

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

4976

1092  
atik

für

# Bauhandwerker.

Ein Lehrbuch

für den

Unterricht an Baugewerkschulen, sowie zum Selbstunterricht.

Mit 141 Übungsaufgaben und 524 Figuren,

nebst einem Anhang von Tabellen.

Bearbeitet von

J. Vonderlinn,

Ingenieur.

Stuttgart.

Verlag von Julius Maier.

1896.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299129

*Maier*

*Pohl.*

# Statik

für

## Bauhandwerker.

---

Ein Lehrbuch

für den

Unterricht an Baugewerkschulen, sowie zum Selbstunterricht.

Mit 141 Übungsaufgaben und 324 Figuren,

nebst einem Anhang von Tabellen.

Bearbeitet von

**J. Vonderlinn,**

Ingenieur.

---

Stuttgart.

Verlag von Julius Maier.

1896.

*W. / 341.*



II 4976

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

Akc. Nr. 3986 50

# Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch ist in erster Linie für den Baugewerkschüler bestimmt und enthält demgemäss von dem umfangreichen Lehrstoff der Baustatik nur soviel, als an einer Baugewerkschule in der dort gebotenen Beschränkung in der Regel vorgetragen wird. Mathematische Vorkenntnisse kommen in soweit in Betracht, als sie dem Schüler einer Baugewerkschule auf Grund des hierfür geltenden Lehrplanes zur Verfügung stehen. Mit Rücksicht hierauf sind die Entwicklungen zu den Lehrsätzen und Resultaten in möglichst elementarer Form gehalten, bezw. überall weggelassen, wo eine elementare Begründung der Resultate nicht möglich war.

Das Buch soll dem Schüler das Lehrheft ersetzen und das so viele Zeit beanspruchende Diktieren des Vortrages möglichst entbehrlich machen.

Vielleicht erfüllt es auch den weiteren Zweck, dem in der Praxis stehenden Bautechniker, welcher die zu seinem Berufe erforderlichen statischen Kenntnisse nicht in hinlänglichem Masse besitzen sollte, ein Ratgeber zu sein. Zur Erleichterung des Selbststudiums sind im Texte des Buches eine Anzahl von Uebungsaufgaben, theils gelöst, theils ungelöst aufgeführt und ausserdem im Anhang die zu den Berechnungen erforderlichen Tabellen beigelegt.

Der Verlagshandlung spreche ich hiermit für die sorgfältige Ausstattung des Buches meinen besten Dank aus.

Breslau, im November 1895.

**J. Vonderlinn,**

Ingenieur.

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<b>I. Abschnitt. Elemente der Statik</b> . . . . .	1
<b>A. Einleitung</b> . . . . .	1
1) Von den Kräften im allgemeinen . . . . .	1
2) Mass einer Kraft . . . . .	1
3) Bildliche Darstellung und Bezeichnung einer Kraft . . . . .	1
4) Wirkung und Gegenwirkung . . . . .	2
5) Gleichgewicht . . . . .	2
6) Begriff der Statik . . . . .	2
7) Resultante oder Mittelkraft von gegebenen Kräften . . . . .	2
8) Wirkungsweise von Kräften auf einen Körper . . . . .	2
<b>B. Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte</b> . . . . .	3
1) Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt und derselben Richtungslinie . . . . .	3
2) Kräfte mit einem gemeinsamen Angriffspunkt und verschiedenen Richtungslinien . . . . .	3
a) Zwei Kräfte, Parallelogramm, Kräfedreieck . . . . .	3
b) Gleichgewicht dreier Kräfte . . . . .	4
c) Übungsaufgaben . . . . .	4
d) Beliebige viele Kräfte . . . . .	8
e) Übungsaufgaben . . . . .	9
3) Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und gemeinsamer Richtungslinie . . . . .	10
4) Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und Richtungslinien. Kräfte- und Seilpolygon . . . . .	10
a) Zwei Kräfte . . . . .	10
b) Beliebige viele Kräfte . . . . .	13
c) Parallele Kräfte . . . . .	13
$\alpha$ ) Beliebige viele Kräfte . . . . .	13
$\beta$ ) Zwei Kräfte mit dem gleichen Richtungspfeil . . . . .	15
$\gamma$ ) Zwei Kräfte mit entgegengesetztem Richtungspfeil . . . . .	15
$\delta$ ) Einige Sätze über das Kräftepaar . . . . .	16
5) Statisches Moment einer Kraft . . . . .	18
a) Drehrichtung, Drehpunkt, Hebelarm . . . . .	18
b) Rechnerische Bestimmung der Resultante eines beliebigen ebenen Kräftesystems . . . . .	18
c) Übungsaufgabe . . . . .	20
d) Rechnerische Bestimmung der Resultante paralleler Kräfte . . . . .	21
e) Übungsaufgabe . . . . .	21
6) Zerlegen einer Kraft in parallele Seitenkräfte . . . . .	22
a) Durch Zeichnung . . . . .	22
b) Durch Rechnung . . . . .	22
7) Auflagerdrücke eines auf zwei Stützen aufliegenden und durch Einzelkräfte belasteten Balkens . . . . .	23
a) Durch Zeichnung . . . . .	23
b) Durch Rechnung . . . . .	24
c) Übungsaufgaben . . . . .	24
8) Graphische Ermittlung des statischen Moments einer Kraft bzw. eines ebenen Kräftesystems . . . . .	27
a) Die Kräfte sind parallel . . . . .	27
b) Die Kräfte sind nicht parallel . . . . .	28
c) Übungsaufgaben . . . . .	29
d) Das Kräftesystem ist unter sich im Gleichgewicht . . . . .	30
e) Übungsaufgabe . . . . .	31

	Seite
9) Der Mittelpunkt paralleler Kräfte . . . . .	21
a) Bestimmung des Mittelpunktes paralleler Kräfte durch Zeichnung . . . . .	31
b) Bestimmung des Mittelpunktes paralleler Kräfte durch Rechnung . . . . .	32
c) Übungsaufgabe . . . . .	33
<b>C. Der Schwerpunkt</b> . . . . .	<b>33</b>
1) Vom Schwerpunkt im allgemeinen . . . . .	33
2) Der Schwerpunkt von Linien . . . . .	33
a) Schwerpunkt einer geraden Linie . . . . .	33
b) Schwerpunkt einer gebrochenen Linie . . . . .	34
c) Schwerpunkt eines mehrfach gebrochenen Linienzuges . . . . .	34
d) Schwerpunkt eines Kreisbogens . . . . .	35
3) Der Schwerpunkt ebener Flächen . . . . .	35
a) Schwerpunkt des Dreiecks . . . . .	35
b) Schwerpunkt eines Vierecks . . . . .	35
c) Schwerpunkt des Trapezes . . . . .	36
d) Der Schwerpunkt des Kreisabschnittes (Kreissektor) . . . . .	37
e) Schwerpunkt des Kreisabschnittes . . . . .	38
f) Schwerpunkt des Ringstückes . . . . .	39
g) Schwerpunkt einer unregelmässigen Figur . . . . .	39
h) Übungsaufgaben . . . . .	40
<b>D. Bestimmung der Spannkräfte in Fachwerkträgern</b> . . . . .	<b>42</b>
1) Der Fachwerkträger im allgemeinen . . . . .	42
2) Belastung eines Fachwerkträgers . . . . .	43
3) Belastung der Dächer . . . . .	43
a) Eigengewicht . . . . .	43
b) Der Schneedruck . . . . .	44
c) Der Winddruck . . . . .	44
4) Belastung eines Dachbinders . . . . .	46
5) Bestimmung der Spannungen in den Stäben eines Dachbinders . . . . .	47
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	47
b) Graphische Ermittlung der Spannkräfte, Kräftepläne nach Cremona . . . . .	47
$\alpha$ ) Spannungen, hervorgebracht durch Eigengewicht und Schneelast . . . . .	47
$\beta$ ) Spannungen, hervorgerufen durch den Winddruck . . . . .	49
c) Übungsaufgabe . . . . .	52
d) Ermittlung der Spannkräfte durch Rechnung. Ritter'sche Methode . . . . .	55
e) Übungsaufgabe . . . . .	57
6) Übungsaufgaben . . . . .	57
<b>E. Stabilität der Körper</b> . . . . .	<b>62</b>
1) Begriff der Stabilität, Stabilitätsmoment . . . . .	62
2) Stabilitätsgesetz, Stabilitätsgleichung . . . . .	63
3) Übungsaufgaben . . . . .	64
<b>F. Die Reibung</b> . . . . .	<b>65</b>
1) Die Reibung im allgemeinen . . . . .	65
2) Reibungsarten . . . . .	66
3) Reibungsgesetze . . . . .	66
4) Reibungskoeffizient . . . . .	66
5) Übungsaufgaben . . . . .	67
<b>II. Abschnitt. Elemente der Festigkeitslehre</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>A. Einleitung</b> . . . . .	<b>69</b>
1) Elastizität, Proportionalitäts- bzw. Elastizitätsgrenze . . . . .	69
2) Festigkeitsarten . . . . .	69
<b>B. Normalfestigkeit</b> . . . . .	<b>70</b>
1) Formveränderung des Stabes . . . . .	70
2) Tragfähigkeit eines Stabes . . . . .	71
<b>C. Schubfestigkeit</b> . . . . .	<b>72</b>
<b>D. Übungsaufgaben</b> . . . . .	<b>72</b>
<b>E. Biegefestigkeit</b> . . . . .	<b>79</b>
1) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	79
2) Biege- und Schubspannungen, Normal- und Schubspannungen . . . . .	79

	Seite
3) Neutrale Faserschicht, neutrale Achse . . . . .	80
4) Spannungsgesetz, Lage der Neutralachse . . . . .	80
5) Widerstandsmoment, Biegemoment . . . . .	81
6) Trägheitsmoment, Querschnittsmodul oder Widerstandsmoment des Querschnittes . . . . .	81
7) Bieungsgleichung . . . . .	82
8) Gefährlicher Querschnitt, grösstes Bieungs- bzw. Widerstandsmoment . . . . .	82
9) Bestimmung der Trägheits- und Widerstandsmomente von ebenen Flächen . . . . .	82
a) Trägheitsmoment des Rechtecks . . . . .	82
b) Trägheitsmoment des Rechtecks bezogen auf eine beliebige Schwerpunktsachse . . . . .	83
c) Trägheitsmoment bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsachse parallele Achse . . . . .	84
d) Trägheitsmoment eines beliebig geformten Querschnittes . . . . .	84
e) Trägheitshalbmesser, Trägheitsellipse, Centralellipse . . . . .	85
f) Uebungsaufgaben . . . . .	85
g) Widerstandsmoment des Rechtecks . . . . .	87
10) Trägheitsmoment einer Kraft bzw. eines Systems paralleler Kräfte . . . . .	87
a) Begriff des Trägheitsmomentes einer Kraft bzw. eines Kräftesystems . . . . .	87
b) Graphische Ermittlung des Trägheitsmomentes einer Kraft bzw. eines Kräftesystems . . . . .	88
11) Graphische Ermittlung des Trägheitsmomentes ebener Flächen . . . . .	90
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	90
b) Uebungsaufgaben . . . . .	90
<b>F. Die zehn einfachen Belastungsfälle . . . . .</b>	<b>92</b>
1) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	92
2) Erster Belastungsfall . . . . .	92
3) Zweiter Belastungsfall . . . . .	92
4) Uebungsaufgaben . . . . .	93
5) Dritter Belastungsfall . . . . .	95
6) Viertes Belastungsfall . . . . .	96
7) Fünfter Belastungsfall . . . . .	96
8) Sechster Belastungsfall . . . . .	97
9) Uebungsaufgaben . . . . .	97
10) Siebenter Belastungsfall . . . . .	99
11) Achter Belastungsfall . . . . .	100
12) Neunter Belastungsfall . . . . .	101
13) Zehnter Belastungsfall . . . . .	101
14) Uebungsaufgaben . . . . .	102
<b>G. Krümmungshalbmesser der elastischen Linie . . . . .</b>	<b>104</b>
1) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	104
<b>H. Von der Zerknickungsfestigkeit . . . . .</b>	<b>106</b>
1) Erster Belastungsfall . . . . .	106
2) Zweiter Belastungsfall . . . . .	107
3) Uebungsaufgaben . . . . .	107
<b>J. Berechnung der Säulenfüsse . . . . .</b>	<b>110</b>
1) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	110
2) Uebungsaufgaben . . . . .	111
<b>K. Zusammengesetzte Festigkeit . . . . .</b>	<b>112</b>
1) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	112
2) Uebungsaufgaben . . . . .	113
<b>L. Zusammengesetzte Bieungsfestigkeit . . . . .</b>	<b>116</b>
1) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	116
2) Uebungsaufgaben . . . . .	117
<b>M. Der kontinuierliche oder durchgehende Träger . . . . .</b>	<b>118</b>
1) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	118
2) Spezielle Fälle . . . . .	119
a) Erster Fall. Zwei Felder und drei Stützen . . . . .	119
α) Die Felder sind gleich lang und in der Mitte eines jeden Feldes wirkt eine Einzellast $P$ . . . . .	119

	Seite
β) Die Felder sind gleich lang und auf jedes Feld wirkt eine gleichmässig verteilte Last $P$ . . . . .	119
γ) Die Felder sind ungleich lang; in der Mitte eines jeden Feldes wirkt eine Einzellast $P_1$ bzw. $P_2$ . . . . .	119
δ) Die Felder sind ungleich lang; auf jedes Feld wirkt eine gleichmässig verteilte Last $P_1$ bzw. $P_2$ . . . . .	120
b) Zweiter Fall. Drei Felder und vier Stützen . . . . .	120
α) Die Felder sind gleich lang und in der Mitte eines jeden Feldes wirkt eine Einzellast $P$ . . . . .	120
β) Die Felder sind gleich lang, auf jedes Feld wirkt eine gleichmässig verteilte Last $P$ . . . . .	121
γ) Die Felder sind ungleich lang aber die Endfelder gleich gross; in der Mitte der Endfelder wirkt eine Einzellast $P_1$ , über der Mitte des Mittelfeldes eine Einzellast $P_2$ . . . . .	121
δ) Die Felder sind ungleich lang, aber die Endfelder gleich gross; auf die Endfelder wirkt je eine gleichmässig verteilte Last $P_1$ , auf das Mittelfeld eine solche Last $P_2$ . . . . .	122
3) Übungsaufgaben . . . . .	124
<b>N. Der mehrfach belastete Träger</b> . . . . .	<b>130</b>
1) Der mehrfach belastete Freitträger . . . . .	130
2) Der auf zwei Stützen frei aufliegende Träger . . . . .	130
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	130
b) Erster Belastungsfall. Der Träger ist nur durch Einzellasten beansprucht	
c) Übungsaufgabe . . . . .	132
d) Zweiter Belastungsfall. Der Träger ist durch Einzellasten und durch auf gewisse Strecken gleichmässig verteilte Lasten beansprucht . . . . .	132
e) Übungsaufgabe . . . . .	133
f) Dritter Belastungsfall. Der Träger ist durch einzelne auf gewisse Strecken gleichmässig verteilte Last beansprucht . . . . .	134
α) Die Belastung $P_1$ ist auf eine Strecke $l_1$ gleichmässig verteilt . . . . .	134
β) Die Belastungen $P_1$ und $P_2$ sind auf die Strecken $l_1$ und $l_2$ gleichmässig verteilt . . . . .	135
g) Übungsaufgaben . . . . .	135
<b>O. Berechnung der Treppenpodestträger</b> . . . . .	<b>142</b>
1) Arten der Podestträger . . . . .	142
2) Podestträger für freitragende Treppen . . . . .	142
a) Belastung des Podestträgers . . . . .	142
b) Horizontalschub der Podestkappe . . . . .	143
3) Podestträger für unterstützte Treppen . . . . .	144
a) Belastung des Podestträgers . . . . .	144
b) Belastung und Berechnung des Wangenträgers . . . . .	144
4) Übungsaufgaben . . . . .	145
<b>P. Der excentrische Druck</b> . . . . .	<b>147</b>
1) Spannungsverteilung in einem durch excentrischen Druck beanspruchten Querschnitt . . . . .	147
a) Wirkung der excentrischen Druckkraft . . . . .	147
b) Centalkern oder Kernfläche eines Querschnittes . . . . .	148
c) Grösse der Spannung im Querschnittsrande (Randspannung) bei excentrischer Druckbelastung . . . . .	149
α) Der Angriffspunkt der äusseren Kraft liegt in dem Kernrande auf einer Hauptachse des Querschnittes . . . . .	149
β) Der Angriffspunkt der äusseren Kraft liegt auf einer Hauptachse in beliebiger Entfernung vom Schwerpunkt des Querschnittes . . . . .	150
d) Konstruktion der Randspannungen eines Querschnittes bei excentrischer Druckbelastung . . . . .	150
e) Übungsaufgaben . . . . .	151
2) Beziehungen zwischen der Lage der Neutralachse und jener des Angriffspunktes der excentrischen Druckkraft . . . . .	152
a) Konstruktion der Lage der Neutralachse bei gegebenem Angriffspunkte der Druckkraft . . . . .	152
b) Konstruktion des Kernes eines Querschnittes mit Benützung der Centralellipse . . . . .	153
c) Übungsaufgaben . . . . .	154

	Seite
3) Excentrische Druckbelastung ausserhalb des Centralkernes unter Ausschluss von Zugspannungen . . . . .	154
a) Lage der Neutralachse und Spannungsverteilung im Querschnitt . . . . .	154
b) Uebungsaufgaben . . . . .	157
4) Die Einmauerung der Freitragler . . . . .	158
a) Berechnung der Einmauerungstiefe, Verwendung von Unterlagsplatten . . . . .	158
b) Uebungsaufgaben . . . . .	159
<b>III. Abschnitt. Stabilität der Mauern und Gewölbe . . . . .</b>	<b>161</b>
<b>A. Stabilität freistehender Mauern . . . . .</b>	<b>161</b>
1) Stabilitätsbedingungen . . . . .	161
2) Uebungsaufgabe . . . . .	162
<b>B. Stabilität freistehender Fabrikschornsteine . . . . .</b>	<b>163</b>
1) Stabilitätsbedingungen . . . . .	163
2) Uebungsaufgaben . . . . .	164
<b>C. Der Erddruck . . . . .</b>	<b>168</b>
1) Der natürliche Böschungswinkel . . . . .	168
a) Begriff des natürlichen Böschungswinkels . . . . .	168
b) Grösse des natürlichen Böschungswinkels für einige Erdarten und Gewichte der letzteren per Kubikmeter . . . . .	169
2) Begriff des Erddruckes . . . . .	169
3) Ermittlung der Gleitfläche . . . . .	169
4) Grösse und Angriffspunkt des Erddruckes . . . . .	171
a) Grösse des Erddruckes . . . . .	171
b) Angriffspunkt und Richtung des Erddruckes . . . . .	172
5) Ermittlung der Gleitfläche in besonderen Fällen . . . . .	172
a) Die Terrainlinie ist unter dem natürlichen Böschungswinkel zur Horizontalen geneigt . . . . .	172
b) Die Terrainlinie ist eine gebrochene Linie . . . . .	173
c) Die Terrainlinie ist eine gebrochene Linie und die obere Begrenzungsfläche belastet . . . . .	173
<b>D. Stabilitätsuntersuchung einer Futtermauer . . . . .</b>	<b>174</b>
1) Stabilitätsbedingungen . . . . .	174
2) Ausführung der Stabilitätsuntersuchung . . . . .	174
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	174
b) Uebungsaufgabe . . . . .	175
<b>E. Stabilität der Tonnengewölbe . . . . .</b>	<b>177</b>
1) Form und Belastung eines Gewölbes . . . . .	177
2) Stabilitätsbedingungen . . . . .	178
a) Gleichgewicht eines Gewölbes gegen Drehen, Horizontalschub, Drucklinien . . . . .	178
b) Gleichgewicht eines Gewölbes gegen Zerdrücken, Schlusssteinhöhe und Stärke des Gewölbebogens . . . . .	179
c) Gleichgewicht eines Gewölbes gegen Gleiten . . . . .	182
3) Stabilitätsuntersuchung bei symmetrischer Belastung des Gewölbes . . . . .	182
a) Stabilität des Gewölbebogens . . . . .	182
b) Stabilität des Widerlagers . . . . .	185
$\alpha$ ) Ohne Berücksichtigung des Erddruckes . . . . .	185
$\beta$ ) Mit Berücksichtigung des Erddruckes . . . . .	185
c) Berechnung der im Gewölbe auftretenden äusseren Kräfte und der hierdurch verursachten Pressungen . . . . .	185
4) Stabilitätsuntersuchung bei unsymmetrischer Belastung des Gewölbes . . . . .	187
5) Uebungsaufgaben . . . . .	190
<b>Nachtrag zur Profilbestimmung von auf zusammengesetzte Biegezugfestigkeit beanspruchten Trägern . . . . .</b>	<b>192</b>
<b>Anhang. Tabellen . . . . .</b>	<b>193</b>



# I. Abschnitt. Elemente der Statik.

## A. Einleitung.

### 1) Von den Kräften im allgemeinen.

1) Das Vorhandensein einer Kraft erkennt man durch ihre Wirkung auf einen Körper. Wenn eine Kraft auf einen Körper einwirkt, so erteilt sie dem letzteren eine bestimmte Bewegung mit, oder sie übt auf ihn einen Druck aus. In der Natur gibt es eine ganze Reihe von Kräften, z. B. die Schwerkraft, die Elastizitätskraft, die Kraft des Wasserdampfes, die Kraft des elektrischen Stromes, die Muskelkraft des Menschen und der Tiere u. s. w.

### 2) Mass einer Kraft.

2) Um die Grösse einer Kraft angeben zu können, muss man wissen, welche Bewegungsgrösse sie einem Körper in einer bestimmten Zeit zu erteilen, bezw. welchen Druck sie auf ihn auszuüben im Stande ist. Man vergleicht zweckmässig die Grösse einer Kraft mit der Grösse der Gewichtseinheit. Man spricht also z. B. von einer Kraft von 1 Kilogramm, von einer Kraft von 200 Kilogramm u. dergl.

Damit die Wirkungsweise einer Kraft bestimmt werden kann, muss man von ihr kennen: 1) die Grösse, 2) den Angriffspunkt, d. h. diejenige Stelle des Körpers, auf welche die Kraft unmittelbar einwirkt, 3) die Richtung, in welcher die Kraft thätig ist.

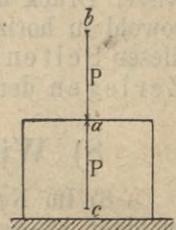
### 3) Bildliche Darstellung und Bezeichnung einer Kraft.

3) Es ist üblich eine Kraft der Grösse und Richtung nach durch die Grösse und Richtung einer geraden Linie darzustellen; dabei muss zwischen dem Längen- und Kraftmassstab ein bekannter Zusammenhang bestehen. Soll beispielsweise eine Länge von 1 mm eine Kraft von 100 kg darstellen, so wird eine Kraft von 1000 kg gegeben sein durch eine Länge von 10 mm. Die Richtung, in welcher die Kraft auf einen Körper wirkt, wird durch den Richtungspfeil angedeutet.

Der Angriffspunkt wird besonders benannt. Die Kraft selbst bezeichnet man in der Regel durch einen Buchstaben des grossen lateinischen Alphabets, z. B.  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  u. s. w.

In der Figur 1 ist demnach eine Kraft  $P$  dargestellt, deren Angriffspunkt in  $a$  liegt, welche im Sinne des Pfeiles in der Linie  $ab$  wirkt und eine Grösse gleich der Linie  $\overline{ab}$  bezw.  $\overline{ac}$  besitzt. Die gerade Linie, in welcher eine Kraft wirkt, heisst ihre Richtungslinie.

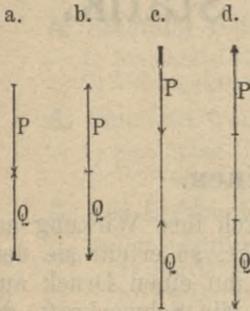
Figur 1.



#### 4) Wirkung und Gegenwirkung.

4) Wirkt eine Kraft  $P$  in einem Punkte  $a$  in der Linie  $ab$ , s. Figur 1, auf einen Körper, so erfährt sie von dem letzteren eine Gegenwirkung im Sinne  $ca$  von derselben Grösse wie  $ab$ . Man nennt diese Wirkung den Gegendruck oder die Reaktion des Körpers gegenüber der Kraft  $P$ .

Figur 2.



#### 5) Gleichgewicht.

5) Wirken zwei Kräfte von der gleichen Grösse aber in entgegengesetztem Sinne in derselben geraden Linie, so nennt man diesen Zustand Gleichgewicht. Dabei können die beiden Kräfte die Lage haben, wie sie durch Figur 2, a—d dargestellt sind; in allen den vier Fällen sagt man, die Kräfte  $P$  und  $Q$  sind im Gleichgewicht.

**Anmerkung 1.** Der Angriffspunkt einer Kraft ist in ihrer Richtungslinie beliebig verlegbar, d. h. an keine bestimmte Stelle in derselben gebunden.

#### 6) Begriff der Statik.

6) Die Statik hat die Aufgabe, die Bedingungen festzustellen, unter welchen Kräfte, die in bestimmter Weise auf einen Körper einwirken, unter sich im Gleichgewicht sind: „Die Statik ist daher die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte.“

#### 7) Resultante oder Mittelkraft von gegebenen Kräften.

7) Wirken auf einen Körper beliebig viele Kräfte ein, so kann man sich fragen, ob es nicht möglich ist, eine Kraft zu ermitteln, welche für sich allein dieselbe Wirkung ausübt, wie die gegebenen Kräfte zusammen; gelingt dies, so nennt man diese Kraft die Resultante oder Resultierende, oder auch die Mittelkraft der gegebenen Kräfte; letztere selbst heissen Seitenkräfte oder Komponenten.

Das Aufsuchen der Resultante von gegebenen Kräften heisst das Zusammensetzen der Kräfte. Sehr häufig begegnet man in der Technik auch der umgekehrten Aufgabe: Die Wirkungsweise einer Kraft, die in einer bekannten Richtung auf einen Körper einwirkt, in bestimmten anderen gegebenen Richtungen zu ermitteln.

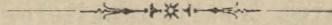
So wird z. B. durch die Strebe eines Hänge- oder Sprengwerkes ein gewisser Druck auf das die Strebe stützende Auflager übertragen, welcher sich sowohl in horizontalem, wie in vertikalem Sinne äussern kann. Das Aufsuchen dieser Seitenkräfte oder Komponenten aus gegebenen Kräften heisst das Zerlegen der Kräfte.

#### 8) Wirkungsweise von Kräften auf einen Körper.

8) Im Nachfolgenden sollen nur Kräfte besprochen werden, die unter sich in einer Ebene liegen; unter dieser Voraussetzung können die Kräfte in folgender Weise auf einen Körper einwirken.

Die Kräfte besitzen entweder alle einen gemeinsamen Angriffspunkt, oder aber verschiedene Angriffspunkte und wirken

- a) in einer geraden Linie,
- b) in verschiedenen geraden Linien.



## B. Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte.

### 1) Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt und derselben Richtungslinie.

9) Es sind zwei Fälle denkbar, entweder haben die Kräfte den gleichen Richtungspfeil, siehe Figur 3a, oder aber es sind die Richtungspfeile entgegengesetzt, siehe Figur 3b.

Im ersten Falle besitzen die Kräfte eine Resultante gleich der Summe der gegebenen Kräfte, mit der gleichen Richtungslinie und dem gleichen Richtungspfeil wie die gegebenen Kräfte. Heisst diese Resultante  $R$ , so ist:

$$1) \dots R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

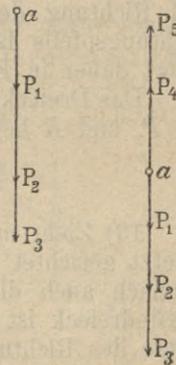
Im zweiten Falle ist gleichfalls eine Resultante vorhanden, die man erhält, wenn man die Kräfte, die im gleichen Sinne wirken, addiert und die sich ergebenden Summen subtrahiert; man erhält dann für  $R$  die Beziehung:

$$2) \dots R = P_1 + P_2 + P_3 \dots - (P_4 + P_5 + P_6 \dots)$$

Einen Ausdruck von der Form der rechten Seite der Gleichung 2) nennt man eine algebraische Summe.

„Die Resultante von Kräften, welche den Angriffspunkt und die Richtungslinie gemeinsam haben, aber entgegengesetzte Richtungspfeile besitzen ist gleich der algebraischen Summe der einzelnen Kräfte; ihr Richtungspfeil bestimmt sich nach dem Wert der Summe. Ist der Wert der algebraischen Summe gleich Null, so sind die Kräfte im Gleichgewicht.“

Figur 3a und 3b.

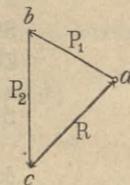


### 2) Kräfte mit einem gemeinsamen Angriffspunkt und verschiedenen Richtungslinien.

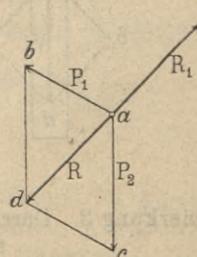
#### a) Zwei Kräfte, Kräfteparallelogramm, Kräftedreieck.

10) Sind durch  $\overline{ab}$  und  $\overline{ac}$  die beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  dargestellt, siehe Figur 4, so erhält man ihre Resultante  $R$  durch die Diagonale  $ad$  des mit den beiden Linien  $\overline{ab}$  und  $\overline{ac}$  als Seiten gebildeten Parallelogramms. Die Richtung von  $a$  nach  $d$  gegeben, der Richtungspfeil demnach wie in der Figur 4, einzuzeichnen.

Figur 5.



Figur 4.



**Anmerkung 2.** Das in Figur 4 gezeichnete Parallelogramm führt die Bezeichnung: „Parallelogramm der Kräfte“ oder auch: „Kräfteparallelogramm.“

11) In Rücksicht auf Anmerkung 2 kann man sagen: „Die Resultante zweier Kräfte mit verschiedenen Richtungslinien und gemeinsamem Angriffspunkt ist gleich der Diagonale des mit den Kräften als Seiten gebildeten Kräfteparallelogramms.“ Die Spitze des Richtungspfeils ist der dem Angriffspunkt gegenüberliegenden Ecke des Kräfteparallelogramms zugekehrt; eine solche Diagonale ist stets vorhanden, die Kräfte sind also niemals im Gleichgewicht.

12) Macht man, siehe Figur 5, die Linie  $\overline{ab}$  gleich und parallel der Kraft  $P_1$ , ebenso die Linie  $\overline{bc}$  gleich und parallel der Kraft  $P_2$  und zwar so, dass die Richtung von  $a$  nach  $b$  dem Richtungspfeile von  $P_1$ , die Richtung von  $b$  nach  $c$  dem Richtungspfeile von  $P_2$  gleich ist, so gibt die Linie  $\overline{ac}$  die Grösse und Richtung der Resultante  $R$  der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  an. Die Spitze des Richtungspfeils ist dem Punkte  $c$  zugekehrt. Eine Parallele durch  $a$  zu  $ac$  liefert daher in Figur 4 die Resultante  $R$  der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  der Lage nach.

Das Dreieck  $abc$ , dessen Seiten gleich und gleich gerichtet sind den Kräften  $P_1$ ,  $P_2$  und  $R$  heisst das Kräftedreieck dieser Kräfte.

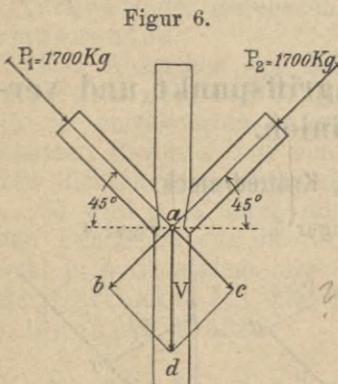
### b) Gleichgewicht dreier Kräfte.

13) Zieht man durch  $a$ , siehe Fig. 4, eine Kraft  $R_1$  gleich und entgegengesetzt gerichtet der Kraft  $R$ , so sind die Kräfte  $R$  und  $R_1$  im Gleichgewicht, demnach auch die Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $R_1$ . Das zu diesen Kräften gehörige Kräftedreieck ist wieder das Dreieck  $abc$ , siehe Figur 5, es ist aber jetzt die Spitze des Richtungspfeiles von  $ca$  dem Punkte  $a$  zugekehrt.

„Sollen drei Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt und verschiedenen Richtungslinien im Gleichgewicht sein, so muss sich mit ihnen ein Dreieck  $abc$  konstruieren lassen, dessen Seiten gleich und gleich gerichtet den gegebenen Kräften sind.“

Durchläuft man die Seiten dieses Dreiecks von einer Ecke  $a$  aus in demselben Sinne, so gibt die Bewegungsrichtung die Richtungspfeile der drei Kräfte an.

### c) Übungsaufgaben.



14) **Aufgabe 1.** Von den unter  $45^\circ$  gegen die Horizontale geneigten Streben eines Sprengwerkes wird auf eine vertikale Säule je ein Druck von 1700 kg übertragen. Wie gross ist der gesamte Vertikaldruck auf die Säule?

**Auflösung.** Die Richtungslinien der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  schneiden sich, s. Figur 6, im Punkte  $a$ . Von  $a$  aus trägt man auf der gegebenen Richtungslinie im Sinne der Pfeile die Kräfte nach  $\overline{ab}$  und  $\overline{bc}$  an, 1 mm gleich 150 kg und konstruiert das Parallelogramm  $abcd$ , so gibt die Diagonale  $\overline{ad}$  den gesuchten Vertikaldruck  $V$  an.

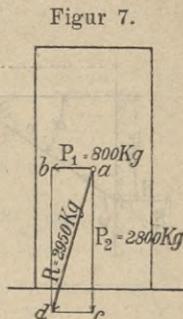
Bei dem gewählten Massstabe ist  $\overline{ad} = 16$  mm, daher  $V = 16 \cdot 150 = 2400$  kg

**Anmerkung 3.** Durch Rechnung lässt sich die Grösse von  $V$  wie folgt ermitteln. Es ist:

$$V = 2 P \cos 45^\circ = 2 \cdot 1700 \cdot 0,70711 = 2404 \text{ kg.}$$

15) **Aufgabe 2.** Im Punkte  $a$ , siehe Figur 7, wirkt auf eine Mauer eine horizontale Kraft  $P_1 = 800 \text{ kg}$  und eine vertikale Kraft  $P_2 = 2800 \text{ kg}$ ; es ist die Grösse und Lage der Resultante dieser beiden Kräfte zu ermitteln.

**Auflösung.** Macht man, vorausgesetzt dass  $1 \text{ mm} = 150 \text{ kg}$  darstellt, die Horizontale  $\overline{ab} = 5,3 \text{ mm}$ , die Vertikale  $\overline{ac} = 18,6 \text{ mm}$  und konstruiert das Parallelogramm  $abcd$ , so gibt die Diagonale  $\overline{ad}$  die gesuchte Resultante  $R$ ; es ist  $\overline{ad} = 19,6 \text{ mm} = 19,6 \cdot 150 = 2940 \text{ kg}$ .



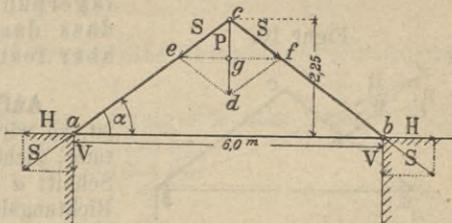
**Anmerkung 4.** Durch Rechnung erhält man:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{800^2 + 2800^2} = 2912 \text{ kg}$$

16) **Aufgabe 3.** Im Firstpunkte  $c$  eines Dachbinders, siehe Figur 8, wirkt ein vertikaler Druck  $P = \overline{cd}$ . Wie gross ist der hierdurch in den Sparren hervorgerufene Druck  $S$  und wie überträgt sich letzterer auf die Auflager  $a$  und  $b$ ?

**Auflösung.** Man konstruiert mit  $\overline{cd}$  als Diagonale das Parallelogramm  $cdfe$ , so erhält man in  $\overline{ce}$  die Grösse des Sparrendrucks  $S$ . Verlegt man den Angriffspunkt  $c$  von  $S$  nach  $a$ , so lässt sich  $S$  in eine horizontale Komponente  $H$  und in eine vertikale Komponente  $V$  zerlegen.  $H$  bezeichnet den Horizontalschub,  $V$  den Vertikaldruck des Sparrens auf das Auflager.

Figur 8.



**Anmerkung 5.** Bezeichnet  $\alpha$  den Neigungswinkel des Daches gegen die Horizontale, so findet man den Sparrendruck durch Rechnung wie folgt. Es ist:

$$S = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$

Aus der Figur 8 erkennt man ferner, dass die Strecke  $\overline{eg} = H$  und  $\overline{cg} = V$  sein muss; man hat also die weiteren Beziehungen:

$$H = S \cos \alpha = \frac{P \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{P}{2} \cotg \alpha$$

17) **Aufgabe 4.** Für das in Aufgabe 3 behandelte Beispiel sei  $P = 1500 \text{ kg}$ . Wie gross sind  $S$ ,  $H$  und  $V$ ?

**Auflösung.** Nimmt man  $1 \text{ mm} = 150 \text{ kg}$ , so hat man  $\overline{cd} = 10 \text{ mm}$  anzutragen und das Parallelogramm  $cdfe$  zu konstruieren. Man entnimmt dann der Figur 8 durch Messung  $\overline{ce} = 8 \text{ mm}$ , also  $S = 1200 \text{ kg}$ ;  $\overline{eg} = 6,66 \text{ mm}$ , also  $H = 1000 \text{ kg}$  und  $V = 750 \text{ kg}$ .

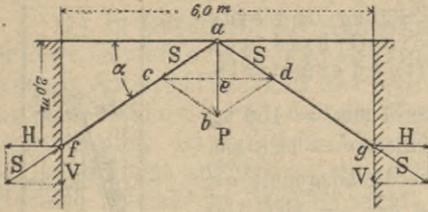
**Anmerkung 6.** Durch Rechnung findet man unter der Voraussetzung, dass  $\alpha = 36^\circ 50'$  ist:

$$S = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \frac{1500}{2 \cdot \sin 36^\circ 50'} = \frac{1500}{2 \cdot 0,59949} = 1250 \text{ kg}$$

$$H = \frac{P}{2} \cotg 36^\circ 50' = 750 \cdot 7,33511 = 1000 \text{ kg}$$

18) **Aufgabe 5.** Im Punkte  $a$  eines einfachen Sprengwerkes, s. Figur 9, ist eine vertikale Last  $P = 1500 \text{ kg}$  aufzunehmen. Welche Beanspruchungen erfahren die Streben  $af$  und  $ak$ , sowie die Auflager in den Punkten  $f$  und  $k$ ?

Figur 9.



**Auflösung.** Ist  $\overline{ab} = F$ , so erhält man mittels des Parallelogramms  $acbd$  den Strebendruck  $S$ ; dieser zerlegt sich in den Punkten  $f$  und  $g$  in den Horizontalschub  $H$  und den Vertikaldruck  $V$ . Unter der Voraussetzung, dass 1 mm = 150 kg sein soll, findet man durch Messung aus der Zeichnung:

$$S = 8,66 \text{ mm} = 1300 \text{ kg}$$

$$H = 7,33 \text{ mm} = 1100 \text{ kg}$$

$$V = 5 \text{ mm} = 750 \text{ kg}$$

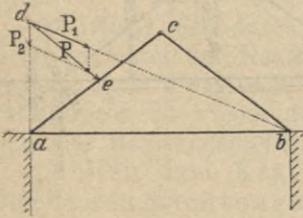
**Anmerkung 7.** Durch Rechnung erhält man:

$$S = \frac{P}{2 \sin \alpha}; \quad H = \frac{P}{2} \cot \alpha; \quad V = \frac{P}{2}$$

Man rechne das vorstehende Beispiel aus unter der Voraussetzung, dass der Winkel  $\alpha = 33^\circ 40'$  betragen soll.

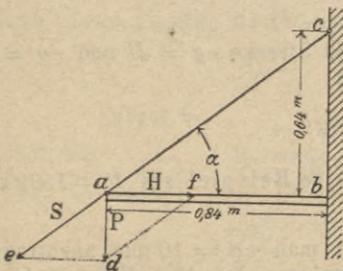
19) **Aufgabe 6.** Auf den Dachbinder, siehe Figur 10, wirkt im Punkte  $e$  der Winddruck  $P$  wie angegeben. Wie gross sind die Drücke auf die Auflagerpunkte  $a$  und  $b$  unter der Voraussetzung, dass das Auflager in  $a$  beweglich, jenes in  $b$  aber fest sein soll?

Figur 10.



**Auflösung.** Wenn das Auflager in  $a$  beweglich ist, so wirkt der Druck auf dasselbe in vertikaler Richtung; zieht man also durch  $a$  die Vertikale  $ad$  bis zum Schnitt  $d$  mit der Richtungslinie von  $P$ , so ist  $db$  die Richtungslinie für den Auflagerdruck in  $b$ . Mittels des Kräfteparallelogramms mit  $P$  als Diagonale ergeben sich die Auflagerdrücke  $P_1$  und  $P_2$ , siehe Figur 10.

Figur 11.



20) **Aufgabe 7.** Auf einen Träger  $\overline{ab}$ , siehe Figur 11, der im Punkte  $a$  mittels einer Zugstange  $ac$  aufgehängt ist, wirkt im Punkte  $a$  eine vertikale Last  $P$ . Wie äussert sich dieselbe auf die Zugstange und den Träger?

**Auflösung.** Man wählt die Kraft  $P$  als Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten mit  $ac$  und  $ab$  zusammenfallen; man erhält dann für die Zugstange die Beanspruchung  $S$ , für den Balken den Horizontalschub  $H$ .

**Anmerkung 8.** Durch Rechnung findet man, unter  $\alpha$  den Winkel von Träger und Zugband verstanden:

$$S = \frac{P}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad H = P \cot \alpha$$

21) **Aufgabe 8.** Für das in Aufgabe 7 behandelte Beispiel sei  $P = 1300 \text{ kg}$ ; wie gross sind  $H$  und  $S$ ?

**Auflösung.** Nimmt man 1 mm = 150 kg, so hat man, s. Figur 11,  $\overline{ad} = 8,66 \text{ mm}$  anzutragen und das Parallelogramm  $aedf$  zu konstruieren. Man erhält dann:

$$S = 14,3 \text{ mm} = 2150 \text{ kg} \quad H = 11,3 \text{ mm} = 1700 \text{ kg}$$

Durch Rechnung findet man:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{64}{84}; \quad \alpha = 37^{\circ} 20'$$

daher ist:

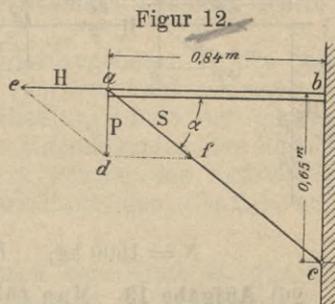
$$S = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{1300}{\sin 37^{\circ} 20'} = \frac{1300}{0,60645} = 3143 \text{ kg}$$

und

$$H = P \cot \alpha = P \cot 37^{\circ} 20' = 1300 \cdot 1,31111 = 1704 \text{ kg}$$

22) **Aufgabe 9.** Auf einen Träger  $ab$ , siehe Figur 12, der im Punkte  $a$  durch eine Strebe unterstützt ist, wirkt in  $a$  eine Last  $P$ ; wie äussert sich dieselbe auf die Strebe und den Träger?

**Auflösung.** In gleicher Weise wie in Aufgabe 7 ergibt sich im vorliegenden Falle mittels des Kräfteparallelogramms  $aedf$ , der Strebendruck  $S$  und der Horizontalschub  $H$ .



**Anmerkung 9.** Durch Rechnung findet man:

$$S = \frac{P}{\sin \alpha}, \quad H = P \cot \alpha$$

23) **Aufgabe 10.** Für das in Aufgabe 9 behandelte Beispiel sei  $P = 1300 \text{ kg}$ . Wie gross sind  $S$  und  $H$ ?

**Auflösung.** Aus der Zeichnung entnimmt man, vorausgesetzt dass  $1 \text{ mm} = 150 \text{ kg}$  entsprechen soll,

$$S = 14,1 \text{ mm} = 14,1 \cdot 150 = 2115 \text{ kg}$$

$$H = 11,1 \text{ mm} = 11,1 \cdot 150 = 1668 \text{ kg}$$

Durch Rechnung erhält man:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{65}{84} = 0,77388; \quad \alpha = 37^{\circ} 54'$$

es ist somit:

$$S = \frac{13}{\sin 37^{\circ} 54'} = \frac{1300}{0,61424} = 2116 \text{ kg}$$

$$H = 1300 \cdot \cot 37^{\circ} 54' = 1300 \cdot 1,28456 = 1660 \text{ kg}$$

24) **Aufgabe 11.** In den Punkten  $e$  und  $f$ , siehe Figur 13, eines doppelten Hängewerkes hat jede Hängesäule eine Last von  $900 \text{ kg}$  aufzunehmen und auf die Auflager  $a$  und  $b$  zu übertragen. Wie werden die einzelnen Konstruktionsteile beansprucht?

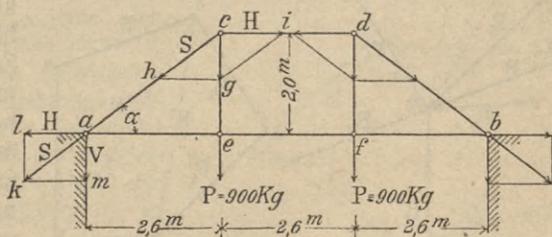
**Auflösung.** Durch die Hängesäule  $ce$  wird die Last  $P$  nach dem Punkte  $c$  übertragen, woselbst sie sich mittels des Parallelogramms  $chgi$  in die Seitenkräfte  $S$  und  $H$  zerlegt; erstere Kraft wird durch die Strebe  $ac$  nach dem Auflagerpunkte  $a$  übertragen und zerlegt sich daselbst in den Horizontalschub  $H$  und den Vertikaldruck  $V$ . Die in  $c$  wirkende Horizontalkraft  $H$  wird durch den Spannriegel  $cd$  des Hängewerkes aufgenommen. Bei dem gewählten Kräftemassstab  $1 \text{ mm} = 150 \text{ kg}$  findet man:

$$H = 8 \text{ mm} = 8 \cdot 150 = 1200 \text{ kg} \quad S = 10 \text{ mm} = 10 \cdot 150 = 1500 \text{ kg} \quad V = 900 \text{ kg}$$

**Anmerkung 10.** Durch Rechnung ergibt sich:

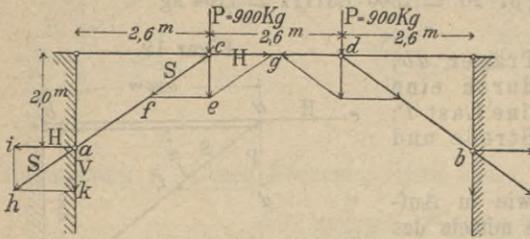
$$S = \frac{P}{\sin \alpha} \quad H = P \cot \alpha \quad V = P$$

Figur 13.



25) **Aufgabe 12.** In den Punkten  $a$  und  $b$  eines doppelten Sprengwerkes, siehe Figur 14, wirkt je eine Last  $P = 900$  kg, welche auf die Auflagerpunkte  $a$  und  $b$  zu übertragen ist; wie werden die einzelnen Konstruktionsteile beansprucht?

Figur 14.



$$S = 1500 \text{ kg}, \quad H = 1200 \text{ kg}, \quad V = P = 900 \text{ kg}$$

**Auflösung.** Mittels des Parallelogramms  $cfeg$ , in welchem die Diagonale  $ce = P$  ist, zerlegt sich  $P$  in die Seitenkräfte  $S$  und  $H$ ;  $S$  wird durch die Strebe  $ac$  nach dem Auflager  $a$  übertragen; und zerlegt sich daselbst wieder in die Horizontalkraft  $H$  und den Vertikaldruck  $V$ ; die in  $c$  wirkende Horizontalkraft  $H$  wird durch den Spanriegel aufgenommen.

Unter Annahme eines Kräfte-  
massstabes  $1 \text{ mm} = 150 \text{ kg}$  erhält man:

26) **Aufgabe 13.** Man führe die in den Aufgaben 10 und 11 behandelten Beispiele durch Rechnung aus.

**Auflösung.** Auf Grund der gegebenen Ausmasse ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,76923, \quad \alpha = 37^{\circ} 34'$$

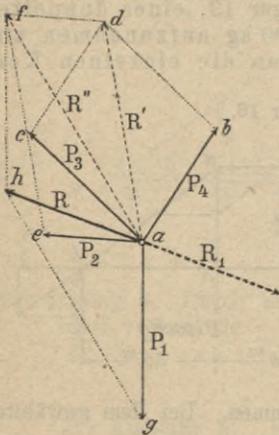
daher:

$$S = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{900}{0,69968} = 1272 \quad H = P \cot \alpha = 900 \cdot 1,30011 = 1170 \text{ kg}$$

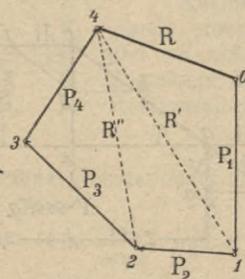
#### d) Beliebig viele Kräfte, Kräftepolygon.

27) Man erhält in diesem Falle die Resultante, wenn man zunächst irgend zwei der Kräfte, z. B.  $P_3$  und  $P_4$ , siehe Figur 15, mittels des Parallelogramms  $abcd$  zu einer Resultante  $R'$  vereinigt, hierauf  $R'$  und eine weitere gegebene Kraft, z. B.  $P_2$  zu einer Resultante  $R''$  zusammensetzt und so fortfährt, bis schliesslich alle gegebenen Kräfte zu einer Resultante  $R$  zusammengefasst sind.

Figur 15.



Figur 16.



Die angegebene Konstruktion ist unter Umständen wenig empfehlenswert, weil es vorkommen kann, dass einzelne Ecken der zu konstruierenden Parallelogramme über den verfügbaren Teil des Zeichnungsblattes hinausfallen, also unzugänglich werden. Die wiederholte Konstruktion des Kräfte-dreiecks führt einfacher und zweckmässiger zum Ziele. Trägt man nämlich, siehe Figur 16, zwei Strecken  $\overline{2\cdot3}$  und  $\overline{3\cdot4}$  gleich und gleich gerichtet den Kräften  $P_3$  und  $P_4$  nacheinander an, so gibt die Linie  $\overline{2\cdot4}$ , die Grösse und Richtung

der Resultante von  $P_3$  und  $P_4$  an. Zeichnet man etwa die Strecke  $\overline{2\cdot1}$  gleich und gleich gerichtet der Kraft  $P_2$  und zieht  $\overline{1\cdot4}$ , so ist durch  $\overline{1\cdot4}$  Grösse und Richtung der Resultante von  $P_3$ ,  $P_4$  und  $P_2$  dargestellt. Zieht man endlich  $\overline{2\cdot0}$

gleich und gleich gerichtet der Kraft  $P_1$ , so gibt die Verbindungslinie  $\overline{0\cdot4}$  die Grösse und Richtung der Resultante der vier Kräfte  $P_4, P_3, P_2$  und  $P_1$  an.

Eine Parallele durch  $a$ , Figur 15, zu  $\overline{0\cdot4}$ , Figur 16, liefert diese Resultante selbst.

Der Linienzug  $0, 1, 2, 3, 4$ , dessen Seiten gleich und gleich gerichtet den Kräften  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sind, bildet ein offenes Polygon; schliesst man dasselbe durch die Linie  $\overline{0\cdot4}$ , so stellt der letztere die Resultante obiger Kräfte der Grösse und Richtung nach dar.

Dieses Polygon heisst das Kräftepolygon der gegebenen Kräfte und die Linie  $\overline{0\cdot4}$  ist seine Schlusslinie. Durchläuft man von dem Punkte  $a$  ausgehend, den Umfang des Kräftepolygons im Sinne der Richtungspfeile der gegebenen Kräfte, so gelangt man nach dem Punkte 4. Der Richtungspfeil der Resultante ist nun entgegengesetzt der Bewegungsrichtung, in welcher das Kräftepolygon durchlaufen wurde. Man kann diese Bewegungsrichtung den Umfahrungsinn des Kräftepolygons nennen.

28) Fügt man zu den gegebenen Kräften noch eine Kraft  $R_1$  gleich und entgegengesetzt gerichtet der Resultante  $R$  hinzu, so sind die sämtlichen Kräfte unter sich im Gleichgewicht. Die Linie  $R_1$  im Kräftepolygon erhält aber nun einen dem vorigen entgegengesetzten Richtungspfeil und das Kräftepolygon wird ein geschlossenes sein.

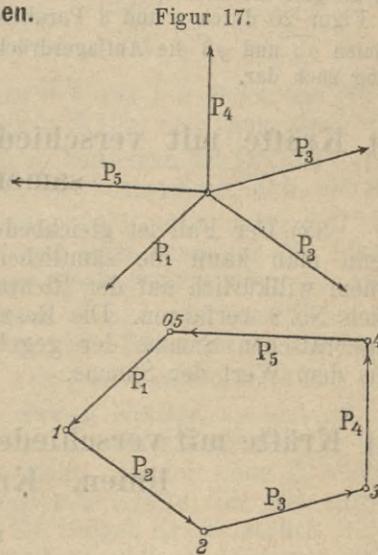
„Beliebig viele Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt sind im Gleichgewicht, wenn ihre Resultante gleich Null ist und dies ist der Fall, wenn das aus den Kräften konstruierte Kräftepolygon sich schliesst; es wird dann sein Umfang vom Richtungspfeile der Kräfte in demselben Sinne durchlaufen.“

e) Übungsaufgaben.

29) **Aufgabe 14.** Es sind vier Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  mit demselben Angriffspunkte gegeben, s. Figur 17, man soll eine Kraft  $P_5$  so bestimmen, dass sie den gegebenen Kräften das Gleichgewicht hält.

**Auflösung.** Man trägt die Seiten  $\overline{0\cdot1}, \overline{1\cdot2}, \overline{2\cdot3}, \overline{3\cdot4}$

beziehungsweise gleich und gleich gerichtet den Kräften  $P_1$  bis  $P_4$  nacheinander an, siehe Figur 18, und zeichnet die Schlusslinie  $\overline{4\cdot0}$  des Kräftepolygons. Nimmt man die Spitze des Richtungspfeils der Schlusslinie dem Anfangspunkt  $o$  zugekehrt und zeichnet durch den Angriffspunkt der gegebenen Kräfte, siehe Figur 17, gleich und gleich gerichtet zu  $\overline{4\cdot0}$ , siehe Figur 18, die Kraft  $P_5$ , so stellt diese die gesuchte Kraft dar.



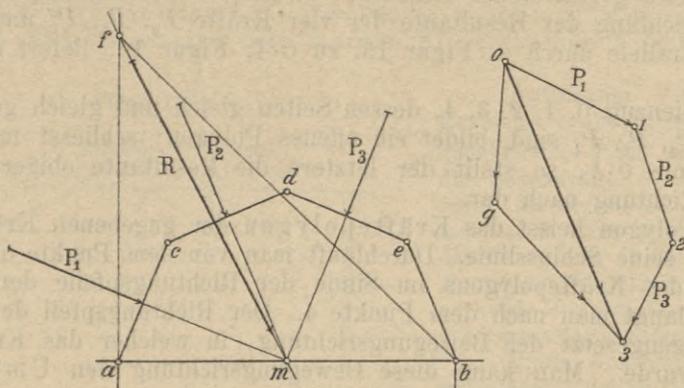
Figur 18.

30) **Aufgabe 15.** In den Mitten der Seiten eines Dachbinders von der in Figur 19 dargestellten Form, wirken die zu den Seiten normalen Drücke  $P_1, P_2$  und  $P_3$ . Man soll die Resultante der drei Kräfte ermitteln.

**Auflösung.** Da die Kräfte normal zu den Seiten  $ac, cd$  und  $de$  gerichtet sind, so schneiden sich deren Richtungslinien im Mittelpunkte  $m$ . Man kann daher die sämtlichen

Figur 19.

Figur 20.



Kräfte mit ihren Angriffspunkten nach dem Punkte  $m$  verlegen, dann wird auch die Resultante durch den Punkt  $m$  hindurchgehen. Zeichnet man daher das Kräftepolygon  $0\cdot 1$ ,  $2\cdot 3$ , siehe Figur 20, so gibt dessen Schlusslinie  $0\cdot 3$  die Grösse und die Richtung der gesuchten Resultante  $R$  an. Dieselbe ist durch den Punkt  $m$  gleich und gleich gerichtet der Schlusslinie  $0\cdot 3$  zu ziehen.

31) **Aufgabe 16.** Unter Bezugnahme auf das in Aufgabe 14 behandelte Beispiel sind die Auflagerdrücke der Resultante  $R$  auf die Auflager  $a$  und  $b$  zu ermitteln, wenn  $a$  als bewegliches und  $b$  als festes Auflager vorausgesetzt sein soll.

**Auflösung.** Man zieht in  $a$ , siehe Figur 19, die Vertikale bis zum Schnitt  $f$  mit  $R$ , so gibt die Linie  $fb$  die Richtungslinie des Auflagerdruckes in  $b$  an. Zieht man nun in Figur 20 durch  $o$  und  $3$  Parallele zu  $af$  und  $fb$  bis zum Schnitt in  $g$ , so stellen die Linien  $og$  und  $g3$  die Auflagerdrücke in den Punkten  $a$  und  $b$  der Grösse und Richtung nach dar.

### 3) Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und gemeinsamer Richtungslinie.

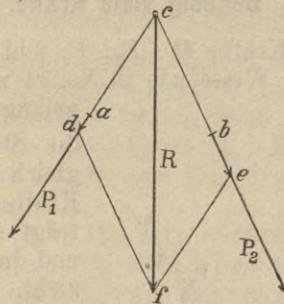
32) Der Fall ist gleichbedeutend mit dem unter No. 9 behandelten Falle, denn man kann die sämtlichen Angriffspunkte der gegebenen Kräfte nach einem willkürlich auf der Richtungslinie gewählten Punkt verlegen und hierauf nach No. 9 verfahren. Die Resultante der gegebenen Kräfte ist also gleich der algebraischen Summe der gegebenen Kräfte; ihr Richtungspfeil bestimmt sich aus dem Wert der Summe.

### 4) Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und Richtungslinien. Kräfte- und Seilpolygon.

#### a) Zwei Kräfte.

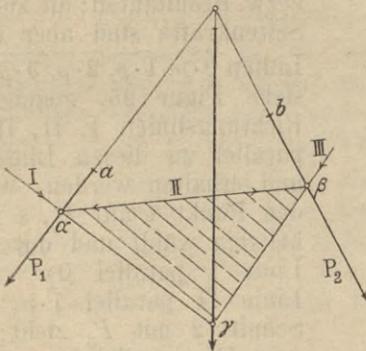
33) Da der Angriffspunkt einer Kraft in ihrer Richtungslinie beliebig verlegt werden kann, so verlängert man, siehe Figur 21, die Richtungslinien der beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  bis zu ihrem Schnittpunkt  $c$ , verlegt ihren Angriffspunkt nach  $c$  und konstruiert das Parallelogramm  $cdef$ , so ist dessen Diagonale  $cf$  die gesuchte Resultante  $R$  der beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ . Die vorstehende Konstruktion ist unbrauchbar, wenn der Schnittpunkt  $c$  der Richtungslinien der

Figur 21.

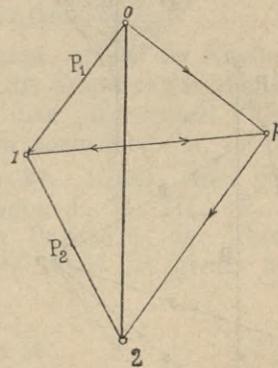


gegebenen Kräfte unzugänglich ist; in diesem Falle gelangt man zu einer zweckmässigeren Bestimmung der Resultante auf die folgende Weise:

Figur 22.



Figur 23.



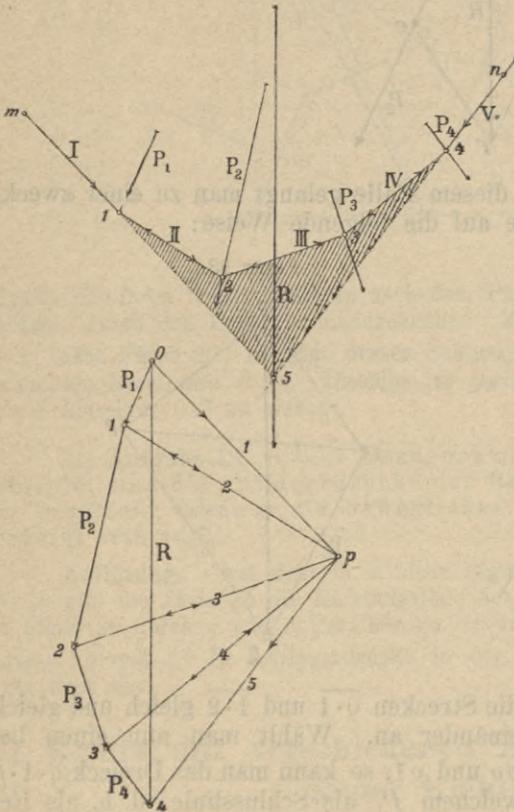
34) Man trägt, siehe Figur 23, die Strecken  $\overline{o1}$  und  $\overline{12}$  gleich und gleich gerichtet den Kräften  $P_1$  und  $P_2$  aneinander an. Wählt man nun einen beliebigen Punkt  $p$  und zieht die Linien  $\overline{po}$  und  $\overline{p1}$ , so kann man das Dreieck  $o1p$  als ein Kräfte-dreieck auffassen, in welchem  $P_1$  als Schlusslinie, d. h. als Resultante von zweien Kräften  $\overline{op}$  und  $\overline{p1}$  auftritt; wählt man daher auf der Kraft  $P_1$ , siehe Figur 22, den Punkt  $\alpha$  beliebig und zieht durch ihn die Linien I und II parallel zu  $op$  und  $1p$ , so stellen diese die Richtungslinien von zwei Seitenkräften dar, deren Grössen durch die Längen  $\overline{op}$  und  $\overline{p1}$ , siehe Figur 23, gegeben sind und in welche die Kraft  $P_1$  zerlegt ist. Zieht man in Figur 23 auch noch die Linie  $\overline{p2}$  und nimmt das Dreieck  $12p$  als Kräfte-dreieck mit  $\overline{12}$  oder  $P_2$  als Schlusslinie, bzw. Resultante von zweien Kräften  $\overline{1p}$  und  $\overline{p2}$ , so findet man die Kräfte selbst, wenn man II bis zum Schnitt  $\beta$  mit  $P_2$  verlängert und durch  $\beta$  die Parallele III zu  $p2$  zieht. In der Linie II wirken nun zwei gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Kräfte, die sich gegenseitig aufheben und es bleiben nur die in I und III tätigen Kräfte zurück, deren Resultante durch den Schnittpunkt  $\gamma$  von I und III parallel zur Linie  $o2$ , siehe Figur 23, hindurchgehen muss. Diese Resultante ist aber zugleich die Resultante der gegebenen Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ . Ihre Grösse und ihr Richtungspfeil ist aus Figur 23 zu entnehmen.

**Anmerkung 11.** Da der Punkt  $p$  ganz beliebig wählbar ist, so kann er stets so angenommen werden, dass der Schnittpunkt  $\gamma$  der Linien I und II leicht zugänglich ist.

## b) Beliebige viele Kräfte.

35) Sind beliebig viele Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$ , siehe Figur 24, gegeben, so kann man in gleicher Weise wie in No. 34 zur Resultante dieser Kräfte

Figur 24.



Figur 25.

punkt 5 dieser Linie, parallel zur Linie  $0 \cdot 4$ , siehe Figur 25, hindurchgehen muss. Diese Resultante ist aber zugleich die Resultante  $R$  der gegebenen Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$ ; ihre Grösse sowie ihr Richtungspfeil sind aus Figur 25 zu entnehmen.

36) Die Linien I bis V, siehe Figur 24, bilden ein Polygon, das für die Folge ein Seilpolygon der Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$  genannt werden soll; das Polygon  $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0$ , siehe Figur 25, ist das zu dem Seilpolygon gehörige Kräftepolygon; der Punkt  $p$  heisst sein Pol und die Linie  $p \cdot 0, p \cdot 1, p \cdot 2 \dots$  heissen Polstrahlen.

Die Seiten des Seilpolygons sind beziehungsweise parallel zu den Polstrahlen des Kräftepolygons; die Längen der Polstrahlen bestimmen die Grössen der in den Seiten des Seilpolygons wirkenden Kräfte.

Die Bezeichnung Seilpolygon rührt davon her, dass ein in zwei beliebigen Punkten  $m$  und  $n$  aufgehängtes Seil unter der Einwirkung von äusseren, in den Punkten 1, 2, 3, 4 thätigen Kräften  $P_1, P_2, P_3, P_4$  die in Figur 24 gezeichnete

gelangen, wenn man, s. Figur 25, die Strecken  $0 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4$  gleich und gleich gerichtet den Kräften  $P_1$  bis  $P_4$  aneinander anträgt, einen Punkt  $p$  beliebig wählt und die Linien  $p \cdot 0, p \cdot 1, p \cdot 2, p \cdot 3, p \cdot 4$  zieht.

Hierdurch entstehen die Kräfte-dreiecke  $0 \cdot 1 \cdot p, 1 \cdot 2 \cdot p, 2 \cdot 3 \cdot p, 3 \cdot 4 \cdot p$  mit den Linien  $0 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3$  und  $3 \cdot 4$  als Schlusslinien bzw. Resultanten; die zugehörigen Seitenkräfte sind aber durch die Linien  $0 \cdot p, 1 \cdot p, 2 \cdot p, 3 \cdot p$  und  $4 \cdot p$ , siehe Figur 25, gegeben, deren Richtungslinien I, II, III, IV, V parallel zu diesen Linien laufen und erhalten werden, wenn man den Punkt 1 auf  $P_1$ , s. Figur 24, beliebig wählt und durch ihn die Linie I parallel  $0 \cdot p$ , dann die Linie II parallel  $1 \cdot p$ , bis zum Schnitt 2 mit  $P_2$  zieht; durch 2 geht III parallel zu  $2 \cdot p$  bis zum Schnitt 3 mit  $P_3$  u. s. w.

In den Linien II, III und IV wirken je zwei gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Kräfte, die sich aufheben, so dass nur die Kräfte in I und V übrig bleiben, deren Resultante durch den Schnitt-

Form annimmt, während in den einzelnen Abschnitten die durch die Längen der Polstrahlen der Grösse nach bestimmten Spannungen herrschen.

37) Fügt man zu den gegebenen Kräften  $P_1$  bis  $P_4$  eine der Kraft  $R$  gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kraft  $R'$  hinzu, deren Richtungslinie mit  $R$  zusammenfällt, so halten sich  $R$  und  $R'$  und demnach auch die gegebenen Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$  und  $R'$  das Gleichgewicht. Konstruiert man nun zu den Kräften  $P_1$  bis  $P_4$  und  $R'$  das Kräfte- und Seilpolygon, so schliessen sich offenbar die beiden Polygone.

