenwerte zu recht- und schiefwinkeligen Dreiecken ergänzen; so z. B. die Maximalwerte  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $t_0$ , mit dem Winkel  $\beta_0$  zu rechtwinkeligen Dreiecken etc. Interpolationen waren nur in einigen Fällen erforderlich, namentlich bei den Rektifikationswerten  $L$  der Hyperbel. —

Auf etwaige noch vorzunehmende Verbesserungen, Ergänzungen, die sich gewiss während der Anwendungen der Tabellen herausstellen, werde ich selbstverständlich gern eingehen; auch beabsichtige ich demnächst die im Anhang angeführte Rechenschieberkonstruktion der Kreisbogenabsteckung noch durch Hinzufügung ähnlicher der Kegelschnitte zu ergänzen. Die Korrekturen der Tabellen sind während des Druckes auf's sorgfältigste durchgeführt worden; und habe ich gleichzeitig noch einmal eine Vergleichung mit den Originaltabellen vorgenommen. — Verlagsbuchhandlung und Druckerei waren bemüht, den ausgedehnten Tabellensatz in ein möglichst handliches Format einzupassen. Ist dies allerdings nicht so gelungen, wie wohl wünschenswert, so lassen sich vielleicht in Zukunft auch in diesem Punkte noch Verbesserungen vornehmen, und werde ich jeden hierauf bezüglichen Vorschlag gern mit Dank in Berücksichtigung ziehen.

**Karl Hecht.**

Neustadt in Mecklenburg, Mai 1893.

# Inhalt.

	Seite.
Einleitung . . . . .	1
<b>Die Absteckung der Kegelschnitte und der Objekte in diesen Kurven.</b>	
<b>I. Die Absteckung der Kreisbögen.</b>	
1. Ausgang vom Winkelpunkt (Tab. K. I.) . . . . .	4
Beispiele . . . . .	6
2. Ausgang vom Bogenanfang oder Bogenende mittelst Sehne- tangentialwinkel (Tab. K. II.) . . . . .	7
Beispiel . . . . .	10
3. Absteckung mit Hülfe von Ordinaten und Abscissen.	
A. Allgemeines Verfahren (Tab. K. III.) . . . . .	12
Beispiel . . . . .	13
B. Anwendung auf die wichtigsten Radien (Tab. K. IV.) . . . . .	14
Beispiel . . . . .	14
4. Formeln anderer Absteckungsmethoden, Näherungsverfahren, Hülfs- tangentialwinkel, Sehnenlänge, Bogenhöhe, Absteckung durch ein umschriebenes Polygon . . . . .	14
Beispiele . . . . .	18
<b>II. Die Übergangskurven.</b>	
1. Theorie und Aufstellung der Gleichung der Übergangskurve, Schienenüber- höhung, Spurerweiterung (Tab. A.) . . . . .	19
2. Diskussion der kubischen Parabel als Übergangskurve und Verwertung der- selben in der Praxis (Tab. B. bis H.) . . . . .	24
Bemerkung. Kombinationen von Kreisbögen mit wachsenden Radien als Ersatz der kubischen Parabel.	
I. Für normalspurige Bahnen . . . . .	26
II. Für schmalspurige Bahnen . . . . .	28
Beispiele . . . . .	29
3. Die Kegelschnitte. Allgemeines über Verwendung derselben als Eisenbahnkurven	31
<b>III. Die Parabel als Eisenbahnkurve.</b>	
1. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen . . . . .	32
2. Umformung der Gleichungen für den praktischen Gebrauch (Tab. P. I, II.) . . . . .	34
3. Rektifikation der Parabel (Tab. P. I, II.) . . . . .	35
4. Absteckung der Parabel vom Bogenanfang oder Bogenende (Tab. P. IV.) . . . . .	37
5. Absteckung der Parabel vom Hilfsbogenpunkt Q (Tab. P. IV, V.) . . . . .	43
6. Absteckung von Bogenmitte mittelst Sehne- tangentialwinkel (Tab. P. III.) . . . . .	44
7. Beispiele und Anwendungen der Tabellen . . . . .	45

<b>IV. Die Hyperbel als Eisenbahnkurve.</b>		Seite.
1. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen . . . . .		47
2. Umformung der Gleichungen für den praktischen Gebrauch (Tab. H. I.) . . . . .		50
3. Rektifikation der Hyperbel (Tab. H. I.) . . . . .		52
4. Absteckung der Hyperbel vom Bogenanfang oder Bogenende durch Ordinaten und Abscissen mittelst der Asymptotenparallelen (Tab. H. I.) . . . . .		58
5. Absteckung von Bogenmitte durch Sehntangentenwinkel (Tab. H. I, II.) . . . . .		61
6. Hilfspgleichungen zur Absteckung vom Bogenanfang oder Bogenende und vom Bogenpunkt Q durch rechtwinkelige Koordinaten (Tab. H. III, IV, V.) . . . . .		62
7. Umformung der bisherigen Formeln durch geeignete Substitutionen . . . . .		64
8. Einrichtung der Tabellen Tab. H. I. bis H. VI. Beispiele . . . . .		67

<b>V. Die Ellipse als Eisenbahnkurve.</b>		
1. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen . . . . .		73
2. Umgestaltung der Gleichungen für den praktischen Gebrauch (Tab. E. I.) . . . . .		76
3. Rektifikation der Ellipse (Tab. E. I.) . . . . .		78
4. Absteckung der Ellipse vom Bogenanfang oder Bogenende durch rechtwinkelige Koordinaten (Tab. E. III.) . . . . .		82
5. Hilfspgleichungen zur Absteckung der Ellipse vom Bogenpunkt Q (Tab. E. IV, V.) . . . . .		84
6. Absteckungsverfahren mittelst Sehntangentenwinkel von Bogenmitte. — Maximalsehne (Tab. E. II.) . . . . .		84
7. Umformung der Gleichungen durch geeignete Substitutionen . . . . .		85
8. Einrichtung und Gebrauch der Tabellen Tab. E. I. bis VI. Beispiele . . . . .		87

<b>VI. Vergleichen, Kritiken und Folgerungen.</b>		
1. Allgemeine Vergleichen der Kegelschnitte unter sich . . . . .		89
2. Vergleichende graphische Darstellungen, Kritiken . . . . .		91
3. Theoretische Folgerungen bzw. nachträglich gefolgerte Sätze aus der analytischen Geometrie; Verallgemeinerung der Rektifikationsgleichungen und Näherungen hierfür . . . . .		96

<b>VII. Absteckung der Objekte in Eisenbahnkurven.</b>		
1. Objekte in Kreisbögen . . . . .		106
2. Objekte in der Übergangskurve . . . . .		107
3. Objekte in Kegelschnittkurven. Allgemeine Gleichungen . . . . .		108
A. In Parabelbögen . . . . .		109
B. In der Hyperbel . . . . .		110
C. In elliptischen Kurven . . . . .		110

## Anhang.

### Hilfsmittel für Absteckungen und Aufnahmen.

#### I. Die Konstruktion und Anwendung der Rechenschieber.

(Hierzu 2 lithogr. Tafeln.)

1. Allgemeines über Rechenschieber . . . . .	112
2. Der gewöhnliche Rechenknecht (Rechenschieber) . . . . .	112
3. Der logarithmische Schieber . . . . .	113
4. Der logarithmisch-trigonometrische Rechenschieber, die Sinus-, Kosinus-, Tangens-, Kotangens-Skalen . . . . .	114
5. Rechenschieberkonstruktionen für Potenzen, Wurzeln etc. . . . .	115
6. Verfassers Rechenschieber für Absteckung von Kreisbögen. . . . .	
A. Rechenschieber zur Absteckung von Ordinaten und Abscissen . . . . .	118
B. Rechenschieber zur Absteckung von Bogenmittenabstand und Tangentlänge . . . . .	121
C. Rechenschieber für Bogenlänge und Tangentenabschnitt . . . . .	122
7. Schieberskalen für Exponentialgleichungen und andere Rechenschieberkonstruktionen . . . . .	123

#### II. Die Verständigungssignale.

Optische und akustische Verständigungszeichen bei Feldarbeiten (mit Formular) . . . . .	124
---	-----



## Berichtigungen.

In der Tabelle H I Seite 124 bis 199 sind die Asymptotenwinkel  $\delta$  mit  $\psi$  bezeichnet.

Seite 46, 9. Zeile von oben  $\frac{R}{r} = 4,603$  statt  $\frac{R}{r} = 4,602$ .

12. „ „ „  $L = 4,13556.470 = 1943,713$  statt  $4,12556.470 = 1939,013$ .

Seite 47, 4. „ „ „  $y^0 = m = 0,035898.2700 = 96,92$  statt  $0,035482.2700 = 95,80$ .

Seite 61, 6. „ „ „  $\sin \delta$  statt  $\sin d$  in Gl. 63.

Seite 65, 3. „ „ „  $\tan \frac{\alpha_1}{2}$  statt  $\frac{\alpha_1}{2}$  in Formel 11.

Seite 67, 3. Zeile von unten  $\alpha/2 = 38^0 40'$  statt  $\alpha/2 = 48^0 40'$ .

Seite 68, 1. Zeile von unten 0,00134 statt 0,00144.

Seite 69, 11. und 13. Zeile von unten 1,012003 statt 1,011957.

Seite 70, 4. Zeile von oben  $\frac{t}{r} = 0,257922$  statt 0,258516 und

$$\frac{x_1}{r} = 0,190047 \text{ statt } 0,190476.$$

5. Zeile von oben  $\frac{y_1}{r} = 0,017532$  statt 0,017932.

13. Zeile von oben  $t = 0,257922.1200 = 309,506$  statt  $0,258516.1200 = 310,219$ .

20. Zeile von oben  $\frac{s_0}{r} = 0,442198$  statt 0,442178.

Seite 71, im 2. Beispiel  $\frac{m}{r} = 0,076602$  statt 0,073743, Bogenmittenabstand 22,981m.

Seite 72, Zeile 8 von oben  $L = 1,27007.80 = 101,606$  statt  $L = 1,28807.80 = 104,046$

Seite 84, in Gl. 84 muss es heissen  $\frac{\left(\frac{y}{r}\right)^2}{\left(\frac{b}{r}\right)^2}$  statt  $\frac{\left(\frac{y}{r}\right)^2}{\left(\frac{b}{r}\right)^2}$ .

Seite 86, in Formel 11  $\tan \frac{\alpha_1}{2}$  statt  $\frac{\alpha_1}{2}$ .

Seite 88, im Beispiel 1  $R/r < 6,190$  statt  $R/r < 5,947$  und

$$r > \frac{3000}{6,190} > 485 \text{ statt } > \frac{3000}{5,947} > 540.$$

Seite 89, Zeile 5 von oben Tabelle E III statt Tabelle E II;

im 2. Beispiel muss es heissen  $\frac{R}{r} < 1,820$  statt  $R/r < 1,787$ .

## Einleitung.

Die Aufgabe, welche der auf dem Felde operierende Ingenieur zu lösen hat, hängt ab von seiner amtlichen Bestimmung. Während der Katastralbeamte sich mehr in den Grenzen von ebenen Figuren mit Berücksichtigung der Bodenbeschaffenheit bewegt, ist es Aufgabe des tracierenden Ingenieurs ausser dem horizontalen geometrischen Zusammenhang der Erdoberfläche und der auf einer Strecke sich befindenden Objekte, auch die Höhenverhältnisse in Betracht zu ziehen. Während die geistigen Arbeiten des Geometers in Ausarbeitung der aufgenommenen Parzellen nach ihrer Kultur und ihrem Flächeninhalte, z. B. zur Verteilung und Bemessung der Steuern, Feststellung der genauen Grenzen bei Streitigkeiten, Teilung nach quantitativem und qualitativem Flächeninhalte bei Separationen besteht, hat der tracierende Ingenieur den körperlichen Teil der Erdoberfläche, um diesen gegensätzlichen Ausdruck zu gebrauchen, mit zu berücksichtigen, um bei der Lage der zukünftigen Verkehrsstrasse in Gemeinschaft anderer auf den Zweck derselben sich beziehenden Rücksichten, die billigste Verteilung der Körpermassen zu erzielen. Während der nivellierende Ingenieur nur die Höhenverhältnisse seiner Strecke erwägt, interessieren den Genieoffizier für gewisse Zwecke nur Distanzverhältnisse. — Zur Aufnahme einer geleisteten Erdarbeit begnügt sich der Ingenieur oftmals mit den primitivsten Höhen- und Längenmessinstrumenten, der einfachen Wasserwage und dem Messband, wohingegen der Topograph zur Aufnahme des Landes ein kompliziertes Instrument nötig hat.

Wenn auch in geistiger Beziehung die Branchen der Geodäsie vielfach auseinandergehen, in Ausübung der Praxis, auf dem Felde, reichen sie sich alle die Hand.

Die Gesamtlösung der Aufgabe, welche uns demnächst interessieren würde, besteht in der Aufnahme der künstlichen oder natürlichen Gegenstände der Erdoberfläche, in der graphischen Darstellung derselben im verkleinerten Massstabe, oder umgekehrt, in der Uebertragung graphischer geodätischer Darstellungen auf das Feld. Die geistige Bearbeitung, die Ausarbeitung der Aufnahmen überlassen wir den verschiedenen Branchen der Geodäsie, und verweisen auf diejenigen wissenschaftlichen Werke, welche sich speziell hiermit befassen. Wir werden uns jedoch erlauben bei unseren Betrachtungen den Eisenbahnbau ganz besonders zu berücksichtigen, und in einem besonderen Teil speziell auf die Tracierungsarbeiten im Eisenbahn- sowie im Strassenbau zurückzukommen.

Eine richtige Ausübung der praktischen Geodäsie in Verbindung mit einer richtigen Handhabung der sie unterstützenden Instrumente vom einfachsten bis zum kompliziertesten bildet die Grundlage für die sämtlichen nachfolgenden theoretischen Ausarbeitungen. Geometer und Eisenbahningenieur gehen mit den Daten der Aufnahme Hand in Hand an die Schwelle des Bureaus. Beide haben beispielsweise denselben Winkel gemessen, mit demselben Instrument, nach derselben Methode — jener für das Katasterbureau, dieser für die zukünftige Achse der Bahn. Fehlerhafte Aufnahmen, sowie fehlerhafte Absteckungen, infolge von Mangel an theoretischen oder praktischen Kenntnissen bei Gelegenheit der Feldarbeiten haben schliesslich immer pekuniäre Opfer zur Folge. Mathematische Kenntnisse, um sich in jeder Lage nach dem einen oder anderen Grundsatz, auf welchem die verschiedenen Aufnahms- und Absteckungsmethoden beruhen, auf dem Felde helfen zu können, ohne unverrichteter Sache erst noch einmal umkehren zu müssen, um das oder jenes Buch nachzuschlagen, sind daher die ersten Erfordernisse der praktischen Geodäsie. In zweiter Linie steht erst die Behandlung der Instrumente, der Umgang mit denselben. Im Lehr- und Studierzimmer ist genügend Gelegenheit geboten, die Einrichtung und Behandlung der Instrumente kennen zu lernen, aber den Umgang mit denselben eignet man sich erst auf dem Felde an, und erfordert es immerhin, namentlich im Anfang, einen gewissen Zeitaufwand, um den ersten einfachsten Manipulationen, dem richtigen Einstellen und dem genauen Ablesen gerecht zu werden. Die Kosten der oft genug hieraus erwachsenen Nacharbeiten werden in solchen Fällen gewöhnlich verschleiert irgend einem anderen Titel aufgebürdet. —

Die Kenntnisse der Mathematik, der Instrumente, sowie die Manipulationen mit letzteren bei Aufnahmen und Absteckungen, setzen wir dem Charakter dieses Werkes entsprechend, voraus.

Um dagegen eine Erleichterung in der Verwertung der oft umständlichen mathematischen Formeln anzubahnen, werden wir hierauf unser Augenmerk ganz besonders richten.

Ein planmässiger Vorgang in Lösung der Aufgabe, die künstlichen und natürlichen Gegenstände der Erdoberfläche graphisch darzustellen, ist leicht im Begriffe der Entstehung eines Körpers zu finden. Zur Bildung eines solchen benötigt man die Ausdehnungen desselben, die Grundfläche oder in Ermangelung den geometrischen Zusammenhang der Grundlinien und die Höhe. Auf die Feldmesskunst übertragen: Die Aufnahme oder Absteckung von Linien, Winkeln, Kurven, Figuren in erster Reihe, und die Aufnahme oder Absteckung von Höhen in zweiter Reihe.

Zur Erreichung der ersteren würden wir einen Abschnitt des ersteren Theils eines Werkes widmen, in den anderen Teil würden wir alles zusammenfassen, was sich auf Aufnahmen und Absteckungen von Höhen bezieht. Diese beiden Abschnitte mit selbstredend den nötigen Unterabteilungen würden als erster zugleich den elementaren Teil des Werkes bilden. In einem zweiten Teil des Werkes würden wir versuchen Unterabteilungen des elementaren Theiles zu kombinieren, um mit Hilfe der Mathematik und hierzu besonders konstruierter Instrumente die körperliche Oberfläche der Erde nach wenigstens zwei Ausdehnungen auf einmal fixieren zu können, wodurch die zeitraubenden Kombinationen des elementaren Theiles erspart werden, ein namentlich für besondere Aufnahmen wichtiges Verfahren. —

Es liegt nun aber einerseits ausser dem Bereich dieses Werkes mit dieser angedeuteten Ausführlichkeit nach dem eben vorgeführten Plan Schritt für Schritt nach Grundsätzen eines Lehrbuches vorzugehen, andererseits wären wir genötigt, die bereits in vielen Lehrbüchern\*) besprochenen Grundsätze in anderer Reihenfolge zu wiederholen. Wir werden daher den Tendenzen dieses Werkes als Hilfsbuch entsprechend, nur einzelne Kapitel des oben bemerkten elementaren Theils als neue Hilfsmittel vorführen, uns aber, wie schon angedeutet, in einem weiteren Theil dieses Werkes, wenn auch nicht als Lehrbuch, aber doch mit etwas mehr Ausführlichkeit widmen, als einem Hilfsbuch zukommen würde. Zum genauen Verständnis des Ganzen können wir freilich nicht umhin in beiden Theilen bereits Bekanntes, als unbedingt zum Zusammenhang nötig, vorführen zu müssen.

---

\*) Grundsätze d. trig. Vermessungen v. Dr. Franke, Leipzig. Bauernfeind, Vermessungskunde, Braunschweig. Dr. G. Hunäus, prakt. Geometrie, G. Kühnmann, Dresden.

# Die Absteckung der Kegelschnitte und der Objekte in diesen Kurven.

## I.

### Die Absteckung der Kreisbögen.

#### 1. Ausgang vom Winkelpunkt.

Bei Aufnahme oder Absteckung eines Terrains irgend welcher Art, oder zu irgend einem Zweck, ist es zunächst erforderlich von festen Punkten ausgehend eine Axe, eine Ausgangslinie, zu markiren, auf welche Basis XY die sämtlichen seitlichen Gegenstände bezogen werden. Bei kleinen Aufnahmen genügt hierbei eine Einmessung durch rechte Winkel mittelst Kreuzscheibe oder Winkelspiegel a, b, c, d, e (S. Fig. 1); grössere erheischen die Anwendung eines genaueren Winkelinstrumentes. Wenn es die Terrainverhältnisse gestatten, behält man eine einzige Gerade als Axe durch das ganze aufzunehmende Terrain bei, da jede Abweichung immer eine Ungenauigkeit nach sich zieht, besonders, wenn nicht eine hinreichende Kontroll-Beziehung auf ein fixes Object — die Verlängerung der Axe YZ trifft das Haus g — vorhanden ist, andernfalls muss man von einer gebrochenen Linie, aus, unter irgend einem Winkel mit einander verbundenen, den Terrainverhältnissen angepassten Geraden zusammengesetzt, als Axe ausgehen.

Eine solche gebrochene Axe, X, Y, Z, U dient nun wiederum zu demselben Zweck, wie jede andere gerade Axe. Sie bildet den Ausgang der Operationen, d. b. an dieselbe schliesst sich unter entsprechenden Winkeln das ganze seitliche Terrain an. f ist bestimmt durch die Länge Yf und den Winkel ZYf. Zur Kontrolle ist es geboten denselben Gegenstand von mehreren Seiten einzumessen oder einzuvisiren; z. B. f von Y und von Z. Im Grunde genommen ist letzteres eine Abzweigung in ganzen Figuren von der Hauptaxe. Am Besten eignen sich hierzu immer die Dreiecke und unterstützt die Mathematik den operirenden Ingenieur durch Kontroll-Rechnungen ganz besonders. Bei den Triangulationen ist dies letztere Princip im vollen Masse ausgebildet.

Mit Beziehung auf die Operationen, welche sich an die Axe anschliessen, wird dieselbe Operationsaxe oder Operationsbasis genannt; im letzteren Falle dient sie zugleich als Beziehungsaxe für die Höhenverhältnisse des aufzunehmenden

menden Terrains durch geeignete Querprofile. Bei entsprechender Länge der Operationsaxe ist es nötig, zur näheren Beziehung resp. übersichtlichen Darstellung der Längenverhältnisse nach, dieselbe einzuteilen.

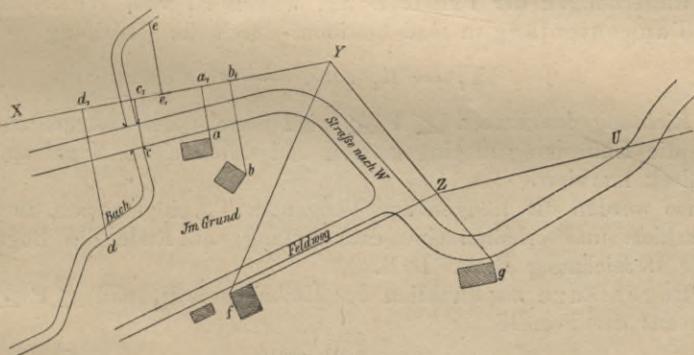
Die einfachste Bezeichnung ist hierbei die in der horizontalen Ebene liegenden Bruchstellen Z, Y, welche man Winkelpunkte nennt, der Reihe nach mit Zahlen zu kennzeichnen. Weitergehend und am übersichtlichsten ist die Einteilung in gleiche Längen-Profile. Letzterer Ausdruck deutet die Verwendung der Axe als Höhenbasis an. —

Nach vollendeter Aufnahme, die wir hier als genügend zum Verständnis dieses Kapitels nur angedeutet haben wollen, erfolgen die Arbeiten im Bureau.

Die Operationsbasis bleibt auf dem Felde markiert, während die Kennzeichen der seitlichen Operationen, mit Ausnahme besonderer wichtiger Höhenpunkte, Fixpunkte, vorläufig ausser acht gelassen werden.

Die zunächst liegende Bureauarbeit ist die Auftragung der Aufnahme — die graphische Darstellung des aufgenommenen Terrains. Dann folgt erst die

Fig. 1.



eigentliche Bearbeitung der der Aufnahme zu Grunde liegenden Idee. Setzen wir das Projekt eines zukünftigen Verkehrsweges voraus, auf welches sich das Nachfolgende in diesem Abschnitt besonders bezieht, so haben wir dann in den ausgearbeiteten Plänen schon ein vollständiges Bild desselben vor uns. —

Nach erlangter Genehmigung zur Bauausführung interessirt uns nun besonders die Uebertragung der Axe — Traçe — auf das Feld, d. h. die Absteckung des zukünftigen Verkehrsweges.

Die noch auf dem Felde markierte Operationsbasis erleichtert diese, dient wohl auch selbst als ein Teil derselben. —

Eine der nun jetzt öfter wiederkehrenden Operationen ist die Absteckung der Kurven.

Mit den für den praktischen Gebrauch geeignetsten Methoden derselben werden wir uns zunächst eingehender befassen, und dieselben möglichst zu einer Tabellenform passend, bearbeiten.

Als Grundlage dient uns ein Axenkomplex C W<sub>1</sub> W<sub>2</sub> N (Fig 2), bestehend aus den der Länge nach bekannten drei Geraden C W<sub>1</sub>; W<sub>1</sub> W<sub>2</sub>; W<sub>2</sub> N, und den Halbmessern R<sub>1</sub> R<sub>2</sub> der sich an die Zwischengerade G anschliessenden Kreisbögen. Die Terrainverhältnisse sind entscheidend für den Gang der Feldoperationen.

Wir setzen voraus, dass der Winkelpunkt W<sub>1</sub> behufs Aufstellung des Instrumentes zugänglich ist und visieren nun nach der Richtung C und nach W<sub>2</sub> eventuell einem Zwischenpunkt der Geraden W<sub>1</sub> W<sub>2</sub> oder einem Kontrollpunkt W<sup>1</sup>.

Aus diesen Visuren ergibt sich der Winkelpunktswinkel ( $\angle P \angle$ )  $\alpha_1$ .

Mit Hilfe der Grössen R<sub>1</sub>  $\alpha_1$  sind wir jetzt in der Lage, weitere drei Bogenpunkte zu fixieren. Bogenanfang  $\overline{B A_1}$  Bogenende  $\overline{B E_1}$  und den Abstand m der Bogenmitte vom  $\angle P$ .

Letzterer, der Bogenmittenabstand findet sich aus dem rechtwinkligen Dreieck O  $\overline{B A_1}$  W<sub>1</sub>

$$m = R_1 \left( \frac{1}{\sin \frac{\alpha_1}{2}} - 1 \right)$$

Die Entfernungen der Punkte  $\overline{B A_1}$ , und  $\overline{B E_1}$  vom Winkelpunkt W<sub>1</sub>, Die Tangentenlängen sind bestimmt durch die Gleichung

$$T_1 = R_1 \cotg. \frac{\alpha_1}{2}$$

Die Richtung des halben  $\angle P \angle$  wird mittelst des Instrumentes angeschlagen, die Entfernung m eingemessen und durch einen Nagel am betreffenden Pflöck markiert.

Ebenso werden die Längen der Tangenten T<sub>1</sub> eingemessen, in gleicher Weise markiert und erhalten eine dem Anfang und Ende des Bogens entsprechende Bezeichnung B A, B E.

Die Bogenlänge als Funktion des Halbmessers R<sub>1</sub> und  $\angle P \angle \alpha_1$  ergibt sich aus der Formel

$$L_1 = R_1 \pi \frac{180 - \alpha_1}{180},$$

wobei die Minuten und Sekunden des  $\angle \alpha$ , als Dezimalbruch einzuführen sind. Zur Erleichterung der Rechnung dient Tabelle KI, in welcher für den Halbmesser R = 1 und für die  $\angle P \angle \alpha = 60^\circ$  bis  $180^\circ$  von Minute zu Minute die Grössen (m/R), (T/R), (L/R) berechnet sind; und zwar ergibt sich aus folgenden Formeln allgemein

$$1) \dots \dots \dots \left( \frac{m}{R} \right) = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} - 1$$

$$2) \dots \dots \dots \left( \frac{T}{R} \right) = \cotg. \frac{\alpha}{2}$$

$$3) \dots \dots \dots \left( \frac{L}{R} \right) = \pi \frac{180 - \alpha}{180}$$

z. B. Es sei  $\alpha = 121^\circ 44'$ , R = 500 m.

Folgt nach Formel 1, respektive aus Tabelle KI

$$\frac{m}{R} = 0.144833, \text{ demnach}$$

$$m = 500 \cdot 0.144833 = 72.416 \text{ m};$$

nach Formel 2.,

$$\frac{T}{R} = 0.557355,$$

$$T = 500.0.557355 = 278.677 \text{ m};$$

nach Formel 3.,

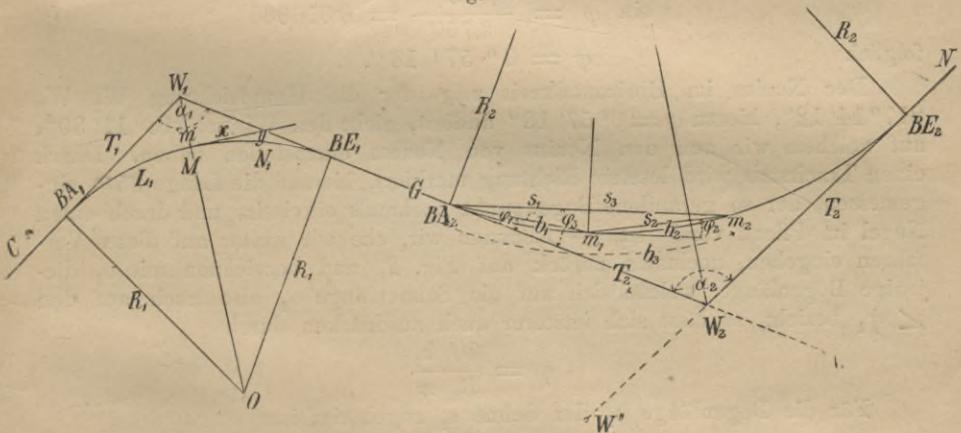
$$\frac{L}{R} = 1.016945 \text{ und}$$

$$L = 500.1.016945 = 508.472 \text{ m}.$$

**2. Ausgang vom Bogenanfang oder Bogenende mittelst Sehntangentenwinkel.**

Begnügen wir uns vorläufig mit dem Bogenpunkt M des ersten Bogens und setzen die Arbeit zum anderen Bogen übergehend fort, so benötigen wir zunächst die Länge G der Zwischengeraden.

Fig. 2.



Die Tangente  $T_2$  ist bestimmt durch Gleichung 2, in welche für  $T$  und  $\alpha$  die Werte  $T_2$  und  $\alpha_2$  gesetzt werden; aus der Differenz der Längen  $\overline{W_1 W_2}$  und beider Tangenten  $T_1$  und  $T_2$  folgt die Länge der Zwischengeraden

$$G = \overline{W_1 W_2} - (T_1 + T_2) \dots \dots \dots 4)$$

Der Endpunkt derselben ist zugleich Bogenanfang  $B A_2$  und in der üblichen Weise zu markieren.

Terrainschwierigkeiten verhindern uns jetzt Aufstellung im  $\angle P W_2$  zu nehmen; wir müssen daher versuchen, den zweiten Bogen nach einem anderen Verfahren abzustecken.

Zu dem Ende begeben wir uns mit dem Instrumente auf Bogenanfang  $B A_2$ . Von diesem Punkt und von der uns bekannten Richtung  $B A_2 W_2$  respective  $\overline{B A_2 W_1}$  als Basis ausgehend, stellen wir zunächst erst wieder unsere Bestimmungsgleichungen auf.

Aus der Fig. 2 folgt mit Beziehung auf den Bogenpunkt  $m$ , für die Sehnenlänge  $s_1$  und dem zugehörigen Sehntangentenwinkel  $\varphi_1$

$$\sin \varphi_1 = \frac{s_1}{2 R_2}$$

In dieser Formel ist uns  $R_2$  bekannt, für  $s_1$  wählen wir eine beliebige Sehnenlänge und finden  $\varphi_1$  dann durch Rechnung.

Im Felde notieren wir uns den  $\sphericalangle$  im Horizontalkreis, welcher sich auf die Richtung  $W_1 W_2$  bezieht, addieren (oder subtrahieren, je nach der Lage des Bogens) den berechneten  $\sphericalangle \varphi_1$ , markieren die so gefundene Richtung durch einen Traçirstab, messen  $s_1$  von B  $A_2$  aus ein und der Endpunkt der Sehne  $s_1$  in der markierten Richtung ist ein Bogenpunkt  $m_1$ .

Ein anderer Bogenpunkt  $m_2$  für eine andere Sehne  $s_2$  passend, findet sich analog durch

$$\sin \varphi_2 = \frac{s_2}{2 R_2}$$

Allgemein ist daher für diese Art der Bogenabsteckung

$$5) \dots \dots \dots \sin \varphi = \frac{s}{2 R}$$

z. B. für den Bogen vom Radius  $R = 750^m$  und  $25^m$  Sehnenlänge ist

$$\sin \varphi = \frac{25}{2,750} = 0,016666$$

folglich

$$\varphi = 0^\circ 57' 18''.$$

Der Nonius im Horizontalkreis zeige für die Hauptrichtung  $W_2 W_1$   $217^\circ 14' 12''$ , hierzu  $\varphi = 0^\circ 57' 18''$  addiert, giebt den Winkel  $218^\circ 11' 30''$ , auf welchem wir nun den Nonius von Neuem einzustellen haben. Durch einen Traçirstab wird letztere Richtung markiert, hierauf die Länge  $25^m$  eingemessen, der so gefundene Bogenpunkt nochmals einweiseirt und durch einen Nagel im Pflock versichert. — Kommen wir, ehe wir weiter auf dieses Verfahren eingehen, nochmals zurück auf Fig. 2, und bezeichnen mit  $b_1$  diejenige Bogenlänge, welche sich auf die Sehnenlänge  $s_1$  also auch auf den  $\sphericalangle \varphi_1$  bezieht, so lässt sich letzterer auch ausdrücken durch

$$\varphi = \frac{90 b_1}{R_2 \pi}$$

Für die Bogenlänge  $b_2$  der Sehne  $s_2$  zugehörig, ist

$$\varphi_2 = \frac{90 b_2}{R_2 \pi}$$

Allgemein ist daher der Sehnentangentenwinkel  $\varphi$  bezogen auf den dieselbe umspannenden Bogen  $b$

$$6) \dots \dots \dots \varphi = \frac{90 b}{R \pi}$$

z. B. für Radius  $R = 275$  und eine Bogenlänge  $b = 35^m$  ist

$$\varphi = \frac{90 \cdot 35}{275 \cdot 3 \cdot 1415926} = 3,646 \text{ Grad.}$$

$$\text{folglich } \varphi = 3^\circ 38' 45''$$

Es ist einleuchtend, dass letztere Formel für den praktischen Gebrauch nicht in demselben Sinne verwertet werden kann, wie Formel (5), da die Formel (6) die Messung im Bogen, also einen Teil des Bogens schon als bekannt voraussetzt, und die Differenz zwischen Sehnen und Bogenlängen grösser wird, je kleiner der Radius und je grösser die Sehnen- resp. die Bogenlängen. Für kleine Bogenlängen, namentlich bei grossem Halbmesser kann man bei der Absteckung die gleiche Sehnenlänge substituieren; indem

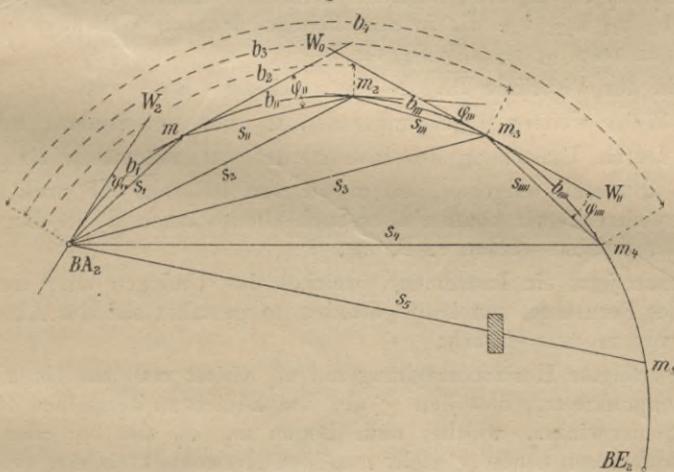
der hierbei gemachte Fehler, die eben bemerkte Differenz, für die Praxis verschwindet.

Wir werden im folgenden nachweisen, dass durch geeignete Kombination beider Formeln bei der Absteckung eines Bogens von seinem Bogenanfang resp. Bogenende aus, wir allen in der Praxis vorkommenden Fällen Genüge leisten können. —

Es sind in Tabelle K II für die hauptsächlich vorkommenden Radien von  $R = 40^m$  bis  $R = 2000^m$ , sowie für die Bogenlängen  $b = 0.1$  bis resp.  $b = 100^m$  die zugehörigen Sehnentangentenwinkel in tabellarischer Uebersicht zusammengestellt, und in der Rubrik s die den Bogenlängen analogen Sehnenlängen auf Millimeter genau berechnet.

Mit Hilfe dieser Tabelle können wir jetzt nach Formel 5 die Absteckung des zweiten Bogens (Fig. 2) erleichtern, vorausgesetzt, dass die Terrainverhältnisse das Einmessen der Sehnen gestatten. Sind jedoch Hindernisse

Fig. 3.



vorhanden wie in Fig. 3 angenommen wurde, so müssen wir, wie schon angedeutet, ein combinirtes Verfahren einschlagen.

Aus einem bekannten Satz der Geometrie folgt nämlich, dass, wenn Fig. 2 die Summe der Sehnentangentenwinkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  gleich ist dem dem Sehnentangentenwinkel  $\varphi_3$  das Gleiche auch von den sie abgrenzenden Bogenlängen gilt.

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 \quad \text{und} \\ b_1 + b_2 = b_3$$

Wir können demnach durch Addition mehrerer Sehnentangentenwinkel (S. Fig. 3)

$\varphi_I \varphi_{II} \varphi_{III} \varphi_{IV}$ , welche den Bogenlängen  $b_I b_{II} b_{III} b_{IV}$  entsprechen, den Sehnentangentenwinkel  $\varphi_4$  finden, welcher dem Bogen  $b_4$  oder der Sehne  $s_4$  entspricht.

$$\left. \begin{aligned} \text{Wenn } \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{IV} = \varphi_4, \text{ so ist auch} \\ b_I + b_{II} + b_{III} + b_{IV} = b_4 \end{aligned} \right\} \quad \gamma)$$

Nehmen wir nun vorläufig an, dass die einzelnen Sehnenlängen  $s_I s_{II} s_{III} s_{IV}$  für die gleichen Bögen beim Abstecken der Bogenpunkte  $m_1 m_2$

$m_3$   $m_4$  substituiert werden können, dass also  $s_I = b_I$ ,  $s_{II} = b_{II}$ ,  $s_{III} = b_{III}$ ,  $s_{IV} = b_{IV}$ , so suchen wir in der Tabelle für den Bogen  $b_I$  den  $\angle \varphi_I$ , stellen den Horizontalkreis auf  $\varphi_I$  von der Haupttangentialrichtung ausgehend ein, visieren vom Bogenanfang aus in der Richtung  $m_I$  und messen  $b_I$ , (in Wahrheit die Sehne  $s_I$ ), erhalten somit dem Punkt  $m_1$ . Ebenso suchen wir in der Tabelle für den Bogen  $b_{II}$  den  $\angle \varphi_{II}$ , addieren diesen zu  $\varphi_I$ , stellen den Horizontalkreis auf die Summen der  $\angle \varphi_I + \varphi_{II}$  ein, und visieren vom gleichen Standpunkt in der Richtung  $m_2$ , messen dann von  $m_1$  aus die Bogenlänge (resp. wiederum die Sehne  $s_{II}$ ) ein; der Endpunkt dieser letzteren in der Visurlinie  $\overline{BA_2}$   $m_2$  giebt den Punkt  $m_2$ . Auf gleiche Weise findet sich  $m_3$  und  $m_4$ . Das Verfahren lässt sich dann ungemein vereinfachen, wenn man die Sehnen- bzw. Bogenlängen unter sich gleich annimmt. Weichen nun aber die einzelnen Sehnenlängen  $s_I$   $s_{II}$   $s_{III}$   $s_{IV}$  um einen für die Praxis empfindlichen Werth von den Bogenlängen  $b_I$   $b_{II}$   $b_{III}$   $b_{IV}$  ab, welche Differenz am leichtesten aus der Tabelle zu ersehen ist, so misst man von den bezüglichen Punkten  $m_1$   $m_2$   $m_3$   $m_4$  aus, natürlich unter Beibehaltung der  $\angle \varphi_I$   $\varphi_{II}$   $\varphi_{III}$   $\varphi_{IV}$  statt  $b_I$   $b_{II}$   $b_{III}$   $b_{IV}$  die in der Tabelle daneben stehenden wirklichen Sehnenlängen resp.  $s_I$   $s_{II}$   $s_{III}$   $s_{IV}$  ein. —

Das in der Visurlinie  $\overline{BA_2}$  —  $m_5$  stehende Haus verhindert jetzt in derselben Weise weitere Bogenpunkte  $m_5$ ,  $m_6$  von der Stellung  $\overline{BA_2}$  einzuvisieren. Durch Umstellung des Instrumentes auf Bogenende  $\overline{BE_2}$  könnten wir dieses Hindernis umgehen, indem wir von  $\overline{BE_2}$  aus die noch fehlenden Punkte bestimmen; wir können aber auch ebenso einen der 4 Bogenpunkte als Umstellungspunkt wählen z. B.  $m_3$ .

Hat man jetzt ein Instrument, welches das Umlegen oder das Durchschlagen des Fernrohres um  $180^\circ$  gestattet, so gestaltet sich das Absteckungsverfahren von  $m_3$  aus einfach:

Nach erfolgter Horizontalstellung auf  $m_3$  visiert man auf einen der früheren Bogenpunkte  $m_2$ , liest den  $\angle$  ab, und addiert zu demselben denjenigen Sehnentangentenwinkel, welcher dem Bogen  $m_3$   $m_2$  also  $b_{III}$  oder  $s_{III}$  entspricht. Auf diesen neuen  $\angle$  stellt man den Horizontalkreis ein, erhält somit eine Hilfstangentialrichtung  $W_0$  und durch Umlegen des Fernrohres die Richtung  $m_3$   $W_0$ , welche nun ihrerseits als Basisrichtung für die fehlenden Punkte  $m_5$   $m_6$  . . . auch zur Kontrollierung des Punktes  $m_4$  dient. Das Verfahren bleibt jetzt für die Punkte  $m_5$  und  $m_6$  dasselbe, wie oben. Gestattet das Fernrohr die obige Bequemlichkeit nicht, so muss der Nonius, beziehungsweise das Fernrohr auf  $180^\circ - \varphi$  eingestellt werden, um zu der Hilfstangentenvisur  $m_3$   $W_{II}$  zu gelangen.

Folgendes Beispiel diene zur Erläuterung: Es sei ein Bogen dem Radius  $R = 200^m$  entsprechend vom Bogenanfang  $\overline{BA_2}$  auszustecken und zwar der Reihe nach für die Bogenpunkte vom Bogenanfang ausgerechnet  $+ 5$   $+ 15$ ,  $+ 45$ ,  $+ 67.6$ ,  $+ 75$ ,  $+ 90$ ,  $+ 130$ , welche den Bogenlängen  $b_I = 5$ ,  $b_{II} = 10$ ,  $b_{III} = 30$ ,  $b_{IV} = 22.6$ ,  $b_V = 7.4$ ,  $b_{VI} = 15$  und  $b_{VII} = 40^m$  entsprechen.

Wir stellen das Instrument auf Bogenanfang und finden

die Ablesung in der Haupttrichtung  $\overline{BA_2}$   $W_2$ . 56° 55' 0"

Die erste Bogenlänge 5<sup>m</sup> giebt den  $\angle$ , 0° 42' 58.5"

es ist folglich der Nonius des Horizontalkreises einzustellen auf den  $\angle$  57° 37' 58.5"

57° 37' 58.5"

und am Ende der von BA<sub>2</sub> in der Richtung m<sub>1</sub> eingemessenen 5<sup>m</sup> der Bogenpunkt m<sub>1</sub> zu fixieren.

Der Bogenlänge b<sub>II</sub> = 10 entspricht  $\varphi_{II} =$

1° 25' 57.0"

Wir messen von m<sub>1</sub> nach m<sub>2</sub> 10<sup>m</sup> Länge (genau 1<sup>mm</sup> weniger) ab — aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die Differenz zwischen Sehnen und Bogen 1<sup>mm</sup> beträgt — und visieren den Punkt m<sub>2</sub> am Ende dieser Länge in der neuen Richtung auf den  $\sphericalangle$  ein

59° 3' 55.5"

Die folgende Bogenlänge b<sub>III</sub> = 30<sup>m</sup>, welche der Sehnenlänge aus Tabelle 29.974<sup>m</sup> entspricht, kommt der  $\sphericalangle$

4° 17' 51.0"

zu; es ist also die horizontale Visur einzustellen auf und am Ende der Sehne 29.974<sup>m</sup> der Punkt m<sub>3</sub> zu markieren.

63° 21' 46.5"

Eine Kontrolle können wir jetzt dadurch bewerkstelligen, dass wir den Punkt m<sub>3</sub> direkt vom Bogenanfang abstecken. Die Summe der 3 Bogenlängen beträgt 45<sup>m</sup>. Dieser entspricht laut Tabelle einem  $\sphericalangle$  von

6° 26' 46.5"

hierzu die Anfangsstellung des Horizontalkreises

56° 55' —"

resultiert wie oben

63° 21' 46.5"

Der Bogenlänge b<sub>3</sub> = 45<sup>m</sup> entspricht die Sehnenlänge s<sub>3</sub> = 44.909<sup>m</sup>, welche von BA<sub>2</sub> einzumessen ist und welche an ihrem Endpunkte den gleichen Bogenpunkt m<sub>3</sub>, in der bereits berechneten Visurlinie 63° 21' 46.5" liefern muss.

63° 21' 46.5"

Die nächste Bogenlänge ist 22.6<sup>m</sup>, der zugehörige  $\sphericalangle$   $\varphi_{IV}$  findet sich durch Addition nach der Tabelle

für 20<sup>m</sup> Bogenlänge

2° 51' 54.0"

„ 2 „ „

0° 17' 11.4"

„ 0.6 „ „

0° 5' 9.4"

gibt die horizontale Ablesung für m<sub>4</sub>

66° 36' 1.3"

Die Länge der von m<sub>3</sub> aus einzumessenden Sehne der Bogenlänge 22.6 zugehörig, findet sich aus den Bogenlängen 20<sup>m</sup> und 25<sup>m</sup> hinreichend genau durch Interpolation 22.492<sup>m</sup>: Für die nächste von m<sub>4</sub> aus einzumessende Bogen- oder diesmal gleiche Sehnenlänge b<sub>V</sub> = 7.4<sup>m</sup> ist der Zuschlagswinkel  $\varphi_V$

für 7.0<sup>m</sup>

1° 0' 9.9"

„ 0.4 „ „

0° 3' 26.3"

Die horizontale Visur ist einzustellen auf

67° 39' 37.5"

und am Ende der Länge 7.4 von m<sub>4</sub> aus eingemessen der Punkt m<sub>5</sub> einzuvisieren.

Wir sind jetzt genötigt, das Instrument auf m<sub>5</sub> umzustellen, und visieren nach vollendeter Horizontalstellung den Punkt m<sub>3</sub> an; die Ablesung, welche sich ergibt, sei die Entfernung m<sub>5</sub> m<sub>3</sub> beträgt 22.6 + 7.4 = 30<sup>m</sup>; für 30<sup>m</sup> ergibt sich nach Tabelle als Sehnen tangentialen Winkel

220° 4' 30"

4° 17' 51"

Die Hilfsvisur (m<sub>3</sub> W<sub>0</sub> Fig. 3 entsprechend) folglich

224° 22' 21.0"

224° 22' 21"

Das Fernrohr durchgeschlagen ist der letztere der  $\sphericalangle$  welcher der Visurlinie der Hülfs tangente ( $m_3 W_0$  Fig. 3) entspricht. Statt dessen kann man das Fernrohr um  $180^\circ - 4^\circ 17' 51'' = 175^\circ 42' 9''$  drehen und den Nonius auf

$$220^\circ 4' 30'' - 175^\circ 42' 9'' = 44^\circ 22' 21''$$

einstellen; dann  $180^\circ$  zu

$$44^\circ 22' 21'' \text{ addirt,}$$

folgt, wie oben

224° 22' 21"

Die noch fehlenden Bogenpunkte  $m_7, m_6$  ergeben sich, wie oben;

Zunächst  $m_6$  durch Addition die zum Bogen  $b_{VI}$  gehörigen  $\sphericalangle \varphi_{VI}$  zur Hauptvisur.

2° 8' 55.5"

Die Länge  $15^m$  (resp. 14.998) wird von  $m_5$  eingemessen und in die Visur die Summe beider  $\sphericalangle$  am Ende obiger Länge der Bogenpunkt  $m_6$  einvisiert.

226° 31' 16.5"

Dem letzten Punkte  $m_7$  in der weiteren für  $b_{VII} = 40^m$  einzumessenden Entfernung von  $39.936^m$  laut Tabelle II entspricht,

5° 43' 48.0"

folglich ist der einzustellende  $\sphericalangle$

232° 15' 4.5"

Die Terrainverhältnisse sind bezügl. der Einmessung dieses letzten Punktes massgebend. Dieselbe kann von  $m_6$  oder von  $m_5$  aus geschehen; in beiden Fällen sind für die Bogenlängen  $b_{VII} = 40^m$  und  $b_{VI} + b_{VII} = 65^m$  die entsprechende Sehnenlänge resp.  $39.936$  oder  $64.719^m$  aus der Tabelle zu substituieren. Am Endpunkt beider Masse in der zuletzt berechneten Richtung liegt Punkt  $m_7$ .

### 3. Absteckung mit Hilfe von Ordinaten und Abscissen.

#### A. Allgemeines Verfahren.

Wir kommen zurück auf den noch unvollendeten Bogen der Figur 2 mit dem Radius  $R_1$  und können in diesem Abschnitt die Absteckung desselben nach einer weiteren Methode vollenden.

Bezeichnet man mit  $x$  und  $y$  die Abscisse und Ordinate eines beliebigen Bogenpunktes  $N_1$  so ist die Ordinate durch den Radius  $R$  und die Abscisse  $x$  ausgedrückt:

8) . . . . .  $y = R - \sqrt{R^2 - x^2}$

Führt man in diese Gleichung das Verhältnis

9) . . . . .  $n = \left(\frac{x}{R}\right)$

ein, so lässt sich dieselbe auch schreiben

$$y = R(1 - \sqrt{1 - n^2}) \text{ oder,}$$

für die Absteckung von Kreisbögen am besten geeignet,

10) . . .  $\left(\frac{y}{R}\right) = 1 - \sqrt{1 - n^2} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}$

Durch Einführung der Verhältnisse  $\left(\frac{x}{R}\right)$ ,  $\left(\frac{y}{R}\right)$  wird der Radius in Formel 8 eliminiert, wodurch Formel 10 einen allgemeinen Charakter annimmt und man in einer einzigen Tabelle zur Berechnung der Ordinaten jedem Radius Genüge leisten kann.

Stellt man der Reihe nach, wie aus Tabelle K III zu ersehen, für  $n = 0.0001$  bis resp.  $n = 1$  die aus  $1 - \sqrt{1 - n^2}$  resultierenden Werte zu einer Tabelle zusammen, so ergibt sich  $y$  einfach durch Multiplikation mit dem im Verhältnis  $n = \left(\frac{x}{R}\right)$  enthaltenem Radius.

Verfasser wandte diese Formel bezw. Tabelle III mit grossem Erfolge im coupiertem Terrain und bei vielen variierenden Radien an. —

Ohne sich auf eine langwierige Wurzelrechnung einlassen zu müssen, kann man jedes Ordinatenverhältnis dem Terrain angepasst wählen und berechnen, und begnügt sich in solchen Fällen gern mit einer Genauigkeit von Centimeter; es lassen sich demnach auch ohne grosse Mühe leicht passende Bogenpunkte einschalten.

Für etwaige nicht in der Tabelle enthaltene Werte von  $n$  finden sich leicht durch Interpolation mit hinreichender Genauigkeit die zugehörigen Tabellenwerte  $\left(\frac{y}{R}\right)$ .

Z. B.: 1) für den Radius  $R = 500^m$  und den Abscissen  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 10$ ,  $x_3 = 15$ ,  $x_4 = 20$ ,  $x_5 = 25$ ,  $x_6 = 30$ ,  $x^1 = 14.5$ , für welche nach Formel 9  $n = \left(\frac{x}{R}\right)$  der Reihe nach  $n_1 = 0.01$ ,  $n_2 = 0.02$ ,  $n_3 = 0.03$ ,  $n_4 = 0.04$ ,  $n_5 = 0.05$ ,  $n_6 = 0.06$ ,  $n^1 = 0.029$ , folgen aus der Tabelle III für  $\left(\frac{y}{R}\right)$  das Ordinatenverhältnis, und die Ordinaten:

$$\left(\frac{y_1}{R}\right) = 0.0000501, y_1 = 500 \cdot 0.0000501 = 0.025^m$$

$$\left(\frac{y_2}{R}\right) = 0.0002010, y_2 = 500 \cdot 0.000201 = 0.100^m$$

$$\left(\frac{y_3}{R}\right) = 0.000451, y_3 = 0.000451 \cdot 500 = 0.225^m$$

$$\left(\frac{y_4}{R}\right) = 0.000801, y_4 = 0.000801 \cdot 500 = 0.400^m$$

$$\left(\frac{y_5}{R}\right) = 0.001251, y_5 = 0.001251 \cdot 500 = 0.626^m$$

$$\left(\frac{y_6}{R}\right) = 0.001806, y_6 = 0.001806 \cdot 500 = 0.903^m$$

$$\left(\frac{y^1}{R}\right) = 0.000421, y^1 = 0.000421 \cdot 500 = 0.211^m$$

2) In einer bestehenden Kurve, deren Radius  $700^m$  ist, soll für die Abscisse  $x = 12.4^m$  ein Bogenpunkt eingeschaltet werden.

Aus Tabelle III folgt für  $n = \left(\frac{x}{R}\right) = \frac{12.4}{700} = 0.0177$ ; durch Inter-

polation der Werthe  $\left(\frac{y}{R}\right)$  für  $n = 0.017$  und  $0.018$ ,  $\frac{y}{R} = 0.0001568^*)$ ,  
woraus  $y = 0.10976^{m**}) = 0.110^m$

#### B. Ordinaten und Abscissen für die wichtigsten Radien.

Für die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Abscissen und Radien haben wir nach Formel 8 eine tabellarische Uebersicht hergestellt und diese letztere (Tabelle KIV) der Tabelle KII eingereiht.

Es bedeuten dort die in der Rubrik der Bogenlängen stehenden Zahlen zugleich die Abscissen  $x$  und sind für die gleichen Radien jener Tabelle in der Rubrik unter  $y$  die zugehörigen Ordinaten ausgerechnet.

Z. B.: Dem Radius  $300^m$  entsprechen für die Abscissen

$$x = 5, \quad 10, \quad 15, \quad 20, \quad 30, \quad 40, \quad 50^m$$

die Ordinaten  $y = 0.042^m, 0.166^m, 0.375^m, 0.668^m, 1.504^m, 2.677^m, 4.197^m$ .

#### 4. Formeln anderer Absteckungsmethoden und Näherungsmethoden.

Obleich durch die bisherigen Formeln schon genügend Anhaltspunkte zur Absteckung von Kreisbögen geboten sind, müssen wir aber auch auf diejenigen Fälle, welche sich bei besonderen Terrainschwierigkeiten ergeben, und für welche die bisherigen Formeln sich als ungenügend erweisen, Rücksicht nehmen.

Wir setzen, Fig. 2, voraus, dass der  $\angle P W_2$  unzugänglich sei und gingen darum auch bei der Absteckung vom Bogenanfang aus. Statt dessen können wir aber auch, wie aus Fig. 4 ersichtlich, mittelst entsprechend eingelegten Hülftangenten den  $\angle P W_2$  umgehen

Errichtet man auf  $W_2 M$  in  $M$  eine Senkrechte, so ist  $H H_1 = \sigma$  eine Hülftangente, welche durch die Bogenmitte geht, die Verbindung von Bogenanfang und Bogenende  $\overline{BA} - \overline{BE}_2 = S$  eine der ersteren parallele Sehne; ferner ist die Bogenhöhe  $MM_1 = h$  gleich der Senkrechten aus  $M$  auf  $W_2 \overline{BA}$ ; die halbe Hülftangente

$$HM = H \overline{BA} = \frac{\sigma}{2} = t_0$$

Bezeichnen wir dann noch die Sehne  $\overline{BA}$ ,  $M$  mit  $s$ , den oberen Tangentenheil  $H W_2$  mit  $t$ ,  $M_2 W_2$  mit  $t_1$  die  $\angle$  bei  $H$  und  $H_1$  mit  $\alpha_1$  und den durch eine neue Hülftangente  $W_0 W_0$  entstandenen  $\angle$  bei  $W_0$  mit  $\alpha_2$ , so ergeben sich folgende weitere Beziehungen:

\*) Für  $n = 0.017$  ist lt. Tab.  $\left(\frac{y}{R}\right) = 0.0001445$ ; für  $n = 0.018$   $\left(\frac{y}{R}\right) = 0.0001621$ .

— Der Differenzzuschlag zum nächst kleinern Werte von  $\left(\frac{y}{R}\right)$  zu  $0.0001445$ , daher für obige Interpolationszahl  $7 \triangle = \frac{0.0001621 - 0.0001445}{10} 7 = 123$ , folglich für

$$n = 0.0177 \quad \left(\frac{y}{R}\right) = 0.0001445 + 0.0000123 = 0.0001568.$$

\*\*\*) Nach Formel 8.,  $y = R - \sqrt{R^2 - x^2} = 700 - \sqrt{700^2 - 12.4^2} = 0.10984^m$ .

Die Entfernung  $t$  im Verhältnis zum Radius  $R$  bezogen auf den  $\sphericalangle P \sphericalangle$  ist

$$\left(\frac{t}{R}\right) = \frac{\cotg \alpha/2}{1 + \sin \alpha/2} \dots \dots \dots 11)$$

Für die von Minute zu Minute fortschreitende  $\sphericalangle \alpha = 60^\circ - 180^\circ$  und  $R = 1$ , haben wir vorstehende Werte von  $\left(\frac{t}{R}\right)$  der Tabelle KI in der letzten Rubrik angereicht; und ergibt sich das jeweilige  $t$  durch Multiplikation des dem  $\sphericalangle \alpha$  entsprechenden Tabellenwertes mit  $R$ . Hiernach ist

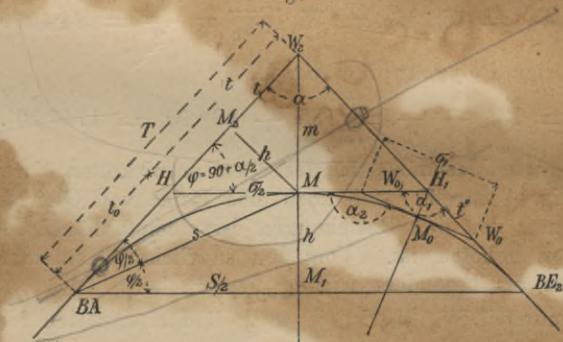
$$t_0 = \frac{\sigma}{2} = T - t \dots \dots \dots 12)$$

Ferner folgen aus Fig. 4 die Verhältnisbeziehungen:

$$\left(\frac{\sigma}{t}\right) = \left(\frac{S}{T}\right) = 2 \left(\frac{h}{m}\right) = 2 \left(\frac{t_0}{t}\right) = 2 \sin \alpha/2 \dots \dots 13)$$

Wir sind demnach in der Lage analog dem Obigen für ein beliebiges  $\alpha$  die Sehne  $S$  bezogen auf die Tangente  $T$  direkt berechnen zu können  $S = T (2 \sin \alpha/2) \dots \dots \dots 13a)$

Fig. 4.



Ebenso ist die Länge der Hilfstangente  $\sigma$  bezogen auf  $t$   $\sigma = t (2 \sin \alpha/2) \dots \dots \dots 13b)$

sowie der Tangententeil  $t_0$   $t_0 = 1/2 t (2 \sin \alpha/2) \dots \dots \dots 13c)$

und die Bogenhöhe  $h$  bezogen auf den Bogenmittellabstand  $m$   $h = 1/2 m (2 \sin \alpha/2) \dots \dots \dots 13d)$

Durch Aufstellung des Instruments auf  $H$  oder  $BA$  und Anschlagen des  $\sphericalangle \varphi = 90 - \alpha/2 \dots \dots \dots 14)$

von der Richtung der Haupttangente findet man  $H_1$  oder  $BE_2$  am Ende der Länge  $\sigma$  resp.  $S$ , und umgekehrt.

Mit Beziehung auf die  $\sphericalangle \alpha_1$  und  $\alpha_2$  ergibt sich leicht  $\alpha_1 = 90 + \alpha/2 \dots \dots \dots 15)$

$$\alpha_2 = 135 + \alpha/4 \dots \dots \dots 16)$$

Betrachtet man  $\alpha_1$  als neuen  $\sphericalangle P. \sphericalangle$ , und berechnet mit Hülfe der Tabelle in der oben angegebenen Weise den Wert

$$W_0 W_0 = \sigma_1, \dots \dots \dots 17)$$

welcher der Hilfstangente  $\sigma$  für den  $\sphericalangle \alpha$  entspricht, so lässt sich hieraus, da  $MW_0 = W_0 M_0 = W_0 BE_2 = \frac{\sigma_1}{2} \dots \dots \dots 17a)$

mit Hilfe des  $\sphericalangle \alpha_2$  von Bogenanfang oder Bogenende ausgehend der ganze Bogen durch ein umschriebenes Polygon

$\overline{BE_2} - W_0 - M_0 - W_0 - M$  abstecken.

Jeder zweite Punkt von  $\overline{BE_2}$  ausgehend, ist ein Bogenpunkt.

Z. B. Für  $R = 2000$  m,  $\alpha = 160^\circ 40'$  ist nach Gleichung 15., der für das Polygon in Rechnung zu ziehende  $\sphericalangle P \sphericalangle$

$$\alpha_1 = 90 + \frac{\alpha}{2} = 90 + 80^\circ 20' = 170^\circ 20'$$

Nach Tab. KI, resp. Gl. 11,

$$\frac{t''}{R} = 0.042354, \text{ also}$$

$$H_1 W_0 = t'' = 0.042354 \cdot 2000 = 84.708;$$

ferner nach Gl. 13 für  $\alpha_1 = 170^\circ 20'$

$$\frac{\sigma_1}{t''} = 1.992888 \text{ und}$$

$$W_0 W_0 = \sigma_1 = 1.992888 \cdot 84.708 = 168.814, \text{ folglich.}$$

$$\frac{M}{2} W_0 = W_0 M_0 = W_0 \overline{BE_2} = \frac{\sigma_1}{2} = 84.407.$$

Der zugehörige Polygonwinkel Gl. 16

$$\alpha_2 = 135 + \frac{\alpha}{4} = 135 + 40^\circ 10' = 175^\circ 10'.$$

Durch geeignete Verbindungen der eben entwickelten Formeln und mit Rücksicht auf Fig. 4 ergeben sich noch eine Reihe von Gleichungen, deren Verwendbarkeit nur von den Beziehungen derselben abhängig, daher nur in besonderen Fällen geboten ist. Von den möglichen Kombinationen wollen wir die folgenden als besonders wichtig hervorheben:

Der Tangententeil  $W_2 M_2$  ist je nach Bedarf aus den rechtwinkligen Dreiecken leicht zu entnehmen:

$$18) \dots t_1 = m \cos \alpha/2 = \frac{m^2}{t} = h \cotg. \alpha/2 = h \frac{T}{R}$$

Die Bogenhöhe  $M M_1 = h = M M_2$ , ausser nach Formel 13, ebenso nach folgenden Formeln

$$h = t_0 \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = s \sin \left( 45 - \frac{\alpha}{4} \right) = \frac{S}{2} \operatorname{tg} \left( 45 - \frac{\alpha}{4} \right)$$

$$19) \dots = R \left( 1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right);$$

ferner die Tangententeile  $t$  und  $t_0$  bezogen auf  $m$

$$20) \dots t_0 = m \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ und}$$

$$21) \dots t = \frac{m}{\cos \alpha/2}.$$

Die Sehne  $S$  bezogen auf  $R$

$$22) \dots S = 2 R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Tangente  $T$  und der Halbmesser  $R$  lassen sich noch ausdrücken, wie leicht zu übersehen durch

$$T = \frac{h + m}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{R^2}{(R + m) \cos \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{m(m + 2R)} \quad \dots \quad 23)$$

$$R = \frac{m \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{T^2 - m^2}{2m} \quad \dots \quad 24)$$

und endlich der  $\sphericalangle \alpha$

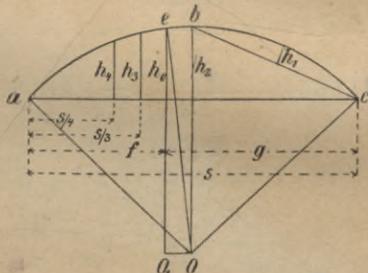
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{R + m} \quad *) \quad \dots \quad 25)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{h + w}{T} \quad \dots \quad 26)$$

$$\text{tng} \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{T} \quad \dots \quad 27)$$

Ehe wir diesen Abschnitt beschliessen, wollen wir noch einige Methoden, beziehentlich Formeln, die sich aus obigen Gleichungen leicht entwickeln lassen,

Fig. 5.



anführen, obwohl zum grössten Teil Näherungswerte, ist doch deren Verwendung an passender Stelle durchaus nicht zu unterschätzen.

1. Für einen beliebigen Bogenabschnitt, welcher die Sehne s umspannt, ist näherungsweise Fig. 5: Für die halbe Sehne s die Bogenhöhe

$$\left. \begin{aligned} h_2 &= \frac{s^2}{8R}, \\ \text{für } \frac{s}{3} \\ h_3 &= \frac{s^2}{9R}, \\ \text{für } \frac{s}{4} \\ h_4 &= \frac{s^2}{10R}. \end{aligned} \right\} 13e)$$

\*) Hiernach kann man aus Tabelle K I innerhalb der Grenzen  $\alpha = 60^\circ$  bis  $180^\circ$   $\sin \alpha$  berechnen. Aus Gl. 25 folgt für  $R = 1$   $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{m + 1}$ . Um z. B.  $\sin 45^\circ$  zu finden, sucht man in der Tabelle den Wert  $\left(\frac{m}{R}\right)$  für  $\frac{\alpha}{2} = 45^\circ$ , d. i.  $\alpha = 90^\circ$ ; derselbe ist  $0.414214$ , demnach  $\sin 45^\circ = \frac{1}{1 + 0.414214} = 0.70711$ .

Diese Formeln sind um so genauer, je grösser  $\angle P < \alpha$ ; man findet sie aus folgender allgemeinen Näherungsformel.

Für die beliebigen Sehnenabschnitte  $f$  und  $g$  ist nämlich\*)

13f) . . . . .  $h_0 = \frac{f \cdot g}{2 R}$

Die Bogenhöhe in der Mitte der Sehne  $a$   $b$

13g) . . . . .  $h_1 = \frac{1}{4} h_2$

2. In Beziehung auf die Tangentenverhältnisse (S. Fig. 4) kann man sich unter gewissen Voraussetzungen folgende Annäherungen gestatten.

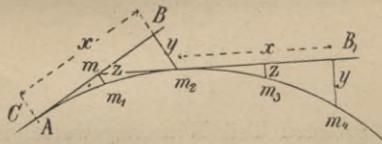
Nach Gl. 12 ist für einen beliebigen  $\angle P < T = t + t_0$ . Aus einer gegenseitigen Vergleichung obiger Gleichungen ersieht man nun, dass, je näher  $\alpha = 180^\circ$ , um so geringer wird die Differenz zwischen  $t_0$  und  $t$ ; man kann sich in solchen Fällen die Absteckung dadurch erleichtern, dass man die Tangenten halbiert; hiernach würde

20a) . . . . .  $t_0 = t = \frac{\sigma}{2} = \sigma_1$

z. B. Die Differenz im obigem Beispiel für  $R = 2000^m$  und  $\alpha = 160^\circ 40'$ , in welchem nach Tabelle KI  $T = 2000 \cdot 0 \cdot 170334 = 340,668$  und  $t = 2000 \cdot 0 \cdot 085776 = 171,552$ , zwischen  $\frac{T}{2}$  und  $t$  beträgt

$$171 \cdot 554 - \frac{340,668}{2} = 1,218^m, \text{ während}$$

Fig. 6.



für die Winkelpunkte  $H_1$  oder  $H$  für  $\alpha = 170^\circ 20'$  die Differenz, da  $t'' = 85 \cdot 708$  und  $W_0 \overline{BE}_2 = \frac{\sigma_1}{2} = 84 \cdot 407$ , nur  $t'' - \frac{\sigma}{2} = 0 \cdot 301^m$  beträgt.

Der Bogenpunkt  $M_0$  würde im Falle obiger Näherungsmethode um  $0 \cdot 301$ . sin  $(180 - \alpha_2) = 0 \cdot 025^m$  nach  $H_1$  gerückt sein; für die Bogenmitte  $M$  wäre letzterer Wert erheblicher, nämlich  $0 \cdot 205^m$ .

3. Wenn man Fig. 6 vom Berührungspunkt einer Tangente  $\overline{CA}$  eines beliebigen Bogens, dessen Radius  $R$ , ausgehend, dieselbe um ein beliebiges Stück  $x$  (Abscisse) verlängert, am Endpunkt  $B$  und in einem gleich näher bestimmten Punkt  $m$  die Senkrechten  $y = Bm_2$ ,  $z = m m_1$ , nach Gl. 10., resp. Tabelle III oder IV errichtet, so sind  $m_1$  und  $m_2$  Bogenpunkte.

Legt man  $m$  so, dass

28) . . . . .  $\overline{Am} = R \frac{y}{x}$ ,

verbindet  $m$  mit  $m_2$  und verlängert diese Linie um die gleiche Grösse  $x$ , so

\*) Aus den 3 rechth. Dreiecken  $o_1 e$ ,  $o d c$ ,  $a o d$  folgt  $o o_1 = \frac{g-f}{2}$ ,  $c d = \frac{g+f}{2}$  und  $h_0 = \sqrt{r^2 - \frac{(g-f)^2}{4}} - \sqrt{r^2 - \frac{(g+f)^2}{4}}$ . Die Wurzeln nach dem binomischen Lehrsatz aufgelöst und je die beiden ersten Glieder berücksichtigt, findet sich 13f.

ist in  $B_1$  eine weitere Tangente; folglich nach demselben Verfahren abgesteckt, sind  $m_3, m_4$  wiederum Bogenpunkte u. s. w. —

Will man sich nun mit einer Annäherung begnügen, so wählt man

$$A m = m_2 m = \frac{x}{2},$$

dann folgt aus Gl. 8 nach dem binomischen Lehrsatz aufgelöst

$$y = \frac{x^2}{2R}, \text{ für } x: \frac{x}{2}$$

gesetzt nach Gl. 8 und ebenso aufgelöst

$$z = \frac{x^2}{8R} = \frac{1}{4} y$$

z. B. Wenn  $R = 20^m$  und  $x = 4^m$ , so ist nach Formel 10, oder Tab. III, da

$$n = \frac{x}{R} = \frac{4}{20} = 0.2,$$

$$y = 0.404^m,$$

$$A m = 20 \cdot \frac{0.404}{4.0} = 2.02^m, \text{ folglich } z,$$

da jetzt  $n = \frac{A m}{R} = \frac{0.202}{20} = 0.0101$  ist, nach Tabelle K III,  $z = 0.102$ .

Nach obigen Näherungen dagegen wird

$$y = \frac{x^2}{2R} = 0.4^m,$$

$$A m = \frac{x}{2} = 2^m \text{ und}$$

$$z = \frac{x^2}{8R} = \frac{1}{4} y = 0.1^m.$$

## II.

### Die Übergangskurven.

#### 1. Theorie und Aufstellung der Gleichung der Übergangskurve.

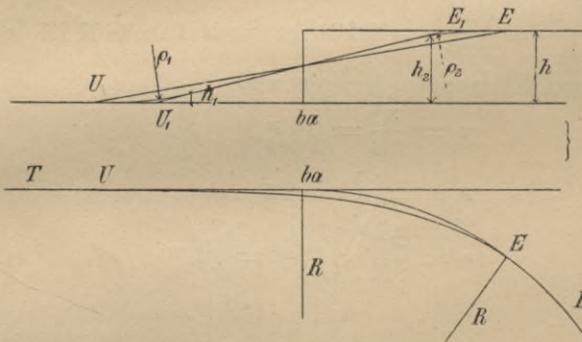
In den bisherigen Formeln betrachteten wir den Endpunkt einer Geraden als Anfangspunkt des Kreisbogens, bzw. den Endpunkt eines Kreisbogens als geometrischen Berührungspunkt einer Tangente. Bei Absteckung einer Eisenbahntrasse von Kreisbögen und Geraden ist dies aber unstatthaft, vielmehr muss man in solchen Fällen auch Rücksicht auf diejenigen dynamischen Erscheinungen, welche bei Bewegung eines Eisenbahnzuges in Kurven auftreten, nehmen. Ein solcher, wenn er sich mit einer gewissen Geschwindigkeit in einem Bogen bewegt, ist vermöge derselben und seiner Masse, also seiner lebendigen Kraft, von Einfluss, namentlich auf den äusseren Schienenstrang. Die Bewegung in einer Geraden erfolgt, wenn der Oberbau in gutem Zustand ist, ohne Anstand, und ist die Geschwindigkeit nur beeinflusst von Kraft- und Widerstandsveränderungen.

Bei Bewegung in einem Bogen kommt die Zentrifugalkraft in Betracht

und legt man darum den äusseren Schienenstrang höher als den inneren. Diese Überhöhung lässt man in der Praxis nicht plötzlich um ein gewisses Mass  $h$ , Fig. 7, vor sich gehen, sondern allmählich, in dem man ein Stück  $U_1 E_1$  einschaltet, welches man zum Theil der Geraden  $T$ , zum Theil dem Bogen  $B$  entnimmt, und welches von  $U_1$  allmählich zu  $E_1$  der eigentlichen Überhöhung  $h$  des äusseren Schienenstranges ansteigt. In der Figur stellt der obere Teil den äusseren Schienenstrang, und der untere den Grundriss beider Schienenstränge dar. Da nun die Überhöhung dem Halbmesser  $R$  des betreffenden Bogens umgekehrt proportional sein muss, — je kleiner  $R$ , um so grösser  $h$  — so folgt hieraus, dass man, auf den geometrischen Zusammenhang bezogen, auch nicht direkt von Bogen  $B$  zur Tangente  $T$  übergehen darf, sondern dass man zwischen beiden erst eine Kurve mit nach der Tangente zu wachsenden Radien — die Übergangskurve — einschaltet.

Nach der Art und Weise, wie die Linie  $E_1 U_1$  mit den Bruchpunkten bei  $U_1$  und  $E_1$  die Einschaltung versinnlicht, können wir jedoch die Erhöhung noch nicht vornehmen, sondern müssen bei  $U_1$  und  $E_1$  wiederum Uebergänge ein-

Fig. 7.



legen. Nehmen wir für dieselben Bögen an, deren Krümmungshalbmesser  $\rho_1$  und  $\rho_2$  sein mögen, so beginnt jetzt die Übergangskurve bei  $U$  und endet bei  $E$ , und stellt sich die successive Überhöhung als eine Kurve dar, die sich von  $U$  aus an die Gerade anschliessend, in den Bogen  $\rho_1$  übergehend, in der Nähe des theoretischen Bogenanfanges die halbe Überhöhung erreicht, ferner in den Bogen  $\rho_2$  übergeht, und bei  $E$  in die ganze Überhöhung  $h$ , welche dem eigentlichen Bogen entspricht, ausläuft. Ziehen wir nun noch die oben erwähnten dynamischen Erscheinungen in Rücksicht, dann haben wir folgendes.

Nach bekannten Gesetzen der Mechanik ist die Schwungbeschleunigung  $\frac{v^2}{\rho}$ , und die Schwungkraft  $K = m \frac{v^2}{\rho} = \frac{G}{g} \frac{v^2}{\rho}$ , in welcher Formel  $g = 9.808$ ,  $\rho$  der Krümmungshalbmesser der Kurve ist, in welcher sich die Masse  $m$ , deren Gewicht  $G$ , mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt. Durch die Erhöhung der äusseren Schiene soll nun, wie oben angedeutet, der Wirkung der Schwungkraft entgegengearbeitet werden.

Ist  $w$  die Entfernung der Schienenköpfe von einander, so ist der Neigungswinkel Fig. 8 an dieser Stelle  $\sin \alpha = \frac{h}{w}$ , die der Schwungkraft

entgegenwirkende Komponente  $K = G \sin \alpha$ , und diese gleich zu setzen der Zentripedalkraft  $K_1$ , somit

$$G \sin \alpha = \frac{G v^2}{g \varrho}, \text{ woraus obiger Wert für } \sin \alpha \text{ eingeführt}$$

$$h = \frac{w v^2}{\varrho g} \text{ oder } \dots \dots \dots \text{ a)}$$

$$\varrho = \frac{w v^2}{g h} \text{ folgt. } \dots \dots \dots \text{ b)}$$

Die Schienenüberhöhung des äusseren Schienenstranges für einen konstanten (Kreis-) Radius  $R$  ist hiernach dem Quadrat der Fahrgeschwindigkeit proportional

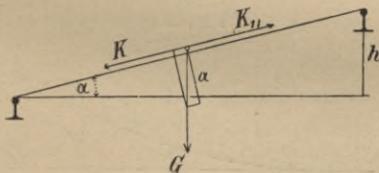
$$h = \frac{w}{R g} v^2 \dots \dots \dots \text{ a}_1)$$

Sehen wir von der durch die Überhöhung  $h$  bedingten Erweiterung der Spur ab, und betrachten  $\frac{w}{g} = c$  als konstant, dann folgt der Krümmungsradius

$$\varrho = c \frac{v^2}{h} \dots \dots \dots \text{ c)}$$

Setzen wir ferner voraus, dass ein Eisenbahnzug mit gleicher oder der-

Fig. 8.



selben Geschwindigkeit die Gerade, den Übergang und die Kurve passiert, so wäre für den Augenblick auch  $v$  konstant und  $\varrho = \frac{C}{h} \dots \dots \dots \text{ d)}$

Die Übergangskurve müsste somit folgenden Bedingungen entsprechen:

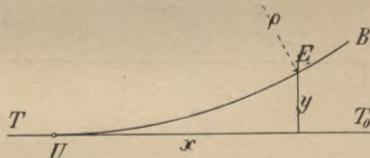
Für den Punkt  $U$  ist  $h = 0$ ,  $\varrho = \infty$ , die Länge der Übergangskurve  $L = 0$ . Mit wachsendem  $L$  nimmt  $h$  im Verhältnis der Höhen  $h_1 h_2 \dots h$ , welche dem Bildungsgesetz der Übergangskurve ( $\varrho_1 \varrho_2$ ) entsprechen, zu. Da nun  $\varrho_1$  der Radius eines konvexen,  $\varrho_2$  der eines konkaven Kurvenstückes ist,  $h_1$  kleiner,  $h_2$  grösser als die bezüglichen regelmässigen Überhöhungen der Geraden  $U_1 E_1$  sind, so folgt hieraus, mit Bezug auf Gl. d, dass die Übergangskurve selbst in der ersten Hälfte im Verhältnis schwächer gekrümmt sein soll, als derjenige Teil, welcher sich an den eigentlichen Kreisbogen anschliesst.

Vom geometrisch-analytischen Standpunkt aus betrachtet, enthält die Gleichung (d),  $\varrho$  und  $h$  als Veränderliche, offenbar das Bildungsgesetz einer Hyperbel (Asymptotengleichung der Hyperbel). Es läge hiernach die Annahme einer hyperbolischen Kurve als Schienenüberhöhungskurve für Bahnkurven mit veränderlichen Krümmungsradien zu Grunde. Sehen wir von der Annahme,  $v$  als eine Konstante zu betrachten, ab; vielmehr nehmen wir an, dass die Geschwindigkeit, mit der sich ein Eisenbahnzug beim Übergang von der Geraden in eine Kurve bewegt, veränderlich sei — eine Annahme, welche in Anbetracht der Widerstände an Reibung und Steigung allerdings

berechtigt ist — so ändert sich in der Formel  $q = c \frac{v^2}{h}$ ,  $q$  mit  $v$  und  $h$  gleichzeitig, wir sind demnach, weil, wenn  $v$  kleiner wird,  $h$  kleiner werden muss, damit  $q$  wieder grösser werden kann, um so mehr ist es berechtigt das Wachstum der Krümmungsradien in der Übergangskurve und zwar in der ersten Hälfte derselben geringer zu nehmen, als in der zweiten.

An diese Anforderungen, welche wir an eine theoretisch richtige und in der Praxis verwendbare Übergangskurve stellen müssen, knüpfen sich nun noch die Bedingungen, dass die Länge derselben und ihr Abstand vom ursprünglichen Bogen im Verhältnis stehen müssen zur praktischen Ausführbarkeit. Je kleiner  $L$  und je grösser  $h$ , um so schroffer wird der Übergang;\*) dagegen je grösser die Krümmungsradien  $\rho_1$   $\rho_2$  und je grösser  $L$ , um so sanfter. Für Gebirgsstrecken müsste die Übergangskurve verhältnismässig länger ausfallen, als für Thalstrecken. Im ersteren Fall hat sie auch eine verhältnismässig grössere Bedeutung als für Bahnen in der Ebene. Das richtigste Mass für die Länge  $L$ , abgesehen vom Bildungsgesetz, ist ein proportionales Verhältnis zu  $h$ . Die Wichtigkeit der Übergangskurve für die Praxis findet auch darin schon ihre Bestätigung, dass jeder Maschinenführer beim Einfahren in eine starke Krümmung die Dampfzuströmung zu vermindern pflegt (den Regulator etwas schliesst), — mehr zur Vorsicht in-

Fig. 9.



folge des mangelhaften Überganges, als zur Schonung des Oberbaumaterials, eine Vorsichtsmassregel, welche bei einem richtigen Übergang von selbst wegfallen soll. Auch bei Aufstellung des Projektes muss auf die Übergangskurve schon Rücksicht genommen werden, insbesondere bei Doppelkurven, damit die Zwischengeraden das Minimalmass nicht unterschreiten.

Suchen wir jedoch, ehe wir endgültige Schlüsse ziehen, noch weitere Anhaltspunkte zu gewinnen.

Es sei UE Fig. 9 ein Teil der Übergangskurve, und zwar der Anfang von der Geraden  $T T_0$ , die verlängerte Gerade bzw. Tangente. B der Kreisbogen nach dem Übergang. Die Linie  $TEB$  möge die Mittellinie zwischen

\*) Empirische Formeln für Schienenüberhöhung abzuleiten, habe ich unterlassen, da sich solche in anderen entsprechenden Werken in der nötigen Ausführlichkeit vorfinden. Nach den bisher bestehenden Bestimmungen giebt die Tabelle A über Schienenüberhöhung und Erweiterung der Spur einige praktische Anhaltspunkte.

Aus einer grösseren Anzahl praktischer Ausführungen habe versucht, eine empirische Formel für die Überhöhung abzuleiten, und gefunden, dass im Gebirgs- und hügeligen Terrain für Radien  $\geq 1100$  m

$$h = 0,249 \frac{v^2}{R} + 0,0017 v$$

für Thalbahnen,  $R > 1100$  m

$$h = 0,624 \frac{v^2}{R} - 0,0017 v$$

zu nehmen sei.

beiden Schienensträngen darstellen, x die Abscisse in der Tangente gemessen, y die Ordinate, L<sub>0</sub> die Länge bis zum Punkt E, welchem die Schienenüberhöhung h<sub>0</sub> und der Krümmungsradius ρ entspricht.

Wie oben bemerkt, nehmen wir L<sub>0</sub> proportional h<sub>0</sub> an, und setzen L<sub>0</sub> = μh<sub>0</sub>; μ ein Erfahrungskoeffizient.\*) Für die im Bogen gemessene Länge L<sub>0</sub> wollen wir, ohne das Nachfolgende zu beeinflussen, die Abscissenlänge x substituieren, dann wird x = μh<sub>0</sub> . . . . . e)

Nach Gl. (a) ist dann h<sub>0</sub> =  $\frac{wv^2}{\rho g}$ ; hierin den Wert für h<sub>0</sub> aus (e) ein-

geführt, folgt  $\frac{x}{\mu} = \frac{wv^2}{\rho g}$  und  $\frac{1}{\rho} = \frac{xg}{v^2w\mu}$  . . . . . f)

Der Krümmungshalbmesser eine Kurve drückt sich aus durch

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \dots \dots \dots g)$$

in welcher Formel  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  die beiden ersten Differentialquotienten der Gleichung der Kurve, dessen Krümmungshalbmesser ρ ist, bedeuten.

Erlaubt man sich wieder eine Annäherung, und setzt

$$\rho = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} \text{ oder } \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

vernachlässigt das Quadrat des ersten Differentialquotienten, so resultiert für die Übergangskurve die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g}{v^2w\mu} x \quad \dots \dots \dots h)$$

Setzen wir die Konstante  $\frac{g}{v^2w\mu} = m$ , so wird nach einmaliger Integration

$$\frac{dy}{dx} = m \frac{x^2}{2} \text{ und endgültig } y = \int m \frac{x^2}{2} dx = m \frac{x^3}{6}$$

Die Integrationskonstanten verschwinden, weil für x = 0, y = 0 und  $\frac{dy}{dx} = 0$ . Führen wir g = 9·808, w = 1·5 Spurweite, v = 17<sup>m</sup> Fahr- geschwindigkeit pr. Sec und für μ einen konstanten Mittelwert ein, so folgt abgerundet  $m = \frac{1}{122000}$  und  $y = \frac{x^3}{6 \cdot 12000}$ , . . . . . 29)

Den Koeffizient  $\frac{1}{6 \cdot 12000} = a$  gesetzt,  $y = ax^3$  . . . . . 29a)

als Gleichung der Übergangskurve: die Gleichung einer kubischen Parabel.

\*) Wenn h die Überhöhung dem Kreisradius R entsprechend, so ist die Länge der Übergangslinie empirisch L = 200 h bis 400 h.

### 2. Diskussion der kubischen Parabel als Übergangskurve und Verwertung derselben in der Praxis.

Entwickelt man den ersten und zweiten Differentialquotient aus der Gleichung der Übergangskurve  $x = ax^3$ ,  $\frac{dy}{dx} = 3ax^2$ ,  $\frac{dy^2}{dx^2} = 6ax$ , so wird allerdings näherungsweise  $\rho = \frac{1}{6ax}$ , für  $x = 0$ ,  $\rho = \infty$ ; für  $x = \infty$ ,  $\rho = 0$ .

Die Kurve entspricht dem Gesetz abnehmender Radien nach der Tangente zu.

Genau folgt aber nach Gl. (g):

$$(i) \dots \dots \rho = \frac{[1 + (3ax^2)^2]^{3/2}}{6xa} = \frac{(1 + 9a^2x^4)^{3/2}}{6xa}$$

Diese Gleichung liefert für  $x = 0$ , wiederum  $\rho = \infty$ , dagegen für  $x = \infty$ ,  $\rho = \frac{\infty}{\infty}$ .

Differenziert man zur Bestimmung des wirklichen Wertes für  $\frac{\infty}{\infty}$  Zähler und Nenner so ergibt sich

$$(i_1) \dots \rho = 9ax^3 \sqrt{1 + 9a^2x^4}, \text{ für } x = \infty \text{ wird jetzt } \rho = \infty.$$

Die kubische Parabel hat also einen Minimalkrümmungsradius zwischen  $x = 0$  und  $x = \infty$

Um die Lage des letzteren zu finden, setzen wir das Differential nach  $x$  der Gleichung (i) Null, erhalten aus

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\sqrt{1 + 9a^2x^4}}{6xa} \right] = 0, \quad x = \frac{1}{\sqrt[4]{45} \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt[4]{45a^2}} = \frac{1}{2.58 \sqrt{a}}$$

Der zweite Differentialquotient wird positiv.

Es muss also  $a$  sehr klein sein, damit das Minimum von  $\rho$  weit hinausfällt und sich überhaupt die Kurve oder ein Teil derselben als Übergangskurve verwenden lässt. Da nun nach Gl. 29 der Mittelwert  $a = \frac{1}{72000}$  angenommen wurde für die Praxis, so wird

$$x = \frac{1}{2.58 \sqrt{\frac{1}{72000}}} = \text{rot } 100^m.$$

In der Praxis pflegt man die Übergangskurve niemals so lang, sondern nur den 3. bis 5. Teil davon zu nehmen.

Die Zahl 12000 in obiger Gleichung  $y = \frac{x^3}{6 \cdot 12000}$  schliesst das mittlere Verhältnis für  $\mu$  (Gl. e) in sich.

Wir setzten  $\mu$  proportional  $h_0$ , also ist  $\mu$  auch proportional der vollständigen Überhöhung  $h$ . Nun ist aber  $h$  abhängig vom Kreisradius  $R$ ; man nimmt darum  $\mu$  und also auch  $m$  proportional  $R$  an. Im Mittel kann man setzen  $m = \frac{1}{12000}$ , jedoch für Radien  $> 600^m$   $m = \frac{1}{20R}$ .

Die Gleichung der Übergangskurve für die Praxis lautet dann

$$30) \dots \dots y = \frac{x^3}{6P},$$



B C findet sich aus Gl. 30, nämlich

$$y'' = CB = \frac{L^3}{6P}$$

Setzt man hierin die obigen empirischen Werte für L und P, dann ergibt sich für jeden einzelnen Fall die grösste Ordinate  $y''$ , bezw.  $y' = \frac{1}{4}y''$ . In Tabelle C. sind diese für die hauptsächlichsten Radien enthalten.

Aus  $y = \frac{x^3}{6P}$ , für x entsprechende Abscissenlängen eingeführt, berechnet man die zwischen E und B liegenden Ordinaten; die sich anschliessenden Kreisordinaten hingegen mit Berücksichtigung der Verschiebungslängen  $DB_1 = y'$ ,  $CB = y''$ ,  $CD = L/2$ , sind dann in den Kreistabellen Tabelle K I bis IV enthalten.

Zur Berechnung der Ordinaten der Übergangskurve haben wir Gl 30 in folgender Weise umgeformt:

$$30) \quad \dots \quad \frac{\left(\frac{y/R}{\frac{R}{120}}\right)}{\left(\frac{x}{R}\right)^3} = \left(\frac{y/R}{\frac{R^2}{72000}}\right) = \left(\frac{x}{R}\right)^3$$

und hiernach die Tabellen D, E und F aufgestellt.

Tabelle D und E enthalten die Konstanten  $\frac{R}{120}$ ,  $\frac{R^2}{72000}$ , Tabelle F nach 30, die relativen Ordinaten und Abscissen der Übergangskurven. Endlich sind noch in den Tabellen G und H die Koordinaten der Übergangskurven kombiniert mit den hauptsächlichsten Kreisradien für Haupt- und untergeordnete Bahnen enthalten. Die Absteckung auf dem Felde geschieht von der nur um  $\frac{1}{2}L$  verkürzten Geraden GE aus mit dem Anfang in Bogenende (Übergangsende) E bis zum Kreisbogen B (Übergangsanfang, Bogenende). Diesen letzteren kann man entweder von der Hülftangente  $G_1T_1$ , oder der Haupttangente aus abstecken. Im ersteren Fall ist  $B_1$  in Rechnung zu ziehender Kreistangentenberührungspunkt und kommen die betreffenden Kreistabellen direkt in Anwendung; im anderen Fall, von E aus, müssen bei den Kreistabellen selbstredend für die Abscissen die Längen  $L/2$  und für die Ordinaten  $y'$ ,  $y''$  in Rücksicht gezogen werden.

Eine Tangente in B schneidet auf EC die Länge  $CF = \frac{1}{3}L$  ab, und es ist  $\text{tg } \varphi = \frac{L}{2R}$ .

Die Verschiebung des Winkelpunktes Fig. 10 ist

$$Z = \frac{y''}{\sin \alpha/2}$$

Bemerkung: Einen Ersatz für die kubische Parabel bietet eine Zusammensetzung von Kreisbogen mit wachsenden Radien\*).

I. Für normalspurige Bahnen. Alle Radien unter 1000<sup>m</sup> erhalten Übergangskurven, und wird der Übergang einer Kurve durch Einschaltung von immer wachsenden Radien 400, 600, 800, 900<sup>m</sup> zum beiderseitigen Anschluss an die Gerade hergestellt, wodurch die letztere um ein gewisses Stück  $l + x$  verkürzt wird. Je flacher der Bogen, um so länger der Übergang, z. B. bei  $R = 900^m$  ist nur ein Stück Bogen von  $R = 1000^m$  einzuschalten. S. Fig. 11 und 12.  $B_1$  ist ursprünglich Bogenanfang, B Überganganfang,

\*) Österreichisch-Ungarische Bestimmungen.



von  $y'$  zu den Abscissen, steckt man dann nach 30<sup>m</sup> Übergang den 500<sup>m</sup> Bogen wie gewöhnlich ab.

II. Für schmalspurige Bahnen. Alle Bogen (Kreisbogen) unter 300<sup>m</sup> Radius erhalten eine beiderseitige Übergangskurve; und zwar ein Stück Bogen von 10<sup>m</sup> Länge zu Radius 150<sup>m</sup> und einen von 10<sup>m</sup> Länge zu 300<sup>m</sup> Radius.

Die Fig. 13 giebt die Zusammenstellung analog der Fig. 11, in Fig. 14 sind die detaillierten Daten enthalten. Es sind auch hier

$$z = \frac{y'}{\sin \alpha/2}, \quad x = y' \cotg \alpha/2, \quad T = t + l + x.$$

Fig. 13.

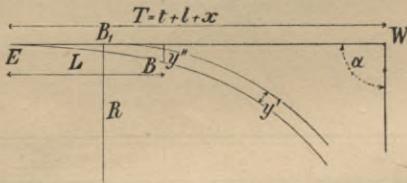
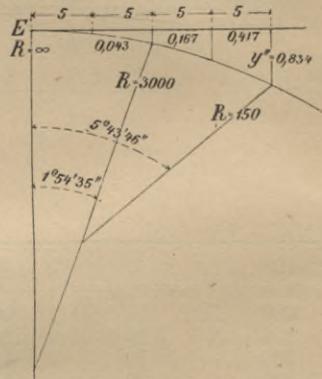


Fig. 14.



Für die Absteckung wurde folgende Tabelle entworfen.

R	L	l	$y'$	$y''$	$\gamma$
275	10	0·833	0·014	0·167	1° 54' 35"
250	10	1·666	0·028	0·167	1 54 35
225	10	2·499	0·042	0·167	1 54 35
200	10	3·333	0·056	0·167	1 54 35
175	10	4·166	0·070	0·167	1 54 35
150	10	4·999	0·084	0·167	1 54 35
125	20	7·494	0·209	0·834	5° 43' 46"
100	20	9·990	0·334	0·834	5 43 46
90	20	10·988	0·384	0·834	5 43 46
80	20	11·987	0·432	0·834	5 43 46
70	20	14·009	0·534	0·834	5 43 46
60	20	14·009	0·534	0·834	5 43 46

1. Beispiel. Gegeben sei der  $\angle P \angle \alpha = 120^\circ$ ,  $R = 800^m$ .

Tabelle H liefert für die Abscisse  $x = 20 \quad 40 \quad 60 \quad 80 \quad 100^m$   
die Ordinate  $y = 0·08 \quad 0·58 \quad 1·58 \quad 3·09 \quad 5·10^m$

Die Länge der Übergangskurve ist nach Tabelle B,  $L = 20^m$ , ihre grösste Ordinate für  $L = 20^m$ ,  $y'' = 80^m$  nach Tabelle C.

Die Ordinaten der Übergangskurve für die Abscissen z. B.  $x = 8^m$ ,  $16^m$  berechnet man aus Tabelle F, bzw. D; es wird

$$\frac{x}{R} = 0·01, \quad y/R = 0·00001 \frac{R}{120}, \quad \text{und also}$$

$$x = 0·01 \cdot 800 = 8^m, \quad y = 800 \cdot 0·00001 \cdot \frac{20}{3} = 0·006^m$$

$$x = 0·02 \cdot 800 = 16^m, \quad y = 800 \cdot 0·000008 \cdot \frac{20}{3} = 0·048^m.$$

Der Berührungspunkt  $B_1$  Fig. 10 liegt in der Entfernung  $y' = 20^{\text{mm}}$  (Tabelle C) von der Haupttangente.

Die Tangente  $B_1W_1$  berechnet man aus Tabelle K I, für  $\alpha = 120^\circ$ :

$$T = 0.57735.800 = 461.88^{\text{m}}, \text{ ebenso den Bogenmittenabstand} \\ m = 0.1547.800 = 123.76.$$

Die Verschiebung des Winkelpunktes

$$z = WW_1 = \frac{y''}{\sin \alpha/2} = 160^{\text{mm}};$$

der Bogenmittenabstand von W ist demnach  $123.76 + 0.16 = 123.92^{\text{m}}$ .

Die weitere Absteckung kann jetzt von  $B_1$ , D oder Bogenmitte aus erfolgen.

2. Beispiel:  $\alpha = 80^\circ$ ,  $R = 300^{\text{m}}$  Radius. Die Tabellen B, C ergeben.

Länge  $L = 40^{\text{m}}$ ; Grösste Ordinate  $y'' = 0.89^{\text{m}}$ ,  $y' = 0.22^{\text{m}}$ .

Tangentenlänge (Tab. K I)  $B_1W_1 = T = 1.191754.300 = 357.526^{\text{m}}$ .

Der Kreisbogen wird von  $B_1$  aus nach Tabelle K II oder III mit Rücksicht auf die Länge  $B_1B = 20^{\text{m}}$  abgesteckt.

Die Übergangskurve nach Tabelle F, Konstante  $\frac{R^2}{72000} = 1.25$  erhält die Koordinaten aus

$$\frac{x}{R} = 0.03, \quad \frac{y}{R} = 0.000027 \cdot 1.25 \text{ oder } x = 9^{\text{m}}, y = 0.010^{\text{m}}$$

$$\frac{x}{R} = 0.06, \quad \frac{y}{R} = 0.000216 \cdot 1.25 \text{ oder } x = 18^{\text{m}}, y = 0.081^{\text{m}}$$

$$\frac{x}{R} = 0.09, \quad \frac{y}{R} = 0.000729 \cdot 1.25 \text{ oder } x = 27^{\text{m}}, y = 0.273^{\text{m}}$$

$$\frac{x}{R} = 0.12, \quad \frac{y}{R} = 0.001728 \cdot 1.25 \text{ oder } x = 36^{\text{m}}, y = 0.648^{\text{m}}.$$

u s. w.

Obleich nun ein Teil der kubischen Parabel als Übergangskurve sich eignet, praktisch eingepasst, sich wenigstens verwenden lässt, so ist sie als Eisenbahnkurve, als Ersatz für den Kreisbogen, und um die Kombination zweier Kurven mit der Geraden zu umgehen, — was doch offenbar sehr naheliegend ist, nicht verwendbar, wie wir in den folgenden Zeilen noch näher beleuchten werden. Es sei OM (Fig. 15) derjenige Teil der kubischen

Parabel, dessen Anfangstück die Übergangskurve bildet.  $\frac{\alpha}{2}$  der Winkel,

unter welchem der Durchmesser  $2r$  des kleinsten Krümmungskreises, senkrecht auf die Tangente in M, die Abscissenlinie schneidet. W würde sonach einen Winkelpunkt nach den Grundsätzen unseres früheren § entsprechen müssen. Wir müssten jetzt VW als Mittellinie der zukünftigen Bahnkurve, M als Bogenmitte, WM als Bogenmittenabstand betrachten, und die eine Hälfte OW symmetrisch an VW abtragen, so dass O als Bogenanfang symmetrisch zu Bogenende liegen würde; da der andere Teil der kubischen Parabel MN, daneben ganz hinwegfallen würde, erst im Unendlichen sich an eine Gerade anschliesst, Gl. (i<sub>1</sub>). Auf diese Weise erhalten wir eine symmetrisch gebaute vom Winkelpunkt nach beiden Tangenten zu in die Geraden auslaufende Kurve, die Ausläufer sind dann die eben als Übergang verwendeten Kurven,  $r$  der (zulässige) Minimalradius, den früheren Kreisradien entsprechend. Die Gleichung dieser aus zwei Hälften kombinierten Bahnkurve lässt sich für jede Hälfte aus (29 a) und Gl. (k) konstruieren.

Entnimmt man aus letzterer Gleichung, um zu einer Abhängigkeit vom Minimalradius  $r$  zu gelangen den Wert  $a = \frac{0.56745^2}{r^2} = \frac{0.322}{r^2}$

und setzt ihn in (29a) ein, dann erhält man  $y = 0.312 \frac{x^3}{r^2}$

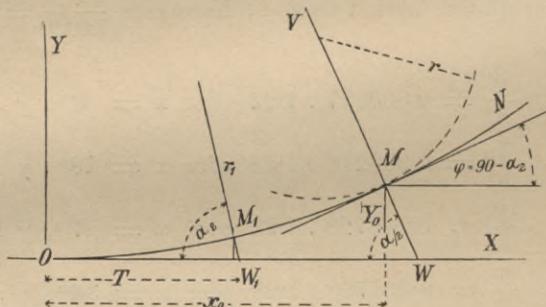
Sind  $y_0, x_0$  die Koordinaten von Bogenmitte  $M$ , so folgt aus  $y_0 = ax_0^3$  (nach 29a)  $\frac{dy_0}{dx_0} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (90 - \alpha/2) = \operatorname{cotg} \alpha/2 = 3a x_0^2$ ,

für den Minimalradius  $r$  ist

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{45a^2}}, \text{ demnach } \operatorname{cotg} \alpha/2 = \operatorname{tg} \varphi = \frac{3a}{\left[\sqrt[4]{45a^2}\right]^2} = 0.45 \text{ rot.}$$

Es resultiert also ein konstanter Winkelpunktswinkel von  $\alpha/2 = 35\frac{3}{4}^\circ$ . Abgesehen von der in der Praxis nicht zulässigen Kombination der

Fig. 15.



zwei Hälften in obigem Sinne, würden wir nur für den  $\angle P \angle \alpha = 2.37\frac{3}{4} = 71\frac{1}{2}^\circ$  rot, die Kurve verwenden können.

Zu ähnlichen in der Praxis unbrauchbaren Resultaten gelangt man, wenn man den Minimalradius der zukünftigen Bahnkurve, (der also dann stets grösser als der Minimalradius der betr. kubischen Parabel ist) mehr nach Bogenanfang  $O$  verlegt; selbstredend vorausgesetzt die Zusammensetzung der Kurve aus zwei Hälften wäre statthaft, und der entstehende plötzliche oder besser gesagt Knickübergang liesse sich vermitteln.