Man kann also sagen: „Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und Richtungslinien sind im Gleichgewicht, wenn ihre Resultante gleich Null ist und das zu ihnen gehörige Kräftepolygon sich schliesst, desgleichen aber auch ein mittels eines beliebigen Poles konstruiertes Seilpolygon.“

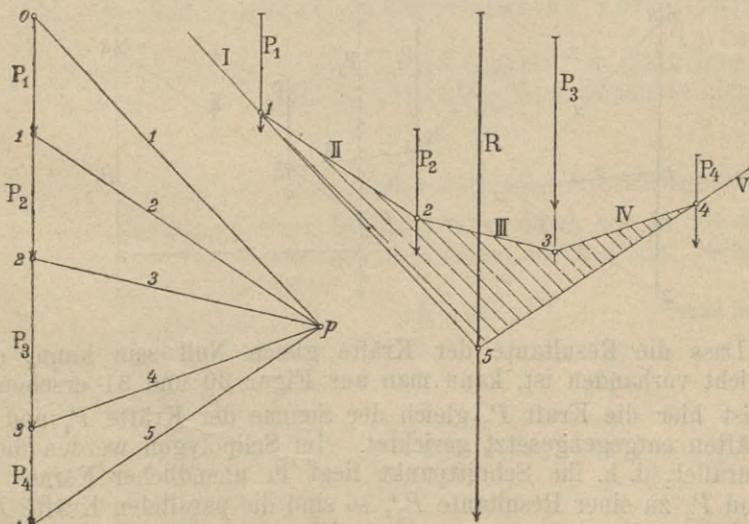
### c) Parallele Kräfte.

#### α) Beliebige viele Kräfte.

38) Einen Spezialfall der No. 35 erhält man, wenn die Kräfte parallele Richtungslinien besitzen; in diesem Falle kann die Konstruktion der Resultante in gleicher Weise vorgenommen werden wie in dem allgemeinen Falle. Trägt man die Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$  zu einem Kräftepolygon aneinander an, so fällt dieses Polygon in eine gerade Linie  $\overline{0 \cdot 4}$ , siehe Figur 27. Mittels eines beliebig gewählten Poles  $p$  ergibt sich dann das Seilpolygon I, II, III, IV, V, siehe Figur 26, dessen Seiten I und V sich in einem Punkte 5, der Resultante  $R$ , der gegebenen Kräfte schneiden. Die Resultante selbst ist gleich und gleich gerichtet der Linie  $\overline{0 \cdot 4}$ , siehe Figur 27.

Figur 27.

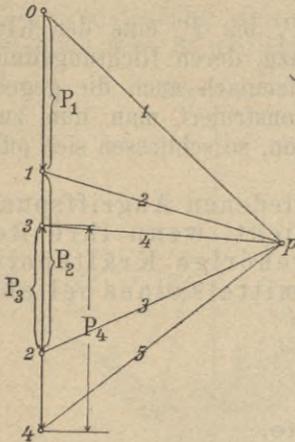
Figur 26.



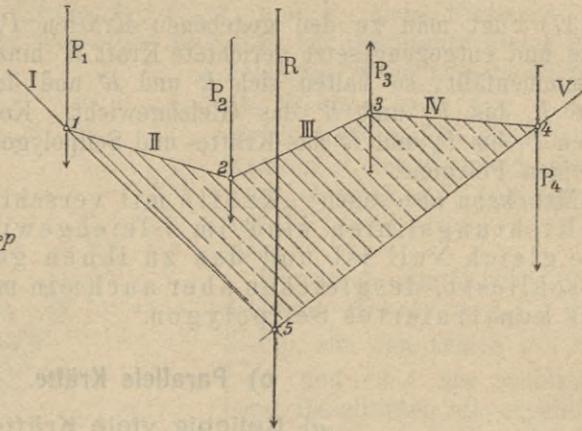
39) Besitzen nicht alle Kräfte denselben Richtungspfeil, so bleibt die Konstruktion der Resultante die nämliche, siehe Figur 28 und 29.

40) Aus den Konstruktionen in den Figuren 26 bis 29 folgt, dass die Resultante paralleler Kräfte gleich ist der algebraischen Summe der Einzelkräfte.

Figur 29.

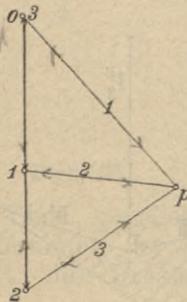


Figur 28.

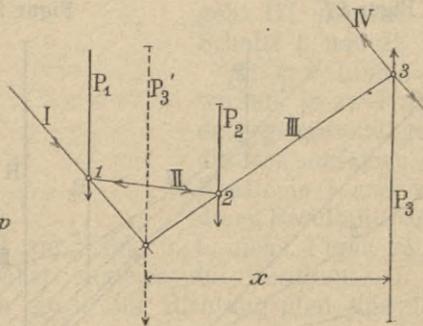


41) Fügt man zu den gegebenen Kräften eine Kraft  $R'$  hinzu gleich und entgegengesetzt gerichtet der Resultante  $R$ , welche mit letzterer die Richtungslinie gemein hat, so ergibt sich Gleichgewicht. In diesem Falle wird die Resultante gleich Null und es schliesst sich sowohl das Kräftepolygon, wie das Seilpolygon. Man kann also sagen: „Parallele Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn ihre Resultante gleich Null ist und sich sowohl das Kräfte-, wie auch das Seilpolygon schliesst.“

Figur 31.



Figur 30.



42) Dass die Resultante der Kräfte gleich Null sein kann, ohne dass Gleichgewicht vorhanden ist, kann man aus Figur 30 und 31 ersehen.

Es ist hier die Kraft  $P_3$  gleich der Summe der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ , aber diesen Kräften entgegengesetzt gerichtet. Im Seilpolygon werden die Seiten I und IV parallel, d. h. ihr Schnittpunkt liegt in unendlicher Ferne. Vereintigt man  $P_1$  und  $P_2$  zu einer Resultante  $P_3'$ , so sind die parallelen Kräfte  $P_3$  und  $P_3'$  einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet; sie bilden ein Kräfte- oder Gegenpaar und sind nicht im Gleichgewicht, sondern haben das Bestreben, den Körper, an dem sie wirken, zu drehen. Das Drehungsbestreben wird ausgedrückt durch das Produkt aus einer dieser Kräfte und ihrer senkrechten Entfernung  $x$  von einander, also durch das Produkt  $P_3 \cdot x$ . Man nennt dieses Produkt das statische Moment des Kräftepaares.

β) Zwei Kräfte mit dem gleichen Richtungspfeil.

43) Führt man zur Ermittlung der Resultante die in No. 38 beschriebene Konstruktion aus, so erhält man die Figuren 32 und 33. Aus denselben entnimmt man zufolge der Konstruktion die Beziehungen:

$$\triangle \alpha \gamma \delta \approx \triangle 0 p 1$$

daher ist:

$$3) \dots \frac{\overline{\alpha \delta}}{\gamma \delta} = \frac{\overline{1 p}}{P_1}$$

$$\triangle \delta \beta \gamma \approx \triangle 1 p 2$$

daher:

$$4) \dots \frac{\overline{\delta \beta}}{\gamma \delta} = \frac{\overline{1 p}}{P_2}$$

Durch Division der Gleichungen 3) und 4) ergibt sich:

$$\frac{\overline{\alpha \delta} \cdot \overline{\gamma \delta}}{\gamma \delta \cdot \overline{\delta \beta}} = \frac{\overline{1 p} \cdot P_2}{P_1 \cdot \overline{1 p}}$$

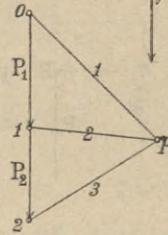
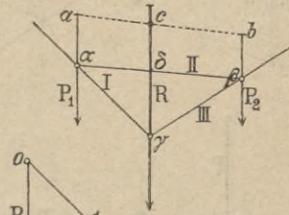
oder:

$$\frac{\overline{\alpha \delta}}{\overline{\delta \beta}} = \frac{P_2}{P_1}$$

oder auch:

$$5) \dots \frac{\overline{a c}}{\overline{c b}} = \frac{P_2}{P_1}$$

Figur 32.



Figur 33.

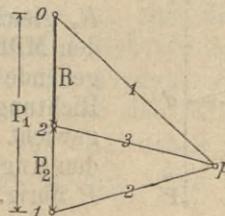
d. h. „Die Resultante zweier parallelen Kräfte mit demselben Richtungspfeile teilt die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte im inneren Teilungspunkte im umgekehrten Verhältniss der beiden Kräfte.“

Sind die beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  gleich gross, so geht ihre Resultante durch den Mittelpunkt der Verbindungslinie der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte.

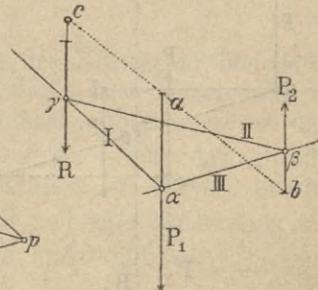
γ) Zwei Kräfte mit entgegengesetztem Richtungspfeil.

44) Führt man die gleichen Betrachtungen durch wie in No. 43, so findet man im vorliegenden Falle, dass die Resultante, siehe Figur 34 und 35 nunmehr durch den äusseren Teilungspunkt der Verbindungslinie  $ab$  hindurch geht und letztere wieder im umgekehrten Verhältniss der beiden Kräfte teilt. Sind die letzteren gleich gross, siehe Figur 36 und 37, so erhält man eine Resultante gleich Null, deren Angriffspunkt in unendlicher Ferne liegt. Obwohl die Resultante gleich Null ist, sind die Kräfte doch nicht im Gleichgewicht; sie bilden vielmehr ein Kräfte-, bezw. Gegenpaar, siehe auch No. 42.

Figur 35.



Figur 34.

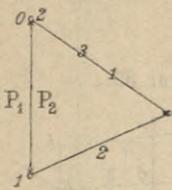


Obwohl die Resultante gleich Null ist, sind die Kräfte doch nicht im Gleichgewicht; sie bilden vielmehr ein Kräfte-, bezw. Gegenpaar, siehe auch No. 42.

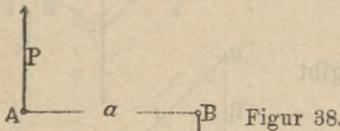
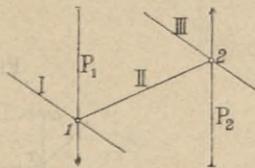
Im folgenden sollen einige wichtige Sätze über das Kräftepaar angeführt werden.

δ) Einige Sätze über das Kräftepaar.

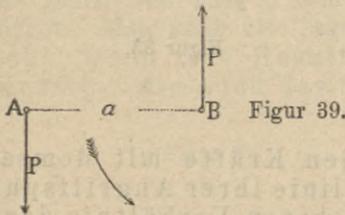
Figur 37.



Figur 36.



Figur 38.



Figur 39.

45) Wie schon in No. 42 angegeben wurde, besitzt ein Kräftepaar stets ein Drehungsbestreben, welches ausgedrückt wird durch das Produkt aus Kraft mal der Entfernung der beiden das Kräftepaar bildenden Kräfte, durch das statische Moment des Kräftepaares. Dieses statische Moment kann ein rechts drehendes oder positives, siehe Fig. 38, oder aber ein links drehendes bzw. negatives, siehe Figur 39, sein; im ersten Falle erfolgt die Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung, im zweiten Falle in entgegengesetztem Sinne.

Zunächst erkennt man unmittelbar die Richtigkeit des folgenden Satzes:

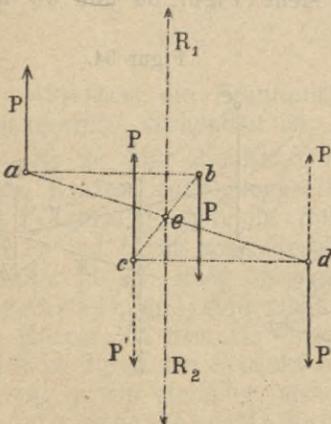
**1. Satz.** „Besitzen zwei Kräftepaare dieselben Angriffspunkte  $a$  und  $b$  sowie gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $P$  und  $Q$ , so sind sie im Gleichgewicht,“

dem die in den Angriffspunkten  $a$  und  $b$  wirkenden Kräfte  $P$  und  $Q$  halten sich gegenseitig das Gleichgewicht.

46) **2. Satz.** „Ein Kräftepaar lässt sich parallel zu sich selbst beliebig verschieben, ohne dass hierdurch seine Wirkungsweise auf einen Körper geändert wird.“

Sind, siehe Figur 40,  $a$  und  $b$  die Angriffspunkte des Kräftepaares und verschiebt man dasselbe parallel zu sich selbst, so dass die Angriffspunkte nach  $c$  und  $d$  zu liegen kommen, so kann man sich

Figur 40.

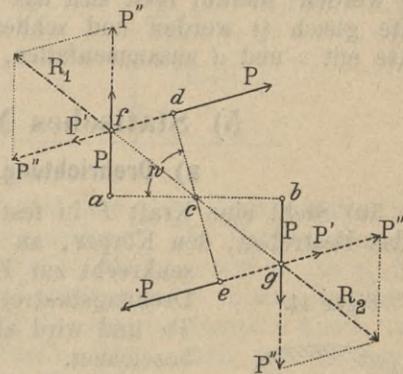


in  $c$  und  $d$  je eine der Kraft  $P$  gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft  $P'$  angebracht denken und nun die in  $a$  und  $d$  wirkenden Kräfte  $P$  und  $P'$  zu einer Resultante  $R_1$ , die in  $c$  und  $b$  wirkenden Kräfte  $P$  und  $P'$  zu einer Resultante  $R_2$  vereinigen, dann haben die beiden Resultanten  $R_1$  und  $R_2$  gleiche Grösse und eine gemeinsame durch den Mittelpunkt  $e$  des Parallelogramms  $abcd$  gehende Richtungslinie, aber entgegengesetzten Richtungspfeil, sie halten sich also das Gleichgewicht und es bleibt nur das Kräftepaar mit den Angriffspunkten  $c$  und  $d$  und den Kräften  $P$  übrig.

47) **3. Satz.** „Ein Kräftepaar lässt sich um den Mittelpunkt  $c$ , siehe Figur 41, der Verbindungslinie seiner Angriffspunkte  $a$  und  $b$  um einen beliebigen Winkel  $w$  drehen, ohne dass hierdurch seine Wirkungsweise auf einen Körper geändert wird.“

Gelangen nach der Drehung die Angriffspunkte  $a$  und  $b$  beziehungsweise nach  $d$  und  $e$ , so kann man sich in  $d$  und  $e$  je eine der Kraft  $P$  gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft  $P'$  angebracht denken und nun die in  $a$  und  $d$  wirkenden Kräfte  $P$  und  $P'$  zu einer Resultante  $R_1$ , die in  $b$  und  $e$  wirkenden Kräfte zu einer Resultante  $R_2$  vereinigen; dann haben die beiden Resultanten  $R_1$  und  $R_2$  gleiche Grösse und eine gemeinsame durch  $c$  gehende Richtungslinie, aber entgegengesetzten Richtungspfeil, sie halten sich also das Kräftegewicht und es bleibt nur das Kräftepaar mit den Angriffspunkten  $d$  und  $e$  und den Kräften  $P$  übrig.

Figur 41.

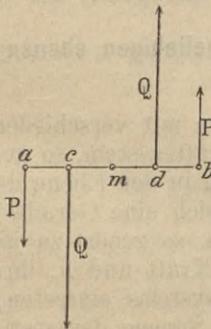


Aus den vorhergehenden beiden Sätzen folgt unmittelbar der folgende:

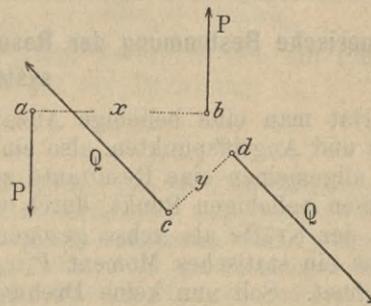
**4. Satz.** „Ein Kräftepaar lässt sich parallel zu sich selbst beliebig verschieben und hierauf noch um einen beliebigen Winkel drehen, mit anderen Worten: Ein Kräftepaar lässt sich beliebig verlegen.“

48) **5. Satz.** „Ein Kräftepaar lässt sich durch ein anderes ersetzen, das mit ihm das gleiche Drehungsbestreben und ein statisches Moment von der gleichen Grösse besitzt.“

Figur 42.



Figur 43.



Sind  $a, b$  die beiden Angriffspunkte,  $P, P'$  die das Kräftepaar bildenden Kräfte und denkt man sich den Körper um eine durch den Mittelpunkt  $m$  gehende, zur Ebene der Kräfte  $P$  senkrecht stehende Achse drehbar, so ist das Drehungsbestreben ausgedrückt durch das Produkt  $P \cdot \overline{ab}$ . Soll das gleiche Drehungsbestreben durch ein Kräftepaar mit den Kräften  $Q$  hervorgebracht werden, so müssen diese gleich weit von  $m$  abstehen und eine Entfernung  $\overline{cd}$  von einander besitzen, dass  $P \cdot \overline{ab} = Q \cdot \overline{cd}$  wird. Man findet hieraus:

$$\overline{cd} = \frac{P \cdot \overline{ab}}{Q}$$

49) Auf Grund der vorstehenden Sätze folgt der weitere

**6. Satz.** „Ein Kräftepaar wird im Gleichgewicht gehalten durch ein anderes, das mit ihm ein statisches Moment von der gleichen Grösse, aber entgegengesetztem Drehungsbestreben besitzt.“

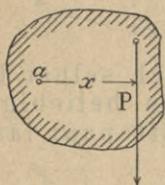
Sind die Angriffspunkte des einen Kräftepaares die Punkte  $a, b$ , die des anderen  $c, d$ , so kann man das erstere zunächst so drehen, dass die Kräfte parallel zu  $Q$  werden; hierauf lässt sich das erste Kräftepaar so verwandeln, dass seine Kräfte gleich  $Q$  werden und schliesslich so verschieben, dass seine Angriffspunkte mit  $c$  und  $d$  zusammenfallen, dann findet aber Gleichgewicht statt.

## 5) Statisches Moment einer Kraft.

### a) Drehrichtung, Drehpunkt, Hebelarm.

50) Steht eine Kraft  $P$  in fester Verbindung mit einem Punkte  $a$ , so hat sie das Bestreben, den Körper, an dem sie wirkt, um eine durch  $a$  gehende, senkrecht zur Ebene  $Pa$  stehende Achse zu drehen; dieses Drehungsbestreben wird ausgedrückt durch das Produkt  $Px$  und wird als das statische Moment der Kraft  $P$  bezeichnet.

Figur 44.



Die Entfernung  $x$  des Punktes  $a$  von der Kraft  $P$  heisst der Hebelarm der Kraft  $P$ . Unter dem statischen Moment einer Kraft versteht man also das Produkt aus Kraft mal dem zugehörigen Hebelarm.

Je nach der Richtung, nach welcher die Drehung stattfindet, d. h. je nach der Drehrichtung unterscheidet man rechts- oder linksdrehende Kräfte und demgemäss rechts und linksdrehende bzw. positive und negative statische Momente. Der Schnittpunkt  $a$ , der die Kraft  $P$  enthaltenden, senkrecht zur Drehachse stehenden Ebene mit der Drehachse heisst der Drehpunkt der Kraft  $P$ .

### b) Rechnerische Bestimmung der Resultante eines beliebigen ebenen Kräftesystems.

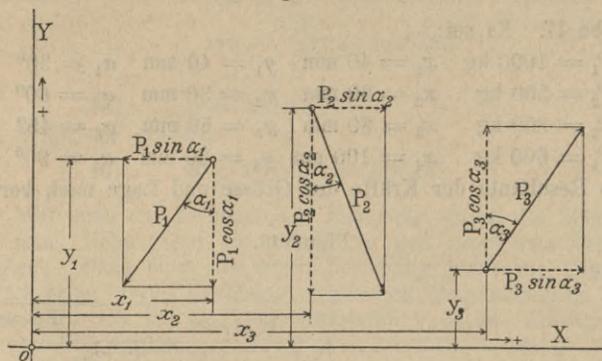
51) Hat man eine beliebige Anzahl von Kräften mit verschiedenen Richtungslinien und Angriffspunkten, also ein beliebiges Kräftesystem, so gehört demselben im allgemeinen eine Resultante zu. Wählt man in der Ebene des Kräftesystems einen beliebigen Punkt, durch welchen man sich eine Gerade senkrecht zur Ebene der Kräfte als Achse gezogen denken kann, so gehört zu jeder Kraft des Systems ein statisches Moment  $P_n x_n$ , wo  $P_n$  die Kraft und  $x_n$  ihren Hebelarm bezeichnet. Soll nun keine Drehung des Kräftesystems eintreten, so muss das gesamte Drehungsbestreben, d. h. die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte gleich sein dem statischen Moment jener Kraft, welche den gegebenen Kräften das Gleichgewicht hält, d. i. aber eine Kraft, gleich und entgegengesetzt gerichtet der Resultante der gegebenen Kräfte. Für das Vorhandensein von Gleichgewicht besteht somit die Gleichung:

$$\sum P_n x_n = R x$$

Mittels dieser Gleichung ist man aber in den Stand gesetzt, die Resultante eines Kräftesystems rechnerisch zu bestimmen.

Hat man nämlich beliebig viele Kräfte  $P_1, P_2, P_3 \dots$ , siehe Figur 45, und wählt man einen Punkt  $o$  als Drehpunkt, so kann man durch  $o$  zwei auf ein-

Figur 45.



ander senkrechte Linien  $X$  und  $Y$  ziehen und nun jede Kraft parallel zu den beiden Richtungen  $X$  und  $Y$  in Komponenten zerlegen. Die Entfernungen dieser Komponenten vom Punkte  $o$  sind dann bezw.  $x_1$  bis  $x_3$  und  $y_1$  bis  $y_3$  u. s. w. Vereinigt man die zu  $X$  und  $Y$  parallelen Komponenten je in eine Resultante  $R_x$  und  $R_y$ , so lässt sich schliesslich mit  $R_x$  und  $R_y$  eine Resultante  $R$  bilden, welche die Resultante der gegebenen Kräfte darstellt. Man erhält nun die folgenden Beziehungen:

$$6) \dots P_1 \cos \alpha_1 \cdot x_1 + P_2 \cos \alpha_2 \cdot x_2 - P_3 \cos \alpha_3 \cdot x_3 = R_x x$$

$$7) \dots P_1 \sin \alpha_1 \cdot y_1 + P_2 \sin \alpha_2 \cdot y_2 - P_3 \sin \alpha_3 \cdot y_3 = R_y y$$

In den beiden Gleichungen 6) und 7) kennt man alle Grössen bis auf  $x$  und  $y$ , man erhält also:

$$8) \dots x = \frac{P_1 \cos \alpha_1 \cdot x_1 + P_2 \cos \alpha_2 \cdot x_2 - P_3 \cos \alpha_3 \cdot x_3}{P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 - P_3 \cos \alpha_3}$$

$$9) \dots y = \frac{-P_1 \sin \alpha_1 \cdot y_1 + P_2 \sin \alpha_2 \cdot y_2 + P_3 \sin \alpha_3 \cdot y_3}{-P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3}$$

Mittels der beiden Gleichungen 8) und 9) ergibt sich ein Punkt der Resultante. Die Grösse selbst findet sich aus der Beziehung:

$$10) \dots R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

**Anmerkung 12.** Die Achsen  $X$  und  $Y$  bezeichnet man als Koordinatenachsen, die Entfernungen  $x_1, y_1 \dots$  u. s. w. als die Koordinaten der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte; die positiven Richtungen für die  $x$ -Koordinaten bezw.  $y$ -Koordinaten sind in der Figur 45 bezeichnet. Hierdurch ist, wenn die Richtungen der Kräfte gegeben sind, auch die Drehrichtung der statischen Momente gegeben.

52) Soll Gleichgewicht zwischen den gegebenen Kräften bestehen, so muss einerseits die Resultante gleich Null sein, andererseits darf aber auch kein Drehungsbestreben der Kräfte vorhanden, d. h. es muss die Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte bezüglich eines beliebig in der Ebene angenommenen Drehpunktes gleich Null sein. Man kann also sagen:

„Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und Richtungs-  
linien sind im Gleichgewicht, wenn sowohl ihre Resultante, als  
auch die Summe ihrer statischen Momente hinsichtlich eines beliebig  
in der Ebene der Kräfte gewählten Drehpunktes gleich Null ist.“

## c) Übungsaufgabe.

53) Aufgabe 17. Es sei:

$$P_1 = 1000 \text{ kg} \quad x_1 = 40 \text{ mm} \quad y_1 = 40 \text{ mm} \quad \alpha_1 = 30^\circ$$

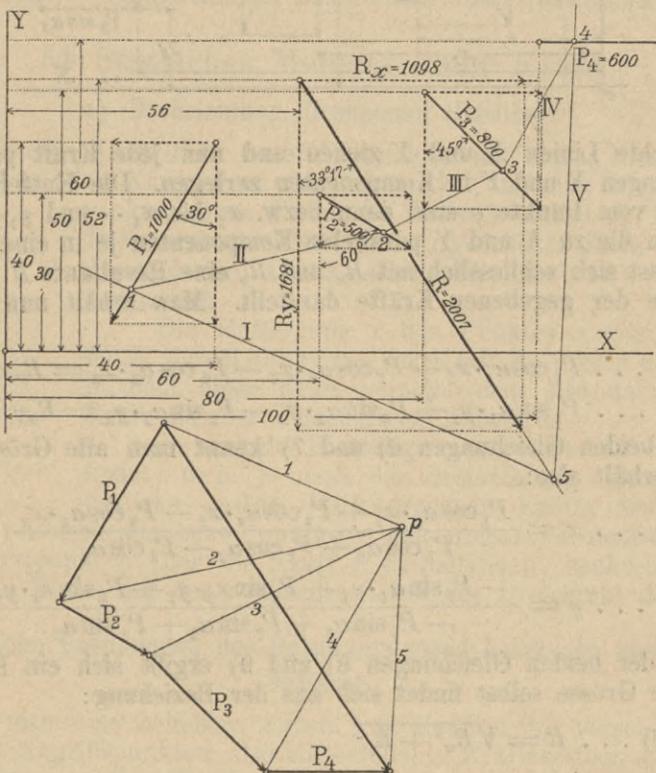
$$P_2 = 500 \text{ kg} \quad x_2 = 60 \text{ mm} \quad y_2 = 30 \text{ mm} \quad \alpha_2 = 60^\circ$$

$$P_3 = 800 \text{ kg} \quad x_3 = 80 \text{ mm} \quad y_3 = 50 \text{ mm} \quad \alpha_3 = 45^\circ$$

$$P_4 = 600 \text{ kg} \quad x_4 = 100 \text{ mm} \quad y_4 = 60 \text{ mm} \quad \alpha_4 = 90^\circ$$

Es soll die Resultante der Kräfte der Grösse und Lage nach berechnet werden.

Figur 46.



Figur 47.

Es ist:

$$11) \dots x = \frac{1000 \cdot \cos 30^\circ \cdot 40 + 500 \cdot \cos 60^\circ \cdot 60 + 800 \cdot \cos 45^\circ \cdot 80}{1000 \cdot \cos 30^\circ + 500 \cdot \cos 60^\circ + 800 \cdot \cos 45^\circ}$$

$$= \frac{34641,6 + 15000 + 45205}{866,03 + 250 + 565,688} = \frac{94896,6}{1681,118} = 50,89 \text{ mm}$$

$$12) \dots y = \frac{-1000 \cdot \sin 30^\circ \cdot 40 + 500 \cdot \sin 60^\circ \cdot 30 + 800 \cdot \sin 45^\circ \cdot 50 + 600 \cdot 60}{-1000 \cdot \sin 30^\circ + 500 \cdot \sin 60^\circ + 800 \cdot \sin 45^\circ + 600}$$

$$= \frac{-20000 + 12990,45 + 28184,4 + 36000}{-500 + 433,015 + 565,688 + 600} = 52,07 \text{ mm}$$

Aus der Berechnung der Nenner in den Gleichungen 11) und 12) erhält man:

$$R_y = 1681,118 \text{ kg} \text{ und } R_x = 1098,102 \text{ kg}$$

Daher ist:

$$13) \dots R = \sqrt{R_y^2 + R_x^2} = \sqrt{1681,118^2 + 1098,102^2} = 2007,0 \text{ kg}$$

Die Winkel der Resultante mit den Koordinatenachsen berechnen sich aus:

$$14) \dots \cos \alpha = \frac{R_y}{R} = 0,83762$$

demnach:

$$15) \dots \alpha = 33^\circ 17'$$

somit der Winkel  $\beta$  mit der  $y$ -Achse:

$$16) \dots \beta = 90^\circ - \alpha = 66^\circ 43'$$

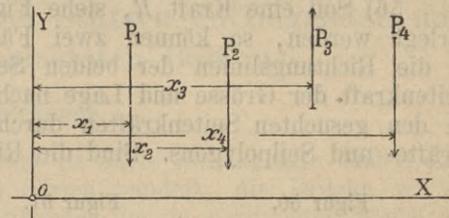
**Anmerkung 13.** Will man das Resultat der Rechnung durch die Zeichnung prüfen, so konstruiert man, siehe Figur 46 und 47 zu den gegebenen Kräften ein Kräfte- und Seilpolygon. Dann muss die durch Zeichnung gefundene Lage und Länge der Resultante mit jener durch Rechnung ermittelten übereinstimmen.

In der Figur 46 ist als Längenmassstab 1:66,66, als Kraftmassstab 1 mm = 37,7 kg gewählt worden.

#### d) Rechnerische Bestimmung der Resultante paralleler Kräfte.

54) Im Vorstehenden ist auch die rechnerische Bestimmung der Resultante von parallelen Kräften enthalten; denn in diesem Falle ist die Richtung und Grösse der Resultante von vornherein bekannt, und nur nötig, einen Punkt derselben zu ermitteln; man wählt zu diesem Zwecke in der Ebene der Kräfte einen beliebigen Punkt  $o$  als Drehpunkt und stellt für diesen die Momentengleichung auf, aus welcher sich die Entfernung der Resultante von dem gewählten Drehpunkt bestimmen lässt.

Figur 48.



Sind, siehe Figur 48,  $P_1$  bis  $P_4$  die gegebenen Kräfte, so hat man unmittelbar, wenn  $R$  die Resultante und  $x$  ihre Entfernung vom Drehpunkt  $o$  bezeichnet, die Beziehung:

$$Rx = P_1 x_1 + P_2 x_2 - P_3 x_3 + P_4 x_4$$

und daher:

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 - P_3 x_3 + P_4 x_4}{R}$$

oder:

$$17) \dots x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 - P_3 x_3 + P_4 x_4}{P_1 + P_2 - P_3 + P_4}$$

Für das Gleichgewicht von parallelen Kräften gilt derselbe Satz wie für Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und Richtungslinien, siehe No. 52.

#### e) Übungsaufgabe.

55) **Aufgabe 18.** Man soll die Resultante der Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$  der Grösse und Lage nach rechnerisch ermitteln, wenn:

$$P_1 = 1000 \text{ kg} \quad x_1 = 40 \text{ mm}$$

$$P_2 = 800 \text{ kg} \quad x_2 = 50 \text{ mm}$$

$$P_3 = 600 \text{ kg} \quad x_3 = 60 \text{ mm}$$

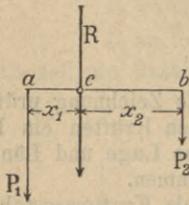
$$P_4 = 500 \text{ kg} \quad x_4 = 70 \text{ mm}$$

**Auflösung.** Es ist  $R = 1000 + 800 - 600 + 500 = 1700 \text{ kg}$  und

$$x = \frac{1000 \cdot 40 + 800 \cdot 50 - 600 \cdot 60 + 500 \cdot 70}{1000 + 800 - 600 + 500} = \frac{40000 + 40000 - 36000 + 35000}{1700} = 46,53 \text{ mm}$$

**Anmerkung 14.** Sind nur zwei Kräfte gegeben, siehe Figur 49, so kann man sich als Drehpunkt den Schnittpunkt  $c$  der Resultante mit der Verbindungslinie  $ab$  gewählt denken und erhält dann die Momentengleichung:

Figur 49.



oder:

$$0 = P_2 \overline{bc} - P_1 \overline{ab}$$

$$P_1 \overline{ab} = P_2 \overline{bc}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}}$$

d. h. die Resultante  $R$  teilt die Verbindungslinie  $\overline{ab}$  umgekehrt im Verhältnis der beiden Kräfte, ein Resultat, das schon in No. 43 auf andere Weise erhalten worden ist.

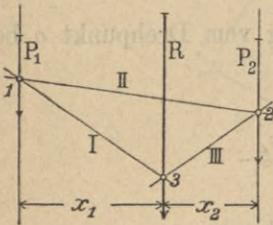
Haben die gegebenen Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  entgegengesetzten Richtungspfeil, so wird der Punkt  $c$  der äussere Teilungspunkt der Strecke  $\overline{ab}$ . Sind die Kräfte einander gleich und gleich gerichtet, so ist  $c$  der Mittelpunkt von  $\overline{ab}$ . Sind die Kräfte gleich und entgegengesetzt gerichtet, so fällt der Punkt  $c$  in unendliche Ferne und die Kräfte bilden ein Kräftepaar.

## 6) Zerlegen einer Kraft in parallele Seitenkräfte.

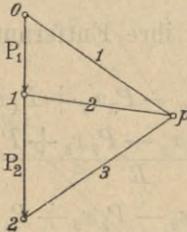
### a) Durch Zeichnung.

56) Soll eine Kraft  $R$ , siehe Figur 50 und 51, in parallele Seitenkräfte zerlegt werden, so können zwei Fälle eintreten; es sind nämlich entweder a) die Richtungslinien der beiden Seitenkräfte bekannt, oder es ist b) eine Seitenkraft der Grösse und Lage nach gegeben. In beiden Fällen gelangt man zu den gesuchten Seitenkräften durch zweckentsprechende Konstruktion eines Kräfte- und Seilpolygons. Sind die Richtungslinien von  $P_1$  und  $P_2$  gegeben, so

Figur 50.



Figur 51.



man macht, s. Figur 51, die Strecke  $\overline{02}$  gleich und gleich gerichtet der gegebenen Resultante  $R$ , wählt den Punkt  $p$  als Pol, zieht die Polstrahlen  $p0$  und  $p2$  und durch einen auf  $R$ , siehe Figur 50, willkürlich gewählten Punkt 3 die entsprechenden Seilstrahlen I und III, welche auf den gegebenen Richtungslinien die Punkte 1 und 2 ausschneiden; die Verbindungslinie 1-2 liefert den Seilstrahl II,

zu welchem der Polstrahl 2 parallel sein muss. Letzterer trifft die Strecke  $\overline{02}$  in einem Punkte 1 so, dass die Strecke  $\overline{01} = P_1$  und  $\overline{02} = P_2$  ist.

Sind  $R$  und  $P_1$  der Grösse und Lage nach gegeben und ist  $P_2$  der Lage nach gesucht, so macht man wieder, s. Figur 51, die Strecke  $\overline{02} = R$  und  $\overline{01} = P_1$ , wählt  $p$  und zieht die Polstrahlen 1, 2 und 3; durch den auf  $R$ , siehe Figur 50, willkürlich gewählten Punkt 3 lassen sich nun die Seilstrahlen I und III parallel zu den entsprechenden Polstrahlen 1 und 3 ziehen; Seilstrahl I schneidet  $P_1$  in einem Punkte 1, durch welchen der Seilstrahl II parallel zu dem Polstrahl 2 hindurchgeht und den Seilstrahl III in einem Punkte 2 schneidet, welcher der Richtungslinie der Kraft  $P_2$  angehört. Grösse und Richtungspfeil von  $P_2$  entnimmt man aus Figur 51.

### b) Durch Rechnung.

57) Durch Rechnung ermittelt man die Grössen der Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$  sehr einfach wie folgt:

Man nimmt auf  $R$  einen Punkt als Drehpunkt an und stellt für denselben die Momentengleichung auf, dann ist:

$$P_1 x_1 = P_2 x_2$$

und ausserdem:

$$P_1 + P_2 = R$$

Man hat somit:

$$18) \dots P_1 = \frac{R x_2}{x_1 + x_2}$$

und

$$19) \dots P_2 = \frac{R x_1}{x_1 + x_2}$$

Ist  $P_1$  der Grösse und Lage nach gegeben, so erhält man die Entfernung  $x_2$  der Seitenkraft  $P_2$  von der Resultante  $R$  aus der Gleichung:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

daher ist:

$$20) \dots x_2 = \frac{P_1 x_1}{P_2} \quad \text{oder} \quad x_2 = \frac{P_1 x_1}{R - P_1}$$

## 7) Auflagerdrücke eines auf zwei Stützen aufliegenden und durch Einzelkräfte belasteten Balkens.

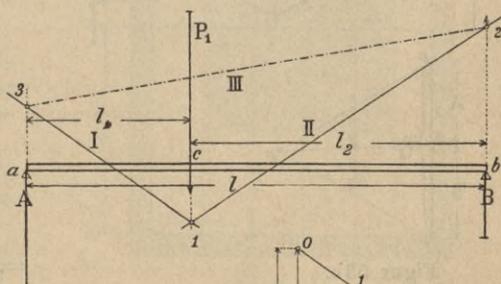
### a) Durch Zeichnung.

58) Das Zerlegen einer Kraft in zwei parallele Seitenkräfte findet eine zweckmässige Anwendung, wenn es sich darum handelt, die Drücke zu ermitteln, welche ein auf zwei Stützen aufliegender und in bestimmter Weise belasteter Balken auf diese ausübt.

Liegt z. B. ein Balken in zweien Punkten  $a$  und  $b$ , siehe Figur 52, auf und erhält derselbe in einem Punkt  $c$  einen Druck  $P_1$ , so erhält man die Auflagerdrücke, graphisch wie in No. 54.

Man macht, siehe Figur 53, die Strecke  $\overline{01}$  gleich und gleich gerichtet der Kraft  $P_1$ , wählt den Pol  $p$  und auf  $P_1$  den Punkt 1 beliebig. Zieht man nun die Polstrahlen 1 und 2 und parallel hierzu durch den Punkt 1, Figur 53, die Seilstrahlen I und II, so schneiden diese auf den Auflagervertikalen durch die Punkte  $a$  und  $b$  die Punkte 3 und 2 aus, deren Verbindungslinie den Seilstrahl III ergibt; parallel hierzu ist der Polstrahl 3 zu ziehen, dann trifft derselbe die Strecke  $\overline{01}$  in einem Punkt 2 so, dass die Strecke  $\overline{02}$  den Auflagerdruck  $A$ , die Strecke  $\overline{21}$  den Auflagerdruck  $B$  darstellt.

Figur 52.



Figur 53.

Diesen Drücken gleich und entgegengesetzt wirken die Gegendrücke von den Auflagern, das sind die Auflagerreaktionen  $A$  und  $B$ ; diese sind sonach nach oben gerichtet, und die drei Kräfte  $P_1$ ,  $A$  und  $B$  daher im Gleichgewicht. Der Seilstrahl III stellt die Schlusslinie des Seilpolygons dar.

### b) Durch Rechnung.

59) Will man die Auflagerreaktionen durch Rechnung ermitteln, so wählt man zur Bestimmung von  $A$  und  $B$  die Punkte  $b$  und  $a$  als Drehpunkte und erhält dann die Momentengleichungen:

daher: 
$$Al = P_1 l_2$$

$$21) \dots A = \frac{P_1 l_2}{l}$$

ebenso:

$$Bl = P_1 l_1$$

also:

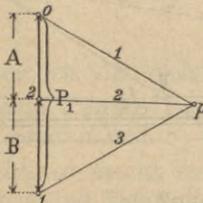
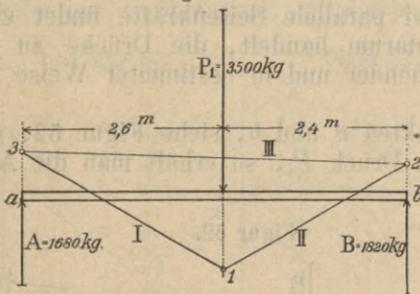
$$22) \dots B = \frac{P_1 l_1}{l}$$

Als Probe für die Richtigkeit der Rechnung muss  $A + B = P_1$  sein, was der Fall ist, denn man hat:

$$\frac{P_1 l_2}{l} + \frac{P_1 l_1}{l} = \frac{P_1 (l_1 + l_2)}{l} = P_1$$

### c) Übungsaufgaben.

Figur 53 a.



Figur 53 b.

60) **Aufgabe 19.** Auf einen Balken von 5,0 m freier Länge, der in den Punkten  $a$  und  $b$  aufliegt, wirkt in einer Entfernung von 2,6 m vom linken Auflager eine Last  $P_1 = 3500$  kg; wie gross sind die beiden Auflagerdrücke bzw. Auflagerreaktionen  $A$  und  $B$ ?

**Auflösung.** Durch Rechnung findet man:

$$A \cdot 5 = 3500 (5,0 - 2,6)$$

$$A = \frac{3500 \cdot 2,4}{5} = 1680 \text{ kg}$$

$$B \cdot 5 = 3500 \cdot 2,6$$

$$B = \frac{3500 \cdot 2,6}{5} = 1820 \text{ kg}$$

$$\text{Zusammen } A + B = 3500 \text{ kg}$$

Wählt man als Kräftemassstab 1 mm = 150 kg und zeichnet Kräfte- und Seilpolygon, so ergibt sich aus der Figur 53 b:

$$A = 11,2 \text{ mm} = 1680 \text{ kg}$$

$$B = 12,1 \text{ mm} = 1820 \text{ kg}$$

also dasselbe Resultat wie das durch Rechnung erhaltene.

**Anmerkung 15.** Das in No. 58 angegebene Verfahren der Bestimmung der Auflagerreaktionen kann auch angewendet werden, wenn mehrere parallele Kräfte auf einen Träger wirken. Sind z. B., siehe Figur 54, zwei Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  gegeben, so konstruiert man wieder Kräfte- und Seilpolygon und verlängert die Seilstrahlen I

und III, bis zum Schnitt mit den Auflagervertikalen durch  $A$  und  $B$ , so teilt der zur Schlusslinie IV des Seilpolygons parallele Polstrahl 4 die Strecke  $\overline{O2}$ , siehe Figur 55, im Punkte 3 in zwei Abschnitte, so dass  $\overline{23}$  die Auflagerreaktion  $B$  und  $\overline{34}$  die Auflagerreaktion  $A$  der Größe nach vorstellt.

Durch Rechnung erhält man die Gleichungen:

$$Al = P_1(l - l_1 + P_2(l - l_2)) \quad (\text{Drehpunkt } b)$$

$$Bl = P_1l_1 + P_2l_2 \quad (\text{Drehpunkt } a)$$

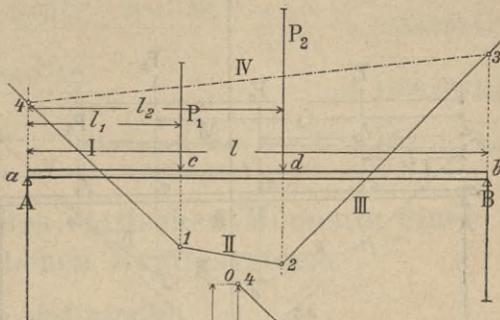
daher ist:

$$23) \dots A = \frac{P_1(l - l_1) + P_2(l - l_2)}{l}$$

und

$$24) \dots B = \frac{P_1l_1 + P_2l_2}{l}$$

Figur 54.



Figur 55.

61) **Aufgabe 20.** Ein Unterzug  $ab$ , siehe Figur 56, dient in den Punkten  $c$  und  $d$  als Auflager für die Kappenträger I und II. Die Belastung der Decke beträgt einschliesslich des Eigengewichtes  $700 \text{ kg}$  per Quadratmeter. Es sind die Belastungen in den Punkten  $c$  und  $d$ , sowie die Auflagerdrücke in  $a$  und  $b$ , desgleichen in  $e, g, f$  und  $h$  zu berechnen.

**Auflösung.** Die Belastung eines Trägers I beträgt  $2,0 \cdot 4,0 \cdot 750 = 6000 \text{ kg}$ . Diese ganze Belastung ist im Punkte  $c$  aufzunehmen.

Die Belastung eines Trägers II beträgt  $(1,0 + 0,75) 4 \cdot 750 = 5250 \text{ kg}$ , welche im Punkte  $d$  aufzunehmen ist.

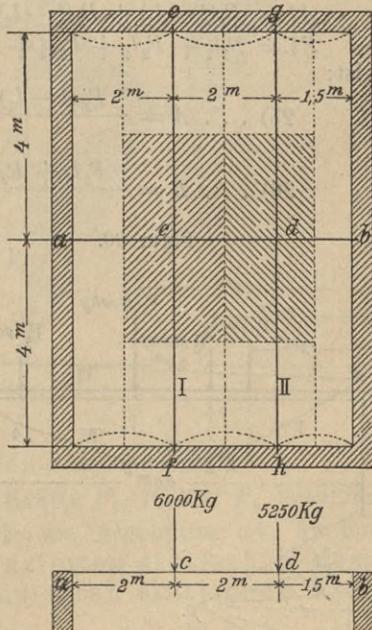
Der Unterzug  $ab$  ist nach der Figur 57 belastet und es ist:

$$A = \frac{6000 \cdot 3,5 + 5250 \cdot 1,5}{5,5} = 5250 \text{ kg}$$

$$B = \frac{6000 \cdot 2 + 5250 \cdot 4}{5,5} = 6000 \text{ kg}$$

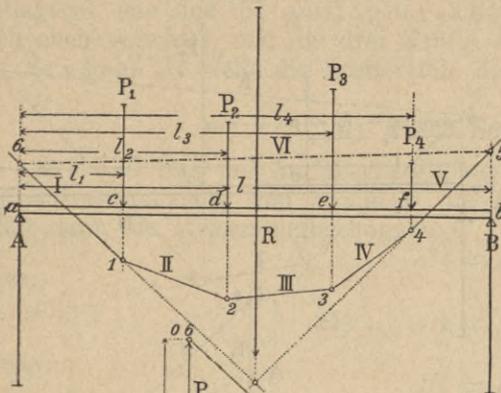
Die Auflagerdrücke in  $e$  und  $f$  bzw.  $h$  und  $g$  sind gleich der halben Belastung eines Trägers I bzw. II, also gleich  $3000 \text{ kg}$  und  $2675 \text{ kg}$ .

Figur 56.



Figur 57.

Figur 58.



62) Aufgabe 21. Auf einen Träger  $ab$ , siehe Figur 58, wirken in den Punkten  $c, d, e$  und  $f$  bzw. die Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$ ; es sind die Auflagerdrücke, bzw. Auflagerreaktionen  $A$  und  $B$  in den Punkten  $a$  und  $b$  zu ermitteln.

**Auflösung.** Durch Zeichnung erhält man die gesuchten Auflagerreaktionen mittels Kräfte- und Seilpolygon. Man verlängert die Seilstrahlen I und V bis zu den Auflagervertikalen durch  $a$  und  $b$  und zieht parallel zum Seilstrahl VI den Polstrahl 6, welcher die Linie  $04$ , siehe Figur 59, im Punkte 5 in zwei Abschnitte so teilt, dass die Strecke  $4.5$  gleich der Auflagerreaktion  $B$ , die Strecke  $5.0$  gleich  $A$  ist.

Durch Rechnung erhält man die Gleichungen:

Figur 59.

$$Al = P_1(l - l_1) + P_2(l - l_2) + P_3(l - l_3) + P_4(l - l_4) \quad (\text{Drehpunkt } b)$$

$$Bl = P_1l_1 + P_2l_2 + P_3l_3 + P_4l_4 + \dots \quad (\text{Drehpunkt } a)$$

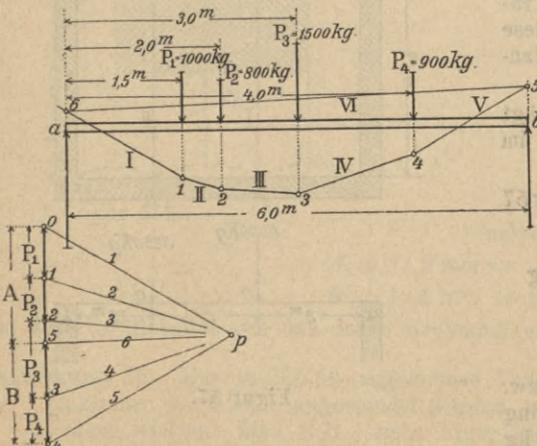
daher ist:

$$25) \dots A = \frac{P_1(l - l_1) + P_2(l - l_2) + P_3(l - l_3) + P_4(l - l_4)}{l}$$

und

$$26) \dots B = \frac{P_1l_1 + P_2l_2 + P_3l_3 + P_4l_4}{l}$$

Figur 60.



Figur 61.

63) Aufgabe 22. Es sei mit Rücksicht auf Figur 61  $l = 6\text{ m}$ ,  $l_1 = 1,5\text{ m}$ ,  $P_1 = 1000\text{ kg}$ ,  $l_2 = 2,0$ ,  $P_2 = 800\text{ kg}$ ,  $l_3 = 3\text{ m}$ ,  $P_3 = 1500\text{ kg}$ ,  $l_4 = 4,5\text{ m}$ ,  $P_4 = 900\text{ kg}$ . Man soll die Auflagerreaktionen  $A$  und  $B$  graphisch und rechnerisch ermitteln.

**Auflösung.** Man wählt einen Kraftmassstab von  $1\text{ mm} = 150\text{ kg}$  und führt die in Aufgabe 62 genannte Konstruktion durch. Man erhält dann für:

$$B = 15,5\text{ mm } 2333\text{ kg}$$

für:

$$A = 12,4\text{ mm } 1867\text{ kg}$$

Durch Rechnung ergibt sich:

$$A = \frac{1000(6 - 1,5) + 800(6 - 2) + 1500(6 - 3) + 900(6 - 4,0)}{6} = 2333,333 \text{ kg}$$

$$B = \frac{1000 \cdot 1,5 + 800 \cdot 2 + 1500 \cdot 3 + 900 \cdot 4,0}{6} = 1866,666 \text{ kg}$$

Zusammen also  $A + B = 4200 \dots \text{kg}$

## 8) Graphische Ermittlung des statischen Moments einer Kraft bzw. eines ebenen Kräftesystems.

### a) Die Kräfte sind parallel.

64) In Figur 62 und 63 sind für die gegebenen parallelen Kräfte  $P_1$  bis  $P_3$  Kräfte- und Seilpolygone gezeichnet. Ist nun  $o$  ein beliebiger Punkt in der Ebene der Kräfte, und will man bezüglich dieses Punktes die statischen Momente der einzelnen Kräfte ermitteln, so zieht man durch  $o$  eine Parallele zu den gegebenen Kräften und verlängert die einzelnen Seilstrahlen bis zu dieser Linie; dann erkennt man aus den Figuren 62 und 63 die folgenden Beziehungen. Es ist:

$$\triangle 1ab \approx \triangle po1$$

daher ist auch:

$$x_1 : \overline{ab} = H : \overline{o1}$$

oder:

$$x_1 : \overline{ab} = H : P_1$$

oder:

$$P_1 x_1 = \overline{ab} \cdot H$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt aber das statische Moment der Kraft  $P_1$  bezüglich des Drehpunktes  $o$  dar, folglich ist auch die rechte Seite gleich diesem statischen Moment.

In gleicher Weise folgen aus der Aehnlichkeit der Dreiecke  $2 \cdot b \cdot c$  und  $p \cdot 1 \cdot 2$  bzw.  $3 \cdot c \cdot d$  und  $p \cdot 2 \cdot 3$  die Beziehungen:

$$P_2 x_2 = \overline{bc} \cdot H$$

und

$$P_3 x_3 = \overline{cd} \cdot H$$

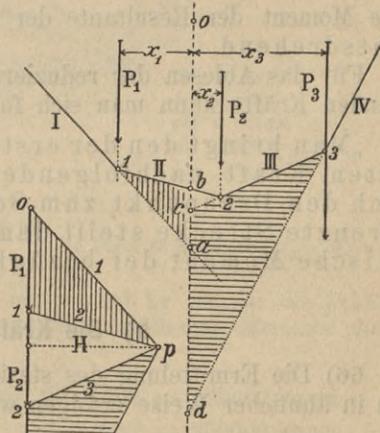
Man kann also schreiben:

$$P_1 x_1 : P_2 x_2 : P_3 x_3 = \overline{ab} \cdot H : \overline{bc} \cdot H : \overline{cd} \cdot H = \overline{ab} : \overline{bc} : \overline{cd}$$

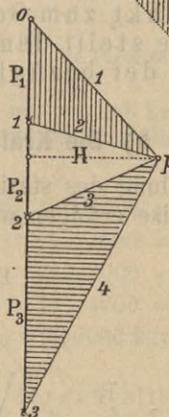
d. h. die statischen Momente der gegebenen Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  bezüglich des Punktes  $o$  als Drehpunkt verhalten sich wie die Abschnitte  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$  und  $\overline{cd}$ . Diese Abschnitte nennt man deshalb die reduzierten statischen Momente und zwar die auf die Poldistanz  $H$  reduzierten statischen Momente der gegebenen Kräfte.

Das zu einer gegebenen Kraft  $P_1$  gehörige reduzierte, statische Moment ergibt sich, wenn man die beiden auf  $P_1$  sich schneidenden Seilstrahlen mit der durch den Drehpunkt gezogenen Parallelen zur Richtungslinie der Kraft zum Schnitt bringt. Will man das wirkliche statische Moment ermitteln, so hat man

Figur 62.



Figur 63.



die Strecke  $\overline{ab}$  im Längenmass, die Poldistanz  $H$  im Kraftmass auszudrücken; das Produkt der beiden Masszahlen ist das statische Moment der Kraft  $P_1$ .

Kennt man von einer Kraft, z. B.  $P_1$ , die Drehrichtung ihres statischen Moments, so ist dies auch für die statischen Momente der übrigen Kräfte der Fall; denn ist  $a$  der Schnittpunkt des der Kraft  $P_1$  vorangehenden Seilstrahles,  $b$  jener des nachfolgenden mit der Hilfsgeraden  $od$ , so gibt die Strecke  $\overline{ab}$  das reduzierte statische Moment von  $P_1$  an und zwar ist dieses linksdrehend; alle übrigen statischen Momente sind links- bezw. rechtsdrehend, je nachdem die sie darstellenden Strecken mit  $\overline{ab}$  gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben.

Die statischen Momente von  $P_2$  und  $P_3$ , dargestellt durch die Strecken  $\overline{bc}$  und  $\overline{cd}$ , sind also rechtsdrehend.

65) Aus der Figur 62 lässt sich auch das reduzierte statische Moment von mehreren aufeinander folgenden Kräften bezw. der Resultante eines ebenen Kräftesystems ablesen.

So stellt z. B. die Strecke  $\overline{ac}$  das statische Moment von  $P_1$  und  $P_2$  dar und zwar ist dasselbe linksdrehend; durch die Strecke  $\overline{ad}$  ist endlich das statische Moment der Resultante der drei Kräfte  $P_1$  bis  $P_3$  gegeben, dasselbe ist rechtsdrehend.

Für das Ablesen der reduzierten statischen Momente mehrerer aufeinander folgenden Kräfte kann man sich folgende Regel merken:

„Man bringt den der ersten Kraft vorangehenden und den der letzten Kraft nachfolgenden Seilstrahl mit der Hilfsgeraden durch den Drehpunkt zum Schnitt. Die von den Schnittpunkten begrenzte Strecke stellt dann das auf die Poldistanz reduzierte statische Moment der bezüglichen Kräfte dar.“

**b) Die Kräfte sind nicht parallel.**

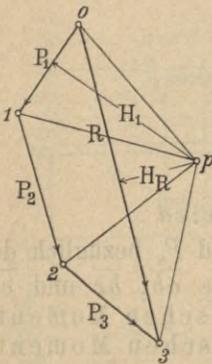
66) Die Ermittlung des statischen Moments von nicht parallelen Kräften kann in ähnlicher Weise erfolgen wie in No. 64 und 65. Man zeichnet zunächst wieder Kräfte- und Seil-

polygon.

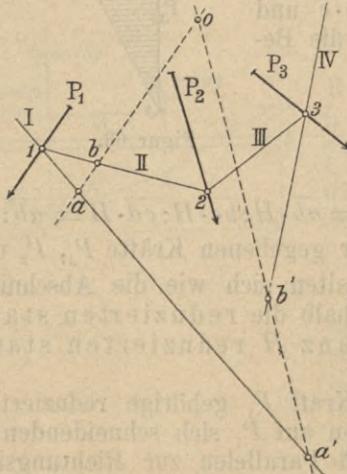
Ist  $o$  der gegebene Drehpunkt, so schneidet eine Parallele durch  $o$  zu  $P_1$  auf den Seilstrahlen I und IV die Punkte  $a$  und  $b$  aus und es ist  $\overline{ab}$  das auf die zu  $P_1$  gehörige Poldistanz  $H_1$  reduzierte statische Moment der Kraft  $P_1$ ; das wirkliche statische Moment ist also  $\overline{ab} \cdot H_1$  dasselbe ist linksdrehend.

Eine Parallele zur Schlusslinie  $0.3$ , d. h. zur Resultantenrichtung der gegebenen Kräfte liefert auf den Seilstrahlen I und IV die Punkte  $a'$  und  $b'$  und es ist  $\overline{a'b'}$

Figur 65.



Figur 64.



das statische Moment des gegebenen Kräftesystems, reduziert auf die zur Resultante gehörige Poldistanz  $H_R$ . Das wirkliche Moment ist also gleich  $\overline{a'b'} \cdot H_R$  und zwar ist dieses rechtsdrehend.

c) Übungsaufgaben.

67) Aufgabe 23. Für das in Figur 66 dargestellte Kräftesystem ist das statische Moment jeder einzelnen Kraft, sowie dasjenige der Resultante bezüglich des Drehpunktes  $o$  anzugeben.

**Auflösung.** Konstruiert man Kräfte- und Seilpolygon, so kann man die auf die Poldistanz  $H$  reduzierten Momente aus der Figur 66 abgreifen: das reduzierte Moment von  $P_1$  ist  $\overline{ab} = 130$  cm linksdrehend, das reduzierte Moment von  $P_2$  ist  $\overline{bc} = 67,5$  cm linksdrehend, das reduzierte Moment von  $P_3$  ist  $\overline{cd} = 75,0$  cm linksdrehend, das reduzierte Moment von  $P_4$  ist  $\overline{de} = 337$  cm rechtsdrehend, das Resultantenmoment ist  $\overline{ae} = 62,5$  cm rechtsdrehend.

Bei dem gewählten Kräftemassstab von  $1 \text{ mm} = 150 \text{ kg}$  beträgt die Poldistanz  $H = 26,6 \text{ mm} = 4000 \text{ kg}$ . Daher haben die wirklichen statischen Momente die folgenden Werte:

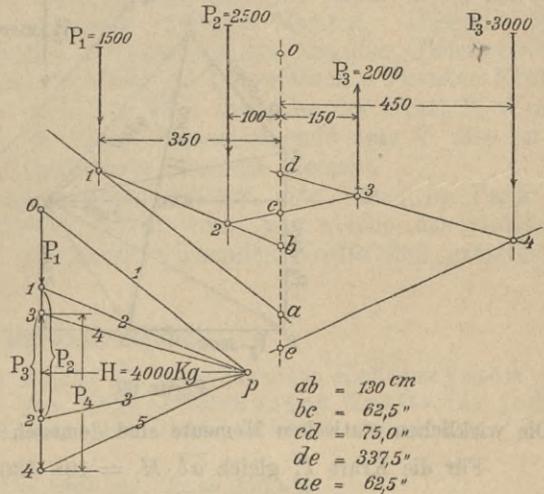
das statische Moment von $P_1$	ist gleich	$130 \cdot 4000 = 520000$	kg cm
" " " "	$P_2$	$625 \cdot 4000 = 250000$	kg cm
" " " "	$P_3$	$720 \cdot 4000 = 300000$	kg cm
" " " "	$P_4$	$337 \cdot 4000 = 1348000$	kg cm
das Resultantenmoment	ist	$62,5 \cdot 4000 = 250000$	kg cm

68) Aufgabe 24. Für das in Figur 68 dargestellte Kräftesystem ist das statische Moment jeder einzelnen Kraft, sowie das Resultantenmoment zu ermitteln.

**Auflösung.** Man konstruiert Kräfte- und Seilpolygon und mittels Parallelen durch den Drehpunkt zu den entsprechenden Kräften die reduzierten statischen Momente.

- Man erhält für das Moment von  $P_1$  die Strecke  $\overline{ab} = 108$  cm, als entsprechende Poldistanz die Länge  $H_1 = 4300$  kg
- für das Moment von  $P_2$  die Strecke  $\overline{cd} = 43$  cm, als entsprechende Poldistanz die Länge  $H_2 = 4700$  kg
- für das Moment von  $P_3$  die Strecke  $\overline{ef} = 155$  cm, als entsprechende Poldistanz die Länge  $H_3 = 2500$  kg
- für das Resultantenmoment die Strecke  $\overline{gh} = 500$  cm, als entsprechende Poldistanz die Länge  $H_R = 2100$  kg

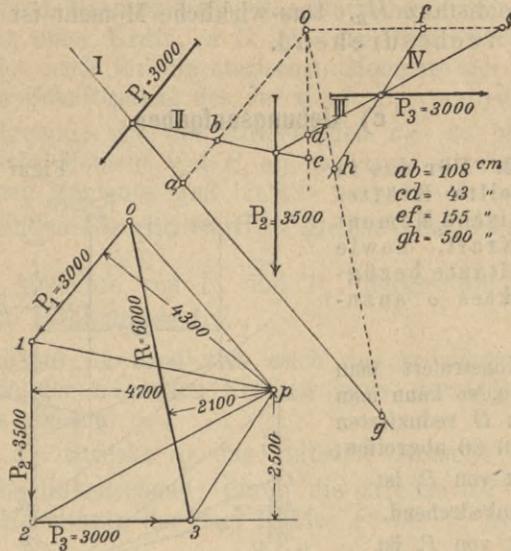
Figur 66.



Figur 67.

In Figur 66 muss statt  $P_3 = 2000$  stehen:  $P_4 = 3000$ .

Figur 68.



Figur 69.

Die wirklichen statischen Momente sind demnach:

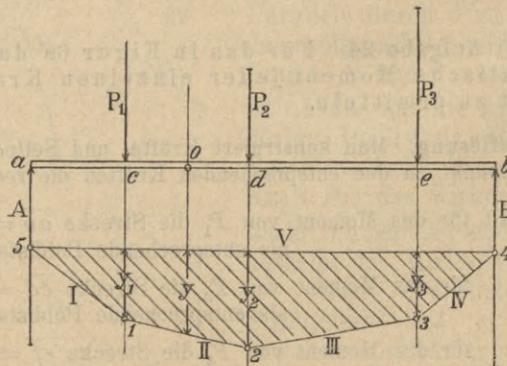
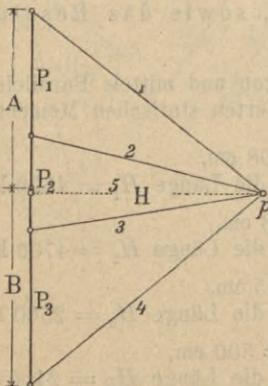
- Für die Kraft  $P_1$  gleich  $\overline{ab} \cdot H_1 = 108 \cdot 4300 = 464400$  kgcm linksdrehend,
- Für die Kraft  $P_2$  gleich  $\overline{cd} \cdot H_2 = 43 \cdot 4700 = 192100$  kgcm linksdrehend,
- Für die Kraft  $P_3$  gleich  $\overline{ef} \cdot H_3 = 155 \cdot 2500 = 387500$  kgcm linksdrehend,
- Für die Resultante  $gh \cdot H_R = 500 \cdot 2100 = 1050000$  kgcm linksdrehend.

**d) Das Kräftesystem ist unter sich im Gleichgewicht.**

69) Hat man ein im Gleichgewicht befindliches System paralleler Kräfte, wie dies z. B. der Fall ist bei einem durch äussere vertikale Kräfte belasteten Träger, insofern man die Auflagerreaktionen als vertikal aufwärts gerichtete Kräfte mit in Betracht zieht, so ist die Ermittlung des statischen Moments der auf

Figur 71.

Figur 70.



ein beliebiges Trägerstück wirkenden Kräfte besonders einfach und wie sich später zeigen wird auch sehr wichtig. Will man z. B. für den Punkt  $o$  das statische Moment der auf das Trägerstück  $ao$  wirkenden Kräfte bestimmen, so findet man hierfür die Strecke  $y$ , welche durch die den Punkt  $o$  enthaltende Vertikale aus der Begrenzung des Seilpolygons ausgeschnitten wird; denn betrachtet man die Kräfte in der Reihenfolge  $P_1, P_2, P_3, B, A$ , so wirken auf das Trägerstück  $ao$  die Kräfte  $A$  und  $P_1$ , die der Kraft  $A$  vorangehende Seilpolygonseite ist aber  $V$ , die der Kraft  $P_1$  nachfolgende aber  $II$ , daher ist  $y$  das gesuchte auf die Poldistanz  $H$  das reduzierte statische Moment. Dasselbe Moment muss sich aber, da ja die beiden Trägerabschnitte einander Gleichgewicht halten müssen, auch für die auf das rechtsseitige Trägerstück wirkenden Kräfte  $P_2, P_3$  und  $B$  ergeben und dies ist auch der Fall, denn die der Kraft  $P_2$  vorangehende Seilpolygonseite ist  $II$ , die der Kraft  $B$  nachfolgende aber  $V$ , also ist  $y$  das gesuchte, auf die Poldistanz  $H$  reduzierte statische Moment.

Mit Rücksicht auf das Vorangegangene erkennt man, dass im Punkt  $d$  die Trägerlänge  $ab$  in zwei Abschnitte geteilt wird, für welche das statische Moment der auf die bezüglichen Abschnitte wirkenden Kräfte den grösstmöglichen Wert annimmt.

### e) Übungsaufgabe.

70) **Aufgabe 25.** Für das in Figur 70 dargestellte Kräftesystem ist das statische Moment der auf den Träger wirkenden Kräfte für jeden Angriffspunkt der einzelnen Kräfte als Drehpunkt zu ermitteln.

Es ist:

$$P_1 = 1600 \text{ kg} \quad P_2 = 1200 \text{ kg} \quad P_3 = 2000 \text{ kg} \\ l_1 = 1,2 \text{ m} \quad l_2 = 2,8 \text{ m} \quad l_3 = 5 \text{ m} \quad l = 6 \text{ m}$$

**Auflösung.** Misst man die Längen  $y_1, y_2, y_3$ , so erhält man die Werte:

$$y_1 = 90 \text{ cm} \quad y_2 = 126,6 \text{ cm} \quad y_3 = 86,6 \text{ cm}$$

die Poldistanz  $H$  beträgt = 30 mm, also 4500 kg.

Es ist demnach das Moment an der Stelle  $a = 0$ , an der Stelle  $c: M_1 = 90 \cdot 3000 = 270000 \text{ kgcm}$ , an der Stelle  $d: M_2 = 126,6 \cdot 3000 = 379800 \text{ kgcm}$ , an der Stelle  $e: M_3 = 86,6 \cdot 3000 = 259800 \text{ kgcm}$ , an der Stelle  $b = 0$ .

## 9) Der Mittelpunkt paralleler Kräfte.

### a) Bestimmung des Mittelpunktes paralleler Kräfte durch Zeichnung.

71) In No. 43 wurde gezeigt, dass die Resultante von zwei parallelen Kräften die Verbindungslinie  $\overline{ab}$ , siehe Figur 72, der Angriffspunkte in einem Punkte  $c$  so trifft, dass stets die Beziehung stattfindet:

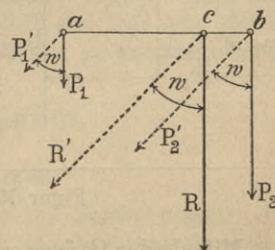
$$27) \dots \frac{P_1}{P_2} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ac}}$$

Dreht man nun jede Kraft in dem nämlichen Sinne um einen beliebigen Winkel  $w$ , so wird die Resultante in ihrer neuen Lage gleichfalls durch den Punkt  $c$  gehen, weil ja das Verhältnis:

$$\frac{P_1}{P_2} \text{ und demnach auch jenes von } \frac{\overline{bc}}{\overline{ac}}$$

dasselbe geblieben ist.

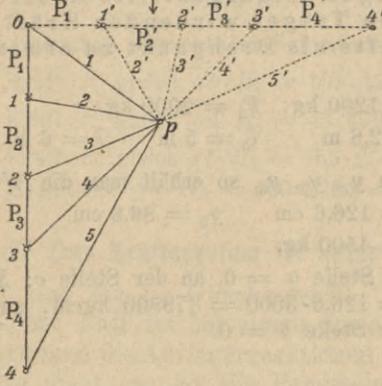
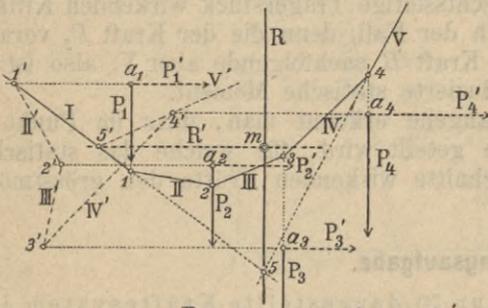
Figur 72.



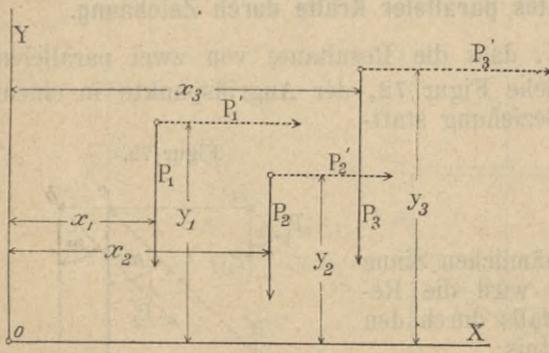
Sind  $n$  parallele Kräfte gegeben, so kann man  $n - 1$  derselben zu einer Resultante vereinigen und schliesslich diese mit der  $n$ ten Kraft zu einer Gesamresultante aller Kräfte zusammenfassen. Diese trifft dann die Verbindungslinie der Angriffspunkte der zugehörigen Kräfte etwa in einem Punkte  $m$ , der bei einer Drehung des Kräftesystems unveränderlich bleibt und der der Mittelpunkt des Kräftesystems heisst.

Die Konstruktion des Mittelpunktes eines Systems paralleler Kräfte folgt unmittelbar aus dem Vorangehenden.

Figur 73.



Figur 74.



Figur 75.

72) Sind  $P_1$  bis  $P_4$  die gegebenen Kräfte, so zeichnet man zunächst für die gegebenen Richtungslinien die Resultante  $R$ , dreht hierauf die Kräfte um ihre Angriffspunkte im nämlichen Sinne um ein und denselben Winkel, am bequemsten um  $90^\circ$  und zeichnet für die neue Lage der Richtungslinien wiederum die Resultante, sie heisse jetzt  $R'$ , dann schneiden sich die beiden Resultanten  $R$  und  $R'$  im gesuchten Kräftemittelpunkt  $m$ .

**Anmerkung 16.** Zweckmässig ist es, den ursprünglich gewählten Pol für die beiden Seilpolygone beizubehalten.

**b) Bestimmung des Mittelpunktes paralleler Kräfte durch Rechnung.**

73) Bei der Bestimmung des Mittelpunktes paralleler Kräfte durch Rechnung wählt man in der Ebene der Kräfte einen beliebigen Punkt  $o$ , siehe Figur 75, als Drehpunkt, verschafft sich die Abstände  $x_1$  bis  $x_3$ , ebenso  $y_1$  bis  $y_3$  der Kräfte vor und nach der Drehung von diesem Punkte und stellt für die beiden Lagen des Kräftesystems die Momentgleichung auf. Man erhält dann:

$$28) \dots R_x = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3$$

$$29) \dots R_{y'} = P_1' y_1 + P_2' y_2 + P_3' y_3$$

und hieraus:

$$30) \dots x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

$$31) \dots y = \frac{P_1' y_1 + P_2' y_2 + P_3' y_3}{P_1' + P_2' + P_3'}$$

Mittels der Grösse  $x$  und  $y$  ist die Lage des Mittelpunktes des Kräftesystems bestimmt.

In den Gleichungen 28) und 29) kann natürlich auch das Minuszeichen auftreten und dies ist der Fall, wenn linksdrehende, d. h. negative statische Momente vorhanden sind.

### c) Übungsaufgabe,

74) Aufgabe 26. Es sei:

$$\begin{array}{lll} P_1 = 600 \text{ kg} & P_2 = 1000 \text{ kg} & P_3 = 1500 \text{ kg} \\ x_1 = 40 & x_2 = 60 & x_3 = 80 \\ y_1 = 60 & y_2 = 40 & y_3 = 80 \end{array}$$

Anföslung. Es ist:

$$\begin{aligned} Rx &= 600 \cdot 40 + 1000 \cdot 60 + 1500 \cdot 80 \\ Ry &= 600 \cdot 60 + 1000 \cdot 40 + 1500 \cdot 80 \end{aligned}$$

daher:

$$\begin{aligned} x &= \frac{600 \cdot 40 + 1000 \cdot 60 + 1500 \cdot 80}{600 + 1000 + 1500} = \frac{204000}{3100} = 65,8 \\ y &= \frac{600 \cdot 60 + 1000 \cdot 40 + 1500 \cdot 80}{600 + 1000 + 1500} = \frac{216000}{3100} = 69,6 \end{aligned}$$



## C. Der Schwerpunkt.

### 1) Vom Schwerpunkt im allgemeinen.

75) Jeder Körper übt, unter dem Einflusse der Anziehungskraft der Erde, auf eine horizontale Unterlage einen Druck aus, welchen man das Gewicht des Körpers nennt. Der Mittelpunkt dieses Druckes heisst der Schwerpunkt des Körpers. Zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes denkt man sich den Körper in endlich oder unendlich kleine Elemente zerlegt, deren Schwerpunkte entweder bekannt sind, oder sich doch in einfacher Weise bestimmen lassen. Bringt man in diesen Schwerpunkten die Gewichte der einzelnen Körperelemente als parallele Kräfte an, so besitzen diese einen Mittelpunkt und letzterer ist der Schwerpunkt des Körpers. Wird der Körper durch Ebenen in parallele und recht dünne Streifen zerschnitten, so besitzt jeder dieser Streifen ein Gewicht entsprechend seinem Flächeninhalte und demnach einen Schwerpunkt. Zur Bestimmung der Lage des letzteren kann man sich die Fläche ebenfalls in endlich oder unendlich kleine Elemente zerlegt und in deren Schwerpunkten Kräfte, proportional den Flächeninhalten dieser Elemente angebracht denken. Der Mittelpunkt dieser Kräfte ist der Schwerpunkt der Fläche.

Teilt man endlich eine Fläche in sehr schmale Streifen, so können letztere als Linien von einem bestimmten Gewichte aufgefasst werden; eine solche Linie besitzt dann ebenfalls einen Schwerpunkt. Im Folgenden soll nur von der Bestimmung des Schwerpunktes von Linien und ebenen Flächen gesprochen werden.

### 2) Der Schwerpunkt von Linien.

#### a) Schwerpunkt einer geraden Linie.

76) Der Mittelpunkt  $s$  einer geraden Strecke ist ihr Schwerpunkt, denn die Summe der links von  $s$  liegenden Schwerkkräfte ist gleich jener der rechts von  $s$  liegenden.

### b) Schwerpunkt einer gebrochenen Linie.

77) Die Schwerpunkte von  $\overline{ab}$  und  $\overline{bc}$ , siehe Figur 76, sind die Mittelpunkte  $d$  und  $e$  dieser Strecken. Denkt man sich also in den Punkten  $d$  und  $e$  parallele Kräfte wirkend, proportional den Längen  $\overline{ab}$  und  $\overline{bc}$ , so geht deren Resultante durch den Schwerpunkt  $s$  des Linienzuges  $abc$  und zwar liegt  $s$  auf der Verbindungslinie  $de$ , so dass:

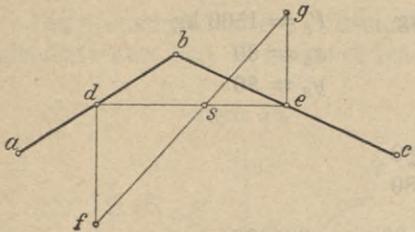
$$\frac{\overline{sd}}{\overline{se}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}}$$

ist. Macht man also:

$$\overline{df} = \overline{be} \text{ und } \overline{eg} = \overline{ad}$$

so schneidet  $gf$  auf  $de$  den gesuchten Schwerpunkt  $s$  aus.

Figur 76.



### c) Schwerpunkt eines mehrfach gebrochenen Linienzuges.

78) Ist z. B.  $abcde$  ein halbes regelmässiges Vieleck, siehe Figur 77, so ist klar, dass der Schwerpunkt  $s$  auf der Mittellinie  $mc$  liegt. Denkt man sich nun in den Mittelpunkten der einzelnen Seiten  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$ ,  $\overline{cd}$ ,  $\overline{de}$  Kräfte proportional den Längen der einzelnen Seiten angebracht, so findet man die Lage von  $s$  entweder durch Konstruktion mittels Kräfte- und Seilpolygon oder aber wie folgt:

Bezeichnet etwa  $p$  die Länge einer halben Polygonseite und  $R$  die Resultante der vorhandenen Schwerkräfte, so besteht die Beziehung:

$$Ry = \sum_1^n p y_n \quad \text{und} \quad y = \frac{\sum_1^n p y_n}{R}$$

Nun ist aber  $p:r = x_2:y_2$  oder  $y_2 = \frac{r x_2}{p}$ ; daher ist:

$$Ry = \sum_1^n \frac{p r x_2}{p} = r \sum_1^n x_2 = r l$$

Ferner ist:

$$R = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} = u$$

es ist also:

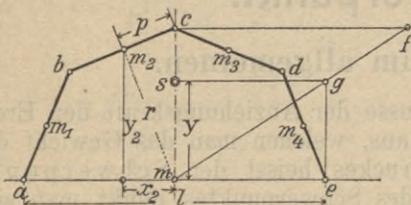
$$32) \dots y = \frac{r l}{u}$$

Zieht man etwa in  $c$ , siehe Figur 77, eine Parallele zu  $ae$ , macht

$$\overline{cf} = \frac{1}{2} u$$

zieht  $mf$  und durch  $e$  die Parallele  $eg$  zu  $mc$  bis zum Schnitt  $g$  mit  $mf$ , so trifft die Parallele durch  $g$  zu  $cf$  die  $mc$  in dem gesuchten Schwerpunkt  $s$  des Linienzuges  $abcde$ .

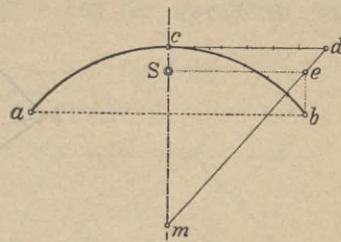
Figur 77.



**d) Schwerpunkt eines Kreisbogens.**

79) Für den Kreisbogen kann man die gleiche Konstruktion verwenden, wie in No. 78. Man zieht also die Halbierungslinie  $mc$  des Centriwinkels  $amb$  und in  $c$  die Tangente an den Kreisbogen; macht man nun die Länge  $cd$  gleich dem Bogen  $cb$ , zieht  $md$  und durch  $b$  die Parallele  $be$  zu  $mc$  bis zum Schnittpunkt  $e$  mit  $md$ , so trifft die Parallele durch  $e$  zur Tangente  $cd$  die  $mc$  im gesuchten Schwerpunkt  $s$  des Kreisbogens  $acb$ .

Figur 78.



**Anmerkung 17.** Bezeichnet  $u$  die Länge des Bogens  $ab$ ,  $l$  die Sehne  $\overline{ab}$  und  $r$  den Kreishalbmesser, so ist die Entfernung  $y$  des Schwerpunktes  $s$  vom Kreismittelpunkt  $q$ :

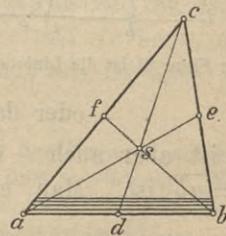
$$33) \dots y = \frac{rl}{u}$$

**3) Der Schwerpunkt ebener Flächen.**

**a) Schwerpunkt des Dreiecks.**

80) Denkt man sich das Dreieck  $abc$ , siehe Figur 79, parallel zu einer Seite, etwa  $ab$  in sehr schmale Streifen zerlegt, so liegt für jeden Streifen der zugehörige Schwerpunkt in der Mitte dieses Streifens. Die Verbindungslinie dieser Punkte ist die zur Seite  $ab$  gehörige Mitteltransversale.

Figur 79.



Auf dieser Linie wird also auch der Schwerpunkt des Dreiecks liegen, desgleichen liegt er aber auch auf den beiden anderen Mitteltransversalen  $ae$  und  $bf$ , ist also der Schnittpunkt  $s$  der drei Mitteltransversalen.

**Anmerkung 18.** Bekanntlich teilt der Schnittpunkt  $s$  der drei Mitteltransversalen eines Dreiecks jede dieser Linien im Verhältnis 1:2, demgemäss liegt der Schwerpunkt eines Dreiecks von jeder Seite um den dritten Teil der zur letzteren gehörigen Höhe entfernt.

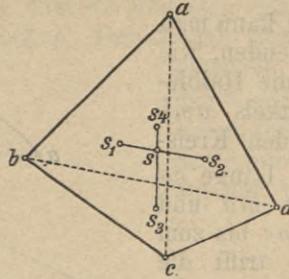
81) Jede Mitteltransversale teilt das Dreieck in zwei gleich schwere Hälften. Diese Transversalen führen deshalb auch die Bezeichnung „Schwerachsen.“ Jede gerade Linie, welche eine Fläche in zwei flächengleiche und demnach auch gleich schwere Teile teilt, ist eine Schwerachse und auf ihr liegt der Schwerpunkt der Fläche. Besitzt eine Fläche mehrere solcher Schwerachsen, so schneiden sich dieselben stets im Schwerpunkt der Fläche.

Für jede Fläche, welche einen Mittelpunkt besitzt, ist dieser Mittelpunkt der Schwerpunkt, z. B. für ein Parallelogramm, ein Rechteck oder Quadrat, ein regelmässiges Vieleck, eine Kreisfläche, eine elliptische Fläche u. s. w.

**b) Schwerpunkt eines Vierecks.**

82) Man zerlegt das Viereck  $abcd$ , siehe Figur 80, durch die Diagonalen  $ac$  und  $bd$  je in zwei Dreiecke und bestimmt nach der vorangehenden No. 80

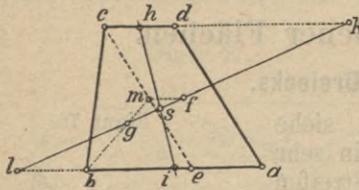
Figur 80.



die Schwerpunkte  $s_1, s_2$  und  $s_3, s_4$ . Dann liegt der Schwerpunkt  $s$  des Vierecks  $abcd$  im Schnittpunkt der Verbindungslinien  $s_1 s_2$  und  $s_3 s_4$ .

### c) Schwerpunkt des Trapezes.

83) Eine Schwerachse des Trapezes erhält man in der Verbindungslinie  $hi$  der beiden parallelen Seiten. Zerlegt man das Trapez ausserdem in das Parallelogramm  $adce$  und das Dreieck  $ecb$ , so ist die Verbindungslinie  $fg$  der Schwerpunkte dieser Figuren eine weitere Schwerlinie des Trapezes und schneidet auf  $hi$  den gesuchten Schwerpunkt  $s$  aus.



Figur 81.

In Figur 81 ist die Linie  $ac$  noch zu ziehen.

Aus der Figur 81 erkennt man unmittelbar die Aehnlichkeit der Dreiecke  $fm g$  und  $lb g$ , hieraus folgt aber die Beziehung:

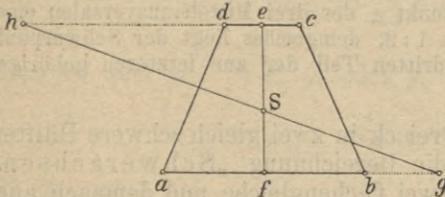
$$\overline{mg} : \overline{gb} = \overline{fm} : \overline{bl}$$

oder da  $\overline{gb} = 2\overline{mg}$  ist, auch  $\overline{bl} = 2\overline{mf} = \overline{dc}$ .

Nun ist aber auch  $\triangle afl \cong \triangle cfk$ , daher  $\overline{ck} = \overline{al}$ , woraus ferner folgt, dass  $\overline{dk} = \overline{ab}$  ist. Man erhält somit die folgende einfachere Konstruktion des

Schwerpunktes eines Trapezes  $abcd$ . Man zieht, siehe Figur 82, die Verbindungslinie  $ef$  der Mittelpunkte der parallelen Seiten und verlängert die letzteren nach entgegengesetzten Richtungen und zwar jede Seite um die Länge der anderen; die Verbindungslinie  $hg$  der so sich ergebenden Punkte  $h$  und  $g$  schneidet  $ef$  im Schwerpunkte  $s$  des Trapezes.

Figur 82.

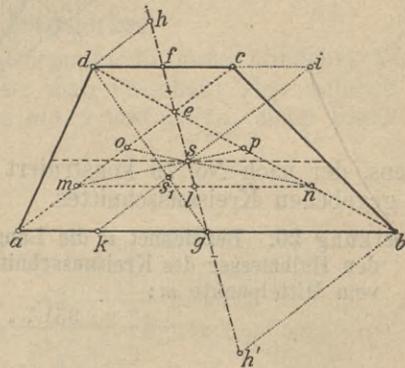


84) Die in No. 83 am Schlusse angeführte Konstruktion ist gewiss ausserordentlich einfach und zweckmässig. Der einzige Nachteil ist vielleicht nur der, dass bei beschränkter Zeichenfläche die Punkte  $h$  und  $g$  unzugänglich werden können. Durch einfache geometrische Betrachtungen lassen sich nun eine ganze Reihe von Schwerpunktskonstruktionen ableiten, welchen der eben berührte Nachteil nicht zukommt. Im folgenden sollen einige dieser Konstruktionen angegeben werden:

1) Zieht man die Mittellinie  $gf$ , siehe Figur 83, die beiden Diagonalen, sowie durch  $d$  oder  $b$  eine Parallele zu einer der Diagonalen, z. B.  $ac$ , so liegt der Schwerpunkt  $s$  von den parallelen Seiten  $ab$  und  $de$  um ein Drittel der

Strecken  $\overline{gh}$  bzw.  $\overline{fh'}$  entfernt, d. h. es ist  $\overline{gs} = \frac{1}{3}\overline{gh}$ ;  $\overline{fs} = \frac{1}{3}\overline{fh'}$ . Denn ist  $s_1$  der Schwerpunkt des Dreiecks  $abd$ , so liegt  $s$  auf der Parallelen durch  $s_1$  zu  $ac$  und es ist, da  $\overline{s_1g} = \frac{1}{3}\overline{dg}$  ist, auch  $\overline{gs} = \frac{1}{3}\overline{gh}$ .

Figur 83.



2) Denkt man sich die Parallele durch  $s$  zu  $ac$  verlängert bis zu den Schnittpunkten  $i$  und  $k$  mit den parallelen Seiten, so ist,  $\overline{ci} = \overline{ak} = x$  gesetzt,  $2\overline{gk} = \overline{di}$  oder:

$$ab - 2x = \overline{dc} + x, \text{ oder } x = \frac{\overline{ab} - \overline{dc}}{3}$$

Macht man also  $\overline{ak} = \overline{ci}$  gleich dem dritten Teil der Differenz der beiden parallelen Seiten, so geht die Verbindungslinie  $ki$  durch den Schwerpunkt  $s$ .

3) Macht man  $\overline{sl} = \frac{1}{2}\overline{es}$  und zieht durch  $l$  die Linie  $mn$  parallel zu  $ab$ , so ist  $s$  auch der Schwerpunkt des Dreiecks  $emn$ , daher ist auch  $\overline{oe} = \overline{om}$  und  $\overline{pe} = \overline{pn}$ , demnach auch  $\overline{am} = \overline{ec}$  und  $\overline{bn} = \overline{de}$ .

Man braucht also nur um den Schwerpunkt  $s$  zu konstruieren, die beiden Diagonalen des Trapezes zu zeichnen und die Strecken  $\overline{ec}$  und  $\overline{de}$  bzw. nach  $\overline{am} = \overline{nb}$  abzutragen,  $mn$  zu zeichnen und den Schwerpunkt des Dreiecks  $emn$  zu bestimmen.

**Anmerkung 19.** Will man die Entfernung  $y$  des Schwerpunkts  $s$  des Trapezes von einer der parallelen Seiten durch Rechnung bestimmen, so kann dies in einfacher Weise geschehen. Man denkt sich in den Punkten  $e$  und  $g$ , siehe Figur 81, parallel zur Seite  $ab$  Kräfte wirkend, gleich den Flächeninhalten der zugehörigen Figuren, also des Parallelogramms und des Dreiecks und stellt für einen beliebig auf der Linie  $ab$  gewählten Punkt die Momentengleichung auf. Bezeichnen nun  $a, b$  und  $h$  die parallelen Seiten und die Höhe des Trapezes, so hat man folgende Gleichungen:

$$\frac{(a+b)h}{2} y = bh \frac{h}{2} + \frac{(a-b)h}{2} \frac{h}{3}$$

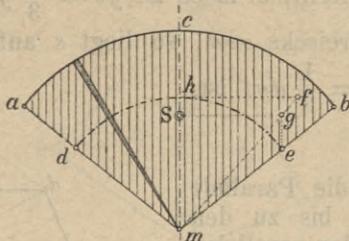
daher:

$$34) \dots y = \frac{bh \frac{h}{2} + \frac{(a-b)h}{2} \frac{h}{3}}{\frac{(a+b)h}{2}} = \frac{(a+2b)}{a+b} \frac{h}{3}$$

#### d) Der Schwerpunkt des Kreisbogenschnittes (Kreissektor).

85) Denkt man sich den Kreisbogenschnitt, siehe Figur 84, in sehr kleine Kreisbogenschnitte zerlegt, so kann jeder dieser Ausschnitte als ein Dreieck aufgefasst werden, dessen Grundlinie das Bogenelement und dessen Höhe der Halbmesser des gegebenen Kreisbogenschnittes ist. Die Schwerpunkte aller dieser Ausschnitte liegen daher auf einem Kreisbogen  $de$ , dessen Halbmesser gleich zwei Drittel des gegebenen Halbmessers ist. Der Schwerpunkt  $s$  dieses Kreis-

Figur 84.



bogens, der nach No. 79 konstruiert werden kann, ist zugleich der Schwerpunkt des gegebenen Kreisabschnittes.

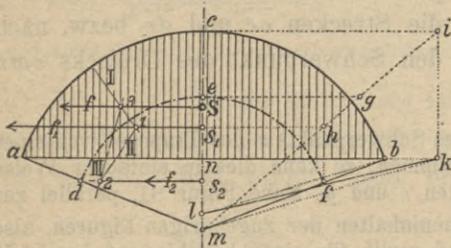
**Anmerkung 20.** Bezeichnet  $u$  die Länge des Bogens  $acb$ ,  $l$  die der Sehne  $ab$  und  $r$  den Halbmesser des Kreisabschnittes, so ist die Entfernung  $y$  des Schwerpunktes  $s$  vom Mittelpunkte  $m$ :

$$35) \dots y = \frac{2}{3} \frac{rl}{u}$$

**e) Schwerpunkt des Kreisabschnittes.**

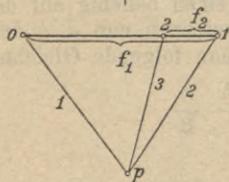
86) Ermittelt man die Schwerpunkte  $s_1$  und  $s_2$  des Kreisabschnittes  $macb$  und des Dreiecks  $mab$ , so kann man sich in  $s_1$  und  $s_2$  parallele Kräfte wirkend denken, proportional den Inhalten  $f_1$  und  $f_2$  der zugehörigen Flächen. Die in  $s_1$  wirkende Kraft ist Resultante von zwei Seitenkräften, von welchen die eine Kraft in  $s_2$  proportional dem Flächeninhalt  $f_2$  des Dreiecks  $mab$ , die andere aber proportional dem Inhalt  $f$  des Kreisabschnittes im Schwerpunkt  $s$  dieser Fläche angreift.

Figur 85.



Man hat also die in  $s_1$  angreifende Kraft  $f_1$  in zwei Seitenkräfte  $f_2$  und  $f$  zu zerlegen, wobei  $f_2$  der Grösse und Lage nach gegeben ist.

Macht man, siehe Figur 86, die Strecken  $\overline{0 \cdot 1}$  und  $\overline{2 \cdot 1}$  proportional den Masszahlen der Flächeninhalte  $f_1$  und  $f_2$ , siehe Anmerkung 21, wählt den Pol  $p$  beliebig und konstruiert das Seilpolygon, indem man auf der Richtungslinie von  $f_1$  den Punkt 1 beliebig annimmt, durch ihn die Seilstrahlen I und II parallel



Figur 86.

zu den Polstrahlen 1 und 2 zeichnet und durch den Schnittpunkt 2 des Seilstrahles II mit der Richtungslinie  $f_2$  den Seilstrahl III parallel zum Polstrahl 3 zieht, so schneiden sich III und I in einem Punkte 3 der Richtungslinie von  $f$ ; letztere trifft die  $mc$  im Schwerpunkte  $s$  des Kreisabschnittes.

**Anmerkung 21.** Um in einfacher Weise die Strecken  $\overline{0 \cdot 1}$  und  $\overline{2 \cdot 1}$  proportional den Masszahlen der Flächeninhalte  $f_1$  und  $f_2$  zu erhalten, hat man nur zu bedenken, dass, da die Strecke  $\overline{eg}$  gleich dem Bogen  $ef$  ist, auch die Strecke  $\overline{ci}$  gleich dem Bogen  $cb$  sein muss. Der Inhalt  $f_1$  des Kreisabschnittes ist daher gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks  $mci$ . Verwandelt man nun das Dreieck  $mnb$  in ein solches, das mit dem Dreieck  $mci$  die gleiche Grundlinie hat, was dadurch geschehen kann, dass man  $ik$  parallel  $mc$  und durch  $b$  die Parallele  $bl$  zu  $mk$

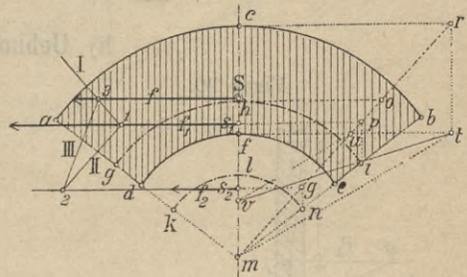
zieht; dann ist  $\triangle mnb$  gleich  $\triangle nlk$  und es verhalten sich nun die Höhen  $mc$  und  $ln$  zu einander wie  $f_1:f_2$ . Man braucht also in Figur 86 die Strecken  $0\cdot1$  und  $2\cdot1$  bzw. nur gleich  $mc$  und  $nl$  abzutragen.

**Anmerkung 22.** Der Schwerpunkt  $s$  liegt annähernd und für viele praktische Zwecke genau genug um zwei Fünftel der Pfeilhöhe  $nc$  von der Sehne  $ab$  entfernt.

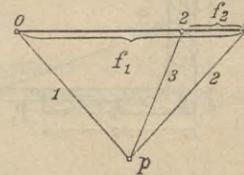
**f) Schwerpunkt des Ringstückes.**

87) Für das Ringstück kann der Schwerpunkt in ganz ähnlicher Weise bestimmt werden, wie für den Kreisabschnitt; man verschafft sich nämlich die Schwerpunkte  $s_1$  und  $s_2$  der Kreisabschnitte  $macb$  und  $mdfe$ , siehe Figur 87. In  $s_1$  kann man sich dann wieder eine Kraft  $f_1$  proportional dem Flächeninhalt von  $macb$  und in  $s_2$  eine Kraft  $f_2$  proportional dem Flächeninhalte von  $mdfe$  wirkend denken; die Kraft  $f_1$  ist Resultante von den Seitenkräften  $f_2$  und  $f$ , wenn unter  $f$  die im Schwerpunkt  $s$  des Ringstückes angreifende Kraft, proportional dem Flächeninhalt des Ringstückes verstanden ist.

Figur 87.



Macht man also, s. Figur 88, die Strecken  $0\cdot1$  und  $2\cdot1$  gleich  $f_1$  und  $f_2$ , so findet man wie in No. 86 den Punkt 3 des Seilpolygons, wenn man durch den Punkt 1 auf  $f_1$  die Seilstrahlen I und II parallel zu den Polstrahlen 1 und 2 und durch 2 auf  $f_2$  den Seilstrahl III parallel zum Polstrahl 3 zieht; durch 3 geht  $f$  hindurch und liefert auf der Linie  $mc$  den Schwerpunkt  $s$  des Ringstückes.



Figur 88.

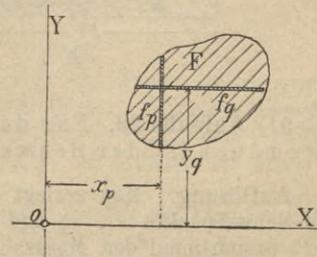
**Anmerkung 23.** Zur Bestimmung der Längen  $0\cdot1$  und  $1\cdot2$  berücksichtigt man, dass die Flächeninhalte  $f_1$  und  $f_2$  proportional sind den Inhalten der Dreiecke  $mer$  und  $mfu$ ; verwandelt man das Dreieck  $mfu$  in ein solches, das mit dem Dreieck  $mer$  die gleiche Grundlinie hat, indem man  $ft = cr$  macht und durch  $u$  die Parallele  $uv$  zu  $mt$  zieht, so sind die Inhalte  $f_1$  und  $f_2$  proportional den Längen  $mc$  und  $fv$ ; es ist somit in Figur 88  $0\cdot1 = cm$  und  $2\cdot1 = fv$  zu machen.

**g) Schwerpunkt einer unregelmässigen Figur.**

88) Ist eine unregelmässig begrenzte Figur  $F$  gegeben, siehe Figur 89, so wählt man zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen  $X$  und  $Y$  und zerlegt die Figur parallel zu diesen Achsen in sehr schmale Streifen  $f_q$  und  $f_p$ .

Figur 89.

Die Mittellinien dieser Streifen nimmt man als Richtungslinien von Kräften an, deren Grössen proportional sind den Längen dieser Linien. Für die beiden Kräftesysteme bestimmt man je die Resultante. Beide Resultanten schneiden sich im Schwerpunkt der Figur. Bezeichnen  $x$  und  $y$  die Abstände des Schwerpunktes von den Achsen  $Y$  und  $X$ , so erhält man für  $x$  und  $y$  die Beziehungen:



$$Fx = \sum f_p x_p \quad Fy = \sum f_q y_q$$

daher ist:

$$36) \dots x = \frac{\sum f_p x_p}{F}$$

und

$$37) \dots y = \frac{\sum f_q y_q}{F}$$

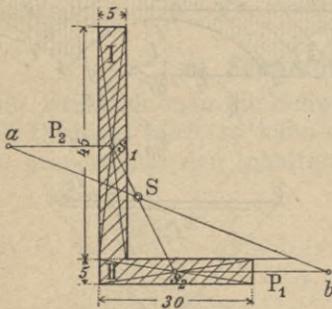
**Anmerkung 24.** Der Ausdruck  $\sum f_p x_p$  bedeutet die Summe der Producte  $f_p x_p$ , d. h. es ist:

$$38) \dots \sum f_p x_p = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \dots$$

$$39) \dots \sum f_q y_q = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \dots$$

**h) Übungsaufgaben.**

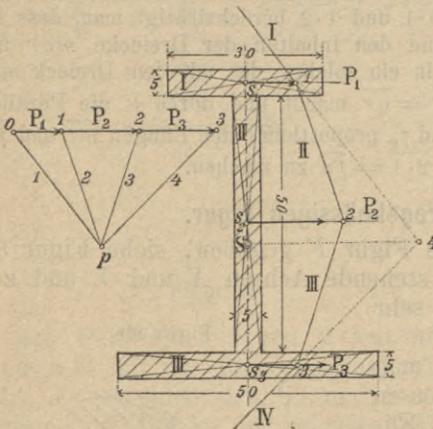
Figur 90.



89) **Aufgabe 27.** Für den in Figur 90 gezeichneten Querschnitt ist der Schwerpunkt zu ermitteln.

**Auflösung.** Teilt man, wie Figur 90 zeigt, den Querschnitt in die beiden Rechtecke I und II, so verhalten sich deren Inhalte in Rücksicht auf die beigesetzten Masszahlen wie 3:2; bestimmt man also die Schwerpunkte  $s_1$  und  $s_2$  dieser Rechtecke, so liegt der Schwerpunkt  $s$  auf der Verbindungslinie  $s_1s_2$  und teilt letztere im Verhältnis 2:3, so dass  $s_1s : ss_2 = 2:3$  ist. Man macht also  $s_1a = 2$  und  $s_2b = 3$  und zeichnet  $ab$ .

Figur 92.      Figur 91.



90) **Aufgabe 28.** Für den in Figur 91 gezeichneten Querschnitt ist der Schwerpunkt zu konstruieren.

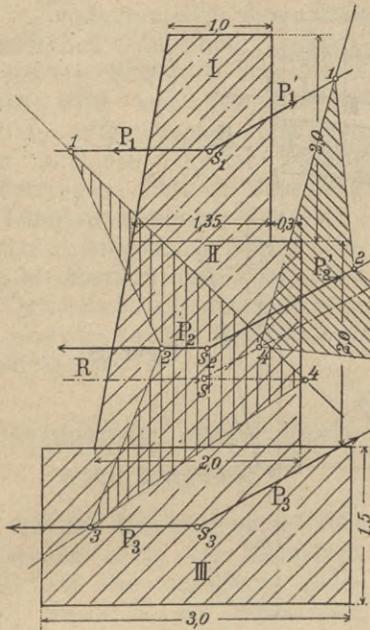
**Auflösung.** Der Schwerpunkt  $s$  liegt auf der Symmetrieachse des Querschnitts. Zerlegt man denselben nun in die Rechtecke I, II, III, bestimmt die Schwerpunkte  $s_1, s_2$  und  $s_3$  der letzteren, und bringt in ihnen als Angriffspunkte die parallelen Kräfte  $P_1, P_2$  und  $P_3$  proportional den Masszahlen der Flächeninhalte der betreffenden Rechtecke an, so geht die Resultante dieser Kräfte durch den Schwerpunkt  $s$  des Querschnitts. Es ist im vorliegenden Falle:

$$P_1 = 3, \quad P_2 = P_3 = 5$$

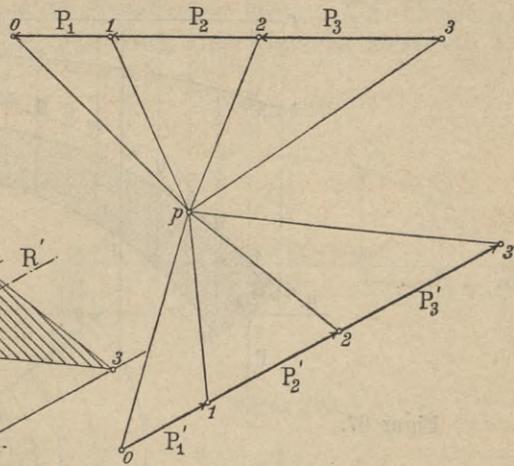
91) **Aufgabe 29.** Für den in Figur 93 gezeichneten Querschnitt einer Stützmauer ist der Schwerpunkt zu konstruieren.

**Auflösung.** Man zerlegt den Querschnitt in die Flächenteile I, II, III, bestimmt deren Schwerpunkte  $s_1, s_2$  und  $s_3$ . Bringt man nun in letzteren parallele Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  proportional den Masszahlen der Flächeninhalte der Teile I bis III an, bestimmt

Figur 93.



Figur 94.



deren Resultante  $R$ , so geht letztere durch den Schwerpunkt  $s$ . Dreht man nun das Kräftesystem um einen beliebigen Winkel und bestimmt nunmehr die Resultante  $R'$ , so schneidet diese die Resultante  $R$  im Schwerpunkt  $s$ .

92) **Aufgabe 30.** Für das in Figur 95 dargestellte halbe Gewölbe ist die Schwerpunktsvertikale  $P$  der Lage und Grösse nach zu ermitteln.

**Auflösung.** Betrachtet man einen Gewölbestreifen von der Tiefe gleich der Einheit, so kann man die durch Erdmaterial hervorgerufene Belastung des Gewölberückens zunächst ersetzen durch einen aus Wölbsteinmaterial bestehenden Belastungskörper. Man teilt zu diesem Zwecke den Gewölbestreifen in eine Anzahl gleichbreiter Lamellen, deren Gewichte dann proportional den mittleren Höhen der Lamellen sind.

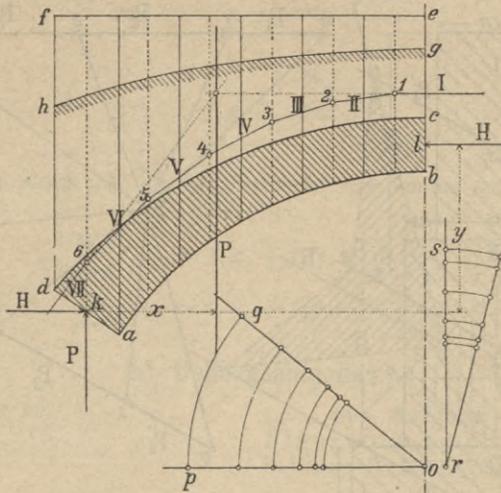
Verhalten sich nun die spezifischen Gewichte des Füll- und Wölbsteinmaterials wie  $g_1 : g$ , etwa wie 2:3, so darf man nur die Mittellinien der genannten Lamellen, vom Gewölberücken bis zur Linie  $fe$  gemessen, im Verhältnis 3:2 verkleinern, um hierdurch in der Linie  $hg$  eine Belastungsgrenze so zu erhalten, dass der Körper von der Begrenzung  $hdabg$  als aus Wölbsteinmaterial bestehend angesehen werden kann. Diese Verkleinerung wird zweckmässig mittels eines Hilfswinkels  $poq$ , siehe Figur 97, ausgeführt, welch letzterer aus der Bedingung konstruiert wird, dass

$$\frac{op}{oq} = \frac{3}{2} \text{ ist.}$$

Um den Punkt  $o$  als Mittelpunkt schlägt man mit den aus Figur 95 zu entnehmenden Lamellenhöhen Kreisbögen, dann sind die zu diesen Bögen gehörigen, zwischen den Schenkeln  $op$  und  $oq$  liegenden Sehnen, die verkürzten Höhen, welche vom Gewölberücken aus auf den Mittellinien der Lamellen abzutragen sind, am Punkte der Linie  $hg$  zu erhalten.

Da bei gleicher Breite der Lamellen deren Gewichte sich wie die Lamellenhöhen verhalten, so braucht man nur diese Höhen oder aliquote Teile, z. B. ein Viertel derselben als Kräfte zu einem Kräftepolygon, siehe Figur 96, anzutragen und zu letzterem,

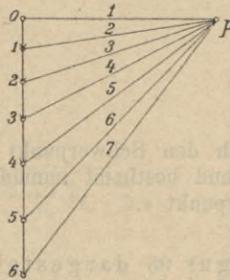
Figur 95.



Figur 97.

Figur 98.

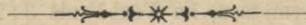
Figur 96.



mittels eines beliebig gewählten Poles  $p$  ein Seilpolygon I, II, III ... VI, siehe Figur 95, zu konstruieren, so schneiden sich dessen äusserste Seiten I und VI in einem Punkte, durch welchen die Resultante  $P$  aus den Lamellengewichten hindurch geht.

Die Verkleinerung der Lamellenhöhen und zwar von der inneren Gewöbelinie bis zur Linie  $hg$  gemessen, geschieht gleichfalls mittels eines Hilfswinkels  $srt$ , siehe Figur 98, bei welchem

$$\frac{st}{sr} = \frac{1}{4} \text{ ist.}$$



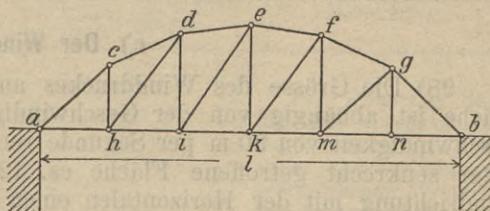
## D. Bestimmung der Spannkkräfte in Fachwerkträgern.

### 1) Der Fachwerkträger im allgemeinen.

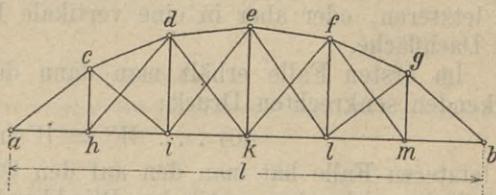
93) Ein Träger, bestehend aus einer Reihe von geraden Stäben, die unter sich zu Dreiecken verbunden sind, heisst ein Fachwerkträger, siehe Figur 99 und 100. An einem Fachwerkträger unterscheidet man zwei Gurtungen und zwar eine obere und eine untere Gurtung, das sind die den äusseren Umfang begrenzenden Konstruktionsteile, sowie die Füllungsglieder, das sind die zwischen den Gurtungen liegenden Stäbe des Fachwerkes. Die Form der Gurtungen kann ganz verschieden sein, so ist z. B. in Figur 99 die obere Gur-

tung ein gebrochener Linienzug  $acdefgh$ , während die untere Gurtung gerade ist. Die Verbindungsstellen der einzelnen Fachwerkstäbe heissen Knotenpunkte; das zwischen zwei Knotenpunkten liegende Stück einer Gurtung heisst ein Feld; die äussere Belastung des Fachwerkes wird von den Knotenpunkten aufgenommen und von ihnen auf die einzelnen Stäbe so übertragen, dass in denselben nur Längsspannungen, also Zug- oder Druckspannungen entstehen. Es gibt demnach eine Zug- und eine Druckgurtung und ausserdem gezogene und gedrückte Füllungsglieder.

Figur 99.



Figur 100.



## 2) Belastung eines Fachwerkträgers.

94) Die Belastung eines Fachwerkträgers setzt sich zusammen einmal aus der zufälligen Belastung, wie z. B. der Nutz- oder Verkehrslast bei Brückenträgern, oder dem Schnee- und Winddruck bei Dachbedeckungen und dem Eigengewichte der Konstruktion.

In der Regel wird die zufällige Belastung von den Knotenpunkten einer Gurtung allein aufgenommen, während das Eigengewicht sich auf die Knotenpunkte beider Gurtungen gleichmässig verteilt.

Bei Dachbindern wird die äussere Belastung von den Knotenpunkten der oberen Gurtung aufgenommen. Der Einfachheit halber lässt man auch das ganze Eigengewicht der Dachkonstruktion von diesen oberen Knotenpunkten aufnehmen.

**Anmerkung 25.** Sollen in den Stäben eines Fachwerkes thatsächlich nur Druck- und Zugspannungen auftreten, so müssen die Stäbe an den Verbindungsstellen durch Gelenkbolzen befestigt sein, was auch vielfach, namentlich in Amerika ausgeführt wird.

In Deutschland geschieht die Verbindung der Konstruktionsteile unter sich in der Regel mittels Nieten und Schrauben, so dass den Stäben keine freie Drehbewegung zukommt. Es entstehen hierdurch in den Konstruktionsteilen oft sehr beträchtliche Nebenspannungen.

## 3) Belastung der Dächer.

95) Die Belastung eines Daches setzt sich zusammen:

- a) aus dem Eigengewicht der Konstruktion,
- b) aus dem Schneedrucke,
- c) aus dem Winddrucke.

### a) Eigengewicht.

96) Was das Eigengewicht der Konstruktion anbetrifft, so ist dasselbe sehr verschieden; für die bekanntesten Dachkonstruktionen ist das Gewicht pro Quadratmeter Dachfläche aus der Tabelle I zu entnehmen.

### b) Der Schneedruck.

97) Als Schneedruck pro Quadratmeter Horizontalprojektion der Dachfläche darf man etwa 75 kg rechnen, es trifft dann auf den Quadratmeter geneigte Dachfläche der Druck  $75 \cdot \cos \alpha$ , unter  $\alpha$  den Winkel der Dachfläche mit der Horizontalebene verstanden.

### c) Der Winddruck.

98) Die Grösse des Winddruckes auf eine zur Windrichtung senkrechte Fläche ist abhängig von der Geschwindigkeit des Windes. Für eine mittlere Geschwindigkeit von 30 m per Sekunde rechnet man als Winddruck per Quadratmeter senkrecht getroffene Fläche ca. 120 kg. Erfahrungsgemäss bildet die Windrichtung mit der Horizontalen einen Winkel von  $10^\circ$ , daher der Winkel der Windrichtung mit der Dachfläche  $\alpha + 10^\circ$ . Ist nun  $W$  die Grösse des Winddruckes per Quadratmeter senkrecht getroffene Fläche, so kann man  $W$  zerlegen entweder in eine Komponente senkrecht zur Dachfläche und eine solche parallel zur letzteren, oder aber in eine vertikale Komponente und eine solche parallel zur Dachfläche.

Im ersten Falle erhält man dann den auf den Quadratmeter Dachfläche wirkenden senkrechten Druck:

$$40) \dots W' = W \sin^2 (\alpha + 10^\circ)$$

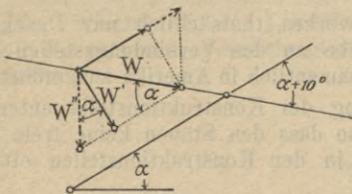
im letzteren Falle hat man den auf den Quadratmeter Horizontalprojektion der Dachfläche wirkenden vertikalen Winddruck:

$$41) \dots W'' = \frac{W \sin^2 (\alpha + 10^\circ)^2}{\cos^2 \alpha}$$

Die parallel zur Dachfläche wirkende Komponente kann ausser Berücksichtigung bleiben.

Der Winddruck lässt sich in zweierlei Weise berücksichtigen. Entweder man berechnet den auf die Flächeneinheit der Dachfläche zu letzterer

Figur 101.



senkrecht wirkenden Druck, bestimmt die auf die einzelnen Knotenpunkte treffenden Teildrücke und ermittelt die durch diese Drücke in den einzelnen Konstruktionsteilen hervorgerufenen Spannungen, oder man berechnet den auf den Quadratmeter Horizontalprojektion der Dachfläche treffenden vertikalen Winddruck, addiert ihn zu der übrigen vertikalen Belastung des Daches, be-

stimmt die auf die einzelnen Knotenpunkte treffenden Teildrücke und die hierdurch in den Konstruktionsteilen hervorgerufenen Spannungen. Das erstere Verfahren ist das genauere, weil hierbei die einseitige Wirkung des Winddruckes Berücksichtigung findet; es wird auch in der Regel bei eisernen Dachbindern zur Anwendung gebracht, das letztere Verfahren ist mehr summarisch und findet vornehmlich Verwendung bei den aus Holz hergestellten Dachbindern.

In den folgenden Tabellen I bis III sind die für die Berechnung der Dächer auftretenden Eigengewichte, sowie die Belastungen durch Winddruck, endlich die Totalbelastungen bezogen auf den Quadratmeter Horizontalprojektion zusammengestellt. Hierzu ist zu bemerken, dass bei der Dachneigung  $\frac{p}{l} = \frac{1}{2}$ , also bei einem Neigungswinkel  $\alpha = 45^\circ$  der Schneedruck bloss zur Hälfte, also

mit 37 kg per Quadratmeter in Rechnung gezogen worden ist, da bei einer Dachneigung von  $35^\circ$  der Schnee bereits abgeleitet.

Tabelle I. Gewichte der Dachdeckungen.

Art der Eindeckung	Gewicht für 1 qm in Kilogramm	Bemerkung
Holzementdach . . . . .	220	Die Belastung durch Eigengewicht per Quadratmeter Horizontalprojektion ergibt sich, wenn man nebenstehende Werte mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Dachfläche mit der Horizontalebene dividiert.
Kronenziegeldach . . . . .	140	
Einfaches Ziegeldach . . . . .	100	
Schieferdach mit Holzschalung . . . . .	80	
Glas auf Winkeleisen . . . . .	50	
Zink-, Eisen- und Kupferblech auf Schalung	45	
Theerpappe . . . . .	40	
Wellblech auf Winkeleisen . . . . .	25	

Tabelle II. Winddruck.

	Dachneigung $h/l$								
	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$	$1/7$	$1/8$	$1/9$	$1/10$
	$\alpha = 45^\circ$	$33^\circ 40'$	$26^\circ 36'$	$21^\circ 50'$	$18^\circ 26'$	$15^\circ 56'$	$14^\circ 02'$	$12^\circ 02'$	$11^\circ 18'$
Senkrechter Druck auf 1 qm schräger Dachfläche $W'$	81	57	43	34	27	23	20	18	16
Senkrechter Druck auf 1 qm Horizontalprojektion .	162	82	54	40	30	25	25	18	16

Tabelle III. Totalbelastung der Dächer per Quadratmeter Horizontalprojektion einschliesslich Schnee- und Winddruck.

Art der Eindeckung	Dachneigung $h/l$								
	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$	$1/7$	$1/8$	$1/9$	$1/10$
	$\alpha = 45^\circ$	$33^\circ 40'$	$26^\circ 36'$	$21^\circ 50'$	$18^\circ 26'$	$15^\circ 56'$	$14^\circ 02'$	$12^\circ 02'$	$11^\circ 18'$
Holzementdach . . . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	316
Kronenziegeldach . . . . .	390	325	284	—	—	—	—	—	—
Einfaches Ziegeldach . . . . .	350	277	239	—	—	—	—	—	—
Schieferdach mit Holzschalung . . . . .	311	253	217	201	—	—	—	—	—
Glas auf Winkeleisen . . . . .	269	217	184	168	159	152	151	—	—
Zink-, Eisen- und Kupferblech auf Schalung . . . . .	262	211	175	163	151	146	145	137	136
Theerpappe . . . . .	255	210	173	158	146	141	141	133	131
Wellblech auf Winkeleisen . . . . .	234	187	156	141	130	125	125	118	116

### 4) Belastung eines Dachbinders.

99) Die Binder eines Satteldaches besitzen eine bestimmte Entfernung  $e$  von einander, siehe Figur 102, und es trifft auf jeden einzelnen Binder im allgemeinen eine rechtwinklige Belastungsfläche mit den Seiten  $l$  und  $e$ , wo  $l$  die Stützweite und  $e$  die Binderentfernung bedeutet. Beträgt nun die Belastung eines Daches per Quadratmeter Horizontalprojektion  $p$  Kilogramm, so ist die Gesamtbelastung des Binders  $Q = lep$ . Diese Belastung verteilt sich gleichmässig auf die Knotenpunkte der oberen Gurtung und zwar trifft auf jeden einzelnen Knotenpunkt die Belastung eines Gurtungsfeldes. Besitzt also die obere Gurtung  $n$  Felder, so ist die Belastung eines Knotenpunktes:

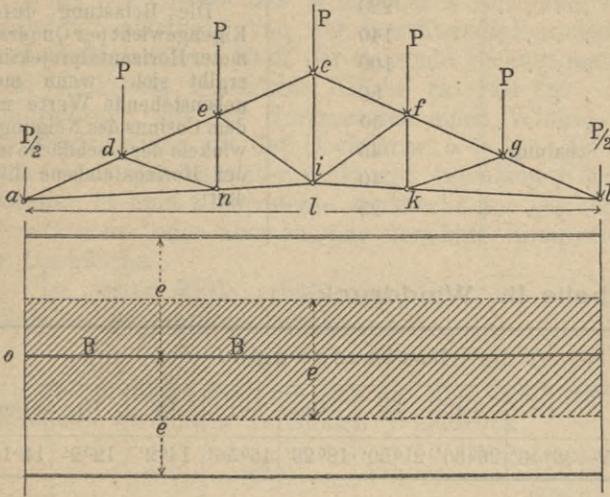
$$P = \frac{Q}{n} = \frac{lep}{n}$$

Eine Ausnahme hiervon bilden die Auflagerpunkte, welche nur eine halbe Feld-

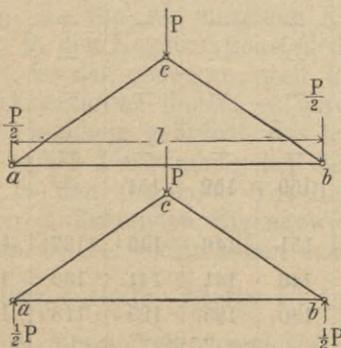
belastung aufzunehmen haben. Ihre Belastung ist also gleich  $\frac{P}{2}$ .

Die gesamte Dachbelastung wird durch das Stabwerk des Binders gleichmässig auf die beiden Auflager übertragen, so dass auf jedes Auflager ein Druck gleich  $\frac{Q}{2}$  trifft. Dementsprechend sind auch die Auflagerreaktionen. Ersetzt man dieselben durch äussere nach aufwärts gerichtete Kräfte und bringt hiervon den vom Auflagerknotenpunkt nach abwärts gerichteten Druck gleich  $\frac{P}{2}$  in Abzug, so bleibt in jedem Auflager eine nach aufwärts gerichtete Kraft

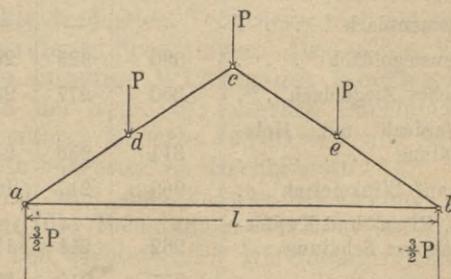
Figur 102.



Figur 103.



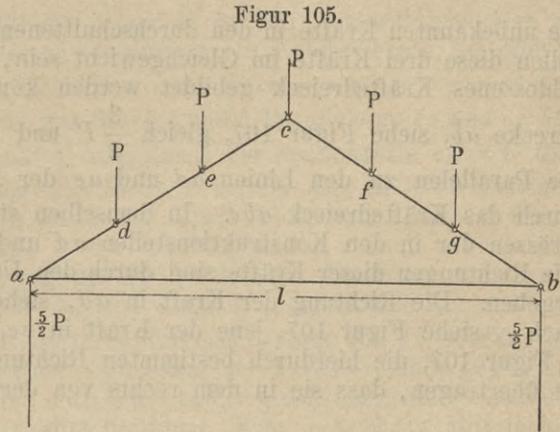
Figur 104.



$\frac{Q}{2} - \frac{P}{2}$  übrig; diese aufwärts gerichteten Kräfte halten den in den Knotenpunkten nach abwärts gerichteten äusseren Kräften das Gleichgewicht.

Besitzt der Binder die Form wie Figur 103, so sind die in den Auflagern wirkenden Kräfte gleich  $\frac{P}{2}$ . Besitzt die obere Gurtung ausser dem Firstpunkt auf jeder Hälfte noch einen Zwischenpunkt wie in Figur 104, so ist die Gesamt-Beanspruchung in den Knotenpunkten der obren Gurtung gleich  $3P$ , die in den Auflagern nach aufwärts gerichteten Kräfte sind also je  $= \frac{3}{2}P$ , s. Fig. 104.

Bei zwei Zwischenpunkten auf jeder Gurtungshälfte, siehe Figur 105, ist die in jedem Auflager nach aufwärts wirkende Kraft  $= \frac{5}{2}P$ .



Bei  $n$  Feldern der oberen Gurtung ist allgemein die in jedem Auflager nach aufwärts gerichtete Kraft gleich  $\frac{n-1}{2}P$ , wenn  $P$  den Druck auf den Knotenpunkt bezeichnet.

**Anmerkung 26.** Die in No. 99 mit  $Q$  bezeichnete Binderbelastung kann einerseits bestehen aus der Belastung durch Eigengewicht und Schneelast, oder aber auch aus der Gesamtbelastung des Daches, also Winddruck mit eingeschlossen und zwar bezogen auf den Quadratmeter Horizontalprojektion der Dachfläche.

## 5) Bestimmung der Spannungen in den Stäben eines Dachbinders.

### a) Allgemeine Bemerkungen.

100) Zur Ermittlung der Grösse der in den einzelnen Fachwerkstäben herrschenden Spannungen, oder wie man kürzer sagen kann, der Spannkräfte des Fachwerkes, gibt es eine Reihe von Methoden; sie beruhen im wesentlichen immer darauf, dass man sich von dem durch die äusseren Kräfte im Gleichgewicht befindlichen Träger ein Stück abgeschnitten denkt, und den übrig bleibenden Teil, dessen Gleichgewicht nunmehr gestört ist, durch äussere in den Konstruktionsteilen anzubringenden Kräfte ins Gleichgewicht setzt. Die zur Herstellung des Gleichgewichts erforderlichen Kräfte sind dann gleich den gesuchten Spannkräften. Die Ermittlung dieser Kräfte kann auf dem Wege der Zeichnung, oder dem der Rechnung geschehen.

### b) Graphische Ermittlung der Spannkräfte, Kräftepläne nach Cremona.

$\alpha$ ) Spannungen, hervorgebracht durch Eigengewicht und Schneelast.

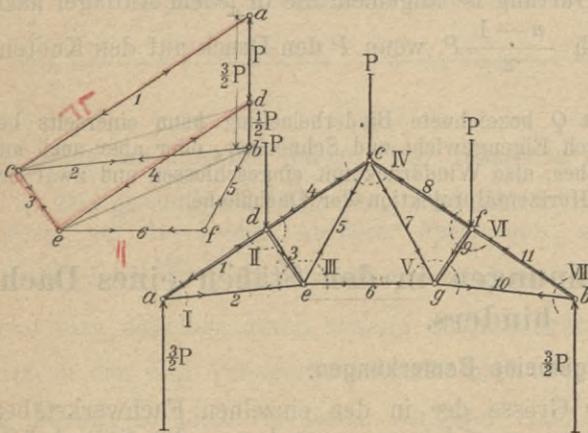
101) Ist in Figur 106 das Konstruktionsnetz eines Dachbinders dargestellt, so wirkt in jedem Knotenpunkt der oberen Gurtung eine Belastung  $P$  nach ab-

wärts, während in den Auflagerpunkten  $a$  und  $b$  je eine Kraft gleich  $\frac{3}{2}P$  zur Herstellung des Gleichgewichts thätig ist.

Führt man durch die Konstruktionsteile  $ad$  und  $ae$  den Schnitt I, so wirken auf das abgeschnittene, links von der Schnittlinie I befindliche Trägerstück drei Kräfte, nämlich die äussere nach aufwärts gerichtete Kraft  $\frac{3}{2}P$  und die unbekanntenen Kräfte in den durchschnittenen Konstruktionsteilen  $ad$  und  $ae$ ; sollen diese drei Kräfte im Gleichgewicht sein, so muss mit denselben ein geschlossenes Krätedreieck gebildet werden können. Macht man demnach die Strecke  $\overline{ab}$ , siehe Figur 107, gleich  $\frac{3}{2}P$  und zieht durch die Punkte  $a$  und  $b$  die Parallelen zu den Linien  $ad$  und  $ae$  der Figur 106, so ergibt sich hierdurch das Krätedreieck  $abc$ . In demselben stellen die Längen  $\overline{ac}$  und  $\overline{bc}$  die Grössen der in den Konstruktionsteilen  $ad$  und  $ae$  wirkenden Spannkkräfte dar. Die Richtungen dieser Kräfte sind durch den Umfassungssinn des Krätedreiecks gegeben. Die Richtung der Kraft in  $ad$ , siehe Figur 106, ist also die von  $a$  nach  $c$ , siehe Figur 107, jene der Kraft in  $ae$ , s. Figur 106, die von  $c$  nach  $b$ , s. Figur 107, die hierdurch bestimmten Richtungspfeile sind nach Figur 106 so zu übertragen, dass sie in dem rechts von der Schnittlinie I liegenden Trägertheile eingezeichnet werden.

Figur 107.

Figur 106.



In einem Konstruktionsteile herrscht Druck, wenn die Spitze des Richtungspfeiles dem in Rede stehenden Knotenpunkt, d. i. im vorliegenden Falle dem Punkt  $a$  zugekehrt, dagegen Zug, wenn diese Spitze dem Knotenpunkt nicht zugekehrt ist. Im Konstruktionsteile  $ad$  oder  $1$  herrscht also Druck, im Konstruktionsteile  $ac$  oder  $2$  aber Zug.

Nummehr geht man zum Knotenpunkt  $d$  über und führt den Schnitt II, dann wirken auf das abgeschnittene, den

Knotenpunkt  $d$  enthaltende Trägerstück, die äussere Kraft  $P$ , die bekannte Spannkraft  $1$  und ausserdem die noch unbekanntenen Spannkkräfte  $3$  und  $4$  in den Konstruktionsteilen  $de$  und  $dc$ .

Die Spannkraft  $1$  ist eine Druckkraft, es muss daher für den Schnitt II der Richtungspfeil dem Knotenpunkt  $d$  zugekehrt sein; bildet man nun mit den vier auf den Knotenpunkt  $d$  wirkenden Kräften ein Kräfteviereck, so muss sich dasselbe schliessen. In Figur 107 sind von dem zu konstruierenden Kräfteviereck schon zwei Kräfte, nämlich  $\overline{ca} = 1$  und  $\overline{ad} = P$  gegeben, man braucht also nur durch  $c$  und  $d$  Parallele zu den Konstruktionsteilen  $de$  und  $dc$  in Figur 106 zu ziehen, um in  $aced$  das gesuchte Kräfteviereck zu erhalten, dessen Umfassungssinn durch den Richtungspfeil der Kraft  $P_1$  bestimmt ist. Die Längen  $\overline{ec}$  und  $\overline{ed}$  stellen die Grössen der Spannkkräfte  $3$  und  $4$  dar; die erstere Kraft hat die Richtung von  $e$  nach  $c$ , die letztere die von  $d$  nach  $e$ . Ueberträgt man

die so bestimmten Richtungspfeile nach den Konstruktionsteilen  $de$  und  $dc$  der Figur 106, so erkennt man, dass in beiden Konstruktionsteilen Druck herrscht.

Führt man endlich noch um den Knotenpunkt  $e$  den Schnitt III, so wirken auf diesen Knotenpunkt nur Spannkraften und zwar sind bekannt die Kräfte **2** und **3**, erstere Kraft als Zugkraft, letztere als Druckkraft. Es muss also für den Knotenpunkt  $e$  der Richtungspfeil von **2** dem Punkte  $e$  ab-, der von  $de$  dem Punkte  $e$  zugekehrt sein.

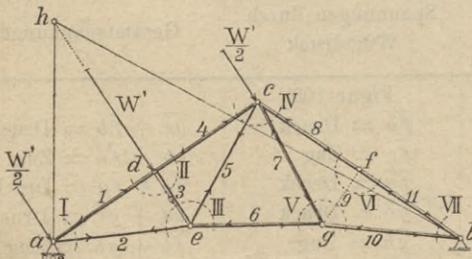
Unbekannt sind die Spannkraften **5** und **6** in den Konstruktionsteilen  $ec$  und  $eg$ . Bildet man nun mit diesen vier Kräften ein Kräfteviereck, so sind in Figur 107 von diesem Kräfteviereck schon zwei Seiten, nämlich  $\overline{bc} = \mathbf{2}$  und  $\overline{ce} = \mathbf{3}$  gezeichnet und man braucht nur durch  $e$  und  $b$  Parallele zu  $eg$  und  $ec$  der Figur 106 zu ziehen, um den Punkt  $f$ , und damit die Spannkraften  $\overline{ef} = \mathbf{6}$  und  $\overline{fb} = \mathbf{5}$  zu erhalten. Die Richtung der Kraft **2** ist für das in Rede stehende Kräfteviereck  $bcef$  die von  $b$  nach  $c$ , die der Kraft **3** die von  $c$  nach  $e$ , daher ergeben sich für die Kräfte **6** und **5** die Richtungen von  $e$  nach  $f$  bzw. die von  $f$  nach  $b$ . Durch Uebertragung der so bestimmten Richtungspfeile nach Figur 106 ergibt sich für **6** und **5** je eine Zugkraft; die Grösse der ersteren ist durch die Länge von  $\overline{ef}$ , die der letzteren durch die Länge von  $\overline{fb}$ , s. Fig. 107 dargestellt. Wegen der symmetrischen Anordnung der Fachwerkstäbe gegen die vertikale Mittelachse des Binders sind mittels der bisher geführten Schnitte auch die Spannkraften auf der rechten Binderhälfte bestimmt, denn je zwei zur Mittelachse des Binders symmetrisch angeordnete Fachwerkstäbe besitzen gleiche Spannungen.

Soll auf Grund des angegebenen Verfahrens die Konstruktion eines geschlossenen Kräftepolygons möglich sein, so dürfen bei keinem der geführten Schnitte mehr als zwei Konstruktionsteile mit unbekanntem Spannkraften durchschnitten werden.

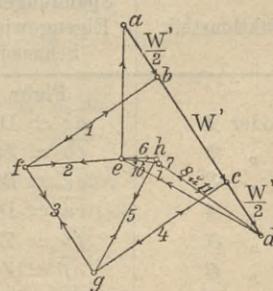
### β) Spannungen, hervorgerufen durch den Winddruck.

102) Bei der Ermittlung der durch den Winddruck in den Fachwerkstäben hervorgerufenen Spannungen sind zwei besondere Fälle zu berücksichtigen. Es wird nämlich wegen der Ausdehnbarkeit des Materials infolge von Temperaturveränderungen bei einem eisernen Dachstuhl das eine Auflager stets beweglich, siehe Figur 108, Auflager  $a$ , das andere aber fest angeordnet sein. Demgemäss wirkt der durch den Winddruck hervorgerufene Auflagerdruck auf das bewegliche Auflager in vertikaler, auf das feste in schräger Richtung.

Figur 108.



Figur 109.