Sei  $r_1$  der betreffende Minimalbahnradius,  $W_1$  der Winkelpunkt,  $T$  die Tangentlänge, so kann man die Konstante  $a$  in (29a) nur abhängig von  $\frac{\alpha_1}{2}$ ,  $T$  und  $r_1$  bestimmen. Man erhält nämlich schliesslich

$$y = \frac{x^3}{12 r_1 T} \left( 1 + \sqrt{\frac{\frac{2}{3} T}{r_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}}} \right)$$

In dieser Gleichung ist jedoch  $r_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}$  für alle praktischen Fälle stets

zu vernachlässigen; die Gleichung  $\frac{x^3}{6 r_1 T}$  ist aber dann, weil sie wie obige keinen Winkelpunktswinkel mehr enthält, unbrauchbar. —

### 3. Die Kegelschnitte.

Da nun die kubische Parabel als Bahnkurve selbst nicht verwendbar ist, hingegen aber als Übergangskurve, also dennoch als Bahnkurve angewandt wird, schliesst dies einen gewissen Widerspruch nicht aus. Der Gedanke liegt indessen sehr nahe, eine solche Kurve als Bahnkurve zu konstruieren bez. zu suchen, welche ohne eine nochmalige Kombination mit einer besonderen Übergangskurve, sowohl als Übergangs- als auch als Bahnkurve, praktisch verwertet werden kann. In erster Linie müsste dies eine symmetrisch gebaute Kurve sein, dann müssten ihre Krümmungsradien von der Symmetrieachse aus nach beiden Tangentenrichtungen hin wachsen. Den letzteren Anforderungen genügen aber die zunächstliegenden Kegelschnitte, besonders die Hyperbel und Planparabel. Da die Krümmungsradien dieser letzteren im Unendlichen  $\infty$  werden, so kommt es nur darauf an, weil Kurven, deren Radien  $3000^m$  in der Praxis schon als Gerade gelten können, praktische Formeln auszustellen für diejenigen Teile der genannten Kurven, die zwischen den kleinsten Krümmungsradien und dem Krümmungsradius circa  $3000^m$  liegen. Der Minimalkrümmungsradius wäre dann jedesmal an Stelle des kleinsten zulässigen früheren Kreisbogenradius zu setzen. Die Zulässigkeit, besonders der Hyperbel und Parabel lässt sich aber auch noch durch folgendes begründen. Fast allgemein verwendete man bisher den Kreisbogen als Bahnkurve, obgleich derselbe durchaus nicht ganz den mechanischen Anforderungen der Bewegung eines Körpers im Kreis entspricht. Um ihn überhaupt zugänglich zu machen, sind eben besondere Übergangskurven nötig. Wenn nun auch die Krümmungsradien der Kegelschnitte nicht wie die der kubischen Parabel sich ändern, wenngleich die letztere selbst auch nur mehr Näherungskurve als Bahnkurve genannt werden kann, so entsprechen sie doch aber mehr als der Kreis, dessen Krümmungsradius eine Konstante ist, den Anforderungen einer Bahnkurve.

Wir werden in den folgenden §§ versuchen näher auf die Sache einzugehen und Gelegenheit nehmen, einen Vergleich in Bezug auf die geometrische Lage, die Kombination eines Kreises mit der kubischen Parabel und mit den Kegelschnitten anzustellen, welcher für die letzteren durchaus nicht ungünstig ausfällt. Jeder Praktiker wird gewiss dann endgültig der Einführung der letztgenannten Kurven statt der Kombination eines Kreises mit einer kubischen Parabel mindestens beistimmen.

Eine Hauptschwierigkeit die 3 Kegelschnitte Hyperbel, Parabel und Ellipse als Eisenbahnkurve zu verwerten, und hierzu bedarf es wohl weiter keines Kommentars von seiten der Praxis, ist wohl einesteils die unbequeme Absteckung, anderenteils das Einpassen der genannten Kurven bei Aufstellung des Projektes; von seiten der Theorie die mangelhafte Rektifikation, namentlich der Hyperbel und Ellipse und lange Tangenten für kleine  $\sphericalangle P \sphericalangle$ .

In Bezug auf die Bearbeitung des Projektes pflegt man im Eisenbahnbau bei Kurven gewöhnlich für die zulässigen Kreisradien Schablonen mit und ohne Übergangskurven zu verwenden. Es ist nun offenbar nicht schwierig, sich auch solche Schablonen für andere Kurven herzustellen, wenn die Herstellung dieser auch umständlich ist. Die zweite mehr ins Gewicht fallende Schwierigkeit, die Absteckung im Felde, lässt sich auch umgehen, oder bedeutend reduzieren, wenn man tabellarische Übersichten vor sich hat, analog denjenigen für den Kreis aufgestellten, um alle zeitraubende Nebenrech-

nungen zu ersparen, welche freilich möglichst praktische Kontrollen nicht vermissen lassen dürfen. Bei Aufstellung der folgenden Theorien haben wir hierauf und auf die erwähnte Rektifikation ganz besonders Rücksicht genommen, und werden in den einzelnen Fällen nicht unterlassen, auf etwaige Beschränkungen aufmerksam zu machen.

Mit dem aufgestellten Tabellarium haben wir versucht hinreichende Anhaltspunkte für die Praxis zu gewähren, wenngleich, um ein zu umfangreiches Tabellarium zu vermeiden, einige Reduktionen im Vergleich zu den Kreistabellen vorgenommen werden mussten.

III.

Die Parabel als Eisenbahnkurve.

1. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen.

YMX Fig. 16 sei ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, AME die Parabel, deren Scheitel im Koordinatenanfang M, zugleich Bogenmitte liegt. Die Gleichung der Parabel lautet für diese Lage, wenn p der Parameter, P ein beliebiger Bogenpunkt, dessen Koordinaten xy

a) . . . . .  $y = \frac{1}{p}x^2$

Die beiden ersten Ableitungen sind  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{p}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{p}$ ; setzt man dieselben in die Gleichung für den Krümmungshalbmesser (S. S. 23), so wird dieser

b) . . . . .  $\rho = \frac{1}{2p^2} \sqrt{(p^2 + 4x^2)^3}$

Im Scheitel M wird für  $x = 0$ ,  $\rho = r = \frac{p}{2}$ .

Damit wir die Parabel als Eisenbahnkurve verwenden können, machen wir den Parameter dem Durchmesser des früheren Kreisradius r gleich.

31) . . . . .  $p = 2r$

Die Gleichung der Parabel als Eisenbahnkurve nimmt dann die Form an

32) . . . . .  $y = \frac{x^2}{2r}$

Es ist weiter (Fig. 16) WG eine Tangente an die Parabel. Die Lage des Berührungspunktes E (Bogenende oder Bogenanfang), also die Länge der Tangente bis zum Anschluss an die Gerade ist  $T = WE$ . EG wird so gewählt, dass der Krümmungsradius bei E,  $R \geq 3000^m$  wird\*).

VE = t Tangentenabschnitt, MW = m Bogenmittenabstand, W Winkelpunkt,  $\alpha \angle P \angle$ , der Hilfsbogenpunkt Q sei durch die Koordinaten  $x_1 y_1$  bestimmt.  $x_0 y_0$  seien die Koordinaten des Punktes E.

Ferner sei  $s_0 = ME$  die Maximalsehne,  $\widehat{MQE} = \frac{L}{2}$  die Bogenlänge der

\*) In der Praxis erhalten Radien  $> 3000^m$  keine Übergänge. S. unter VI.



Für die Abscisse  $x_0$  wird der Krümmungshalbmesser nach (b)

$$R = \frac{1}{2p^2} \sqrt{(p^2 + 4x_0^2)^3}.$$

Da nach (d)  $x_0 = T \sin \alpha/2$ , nach (c)  $\operatorname{tg} \alpha/2 = \frac{p}{2x_0} = \frac{p}{2T \sin \alpha/2}$ , somit  $p = 2T \sin \alpha/2 \operatorname{tg} \alpha/2$ , so wird der Wert aus (f) für T auch eingeführt, nach einiger Reduktion

k) . . . . .  $R = \frac{r}{\sin^3 \alpha/2}$

Man sieht hieraus, dass um einen korrekten Anschluss der Parabel an die Gerade zu ermöglichen, für den Krümmungshalbmesser  $R \geq 3000^m$ , die Abhängigkeit zwischen r und dem  $\angle P$  in Rücksicht zu ziehen ist. Die Anwendung der Parabel in der Praxis erleidet dadurch eine gewisse Beschränkung.

$x_1 = \frac{x_0}{2}$  aus (h) in Gl. 32 für den Hilfspunkt Q eingeführt, folgt

l) . . .  $y_1 = \frac{1}{2r} x_1^2 = \frac{1}{2r} \frac{x_0^2}{4} = \frac{2r y_0}{8r} = \frac{1}{4} y_0 = \frac{1}{4} m$ ,

oder auch nach (g)

l<sub>1</sub>) . . . . .  $x_1 = \frac{r}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}, y_1 = \frac{r}{8} \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2}$

Der Tangentenwinkel  $\gamma$  bei Q ergibt sich aus dem Differentialquotient der Gleichung  $y_1 = \frac{1}{20} x_1^2$ , nämlich

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2x_1}{p} = \frac{x_1}{r} = \operatorname{tg} \gamma.$$

Mit Rücksicht auf (g) und (h) findet man  $\angle \gamma$  abhängig von  $\angle \alpha$ , es wird

m) . . . . .  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$

Endlich folgt aus der Figur  $\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{y_0}{x_0}$ , in Verbindung mit den Gleichungen (d) (g) und (m)

m<sub>1</sub>) . . .  $\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \gamma$ , somit  $\beta_0 = \gamma$  und

weil  $\beta_0 + \beta_1 + 90 + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$  im  $\triangle MVE$ , so folgt schliesslich

n) . . . . .  $\beta_1 = 90 - \left( \frac{\alpha}{2} + \beta_0 \right)$

Weitere mehr rein theoretische in das Gebiet der analytischen Geometrie zu verweisende Beziehungen, werden wir Gelegenheit nehmen nach Aufstellung der Theorie für Hyperbel und Ellipse noch anzudeuten.

## 2. Umformung der Gleichungen für den praktischen Gebrauch.

Es scheint für die Praxis am geeignetsten die sämtlichen Formeln abhängig vom Minimalkrümmungsradius r aufzustellen und relative Verhältnisse zu bilden.

Aus den Gl. f, g, k, l, m folgt unmittelbar

$$\left(\frac{R}{r}\right) = \frac{1}{\sin \frac{3\alpha}{2}} \dots \dots \dots 33)$$

$$\left(\frac{T}{r}\right) = \frac{\cotg \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \dots \dots \dots 34)$$

$$\left(\frac{x_1}{r}\right) = \tg \gamma = \tg \beta_0 = \frac{1}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} \dots \dots \dots 35)$$

$$\left(\frac{m}{r}\right) = \left(\frac{y_0}{r}\right) = \frac{1}{2} \cotg \frac{2\alpha}{2} = 4 \left(\frac{y_1}{r}\right) \dots \dots \dots 36)$$

(h) und (i) liefern ferner:

$$\left(\frac{x_0}{r}\right) = 2 \left(\frac{x_1}{r}\right) = \cotg \frac{\alpha}{2} \dots \dots \dots 37)$$

$$\left(\frac{t}{r}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{T}{r}\right) \dots \dots \dots 38)$$

$$\left(\frac{f}{r}\right) = 2 \left(\frac{y_1}{r}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{y_0}{r}\right) \dots \dots \dots 39)$$

und Gl. 32 endlich allgemein

$$\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{r}\right)^2 \dots \dots \dots 40)$$

Die vorstehenden Gleichungen dienen als Grundlage zur Aufstellung der Tabellen für die Absteckung der Parabel.

Tab. P I. enthält die relativen Werte der Hauptverhältnisse für die Winkelpunktswinkel  $\alpha = 60^\circ$  bis  $180^\circ$  für den halben  $\angle P$  von  $5'$  zu  $5'$  fortschreitend auf 5 bzw. 6 Dezimalen genau. Für die Praxis genügt es vollkommen  $\frac{R}{r}$  auf 3 Dezimalen zu kennen, da es nur von Interesse ist zu konstatieren, ob  $R \stackrel{Z}{\geq} \text{rot } 3000^m$  ist.

Gl. 40 dient zur Absteckung der Parabel mittelst rechtwinkliger Koordinaten von Bogenmitte aus und dürfte die zugehörige Tab. P II für alle vorkommenden praktischen Fälle ausreichend sein. Auf den Gebrauch der Tabellen kommen wir weiter unten zurück.

### 3. Rektifikation der Parabel.

Die Länge des Parabelbogens M Q E findet man mit Rücksicht auf die Verwechslung der Koordinaten aus der bekannten Rektifikationsformel

$$\frac{L}{2} = \int_0^{y_0} \sqrt{1 + \frac{p}{4y_0}} \, dy_0,$$

indem man aus der allgemeinen Formel

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

den Wert  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{x}}$  aus der Gleichung  $y = \sqrt{px}$  einführt und die Koordinaten vertauscht.

Nach teilweiser Integration wird  $\sqrt{1 + \frac{p}{4y_0}} = u$  gesetzt,  $y_0$  entwickelt,

$$\frac{L}{2} = \int u \, dy_0 = u y_0 - \frac{p}{4} \int \frac{du}{u^2 - 1}.$$

$\frac{1}{u^2 - 1}$  in Partialbrüche zerlegt  $\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 1}$ , folgt

$B = -\frac{1}{2}$ ,  $A = +\frac{1}{2}$ , somit eingeführt

$$\frac{L}{2} = y_0 u - \left[ \frac{p}{2} \int \frac{du}{2(u-1)} - \frac{p}{4} \int \frac{du}{2(u+1)} \right] = y_0 u + \frac{p}{8} \operatorname{lognat} \frac{u+1}{u-1}$$

oder für obiges bestimmtes Integral  $u$  zurückgesetzt

$$\frac{L}{2} = y_0 \sqrt{1 + \frac{p}{4y_0}} + \frac{1}{8} \operatorname{lognat} \frac{\sqrt{1 + \frac{p}{4y_0}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{p}{4y_0}} - 1}$$

Setzt man  $p = 2r$  dann wird nach Reduktion die relative Bogenlänge

$$41) \quad \frac{L}{2r} = \sqrt{\frac{y_0}{r} \left( \frac{y_0}{r} + \frac{1}{2} \right)} + \frac{1}{4} \operatorname{lognat} \left[ \frac{\sqrt{\frac{y_0}{r} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{y_0}{r}}}{\sqrt{\frac{y_0}{r} + \frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{y_0}{r}}} \right]$$

Nach Gl. 36 ist  $\frac{y_0}{r} = \frac{1}{2} \cotg^2 \frac{\alpha}{2}$ , hiernach wird Gl. 41.

$$\frac{L}{2r} = \frac{1}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \cotg^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{4} \operatorname{lognat} \frac{\sqrt{1 + \cotg^2 \frac{\alpha}{2}} + \cotg \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \cotg^2 \frac{\alpha}{2}} - \cotg \frac{\alpha}{2}}$$

Es ist aber  $1 + \cotg^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ , sonach

$$\frac{L}{2r} = \frac{1}{2} \frac{\cotg \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{4} \operatorname{lognat} \frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \frac{\alpha}{2}} \quad \text{oder} \quad \dots \quad 41a)$$

die Reduktionsformeln  $1 + \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{4}$  und  $1 - \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{4}$  berücksichtigt: in Verbindung mit Gl. 34:

$$41b) \quad \frac{L}{2r} = \frac{1}{2} \frac{T}{r} + \frac{1}{4} \operatorname{lognt} \left( \cotg^2 \frac{\alpha}{4} \right) = \frac{t}{r} + \frac{1}{4} \operatorname{lognat} \left( \cotg^2 \frac{\alpha}{4} \right)$$

Setzt man in 41a) für  $\cos \frac{\alpha}{2} = 2 \frac{y_0}{T}$ , bzw.  $t = \frac{T}{2}$  (Gl. d),

dann wird auch

$$\frac{L}{2r} = \frac{1}{2} \frac{T}{r} + \frac{1}{4} \operatorname{lognat} \frac{\frac{T}{2r} + \frac{y_0}{r}}{\frac{T}{r} - \frac{y_0}{r}} = \frac{t}{r} + \frac{1}{4} \operatorname{lognat} \frac{\frac{t}{r} + \frac{y_0}{r}}{\frac{t}{r} - \frac{y_0}{r}} \text{ oder 41c)}$$

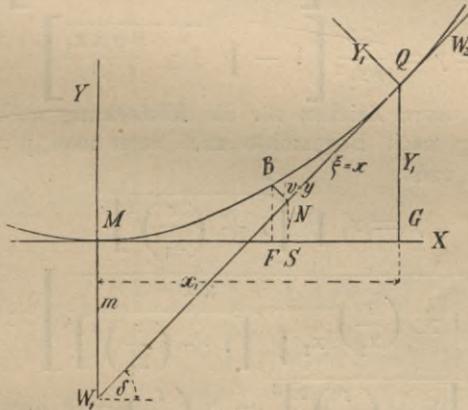
$$\frac{L}{2} = t + \frac{r}{4} \ln \left( \frac{t + y_0}{t - y_0} \right) = t + \frac{r}{4} \ln \left( \frac{t + m}{t - m} \right)^* \quad \dots \quad 41d)$$

Diese Gleichungen wurden zur Berechnung der Bogenlängen verwendet und die Werte in die Tabelle P I und II übertragen.

#### 4. Absteckung der Parabel vom Bogenanfang oder Bogenende.

Um einen Parabelbogen von einem Berührungspunkt einer Tangente abzustecken, können wir zwei Wege einschlagen. Der eine ist, dass wir den

Fig. 17.



Koordinatenanfang von Bogenmitte nach diesem Berührungspunkt, Bogenanfang- oder Ende oder dem Hilfspunkt Q verlegen, und rechtwinkligen Koordinaten verwenden. Der andere Weg ist Sehnentangentenwinkel (§ 1 Nr. 2) einzuführen bzw. nach dem Prinzip der Polarkoordinaten zu verfahren.

Die Verlegung des Koordinatenanfangs nach Bogenende, die Abscissenachse als Tangente angenommen, führt zu ziemlich verwickelten Formeln. Einfacher gestalten sich diese, wenn man eine parallele Koordinatenverschiebung vornimmt, ohne Drehung derselben. Dasselbe gilt auch für Sehnentangentenwinkel.

A) Nach dem ersten Verfahren verlegen wir das Koordinatensystem von Y M X Fig. 17 nach Y<sub>1</sub> Q W<sub>1</sub> und Q W<sub>1</sub> sei Tangente, zugleich Abscissenachse, Q habe wieder als Hilfspunkt die Koordinaten auf Y M X bezogen x<sub>1</sub> y<sub>1</sub>. Die neuen Koordinaten für einen beliebigen Bogenpunkt seien ξ, v. Bezogen auf M als Anfang, ist für B

$$\overline{BF} = \frac{1}{p} \overline{MF}^2 \quad \dots \quad a)$$

\*) Weitere Folgerungen, Näherungsausdrücke S. unter VI.

Aus der Figur findet man

$$BF = v \cos \delta + (y_1 - \xi \sin \delta)$$

$MF = x_1 - (\xi \cos \delta + v \sin \delta)$ , es wird sonach, in a eingeführt,

$$b) \quad v \cos \delta - y_1 - \xi \sin \delta = \frac{1}{p} (x_1 - \xi \cos \delta - v \sin \delta)^2$$

Bezeichnen wir die Tangentlänge  $W_1 Q$  mit  $T_1$ , so ist bekanntlich

$$T_1 = \sqrt{(p + 4 y_1) y_1}, \text{ ferner ist } y_1 = \frac{1}{p} x_1^2, x_1 = T_1 \cos \delta, \frac{2 y_1}{T_1} = \sin \delta,$$

hieraus findet man

$$\cos \delta = \frac{x_1}{\sqrt{(p + 4 y_1) y_1}} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 4 x_1^2}}, \quad \sin \delta = \frac{2 x_1}{\sqrt{p^2 + 4 x_1^2}}$$

Setzt man für den Augenblick  $\sqrt{p^2 + 4 x_1^2} = b$  und für  $\xi = x$ ,  $v = y$

dann wird aus Gl. (b), die Werte für  $\sin \delta$ ,  $\cos \delta$  und für  $y_1 = \frac{1}{p} x_1^2$  eingeführt,

$$y \frac{p}{b} + \frac{x_1^2}{p} - x \frac{2 x_1}{b} = \frac{1}{p} \left[ x_1 - \left( x \frac{p}{b} + y \frac{2 x_1}{b} \right) \right]^2, \text{ hieraus folgt}$$

$$c) \quad . . . NB = y = \frac{b^3}{8 x_1^2} \left[ 1 - \sqrt{1 \pm \frac{8 p x x_1}{b^3}} \right] \pm \frac{x p}{2 x_1}$$

Hier gilt das obere Zeichen für die Absteckung nach  $W_2$ ; das untere für die Absteckung nach Bogenmitte zu. Setzt man  $p = 2r$ , dann wird  $b = 2 \sqrt{r^2 + x_1^2}$  und

$$y = x_1 \sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{r}{x_1} \right)^2 \right]^3}.$$

$$d) \quad \left[ 1 - \sqrt{1 \pm \left( \frac{r}{x_1} \right) \frac{2x}{x_1 \sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{r}{x_1} \right)^2 \right]^3}} \right] \pm x \left( \frac{r}{x_1} \right),$$

für  $x_1 \sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{r}{x_1} \right)^2 \right]^3} = c$ ,  $\left( \frac{r}{x_1} \right) = d$  gesetzt, folgt

$$e) \quad . . . . y = c \left( 1 - \sqrt{1 \pm 2x \frac{d}{c}} \right) \pm x d$$

Man kann diese Gleichung auch abhängig vom  $\angle P \angle \alpha$  Fig. 16 aufstellen, wenn man

$x_1 = \frac{r}{2} \cotg \frac{\alpha}{2}$  einführt; nach einiger Reduktion findet sich

$$f) \quad . . . y = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{2r}{a} \left( 1 - \sqrt{1 \pm \frac{x}{r} a} \right) + x \right]$$

$$\text{wenn } a = \frac{\cotg \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\left( 1 + \frac{1}{4} \cotg^2 \frac{\alpha}{2} \right)^3}}$$

Den Berührungspunkt von  $Q$  nach  $E$  Bogenende Fig. 16 verlegt, vertauschen wir  $x_1$  mit  $x_0$  oder setzen  $2 x_1 = x_0 = r \cotg \frac{\alpha}{2}$ , dann wird analog (f)

$$y = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{r}{a_1} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2x}{r} a_1} \right] - x \right] \text{ worin } \dots f_1)$$

$$a_1 = \frac{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\left(1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)^3}}$$

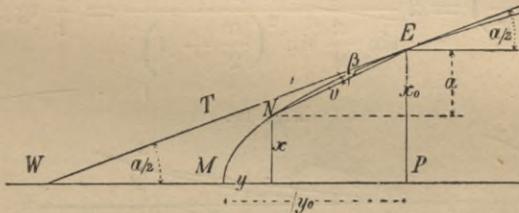
Das obere Zeichen entbehren wir, weil sich an E unmittelbar die Gerade anschliesst.

Eine praktische Anwendung dieser Gleichungen ist wohl kaum empfehlenswert, da sie zu einer tabellarischen Übersicht, unter welcher Form eine solche auch zur Anwendung gelangt, zu verwickelt sind.

**B)** Günstiger gestalten sich die Formeln durch Einführung einer neuen Veränderlichen, dem Sehntangentenwinkel.

E Fig. 18 sei wieder Bogenanfang oder -Ende. EW die Tangente an den Parabelbogen ME;  $v$  Radius vector und  $\beta$  der zugehörige Sehntangentenwinkel für den beliebigen Bogenpunkt N; die übrigen Bezeichnungen sind die früheren.

Fig. 18.



$\angle E = NEP$  ist  $90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$ , folglich

$$a = v \cos \left[ 90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \right] = v \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \dots g)$$

$$y_0 - y = v \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \dots h)$$

Zufolge der Gl. der Parabel (32) gilt für E und N

$$x_0^2 = 2r y_0, \quad x^2 = (x_0 - a)^2 = 2r y \dots i)$$

$y_0$  aus (i) in (h) eingesetzt, folgt

$$\frac{x^2}{2r} - y = v \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \text{ oder } x_0^2 - 2r y = 2r v \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right).$$

Ferner für  $2r y$  seinen Wert aus (i) und für  $a = v \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$

verwendet, folgt zunächst  $x_0^2 - (x_0 - a)^2 = 2r v \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$  und nach entsprechender Reduktion der Radius vector

$$v = \frac{2x_0 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) - 2r \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}$$

Da nun  $x_0 = r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ , Gl. 37, so ergibt sich  $v$  abhängig vom klein-

sten Krümmungsradius, vom Ausschlag  $\beta$  und dem  $\angle P \angle$ , wie folgt:

$$42) \left(\frac{v}{r}\right) = 2 \frac{\cotg \frac{\alpha}{2} - \cotg \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)} = 2 \frac{\sin \beta}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}$$

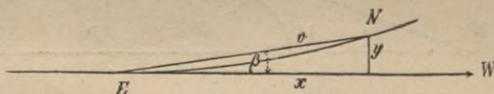
Wir haben es bis jetzt noch unterlassen, vorstehende Polargleichung der Parabel für die Praxis zu verwenden; obgleich dieselbe viel einfacher konstruiert ist, als die im vorigen Falle A. Wie man leicht übersieht, ist für diese Gleichung allein ein voluminöses Tabellarium erforderlich, da  $v$  gleichzeitig von  $\alpha/2$  und  $\beta$  abhängig ist.

Eine Reduktion auf rechtwinkelige Koordinate lässt sich hier leichter bewerkstelligen als oben. Ist Fig. 19 E W die Tangentenrichtung, E Bogenende, so folgt unmittelbar  $y = v \sin \beta$  und  $x = v \cos \beta$  oder mit (42) kombiniert

$$\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\sin 2\beta}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)} \text{ und}$$

$$43) \dots \left(\frac{y}{r}\right) = 2 \frac{\sin^2 \beta}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)} = \frac{x}{r} \operatorname{tg} \beta$$

Fig. 19.



Diese Formeln ersetzen die in A aufgestellten direkten Ausdrücke vollkommen, wenn nur  $\beta$  (progressiv von  $5^{\text{min}}$  zu  $5^{\text{min}}$  circa) so gewählt wird, dass fortschreitende Abscissenlängen von  $10^{\text{m}}$  zu  $10^{\text{m}}$  wenigstens resultieren; sie erfordern aber auch ein ungemein grosses Tabellarium. In einzelnen besonders schwierigen Fällen bei den Feldoperationen, dürfte es nicht schwer fallen, sie ausnahmsweise in Rücksicht zu ziehen. Um für die praktische Anwendung in solchen Fällen, den Ausschlagwinkel  $\beta$  betreffend, zu wünschenswerten Grenzen zu gelangen, wollen wir der Vervollständigkeit wegen es nicht unterlassen diese festzustellen.

C) Bezeichnen wir Fig. 20 mit  $\beta_n$  den Ausschlag von der Haupttangente EW aus nach Q, die Bezeichnungen  $\beta$ , und  $\beta_0$  sind schon aus Fig. 16 bekannt, dann folgt unmittelbar aus der Figur,  $\triangle EQR$

$$\cotg \left(\frac{\alpha}{2} + \beta_n\right) = \frac{y_0 - y_1}{x_1}$$

Die obigen Werte für  $y_0$ ,  $y_1$  und  $x_1$  (Gl. 30 bis 40) abhängig von  $\frac{\alpha}{2}$  substituiert, ergibt sich nach entsprechender Reduktion

$$\cotg \left(\frac{\alpha}{2} + \beta_n\right) = \cotg \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4} \cotg \frac{\alpha}{2}.$$

Zerlegt man  $\cotg \left(\frac{\alpha}{2} + \beta_n\right)$  und entwickelt  $\operatorname{tg} \beta_n$ , so findet man schliesslich

$$\operatorname{tg} \beta_n = \frac{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{3 \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} + 4} = \frac{\sin \alpha}{7 - \cos \alpha} \dots 44)$$

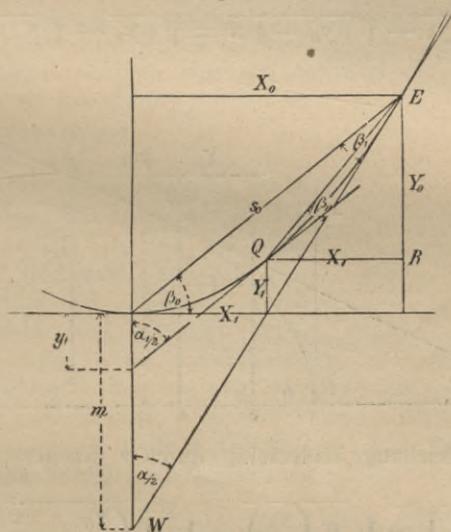
Für  $\alpha = 80^\circ$  erreicht  $\beta_n$  das Maximum für den praktischen Gebrauch, dann wird  $\beta_n = 7^\circ 36'$ .

In derselben Weise findet sich übrigens auch (S. Gl. (n) S. 34)

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{2 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{3 - \cos \alpha} \dots 45)$$

D) Am geeignetsten für die Herstellung einer praktischen Tabelle erscheint es, wie schon oben bemerkt, behufs Absteckung der Parabel von

Fig. 20.



Bogenanfang oder -Ende eine parallele Verschiebung des Koordinatensystems vorzunehmen. Die resultierenden Formeln lassen sich durch Einführung von Hilfskonstanten unabhängig von  $\angle P \angle \alpha$  aufstellen, sind somit für alle Fälle ausreichend.

Die Gleichung der Parabel für den Anfangspunkt O ist Fig. 21  $y^2 = px$ . Verschieben wir das Koordinatensystem parallel zu sich selbst nach einem beliebigen Bogenpunkt  $O_1$ , dessen Koordinaten a, b bezogen auf O sein

\*)  $\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2}}$  liefert nach  $\frac{\alpha}{2}$  aufgelöst zwei Werte

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \beta_1} \pm \frac{1}{2 \operatorname{tg} \beta_1} \sqrt{1 - 8 \operatorname{tg}^2 \beta_1}, \text{ für } \operatorname{tg} \beta_1 = \sqrt{\frac{1}{8}} \text{ oder}$$

für  $\beta_1 = 19^\circ 28' 15''$  ändert sich die Funktion, wie auch aus der Haupttabelle I in der letzten Rubrik zu sehen ist.



Der Gebrauch dieser Tabelle erheischt allerdings zur Bestimmung der absoluten Koordinaten eine doppelte Multiplikation auf dem Felde, und zwar die Abscissenwerte mit  $r$  und  $\frac{y_0}{r}$  oder, wenn  $y_0$  bereits bekannt, was immer vorausgesetzt werden kann, mit  $y_0$ , die Ordinatenwerte mit  $r$  und der Konstanten  $\sqrt{2 \frac{y_0}{r}}$  (Tab P I); ausserdem muss die Abscissenachse selbst von der Tangente EW nach Bogenmitte zu um  $\angle \frac{\alpha}{2}$  besonders markiert werden. (S. Fig. 22). Die Anzahl obiger Multiplikationen beschränken sich indessen immer nur im Maximum auf 9 bezw. 10, da die sämtlichen andern nur von diesen abgeschrieben, richtig unter einander gesetzt zu werden brauchen.

### 5. Absteckung der Parabel vom Hilfsbogenpunkt Q.

Bei den verhältnismässigen langen Tangenten der Parabel ist es noch mehr als beim Kreis erforderlich, wenn es die Terrainverhältnisse zulassen oder gar gebieten, die Parabel noch von einem ihrer Bogenpunkte zwischen Bogenmitte und -Ende abstecken zu können. Wir haben hierzu den Bogenpunkt Q gewählt, welcher bei allen Kegelschnitten die günstigste Lage hat.

Die Aufstellung der Formeln durch rechtwinkelige Koordinaten erfordert keine besondere Theorie mehr, wenn wir dasselbe Verfahren wie zu Ende des vorigen Abschnittes (unter D.) einschlagen.

Wir müssen hier zwei Fälle unterscheiden: die Absteckung von Q nach Bogenmitte zu und die nach Bogenende.

Fig. 22.

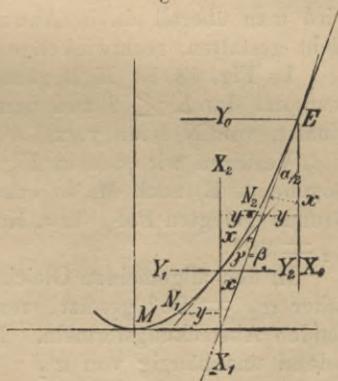


Fig. 22 giebt in der Zusammenstellung diese beiden und den eben im vorigen Abschnitt besprochenen Fall. Die Bogenpunkte  $N_1$  und  $N_2$  lassen sich vom Bogenpunkt Q aus durch das Koordinatensystem  $Y_1 Q X_1$  bezw.  $N_2$  von E durch  $Y_0 E X_0$  ermitteln;  $N_2$  aber auch von Q aus durch  $Y_2 Q X_2$ . Die Lage der Ordinatenachse  $Y_1 Q Y_2$  läuft parallel zur ursprünglichen Abscissenachse MX.

Auf das Koordinatensystem  $Y_1 Q X_1$  bezogen, lautet die Formel in Gl. 46  $y_0$  mit  $y_1$  vertauscht

$$\frac{\left(\frac{y}{r}\right)}{\sqrt{2 \frac{y_1}{r}}} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right) \left(\frac{y_1}{r}\right)} \dots \dots \dots 47)$$

Die Konstanten  $\frac{y_1}{r}$  und  $\sqrt{2 \frac{y_1}{r}}$  sind wieder in Tabelle P I enthalten, und liefert Tabelle P IV die Tabellenwerte der Gl. 47.

Die Absteckungsformel für das Koordinatensystem  $X_2 Q Y_2$ , für  $Q$  nach Bogenende zu, liefert uns Gl. (a), S. 42. In  $(v + a)^2 = p (\xi + b)$ ,  $a^2 = pb = 2rb$  eingeführt, nach  $v$  aufgelöst folgt

$$v = \pm \sqrt{2r(b + \xi)} - \sqrt{2rb}$$

Vertauscht man hier wieder  $v$  mit  $y$ ,  $\xi$  mit  $x$ , setzt  $b = y_1$ , dividiert durch  $r$ , dann folgt nach bekannter Reduktion schliesslich

$$48) \dots \dots \frac{\left(\frac{y}{r}\right)}{\sqrt{2\frac{y_1}{r}}} = \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{y_1}{r}\right)} - 1}$$

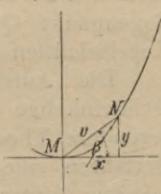
Mit Benutzung der Konstanten aus der Tabelle P I liefert Tabelle P V die nach dieser Gleichung berechneten Absteckungswerte.

**6. Absteckung der Parabel von Bogenmitte mittelst Sehntangentenwinkel.**

Dieses Absteckungsverfahren, analog dem des Kreises § 1 Abschnitt 2, wird man überall da in Anwendung bringen, wo es die Terrainverhältnisse nicht gestatten, rechtwinkelige Koordinaten zu benutzen.

In Fig. 23 ist  $M$  Bogenmitte. Der Bogenpunkt  $N$  ist bestimmt durch  $\angle \beta$  und dem Radius vector  $v$ , die Koordinaten von  $N$  seien  $y, x$ .

Fig. 23.



Verlegen wir den in Fig. 18 angenommenen Pol (in Bogenende E) nach  $M$ , so erhalten wir die der Fig. 23 zu Grunde gelegten Pol- bzw. Koordinatenlage. Für diese ist  $\alpha/2 = 90^\circ$ .

In den allgemeinen Gleichungen (42) und (43) Seite 40, daher  $\alpha/2 = 90^\circ$  gesetzt, resultieren die jetzt zu verwendenden Absteckungsformeln. Es wird nach entsprechender Reduktion, selbstredend unabhängig von  $\alpha/2$

$$49) \dots \dots \frac{v}{r} = \frac{2\text{tg}\beta}{\cos\beta} = 2 \frac{\text{tg}^2\beta}{\sin\beta}, \text{ die zugehörigen Koordinaten}$$

$$50) \dots \dots \dots \frac{x}{r} = 2 \text{tg} \beta, \frac{y}{r} = 2 \text{tg}^2 \beta$$

Für  $\beta = 0$  bis  $40^\circ$  ist hiernach die Tabelle P III berechnet, welche wohl keiner Erklärung mehr bedarf.

Nach Figur 16 bezeichneten wir den grössten Radiusvector von Bogenmitte, die Maximalsehnenlänge, mit  $s_0$ , den zugehörigen Winkel mit  $\beta_0$ , und fanden S. 34 Gl. m und  $m_1$ ,  $\text{tg} \beta_0 = \frac{1}{2} \text{cotg} \alpha/2$ .

Nun ist Fig. 16

$$\frac{x_0}{s_0} = \cos \beta_0, \text{ woraus } s_0 = \frac{x_0}{\cos \beta_0}, \text{ durch } r \text{ dividiert, folgt}$$

$$51) \dots \dots \dots \left(\frac{s_0}{r}\right) = \frac{\left(\frac{x_0}{r}\right)}{\cos \beta_0}$$

Nach dieser Formel sind in Tabelle P I in der 7. Spalte die relativen Maximalsehnenlängen berechnet. Setzt man in (49) für  $\beta = \beta_0$ ,  $v = s_0$ , also  $\text{tg. } \beta_0 = \frac{1}{2} \text{ctg } \alpha/2$ ,  $\cos \beta_0 = \frac{x_0}{s_0}$ , so findet sich wieder  $\frac{x_0}{r} = \text{ctg } \alpha/2$  Gl. (g.) S. 33. In demselben Sinne ergibt sich aus (50)

$$\frac{y_0}{r} = \frac{1}{2} \text{ctg}^2 \alpha/2 = 2 \text{tg}^2 \beta_0.$$

In Bezug auf Absteckung durch rechtwinkelige Koordinaten von Bogenmitte, ergänzen sich Tabelle P II und P III gegenseitig.

### 7. Beispiele und Anwendung der Tabellen.

Obwohl die vorliegenden Tabellen in ihren Anwendungen keine Schwierigkeiten bereiten werden, so wollen wir es doch der Vollständigkeit wegen nicht unterlassen, einige Beispiele zu berechnen.

1. Beispiel. Für  $\alpha = 120^\circ$  und  $r = 2000^m$  Minimalradius sind die Hauptdimensionen der Parabel aus den Tabellen zu entnehmen.

Tabelle P I liefert für  $\alpha/2 = 60^\circ$ ,  $\frac{R}{r} = 1.540$ , woraus  $R = 1.540.2000 = 3080^m$ , also  $\sphericalangle 3000^m$ \*)

Tangentenlänge  $T = 0,66667.2000 = 1333.333^m$ ; Bogenlänge  $L = 1.215970.2000 = 2431.94^m$ , Maximalkoordinaten für Bogenende oder Bogenanfang  $x_0 = 0.577350.2000 = 1154.70^m$ ,  $y_0 = 0.166667.2000 = 333,323^m$ , Maximalsehnenlänge  $s_0 = 0.600754.2000 = 1201.508^m$ ; Maximalsehnenwinkel  $\beta_0 = 16^\circ 5' 53''$ ; Bogenmittenabstand  $m = 333.333^m$ ; Koordinaten des Bogenpunktes Q,  $x_1 = 0.288675.2000 = 577.350^m$ ,  $y_1 = \frac{1}{4} y_0 = 83,333^m$ . Tab. P II liefert für  $\frac{x}{r} = 0.289$ ,  $\frac{y}{r} = 0.0417605$  also ganz richtig nahezu  $y_1$ ,  $y = 0.0417605 = 83.521^m$ . Die Bogenlänge bis zu Q beiderseitig von Bogenmitte durch Interpolation aus Tabelle P II,  $\frac{L}{r} = 0.58603$  also  $L = 0,58603.2000 = 1172,06^m$ .

Soll die Parabel mittelst rechth. Koordinaten von Bogenmitte aus abgesteckt werden, dann ergibt sich von 10 zu 10<sup>m</sup> aus Tabelle P II

für $\frac{x}{r}$	0.005,	0.01,	0.015,	0.02,	0.025,	0.030 . . . .
$\frac{y}{r}$	0,0000125	0.000500	0.001125	0.002000	0.003125	0.004500 . . . .
für x =	10,	20,	30	40	50	60 <sup>m</sup> . . . .
y =	0.025	0,100	0,225	0,400	0,625	0,900 <sup>m</sup> . . . .

Der Abscissenlänge  $x = 160^m$ , genau  $162.988^m$  entspricht laut Tabelle P III der Sehnentangentenwinkel  $\beta = 2^\circ 20'$  und die Sehnenlänge  $v = 0,081562.2000 = 163,114^m$ .

Ist es geboten die Parabel von Q durch rechth. Koordinaten nach

\*) Sollte für den gleichen  $\sphericalangle P \sphericalangle$  der Minimalradius z. B.  $r = 500$  in Anwendung kommen, dann würde der Anschlussradius  $R = 1.54.500 = 770^m$ , für Hauptbahnen natürlich nicht zulässig.

Bogenende zu abzustecken für die hierher bezügl. Konstanten Tabelle P I,

$$\frac{y_1}{r} = \frac{1}{4} 0.166667 = 0.041666, \quad \sqrt{\frac{2y_1}{r}} = 0.288675,$$

dann liefert Tabelle P V

$$\text{für } \left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\left(\frac{y_1}{r}\right)}{\left(\frac{y}{r}\right)} = \begin{matrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \dots \end{matrix}$$

$$\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{0.04881 \quad 0.09545 \quad 0.14018 \quad 0.18322 \dots}{0.288675}$$

endgültig

$$\begin{matrix} \text{für } x = & 8.333 & 16.667 & 25.000 & 33.333^m \dots \\ y = & 28.180 & 55.108 & 81.984 & 105.782^m \dots \end{matrix}$$

2. Beispiel.  $\angle P \angle \alpha = 65^\circ.10'$  Minimalradius  $r = 470^m$ ; Tabelle P I für  $32^\circ 35' = \alpha/2$ ,  $\frac{R}{r} = 6.402$ ,  $R = 6.403.470 = 3009^m$  rot.

Die weiteren Hauptdimensionen sind:

Tangente  $= 2.9054.470 = 1365.562^m$

Bogenlänge  $L = 4.12556.470 = 1939.013^m$

Maximalabszissenlänge (Bogenende)  $x_0 = 1.564659.470 = 725.390^m$

Maximalkoordinate  $y_0 = 1.22408.470 = 575.318^m$

Bogenmitte  $m = y_0 = 575.318^m$

Lage des Bogenpunktes  $Q$ ,  $x_1 = 0.782329.470 = \frac{x_0}{2} = 367.695^m$

$$y_1 = \frac{1}{4} y_0 = \frac{1}{4} 575.318 = 143.829^m.$$

Die Absteckung von Bogenmitte durch Sehmentangentenwinkel Tabelle P III liefert für

$$\begin{matrix} \beta = & 1^\circ, & 2^\circ, & 3^\circ, & 4^\circ, & 5^\circ, & \text{u. s. w.} \\ v = & 16.410, & 32.845, & 49.331, & 65.288, & 82.554 & \text{u. s. w.} \end{matrix}$$

Vom Bogenende durch rechtwinkelige Koordinaten abgesteckt, erhält man die diesbezüglichen Werte aus Tab. P IV. Die Konstanten sind  $\frac{y_0}{r} = 1.22408$

bezw.  $y_0 = 575,318$  und  $\sqrt{\frac{2y_0}{r}} = 1.564659$ . Von 6 zu 6<sup>m</sup> wird

$$\text{für } \left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\left(\frac{y_0}{r}\right)}{\left(\frac{y}{r}\right)} = \begin{matrix} 0.01 & 0.02 & 0.03 & 0.04 \dots, \end{matrix}$$

$$\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{0.0051 \quad 0.01005 \quad 0.01511 \quad 0.02020 \dots}{\sqrt{\frac{2y_0}{r}}} \text{ oder}$$

$$x = \begin{matrix} 5,753 & 11,506 & 17,259 & 23,012 \dots \end{matrix}$$

$$y = \begin{matrix} 3.685 & 7.380 & 11.112 & 14.852 \text{ u. s. w.} \end{matrix}$$

3. Beispiel. Es sei  $r = 2700$  und  $\alpha/2 = 75^\circ$ , also  $R = 1.11.2700 = 3000$ , dann sind die Hauptdimensionen nach Tabelle P I.

$$T = 0.27740.2700 = 748.98^m$$

$$L = 0,542242.2700 = 1464.05^m$$

$$x_0 = 0,267949.2700 = 753.46^m$$

$$y_0 = m = 0,035482.2700 = 95.80^m$$

4. Beispiel.\*) Aus irgend welchen Gründen soll in einem Strassenprojekt im Gebirge (Zulässiges Minimum  $r = 75^m$ ) eine Parabel verwendet werden für den kleinsten Scheitelradius  $r = 100^m$  und  $\angle P \angle \alpha/2 = 40^\circ$  und  $r = 100^m$ .

$$T = 185.40 [119.18], L = 286.47 [174.53], m = 71.01 [55.57]$$

Die in Klammern stehenden Zahlen sind die entsprechenden Kreisdimensionen nach Tabelle K I.

IV.

Die Hyperbel als Eisenbahnkurve.

1. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen.

Um einen Hyperbelbogen als Eisenbahn- (ev. Strassen-) kurve verwenden zu können, ist es zunächst wieder erforderlich, die sonst übliche Mittelpunkts-gleichung der Hyperbel in eine Scheitelgleichung zu verwandeln, so dass die verlängerte grosse Achse der Hyperbel, Ordinatenachse, der Scheitel zugleich wie bei der Parabel Bogenmitte wird.

Fig. 24 stellt diese Lage dar. AMOE ist der Hyperbelbogen, YMX das Koordinatensystem, M Bogenmitte, E Bogenende (oder Anfang), P ein beliebiger Bogenpunkt dessen Koordinaten  $x, y$  und dessen Krümmungsradius  $\rho$ , während  $r$  der kleinste (bei M),  $R$  der Anschlusskrümmungskreis an die Gerade EG,  $R \geq 3000^m$ , ist. Die Bezeichnungen sind im übrigen gleichlautend mit denen der Parabel. Die Buchstaben M und G müssen in der Fig. ergänzt werden.

Der Hyperbelmittelpunkt O fällt wie bekanntlich ausserhalb des  $\angle P \angle W$ , dessen Grösse auch  $\alpha$ ; es ist daher  $OM = a$  die halbe grosse Achse (Konstante), während wir auch mit  $b$  die imaginäre Achse bezeichnen wollen.

Aus der Mittelpunkts-gleichung der Hyperbel folgt für die der Fig. 24 zu Grunde gelegte Koordinatenlage leicht

$$y + a = \frac{a}{b} \sqrt{x^2 + b^2} \dots \dots \dots (a)$$

Die beiden ersten Ableitungen sind

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{ab}{\sqrt{(x^2 + b^2)^3}}$$

Der Krümmungsradius für den beliebigen Bogenpunkt P

$$\rho = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = \frac{\sqrt{x^2 (a^2 + b^2) + b^4}^3}{ab^4}$$

\*) S. VI. Vergleichen etc.



Aus der Figur folgt unmittelbar  $x_0 = T \sin \alpha/2$  . . . . . g)

Für die Verwendung der Hyperbel als praktische Eisenbahnkurve müssen wir die ideale Konstante  $b$  aus solchen Elementen auszudrücken suchen, die uns als absolute Werte in der Praxis vorliegen, dem  $\angle P \angle \alpha/2$  und die Tangentlänge  $T = WE$ . Hierin liegt bereits schon eine gewisse Abhängigkeit oder vielmehr Beschränkung der Hyperbel in der Anwendung.

Setzt man in Gl (f) den Werth für  $x_0$  aus (g) ein, so erhält man, die Konstante  $b$  entwickelt,

$$b^2 = \frac{1}{\left(\frac{\text{tg } \alpha/2}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{x_0}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\text{tg } \alpha/2}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{T \sin \alpha/2}\right)^2} \dots h)$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\text{tg } \alpha/2}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{T \sin \alpha/2}\right)^2}} \dots h_1)$$

Letztere Gleichungen enthalten die Bedingungen, dass  $T > r \frac{\cotg \alpha/2}{\sin \alpha/2}$ ,

während wir aus Gl (f) S. 33 der Parabel fanden  $T = r \frac{\cotg \alpha/2}{\sin \alpha/2}$ .

Für unseren Zweck ist es nun von Wichtigkeit diese Ungleichung für  $T$  zu umgehen. Es ist dies möglich, wenn wir den Maximalkrümmungsradius  $R$  für die Abscisse  $x_0$  (Bogenende — anfang) in Rücksicht ziehen. Suchen wir zu dem Ende zunächst  $x_0$  abhängig von  $R$ ,  $b$  und  $r$  zu bestimmen.

In (e<sub>1</sub>)  $x$  für  $x_0$  und  $q$  für  $R$  gesetzt, folgt

$$R = \frac{\sqrt{\left[x_0^2 (r^2 + b^2) + r^2 b^2\right]^3}}{r^2 b^3}, \text{ nach einiger Reduktion ergibt sich hieraus}$$

$$x_0 = b \sqrt{\frac{r \left(\sqrt[3]{r R^2} - r\right)}{r^2 + b^2}} \dots i)$$

Damit nun  $T$  genau die Länge erhalte, welche dem Krümmungshalbmesser  $R$  bei  $E$  entspricht, entwickeln wir ferner aus (h) oder (h<sub>1</sub>) den Wert  $T$  selbst; es folgt

$$T = \frac{1}{\sin \alpha/2 \sqrt{\left(\frac{\text{tg } \alpha/2}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2}} \dots k)$$

Weil aber auch  $T \sin \alpha/2 = x_0$ , Gl. (g), so ergibt sich die Gl. (i) und (k) kombiniert,

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\text{tg } \alpha/2}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = b \sqrt{\frac{r \left(\sqrt[3]{r R^2} - r\right)}{r^2 + b^2}} \dots l)$$

Letztere Gleichung liefert uns nach entsprechender Reduktion einen Ausdruck für  $b = f(\alpha, R, r)$ , und zwar

$$b = \frac{r \sqrt[3]{R}}{\sqrt{\text{tg}^2 \alpha/2 \left(\sqrt[3]{R^2} - \sqrt[3]{r^2}\right) - \sqrt[3]{r^2}}} \dots l_1)$$

Der Nenner dieses Ausdruckes erhält wieder eine Bedingung

$$\text{tg}^2 \alpha/2 \left(\sqrt[3]{R^2} - \sqrt[3]{r^2}\right) > \sqrt[3]{r^2}, \text{ aufgelöst } r < R \sin^3 \alpha/2 \dots m)$$

Bei der Parabel fanden wir  $r = R \sin^3 \alpha/2$ .

Was nun endlich noch die Hauptelemente  $x$ ,  $m$ ,  $y$ ,  $t$  anbetreffen, so können wir diese in der folgenden Weise entwickeln.

Aus  $\sphericalangle$ VEF Fig. 24 ist  $y_0 = t \cos \alpha/2$ , somit

$$n) \dots \dots \dots t = \frac{y_0}{\cos \alpha/2} \text{ odernach } (d_1)$$

$$n_1) \dots \dots \dots t = \frac{b \left( \sqrt{x_0^2 + b^2} - b \right)}{r \cos \alpha/2}$$

Ferner ist bekanntlich die Länge der Subtangente WZ

$$S_t = \overline{ZO} - \frac{a^2}{ZO}, \text{ oder es ist}$$

$S_t = y_0 + a - \frac{a^2}{y_0 + a}$ , da nun auch  $S_t = y_0 + m$ , so folgt durch Gleichsetzung

$$m = a - \frac{a^2}{y_0 + a}, a = \frac{b^2}{r} \text{ eingeführt, der Bogenmittenabstand}$$

$$o) \dots \dots \dots m = \frac{y_0 b^2}{y_0 r + b^2}; \text{ auch ist direkt aus der Figur}$$

$$o_1) \dots \dots \dots m = (T - t) \cos \frac{\alpha}{2}$$

Ebenso giebt sich aus Fig. 24

$$p) \dots \dots \dots x^2 = m \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ und}$$

aus der Hauptgleichung (d) für  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ .

$$g) \dots \dots \dots y_1 = \frac{b}{r} \left[ \sqrt{x_1^2 + b^2} - b \right]$$

## 2. Umformung der Gleichungen für den praktischen Gebrauch.

Die vorstehenden Gleichungen lassen sich in der aufgestellten Form nur vereinzelt in Anwendung bringen. Eine allgemeine Verwendung erhalten sie erst dann, wenn wir sie, wie bei der Parabel, auf den Minimalradius  $r$  beziehen. Die Gleichung (d) beiderseitig durch  $r$  dividiert, liefert

$$52) \dots \dots \dots \frac{y}{r} = \frac{b}{r} \left[ \sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2} - \frac{b}{r} \right]$$

Das Verhältnis  $\frac{b}{r}$  können wir aus (1) oder (1<sub>1</sub>) ableiten, nach einiger Reduction gelangt man zu

$$53) \dots \dots \dots \frac{b}{r} = \frac{\cos \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}}}{\sqrt{\sin^2 \alpha/2 \sqrt[3]{\left(\frac{R}{r}\right)^2} - 1}} \text{ und}$$

$$54) \dots \dots \dots \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha/2 - \frac{1}{\cos^2 \alpha/2 \sqrt[3]{\left(\frac{R}{r}\right)^2}}}$$

Damit jederzeit reelle Werte für  $\frac{b}{r}$  resultieren, kommt die Bedingung (m) in Betracht, nach welcher

$$\frac{R}{r} > \frac{1}{\sin^3 \alpha/2} \dots \dots \dots 55)$$

Aus (k) findet man die relative Tangentenlänge abhängig von  $\left(\frac{b}{r}\right)$

$$\frac{T}{r} = \frac{1}{\sin \alpha/2 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha/2 - \left(\frac{r}{b}\right)^2}} \dots \dots \dots 56)$$

In diesem Ausdruck Gl. 54 eingeführt, folgt nach einiger Reduktion

$$\frac{T}{r} = \operatorname{cotg} \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}}; \dots \dots \dots 56)$$

(g) liefert mit Benutzung von (56)

$$\frac{x_0}{r} = \frac{T}{r} \sin \alpha/2 = \cos \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}} \dots \dots \dots 57)$$

Aus (0), (0<sub>1</sub>) und (p) folgt

$$\frac{m}{r} = \left(\frac{T}{r} - \frac{t}{r}\right) \cos \alpha/2 = \frac{y_0}{r} \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \frac{T}{r} \cos \alpha/2 - \frac{y_0}{r} \quad 58)$$

und auch nach (n), (n<sub>1</sub>)

$$\frac{t}{r} = \frac{\frac{y_0}{r}}{\cos \alpha/2} = \frac{b}{r} \cos \alpha/2 \left[ \sqrt{\left(\frac{x_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2} - \frac{b}{r} \right] \quad 59)$$

Endlich noch geben (p) und (q)

$$\frac{x_1}{r} = \frac{m}{r} \operatorname{tg} \alpha/2 \dots \dots \dots 60)$$

$$\frac{y_1}{r} = \frac{b}{r} \left[ \sqrt{\left(\frac{x_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2} - \frac{b}{r} \right] \dots \dots \dots 61)$$

Während bei der Parabel nur ein ganz bestimmter  $\angle \alpha$  für  $\frac{R}{r}$  zulässig

ist,  $\frac{R}{r} = \frac{1}{\sin^3 \alpha/2}$ , wodurch ein einmal gewähltes Krümmungsverhältnis nur einem einzigen  $\angle P$  angepasst werden kann, wird bei der Hyperbel durch die Bedingungsgleichung (55)  $r < \frac{R}{\sin^3 \alpha/2}$  diese Beschränkung aufgehoben, hierin liegt ein Vorteil der Hyperbel gegenüber der Parabel, ihre praktische Verwendung betreffend.

Ist z. B.,  $R = 3000^m$ ,  $\alpha/2 = 45^\circ$ , so folgt aus (55)  $r < 3000 \cdot 0.3535 < 1060$  rot.

Für einen Winkelpunktwkl. von  $90^\circ$  und einen Anschlusskrümmungsradius von  $3000^m$ , lässt sich die Hyperbel für eine Reihe von Minimalkrümmungsradien r anwenden, welcher sämtlichen  $< 1060^m$  sein müssen.

$$\frac{R}{r} = \frac{3000}{500} = 6, \quad \frac{R}{r} = \frac{3000}{300} = 10 \text{ etc.}$$

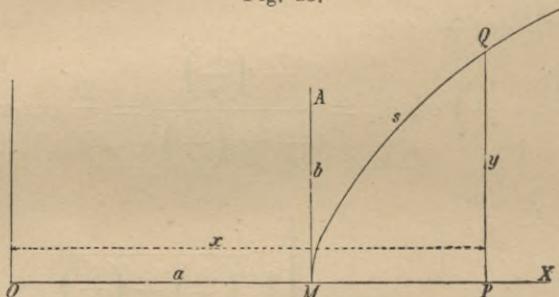
Es enthält auch Gl. 53 wieder die Bedingung, welche die letzte freie Wahl von  $\frac{R}{r}$  bis zu einem gewissen Grade beschränkt. Wie leicht zu übersehen, muss zugleich auch  $\frac{b}{r}$  reel, d. h.  $\sin \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}} > 1$  sein, was dasselbe sagen will, wie Ungleichung (55).

Im vorerwähnten Beispiel,  $\alpha/2 = 45^\circ$ , muss  $\frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt[3]{\frac{R}{r}} > 1$  oder  $\sqrt[3]{\frac{R}{r}} > \sqrt{2}$  d. h.  $\frac{R}{r} > 2.8$  sein, d. i. wie oben  $r < 1060^m$ .

### 3. Die Rektifikation der Hyperbel.

Die Bogenlänge einer Kurve, welche durch zwei Gleichungen gegeben ist von der Form  $x = f(u)$ ,  $y = F(u)$  ist bekanntermassen,\*)

Fig. 25.



$$q) \dots \dots \dots s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

Der Hyperbelast MQ Fig. 25 hat die Länge s, M sei Scheitel, YOX das rechtwinkelige Koordinatensystem mit dem Anfang in O, dem Mittelpunkt der Hyperbel, a, b die Hyperbelkonstanten.

Die Veränderliche u sei eine Winkelfunktion, und zwar setzen wir in die Mittelpunktgleichung der Hyperbel  $x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2$ .

$x = f(u)$  hezw.  $f(\varphi)$ , nämlich  $x = \frac{a}{\cos \varphi}$ , dann erhalten wir die andere Gleichung  $x = F(\varphi)$ ; es folgt aus der Mittelpunktrechnung  $y^2 a^2 = x^2 b^2 - a^2 b^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} b^2 - a^2 b^2$ , hieraus wird

$$y^2 = b^2 \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 \right) = b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \text{ und } y = b \operatorname{tg} \varphi.$$

\*) Dieser Satz folgt aus der näheren Einsicht des sogenannten charakterischen  $\Delta$ , in welchem das Differential des Hypothenusenelements gleich dem Quadrat der Katheten-elemente ist. Durch die geometrische Lage jedes einzelnen Katheten-elementes für sich ist das Differential der Hypotenuse (Bogenlänge) ebenso sicher bestimmt als durch ein bekanntes Verhältnis beider Katheten. Populär ausgedrückt: zwei beliebig grosse Linien rechtwinkelig zusammengestellt geben ein rechtwinkeliges  $\Delta$ , ist das Verhältnis beider gleich 1, beide gleich gross, und werden diese unter einem rechtwinkligen  $\angle$  zusammengestellt so erscheint ein rechtwinkeliges  $\Delta$  in Gestalt eines halben Quadrates.

Vorstehende beide Gleichungen für x und y lassen sich auch graphisch darstellen.

Es sei  $MM_1$  ein Kreisbogen mit dem Radius a und dem Centriwinkel  $\varphi$  Fig. 26. Errichtet man in  $M_1$  eine Tangente  $M_1P$ , so stellt ein rechtwinkeliges  $\triangle OPM_1$  das Verhältnis  $\frac{OM_1}{OP} = \frac{a}{x}$ , den  $\cos \varphi$  dar. Verkürzt man a um  $M_1T$ , sodass  $OT = b$ , errichtet die Tangente  $TS$  in T, so ist im  $\triangle OTS$ ,  $\frac{ST}{b} = \operatorname{tg} \varphi$  oder  $ST = y = b \operatorname{tg} \varphi$  die Hyperbelordinate, in Fig. 25 mit PQ bezeichnet.

Differenziert man in beiden Gleichungen x, y nach  $\varphi$ , so folgt  $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ ,  
 $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{b}{\cos^2 \varphi}$ , dann wird der Wurzelwert in (q)  $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 =$   
 $\frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2}{\cos^4 \varphi} = \frac{a^2 + b^2 - a^2 \cos^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} = \frac{a^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} - \cos^2 \varphi\right)}{\cos^4 \varphi}$ .

Setzt man  $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = c^2$ , c eine vorübergehende Konstante,\*) . . . r)  
 so erhält man eine für die Auflösung des obigen Integrales (q) passenden Ausdruck; es folgt zunächst

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = a \frac{\sqrt{c^2 - \cos^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi},$$

sodann die Bogenlänge der Hyperbel in den Grenzen  $\varphi = \varphi_1$  und  $\varphi = \varphi_2$  nach einiger Umformung

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{ac}{\cos^2 \varphi} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{c^2}} d\varphi$$

Lassen wir den Bogen in M beginnen, so wird  $\varphi = 0$ , vertauschen wir  $\varphi_2$  mit  $\varphi$  (weil  $\varphi_1 = 0$ ), dann können wir das Integral auch schreiben

$$s = ac \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{c^2}}}{\cos^2 \varphi} d\varphi \dots \dots \dots s)$$

Die Wurzel nach dem binomischen Lehrsatz aufgelöst, ergibt sich\*\*)

$$s = ac \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \varphi}{c^2} - \frac{1}{2.4} \frac{\cos^4 \varphi}{c^4} - \frac{1.3}{2.4.6} \frac{\cos^6 \varphi}{c^6} - \right.$$

$$\left. \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \frac{\cos^8 \varphi}{c^8} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \frac{\cos^{10} \varphi}{c^{10}} \dots \dots \right\} \text{ oder}$$

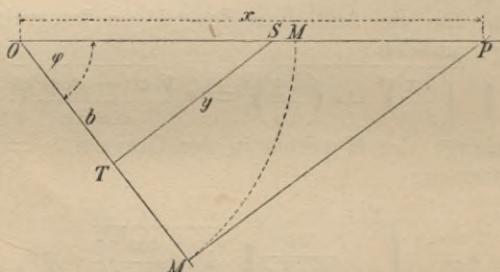
\*) Die sogenannte numerische Excentrizität  $c = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{e}{a}$ , wenn e die Excentrizität.  
 \*\*) S. Dr. Dienger, Diff. Int. Rechnung, Stuttgart Metzler, elliptische Integrale.

$$s = ca \left[ \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{2c^2} \int_0^\varphi d\varphi - \frac{1}{2.4.c^4} \int_0^\varphi \cos^2 \varphi d\varphi - \frac{1.3}{2.4.6.c^6} \int_0^\varphi \cos^4 \varphi d\varphi - \dots \right]$$

Die ersten beiden Integrale aufgelöst und die der vielfachen Cosinuspotenzen vorübergehend mit  $\sum 2n + 2$  bezeichnet, folgt

$$s_1) \quad s = ac \left[ \operatorname{tg} \varphi - \frac{\varphi}{2c^2} - \frac{1}{2.4.c^4} \sum 2 - \frac{1.3}{2.4.6.c^6} \sum 4 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.c^8} \sum 6 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10.c^{10}} \sum 8 - \dots \right]$$

Fig. 26.



Zur Auflösung der vorstehenden  $\int$  verwenden wir am besten die Rekursionsformel.\*)

$$\sum_m = \int \cos^m x \, dx = \frac{\sin \varphi}{m} \left\{ \cos^{m-1} \varphi + \frac{m-1}{m-2} \cos^{m-3} \varphi + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)} \cos^{m-5} \varphi + \frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{(m-2)(m-4)(m-6)} \cos^{m-7} \varphi + \dots + \frac{(m-1)(m-3)\dots 3.1}{(m-2)(m-4)\dots 4.2} \cos \varphi + \frac{(m-1)(m-3)\dots 3.1}{(m-2)(m-4)\dots 4.2} \varphi \right\}$$

Man findet der Reihe nach  $\sum 2 = \frac{\sin \varphi}{2} \cos \varphi + \varphi/2$

$$\sum 4 = \frac{\sin \varphi}{4} \left( \cos^3 \varphi + \frac{3}{2} \cos \varphi \right) + \frac{1.3}{2.4} \varphi$$

$$\sum 6 = \frac{\sin \varphi}{6} \left( \cos^5 \varphi + \frac{5}{4} \cos^3 \varphi + \frac{1.3}{4.2} \cos \varphi \right) + \frac{1.3.5}{2.4.6} \varphi$$

$$\sum 8 = \frac{\sin \varphi}{8} \left( \cos^7 \varphi + \frac{7}{6} \cos^5 \varphi + \frac{7 \cdot 5}{6 \cdot 4} \cos^3 \varphi + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cos \varphi \right) + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \varphi$$

\*) Nach Sohnke, Aufgabensammlung von Dr. H. Amstein.

Diese Werte in Gl. (s<sub>1</sub>) eingesetzt, die Zahlenwerte ausgerechnet, wird

$$s = a \left\{ c \operatorname{tg} \varphi - \left[ \frac{\varphi}{2c} + \frac{1}{16c^3} \left( \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \varphi \right) + \frac{1}{64c^5} \cdot \right. \right. \\ \left. \left( \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left[ \cos^2 \varphi + \frac{3}{2} \right] + \frac{3}{2} \varphi \right) + \frac{5}{768c^7} \right. \\ \left. \left( \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left[ \cos^4 \varphi + \frac{5}{4} \cos^2 \varphi + \frac{15}{8} \varphi \right] + \frac{15}{8} \varphi \right) + \right. \\ \left. \frac{7}{2048c^9} \left( \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left[ \cos^6 \varphi + \frac{7}{6} \cos^4 \varphi + \frac{35}{24} \cos^2 \varphi + \frac{105}{48} \right] + \frac{105}{48} \varphi \right) \right. \\ \left. + \frac{21}{10240c^{11}} \left( \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left[ \cos^8 \varphi + \frac{9}{8} \cos^6 \varphi + \frac{63}{48} \cos^4 \varphi + \frac{315}{192} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \cos^2 \varphi + \frac{945}{384} \right] + \frac{945}{384} \varphi \right) + \dots \right\} \quad (s_2)$$

Nach einigen nunmehr erfolgten genaueren und für unsern Zweck in entsprechenden Grenzen gehaltenen Untersuchungen, ergab sich das Resultat, dass für die Rektifikation der Hyperbel für unseren Fall der Verwertung bestimmter Hyperbelen als Eisenbahncurven, die vorstehenden 5 Glieder in der eckigen Klammer genügen, sie liefern die Bogenlänge auf 6 Dezimalen.

Die Gl. (s<sub>2</sub>) enthält aber noch die Winkelfunktion  $\varphi$  und die Constante  $c$ , welche wir vorerst durch uns nahe liegendere Elemente ausdrücken wollen.

Die Konstante  $c$ , Gl. (r), können wir schreiben  $c = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ ;

Aus  $y = b \operatorname{tg} \varphi$  folgt  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{b}$ . Nun ist demnach

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2, \text{ woraus } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}}, \text{ ferner}$$

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \text{ somit } \sin \varphi = \frac{\left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}} \text{ und}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \frac{y}{b}}{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \text{ endlich folgt aus } \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{b}$$

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{y}{b}\right).$$

Setzen wir diese Umformungen ein, dann erhalten wir

$$s = a \left\{ \frac{y}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} - \left[ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{y}{b}\right)}{2 \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}} + \frac{\alpha_1}{2.4 \sqrt{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^3}} + \right. \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1.3}{2.4.6} \frac{\beta_1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^5}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \frac{\gamma_1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^7}} + \\ & \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \frac{\delta_1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^9}} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{11}}} \right\}, \text{ worin} \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{y}{b}\right)}{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} + \text{arc tg } \frac{y}{b}$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{4} \frac{\frac{y}{b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^3}} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}} \right) + \\ & \frac{1.3}{2.4} \text{arc tg } \frac{y}{b} \\ \gamma_1 &= \frac{1}{6} \frac{\frac{y}{b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^5}} + \frac{5}{4} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^3}} + \right. \\ & \left. \frac{5.3}{2.4} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}} \right) + \frac{1.3.5}{2.4.6} \text{arc tg } \frac{y}{b} \end{aligned} \right\} (8_3)$$

$$\delta_1 = \frac{1}{8} \frac{\frac{y}{b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^7}} + \frac{7}{6} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^5}} + \right. \\ \left. \frac{7.5}{6.4} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^3}} + \frac{7.5.3}{2.4.6} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^1}} \right) + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \text{arc tg } \frac{y}{b}$$

Legen wir endlich die Bezeichnung und Koordinatenlage der Fig. 24 zu Grunde, in welcher  $ME = s = \frac{L}{2}$ , die halbe Bogenlänge, dann müssen wir setzen  $\frac{y}{b} = \frac{x_0}{b}$ , ferner aus Gl. (b) S. 48 für  $\frac{b}{a} = \frac{r}{b}$  substituieren, und für  $a = \frac{b^2}{r}$  einführen. Es wird dann die relative Bogenlänge der Hyperbel

$$\frac{L}{r} = 2 \left(\frac{b}{r}\right)^2 \left\{ \frac{x_0}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2} - \left[ \frac{\text{arc tg } \frac{x_0}{b}}{2\sqrt{1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2}} + \right. \right.$$

$$\left. \frac{\alpha}{16\sqrt{\left[1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2\right]^3}} + \frac{\beta}{64\sqrt{\left[1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2\right]^5}} + \frac{5\gamma}{768\sqrt{\left[1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2\right]^7}} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{7\delta}{2048\sqrt{\left[1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2\right]^9}} + \frac{21\varepsilon}{10240\sqrt{\left[1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2\right]^{11}}} \right] \right\}, \text{ worin}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\frac{x_0}{b}}{1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2} + \text{arc tg } \frac{x_0}{b}$$

$$\beta = \frac{1}{4} \frac{\frac{x_0}{b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^3}} + \frac{3}{2} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^1} \right) + \frac{1.3}{2.4} \text{arc tg } \frac{x_0}{b}$$

$$\gamma = \frac{1}{6} \frac{\frac{x_0}{b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^5}} + \frac{5}{4} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^3} + \right.$$

$$\left. \frac{5.3}{2.4} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^1}} \right) + \frac{1.3.5}{2.4.6} \text{arc tg } \frac{x_0}{b}$$

$$\delta = \frac{1}{8} \frac{\frac{x_0}{b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^7}} + \frac{7}{6} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^5}} + \right.$$

$$\left. \frac{7.5}{6.4} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^3}} + \frac{7.5.3}{2.4.6} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^1}} \right) + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \text{arc tg } \frac{x_0}{b}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{10} \frac{\frac{x_0}{r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^9}} + \frac{9}{8} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^7}} + \right.$$

$$\frac{9.7}{8.6} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^5}} + \frac{9.7.5}{8.6.4} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^3}} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]^1}} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x_0}{b}$$

Auf weitere Umformungen kommen wir weiter unten zurück, § 6.

#### 4. Absteckung der Hyperbel von Bogenende (Anfang) durch Ordinaten und Abscissen mittelst der Asymptotenparallelen.

Die Verwandlung der Koordinaten, eine Tangente der Hyperbel als Abscissenachse betrachtet, und den Koordinatenanfang in den Berührungspunkt verlegt, behufs Absteckung der Hyperbel durch rechtwinkelige Koordinaten, führt auch hier zu mancherlei Schwierigkeiten, namentlich die tabellarische Handhabung der Formeln betreffend; dasselbe gilt auch von der Absteckung durch Sehrentangentenwinkel von Bogenende (Anfang) aus. Der einfachste Weg nach Verfassers Ansicht, von der Tangente aus einen Hyperbelbogen abzustecken, ist von der Asymptotengleichung der Hyperbel auszugehen.\*)

In Fig. 27 ist  $OE_1$  ein Teil der Asymptote der Hyperbel; O der Mittelpunkt, WE = T wieder Tangente.  $O_1E$  sei eine Parallele durch den Berührungspunkt E zur Asymptote, sie bilde mit der Tangente den  $\angle \delta$ . P ist ein beliebiger Bogenpunkt,  $\gamma = BOE_1$  der doppelte Asymptotenwinkel. Ferner ist OB die Asymptote des andern Hyperbelbelastes für M nach Bogenanfang. Zieht man  $Pp$  parallel zu OB, dann ist P durch die schiefwinkligen Koordinaten  $x = Ep$   $y = Pp$  bestimmt. Der Abstand der Asymptotenparallelen von der Asymptote im Winkel  $\gamma$  gemessen, sei u. Endlich sind a, b die bekannten Hyperbelconstanten und  $A = OE_1$ . Zwischen u, a, A und b findet die bekannte Beziehung statt:  $uA = \frac{a^2 + b^2}{4}$ , woraus  $u = \frac{a^2 + b^2}{4A}$

t) die Asymptotengleichung der Hyperbel folgt.

$BOE_1$  bildet ein schiefwinkeliges Koordinatensystem mit dem Anfang in O, für eine beliebige Abscisse A findet sich nach Gl. (t) die Hyperbelordinate u.

Verlegen wir nun, wie schon angedeutet, den Coordinateanfang nach E, dem Berührungspunkt, dann lässt sich aus (t) leicht für den Bogenpunkt P die verwandelte Asymptotengleichung ableiten für das schiefwinkelige Koordinatensystem in E. Man findet zunächst

$$y + u = \frac{1}{4} \frac{a^2 + b^2}{A - x}$$

Substituiert man in diese Gleichung für  $a^2 + b^2$  obigen Wert aus (t) und nimmt wahr, dass man bei jeder Ordinate die Distanz der Asymptotenparallelen abziehen muss für die Abscissenaxe  $EO_1$ , dann folgt der spezielle

\*) Die Absteckung der Kegelschnitte vom Brennpunkt aus mit Hilfe der Focuspolargleichungen, sowie die bezügl. Formeln gestalten sich allerdings auch einfach. Ich habe aber von diesem Verfahren ganz abgesehen, da der Brennpunkt eine so ungünstige Lage, selbst beim kleinsten Minimalradius r annimmt, dass die Einmessung der Leitstrahlen einen ungemein grossen Zeitaufwand erfordern würde, hierbei ganz abgesehen von den wohl selten einmal ganz günstigen Terrainverhältnissen. D. V.

Fall der Asymptotengleichung, welchen wir für unseren Zweck verwenden wollen, nämlich

$$y = \frac{u x}{A - x} \dots \dots \dots u)$$

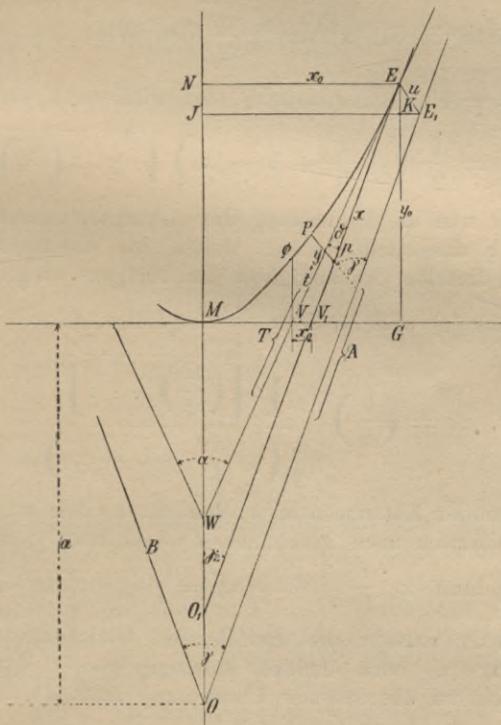
Für  $x = 0$  wird natürlich  $y = 0$ .

Zur Bestimmung der Konstanten  $A$  und  $u$  müssen wir zunächst daran erinnern, dass sich der Asymptotenwinkel  $\gamma$  einer Hyperbel ausdrückt durch

$$\text{tg } \frac{\gamma}{2} = \frac{b}{a}, \text{ nach (b) S. 48 ist aber } r = \frac{b^2}{a}, \text{ somit auch}$$

$$\text{tg } \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{b} \dots \dots \dots v)$$

Fig. 27.



Aus Fig. 27 ersieht man im  $\triangle EWO_1$ , dass die Winkelsumme  $\delta + \frac{\gamma}{2} + 180 - \alpha/2 = 180$ , folglich wird

$$\delta = \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} (\alpha - \gamma) \dots \dots \dots w)$$

Im Dreieck  $EE_1K$  ist  $\angle EE_1K = 90 - \gamma/2$ , weiter folgt aus der Fig.  $JK + KE_1 = A \sin \gamma/2$  oder  $\angle EE_1K$  berücksichtigt,

$$x_0 + u \cos (90 - \gamma/2) = A \sin \frac{\gamma}{2}. \text{ Ebenso ist } EG - EK + a = A$$

$\cos \gamma/2$  oder  $y_0 + a - u \cos \gamma/2 = A \cos \gamma/2$ ;  $A$  eliminiert, ergibt sich durch Division

$$\frac{x_0 + u \sin \gamma/2}{y_0 + a - u \cos \gamma/2} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \text{ hieraus ist}$$

$$x) \dots \dots \dots z_0 + 2 u \sin \frac{\gamma}{2} = (y_0 + a) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

Nach (v) ist  $\frac{r}{b} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$ , durch bekannte trig. Umformung

ermittelt man leicht hieraus

$$y) \dots \dots \sin = \frac{\gamma}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{r}\right)^2}}, \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2}}$$

Führt man jetzt in Gl. (x) für  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  den Wert aus (v), für  $\sin \frac{\gamma}{2}$  den aus (y) und  $a = \frac{b^2}{r}$  ein, entwickelt u, so wird nach einiger Umformung

$$z) \dots \dots u = \frac{1}{2} \left( y_0 \frac{r}{b} + b - x_0 \right) \sqrt{1 + \left(\frac{b}{r}\right)^2}$$

Nachdem wir nun die Entfernung der Asymptotenparallelen u abhängig von  $y_0, x_0, r, b$  dargestellt haben, wollen wir ebenso auch die andere Constante A in dieselbe Abhängigkeit zu bringen suchen. Es ist  $A = \frac{1}{4} \frac{a^2 + b^2}{u}$ , u aus (z) und für  $a = \frac{b^2}{r}$  eingeführt, folgt

$$z_1) \dots \dots A = \left(\frac{b}{r}\right)^2 \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{b}{r}\right)^2 + 1\right]}}{\frac{1}{2} \left( y_0 \frac{r}{b} + b - x_0 \right)}$$

Der in den runden Klammern in bei den letzten Gleichungen stehende Ausdruck lässt sich dadurch noch vereinfachen, dass man  $y_0$  aus (d<sub>1</sub>) Seite 48 einführt, es wird dann  $x_0 \frac{r}{b} + b - x_0 = \sqrt{x_0^2 + b^2} - x_0$

Für die Praxis müssen die drei letzten Gleichungen, sowie die Bestimmungsgleichung (u) noch endlich abhängig von r dargestellt werden. Eine einfache leicht zu übersehende Umformung führt dann endlich zu

$$63) \left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{r} = \frac{\left(\frac{u}{r}\right) \left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{A}{r}\right) - \left(\frac{x}{r}\right)}, \text{ worin} \\ \frac{u}{r} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{r}\right)^2} \left[ \sqrt{\left(\frac{x_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2} - \frac{x_0}{r} \right] \\ \frac{A}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{r}\right)^2 \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{r}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2} - \frac{x_0}{r}} \end{array} \right.$$

Der Winkel  $\delta$  (Gl. w) wird für grosse  $\angle P \angle$  sehr klein, es ist darum geboten die Absteckung desselben im Felde durch eine Linie  $VV_1 = x_{II}$  zu kontrollieren ev. vorzunehmen.

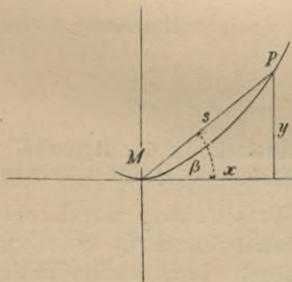
Aus dem  $\triangle VV_1E$  folgt nach dem Sinussatze  $x_{II} : \sin \delta = t : \sin \left(90 + \frac{\gamma}{2}\right)$  und hieraus die relative Länge von  $x_{II}$

$$\frac{\left(\frac{x_{II}}{r}\right)}{\left(\frac{t}{r}\right)} = \frac{\sin \delta}{\cos \frac{\gamma}{2}}, \quad \frac{x_{II}}{r} = \frac{t}{r} \frac{\sin \delta}{\cos \frac{\gamma}{2}} \dots \dots \dots 63_1)$$

**5. Gleichung zur Absteckung der Hyperbel von Bogenmitte durch Sehnentangentenwinkel.**

Während sich die Absteckung der Hyperbel durch Sehnentangentenwinkel für die Tangentenberührungspunkte der Praxis entsprechend kaum durch

Fig. 28.



bequeme Formeln realisieren lässt, gestaltet sie sich für Bogenmitte doch wesentlich einfacher. Die diesbezügliche Polargleichung der relativen Sehnentangentenlängen finden wir durch folgende Betrachtung.

Fs sei Fig. 28 M die Bogenmitte, P ein Hyperbelbogenpunkt, y, x dessen Koordinaten auf M bezogen,  $\beta$  der Sehnentangentenwinkel, s die Sehne.

Aus der Figur folgt  $y = s \sin \beta$  und  $x = s \cos \beta$ , hieraus ist

$$s = \frac{y}{\sin \beta} = \frac{x}{\cos \beta} \quad \text{und} \quad \tan \beta = \frac{y}{x}$$

Dividiert man die beiden ersten Gleichungen durch r, multipliziert und dividiert durch b, so kann man sie auch schreiben

$$\frac{s}{r} \cos \beta = \frac{x}{b} \frac{b}{r} = \left[ \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} \right] \frac{b}{r} \quad \text{und}$$

$$\frac{s}{r} \sin \beta = \frac{y}{b^2} \frac{b^2}{r} = \left[ \frac{\left(\frac{y}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} \right] \left(\frac{b}{r}\right)^2$$

$$(64) \left\{ \begin{array}{l} \text{Setzt man } \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{x}{r} \right) \\ \left( \frac{b}{r} \right) \end{array} \right] = \mu, \quad \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{y}{r} \right) \\ \left( \frac{b}{r} \right)^2 \end{array} \right] = \eta, \text{ so folgt} \\ \frac{s}{r} = \mu \frac{\left( \frac{b}{r} \right)}{\cos \beta} = \eta \frac{\left( \frac{b}{r} \right)^2}{\sin \beta} \text{ und } \tan \beta = \frac{\eta}{\mu} \left( \frac{b}{r} \right) \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir auch hier die Sehnenlänge von Bogenmitte bis Bogenende mit  $s_0$ , den zugehörigen Winkel mit  $\beta_0$  (S. Fig. 24), dann ergeben sich unmittelbar

$$(65) \dots \dots \dots \text{tg } \beta_0 = \frac{\left( \frac{y_0}{r} \right)}{\left( \frac{x_0}{r} \right)} = \frac{x_1}{r}$$

$$(66) \dots \dots \dots \frac{s_0}{r} = \frac{\left( \frac{y_0}{r} \right)}{\sin \beta_0} = \frac{\left( \frac{x_0}{r} \right)}{\cos \beta_0}$$

Auf die obigen in den eckigen Klammern stehenden Konstanten kommen wir weiter unten zurück.

**6. Hilfgleichungen zur Absteckung der Hyperbel vom Bogenanfang oder Bogenende und vom Bogenpunkt Q durch rechtwinkelige Koordinaten.**

Durch eine parallele Verschiebung der Koordinaten (analog § 3, Abschnitt 4 und 5) von Bogenmitte nach Q und E gelangen wir endlich noch zu einem Absteckungsverfahren durch rechtwinkelige Koordinaten von den genannten Bogenpunkten aus, das allerdings nicht so einfach wie bei der Parabel ist, welches wir aber bei etwaigen Terrainhindernissen ausnahmsweise als Aushilfsverfahren nicht unberücksichtigt lassen wollen.

Verschiebt man den Koordinatenanfang von M nach E Fig. 29 parallel zu sich selbst und berücksichtigt die umgekehrte Quadrantenlage der Koordinaten, dann findet sich für den Bogenpunkt P, der durch die obige Gleichung (Anfang in M)  $y = \frac{a}{b} \sqrt{x^2 + b^2} - a$  bestimmt ist, wenn die neuen Koordinaten mit  $\xi$  und  $v$  bezeichnet werden,  $v = y_0 - y$  und  $\xi = x_0 - x$ .

Die verwandelte Gleichung lautet dann

$$y_0 - v = \frac{a}{b} \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + b^2} - a,$$

Den Wert  $y_0 = \frac{a}{b} \sqrt{x_0^2 + b^2} - a$  eingeführt und  $v$  mit  $y$ ,  $\xi$  mit  $x$  vertauscht, ergibt sich

$$y = \frac{a}{b} \left[ \sqrt{x_0^2 + b^2} - \sqrt{(x_0 - x)^2 + b^2} \right],$$

in relative Abhängigkeit von  $r$  gesetzt,

$$(67a) \cdot \frac{y}{r} = \frac{b}{r} \left[ \sqrt{\left( \frac{x_0}{r} \right)^2 + \left( \frac{b}{r} \right)^2} - \sqrt{\left( \frac{x_0}{r} - \frac{x}{r} \right)^2 + \left( \frac{b}{r} \right)^2} \right]$$

oder auch

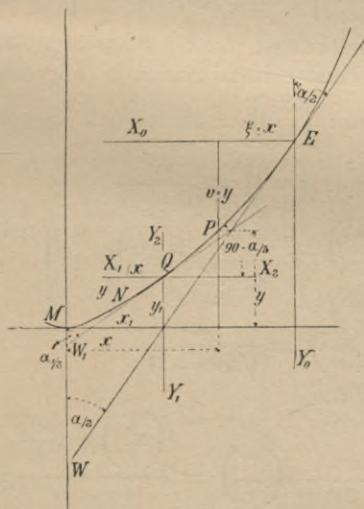
$$\frac{\frac{y}{r}}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} = \sqrt{\left[\frac{\frac{x_0}{r}}{\frac{b}{r}}\right]^2 + 1} - \sqrt{\left[\frac{\left(\frac{x_0}{r}\right) - \left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right) - \left(\frac{b}{r}\right)}\right]^2 + 1} \quad (67)$$

Diese Gleichung dient zur Absteckung der Hyperbel von Bogenende nach Bogenmitte zu.

Verlegt man den Koordinatenanfang nach Q, so kann die letzte Gleichung zur Absteckung von Q aus dienen, wenn man  $x_0$  und  $y_0$  mit  $x_1$  und  $y_1$  vertauscht. Auf das Koordinatensystem  $X_1 Q Y_1$  bezogen wird dann

$$\frac{\frac{y}{r}}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} = \sqrt{\left[\frac{\frac{x_1}{r}}{\frac{b}{r}}\right]^2 + 1} - \sqrt{\left[\frac{\frac{x_1}{r} - \frac{x}{r}}{\frac{b}{r} - \frac{b}{r}}\right]^2 + 1} \quad (68)$$

Fig. 29.



Für die Absteckung der Kurve endlich von Q nach Bogenende zu, setzen wir in die letzte Gleichung  $x$  und  $y$  mit entgegengesetzten Zeichen ein, und erhalten

$$\frac{\frac{y}{r}}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} = \sqrt{\left[\frac{\frac{x_1}{r}}{\frac{b}{r}} + \frac{\frac{x}{r}}{\frac{b}{r}}\right]^2 + 1} - \sqrt{\left[\frac{\frac{x_1}{r}}{\frac{b}{r}}\right]^2 + 1} \quad (69)$$

Der bezügliche Ordinatenachsenwinkel für die Absteckung von E (Gl. 67) ist, wie aus der Figur ersichtlich,  $\frac{\alpha}{2}$  von der Tangente aus. Die Abscissenachse von Q läuft parallel der Hauptachse.

Bezeichnen wir den halben Winkelpunktswinkel der Tangente  $W_1 Q$  des Hilfsbogenpunktes Q mit  $\frac{\alpha_1}{2}$ , dann findet sich dieser aus Gl. (f) S. 48, wenn

wir  $x_0$  mit  $x_1$  vertauschen

$$70) \quad \text{tg } \frac{\alpha_1}{2} = r \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{x_1^2}} = \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \left(\frac{r}{x_1}\right)^2}$$

### 7. Umgestaltung der bisherigen Formeln durch geeignete Substitutionen.

Auf den ersten Blick dürften dem Praktiker die vorstehenden Formeln wohl ziemlich verwickelt erscheinen. Wenn sie dies auch scheinbar sind, so liegt es wohl mehr an der mangelnden Übersicht, die sie in ihrer jetzigen Gestalt gewähren. Wir haben darum, eingedenk der eigenen Praxis, in diesem Abschnitt versucht, nicht allein, um selbst die darauf gegründete Tabellenrechnung thunlichst reduzieren zu können, sondern durch geeignete Substitutionen einen Überblick zu erstreben, welcher dem Praktiker die etwaige Berechnung verschiedener Elemente in Ausnahmefällen erleichtern soll.

Setzt man

$$71) \quad \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt[3]{\frac{R}{r}} = A, \quad \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt[3]{\frac{R}{r}} = B,$$

dann lassen sich die Gleichungen 52 bis 70 selbstverständlich nach gehöriger Reduktion und entsprechender Kombination in folgende Form bringen:

1. Maximalabszisse:  $\left(\frac{x_0}{r}\right) = A.$

2. Maximalordinate:  $\left(\frac{y_0}{r}\right) = \frac{A^2}{B+1}.$

3. Tangente:  $\left(\frac{T}{r}\right) = \frac{A}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \text{cotg } \frac{\alpha}{2} \sqrt[3]{\frac{R}{r}}.$

4. Constante:  $\left(\frac{b}{r}\right) = \frac{A}{\sqrt{B^2-1}}.$

5) Bogenmittenabstand:

$$\left(\frac{m}{r}\right) = A \text{ cotg } \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{y_0}{r}\right) = \frac{\left(\frac{T}{r}\right) \cos \frac{\alpha}{2}}{1+B} = \left(\frac{x_1}{r}\right) \text{ cotg } \frac{\alpha}{2}.$$

6) Abszisse des Hilfsbogenpunktes Q:

$$\left(\frac{x_1}{r}\right) = \left(\frac{m}{r}\right) \text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{A}{1+B} = \text{tg } \beta_0.$$

7) Ordinate des Hilfsbogenpunktes:

$$\left(\frac{y_1}{r}\right) = \left(\frac{b}{r}\right) \left[ \sqrt{\left(\frac{x_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2} - \frac{b}{r} \right] = \left(\frac{b}{r}\right)^2 \left[ \sqrt{\frac{2B}{1+B}} - 1 \right]$$

8. Tangentenabschnitt:

$$72) \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{t}{r}\right) &= \frac{A \sqrt[3]{\frac{R}{r}}}{B+1} = \frac{\left(\frac{y_0}{r}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \left(\frac{x_1}{r}\right) \sqrt[3]{\frac{R}{r}}. \end{aligned} \right.$$

9. Allgemeine Gleichung, Absteckung von Bogenmitte:

$$\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{b}{r} \left[ \sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2} - \frac{b}{r} \right],$$

$$\text{bezw. } \frac{\left(\frac{y}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} = \sqrt{1 + \left[\frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)}\right]^2} - 1.$$

$$10. \text{ Maximalsehne: } \frac{s_0}{r} = \frac{\left(\frac{x_0}{r}\right)}{\cos \beta_0} = \frac{A}{\cos \beta_0}; \quad \text{tg } \beta_0 = \frac{A}{1+B} = \frac{x_1}{r} \quad (72)$$

$$11. \text{ Hilfwinkelpunkt: } \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{2B \left(\frac{r}{y_0}\right)}.$$

12. Asymptotenwinkelabschnitt:

$$\left(\frac{x''}{r}\right) = \left(\frac{t}{r}\right) \frac{\sin \beta}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \sqrt[3]{\frac{R}{r}} \text{tg } \beta_0 \frac{\sin \delta}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

$$13. \text{ Asymptotenwinkel: } \text{tg } \frac{\gamma}{2} = \left(\frac{r}{b}\right).$$

$$14. \text{ Winkel der Asymptotenparallelen: } \delta = \frac{1}{2} (\alpha - \gamma).$$

15. Absteckung von Bogenanfang oder -ende (schiefw. Koord.):

$$\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{\left(\frac{u}{r}\right) \frac{x}{r}}{\left(\frac{A}{r}\right) - \left(\frac{x}{r}\right)}, \quad \text{bezw. } \frac{\left(\frac{y}{r}\right)}{\left(\frac{E}{r}\right)} = \frac{\frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{F}{r}\right)}}{1 - \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{F}{r}\right)}}$$

worin die Konstanten  $\frac{E}{r} = \frac{1}{2} \frac{AC}{B^2 - 1} [B - \sqrt{B^2 - 1}]$  und

$$\left(\frac{F}{r}\right) = \frac{1}{2} \frac{AC}{(B^2 - 1) [B - \sqrt{B^2 - 1}]};$$

$$C = \sqrt[3]{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1}.$$

16. Bogenlänge: Nach S. 55 ist:

$$c = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2} = \frac{1}{A} \sqrt{A^2 + B^2 - 1} = \frac{C}{A},$$

wenn  $C = \sqrt{A^2 + B^2 - 1} = \sqrt[3]{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1}$ , ferner wird

$$\varphi = \text{arc tg } \left(\frac{x_0}{b}\right) = \text{arc tg } \sqrt{B^2 - 1}, \quad \text{und}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2}} = \frac{1}{B},$$

$$\sin 2 \varphi = 2 \frac{\left(\frac{x_0}{b}\right)}{1 + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2} = 2 \frac{\sqrt{B^2 - 1}}{B^2} = 2D, \text{ wenn } D = \frac{\sqrt{B^2 - 1}}{B^2},$$

dann folgt\*)

$$\left(\frac{L}{r}\right) = 2 \frac{AC}{B^2 - 1} \left[ \sqrt{B^2 - 1} - \left(\frac{A}{C}\right)^2 \lambda \right] =$$

$$2 \left(\frac{b}{r}\right)^2 \left[ \frac{C}{A} \sqrt{B^2 - 1} - \frac{C}{A} \lambda \right], \text{ worin}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \arctg \sqrt{B^2 - 1} + \left(\frac{A}{C}\right) \left\{ 0,0625 \alpha + 0,015625 \beta \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \right.$$

$$0,00651041 \gamma \left(\frac{A}{C}\right)^4 + 0,003417967 \delta \left(\frac{A}{C}\right)^6 + 0,002050734 \varepsilon \left(\frac{A}{C}\right)^8 \left. \right\},$$

und

$$\alpha = D + \arctg \sqrt{B^2 - 1}, \quad \beta = D \left( \frac{1}{B^2} + \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{2} \arctg \sqrt{B^2 - 1}$$

$$72) \left\{ \begin{aligned} \gamma &= D \left( \frac{1}{B^4} + \frac{5}{4} \frac{1}{B^2} + \frac{15}{8} \right) + \frac{15}{8} \arctg \sqrt{B^2 - 1} \\ \delta &= D \left( \frac{1}{B^6} + \frac{7}{6B^4} + \frac{35}{24} \frac{1}{B^2} + \frac{105}{48} \right) + \frac{105}{48} \arctg \sqrt{B^2 - 1} \\ \varepsilon &= D \left( \frac{1}{B^8} + \frac{9}{8} \frac{1}{B^6} + \frac{63}{48} \frac{1}{B^4} + \frac{315}{192} \frac{1}{B^2} + \frac{945}{384} \right) + \frac{945}{384} \arctg \sqrt{B^2 - 1} \end{aligned} \right.$$

17. Absteckung von Bogenmitte durch Sehnentangentenwinkel (Polarkoordinaten):

$$\frac{s}{r} = \mu \frac{\left(\frac{b}{r}\right)}{\cos \beta} = \eta \frac{\left(\frac{b}{r}\right)^2}{\sin \beta}, \text{ worin}$$

$$\mu = \left[ \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} \right], \quad \eta = \left[ \frac{\left(\frac{y}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} \right]; \quad \tan \beta = \frac{\eta}{\mu} \left(\frac{b}{r}\right)$$

18. Absteckung von Bogenende (-anfang), (rechth. Koord.):

$$\frac{\left(\frac{y}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{x_0}{r}\right)^2}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} + 1} - \sqrt{\left[ \frac{\left(\frac{x_0}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} - \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} \right]^2 + 1}$$

19. Absteckung vom Bogenpunkt Q (rechth. Koord.):

a) nach Bogenmitte

$$\frac{\left(\frac{y}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} = \sqrt{\left[ \frac{x_1}{r} \right]^2 + 1} - \sqrt{\left[ \frac{x_1}{r} - \frac{x}{r} \right]^2 + 1}$$

\*) Allgemeine Folgerungen S. unter VI.

b) nach Bogenende

$$\frac{\frac{y}{r}}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} = \sqrt{\left[\frac{\frac{x_1}{r} + \frac{x}{r}}{\frac{b}{r}}\right]^2 + 1} - \sqrt{\left[\frac{\frac{x_1}{r}}{\frac{b}{r}}\right]^2 + 1}$$

20. Bedingungen:

$$r < R \sin^3 \frac{\alpha}{2} < \frac{R}{\left(\frac{1}{\sin^3 \frac{\alpha}{2}}\right)}; \frac{1}{\sin^3 \frac{\alpha}{2}} \text{ in Tabelle P I enthalten,}$$

$$\sqrt[3]{\frac{R}{r}} \sin \frac{\alpha}{2} > 1.$$

### 8. Einrichtung der Tabellen und Anwendung derselben auf einige Beispiele.

Mit Benutzung der Gleichungen (72) sind die für die Absteckung der Hyperbel erforderlichen 6 Tabellen berechnet.

Die Haupttabelle H I enthält die relativen Werte der Hauptdimensionen

$$\frac{x_0}{r}, \frac{y_0}{r}, \frac{m}{r}, \frac{L}{r}, \frac{T}{r}, \frac{t}{r}, \frac{x_1}{r}, \frac{y_1}{r}, \frac{s_0}{r}, \frac{x_{II}}{r}$$

für von 20' zu 20' fortschreitende halbe Winkelpunktwinkel und abhängig von 18 verschiedenen in der Praxis am meisten in Anwendung kommenden Krümmungsverhältnissen  $R/r = 1.1$  bis 12. Ferner sind in der Haupttabelle H I die absoluten Werte der Winkel  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\beta_0$  und  $\alpha_1$  enthalten, endlich die Konstanten  $\left(\frac{b}{r}\right)$ ,  $\left(\frac{b}{r}\right)^2$ ,  $\left(\frac{E}{r}\right)$ ,  $\left(\frac{F}{r}\right)$ .

Nach Gl. 72 No. 9 ist Tabelle H II entworfen, behufs Absteckung durch rechtwinkelige Koordinaten von Bogenmitte. Für die relativen Abscissen sind daneben die relativen Ordinaten rubriziert; die darin vorkommenden Konstanten sind nur der Haupttabelle zu entnehmen.

Die bei jedem Beispiel zu beachtende Bedingung Gl. 72 No. 20 wird aus der Parabeltabelle P I genommen.

Für einen vorliegenden  $\angle P < \alpha_2$  liefert diese das Radienverhältnis  $\frac{R}{r}$  und ist dann stets  $r$  kleiner als  $R$  dividiert durch dasselbe; hierdurch

resultiert ein neues Verhältnis  $\frac{R}{r}$  abhängig also vom Minimalkrümmungsradius  $r$ , welches dann mit den vorliegenden  $\angle P < \alpha_2$  massgebend für die Dimensionen nach Tabelle H I ist. Z. B.  $\alpha_2 = 38^{\circ}40'$ ,  $R = 3000\text{m}$ . Nach Tabelle P I  $R/r = 4.1$ , somit muss  $r < \frac{3000}{4.1} < 730\text{m}$ .

Wählt man den Terrainverhältnissen nach  $r = 430$ , so folgt  $\frac{R}{r} = \frac{3000}{430} = 7$  und enthält jetzt Tabelle H I für  $R/r = 7$  und  $\alpha_2 = 48^{\circ}40'$  die

Dimensionen; oder  $r = 375$ , dann gilt das Gleiche für  $\frac{R}{r} = 8$  und  $\alpha_2 = 38^{\circ}40'$ .

Für  $r = 600\text{m}$ , also dem Verhältnis  $R/r = 5$  entsprechen die Be-

dingungen Gl. 72 No. 20 nicht vollständig, daher  $R/r = 5$  und  $\alpha/2 = 38^{\circ}40'$  nicht mehr vorhanden. Ist der  $\angle P \angle \alpha/2 = 66^{\circ}20'$  und wieder  $R = 3000$ , dann giebt Tabelle P I  $R/r = 1.3$  rot.,  $r \angle \frac{3000}{1.3} \angle 2300^m$ , es können dann die Verhältnisse beispielweise  $R/r = 1.5$  ( $r = 2000$ ),  $R/r = 2$  ( $r = 1800$ )  $R/r = 5$  ( $r = 600$ ) etc. in Anwendung kommen.

Bei verhältnismässig geringer Nebenrechnung ist den Terrainverhältnissen (massgebend sind hier meist T und m) bald entsprochen. Die Absteckung vom Berührungspunkt durch schiefw. Koordinaten mit Hilfe der Asymptotenparallelen ist nach Gl. 72 No. 15 in Tabelle H III enthalten.

Die Konstanten  $\frac{E}{r}, \frac{F}{r}$  sind in der Haupttabelle H I zu finden. Infolge des doppelten Relativums sind hier allerdings auch wieder doppelte Multiplikationen erforderlich, die sich aber auch, wie bei der Parabel schon angedeutet, reduzieren lassen. Die zugehörigen Asymptotenhilfswinkel  $\gamma$  und  $\delta$  sind auch der Haupttabelle zu entnehmen; als Kontrolle und um die Absteckung des  $\angle \delta$  zu erleichtern dient die Länge  $x_{II}$  in Tabelle H I. Diese Tabelle bedarf wohl weiter keiner Erklärung. Die Abscissen werden auf der Asymptotenparallelen der Reihe nach markiert und die unter  $\angle \gamma$  bestimmten Ordinaten geben dann die Bogenpunkte. Die beiden Tabellen, nach Gl. 72 No. 18, 19 konstruiert, Tabelle H IV und V bedürfen einer Erklärung ihre Anwendung betreffend, da sie mehr Kontroll- oder Hilfsresultate als absolute genaue Werte liefern, wenn man sich mit Interpolationsgenauigkeit begnügen will. Die Absteckung des zu Grunde liegenden rechtwinkligen Koordinatensystems, vor allem die der bezüglichen Abscissenachsen bietet mit Rücksicht auf die Fig. 29 Seite 63 keine Schwierigkeiten. Die Tabellen selbst enthalten in den ersten vertikalen Rubriken die den relativen Abscissen entsprechenden relativen Ordinaten. Massgebend sei die erste oben stehende

Horizontreihe der Zahlen  $\frac{x_0}{r}$  bzw.  $\frac{x_1}{r}$  und die der Haupttabelle bereits für  $\frac{r}{b}$  bzw.  $\frac{r}{r}$

die vorliegende abzusteckende Hyperbel entnommenen Werte von  $x_0$  bzw.  $x_1$ , für welche die Verhältnisse in der genannten horizontalen Zahlenreihe zu bilden sind; nach dieser Vorrechnung können dann die jeweiligen Ordinaten aus der betreffenden vertikalen Rubrik entnommen werden.