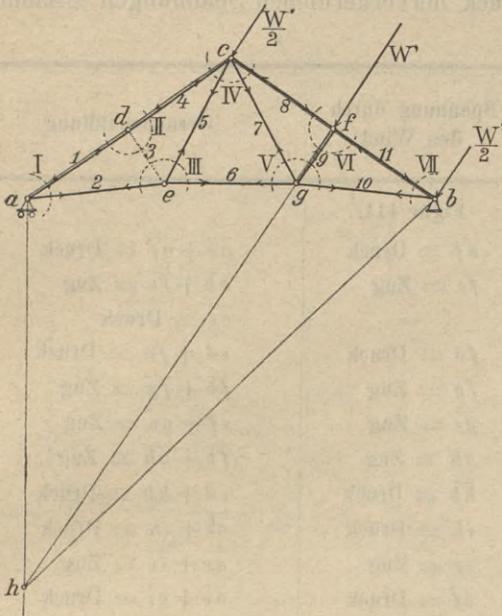


Wirkt der Winddruck auf die Dachfläche, welche sich auf das bewegliche Auflager stützt, siehe Figur 108, so ergibt sich die Richtung des Auflagerdrucks auf das feste Auflager  $b$ , durch die Linie  $bh$ , siehe Figur 108. Auf die Dachfläche  $ac$  verteilt sich der Winddruck nun derart, dass auf den Knoten-

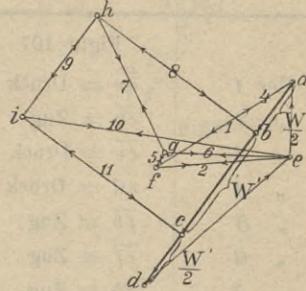
punkt  $d$  der Druck  $\overline{W'}$ , auf jeden der Punkte  $a$  und  $b$  aber der Druck  $\frac{W'}{2}$  trifft. Macht man aber, siehe Figur 109, die Linie  $ad$  senkrecht zur Drahtfläche  $ac$  der Figur 108, und gleich dem Gesamt-Winddruck  $\sum W'$  auf diese Fläche, so dass  $\overline{ab} = \overline{cd} = \frac{W'}{2}$  und  $\overline{bc} = W'$  ist, zieht durch  $a$  und  $d$  die Parallelen zu den Linien  $ah$  und  $hb$  der Figur 108; so sind durch die Längen  $\overline{ae}$  und  $\overline{ed}$  die Grössen der Auflagerdrücke bzw. Auflagerreaktionen in  $a$  und  $b$  dargestellt, und die Richtungspfeile dieser Drücke ergeben sich aus dem Umlaufsinne des Kräfte-dreiecks  $ade$ . Die graphische Bestimmung der durch den Winddruck hervorgerufenen Spannkkräfte erfolgt nun in gleicher Weise, wie in No. 101. Führt man also den Schnitt I, so entspricht demselben das Kräfteviereck  $abfe$ , von welchem die Seiten  $\overline{ab}$  und  $\overline{ae}$  von vornherein gegeben,  $\overline{bf}$  und  $\overline{ef}$  aber durch Ziehen von Parallelen durch die Punkte  $b$  und  $e$  zu den Linien  $ad$  und  $ae$  der Figur zu bestimmen sind. Es werden demnach in den Konstruktionsteilen **1** und **2** durch den Winddruck Spannungen hervorgerufen gleich den Längen  $\overline{bf}$  und  $\overline{fe}$  und zwar ist erstere eine Druck-, letztere eine Zugspannung. Der Schnitt II liefert das Kräfteviereck  $bfge$  und daher die Druckspannungen in **3** und **4** gleich den Längen  $\overline{fg}$  und  $\overline{ge}$ . Mittels des Schnittes III erhält man das Kräfteviereck  $efgh$  und damit die Spannungen **5** und **6** =  $\overline{gh}$  bzw.  $\overline{eh}$ , erstere als Zug-, letztere als Druckspannung. Schnitt IV liefert das Kräftefünfeck  $cdihge$  und damit die Druckspannungen in **7** und **8** gleich den Längen  $\overline{hi}$  und  $\overline{id}$ , der Schnitt V bestimmt ein Kräfte-dreieck  $ehi$ , woraus hervorgeht, dass im Konstruktionsteil  $gf$  durch den Winddruck keine Spannung hervorgerufen wird; die Spannung in **10** ist gleich  $\overline{ei}$ . Mittels des Schnittes VI findet man, was übrigens selbstverständlich ist, die Spannung in **11** gleich jener in **8** als Druckspannung; endlich gehört zu dem Schnitt VII noch das Kräfte-dreieck  $eid$ . Sind die Spannungen bei einem und demselben Konstruktionsteil durch die Beanspruchungen durch Eigengewicht bei Schneelast bzw. durch Winddruck dieselben, nämlich beide Druck oder Zug, so gibt die Summe beider Spannungen die Gesamtspannung des Konstruktionsteiles, im anderen Falle muss der Konstruktionsteil so gestaltet sein, dass er sowohl die Zug- wie auch die Druckspannung mit Sicherheit aufnehmen kann. In nachstehender Tabelle sind die ermittelten Spannungen zusammengestellt.

Konstruktionsteil	Spannungen durch Eigengewicht und Schneedruck	Spannungen durch Winddruck	Gesamtspannungen
	Figur 107	Figur 109	
$ad$ oder <b>1</b>	$\overline{ac}$ = Druck	$\overline{fb}$ = Druck	$\overline{ac} + \overline{fb}$ = Druck
$ae$ " <b>2</b>	$\overline{cb}$ = Zug	$\overline{fe}$ = Zug	$\overline{cb} + \overline{fe}$ = Zug
$de$ " <b>3</b>	$\overline{ce}$ = Druck	$\overline{fg}$ = Druck	$\overline{ce} + \overline{fg}$ = Druck
$dc$ " <b>4</b>	$\overline{ed}$ = Druck	$\overline{ge}$ = Druck	$\overline{ed} + \overline{ge}$ = Druck
$ec$ " <b>5</b>	$\overline{fb}$ = Zug	$\overline{gh}$ = Zug	$\overline{fb} + \overline{gh}$ = Zug
$eg$ " <b>6</b>	$\overline{ef}$ = Zug	$\overline{eh}$ = Druck	$\overline{ef}$ = Zug u. $\overline{eh}$ = Dr.
$cg$ " <b>7</b>	$\overline{fb}$ = Zug	$\overline{hi}$ = Druck	$\overline{fb}$ = Zug u. $\overline{hi}$ = Dr.
$cf$ " <b>8</b>	$\overline{ed}$ = Druck	$\overline{id}$ = Druck	$\overline{ed} + \overline{id}$ = Druck
$df$ " <b>9</b>	$\overline{ce}$ = Druck	—	$\overline{ce}$ = Druck
$gb$ " <b>10</b>	$\overline{bc}$ = Zug	$\overline{ei}$ = Druck	$\overline{bc}$ = Zug u. $\overline{ei}$ = Dr.
$fb$ " <b>11</b>	$\overline{ac}$ = Druck	$\overline{id}$ = Druck	$\overline{ac} + \overline{id}$ = Druck

Figur 110.



Figur 111.



103) Wirkt der Winddruck auf die gegen das feste Auflager sich stützende Dachfläche, siehe Figur 110, so wird der Auflagerdruck in  $a$  vertikal, in  $b$  aber schräg gerichtet sein, man findet für die letztere Richtung die Linie  $bh$ . Mittels des Kräfte dreiecks  $ade$  ergeben sich die Größen  $de$  und  $ea$  der Auflagerreaktionen in  $b$  und  $a$ . Führt man der Reihe nach die Schnitte I bis VII, so ergeben sich die in nachstehender Tabelle zusammengestellten Kräftepolygone und Spannkraft:

Schnitte	Kräftepolygon	Ermittelte Spannkraft
I	$eaf$	$\begin{cases} \overline{af} = 1 \text{ Druck} \\ \overline{fe} = 2 \text{ Zug} \end{cases}$
II	$afa$	$\begin{cases} \overline{fa} = 4 = 1 \text{ Druck} \\ \overline{ao} = 3 \end{cases}$
III	$efg$	$\begin{cases} \overline{fg} = 5 \text{ Zug} \\ \overline{ge} = 6 \text{ Zug} \end{cases}$
IV	$gfabhg$	$\begin{cases} \overline{gh} = 7 \text{ Zug} \\ \overline{hb} = 8 \text{ Druck} \end{cases}$
V	$hiegh$	$\overline{ie} = 10 \text{ Zug}$
VI	$bcihb$	$\begin{cases} \overline{ih} = 9 \text{ Druck} \\ \overline{ci} = 11 \text{ Druck} \end{cases}$
VII	$icdei$	$\begin{cases} \overline{ie} = 10 \text{ Zug} \\ \overline{ci} = 11 \text{ Druck} \end{cases}$

104) Fasst man nunmehr die in No. 101 ermittelten Spannkraften mit den eben bestimmten durch den Winddruck hervorgerufenen Spannungen zusammen, so ergibt sich die folgende Tabelle:

Konstruktionsteil	Spannkraft durch Eigengewicht und Schneedruck	Spannung durch den Wind	Gesamtspannung
	Figur 107	Figur 111.	
$ad$ oder <b>1</b>	$\overline{ac} = \text{Druck}$	$af = \text{Druck}$	$\overline{ac} + \overline{af} = \text{Druck}$
$ae$ „ <b>2</b>	$\overline{cb} = \text{Zug}$	$\overline{fe} = \text{Zug}$	$\overline{ab} + \overline{fe} = \text{Zug}$
$de$ „ <b>3</b>	$\overline{ce} = \text{Druck}$	—	$\overline{ce} = \text{Druck}$
$\overline{dc}$ „ <b>4</b>	$\overline{ed} = \text{Druck}$	$fa = \text{Druck}$	$\overline{ed} + \overline{fa} = \text{Druck}$
$ec$ „ <b>5</b>	$\overline{fb} = \text{Zug}$	$\overline{fg} = \text{Zug}$	$\overline{fb} + \overline{fg} = \text{Zug}$
$eg$ „ <b>6</b>	$\overline{ef} = \text{Zug}$	$\overline{ge} = \text{Zug}$	$\overline{ef} + \overline{ge} = \text{Zug}$
$cg$ „ <b>7</b>	$\overline{fb} = \text{Zug}$	$gh = \text{Zug}$	$\overline{fb} + \overline{gh} = \text{Zug}$
$cf$ „ <b>8</b>	$\overline{ed} = \text{Druck}$	$\overline{hb} = \text{Druck}$	$\overline{ed} + \overline{hb} = \text{Druck}$
$gf$ „ <b>9</b>	$\overline{ce} = \text{Druck}$	$ih = \text{Druck}$	$\overline{ce} + \overline{ih} = \text{Druck}$
$gb$ „ <b>10</b>	$\overline{ae} = \text{Zug}$	$\overline{ie} = \text{Zug}$	$\overline{ae} + \overline{ie} = \text{Zug}$
$fb$ „ <b>11</b>	$\overline{ac} = \text{Druck}$	$\overline{ci} = \text{Druck}$	$\overline{ac} + \overline{ci} = \text{Druck}$

Anmerkung 27. Der in No. 101 behandelte Dachbinder führt den Namen: Einfacher Polongeubinder.

### c) Übungsaufgabe.

105) Aufgabe 31. Für einen einfachen Polongeubinder mit den nebenstehend, siehe Figur 112, verzeichneten Abmessungen, sind die Spannkraften in den Konstruktionsteilen zu ermitteln, wenn die Dachdeckung Schiefer auf Winkeleisen sein soll und die Binderentfernung 4 m beträgt. Die Belastung durch Schneedruck und Eigengewicht sei per Quadratmeter Horizontalprojektion 140 kg, der Winddruck betrage per Quadratmeter geneigte Dachfläche 50 kg.

Auflösung. Die Belastung eines Binders durch Eigengewicht und Schneedruck beträgt:

$$Q = 10 \cdot 4 \cdot 140 = 5600 \text{ kg per Quadratmeter}$$

Er trifft somit auf einen Knotenpunkt die Belastung:

$$P = \frac{5600}{4} = 1400 \text{ kg}$$

Die Auflagerreaktionen sind je gleich:

$$\frac{3}{2} P = \frac{3 \cdot 1400}{2} = 2100 \text{ kg}$$

Die Belastung durch den Winddruck senkrecht zur Dachfläche beträgt für eine Binderhälfte:

$$\sum W' = \frac{5 \cdot 4 \cdot 50}{\cos \alpha} = \frac{1000}{\cos \alpha} = \frac{1000}{\cos 26^\circ 30'} = \frac{1000}{0,89493} = 1118 \text{ kg}$$

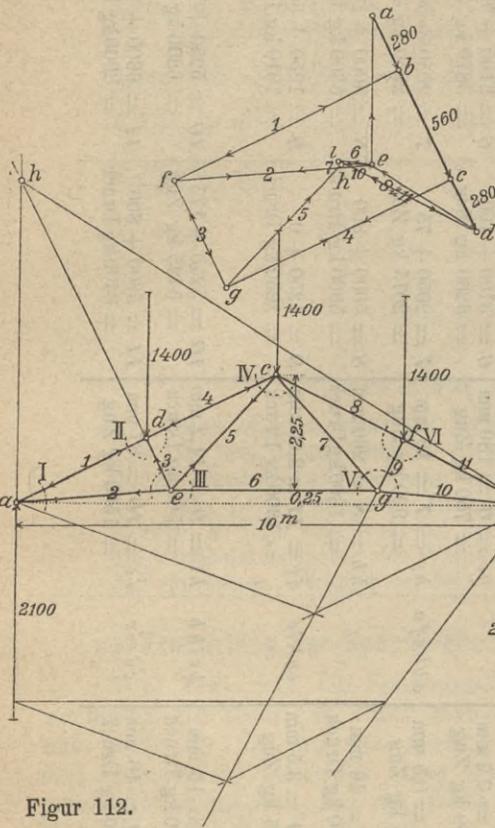
daher ist  $W$  gleich Druck auf einen mittleren Knotenpunkt:

$$W' = \frac{1118}{2} = 559 \text{ und } 560 \text{ kg}$$

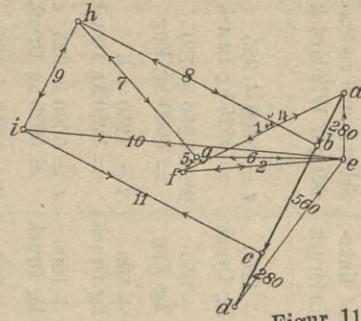
auf den Auflager- beziehungsweise Firstpunkt:

$$\frac{W'}{2} = 280 \text{ kg}$$

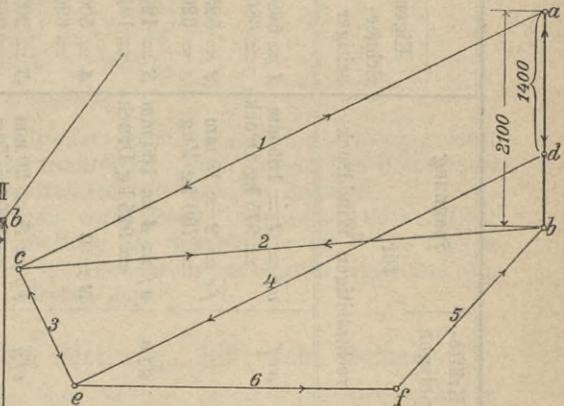
Figur 114.



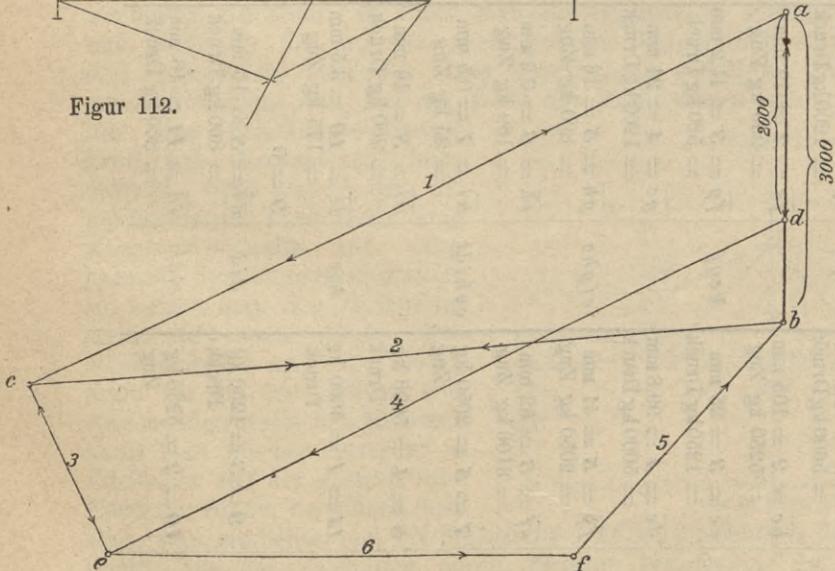
Figur 115.



Figur 113.



Figur 112.



Figur 116.

Unter Zugrundelegung dieser Drücke sind nun in den Figuren 113, 114 und 115 die Spannungen hervorgerufen durch Eigengewicht und Schneedruck einerseits, sowie linksseitigen bzw. rechtsseitigen Winddruck andererseits und hieraus schliesslich die Gesamtspannungen in den einzelnen Konstruktionsteilen ermittelt und in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden. Kräftemassstab 1 mm = 500 kg.

Schnitt	Spannung für Eigengewicht und Schneedruck		Spannung für linksseitigen Winddruck		Spannung für rechtsseitigen Winddruck		Gesamtspannung	
	Kräfte-polygon	Spannung	Kräfte-polygon	Spannung	Kräfte-polygon	Spannung	Eigengewicht, Schnee- und linksseitiger Winddruck	Eigengewicht, Schnee- und rechtsseitiger Winddruck
I	<i>abc</i>	$\overline{ac} = 1 = 112 \text{ mm} = 5600 \text{ kg Druck}$ $\overline{bc} = 2 = 105 \text{ mm} = 5250 \text{ kg Zug}$	<i>abfe</i>	$\overline{bf} = 1 = 24 \text{ mm} = 1200 \text{ kg Druck}$ $\overline{fe} = 2 = 19 \text{ mm} = 950 \text{ kg Zug}$	<i>ae</i>	$\overline{af} = 1 = 185 \text{ mm} = 975 \text{ kg Druck}$ $\overline{fe} = 2 = 18 \text{ mm} = 750 \text{ kg Zug}$	$1 = 5600 + 1200 = 6800 \text{ kg Druck}$ $2 = 5250 + 950 = 6200 \text{ kg Zug}$	$1 = 5600 + 925 = 6525 \text{ kg Druck}$ $2 = 5250 + 750 = 6000 \text{ kg Zug}$
II	<i>aced</i>	$\overline{ce} = 3 = 25 \text{ mm} = 1250 \text{ kg Druck}$ $\overline{de} = 4 = 99,8 \text{ mm} = 5000 \text{ kg Druck}$	<i>bcgf</i>	$\overline{fg} = 3 = 11,2 \text{ mm} = 560 \text{ kg Druck}$ $\overline{gc} = 4 = 24 \text{ mm} = 1200 \text{ kg Druck}$	<i>afa</i>	$\overline{af} = 4 = 185 \text{ mm} = 925 \text{ kg Druck}$ $3 = 0$	$3 = 1250 + 0 = 1250 \text{ kg Druck}$ $4 = 5000 + 1200 = 6200 \text{ kg Druck}$	$3 = 1250 + 0 = 1250 \text{ kg Druck}$ $4 = 5000 + 925 = 5925 \text{ kg Druck}$
III	<i>bcef</i>	$\overline{fb} = 5 = 41 \text{ mm} = 2050 \text{ kg Zug}$ $\overline{ef} = 6 = 62 \text{ mm} = 3100 \text{ kg Zug}$	<i>efghe</i>	$\overline{gh} = 5 = 16 \text{ mm} = 800 \text{ kg Zug}$ $\overline{eh} = 6 = 3,2 \text{ mm} = 160 \text{ kg Zug}$	<i>efg</i>	$\overline{fg} = 5 = 20 \text{ mm} = 100 \text{ kg Zug}$ $\overline{ge} = 6 = 180 \text{ mm} = 750 \text{ kg Zug}$	$5 = 2050 + 800 = 2850 \text{ kg Zug}$ $6 = 3100 + 160 = 3260 \text{ kg Zug}$	$5 = 2050 + 100 = 2150 \text{ kg Zug}$ $6 = 3100 + 750 = 3870 \text{ kg Zug}$
IV		$7 = 5 = 2050 \text{ kg Zug}$ $8 = 4 = 5000 \text{ kg Druck}$	<i>cg h i d c</i>	$\overline{hi} = 7 = 0,5 \text{ mm} = 25 \text{ kg Zug}$ $\overline{di} = 8 = 16 \text{ mm} = 800 \text{ kg Druck}$	<i>abhgfa</i>	$\overline{hg} = 7 = 18 \text{ mm} = 900 \text{ kg Zug}$ $\overline{hb} = 8 = 260 \text{ mm} = 1300 \text{ kg Druck}$	$7 = 2050 + 75 = 2075 \text{ kg Zug}$ $8 = 5000 + 800 = 5800 \text{ kg Druck}$	$7 = 2050 + 900 = 2950 \text{ kg Zug}$ $8 = 5000 + 1300 = 6300 \text{ kg Druck}$
V		$11 = 1 = 5600 \text{ kg Druck}$	<i>hie</i>	$\overline{ie} = 10 = 3,5 \text{ mm} = 175 \text{ kg Zug}$ $9 = 0$	<i>eghie</i>	$\overline{ic} = 11 = 2,60 \text{ mm} = 1800 \text{ kg Druck}$	$9 = 1250 + 0 = 1250 \text{ kg Druck}$	$9 = 1250 + 560 = 1810 \text{ kg Druck}$
VI		$9 = 3 = 1250 \text{ kg Druck}$	<i>did</i>	$\overline{di} = 8 = 16 \text{ mm} = 800 \text{ kg Druck}$	<i>bcihb</i>	$\overline{hi} = 9 = 11,2 \text{ mm} = 560 \text{ kg Druck}$	$10 = 5250 + 175 = 5425 \text{ kg Zug}$	$10 = 5250 + 1550 = 6800 \text{ kg Zug}$
VII		$10 = 2 = 5250 \text{ kg Zug}$	<i>eid</i>	$\overline{id} = 11 = 16 \text{ mm} = 800 \text{ kg Druck}$	<i>cdeic</i>	$\overline{ie} = 10 = 37 \text{ mm} = 1550 \text{ kg Zug}$	$11 = 5600 + 800 = 6400 \text{ kg Druck}$	$11 = 6600 + 1800 = 6900 \text{ kg Druck}$

**Anmerkung 28.** Nimmt man die vertikale Belastung des Daches, einschliesslich des Winddruckes per Quadratmeter Horizontalprojektion rund zu 200 kg an und ermittelt für diese Belastung die Spannkkräfte, so ergibt sich folgendes:

Die ganze Belastung eines Binders wird nunmehr  $Q = 10 \cdot 4 \cdot 200 = 8000$  kg, daher trifft auf einen Knotenpunkt eine Belastung  $P = \frac{8000}{4} = 2000$  kg, die Auflagerreaktion ist  $\frac{3}{2}P = 3000$  kg. Unter dieser Annahme ergibt sich der Kräfteplan, siehe Figur 116, aus welcher die folgenden Werte entnommen werden können, es ist:

$$\overline{ac} = 1 = 11 = 159 \text{ mm} = 7950 \text{ kg}$$

$$\overline{bc} = 2 = 10 = 143 \text{ mm} = 7150 \text{ kg}$$

$$ce = 3 = 9 = 35,5 \text{ mm} = 1775 \text{ kg}$$

$$ed = 4 = 8 = 143 \text{ m} = 7450 \text{ kg}$$

$$\overline{bf} = 5 = 7 = 58 \text{ mm} = 2900 \text{ kg}$$

$$ef = 6 = 88 \text{ mm} = 4400 \text{ kg}$$

Man erkennt, dass die jetzt ermittelten Spannkkräfte fast durchweg grösser sind, als jene in der Tabelle, Seite 54, ermittelten. Doch kommt der Unterschied für die Querschnittsberechnung der Konstruktionsteile nicht in Betracht.

Bei noch geringeren Dachneigungen wird dieser Unterschied noch kleiner werden, so dass man wohl bei der Ermittlung der Spannkkräfte für flache Dächer die Vertikalkomponente des Winddruckes der Berechnung zu Grunde legen und von der einseitigen Wirkung der letzteren absehen darf.

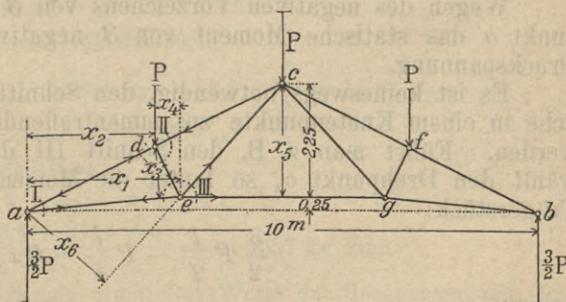
#### d) Ermittlung der Spannkkräfte durch Rechnung. Ritter'sche Methode.

106) Will man die Spannungen in den Stäben eines Fachwerkes durch Rechnung ermitteln, so führt man die Schnitte in gleicher Weise wie früher und stellt für die auf das abgeschnittene Trägerstück einwirkenden äusseren und Spannkkräfte bezüglich eines zweckmässig gewählten Drehpunktes die Momentengleichung auf. Bei der Wahl des Drehpunktes ist darauf zu achten, dass nur eine unbekannte Spannkraft in der Momentengleichung auftritt. Sind also in dem abgeschnittenen Trägerteile zwei Konstruktionsteile mit unbekanntem Spannungen enthalten, so nimmt man den Drehpunkt stets auf einem dieser Konstruktionsteile an. Die Hebelarme für die den Kräften entsprechenden statischen Momente kann man hierbei entweder in Rücksicht auf die geometrische Form der Binder berechnen oder aber, was einfacher und für praktische Zwecke hinsichtlich der Genauigkeit ausreicht, aus der Zeichnung durch Messung bestimmen. Im folgenden soll das letztere Verfahren zu Grunde gelegt werden.

Führt man für den in Figur 117 dargestellten Binder den Schnitt I-I und wählt zur Bestimmung der Spannung in 1 den Punkt  $e$  als Drehpunkt, so lautet die Momentengleichung:

$$\frac{3}{2}Px_1 + 1de = 0$$

Figur 117.



In Figur 117 gehören die Spannkkräfte ebenso bezeichnet wie in Figur 112.

daher ist:

$$42) \dots \mathbf{1} = -\frac{3P}{2de}$$

Das statische Moment der Spannkraft  $\mathbf{1}$  ist demnach bezüglich des Drehpunktes  $e$  negativ, was nur möglich ist, wenn der Richtungspfeil von  $\mathbf{1}$  dem Knotenpunkte  $a$  zugekehrt ist, die Spannkraft  $\mathbf{1}$  ist also eine Druckspannung.

Zur Bestimmung von  $\mathbf{2}$  wählt man  $d$  als Drehpunkt, dann lautet die Momentengleichung:

$$\frac{3}{2}Px_2 + \mathbf{2}x_3 = 0$$

daher:

$$43) \dots \mathbf{2} = -\frac{3Px_2}{x_3}$$

Das statische Moment der Spannkraft  $\mathbf{2}$  ist negativ, demnach muss der Richtungspfeil von  $\mathbf{2}$  dem Knotenpunkte  $a$  abgekehrt, die Spannkraft  $\mathbf{2}$  also eine Zugspannung sein.

Schnitt II, Drehpunkt  $e$ , Momentengleichung:

$$\mathbf{1}de - P_1x_4 + \mathbf{4}de = 0$$

$$44) \dots \mathbf{4} = \frac{P_1x_4 - \mathbf{1}de}{de} = \frac{P_1x_4}{de} - \mathbf{1}$$

Da  $x_4$  kleiner als  $de$  und  $P_1$  kleiner als die Spannkraft  $\mathbf{1}$  ist, so ist der Ausdruck für die Spannkraft  $\mathbf{4}$  negativ, demnach auch das statische Moment dieser Kraft, es ist also der Richtungspfeil von  $\mathbf{4}$  dem Knotenpunkte  $d$  zugekehrt, die Spannkraft  $\mathbf{4}$  ist eine Druckspannung.

Schnitt II, Drehpunkt  $a$ , Momentengleichung:

$$Px_2 + \mathbf{3}a\bar{d} = 0$$

$$45) \dots \mathbf{3} = -\frac{Px_2}{a\bar{d}}$$

Wegen des negativen Vorzeichens von  $\mathbf{3}$  ist in Rücksicht auf den Drehpunkt  $a$  das statische Moment von  $\mathbf{3}$  negativ, die Spannung in  $\mathbf{3}$  also eine Druckspannung.

Es ist keineswegs notwendig, den Schnitt immer so zu führen, dass sämtliche in einem Knotenpunkte zusammentreffenden Fachwerkstäbe durchschnitten werden. Führt man z. B. den Schnitt III durch die Stäbe 4, 5 und 6, und wählt den Drehpunkt  $c$ , so lautet die Momentengleichung für das linksseitige Trägerstück:

$$\frac{3}{2}P\frac{l}{2} - P\frac{l}{4} + \mathbf{6}x_5 = 0$$

daher:

$$46) \dots \mathbf{6} = -\frac{-\frac{3}{2}P\frac{l}{2} + \frac{Pl}{4}}{x_5} \text{ oder } \mathbf{6} = -\frac{Pl}{2x_5}$$

das statische Moment von  $\mathbf{6}$  ist also negativ, folglich die Spannkraft  $\mathbf{6}$  eine Zugspannung.

Zur Bestimmung der noch fehlenden Spannkraft  $\mathbf{5}$  kann man gleichfalls den oben genannten Schnitt III benutzen und erhält für  $a$  als Drehpunkt die Momentengleichung:

$$Px_2 + \mathbf{6}x_7 + \mathbf{5}x_6 = 0$$

$$47) \dots 5 = - \frac{(Px_2 + 6x_7)}{x_6}$$

Die Kraft 5 ist demgemäss, weil ihr statisches Moment in Hinsicht auf den Drehpunkt *a* negativ sein muss, eine Zugspannung.

### e) Übungsaufgabe.

107) **Aufgabe 32.** Für den in Aufgabe 31 näher bezeichneten Dachbinder sollen unter den angegebenen Belastungen durch Eigengewicht und Schneedruck die Spannkkräfte in den Fachwerkstäben durch Rechnung ermittelt werden. Die Hebelarme sind aus der Zeichnung abzugreifen.

**Auflösung.** Mit Bezugnahme auf die in No. 106) aufgestellten Bezeichnungen und Momentengleichungen, die Hebelarme in Millimeter gemessen, erhält man folgende Berechnungen:

Schnitt I, Drehpunkt *e*, Momentengleichung:

$$2100 \cdot 20 + 1 \cdot 7,5 = 0 \quad x_1 = 20, \quad \bar{de} = 7,5$$

$$1 = - \frac{2100 \cdot 20}{27,5} = 5599 \text{ oder rund } 5600 \text{ kg Druck}$$

Drehpunkt *d*, Momentengleichung:

$$2100 \cdot 16,6 + 2 \cdot 6,6 = 0 \quad x_2 = 16,6 \quad x_3 = 6,6$$

$$2 = - \frac{2100 \cdot 16,6}{6,6} = 5250 \text{ kg Zug}$$

Schnitt II, Drehpunkt *e*, Momentengleichung:

$$5600 \cdot 7,5 - 1400 \cdot 3,3 + 4 \cdot 7,5 = 0 \quad x_4 = 3,3 \quad \bar{de} = 7,5$$

$$4 = \frac{1400 \cdot 3,3}{7,5} - 5600 = 618 - 5600 = -4982 \text{ rund } 5000 \text{ kg Druck}$$

Drehpunkt *a*, Momentengleichung:

$$1400 \cdot 16,6 + 3 \cdot 18,6 = 0 \quad x_2 = 16,6 \quad \bar{ad} = 18,6$$

$$3 = - \frac{1400 \cdot 16,6}{18,6} = -1250 \text{ kg Druck}$$

Schnitt III, Drehpunkt *c*, Momentengleichung:

$$2100 \cdot 33,3 - 1400 \cdot 16,6 + 6 \cdot 1,5 = 0 \quad \frac{l}{2} = 13,3 \quad \frac{l}{4} = 16,6 \quad x_5 = 15$$

$$6 = -3111 \text{ kg Zug}$$

Drehpunkt *a*, Momentengleichung:

$$1400 \cdot 16,6 + 3111 \cdot 8,6 + 5 \cdot 14 = 0 \quad x_6 = 14 \quad x_7 = 1,6$$

$$5 = - \frac{1400 \cdot 16,6 + 3111 \cdot 1,6}{14} = -2037 \text{ kg Zug.}$$

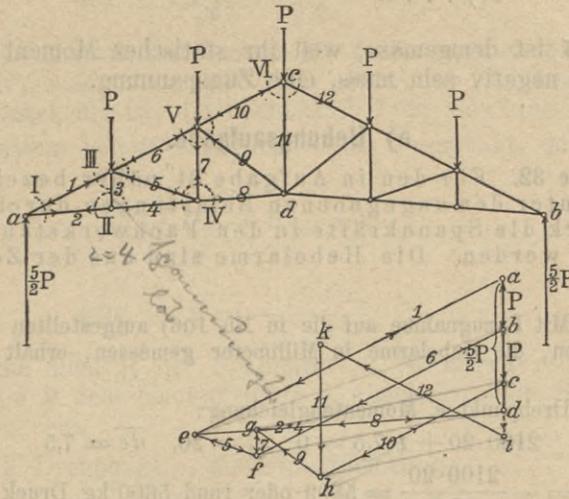
Ein Vergleich dieser durch Rechnung ermittelten Werte der Spannungen mit jenen durch Zeichnung erhaltenen zeigt hinlängliche Uebereinstimmung.

### 6) Übungsaufgaben.

108) **Aufgabe 33.** Für den in Figur 118 dargestellten englischen Dachbinder sind die Spannkkräfte graphisch zu ermitteln.

**Auflösung.** Unter der Annahme eines Druckes auf die Knotenpunkte gleich *P* und einer Auflagerreaktion  $= \frac{5}{2}P$  erhält man mittels der geführten Schnitte die folgenden Kräftepolygone und Spannkkräfte, siehe Figur 118 und 118a.

Figur 118.



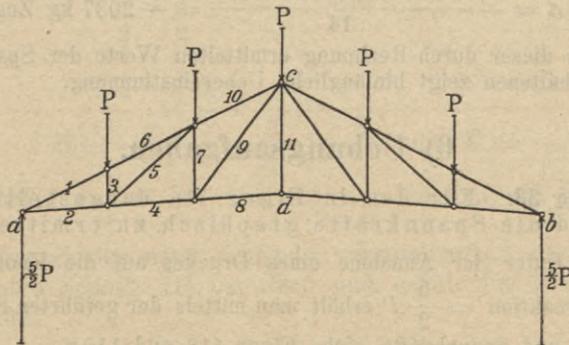
Figur 118a.

Schnitt	Kräftepolygon	Stabkräfte
I	$ade$	$1 = ae = \text{Druck}$ $2 = de = \text{Zug}$
II	$ded$	$2 = d = de = \text{Zug}$ $3 = 0$ Konstruktionsteil 3 ist also überflüssig
III	$ae fb$	$5 = \overline{ef} = \text{Druck}$ $6 = fb = \text{Druck}$
IV	$defgd$	$7 = \overline{fg} = \text{Zug}$ $8 = \overline{gd} = \text{Zug}$
V	$bfghcb$	$9 = \overline{gh} = \text{Druck}$ $10 = hc = \text{Druck}$
VI	$cikhc$	$11 = \overline{hk} = \text{Zug}$

108a) **Aufgabe 34.** Man ermittle die Spannkräfte für den in Figur 119 dargestellten Binder.

**Auflösung.** Man führe die Lösung in gleicher Weise durch wie in Aufgabe 33.

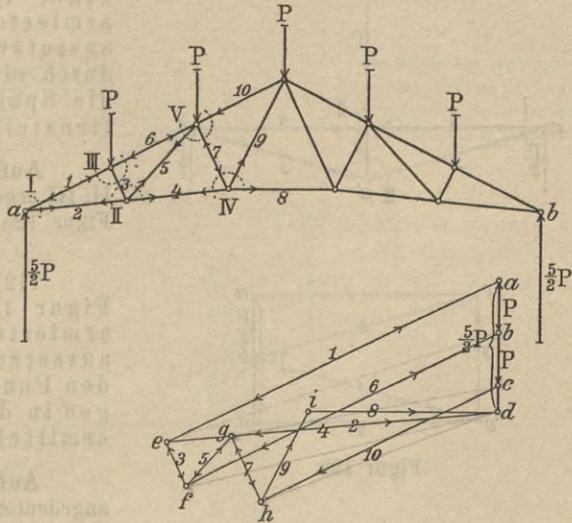
Figur 119.



Figur 120.

109) **Aufgabe 35.** Man ermittle die Spannkraften für den in Figur 120 gezeichneten Dachbinder.

**Auflösung.** Man führt die Schnitte so wie in der Figur 120 angegeben und erhält dann die nachstehend verzeichneten Kräftepolygone und Spannkraften, siehe Figur 121.



Figur 121.

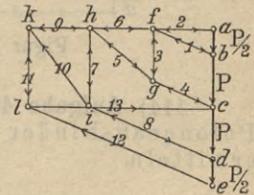
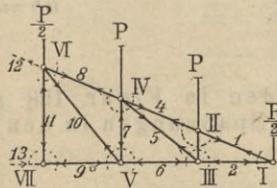
Schnitt	Kräftepolygon	Stabkräfte
I	<i>ade</i>	<b>1</b> = <i>ae</i> = Druck <b>2</b> = <i>ed</i> = Zug
II	<i>aefb</i>	<b>3</b> = <i>ef</i> = Druck <b>6</b> = <i>fb</i> = Druck
III	<i>defgd</i>	<b>5</b> = <i>fg</i> = Zug <b>4</b> = <i>gd</i> = Zug
IV	<i>bchgf</i>	<b>7</b> = <i>gh</i> = Druck <b>10</b> = <i>hc</i> = Druck
V	<i>dghid</i>	<b>8</b> = <i>id</i> = Zug <b>9</b> = <i>hi</i> = Zug

Figur 122.

Figur 123.

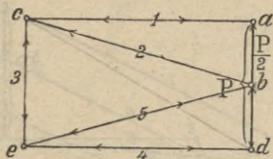
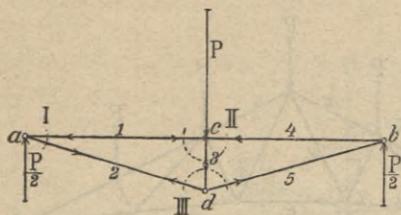
110) **Aufgabe 36.** Für den in Figur 122 dargestellten Pultdachbinder sind die Spannkraften zu ermitteln.

**Auflösung.** Man führt die Schnitte wie die Fig. 122 zeigt und erhält dann:



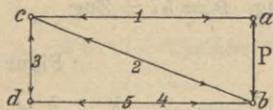
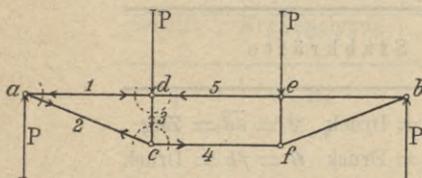
Schnitt	Kräftepolygon	Stabkräfte
I	<i>abf</i>	<b>2</b> = <i>af</i> = Druck <b>1</b> = <i>fb</i> = Zug
II	<i>bcgf</i>	<b>3</b> = <i>fg</i> = Druck <b>4</b> = <i>gc</i> = Zug
III	<i>afgha</i>	<b>5</b> = <i>hg</i> = Zug <b>6</b> = <i>ha</i> = Druck
IV	<i>cdihgc</i>	<b>7</b> = <i>ih</i> = Druck <b>8</b> = <i>di</i> = Zug
V	<i>ahika</i>	<b>9</b> = <i>ka</i> = Druck <b>10</b> = <i>ki</i> = Zug
VI	<i>dikled</i>	<b>11</b> = <i>kl</i> = Druck <b>12</b> = <i>le</i> = Zug

Figur 124.



Figur 125.

Figur 126.



Figur 127.

111) **Aufgabe 37.** Für den in Figur 124 dargestellten, einfach armierten Träger sind unter Voraussetzung einer Beanspruchung durch eine Einzellast  $P$  im Punkte  $c$  die Spannungen in den Konstruktionsteilen zu ermitteln.

**Auflösung.** Mittels der Schnitte I, II, III ergeben sich die im Kräfteplan, siehe Figur 125, gezeichneten Stabspannungen.

112) **Aufgabe 38.** Für den in Figur 126 dargestellten, doppelt armierten Träger sind unter Voraussetzung einer Belastung  $P$  in den Punkten  $d$  und  $e$  die Spannungen in den Konstruktionsteilen zu ermitteln.

**Auflösung.** Mittels der in Figur 126 angedeuteten Schnitte ergibt sich der Kräfteplan, siehe Figur 127, woraus die gesuchten Stabspannungen zu entnehmen sind.

113) **Aufgabe 39.** Der Schüler löse die Aufgaben 37 und 38 unter Annahme bestimmter Zahlenwerte.

**Auflösung.** Es sei in Aufgabe 38 die Stützweite:

$$ab = 8 \text{ m}$$

die Höhe:

$$cd = 1 \text{ m}$$

die Belastung:

$$P = 10000 \text{ kg}$$

In Aufgabe 39 sei:

$$ab = 12 \text{ m} \quad cd = 0,75 \text{ m}$$

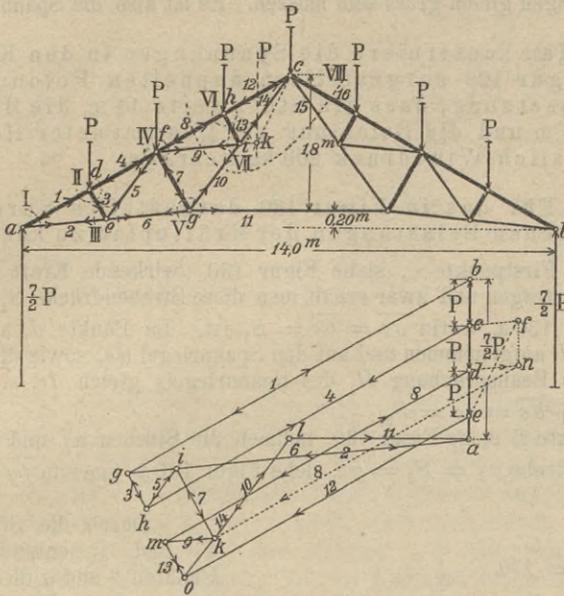
$$P = 8000 \text{ kg}$$

114) **Aufgabe 40.** Für den in Figur 128 gezeichneten doppelten Polonceau-Binder sind die Spannungen in den Konstruktionsteilen zu ermitteln.

**Auflösung.** Mittels der Schnitte I bis III ergeben sich, siehe Figur 129, die Spannkraften in den Stäben  $ad$ ,  $ae$ ,  $df$ ,  $ef$  und  $gh$ . Führt man nun den Schnitt IV, so sind von den in dem Knotenpunkte  $f$  zusammentreffenden Stabkräften bekannt die Stabkräfte 4 und 5, unbekannt dagegen 7, 9 und 8.

Die Aufgabe, diese drei unbekanntten Kräfte zu ermitteln, kann daher in der bisherigen Weise nicht gelöst werden. Doch erhält man eine von den unbekanntten Kräften leicht wie folgt: Man führt um den Knotenpunkt  $c$  den Schnitt VIII, und kann sich nun die in den durchschnittenen Stäben 8, 10, 15 und 16 wirkenden Kräfte zu einer Resultante vereinigt denken, welche mit der Kraft 9 eine Resultante ergibt gleich und entgegengesetzt gerichtet der Resultante  $R$  (Resultante der beiden in den Knotenpunkten  $h$  und  $c$  wirkenden äusseren Kräfte  $P$ ). Zerlegt man daher  $R$  in zwei Komponenten, deren Richtungslinien mit  $kf$  und  $kc$  zusammenfallen, so ist die in erstgenannter Linie liegende Komponente die Spannkraft 9. Macht man, siehe Figur 129,  $cf$  und  $ef$

Figur 128.



In Figur 128 ist die Resultante der beiden in *h* und *e* wirkenden Kräfte *P* irrthümlich mit *P* statt mit *R* bezeichnet.

Figur 129.

parallel zu *kf* und *kc* der Figur 128, so ist  $\overline{cf}$ , siehe Figur 129, die Grösse der Spannkraft 9.

Nunmehr kann man ohne weitere Schwierigkeit die Schnitte IV, V, VI und VII führen und die zugehörigen Kräftepläne zeichnen.

Schnitt	Kräftepolygon	Stabkräfte
I	<i>abg</i>	$\overline{bg} = 1 = \text{Druck}$ $\overline{ag} = 2 = \text{Zug}$
II	<i>bchg</i>	$\overline{ch} = 4 = \text{Druck}$ $\overline{gh} = 3 = \text{Druck}$
III	<i>aghia</i>	$\overline{hi} = 5 = \text{Zug}$ $\overline{ia} = 6 = \text{Zug}$
IV	<i>cdnkih</i>	$\overline{ik} = 7 = \text{Druck}$ $\overline{dn} = 9 = \text{Zug}$ $\overline{kn} = 8 = \text{Druck}$
V	<i>aikla</i>	$\overline{ia} = 6 = \text{Zug}$ $\overline{kl} = 10 = \text{Zug}$ $\overline{la} = 11 = \text{Zug}$
VI	<i>dmoe</i>	$\overline{mo} = 13 = \text{Druck}$ $\overline{oe} = 12 = \text{Druck}$
VII	<i>alkmol</i>	$\overline{ol} = 14 = \text{Zug}$

Anmerkung 29. Noch einfacher als oben in Auflösung der Aufgabe 40 angegeben wurde ermittelt man die Spannung 9 durch die Erwägung, dass wegen der symmetrischen

Anordnung der Stäbe  $fe$  und  $fi$  hinsichtlich des Stabes  $fg$ , die in ersteren Stäben herrschenden Spannungen gleich gross sein müssen. Es ist also die Spannung  $5 = 9$ .

115) **Aufgabe 41.** Man konstruiere die Spannungen in den Konstruktionsteilen des in Figur 128 dargestellten doppelten Polongeau-Binders unter der Voraussetzung, dass die Stützweite 14 m, die Höhe 2,0 m, die Binderentfernung 4 m und die Belastung per Quadratmeter Horizontalprojektion einschliesslich Winddruck 200 kg betrage.

116) **Aufgabe 42.** Für das in Figur 130 dargestellte Sprengwerkdach ist für die gegebenen Belastungen der Kräfteplan zu konstruieren.

**Auflösung.** Die im Firstpunkte  $c$ , siehe Figur 130, wirkende Kraft  $P$  wird auf die Streben  $cd$  und  $ce$  übertragen und zwar erhält man diese Strebendrucke  $S_1$  mittels des Dreiecks  $abc$ , siehe Figur 130 a, worin  $\overline{ac} = \overline{bc} = S_1$  ist. Im Punkte  $d$ , s. Figur 130, wird gleichfalls die Kraft  $P$  aufgenommen und auf den Spannriegel  $de$ , sowie die Strebe  $df$  übertragen; man erhält die Beanspruchung  $H_1$  des Spannriegels gleich  $de$ , s. Fig. 130 a, jene der Strebe  $\overline{fd} = \overline{be} + \overline{bc} = \overline{ec} = S_2$ .

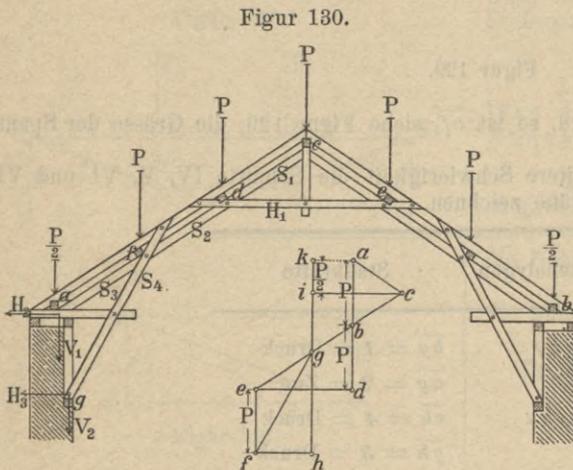
Die Kraft  $P$  im Punkte  $f$ , siehe Figur 130, nehmen die Streben  $af$  und  $fg$  auf und zwar ist der Druck in der Strebe  $af = S_3 = \overline{gc}$ , siehe Figur 130 a, jener in  $fg = S_4 = \overline{gf}$ , siehe Figur 130 a.

Durch die Strebendrucke  $S_3$  und  $S_4$  entstehen in den Punkten  $a$  und  $g$  die Horizontal-schübe  $H_2 = \overline{ci}$ , s. Fig. 130 a, und  $H_3 = \overline{fh}$ , s. Figur 130 a, ebenso die Vertikaldrücke:

$$V_1 = \overline{kg} \text{ und } V_2 = \overline{gh}$$

Man erhält folgende Zusammenstellung:

Fig. 130	Fig. 130 a	
$S_1$	$= \overline{bc}$	Druck
$S_2$	$= \overline{ce}$	"
$S_3$	$= \overline{gc}$	"
$S_4$	$= \overline{gf}$	"
$H_1$	$= \overline{de}$	"
$H_2$	$= \overline{ci}$	Zug
$H_3$	$= \overline{fh}$	Druck auf die Mauer
$V_1$	$= \overline{kg}$	" "
$V_2$	$= \overline{gh}$	" "



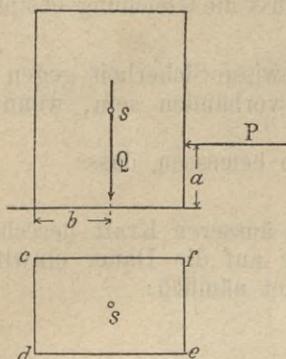
Figur 130 a.

## E. Stabilität der Körper.

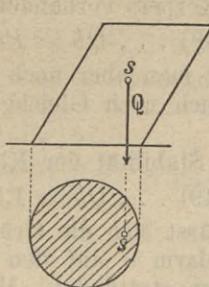
### 1) Begriff der Stabilität, Stabilitätsmoment.

117) Unter der Stabilität eines Körpers versteht man dessen Widerstand gegen Umkanten. Liegt z. B. ein Körper, siehe Figur 131, mittels einer Fläche  $cdef$  auf einer Ebene auf und ist angenommen, dass eine Verschiebung auf letztere ausgeschlossen, vielmehr nur ein Umkanten um die Kante  $cd$  möglich ist, so wird eine Kraft  $P$  ein solches Umkanten nur bewerkstelligen können, wenn das statische Moment  $Pa$  grösser ist als das statische Moment  $Qb$ , unter

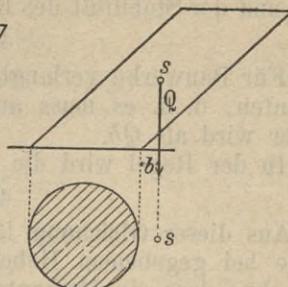
Figur 131.



Figur 132.



Figur 133.



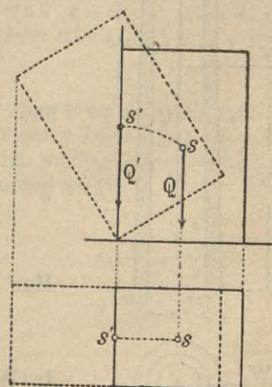
$Q$  das Gewicht des Körpers verstanden. Der Widerstand gegen das Umkanten ist also durch das statische Moment  $Qb$  gegeben und dieses Moment nennt man deshalb auch das Stabilitätsmoment des Körpers. Dieses Moment ist um so grösser, je grösser der Hebelarm  $b$  und je grösser das Gewicht  $Q$  des Körpers ist.

Ein Umkanten des Körpers kann aber auch durch das Gewicht des Körpers selbst bewirkt werden. Hat der Körper z. B. die Form, siehe Figur 133, so trifft die Schwerpunktsvertikale  $Q$  die Auflagerfläche des Körpers nicht mehr, und es ist demnach auch keine Reaktion vorhanden, welche der Kraft  $Q$  das Gleichgewicht hält, d. h. es kommt das statische Moment  $Qb$  zur Wirkung, der Körper wird umkanten. In diesem Falle besitzt der Körper keine Stabilität.

Endlich ist noch der Fall denkbar, dass der Körper keine Stabilität besitzt, ohne dass er jedoch umzukanten braucht. Denkt man sich z. B. einen senkrechten Kreisegel auf seiner Spitze stehend, so geht die Schwerpunktsvertikale durch den Unterstützungspunkt; es ist das Stabilitätsmoment, weil der Hebelarm verschwindet, gleich Null. Die geringste Einwirkung einer äusseren Kraft wird aber hinreichen, den Körper umzuwerfen; das Gleiche ist der Fall, wenn die Vertikale durch den Schwerpunkt gerade die Umfangslinie der Unterstütsfläche schneidet.

Wird ein Körper durch eine äussere Kraft umzukanten gesucht, so wird er nach Aufhören der Wirkung der äusseren Kraft so lange in seine ursprüngliche Lage zurückkehren, als sein Schwerpunkt noch nicht zur Vertikalebene gelangt ist, welche die Drehkante enthält. Hat der Schwerpunkt diese Lage überschritten, so kehrt der Körper nicht mehr in seine ursprüngliche Lage zurück, sondern fällt nach der entgegengesetzten Seite um.

Figur 134.



## 2) Stabilitätsgesetz, Stabilitätsgleichung.

118) Aus dem Vorangegangenen ergibt sich für die Stabilität eines Körpers folgendes Gesetz:

„Die Stabilität ist um so grösser, je grösser die Unterstütsfläche und das Gewicht des Körpers ist, sowie je tiefer sein Schwerpunkt liegt.“

**Stabilitätsgleichung.** Damit Gleichgewicht zwischen der äusseren Kraft und der Stabilität des Körpers vorhanden ist, muss die Gleichung bestehen:

$$48) \dots Qb = Pa$$

Für Bauwerke verlangt man aber noch eine gewisse Sicherheit gegen das Umkanten, d. h. es muss auch noch Gleichgewicht vorhanden sein, wenn  $Pa$  grösser wird als  $Qb$ .

In der Regel wird die Stabilität der Körper so bemessen, dass

$$49) \dots Qb = 1,5 Pa$$

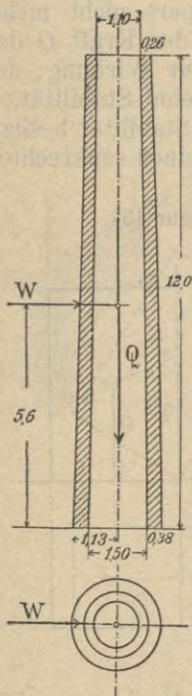
ist. Aus dieser Gleichung lässt sich die Grösse der äusseren Kraft berechnen, welche bei gegebenem Hebelarm  $a$  auf den Körper auf die Dauer einwirken darf, ohne dass ein Umkanten stattfindet. Man findet nämlich:

$$50) \dots P = \frac{Qb}{1,5a}$$

### 3) Übungsaufgaben.

119) **Aufgabe 43.** Ein Schornstein mit den nebenstehenden Ausmessungen, siehe Figur 135, ist gegeben. Wie gross darf die in einer Entfernung gleich 5,6 m von der untersten Fläche befindliche horizontale Winddruckkomponente sein, damit hinlängliche Sicherheit gegen das Umkanten des Schornsteines vorhanden ist?

Figur 135.



1 Kubikmeter Mauerwerk = 1600 kg.

**Auflösung.** Das Gewicht des Schornsteines ist:

$$Q = \frac{(f_1 + f_2)}{2} \cdot 12 \cdot 1600$$

unter  $f_1$  und  $f_2$  die untere, bezw. obere Querschnittsfläche verstanden.

Nun ist aber:

$$f_1 = \frac{3,14}{4} (1,50 + 2,26) \cdot 0,76 = 2,249 \text{ qm}$$

und

$$f_2 = \frac{3,14}{4} (1,0 + 1,52) \cdot 0,52 = 1,039 \text{ qm}$$

Es ist also:

$$Q = \frac{2,24 + 1,03}{2} \cdot 12 \cdot 1600 = 31392 \text{ kg}$$

Man hat nun die Stabilitätsgleichung:

$$W = \frac{31392 \cdot 1,18}{1,5 \cdot 5,6} = \text{rund } 4222 \text{ kg}$$

In Wirklichkeit beträgt aber der Winddruck nur:

$$\frac{(2,26 + 1,52)}{2} \cdot 12 \cdot 125 \cdot 0,66 = 3780 \text{ kg}$$

Der Schornstein besitzt also hinlängliche Stabilität.

120) **Aufgabe 44.** Welche horizontale Kraft  $P$  (Erddruck) darf im Punkte  $a$ , siehe Figur 136, auf die Dauer auf die Futtermauer einwirken, wenn dieselbe hinreichende Stabilität besitzen soll?

**Auflösung.** Es muss sein:

$$Qg = 1,5 P1,0$$

Nun ist aber für den laufenden Meter Tiefe der Mauer:

$$Q = \frac{1,00 + 1,50}{2} \cdot 3 \cdot 1600 = 6000 \text{ kg}$$

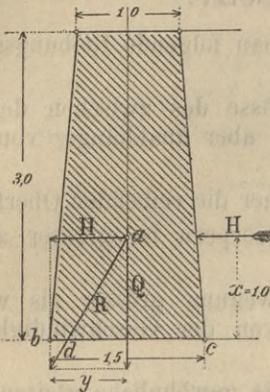
Der Hebelarm  $y$  von  $Q$  beträgt nach der Figur 136: 0,75 m.

Es ist daher:

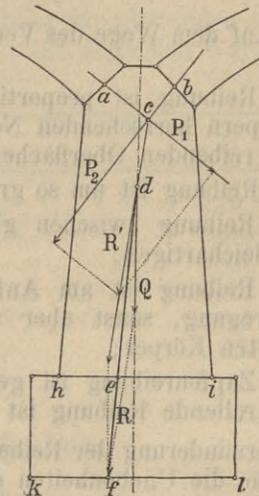
$$6000 \cdot 0,75 = 1,5 P \cdot 1,0$$

$$P = \frac{6000 \cdot 0,75}{1,5} = 3000 \text{ kg}$$

Figur 136.



Figur 137.



121) **Aufgabe 45.** Auf einen Mauerpfeiler wirken, siehe Figur 137, die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ , herrührend von den Belastungen zweier Gewölb-bogen. Es ist zu untersuchen, ob der Mauerpfeiler hinreichende Sta-bilität besitzt.

**Auflösung.** Zunächst vereinigt man die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  zu einer Resultante  $R'$ , hierauf  $R'$  und die Mauergerewicht darstellende Kraft  $Q$  zu einer Resultante  $R$ .

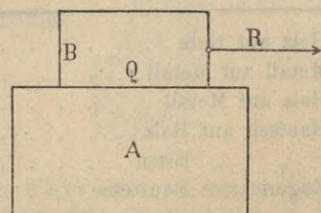
Hinreichende Stabilität besitzt die Mauer, wenn, wie im vorliegenden Falle, die Resultante  $R$  noch die Fundamentbasis innerhalb ihrer Begrenzung trifft.

## F. Die Reibung.

### 1) Die Reibung im allgemeinen.

122) Soll ein Körper  $B$ , gleitend auf der Oberfläche eines Körpers  $A$ , siehe Figur 138, bewegt werden, so ist hierzu eine Kraft  $R$  erforderlich, welche den Widerstand zwischen den beiden Oberflächen von  $A$  und  $B$  zu überwinden hat; diesen Widerstand nennt man den Reibungswiderstand oder kurzweg die Reibung zwischen den Körpern  $A$  und  $B$ .

Figur 138.



## 2) Reibungsarten.

123) Es gibt verschiedene Reibungsarten, je nach der Art der Bewegung der die Reibung verursachenden Oberflächen. Man unterscheidet:

- a) gleitende Reibung, wenn die Bewegung, wie in Figur 138, stattfindet;
- b) rollende Reibung, wenn der eine Körper auf dem andern rollt;
- c) Zapfenreibung und zwar Reibung bei liegenden und Reibung bei stehenden Zapfen.

## 3) Reibungsgesetze.

124) Auf dem Wege des Versuches hat man folgende Reibungsgesetze festgestellt:

- a) die Reibung ist proportional der Grösse des zwischen den reibenden Körpern herrschenden Normaldruckes, aber unabhängig von der Grösse der reibenden Oberflächen;
- b) die Reibung ist um so grösser, je rauher die reibenden Oberflächen sind;
- c) die Reibung zwischen gleichartigen Körpern ist grösser als zwischen ungleichartigen;
- d) die Reibung ist am Anfang der Bewegung grösser als während der Bewegung, sonst aber unabhängig von der Geschwindigkeit der bewegten Körper;
- e) die Zapfenreibung ist geringer als die gewöhnliche gleitende Reibung, die rollende Reibung ist im Verhältnis zur gleitenden sehr klein.

Zur Verminderung der Reibung zwischen zwei Körpern dienen die Schmiermittel, welche die Unebenheiten der reibenden Oberflächen ausfüllen und so die Reibung vermindern; solche Schmiermittel sind: Fett, Seife, Graphit u. dergl. für Holz, Oele für Metalle.

## 4) Reibungskoeffizient.

125) Hierunter versteht man das Verhältnis der zur Ueberwindung der Reibung erforderlichen Kraft  $R$  zur Grösse des zwischen den Körpern herrschenden Druckes  $Q$ ; es ist also:

$$51) \dots f = \frac{R}{Q}$$

Man erhält somit die Grösse der Reibung, wenn man den Reibungskoeffizienten mit der Grösse des von den Körpern ausgeübten Druckes multipliziert.

Im folgenden sind für einige Körper die Reibungskoeffizienten zusammengestellt.

Reibende Körper	Ohne Schmiermittel	Mit Oel geschmiert	Mit Fett geschmiert	Mit Seife geschmiert
Holz auf Holz . . . . .	0,36	—	0,07	0,15
Metall auf Metall . . . . .	0,18	0,09	—	—
Holz auf Metall . . . . .	0,42	0,06	0,08	0,20
Hanfseil auf Holz . . . . .	0,45	—	—	—
„ „ Eisen . . . . .	—	0,15	—	—
Zugerichtete Bausteine . . . . .	0,60—0,75	—	—	—

Die hier mitgeteilten Reibungskoeffizienten gelten während der Bewegung; für den Anfang der Bewegung dürfen wohl die doppelten Werte genommen werden.

126) Für die Zapfenreibung hat man für den in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fall, dass Zapfen aus Schmiede- oder Gusseisen in Lagern von Gusseisen oder Messing u. dergl. laufen:

bei Schmierung von Zeit zu Zeit:  $f = 0,07$  bis  $0,08$

bei ununterbrochener Schmierung:  $f = 0,05$

Hat man stehende Zapfen, so beträgt hier die Reibung nur zwei Drittel der Reibung für liegende Zapfen.

127) Die rollende Reibung ist im Verhältnis zur gleitenden sehr klein und kommt namentlich für Fuhrwerke in Betracht. Die folgenden Werte geben einen Begriff von der Grösse dieser Reibungsart.

Art der Fahrbahn	$f$
Auf einer guten Schotterstrasse . . . . .	0,12
Auf sehr gutem Pflaster . . . . .	0,15
Auf schlechtem Pflaster . . . . .	0,021
Auf einer schlechten Schotterstrasse . . . . .	0,077
Auf einer Brückenbahn von Holz . . . . .	0,023
Auf einer Eisenbahn . . . . .	0,005

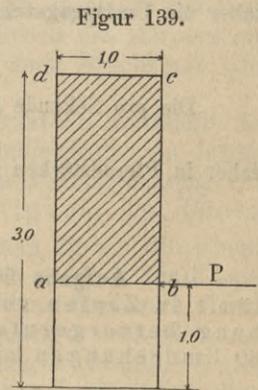
### 5) Übungsaufgaben.

128) **Aufgabe 46.** Wie gross ist der Reibungswiderstand einer Futtermauer, s. Figur 139, längs der Fuge  $ab$ , per laufenden Meter Tiefe, wenn der Reibungskoeffizient für Ziegelmauerwerk  $0,7$  sein und  $1$  cbm Ziegelmauerwerk  $1600$  kg wiegen soll?

**Auflösung.** Der gesuchte Reibungswiderstand ist:

$$R = 1,0 \cdot 2,0 \cdot 1 \cdot 1600 \cdot 0,7 = 2240 \text{ kg.}$$

Die Horizontalkraft  $P$  muss also kleiner sein als  $R$ , wenn ein Abgleiten des Mauerwerks längs der Fuge  $ab$  nicht stattfinden soll.



Figur 139.

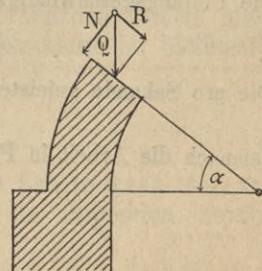
129) **Aufgabe 47.** Es ist der Winkel  $\alpha$ , s. Fig. 140, mit der Horizontalen zu bestimmen, bis zu welchem man wird wölben können, ohne dass ein Abgleiten der Steine längs der Fuge infolge ihres Gewichtes stattfindet, wenn der Reibungskoeffizient  $0,5$  sein soll.

**Auflösung.** Zwischen der Normalkraft  $N$  und der Reibung  $R$  findet das Verhältnis statt:

$$N : R = 1 : 0,5$$

Daher ist:

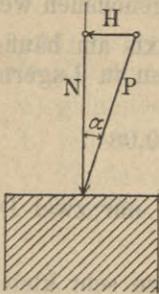
$$\text{tg } \alpha = 0,5 \text{ und demgemäss } \alpha = \text{ca. } 27^\circ$$



Figur 140.

130) **Aufgabe 48.** Es ist der Winkel  $\alpha$ , siehe Figur 141, zu bestimmen, bis zu welchem die Richtung der Kraft  $P$  von der Normalen  $N$  zur

Figur 141.



Fugenfläche abweichen darf, ohne dass ein Gleiten des Mauerwerkes längs der obersten Fuge stattfindet. Reibungskoeffizient  $f = 0,7$ .

**Auflösung.** Sobald das Verhältnis  $H:N$  grösser als  $0,7$  ist, wird ein Abgleiten längs der obersten Fuge stattfinden.

Es muss also sein:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq 0,7, \text{ d. h. } \alpha \leq 35^\circ$$

**Anmerkung 30.** Der Winkel  $\alpha$ , dessen Tangente gleich dem Reibungskoeffizienten ist, heisst der Reibungswinkel des betreffenden Materiales.

131) **Aufgabe 49.** Ein Wasserrad von 4 m Durchmesser und 25000 kg Gewicht läuft mittels gusseisernen Zapfen von 3,5 cm Durchmesser in Lagern von Bronze und macht 8 Umgänge pro Minute. Wie gross ist die gesamte Zapfenreibung und der durch letztere hervorgerufene Arbeitsverlust in der Sekunde?

**Auflösung.** Bei guter Schmierung mit Oel hat der Reibungskoeffizient den Wert:

$$f = 0,08$$

demnach ist die Gesamtreibung:

$$R = 0,08 \cdot 25000 = 2000 \text{ kg}$$

Der Umfang eines Zapfens ist nun:

$$3,14 \cdot 0,35 = 1,099 \text{ m}$$

daher die Umfangsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{1,099 \cdot 8}{60} = 0,1465 \text{ m}$$

Die pro Sekunde geleistete Arbeit ist:

$$A = 0,1465 \cdot 2000 = 293 \text{ Meterkilogramm}$$

daher in Pferdestärken ausgedrückt:

$$N = \frac{293}{75} = 3,9 \text{ Pferde.}$$

132) **Aufgabe 50.** Ein Schwungrad wiegt samt Achse 2400 kg und läuft in Zapfen von 15 cm Stärke. Wie gross ist der infolge der Reibung hervorgerufene Arbeitsverlust, wenn das Rad in der Minute 60 Umdrehungen macht und der Reibungskoeffizient  $0,08$  beträgt?