Es sei beispielsweise für den Fall  $R/r = 1.5$  und  $\alpha/2 = 77^{\circ}20'$  die Absteckung vom Bogenende zu kontrollieren, oder der eine oder andere Punkt einzu-

schalten. Laut Tabelle H I ist  $\frac{x_0}{r} = 0.251012$ ,  $b/r = 0.504684$ , somit rot.  $\frac{r}{b} = 0.5$ .

Tabelle H IV enthält hiernach in der 15. Vertikalspalte unter 0.5 die diesbezüglichen relativen Ordinaten für die relativen Abscissen 0,001 bis 0.4;

nämlich  $\frac{y}{\left(\frac{r}{b}\right)^2} = 0,00044, 0,00086, 0,00144$  u. s. w. bis 0,11304.

Die Tabelle H VI dient (auch für die Ellipse) zur Absteckung der Hyperbel (bezw. Ellipse) von Bogenmitte aus mit Hilfe von Polarkoordinaten. Für die Polwinkel  $\beta = 0$  bis  $30^\circ$  liefert die Tabelle die Koeffizienten  $\frac{1}{\cos \beta}$

zur Berechnung der Leitstrahlen (Sehnenlängen)  $\frac{s}{r}$  nach Gl. 72 No. 17. Auch diese Tabelle ist Kontrolltabelle, um bei besonderen Terrainschwierigkeiten einen oder den andern Bogenpunkt zu kontrollieren, oder endgültig zu berechnen und abzustecken, wenn Tabelle H II nicht in Anwendung kommen kann.

Die Konstanten  $\left(\frac{x}{r}, \frac{r}{b}, \frac{b}{r}\right) = \mu$  und daneben die andere Konstante  $\eta$  sind der

Tabelle H II zu entnehmen;  $\frac{b}{r}$  aus der Haupttabelle. Eine etwas umständliche Multiplikation (ev. mit Logarithmen) ist allerdings nicht zu vermeiden, für einige Punkte aber auch nicht sehr zeitraubend.

Man habe z. B. eine Hyperbel für  $\alpha/2 = 51^\circ 40'$  und  $R/r = 7$  von Bogenmitte

abgesteckt nach Tabelle H II für die Abscisse  $\left(\frac{x}{r}, \frac{r}{b}, \frac{b}{r}\right) = 0.01.0.02 \dots 0,1,0,2;$

die folgende Abscisse nach  $\frac{x}{r} = 0.3 \frac{b}{r}$  berechnet, lässt sich im Felde nicht mehr markieren also auch die zugehörige Ordinate 0,044031 nicht; um nun diesen letzten Bogenpunkt zu erhalten, nehmen wir Tabelle H VI zu Hilfe,

berechnen den Polwinkel  $\beta$  aus  $\tan \beta = \frac{\eta}{\mu} \left(\frac{b}{r}\right); \left(\frac{b}{r}\right)$  ist 1,060531,  $\left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1.12473$  (Tabelle H I); eingesetzt, folgt  $\tan \beta = \frac{0.047031 \cdot 1,060531}{0.3}$

$= 0.155564, \beta = 8^\circ 50'$ , hierfür liefert Tabelle H VI  $\frac{1}{\cos \beta} = 1.011957$ , folglich wird

$\frac{s}{r} = 0.3 \cdot 1.060531 \cdot 1.011957 = 0,32196$ , während  $\frac{x}{r} = 0,3 \frac{b}{r} = 0,31815$ ,

$\frac{y}{r} = 0.044031 \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 0,04922$  sein würde. Für  $r = 430^m$  ist dann  $s = 0,32196 \cdot 430 = 138,44^m$ , während  $x = 136,804; y = 21.16^m$ .

1. Beispiel.  $\alpha = 142^\circ 40'$  und  $R > 3000^m$  seien die gegebenen Bedingungen, nach welchen die weiteren Dimensionen nach den Hyperbeltabellen berechnet werden sollen.

Aus der Parabeltabelle P I ersieht man, dass für  $\alpha/2 = 71^\circ 20'$   $R/r > 1.177$  sein muss. Der Minimalradius  $r$  darf sonach nicht grösser als  $\frac{3000}{1.171} = 2540^m$  sein, oder  $r < 2540^m$ . Die Feststellung von  $r$  ist von den Terrainverhältnissen abhängig. Nehmen wir  $r = 1200^m$  an, für welche Wahl die Kurve am günstigsten für die Massenverteilung liegen möge. Es wird

dann  $\frac{R}{r} = \frac{3000}{1200} = 2.5$  und folgen aus Tabelle H I die relativen Längen der Hauptdimensionen für  $\alpha_2 = 71^{\circ}20'$ :

$$\begin{aligned} \frac{m}{r} &= 0,064201, & \frac{x_0}{r} &= 0,434410, & \frac{y_0}{r} &= 0,082551, & \frac{L}{r} &= 0,888366, \\ \frac{T}{r} &= 0,458510, & \frac{t}{r} &= 0,258516, & \frac{x_{II}}{r} &= 0,090960, & \frac{x_I}{r} &= 0,190476, \\ & & \frac{y_I}{r} &= 0,017932. \end{aligned}$$

Die absoluten Längen sind

Maximalabszisse . . . . .	$x_0 = 0,434410 \cdot 1200 = 521.292^m$ .
Maximalordinate . . . . .	$y_0 = 0,082551 \cdot 1200 = 99.061^m$ .
Bogenlänge . . . . .	$L = 0,888366 \cdot 1200 = 1066.039^m$ .
Tangente . . . . .	$T = 0,458510 \cdot 1200 = 550.212$ .
Bogenmittenabstand . . . . .	$m = 0,064201 \cdot 1200 = 77.041$ .
Asymptotenwinkelabschnitt	$x_{11} = 0,090960 \cdot 1200 = 109.152$ .
Tangentenabschnitt . . . . .	$t = 0,258516 \cdot 1200 = 310.219$ .

Die Konstanten sind  $\frac{b}{r} = 0,537425$ ,  $\frac{E}{r} = 0,145676$ ,  $E = 174.811$

$$\left(\frac{b}{r}\right)^2 = 0,288825, \quad \frac{F}{r} = 1,63882, \quad F = 1966,584;$$

die für die Absteckung erforderlichen Winkel:

$\angle \gamma$  für die schiefen Koordinaten zur Absteckung von Bogenende  $123^{\circ}28' 26''$ , Hilfswinkel für die Asymptotenparallele  $\delta = 9^{\circ}35' 17''$ .

Winkel der Maximalsehne  $\beta_0 = 10^{\circ}46' 56''$ . Die Maximalsehne selbst ist nach  $\frac{s_0}{r} = 0.442178$ ,  $s_0 = 530,638^m$ .

Die Absteckung von Bogenmitte durch rechth. Koordinaten Tab. H II lässt sich durch eine kleine Vorrechnung erleichtern.

Die relativen Abscissen sind  $\frac{x}{r} = \mu \frac{b}{r}$ ,  $\mu$  Tabellenwert, also die absolute Abscissenlänge  $x = \mu \cdot r \frac{b}{r} = \mu b = 644,91 \mu$ ,  $b$  wird aus obigen Konstanten bestimmt,  $b = 0,537425 \cdot 1200 = 644,91$ .

Für  $\left(\frac{x}{r}\right) = \mu = 0.01; 0.02; 0.03; 0.04; 0.05$  oder

$$\left(\frac{b}{r}\right)$$

$$x = 644.91 \cdot 0.01 = 6,449; 12,898; 19,347; 25,796; 32,245^m \text{ etc.}$$

wird  $\frac{y}{r} \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \eta = 0,00005; 0,0002; 0,00045; 0,0008; 0,001249$  oder

$$\left(\frac{b}{r}\right)^2$$

$$y/r = \left(\frac{b}{r}\right)^2 \eta \text{ und } r \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1200 \cdot 0,288825 \text{ vorgerechnet, demnach}$$

$$y = 346.59 \eta = 0,017; 0,069; 0,156; 0,277; 0,433^m \text{ etc.}$$

Um die Absteckung von Bogenende aus einzuleiten, markiert man sich

die Richtung der Asymptotenparallelen unter  $\delta = 9^\circ 35' 17''$  (Kontrolle  $x_{11}$ ) von der Tangente, d. h. Bogenende aus, und berechnen sich aus Tab. H III die Abscissen, deren Ordinaten unter  $\gamma = 123^\circ 28' 26''$  abgesteckt werden.

$$\text{Für } \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{F}{r}\right)} = 0,005, \quad 0,01, \quad 0,015, \quad 0,02$$

$$\text{wird } \frac{\frac{y}{r}}{\left(\frac{E}{r}\right)} = 0,00502512, \quad 0,010101, \quad 0,0152285, \quad 0,0204081.$$

Hierauf wird für die ersten Punkte

$$x = r \frac{F}{r} \cdot 0,005 = F \cdot 0,005 = 1966,584. \quad 0 \cdot 005 = 9 \cdot 833; \quad 19 \cdot 665; \quad 29 \cdot 499; \\ 39 \cdot 342 \dots$$

$$y = r \frac{E}{r} \cdot 0,00502512 = E \cdot 0,00502512 = 174 \cdot 811. \quad 0 \cdot 00502512 = 0,878; \\ 1 \cdot 766; \quad 2 \cdot 662; \quad 3 \cdot 568 \dots \text{ u. s. w.}$$

2. Beispiel. Wäre die Bedingung gestellt, dass für den gleichen  $\angle P \angle \alpha_2 = 71^\circ 20'$  die Tangente, wegen den Zwischengeraden, nicht viel über 200m lang sein kann; dann muss ein anderer Minimalradius  $r$  zu Grunde gelegt werden. Nehmen wir  $r = 300^m$ , dann würde das Verhältnis  $\frac{R}{r} = \frac{3000}{300} = 10$ , für den gleichen Anschlussradius  $R = 3000^m$  nach

Tab. H I liefern

$$\frac{m}{r} = 0,073743, \quad \frac{x_0}{r} = 0,689554, \quad \frac{y_0}{r} = 0,156352, \quad \frac{L}{r} = 1,42022, \\ \frac{T}{r} = 0,727839.$$

Hiernach werden die Hauptdimensionen:

Tangente  $T = 0,727839 \cdot 300 = 218,352^m$ .

Bogenlänge  $L = 426,066^m$ .

Bogenmittenabstand  $22,123^m$ .

Maximalkoordinaten  $x_0 = 206,866, \quad y_0 = 46,906^m$ .

3. Beispiel. Für den  $\angle P \angle \alpha = 84^\circ$ , liefert Tabelle P I die Bedingung  $\frac{R}{r} > 3,338$ , oder  $r < \frac{3000}{3,338} < 900$  rot., bei  $R = 3000^m$  Anschluss. Entschlossen wir uns für  $r = 500^m$  Minimalradius, dann liefert

Tabelle H I für  $\frac{R}{r} = \frac{3000}{500} = 6, \quad \frac{\alpha}{2} = 42^\circ$  die Hauptdimensionen, nämlich:

Maximalkoordinaten . . . . .  $x_0 = 1,350386 \cdot 500 = 675,193^m,$

$y_0 = 0,822941 \cdot 500 = 411,471^m,$

Tangente . . . . .  $T = 2,01812 \cdot 500 = 1009,06^m,$

Bogenmittenlage . . . . .  $m = 0,676817 \cdot 500 = 338,409^m,$

Bogenlänge . . . . .  $L = 3,28128 \cdot 500 = 1640,640^m,$

Koordinaten des Bogenpunktes Q  $x_1 = 0,609410 \cdot 500 = 304,705^m,$

$y_1 = 0,181358 \cdot 500 = 90,679^m$  u. s. w.

4. Beispiel. Liegt die Verwertung der Hyperbel für eine Strassenkurve vor, z. B. für  $\alpha = 120^\circ$ , dann ist weniger der Anschlussradius R an die Gerade ins Gewicht fallend. Nach Tabelle P I muss  $r < \frac{R}{1.540}$  für  $\frac{\alpha}{2} = 60^\circ$  sein. Das Verhältnis  $\frac{R}{r} = 1.7$  kann in diesem Fall,  $\frac{\alpha}{2} = 60^\circ$ , noch in Anwendung kommen für eventuell  $R = 137^m$ ,  $r = 80^m$ ; es wird dann  $\frac{R}{r} = \frac{136}{80} = 1.7$ . Danach laut Tabelle H I:

$$\begin{aligned} T &= 0.689058.80 = 55.125^m; m = 0.169419.80 = 13.553^m; \\ L &= 1.28807.80 = 103.046^m; y_0 = 0,175111.80 = 14.009^m; \\ x_0 &= 0.596742.80 = 47.739^m \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Soll ein Teil dieser Kurve durch rechtwinkelige Koordinaten von Bogenende aus abgesteckt werden, der andere vom Bogenpunkt Q, dessen Koordinaten nach Tabelle H I  $x_1 = 0,293445.80 = 23.475^m$  und  $y_1 = 0,042877.80 = 3,43^m$  sind, so kann dies mit der Tabelle H IV erreicht werden.

$$\text{Es ist zunächst } \frac{\frac{x_0}{r}}{\frac{b}{r}} = \frac{0,596742}{2.283319} = 0.261.$$

Die Abscissenlängen für  $\left(\frac{x}{r}\right)$   $\left(\frac{b}{r}\right)$   $= 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10$  geben

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= 0.02. \frac{b}{r} \text{ u. s. w. oder } x = 0.02 r \frac{b}{r} \text{ u. s. w., demnach, weil} \\ b &= 2.283319.80 = 182,666, \\ x &= 0.02.182.666 = 3.65^m; 0.04. b = 7,31^m; 0.06. b = 10.96^m; \\ &0.08 b = 14.61^m; 0.1 b = 18,27^m. \end{aligned}$$

Die zu  $\frac{x_0}{r} = 0.261 \frac{b}{r}$  gehörigen Ordinaten müssen aus den beiden Rubriken  $\frac{x_0}{r} = 0.2 \frac{b}{r}$  und  $\frac{x_0}{r} = 0.3 \frac{b}{r}$  interpoliert werden.

Der erste interpolierte Zahlenwert der relativen Ordinate liegt zwischen 0,00373 und 0,00566, welche Zahlen die Tabelle H IV direkt in der 12. und 13. vertikalen Rubrik liefern für  $\frac{x}{r} = 0.02 \frac{b}{r}$ .

Man findet nach durchgeführter Interpolation für

$$\begin{aligned} \left(\frac{\frac{x}{r}}{\frac{b}{r}}\right) &= 0.02, \quad 0.04, \quad 0.06, \quad 0.08, \quad 0.10, \\ \left(\frac{\frac{y}{r}}{\frac{b}{r}}\right) &= 0.00423, \quad 0.00804, \quad 0.01148, \quad 0.01488, \quad 0.01726; \end{aligned}$$

ausgeführt für  $x = 3.65, 7.31, 10.96, 14.61, 18.27^m,$   
 $y = 0.77, 1.469, 2.10, 2.72, 3.16^m.$

Da nun die hierher gehörige Abscisse  $X_0 E$  Fig. 29 parallel läuft der Hauptabszisse,  $x_0 = 48^m$  rot,  $x_1 = 23^m$  rot, so bleiben bis zu  $Q$  von  $E$  aus  $48 - 23 = 25^m$  rot., von diesen sind 5 Bogenpunkte bis zu  $18.27^m$  verwertet und kann man die Zwischenstrecke  $23 - 18.27 = 7^m$  rot. entbehren, weil  $Q$  bereits seiner Lage nach bekannt.

Von  $Q$  aus wird dann das Koordinatensystem  $X_1 Q Y_1$  Fig. 29 abgesteckt,

und zwar zunächst wieder  $\frac{\frac{x}{r}}{\frac{b}{r}} = \frac{0.293443}{2.283319} = 0.103$  gebildet. Für den

vorliegenden Fall genau genug würden dann die relativen Ordinaten in

der vertikalen Rubrik  $\frac{\left(\frac{x_1}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} = 0.1$  (genau 0.103) genügen. Für die Ab-

scissen kann man dieselben Werte acceptieren wie oben:

$$\frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} = 0.02, 0.04 \dots \frac{\left(\frac{y}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} = 0.0018, 0.00319, 0.00419 \dots,$$

die Rechnung ausgeführt,

$$x = 3.65, 4.31, 10.96, 14.61, 16.47,$$

$$y = 0.33, 0.58, 0.58, 0.77, 0.90;$$

für  $x = 23^m$  rot. würden wir wieder Bogenmitte erreicht haben.

## V.

### Die Ellipse als Eisenbahnkurve.

#### 1. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen.

Von den drei Kegelschnitten Parabel, Hyperbel und Ellipse stellen sich die Bedingungen für die Verwertung der letzteren als Eisenbahnkurve am ungünstigsten. Obgleich die Annahme des Minimalradius auch hier wie bei der Hyperbel einer Bedingung unterworfen ist, die eine neue Variation in der Wahl von  $r$  zulässt, so ist dieselbe doch gerade entgegengesetzt der der Hyperbel, hierdurch wird die Verwendbarkeit der Ellipse in bedeutend engere Grenzen gezogen als die der Hyperbel. Die Anstellung der Gleichungen können wir ganz nach den gleichen Grundsätzen vornehmen, wie bei der Hyperbel und wollen zu dem Ende auch dieselben Bezeichnungen für die Hauptelemente beibehalten.

Es sei Fig. 30 AMQG eine Ellipse,  $YW$  die verlängerte grosse Achse,  $M$  Bogenmitte zugleich Koordinatenanfang,  $YMX$  das Koordinatensystem.  $W$  Winkelpunkt,  $E$  Bogenende,  $WE = T$  Tangente,  $ES$  Normale,  $r$  (in  $M$ ) und  $R$  (für  $E$ ) die beiden charakteristischen Krümmungsradien,  $a$  grosse,  $b$  kleine Achse u. s. w. (Der Buchstabe  $M$  muss in der Figur ergänzt werden.)

Vertauscht man die Koordinaten der Scheitelgleichung der Ellipse  $y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2}$ , löst dann die Gleichung nach  $y$  auf, so findet sich für das in Fig. 30 angenommene Koordinatensystem auf einen beliebigen Punkt  $P(x, y)$  bezogen,

a) . . . . .  $y = a - \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2}$

Die beiden ersten Differentialquotienten sind hier

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b} \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = + \frac{ab}{\sqrt{(b^2 - x^2)^3}}$$

Der Krümmungsradius somit

$$\rho = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\sqrt{[x^2(a^2 - b^2) + b^4]^3}}{ab^4}$$

Für  $x = 0$  erhält man den kleinsten Krümmungsradius bei Bogenmitte  $M$

b) . . . . .  $r = \frac{b^2}{a}$ .

Für  $x = b$  wird  $\rho$  am grössten, bekanntlich  $R = \frac{a^2}{b}$ .

Aus Gl. (b)  $a = \frac{b^2}{r}$  in obige allgemeine Gleichung (a) eingesetzt, folgt die Form wie wir sie weiter unten für unsere Zwecke verwerten wollen, nämlich

c) . . . . .  $y = \frac{b}{r} [b - \sqrt{b^2 - x^2}]$

Einen gleichwertigen Ausdruck für die trigonometrische Tangente bei  $F$ ,

$\text{tg } \varphi = \frac{1}{\text{tg } \alpha/2} = \text{cotg } \alpha/2$  findet sich durch Differentiation der Gleichung (c), indem man  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  nach unserer obigen Bezeichnung setzt; es ist weil

$$\frac{dy_0}{dx_0} = \frac{b}{r} \frac{x_0}{\sqrt{b^2 - x_0^2}} = \text{tg } \varphi,$$

d) . . . . .  $\text{tang } \alpha/2 = \frac{r\sqrt{b^2 - x_0^2}}{bx_0} = r\sqrt{\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{b^2}}$ .

e) Aus der Figur folgt auch  $x_0 = T \sin \alpha/2$ .

Es liegen nun hier dieselben Gründe vor, wie wir sie Seite 49 für die Hyperbel aufstellten, um die Konstanten  $b$  zu bestimmen, abhängig von  $T$ ,  $r$  und dem  $\angle P \angle \alpha$ .

Setzen wir  $x_0$  aus (e) in (d) ein, so findet sich  $b$  entwickelt,

f) . . . . .  $b = \frac{r T \sin \alpha/2}{\sqrt{r^2 - T^2 \sin^2 \alpha/2 \text{tg}^2 \alpha/2}}$

Die im Nenner enthaltene Bedingung lautet hier umgekehrt wie bei der Hyperbel

g) . . . . .  $T \angle r \frac{\text{cotg } \alpha/2}{\sin \alpha/2}$ .

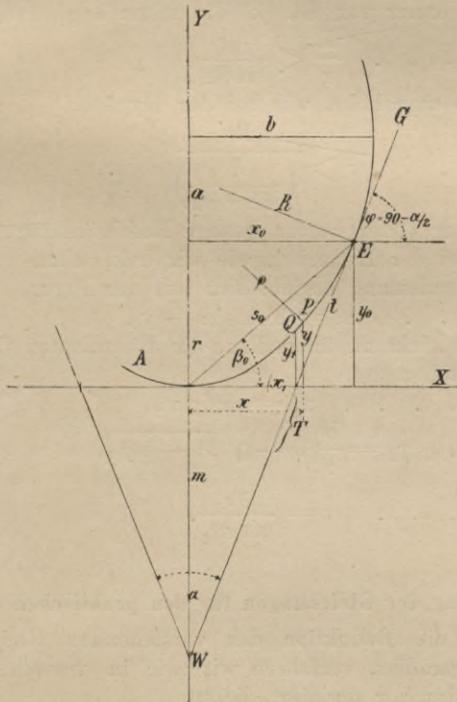
Setzt man in obige Gleichung für den Krümmungsradius,  $x = x_0$  und  $a = \frac{b^2}{r}$ , dann erhält man den an die Gerade sich anschliessenden Krümmungsradius  $R$  im Berührungspunkt  $E$ ,

$$R = \sqrt{\frac{[x_0^2 (b^2 - r^2) + b^2 r^2]^3}{r^2 b^3}}$$

Aus dieser Gleichung folgt die dem Krümmungsradius  $R$  entsprechende Abscisse, abhängig von  $b$  und  $r$ , nämlich

$$x_0 = b \sqrt{\frac{r \sqrt{rR^2 - r^2}}{b^2 - r^2}} \dots \dots \dots h)$$

Fig. 30.



Um zu einem bestimmten Ausdruck für  $T$  zu gelangen statt der unbestimmten Gleichung (g), suchen wir die letztere dadurch zu umgehen, dass wir die Bedingung, unter welcher überhaupt die Ellipse als Eisenbahnkurve verwendet werden kann, abhängig von solchen Grössen aufstellen, die für uns als veränderliche vorliegen, zu denen, wie bei der Hyperbel  $r$ ,  $R$  und  $\alpha/2$  gehören.

Entwickeln wir aus (f) einen Ausdruck für die Tangente  $T$ :

$$T = \frac{1}{\sin \alpha/2 \sqrt{\left(\frac{\text{tg } \alpha/2}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}}, \text{ dann ist auch hieraus } \dots \dots \dots i)$$

und nach Gl. (e)

$$T \sin \alpha/2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha/2}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = x_0, \text{ oder (h) eingeführt,}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha/2}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = b \sqrt{\frac{r^3 \sqrt{rR^2 - r^2}}{b^2 - r^2}},$$

hieraus endlich  $b$  abhängig von  $R, r$  und  $\alpha/2$ :

$$k) \dots \dots \dots b = \frac{r^3 \sqrt{R}}{\sqrt{\sqrt[3]{r^2} - \operatorname{tg}^2 \alpha/2 (\sqrt[3]{R^2} - \sqrt[3]{r^2})}}.$$

Hierdurch haben wir nun wohl wieder erreicht, dass der Krümmungshalbmesser im Berührungspunkt der Tangente zugleich mit der Maximalabszisse  $x_0$  zusammenfällt, die obige Ungleichung (g) ist umgangen, dafür erscheint aber im Nenner von Gl. (k) die schon angedeutete Bedingung

$$l) \dots \dots \dots \frac{R}{r} < \frac{1}{\sin^3 \alpha/2}$$

Es müsste also umgekehrt wie bei der Hyperbel

$$l_1) \dots \dots \dots r > \left(\frac{1}{\sin^3 \alpha/2}\right) \text{ sein.}$$

Diese Bedingung, oder besser gesagt Beschränkung, ist mehr ins Gewicht fallend, als bei der Hyperbel, wie wir bald sehen werden.

Der Bogenmittenabstand ergibt sich aus der Figur

$$m) \dots \dots \dots m = T \cos \alpha - y_0,$$

ebenso endlich, wie leicht zu übersehen, die Koordinaten des Hilfspunktes  $Q$  und der Tangente  $t$

$$n) \dots \dots \dots x_1 = m \operatorname{tg} \alpha/2,$$

$$o) \dots \dots \dots y_1 = \frac{b}{r} [b - \sqrt{b^2 - x_1^2}],$$

$$p) \dots \dots \dots t = \frac{y_0}{\cos \alpha/2}.$$

## 2. Umformung der Gleichungen für den praktischen Gebrauch.

In Bezug auf die Reduktion der vorstehenden Gleichungen auf den kleinsten Krümmungsradius, verfahren wir wie in vorstehenden Abschnitten.

Gleichung (c) durch  $r$  dividiert, liefert

$$73) \dots \dots \dots \frac{y}{r} = \frac{b}{r} \left[ \frac{b}{r} - \sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \right]$$

Das Verhältnis  $\left(\frac{b}{r}\right)$  leiten wir aus (k) ab, man findet nach einiger Reduktion dieses Verhältnis abhängig von  $\alpha$  und  $\frac{R}{r}$ .

$$74) \dots \dots \dots \left(\frac{b}{r}\right) = \frac{\cos \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}}}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha/2 \sqrt[3]{\left(\frac{R}{r}\right)^2}}}$$

Die relative Grösse der Tangente nach (i)

$$\frac{T}{r} = \frac{1}{\sin \alpha/2 \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad \dots \quad (75a)$$

in diese Formel den reciproken Wert aus (74) gesetzt, wird identisch mit der Hyperbel

$$\frac{T}{r} = \operatorname{cotg} \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}} \quad \dots \quad (75)$$

Ebenso auch die Maximalabszisse  $x_0$ , durch Kombination der Gleichungen (e) und (75),

$$\frac{x_0}{r} = \frac{T}{r} \sin \alpha/2 = \operatorname{ctg} \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}} \sin \alpha/2 = \cos \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}} \quad \dots \quad (76)$$

Die übrigen relativen Hauptdimensionen aus (m), (n), (o), (p) abgeleitet, sind dann noch

$$\frac{m}{r} = \frac{T}{r} \cos \alpha/2 = \frac{y_0}{r} \quad \dots \quad (77)$$

$$\frac{x_1}{r} = \frac{m}{r} \operatorname{tg} \alpha/2 \quad \dots \quad (78)$$

$$\frac{y_1}{r} = \frac{b}{r} \left[ \frac{b}{r} = \sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{r}\right)^2} \right] \quad \dots \quad (79)$$

$$\frac{t}{r} = \frac{y}{r} \frac{1}{\cos \alpha/2} \quad \dots \quad (80)$$

Vergleicht man diese Formeln mit den analogen der Hyperbel Gl. 52 bis 61, so sind, wie nach den Grundsätzen der analytischen Geometrie vorzusehen, gewisse Übereinstimmungen unverkennbar. Wenngleich auch selbst einige Formeln vollkommen identisch mit denen der Hyperbel sind, so ist man für diese gezwungen neue tabellarische Übersichten herzustellen; denn wie schon bemerkt, bewegt sich die Anwendung der Ellipse in ganz andere Grenzen, als wir sie in Bezug auf  $R/r$  und dem  $\angle P \angle \alpha$

angenommen haben bei der Hyperbel. Nach (1<sub>1</sub>) muss  $r > \frac{R}{\left(\frac{1}{\sin^3 \alpha/2}\right)}$ , nach

Gl. (74), damit  $\frac{b}{r}$  reell bleibt,  $\sin \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}} < 1$  sein. Für den kleinsten

$\angle P \angle \alpha/2 = 30^\circ$  muss  $r > \frac{R}{8}$  bezw.  $\frac{R}{r} < 8$  oder auch vom  $\angle P \angle$  selbst

ausgehend,  $\sin \alpha/2 < \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{R}{r}}}$  sein.  $R/r = 6$  würde einen Spielraum in der

Anwendung zulassen, der sich aus  $\sin \alpha/2 < \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{6}{r}}} < 0.55$  ergibt, zwischen

$\alpha/2 = 30$  und  $33^\circ$ . Je näher  $R = r$ , um so mannigfaltiger gestaltet sich die Verwendung. Für  $R/r = 2$ , wird  $\sin \alpha/2 < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < 0.8$ , entspricht

$\alpha/2 = 34^\circ$  und  $30^\circ$ . Wir sind nun in den Tabellen für jedes gewählte

Krümmungsverhältnis  $R/r$  nicht bis zu  $30^0$  herunter gegangen, weil je kleiner  $\alpha/2$ , wie aus Gl. 75 zu ersehen,  $\frac{T}{r}$ , die Tangente wieder um so grösser wird, offenbar auch ein Nachteil für die praktische Verwendbarkeit der Ellipse. Alle Rücksichten zusammengefasst und vom praktischen Standpunkte aus erwogen, lässt die Hyperbel eine zirka 8 mal grössere Verwendung zu als die Ellipse.

### 3. Rektifikation der Ellipse.

In Fig. 31 sei P ein beliebiger Bogenpunkt, dessen Koordinaten  $x, y$ , dessen Länge  $l = MP$  soll rektifiziert werden.

Differenziert man die Gleichung der Ellipse  $y = a - \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2}$ , dann folgt  $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b} \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$ , das Quadrat dieses Differentialquotienten in die Rektifikationsformel

$$l = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

eingesetzt, folgt

$$l = \int_0^x \sqrt{\frac{b^4 + (a^2 - b^2)x^2}{b^2(b^2 - x^2)}} dx, \text{ selbsredend } a > b.$$

Substituieren wir in diese Formel für das Quadrat der Excentricität  $a^2 - b^2 = b^2 c^2$ , worin  $c$  eine vorübergehende Konstante, dann formt sich obiges Integral zu

$$l = \int_0^x \sqrt{\frac{b^2 + c^2 x^2}{b^2 - x^2}} dx$$

Eine Auflösung dieses Integrales lässt sich nicht ohne Weiteres bewerkstelligen. Die Grösse unter dem Wurzelzeichen muss möglichst zu einem Binom umgestaltet werden, erst dann lässt sich die Wurzel mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes zergliedern. Zu dem Ende führen wir eine Winkelfunction ein für die Veränderliche  $x$  und setzen

$$x = b \sin \psi, \text{ wonach } dx = b \cos \psi d\psi,$$

dann folgt zunächst das unbestimmte Integral

$$l = b \int \sqrt{\frac{1 + c^2 \sin^2 \psi}{1 - \sin^2 \psi}} \cos \psi d\psi = b \int \sqrt{1 + c^2 \sin^2 \psi} d\psi$$

Um die Grenzen zu sichern, versuchen wir den obigen Hilfwinkel  $\psi$  graphisch darzustellen. Beschreibt man von Q Fig. 31 mit dem Halbmesser

der kleinen Achse  $b$  einen Kreis, so trifft dieser die grosse Achse im Punkte  $N$ , es ist  $\frac{MQ}{QN} = \frac{x}{b} = \sin N = \sin \psi$ , also  $\angle MNQ = \psi$ .

Wenn  $x$  zu  $SE_1 = b$  anwächst, dann wird  $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ , ( $90^\circ$ ), wie leicht zu übersehen, diese Grenze entspricht dann der Vierteilellipse. Wenn  $x = x_0$ , Bogenende nach unserer Bezeichnung, dann wird  $\sin \psi_1 = \frac{x_0}{b}$ . Für  $x = 0$  wird endlich  $\sin \psi_1 = 0$ , der Bogen beginnt in  $M$ . Die zu setzenden Grenzen sind demnach  $\psi' = 0$  und  $\psi = \psi_1$ , und folglich

$$l = b \int_0^{\psi_1} \sqrt{1 + c^2 \sin^2 \psi} \, d\psi, \text{ worin } \dots \dots \dots q)$$

$$c^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1; \sin \psi = \frac{x}{b}$$

Löst man jetzt die Wurzel mit Zuhilfenahme des binomischen Lehrsatzes auf, ordnet die Glieder und bringt deren Koeffizienten in geeignete Zahlenformen, dann findet man:

$$= b \int_0^{\psi_1} \sqrt{1 + c^2 \sin^2 \psi} \, d\psi =$$

$$b \left\{ \int_0^{\psi_1} d\psi + \frac{1}{2} c^2 \int_0^{\psi_1} \sin^2 \psi \, d\psi - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} c^4 \int_0^{\psi_1} \sin^4 \psi \, d\psi + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^6 \int_0^{\psi_1} \sin^6 \psi \, d\psi - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} c^8 \int_0^{\psi_1} \sin^8 \psi \, d\psi + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} c^{10} \int_0^{\psi_1} \sin^{10} \psi \, d\psi - + \dots \dots \dots \right\} q_1)$$

Die Berechnung des  $\int \sin^{2n} \psi \, d\psi$  lässt sich nach folgender Recursionsformel vornehmen:

$$\int \sin^{2n} \psi \, d\psi = \frac{(-1)^n}{2^{2n} - 1} \left\{ \frac{\sin 2n \psi}{2n} - (2n)_1 \frac{\sin (2n - 2) \psi}{2n - 2} + (2n)_2 \frac{\sin (2n - 4) \psi}{2n - 4} - \dots + (-1)^{n-1} (2n)_{n-1} \frac{\sin 2 \psi}{2} + (-1)^n (2n)_n \frac{\psi}{2} \right\}$$

hierin gilt für einen beliebigen Abschluss  $p$

$$(2n)_p = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(2n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p}$$

Setzt man in diese der Reihe nach  $n=1, 2, 3, 4 \dots$ , so wird\*)

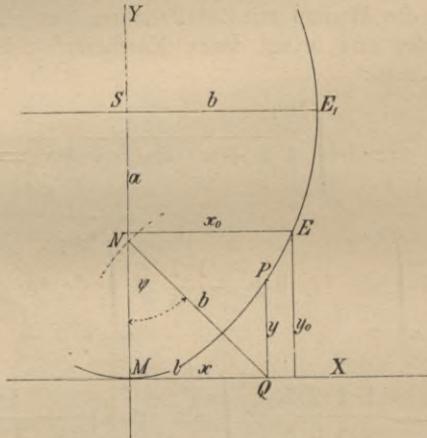
$$n=1; \int \sin^2 \psi \, d\psi = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin 2\psi}{2} - 4 \right\} = -\frac{1}{4} \sin 2\psi + \frac{\psi}{2},$$

$$n=2; \int \sin^4 \psi \, d\psi = \frac{1}{2^3} \left\{ \frac{\sin 4\psi}{4} - 4 \frac{\sin 2\psi}{2} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{\psi}{2} \right\} = \frac{1}{32} \sin 4\psi - \frac{1}{4} \sin 2\psi + \frac{3}{8} \psi,$$

$$n=3; \int \sin^6 \psi \, d\psi = -\frac{1}{2^5} \left\{ \frac{\sin 6\psi}{6} - 6 \frac{\sin 4\psi}{4} + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \frac{\sin 2\psi}{2} - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\psi}{2} \right\} = -\frac{1}{192} \sin 6\psi + \frac{3}{64} \sin 4\psi - \frac{15}{64} \sin 2\psi + \frac{5}{16} \psi,$$

$$n=4; \int \sin^8 \psi \, d\psi = \frac{1}{2^7} \left\{ \frac{\sin 8\psi}{8} - 8 \frac{\sin 6\psi}{6} + \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \frac{\sin 4\psi}{4} - \right.$$

Fig. 31.



$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\sin 2\psi}{2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\psi}{2} \Big\} = \frac{1}{1024} \sin 8\psi - \frac{1}{96} \sin 6\psi + \frac{7}{128} \sin 4\psi - \frac{7}{32} \sin 2\psi + \frac{35}{128} \psi,$$

$$n=5; \int \sin^{10} \psi \, d\psi = -\frac{1}{2^9} \left\{ \frac{\sin 10\psi}{10} - 10 \frac{\sin 8\psi}{8} + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \frac{\sin 6\psi}{6} - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} \sin \frac{4\psi}{4} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\sin 2\psi}{2} - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{\psi}{2} \right\} = -\frac{1}{5120} \sin 10\psi + \frac{5}{2048} \sin 8\psi - \frac{15}{1024} \sin 6\psi + \frac{15}{256} \sin 4\psi - \frac{105}{512} \sin 2\psi + \frac{63}{256} \psi$$

u. s. w.

Man erhält jetzt die vorstehenden Integrale der Vielfachen des Hiltswinkels in  $(q_1)$  eingeführt

\*) S. Redtenbacher, Resultate, Anhang.

$$l = b \left\{ \psi_1 + \alpha_1 \frac{1}{2} c^2 - \beta_1 \frac{1}{2 \cdot 4} c^4 + \gamma_1 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^6 - \delta_1 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} c^8 + \varepsilon_1 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} c^{10} \dots \right\},$$

worin

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{4} \sin 2\psi_1 + \frac{\psi_1}{2}, \\ \beta_1 &= \frac{1}{32} \sin 4\psi_1 - \frac{1}{4} \sin 2\psi_1 + \frac{3}{8} \psi_1, \\ \gamma_1 &= -\frac{1}{192} \sin 6\psi_1 + \frac{3}{64} \sin 4\psi_1 - \frac{15}{64} \sin 2\psi_1 + \frac{5}{16} \psi_1, \\ \delta_1 &= \frac{1}{1024} \sin 8\psi_1 - \frac{1}{96} \sin 6\psi_1 + \frac{7}{128} \sin 4\psi_1 - \frac{7}{32} \sin 2\psi_1 + \frac{35}{128} \psi_1, \\ \varepsilon_1 &= -\frac{1}{5120} \sin 10\psi_1 + \frac{5}{2048} \sin 8\psi_1 - \frac{15}{1024} \sin 6\psi_1 + \frac{15}{256} \sin 4\psi_1 - \frac{105}{512} \sin 2\psi_1 + \frac{63}{256} \psi_1, \end{aligned} \right\} g)$$

Übertragen wir diese Rektifikationsformel auf unseren Zweck; die Berechnung der Bogenlänge der Ellipse von Bogenanfang bis Bogenende, dann ist  $c^2 = \left(\frac{b}{r}\right)^2 - 1$ ,  $\sin \psi_1 = \frac{x_0}{b}$ ,  $\psi_1 = \arcsin \frac{x}{b}$ , und wir erhalten nach entsprechender Zusammenziehung des Ausdruckes\*)

$$\frac{L}{r} = 2 \frac{b}{r} \left\{ \arcsin \frac{x_0}{b} - \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{b}{r}\right)^2 - 1 \right] \left[ \alpha + \frac{1}{4} \beta \left[ \left(\frac{b}{r}\right)^2 - 1 \right] + \frac{1}{8} \gamma \left[ \left(\frac{b}{r}\right)^2 - 1 \right]^2 + \frac{5}{64} \delta \left[ \left(\frac{b}{r}\right)^2 - 1 \right]^3 \dots \right] \right\}, \text{ worin}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4} \sin 2\psi_0 - \frac{\psi_0}{2}, \\ \beta &= \frac{1}{32} \sin 4\psi_0 - \frac{1}{4} \sin 2\psi_0 + \frac{3}{84} \psi_0, \\ \gamma &= \frac{1}{192} \sin 6\psi_0 - \frac{3}{64} \sin 4\psi_0 + \frac{15}{64} \sin 2\psi_0 - \frac{5}{16} \psi_0, \\ \delta &= \frac{1}{1024} \sin 8\psi_0 - \frac{1}{96} \sin 6\psi_0 + \frac{7}{128} \sin 4\psi_0 - \frac{7}{32} \sin 2\psi_0 + \frac{35}{128} \psi_0, \text{ und } \sin \psi_0 = \frac{x_0}{b}, \psi_0 = \arcsin \frac{x_0}{b} \text{ ist.} \end{aligned} \right\} h)$$

\*) Die Tabellenwerte habe ich bis zur 12. Potenz von  $c$  durchgeführt, hierbei aber gefunden, dass sie bereits schon bis zur 8. Potenz von  $c$  genügt. Die 10. und 12. Potenz ergänzen sich gegenseitig, und können überhaupt die Potenzen von  $c$  nur paarweise in Rechnung gestellt werden.

Um aus Gl. (q<sub>1</sub>) die Viertelellipse zu erhalten, setzen wir  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , also  $2\psi = \pi$  (180°), dann verschwinden die trig. Funktionen, und man erhält,  $\frac{\pi}{2}$  vor die Hauptklammer gesetzt,

$$r) \left\{ \begin{aligned} l_1 &= \frac{\pi}{r} b \left[ 1 + \frac{1}{4} c^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 c^4 + \frac{1}{5} \left( \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 c^6 - \frac{1}{7} \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \right)^2 c^8 + \frac{1}{9} \left( \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \right)^2 c^{10} \dots \right] \\ c &= \frac{1}{b} \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{e}{b}, \text{ e Excentricität der Ellipse.} \end{aligned} \right.$$

Setzen wir  $c = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - 1}$ , wobei  $\frac{b}{r} > 1$

d. h. der Bogen beginnt am Ende der grossen Achse, dann folgt

$$l_1 = \frac{\pi}{2} \frac{b}{r} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 1 \right] - \frac{1}{3} \left( \frac{3}{8} \right)^2 \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 1 \right]^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{15}{48} \right)^2 \right. \\ r_1) \dots \left. \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 1 \right]^3 - \frac{1}{7} \left( \frac{105}{384} \right)^2 \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 1 \right]^4 \dots \right].$$

Direkt abhängig von der grossen Achse a, indem man sich den Bogen oder die Viertelellipse in E, Fig. 31 beginnen denkt\*), folgt

$$l_2 = \frac{\pi}{2} a \left[ 1 + \frac{1}{4} c_1^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 c_1^4 + \frac{1}{5} \left( \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 c_1^6 - \frac{1}{7} \right. \\ r_{11}) \dots \left. \left( \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \right)^2 c_1^8 + \dots \right], \\ c_1^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, c_1 = \frac{e}{a} \text{ numerische Excentricität.}$$

Wenn  $a = b = r$ ,  $e = c_1 = 0$ , dann folgt  $l_1 = l_2 = \frac{\pi}{2} r$ ,  $U = 2r\pi$  der Kreisumfang.

#### 4. Absteckung der Ellipse vom Bogenanfang oder -Ende durch rechtwinkelige Koordinaten.

Die Lösung der Aufgabe, eine Ellipse vom Berührungspunkt einer Tangente, den ersteren als Koordinatenanfang, die letztere als Abscissenachse betrachtet, abzustecken, führt auch hier zu ziemlich verwickelten Formeln, deren Berechnung und übersichtliche Darstellung in Tabellenform zu bringen, sich schwerlich rentieren dürfte. Nach Verfassers Untersuchungen gelangt man auch bei der Ellipse durch eine parallele Verschiebung der Koordinaten wieder zu einem komplizierten Formelbau, der sich aber noch in Tabellenform am leichtesten realisieren lässt, wenn selbst auch die praktische Anwendung der Tabellen, wie wir es schon mehrfach oben hatten, wenigstens für den Hilfspunkt Q, immerhin zwei Multiplikationen in sich schliesst.

\*) Man geht hierbei aus von der Mittelpunktsgleichung  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  der Ellipse; der gewöhnliche Fall.

Verschiebt man das Koordinatensystem von M nach E parallel zu sich selbst (EX<sub>0</sub> als X achse und EY<sub>0</sub> als Yachse Fig. 29), dann gilt für den Bogenpunkt P (x, y), bezogen auf den Koordinatenanfang in M,  $y = a - \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2}$ .

Sind die neuen Koordinaten von P,  $\xi$  und  $v$ , und zwar  $v = y_0 - y$ ,  $\xi = x_0 - x$ , so ändert sich durch diese Koordinatenverwandlung vorstehende Gleichung um in

$$y_0 - v = a - \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (x_0 - \xi)^2} \dots \dots \dots s)$$

Für  $\xi = 0$  wird, weil  $y_0 = a - \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x_0^2}$ ,  $v = 0$ .

Setzt man diesen Wert der Maximalordinate  $y_0$  in (s) ein, vertauscht in der üblichen Weise die Veränderlichen  $v, \xi$  mit  $y, x$ , dividiert beiderseitig durch  $r$ , den Minimalkrümmungsradius, dann folgt zunächst

$$v = \frac{a}{b} \left[ \sqrt{b^2 - (x_0 - \xi)^2} - \sqrt{b^2 - x_0^2} \right], \text{ hierauf}$$

$$\frac{y}{r} = \frac{b}{r} \left[ \sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{r} - \frac{x}{r}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{r}\right)^2} \right]. \quad 82.$$

Für je zwei zusammengehörige Werte von  $\frac{b}{r}$  und  $\frac{x_0}{r}$  findet man nach dieser Formel für eine Reihe relativer Abscissen  $\frac{x}{r}$  die entsprechenden relativen Ordinatengrößen. Die auf diese Formel basierte Tabelle, welche wir unten noch eingehender besprechen werden, ist derartig entworfen, dass nur jedesmal eine Multiplikation des Tabellenwertes mit  $r$  genügt, um die absoluten Größen der Koordinaten zu erhalten\*).

Eine ähnliche Tabelle für die Hyperbel zu entwerfen, bietet selbstredend keine Schwierigkeiten, die zu Grunde zu legende Formel ist in Gl. 67 (a) Seite 62 enthalten, und würde analog der weiter unten aufgestellten, mit Hilfe

$A = \cos \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}}$  und  $B = \sin \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}}$  sich auch in die Form bringen lassen:

$$\frac{y}{r} = \left(\frac{b}{r}\right)^2 \left[ B - \sqrt{\frac{\left(A - \frac{x}{r}\right)^2}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} + 1} \right], \dots \dots \dots t)$$

man übersieht aber leicht, dass hier ein imenses Tabularium erforderlich ist, um allen den Fällen, die wir bei der Hyperbel zu Grunde legten, ( $R/r = 1.1 \dots 12$  für bezw.  $\alpha/2 = 30^\circ$  bis  $90^\circ$ ) Genüge zu leisten. Die weniger umfangreiche Anwendung der Ellipse gestattet schon früher eine Verwertung der Formel 82 in der Tabellenform E III. Aus diesen Gründen zogen wir im vorigen Abschnitt für den gleichen Fall die Absteckung der Hyperbel mit Hilfe der Asymptotenparalleln vor.

Der Ordinatenachsenwinkel  $Y_0$  EW ist  $\alpha/2$ .

\*) Tab. E III.

5. Hilfsgleichungen zur Absteckung der Ellipse vom Bogenpunkt Q.

Verlegt man durch parallele Verschiebung, wie bei der Hyperbel, den Koordinatenanfang nach Q, Fig. 29, in welcher Figur, wie natürlich auch im vorigen Abschnitt gedacht, MQE ein elliptischer Bogen sein mag, dann können wir die Absteckung vom Bogenpunkt Q als Anfang, dem Koordinatensystem  $X_I QY_I$  entsprechend, aus Gl. 82 die nötige Formel direkt niederschreiben, wenn wir nur  $x_0, y_0$  mit  $x_I, y_I$  den Koordinaten von Q vertauschen. Es folgt

$$83) \quad \frac{y}{r} = \frac{b}{r} \left[ \sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - \left(\frac{x_I - \frac{x}{r}}{r}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - \left(\frac{x_I}{r}\right)^2} \right].$$

Dividiert man beiderseitig durch  $\left(\frac{b}{r}\right)^2$ , dann eignet sich diese Gleichung besser für eine tabellarische Form; man erhält

$$83a) \quad \frac{\left(\frac{y}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} = \sqrt{1 - \left[ \frac{\left(\frac{x_I}{r}\right) - \left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} \right]^2} - \sqrt{1 - \left[ \frac{\left(\frac{x_I}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} \right]^2}.$$

Setzt man hierin  $\frac{\left(\frac{x_I}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} = \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)}$ , dann erhält man wieder die Gleichung

73, Seite 76.

Führt man in vorstehenden Gleichungen 83 und 83a die relativen Koordinaten  $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}$  mit entgegengesetztem Zeichen ein, dann erhält man unmittelbar die Formeln für die Absteckung von Q nach Bogenende zu auf das Koordinatensystem  $Y_2 Q X_2$  Fig. 29 bezogen, nämlich

$$84) \quad \frac{\left(\frac{y}{r}\right)^2}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} = \sqrt{1 - \left[ \frac{\left(\frac{x_I}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} \right]^2} - \sqrt{1 - \left[ \frac{\left(\frac{x_I}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} + \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} \right]^2}.$$

Auch für die vorstehenden drei Gleichungen gelten die obigen in IV ausgesprochenen Bemerkungen S. 68,69, sie sind nur als Hilfsgleichungen zu betrachten; die etwaigen Interpolationen nach den zugehörigen Tabellen liefern übrigens immerhin genügend genaue Resultate.

Bezeichnen wir auch hier den halben  $\angle P$  für die Tangente im Punkte Q mit  $\frac{\alpha_1}{2}$ , dann folgt für denselben aus Gl. (d) S. 74

$$85) \quad \dots \dots \dots \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = r \sqrt{\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{b^2}} = \sqrt{\left(\frac{r}{x_1}\right)^2 - \left(\frac{r}{b}\right)^2}.$$

6. Absteckungsverfahren mittelst Sehntangentenwinkel von Bogenmitte.  
Maximalsehne.

Die hierzu erforderlichen Formeln sind, wie man leicht übersehen wird, bereits in IV, Abschnitt 5 enthalten. Behalten wir auch die dortigen Be-

zeichnungen bei (Fig. 28), dann ergibt sich unmittelbar für die Sehne und den Sehnwinkel:

$$\begin{aligned} \text{tang } \beta &= \frac{y}{x}, s = \frac{y}{\sin \beta} = \frac{x}{\cos \beta}, \text{ oder auch } \dots \dots \dots \text{ u)} \\ \text{tang } \beta &= \frac{\eta}{\mu} \left( \frac{b}{r} \right), \frac{s}{r} = \mu \frac{\left( \frac{b}{r} \right)}{\cos \beta} = \eta \frac{\left( \frac{b}{r} \right)^2}{\sin \beta}, \text{ worin } \dots \dots \dots \text{ 86)} \\ \mu &= \frac{\frac{x}{r}}{\frac{b}{r}}, \eta = \frac{\frac{y}{r}}{\left( \frac{b}{r} \right)^2} \dots \dots \dots \text{ 87)} \end{aligned}$$

Ebenso (Fig. 30) wird

$$\text{tg } \beta_0 = \frac{\left( \frac{y_0}{r} \right)}{\left( \frac{x_0}{r} \right)} = \frac{x_1}{r} \text{ und } \dots \dots \dots \text{ 88)}$$

$$\frac{s_0}{r} = \frac{\left( \frac{y_0}{r} \right)}{\sin \beta_0} = \frac{x_0}{\cos \beta_0} \dots \dots \dots \text{ 89)}$$

**7. Umformung der Gleichungen durch geeignete Substitutionen.**

Aus denselben Gründen, die wir im gleichen Abschnitt bei der Hyperbel anführten, wollen wir es auch bei der Ellipse versuchen durch die Substitution Gl. 71 S. 64

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt[3]{\frac{R}{r}} &= A, \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt[3]{\frac{R}{r}} = B, \text{ und überdies} \\ C &= \sqrt[3]{\left( \frac{R}{r} \right)^2 - 1}, D = \sqrt{1 - B^2} \end{aligned}$$

dem Praktiker eine grössere Übersicht und eventuell hierdurch eine leichtere Berechnung der einen oder anderen Formel der Ellipse in Ausnahmefällen zu gewähren.

Die Resultate der bisherigen Entwicklungen der Gleichungen für die Absteckung der Ellipse deuten, wie auch schon angeführt, auf viele Übereinstimmungen der folgenden mit den Gleichungen (72) hin. Demzufolge sind auch die Tabellen mit einer einzigen Ausnahme — Absteckung von Bogenende — in der äusseren Form dieselben.

Man erhält:

1. Maximalabszisse:  $\left( \frac{x_0}{r} \right) = A.$
2. Maximalordinate:  $\left( \frac{y_0}{r} \right) = \frac{A^2}{B + 1}.$
3. Tangente:  $\left( \frac{T}{r} \right) = \frac{A}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \text{cotg } \frac{\alpha}{2} \sqrt[3]{\frac{R}{r}}.$

4. Konstante:  $\left(\frac{b}{r}\right) = \frac{A}{\sqrt{1-B^2}} = \frac{A}{D}$ .

5. Bogenmittenabstand:

$$\left(\frac{m}{r}\right) = A \cotg \frac{\alpha}{2} - \frac{y_0}{r} = \frac{T}{r} \cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{x_1}{r} \cotg \frac{\alpha}{2}.$$

6. Abscisse des Hilfsbogenpunktes Q:

$$\left(\frac{x_1}{r}\right) = \frac{m}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{A}{1+B} = \operatorname{tg} \beta_0.$$

7. Ordinate desselben:

$$\left(\frac{y_1}{r}\right) = \left(\frac{b}{r}\right) \left[ \frac{b}{r} - \sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{r}\right)^2} \right] = \left(\frac{b}{r}\right)^2 \left[ 1 - \sqrt{\frac{2B}{1+B}} \right]$$

8. Tangentenabschnitt:

$$\left(\frac{t}{r}\right) = \frac{A \sqrt[3]{\frac{R}{r}}}{1+B} = \frac{\left(\frac{y_0}{r}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \left(\frac{x_1}{r}\right) \sqrt[3]{\frac{R}{r}}.$$

9. Allgemeine Gleichung:

$$\left(\frac{y}{r}\right) = \left(\frac{b}{r}\right) \left[ \frac{b}{r} - \sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \right],$$

90)  $\left. \begin{array}{l} \text{bezw.} \\ \text{Absteckung von Bogenmitte:} \end{array} \right\} \frac{\left(\frac{y}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} = 1 - \sqrt{1 - \left[ \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)} \right]^2}$

10. Maximalsehne:  $\frac{s_0}{r} = \frac{\left(\frac{x_0}{r}\right)}{\cos \beta_0} = \frac{A}{\cos \beta_0}$ ,  $\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{A}{1+B} = \frac{x_1}{r}$ .

11. Hilfwinkelpunkt:  $\frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{2B} \left(\frac{r}{y_0}\right) = \sqrt{2B} \frac{1+B}{A^2}$ .

12. Absteckung von Bogenende (Anfang), rechtwinkelige Koordinaten:

$$\frac{y}{r} = \frac{b}{r} \left[ \sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{r} - \frac{x}{r}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{r}\right)^2} \right], \text{ bzw.}$$

$$\frac{y}{r} = \left(\frac{b}{r}\right)^2 \left[ \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{A-x}{r}\right)^2}{\left(\frac{b}{r}\right)^2}} - B \right]$$

13. Absteckung von Bogenmitte durch Sehnen-Tangentenwinkel:

$$\frac{s}{r} = \mu \frac{\left(\frac{b}{r}\right)}{\cos B} = \eta \frac{\left(\frac{b}{r}\right)^2}{\sin \beta}, \text{ worin}$$

$$\mu = \left[ \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{y}{r}\right)} \right], \eta = \left[ \frac{\frac{y}{r}}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} \right], \operatorname{tg} \beta = \frac{\eta}{\mu} \left(\frac{b}{r}\right).$$

14. Absteckung vom Bogenpunkt Q (rechtwinkelige Koordinaten):

a) nach Bogenende:

$$\left(\frac{y}{r}\right) = \sqrt{1 - \left[\frac{\left(\frac{x_1}{r}\right) - \left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)}\right]^2} - \sqrt{1 - \left[\frac{\left(\frac{x_1}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)}\right]^2}$$

b) nach Bogenmitte:

$$\left(\frac{y}{r}\right) = \sqrt{1 - \left[\frac{\left(\frac{x_1}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)}\right]^2} - \sqrt{1 - \left[\frac{\left(\frac{x_1}{r}\right) + \left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{b}{r}\right)}\right]^2}$$

15. Bogenlänge:  $C = \sqrt[3]{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1}$ ,  $D = \sqrt{1 - B^2}$ .

$$\frac{L}{r} = 2\lambda \frac{A}{D}, \text{ worin}$$

$$\lambda = \arcsin D - \frac{1}{2} \left(\frac{C}{D}\right) \left[\alpha + \frac{1}{4} \beta \frac{C}{D} + \frac{1}{8} \gamma \left(\frac{C}{D}\right)^2 + \frac{5}{64} \delta \left(\frac{C}{D}\right)^3 \dots\right]$$

$$\text{und } \sin \psi_0 = D, \alpha = \frac{1}{4} \sin 2\psi_0 - \frac{1}{2} \arcsin D,$$

$$\beta = \frac{1}{32} \sin 4\psi_0 - \frac{1}{4} \sin^2 \psi_0 + \frac{3}{8} \arcsin D,$$

$$\gamma = \frac{1}{192} \sin 6\psi_0 - \frac{3}{64} \sin 4\psi_0 + \frac{15}{64} \sin 2\psi_0 - \frac{5}{16} \arcsin D,$$

$$\delta = \frac{1}{1024} \sin 8\psi_0 - \frac{1}{96} \sin 6\psi_0 + \frac{7}{128} \sin 4\psi_0 - \frac{7}{32} \sin 2\psi_0 + \frac{35}{128} \arcsin D.$$

16. Bedingungen:

$$r > R \sin \frac{3\alpha}{2} > \frac{R}{\left(\frac{1}{\sin \frac{3\alpha}{2}}\right)}, \frac{1}{\sin \frac{3\alpha}{2}} \text{ in Tabelle P I, } \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt[3]{\frac{R}{r}} < 1.$$

8. Einrichtung der Tabellen. — Beispiele.

Bei Aufstellung der Tabellen für die Absteckung der Ellipse gingen wir wieder vom Krümmungsradiusverhältnis  $R/r$  und dem  $\angle P \angle \alpha$  aus. Den Umfang der Tabellen haben wir in Folge der schon mehrfach erwähnten, bei der Ellipse ungünstigen Bedingungen auf die Krümmungsradiusverhältnisse  $R/r = 1.5$  bis  $5$  beschränken müssen. Theoretisch kann man bei jedem Radiusverhältnis allerdings bis auf  $\alpha/2 = 30^\circ$  heruntergehen, die Dimensionen werden aber dann für die kleineren Radienverhältnisse, weil diese sich auf grosse Minimalradien beziehen, vom praktischen Standpunkt aus kaum mehr verwendbar; nach sorgfältiger Erwägung glauben wir darum den praktischen Anforderungen durch die vorliegenden Tabellen EI bis EVI vollkommen Genüge geleistet zu haben. Die Tabelle E VI ist mit Tabelle H VI identisch, wie wir dies schon Seite 84 Abschnitt 5 bei Aufstellung der Formeln andeuteten.

Tabelle EI enthält die relativen Hauptdimensionen:

$$\frac{x_0}{r}; \frac{y_0}{r}; \frac{s_0}{r}; \frac{T}{r}; \frac{t}{r}; \frac{L}{r}; \frac{m}{r}; \frac{x_1}{r}; \frac{y_1}{r};$$

äusserdem die Konstanten  $\left(\frac{b}{r}\right); \left(\frac{b}{r}\right)^2$  und die Winkel  $\frac{\alpha_1}{2}, \beta_0$ .

Der Rechnung wurde hier zu Grunde gelegt die Formeln in Gl. 90: 1 bis 8, 10, 11, 15.

Die Tabelle EII; Absteckung von Bogenmitte durch rechtwinkelige Koordinaten, wurde nach Gl. 90, Nr. 9 entworfen, und ist analog der Tabelle H II; erfordert also doppelte Multiplikationen in Folge der in EI enthaltenen Konstanten.

Die Zahlenwerte in Tabelle EIII sind nach Gl. 90 Nr. 12 berechnet, sie enthält die direkten relativen Ordinaten  $y/r$  unter den in jeder Horizontalreihe stehenden relativen Abscissen  $x/r$ , die ihrerseits wieder abhängig sind von den in der ersten vertikalen Spalte stehenden  $\angle P \angle \alpha/2$ . Diese Tabelle ist offenbar bequemer in ihrer praktischen Handhabung, als die analoge der Hyperbel (mit Hilfe der Asymptotenparallelen), sie erfordert, wie die Haupttabelle nur eine Multiplikation mit dem Minimalkrümmungsradius.

Tabelle EIV und EV sind nur Hülftabellen, nach der Gl. 90, Nr. 14 a, b berechnet. Es gelten auch hier die dort an entsprechender Stelle gemachten Bemerkungen, und liegt natürlich dort die gleiche Handhabung zu Grunde.

1. Beispiel.  $\alpha/2 = 33^0 1'$  ist gegeben. Es ist nach Tabelle PI R/r  $\angle 5.947$ , also wenn wir wieder  $R = 3000$  zu Grunde legen,

$r \rhd \frac{3000}{5.947} \rhd 540$  zu nehmen. Als Minimalradius  $r = 600$  angenommen,

gibt für  $\frac{R}{r} = \frac{3000}{600} = 5$  und  $\frac{\alpha}{2} = 33^0$  die Tabelle EI die Hauptdimensionen:

Maximalkoordinaten . . . . .	$x_0 = 1,434107 \cdot 600 = 860,46^m$ .
	$y_0 = 1,06490 \cdot 600 = 638,94^m$ .
Grösste Sehne . . . . .	$s_0 = 1,77623 \cdot 600 = 1071,74^m$ .
Zugehöriger Sehnentangentenwinkel .	$\beta_0 = 36^0 35' 43''$ .
Tangente . . . . .	$T = 2,63313 \cdot 600 = 1579,88^m$ .
Tangentenabschnitt . . . . .	$t = 1,26972 \cdot 600 = 761,83^m$ .
Bogenlänge . . . . .	$L = 3,7366 \cdot 600 = 2242,00^m$ .
Bogenmittenabstand . . . . .	$m = 1,14343 \cdot 600 = 686,058^m$ .
Koordinaten des Bogenpunktes Q .	$x_1 = 0,74254 \cdot 600 = 445,52^m$ .
	$y_1 = 0,27820 \cdot 600 = 166,92^m$ .

Die Konstanten sind  $\frac{b}{r} = 3,93769, \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 15,50537$ .

Die Letzteren dienen zur Absteckung von Bogenmitte nach Tabelle EII. Weil  $b = 3,93769 \cdot 600 = 2362,614$ , so liefern die relativen Abscissen  $\mu = 0,005; 0,01; 0,015 \dots$

$$\frac{x}{r} = \frac{b}{r} \mu = \frac{b}{r} \cdot 0,005, \text{ also die absoluten Abscissen}$$

$$x = 0,005 \cdot 2362,614; 0,01 \cdot 2362,614; 0,015 \cdot 2362,614 \dots \text{ oder}$$

$$x = 11,813^m; 23,626^m; 35,439^m \dots$$

Die Ordinaten:  $y = r \left( \frac{b}{r} \right)^2 \eta = 9303,222 \eta$  oder

$y = 9303,222 \cdot 0,000012; 9303,222 \cdot 0,00005; 9303,222 \cdot 0,000112 \dots$  d. i.  
 $y = 0,116^m; 0,466^m; 1,042^m \dots$

Markiert man sich in Bogenende eine Achse parallel der Hauptachse, dann steckt man auf dieser die der Tabelle E II entnommenen Abscissenlängen ab. Diese sind für

$$\frac{x}{r} = 0,015; 0,03; 0,045; 0,060 \dots$$

$$x = 9^m; 18^m; 27^m; 36^m \dots$$

Die entsprechenden Ordinaten liefert die Spalte für  $R/r = 5, \alpha/2 = 33^\circ$ ,

$$\frac{y}{r} = 0,02298; 0,04565; 0,06805; 0,09018 \dots, \text{ und zwar}$$

$$y = 13,69^m; 27,39^m; 40,83^m; 54,11^m \text{ u. s. w.}$$

2. Beispiel. Für eine Bahn niederen Ranges und dem  $\angle P \angle \alpha = 110^\circ$  soll eine Ellipse eingelegt werden unter der Bedingung, dass der Anschlussradius  $R = 1200^m$  sein soll. Aus Tab. P I folgt für  $\alpha/2 = 55^\circ, R/r$

$\angle 1,787$ , somit  $r \gtrsim \frac{1200}{1,787} \gtrsim 700^m$ , nehmen wir  $r = 800^m$  an; dann

muss man die Tabellenwerte aus Tab. E I unter  $\alpha/2 = 55^\circ$  und  $\frac{R}{r} = \frac{1200}{800}$

$= 1,5$  zu Grunde legen. Man findet

$T = 0,80154 \cdot 800 = 641,23^m; m = 0,23724 \cdot 800 = 189,79^m \text{ u. s. w.}$

## VI.

### Vergleichungen, Kritiken und Folgerungen.

#### 1. Allgemeine Vergleichungen und Folgerungen.

Die vorstehenden 90 Bestimmungsgleichungen mit ihren mehr oder weniger zur Entwicklung und Klarlegung des ganzen Stoffes bedingt und unbedingt zugehörigen Grund- und Nebengleichungen, lassen uns jetzt das ganze Laborat übersehen; und tritt an uns die Frage, ob wir auch dem vorgesteckten Ziele so nahe gerückt sind, dass wir mit den Formeln, bezw. Tabellen an der Hand, allen Anforderungen in der Praxis Genüge leisten werden. Um allen Genüge zu leisten, müsste man die Tabellen statt von 20 zu 20 Minuten, von Minute zu Minute für jeden Winkelpunktswinkel berechnen, und die Krümmungsradiusverhältnisse  $R/r$  zwischen 1 und 12 entsprechend vermehren. Die ohnedies schon langwierigen Berechnungen würden sich dann aber gewaltig steigern, und das Tabellenwerk ein so voluminöses, dass vielleicht die Handhabung und Übersicht darunter leiden dürfte.

Vorläufig bitten wir den Praktiker, sich begnügen zu wollen; es sind übrigens die etwaigen Schwenkungen der Traçe bei der Parabel von 5 zu 5, bei der Hyperbel und Ellipse von 20 zu 20 Minuten für das Einpassen der Kurven in die Achsenzüge immerhin in schon enge Grenzen gezogen.

Parabolische Kurven (planparabolische) lassen sich für alle Winkel zwischen 30 und 90° einschalten, freilich nur immer eine einzige, bestimmte. Hyperbeln und Ellipsen ergänzen sich innerhalb der angenommenen Winkel-differenz fast gegenseitig, theoretisch vollkommen; wo nicht eine Hyperbel in Anwendung kommen kann, lässt sich immer eine Ellipse verwenden. Vom praktischen Standpunkte aus haben wir eben hier bedeutende Reduktionen vornehmen müssen, da die jedesmalige, die Hyperbel ergänzende Ellipse, für kleine  $\angle \alpha$  infolge des Wachstums der  $\cotg$  — Tangente, Bogenmitte — für kleine  $\angle \alpha$  so unverhältnismässig ausgedehnt wird, dass von einer Anwendung in der Praxis abgesehen werden muss. Es lässt sich nicht abstreiten, dass in den angenommenen Grenzen, wie die Tabellen zeigen, die Elemente der Ellipse immerhin noch verhältnismässig grosse Dimensionen aufweisen.

		R/r =																	
		12	10	9	8	7	6	5	4	3.5	3	2.75	2.5	2.25	2	1.7	1.5	1.3	1.1
$\angle P < 90^\circ$ $<$	30	30	30	—	—	—	30	30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	35	35	35	35	35	—	35	35	35	35	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	40	40	40	40	40	40	40	—	40	40	40	40	40	40	40	—	—	—	—
	45	45	45	45	45	45	45	45	45	—	45	45	45	45	45	45	45	—	—
	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	—	—
	55	55	55	55	55	55	65	55	55	55	55	55	55	55	55	—	55	—	—
	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	—
	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	—
	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	—
	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

Vorstehend geben wir eine Übersicht der Tabelleninhalte. Die eingeklammerten Grade geben den Umfang der Verwendung der Ellipse, die freien den der Hyperbel. Von Parabel und Kreis kann abgesehen werden. Wie schon bemerkt, beherrscht die Hyperbel ein circa 8mal so grosses Feld als die Ellipse.

Eine andere Frage, die wir durch vorstehende Formeln und Tabellen stillschweigend glauben beantwortet zu haben, hat mit der grösseren oder geringeren Vollständigkeit der aufgestellten Tabellen nichts zu thun. Sie war eigentlich der Ausgangspunkt, und betrifft den wirklichen Ersatz der kubischen Parabel, die ja eigentlich die theoretisch richtige Eisenbahnkurve sein soll. Ersetzen können die Kegelschnitte vom rein wissenschaftlichen Standpunkte aus die kubische Parabel oder wenigstens den Teil derselben welcher als Eisenbahnkurve verwendet wird, niemals. (S. Anhang.)

Der kubische Parabel schliesst sich unmittelbar an die Gerade an, tangiert sie, oder besser gesagt, kommt gleichsam aus der Geraden heraus, während die Kegelschnitte inmitten ihres Laufes von der Geraden unterbrochen werden an einer Stelle ihrer Krümmung, die allerdings kaum von einer Geraden abweicht. Zwischen der Geraden und dem Krümmungshalbmesser R findet ein Zwangsanschluss statt; je weiter dieser hinausgeschoben wird, — je grösser R, — um so länger die Kurve und deren Tangente. Wollte man theoretisch R so zu bestimmen suchen, dass die Ordinaten und Abscissen der kubischen Parabel, wie sie zwischen Kreis und der Geraden eingelegt wird, näherungs-

weise übereinstimmen mit den analogen Kegelschnittordinaten, dann könnte man in der Weise verfahren, dass man das Koordinatensystem der kubischen Parabel in Bogenende so weit dreht, dass es mit dem des betreffenden Kegelschnittes  $X_0 E Y_0$  Fig. 21 oder Fig. 29 zusammenfällt, also um den  $\angle \alpha/2$ . Ferner müsste man in die Gleichung der kubischen Parabel  $y = ax^3$  die verwandelten Koordinaten einführen, und die neue Ordinate, jetzt abhängig von  $\alpha/2$ , bestimmen. Diese letztere müsste dann der Parabelordinate Gl. (d) S. 33, oder der Hyperbel- oder Ellipsenordinate Gl. 67, S. 63 u. Gl. 82, S. 84 gleich gesetzt werden, und schliesslich die Konstanten  $x_0, y_0, \alpha/2$ , also die Lage von R so bestimmt werden, dass die Ordinaten der Kegelschnitte zu Anfang mit denen der kubischen Parabel bis zu einem gewissen Prozentsatz übereinstimmen; gleich werden sie nur, wenn  $x_0 y_0 \infty$  sind.

Diese Arbeit haben wir nur für einige speziellen Fälle durchgeführt, aber bereits gefunden, dass der gewonnene mathematische Ausdruck nur zu ungemein verwickelten, für die Praxis wertlosen Gleichungen führt. Einen Versuch diese möglichst in eine Tabellenform umzuarbeiten, haben wir selbstredend auch nicht unterlassen, stossen aber hierbei auf solche Schwierigkeiten in Folge der in den Formeln enthaltenen mehrfachen Veränderlichen, die sich nicht eliminieren lassen, dass dadurch die Tabellen ihre Übersicht und Brauchbarkeit vollständig einbüßen. —

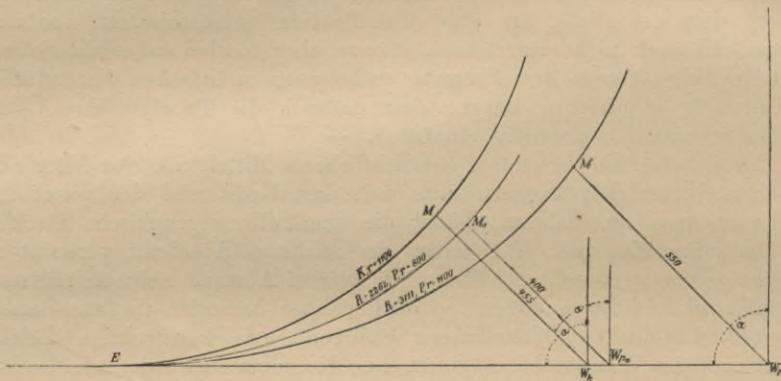
Ein sicheres und besonders übersichtlicheres Mittel, um eine Vergleichung der oben behandelten Kegelschnitte mit dem Kreis und der parabolischen Übergangskurve anzubahnen, bildet die unmittelbare graphische Darstellung der sämtlichen Kurven. Wir haben im nächsten Abschnitt versucht näher auf eine solche einzugehen. Wenn wir hierbei Abstand nehmen müssen von rein konstruktiven Zeichnungen, so dürften aber immerhin die aus demselben hergestellten bildlichen Darstellungen genügen; jede konstruktive Zeichnung mit im richtigen Maassstabe eingetragenen Koordinaten würde, wie leicht einzusehen, im Rahmen dieses Buches kaum durchzuführen sein.

## 2. Vergleichende graphische Darstellungen.

In fast allen unseren Beispielen oben nahmen wir stillschweigend den Anschluss an die Gerade zu  $R = 3000^m$  Radius an, weil wir von dem Gesichtspunkte ausgingen, dass die Ordinaten der Kreisradien von  $3000^m$  so wenig von der geraden Linie, vom Tangentenberührungspunkt aus gerechnet, abweichen, dass man eine Gerade für den Kreis substituieren kann; ein Übergang für Radien  $> 3000^m$  kommt überhaupt in Wegfall. Für  $3000^m$  Radius wendet man noch eine Übergangskurve an, obgleich diese sicherer vom Oberbauleger mit dem Augenmass eingerichtet, als abgesteckt wird. Weiter hinaus den Übergang zu schieben, kommen nur Millimeter bei der Ordinatenabsteckung in Betracht und werden für die Praxis durchaus keine grösseren Vorteile erreicht. Der Vorteil, den hier die Kegelschnitte bieten, liegt vor allem in dem Umstand, dass der Übergang vom Anschlussradius bis zum Minimalradius auf eine bedeutend grössere Länge verteilt wird, als dies bei der Kombination einer kubischen Parabel mit einem Kreis der Fall ist. In allen Fällen handelt es sich zu Anfang der Kurve, um den Ausdruck wieder zu gebrauchen, um Millim. bei der Absteckung der Ordinaten. Diese sorgfältige Absteckung des Ingenieurs macht aber der Oberbauleger mit einem einzigen Seitenstoss zu nichte, und schliesslich resultiert bei Übergängen mit kleinen

Ordinaten wohl eine Übergangskurve zwischen dem eigentlichen Kreisbogen und der Geraden, die aber bei Licht betrachtet, und endgültig nachgemessen, nichts weniger als eine kubische Parabel mehr ist. Nun wollen wir durchaus nicht behaupten, dass dies bei Anwendung der Kegelschnitte anders ist; hier wird aber der Oberbauleger vielmehr gezwungen sein die Richtung zu halten nach der Absteckung, weil der ganze Übergang sich mehr in die Länge zieht, trotzdem der Ausgang bis Bogenende mit  $R = 3000^m$  isoliert betrachtet, ein wohl bemerkenswerter Kreisbogen ist; der Fehler der durch diesen Kreisanschluss entsteht, gegenüber dem kubischen Parabelanschluss, dessen Krümmungsradius  $\infty$ , ist dann kaum fühlbar. Zur Absteckung einer Übergangskurve für kleine Kreisradien muss der Oberbauleger, weil die Ordinaten viel schneller wachsen, die nötigen Anhaltepunkte haben, hier ist auch stets Wahrscheinlichkeit vorhanden, dass der theoretische Übergang eingehalten wird.

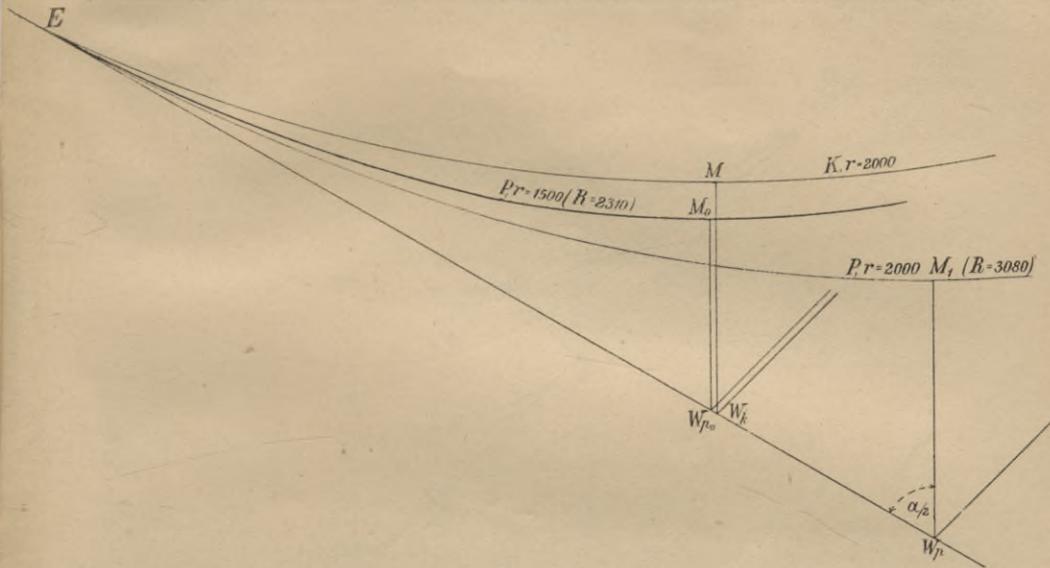
Fig. 32.



Wir haben nun eine ziemlich Anzahl Kegelschnitte mit Hilfe der Tabellen und daneben die Kreiskurve mit Übergang (in grossem Maassstab) aufgetragen, und geben in den Figuren, Fig. 32 etc., einige hervorragende verkleinerte Beispiele. In den Figuren bedeutet H,  $r = 1100$  eine Hyperbel mit dem Minimalradius  $r = 1100^m$ ; P,  $r = 500$ ; E,  $r = 800$ , eine Parabel, Ellipse mit kleinster Krümmung  $r$  und K,  $r = 1100$  ein Kreisbogen mit Übergang u. s. w. Die Länge der Kurven dazu zu schreiben, haben wir unterlassen. Auf den ersten Blick erkennt man, dass die Kegelschnittkurve für denselben Minimalradius, wie der Kreishalbmesser, stets weiter ausgedehnt ist, der Theorie nach auch sein muss. Der Übergang erfolgt allmählicher, günstiger als beim Kreis mit kubischer Parabel, Fig. 32, 33, 35, 37. Die Differenzen des eigentlichen Überganges zwischen Gerade und Kegelschnitt und der kubischen Parabel sind aber für die Praxis so klein, dass von einem fehlerhaften Übergang im praktischen Sinne nicht die Rede sein kann. Um dies deutlich hervorzuheben, haben wir in Fig. 34, 36, 38 eine Reihe von Details hergestellt (der Raum gestattet nicht mehr Kopien vorzulegen), die Ordinaten sind bei diesem den Abscissen gegenüber in verzerrtem Maassstab aufgetragen, so dass in geraden Linien sichtbar, der Lauf der Übergangskurve besser mit dem Kegelschnitt verglichen werden kann. Die Differenzen, welche hier auftreten, sind so gering, dass sie für alle praktischen Zwecke durchaus nicht fühlbar werden. Unsere oben aufgestellte Behauptung in Bezug auf den Anschlussradius  $R = 3000^m$  bestätigt sich nicht allein, sondern bei näherer Ein-

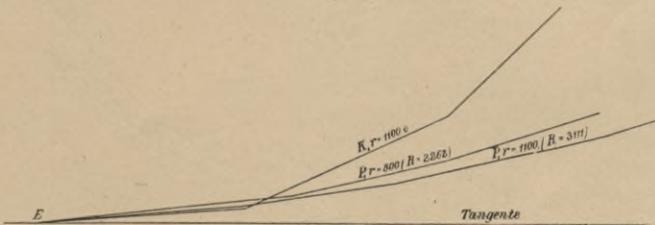
sicht scheint es, als könne man den Anschlusskrümmungskreis noch kleiner nehmen, ein Vorteil, der den Kegelschnitten in so fern zu Gute kommt, als man dadurch deren verhältnismässige grosse Ausdehnung vermindern kann, ohne Nachteile für die Praxis. Versucht man Fig. 32 die Kreiskurve ME nicht durch die Parabel  $M_1E$ , sondern durch die Parabel  $M_0E$  zu ersetzen,

Fig. 33.



welche einen kleineren Minimalradius hat, nämlich  $r = 800$ , statt  $r = 1100$  m, wie der Kreis, so wird hier der Anschlussradius nicht  $3000$  m, sondern  $2622$  m, die Parabel fällt aber noch immer zwischen Kreis und Tangente. Die Anfangsordinaten sind (Fig. 34) allerdings um Centim. grösser als die der Übergangskurve, aber selbst hier ist die Differenz für die Praxis nicht so fühlbar,

Fig. 34.



weil sie sich durch den günstigeren Fortlauf der Kurve wieder ausgleicht (bis  $20$  m Abscisse ist die Parabelordinate um  $21$  mm grösser als die der Übergangskurve, während für  $R = 3111$ ,  $r = 1100$  Parabelbogen, die Differenz  $4$  mm beträgt). Das Radiusverhältnis  $\frac{2262}{800}$  ergibt sich aus Tabelle P I, Ruprik  $T/r$ , indem man für denselben Winkel  $\frac{\alpha}{2}$  die gleiche Kreistangente zu erreichen sucht.

In demselben Sinne lässt sich Fig. 33 für  $\alpha/2 = 60^\circ$  der Kreisradius  $r = 2000$  m durch den Parabelbogen  $r = 1500$  bei  $R = 2310$  ersetzen, um

eine kürzere Tangente zu erlangen. Die Berechnung der Ordinaten liefert hier bei 20<sup>m</sup> Abscisse für P,  $r = 2000$ , 20 mm Differenz, bei P,  $r = 1500$ , 45 mm Differenz, um welche die Planparabelordinaten grösser als die Übergangskurvenordinaten sind (Tabelle P I und IV). In den Figuren 32, 33, 34, 35 sind die Differenzen bei Bogenende auffallender markiert, da bei diesem kleinen Maassstab keine Genauigkeit eingehalten werden kann. Die Vergleichung der Hyperbel mit kubischer Parabel führt zu ähnlichen Resultaten.

Fig. 35.

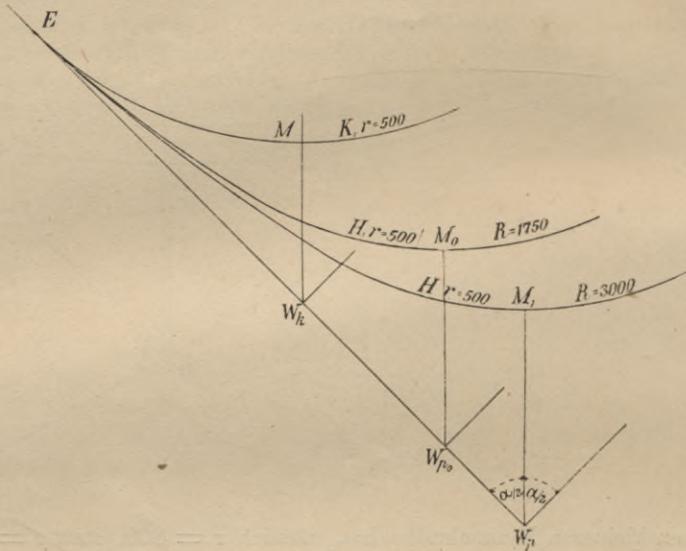
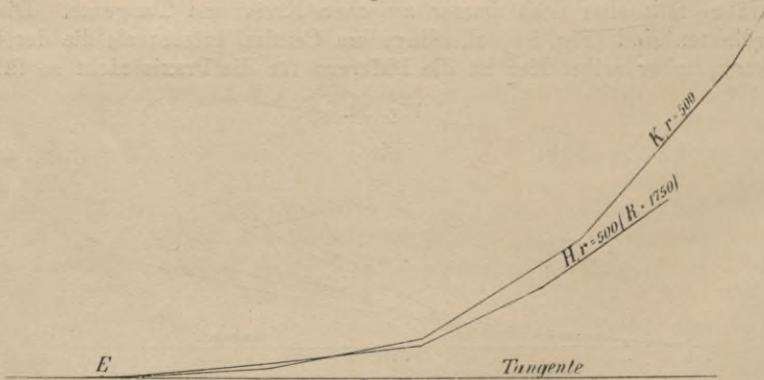


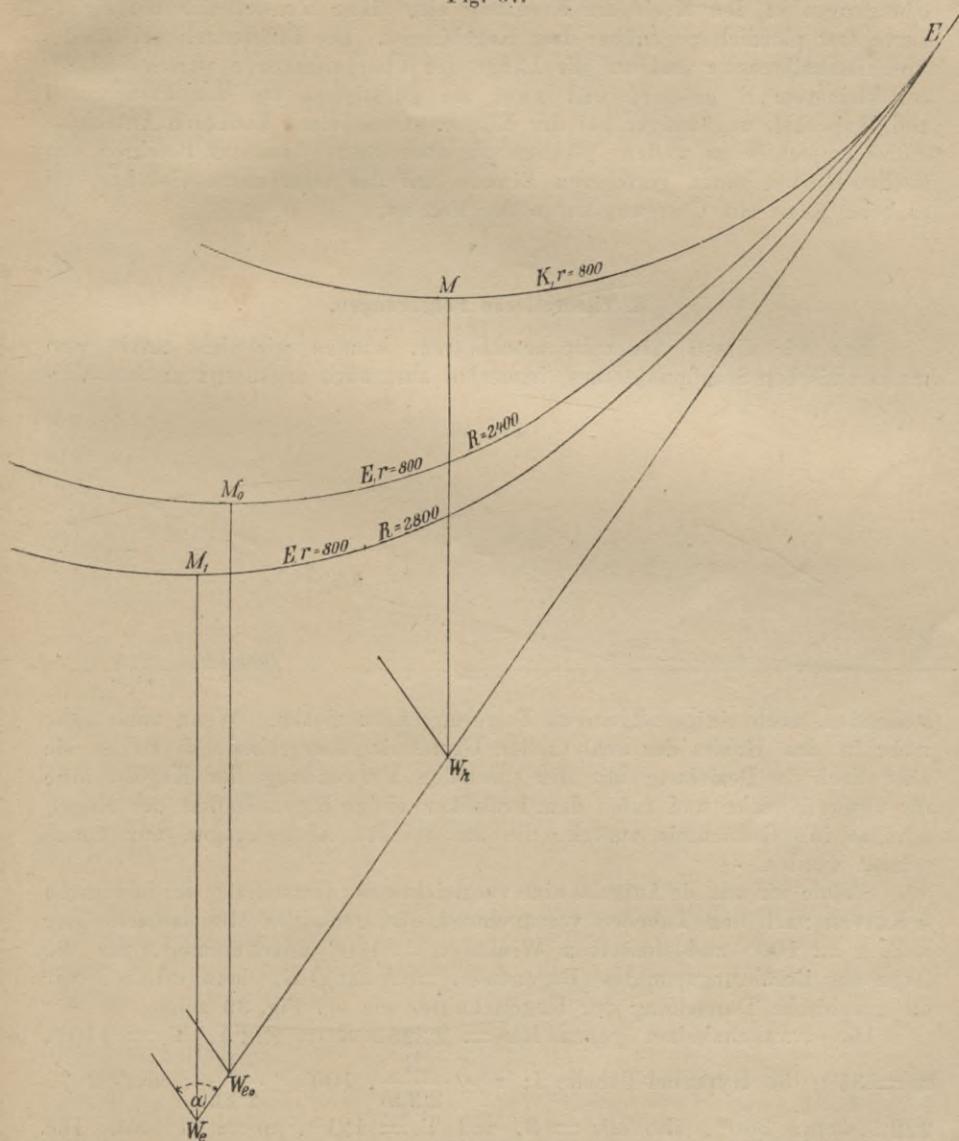
Fig. 36.



Bei der Hyperbel in Fig. 35 nahmen wir  $r = 500^m$  an bei  $R = 3000^m$  Anschluss, somit  $R/r = 6$ ,  $\alpha/2 = 45^\circ$ . Für  $\alpha/2 = 45^\circ$  lässt sich als kleinstes Verhältnis noch  $R/r = 3,5$  in Anwendung bringen, dieses ergibt bei  $r = 500^m$ ,  $R = 1750^m$  Anschlusshalbmesser. Die letztere Kurve liegt auch zwischen Kreis EM und Hyperbel  $EM_1$ ; während die Ordinaten der ersteren  $EM_1$  um Millim. von der kubischen Parabel (in Fig. 36 nicht mit eingetragen) abweichen, kreuzen sich die Kurven K,  $r = 500$  und H,  $r = 500$  ungefähr bis 20<sup>m</sup> Abscisse, die Hyperbelordinaten werden circa um 30 mm grösser an dieser Stelle.

Der geringe Umfang der Ellipse lässt wie aus Fig. 37 und aus den Tabellen ersichtlich, keine grössere Annäherung der Winkelpunkte  $W_k$  und  $W_{e_0}$  zu. Hier ist übrigens die Übergangsdifferenz grösser bei Annahme von  $R \angle 3000$ , sie beträgt bei 20<sup>m</sup> Abscisse 16 mm, Fig. 38. Wir legten hier

Fig. 37.



$\frac{\alpha}{2} = 35^\circ$ ,  $R_1 r = \frac{2800}{800} = 3,5$  zu Grunde und reduzierten bis auf  $R/r = 3$  ( $\alpha/2 = 35^\circ$ ), weil für  $\alpha/2 = 35^\circ$  und  $R/r \angle 3$  die Tabellen keine Ellipse mehr zulassen.

Dieses Reduktionsverfahren, der den Kreis ersetzenden Kegelschnitte, in

Bezug auf die Minimaltangentialängen, bietet mit den Kegelschnitttabellen keine Schwierigkeiten. Viel eher zu diskutieren wäre die Frage, ob überhaupt in der Praxis ein kleinerer Übergangsradius als 3000<sup>m</sup> bei Kegelschnitten zulässig ist? Bei allen den vorgeführten Beispielen und noch bei vielen anderen in grossem Maassstab aufgetragenen, tritt stets am Ende des Überganges in den Kreis die Kreuzung ein. Hier wendet sich die Kreis-kurve fast plötzlich gegenüber dem Kegelschnitt. Die Differenzen bei 3000<sup>m</sup> Anschlusshalbmesser sind auf die Länge der Übergangskurve verschwindend, bei kleinerem R grösser, und zwar am günstigsten bei der Planparabel und Hyperbel, ungünstiger bei der Ellipse. Ohne einen kleineren Anschlussradius empfehlen zu wollen, glauben wir aber doch, dass das Befahren von solchen Kurven einen geringeren Einfluss auf das Oberbaumaterial hat, als es beim Kreis mit Übergangskurve der Fall ist.

### 3. Theoretische Folgerungen.

Ehe wir diesen Abschnitt beschliessen, können wir nicht umhin vom mathematischen Standpunkte aus, immerhin aber auch ergänzend zu dem Vor-

Fig. 38.



stehenden, noch einige allgemeine Folgerungen zu ziehen. Wenn auch diese mehr in das Gebiet der analytischen Geometrie übergreifen, so stehen sie aber doch in Beziehung mit der speciellen Verwendung der Kegelschnitte für unsere Zwecke und rufen dem Praktiker einige Eigenschaften der Kegelschnitte in's Gedächtnis zurück, die ihn bei den Absteckungen nur unterstützen werden. —

Stellen wir uns die Aufgabe eine vergleichsweise Darstellung der bewussten 4 Kurven nach den Tabellen vorzunehmen, für denselben Minimalhalbmesser z. B.  $r = 100^m$  und denselben Winkel  $\alpha = 100^\circ$  unbekümmert, um die Lage des Berührungspunktes (Bogenende, = Anfang) E, dann erhalten wir die graphische Darstellung der Kegelschnitte, wie sie Fig. 39 zeigt.

Die Parabeltabellen geben  $R/r = 2.225$ ,  $R = 222.5$ ,  $T = 110^m$ ,  $m = 35^m$ ; die Hyperbel-Tabelle I:  $r < \frac{R}{2.225}$ ,  $100 < \frac{R}{2.225}$ , also  $R > 222.5$ , etwa  $300^m$ , also  $R/r = 3$ , und  $T = 121^m$ ,  $m = 37^m$  rot. Die Tabelle I der Ellipse giebt für  $R/r = 2$ ,  $R = 200$ ,  $T = 106^m$ ,  $m = 34^m$  und der Kreis liefert  $r = R = 100$ ,  $T = 84$ ,  $m = 31^m$  rot.

Die ausgleichende Parabel hat in Bezug auf m die Mittellage, die Hyperbel die ungünstigste, der Kreis die günstigste Lage.

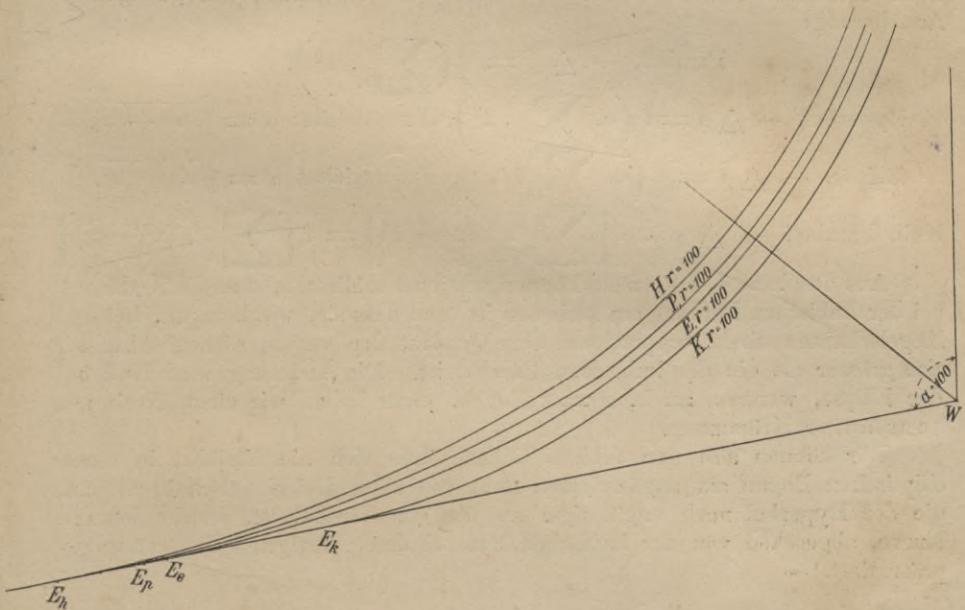
Geht man von einem gleich grossen Anschlussradius R aus, beispielsweise  $R = 100$ , dann erhält man, wenn  $\alpha/2 = 45^\circ$ :

- Für die Parabel  $R/r = 2.828$ ,  $r = 35.4$ ,  $T = 50$ ,  $m = 18$ ,  
 „ „ Hyperbel  $r < \frac{100}{2.828}$ ,  $r = 25$ ,  $T = 40$ ,  $m = 13$ ,  
 „ „ Ellipse  $r > \frac{100}{2.828}$ ,  $r = 50$ ,  $T = 63$ ,  $m = 24$ ,  
 „ den Kreis  $r = R = 100$ ,  $T = 100$ ,  $m = 41$ .

Hier tritt, Fig. 40, das umgekehrte Verhältnis ein, die Hyperbel hat die kleinste Ausdehnung für die Praxis, der Kreis die grösste.

Untersuchen wir für diesen Fall, wenn  $R$  für alle 4 Kurven gleich gross, die Ordinatenänderung bei gleichen Abscissen, also die Einfahrt in die Kurve, den Übergang von der Geraden zur Kurve. Die kubische Parabel hat an dieser Stelle  $R = \infty$ .

Fig. 39.



Für eine beliebig grosse Abscisse  $x$  sind die Krümmungsverhältnisse nach den früheren Abschnitten

$$\text{Parabel, — } \varrho = \frac{1}{2p} \sqrt{(p^2 + 4x^2)^3},$$

$$\text{Hyperbel, — } \varrho = \frac{\sqrt{[x^2(a^2 + b^2) + b^4]^3}}{ab^4} = \frac{\sqrt{[x^2 e^2 + b^2]^3}}{ab^4},$$

$$\text{Ellipse, — } \varrho = \frac{\sqrt{[x^2(a^2 - b^2) + b^4]^3}}{ab^4} = \frac{\sqrt{[x^2(e^2 + b^4)]^3}}{ab^4},$$

$$\text{Kub. Parabel, — } \varrho = \frac{\sqrt{(1 + 9a^2 x^2)^3}}{6xa}$$

Lassen wir in diesen 4 Formeln sich  $x$  um  $\Delta x$  ändern, dann giebt uns die Maclaurin-Taylor'sche Reihe die Ordinatenänderung durch die bekannte Formel

$$\Delta y = \frac{d y}{d x} \Delta x + \frac{d^2 y}{d x^2} \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \dots, \text{ n\u00e4mlich}$$

$$\text{Parabel, } - \Delta \varrho = \frac{p^2 + 4 x^2}{2 p^2} \Delta x + \dots$$

$$\text{Hyperbel, } - \Delta \varrho = \frac{3 x e^2 \sqrt{x^2 e^2 + b^2}}{a b^4} \Delta x + \dots$$

$$\text{Ellipse, } - \Delta \varrho = \frac{3 x e^2 \sqrt{x^2 e^2 + b^2}}{a b^4} \Delta x + \dots$$

$$\text{Kub. Parabel, } - \Delta \varrho = \frac{27 a^2 x^3 \sqrt{1 + 9 a^2 x^2} - \sqrt{(1 + 9 a^2 x^2)^3}}{6 a x^2} \Delta x + \dots$$

Fassen wir jetzt nun die Homogenit\u00e4t ins Auge, so folgt, wenn  $\sum_m$  einen Ausdruck f\u00fcr die Differentiationskonstante bezeichnet, mit gen\u00fcgender Ann\u00e4herung:

$$\text{Parabel, } - \Delta \varrho = f \left( \sum_m, x^2 \right).$$

$$\text{Hyperbel, } - \Delta \varrho = f \left( e \cdot \sum_m, x^2 \right), \text{ Excentricit\u00e4t } e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Ellipse, } - \Delta \varrho = f \left( e \cdot \sum_m, x^2 \right), \text{ Excentricit\u00e4t } e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

$$\text{Kub. Parabel, } - \Delta \varrho = f \left[ \sum_m, x(x-1) \right] = f \left[ \sum_m, (x^2 - x) \right]$$

Aus den letzten 4 Formeln k\u00f6nnen wir jetzt schliessen, dass die \u00c4nderung bei der kubischen Parabel am kleinsten ist, und dass sie, wie bekannt, bei den Kegelschnitten direkt proportional dem Quadrat der ver\u00e4nderlichen Abscisse, also gr\u00f6sser als die der kubischen Parabel ist. Die \u00c4nderung wird Null bei der Ellipse, wenn  $a = b$ ,  $e = 0$ , d. h. dann haben wir einen Kreis mit konstanter Kr\u00fcmung.

Wir k\u00f6nnen also den Schluss ziehen, dass sich die Einfahrt in einen elliptischen Bogen am ung\u00fcnstigsten stellt von allen drei Kegelschnitten, dass die der Hyperbel noch ung\u00fcnstiger als die der Parabel ist, welche letztere Kurve, abgesehen von der kubischen Parabel den g\u00fcnstigsten Uebergang repr\u00e4sentiert. —

.....

Wendet man obige Substitutionen zur Vereinfachung der Gleichungen der Ellipse und Hyperbel S. 64 Gl. 71 und 72

$$A = \cos \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}}, \quad B = \sin \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}}, \quad C = \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{R}{r}\right)^2} - 1}$$

auch auf die Parabel an, dann muss man setzen

$$B = 1, \quad A = C = \cos \alpha/2 \sqrt[3]{R/r}; \text{ denn es folgt aus}$$

$$R/r = \frac{1}{\sin^3 \alpha/2} \text{ unmittelbar } \sin \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}} = 1 \text{ und aus}$$

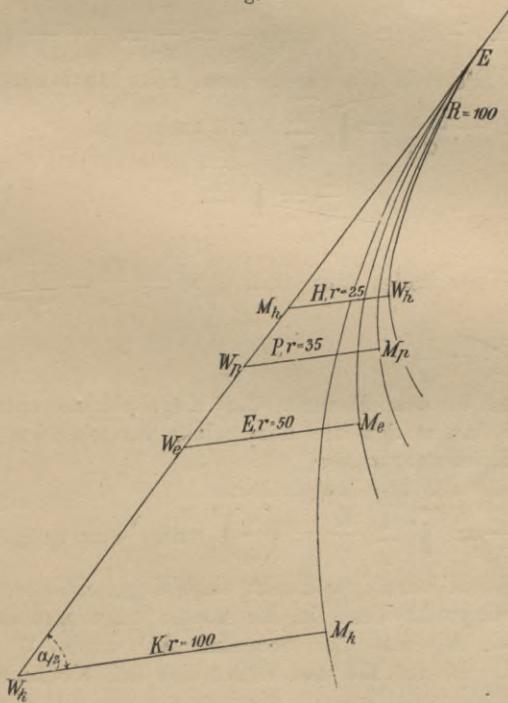
$$\sin^2 \alpha/2 \sqrt[3]{\left(\frac{R}{r}\right)^2} + \cos^2 \alpha/2 \sqrt[3]{\left(\frac{R}{r}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{R}{r}\right)^2};$$

$$\cos \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}} = \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{R}{r}\right)^2} - 1} = C = A.$$

Die Konstante C steht mit der Parabel in keiner Beziehung. Für Ellipse und Hyperbel fanden wir, Gl. 58 S. 51 und Gl. 77 S. 77  $\frac{m}{r} = \frac{T}{r} \cos \alpha/2$   
 $-\frac{y_0}{r}; \frac{y_0}{r} = \frac{A^2}{B+1}$  aus den Gl. 72 u. 90 eingesetzt, findet man  $\frac{m}{r} = \frac{T \cos \alpha/2}{r(1+B)}$ .

Diesen Wert in die Formel  $\frac{x_1}{r} = \frac{m}{r} \operatorname{tg} \alpha/2$ , Gl. 60 S. 51 und 78 S. 77 übertragen, findet man, weil auch  $\frac{T}{r} = \operatorname{cotg} \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}}$ , (S. 77.)