**Auflösung.** Die gesamte Reibung ist:

$$2400 \cdot 0,08 = 192 \text{ kg}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit eines Zapfens beträgt:

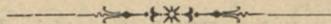
$$v = \frac{0,15 \cdot 3,14 \cdot 60}{60} = 0,4710$$

Die pro Sekunde geleistete Arbeit ist:

$$A = 0,471 \cdot 192 = 90,432 \text{ mkg}$$

demnach die Arbeit in Pferdestärken:

$$N = \frac{90,432}{75} = 1,2 \text{ Pferde.}$$



## II. Abschnitt.

# Elemente der Festigkeitslehre.

### A. Einleitung.

#### 1) Elastizität, Proportionalitäts- bzw. Elastizitätsgrenze.

133) Das Einwirken äusserer Kräfte auf einen Körper bedingt eine Formveränderung desselben. Nach dem Aufhören der Kraftwirkung zeigt der Körper das Bestreben, seine ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen. Dieses Bestreben nennt man **Elastizität**.

In der Regel bleiben kleine Formveränderungen bestehen, welche proportional sind den äusseren Kräften — jedoch nur bis zu einer gewissen Grenze — der **Proportionalitätsgrenze**.

Wird die Beanspruchung durch äussere Kräfte über die Proportionalitätsgrenze hinaus fortgesetzt, so wachsen die Formveränderungen in einem stärkeren Verhältnis als die Belastungen und schliesslich tritt der Bruch des Körpers ein. Die entsprechende Belastung heisst die **Bruchbelastung**, auch **Bruchkraft** oder **Bruchmodul**.

Infolge der Beanspruchung durch äussere Kräfte entsteht innerhalb des Körpers eine **Spannung**; man versteht hierunter die Beanspruchung in irgend einem Querschnitt des Körpers per Flächeneinheit. — Der Bruchbelastung entspricht als **Spannung** die **Bruchspannung**, bzw. die **Festigkeit** des Körpers.

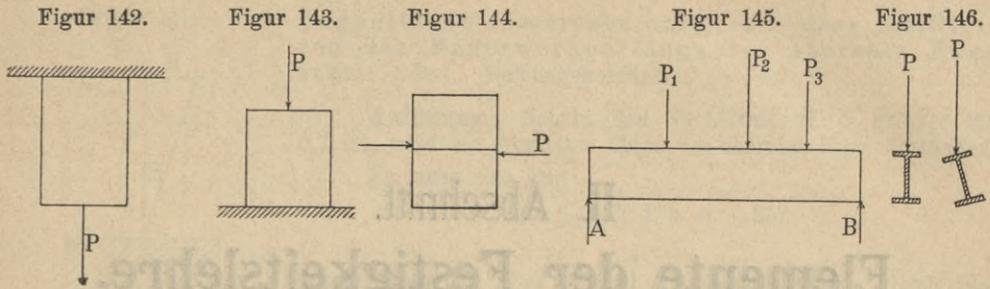
134) Statt der Proportionalitätsgrenze unterschied man früher die **Elastizitätsgrenze** und verstand darunter diejenige Grenze, bis zu welcher der Körper durch äussere Kräfte beansprucht werden durfte, ohne dass bleibende Formveränderungen eintraten. Neuere Untersuchungen haben gezeigt, dass bleibende Formveränderungen bei den meisten, in technischer Beziehung wichtigen Körpern schon bei Beanspruchung von verhältnismässig kleinen äusseren Kräften eintreten; diese Formveränderungen sind jedoch so verschwindend klein, dass sie sich bisher der Messarbeit entzogen hatten.

Mittels der in neuerer Zeit konstruierten ausserordentlich feinen Messinstrumente ist es möglich gewesen, das Vorhandensein der kleinsten bleibenden Formveränderungen nachzuweisen.

#### 2) Festigkeitsarten.

135) Je nach der Art der Einwirkung der äusseren Kräfte kann man verschiedene Festigkeiten unterscheiden; hier sollen nur die folgenden hervorgehoben werden:

**Zugfestigkeit.** Wirkt eine Kraft  $P$  in der Achse eines stabförmigen Körpers so, dass sie eine Dehnung des Körpers veranlasst, siehe Figur 142, so wird der Körper auf **Zugfestigkeit** beansprucht.



**Druckfestigkeit.** Die Kraft wirkt gleichfalls in der Achse des stabförmigen Körpers, sie verursacht aber ein Zusammenpressen des Körpers, siehe Figur 143.

**Schub- oder Scheerfestigkeit.** Die Kraft wirkt wie in Figur 144 und bewirkt ein Hinwegschieben eines Querschnittes auf seinem Nachbarquerschnitte.

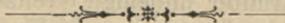
**Anmerkung 31.** Bei der Zug- und Druckfestigkeit wirkt die äussere Kraft stets normal zur Querschnittsebene. Man kann deshalb genannte Festigkeiten unter der gemeinsamen Bezeichnung „Normalfestigkeit“ zusammenfassen. Die hierbei auftretenden Spannungen heissen „Normalspannungen“.

**Biegungsfestigkeit.** Die Kraft wirkt senkrecht zur Achse eines stabförmigen Körpers; man unterscheidet:

einfache und zusammengesetzte Biegungsfestigkeit, je nachdem die Richtungslinie der Kraft mit einer Hauptachse eines Stabquerschnittes zusammenfällt oder nicht, siehe Figur 146 und No. 182.

**Zerknickungsfestigkeit.** Die Kraft wirkt in der Längsachse eines stabförmigen Körpers, dessen Länge grösser ist als der fünffache Betrag der kleinsten Querschnittsausdehnung.

**Zusammengesetzte Festigkeit.** Der Körper wird auf mehrere Festigkeiten zugleich beansprucht und zwar entweder auf Biegung und Zug oder auf Biegung und Druck.



## B. Normalfestigkeit.

### 1) Formveränderung des Stabes.

136) Durch Einwirkung einer Kraft  $P$  auf den stabförmigen Körper, siehe Figur 142, welche sich gleichmässig auf den Querschnitt  $F$  verteilt, erfährt der Körper eine Längenänderung proportional der Grösse der Kraft und der Länge des Stabes und umgekehrt proportional der Grösse des Querschnittes  $F$  und des Elastizitätsmodulus  $E$ , siehe No. 137.

Bezeichnet  $\lambda$  die hervorgebrachte Verlängerung,  $E$  den Elastizitätsmodulus und  $l$  die Länge des Stabes, so ist:

$$52) \dots \lambda = \frac{Pl}{EF}$$

Ist die Kraft  $P$  eine Druckkraft, so gilt für die Formveränderung die nämliche Gleichung 52), nur bezeichnet in diesem Falle  $\lambda$  die infolge der Einwirkung von  $P$  hervorgerufene Verkürzung.

137) Unter dem Elastizitätsmodulus versteht man jene Spannung im Körper, welche entstehen würde, wenn durch eine Zugkraft der Körper um seine eigene Länge verlängert, bezw. durch eine Druckkraft bis auf die Länge Null zusammengedrückt werden könnte.

Mittels der vorstehenden Gleichung 52) ist man imstande, die Verlängerung eines Stabes vom gegebenen Querschnitt und Material zu berechnen, welche durch eine Kraft  $P$  hervorgerufen wird.

## 2) Tragfähigkeit eines Stabes.

138) Ist  $K$  die der Bruchkraft  $P'$  entsprechende Spannung und  $F$  der Stabquerschnitt, so findet zwischen den drei Grössen  $P'$ ,  $K$  und  $F$  die Beziehung statt:

$$53) \dots P' = KF$$

Zur Berechnung der Tragfähigkeit eines Querschnittes darf man aber nicht die Bruchspannung „ $K$ “ zu Grunde legen, sondern muss eine kleinere Spannung „ $\mathcal{S}$ “ voraussetzen, so dass man die Gleichung erhält:

$$54) \dots P = \mathcal{S} F$$

Die der Spannung „ $\mathcal{S}$ “ entsprechende Kraft „ $P$ “ heisst die Tragkraft. Der Quotient  $\frac{\mathcal{S}}{K}$  heisst der Sicherheitskoeffizient; er beträgt für Holz und Stein in der Regel 10, für Metalle 5, d. h. die Beanspruchung, welche den Körpern zugemuthet wird, darf nur den zehnten, bezw. fünften Teil der Bruchbeanspruchung betragen.

Die in Gleichung 54) enthaltene Grösse „ $\mathcal{S}$ “ bezeichnet man als zulässige Beanspruchung bezw. als die zulässige Faserspannung des Materials; dieselbe ist eine Zug- bezw. eine Druckspannung, je nachdem die Kraft  $P$  eine Zug- bezw. Druckkraft ist.

**Anmerkung 32.** Bei den folgenden Berechnungen soll in der Regel die äussere Kraft  $P$  in Kilogramm, der Flächeninhalt  $F$  in Quadratcentimeter und die zulässige Faserspannung  $\mathcal{S}$  in Kilogramm per Quadratcentimeter ausgedrückt sein.

139) Die Formel 54) kann in mehrfacher Weise Anwendung finden, je nachdem in derselben  $P$ ,  $\mathcal{S}$  oder  $F$  unbekannt sind; am häufigsten ist das letztere der Fall und man erhält dann für  $F$  den Wert:

$$55) \dots F = \frac{P}{\mathcal{S}}$$

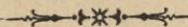
In dieser Form wird die Gleichung verwendet, wenn es sich darum handelt, die erforderliche Querschnittsgrösse für einen Konstruktionsteil, der eine bestimmte äussere Belastung aufzunehmen hat, zu berechnen.

In der Form 54) findet sie dagegen Anwendung, wenn die Querschnittsgrösse „ $F$ “ und die zulässige Beanspruchung, also das Material des Konstruktionsteiles bekannt sind und man dessen Tragkraft bestimmen will.

Kennt man endlich die Belastung  $P$  sowie die Querschnittsgrösse  $F$  und will man feststellen, ob das Material innerhalb der zulässigen Grenze beansprucht ist, so dient hierzu die Gleichung:

$$56) \dots \mathcal{S} = \frac{P}{F}$$

In der Tabelle, siehe Anhang, sind für eine Reihe von Materialien die Werte  $E$ ,  $K$  und  $\mathcal{S}$  zusammengestellt.



## C. Schubfestigkeit.

140) Für die Schubfestigkeit haben dieselben Formeln wie für die Normalfestigkeit Gültigkeit, nur ist die zulässige Faserspannung für Schub eine andere, bei Holz etwa  $\frac{1}{10}$  der Zug- bzw. Druckbeanspruchung, bei Metallen  $\frac{4}{5}$  derselben; die hierzu gehörigen Werte finden sich in der Tabelle, siehe Anhang, angegeben.

## D. Übungsaufgaben.

141) **Aufgabe 51.** Ein Flacheisen von rechteckigem Querschnitt  $\frac{10}{8}$  cm und 3 m Länge hat einen Zug von 6000 kg aufzunehmen; wie gross ist die Verlängerung  $\lambda$ ?

**Auflösung.** Es ist  $\lambda = \frac{Pl}{EF}$ , nun ist der Elastizitätsmodulus für Schmiedeeisen  $E = 2000000$ , daher ist:

$$\lambda = \frac{6000 \cdot 300}{2000000 \cdot 10 \cdot 8} = 0,1125 \text{ cm}$$

142) **Aufgabe 52.** Eine kreisrunde Zugstange aus Schmiedeeisen von 6 m Länge und 4 cm Durchmesser hat einen Zug von 10000 kg aufzunehmen, wie gross ist die Verlängerung  $\lambda$ ?

**Auflösung.** Es ist:

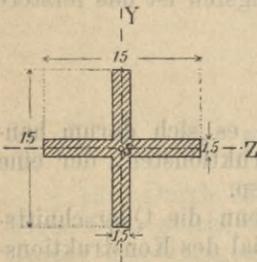
$$\lambda = \frac{10000 \cdot 600}{4 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 2000000} = 0,23 \text{ cm}$$

143) **Aufgabe 53.** Welchen Zug kann ein Winkeleisen No. 6 aufnehmen.

**Auflösung.** Für Schmiedeeisen ist  $\mathcal{S} = 750$ , daher ist:

$$P = 750 \cdot (6 \cdot 0,8 \cdot 2 - 0,8^2) = 6720 \text{ kg}$$

Figur 147.



144) **Aufgabe 54.** Welche Druckbelastung kann eine kurze Flügelsäule von nebenstehendem Querschnitt, siehe Figur 147, aufnehmen?

**Auflösung.** Für Gusseisen ist  $\mathcal{S} = 500$ , daher ist:

$$P = 500 (2 \cdot 15 \cdot 1,5 - 1,5^2) = 21375 \text{ kg}$$

145) **Aufgabe 55.** Welche Last kann eine kreisrunde, schmiedeeiserne Zugstange von 2,5 cm Durchmesser mit Sicherheit tragen?

**Auflösung.** Es ist:

$$P = \frac{2,5 \cdot 2,5 \cdot 3,14 \cdot 750}{4} = 3679 \text{ kg}$$

146) **Aufgabe 56.** Das Fundament eines quadratischen Mauerpfeilers hat eine Länge von vier Steinen, Normalformat; welche Druckbelastung kann derselbe auf den Baugrund übertragen?

**Auflösung.** Für guten Baugrund ist  $\mathcal{S} = 2,5$  kg; die Seitenlänge des Fundamentes ist 103 cm, daher hat man:

$$P = 103 \cdot 103 \cdot 2,5 = 26522 \text{ kg}$$

147) **Aufgabe 57.** Welche Last kann eine Hängesäule aus Kiefernholz von quadratischem Querschnitt 16/16 cm aufnehmen?  $\mathcal{S} = 100$ .

**Auflösung.** Es ist:  $P = 100 \cdot 16 \cdot 16 = 25600 \text{ kg}$

**Aufgabe 58.** Welche Druckbelastung kann ein Kopfband aus Kiefernholz von quadratischem Querschnitt 14/14 cm aufnehmen?  $\mathcal{S} = 70$ .

**Auflösung.** Es ist:  $P = 70 \cdot 14 \cdot 14 = 13720 \text{ kg}$

148) **Aufgabe 59.** Eine kreisrunde Zugstange aus Schmiedeeisen hat einen Zug von 12000 kg aufzunehmen; wie gross muss der Durchmesser  $d$  der Zugstange gewählt werden?

**Auflösung.** Es ist:

$$\frac{d^2 \cdot 3,14}{4} = \frac{12000}{750}$$

daher:

$$d = \sqrt{\frac{12000 \cdot 4}{750 \cdot 3,14}} = 4,5 \text{ cm}$$

149) **Aufgabe 60.** Eine Hängesäule aus Kiefernholz von quadratischem Querschnitt hat einen Zug von 8000 kg aufzunehmen; wie stark muss die Säule sein?  $\mathcal{S} = 100$ .

**Auflösung.** Ist die Querschnittseite  $= x$ , so hat man:

$$x^2 = \frac{8000}{100}$$

$$x = \sqrt{\frac{8000}{100}} = 8,9 \text{ oder rund } 9 \text{ cm.}$$

150) **Aufgabe 61.** Der Querschnitt der Zuggurtung eines Dachbinders soll aus zwei gleichschenkligen Winkeleisen bestehen. Die Gurtung hat einen Zug von 7500 kg aufzunehmen. Welche Winkeleisenprofile sind zu wählen?

**Auflösung.** Es ist:  $F = \frac{7500}{750} = 10$

Auf einen Winkeleisenquerschnitt trifft demnach ein Flächeninhalt von 5 qcm. In der Querschnittstabelle, siehe Anhang, findet man für ein Winkeleisen No. 5 eine Querschnittsfläche von 6,51 qcm. Zwei Winkeleisen No. 5 werden daher mit Rücksicht auf die Verschwächung durch die Nieten genügen.

151) **Aufgabe 62.** Eine gusseiserne Säule überträgt auf einen Mauerpfeiler von quadratischem Querschnitt einen Druck von 40000 kg, wie stark muss der Pfeiler und dessen Fundament ausgeführt werden?  $\mathcal{S}$  für Ziegelmauerwerk  $= 7$  kg, für Baugrund  $= 2,5$  kg.

**Auflösung.** Es ist:  $x^2 = \frac{40000}{7}$

daher:

$$x = \sqrt{\frac{40000}{7}} = 75,59 \text{ cm}$$

oder in Steinmass ausgedrückt  $\hat{=} 3$  Steine:

$$y = \sqrt{\frac{40000}{2,5}} = 126 \text{ cm oder } 5 \text{ Steine.}$$

152) **Aufgabe 63.** Das Auflager eines Trägers ist ein Haustein, der auf Ziegelmauerwerk lagert. Der Träger übermittelt einen Auflagerdruck von 7500 kg. Wie gross muss die Lagerfläche des Hausteines genommen werden, wenn derselbe 30 cm in das Mauerwerk eingreift.

**Auflösung.** Es ist:  $30x = \frac{7500}{7}$

daher:  $x = \frac{7500}{30 \cdot 7} = 36 \text{ cm}$

Die Auflagerfläche des Hausteines ist also  $30 \cdot 36 = 1080 \text{ qcm}$

153) **Aufgabe 64.** Ein horizontaler Balken hat im einen Endpunkte eine vertikale Last von 2000 kg aufzunehmen und auf eine kurze unter  $45^\circ$  gegen die Horizontale geneigte Strebe zu übertragen. Wie gross ist die Beanspruchung  $S$  der Strebe und welche Stärke muss sie erhalten, wenn ihr Querschnitt quadratisch sein soll?  $\zeta = 70$ .

**Auflösung.** Es ist:  $S = 2000 \cdot \sqrt{2}$

daher die Stärke der Strebe:  $x = \sqrt{\frac{2000 \cdot \sqrt{2}}{70}} = 6,3 \text{ cm}$

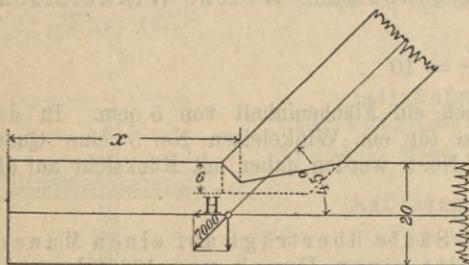
154) **Aufgabe 65.** Ein Schornstein besitzt ein quadratisches Fundament von 3 m Seitenlänge. Das Gewicht des Schornsteines beträgt 200000 kg. Wie stark wird der Baugrund beansprucht?

**Auflösung.** Es ist:  $\zeta = \frac{200000}{300 \cdot 300} = 2,2 \text{ kg}$

155) **Aufgabe 66.** Die Umfassungsmauern eines rechtwinkligen Gebäudes von 20 m Länge und 12 m Tiefe besitzen im Fundament eine Stärke von  $3\frac{1}{2}$  Stein und üben auf dasselbe einen Gesamtdruck von 3500 Tonnen (1 Tonne = 1000 kg) aus. Wie stark wird der Baugrund beansprucht?

**Auflösung.** Es ist:  $\zeta = \frac{3500000}{2 \cdot 20 \cdot 0,90 + 2 \cdot (12 - 2 \cdot 0,90) \cdot 0,90} = \frac{1500000}{513600} = 2,9 \text{ kg}$

Figur 148.



156) **Aufgabe 67.** In der Strebe eines Hängewerkes, siehe Figur 148, wirkt eine Druckkraft von 7000 kg, welche auf den horizontalen Balken zu übertragen ist. Wie gross muss die Länge  $x$  sein, damit ein Aufschnitzen des Holzes nicht stattfindet.  $\zeta = 7 \text{ kg}$ .

**Auflösung.** Die horizontale Schubkraft ist:

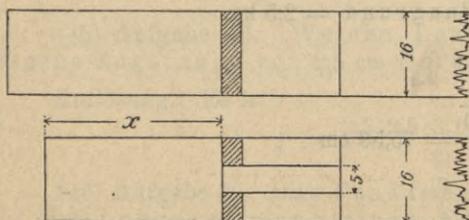
$$H = 7000 \cdot \cos 45^\circ = 7000 \cdot 0,70711 = 4949,77$$

oder rund: 5000 kg

Ist nun die Strebe mit dem Balken durch Versatzung verbunden, so ist die dem Abscheeren Widerstand leistende Fläche ein Rechteck mit der Breite 16 und der Länge  $x$ , es ist also:

$$16x = \frac{5000}{7}$$

oder  $x = \frac{5000}{16 \cdot 7} = \text{rund } 45 \text{ cm}$



Ist die Strebe mit dem Balken durch Verzapfung verbunden, und hat der Zapfen eine Stärke von 5 und eine Tiefe von 6 cm, so ist die dem Abscheeren widerstehende Fläche gebildet aus drei Rechtecken mit den Seiten  $6x$  und  $16x$ , man hat also die Gleichung:

$$6x + 6x + 16x = \frac{5000}{7}$$

daher:

$$x = \frac{5000}{28 \cdot 7} = 26 \text{ cm}$$

157) **Aufgabe 68.** Die Säule eines Hängewerkes hat einen Zug von 16000 kg aufzunehmen und ist durch ein 1 cm starkes Bandeisens mit dem Hauptträger verbunden. Es sollen Bolzen von 25 mm Durchmesser zur Verwendung gelangen. Wieviele Bolzen sind erforderlich, wie weit muss der unterste vom Holzrand, der oberste vom Rande des Bandeisens entfernt sein, welches ist endlich die Breite des Bandeisens?  $\sigma = 100$  für Holz,  $\sigma = 600$  für Schmiedeeisen.

**Auflösung.** Die Querschnittsfläche eines Bolzens beträgt:

$$f = \frac{2,5 \cdot 2,5 \cdot 3,14}{4} = 4,90 \text{ qcm}$$

Da der Bolzen zweischnittig ist, so beträgt die gesamte widerstehende Fläche für einen Bolzen  $= 2 \cdot 4,9 = 9,8$  qcm.

Ist  $n$ , siehe Figur 149, die erforderliche Anzahl der Bolzen, so muss sein:

$$n \cdot 9,8 = \frac{16000}{600}$$

$$n = \frac{16000}{600 \cdot 9,8} = 3$$

Für den Abstand  $x$  des unteren Bolzens findet man:

$$2 \cdot x \cdot 16 = \frac{16000}{3 \cdot 7}$$

$$x = \frac{16000}{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 16} = 24 \text{ cm}$$

Für den Abstand der obersten Bolzen von dem Bandeisens hat man:

$$4 \cdot y \cdot 1 = \frac{16000}{3 \cdot 600}$$

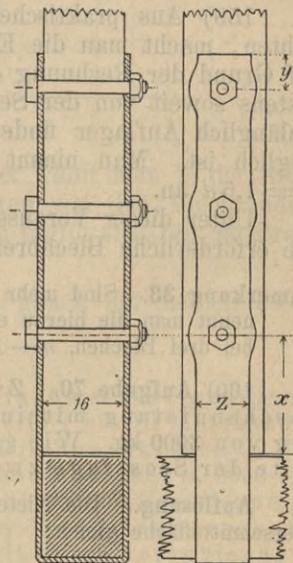
$$y = \frac{16000}{3 \cdot 600 \cdot 4} = 3 \text{ cm}$$

Die Breite  $z$  des Bandeisens findet sich endlich aus der Gleichung:

$$2 \cdot z \cdot 1 = \frac{16000}{750}$$

$$z = \frac{16000}{2 \cdot 750} = 11 \text{ cm}$$

Figur 149.

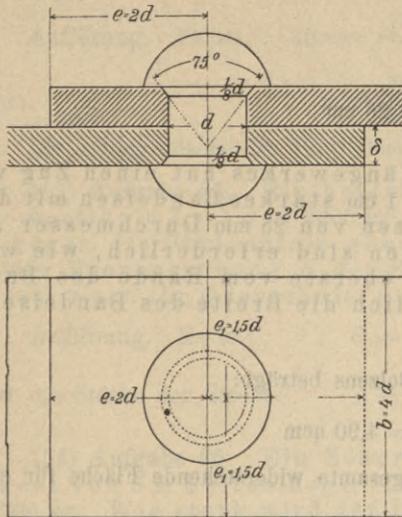


158) **Aufgabe 69.** Zwei Flacheisen sind durch eine Niete mit einander verbunden; in den Flacheisen herrscht ein Zug von 1000 kg; wie gross ist der Nietdurchmesser  $d$  zu nehmen und wie weit muss die Niete von dem Blechrande abstehen?

**Auflösung.** Die Niete ist auf Schubfestigkeit beansprucht, und zwar wird das Abscheeren längs der den beiden Blechen gemeinsamen Trennungsfläche stattfinden. Bei

zwei Blechen ist nur eine solche Trennungsfäche vorhanden, die Niete ist eine einschneittige. Für diesen Fall ist der erforderliche Nietquerschnitt:

Figur 150.



In Figur 150 muss stehen:  $b = 3d$  statt  $b = 4d$

159) Aus praktischen Gründen, hervorgerufen durch Konstruktionsrück-sichten, macht man die Entfernungen  $e$  und  $e_1$  in der Regel grösser, als dies auf Grund der Rechnung erforderlich wäre. Der Blechrand soll nämlich mindestens soweit von der Seite abstehen, dass der Nietkopf auf dem Bleche noch hinlänglich Auflager findet, und dass ausserdem die Ausführung der Nietung möglich ist. Man nimmt deshalb für  $e$  und  $e_1$  den Minimalwert  $e = 2d$  und  $e_1 = 1,5d$  an.

Unter dieser Voraussetzung ist im vorliegenden Falle  $e = 2 \cdot 15 = 30$  mm. Die erforderliche Blechbreite ergibt sich zu  $b = 3d = 45$  mm.

**Anmerkung 33.** Sind mehr als zwei Bleche durch Nieten miteinander zu verbinden, so nennt man die hierzu erforderlichen Nieten mehrschnittig, und zwar zweischnittig bei drei Blechen,  $n - 1$  schnittig bei  $n$  Blechen.

160) **Aufgabe 70.** Zwei Bleche, siehe Figur 151, sind durch doppelte Laschennietung miteinander verbunden. In den Blechen herrscht ein Zug von 3000 kg. Wie gross ist der Nietdurchmesser  $d$ , wenn auf jeder Seite der Stossfuge zwei Nieten angeordnet sind?

**Auflösung.** Die Nieten sind doppelschnittig, daher kommt auf jede Niete eine Querschnittsfläche gleich:

$$\frac{2d^2 \cdot 3,14}{4}$$

für die beiden Nieten also:

$$F = \frac{2 \cdot 2d^2 \cdot 3,14}{4} = d^2 \cdot 3,14$$

Man hat somit die Gleichung:

$$d^2 \cdot 3,14 = \frac{3000}{600} = 5$$

$$d = \sqrt{\frac{5}{3,14}} = 1,2 \text{ cm} = 12 \text{ mm}$$

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{1000}{600}$$

daher:

$$d = \frac{1000 \cdot 4}{3,14 \cdot 600} = 1,5 \text{ cm} = 15 \text{ mm}$$

Die Entfernung  $e$  erhält man aus der Gleichung:

$$2 \cdot e \cdot 1 = \frac{2000}{600}$$

$$e = \frac{2000}{600 \cdot 2} = 1,66 \text{ cm}$$

Für die Breite  $b$  des Bleches erhält man:

$$b = 2e_1$$

Nun ist aber:

$$2e_1 \cdot 1 = \frac{2000}{750}$$

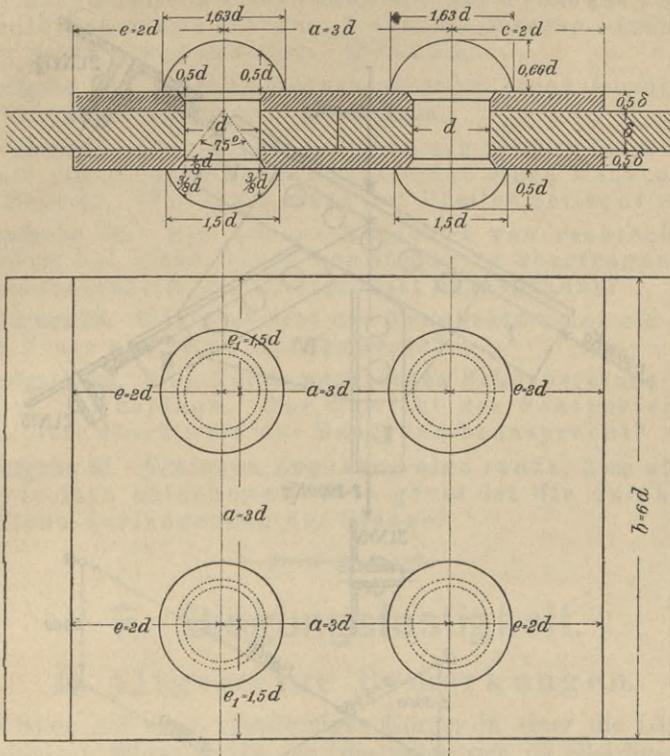
$$e_1 = \frac{2000}{1500} = 1,33 \text{ cm}$$

daher ist:

$$b = 2 \cdot 1,33 = 2,66$$

oder rund 3 cm.

Figur 151.



161) Für den Abstand  $a$  der Niete von einander wählt man in der Regel als kleinsten Wert  $a = 3d$ ; der Abstand  $e_1$  der Niete von den Blechrändern ist wieder gleich  $1,5d$ . Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich für die Breite der Bleche  $b = 6d = 72 \text{ mm}$ .

Die Stärke der Laschen nimmt man gewöhnlich gleich der halben Blechstärke  $\delta$ .

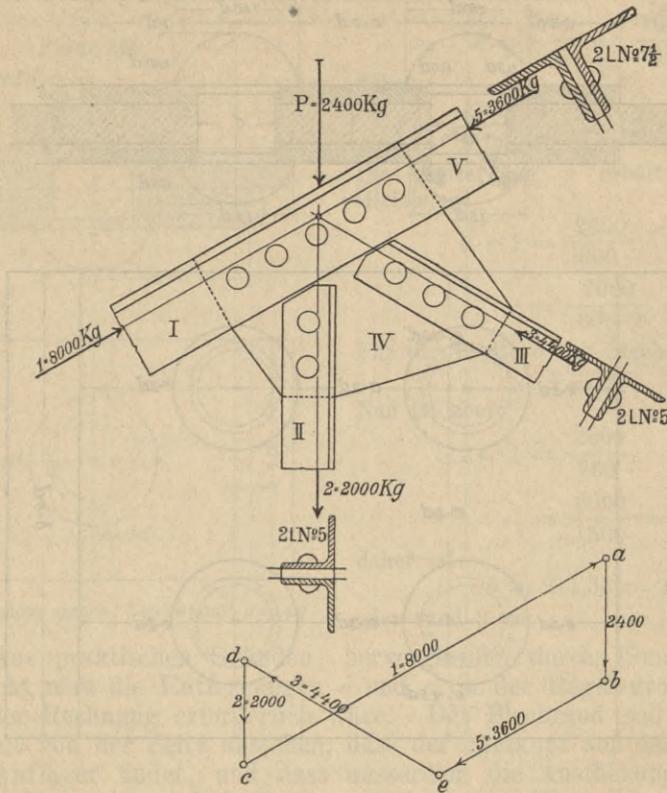
162) **Aufgabe 71.** In dem Knotenpunkte eines fachwerkartigen Dachbinders, siehe Figur 152, stoßen die Konstruktionsteile I bis III aneinander. Die äussere, aufzunehmende Kraft ist 2400 kg. Die Spannkraften in den Konstruktionsteilen I und V sind bekannt und betragen bezw. 8000 und 3600 kg. Es sind die Spannkraften in den Konstruktionsteilen II und III zu ermitteln und ausserdem ist die Anzahl der Niete zu berechnen, welche zur Verbindung der Konstruktionsteile mit dem Knotenbleche IV erforderlich sind, wenn für alle Niete der Durchmesser 14 mm betragen soll.

**Auflösung.** Die Spannkraften bestimmt man mittels des Kräfteplanes, s. Fig. 153, und erhält hierfür die daselbst angegebenen Werte.

Da sämtliche Niete als zweischnittig vorausgesetzt sind, so beträgt die widerstehende Querschnittsfläche einer Niete:

$$F = \frac{2 \cdot 1,4 \cdot 1,4 \cdot 3,14}{4} = 3,03 \text{ qcm oder rund } 3 \text{ qcm}$$

Figur 152.



Figur 153.

Für den Konstruktionsteil II sind erforderlich  $n_1$  Nieten und ergibt sich  $n_1$  aus der Gleichung:

$$n_1 \cdot 3 = \frac{2000}{600}$$

$$n_1 = \frac{2000}{1800} = \text{rund } 2$$

Die Anzahl der Nieten für Konstruktionsteil III sei  $n_2$ , dann ist:

$$n_2 = \frac{4400}{1800} = 3$$

Zur Verbindung des Knotenbleches mit der Gurtung braucht man also:

$$2 + 3 = 5 \text{ Nieten.}$$

163) **Aufgabe 72.** Welche Belastung kann ein Ziegelstein, Normalformat 65 · 120 · 250 mm, aufnehmen?  $\sigma = 7$ .

164) **Aufgabe 73.** Zu welcher Höhe kann Ziegelmauerwerk aufgeführt werden, bis die unterste Schicht durch das Mauergewicht zerdrückt wird?

165) **Aufgabe 74.** Ein prismatisches Schachtgestänge aus Schmiedeeisen hat bei einer Länge von 200 m einschliesslich des Eigengewichtes 30000 kg aufzunehmen. Wie gross ist die Verlängerung, welche die Stange erfährt?

166) **Aufgabe 75.** Wie stark müssen die aus Ziegelmauerwerk mit Kalkmörtel hergestellten Grundmauern eines Gebäudes von 20 m Länge und 12 m Tiefe genommen werden, wenn die Mauern einen Druck von 2500 Tonnen zu übertragen haben.  $\varrho = 2,5$  kg.

167) **Aufgabe 76.** Welche Belastung wird einen Granitwürfel von 20 cm Seitenlänge zerdrücken?  $K = 800$  kg.

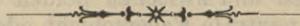
168) **Aufgabe 77.** Eine hölzerne Säule von 24/26 cm Querschnitt überträgt mittels einer gusseisernen Platte auf einen Mauerpfeiler einen Druck von 20000 kg. Wie stark muss der Pfeiler gemacht werden?

169) **Aufgabe 78.** Ein kurzes Kopfband von rechteckigem Querschnitt 12/16 cm hat einen Druck von 7500 kg zu übertragen. Wie stark wird der Quadratcentimeter Querschnitt beansprucht?

170) **Aufgabe 79.** Wie gross ist die Tragkraft einer ein- bzw. zweiseitigen Niete von 18 mm Durchmesser?

171) **Aufgabe 80.** Das Fundament eines Schornsteines ist ein Quadrat von 5 m Seitenlänge. Das Gewicht des Schornsteines beträgt 400 Tonnen. Wie stark wird der Baugrund beansprucht?

172) **Aufgabe 81.** Welchen Zug kann eine runde, 3 cm starke Stange von Schmiedeeisen aufnehmen? Wie gross ist die durch diesen Zug hervorgerufene Verlängerung der Stange?



## E. Biegungsfestigkeit.

### 1) Allgemeine Bemerkungen.

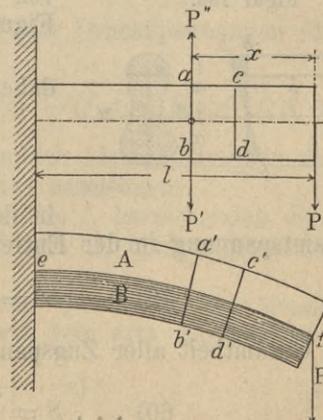
173) Wirken auf einen stabförmigen Körper in einer die Längsachse des Stabes enthaltenden Ebene Kräfte ein, die unter sich im Gleichgewicht sind, so wird der Stab auf Biegungsfestigkeit beansprucht und zwar auf einfache Biegungsfestigkeit, wenn die Kräfteebene die Stabquerschnitte nach einer Hauptachse, s. No. 182, schneidet oder auf zusammengesetzte Biegungsfestigkeit, wenn dies nicht der Fall ist. Zunächst soll das erstere vorausgesetzt werden.

### 2) Biegungs- und Schubspannungen.

174) Wirkt eine Kraft  $P$  am freien Ende eines am anderen Ende eingespannten Trägers, siehe Figur 154, so wird letzterer auf Biegung beansprucht; infolge der Biegung nimmt der Träger die Gestalt der Figur 155 an, doch ist hierbei vorausgesetzt, dass alle zur Stabachse senkrechten ebenen Querschnitte wie  $ab$ ,  $cd$ , s. Figur 154, auch nach der Biegung ihre ebene Gestalt beibehalten, also die Lage  $a'b'$  und  $c'd'$ , siehe Figur 155, einnehmen.

Führt man nun in einer Entfernung  $x$  vom Angriffspunkte der Kraft  $P$  einen Schnitt  $ab$  senkrecht zur Stabachse, so kann man sich die Kraft  $P$  in

Figur 154.



Figur 155.

den Querschnitt  $ab$  nach  $P'$  verlegt denken und daselbst eine ihr gleichgrosse aber entgegengesetzt gerichtete Kraft  $P''$  hinzufügen, dann wird an der Wirkungsweise von  $P$  auf den Träger nichts geändert werden. Die Kräfte  $P'$  und  $P''$  bilden ein Kräftepaar, welches den Querschnitt  $ab$  zu drehen sucht; die Kraft  $P$  hat das Bestreben, den Querschnitt  $ab$  über seinen Nachbarquerschnitt hinwegzuschieben. Durch die Drehung des Querschnittes  $ab$  wird ein Teil der Längsfasern des Materials verlängert, ein anderer Teil zusammengedrückt, während ein dritter Teil gar keine Längenänderungen erfährt. Es entstehen somit in den Fasern teils Zug-, teils Druckspannungen, teils bleiben sie spannungslos. Durch die Einwirkung von  $P'$  entstehen schliesslich im Querschnitt  $ab$  noch Schubspannungen. Die erstgenannten Spannungen kann man im Gegensatz zu den Schubspannungen als Normalspannungen bezeichnen.

Auf die Schubspannungen soll hier, weil dieselben bei den gewöhnlich im Hochbau vorkommenden Trägerkonstruktionen im Vergleich zu den Normalspannungen verhältnismässig klein sind, nicht weiter eingegangen werden.

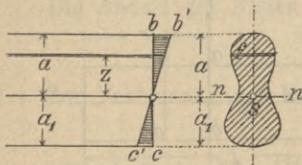
### 3) Neutrale Faserschicht, neutrale Achse.

175) Durch die Biegung eines Trägers entsteht in demselben ein gezogener und ein gedrückter Teil und zwischen beiden Teilen liegt eine spannungslose Faserschicht, welche die neutrale Faserschicht oder auch kurzweg die Neutralachse genannt wird. Jede Querschnittsebene wird von der Neutralachse nach einer geraden Linie geschnitten, welche neutrale Achse oder Neutralachse oder auch Nullachse heisst.

### 4) Spannungsgesetz, Lage der Neutralachse.

176) In ein und demselben Querschnitte sind sowohl die Zug- wie auch die Druckspannungen in den einzelnen durchschnittenen Fasern verschieden gross; denn da die Spannungen proportional sind den Verlängerungen, so ist klar, dass die der Neutralachse zunächst liegenden Fasern geringere Spannungen erleiden werden, als die von dieser Achse entfernteren.

Bezeichnet man die Spannung in der äussersten gezogenen bzw. gedrückten Faser mit  $\mathcal{E}$  bzw.  $\mathcal{E}_1$ , entsprechend der zulässigen Faserspannung des Materials, die Spannung in einer Faser in der Entfernung  $z$  von der Neutralachse mit  $\mathcal{E}'$ , so hat man, siehe Figur 156, die Beziehung:



Figur 156.

$$57) \dots \mathcal{E} : \mathcal{E}' = a : z \text{ bzw. } \mathcal{E}_1 : \mathcal{E}' = a_1 : z$$

daher:

$$58) \dots \mathcal{E}' = \mathcal{E} \frac{z}{a} \text{ bzw. } \mathcal{E}' = \mathcal{E}_1 \frac{z_1}{a_1}$$

Ist nun  $f$  der Inhalt eines Flächenstreifens in der Entfernung  $z$  von der Neutralachse, so ist die Gesamtspannung in der Entfernung  $z$  von der genannten Linie:

$$59) \dots S' = \frac{\mathcal{E}}{a} fz \text{ bzw. } S' = \frac{\mathcal{E}_1}{a_1} fz$$

Für die Gesamtheit aller Zugspannungen erhält man daher den Ausdruck:

$$60) \dots S = \sum_0^a \frac{\mathcal{E}}{a} fz = \frac{\mathcal{E}}{a} \sum_0^a fz$$

Für die Gesamtheit aller Druckspannungen ergibt sich in gleicher Weise:

$$61) \dots S_1 = \sum_0^{a_1} \frac{\mathcal{S}}{a_1} fz = \frac{\mathcal{S}_1}{a_1} \sum_0^{a_1} fz$$

Da nun aber die Summe aller Zugspannungen gleich der Summe aller Druckspannungen sein muss, so hat man die Gleichung:

$$62) \dots \frac{\mathcal{S}}{a} \sum_0^a fz = \frac{\mathcal{S}_1}{a_1} \sum_0^{a_1} fz$$

was nur möglich ist, wenn:

$$63) \dots \sum_0^a fz = \sum_0^{a_1} fz$$

ist.  $\sum_0^a fz$  bedeutet aber die Summe der statischen Momente aller auf einer Seite von  $n$  liegenden Flächenstreifen  $f$  hinsichtlich der Achse  $nn$ , desgl. ist  $\sum_0^{a_1} fz$  die Summe der statischen Momente aller Flächenstreifen  $f$  auf der anderen Seite der Achse  $nn$  hinsichtlich der letzteren. Sollen diese Momenten-Summen einander gleich sein, so muss die Achse  $nn$  durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen.

## 5) Widerstandsmoment, Biegemoment.

177) Fasst man die Zug- und Druckspannungen je zu einer Resultante zusammen, so bilden letztere ein Kräftepaar, dessen statisches Moment dem Moment des Kräftepaares  $PP''$ , siehe Figur 154, das Gleichgewicht halten muss, das erstgenannte statische Moment bezeichnet man als das Moment der inneren Kräfte oder das Widerstandsmoment des Trägers, das letztere Moment heisst das Moment der äusseren Kräfte oder auch das Angriffs- bzw. Biegemoment.

## 6) Trägheitsmoment, Querschnittsmodul oder Widerstandsmoment des Querschnittes.

178) Nennt man die Resultante der Zug- oder Druckspannungen für einen Augenblick  $Q$ , so ist:

$$64) \dots Q = \frac{\mathcal{S}}{a} \sum fz \text{ oder } = \frac{\mathcal{S}}{a} (f_1 z_1 + f_2 z_2 + f_3 z_3 + \dots)$$

wenn  $f_1, f_2, f_3$  u. s. w. Flächenstreifen von unendlich kleiner Breite in den Entfernungen  $z_1, z_2, z_3$  u. s. w. von der Neutralachse bezeichnen.

Nun ist das Moment der gesamten, im Streifen  $f_1$  herrschenden, Spannung offenbar gleich  $f_1 z_1 z_1 = f_1 z_1^2$  und demnach sind auch die übrigen Momente bzw. gleich  $f_2 z_2^2, f_3 z_3^2$  u. s. w.

Ist  $z_0$  der Abstand der beiden Resultanten  $Q$ , so ist das Moment der inneren Kräfte gleich  $Q z_0$  und dieses muss gleich sein dem Ausdruck:

$$\frac{\mathcal{S}}{a} (f_1 z_1^2 + f_2 z_2^2 + f_3 z_3^2 + \dots)$$

wobei sämtliche Flächenstreifen sowohl auf der Druck- wie auf der Zugseite in

Rechnung zu ziehen sind. Den letztern Ausdruck kann man abgekürzt auch so schreiben  $\frac{\mathfrak{E}}{a} \sum f z^2$ , so dass man die Gleichung hat:

$$65) \dots Q z_0 = \frac{\mathfrak{E}}{a} \sum f z^2 \text{ bzw. } \frac{\mathfrak{E}_1}{a_1} \sum f z^2$$

Der Ausdruck  $\sum f z^2$  ist lediglich von der Form des Querschnittes abhängig und heisst das **Trägheitsmoment** des Querschnittes — er wird vielfach mit  $J$  bezeichnet — man kann also schreiben:

$$Q z_0 = \frac{\mathfrak{E} J}{a} \text{ bzw. } = \frac{\mathfrak{E}_1 J}{a_1}$$

Auch der Ausdruck  $\frac{J}{a}$  oder  $\frac{J_1}{a_1}$  ist nur von der Form des Querschnittes abhängig; er wird mit  $W$  bezeichnet und heisst der **Querschnittsmodul** oder das **Widerstandsmoment** des Querschnittes.

Für das Widerstandsmoment der inneren Kräfte erhält man nunmehr die Beziehung:

$$66) \dots Q z_0 = \mathfrak{E} W$$

## 7) Biegungsgleichung.

179) Bezeichnet man das Moment der äusseren Kräfte, d. h. das Biegemoment mit  $M$ , so muss für das Gleichgewicht eines durch äussere Kräfte auf Biegung beanspruchten Trägers die Gleichung bestehen:

$$67) \dots M = \mathfrak{E} W$$

Diese Gleichung heisst die **Biegungsgleichung**, sie muss für jeden senkrecht zur Längsachse des Trägers geführten Querschnitt, hinsichtlich der äusseren und inneren Kräfte bestehen.

## 8) Gefährlicher Querschnitt, grösstes Biegungs- bzw. Widerstandsmoment.

180) Bei einem auf Biegung beanspruchten Träger kommen den Biegemomenten für die verschiedenen Querschnitte verschiedene Werte zu und demnach auch den entsprechenden Widerstandsmomenten. Unter allen diesen Biegemomenten wird eines den grössten Wert besitzen, demgemäss muss auch für den entsprechenden Querschnitt das Widerstandsmoment am grössten sein. Dieser Querschnitt heisst der **gefährliche Querschnitt**; das zu letzterem gehörige Biegemoment ist das **Maximalbiegemoment**. Soll ein Träger der Einwirkung äusserer Kräfte auf die Dauer Widerstand leisten, so muss sein Querschnitt so bemessen sein, dass für ihn das Widerstandsmoment der inneren Kräfte gleich ist dem **Maximalbiegemoment**.

## 9) Bestimmung der Trägheits- und Widerstandsmomente von ebenen Flächen.

### a) Trägheitsmoment des Rechtecks.

181) Der Ausdruck  $\sum f z^2$  bedeutet die Summe sämtlicher Trägheitsmomente der einzelnen Flächenstreifen  $f$ , hinsichtlich der Achse  $Z$ . Das Moment

eines solchen Flächenstreifens ist aber gleich dessen statischem Momente  $fz$  multipliziert mit der Entfernung  $z$  von der Neutralachse  $Z$ . Das Resultantenmoment der sämtlichen statischen Momente auf einer Seite von  $Z$  wird demnach für das Rechteck sein:

$$\frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

dieses Moment multipliziert mit  $\frac{\mathcal{E}}{a}$  gibt einen Ausdruck für die Grösse  $Q$ , siehe Figur 157, und es ist:

$$Q = \frac{\mathcal{E}}{a} \cdot \frac{bh^2}{8}$$

Der Angriffspunkt von  $Q$  liegt zufolge des Verhältnisses zwischen den Spannungsgrössen in den einzelnen Flächenstreifen in  $\frac{2}{3}$  der halben Rechteckshöhe von der Achse  $Z$  entfernt, daher ist das Moment der inneren Kräfte:

$$\begin{aligned} Qz_0 &= \frac{\mathcal{E}}{a} \cdot \frac{bh^2}{8} \cdot \frac{2}{3}h \\ &= \frac{\mathcal{E}}{a} \cdot \frac{1}{12}bh^3 \end{aligned}$$

Somit ist das Trägheitsmoment bezogen auf die Achse  $Z$ :

$$68) \dots J_z = \frac{1}{12}bh^3$$

In gleicher Weise ergibt sich das Trägheitsmoment hinsichtlich der Achse  $Y$ :

$$69) \dots J_y = \sum fy^2 = \frac{1}{12}hb^3$$

**b) Trägheitsmoment des Rechtecks bezogen auf eine beliebige Schwerpunktsachse.**

182) Ist  $U$ , siehe Figur 158, eine durch den Schwerpunkt  $s$  des Rechtecks gehende Achse,  $f$  ein Flächenelement des Querschnittes in der Entfernung  $u$  von  $U$ , so ist das Trägheitsmoment des Rechtecks hinsichtlich der Achse  $U$ :

$$70) \dots J_u = \sum fu^2$$

Nun ist aber in Rücksicht auf die Figur 158:

$$u = z \cos \alpha \pm y \sin \alpha$$

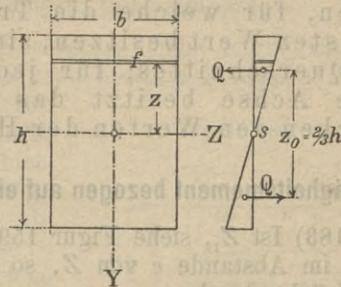
daher:

$$\begin{aligned} \sum fu^2 &= \sum f(z \cos \alpha \pm y \sin \alpha)^2 \\ &= \sum fz^2 \cos^2 \alpha \pm 2zyf \sin \alpha \cos \alpha + fy^2 \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha \sum fz^2 + \sin^2 \alpha \sum fy^2 \end{aligned}$$

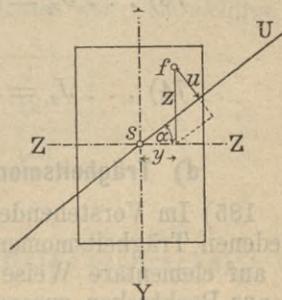
$$71) \dots J_u = \cos^2 \alpha J_z + \sin^2 \alpha J_y$$

Vergleicht man die Werte von  $J_z$ ,  $J_y$  und  $J_u$  miteinander, so ergibt sich, dass  $J_z$  den grössten,  $J_y$  den kleinsten,  $J_u$  aber einen zwischen  $J_z$  und  $J_y$  liegenden Wert darstellt.

Figur 157.



Figur 158.



Die beiden Achsen  $Z$  und  $Y$  heissen die Hauptschwerpunktsachsen und die darauf bezogenen Trägheitsmomente die Hauptträgheitsmomente des Rechtecks. Allgemein kann man sagen:

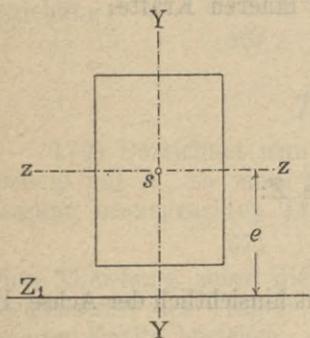
„Zu jedem Querschnitt gehören zwei Hauptschwerpunktsachsen, für welche die Trägheitsmomente den grössten bzw. kleinsten Wert besitzen, sie heissen die Hauptträgheitsmomente des Querschnittes; für jede weitere den Schwerpunkt enthaltende Achse besitzt das Trägheitsmoment einen Wert, der zwischen den Werten der Hauptträgheitsmomente liegt.“

### c) Trägheitsmoment bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsachse parallele Achse.

183) Ist  $Z_1$ , siehe Figur 159, eine etwa zur Schwerpunktsachse  $Z$  parallele Achse im Abstände  $e$  von  $Z$ , so ist das auf  $Z_1$  bezogene Trägheitsmoment  $J_{z_1}$  ausgedrückt durch:

$$\sum f(z \pm e)^2$$

Figur 159.



Nun ist aber:

$$\begin{aligned} \sum f(z \pm e)^2 &= \sum f z^2 \pm 2e \sum f z + \sum f e^2 \\ &= J_z + 0 + e^2 F \end{aligned}$$

d. h. es ist:

$$72) \dots J_{z_1} = J_z + e^2 F$$

„Das Trägheitsmoment bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsachse parallele Achse ist gleich dem Trägheitsmoment des Querschnittes bezogen auf die genannte Schwerpunktsachse plus dem Produkte aus dem Flächeninhalt des Querschnittes und dem Quadrate der Entfernung beider Achsen.“

184) Fällt die Achse  $Z_1$  mit einer Seite des Rechtecks zusammen, so ist  $e$  entweder gleich  $\frac{h}{2}$  oder gleich  $\frac{b}{2}$  und man erhält für das Trägheitsmoment eines Rechtecks, bezogen auf eine mit einer Rechtecksseite zusammenfallende Achse, die Ausdrücke:

$$73) \dots J_{z_1} = J_z + \frac{h^2}{4} F = \frac{1}{12} b h^3 + \frac{h^2}{4} b h = \frac{1}{3} b h^3$$

und

$$74) \dots J_{y_1} = J_y + \frac{b^2}{4} F = \frac{1}{12} h b^3 + \frac{b^2}{4} h b = \frac{1}{3} h b^3$$

### d) Trägheitsmoment eines beliebig geformten Querschnittes.

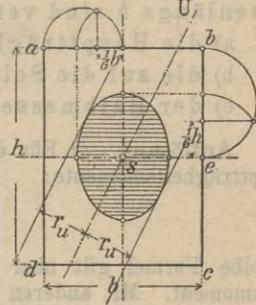
185) Im Vorstehenden wurden für das Rechteck die Formeln für die verschiedenen Trägheitsmomente, von denen später noch Gebrauch gemacht werden soll, auf elementare Weise entwickelt. In ähnlicher Weise liessen sich nun für alle aus Rechtecken zusammengesetzte Querschnittsformen die Trägheitsmomente ableiten. Ist der Querschnitt nicht in Rechtecke zerlegbar oder von krummen Linien begrenzt, so ist im allgemeinen eine elementare Ableitung der Formeln für die Trägheitsmomente nicht mehr möglich; doch gelten die für das Rechteck ermittelten Beziehungen zwischen den auf verschiedene Achsen bezogenen

Trägheitsmomenten auch für alle übrigen Querschnitte. Die Werte für die auf die Hauptschwerpunktsachsen bezogenen Trägheitsmomente für eine Reihe von Querschnitten finden sich in der Tabelle, siehe Anhang, aufgeführt.

### e) Trägheitshalbmesser, Trägheitsellipse, Centralellipse.

186) Ist  $J_z$  das Trägheitsmoment des Rechtecks, siehe Figur 160, mit dem Flächeninhalt  $F$ , so kann man eine Grösse  $r$  so bestimmen, dass  $r^2 F = J_z$  ist; dreht man um den Schwerpunkt  $s$  der Fig. 160 eine gerade Linie  $U$ , und bestimmt für jede ihrer Lagen das hierzu gehörige Trägheitsmoment, hierauf aus der Gleichung  $r^2 F = J$  die zugehörige Grösse  $r$  und zeichnet in dem so bestimmten Abstände  $r$  Parallele zu der in Rede stehenden Achse  $U$ , so umhüllen alle diese Parallelen eine Ellipse, welche die Trägheitsellipse, bezw. Centralellipse des Rechtecks heisst. Die Grössen  $r$  heissen die zu den bezüglichen Achsen gehörigen Trägheitshalbmesser. Die Achsen der Centralellipse fallen mit den Hauptschwerpunktsachsen des Querschnittes zusammen und die zu den letzteren gehörigen Trägheitshalbmesser liefern die Scheitel der Centralellipse.

Figur 160.



Für das Rechteck ist nach No. 181):

$$J_z = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} h^2 F$$

Zerlegt man nun den Ausdruck  $\frac{1}{12} h^2$  in zwei Faktoren, z. B.  $\frac{1}{2} h$  und  $\frac{1}{6} h$ , so erhält man  $r$  als mittlere geometrische Proportionale aus  $\frac{1}{2} h$  und  $\frac{1}{6} h$ , siehe Figur 160. In gleicher Weise ergibt sich auch der Trägheitshalbmesser für die Achse  $Y$ . Hieraus finden sich aber, wie die Figur 160 zeigt, die Achsen der Centralellipse.

Ist diese gezeichnet, so bestimmt sich für irgend eine durch  $s$  gehende Achse  $U$  das zugehörige Trägheitsmoment  $J_u$  dadurch, dass man parallel zu  $U$  an die Centralellipse eine Tangente zieht und deren Abstand  $r_u$  von  $U$  aus der Figur entnimmt; das gesuchte Trägheitsmoment ist dann  $r_u^2 F$ .

**Anmerkung 34.** Durch Rechnung findet man die Halbachsen der Centralellipse für einen rechtwinkligen Querschnitt wie folgt. Es ist:

$$75) \dots r_z = \sqrt{\frac{1}{12} h^2} \text{ und } r_y = \sqrt{\frac{1}{12} b^2}$$

$$76) \dots r_z = \frac{h}{6} \sqrt{3} \text{ und } r_y = \frac{b}{6} \sqrt{3}$$

### f) Übungsaufgaben.

187) **Aufgabe 82.** Für einen rechteckigen Balkenquerschnitt von 18/24 cm sind zu ermitteln:

- die beiden Hauptträgheitsmomente,
- das auf eine unter  $45^\circ$  gegen die Horizontale geneigte Schwerpunktsachse bezogene Trägheitsmoment,
- die beiden auf die Rechtecksseiten bezogenen Trägheitsmomente,
- die Längen der Halbachsen der Centralellipse?

**Auflösung.** Es ist:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left\{ \begin{aligned} J_z &= \frac{1}{12} \cdot 18 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 20736 \\ J_y &= \frac{1}{12} \cdot 24 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 18 = 11664 \end{aligned} \right. & \text{c) } \left\{ \begin{aligned} J_{z_1} &= \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 82944 \\ J_{y_1} &= \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 18 = 46656 \end{aligned} \right. \\ \text{b) } J_u &= \cos^2 45^\circ J_z + \sin^2 45^\circ J_y \\ &= 10306,8 + 5832,1 = 16139 & \text{d) } \left\{ \begin{aligned} r_z &= 4 \sqrt{3} = 6,9284 \text{ cm} \\ r_y &= 3 \sqrt{3} = 5,1963 \text{ cm} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

188) **Aufgabe 83.** Für einen quadratischen Querschnitt von der Seitenlänge  $b$  sind verlangt:

- die Hauptträgheitsmomente,
- die auf die Seiten bezogenen Trägheitsmomente,
- der Halbmesser des Centralkreises.

**Auflösung.** a) Für das Quadrat ist  $b = h$ , daher heisst die Formel für die beiden Hauptträgheitsmomente:

$$J_z = J_y = \frac{1}{12} b^4$$

dieselbe Formel gilt aber auch für jedes auf eine Schwerpunktsachse bezogene Trägheitsmoment. Mit anderen Worten: Die sämtlichen auf Schwerpunktsachsen bezogenen Trägheitsmomente sind einander gleich.

- Das auf eine Seite bezogene Trägheitsmoment ist  $\frac{1}{3} b^4$
- Die Centralellipse geht in einen Kreis über mit einem Halbmesser:

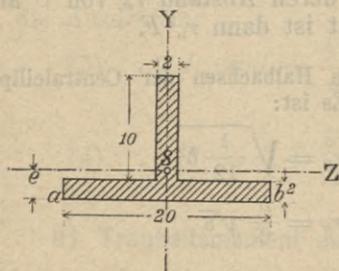
$$r = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot \frac{b^4}{b^2}} = \sqrt{\frac{1}{12} b^2} = \frac{1}{6} b \sqrt{3}$$

189) **Aufgabe 84.** Für den in Figur 161 gezeichneten  $\perp$ förmigen Querschnitt sind die beiden Hauptträgheitsmomente, sowie das auf die Achse  $ab$  bezogene Trägheitsmoment zu berechnen.

**Auflösung.** Zunächst ist die Entfernung  $e$  des Schwerpunktes von der Achse  $ab$  zu berechnen; für diese Entfernung erhält man:

$$e = \frac{20 \cdot 2 \cdot 1 + 10 \cdot 2 \cdot 7}{20 \cdot 2 + 10 \cdot 2} = \frac{180}{60} = 3$$

Figur 161.



Das auf die Achse  $ab$  bezogene Trägheitsmoment berechnet sich nun aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 2^3 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 12^3 - \frac{1}{3} 2^4 \\ &= 53,33 + 1152 - 5,33 = \text{rund } 1210 \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} J_z &= J - 3^2 F = 1210 - 3^2 \cdot (20 \cdot 2 + 10 \cdot 2) \\ &= 1210 - 540 = 670 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} J_y &= \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 20^3 + \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 2^3 = 1333,33 + 6,666 \\ &= 1340 \end{aligned}$$

Für den vorliegenden  $\perp$ förmigen Querschnitt ist also das auf die Achse  $Z$  bezogene Trägheitsmoment das grösste, das auf die  $Y$ -Achse bezogene aber das kleinste.

190) **Aufgabe 85.** Für den in Figur 147 gezeichneten  $\perp$ förmigen Querschnitt sind die Hauptträgheitsmomente zu berechnen.

**Auflösung.** Es ist:

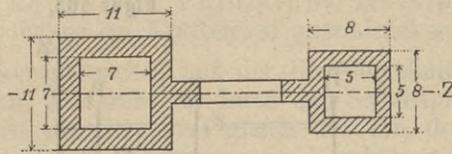
$$\begin{aligned} J_z = J_y &= \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 1,5^3 + \frac{1}{12} \cdot 1,5 \cdot 15^3 - \frac{1}{12} \cdot 1,5^4 \\ &= 4,218 + 421,8 - 0,4218 \\ &= 425,5962 \end{aligned}$$

191) **Aufgabe 86.** Für den in Fig. 162 gezeichneten Querschnitt ist das auf die Schwerpunktsachse  $Z$  bezogene Trägheitsmoment zu berechnen.

**Auflösung.** Unter Vernachlässigung der Mittelrippe ist das Trägheitsmoment des Querschnittes:

$$J_z = \frac{1}{12} (11^4 - 7^4 + 8^4 - 5^4) = 1309$$

Figur 162.



### g) Widerstandsmoment des Rechtecks.

192) Das Widerstandsmoment eines Querschnittes ist verschieden gross und abhängig von der Lage der Neutralachse. Geht die letztere durch den Schwerpunkt und fällt mit einer der beiden Hauptschwerpunktsachsen zusammen, so ergeben sich für das Widerstandsmoment des Rechtecks die folgenden Werte:

Fällt die neutrale Achse mit der  $Z$ -Achse zusammen, so ist:

$$W = \frac{J_z}{a} = \frac{b h^3}{12 \frac{h}{2}} = \frac{1}{6} b h^2$$

Für die  $Y$ -Achse als neutrale Achse erhält man:

$$W = \frac{J_y}{a} = \frac{h b^3}{12 \frac{b}{2}} = \frac{1}{6} h b^2$$

Der erstere Wert ist der grösste, der letztere der kleinste von allen auf Schwerpunktsachsen bezogenen Widerstandsmomenten.

Für die in der Technik wichtigsten Querschnittsformen finden sich die Formeln für die Widerstandsmomente in der Tabelle, siehe Anhang, aufgeführt.

## 10) Trägheitsmoment einer Kraft bezw. eines Systems paralleler Kräfte.

### a) Begriff des Trägheitsmomentes einer Kraft bezw. eines Kräftesystems.

193) Bildet man das Produkt aus einer Kraft und dem Quadrate ihrer Entfernung von einer zur Richtungslinie der Kraft parallelen Achse, so kann man dieses Produkt als das Trägheitsmoment der Kraft bezüglich der gewählten Achse bezeichnen. Für ein System paralleler Kräfte ist das zugehörige Trägheitsmoment gleich der algebraischen Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Kräfte.

Für das in der Figur 163 dargestellte Kräftesystem ist also beispielsweise das Trägheitsmoment der Kraft  $P_1$  bezüglich der Achse  $Z$  ausgedrückt durch das Produkt  $P_1 z_1^2$ , das Trägheitsmoment des ganzen Kräftesystems aber angedeutet durch die Beziehung:

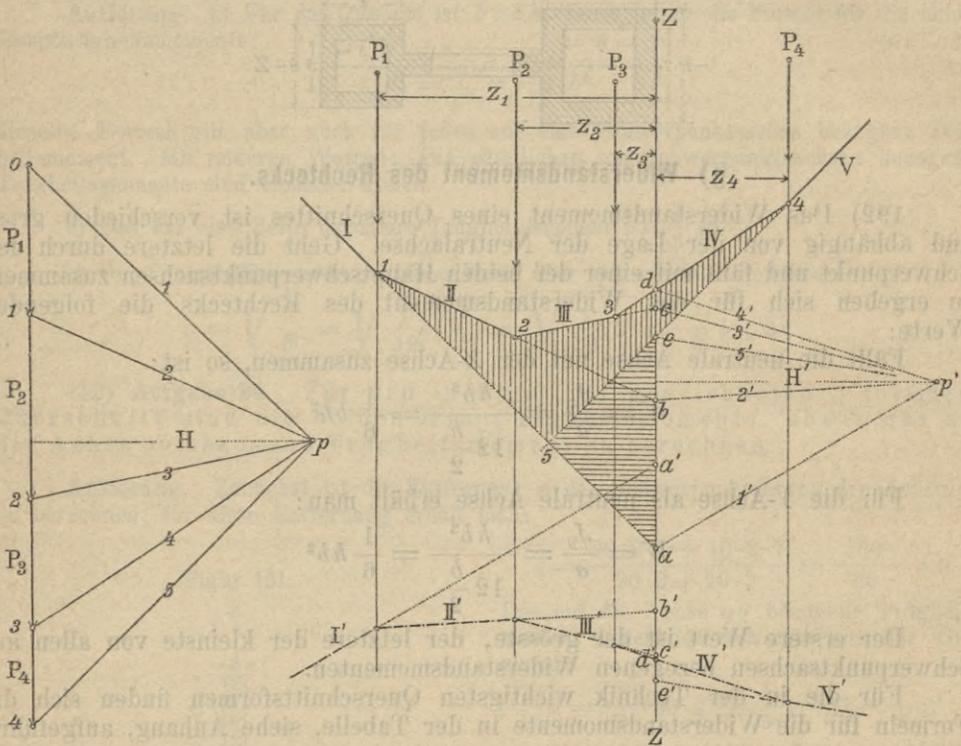
$$77) \dots J = \sum Pz^2$$

**b) Graphische Ermittlung des Trägheitsmomentes einer Kraft bezw. eines Kräftesystems.**

194) Die Ermittlung des Trägheitsmomentes einer Kraft bezw. eines Kräftesystems kann auf graphischem Wege in sehr einfacher Weise erfolgen. Von den verschiedenen Konstruktionsmethoden sollen hier nur zwei, und zwar die für den Bautechniker zweckmässigsten Verfahren mitgeteilt werden.

Figur 164.

Figur 163.