Fig. 40.



$$\frac{x_1}{r} = \frac{A}{1+B} = \frac{\cos \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}}}{1 + \sin \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}}}$$

Die für die Hyperbel und Ellipse gleichen Formeln für den Tangentenabschnitt t, S. 89 Gl. (p) lauten durch r dividiert,  $\frac{t}{r} = \frac{y_0}{r \cos \alpha/2}$ , in diese auch

$$\frac{y_0}{r} \text{ eingesetzt, folgt, wie leicht zu übersehen, } \frac{t}{r} = \frac{A^2}{1+B} \frac{1}{\cos \alpha/2}$$

$$= \frac{A}{1+B} \frac{A}{\cos \alpha/2} = \frac{x_1}{r} \sqrt[3]{R/r}, \text{ woraus } \frac{t}{x_1} = \sqrt[3]{\frac{R}{r}}.$$

Endlich ist Fig. 24, Fig. 30

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\frac{y_0}{r}}{\frac{x_0}{r}} = \frac{\frac{A^2}{1+B}}{A} = \frac{A}{1+B} = \frac{x_1}{r}.$$

In Bezug auf die Parabel gelten die gleichen Formeln.

Aus  $\frac{m}{r} = \frac{T \cos \alpha/2}{r(1+B)}$  findet man für  $B = 1$ ,  $\frac{m}{r} = \frac{T}{r} \frac{1}{2} \cos \alpha/2$ , demnach ganz richtig  $\frac{2m}{T} = \cos \alpha/2$ , weil  $y_0 = m$ .

Ferner ist  $t = \frac{T}{2}$ ,  $x_1 = \frac{x_0}{2}$ , somit  $\frac{t}{x_1} = \frac{T}{x_0} = \frac{1}{\sin \alpha/2}$  wenn man für  $T$ ,  $x_1$ ,  $x_0$  u. s. w. die Formeln (f), (h) u. s. w. Seite 33 berücksichtigt.

Nun ist aber  $\frac{1}{\sin \alpha/2} = \sqrt[3]{\frac{R}{r}}$ , somit auch

$$\frac{t}{x_1} = \sqrt[3]{\frac{R}{r}}.$$

In gleicher Weise findet man auch  $\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\frac{r}{2} \cotg^2 \alpha/2}{r \cotg \alpha/2} =$

$$\frac{1}{2} \cotg \alpha/2 = \frac{1}{2} \frac{x_0}{r} = \frac{x_1}{r}.$$

Unter anderen in den Formeln der Kegelschnitte enthaltenen Eigenschaften derselben, lassen sich die unmittelbar vorstehenden verwenden zur Bestimmung der Krümmungsradien.

Wir fanden für alle drei Kegelschnitte

$$\frac{t}{x_1} = \sqrt[3]{\frac{R}{r}}, \frac{R}{r} = \left(\frac{t}{x_1}\right)^3 \text{ und } \frac{x_1}{r} = \operatorname{tg} \beta_0.$$

Ist E Fig. 41 ein beliebiger Punkt eines Kegelschnittes, EW eine Tangente, V der Schnittpunkt dieser in der Achse; trägt man sich den Winkel  $\angle EMV = \beta_0$  so nach A, dass der Schenkel AV durch V geht, dann ist  $AM = r$ , AV senkrecht auf ME und findet sich der Krümmungshalbmesser

in E, wenn man  $t = VE$  und  $x_1 = MV$  misst, aus  $R = r \left(\frac{t}{x_1}\right)^3$ .

Ist umgekehrt  $r$  bekannt, so lässt sich in jedem Punkt durch Übertragung des Winkels  $\beta_0$ , von M nach A eine Tangente konstruieren an den angenommenen Bogenpunkt E, indem man schliesslich E mit V verbindet und bis W verlängert.

Für die Parabel ist  $r = \frac{p}{2}$ , für Ellipse und Hyperbel  $r = \frac{b^2}{a}$ , also  $b$  die mittlere geometrische Proportionale aus  $r$  und  $a$ .

Mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken kann man nach den Grundsätzen der graphischen Arithmetik\*) am besten für  $r = 1$  obige Division  $\frac{t}{x_1}$  und  $\left(\frac{t}{x_1}\right)^3$  auch ohne Rechnung finden.

\*) S. Hecht, reine und angew. Mechanik II. Band. Kühtmann, Dresden.

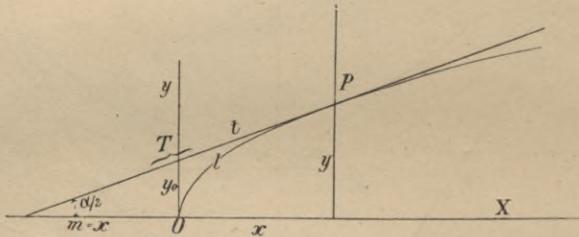


$l = 1 + \frac{mr}{2} \left(1 + \frac{m^2}{3}\right)$ , und weil  $r = \frac{p}{2}$ ,  $l = 1 + \frac{mp}{4} \left(1 + \frac{m^2}{3}\right)$ ; da ferner  $p = \frac{4y_1^2}{m}$ , so kann man auch setzen  $l = 1 + y_1^2 \left(1 + \frac{m^2}{3}\right)$ . In diesen Näherungsformeln müssen  $x$ ,  $m$ ,  $l$ ,  $y_1$  und  $r$  in ihren absoluten Längen auf  $t = 1$  bezogen werden. (In der Fig. ist statt  $y_0$   $y_1$  zu setzen.)

Z. B. 1) Es sei  $m = x = 4$ ,  $p = 4$ ; dann wird  $y = \sqrt{px} = \sqrt{16} = 4$ . und  $T = \sqrt{(2x)^2 + y^2} = \sqrt{64 + 16} = 8,944$ ,  $t = \frac{1}{2} T = 4,472$  und  $r = \frac{1}{2} p = 2$ . Die Bogenlänge der Parabel bis zur Abscisse  $x = 4$  ist dann  $l = t + \frac{r}{4} \operatorname{lgnat} \left(\frac{t+m}{t-m}\right) = 4,472 + \frac{1}{2} \operatorname{lgnat} \frac{8,472}{0,472} = 5,917$ .

2) Die Bogenlänge vom Scheitel bis zur Brennpunktabszisse, für welche  $m = \frac{1}{4} p$ ,  $t = \frac{1}{2} T$ ,  $r = \frac{1}{2} p$ ,  $T = \sqrt{(\frac{1}{2} p)^2 + (\frac{1}{2} p)^2} = p \sqrt{\frac{1}{2}}$  und  $\alpha = 90^\circ$ , ist  $l = \frac{T}{2} + \frac{r}{4} \operatorname{lgnat} (\cotg^2 \alpha / 4) = p \sqrt{\frac{1}{2}} + p/8 = 1,75 =$

Fig. 42.



0,58 p. Nach der Näherungsformel  $l = 1 + \frac{1}{2} mr \left(1 + \frac{1}{3} m^2\right)$  wird,  $m$  und  $r$  eingesetzt,  $l = 1 + \frac{1}{16} p^2 \left(1 + \frac{1}{48} p^2\right)$ . Nun ist aber  $t = \frac{1}{2} T = 0,355 p = 1$ , also ist für  $p = \frac{1}{0,355} = 2,82$  einzuführen, und man erhält zunächst auf  $t = 1$  reduziert die Bogenlänge  $1 + \frac{1}{16} (2,82)^2 \left(1 + \frac{1}{48} [2,82]^2\right) = 1 + 0,579 = 1,579$ . Die Bogenlänge auf  $p$  bezogen steht nun in demselben Verhältnis zu  $p$ , wie  $t$  zu  $p$ ; sie ist demnach  $l = 0,355 \cdot 1,579 p$  oder  $l = 0,355 p + 0,355 p \cdot 0,579 = 0,56 p$ . Im Vergleich zu obiger Lösung ist sie 20 % zu klein.

Bogenlänge der Hyperbel. Die Rektifikationsformel S. 66 Gl. 72 No. 16 auf Fig. 43 übertragen, liefert

$$l = \frac{CA}{B^2 - 1} \left[ \sqrt{B^2 - 1} - \left(\frac{A}{C}\right)^2 \lambda \right].$$

$$A = \cos \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}}; B = \sin \alpha/2 \sqrt[3]{\frac{R}{r}}; C = \sqrt[3]{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1}.$$

$R$  Krümmungshalbmesser bei  $E$ ,  $r$  Krümmungsradius bei  $M$  am Scheitel,

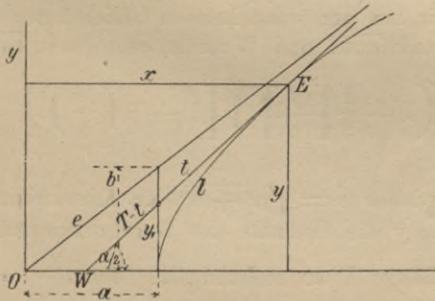
$$r = \frac{b^2}{a}, \text{ oder auch } \sqrt[3]{\frac{R}{r}} = \frac{t}{y_1}, \text{ und } \sin \alpha/2 = \frac{y}{T}.$$

Der Coefficient  $\lambda$  ist aus folgender kleinen Tabelle zu entnehmen, aus welcher die fehlenden Werte durch Interpolation bestimmt werden können.

**Coefficient  $\lambda$  zur Berechnung der Bogenlänge der Hyperbel.**

$\alpha/2$	Werte von R/r												
	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4	5	6	7	8	9	10	12
30°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,208071	0,277014	0,352913
35	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
40	—	—	—	—	—	—	0,291938	0,361385	403966	432032	454463	473050	501849
45	—	—	—	—	0,259334	0,314271	379222	419284	447891	470198	488083	502923	526629
50	—	—	0,197631	0,290617	338444	371739	417831	449384	473408	491857	506832	519956	540924
55	—	0,176986	286333	339066	374494	400634	439468	466826	487715	504451	518285	530004	548960
60	—	256178	323471	364957	394941	418154	452591	477618	496758	512252	525117	536045	553774
65	0,176173	288589	343534	380249	407457	429020	460871	484271	502430	517082	529283	539658	556555
70	218382	306152	355708	389827	415423	435660	466156	488564	505971	520061	531799	541741	558051
75	237374	316469	363303	395870	420514	440034	469556	491262	508167	521872	533277	542996	558833
80	247400	322634	367934	399550	423653	442725	471620	492888	509463	522880	534107	543653	559199
85	252573	325930	370437	401682	425358	444184	472730	493754	510146	523441	534519	543962	559341
90	254081	326925	371201	402303	425877	444632	473099	494011	510349	523593	534639	544053	559381

Fig. 43.



Die Gleichung (s<sub>3</sub>) S. 55 liefert allgemeiner (Fig. 43)

$$1 = \frac{a}{c} \left[ \frac{y}{b} c^2 - \lambda \right] = \frac{y}{b} e - \frac{a^2}{e} \lambda$$

In dieser Formel ist  $c = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \frac{e}{a}$  die sogenannte numerische Excentricität, ferner ist

$$\lambda = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{b} + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\alpha}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\beta}{c^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{\gamma}{c^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \frac{\delta}{c^6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \frac{\varepsilon}{c^8} + \dots \right]$$

setzt man  $\sqrt{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} = d$ , dann findet man  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$  aus

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{y}{b} + \operatorname{arctg} \frac{y}{b},$$

$$\beta = \frac{1}{4} \frac{y}{b} \left( \frac{1}{d^2} + \frac{3}{2} \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{b},$$

$$\gamma = \frac{1}{6} \frac{y}{b} \left( \frac{1}{d^4} + \frac{5}{4} \frac{1}{d^2} + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{b},$$

$$\delta = \frac{1}{8} \frac{y}{b} \left( \frac{1}{d^6} + \frac{7}{4} \frac{1}{d^4} + \frac{7 \cdot 5}{6 \cdot 4} \frac{1}{d^2} + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} \right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{b},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{10} \frac{y}{b} \left( \frac{1}{d^8} + \frac{9}{8} \frac{1}{d^6} + \frac{9 \cdot 7}{8 \cdot 6} \frac{1}{d^4} + \frac{9 \cdot 7 \cdot 5}{8 \cdot 6 \cdot 4} \frac{1}{d^2} + \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{b}.$$

Will man sich mit einer Annäherung von circa 2 bis 4% begnügen, dann kann man zur Berechnung des Hyperbelbogens die folgende Näherungsformel benutzen, welche wir aus den vorstehenden Gleichungen durch Auflösung der trigonometrischen Funktionen und Wurzeln entwickelt haben:

$$l = \frac{y}{b} \left\{ e - \frac{a^4}{16 e^3} \left[ \left( 1 - \frac{1}{3} \left[ \frac{y}{b} \right]^2 \right) \left[ 1 + 8 \left( \frac{e}{a} \right)^2 \right] + \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{y}{b} \right)^2}} \right] \right\},$$

es bedeuten hierin wieder  $e = \sqrt{a^2 + b^2}$  die Excentricität,  $a$  und  $b$  die beiden Hyperbelachsen,  $y$  die Ordinate des Berührungspunktes, bis zu welchem vom Scheitel die Länge  $l$  zu rechnen ist. Für  $\frac{y}{b} = \sqrt{3} = 1,732$  wird

$$1 - \frac{1}{3} \left( \frac{y}{b} \right)^2 = 0 \text{ und } l = \sqrt{3} \left[ e - \frac{a^4}{32 e^3} \right].$$

Bogenlänge der Ellipse. Wir fanden Seite 81 und 82 die Länge der Viertellellipse

$$l_1 = \frac{\pi}{2} b \left[ 1 + \frac{1}{4} c^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 c^4 + \frac{1}{5} \left( \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 c^6 - \frac{1}{7} \left( \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \right)^2 c^8 + \frac{1}{9} \left( \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \right)^2 c^{10} - + \dots \right],$$

worin  $c = \frac{1}{b} \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{e}{b}$ ,  $e$  die Excentricität, die Ellipse,  $a$  und  $b$  die uns bekannten Achsen sind.

Abhängig von der grossen Achse, ist die Viertellellipse

$$l_2 = \frac{\pi}{2} a \left[ 1 + \frac{1}{4} c_1^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 c_1^4 + \frac{1}{5} \left( \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 c_1^6 - + \dots \right],$$

wenn  $c_1^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$  oder  $c_1 = \frac{e}{a}$  die numerische Excentricität.

Geht man von der Scheitelgleichung aus (s. oben) dann hat ein ellip-

tischer Bogen vom Scheitel bis zum Bogenpunkt P, dessen Ordinate y, Fig. 44 die Länge

$$l = b \left\{ \psi + \alpha \frac{1}{2} c^2 - \beta \frac{1}{2 \cdot 4} c^4 + \gamma \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^6 - \delta \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^8 + \varepsilon \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} c^{10} - + \dots \right\},$$

worin  $\psi = \arcsin \frac{y}{b}$  und ferner

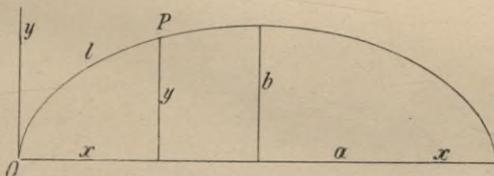
$$\alpha = -\frac{1}{4} \sin 2\psi + \frac{\psi}{2},$$

$$\beta = \frac{1}{32} \sin 4\psi - \frac{1}{4} \sin 2\psi - \frac{3}{8} \psi,$$

$$\gamma = -\frac{1}{192} \sin 6\psi + \frac{3}{64} \sin 4\psi - \frac{15}{64} \sin 2\psi + \frac{5}{16} \psi,$$

$$\delta = \frac{1}{1028} \sin 8\psi - \frac{1}{96} \sin 6\psi + \frac{7}{128} \sin 4\psi - \frac{7}{32} \sin 2\psi + \frac{35}{128} \psi,$$

Fig. 44.



$$\varepsilon = -\frac{1}{5120} \sin 10\psi + \frac{5}{2048} \sin 8\psi - \frac{15}{1024} \sin 6\psi + \frac{15}{256} \sin 4\psi - \frac{105}{512} \sin 2\psi + \frac{63}{256} \psi, \text{ und}$$

⋮  
⋮  
⋮

$$c = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - 1}, \quad \sin \psi = \frac{y}{b}, \quad \psi = \arcsin \frac{y}{b} \text{ ist.}$$

Löst man auch hier die trigonometrischen Funktionen in Reihen auf, verwendet nur die ersten Glieder, dann findet man folgenden Näherungsausdruck für die Bogenlänge eines elliptischen Bogens, welcher kleiner als die Viertelellipse ist und am Ende (oder Anfang) der grossen Achse beginnt.

$$l = y \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right] \left[ 1 + \frac{1}{4} c^2 \left(1 - \frac{3}{16} c^2\right) \right] - \frac{c^2}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \left(1 - \frac{3}{16} c^2 - \frac{c^2}{8} \left(\frac{y}{b}\right)^2\right) \right\};$$

$$c = \frac{e}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}; \quad y \text{ die Ordinate des betreffenden Bogenpunktes.}$$

Diese Formel liefert zu kleine Resultate je mehr sich der Bogen einer Viertelellipse nähert, zu grosse Resultate für das Scheitelbogenstück, für das Mittelbogenstück ist die Genauigkeit ca. 4<sup>0</sup>/<sub>10</sub>.

VII.

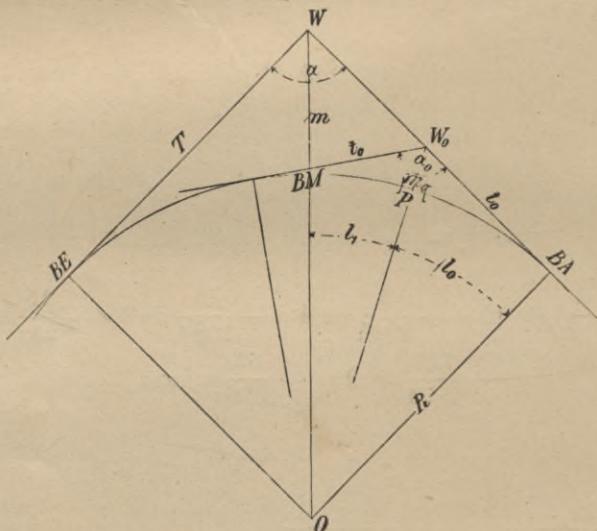
Die Absteckung der Objekte in Kurven.

Damit die Objekte — Brücken, Wächterhäuser, Durchlässe, Übergänge — in Eisenbahn- und Strassenkurven eine richtige Lage erhalten, d. h. die Längsachsen derselben mit der Normalen des betreffenden Bogenpunktes zusammenfallen, ist es erforderlich, die Absteckung von der Tangente aus einzuleiten. Es genügt das Verfahren von der Haupttangente aus kennen zu lernen, da es sich für jede Hilfstangente wiederholt.

1. Objekte in Kreisbögen.

Im Bogenpunkt P (Fig. 45), welcher um die Bogenlänge  $l_1$  von Bogenmitte, um  $l_0$  von Bogenanfang AB (Berührungspunkt) entfernt ist, soll ein

Fig. 45.



Object dessen Achse senkrecht auf einer Tangente in P steht, abgesteckt werden.

Der Winkel  $\alpha_0$  in  $W_0$  ist nach bekannten planimetrischen Sätzen

$$91) \dots \alpha_0 = 180 - \frac{360}{\pi} \frac{l_0}{R} = \alpha + \frac{360}{\pi} \frac{l_1}{R},$$

Der Bogenmittenabstand  $W_0 P = m_0$  und die Tangenteillänge in der Haupttangente von  $\overline{BA}$  an gemessen  $W_0 \overline{BA} = t_0$  (Gl. 1, 2 S. 6) sind

$$92) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{m_0}{R} = \frac{1}{\sin \frac{\alpha_0}{2}} - 1 \\ \frac{t_0}{R} = \cotg \frac{\alpha_0}{2} \end{array} \right.$$

Man berechnet sich nach (91) den Winkel  $\alpha_0$  und benutzt zur Bestimmung der relativen Längen in Gl. 92 die Tabelle K I.

Soll in Folge von Terrainverhältnissen die Absteckung von einer der Hülftangenten (Fig. 4) abgeleitet werden, dann substituiert man für  $\alpha_0$  einen der bezüglichen Winkel, welcher sich auf die Haupttangente bezieht nach Gl. 15 und 16 S. 15. Die Berechnung der anderen Elemente erfolgt dann wieder im Sinne der Gl. 92.

Z. B. Es seien  $\alpha = 161^\circ 26'$  und  $R = 275^m$  Kreisradius gegeben und habe Bogenanfang die Profillage (Stationslage), — ein Profil (Station) zu  $100^m$  gerechnet, —  $26^{+34.78}$ , Bogenmitte liege im Prof.  $26^{+74.54}$ , und das Object soll nach  $26^{+80.5}$  zu liegen kommen, dann fällt Bogenende nach  $27^{+14.30}$  (Berechnung nach Tabelle K I).

Es werden dann

$$l_0 = 27,1430 - 26,8050 = 33.80^m,$$

$$l_1 = 80,50 - 74,54 = 5.96^m,$$

$$\alpha_0 = 180 - \frac{360}{\pi} \frac{33.80}{275} = 165^\circ 55' \text{ oder}$$

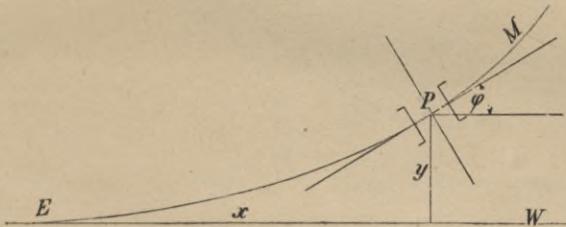
$$\alpha_0 = 163^\circ 26' + \frac{360}{\pi} \frac{5.96}{275} = 163^\circ 26' + 2^\circ 29' = 165^\circ 55'.$$

Nach Tabelle K I wird dann endlich

$$t_0 = 0.123523 \cdot 275 = 33.97^m,$$

$$m_0 = 0.007600 \cdot 275 = 2.09^m.$$

Fig. 46.



### 2. Objekte in der Übergangskurve.

Fällt das Object in die Übergangskurve, dann geht man am Besten Fig. 46 von der Haupttangente EW aus, E Bogenende oder Anfang (des Überganges), die dem betreffenden Objektbogenpunkt P zugehörige Abscisse in der Haupttangente ist der Bogenlänge EP gleich; die Ordinate y ergibt

$$\text{sich aus } y = \frac{x^3}{6P}.$$

Wissenswert ist dann nur noch der Winkel  $\varphi$ , welcher sich durch Differentiation der vorstehenden Gleichung findet, nämlich

$$\text{tg } \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2P} \quad \dots \dots \dots 93)$$

die Konstante P ist auf S. 25 enthalten.

Für die ersten  $10^m$  der Übergangskurve kann man ohne Fehler das Object senkrecht auf die Haupttangente legen.

### 3. Objekte in Kegelschnittkurven.

WE sei hier Fig. 47 wieder die Haupttangente, P derjenige Bogenpunkt, in welchem das Object, mit der Axe in der Normalen  $W_0N$  fundam. entiert werden soll.



Es wird dann\*)

$$\omega = \varphi + \alpha/2 = \text{ang} \left( \text{tang} = \frac{dy}{dx} \right) + \alpha/2 \dots \dots \dots \nu)$$

Man wird hiernach zunächst  $\angle \omega$ , hierauf  $m_0$  und dann  $t_0$  berechnen. Ist man in Folge von Hindernissen genötigt die Absteckung von der Tangente im Hilfsbogenpunkt Q ( $y_1$   $x_1$ ) abhängig zu machen, dann muss der Hilfswinkel dunkt, dessen Winkel wir oben mit  $\alpha_1$  bzw.  $\alpha_{1/2}$  bezeichnet haben, und welcher auch in den Tabellen enthalten ist, zu Grunde gelegt worden. Die Rechnung ist auf diesen (statt auf  $\alpha/2$ ) bezogen, im Allgemeinen dieselbe, nur sind die Reduktionen auf die dann zu benötigenden Elemente umständlicher, und lassen sich wohl am besten und ebenso sicher auf graphischem Wege bestimmen. (In der Fig. ist der Winkel mit  $u$  statt  $\omega$  bezeichnet.)

**A. Absteckung von Objekten in einem Parabelbogen.**

Die Differentiation der Gleichung der Parabel  $y = \frac{x^2}{2r}$  giebt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{r}, \text{ in } (\nu) \text{ eingeführt folgt } \omega = \alpha/2 + \text{ang} \left( \text{tg} = \frac{x}{r} \right) \dots 94)$$

Die Lage des Objektes von Bogenmitte an gerechnet ist auch hier als bekannt vorauszusetzen. Die zugehörige Abscisse  $x$  findet man aus Tabelle P I und II. Man bildet sich dann  $\frac{x}{r}$  und sucht den Winkel (angelus), dessen trig. tang. den Wert  $\frac{x}{r}$  hat, diese zu  $\alpha/2$  addiert, wird  $\angle \omega$  bekannt.

Setzt man den Bogenmittenabstand  $m = \frac{r}{2} \cotg^2 \alpha/2$  (Gl. 36 S. 35) und

$y = \frac{x^2}{2r}$  in obige Formeln ( $u$ ) ein, dann sind auf den Minimalradius  $r$  bezogen, die Längen  $m_0$  und  $t_0$  zu berechnen nach

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_0}{r} &= \frac{\frac{1}{2} \left[ \cotg^2 \frac{\alpha}{2} + \left( \frac{x}{r} \right)^2 \right] \sin \frac{\alpha}{2} - \left( \frac{x}{r} \right) \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \omega} \\ \frac{t_0}{r} &= \frac{\frac{1}{2} \left[ \cotg^2 \frac{\alpha}{2} + \left( \frac{x}{r} \right)^2 \right] - \frac{m_0}{r} \cos \left( \omega - \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \right\} \dots 95)$$

Z. B. In einem Parabelbogen, dessen Minimalradius  $r = 2600^m$ , bei  $\alpha = 144^\circ$  Winkelpunktswinkel soll  $521^m$  von Bogenmitte ein Objekt abgesteckt werden. Nach Tabelle P II wird wenn  $\frac{L}{r} = \frac{521}{5600} = 0.20032$ , die relative Abscisse  $\frac{x}{r} = 0.1$ , welche dem Bogenpunkt entspricht. Der trig. Tangente  $0.1$  entspricht der Winkel  $6^\circ$  rot. Dann liegt die Objektachse von

\*) angelus = Winkel, im Gegensatz zu arcus = Bogen.

der Haupttangente aus in der Richtung des  $\sphericalangle$

$$\omega = \frac{\alpha}{2} + \text{ang tg } \frac{x}{r} = 72^\circ + 6^\circ = 78^\circ.$$

Setzt man die erforderlichen Werte in Gl. 95 ein, dann sind die weiteren Absteckungselemente

$$\frac{m_0}{r} = \frac{\frac{1}{2} \left[ \cotg^2 72 + (0.1)^2 \right] \sin 72 - 0.1 \cdot \cos 72}{\sin 78^\circ} = 0,0246, m_0 = 63,94^m.$$

$$\frac{t_0}{r} = \frac{\frac{1}{2} \left[ \cotg^2 72 + 0.01 \right] - 0,0246 \cdot \cos 6^\circ}{\cos 72^\circ} = 0,10297, t_0 = 267,72^m.$$

### B. Absteckung von Objekten in der hyperbolischen Eisenbahnkurve.

S. 48 Gl. (e) fanden wir  $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{r} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}}$ , demnach wird nach Gl. (u) der vorigen Seite.

$$96) \quad \omega = \frac{\alpha}{2} + \text{ang} \left[ \text{tang} = \frac{b}{r} \frac{\frac{x}{r}}{\sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2}} \right].$$

Die relativen Grössen von  $\frac{m}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}$  entnimmt man aus den Hyperbeltabellen,  $\frac{m}{r}$  aus Tabelle H I,  $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}$  aus Tabelle II und setzt sie in die folgenden Formeln ein, die sich leicht in die Form bringen lassen:

$$97) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{m_0}{r} = \frac{\left(\frac{m}{r} + \frac{y}{r}\right) \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{x}{r} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \omega} \\ \frac{t_0}{r} = \frac{\left(\frac{m}{r} + \frac{y}{r}\right) - \frac{m_0}{r} \cos \left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} \end{array} \right.$$

### C. Absteckung von Objekten in elliptischen Kurven.

Verwendet man wieder den ersten Differentialquotient der Gleichung der Ellipse S. 74 und setzt diesen in die allgemeine Gl. (v), und nimmt dieselben Umwandlungen der Formeln (u) wie oben bei der Hyperbel vor, dann erhält man ebenso

$$98) \quad \omega = \frac{\alpha}{2} + \text{ang} \left[ \text{tg} = \frac{b}{r} \frac{\frac{x}{r}}{\sqrt{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_0}{r} &= \frac{\left(\frac{m}{r} + \frac{y}{r}\right) \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{x}{r} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \omega} \\ \frac{t_0}{r} &= \frac{\left(\frac{m}{r} + \frac{y}{r}\right) - \frac{m_0}{r} \cos \left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \right\} \dots 99)$$

Während bei der Parabel die Tabelle P II dazu dienen kann zu einem Bogenpunkt die entsprechende Abscisse  $x$  bezw.  $\frac{x}{r}$  zu bestimmen, da in dieser Tabelle die relativen Bogenlängen mit enthalten sind, gestatten die Tabellen der anderen Kegelschnitte diese Bequemlichkeit nicht, sondern man muss die dem Bogenpunkt entsprechende Abscisse entweder auf graphischem Wege bestimmen, oder eine entsprechende Zwischenrechnung ausführen. Die Abscissen des Hilfsbogenpunktes  $Q$  (Fig. 29, 30) sind allerdings in der Tabelle enthalten.

Z. B. Man beabsichtigt im Bogenpunkt  $Q$  der Hyperbel Seite 71 Beispiel 3 ein Objekt zu fundieren; es ist die Lage desselben festzustellen. Bekannt sind uns  $r = 500^m$ ,  $\alpha = 84^\circ$ ,  $R/r = 6$ ,  $x_1/r = 0,609410$ ,  $\frac{y_1}{r} = 0,181358$ ,  $b/r = 1,952388$ , letzterer Wert aus Tabelle H I, Gl. 96 liefert den Achsenwinkel  $\omega$  des Objektes

$$\omega = \frac{84}{2} + \text{ang} \left[ \text{tang} = 1,952388 \frac{0,609310}{\sqrt{(0,609410)^2 + (1,952388)^2}} = 42^\circ + \text{ang} (\text{tg} = 0,581740) = 42^\circ + 30^\circ 11' 15'' = 72^\circ 11' 15'' \right]$$

Die Entfernung  $m_0$  von der Haupttangente bis zum Bogenpunkt  $Q$  folgt aus

$$\frac{m_0}{r} = \frac{(0,676817 + 0,181358) \sin 42^\circ - 0,609410 \cos 42^\circ}{\sin 72^\circ 11' 15''} = 0,127462;$$

man findet  $m_0 = 500 \cdot 0,127462 = 63,731^m$ . Die Lage des Scheitels des Winkels  $\omega$ , die Entfernung  $t_0$  in der Haupttangente folgt aus

$$\frac{t_0}{r} = \frac{0,858175 - 0,127462 \cos (72^\circ 11' 15'' - 42^\circ)}{\cos 42^\circ} = 1,006532; \text{ wonach}$$

$$t_0 = 500 \cdot 1,006532 = 503,266^m.$$

Die Entfernung des Punktes  $Q$  im Bogen gemessen von der Bogenmitte, also die Profilage des Objektes im Bogen können wir dadurch finden, dass wir den dem Bogenpunkt  $Q$  zugehörigen Winkelpunktwinkel  $\alpha$ , und nach diesem die Bogenlänge  $L_1$  aus der Tabelle zu bestimmen suchen. Der Winkel  $\varphi$  Fig. 47 ist  $\varphi = \omega - \alpha/2 = 72^\circ 11' 15'' - 42 = 30^\circ 11' 15''$ , der diesem entsprechende Winkelpunktwinkel ist (Fig. 28, 29 etc.)  $1/2 \alpha_1 = 90 - \varphi = 59^\circ 48' 45''$ . Tabelle H I liefert nun die Bogenlänge  $L_1$  für  $R/r = 6$  und zu  $57^\circ 40'$  und  $58^\circ 01'$ ,  $L_1/r = 2,10956$  und  $L_1/r = 2,08642$ . Durch Interpolation oder Auftragen der Kurve findet man die dem Winkel  $57^\circ 48' 45''$  entsprechende relative Bogenlänge  $\frac{L_1}{r} = 2,09944$ , woraus  $L_1 = 500 \cdot 2,09944 = 1049,720^m$ . Der Bogenpunkt  $Q$  liegt hiernach in der Entfernung  $\frac{1}{2} \cdot 1049,720 = 524,86^m$  von Bogenmitte.

## Anhang.

### Hilfsmittel bei Absteckungen und Aufnahmen.

#### I.

##### Die Konstruktion und Anwendung der Rechenschieber.

###### 1. Allgemeines über Rechenschieber.

Als Ersatz einer tabellarischen Übersicht für mathematische Ausdrücke, aber auch, um einfache mathematische Rechnungen vorzunehmen, verwendet man ein, einem Massstab ähnliches Instrument, den Rechenschieber. Derselbe erleichtert die Berechnung eines einfachen oder zusammengesetzten Ausdrucks durch eine graphische Darstellung desselben, und erfüllt seinen Zweck auch in so weit, als es durch ein derartiges Instrument, ohne seine handliche Brauchbarkeit übermässig zu beeinträchtigen, überhaupt möglich ist. Die damit erzielten Resultate haben bewiesen, dass mit dem Rechenschieber, wenn es auch nicht möglich ist, eine Genauigkeit bis zur 7. Dezimale zu erlangen, dennoch ein Genauigkeitsgrad den Anforderungen der Praxis entsprechend, erlangt werden kann.

###### 2. Der gewöhnliche Rechenknecht oder Rechenschieber.

Denkt man sich auf einer geraden Linie Fig. 48 auf der einen Seite  $a$   $b$  die Zahlen von 0 bis 90 in der Weise aufgetragen, dass die diesen Zahlen (Gerade) zugehörnden gegenüberstehenden Teilstrichen den Werten der natürlichen Sinuse entsprechen, also beispielsweise neben 30 die Zahl 0,5 oder 50, neben 90 die Zahlen 1 oder 100 zu stehen kommt, so kann man bei entsprechender Wahl der Weite der Teilstriche die natürlichen Sinus der sämtlichen Winkel von 0 bis  $90^\circ$ , wie aus einer Tabelle ablesen. Richtet man den einen Teil des Apparates  $a_1$   $b_1$   $c_1$  verschiebbar ein, und wiederholt die Teilung  $a_1$   $b_1$  noch einmal durch Auftragung auf  $b_1$   $c_1$ , nur in umgekehrter Ordnung, so würde man jetzt auch durch Stellung der 0 bei  $c_1$  neben dem Teilstrich der Zahl  $90^\circ$  die Cosinus der Winkel ablesen können; statt dessen kann man auch die Teilstriche  $a_1$   $b_1$  auf jeder Seite des nur halb so gross gedachten Schiebers  $a_1$   $b_1$  sichtbar machen, und erzielt das gleiche Resultat durch entsprechendes Anlegen des Schiebers  $a_1$   $b_1$  (Sinus — Cosinus — Skala) an das Lineal  $a$   $b$ .

Konstruiert man sich nun für die zu benötigenden trigonometrischen Funktionen ähnliche Skalen, überträgt diese sämtlich auf einen prismatischen Körper, einen hölzernen- oder Metallstab, der selbstredend auch mit dem nötigen verschiebbaren Element versehen sein kann, so hat man einen einfachen Rechenschieber zur Ablesung der trigonometrischen Funktionen.

Solche und noch weiter unten zu beschreibende derartige Instrumente sind in Deutschland, England, Frankreich und der Schweiz, sowohl in prismatischer, wie auch in Kreisform mit festen und beweglichen Skalen ausgeführt worden und käuflich zu haben, sie beschränken sich nicht allein auf die trigonometrischen Funktionen, sondern geben auch in graphischer Übersicht und festen Skalen die Logarithmen, Wurzeln, Reciproken, Quadrate, Kuben.\*)

### 3. Der logarithmische Schieber.

Die logarithmische Skala in der graphischen Form, jedoch die Logarithmen selbst von einer Einheit ausgehend aufgetragen, lässt sich noch zu weiteren mathematischen Operationen verwenden. Ein solcher logarithmischer Rechenschieber bildet den Grundgedanken zur Konstruktion eines Rechenschiebers für Absteckungen, Aufnahmen und tacheometrische Zwecke.

Man trägt sich, Fig. 49 auf einer Linie neben den Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . die gemeinen Logarithmen derselben in der Weise auf, dass neben 2, 0,301 . . ., neben 3, 0,477 . . ., neben 4, 0,602 . . ., neben 10, 1,000 . . . zu stehen kommt und geht aber hierbei von dem Zahlenwert der Logarithmen selbst als Einheit aus. Die Ablesung der Logarithmen wie aus den Tafeln, sofern die Teilstrichentfernungen der Unterabteilungen nur gross genug gewählt sind, erleichtert man sich dann noch dadurch, dass man die Zahlen über 10 entsprechend, wie aus der Figur ersichtlich, wiederholt.

Es würde nun hiernach nicht schwer sein, wie mit den Tafeln, oder der anderen oben angedeuteten graphischen Form die mathematischen Grundoperationen vorzunehmen. Durch eine einfache Betrachtung aber, und zwar dadurch, dass man ein verschiebbares Element zufügt, und das ist besonders das Verdienst des Erfinders,\*\*) lassen sich die Grundoperationen — Multiplikation und Division — durch direktes Ablesen vornehmen. Statt aus der Skala, wie aus der Tafel die Logarithmen abzulesen, um ein Produkt zu bilden, die Logarithmen der Faktoren zu addieren und zu dieser Summe die Zahl zu suchen, setzt man die logarithmisch-graphischen Zahlen der Skala selbst aneinander. Wollte man das Produkt 2.3 herstellen, so trägt man das Längenmass der logarithmisch-graphischen Zahl der oberen Skala Fig. 49 1 bis 3 an das Längenmass der logarithmisch-graphischen Zahl 1 bis 2 und gelangt dann zur Zahl 6, weil  $\log 2 + \log 3 = \log 2.3 = \log 6$ . Umgekehrt zur Herstellung eines Quotienten  $6/3$  würde man das Längenmass der logarithmisch-graphischen Zahl des Divisors von dem des Dividenten 6 nach 1 zu antragen, und gelangt zur Zahl 2, weil wieder  $\log 6 - \log 3 = \log 6/3 = \log 2$ .

Ersetzt man daher die untere Skala, die in gleichen Teilen aufgetragenen Logarithmen durch dieselbe obere logarithmisch-graphische Zahlenskala, und bringt die Teilstriche derart an, dass bei einer gegenseitigen Verschiebung eine scharfe Ablesbarkeit möglich ist, so haben wir einen Multiplikations- und Divisionsstab (a Gunthers\*\*\*) Fig. 50. Zur Bildung des Produktes 3.5 stellt man die Zahl 1 der verschiebbaren Skala auf 3 der festen Skala,

\*) S. Kalender für Messkunde von Clouth, Pressler's Messknecht im Verlag von Wold, Türk in Dresden; dieser enthält unter anderen die Brigg'schen Logarithmen auf 5 Stellen, und erfordert es geringe Mühe, sich diese graphische Darstellung nutzbar zu machen.

\*\*) Einem deutschen Ingenieur, welcher im 17. Jahrhundert an der Universität Oxfort in England die logarithmische Skala graphisch in der letzteren Form (Fig. 49) auftrug, gebührt das Verdienst der Erfindung.

\*\*\*) A Gunthers (ein Gunthers) heissen sie zum Teil noch in England.

und liest neben 5 des Schiebers 15 auf der festen Skala ab, wie man sich mit Hilfe eines Zirkels leicht überzeugen kann; oder man stellt die Zahl 1 des Schiebers auf 5 der festen Skala, und erhält neben 3 des Schiebers dasselbe Resultat auf der festen Skala.

Das Umgekehrte findet bei der Division statt.

Hat man mehrstellige Zahlen mit einander zu multiplizieren oder zu dividieren, so entscheiden die Zwischenabteilungen; durch einige Übung mit Einschätzung der Dezimalstellen, sofern die Teilstriche nicht ausreichend sind, gelangt man dann auch leicht zum Resultat. Die Genauigkeit desselben ist in solchen Fällen, wie leicht einzusehen, abhängig von der Einteilung selbst. Um beispielsweise die Zahl 2,55 mit 2,35 zu multiplizieren, würde man 1 auf den ersten Teilstrich (a) neben 2,5 stellen. Der Teilstrich 2,35 des Schiebers zeigt dann fast auf 6, nämlich auf 5,99. Stellt man die Schieberzahl 5 auf 24, auf den 4. Teilstrich neben der zweiten Zahl 2 des Lineals (b), so zeigt die Zahl 1 des Schiebers auf 4,8 (c), weil  $\log \frac{24}{5} = \log 4,8$ . In allen diesen Fällen muss man, um sich die Handlichkeit zu erleichtern, die Grundsätze der Logarithmen vergegenwärtigen.

Aus dem eben Gesagten leuchtet nun auch wohl ein, dass, wenn man den Schieber verkehrt an das Lineal anlegt, so dass zunächst 1 an 10 (bezügl. 100) zu liegen kommt, man direkt die Reciproken ablesen kann, Fig. 51. Unter 5 steht 2,  $\frac{1}{5} = 0,2$ ; unter 4 (40) steht 25,  $\frac{1}{4} = 0,25$  u. s. w.

Verschiebt man in dieser verkehrten Lage den Schieber, stellt man beispielsweise 1 des Schiebers auf 6 (60) des Lineals (man nehme für die Figur einen Zirkel zu Hilfe), so deuten die Zahlen des Schiebers an den Teilstrichen des Lineals eine Division von 6 an. Neben 2 steht dann 3, d. h.  $\frac{6}{2} = 3$ ; neben 3 steht 2, d. h.  $\frac{6}{3} = 2$ ; neben 6 steht 1 (10) d. h.  $\frac{6}{6} = 1$ ; neben 15 steht 4, d. h.  $\frac{60}{15} = 4$ ,  $\frac{6}{1,5} = 4$ .

Neigungs- und Gefällverhältnisse lassen sich auf diese Weise für die Praxis hinreichend genau ablesen.

#### 4. Der logarithmisch-trigonometrische Rechenschieber.

Die sin-, cosin-, tang- und cotang-Skalen.

In Fig. 49 legten wir bei Aufstellung der Log-Skala die Länge MN der Logarithmen 0 bis 1, als absolute Zahlen betrachtet, zu Grunde. Ein Blick in die Logarithmentafel zeigt, und ist dies auch aus dem Aufbau der logarithmisch-trigonometrischen Funktionen zu ersehen, dass, wenn man die Kennziffern der  $\log \sin 90^\circ$  und  $\log \cos 0^\circ$ , — 10; die der  $\log \sin 5^\circ 44' 30''$  und  $\cos 84^\circ 15' 30''$ , — 9; die der  $\log \sin 0^\circ 34' 30''$  und  $\cos 89^\circ 25' 30''$ , — 8; die der  $\log \sin 0^\circ 31' 30''$  und  $\log \cos 89^\circ 56' 30''$ , — 7 u. s. w. als dieselben Lineareinheiten wie MN betrachtet und aufträgt, hierbei die Ergänzung der sin und cos durch den rechten Winkel in Rücksicht zieht, man eine Sin- und Cosin-Skala erhalten muss. Diese muss zugleich den Bedingungen entsprechen, dass man durch geeignete Kombinationen im bereits besprochenen Sinne, unter Zugrundelegung der Grundsätze der Logarithmen, Multiplikationen und Divisionen von Zahlen mit trigonometrischen Funktionen vornehmen kann.

Die Lineareinheit MN Fig. 49 entspricht der gleichen Länge  $M_1 N_1$  Fig. 52, und ist diese Skala so konstruiert, dass statt 10 ( $\sin 90^\circ$ ,  $\cos 0^\circ$ ) bis 9 ( $\sin 5^\circ 44' 30''$ ), 100 bis 90 als zählende Einheiten zu Grunde gelegt wurden. Die Zwischenwerte 99, 98, 97 . . . 91 müssen dann wieder so aufgetragen sein, dass den zugehörigen Graden

9,1 bezw. 91 für  $\sin 7^\circ 14' 0''$ ;  $\cos 82^\circ 46' 0''$   
 9,2 „ 92 „  $\sin 9^\circ 7' 10''$ ;  $\cos 80^\circ 52' 50''$   
 9,3 „ 93 „  $\sin 11^\circ 31' 40''$ ;  $\cos 78^\circ 29' 20''$  u. s. w.

entsprochen wird.

Um nun z. B. ein Produkt zu bilden  $2 \sin 30^\circ$ , so legt man den Nullpunkt des trigonometrischen Schiebers ( $\sin 90^\circ$ ,  $\cos 0^\circ$ ) an 2 oder 20 der Zahlenskala Fig. 49 und liest bei  $\sin 30^\circ$  ( $\cos 60^\circ$ ), M oder N, 1 ab. Will man  $\sin 26^\circ 30'$  mit 145 multiplizieren, so legt man den Nullpunkt an 14,5 Fig. 49 oder Fig. 50 und liest bei  $26^\circ 30'$  derselben Log. — Skala 64,7 ab. Auf gleiche Weise (man nehme wieder einen Zirkel) findet sich  $125 \cdot \cos 25^\circ 30' = 112,7$  etc. Durch ein umgekehrtes Anlegen resultiert (Subtraktion der Logarithmen) eine Division; z. B.

Man legt den Schieber  $\cos 50^\circ$  an 130 des Lineales an und liest bei  $0^\circ$  des Schiebers 0,202 vom Lineal ab;  $\frac{130}{\cos 50^\circ} = 0,202$ . Wenn man die Länge des Cos-Schiebers  $0^\circ$  bis  $\cos 50^\circ$  in den Zirkel nimmt und die eine Zirkelspitze auf die Zahl 13 (130) des logarithmischen Lineales oder Schiebers Fig. 49, 50 setzt, kann man sich durch die andere Zirkelspitze, welche auf 20,2 zeigt, von der Richtigkeit überzeugen.

Die Konstruktion der Tangentenskala Fig. 53 beruht auf dem gleichen Princip. Als Ausgangspunkt massgebend ist hier, weil  $\tan 45^\circ = \cotg 45^\circ = 1$  der Wert 10 von  $\log \tan 45^\circ$ . Die Einheiten ergeben sich hiernach, wie leicht zu übersehen, analog dem Obigen. Die Werte der  $\tan 0^\circ$ ,  $\cotg 90^\circ$  erstrecken sich bis unendlich. Die Charakteristiken sind auf der Zeichnung auch mit angegeben. Es genügt, die trigonometrische Relation zwischen  $\tan$  und  $\cotang$  berücksichtigt, den Schieber nur bis  $45^\circ$  auszuführen.

Soll z. B.  $\tan 60^\circ$  mit 34 multipliziert werden, so legt man den Ausgangspunkt ( $\tan 45^\circ$ ) an 34 (340) an, und liest bei  $60^\circ$ , 5, 88 ab. Das Anlegen der Tangentenskala an die Zahlenskala Fig. 50, 49 muss selbstverständlich in dem Sinne erfolgen, dass der Nullpunkt die Zahl 1 der Zahlenskala an die Seite des Ausganges  $\tan 45^\circ$  der Tangentenskala und die fortlaufenden Zahlen 2, 3 . . . 100 der Zahlenskala nach der Richtung  $0^\circ$  der Tangentenskala zu liegen kommt.

Ein entgegengesetztes Anlegen liefert 19,63, mit anderen Worten eine Division durch  $\tan$  oder Multiplikation mit  $\cotg$ :

$$34 \cdot \tan 60^\circ = 5,88; \quad \frac{34}{\tan 60^\circ} = 34 \cotg 60^\circ = 19,63.$$

### 5. Rechenschieberkonstruktionen für Wurzeln, Potenzen etc. mit trigonometrischen Funktionen kombiniert.

Der Polymer (ursprünglich ein englisches Fabrikat) gehört zu den ältesten derartigen Instrumenten, hat aber immerhin praktische Vorteile. Sein Zweck ist die meisten in der Praxis vorkommenden Rechnungen, Multiplikationen, Divisionen, Radizierungen, Potenzierungen, Inhalte, Oberflächen möglichst schnell mit allerdings einem geringeren Genauigkeitsgrad zu lösen.

Er hat die Form eines zusammengeklappten Masstabes, und dient zugleich als solcher. —

In der Neuzeit gelangt ein Rechenschieber\*) in den Handel, welcher sich durch seine Handlichkeit auszeichnet, und aus diesem Grunde eine nähere Betrachtung verdient. In den Figuren 54a bis 54e ist derselbe in seinen Theilen in natürlicher Grösse dargestellt.

Der Rechenschieber besteht, wie aus Fig. 54c ersichtlich, aus dem festen Stab BB und dem eigentlichen Schieber A, der erstere enthält auf der hinteren Seite BB Bemerkungen, welche sich auf die spezifischen Gewichte verschiedener Körper, Vergleichen von Fussmass mit Meter u. s. w. beziehen. Auf dem schrägen Rand CC ist eine Meterteilung in natürlicher Grösse angebracht, ebenso auf dem Rande C<sub>1</sub> und im Innern des festen Stabes, die Letztere DD wird erst ersichtlich, wenn der Schieber A nach der einen oder anderen Richtung verschoben wird, Fig. 54a und d. Die Figur 54e stellt den Schieber allein von der Rückseite dar A<sub>1</sub>, auf dieser befinden sich die logarithmisch-graphischen Theilungen der sin und tang, die ersteren bis 90°, die letzteren bis 45° nach der dem Rechenschieber zu Grunde gelegten Masseinheit, analog der Fig. 53 und 52.

Der zusammengeschobene und 1 auf 1 gestellte Rechenschieber Fig. 54b enthält zweierlei gleiche Einteilungen EE, FF, ee, ff, welche je mit dem Stab und Schieber übereinstimmen. Die Theilungen EE, ee entsprechen von 1 bis 1 der dem ganzen Instrument zu Grunde gelegten Masseinheit, analog MN Fig. 49. Die Einheit der unteren Skalen FF, ff ist doppelt so gross; die unteren Zahlen sind demnach die Wurzeln, die oberen Zahlen der Theilungen EE die Quadrate der jeweilig gegenüberstehenden Zahlen.

Die Operationen, welche man nun zunächst mit den beiden Skalen EE, ee, vornehmen kann, sind Multiplikationen und Divisionen. Um 4 mit 5 zu multiplizieren, stellt man die Zahl 1 des Schiebers auf 5 der festen Skala, und liest bei 4 des Schiebers A auf der festen Skala, ee die Zahl 2 d. i. 20 ab. 5, 24 ergibt sich aus dem zweiten grossen Teilstrich nach 1 auf der Skala ee, nämlich 120. Zur Ausführung von Divisionen betrachtet man die Zahlen der Skala A als Dividenden und die der festen Skala als Divisoren, man liest bei 1 der beweglichen Skala EE auf der Skala ee den Quotient ab. Z. B. 8 der A Skala unter 4 (resp. 40) der festen Skala gestellt, liefert bei 1 die Zahl 5, weil  $\frac{40}{8} = 5$ . Unterhalb 6 der festen Skala steht in derselben Stellung der zweite Teilstrich nach 1 der A Skala, folglich

$$\frac{60}{12} = \frac{6}{1,2} = \frac{600}{120} = 5.$$

Ohne Rücksicht auf 1 der beweglichen Skala A lassen sich mit derselben Leichtigkeit Proportionen ablesen. Stellt man 4 unter 3, so steht auch 8 unter 6, 1 unter 7,5, 2 unter 1,5 d. h. es ist

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = 0,75 = \frac{1,5}{2} = \frac{15}{20} \text{ u. s. w.}$$

Da die Einheit der unteren Skala FF noch einmal so gross ist, als diejenige der oberen, so stehen die Quadrate, beziehentlich die zweiten Wurzeln auf den Skalen EE und FF direkt übereinander. Die Ablesung erleichtert man sich dadurch, dass man die beiden Zahlen 1 des beweglichen Schiebers A zu Hilfe nimmt. Stellt man die 1 der beweglichen unter 4 der

\*) Zu beziehen durch Dennert & Pape, Altona (Elbe), Friedenstr.

festen Skala ee, so liefert die untere 1 der beweglichen Skala A auf der festen Skala ff, die Skala 2, weil  $2^2 = 4$  und  $\sqrt{4} = 2$ . Aus der augenblicklichen Stellung der Fig. 54a folgt  $\sqrt{5} = 2,236$ , die letzte Dezimale 6 ist eingeschätzt, umgekehrt findet sich  $2,236^2 = 5$ .

Die in Fig. 54a bezeichnete Stellung des Rechenschiebers lässt sich nun gleichzeitig auch verwerten zur Erklärung der Ablesungen von Kuben. Der Teilstrich 1 der unteren Skala FF zeigt auf 2,236 der festen Skala ff und giebt 5 als zweite Potenz, multipliziert man 5 nochmals mit 2,236, d. h. liest man neben der Zahl 2,236 der beweglichen Skala EE die betreffende Zahl der festen Skala ee ab, so hat man in Wahrheit die dritte Potenz von 2,236 gefunden; das Ergebnis ist  $2,236^3 = 11,2$  (11,18). Es folgt hieraus die Regel, dass man von irgend einer Zahl (z. B. 21) die 3. Potenz findet, wenn man die 1 der unteren beweglichen Skala FF auf diese Zahl einstellt, und neben der gleichen Zahl der oberen beweglichen Skala EE auf der festen Skala ee das Ergebnis (hier 9260, genauer 9261) abliest. — Stellt man die 1 der F-Skala über 2 der f-Skala, so liefert die 1 der E-Skala die Zahl 8, weil  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ . Das umgekehrte Verfahren zum Ausziehen von Kubikwurzeln ist aus dem Grunde nicht anwendbar, weil man gleich, um eine vorherige Division ausführen zu wollen, die Grundzahl als bekannt voraussetzen musste. Man schlägt hier einen anderen Weg ein, indem man den Schieber A umkehrt, so dass jetzt die Schieberskalen wechselseitig zu den Stabskalen zu liegen kommen, wie es in Fig. 54d ersichtlich gemacht ist.

Denkt man sich in dieser Lage die 1 der beweglichen FF-Skala beispielsweise auf 27 gestellt (2,7 der festen Skala ee, bezeichnet mit z), so stellen sich die beiden Striche 3 der Skalen EE und ff übereinander. Rückt man 1 der Skala F unter 64 (6,4 der Skala), so findet man  $\sqrt[3]{64} = 4$ , da beide Skalen von rechts und links gelesen, ihre Vereinigungslinie in der Zahl 4 haben. Um  $\sqrt[3]{15625}$  auszuziehen, schiebt man 1 unter 1,5625 der Skala ee, mit v bezeichnet, so wird man sich überzeugen, dass die beiden unteren Skalen jetzt ihre Vereinigungslinie in 2,5 haben: es ist demnach  $\sqrt[3]{15625} = 25$ . —

Die Zahlen der Skalen F und f sind die Quadratwurzeln der Zahlen auf den Skalen e und E, wird demnach eine Zahl und eine Quadratwurzel übereinander geschoben, welche beide denselben Zahlenwert haben, so müssen sie auch in ihrer gedachten Verlängerung auf der oberen Skala ee das Quadrat liefern: man sieht, dass wenn man sich die übereinander gestellten Striche 2,5 der f und E-Skalen verlängert denkt, sie die Zahl 625 (6,25) der ee Skala treffen, da die f und e Skalen schon ohnedies eine derartige Lage, Quadrat — oder zweite Wurzel haben. Das Einstellen der 2,5 in indirekter (verkehrter) Lage des Schiebers an 6,25 liefert dann noch eine Multiplikation (bezw. Division) der 625 mit 25, das Resultat bei 1 ist 15625.

Es ist wohl selbstredend, dass man auf diese Weise auch die Kuben ablesen kann, indem man zunächst die Quadratzahlen aufeinanderstellt 25 über 25, 3 über 3 und nochmals mit derselben Zahl multipliziert, bei 1 auf der e-Skala findet sich die dritte Potenz.

Der gegenwärtige Stand der Fig. 54d ist eingestellt auf  $\sqrt[3]{32768}$ , auf

die Zahl 3,2768, bezeichnet mit  $u$ , auf den beiden Skalen E und f treffen bei  $w$  die Striche 3,2 in einer Linie zusammen, es ist also

$$32 = \sqrt[3]{32768} \text{ oder } 3,2 = \sqrt[3]{32,768} \text{ oder } 0,32 = \sqrt[3]{0,032768}.$$

Zur Ausführung von Multiplikationen und Divisionen von Zahlen mit den trigonometrischen Funktionen dienen die Skalen auf  $A_1$ , welche man an die e-Skala anlegt, und nun wie schon oben mitgeteilt, verfährt. Man stellt den Strich bei S (sinus) oder T (tangens), Fig. 54e, auf die betreffende Zahl ein und findet das Ergebnis beim jeweiligen Grad. — Mit Hilfe eines kleinen dem Rechenschieber beigegebenen Blechschiebers übersieht man leichter, dass die Zahlen der Skala f die Quadratwurzeln aus dem Produkt einer Zahl mit einem sin oder tang liefern. Z. B.  $90^\circ$  oder S auf die mittlere 1 der e-Skala eingestellt, liefert für  $\sin 30^\circ$  den Wert 5;  $10 \cdot \sin 30^\circ = 5$ . Unmittelbar darunter durch obigen Blechschieberzeiger vermittelt, um ein doppeltes Einstellen zu sparen, steht  $\sqrt{5}$ , nämlich  $\sqrt{10 \cdot \sin 30^\circ} = 2,24$ .

## 6. Verfassers Rechenschieber für Absteckung von Kreisbögen.\*)

A. Rechenschieber zur Absteckung von Ordinaten und Abscissen. Bei Gelegenheit der Aufstellung der Formeln für die Absteckung der Kurven mittelst Ordinaten und Abscissen hatten wir die Gleichung  $y/R = n - \sqrt{1 - n^2}$  entwickelt. In derselben bedeutet  $n$  das Verhältnis der in der Tangente oder Sehne gemessenen Abscisse zum Radius,  $n = x/R$ ,  $y$  der zur Abscisse  $x$  gehörigen Ordinate. Für einen bestimmten Wert von  $n$  liefert die obige Gleichung daher den relativen Wert der zugehörigen Ordinate, der absolute Wert folgt durch Multiplikation mit  $R$ . Die Werte von  $n$  bilden eine fortschreitende Zahlenreihe von 0 bis 1. Trägt man sich unter Zugrundelegung einer beliebigen Einheit MN Fig. 49 die logarithmischen Werte der Zahlenreihe  $n$  in der bekannten Form auf, so hat man dieselbe nur noch mit  $R$  zu multiplizieren, um  $x$  zu erhalten. Es kann letzteres wiederum graphisch dadurch geschehen, dass man sich eine bewegliche logarithmische Skala konstruiert nach derselben Einheit, die die sämtlichen Radien von 1 bis  $\infty$  enthält, und diese Skala an die erstere in der Weise anlegt, dass für ein gewisses  $R$  die logarithmischen Werte beider Skalen addiert werden. Für die Konstruktion eines Rechenschiebers ist es jedoch vorteilhafter zu einem Reciprokenverhältnis zu gelangen; und zwar dadurch, dass man eine logarithmisch-graphische Division, wie in Fig. 51 geschehen, vornimmt. Man konstruiert sich nun ferner eine andere Skala, für eine, nehmen wir vorläufig an beliebige, die Grösse des Rechenschiebers berücksichtigende Einheit, und zwar für die sämtlichen Werte von  $y/R$ , welche, weil  $y \leq R$  wiederum eine Zahlenreihe von 0 bis 1 bildet. Die Bezeichnung dieser zweiten festen Skala muss aber die analog fortschreitenden, bezw. mit dem obigen Reciprokenverhältnis korrespondierenden Werte enthalten; wenn man dann die logarithmisch-graphischen Werte dieser Skala mit  $R$  multipliziert, erhält man  $y$ . Logarithmisch-graphisch gelöst, benötigt man hierzu wieder eine bewegliche Skala wie oben für die Radien 1 bis  $\infty$ , deren Einheit gleich der für  $y/R$  ist.

Das Verfahren Abscisse und Ordinate abzulesen, würde sich nach diesen

\*) Zu beziehen durch die Verlagsbuchhandlung Gerhard Kühtmann, Dresden.

Andeutungen so gestalten, dass man sich für ein gewisses  $x$  und  $R$  mit Hilfe der ersten beiden Skalen das Reciprokenverhältniss bildet, auf diesen Wert der zweiten festen Skala den Radius der zweiten beweglichen Skala einstellt und nun im Anfangspunkt der zweiten festen Skala  $y$  abliest.

Berücksichtigt man, dass  $\frac{x}{R} = \sin \alpha$ ,  $\frac{y}{R} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ , in welchen Formeln  $\alpha$  den Sehnen-Tangentenwinkel bezeichnet, welchen die Sehne  $2x$  mit der Tangente bildet, so lassen sich durch beide Beziehungung die sämtlichen Werte  $y/R$  auch berechnen, ohne Rücksicht auf die obigen Formeln, bezw. auf Tabelle K III zu nehmen. Man sucht zu den Logarithmen der fortschreitenden Zahlen von 0 bis 1 den zugehörigen Winkel  $\alpha$  und bildet sich die Werte  $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ , die so erhaltene Zahlenreihe wird mit Berücksichtigung der Einheit aufgetragen und sind dies natürlich die nämlichen Logarithmen, welche man erhält, wenn man sie direkt aus der Tabelle K III bestimmt. — Z. B. dem Werth  $x/R = 0,2$  entspricht der Logarithmus  $0,30103000 - 1 = 9, 0,30103 - 10$ , als  $\log \sin$  der Winkel  $11^\circ 31' 14''$ , der  $\log \left[ 2 \sin^2 \frac{1}{2} (11^\circ 31' 14'') \right]$  ist aber  $8,3054374 - 10$ ; für  $n = 0,2$  findet sich  $y/R = 0,020204$  und ist der Logarithmus letzterer Zahl  $0,3054371 - 2$  d. i. auch  $8,3054374 - 10$ . Da nun, je kleiner die Zahl  $x/R$  wird, um so genauer der Nenner der Werte  $y/R$  mit dem Quadrat von 10 wächst; — für  $n = 0,001$  wird  $y/R = 0,0000005 = \frac{1}{5000000}$ , für  $n = 0,01$  wird  $y/R = 0,00005$ , für  $n = 0,1$  wird  $y/R = 0,005$ , (für  $x/R = 0,867$  wird  $y/R = 0,501$ ), — so ist es zweckmässig die Einheit der Skala für  $y/R$  einhalb so gross zu wählen als diejenige der Werte  $x/R$ . Man kann dann bis zu einer gewissen Grenze durch eine einzige Einstellung für einen gewissen Radius Ordinate und Abscisse ablesen.

Für die Praxis ist es ferner gleichzeitig von grossem Vorteil die zugehörigen Ordinaten der Abscissen  $x$  für eine gewisse in ganzen Zahlen fortschreitende Bogenlänge zu bestimmen. In der folgenden beschriebenen Rechenschieberkonstruktion habe ich diesen Vorteil in Rücksicht gezogen.

Die Bogenlänge für den Centriwinkel  $\varphi$  ist  $l = \frac{\varphi R \pi}{180}$  und das Verhältniss der halben Sehnenlänge zum Radius ist gleich  $\sin \varphi$ . Die halbe Sehnenlänge ist aber die Abscisse in der Tangente gemessen,  $x/R = \sin \varphi = \sin \left( \frac{180l}{R \pi} \right)$ . Konstruiert man sich nun für die regelmässig fortschreitenden Werte  $l/R$ , selbstredend von  $l/R = 0$  bis  $\pi/2 = 1,5708$  eine logarithmische Skala, so kann man, dieselbe in der gleichen Einheit aufgetragen wie die logarithmischen Werte  $x/R$ , zur wechselseitigen Bestimmung von Ordinate, Abscisse und Bogenlänge für einen gewissen Radius  $R$  benutzen.

Die Figur 55 stellt einen nach diesen Grundsätzen konstruierten Rechenschieber dar, die Zwischenteilungen sind bei demselben, namentlich die der Skala C, der Einfachheit wegen weggelassen. A, C, E sind feste Skalen, B und D sind zum Schieben eingerichtet. Die Einheiten von D und E sind halb so gross als die von A, B, C. Die Einteilung der Skala A enthält die Werte

log  $x/R$  und zwar nicht in Bruchform, sondern mit fortlaufenden Zahlen bezeichnet. Die Skala E enthält die Werte log  $y/R$  mit der zugehörigen Bezeichnung der Skala A versehen. Die Skalen A und B sind wie leicht zu übersehen, gewöhnliche Logarithmenskalen; beide haben gleiche Einteilungen, welche, wie Fig. 51, umgekehrt neben einander liegen, A ist hierbei jedoch mit einer auch nach links laufenden Zahlenreihe versehen. Die Skala B enthält die Radien, bezw. Abscissen von 1 bis 10000, von links gelesen die Radien, von rechts die Abscissen, D ist auch eine gewöhnliche Logarithmenskala für die Radien, bezw. Ordinaten von 0,0001 bis 10000. Stellt man den Wert (Radius) 10000 der Skala B auf 1000, so liest man bei 1 der festen Skala A die Abscisse  $x = 10$  ab. Für den Maximalradius  $R = 10000^m$  lassen sich daher nicht mehr die Koordinatenverhältnisse  $\angle 10^m$  bestimmen, welche Fälle in der Praxis wohl auch selten vorkommen dürften.  $x = 5$  der Skala B auf 1 der Skala A eingestellt, liefert für den Radius  $R = 500$  der B-Skala den Wert 100 auf der Skala A; für die Abscisse  $x = 25$  d. h. 25 der Skala B auf 1 der Skala A geschoben, liest man bei  $R = 1000^m$  auf A die Zahl 85 ab.

Die Skala D enthält die gleichen Radien bis zum Maximum  $R = 10000^m$ , von der rechten Seite gelesen die Ordinaten 0,0001 bis 10000. Stellt man nun beispielsweise den Radius 500 auf die Zahl 100 der festen Skala E, welche Zahl man durch Einstellung für  $x = 5$  und  $R = 500$  fand, auf A, so liest man bei 1 der festen Skala E auf der beweglichen Ordinaten Skala D die Ordinate 0,025 ab, nämlich den Teilstrich zwischen 0,02 und 0,03. Stellt man auf die in Folge  $x = 25$  und  $R = 1000$  enthaltene Zahl 85 den gleichen Radius  $1000^m$  der Skala D auf die feste Skala E ein, so liest man bei 1 der festen Skala D die Ordinate 0,313 auf der beweglichen D ab u. s. w.

Beabsichtigt man für einen gewissen Radius z. B.  $500^m$  der Reihe nach die Ordinaten für die Abscissen  $x = 5, 10, 20, 25, 50, 100, 500$  zu bestimmen, so kann dies bis zu einer gewissen Grenze durch eine einmalige Einstellung der beweglichen Skalen geschehen. Man stellt für die Abscisse  $x = 5$  und  $R = 500$  den beweglichen Schieber B auf die schon erwähnte Zahl 100 der festen Skala A und zugleich den Radius des Ordinatenchiebers D auf die gleiche Zahl 100 der festen Skala E. Denkt man sich nun, wie auch in der praktischen Ausführung vorgesehen, beide bewegliche Skalen B und D durch eine Klemmvorrichtung der Art vereinigt, dass sie sich nun gleichzeitig nach rechts und links um dieselbe lineare Strecke bewegen können, so hat man nur nötig der Reihe nach die weiteren Abscissen 10, 20, 25, 50, 100, 500 des beweglichen Abscissenschiebers B auf 1 der festen Skala A einzustellen, — es hat sich somit auch der bewegliche Ordinatenchieber D um die gleiche Entfernung nach rechts bewegt. Man liest nun, ohne demnach der besonderen Einstellung für eine jedesmalige Ablesung der Zahlen 90, 70, 60, 10, 9, 1 am Schieber A für den Schieber D auf der Skala E zu benötigen, direkt bei 1 der Skala E die Ordinaten 0, 1, 0,405, 0,625, 2,506, 10, 102, 500 ab. Man wird hierbei bemerken, dass, wie auch schon oben angedeutet, für die Werte  $\angle 10$  der festen Skala E eine Ungenauigkeit resultiert, und ist es für diese Werte nötig die Verbindung B mit D zu lösen und bei Bedarf einer besonderen Genauigkeit den beweglichen Schieber D auf die für den bezüglichen Radius auf A abgelesenen Zahl besonders einzustellen.

Mit Zuhilfenahme eines Zirkels, oder durch Übertragung der beiden beweglichen Skalen B und D auf einen Streifen Papier, wird man sich schnell

von der übrigens höchst einfachen Manipulation mit dem ganzen Rechenschieber überzeugen können. Zur Realisierung der obigen Andeutung, das Bogenverhältnis  $l/R$  betreffend, stellt die feste Skala C die logarithmisch-graphischen Werte  $\frac{1}{R}$  nach der Gleichung  $\frac{x}{R} = \sin\left(\frac{1}{R} \frac{180^\circ}{\pi}\right)$  berechnet, dar. Die Verhältnisse  $l/R$  sind in der Skala C besonders eingetragen; zur Bestimmung von  $l$  wird die Skala B benutzt. Man sieht, dass je kleiner  $l/R$ , um so näher  $l/R = x/R$  d. h. die Bogenlänge gleich der Abscissenlänge. Einige Beispiele genügen, um sich mit der Manipulation vertraut zu machen.

Stellt man den Radius  $400^m$  der Abscissenskala B auf  $0,5$  der Skala C, so entspricht derselben die Bogenlänge  $0,5 \cdot 400 = 200^m$ , hingegen der Abscissenlänge, welche man bei  $1$  der Skala A auf B abliest  $191,8$  ( $191,77$ ). Über den Strich  $0,5$  liest man auf der A-Skala neben  $400$ ,  $6,2$  ab.  $200^m$  Bogenlänge oder  $191,8^m$  Abscissenlänge entsprechen aber der Ordinate  $49^m$  ( $48,97$ ); denn stellt man den Radius  $400$  der D-Skala auf  $6,2$  der E-Skala, so zeigt der Strich  $1$  der E-Skala auf die Ordinate  $48,97$ . Der Abscisse  $200^m$  für den Radius  $400$  entspricht  $l/R = 0,52$  (die Zwischenteilungen sind in der Zeichnung weggelassen), demnach die Bogenlänge  $l = 0,52 \cdot 400 = 208^m$ . Die hier zugehörige Ordinate kann man durch Einstellung des Radius  $400^m$  der B-Skala auf den Strich  $6$  der E-Skala ablesen.

Für den Radius  $1000^m$  und der Abscisse  $10^m$  kann man die Bogenlänge  $l$  schon gleich der Abscissenlänge für den praktischen Gebrauch setzen, indem schon für die Abscisse  $50^m$  und dem gleichen Radius die Differenz nur noch  $20$  mm beträgt.

Die Verhältniszahlen auf der Skala C für  $l/R$  lassen sich direkt auch verwerten um die Verhältnisse  $x/R$  zu ermitteln, indem wir schon mehrfach erwähnt: je kleiner  $l/R$ , um so näher rücken die Striche an  $x/R$  heran, und schliesslich fallen die Werte  $l/R$  auf C mit dem Abscissenverhältnis  $x/R$  der A-Skala zusammen.

B. Rechenschieber zur Absteckung vom Bogenmittenabstand und Tangentenlänge. Dieser Rechenschieber, Fig. 56, besteht aus zwei festen und einer beweglichen Skala A, C und B. Die feste Skala A stellt die Logarithmen der relativen Bogenmittenabstände  $\frac{\omega}{R} = \frac{1}{\sin \alpha/2} - 1$ , und die feste Skala C diejenigen der Tangente  $T = \cotg \alpha/2$  dar.

In vorstehenden Formeln (S. I. Abschn.) bedeutet  $\omega$  der Halbmesser,  $\omega$  den Bogenmittenabstand,  $T$  Tangentenlänge und  $\alpha$  den Winkelpunkts- oder Peripheriewinkel.

Bildet man sich zunächst die zur Konstruktion nötigen Einheiten, so wird

für $\alpha = 60^\circ$	$\frac{\omega}{R} = 1$	für $\alpha = 90^\circ$	$\frac{T}{R} = 1$
„ $\alpha = 130^\circ 45'$ (ca.)	$\frac{\omega}{R} = 0,1$	„ $\alpha = 168^\circ 29'$	$\frac{T}{R} = 0,1$
„ $\alpha = 163^\circ 45'$	$\frac{\omega}{R} = 0,01$	„ $\alpha = 178^\circ 50'$	$\frac{T}{R} = 0,01$
„ $\alpha = 10^\circ 30'$	$\frac{\omega}{R} = 2$ u. s. w.	„ $\alpha = 11^\circ 26'$	$\frac{T}{R} = 2$ u. s. w.

Diese Werte bestimmen die Einteilung des Stabes und den Ort der

Ablesung; für Bogenmittenabstand bei  $60^\circ$ , für die Tangente bei  $90^\circ$ , weil hier die Logarithmen Null sind.

Man trägt nun auf den Skalen A und C nach erfolgter Berechnung der sämtlichen Logarithmen der relativen Grössen  $\omega/R$  und  $T/R$  für die Winkel  $\alpha$  (in der Fig. von  $\alpha = 10^\circ$  an) auf, indem man sich auf den Massstab die Einheiten markiert, jede in 10 oder 100 gleiche Teile teilt, und an den betreffenden Stellen den jedesmaligen logarithmischen Wert für  $\omega/R$  oder  $T/R$  des bezüglichen Winkels mit der Bezeichnung des Zahlenwertes desselben aufzeichnet.

Die feste Skala für T ist weiter nichts als eine Kopie der schon früher beschriebenen Tangentenskala S. 114. Der grösste Teil der Zwischenteilungen ist auch hier der Übersicht wegen weggelassen worden. Der bewegliche Schieber ist ein gewöhnlicher logarithmischer Zahlenrechenschieber, konstruiert nach der gleichen Einheit der festen Skala, und enthält die Radien von  $10000^m$  ab. Das Prinzip ist hier die logarithmischen Werte  $\omega/R$  und  $T/R$  mit R zu multiplizieren. Man wird also für einen bestimmten Winkelpunktswinkel  $\alpha$  und Radius R den letzteren nur auf den bezüglichen Winkel der einen oder anderen festen Skala einzustellen haben, und liest an der betreffenden Ablesestelle auf dem beweglichen Rechenschieber den Wert  $\omega$  bzw. T ab.

Da durch eine Vervielfältigung der Radien mit 10, 100 oder 1000 auch die Ablesung des Bogenmittenabstandes oder der Tangente in demselben geraden Verhältnis zunimmt, so bleibt es sich gleich, ob man beispielsweise, für  $4000^m$  Radius die Zahlen 4, 40, 400 auf den betreffenden Winkel einstellt, wenn man nur nach erfolgter Ablesung auf den beweglichen Rechenschieber mit dem gleichen Vielfachen von 10 multipliziert.

Für den Radius  $300^m$  und  $\alpha = 140^\circ$  liest man durch Einstellen der 300 des beweglichen Rechenschiebers auf  $140^\circ$  an der Ablesestelle des Schiebers A den Bogenmittenabstand auf dem beweglichen Rechenschieber B die Zahl  $19,25^m$  ab. Für  $R = 30^m$  würde das Resultat  $\omega = 1,935^m$  sein.

Für den Radius  $500^m$  und  $175^\circ 30'$  Winkelpunktswinkel wird  $\omega = 0,386$ ; die Einstellung des Radius  $100^m$  (Schieber B) auf  $175^\circ 30'$  giebt auf dem beweglichen Rechenschieber kein Resultat, der Massstab ist zu kurz, infolgedessen stellt man den Radius  $1000^m$  auf den obigen Winkel und liest die Zahl 0,77 auf dem Schieber B an der Ablesestelle  $60^\circ$  des Schiebers A ab, für  $R = 100^m$ ,  $\alpha = 175^\circ 30'$  ist sonach  $\omega = 0,077^m$ . Die Einstellung dieses Schiebers (Schieber B) auf  $170^\circ 15'$  der Tangentenskala C liefert an der Ablesestelle ( $90^\circ$ ) auf dem beweglichen Schieber für den Radius  $800^m$ ,  $T = 682,37^m$ .

C. Rechenschieber für Bogenlänge und Tangentenabschnitt. Für die Peripheriewinkel  $\alpha$  und Radius R drückt sich die Länge des Bogens (s. Seite 6) aus durch die Gleichung 
$$\frac{L}{R} = \pi \frac{180 - \alpha}{180}.$$

Denkt man sich in der Bogenmitte eine Senkrechte (Tangente) errichtet, so schneidet diese auf den Haupttangente die Entfernungen t vom Winkelpunkt bis zu den Schnittpunkten gemessen ab. Der relative Wert derselben stellt sich dar durch die Gleichung

$$\frac{t}{R} = \frac{\cotg \alpha/2}{1 + \sin \alpha/2}.$$

Mit Hilfe des in Fig. 57 dargestellten Rechenschiebers habe ich ver-

sucht die Ablesung von Bogenlänge und Tangentenabschnitt auf graphischem Wege zu lösen. Derselbe giebt zugleich die Bogenlänge bezogen auf den Centriwinkel an.

Die Skalen A und C sind fest, B ist wieder die bewegliche Skala, für den Radius und die Ablesung bestimmt; sie erstreckt sich bis zu 400<sup>m</sup> Radius und findet sich L und t für die sämtlichen grösseren Radien auf dieselbe Weise, wie bei dem oben besprochenen Rechenschieber durch Multiplikation des Radius, bezw. der Ablesung mit dem Vielfachen von 10. Das Prinzip der Einstellung und Ablesung durch Multiplikation der relativen Werte L/R und t/R mit R ist das gleiche, wie oben. Um den Ort der Ablesung für die Skala A, welche sich auf die Bogenlänge bezieht, zu bestimmen, setzt man  $\frac{L}{R} = 1 = \pi \frac{180 - \alpha}{R}$  und findet hieraus  $\alpha = 122^{\circ} 55'$ . Für  $\alpha = 0^{\circ}$  wird  $L/R = \pi$ , da nun  $\log \pi = 0,49715$ , so liegt der Anfang des Rechenschiebers also für  $0^{\circ}$  Peripheriewinkel ungefähr in der Mitte der gewählten Einheit, für welche  $\alpha = 0^{\circ}$  und  $\alpha = 122^{\circ} 55'$  wird. Die Einheit ist doppelt so gross wie diejenige der Fig. 55 und 56. Der Ort der Ablesung für die Skala C findet sich auch durch Berechnung von  $\alpha$  aus der Beziehung

$$\frac{t}{R} = 1 = \frac{\cotg \alpha/2}{1 + \sin \alpha/2}.$$

Die Konstruktion beider Skalen ist nun dieselbe, wie die der Skalen des Rechenschiebers Fig. 56. Man berechnet sich zunächst in einer tabellarischen Übersicht die sämtlichen Logarithmen der Werte L/R und t/R für jeden Grad und trägt die gefundenen Zahlen in die in gleiche Teile geteilten Einheiten ein. Für  $\alpha = 180^{\circ}$  wird der log unendlich, je grösser  $\alpha$ , um so mehr Zwischenwerte hat man nötig zu berechnen, um dem Rechenschieber die erforderliche Genauigkeit zu bieten. Um nun die Ablesung der Bogenlänge auch für jeden Centriwinkel zu ermöglichen, habe ich in der Skala A eine doppelte Nomenklatur, unterhalb die Winkelpunktswinkel, oberhalb die Zentriwinkel vorgenommen.

Z. B. Um für  $R = 100^m$  und den Peripheriewinkel  $\alpha = 161^{\circ} 45'$  die zugehörige Bogenlänge abzulesen, stellt man die Zahl 100 der Skala B auf  $161^{\circ} 45'$  der Skala A, und liest an der Ablesestelle am Schieber B 31,85<sup>m</sup> ab. Das Resultat für  $R = 10^m$  wäre 0,3185<sup>m</sup>.

Der Wert t findet sich durch Einstellen der Zahl 100 auf  $161^{\circ} 45'$  der Skala C, und liefert die Ablesung 8,08<sup>m</sup>, hieraus folgt für  $R = 10,0^m$ ,  $t = 0,808^m$ . Dem Peripheriewinkel  $\alpha = 161^{\circ} 45'$  entspricht der Centriwinkel  $180 - 161^{\circ} 45' = 18^{\circ} 15'$ .

In Fig. 58 sind alle drei Rechenschieber kombiniert dargestellt zu einer Form, wie sie sich zum praktischen Gebrauch am besten eignet.

## 7. Schieberskalen für Exponentialgleichungen und andere Rechenschieberkonstruktionen.

Infolge von möglichst geeigneten, mehr oder weniger vollständigen tabellarischen Übersichten wurde von der Einführung der Rechenschieber bislang von Seiten der Praktiker noch vielfach abgesehen. Es liegt dies mehr an der Bequemlichkeit, welche solche Tabellen bieten, die sich nicht abstreiten lässt, wenn man sich auch ihre Vollständigkeit durch alle möglichen Hilfsmittel (Ablesen von Wurzeln grösserer Zahlen aus den Potenztabellen u. a.), unter denen die Interpolationen noch die genauesten sind, zu ergänzen sucht; es ge-

nügen eben diese Ungenauigkeiten meist in der Praxis. Einige der oben erwähnten, gleichsam graphischen Tabellen, haben aber dennoch eine ziemliche Verbreitung gefunden, nicht allein im Ingenieurfach, sondern auch auf manchen Maschinenkonstruktionsbureaux. Bei einiger Übung kann man sich ungemein schnell in die eigentümliche Art und Weise der Ablesung einarbeiten. Für geodätische Höhen — Distanz — und namentlich tacheometrische Aufnahmen ist übrigens der Rechenschieber ein willkommenes Hilfsinstrument. Auf die hier zu Grunde liegende Skalen  $\cos^2 \beta$ ,  $\frac{1}{2} \sin 2\beta$  etc. können wir an dieser Stelle nicht eingehen. Bemerkenswert sind hier auch diejenigen Fabrikate, welche zur Basis den 100teiligen Quadranten nehmen. Diese Einrichtung hat den Vorzug, dass der Unterschied zwischen auf- und absteigendem Terrain ganz wegfallen kann. Die Rückseite dieser Rechenschieber ist für algebraische Rechnungen, Wurzeln, Potenzen, ausgenutzt. Der Rechenschieber von Goldschmidt in Zürich, welcher auf dem Schieber  $\frac{1}{2} \sin 2\beta$ , dagegen auf einer festen quadratischen Koullisse (Läufer), die sich über Lineal und Schieber bewegt, die  $\cos^2 \beta$  Skala verzeichnet hat, enthält zur Verwendung des Schiebers für grosse Distanzen auf dem unteren Teil des Lineals eine Skala für Reduktion des scheinbaren auf den wahren Horizont.

Interessant ist auch der von Werner\*) konstruierte Schieber zur Auflösung von Exponentialgleichungen  $m^x = n$ ,  $x^m = n$  u. s. w. Der Grundgedanke hierbei ist die Logarithmen der Logarithmen aufzutragen.

Ein Rechenschieber für die Kegelschnittkurven für den Eisenbahnbau ist selbstredend auch realisierbar, und dürfte dieser eventuell zugleich als Ergänzung der Tabellen dienen können.\*\*)

## II. Verständigungssignale, Verständigungszeichen.

Vom Standpunkt der Wissenschaft dürfte es wohl manchem Leser dieser Zeilen paradox erscheinen, eine Abhandlung über das Signalwesen als gegenseitige Verständigung zwischen Messgehülfen und operierendem Ingenieur oder Geometer bei geodätischen Aufnahmen und Absteckungen zu schreiben. Dieses Signalwesen hat aber, wie gewiss jeder Praktiker zugeben wird, eine gewisse Berechtigung einen integrierenden Bestandteil zu den Hilfsmitteln bei geodätischen Arbeiten zu bilden. Die Zeit, welche verloren geht mit überflüssigen Rufen, Gestikulationen, Pfeifen, Winken, insbesondere, wenn der Messgehülfe aus dem Gesichtskreise verschwunden ist, und was dergleichen ja nicht zu umgehende Hindernisse mehr sind, zahlt sich gewiss aus, wenn zwischen dem operierenden Ingenieur und dem Messgehülfe ein optisches oder akustisches Einvernehmen besteht\*\*\*).

Nicht allein jeder Feldmesser, auch jeder Ingenieur hat gewöhnlich sein eigenes Verfahren, sich auf diese oder jene Weise dem arbeitenden Messgehülfe verständlich zu machen, oder er bildet sich mit der Zeit ein solches. Hat man nun aber bei einer Feldarbeit, Katasteraufnahme oder Tracierung, gleichviel, solche verschieden eingeschulte Messgehülfen unter sich, so sind Irrtümer auf Kosten der Zeit, bezw. der Arbeit nicht zu umgehen.

Die in der Regel in Verwendung kommenden Signale sind akustische

\*) Siehe Werner, Tacheometrie, Wien, Lehmann & Wentzel.

\*\*) Die Verlagsbuchhandlung behält sich das Recht der Ausführung vor.

\*\*\*) Über die konstanten optischen Signale bei trigonometrischen Vermessungen etc., Fixierung von Stationen siehe Dr. Franke, trig. Vermessungen, Leipzig; Dr. Hunäus, prakt. Geom., Dresden, Kühnmann, u. a.

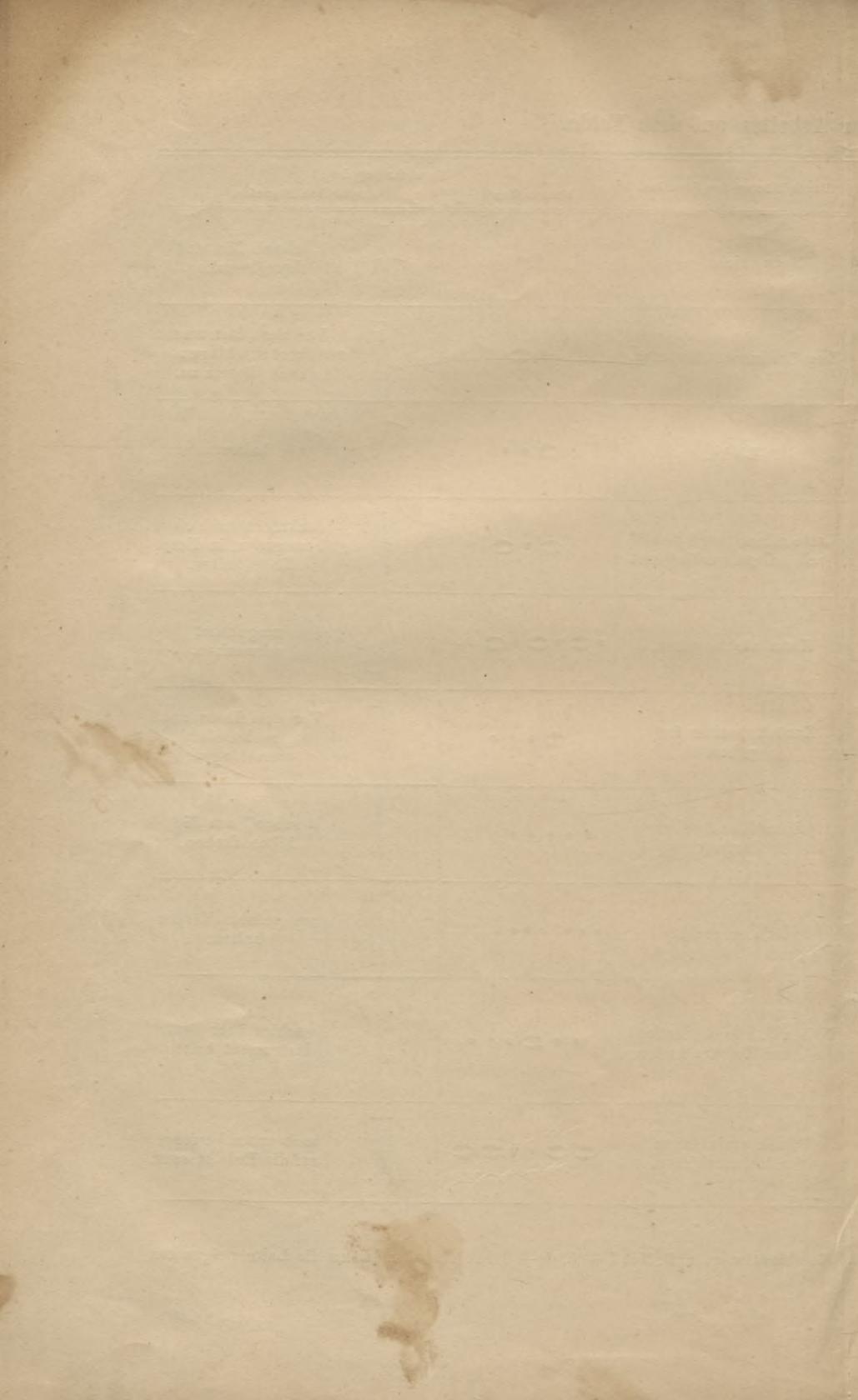
oder optische. Zu den letzteren verwendet man seine Hand, ein Taschentuch, besser eine Stange (Piquet, Bake) oder Fahne; zu den ersteren eine Pfeife, oder ein eintöniges kurzes Hörnchen, Trompetenmundstück oder dgl. In allen Fällen kommt es darauf an möglichst einheitlich zu Werke zu gehen, und habe ich im beistehenden Formulare die hauptsächlichsten optischen und akustischen Verständigungszeichen, welche ich bei Gelegenheit meiner geodätischen Arbeiten als praktisch bewährt, verwendet habe, vorgeführt. Die akustischen Signale bestehen aus langen (○) und kurzen (●) Tönen, Piffen, die optischen lassen sich mit einer 1,5<sup>m</sup> langen leichten roten Fahne, mit einem Taschentuche an einem Stocke ausführen. Die einzelnen Zeichen bedürfen wohl keiner weiteren Erklärung.

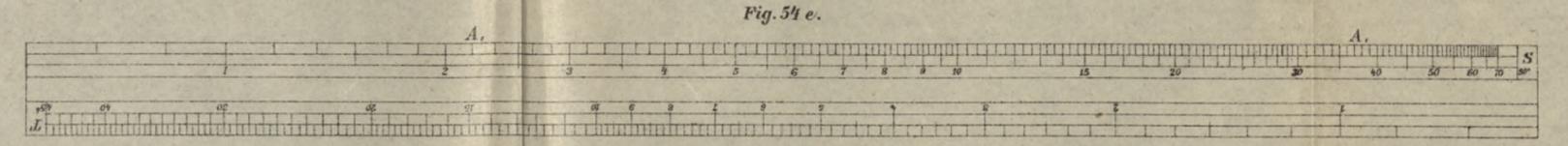
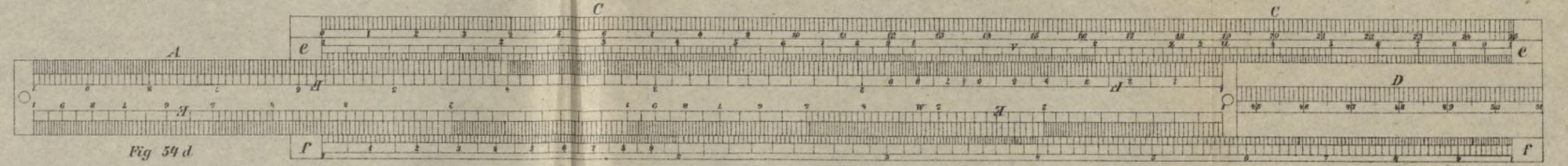
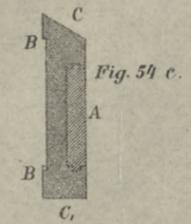
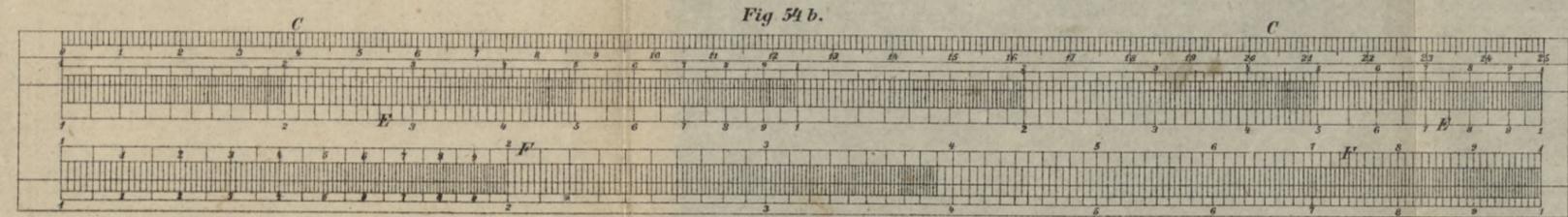
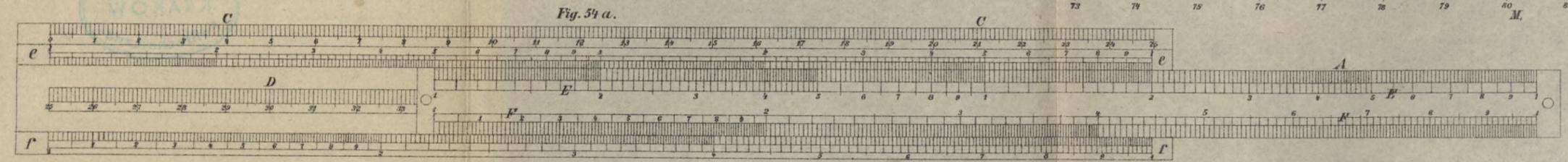
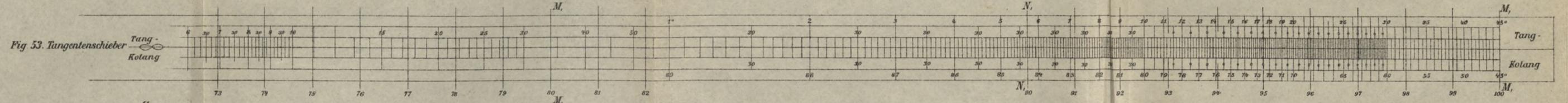
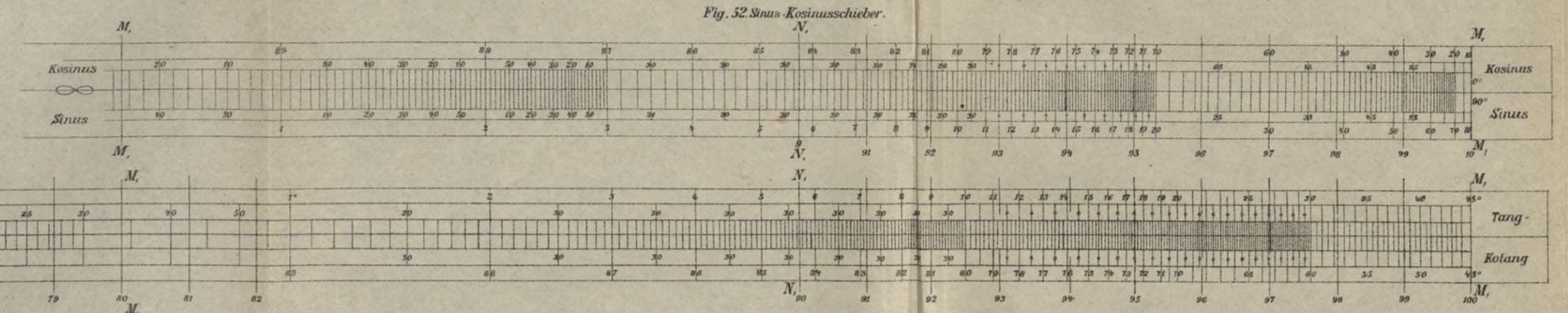
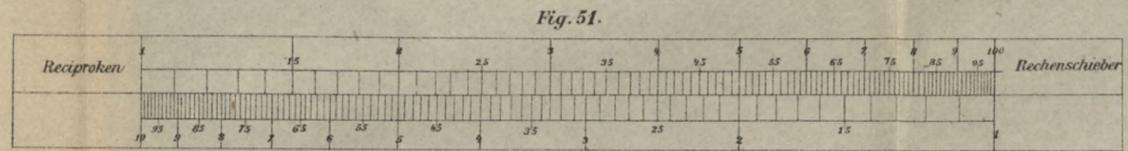
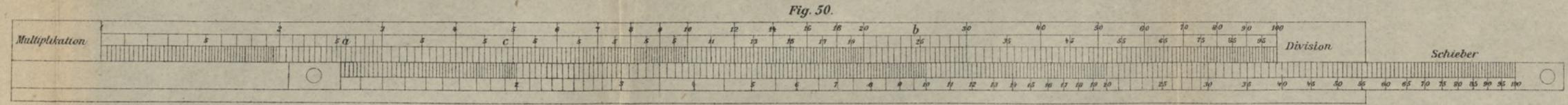
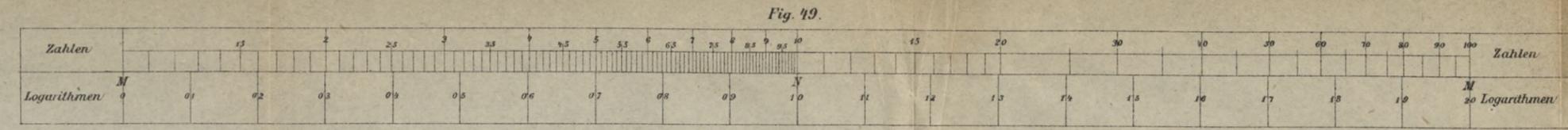
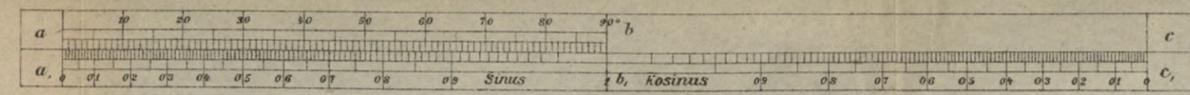


## Verständigungssignale während

## der Arbeiten auf dem Felde.

No.	Beschreibung des Signales.	Bezeichnung des		No.	Beschreibung des Signales.	Bezeichnung des	
		akustischen	optischen Signales.			akustischen	optischen Signales.
1	Ja (gut).	•	 senkrecht nach unten bewegen.	2	Nein (nicht gut).	• •	 schnell hin und herschwenken.
3	Weiter (fertig).	○	 nach der betreffenden Richtung hinschlagen.	4	Zum Instrument kommen.	• ○	 Vor dem Instrument zurückschlagen nach diesem zu.
5	Rechts.	• • ○	 halten.	6	Links.	○ • •	 halten.
7	Latte oder Stange neigen, schwenken, wenn nichts zu sehen.	• • •	 langsam schwenken.	8	Latte oder Stange heben, hoch halten (verlängern).	○ • ○	 senkrecht nach oben bewegen u. in dieser Lage halten.
9	Nicht verstanden (was?).	• • • •	 verkehrt halten.	10	Kann nichts sehen.	• ○ • ○ • ○ • • • •	 umgekehrt schwenken.
11	Vor (näher) kommen.	• • • ○	 Vor dem Instrument stehend, mehrmals zurückschlagen.	12	Zurück (weiter fort) gehen.	○ • • •	 Vor dem Instrument mehrmals vorschlagen.
13	Langsam.	○ ○ ○ • • •	 langsam um die Mitte drehen.	14	Schnell, schneller (laufen).	• • • • • • • • • •	 schnell um die Mitte drehen.
15	Halt! Achtung auf Signal etc.	• • • • • • • • • •	 horizontal halten.	16	Ist's so recht?	• • • • • • • • • •	 vor seinem Körper halten.
17	Auf d. Nagel, Pflock, Station halten.	• ○ • • •	 über dem Instrument halten.	18	Neben d. Pflock (Station), ev. auf Terrain halten.	• • ○ • • • •	 schief über dem Instrument halten.
19	Station verloren gegangen.	• • ○ ○ • • •	 nach unten halten oder schwenken nach der Stationslage oder Richtung.	20	Pflock einschlagen, Station markieren.	○ ○ • • ○ ○ ○ ○	 nach unten bewegen, auf die Erde stossen.
21	Latte, Stange, gerade, senkrecht halten.	○ • • • ○	 in schräger Lage vor seinem Körper halten.	22	Kombinationen, z. B. No. 7 + 5, 7 + 6 rechts oder links die Latte neigen etc.		

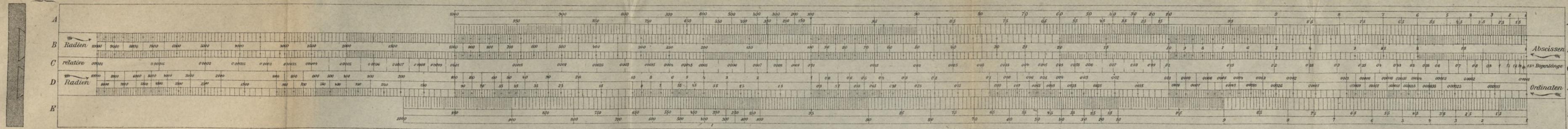




Verlag von Gerhard Kuhlmann, Dresden.

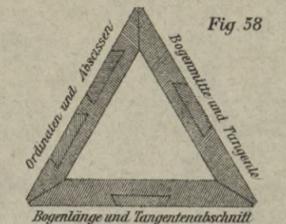


Fig. 55. Ordinaten und Abscissen.



Verlag von Gerhard Kühmann, Dresden.

Hecht's Rechenschieber  
für  
Absteckung der Kurven  
(Kreisbögen.)



Zu beziehen durch die Verlagsbuchhandlung  
von Gerhard Kühmann in Dresden.

Fig. 56 Bogenmittenabstand und Tangente

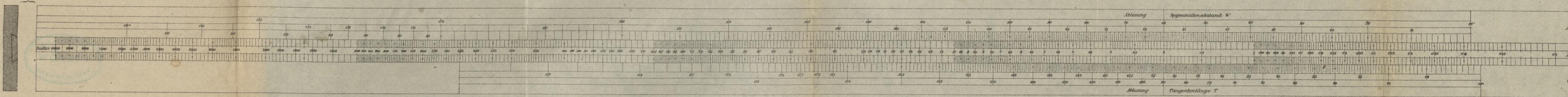
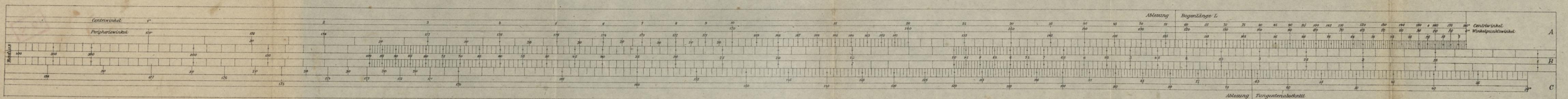


Fig. 57. Bogenlänge und Tangentenabschnitt t





2-22

S-96

P. Sydow's Wwe.  
Nachf.: M. Katsch  
Buchbinderei  
HAYNAU i. Schl.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299135