**Erste Konstruktionsmethode.**

195) Konstruiert man zu den gegebenen Kräften das Kräftepolygon 0.1.2.3.4, s. Figur 164, sowie ein Seilpolygon I-II-III-IV-V, s. Figur 163, so bilden die Abschnitte  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$ ,  $\overline{cd}$ ,  $\overline{de}$  die auf die Poldistanz reduzierten statischen Momente der einzelnen Kräfte hinsichtlich der Achse  $Z$ , d. h. es ist:

$$78) \dots \begin{cases} H \cdot \overline{ab} = P_1 z_1 \\ H \cdot \overline{bc} = P_2 z_2 \\ H \cdot \overline{cd} = P_3 z_3 \\ H \cdot \overline{de} = P_4 z_4 \end{cases} \quad \text{daher} \quad \begin{cases} H \cdot \overline{ab} \cdot z_1 = P_1 z_1^2 \\ H \cdot \overline{bc} \cdot z_2 = P_2 z_2^2 \\ H \cdot \overline{cd} \cdot z_3 = P_3 z_3^2 \\ H \cdot \overline{de} \cdot z_4 = P_4 z_4^2 \end{cases}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 78) stellen aber die Trägheitsmomente der einzelnen Kräfte bezüglich der Achse  $Z$  dar, folglich sind auch die linken Seiten gleich diesen Trägheitsmomenten. Nun bezeichnen die Produkte  $\overline{ab} \cdot z_1$ ,  $\overline{bc} \cdot z_2$  u. s. w. die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke  $ab1$ ,  $bc2$  u. s. w.; die algebraische Summe dieser Dreiecke ist daher die in der Figur 163 durch Schraffur bezeichnete Fläche; ist ihr Inhalt gleich  $F$ , so hat man:

$$2H \cdot F = P_1 z_1^2 + P_2 z_2^2 + P_3 z_3^2 + P_4 z_4^2 = \sum P z^2$$

oder:

$$79) \dots 2H \cdot F = J_z$$

„Man erhält also das Trägheitsmoment eines Systems paralleler Kräfte, wenn man die von dem Seilpolygon sowie dessen äussersten Seiten und der Momentenachse eingeschlossene Fläche  $F$  mit der doppelten Poldistanz multipliziert.“

Dabei ist die Poldistanz im Kräftemass auszudrücken.

196) Fällt die Momentenachse mit der Richtungslinie der Resultante des Kräftesystems zusammen, d. h. geht sie durch den Schnittpunkt 5 der äussersten Seilpolygonseiten, so ist die Fläche  $F$  gleich der von dem Seilpolygon eingeschlossenen Fläche und das Trägheitsmoment  $J_z$  erhält seinen kleinsten Wert; bei einer parallelen Verschiebung der Momentenachse wächst das Trägheitsmoment  $J_z$  um die Grösse des Produktes aus dem Flächeninhalte  $F_1$ , des Dreiecks  $ae5$  und der doppelten Poldistanz  $H$ , also um die Grösse  $2H \cdot F_1$ .

### Zweite Konstruktionsmethode.

197) Betrachtet man die Abschnitte  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$ ,  $\overline{cd}$  und  $\overline{de}$  auf der Momentenachse  $Z$  als Masse für die Kräfte  $P_1'$  bis  $P_4'$ , welche in den Richtungslinien der Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$  in derselben Reihenfolge wie diese wirken, so ist durch den Linienzug  $abcde$  das Kräftepolygon dieser Kräfte dargestellt. Zeichnet man nun zu diesen Kräften mittels eines beliebig gewählten Poles  $p'$  ein Seilpolygon I', II', III', IV', V' und bestimmt die Schnittpunkte der Seiten dieses Seilpolygons mit der Momentenachse  $Z$ , so erhält man die statischen Momente der Kräfte  $P_1'$  bis  $P_4'$  ausgedrückt durch:

$$\overline{ab} \cdot z_1 = \overline{a'b'} \cdot H'$$

$$\overline{bc} \cdot z_2 = \overline{b'c'} \cdot H'$$

$$\overline{cd} \cdot z_3 = \overline{c'd'} \cdot H'$$

$$\overline{de} \cdot z_4 = \overline{d'e'} \cdot H'$$

Berücksichtigt man nun, dass:

$$\overline{ab} = \frac{P_1 z_1}{H} \quad \overline{bc} = \frac{P_2 z_2}{H} \quad \overline{cd} = \frac{P_3 z_3}{H} \quad \text{und} \quad \overline{de} = \frac{P_4 z_4}{H}$$

ist, so erhält man nach Einsetzung dieser Werte in die obigen Gleichungen die folgenden:

$$P_1 z_1^2 = \overline{a'b'} \cdot H \cdot H'$$

$$P_2 z_2^2 = \overline{b'c'} \cdot H \cdot H'$$

$$P_3 z_3^2 = \overline{c'd'} \cdot H \cdot H'$$

$$P_4 z_4^2 = \overline{d'e'} \cdot H \cdot H'$$

oder:

$$80) \dots \sum P z^2 = J_z = H \cdot H' (\overline{a'b'} + \overline{b'c'} + \overline{c'd'} + \overline{d'e'}) = H \cdot H' \cdot \overline{a'e'}$$

„Man erhält das Trägheitsmoment eines Kräftesystems, wenn man den von den äussersten Seiten des zweiten Seilpolygons auf der Momentenachse gebildeten Abschnitt mit dem Produkt der beiden Poldistanzen multipliziert.“

Dabei sind die Poldistanzen im Kräfte-, der Abschnitt  $\overline{a'e'}$  im Längensmass auszudrücken.

## 11) Graphische Ermittlung des Trägheitsmomentes ebener Flächen.

### a) Allgemeine Bemerkungen.

198) Auf Grund des Vorstehenden lassen sich nun auch die Trägheitsmomente ebener Flächen durch Zeichnung ermitteln. Man teilt zu diesem Zweck die Fläche in sehr schmale Streifen parallel zur Momentenachse und denkt sich in den Schwerpunkten dieser Streifen Kräfte wirkend, parallel zur Momentenachse und der Grösse nach proportional den Masszahlen der Flächeninhalte der genannten Streifen. Das Trägheitsmoment des so gebildeten Kräftesystems ist gleich dem Trägheitsmoment der in Rede stehenden Fläche.

### b) Übungsaufgaben.

199) **Aufgabe 87.** Es ist das auf die  $Z$ -Achse bezogene Trägheitsmoment des in Figur 165 dargestellten Rechtecks durch Zeichnung zu ermitteln:  
 $b = 6, \quad h = 10$

**Auflösung.** Man zerlegt das Rechteck parallel zur  $Z$ -Achse in Streifen etwa von der Breite  $= 1$ , dann ist der Inhalt eines solchen Streifens gleich 6. Trägt man nun in Figur 166 die Strecken  $\overline{01}, \overline{12}$  u. s. w. gleich  $\frac{1}{10}$  von 6 also  $= 0,6$  an, wählt den Pol  $p$  zweckmässig auf der Mittelsenkrechten von  $0 \cdot 10$  und so, dass  $H = 30$  ist, und konstruiert das Seilpolygon, siehe Figur 167, so bildet dasselbe ein einer Parabel einbeschriebenes Polygon, deren Achse mit  $Z$  zusammenfällt und deren Scheitel  $k$  der Mittelpunkt von  $\overline{ig}$  ist. Der Inhalt der Fläche  $ekfg$  ist nun:

$$\frac{1}{3} \cdot e f i k = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 2,5 = \frac{25}{3}$$

Da die Poldistanz  $H$  zufolge der Annahme gleich 30 ist, so erhält man für das Trägheitsmoment den Wert:

$$J_z = \frac{25}{3} \cdot 2 \cdot 30 = 500$$

Bekanntlich ist:

$$J_z = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 500$$

Wollte man das Trägheitsmoment auf die Achse  $ad$  beziehen, so erhielte man für dasselbe den Wert:

$$J_{z_1} = J_z + F_1 \cdot 2H$$

Nun ist aber zufolge der Anordnung des Poles das Dreieck  $ehg$  gleichschenkelig rechtwinklig, also  $\overline{eh} = 10$ , daher:

$$F_1 = \frac{10^2}{4} = 25$$

folglich:

$$F_1 \cdot 2H = 25 \cdot 2 \cdot 30 = 1500$$

dennach:

$$J_{z_1} = 500 + 1500 = 2000$$

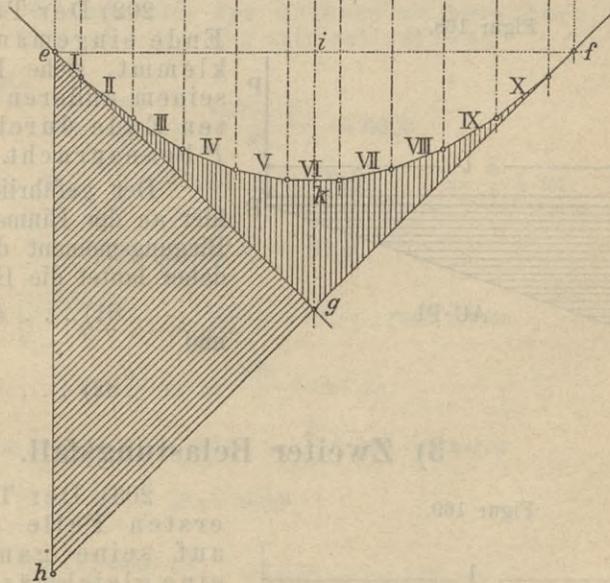
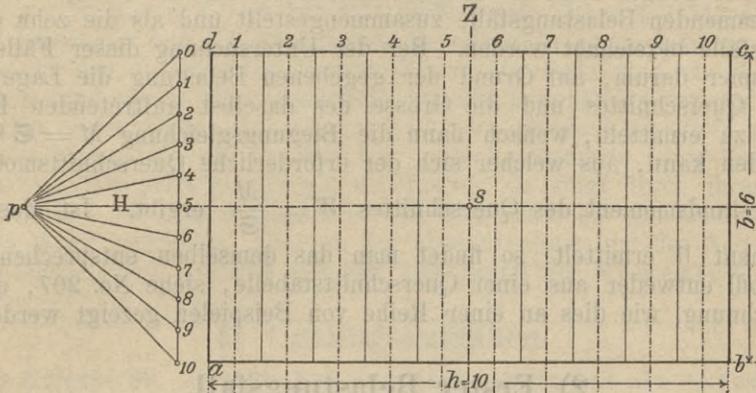
Durch Rechnung findet man:

$$J_{z_1} = \frac{1}{3} b h^3 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 1000 = 2000$$

Die durch Rechnung und Konstruktion ermittelten Resultate stimmen also überein.

Figur 166.

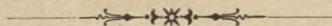
Figur 165.



Figur 167.

200) **Aufgabe 88.** Man ermittle graphisch nach der in No. 195 besprochenen Konstruktionsmethode das Trägheitsmoment:

- einer Kreisfläche,
- einer elliptischen Fläche,
- eines Kreisringes,
- einer regelmässigen Achtecksfläche,
- einer unregelmässigen Fläche.



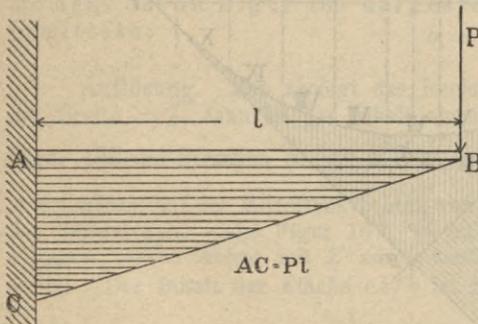
## F. Die zehn einfachen Belastungsfälle.

### 1) Allgemeine Bemerkungen.

201) Im folgenden sind von den vielen Arten, in welchen ein auf Biegung beanspruchter Träger belastet werden kann, zehn der am häufigsten im Hochbau vorkommenden Belastungsfälle zusammengestellt und als die zehn einfachen Belastungsfälle bezeichnet worden. Bei der Untersuchung dieser Fälle handelt es sich immer darum, auf Grund der gegebenen Belastung die Lage des gefährlichen Querschnittes und die Grösse des daselbst auftretenden Biegemomentes zu ermitteln, wonach dann die Biegunsgleichung  $M = \mathcal{E}W$  aufgestellt werden kann, aus welcher sich der erforderliche Querschnittsmodul, d. h. das Widerstandsmoment des Querschnittes  $W = \frac{M}{\mathcal{E}}$  ergibt. Ist das Widerstandsmoment  $W$  ermittelt, so findet man das demselben entsprechende Querschnittsprofil entweder aus einer Querschnittstabelle, siehe No. 207, oder aber durch Rechnung, wie dies an einer Reihe von Beispielen gezeigt werden soll.

### 2) Erster Belastungsfall.

Figur 168.



202) Der Träger ist am einen Ende eingemauert, bezw. eingeklemmt, siehe Figur 168, und an seinem anderen nicht unterstützten Ende durch eine Einzellast  $P$  beansprucht.

Der gefährliche Querschnitt liegt hier an der Einmauerungsstelle  $A$ , das Biegemoment daselbst ist  $M = Pl$ , daher lautet die Biegunsgleichung:

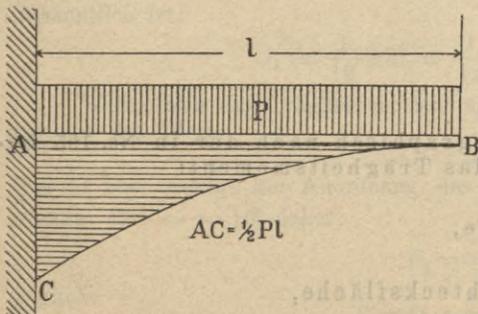
$$81) \dots Pl = \mathcal{E}W$$

und

$$82) \dots W = \frac{Pl}{\mathcal{E}}$$

### 3) Zweiter Belastungsfall.

Figur 169.



203) Der Träger ist wie im ersten Falle unterstützt aber auf seine ganze Länge durch eine gleichmäßig verteilte Last  $P$  beansprucht, siehe Figur 169.

Auch hier ist der gefährliche Querschnitt an der Einmauerungsstelle  $A$ . Denkt man sich nun für einen Augenblick die ganze Last  $P$  zu einer Resultante in der Trägermitte vereinigt, so ist für die Stelle  $A$  das Biegemoment:

$$M = \frac{Pl}{2}$$

daher lautet die Biegungsgleichung:

$$83) \dots \frac{Pl}{2} = \mathfrak{E} W$$

und

$$84) \dots W = \frac{Pl}{2\mathfrak{E}}$$

204) Denkt man sich durch den Träger von  $B$  nach  $A$  in Entfernungen  $x, 2x, 3x$  u. s. w. von  $B$  Vertikalschnitte geführt, die hierzu gehörigen Biegemomente berechnet und die Masszahlen derselben in einem beliebig gewählten Massstabe in den betreffenden Vertikalebene als Senkrechte zur Trägerachse aufgetragen, und die so sich ergebenden Punkte miteinander verbunden, so erhält man im ersten Falle, siehe Figur 168, die gerade Linie  $BC$ , im zweiten Falle, siehe Figur 169, die Parabel  $BC$ . Die konstruierte Linie heisst die zu dem Belastungsfall gehörige Momentenlinie; sie zeigt durch ihren Verlauf, in welcher Weise die Biegemomente von dem einen bis zum anderen Trägerende ihren Wert verändern. Die von der Momentenlinie und der Achse  $AB$  begrenzte Fläche  $ABC$ , s. Figur 168 und 169, heisst die Momentenfläche.

#### 4) Übungsaufgaben.

205) **Aufgabe 89.** Ein Balken aus Eichenholz hat als Aufzugskrahn zu dienen. Er ist 1,20 m lang und hat eine Maximallast  $P = 4000$  kg zu tragen. Es ist der Querschnitt des Balkens zu berechnen, für den Fall, dass a)  $b:h = 5:7$ , b)  $b:h = 2:3$  sein soll;  $\mathfrak{E} = 80$ .

**Auflösung.** Es ist:

$$W = \frac{Pl}{\mathfrak{E}} = \frac{4000 \cdot 120}{80} = 6000$$

Nun ist für das Rechteck  $W = \frac{1}{6} b h^2$  oder da im Falle a)  $b = \frac{5}{7} h$  ist:

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{7} h^3 = 6000$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6000 \cdot 42}{5}} = \sqrt[3]{50400} = 37, \dots \text{ rund } 38 \text{ cm}$$

daher ist:

$$b = \frac{5}{7} \cdot 38 = \frac{190}{7} = 27 \text{ cm}$$

Im Falle b) hat man  $b:h = 2:3$ , also  $b = \frac{2}{3} h$  und demnach:

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} h^3 = 6000$$

oder:

$$h = \sqrt[3]{\frac{6000 \cdot 18}{2}} = \sqrt[3]{54000} = \text{ rund } 39 \text{ cm}$$

$$b = \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} \cdot 38 = 26 \text{ m}$$

206) **Aufgabe 90.** Welches Normalprofil muss der in Aufgabe 89 genannte Träger erhalten, wenn er aus Walzeisen hergestellt werden und I-Form erhalten soll?

**Auflösung.** In diesem Falle ist:

$$W = \frac{4000 \cdot 120}{750} = 640$$

Nach der Profiltabelle entspricht diesem Werte ein *N. P.* No. 30 mit einem  $W = 659$ .

207) Zu den für die Eisenzimmerung verwendeten Eisenformen werden von den deutschen Hüttenwerken ganz bestimmte Profile hergestellt, die unter dem Namen Normalprofile bekannt sind.

In den Profiltabellen im Anhang sind für die am häufigsten im Hochbau benützten Formen die Normalprofile zugleich mit den zugehörigen Ausmassen, Querschnittsgrössen, dem Gewicht per laufenden Meter nebst den in Betracht kommenden Trägheits- und Widerstandsmomenten zusammengestellt.

Die Dimensionen-Berechnung eines Balkens wird in der Folge so vorgenommen werden, dass man aus der Biegungsgleichung das erforderliche  $W$  berechnet und dann in der entsprechenden Tabelle nachsieht, welcher Wert von  $W$  dem berechneten am nächsten kommt. Dem auf diese Weise aus der Tabelle entnommenen, dem berechneten zunächst kommenden, aber in der Regel grösseren Widerstandsmoment entspricht dann ein bestimmtes Normalprofil, das für den Balkenquerschnitt zu verwenden ist.

208) **Aufgabe 91.** Für einen Aufzug ist ein Balken aus Eichenholz von  $27\frac{3}{36}$  cm Querschnitt und 1,10 m freier Länge verwendet. Dieser Balken soll durch einen eisernen I-Träger ersetzt werden; welches Profil ist zu wählen?

**Auflösung.** Ist  $\mathcal{S}_1 = 80$  die zulässige Beanspruchung des Holzes und  $W_1$  das Widerstandsmoment des rechteckigen Querschnittes,  $\mathcal{S}_2$  aber die Beanspruchung des I-förmigen Querschnittes, so lautet für den Belastungsfall die Biegungsgleichung:

$$M = \mathcal{S}_1 W_1 = \mathcal{S}_2 W_2$$

daher ist:

$$85) \dots \mathcal{S}_1 : \mathcal{S}_2 = W_2 : W_1$$

$$W_2 = \frac{\mathcal{S}_1 W_1}{\mathcal{S}_2} = \frac{80}{750} \cdot \frac{1}{6} \cdot 27 \cdot 36 \cdot 36 = 622,08 = 622$$

Diesem Werte entspricht laut Profiltabelle ein *N. P.* No. 30 mit einem Wert = 659.

209) Aus der Gleichung 85 geht hervor, dass bei der Auswechslung eines Trägers, dessen Querschnitt bekannt und ausreichend befunden ist, zur Bestimmung des Profiles des neuen Trägers, die Berechnung der Trägerbelastung gar nicht erforderlich ist, denn es verhalten sich die zulässigen Beanspruchungen der zur Verwendung gelangenden Träger umgekehrt wie die Widerstandsmomente der Trägerprofile.

210) **Aufgabe 92.** Ein Balkon wird durch die eisernen I-Träger I und II unterstützt; das Brüstungsmauerwerk ist 0,25 m stark aus Hohlziegeln hergestellt und wiegt per Kubikmeter 1100 kg. Die gleichmässig verteilte Belastung des Balkons soll 600 kg per Quadratmeter betragen. Es sind die Träger I und II zu berechnen.

**Auflösung.**

Belastung des Trägers I.

- |                                     |   |                           |   |        |
|-------------------------------------|---|---------------------------|---|--------|
| 1) Gewicht der Seitenbrüstung       | = | 0,25 · 1,20 · 0,80 · 1100 | = | 264 kg |
| 2) Gewicht der Balkondecke          | = | 0,75 · 1,20 · 600         | = | 540 „  |
| 3) Auflagerdruck der Vorderbrüstung | = | 0,75 · 0,25 · 0,8 · 1100  | = | 165 „  |

Belastung des Trägers II.

- |   |   |                           |   |        |
|---|---|---------------------------|---|--------|
| 1) Gewicht der Balkondecke                    | = | 1,50 · 1,20 · 600         | = | 1080 „ |
| 2) Gewicht der Vorderbrüstung in 1,50 m Länge | = | 1,50 · 0,25 · 0,80 · 1100 | = | 330 kg |

Die beiden Träger I und II sind nach dem ersten und zweiten Belastungsfall zugleich belastet, und gelten hierfür die Belastungsskizzen, siehe Figur 171 und 172.

Man erhält somit für das Widerstandsmoment  $W$  die folgenden Gleichungen:

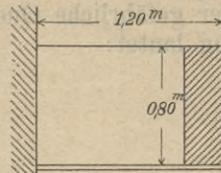
$$\begin{aligned} \text{Träger I: } W &= \frac{165 \cdot 120}{750} + \frac{804 \cdot 120}{2 \cdot 750} \\ &= 26,4 + 64,32 = 90,7, \\ &\quad \text{rund } 91. \end{aligned}$$

Dem entspricht *N. P.* No. 15 mit einem  $W = 99$

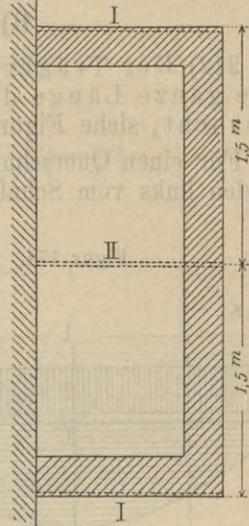
$$\begin{aligned} \text{Träger II: } W &= \frac{330 \cdot 120}{750} + \frac{1080 \cdot 120}{2 \cdot 750} \\ &= 52,8 + 86,4 = 139, \\ &\quad \text{rund } 140 \end{aligned}$$

Dem entspricht nun *N. P.* No 17 mit einem  $W = 139$

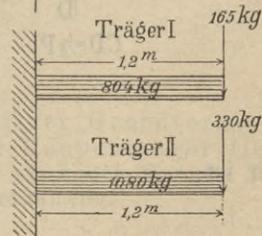
Figur 170.



Figur 171.



Figur 172.



### 5) Dritter Belastungsfall.

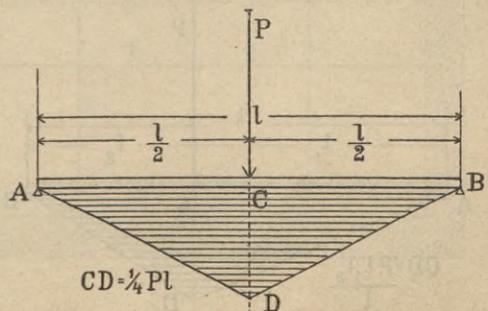
211) Der Träger liegt an beiden Enden frei auf und ist in seiner Mitte durch eine Einzelkraft  $P$  beansprucht, siehe Fig. 173.

Denkt man sich den Träger im Punkte  $C$  festgehalten und das Auflager in  $A$  durch die Auflagerreaktion  $\frac{P}{2}$  ersetzt, so ist das Biegemoment für den Punkt  $C$ :

$$M = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$$

und dies ist das grösste Biegemoment, das bei diesem Belastungsfall in irgend einem Querschnitt auftreten kann.

Figur 173.



Der gefährliche Querschnitt liegt also in der Trägermitte; die Biegunsgleichung lautet:

$$86) \dots \frac{Pl}{4} = \mathcal{E}W$$

also ist:

$$87) \dots W = \frac{Pl}{4\mathcal{E}}$$

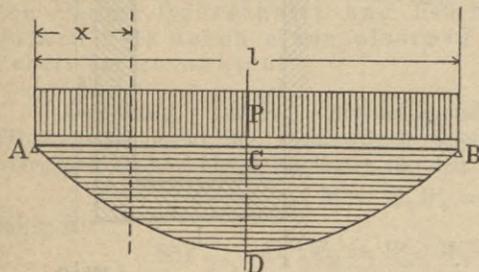
## 6) Vierter Belastungsfall.

212) Der Träger liegt an beiden Enden frei auf und ist auf seine ganze Länge durch eine gleichmässig verteilte Last  $P$  beansprucht, siehe Figur 174.

Für einen Querschnitt in der Entfernung  $x$  ist das Biegemoment, wenn man den links vom Schnitt befindlichen Trägerteil in Betracht zieht:

Figur 174.

$$M = \frac{Px}{2} = \frac{P}{l} x \frac{x}{2}$$



$$CD = \frac{1}{8}Pl$$

Dieser Ausdruck wächst mit der Zunahme von  $x$  und erhält seinen grössten

Wert für  $x = \frac{l}{2}$ , nämlich:

$$\begin{aligned} M &= \frac{Pl}{2 \cdot 2} = \frac{Pl}{2l} \cdot \frac{l}{4} \\ &= \frac{1}{8} Pl \end{aligned}$$

Der gefährliche Querschnitt liegt in der Trägermitte. Für diese Stelle lautet die Biegunsgleichung:

$$88) \dots \frac{Pl}{8} = \mathcal{E}W$$

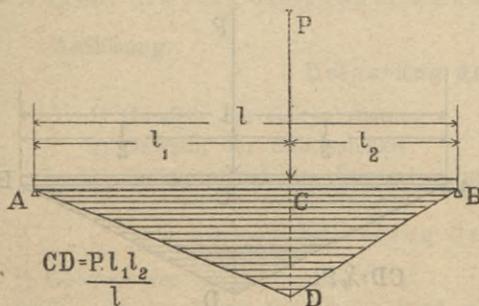
daher ist:

$$89) \dots W = \frac{Pl}{8\mathcal{E}}$$

**Anmerkung 35.** Konstruiert man in den Fällen 3 und 4 die Momentenlinien, so erhält man im dritten Falle zwei Gerade  $AD$  und  $BD$ , im vierten Falle eine Parabel, deren Achse mit der den Punkt  $C$  enthaltenden Senkrechten zur Trägerachse zusammenfällt.

## 7) Fünfter Belastungsfall.

Figur 175.



$$CD = \frac{Pl_1 l_2}{l}$$

213) Der Träger liegt an beiden Enden frei auf und ist ausserhalb seiner Mittel durch eine Einzellast  $P$  beansprucht, siehe Figur 175.

Der gefährliche Querschnitt liegt unter dem Angriffspunkte  $C$  der Last  $P$ . Die Auflagerdrücke sind:

$$A = \frac{P}{l} l_2 \quad \text{und} \quad B = \frac{P}{l} l_1$$

die Biegunsgleichung für die Stelle  $C$  lautet:

$$90) \dots \frac{Pl_1 l_2}{l} = \mathcal{E}W$$

daher ist:

$$91) \dots W = \frac{Pl_1 l_2}{l \mathcal{E}}$$

Die Momentenlinie besteht aus den beiden Geraden  $AD$  und  $DB$ .

### 8) Sechster Belastungsfall.

214) Der Träger liegt an beiden Enden frei auf und ist durch zwei gleich grosse, gleich weit von den Auflagern  $A$  und  $B$  abstehende Einzellasten  $P$  beansprucht, siehe Figur 176.

Der gefährliche Querschnitt liegt auf der ganzen Strecke  $CD$ . Die Biegleichung lautet:

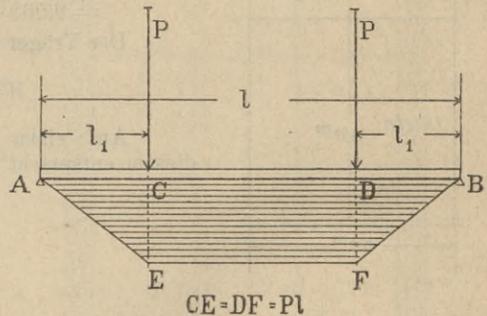
$$92) \dots Pl_1 = \mathcal{E}W$$

daher:

$$93) \dots W = \frac{Pl_1}{\mathcal{E}}$$

Die Momentenlinie besteht aus den Linien  $AE$ ,  $EF$  und  $FB$ .

Figur 176.



### 9) Übungsaufgaben.

215) **Aufgabe 93.** Ein Raum von rechteckiger Grundform, siehe Figur 177, ist mittels Kappen einzuwölben. Die Kappenträger liegen teils auf der Mauer, teils auf dem Träger II. Es sind die Träger I und II zu berechnen. Die Belastung beträgt 700 kg per Quadratmeter.

**Auflösung.** Belastung des Kappenträgers I:

$$1,5 \cdot 4 \cdot 700 = 4200 \text{ kg}$$

ebensogross ist auch die Belastung des Trägers II.

Der letztere ist nach dem dritten, der erstere nach dem vierten Falle belastet. Daher hat man für II:

$$W = \frac{1}{4} \cdot \frac{4200 \cdot 300}{750} = 420$$

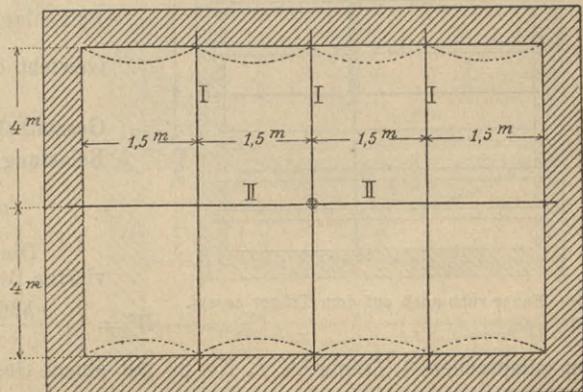
d. h. N. P. No. 26 mit einem  $W = 446$

und für I:

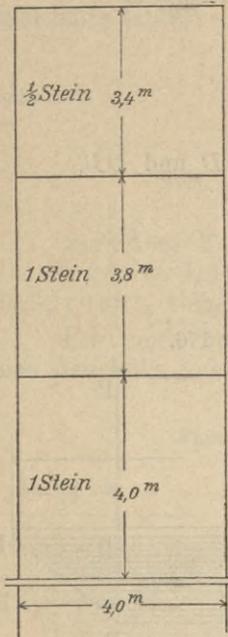
$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{4200 \cdot 400}{750} = 280$$

d. h. N. P. No. 22 mit einem  $W = 281$

Figur 177.



Figur 178.



216) **Aufgabe 94.** Eine drei Stockwerk hohe Zwischenmauer von einem bzw. einem halben Stein Stärke soll auf eine Länge von 4 m durch zwei I-Träger gestützt werden, siehe Figur 178. Es ist das Trägerprofil zu berechnen. 1 cbm Mauerwerk = 1600 kg.

**Auflösung.** Die Belastung des Trägers beträgt:

$$[4,0 \cdot 0,25 \cdot (4 + 3,8) + 4,0 \cdot 0,13 \cdot 3,4] \cdot 1600 = (7,8 + 1,768) \cdot 1600 = 9,568 \cdot 1600 = 15308,8 \text{ kg, rund } 15310 \text{ kg}$$

Der Träger ist nach dem vierten Falle belastet, daher ist:

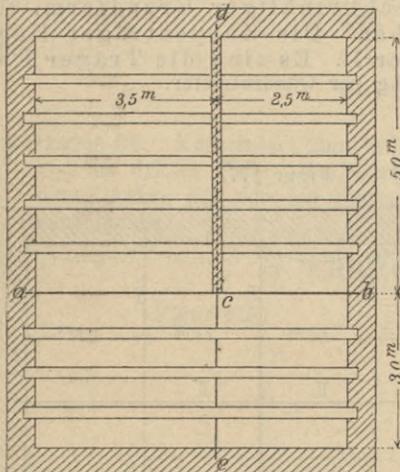
$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{15310 \cdot 400}{750} = 1020$$

Auf einen Träger trifft somit ein  $W = 510$  und diesem entspricht ein *N. P. No. 28* mit einem  $W = 547$ .

217) **Aufgabe 95.** Der Unterzug *ab* hat im Punkte *c*, siehe Figur 179, die Träger *cd* und *ce* aufzunehmen, welche einerseits die Balkenlage, andererseits eine  $\frac{1}{2}$  Stein starke 3,5 m hohe Mauer tragen.

Gewicht der Balkenlage einschliesslich Nutzlast 600 kg.

Figur 179.



Die Mauer ruht auch auf dem Träger *ce* auf.

**Auflösung.** Belastung des Trägers *cd*:

$$\text{Balkenlage} = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 600 = 9000 \text{ kg}$$

$$\text{Gewicht der Mauer} = 0,13 \cdot 5 \cdot 3,5 \cdot 1600 = 3640 \text{ kg}$$

$$\text{Gesamtbelastung des Trägers } cd = 12640 \text{ kg}$$

Belastung des Trägers *ce*:

$$\text{Balkenlage} = \frac{6 \cdot 3}{2} \cdot 600 = 5400 \text{ kg}$$

$$\text{Gewicht der Mauer} = 0,13 \cdot 3 \cdot 3,5 \cdot 1600 = 2184 \text{ kg}$$

$$\text{Gesamtbelastung des Trägers } ce = 7584 \text{ kg}$$

Belastung des Trägers

$$ab = \frac{12640 + 7584}{2} = 10112 \text{ kg}$$

Die Träger *cd* und *ce* sind nach dem vierten Belastungsfall beansprucht, daher ist:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{12640 \cdot 500}{750} = 1053$$

dem entsprechen 3 Träger *N. P. No. 26* mit einem Gesamt- $W = 1338$

$$\text{bezw. } W = \frac{1}{8} \cdot \frac{7584 \cdot 300}{750} = 379,2$$

dem entspricht *N. P. No. 26* mit einem  $W = 446$

Der Träger *ab* ist nach dem fünften Belastungsfall beansprucht, daher:

$$W = \frac{10112 \cdot 350 \cdot 250}{600 \cdot 750} = 2359$$

diesem Werte entsprechen 3 Träger No. 32 mit einem Gesamt-*W* = 2367

218) **Aufgabe 96.** Ein Raum von rechteckiger Grundform, siehe Figur 180, soll durch Kappen von 2 m Spannweite überwölbt werden; die Kappenträger I liegen auf einem Unterzuge II auf. Die Belastung beträgt 700 kg per Quadratmeter.

**Auflösung.** Die Belastung des Trägers I ist gleich dem Gewichte einer Kappe, also gleich  $2,0 \cdot 4,0 \cdot 700 = 5600$  kg.

Die Belastung des Trägers II beträgt in den Punkten *c* und *d* je 5600 kg.

Für den Träger I ist somit:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{5600 \cdot 400}{750} = 373$$

dem entspricht ein *N. P.* No. 26 mit einem

$$W = 446$$

Für den Träger II hat man:

$$W = \frac{5600 \cdot 200}{750} = 1293$$

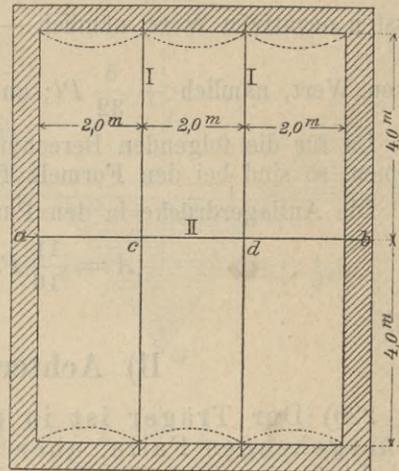
dem entspricht ein *N. P.* No. 40 mit einem

$$W = 1472$$

bezw. 2 Träger *N. P.* No. 34 mit einem

$$\text{Gesamt-}W = 1578$$

Figur 180.



### 10) Siebenter Belastungsfall.

219) Der Träger ist an einem Ende eingemauert und liegt an seinem anderen Ende frei auf; in seiner Mitte wirkt eine Einzellast *P*, siehe Figur 181.

Der gefährliche Querschnitt liegt an der Einmauerungsstelle, das Biegemoment daselbst ist:

$$\frac{3}{16} Pl$$

daher lautet die Biegleichung:

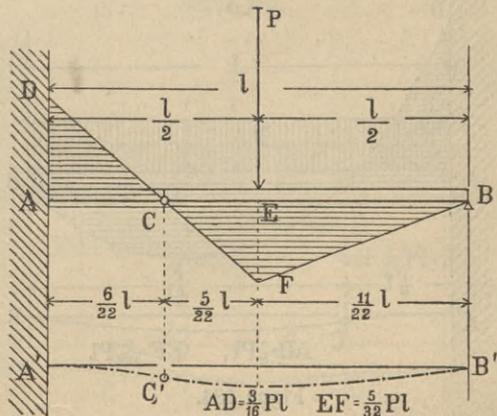
$$94) \dots \frac{3}{16} Pl = \mathcal{E} W$$

und es ist:

$$95) \dots W = \frac{3}{16} \frac{Pl}{\mathcal{E}}$$

Die Lage des gefährlichen Querschnitts sowie die Grösse des Biegemomentes lassen sich hier und bei den folgenden drei Belastungsfällen nicht mehr in elementarer Weise ableiten; es sollen daher nur die Resultate angegeben werden.

Figur 181.



Figur 182.

Durch die Einwirkung der Belastung und infolge der gewählten Unterstützung nimmt die Trägerachse, d. h. die elastische Linie die Gestalt der Figur 182 an. Sie besitzt an einer Stelle  $C'$ , die um  $\frac{6}{22}l$  von der Einmauerungsstelle absteht, einen sogenannten Wendepunkt, d. i. ein Punkt, in welchem die Krümmung der Kurve gleich Null ist und der konvex gekrümmte Teil in den konkav gekrümmten übergeht; an dieser Stelle ist der Träger spannungslos und das Biegemoment gleich Null; auf den Strecken  $A'C'$  und  $B'C'$  besitzen die Biegemomente verschiedene Vorzeichen. In Figur 181 ist die Momentenlinie dargestellt. An der Stelle  $A$  erhält das Biegemoment den grössten negativen Wert, nämlich  $-\frac{3}{16}Pl$  in der Trägermitte den grössten positiven Wert, nämlich  $+\frac{5}{32}Pl$ ; an den Stellen  $C$  und  $B$  hat es den Wert Null.

Da für die folgenden Berechnungen nur die absoluten Werte in Betracht kommen, so sind bei den Formeln für  $W$  die Vorzeichen weggelassen worden.

Die Auflagerdrücke in den Punkten  $A$  und  $B$  sind:

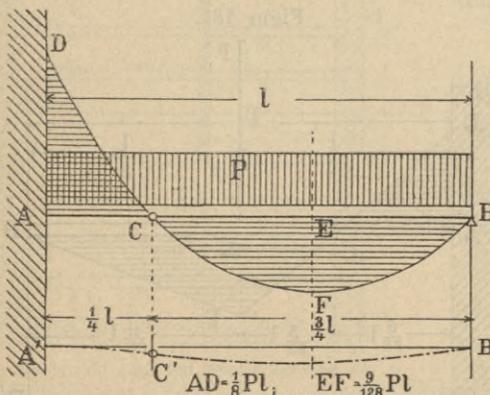
$$A = \frac{11}{16}P \text{ und } B = \frac{5}{16}P$$

## II) Achter Belastungsfall.

220) Der Träger ist in gleicher Weise unterstützt wie im vorhergehenden Falle, aber durch eine auf seine ganze Länge gleichmässig verteilte Last  $P$  beansprucht, siehe Figur 183.

Der gefährliche Querschnitt liegt wieder an der Einmauerungsstelle, das Biegemoment daselbst ist  $\frac{1}{8}Pl$ , daher lautet die Biegleichung:

Figur 183.



Figur 184.

$$96) \dots \frac{1}{8}Pl = \mathcal{E}W$$

und es ist:

$$97) \dots W = \frac{1}{8} \frac{Pl}{\mathcal{E}}$$

In einer Entfernung gleich  $\frac{1}{4}l$  von der Einmauerungsstelle besitzt die elastische Linie einen Wendepunkt, siehe Figur 184; der Träger ist an dieser Stelle spannungslos und das Biegemoment gleich Null. Auf den Strecken  $AC$  und  $CD$  besitzen die Biegemomente entgegengesetzte Vorzeichen; das grösste negative Biegemoment  $-\frac{1}{8}Pl$  tritt bei

$A$ , das grösste positive  $= +\frac{9}{128}Pl$  bei  $E$  auf, in einer Entfernung gleich

$\frac{5}{8}l$  von  $A$ . In Figur 183 ist die Momentenlinie eine Parabel, deren Achse senkrecht zur Trägerachse durch  $E$  geht, eingezeichnet.

Die Auflagerdrücke sind  $A = \frac{5}{8}P$  und  $B = \frac{3}{8}P$

### 12) Neunter Belastungsfall.

221) Der Träger ist an beiden Enden eingemauert und in seiner Mitte durch eine Einzellast  $P$  beansprucht, siehe Figur 185.

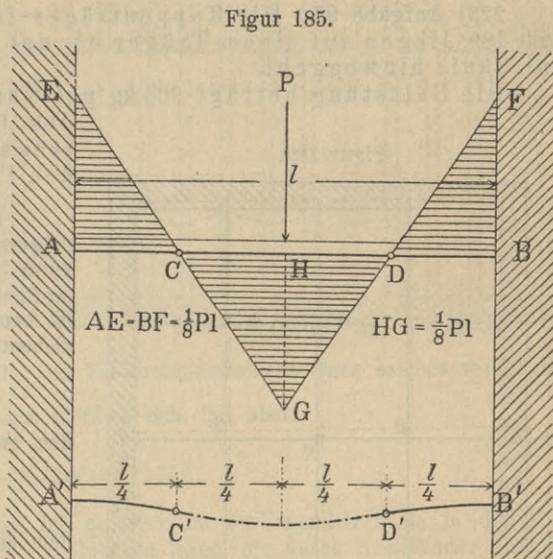
Der Träger besitzt drei gleich gefährliche Querschnitte, nämlich jene über den Einmauerungsstellen und der Trägermitte; an jeder dieser Stellen ist das Biegemoment  $\frac{1}{8}Pl$ , daher lautet die Biegleichung:

$$98) \dots \frac{1}{8}Pl = \mathcal{E}W$$

und es ist:

$$99) \dots W = \frac{1}{8}Pl$$

Die elastische Linie besitzt zwei Wendepunkte  $C'$  und  $D'$ , siehe Figur 186, welche um die Länge  $\frac{1}{4}l$  von den beiden Auflagern abstehen; in diesen Punkten ist der Träger spannungslos und das Biegemoment gleich Null.



Figur 186.

Die Momentenlinie ist in der Figur 185 eingezeichnet. Die Auflagerdrücke sind  $A = B = \frac{P}{2}$ .

### 13) Zehnter Belastungsfall.

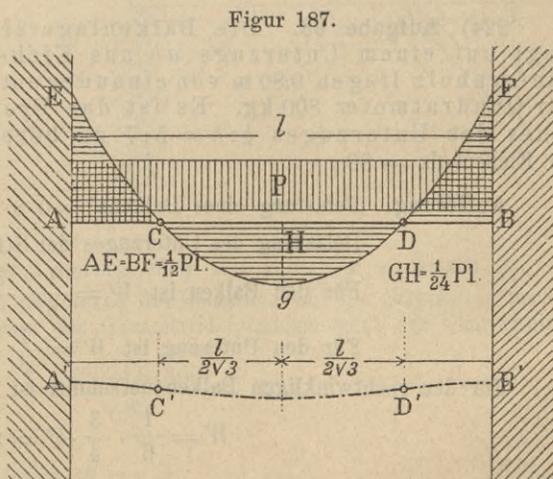
222) Der Träger ist wie im neunten Belastungsfall befestigt, aber durch eine auf seine ganze Länge gleichmässig verteilte Last  $P$  beansprucht, s. Figur 187.

Der Träger besitzt zwei gleich gefährliche Querschnitte über den beiden Auflagern, das Biegemoment daselbst ist  $\frac{1}{12}Pl$ , daher lautet die Biegleichung:

$$100) \dots \frac{1}{12}Pl = \mathcal{E}W$$

und es ist:

$$101) \dots W = \frac{1}{12} \frac{Pl}{\mathcal{E}}$$



Figur 188.

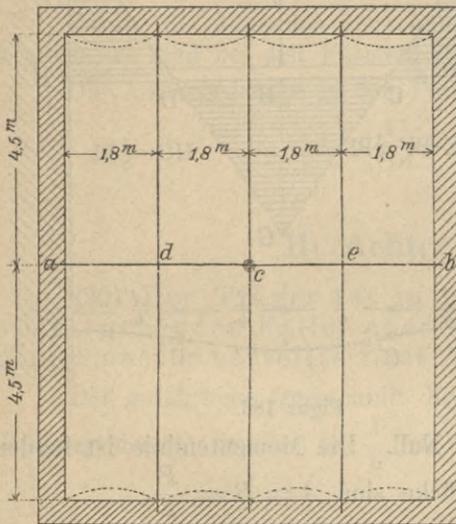
Die elastische Linie besitzt zwei Wendepunkte  $C'$  und  $D'$ , welche von der Trägermitte je um die Länge  $\frac{l}{2\sqrt{3}} = 0,288 l$  abstehen. Auf den Strecken  $AC$  bzw.  $BD$  und  $CD$  besitzen die Biegemomente entgegengesetzte Vorzeichen; das Biegemoment in der Trägermitte ist gleich  $\frac{1}{24} Pl$ .

#### 14) Übungsaufgaben.

223) **Aufgabe 97.** Die Kappenträger für eine gewölbte Decke, siehe Figur 189, liegen auf einem Träger  $ab$ , der im Punkt  $c$  ungestossen über eine Säule hinweggeht.

Die Belastung beträgt 900 kg per Quadratmeter. Es ist das Profil des Unterzuges und der Kappenträger sowie der Auflagerdruck in den Punkten  $a$ ,  $b$  und  $c$  zu berechnen.

Figur 189.



**Auflösung.** Belastung eines Kappenträgers =  $1,8 \cdot 4,5 \cdot 900 = 7290$  kg, rund 7300. Dieselbe Belastung hat der Unterzug im Punkte  $d$  aufzunehmen. Der Kappenträger ist nach dem vierten, der Unterzug nach dem siebenten Falle belastet, daher ist:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{7300 \cdot 450}{750} = 547$$

dem entspricht N. P. No. 28,

$$W = \frac{3}{16} \cdot \frac{7300 \cdot 360}{750} = 657$$

dem entspricht N. P. No. 30.

Der Druck auf die Säule  $c$  ist:

$$\frac{10}{8} \cdot 7300 = 9125 \text{ kg}$$

jener auf die Auflager:

$$a \text{ und } b = \frac{3}{8} \cdot 7300 = 2737,5 \text{ kg}$$

224) **Aufgabe 98.** Die Balkenlage eines Salzspeichers, s. Fig. 190, liegt auf einem Unterzuge  $ab$  aus Eichenholz auf. Die Balken aus Kiefernholz liegen 0,80 m voneinander entfernt. Die Belastung beträgt per Quadratmeter 800 kg. Es ist das Profil der Balken  $b:h = 3:4$  und jenes des Unterzuges  $b:h = 5:7$  zu berechnen.  $\odot$  für Kiefernholz = 60, für Eichenholz = 80.

**Auflösung.** Belastung eines Balkens =  $0,8 \cdot 4,8 \cdot 800 = 3072$  kg

Belastung des Unterzuges der Strecke  $ac = 4,8 \cdot 4,8 \cdot 800 = 19432$  kg

$$\text{Für den Balken ist } W = \frac{1}{8} \cdot \frac{3072 \cdot 480}{60} = 3072$$

$$\text{Für den Unterzug ist } W = \frac{1}{8} \cdot \frac{19432 \cdot 480}{60} = 14574$$

Für den rechtwinkligen Balkenquerschnitt ist aber:

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot h^3 = 3072$$

also:

$$h = \sqrt[3]{3072 \cdot 8} = 29 \text{ cm}$$

daher ist:

$$b = \frac{3}{4} \cdot 29 = 22 \text{ cm}$$

Für den Unterzug ist:

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdot h^3 = 14574$$

also:

$$h = \sqrt[3]{\frac{14574 \cdot 42}{5}} = \text{rund } 50 \text{ cm}$$

und dementsprechend:

$$b = \frac{5}{7} \cdot 50 = 35 \text{ cm}$$

Die Verwendung eines solch hohen Balkens ist aber nicht zweckmässig, man könnte statt dessen zwei Balken aufeinander legen und sie durch Verzahnung und Verdübelung miteinander verbinden, also einen verzahnten Balken verwenden; nimmt man die Höhe der einzelnen Balken zu 0,30 an, so ergibt sich eine Gesamthöhe von 0,60. Das Widerstandsmoment eines solchen verzahnten Balkens darf aber nur  $\frac{1}{8} b h^2$  gerechnet werden, man hat also:

$$W = \frac{1}{8} \cdot 35 \cdot 60^2 = 15750$$

was hinreichend wäre. Zweckmässiger ist es aber im vorliegenden Falle in den Auflager *a*, *c* und *b* den Unterzug auf Sattelhölzer zu legen, die durch Kopfbänder gestützt sind, siehe Figur 191.

In diesem Falle kann man den Teil *de* des Unterzugs nach dem zehnten Belastungsfalle berechnen.

Die Belastung auf die Strecke *de* beträgt dann:

$$2,4 \cdot 4,8 \cdot 800 = 9216 \text{ kg}$$

und es ist:

$$W = \frac{9216 \cdot 240}{12 \cdot 80} = 2304$$

daher ist:

$$h = \sqrt[3]{\frac{2304 \cdot 42}{5}} = \text{rund } 27$$

und

$$b = 19$$

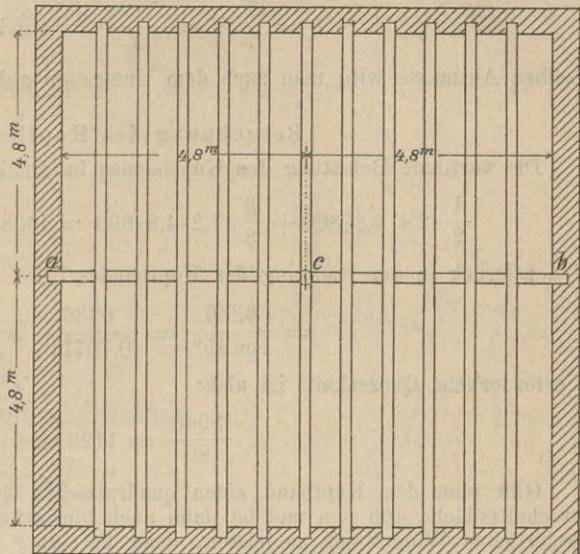
Das Sattelholz hat, wenn der Unterzug über der Stütze *c* gestossen ist, das Biegemoment bei *c* und ausserdem das durch die Belastung auf der Strecke *ec* hervorgerufene Biegemoment aufzunehmen; das Gesamtwiderstandsmoment des Querschnittes des Sattelholzes muss daher sein:

$$W_0 = 2304 + \frac{1}{8} \cdot \frac{120 \cdot 4,8 \cdot 800}{80} = 3024$$

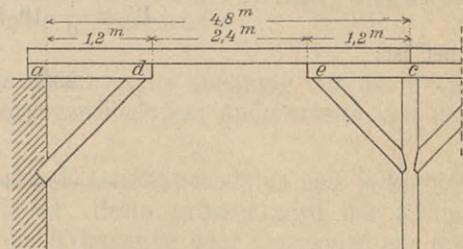
somit ist die Höhe des Sattelholzes:

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{3024 \cdot 42}{5}} = 29 \text{ cm oder } 30$$

Figur 190.



Figur 191.



und

$$b = \frac{5}{7} h = \frac{5 \cdot 30}{7} = \text{rund } 22$$

Dieselben Ausmasse wird man auch dem Unterzuge geben.

#### Berechnung des Kopfbandes.

Die vertikale Belastung des Kopfbandes im Punkte  $e$  ist:

$$\frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4,8 \cdot 800 + \frac{3}{8} \cdot 1,2 \cdot 4,8 \cdot 800 = 4608 + 1728 = 6336 \text{ kg}$$

und der Druck in der Richtung des Kopfbandes:

$$= \frac{6336}{\cos 45^\circ} = \frac{6336}{0,70711} = 8960$$

der erforderliche Querschnitt ist also:

$$\frac{8960}{80} = 1129 \text{ cm}$$

Gibt man dem Kopfband einen quadratischen Querschnitt 20/20 cm, so wird die Querschnittsfläche 400 qcm und ist dann auch hinreichend gross, um gegen Knickung den erforderlichen Widerstand zu leisten, denn bei einer Länge des Kopfbandes von 1,7 m wird das erforderliche Trägheitsmoment:

$$J = \frac{10 \cdot 8960 \cdot 170 \cdot 170}{10 \cdot 110000} = 2354$$

Das Trägheitsmoment des Querschnittes ist aber  $\frac{1}{12} 20^4 = 13333$

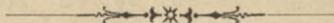
225) **Aufgabe 99.** Welche Einzellast kann der in Figur 191 dargestellte, durch Sattelhölzer und Kopfbänder unterstützte Balken in seiner Mitte aufnehmen, wenn sein Querschnitt 19/27 cm im Geviert misst?

**Auflösung.** Das Widerstandsmoment beträgt:

$$W = \frac{1}{6} \cdot 19 \cdot 27 \cdot 27 = 2308$$

daher ist:

$$P = \frac{2308 \cdot 80 \cdot 8}{240} = \text{rund } 6100 \text{ kg}$$



## G. Krümmungshalbmesser der elastischen Linie.

### 1) Allgemeine Bemerkungen.

226) Ist ein Balken, siehe Figur 192, durch eine Kraft  $P$  auf Biegung beansprucht, und nimmt hierdurch die Trägerachse oder die elastische Linie die Form der Linie  $ab$  an, so kann man ein kleines Stück derselben, etwa  $gh$  als einen Teil eines Kreisbogens betrachten, dessen Halbmesser  $r$  bestimmt werden soll.

Aus der Figur 192 ist ersichtlich, dass  $ie$  die Verlängerung der äussersten Faser für den Querschnitt  $ik$  bezeichnet; nennt man diese Verlängerung  $\lambda$ , so hat man die Beziehung:

$$102) \dots \lambda : \mathfrak{S} = 1 : E \text{ oder } \lambda = \frac{\mathfrak{S}}{E}$$

ferner ist:

$\lambda : a = \overline{gh} : \overline{gm} = 1 : r$ , wenn  $\overline{gm} = r$  und  $\overline{gh} = 1$  gesetzt wird, daher ist:

$$\lambda : a = 1 : r \text{ oder } \lambda = \frac{a}{r}$$

Es ist also:

$$103) \dots \frac{a}{r} = \frac{\mathfrak{S}}{E} \text{ oder } r = \frac{aE}{\mathfrak{S}}$$

Nun lautet aber die Biegungsgleichung für den Querschnitt  $ef$ :

$$M = Px = \mathfrak{S}W = \mathfrak{S} \frac{J}{a}$$

hieraus folgt:

$$\mathfrak{S} = \frac{Ma}{J}$$

oder diesen Wert von  $\mathfrak{S}$  in Gleichung 103 eingesetzt:

$$104) \dots r = \frac{JE}{M}$$

Die Gleichung 104) enthält den Satz:

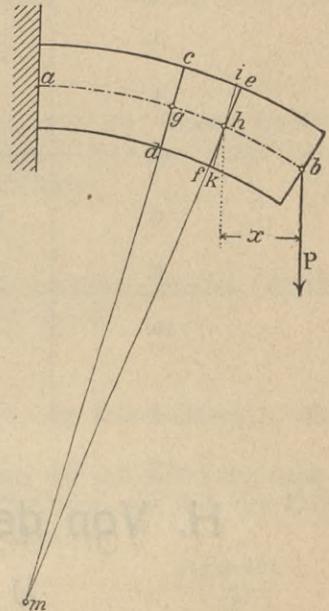
„Für jeden Querschnitt eines auf Biegung beanspruchten Balkens ist der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie gerade proportional dem Trägheitsmoment und dem Elastizitätsmodulus, dagegen umgekehrt proportional dem Biegemoment.“

227) Die Durchbiegung eines Trägers ist einerseits abhängig von der Form des Querschnittes und der Grösse des Biegemomentes, andererseits von der Grösse des Elastizitätsmodulus.

Je grösser das Trägheitsmoment und der Elastizitätsmodulus und je kleiner das Biegemoment für einen Querschnitt ist, desto grösser wird der Krümmungshalbmesser, d. h. desto kleiner wird die Krümmung oder Durchbiegung des Balkens sein.

Für ein und denselben Träger ist die Durchbiegung in der Regel im gefährlichen Querschnitt am grössten. Mittels höherer Rechnung kann man die Durchbiegungen des Trägers infolge Einwirkung äusserer Kräfte berechnen. In folgender Tabelle sind für die wichtigsten, einfachen Belastungsfälle die Formeln für die Grössen der Durchbiegungen zusammengestellt.

Figur 192.



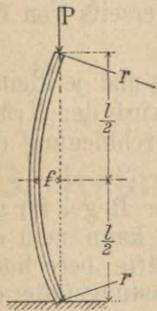
Belastungsfall	Stelle der grössten Durchbiegung	Grösse der Durchbiegung
1.	am freien Trägerende	$\frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EJ}$
2.	" "	$\frac{1}{8} \frac{Pl^3}{EJ}$
3.	in der Trägermitte	$\frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ}$
4.	" "	$\frac{5}{384} \frac{Pl^3}{EJ}$
5.	nahezu in der Trägermitte	$\frac{1}{48} \frac{Pl_1}{EJ} (3l^2 - 4l_1^2)$
6.	in der Trägermitte	$\frac{1}{2} \frac{Pl_1}{EJ} \left( \frac{l^2}{4} + ll_1 - \frac{l_1^2}{3} \right)$
9.	in der Trägermitte	$\frac{1}{192} \frac{Pl^3}{EJ}$
10.	" "	$\frac{1}{384} \frac{Pl^3}{EJ}$

## H. Von der Zerknickungsfestigkeit.

### 1) Erster Belastungsfall.

228) Wirkt in der Achse eines stabförmigen Körpers eine Druckkraft  $P$ , siehe Figur 193, und sind die Querschnittsausmasse im Verhältnis zur Länge des Stabes sehr klein, so wird der Stab durch die Einwirkung der Kraft nicht nur zusammengedrückt, sondern auch seitlich ausgebogen und schliesslich zerknickt werden. Den Widerstand hiergegen nennt man die Zerknickungsfestigkeit des Materiales. Durch die Kraft  $P$  wird ein Biegemoment hervorgerufen:

Figur 193.



$$105) \dots M = Pf$$

Nun ist, siehe Figur 193:

$$105a) \dots r^2 = \left( \frac{l}{2} \right)^2 + (r - f)^2$$

$$= \frac{l^2}{4} + r^2 - 2rf + f^2$$

oder unter Vernachlässigung der sehr kleinen Grösse  $f^2$ :

$$2rf = \frac{l^2}{4}$$

und

$$f = \frac{l^2}{8r}$$

Ausserdem ist in Rücksicht auf Gleichung 104):

$$M = \frac{EJ}{r}$$

man hat somit für das Biegemoment  $M$  die Gleichung:

$$106) \dots \frac{EJ}{r} = \frac{Pl^2}{8r}$$

oder:

$$107) \dots P = \frac{8EJ}{l^2}$$

Dieser Wert ist nur ein Näherungswert; durch genauere Rechnung würde man statt des Faktors 8 die Grösse  $\pi^2 = 9,8596$  oder rund 10 finden; man hat also die Gleichung:

$$108) \dots P = \frac{10EJ}{l^2}$$

Diese Gleichung gibt den Grenzwert der Belastung  $P$  an, dessen Ueberschreitung ein Unsicherwerden des Gleichgewichts des Stabes zur Folge hat. Legt man eine  $n$ -fache Sicherheit zu Grunde, so erhält man:

$$109) \dots P = \frac{n 10 EJ}{l^2}$$

Hieraus folgt das erforderliche Trägheitsmoment des Stabquerschnittes, damit er die Last  $P$  mit Sicherheit gegen Ausknicken tragen kann:

$$110) \dots J = \frac{nPl^2}{10E}$$

Der Sicherheitskoeffizient  $n$  beträgt für Holz 10, für Schmiedeeisen 5, für Gusseisen 6.

Die Formel 110) wird zur Querschnittsberechnung der auf Knickung beanspruchten Stäbe verwendet, wenn deren Enden beweglich sind, wie dies der Fall ist bei Säulen mit nicht angegossenen Säulenfüssen oder bei den Stäben eines Fachwerkträgers.

## 2) Zweiter Belastungsfall.

229) Die angegebene Formel ändert sich, wenn die Stabenden befestigt sind; der folgende Fall tritt am häufigsten in der Praxis auf: das eine Stabende ist beweglich und wird in der Stabachse geführt, das andere ist festgeklemmt; für diesen Fall hat man für das erforderliche Trägheitsmoment des Stabquerschnittes die Formel:

$$111) \dots J = \frac{nPl^2}{20E}$$

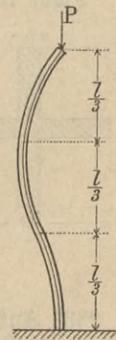
Diese Formel findet Verwendung zur Berechnung des Querschnittes von Säulen mit angegossenen Säulenfüssen, welche mit dem Fundamente durch Schrauben oder andere Befestigungsmittel unverrückbar verbunden sind.

**Anmerkung 36.** Ein Stab ist stets auf Zerknicken zu untersuchen, wenn die Länge des Stabes grösser ist als das Fünffache seiner kleinsten Querschnittsabmessung.

## 3) Übungsaufgaben.

230) **Aufgabe 100.** Eine gusseiserne Hohlsäule von 4 m Höhe empfängt eine Belastung von 60000 kg, welchen Querschnitt muss die Säule erhalten, wenn ihr unteres Ende beweglich sein soll?

Figur 194.



**Auflösung.** Es ist:

$$J = \frac{6 \cdot 60000 \cdot 400 \cdot 400}{10 \cdot 1000000} = 5760$$

Wählt man als Säulenstärke 2 cm, so findet man aus der Tabelle einen äusseren Säulendurchmesser  $D = 21,5$  cm. Das dem Querschnitt entsprechende Trägheitsmoment ist  $J = 5885$ , die Querschnittsfläche ist  $F = 122,52$  qcm, was genügt, da der erforderliche Druckquerschnitt sein muss:

$$F = \frac{60000}{500} = 120 \text{ qcm}$$

231) **Aufgabe 101.** Eine gusseiserne Säule von 3 m Höhe mit angegossenen Rippen hat eine Belastung von 60000 kg aufzunehmen, welchen Querschnitt muss die Säule bei 2 cm Stärke erhalten?

**Auflösung.** Es ist:

$$J = \frac{6 \cdot 60000 \cdot 300 \cdot 300}{20 \cdot 1000000} = 1620$$

der erforderliche Druckquerschnitt ist:

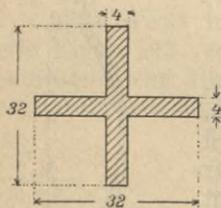
$$F = \frac{60000}{500} = 120 \text{ qcm}$$

Hierfür genügt ein äusserer Säulendurchmesser  $D = 21,5$  cm.

Für diesen Fall ist  $F = 122,529$  cm und  $J = 5885$ .

232) **Aufgabe 102.** Eine gusseiserne Flügelsäule von 4,5 m Höhe hat 80000 kg aufzunehmen. Welche Querschnittsgrösse muss die Säule erhalten, wenn das untere Ende beweglich ist?

Figur 195.



**Auflösung.** Es ist:

$$J = \frac{6 \cdot 80000 \cdot 450 \cdot 450}{10 \cdot 1000000} = 9720$$

Diesem Werte entspricht nach der Tabelle das nebenstehende Profil, siehe Figur 195, mit einem:

$$J = 11072 \text{ und einem } F = 240$$

der erforderliche Druckquerschnitt ist:

$$\frac{80000}{500} = 160$$

das gewählte Profil genügt also.

233) **Aufgabe 103.** Ein 3,5 m hoher Stiel aus Eichenholz hat eine Last von 20000 kg aufzunehmen, wie gross muss die Seite des quadratischen Querschnittes sein, wenn die Enden des Stiels beweglich vorausgesetzt sein sollen?

**Auflösung.** Es ist:

$$J = \frac{10 \cdot 20000 \cdot 350 \cdot 350}{10 \cdot 117000} = 20940$$

diesem Werte entspricht ein Quadrat von 23 cm Seitenlänge mit einem:

$$J = 23320 \text{ und einem } F = 529,9 \text{ qcm}$$

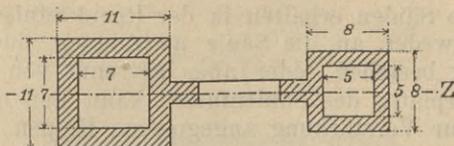
der erforderliche Druckquerschnitt ist:

$$F = \frac{20000}{80} = 250$$

das gewählte Profil genügt also.

234) **Aufgabe 104.** Es ist die Tragfähigkeit einer durchbrochenen gusseisernen Wand zu berechnen, wenn dieselbe 4 m hoch und das untere Ende unbeweglich sein soll.

Figur 196.



**Auflösung.** Es ist:

$$J = \frac{1}{12} (11^4 - 7^4 + 8^4 - 5^4) = 1309$$

die Tragfähigkeit findet sich aus der Gleichung:

$$P = \frac{20 E F}{6 l^2}$$

oder:

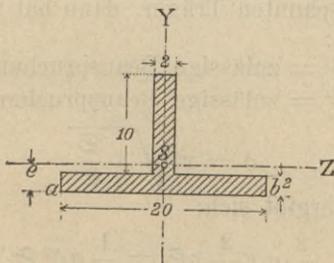
$$P = \frac{20 \cdot 1000000 \cdot 1309}{6 \cdot 400 \cdot 400} = 27270 \text{ kg}$$

Die Tragfähigkeit für Druck allein wäre, da  $F = 111 \text{ qcm}$  ist:

$$111 \cdot 500 = 55500 \text{ kg}$$

235) **Aufgabe 105.** Es ist die Tragfähigkeit einer 3 m langen schmiedeisernen Strebe von nebenstehendem Querschnitt zu berechnen, wenn beide Enden beweglich sein sollen.

Figur 197.



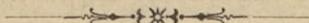
**Auflösung.** Das kleinste Trägheitsmoment ist das auf die Achse  $Z$  bezogene, es besitzt für das vorliegende Profil, siehe Auflösung der Aufgabe 84 den Wert 670, daher ist:

$$J = \frac{10 \cdot 2000000 \cdot 670}{5 \cdot 300 \cdot 300} = 29777, \text{ rund } 30000$$

Die Tragfähigkeit für Druck allein ist, da:

$$F = 60 \text{ qcm beträgt} = 60 \cdot 750 = 45000 \text{ kg}$$

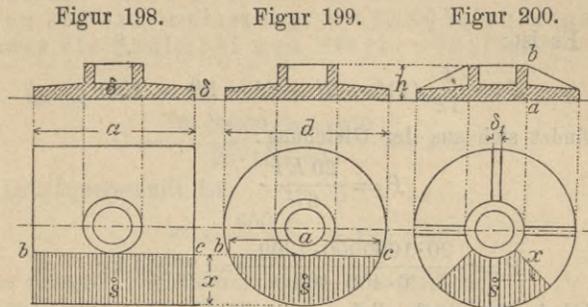
Es darf daher als Tragkraft nur der erstere Wert berücksichtigt werden.



## J. Berechnung der Säulenfüsse.

### 1) Allgemeine Bemerkungen.

236) Gusseiserne Säulen erhalten in der Regel Säulenfüsse, gleichfalls aus Gusseisen, welche entweder an die Säule angegossen sind, so dass Säule und Fuss aus einem Stück bestehen, oder aber getrennt von der Säule hergestellt werden. Die Auflagerplatte des Säulenfusses kann nun quadratisch oder rund sein und ausserdem zur Verstärkung angegossene Rippen besitzen oder nicht.



Die Fläche der Unterlagsplatte und damit auch die Seite  $a$  bzw. der Durchmesser  $d$  berechnet sich aus der Formel für Druckfestigkeit:

$$F = \frac{P}{\mathfrak{S}}$$

Zur Berechnung der Plattendicke  $\delta$  für Säulenfüsse ohne Rippen betrachtet man den schraffierten Teil der Platte, siehe Figur 198 und 199, als einen längs des Querschnittes  $bc$  eingespannten Träger, dann hat man als Biegungsgleichung für die quadratische Form:

$$ax \frac{x}{2} \mathfrak{S} = \frac{1}{6} a \delta^2 \mathfrak{S}' \quad \begin{array}{l} \mathfrak{S} = \text{zulässige Beanspruchung des Mauerwerkes} = 10 \\ \mathfrak{S}' = \text{zulässige Beanspruchung des Gusseisens} = 250 \end{array}$$

daher ist:

$$112) \dots \delta = x \sqrt{3 \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}'}}$$

Für die kreisrunde Form ergibt sich:

$$\frac{2}{3} ax \frac{2}{5} x \mathfrak{S} = \frac{1}{6} a \delta^2 \mathfrak{S}'$$

oder:

$$113) \dots \delta = 1,26 x \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}'}}$$

237) Am Rande der Platte nimmt man die Stärke gewöhnlich  $\delta' = \frac{2}{3} \delta$ . Die

Auflagerfläche erhält in der Regel von der Mitte ausgehend nach dem Rande zu eine geringe Steigung, etwa 1:100, um beim Vergiessen der Fuge mit Cement den Austritt der Luft und des Wassers zu erleichtern. Besteht die Unterlage aus Holz, so ist zwischen dem Säulenfuss eine 3 mm starke Bleiplatte einzuschalten.

Besitzt der Säulenfuss angegossene Rippen, so nimmt man die Rippenstärke gleich drei Viertel der Plattenstärke, also  $\delta_1 = \frac{3}{4} \delta$ . Zur Berech-

nung der Rippenhöhe betrachtet man die Rippe als einen eingespannten Träger, der den auf die schraffierte Fläche, siehe Figur 200, treffenden Druck aufzunehmen hat. Ist  $F$  diese Fläche, so hat man die Biegleichung:

$$Fx \mathcal{C} = \mathcal{C}' \frac{1}{6} \delta_1 h^2$$

daher:

$$114) \dots h = \sqrt{\frac{6 Fx}{\delta_1} \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}'}}$$

## 2) Uebungsaufgaben.

238) **Aufgabe 106.** Für die in Aufgabe 100 genannte Säule ist der Säulenfuß zu berechnen, wenn derselbe

- a) quadratische,
- b) kreisrunde Grundform ohne Rippen erhalten soll.

**Auflösung.** a) Die Auflagerfläche berechnet sich, wenn die Säule auf Mauerwerk in Cementmörtel ruhen soll, aus der Gleichung:

$$F = \frac{60000}{10} = 6000 \text{ qcm}$$

daher ist:

$$a = \sqrt{6000} = 77 \text{ cm}$$

hiernach wird:

$$x = \frac{77 - 21,5}{2} = 27,75$$

und die Dicke der Unterlagerplatte:

$$\delta = 27,75 \sqrt{\frac{3 \cdot 10}{250}} \text{ rund } 95 \text{ mm}$$

die Stärke am Säulenrand wäre demnach:

$$\delta' = \frac{2}{3} \cdot 95 = 63 \text{ mm}$$

- b) Bei kreisrunder Grundform hat man:

$$\frac{d^2 \cdot 3,14}{4} = 6000$$

$$d = \sqrt{\frac{6000 \cdot 4}{3,14}} = 87 \text{ mm}$$

hiernach ist:

$$x = \frac{87 - 21,5}{2} = 37,75$$

und

$$\delta = 1,26 \cdot 37,75 \sqrt{\frac{10}{250}} = 95 \text{ mm}$$

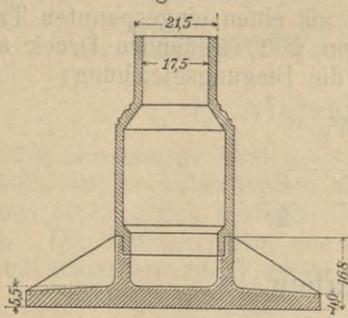
239) **Aufgabe 107.** Für die in Aufgabe 101 genannte Säule ist der Säulenfuß zu berechnen, wenn die Grundform quadratisch sein und vier Rippen erhalten soll.

**Auflösung.** Die Seite des quadratischen Säulenfußes ist, siehe Aufgabe 106, 77 cm, der schraffierte Teil der Grundfläche beträgt:

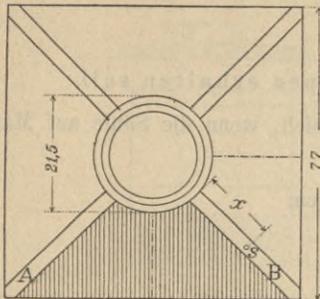
$$\frac{6000}{4} - \frac{32^2 \cdot 3,14}{4} = 686$$

Bezeichnet nun  $\delta$  die Stärke der Fussplatte, so kann man den zwischen den Rippen  $A$  und  $B$  befindlichen Teil als einen längs den Rippen eingespannten Träger betrachten und demnach berechnen.

Figur 201.



Im Grundriss der Figur 201 muss es statt 21,5 heissen: 32,2.



Figur 202.

Die Belastung auf den schraffierten Teil ist dann  $686 \cdot 10$ ; als freie Länge gilt im ungünstigsten Falle 77, daher lautet die Biegleichung:

$$\frac{686 \cdot 10 \cdot 77}{12} = 250 \cdot \frac{1}{6} \left( \frac{77}{2} \sqrt{2} - 16,1 \right) \delta^2$$

oder:  $\delta = 55$  mm abgerundet.

Am Rande der Platte nimmt man die Stärke etwas geringer, nämlich:

$$\delta' = \frac{2}{3} \delta = 40 \text{ mm rund.}$$

Die Belastung einer Rippe ist gleichfalls:

$$686 \cdot 10 = 6860 \text{ kg}$$

daher, wenn  $\delta_1$  die Rippenstärke,  $h$  die Rippenhöhe bezeichnet:

$$6860 x = 250 \frac{1}{6} \delta_1 h^2$$

d. h. es ist:  $h = \sqrt{\frac{6860 \cdot 6 x}{250 \cdot \delta_1}}$

Die Entfernung  $x$  kann im vorliegenden Falle zu 8,5 cm angenommen werden, daher ist:

$$h = \sqrt{348,86} = 18,6 \text{ cm} = 186 \text{ mm}$$

## K. Zusammengesetzte Festigkeit.

### 1) Allgemeine Bemerkungen.

240) Wird ein Träger auf Biegung und Zug oder Biegung und Druck zugleich beansprucht, so ist er auf zusammengesetzte Festigkeit zu untersuchen.

Durch die Einwirkung der Biegung entstehen im Träger Biegungsspannungen, von denen aber nur die Zug- bzw. Druckspannungen in Betracht kommen; besitzt das Material gegen Zug und Druck verschiedene Festigkeit, so ist die durch Biegung in der äussersten Faser hervorgerufene Zugspannung

$$\mathcal{E}_b = \frac{M}{W}, \text{ die Druckspannung aber } \mathcal{E}_b' = \frac{M}{W_1}, \text{ hierbei ist } W = \frac{J}{a} \text{ und}$$

$$W_1 = \frac{J}{a_1}. \text{ Durch die Zug- oder Druckkraft entsteht aber eine Spannung:}$$

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_a = \frac{P}{F}$$

Die Gesamtspannung, welche im gefährlichen Querschnitt des Trägers entsteht, ist also:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_b + \mathcal{E}_z$$

oder:

$$= \mathcal{E}_b' + \mathcal{E}_a$$

d. h. es ist:

$$\mathcal{E} = \frac{M}{W} + \frac{P}{F} \text{ wenn die Kraft } P \text{ eine Zugkraft ist,}$$

115) . . .

$$\mathcal{E} = \frac{M}{W_1} + \frac{P}{F} \text{ wenn die Kraft } P \text{ eine Druckkraft ist.}$$

Im ersten Falle sind die Zug-, im zweiten Falle die Druckspannungen zu addieren.

Ist die Neutralachse des Querschnittes eine Symmetrieachse und besitzt das Material gegen Zug und Druck gleiche Festigkeit, wie z. B. das Schmiedeeisen, so ist  $W = W_1$  und die Gleichungen gehen über in die folgende:

$$116) \dots \mathcal{S} = \frac{M}{W} + \frac{P}{F}$$

Die so bestimmte Gesamtspannung darf die zulässige Faserspannung des Materiales nicht überschreiten.

241) Die Ermittlung des Trägerprofils geschieht auf dem Wege des Probierens, indem man zunächst ein Profil wählt und untersucht, ob für dasselbe die aus Gleichung 116) zu berechnende Spannung einen passenden Wert besitzt. Ist  $\mathcal{S}$  kleiner als die zulässige Faserspannung des Materiales, so ist das gewählte Profil zu gross, im anderen Falle zu klein; durch Annahme eines entsprechend kleineren oder grösseren Profils wird man durch wiederholte Berechnung von  $\mathcal{S}$  das zweckdienliche Profil erhalten.

## 2) Übungsaufgaben.

242) **Aufgabe 108.** Für den untenstehend skizzierten Balkon, siehe Figur 203 und 204, sind die Träger zu berechnen. Die Belastungen sind:

- 1) Bodenbelastung 500 kg per Quadratmeter,
- 2) Dachbelastung 100 kg per Quadratmeter,
- 3) 1 cbm Mauerwerk aus Hohlziegeln 1100 kg.

Die Belastung kann als gleichmässig verteilt über die Träger angenommen werden.

**Auflösung.** Belastung des Trägers I. Belastung durch das Mauerwerk:

$$2 \cdot 4 \cdot 0,25 \cdot 1100 - 1,1 \cdot 2,2 \cdot 0,25 \cdot 1100 = 2200 - 665,5 = 1534,5 \text{ oder rund } 1540 \text{ kg}$$

$$\text{Belastung durch den Fussboden} \quad \frac{1,5 \cdot 2,0 \cdot 500}{2} = 750 \text{ kg}$$

$$\text{Belastung durch die Decke} \quad \frac{1,5 \cdot 2,0 \cdot 100}{2} = 150 \text{ kg}$$

$$\text{Gesamtbelastung des Trägers I} \quad = 2440 \text{ kg}$$

Belastung des Trägers II. Belastung durch das Mauerwerk:

$$1,5 \cdot 0,25 \cdot 4,0 \cdot 1100 - 0,60 \cdot 0,25 \cdot 2,2 \cdot 1100 = 1650 - 363 = 1287 \text{ rund } 1290 \text{ kg}$$

Diese Belastung ist gleichmässig verteilt über den ganzen Träger; ausserdem wirkt auf diesen Träger noch als Einzellast am einen Ende der Auflagerdruck des Trägers I im Betrage von 1220 kg.

Belastung der Strebe III. Unter der Voraussetzung, dass die Strebe unter  $45^\circ$  gegen die Horizontale geneigt sein soll, beträgt der in der Richtung der Strebe wirkende Druck:

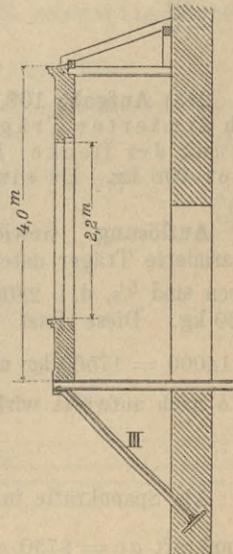
$$S = \frac{1220}{\cos 45^\circ} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1290}{\cos 45^\circ} = 1725 \text{ kg} \\ + 700 \text{ kg} = 2425 \text{ kg}$$

Berechnung des Trägers I. Derselbe ist nach dem vierten Belastungsfalle beansprucht, daher ist:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{2440 \cdot 200}{750} = 81,33$$

Diesem Werte entspricht ein N. P. No. 14 mit einem  $W = 82,7$ .

Figur 203.

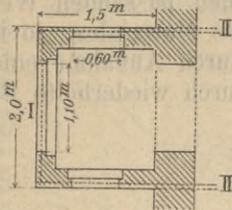


Berechnung des Trägers II. Derselbe wird auf zusammengesetzte Festigkeit und zwar auf Biegung und Zug beansprucht. Wählt man als Querschnittsform die I Form und als Material Schmiedeeisen, so ist:

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{P}{F} \quad \text{Bei Annahme von N. P. No. 14 ist } W = 82 \text{ und } F = 18$$

$$\sigma = \frac{1290 \cdot 150}{8 \cdot 82} + \frac{1710}{18} = 295 + 95 = 390$$

Figur 204.



Das Profil würde also, in Rücksicht auf die Beanspruchung viel zu gross sein, man wird es aber trotzdem aus Konstruktionsrücksichten wählen, um eine zweckmässige Verbindung der Träger I und II miteinander zu erzielen,

In Rücksicht auf die Beanspruchung hätte das Profil No. 11 Genüge geleistet, dasselbe besitzt ein  $W = 43,8$ , ein  $F = 12,36$ .

Man hat daher:

$$\sigma = \frac{1290 \cdot 150}{8 \cdot 43} + \frac{1710}{12} = 562 + 142 = 702$$

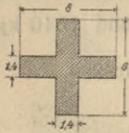
eine Beanspruchung, die noch immer unter der zulässigen Grenze gelegen ist.

Berechnung der Strebe III. Die Länge der Strebe ist gleich:

$$\frac{1,5}{\cos 45^\circ} = \frac{1,5}{0,70711} = \text{rund } 2,1 \text{ m}$$

Wählt man als Querschnitt der Strebe eine  $+$  Form, so ist das erforderliche Trägheitsmoment:

Figur 205.



$$J = \frac{5 \cdot 2425 \cdot 210 \cdot 210}{10 \cdot 2000000} = \text{rund } 26$$

Dem entspricht das nebenstehende Profil mit einem  $J = 26$  und einem  $F = 15$ , was hinreicht, denn der erforderliche Druckquerschnitt der Strebe ist:

$$\frac{1725}{750} = \text{rund } 3,9 \text{ cm}$$

243) **Aufgabe 109.** Zur Auflagerung einer Balkendecke ist ein einfach armierter Träger, siehe Figur 205 und 206, zu verwenden. Die Belastung der Decke, Eigengewicht und Nutzlast, beträgt per Quadratmeter 700 kg. Es sind die Ausmasse des Trägers festzustellen.  $\square$

**Auflösung.** Gewicht der ganzen Decke =  $8 \cdot 8 \cdot 700 = 44800$  kg. Hiervon hat der armierte Träger unter der Voraussetzung, dass die Balken über demselben nicht gestossen sind  $\frac{5}{8}$ , d. i. 28000 kg aufzunehmen; auf die Strecken  $ac$  und  $cb$  treffen also je 14000 kg. Diese Last verteilt sich auf die einzelnen Knotenpunkte so, dass auf  $c$   $\frac{10}{8} \cdot 14000 = 17500$  kg und auf  $a$  und  $b$  je  $\frac{3}{8} \cdot 14000 = 5250$  kg treffen. Die in  $a$  und  $b$  nach aufwärts wirkende Auflagerreaktion ist dann:

$$\frac{17500}{2} = 8750 \text{ kg}$$

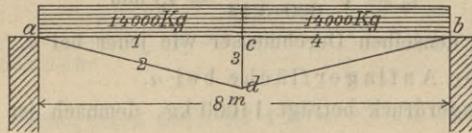
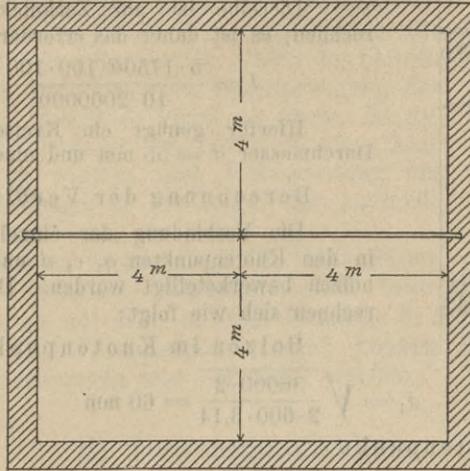
Als Spannkraft in den einzelnen Konstruktionsteilen erhält man durch Rechnung:

$$\text{Spannkraft } ac = 8750 \cdot \cotg \alpha = \frac{8750 \cdot 4}{1} = 35000 \quad \text{unter } \alpha \text{ den Winkel } cad \text{ (siehe Figur 207) verstanden}$$

$$ad = \frac{8750}{\sin \alpha} = \frac{8750}{1} = 8750 \cdot 4,1231 = 36000 \text{ kg}$$

$$cd = 17500 \text{ kg} \quad 4,1231$$

Figur 206.



Figur 207.

### Berechnung der einzelnen Konstruktionsteile.

#### Berechnung des Trägers *ab*.

Derselbe ist einerseits nach dem achten Belastungsfalle belastet, andererseits auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen.

Wählt man zunächst das Trägerprofil ohne Rücksicht auf die Druckkraft, so ist:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{14000 \cdot 400}{750} = 949$$

Diesem Werte würden zwei *N. P. No. 30* mit einem  $W = 1076$  entsprechen.

Der Querschnitt genügt aber auch noch zur Aufnahme der Druckkraft, denn man erhält als gesamte Spannung in demselben:

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{P}{F} = \frac{1 \cdot 14000 \cdot 400}{8 \cdot 1076} + \frac{35000}{258,8} \\ = 650 + 297 = 940$$

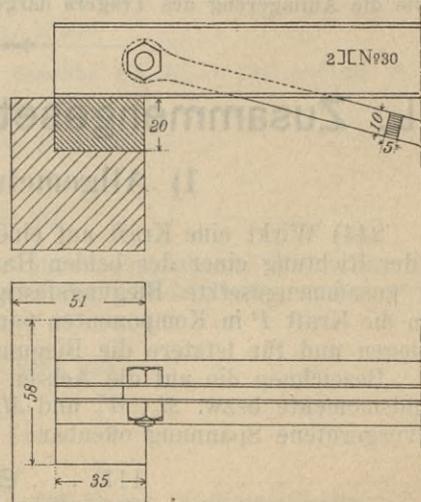
#### Berechnung der Zugbänder *ad*.

Der erforderliche Zugquerschnitt ist:

$$F = \frac{35000}{750} = \text{rund } 48$$

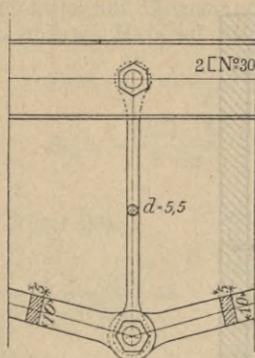
Hierfür genügt ein Rechteck von  $\frac{5}{10}$  cm mit einem  $F = 50$  qcm.

Figur 208.



Figur 209.

Figur 210.

Berechnung der Strebe  $cd$ .

Dieselbe ist auf Zerknickungsfestigkeit zu berechnen; es ist daher das erforderliche Trägheitsmoment:

$$J = \frac{5 \cdot 17500 \cdot 100 \cdot 100}{10 \cdot 2000000} = \text{rund } 44$$

Hierfür genügt ein Kreisquerschnitt mit einem Durchmesser  $d = 55$  mm und einem  $J = 45$ .

## Berechnung der Verbindungsmittel.

Die Verbindung der einzelnen Konstruktionsteile in den Knotenpunkten  $a$ ,  $c$ ,  $d$  und  $b$  ist durch Gelenkbolzen bewerkstelligt worden. Deren Durchmesser berechnen sich wie folgt:

Bolzen im Knotenpunkt  $a$ .

$$d_1 = \sqrt{\frac{36000 \cdot 2}{2 \cdot 600 \cdot 3,14}} = 60 \text{ mm}$$

Bolzen im Knotenpunkt  $c$ .

$$d_2 = \sqrt{\frac{17500 \cdot 2}{600 \cdot 3,14}} = 43 \text{ mm}$$

Der Bolzen bei  $d$  erhält denselben Durchmesser wie jener bei  $a$ .

Berechnung der Auflagerfläche bei  $a$ .

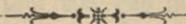
Der gesamte Auflagerdruck beträgt 14000 kg, demnach ist die erforderliche Auflagerfläche:

$$F = \sqrt{\frac{14000}{7}} = 2000 \text{ qcm}$$

Nimmt man an, dass das Widerlager 2 Stein, also 0,51 m stark ist, der Träger auf eine Länge von 35 cm auf der Mauer aufliegt und zur Uebertragung des Auflagerdruckes ein Haustein verwendet wird, so muss dessen Breite sein:

$$b = \frac{2000}{35} = 58 \text{ cm}$$

In den Figuren 208 bis 210 sind die Verbindungen der einzelnen Konstruktionsteile, sowie die Auflagerung des Trägers dargestellt.



## L. Zusammengesetzte Biegungsfestigkeit.

### 1) Allgemeine Bemerkungen.

244) Wirkt eine Kraft auf einen auf Biegung beanspruchten Balken nicht in der Richtung einer der beiden Hauptschwerachsen, so wird der Träger auf zusammengesetzte Biegungsfestigkeit beansprucht. In diesem Falle kann man die Kraft  $P$  in Komponenten parallel zu den Hauptachsen des Querschnittes zerlegen und für letztere die Biegungsmomente aufstellen.

Bezeichnen die auf die Achsen  $Z$  und  $Y$  bezogenen Biegungs- und Widerstandsmomente bezw.  $M_z$ ,  $W_z$  und  $M_y$ ,  $W_y$  so ist die grösste in dem Querschnitt hervorgerufene Spannung offenbar:

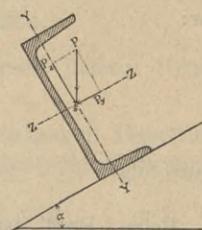
$$117) \dots \sigma = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}$$

Diese Spannung darf die zulässige Faserspannung des Materials nicht überschreiten. Die Berechnung eines Trägers auf zusammengesetzte Biegungs-

festigkeit geschieht zweckmässig durch Probieren; man wählt zunächst ein Profil willkürlich, ermittelt für dasselbe die Werte  $W_z$  und  $W_y$  und berechnet hieraus die Spannung  $\mathcal{S}$  mittels der Gleichung (117). Bleibt das berechnete  $\mathcal{S}$  zu viel unter der zulässigen Beanspruchung des Materials, so ist das gewählte Profil zu gross, im anderen Falle zu klein; durch nochmalige Wahl eines kleineren bzw. grösseren Profils und Wiederholung des Rechenverfahrens wird man in der Regel das passende Profil ermitteln können.

Im Hochbau sind es vornehmlich die Dachpfetten, welche auf zusammengesetzte Biegefestigkeit beansprucht werden, wenn sie mit ihrer unteren Flansche in der Dachfläche aufliegen, siehe Figur 211. Auch Treppenpodestträger können auf zusammengesetzte Biegefestigkeit beansprucht und berechnet werden.

Figur 211.



## 2) Übungsaufgaben.

245) **Aufgabe 110.** Eine Dachpfette, welche auf einer gegen die Horizontale unter 4:1 geneigten Dachfläche auf 3 m frei aufliegt, erhält eine gleichmässig verteilte Last von 1500 kg; es ist der Querschnitt der Pfette zu berechnen.

**Auflösung.** Im vorliegenden Falle ist  $4 P_y = P_z$  und

$$(4 P_y)^2 + (P_y)^2 = 1500^2$$

daher:

$$P_y = \sqrt{\frac{1500^2}{17}} = \text{rund } 364 \text{ kg}$$

und

$$P_z = 1456 \text{ kg}$$

Es ist nun:

$$M_z = \frac{1456 \cdot 300}{8} = 54600$$

und

$$M_y = \frac{364 \cdot 300}{8} = 13650$$

Wählt man ein I Profil, No. 18, so hat dasselbe ein  $W_z = 162$  und ein  $W_y = 23,4$ , daher ist:

$$\frac{M_z}{W_z} = \frac{54600}{162} = \text{rund } 340$$

und

$$\frac{M_y}{W_y} = \frac{13650}{23,4} = 583$$

Die Gesamtspannung ist somit  $\mathcal{S} = 340 + 583 = 923$ , also ein Wert, der schon etwas zu gross ist, siehe Anmerkung 37, man wird also I Profil, No. 20 wählen und erhält hierfür  $W_z = 216$ ,  $W_y = 30,7$ ; demgemäss ist:

$$\frac{M_z}{W_z} = \frac{54600}{216} = \text{rund } 253$$

und

$$\frac{M_y}{W_y} = \frac{13650}{30,7} = 444$$

daher ist:

$$\mathcal{S} = 253 + 444 = 697 \text{ kg per Quadratcentimeter}$$

ein Wert der noch unterhalb der zulässigen Beanspruchung liegt; I Profil No. 20 genügt also.

Hätte man ein [ Profil No. 20 gewählt, so wäre für dieses:

$$W_z = 193 \text{ und } W_y = 32,2$$

daher:

$$\frac{M_z}{W_z} = \frac{54600}{193} = 283$$

und

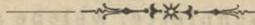
$$\frac{M_y}{W_y} = 424$$

hieraus folgt:

$$\sigma = 283 + 424 = 707 \text{ kg per Quadratcentimeter.}$$

Beim [ Profil ist das Widerstandsmoment  $W_y$  grösser als bei I Profil, daher ist ersteres für die Verwendung als Pfette günstiger als das I Profil.

**Anmerkung 37.** Bedenkt man, dass die gesamte Beanspruchung einer Pfette, durch Winddruck, Schneelast, Dachbelastung doch nur sehr selten zu gleicher Zeit eintritt, so darf der Pfette wohl eine grössere zulässige Faserspannung als 750 kg zu Grunde gelegt werden; man könnte also oben berechnetes Profil No. 18 wohl beibehalten.



## M. Der kontinuierliche oder durchgehende Träger.

### 1) Allgemeine Bemerkungen.

246) Liegt ein Träger auf mehr als zwei Stützen auf, so heisst er ein kontinuierlicher oder durchgehender Träger; die beiden äussersten Stützen heissen die Endstützen, die übrigen die Mittelstützen; das zwischen zwei Stützen liegende Trägerstück heisst ein Trägerfeld; man unterscheidet Endfelder und Mittelfelder.

Die Berechnung der kontinuierlichen Träger ist in elementarer Weise nicht mehr durchführbar, sondern nur unter Berücksichtigung der Form der elastischen Linie möglich; das Charakteristische dieses Trägers ist, dass auf die Mittelstützen nicht nur Auflagerdrücke ausgeübt werden, sondern dass über denselben auch Momente, die Stützenmomente vorhanden sind. Der Träger ist über diesen Stützen als eingespannt zu betrachten und kann als ein nach den Belastungsfällen 7 bis 10 belasteter Träger annäherungsweise berechnet werden. Die Verwendung der kontinuierlichen Träger im Hochbau als Balken- oder Deckenträger oder auch als Träger im Frontmauerwerk soll nur unter grosser Vorsicht geschehen. Denn der Träger kann nur dann als kontinuierlicher Träger aufgefasst werden, wenn die Mittelstützen auch thatsächlich als solche wirksam sind. Tritt aber durch ein Setzen des Mauerwerks eine Senkung der einen oder anderen Mittelstütze ein, so wird die ursprünglich gemachte Annahme hinfällig. Die berechneten Widerstandsmomente sind zu klein und der Träger ist demgemäss zu stark beansprucht. Auf keinen Fall sollte man Träger mit mehr als zwei Mittelstützen verwenden. Im folgenden sollen nun einzelne in der Praxis häufig auftretende Fälle besprochen werden.

## 2) Spezielle Fälle.

### a) Erster Fall. Zwei Felder und drei Stützen.

α) Die Felder sind gleich lang und in der Mitte eines jeden Feldes wirkt eine Einzellast  $P$ .

247) Jedes einzelne Feld kann nach dem siebenten einfachen Belastungsfall angenommen werden. Der gefährliche Querschnitt liegt also über der Mittelstütze; die Biegelgleichung lautet:

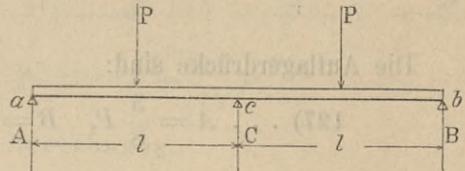
$$118) \dots \frac{3}{16} Pl = \mathfrak{S} W$$

$$119) \dots W = \frac{3}{16} \frac{Pl}{\mathfrak{S}}$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$120) \dots A = B = \frac{5}{16} P \quad C = \frac{22}{16} P$$

Figur 212.



β) Die Felder sind gleich lang und auf jedes Feld wirkt eine gleichmässig verteilte Last  $P$ .

248) Jedes einzelne Feld ist nach dem achten einfachen Belastungsfall beansprucht, der gefährliche Querschnitt liegt über der Mittelstütze, daher lautet die Biegelgleichung:

$$121) \dots \frac{1}{8} Pl = \mathfrak{S} W$$

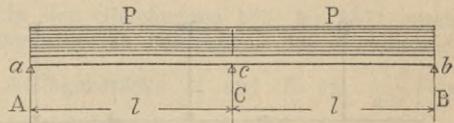
und es ist:

$$122) \dots W = \frac{1}{8} \frac{Pl}{\mathfrak{S}}$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$123) \dots A = B = \frac{3}{8} P \quad C = \frac{10}{8} P$$

Figur 213.

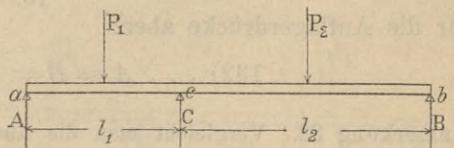


γ) Die Felder sind ungleich lang; in der Mitte eines jeden Feldes wirkt eine Einzellast  $P_1$  bzw.  $P_2$ .

249) Jedes einzelne Feld wird wieder nach dem siebenten Belastungsfall berechnet, man erhält daher die beiden Widerstandsmomente:

$$124) \dots \begin{cases} W_1 = \frac{3}{16} \frac{P_1 l_1}{\mathfrak{S}} \\ \text{und} \\ W_2 = \frac{3}{16} \frac{P_2 l_2}{\mathfrak{S}} \end{cases}$$

Figur 214.



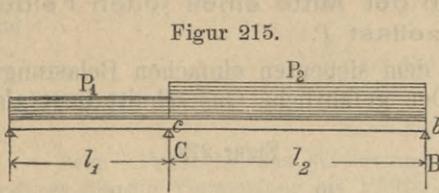
das grösste der beiden Momente ist für die Berechnung des Trägerprofils zu benützen.

Die Auflagerdrücke sind:

$$125) \dots A = \frac{5}{16} P_1 \quad B = \frac{5}{16} P_2 \quad C = \frac{11}{16} (P_1 + P_2)$$

δ) Die Felder sind ungleich lang; auf jedes Feld wirkt eine gleichmässig verteilte Last  $P_1$  bzw.  $P_2$ .

250) Jedes einzelne Feld wird nach dem achten Belastungsfalle berechnet; man erhält daher die beiden Widerstandsmomente:



$$126) \dots \begin{cases} W_1 = \frac{1}{8} \frac{P_1 l_1}{\mathcal{E}} \\ \text{und} \\ W_2 = \frac{1}{8} \frac{P_2 l_2}{\mathcal{E}} \end{cases}$$

das grössere der beiden Momente ist für die Trägerberechnung zu benutzen.

Die Auflagerdrücke sind:

$$127) \dots A = \frac{3}{8} P_1 \quad B = \frac{3}{8} P_2 \quad C = \frac{5}{8} (P_1 + P_2)$$

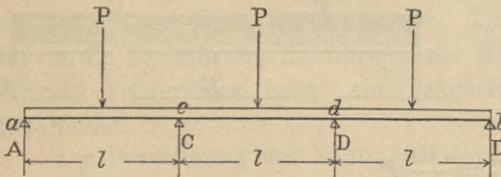
### b) Zweiter Fall. Drei Felder und vier Stützen.

Genaue Berechnung.

α) Die Felder sind gleich lang und in der Mitte eines jeden Feldes wirkt eine Einzellast  $P$ .

251) Der gefährliche Querschnitt liegt über den Mittelstützen  $c$  und  $d$ ; für diese lautet die Biegungsgleichung:

Figur 216.



$$128) \dots \frac{3}{20} Pl = \mathcal{E} W$$

$$129) \dots W = \frac{3}{20} \frac{Pl}{\mathcal{E}}$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$130) \dots A = B = \frac{7}{20} P$$

$$C = D = \frac{23}{20} P$$

Angenäherte Berechnung.

252) Die beiden Endfelder kann man nach dem siebenten, das Mittelfeld nach dem neunten Belastungsfalle belastet ansehen; in dem einen Falle erhält man dann, für das Widerstandsmoment über den Mittelstützen  $c$  und  $d$  den Ausdruck:

$$131) \dots W = \frac{3}{16} \frac{Pl}{\mathcal{E}}$$

für die Auflagerdrücke aber:

$$132) \dots A = B = \frac{5}{16} P \quad C = D = \frac{19}{16} P$$

**Anmerkung 38.** Vergleicht man die Ausdrücke in No. 128) bis 131) miteinander, so findet man, dass bei der angenäherten Berechnung das Widerstandsmoment um  $\frac{3}{80} Pl$  zu gross, die Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  aber um  $\frac{3}{80} P$  zu klein, jene bei

$C$  und  $D$  um  $\frac{3}{80} P$  gegenüber dem wahren Werte zu gross ausfallen.

β) Die Felder sind gleich lang, auf jedes Feld wirkt eine gleichmässig verteilte Last  $P$ .

Genauere Berechnung.

253) Der gefährliche Querschnitt liegt über den Mittelstützen  $c$  und  $d$ , für diese lautet die Biegungsgleichung:

$$133) \dots \frac{1}{10} Pl = \mathfrak{C} W$$

$$134) \dots W = \frac{1}{10} \frac{Pl}{\mathfrak{C}}$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$135) \dots A = B = \frac{4}{10} P \quad C = D = \frac{11}{10} P$$

Angenäherte Berechnung.

254) Die beiden Endfelder kann man nach dem achten, das Mittelfeld nach dem zehnten Belastungsfall belastet ansehen; wenn nun  $P$  für alle drei Felder gleich gross ist, so kommt nur das durch die Endfelder hervorgerufene Widerstandsmoment in Betracht, dieses ist:

$$136) \dots W = \frac{1}{8} \frac{Pl}{\mathfrak{C}}$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$137) \dots A = B = \frac{3}{8} P \quad C = D = \frac{9}{8} P$$

**Anmerkung 39.** Vergleicht man die Werte in den Gleichungen 133) bis 137) miteinander, so erkennt man, dass bei der angenäherten Berechnung das Widerstandsmoment um  $\frac{1}{40} Pl$  zu gross ist, die Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  um  $\frac{1}{40} P$  zu klein,  $C$  und  $D$  aber um  $\frac{1}{40} P$  gegenüber den wahren Werten zu gross werden.

γ) Die Felder sind ungleich lang aber die Endfelder gleich gross; in der Mitte der Endfelder wirkt eine Einzellast  $P_1$ , über der Mitte des Mittelfeldes eine Einzellast  $P_2$ .

Angenäherte Berechnung.

255) Für das Endfeld ergibt sich für den gefährlichen Querschnitt bei  $c$  oder  $d$  das Widerstandsmoment:

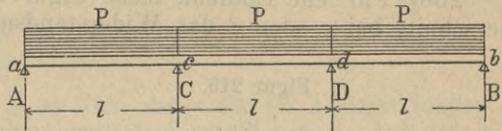
$$138) \dots \begin{cases} W_1 = \frac{3}{16} P_1 l_1, \text{ für das} \\ \text{Mittelfeld dagegen:} \\ W_2 = \frac{1}{8} P_2 l_2 \end{cases}$$

Der grössere der beiden Werte ist der Berechnung des Trägerprofils zu Grunde zu legen.

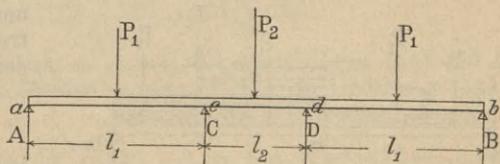
Die Auflagerdrücke sind:

$$139) \dots A = B = \frac{5}{16} P_1 \quad C = D = \frac{11}{16} P_1 + \frac{P_2}{2}$$

Figur 217.



Figur 218.

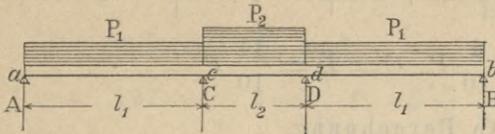


δ) Die Felder sind ungleich lang, aber die Endfelder gleich gross; auf die Endfelder wirkt je eine gleichmässig verteilte Last  $P_1$ , auf das Mittelfeld eine solche Last  $P_2$ .

Angenäherte Berechnung.

256) Für ein Endfeld, siehe Figur 219, ergibt sich für den gefährlichen Querschnitt bei  $c$  oder  $d$  das Widerstandsmoment:

Figur 219.



$$140) \dots \begin{cases} W_1 = \frac{1}{8} P_1 l_1, \text{ für das} \\ \text{Mittelfeld dagegen:} \\ W_2 = \frac{1}{12} P_2 l_2 \end{cases}$$

Der grössere der beiden Werte ist der Berechnung des Trägerprofils zu Grunde zu legen.

Die Auflagerdrücke sind:

$$141) \dots A = B = \frac{3}{8} P_1 \quad C = D = \frac{5}{8} P_1 + \frac{P_2}{2}$$

**Anmerkung 40.** Betrachtet man den allgemeinsten Fall eines kontinuierlichen Trägers, nämlich einen solchen mit beliebig vielen Feldern von beliebiger Länge und Belastung, so besteht für drei aufeinander folgende Stützen, siehe Figur 220, die folgende Momentengleichung:

$$142) \dots M_{n-1} l_{n-1} + 2 M_n (l_{n-1} + l_n) + M_{n+1} l_n = - \frac{1}{l_{n-1}} \sum_{n-1} [P a (l-a) (l+a)] - \frac{1}{l_n} \sum_n [P a (l-a) (2l+a)] - \frac{1}{4} Q_{n-1} l_{n-1}^2 - \frac{1}{4} Q_n l_n^2$$

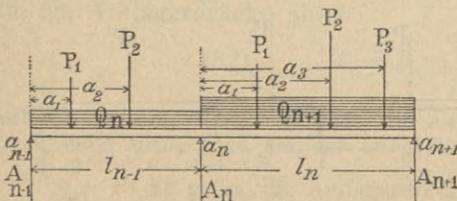
Besitzt der Träger  $n$  Felder, so ergeben sich  $n-1$  Gleichungen, aus welchen sich die Auflagermomente berechnen lassen.

Bezeichnet man mit  $V'_{n-1}$  und  $V''_{n-1}$  die unmittelbar rechts von  $a_{n-1}$  bzw. links von  $a_n$  wirkenden Vertikalkräfte, so ist:

$$143) \dots V'_{n-1} = \frac{1}{l_{n-1}} \left[ M_n - M_{n-1} + \sum_{n-1} P (l_{n-1} - a) + \frac{Q l_{n-1}}{2} \right]$$

$$144) \dots V''_{n-1} = \frac{1}{l_{n-1}} \left[ M_n - M_{n-1} - \sum_{n-1} P a - \frac{Q l_{n-1}}{2} \right]$$

Figur 220.



Die Auflagerreaktion für eine Stütze ergibt sich als Differenz der Vertikalkräfte unmittelbar rechts und links von dem betreffenden Stützpunkte oder gleich der Summe der absoluten Werte derselben, d. h. es ist:

$$145) \dots A_n = V'_n - V''_{n-1}$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen lassen sich nun in einfacher Weise für die Fälle 1 γ) bis δ) und 2 γ) bis δ) des kontinuierlichen Trägers die genauen Werte für die Stützenmomente bzw. die Auflagerreaktionen ermitteln.

Fall 1  $\gamma$ ). Die Felder sind ungleich lang und in der Mitte eines jeden Feldes wirkt eine Einzellast  $P_1$  bzw.  $P_2$ .

Die allgemeine Momentengleichung lautet nun:

$$0 + 2M_c(l_1 + l_2) + 0 = -\frac{1}{l_1}P_1 \frac{l_1}{2} \frac{l_1}{2} \frac{3}{2}l_1 - \frac{1}{l_2}P_2 \frac{l_2}{2} \frac{l_2}{2} \left(2l_2 - \frac{l_2}{2}\right)$$

$$2M_c(l_1 + l_2) = -\frac{3}{8}(P_1 l_1^2 + P_2 l_2^2)$$

Man erhält somit:

$$146) \dots M_c = -\frac{3}{16} \frac{P_1 l_1^2 + P_2 l_2^2}{l_1 + l_2}$$

Die Vertikalkraft links von  $a$  ist Null, daher ist die Auflagerreaktion der Grösse nach gleich der Vertikalkraft unmittelbar rechts von  $a$ , d. h. es ist in Rücksicht auf Gleichung 143) bzw. 144):

$$147) \dots A = \frac{1}{l_1} \left( M_c + 0 + \frac{P_1 l_1}{2} \right) = \frac{M_c}{l_1} + \frac{P_1}{2}$$

entsprechend findet man:

$$148) \dots B = \frac{M_c}{l_2} + \frac{P_2}{2}$$

die Vertikalkraft unmittelbar links von  $c$  ist:

$$V_1'' = \frac{1}{l_1} \left( M_c - \frac{P_1 l_1}{2} \right)$$

unmittelbar rechts von  $c$  hat man:

$$V_2' = \frac{1}{l_2} \left( 0 - M_c + \frac{P_2 l_2}{2} \right)$$

daher ist die Auflagerreaktion:

$$149) \dots C = V_1'' - V_2' = M_c \frac{(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} - \frac{P_1 + P_2}{2}$$

In gleicher Weise liessen sich auch für die übrigen in den No. 1  $\gamma$ ) bis  $\delta$ ) und 2  $\gamma$ ) bis  $\delta$ ) aufgeführten Fälle des kontinuierlichen Trägers die Stützenmomente und Auflagerreaktionen aus den allgemeinen Gleichungen 142) bis 145) ableiten; im folgenden sollen jedoch nur die Resultate angegeben werden.

Fall 1  $\delta$ ). Die Felder sind ungleich lang und auf ihrer ganzen Länge durch eine gleichmässig verteilte Last  $P_1$  bzw.  $P_2$  beansprucht.

Es ist: 
$$150) \dots M_c = -\frac{1}{8} \frac{P_1 l_1^2 + P_2 l_2^2}{l_1 + l_2}$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$151) \dots A = \frac{M_c}{l_1} + \frac{P_1}{2}$$

$$152) \dots B = \frac{M_c}{l_2} + \frac{P_2}{2}$$

$$153) \dots C = \frac{M_c(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} - \frac{P_1 + P_2}{2}$$

Da der Wert von  $M_c$  negativ ist, so sind in den Gleichungen 151) und 152) die absoluten Werte der einzelnen Glieder zu subtrahieren, in Gleichung 153) dagegen zu addieren.

Fall 2  $\gamma$ ). Die Felder sind ungleich lang, aber die Endfelder gleich gross; in der Mitte der Endfelder wirkt eine Einzellast  $P_1$ , in der Mitte des Mittelfeldes eine Einzellast  $P_2$ .

Es ist: 
$$154) \dots M_c = -\frac{3}{8} \frac{P_1 l_1^2 + P_2 l^2}{2l_1 + 3l_2}$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$155) \dots A = B = \frac{M_c}{l_1} + \frac{P_1}{2}$$

$$156) \dots C = D = \frac{M_c}{l_1} - \frac{P_1 + P_2}{2}$$

Fall 2  $\delta$ ). Die Felder sind ungleich lang, aber die Endfelder gleich gross; auf die Endfelder wirkt eine gleichmässig verteilte Last  $P_1$ , auf das Mittelfeld eine gleichmässig verteilte Last  $P_2$ .

Es ist:

$$157) \dots M_c = -\frac{1}{4} \frac{P_1 l_1^2 + P_2 l_2^2}{2 l_1 + 3 l_2}$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$158) \dots A = B = \frac{M_c}{l_1} + \frac{P_1}{2}$$

$$159) \dots C = D = \frac{M_c}{l_1} - \frac{P_1 + P_2}{2}$$

### 3) Übungsaufgaben.

257) **Aufgabe 111.** Ein in seiner Mitte durch eine Säule gestützter eiserner Unterzug hat die Balkenlage eines Getreidespeichers nebst der Nutzlast aufzunehmen. Gesamtbelastung der Decke 800 kg per Quadratmeter; die Balken aus Kiefernholz  $b:h = 3:4$ , sollen über den Unterzug ungestossen hinwegreichen. Es ist die Konstruktion zu berechnen.

Belastung des Unterzuges.

<b>Auflösung.</b> Belastung der ganzen Decke	$10 \cdot 10 \cdot 800 = 80000$ kg
Hiervon treffen auf den Unterzug $ab$	$\frac{5}{8} \cdot 80000 = 50000$ kg
daher trifft auf ein Trägerfeld	25000 kg
Belastung eines Balkens	$= 0,80 \cdot 10 \cdot 800 = 6400$ kg
daher auf ein Balkenfeld	$\frac{6400}{2} = 3200$ kg

Man erhält die nebenstehenden Belastungsskizzen, siehe Figur 222 und 223.

Berechnung des Unterzuges.

Es ist:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{25000 \cdot 500}{750} = 2083$$

Wollte man hier einen I Träger verwenden, so würde man ein sehr hohes Profil, nämlich No. 47 $\frac{1}{2}$  wählen müssen. Man benützt, wenn das Widerstandsmoment eines Trägers den Wert 1700 überschreitet, zweckmässiger einen kastenförmigen Träger, indem man entweder mehrere [Eisen zu einem Querschnitte vereinigt, oder indem man aus Winkel- und Flacheisen eine Kastenform bildet. Im vorliegenden Falle wurde das Profil, siehe Figur 224, gewählt. Dasselbe besitzt — ohne Berücksichtigung der Nietlöcher — ein Widerstandsmoment:

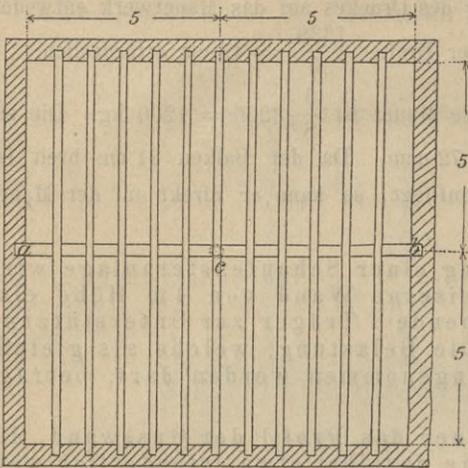
$$W = \frac{1}{6} (19 \cdot 37^2 - 5 \cdot 35^2 - 10 \cdot 33^2 - 2 \cdot 23^2) = 2177$$

reicht also vollständig aus.

Berechnung des Balkens.

Es ist:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{3200 \cdot 500}{70} = 2557$$

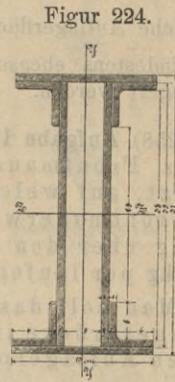


Figur 221.



Figur 222.

Figur 223.



Figur 224.

daher ist:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} h^3 = 2557$$

und

$$h = \sqrt[3]{\frac{2557 \cdot 24}{3}} = 2 \sqrt[3]{2557} = 28 \text{ cm}$$

demgemäss ist:

$$b = \frac{3}{4} = 21 \text{ cm}$$

Belastung der Säule. Dieselbe beträgt:

$$\frac{10}{8} \cdot 25000 = 31250 \text{ kg}$$

Ist die Höhe der Säule zu 4 m und das untere Ende als unbeweglich angenommen, so ist das erforderliche Trägheitsmoment des Säulenquerschnittes bei 2 cm Dicke:

$$J = \frac{6 \cdot 31250 \cdot 400 \cdot 400}{20 \cdot 100000} = 1800$$

Hierfür genügt ein Durchmesser  $d = 15,5 \text{ cm}$  mit einem  $F = 84,82$ . Der erforderliche Druckquerschnitt ist:

$$\frac{31250}{500} = 62,5 \text{ qcm}$$

Die Grösse der Auflagerplatte des Säulenfusses ist:

$$a = \sqrt{\frac{31250}{10}} = 56$$

Der Mauerpfeiler wird also 0,64 stark sein müssen. Die Fundamentfläche muss sein:

$$\frac{31250}{2,5}, \text{ daher ist dessen Breite } b = \sqrt{\frac{31250}{2,5}} = 112 \text{ cm} = 4 \frac{1}{2} \text{ Stein.}$$

Der Auflagerdruck des Unterzuges auf die Mauer ist  $\frac{3}{8} \cdot 25000 = 9375 \text{ kg}$ , die erforderliche Auflagerfläche demnach  $\frac{9375}{7} = 1339 \text{ qcm}$ . Liegt der Träger auf einer

Länge von 30 cm auf, so ist zur Uebertragung des Druckes auf das Mauerwerk entweder eine Unterlagsplatte oder ein Haustein von der Breite  $\frac{1339}{30} = 45$  cm erforderlich.

Der Auflagerdruck eines Balkens auf die Mauer ist  $\frac{3}{8} \cdot 3200 = 1200$  kg. Die erforderliche Auflagerfläche ist also  $\frac{1200}{7} = 172$  qcm. Da der Balken 21 cm breit ist und mindestens ebenso weit auf der Mauer aufliegt, so kann er direkt auf der Mauer aufgelagert werden.

258) **Aufgabe 112.** Zur Herstellung einer Schaufensteranlage wird in das Frontmauerwerk eine gusseiserne Wand von 4 m Höhe eingesetzt, auf welcher drei durchgehende I-Träger zur Unterstützung des Frontmauerwerkes aufruhen. Die Belastung, welche als gleichmässig über den Träger verteilt angenommen werden darf, beträgt 15000 kg per laufenden Meter.

Man soll das Trägerprofil, ferner das Profil der Gusswand, die Auflagerdrücke in  $a$  und  $b$ , sowie die daselbst etwa erforderlich werdenden Auflagerplatten berechnen.

Figur 225.



Figur 226.

**Auflösung.** Die Belastung auf der Strecke  $\overline{ac}$  ist:

$$P_1 = 1,5 \cdot 15000 = 22500 \text{ kg}$$

auf der Strecke  $\overline{cb}$ :

$$P_2 = 2,5 \cdot 15000 = 37500 \text{ kg}$$

Das Widerstandsmoment über  $c$ , für das Trägerfeld  $\overline{cb}$  ist:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{37500 \cdot 250}{750} = 1562,5$$

Verwendet man drei Träger, so trifft auf einen ein:

$$W = \frac{1562,5}{3} = 520,8$$

Diesem Werte entspricht ein N. P. No. 28 mit einem  $W = 547$ . Man wird also drei Träger No. 28 verwenden.

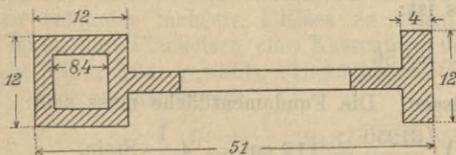
Der Auflagerdruck in  $c$  beträgt:

$$C = \frac{5}{8} (P_1 + P_2) = \frac{5}{8} (22500 + 37500) = 37500 \text{ kg}$$

Das für die Gusswand erforderliche Trägheitsmoment ist demnach:

$$J = \frac{6 \cdot 37500 \cdot 400 \cdot 400}{20 \cdot 1000000} = 1800$$

Figur 227.



Diesem Werte entspricht das Profil, siehe Figur 227, mit einem

$$J = 1889 \text{ und einem } F = 121 \text{ qcm}$$

Der erforderliche Druckquerschnitt ist:

$$F = \frac{37500}{500} = 75 \text{ qcm}$$

Der Auflagerdruck in  $b$  ist:

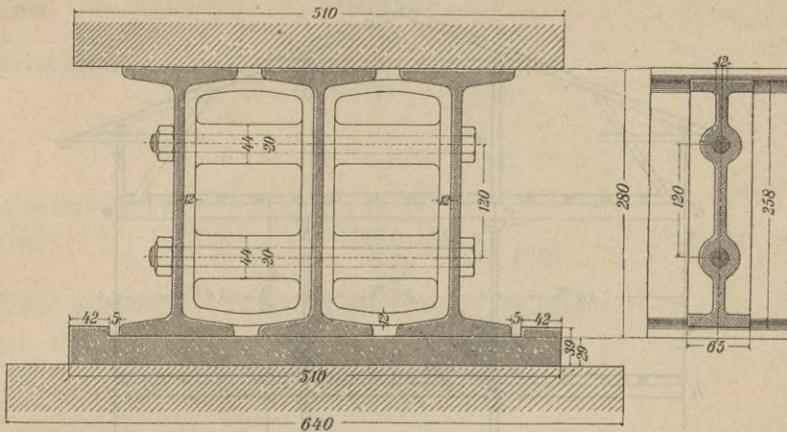
$$B = \frac{3}{8} \cdot 37500 = 14062,5 \text{ kg}$$

daher die erforderliche Auflagerfläche:

$$\frac{14062,5}{7} = 2008,9 \text{ qcm}$$

Figur 228.

Figur 228a.



Setzt man eine Mauerstärke von 2 Stein, also 51 cm voraus, so kann man der Auflagerplatte eine Breite von 51 cm geben; es folgt hieraus für die Länge derselben:

$$\frac{2009}{51} = 39,2 \text{ rund } 40 \text{ cm}$$

Die Dicke der Auflagerplatte macht man in der Regel gleich:

$$\delta = 15 \text{ mm} + \frac{1}{20} h, \quad h \text{ die Trägerhöhe}$$

im vorliegenden Falle ist also:

$$\delta = 15 \text{ mm} + \frac{280}{20} = 29 \text{ mm}$$

Für die Auflagerung der Träger ergibt sich die Anordnung, siehe Figur 228 und 228a; zur Versteifung der Träger werden letztere miteinander verschraubt unter Anwendung von Gussstücken von der gezeichneten Form. Diese liegen über den Auflagern und bei grossen Trägerlängen in Entfernungen von 2 zu 2 m. Im vorliegenden Falle werden also über den Auflagerpunkten *a*, *b* und *c* solche Gussstücke angewendet werden müssen.

259) **Aufgabe 113.** Die Zwischendecken eines Speichers werden durch Unterzüge und gusseiserne Säulen gestützt. Die oberen Unterzüge *de* sind von Eichenholz und auf den Säulen *b* gestossen, die unteren Unterzüge *hi* dagegen von Walzeisen und durchgehend. Das Dach ist ein Doppelziegeldach. Die Balken aus Kiefernholz sind 6,0 m lang, reichen nur über drei Unterzüge hinweg und liegen 0,80 m auseinander. Die gusseisernen Säulen sollen angegossene Fussplatten von quadratischer Grundform besitzen. Die quadratischen Säulenfundamente sind aus bestem Ziegelmauerwerk in Cementmörtel ausgeführt, wobei guter Baugrund vorausgesetzt ist. Für die Unterzüge *de* ist ein Querschnittsverhältnis von 3:4 gewählt. Die Konstruktion ist zu berechnen.

**Auflösung.** Die Belastung des Daches per Quadratmeter Horizontalprojektion kann zu 381 kg angenommen werden.

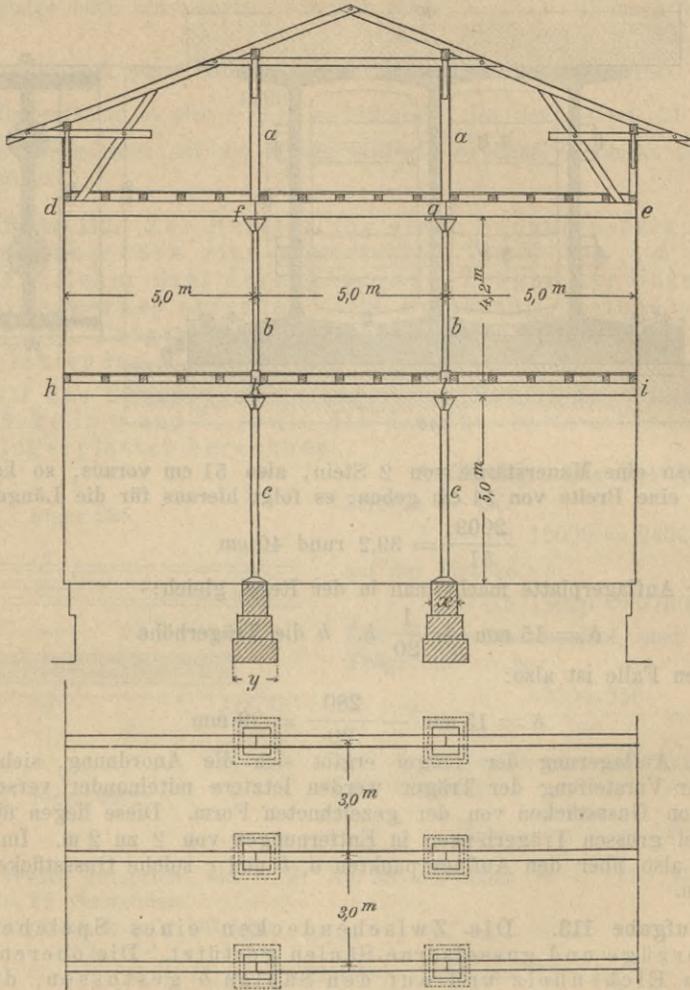
Auf einen Hauptbinder trifft somit eine Belastung von  $3 \cdot 15 \cdot 381 = 17145 \text{ kg}$ .

Hiervon wird von jeder Stuhlsäule direkt aufgenommen der vierte Teil, also:

$$\frac{17145}{4} = 4286 \text{ oder } 4300 \text{ kg.}$$

Die Belastung der Zwischendecken ist per Quadratmeter 800 kg. Die Gesamtbelastung einer Decke auf 6 m Tiefe ist sonach  $6 \cdot 15 \cdot 800 = 72000 \text{ kg}$ .

Figur 229.



Hiervon treffen auf einen Unterzug  $\frac{5}{8} \cdot 72000 = 45000$  kg, auf ein Trägerfeld daher

$$\frac{45000}{3} = 15000 \text{ kg.}$$

Die Belastung eines Balkens ist  $0,8 \cdot 800 \cdot 6 = 3840$  kg.

Die Belastung einer Säule *b* beträgt  $15000 + 4300 = 19300$  kg.

Die Belastung einer Säule *c* ist demnach:

$$\frac{10}{8} \cdot 15000 + 19300 = 16875 + 19300 = 36175 \text{ kg}$$

Berechnung eines Balkens. Es ist:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{3840 \cdot 300}{70} = 2183$$

daher ist:

$$h = 2 \sqrt[3]{2183} = 26 \text{ cm}$$

und

$$b = \frac{3}{4} h = \frac{79}{4} = 20 \text{ cm.}$$

Berechnung eines Unterzuges *de*.

Es ist: 
$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{15000 \cdot 500}{80} = 11718$$

Hieraus findet sich:

$$h = 2 \sqrt[3]{11718} = 46 \text{ cm}$$

und

$$b = \frac{3}{4} \cdot 46 = 34 \text{ cm}$$

Berechnung eines Unterzuges *hi*.

Es ist: 
$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{15000 \cdot 500}{750} = 1250$$

Diesem Werte entspricht *N. P.* No. 38 mit einem  $W = 1274$ .

Berechnung der Säule *b*.

Es ist: 
$$J = \frac{6 \cdot 19300 \cdot 400 \cdot 400}{20 \cdot 1000000} = 926,4$$

Bei einer Säulenstärke von 2 cm erhält man für obigen Wert einen Säulendurchmesser  $D = 13,0 \text{ cm}$  mit einem  $F = 69,129 \text{ cm}$ . Der erforderliche Druckquerschnitt ist nur  $\frac{19300}{500} = \text{rund } 39 \text{ qcm}$ .

Berechnung der Säule *c*.

Es ist: 
$$J = \frac{6 \cdot 36175 \cdot 500 \cdot 500}{2000000} = 2713$$

Diesem Werte entspricht bei derselben Stärke der Säule wie oben ein  $D = 17,5 \text{ cm}$  und ein  $F = 97,39$ . Der erforderliche Druckquerschnitt ist  $F = \frac{36175}{500} = 72 \text{ qcm}$ .

Die Stärke der Mauerpfiler zur Aufnahme des Säulenfusses muss sein:

$$x = \sqrt{\frac{36175}{10}} = 60,1 \text{ rund } 64 \text{ cm} = 2\frac{1}{2} \text{ Steine.}$$

Die Stärke des Fundamentes ist:

$$y = \sqrt{\frac{36175}{2,5}} = 120,3 \text{ cm} = 129 \text{ cm d. s. } 5 \text{ Steine.}$$

Bei einem quadratischen Säulenfuss mit 8 Rippen berechnet sich die Stärke der Fussplatte wie folgt. Die auf die schraffierte Fläche treffende Belastung ist:

$$\frac{36175}{8} - \frac{17,5^2 \cdot 3,14 \cdot 10}{4 \cdot 8} = 4522 - 298 = 4224 \text{ kg}$$

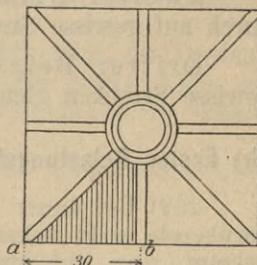
Nimmt man nun der Einfachheit halber an, dass die freitragende Länge der Unterlagsplatte durch die Länge  $ab$  gegeben sei, so hat man die Gleichung:

$$\frac{4224 \cdot 30}{12 \cdot 250} = \frac{1}{6} \left( 30 - \frac{17,5}{2} \right) \delta^2$$

$$\delta = \sqrt{\frac{4224 \cdot 30 \cdot 6}{12 \cdot 250 \cdot \left( 30 - \frac{17,5}{2} \right)}} = \text{rund } 35 \text{ mm}$$

Die Rippenstärke wird demnach  $\delta_1 = \frac{3}{4} \delta = 27 \text{ mm}$ .

Figur 230.



Der Auflagerdruck des Unterzuges *hi* auf die Mauer ist  $\frac{3}{8} \cdot 15000 = 5625 \text{ kg}$ , daher die erforderliche Auflagerfläche  $= \frac{5625}{7} = 804 \text{ qcm}$ .

Die Flanschenbreite des Trägers No. 38 beträgt 14,9 cm. Bei einer Auflagerlänge von 30 cm ist die Auflagerfläche  $30 \cdot 14,9 = 547$  qcm; es ist somit eine Auflagerplatte von der Breite  $\frac{804}{30} = 27$  cm erforderlich. Die erforderliche Stärke der Auflagerplatte ist  $\delta = 15 \text{ m} + \frac{1 \cdot 380}{20} = 34$  mm.

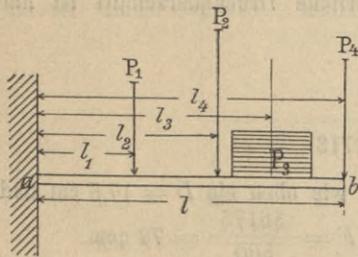


## N. Der mehrfach belastete Träger.

### 1) Der mehrfach belastete Freitträger.

260) Wirken auf einen Freitträger beliebig viele Lasten  $P_1, P_2$  u. s. w., siehe Figur 231, so verursacht jede Last an der Einspannstelle ein grösstes Biegemoment. Der gefährliche Querschnitt liegt also für jede Last an der Einspannstelle, für diese addieren sich die Biegemomente, so dass man folgende Biegleichung erhält:

Figur 231.



$$160) \dots \ominus W = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 + P_4 l_4 + \dots$$

daher lautet die Gleichung für das Widerstandsmoment:

$$161) \dots W = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 + P_4 l_4 + \dots}{\ominus}$$

$$= \frac{\Sigma Pl}{\ominus}$$

### 2) Der auf zwei Stützen frei aufliegende Träger.

#### a) Allgemeine Bemerkungen.

261) Unter den unendlich vielen hier möglichen Belastungsfällen sollen nur die folgenden, im Hochbau häufig auftretenden Belastungsfälle aufgeführt und näher besprochen werden.

Erster Belastungsfall. Der Träger ist nur durch Einzellasten beansprucht.

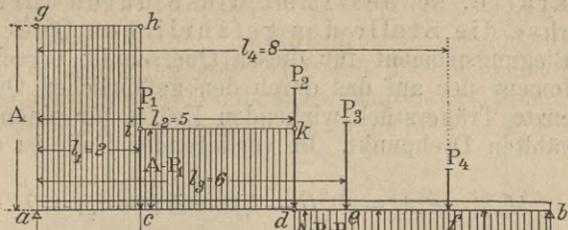
Zweiter Belastungsfall. Der Träger ist durch Einzellasten und durch auf gewisse Strecken gleichmässig verteilte Lasten beansprucht.

Dritter Belastungsfall. Der Träger ist nur durch einzelne auf gewisse Strecken gleichmässig verteilte Lasten beansprucht.

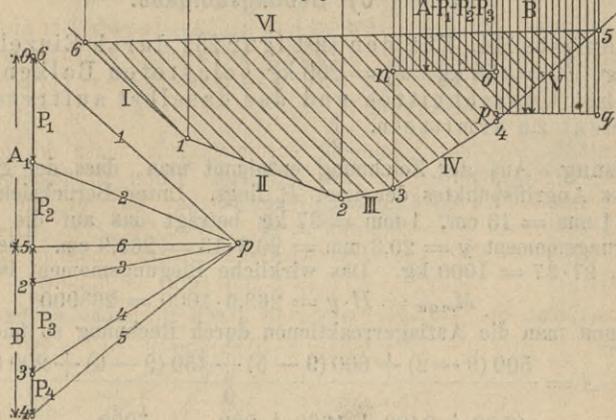
#### b) Erster Belastungsfall. Der Träger ist nur durch Einzellasten beansprucht.

262) Bei dieser Belastung ist die Lage des gefährlichen Querschnittes von vornherein nicht bekannt, sondern muss erst bestimmt werden. Am einfachsten gelangt man auf graphischem Wege zum Ziele. Man zeichnet Kräfte und Seilpolygon und erkennt nun unmittelbar, da die von dem Umfang des Polygons abgegrenzten vertikalen Strecken die reduzierten Biegemomente darstellen, dass das grösste Moment nur unter dem Angriffspunkte einer der Kräfte  $P$  stattfinden kann. Im vorliegenden Falle trifft dies für die Kraft  $P_2$  zu und es ist  $y$  das grösste Biegemoment.

Figur 232.



Figur 233.



Das wirkliche Biegemoment ist dann  $M = \gamma H$  ( $H =$  Poldistanz). Bestimmt man für die Angriffsstellen der einzelnen Lasten die Vertikalkräfte der Grösse nach, d. h. die Resultanten der auf die bezüglichen Trägerstücke wirkenden Kräfte, so ist die Vertikalkraft

$$\begin{aligned} \text{von } a - c &= V_a = A, & \text{von } c - d &= V_c = A - P_1, \\ \text{von } d - e &= V_d = A - (P_1 + P_2), & \text{von } e - f &= V_e = A - (P_1 + P_2 + P_3) \\ \text{von } f - b & \text{endlich } V_b = [A - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4)] = B. \end{aligned}$$

Nimmt man die nach aufwärts gerichtete Vertikalkraft  $A$  als positiv an und berechnet hiernach die übrigen Vertikalkräfte, so ergibt sich unmittelbar links vor dem gefährlichen Querschnitt  $d$  eine Vertikalkraft  $V_c = A - P_1$ , unmittelbar rechts von  $d$  aber eine solche von  $V_d = A - (P_1 + P_2)$ .

Die erstere ist noch positiv, die letztere negativ; im gefährlichen Querschnitt wechselt die Vertikalkraft also ihre Vorzeichen.

Trägt man diese Vertikalkräfte, so wie die Figur 232 zeigt, als vertikale Linien an den zugehörigen Stellen auf, so erhält man die in der Figur gezeichnete treppenförmige Linie der Vertikalkräfte; sie durchschneidet die Trägerachse an der Stelle des gefährlichen Querschnittes.

Man erhält somit für die Ermittlung der Lage des gefährlichen Querschnittes folgende Anhaltspunkte:

„Der gefährliche Querschnitt liegt stets unter dem Angriffspunkte einer Last. Man zeichnet nun entweder Kräfte- und Seilpolygon und ermittelt in letzterem die grösste vertikale Strecke  $\gamma$ , welche aus dem Seilpolygon wird. Durch die Lage dieser Vertikalen ist die Stelle des gefährlichen Querschnittes, durch ihre Länge das im gefährlichen Querschnitt auftretende grösste Biegemoment bestimmt; oder aber man zeichnet die Linie der

Vertikalkräfte, so bestimmt diese durch ihren Schnitt mit der Trägerachse die Stelle des gefährlichen Querschnittes.“

Das Biegemoment für diesen Querschnitt berechnet sich dann als das statische Moment der auf das durch den gefährlichen Querschnitt und ein Auflager begrenzte Trägerstück wirkenden Kräfte für einen im gefährlichen Querschnitt gewählten Drehpunkt. Im vorliegenden Falle ist dieses grösste Biegemoment:

$$162) \dots M_{max} = Al - P_1(l - l_1) = B(l - l_2) - P_3(l_3 - l_2) - P_4(l_4 - l_2)$$

### c) Übungsaufgabe.

263) **Aufgabe 114.** Für den in Figur 232 durch Einzellasten  $P_1 = 500$  kg,  $P_2 = 600$  kg,  $P_3 = 450$  kg,  $P_4 = 200$  kg belasteten Balken ist die Lage des gefährlichen Querschnittes und das daselbst auftretende grösste Biegemoment zu ermitteln.

**Auflösung.** Aus der Zeichnung entnimmt man, dass der gefährliche Querschnitt unterhalb des Angriffspunktes der Last  $P_2$  liegt. Unter Berücksichtigung des gewählten Massstabes  $1 \text{ mm} = 13 \text{ cm}$ ,  $1 \text{ mm} = 37 \text{ kg}$  beträgt das auf die Poldistanz reduzierte grösste Biegemoment  $y = 20,3 \text{ mm} = 20,3 \cdot 13 = 263,9 \text{ cm}$ . Die Poldistanz  $H$  beträgt  $27 \text{ mm}$ , d. h.  $27 \cdot 37 = 1000 \text{ kg}$ . Das wirkliche Biegemoment ist also:

$$M_{max} = H \cdot y = 263,9 \cdot 1000 = 263900$$

Bestimmt man die Auflagerreaktionen durch Rechnung so findet man:

$$A = \frac{500(9 - 2) + 600(9 - 5) + 450(9 - 6) + 200(9 - 8)}{9}$$

$$= \frac{3500 + 2400 + 1360 + 200}{9} = \frac{7000}{9} = 827,27 \text{ kg}$$

$$B = \frac{500 \cdot 2 + 600 \cdot 5 + 450 \cdot 6 + 200 \cdot 8}{9}$$

$$= \frac{1000 + 3000 + 2700 + 1600}{9} = \frac{8300}{9} = 922,22 \text{ kg}$$

$$A + B = 1750 \text{ kg}$$

Es ist nun:

$$V_a = 827,77 \quad V_c = 827,77 - 500 = +327,77 \quad V_d = 827,77 - 1100 = -272,23$$

Der gefährliche Querschnitt liegt also bei  $d$ . Das Biegemoment daselbst ist:

$$M_{max} = 827,77 \cdot 5 - 500 \cdot 3 = 2638,88 \text{ oder auf Centimeter bezogen } 263888.$$

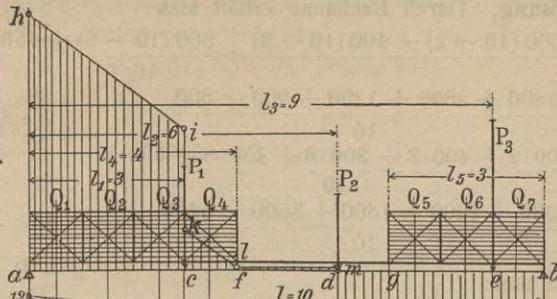
### d) Zweiter Belastungsfall. Der Träger ist durch Einzellasten und durch auf gewisse Strecken gleichmässig verteilte Lasten beansprucht.

264) Dieser Fall lässt sich auf den Fall 1 zurückführen, indem man sich die die gleichmässig verteilten Lasten  $P_4$  und  $P_5$  darstellenden Belastungskörper, siehe Figur 234, in eine Anzahl gleicher und recht kleiner Teile teilt und in den Schwerpunkten dieser Teile vertikale Einzelkräfte  $Q_1, Q_2$  u. s. w. anbringt, entsprechend den Gewichten dieser Teilkörper. Man hat dann lauter Einzellasten und verfährt zur Ermittlung der Lage des gefährlichen Querschnittes und des grössten Biegemomentes wie im Falle 1. Im vorliegenden Falle liegt der gefährliche Querschnitt bei  $d$  und das grösste Biegemoment ist:

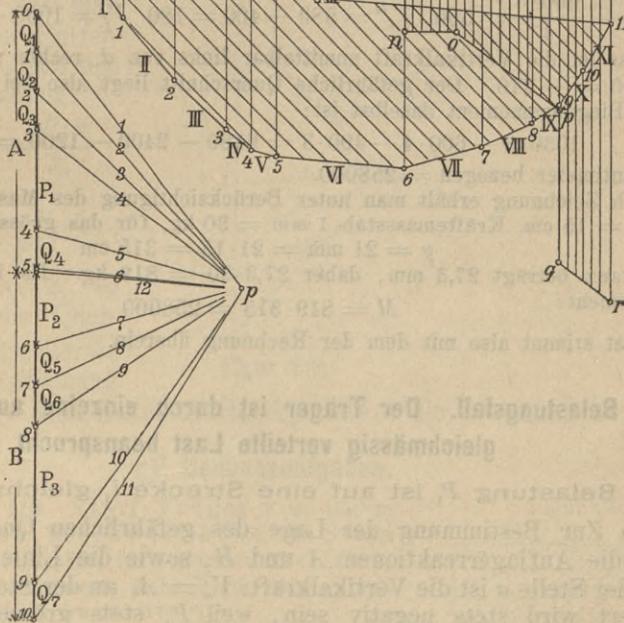
$$M_{max} = y \cdot H$$

Dabei ist es keineswegs notwendig, dass der gefährliche Querschnitt unterhalb einer der ursprünglich gegebenen Einzellasten  $P_1, P_2$  und  $P_3$  liegt, er kann vielmehr auch unterhalb einer der Lasten  $Q$  liegen.

Figur 234.



Figur 235.



Durch Zeichnung der Linie der Vertikalkräfte ergibt sich gleichfalls die Lage des gefährlichen Querschnittes; diese Linie hat ebenfalls eine treppenförmige Gestalt, doch sind die Verbindungslinien zwischen den Berührungspunkten stellenweise gegen die Horizontale geneigt, infolge der Einwirkung der gleichmäßig verteilten Lasten.

Die Vertikalkraft bei  $a$  ist:  $V_a = A$ , unmittelbar links von  $c$ :  $V_c' = A - \frac{P_4 l_1}{l_4}$ , unmittelbar rechts von  $c$ :  $V_c'' = V_c' - P_1$ , auf der Strecke von  $f$  nach  $d$ :  $V = A - P_1 - P_4$ , auf der Strecke von  $d$  nach  $g$ :  $V_a = A - P_1 - P_2 - P_4$ , unmittelbar links von  $e$ :  $V_e' = A - P_1 - P_2 - P_4 - P_5 \frac{(l_3 - l + l_5)}{l_5}$ , unmittelbar rechts von  $e$ :  $V_e'' = V_e' - P_3$ , bei  $b$ :  $V_b = B$ . Der Wechsel des Vorzeichens findet bei  $d$  statt.

e) Übungsaufgabe.

265) Aufgabe 115. Für den in Figur 234 dargestellten, durch die dort verzeichneten Lasten beanspruchten Balken ist die Lage des gefährlichen Querschnittes, sowie die Grösse des daselbst auftretenden Biegemomentes zu ermitteln.

$$P_1 = 400 \text{ kg} \quad P_2 = 300 \text{ kg} \quad P_3 = 600 \text{ kg} \quad P_4 = 600 \text{ kg} \quad P_5 = 450 \text{ kg}$$

**Auflösung.** Durch Rechnung erhält man:

$$A = \frac{600(10 - 2) + 400(10 - 3) + 300(10 - 6) + 450(10 - 8) + 600(10 - 1)}{10}$$

$$= \frac{4800 + 2800 + 1200 + 900 + 600}{10} = 1030 \text{ kg}$$

$$B = \frac{600 \cdot 2 + 400 \cdot 3 + 300 \cdot 6 + 450 \cdot 8 + 690 \cdot 9}{10}$$

$$= \frac{1200 + 1200 + 1800 + 3600 + 5400}{10} = 1320 \text{ kg}$$

Es ist nun:

$$A + B = 2350 \text{ kg}$$

$V_c' = 1030 - \frac{600 \cdot 3}{4} = 580$   $V_c'' = 580 - 400 = 180$   $V_f = 1030 - 600 - 400 = +30$   
 ebenso gross ist die Vertikalkraft unmittelbar links von  $d$ , rechts von  $d$  dagegen ist sie  $= 30 - 300 = -270$ . Der gefährliche Querschnitt liegt also bei  $d$ .

Das Biegemoment daselbst ist:

$$1030 \cdot 6 - 600 \cdot 4 - 400 \cdot 3 = 6180 - 2400 - 1200 = 2580$$

und auf Centimeter bezogen  $= 258000$ .

Durch Zeichnung erhält man unter Berücksichtigung des Massstabes, Längenmassstab 1 mm = 15 cm, Kräfte massstab 1 mm = 30 kg, für das grösste  $y$  unter  $d$ :

$$y = 21 \text{ mm} = 21 \cdot 15 = 315 \text{ cm}$$

Die Poldistanz beträgt 27,3 mm, daher  $27,3 \cdot 30 = 819 \text{ kg}$ . Es ist somit das grösste Biegemoment:

$$M = 819 \cdot 315 = 258000$$

Das Resultat stimmt also mit dem der Rechnung überein.

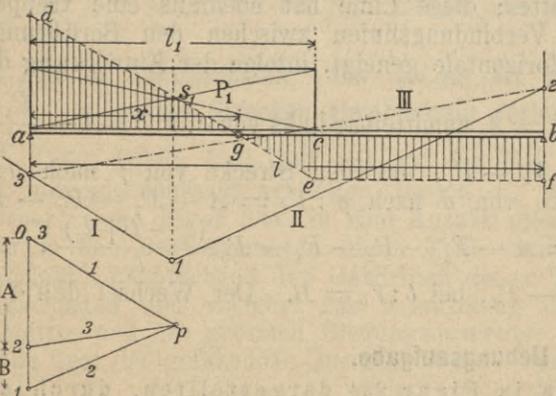
**f) Dritter Belastungsfall. Der Träger ist durch einzelne auf gewisse Strecken gleichmässig verteilte Last beansprucht.**

a) Die Belastung  $P_1$  ist auf eine Strecke  $l_1$  gleichmässig verteilt.

266) Zur Bestimmung der Lage des gefährlichen Querschnittes ermittelt man sich die Auflagerreaktionen  $A$  und  $B$ , sowie die Linie der Vertikalkräfte.

An der Stelle  $a$  ist die Vertikalkraft:  $V_a = A$ , an der Stelle  $c$ :  $V_c = A - P_1$ , dieser Wert wird stets negativ sein, weil  $P_1$  stets grösser als  $A$  sein muss;

Figur 236.



Figur 237.

die Linie der Vertikalkräfte schneidet also den Träger stets auf der Strecke  $ac$ ; im vorliegenden Falle im Punkte  $g$  und hier liegt der gefährliche Querschnitt; an dieser Stelle ist die Vertikalkraft  $= 0$ , d. h. die auf die Strecke  $ac$  treffende Belastung ist gleich der Auflagerreaktion  $A$ ; bezeichnet man  $ag$  mit  $x$ , so erhält man zur Bestimmung von  $x$  die Gleichung:

$$A = \frac{P_1 x}{l_1}$$

oder:

$$163) \dots x = \frac{A l_1}{P_1}$$

Die Auflagerreaktion kann nun rechnerisch oder graphisch bestimmt werden; im letztern Falle ergibt sich die Länge  $x$  graphisch.

β) Die Belastungen  $P_1$  und  $P_2$  sind auf die Strecken  $l_1$  und  $l_2$  gleichmässig verteilt.

267) Mittelst der Auflagerreaktion und der Linie der Vertikalkräfte ergibt sich im Punkte  $i$  der gefährliche Querschnitt. Je nachdem  $P_1 \leq A$  ist, liegt  $i$  auf der Strecke  $\overline{ac}$  oder  $\overline{db}$ .

Würde  $i$  auf letztere Strecke fallen, so hat man zur Bestimmung der Entfernung  $x$  des Punktes  $i$  von dem Punkte  $d$  die Gleichung:

$$A = P_1 + \frac{P_2 x}{l_2}$$

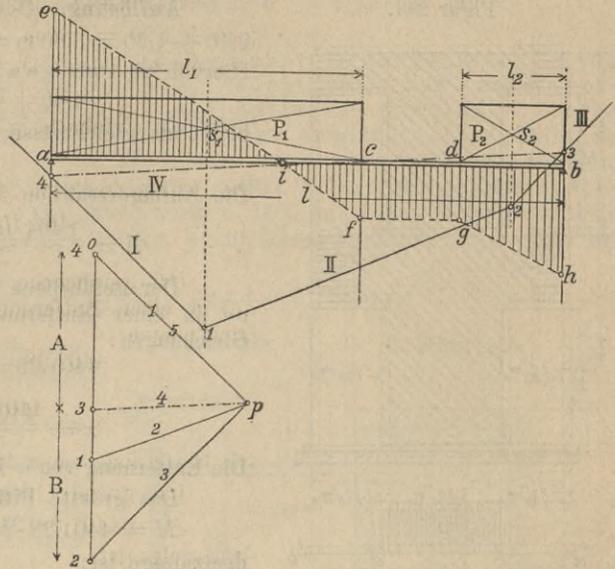
oder:

$$164) \dots x = \frac{(A - P_1) l_2}{P_2}$$

Ist dagegen  $A < P_1$ , so liegt der gefährliche Querschnitt auf der Strecke  $\overline{ac}$  und es dient zur Bestimmung

seiner Entfernung  $x$  vom linken Auflagerpunkte  $a$  die Gleichung 163).

Figur 238.



Figur 239.

### g) Übungsaufgaben.

268) **Aufgabe 116.** Ein I-Träger von 4,50 m Länge hat eine zwei Stockwerk hohe, ein Stein starke Mauer zu tragen, in welcher sich zwei Thüröffnungen befinden, siehe Figur 240, es ist das Trägerprofil zu berechnen.

**Auflösung.** Das Mauergewicht auf die Länge 4,50 — 0,75 = 3,75 m ist

$$3,75 \cdot 0,25 \cdot (4,20 + 3,70) 1600 = 11850 \text{ kg}$$

Hiervon ab zwei halbe Thüröffnungen

$$= 1,50 \cdot 0,25 \cdot 2,8 \cdot 1600 = 1680 \text{ kg}$$

bleibt als gleichmässig verteilte Belastung

des Trägers auf die Strecke  $\overline{ac}$   $P = 10170 \text{ kg}$

Es ist nun:

$$A = \frac{10170 \cdot (4,50 - 1,50)}{4,50} = 6780 \text{ kg}$$

Der gefährliche Querschnitt liegt auf der Strecke  $\overline{ac}$  in einer Entfernung  $x$  von  $a$ , erhältlich aus der Gleichung:

$$x = \frac{6780 \cdot 3}{10170} = 2,0 \text{ m}$$

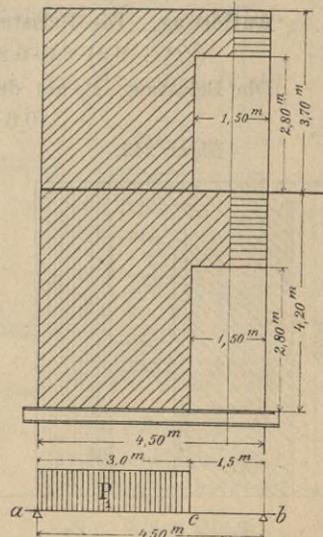
Für das Biegemoment erhält man:

$$M = Ax - \frac{Ax}{2} = \frac{Ax}{2} = 6780 \cdot 100 = 678000$$

daher ist  $W = \frac{678000}{750} = 904$ .

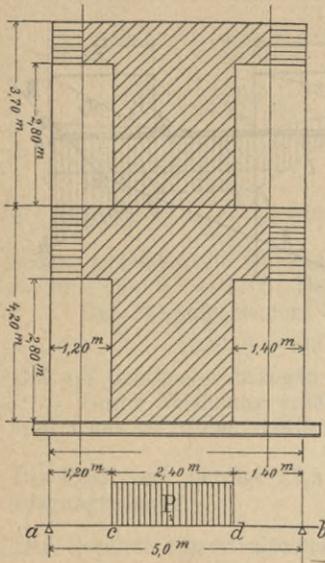
Diesem Werte entsprechen zwei Träger No. 28 mit einem Gesamt- $W = 1094$ .

Figur 240.



269) **Aufgabe 117.** Ein I-Träger hat eine zwei Stockwerk hohe, ein Stein starke Mauer zu tragen, welche durch Thüröffnungen, s. Fig. 241, unterbrochen ist. Es ist das Trägerprofil zu berechnen.

Figur 241.



**Auflösung.** Gewicht der Mauer auf die Länge

$$2,40 + 1,20 = 3,60 \text{ m} = 3,6 \cdot 0,25 \cdot 7,90 \cdot 1600 = 11376 \text{ kg}$$

Hiervon ab zwei ganze Thüröffnungen

$$(1,40 + 1,20) \cdot 2,80 \cdot 0,25 \cdot 1600 = 2912 \text{ kg}$$

bleibt als gleichmässig verteilte Belastung

$$\text{auf der Strecke } \overline{cd} = 8464 \text{ kg}$$

Die Auflagerreaktion  $A$  ist:

$$A = \frac{8464 \cdot (5,0 - 2,4)}{5,0} = 4401,28 \text{ kg}$$

Der gefährliche Querschnitt liegt auf der Strecke  $\overline{cd}$  in einer Entfernung  $x$  von  $c$  erhältlich aus den Gleichungen:

$$4401,28 = \frac{8464 \cdot x}{2,4}$$

$$x = \frac{4401,28 \cdot 2,4}{8464} = 1,24 \text{ m} = 124 \text{ cm}$$

Die Entfernung von  $a$  ist daher  $= 120 + 124 = 244 \text{ cm}$ .

Das grösste Biegemoment ist:

$$M = 4401,28 \cdot 244 - 4401,28 \cdot 62 = 801023$$

demzufolge ist:

$$W = \frac{801023}{750} = 1013$$

Diesem Werte genügen zwei Träger No. 28 mit einem Gesamt- $W = 2 \cdot 547 = 1094$ .

270) **Aufgabe 118.** Ein I-Träger ist durch eine ein Stein starke Mauer von 6 m Höhe in der in Figur 142 dargestellten Weise belastet. Es ist das Trägerprofil zu berechnen.

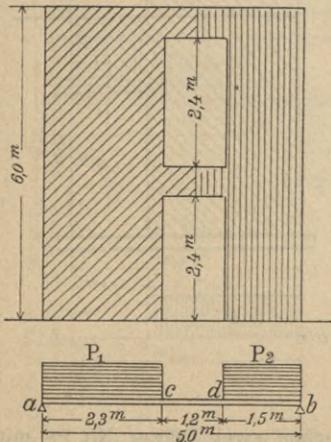
**Auflösung.** Die Belastung  $P_1$  auf der Strecke  $\overline{ac}$  beträgt:

$$(2,3 + 0,6) \cdot 6,0 \cdot 0,25 \cdot 1600 - 1,20 \cdot 2,4 \cdot 0,25 \cdot 1600 = 6960 - 1152 = 5808 \text{ kg}$$

Die Belastung  $P_2$  auf der Strecke  $\overline{db}$  ist:

$$(0,6 + 1,5) \cdot 6,0 \cdot 0,25 \cdot 1600 - 1152 = 5040 - 1152 = 3888 \text{ kg}$$

Figur 242.



Die Auflagerreaktion  $A$  ist:

$$A = \frac{5808 (5,0 - 1,15) + 3888 \cdot 0,75}{5} \\ = \frac{22360,80 + 2916}{5} = 5055,36$$

Die Vertikalkraft bei  $c$  ist:

$$5055,36 - 5888 = - 832,64$$

der gefährliche Querschnitt liegt also auf der Strecke  $\overline{ac}$  in einer Entfernung  $x$  von  $a$  und es ist:

$$5055,36 = \frac{5888 \cdot x}{2,3}$$

also:

$$x = \frac{5055,36 \cdot 2,3}{5888} = 1,93 \text{ m} = 193 \text{ cm}$$

das grösste Biegemoment ist:

$$M = \frac{5055 \cdot 36 \cdot 193}{2} = 487842,24$$

Figur 243.

demnach ist:

$$W = \frac{487842,24}{750} = 650$$

hierfür genügen zwei Träger No. 24 mit einem Gesamt- $W = 2 \cdot 357 = 714$ .

271) **Aufgabe 119.** Zur Ueberdeckung einer Schaufensteröffnung sind Walzeisen I-Träger zu verwenden, welche teils auf dem Mauerwerk, teils auf einer gusseisernen Wand auflagen und auf letzterer gestossen sind. Es sind die Trägerprofile zu ermitteln, desgleichen ist die Wand zu berechnen, wenn sie 4,50 m hoch sein soll; ausserdem ist zu untersuchen, ob in den Auflagern  $a$  und  $b$  Unterlagsplatten erforderlich sind. Belastungen: 1 cbm Mauerwerk = 1600 kg, 1 lauf. Meter Balkenlage = 500 kg, 1 lauf. Meter Dachbalkenlage 375 kg, 1 lauf. Meter Dachbelastung = 250 kg.

**Auflösung.** Belastungsberechnung per lauf. Meter.

1) Gewicht der Mauer bis zur Brüstung im ersten Stock einschliesslich der Balkenlage:

$$(0,80 \cdot 0,64 + 0,60 \cdot 0,51) \cdot 1600 + \frac{5,60}{2} \cdot 500$$

gleich rund 2709 kg

2) Gewicht der vollen Front von der Brüstung im ersten Stock an gerechnet einschliesslich der Balkenlagen und der Dachbelastung:

$$[(3,10 - 0,60 + 3,0) \cdot 0,51 + (3,0 + 2,8) \cdot 0,38 + 1,20 \cdot 0,25] \cdot 1600 + \frac{2 \cdot 5,73}{2} \cdot 500$$

$$+ \frac{5,86 \cdot 375}{2} + \frac{5,86 \cdot 250}{2}$$

gleich rund 13200 kg

3) Gewicht einer vertikalen Fensterreihe:

$$(2,10 + 2,0 + 2,0 + 1,80) \cdot 0,9 \cdot 1600 = 11376 \text{ kg}$$

Belastung des Trägers  $ac$ .

1) Auf die ganze Länge eine gleichmässig verteilte Last:

$$P_1 = 1,5 \cdot 2709 \text{ gleich rund } 4100 \text{ kg}$$

2) Auf die Länge  $ad$  eine gleichmässig verteilte Last:

$$P_2 = (0,35 + 0,45) \cdot 13200 - \frac{1}{2} \text{ Fensterreihe}$$

gleich rund 4900 kg.

3) Auf die Länge  $ec$  eine gleichmässig verteilte Last:

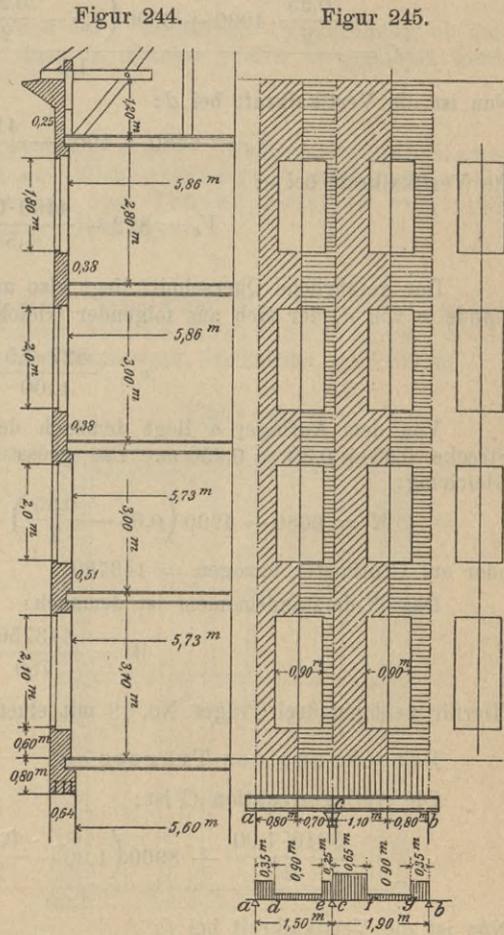
$$P_3 = (0,25 + 0,45) \cdot 13200 - \frac{1}{2} \text{ Fensterreihe}$$

gleich rund 3600 kg.

Belastung des Trägers  $cb$ .

1) Auf die ganze Länge eine gleichmässig verteilte Last:

$$Q_1 = 1,9 \cdot 2709 = 5210 \text{ kg}$$



Figur 246.

2) Auf die Länge  $\overline{cf}$  eine gleichmässig verteilte Last:

$$Q_2 = (0,65 + 0,45) \cdot 13200 - \frac{1}{2} \text{ Fensterreihe} = 8900 \text{ kg}$$

3) Auf die Länge  $\overline{gb}$  eine gleichmässig verteilte Last:

$$Q_3 = (0,35 + 0,45) \cdot 13200 - \frac{1}{2} \text{ Fensterreihe} = 4900 \text{ kg}$$

Berechnung des Trägers  $ac$ .

Die Auflagerreaktion  $A$  ist:

$$A = \frac{4100 \cdot 0,75 + 4900 \cdot 1,325 + 3600 \cdot \frac{0,25}{2}}{1,5} = 6680 \text{ kg}$$

Die Auflagerreaktion  $C$  ist:

$$C = \frac{\frac{0,35}{2} \cdot 4900 + 3600 \left(1,5 - \frac{0,25}{2}\right) + 4100 \cdot 0,75}{1,5} = 5920 \text{ kg}$$

Nun ist die Vertikalkraft bei  $d$ :

$$V_d = 6680 - 4900 - \frac{4100 \cdot 1,35}{1,5} = + 822$$

die Vertikalkraft bei  $e$ :

$$V_e = 822 - \frac{4100 \cdot 0,9}{1,5} = - 1638$$

Der gefährliche Querschnitt liegt also auf der Strecke  $\overline{de}$  und zwar in einem Abstände  $x$  von  $d$ , der sich aus folgender Gleichung berechnet:

$$x = \frac{822 \cdot 1,5}{4100} = 0,30$$

Von dem Auflager  $a$  liegt demnach der gefährliche Querschnitt entfernt um die Strecke  $0,35 + 0,30 = 0,650$  m. Das grösste Biegemoment berechnet sich aus der Gleichung:

$$M = 6680 - 4900 \left(0,65 - \frac{0,35}{2}\right) - \frac{4100 \cdot 0,65}{1,5} \cdot \frac{0,65}{2} = 1437,5$$

oder auf Centimeter bezogen = 143750.

Das Widerstandsmoment ist demnach:

$$W = \frac{143750}{750} = 191$$

Hierfür genügen drei Träger No. 13 mit einem Gesamt- $W = 3 \cdot 67,8 = 203,4$ .

Berechnung des Trägers  $cb$ .

Die Auflagerreaktion  $C$  ist:

$$C = \frac{\frac{5210 \cdot 1,90}{2} + 8900 \left(1,90 - \frac{0,65}{2}\right) + 4900 \cdot \frac{0,35}{2}}{1,90} = 11179 \text{ kg}$$

Nun ist die Vertikalkraft bei  $f$ :

$$V_f = 11179 - 8900 - \frac{5210 \cdot 0,35}{1,9} = + 1320 \text{ kg}$$

die Vertikalkraft bei  $g$ :

$$V_g = 1320 - \frac{4100 \cdot 0,9}{1,9} = - 1347 \text{ kg}$$

Der gefährliche Querschnitt liegt also auf der Strecke  $\overline{fg}$  in einer Entfernung  $x$  von  $f$  und man hat:

$$x = \frac{1320 \cdot 1,9}{3210} = 0,48 \text{ m}$$

daher ist die Entfernung vom Punkte  $c = 0,65 + 0,48 = 1,13 \text{ m}$ .

Das grösste Biegemoment ist:

$$M = 11179 \cdot 1,13 - 8900 \left( 1,13 - \frac{0,65}{2} \right) - \frac{5210 \cdot 1,13}{1,9} \cdot \frac{1,13}{2} = 3717,77$$

oder auf Centimeter bezogen = 371777.

Das Widerstandsmoment ist demnach:

$$W = \frac{317777}{250} = 495$$

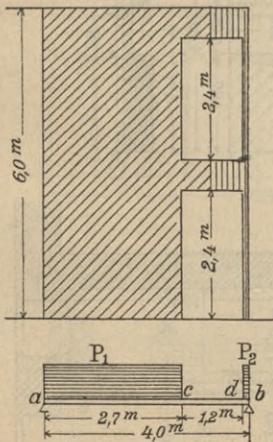
Hierfür genügen drei Träger No. 19 mit einem Gesamt- $W = 3 \cdot 187 = 561$ .

Die Berechnung der gusseisernen Wand bei  $c$ , ebenso die Untersuchung, ob bei  $a$  und  $b$  Unterlagsplatten erforderlich sind, kann in gleicher Weise durchgeführt werden wie in Aufgabe No. 112.

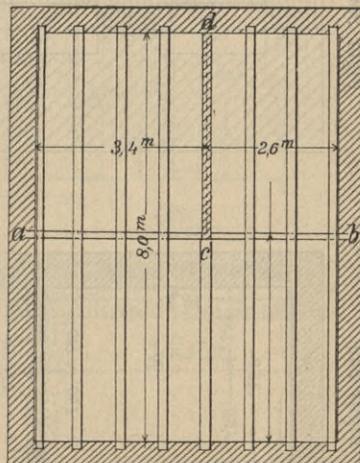
272) **Aufgabe 120.** Zur Auflagerung einer 1 Stein starken Mauer, in welcher sich, siehe Figur 247, zwei Thüröffnungen befinden, sollen I-Träger verwendet werden. Es ist das Trägerprofil zu ermitteln. 1 cbm Mauerwerk, Hohlsteine vorausgesetzt, = 1100 kg.

273) **Aufgabe 121.** Ein Unterzug  $ab$ , siehe Figur 248, hat eine Balkenlage, sowie eine 3,5 m hohe,  $\frac{1}{2}$  Stein starke Mauer zu tragen. Es ist das Trägerprofil zu ermitteln. 1 cbm Mauerwerk, Hohlsteine, = 1100 kg.

Figur 247.



Figur 248.



274) **Aufgabe 122.** In der Grundrissanordnung, siehe Figur 249, sind für die im Kellergeschoss erforderlichen eisernen Träger I bis V angedeutet.

Träger I und IV sind Kappenträger und haben das Gewicht der Gewölbkappen per Quadratmeter 700 kg aufzunehmen.

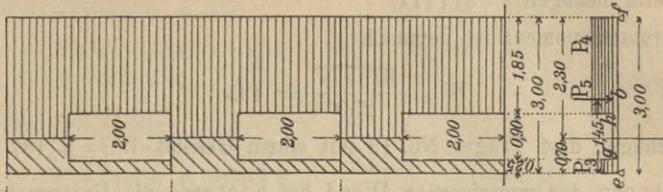
Träger II hat eine 1 Stein starke Mauer nach der Anordnung, siehe Figur 250, zu tragen.

Träger III trägt eine  $1\frac{1}{2}$  Stein starke Mauer, siehe Figur 252, ausserdem dient er dem Träger II als Auflager.

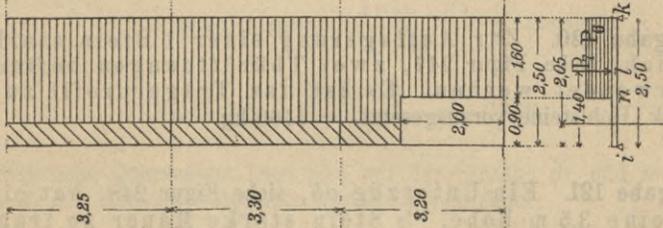
Träger V hat ebenfalls eine  $1\frac{1}{2}$  Stein starke Mauer zu tragen, siehe Figur 251, und ausserdem dem Träger IV als Auflager zu dienen.

Es sind die erforderlichen Trägerprofile zu berechnen.

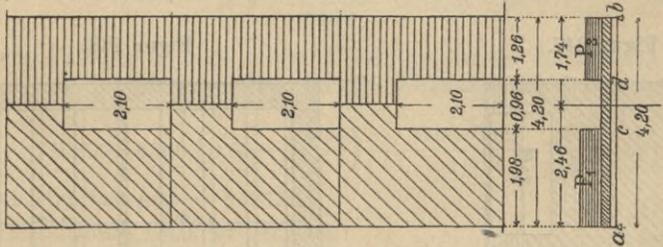
Figur 252.



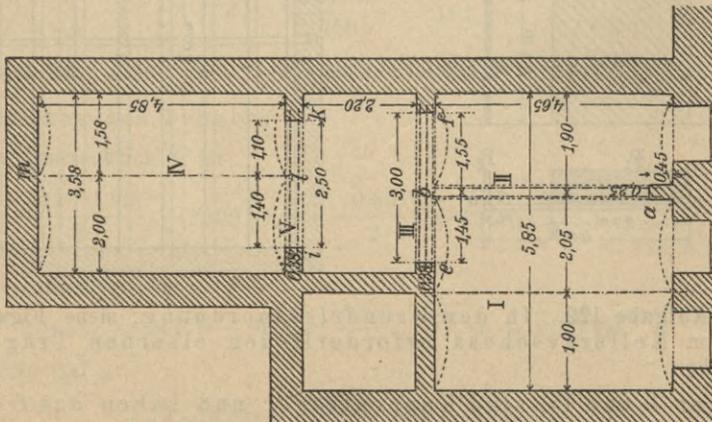
Figur 251.



Figur 250.

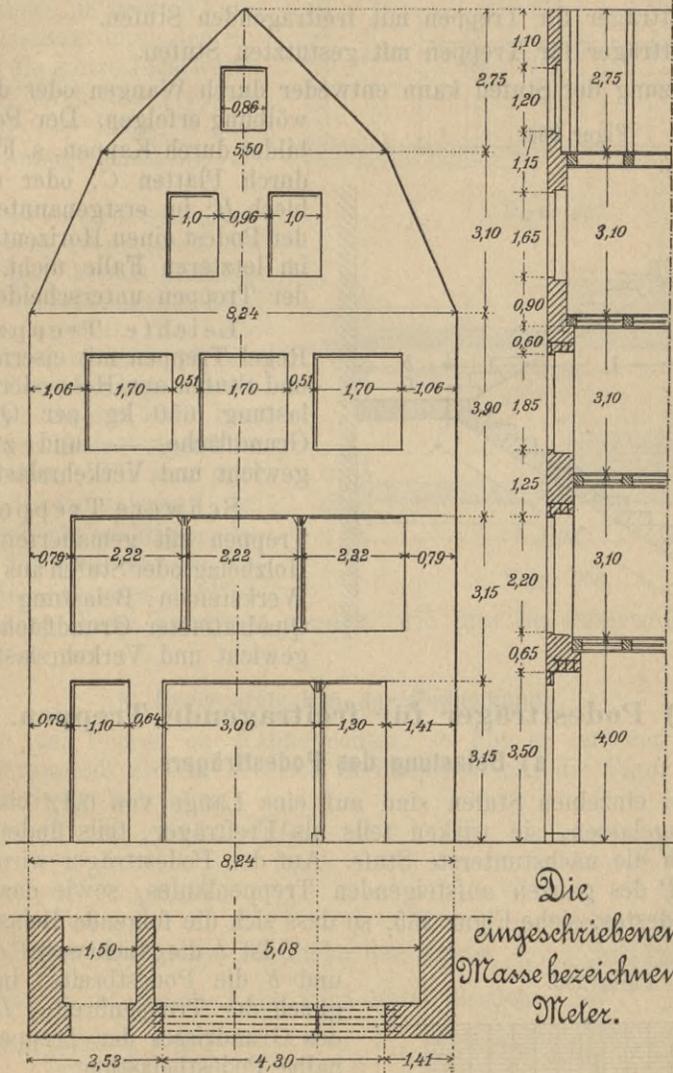


Figur 249.



275) **Aufgabe 123.** Für die nebenstehend, siehe Figur 253, skizzierte Schaufensteranlage sind die erforderlichen Träger, sowie die gusseiserne Wand zu berechnen unter der Annahme, dass die Träger über der Wand gestossen sind. 1 cbm Mauerwerk = 1600 kg.

Figur 253.



## O. Berechnung der Treppenpodestträger.

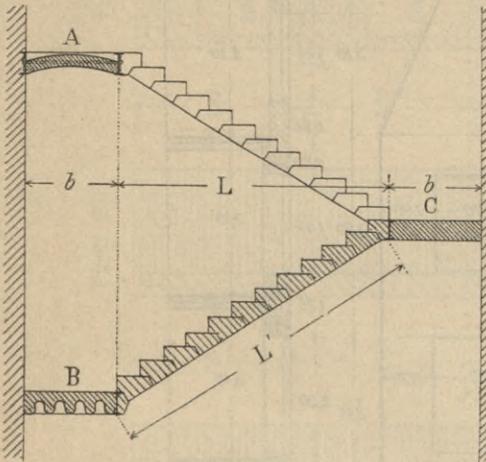
### 1) Arten der Podestträger.

276) Zur Auflagerung der Treppenläufe dienen die Podestträger; man unterscheidet:

- 1) Podestträger für Treppen mit freitragenden Stufen.
- 2) Podestträger für Treppen mit gestützten Stufen.

Die Stützung der Stufen kann entweder durch Wangen oder durch Unterwölbung erfolgen. Der Podest ist gebildet durch Kappen, s. Figur 254 A,

Figur 254.



durch Platten C, oder durch Wellblech B; im erstgenannten Falle übt der Podest einen Horizontalschub aus, im letzteren Falle nicht. Bezüglich der Treppen unterscheidet man:

Leichte Treppen, in der Regel Treppen mit eisernen Wangen und Stufen aus Holz oder Eisen; Belastung 650 kg per Quadratmeter Grundfläche — und zwar Eigengewicht und Verkehrslast.

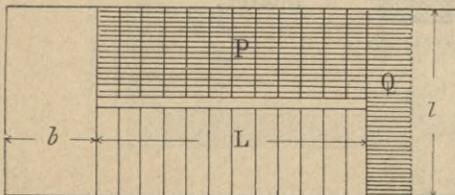
Schwere Treppen, das sind Treppen mit gemauerten Stufen mit Holzbelag oder Stufen aus Beton bzw. Werksteinen; Belastung 1000 kg per Quadratmeter Grundfläche — Eigengewicht und Verkehrslast.

### 2) Podestträger für freitragende Treppen.

#### a) Belastung des Podestträgers.

277) Die einzelnen Stufen sind auf eine Länge von 0,12 bis 0,25 m in die Mauer eingelassen, sie wirken teils als Freitragler, teils finden sie Unterstützung durch die nächstunterste Stufe. Auf den Podestträger wird übertragen das Gewicht  $P$  des ganzen aufsteigenden Treppenlaufes, sowie das Gewicht  $Q$  des halben Podestes, siehe Figur 255, so dass sich die folgende Belastung ergibt.

Figur 255.



Ist  $l$  die Lichtweite des Trägers und  $b$  die Podestbreite, in der Regel gleich der Treppenbreite,  $L$  die Länge des Grundrisses der Treppe, so ist die halbe Podestbelastung:

$$Q = \frac{bl}{2} \cdot 1000 \text{ kg}$$

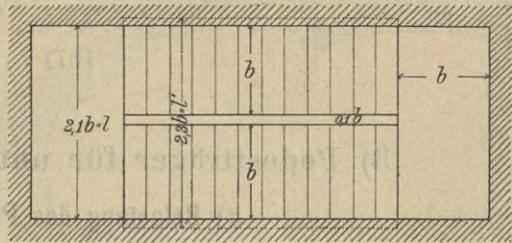
Das Gewicht eines Treppenlaufes beträgt:

$$P = bL \cdot 1000 \text{ kg}$$

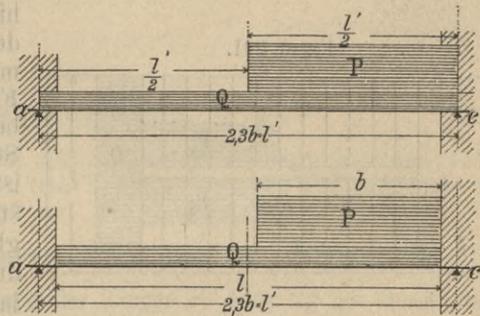
278) Bei der Berechnung des Podestträgers hat man zu unterscheiden zwischen der Lichtweite  $l$  und der Stützweite  $l'$ ; unter letzterer ist die Ent-

fernung der mathematischen Auflagerpunkte des Trägers verstanden, man kann annehmen, dass  $l' = 2,3b$  ist, siehe Figur 256. Die Belastung eines Podestträgers ist nun nach der Figur 257 oder nach der Figur 258 festzusetzen; im ersten Falle ist die Podestbelastung über die ganze, die Belastung durch den Treppenlauf über die halbe Stützweite als gleichmässig verteilt angenommen, im zweiten Falle reicht die Belastung durch den Podest nur über die ganze Lichtweite, die Belastung durch den Treppenlauf nur auf die Breite  $b$  des Treppenlaufes als gleichmässig verteilte Last.

Figur 256.



Figur 257.



Figur 258.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass der aufsteigende Treppenlauf auf den Podestträger keinen Horizontalschub und der absteigende Lauf keinen Druck ausübt, dass also die Treppenstufen nicht durch ihre gegenseitige Verspannung, sondern lediglich durch die Art ihrer Einlagerung in der Umfassungsmauer getragen werden. Will man aber doch einen Horizontalschub des Treppenlaufes berücksichtigen, also freitragende Treppen wie ein Gewölbe behandeln, so muss der Träger in ähnlicher Weise berechnet werden, wie dies bei unterwölbten Treppen der Fall ist.

### b) Horizontalschub der Podestkappe.

279) Ist der Podest ein Kappenpodest, so übt er auf den Podestträger einen Horizontalschub  $H$  aus, der sich in Rücksicht auf die Figur 259 aus der folgenden Gleichung berechnet.

$$\text{Es ist:} \quad Qx = Hy$$

$$\text{also:} \quad 165) \dots H = \frac{Qx}{y}$$

In der Regel beträgt die Pfeilhöhe der Kappe  $\frac{1}{8}$  der Spannweite  $l$ ; in diesem Falle wird unter Berücksichtigung, dass  $x = \frac{1}{4}l$  ist:

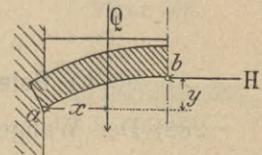
$$\frac{a \cdot 1}{4} l = H \cdot \frac{1}{8} l$$

$$166) \dots H = 2Q$$

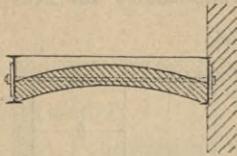
d. h. der von der Podestkappe auf den Podestträger ausgeübte Horizontalschub ist gleich der Podestbelastung.

280) Zweckmässig lässt man diesen Horizontalschub nicht durch den Podestträger, sondern durch eigens zu diesem Zwecke angeordnete Zuganker, siehe

Figur 259.



Figur 260, aufnehmen. Werden vier solche Zuganker angeordnet, so ergibt sich der Durchmesser  $d$  der kreisrunden Zugstange aus der Gleichung:



$$\frac{4d^2\pi}{4} = 750 = 2Q$$

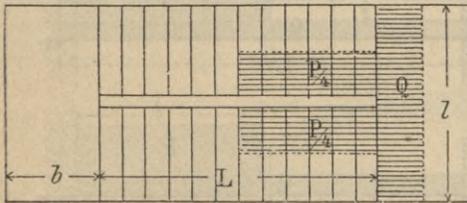
$$167) \dots d = \sqrt{\frac{2Q}{\pi 750}}$$

### 3) Podestträger für unterstützte Treppen.

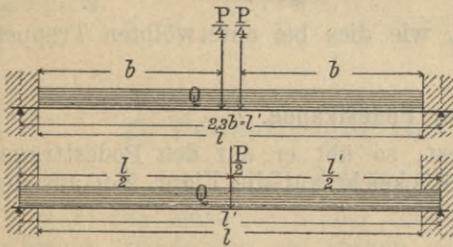
#### a) Belastung des Podestträgers.

281) Von jedem Treppenlaufe kommt die eine Hälfte der Belastung auf die Mauer, die andere Hälfte auf die innere Treppenwange, welche ihrerseits

Figur 261.



Figur 263.



Figur 262.

hiervon wieder die Hälfte auf die Podestträger überträgt. Es ergibt sich somit für die Podestträger die in der Figur 261 dargestellte Belastung, hierbei hat man wieder zwischen Licht- und Stützweite zu unterscheiden. In Fig. 262 ist angenommen, dass die Podestbelastung sich auf die ganze Stützweite gleichmässig verteilt und die beiden durch die Wangen übertragenen Belastungen zu einer in der Mitte wirkenden Einzellast  $\frac{P}{2}$  vereinigt sind. In

Figur 263 ist angenommen, die Podestbelastung verteile sich gleichmässig auf die freie Länge des Trägers, die Belastungen durch die Treppenläufe wirken als zwei Einzellasten  $\frac{P}{4}$  in einem Abstand von der Trägermitte gleich der halben Durchsicht. Man kann den Träger sowohl nach der einen wie nach der anderen Belastungsweise berechnen.

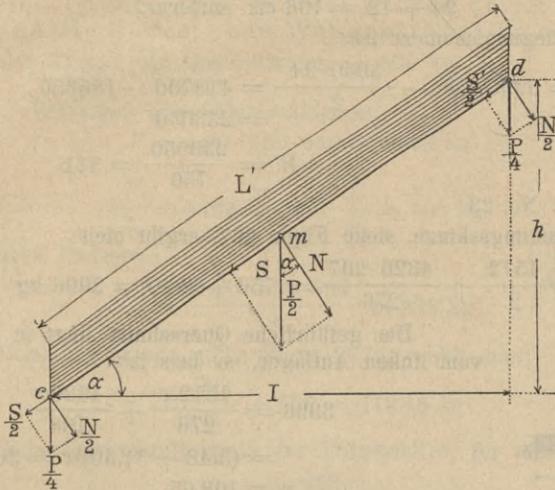
#### b) Belastung und Berechnung des Wangenträgers.

282) Der Wangenträger ist auf seine ganze Länge durch einen halben Treppenlauf, also durch  $\frac{P}{2}$  belastet, siehe Figur 264. Bezeichnet  $\alpha$  den Neigungswinkel der Treppe gegen die Horizontale, so ist die den Träger auf Biegung beanspruchende Kraft  $N = \frac{P}{2} \cos \alpha$ , die Länge des Trägers aber  $L' = \frac{L}{\cos \alpha}$ ; für die Grösse des Biegemomentes gilt also die Gleichung:

$$M = \frac{1}{8} \frac{P}{2} \cos \alpha \frac{L}{\cos \alpha} = \frac{1}{8} \frac{P}{2} L$$

Das Biegemoment ist von der Neigung  $\alpha$  der Treppe unabhängig.

Figur 264.



### 4) Übungsaufgaben.

283) **Aufgabe 124.** Für die, s. Fig. 265, skizzierte Treppenanlage sollen die Podestträger berechnet werden. Die Treppe ist eine freitragende und schwere. Die Steigung beträgt 17 cm, die Auftrittsweite 30 cm. Der Podest ist ein Kappenpodest mit einer Pfeilhöhe =  $\frac{1}{8}$  Spannweite; die Stockwerkshöhe ist 4,42 m. Belastung der Treppe = 1000 kg per Quadratmeter

**Auflösung.** Für den vorliegenden Fall hat man  $442:17 = 26$  Steigungen, demnach 24 Auftritte.

Die Länge der Treppe im Grundriss beträgt also:

$$\frac{24}{2} \cdot 0,30 = 3,60 \text{ m}$$

Die Belastung eines Treppenlaufes ist:

$$P = 3,60 \cdot 1,20 \cdot 1000 = 4320 \text{ kg}$$

Die halbe Podestbelastung ist:

$$Q = \frac{1,20 (2 \cdot 1,20 + 0,12)}{2} \cdot 1000 = 1512 \text{ kg}$$

Die Stützweite  $l$  beträgt:

$$2,3 \cdot 1,2 = 2,76 \text{ m}$$

Nach der Belastungsskizze, siehe Figur 266, ist:

$$A = \frac{1512}{2} + \frac{4320 \cdot 204}{276} = 756 + 3193 = 3949 = \text{rund } 3950 \text{ kg}$$

Der gefährliche Querschnitt liegt auf der Strecke  $cd$  in einer Entfernung  $x$  von  $c$ , die sich aus der Gleichung ergibt:

$$3950 = \frac{1512x}{252} + \frac{4320x}{120}$$

oder:

$$3950 = 42x$$

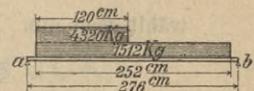
oder:

$$x = \frac{3950}{42} = 94 \text{ cm}$$

Figur 265.



Figur 266.



In Figur 266 fehlen die Bezeichnungen  $c$  und  $d$ . Punkt  $c$  ist der linke, Punkt  $d$  der rechte Endpunkt der Podestbelastung.

Vom linken Auflager  $a$  liegt der gefährliche Querschnitt also um  
 $94 + 12 = 106$  cm entfernt.

Das grösste Biegemoment ist:

$$M = 3950 \cdot 106 - \frac{3950 \cdot 94}{2} = 418700 - 185650 = 233050$$

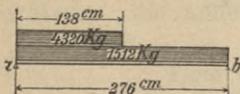
$$W = \frac{233050}{750} = 311$$

hierfür genügt *N. P. No. 23*.

Nach der Belastungsskizze, siehe Figur 267, ergibt sich:

$$A = \frac{1512}{2} + \frac{4320 \cdot 207}{276} = 756 + 3240 = 3996 \text{ kg}$$

Figur 267.



Der gefährliche Querschnitt liegt in einer Entfernung  $x$  vom linken Auflager, so dass ist:

$$3996 = \frac{1512x}{276} + \frac{4320x}{138}$$

$$= (5,48 + 31,30)x = 36,78x$$

$$x = 108,65$$

Das grösste Biegemoment ist:

$$M = \frac{Ax}{2} = \frac{3996 \cdot 108,65}{2} = 217083$$

$$W = \frac{217083}{750} = 289$$

Diesem Werte entspricht gleichfalls *N. P. No. 23*.

Bei der gewählten Podestkappe ist der Horizontalschub des Podestes gleich:

$$2 \cdot 1512 = 3024 \text{ kg}$$

Zu dessen Aufnahme sind vier Zugstangen erforderlich; der Durchmesser einer Stange beträgt:

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot 1512}{3,14 \cdot 750}} = \sqrt{1,28} = 1,1 \text{ cm oder rund 12 mm}$$

**Anmerkung 41.** Wollte man den Kappenschub durch den Podestträger allein aufnehmen lassen, so müsste derselbe auf zusammengesetzte Biegezugfestigkeit berechnet werden.

Das von dem Horizontalschub erzeugte grösste Biegemoment ist:

$$M = \frac{2 \cdot 1512 \cdot 276}{8} = 104328$$

Das grösste Biegemoment, hervorgerufen durch die Podestbelastung, ist:

$$233050$$

wählt man nun *N. P. No. 36* mit einem  $W_z = 1098$  und einem  $W_y = 134$ , so ist:

$$\sigma = \frac{233050}{1098} + \frac{104328}{134} = 212 + 778 = 990$$

das gewählte Profil ist also zu klein.

Nimmt man *N. P. No. 38* an, so hat man hierfür  $W_z = 1274$ ,  $W_y = 153$ , daher:

$$\sigma = \frac{233050}{1274} + \frac{104328}{153} = 183 + 682 = 865$$

das Profil genügt.

Man sieht aus Vorstehendem, dass die Träger bedeutend grösser und demgemäss auch schwerer ausfallen, wenn sie den Kappenschub für sich allein aufnehmen müssen, als dies der Fall ist, wenn der Horizontalschub durch besondere Konstruktionsteile abgefangen wird.

284) **Aufgabe 125.** Die in Figur 265 in ihren Ausmassen gegebene Treppe soll eine leichte sein und die Stufen durch Wangen gestützt werden. Es sind die Podest- und Wangenträger zu berechnen.

Belastung der Treppe per Quadratmeter = 650 kg.

**Auflösung.** Belastung eines Treppenlaufes:

$$P = 1,20 \cdot 3,60 \cdot 650 = 2808 \text{ kg}$$

daher ist:

$$\frac{P}{2} = 1404 \text{ kg und } \frac{P}{4} = 702 \text{ kg}$$

Belastung des halben Podestes:

$$Q = \frac{1,20 \cdot 2,52 \cdot 650}{2} = 983 \text{ kg}$$

Nach der Belastungsskizze, siehe Figur 267a, erhält man:

$$A = \frac{983}{2} + 702 = 1193,5 \text{ kg}$$

Der gefährliche Querschnitt ist in der Trägermitte; für diese Stelle ist:

$$M = 1193,5 \cdot 138 - \frac{983}{2} \cdot 63 - 702 \cdot 6$$

$$= 164703 - 30964,5 - 4212 = 129527$$

$$W = \frac{129527}{750} = 173$$

hierfür genügt N. P. No. 19 mit einem  $W = 187$ .

Nach der Belastungsskizze, siehe Figur 268, hat man:

$$M = \frac{1}{8} \cdot 983 \cdot 276 + \frac{1}{4} \cdot 1404 \cdot 276$$

$$= 33913,5 + 96876 = 130789,5$$

$$W = \frac{130789,5}{750} = 174,$$

hierfür genügt ebenfalls N. P. No. 19.

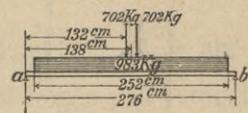
Berechnung des Wangenträgers.

Es ist:

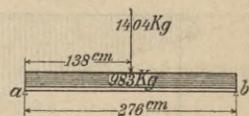
$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{1404 \cdot 360}{750} = 84,24$$

hierfür genügt N. P. No. 15 mit einem  $W = 99$ .

Figur 267 a.



Figur 268.

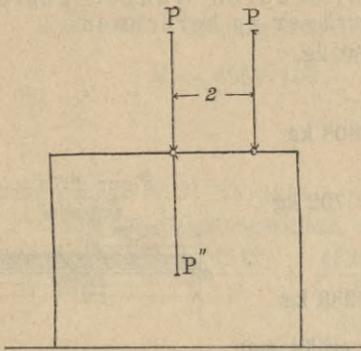


## P. Der excentrische Druck.

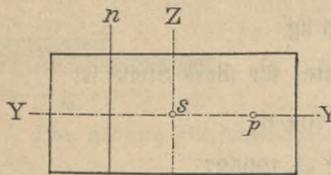
### 1) Spannungsverteilung in einem durch excentrischen Druck beanspruchten Querschnitt.

#### a) Wirkung der excentrischen Druckkraft.

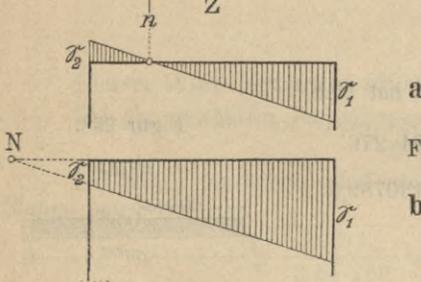
285) Fällt der Angriffspunkt  $p$  einer Druckkraft  $P$ , siehe Figur 269, nicht mit dem Schwerpunkte  $s$  des Querschnittes zusammen, so sagt man, die Kraft wirke excentrisch. In diesem Falle kann man die Kraft  $P$  parallel zu sich selbst nach dem Schwerpunkt des Querschnittes verlegen und erhält dann:



Figur 269.



Figur 270.



Figur 271.

- 1) Die centrisch wirkende Druckkraft  $P$ .
- 2) Das Kräftepaar  $PP''$ .

Erstere Kraft  $P$  erzeugt im Querschnitt eine Druckspannung:

$$\sigma_a = \frac{P}{F}$$

das Kräftepaar bewirkt eine Biegungsspannung:

$$\sigma_b = \frac{M}{W}$$

welche sowohl eine Zug- als auch eine Druckspannung sein kann.

Die Gesamtspannung, welche im Querschnitt per Flächeneinheit auftreten kann, ist demnach:

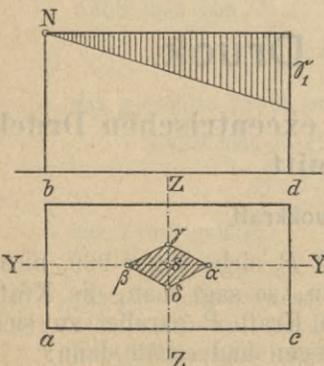
$$168) \dots \sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{M}{W} = \frac{P}{F} \pm \frac{Pz}{W}$$

Je nach der Lage des Angriffspunktes  $p$  der Kraft  $P$  kann die Neutralachse die Begrenzung des Querschnittes schneiden oder ausserhalb derselben liegen, siehe Fig. 271 a und b; im ersten Falle treten im Querschnitte sowohl Zug- als auch Druckspannungen auf, im zweiten Falle nur Druckspannungen. Das letztere ist auch der Fall, wenn die Neutralachse die Querschnittsbegrenzung berührt oder mit ihr zusammenfällt.

**b) Centralkern oder Kernfläche eines Querschnittes.**

286) Hat man einen rechteckigen Querschnitt, s. Fig. 272, so muss, sollen in demselben durch eine excentrisch wirkende Druckkraft nur Druckspannungen hervorgerufen werden, die Neutralachse entweder mit einer der vier Rechtecksseiten zusammenfallen oder durch eine der Ecken des Rechtecks gehen, ohne mit dem letzteren selbst noch weitere Punkte gemeinsam zu haben. Liegt die Neutralachse z. B. in  $ab$  oder  $cd$ , siehe Fig. 272, so ist die Spannung daselbst gleich Null und man hat die Gleichung:

Figur 272.



$$169) \dots 0 = \frac{P}{F} + \frac{Pz}{W}$$

oder, wenn die Rechtecksseiten  $ab$  und  $ac$  mit  $b$  und  $h$  bezeichnet werden:

$$* 0 = \frac{P}{bh} + \frac{Pz}{\frac{1}{6}bh^2}$$

Hieraus folgt aber für die Entfernung  $z$  des An-

griffspunktes der Kraft  $P$  von dem Schwerpunkt  $s$  des Querschnittes die Beziehung:

$$170) \dots z = \frac{1}{6}h$$

Für den Fall, dass die Neutralachse mit  $ac$  oder  $bd$  zusammenfällt, ergibt sich für die Entfernung  $y$  des Angriffspunktes von  $P$  vom Schwerpunkt  $s$  des Querschnittes:

$$171) \dots y = \frac{1}{6}b$$

Bestimmt man auf den Hauptachsen  $Z$  und  $Y$  die Punkte  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  so, dass  $\alpha$  und  $\beta$  um  $\frac{1}{6}h$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  um  $\frac{1}{6}b$  von  $s$  entfernt liegen und verbindet die Punkte  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  miteinander, so begrenzen die Verbindungslinien einen Teil des Querschnittes, der Centralkern oder auch die Kernfläche des Querschnittes genannt wird, und für den folgender Satz Geltung hat:

„Soll eine excentrisch wirkende Druckkraft in einem Querschnitte nur Druckspannungen hervorrufen, so darf der Angriffspunkt der Kraft nicht ausserhalb des Centralkernes liegen.“

Bei Steinkonstruktionen dürfen keine Zugspannungen auftreten, es soll daher stets der Angriffspunkt der äusseren Kraft innerhalb oder auf der Umgrenzung des Centralkernes liegen. Die Begrenzung des Centralkernes heisst der Kernrand des Querschnittes.

### c) Grösse der Spannung im Querschnittsrande (Randspannung) bei excentrischer Druckbelastung.

$\alpha$ ) Der Angriffspunkt der äusseren Kraft liegt in dem Kernrande auf einer Hauptachse des Querschnittes.

287) Ist der Querschnitt als rechteckig vorausgesetzt, so hat man:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{P}{F} + \frac{P \frac{1}{6}h}{W} \\ &= \frac{P}{bh} + \frac{P \frac{1}{6}h}{\frac{1}{6}bh^2} \end{aligned}$$

oder:

$$172) \dots \mathcal{S} = \frac{2P}{F}$$

Die Spannung  $\mathcal{S}$  ist also doppelt so gross als bei centrischer Druckwirkung. Will man aber keine grössere Spannung hervorrufen als die zulässige Faser-spannung des Materiales beträgt, so darf bei excentrischer Belastung die äussere Kraft nur halb so gross sein, als bei centrischer Belastung.

Dasselbe Resultat hätte sich auch ergeben, wenn der Angriffspunkt der äusseren Kraft auf dem Kernrande in der Achse  $Y$  angenommen worden wäre.

β) Der Angriffspunkt der äusseren Kraft liegt auf einer Hauptachse in beliebiger Entfernung vom Schwerpunkt des Querschnittes.

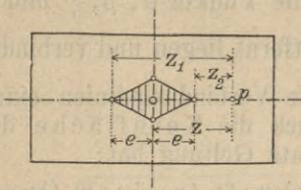
288) In diesem Falle ist:

$$\mathcal{S} = \frac{P}{F} \pm \frac{Pz}{W}$$

oder, wenn man die Entfernung des Kernrandes auf der Achse  $Z$  von  $s$  mit  $e$  als Kernweite bezeichnet:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{P}{F} \pm \frac{Pz}{eF} \\ &= \frac{P}{F} \left( 1 \pm \frac{z}{e} \right) \\ &= \frac{P}{F} \left( \frac{e \pm z}{e} \right) \end{aligned}$$

Figur 273.



Setzt man nun, siehe Figur 273,  $e + z = z_1$  und  $z - e = z_2$ , so erhält man für die in der

äussersten gedrückten bzw. gezogenen Faser herrschende Spannung die Beziehung:

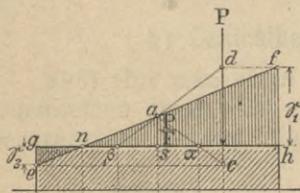
$$\begin{aligned} 173) \dots \mathcal{S}_1 &= \frac{P}{F} \frac{z_1}{e} \\ \mathcal{S}_2 &= \frac{P}{F} \frac{z_2}{e} \end{aligned}$$

**d) Konstruktion der Randspannungen eines Querschnittes bei excentrischer Druckbelastung.**

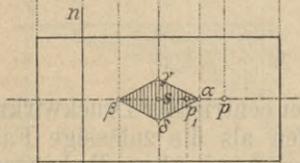
289) Auf Grund der Beziehungen 173), welche für jede Querschnittsform Gültigkeit haben, unterliegt es keiner Schwierigkeit, zunächst für einen rechteckigen Querschnitt die grössten Spannungen  $\mathcal{S}_1$  und  $\mathcal{S}_2$  zu bestimmen, wenn der Angriffspunkt  $p$  der Druckkraft  $P$  bekannt und auf einer Hauptachse des Querschnittes liegend vorausgesetzt wird, siehe Figur 274 und 275.

Man zieht durch den Schwerpunkt  $s$ , siehe Figur 275, die Senkrechte  $sa$  und macht dieselbe gleich  $\frac{P}{F}$ . Verbindet

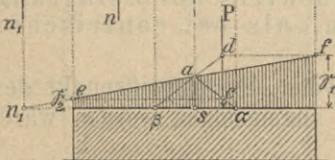
man nun  $\beta a$  und  $aa$ , so treffen diese Verbindungslinien die Richtungslinie von  $P$  in zwei Punkten  $c$  und  $d$  so, dass  $pc$  und  $pd$  die grösste Zug- bzw. Druckspannung darstellen. Ueberträgt man  $pd$  nach  $fh$  und  $pc$  nach  $ge$  und zieht  $fe$ , so geht durch den Schnittpunkt  $n$  von  $ef$  und  $gh$  die Neutralachse des Querschnittes hindurch. Durch die schraffierte Fläche  $genfhn$  ist die Spannungsverteilung im Querschnitte ersichtlich gemacht.



Figur 275.



Figur 274.



Figur 276.

In Figur 275 ist der Angriffspunkt der Kraft  $P$  im Querschnitte  $gh$  mit  $p$  zu bezeichnen.

290) Liegt der Angriffspunkt  $p_1$  innerhalb des Kernrandes, so bleibt die Konstruktion der Randspannungen die-

selbe wie vorhin, es werden aber jetzt im Querschnitte nur Druckspannungen herrschen, siehe Figur 276.

**e) Übungsaufgaben.**

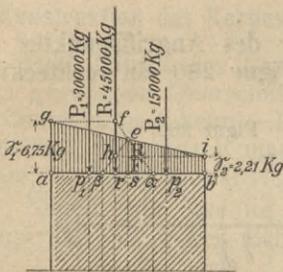
291) **Aufgabe 126.** Auf die Fugenfläche  $abcd$  eines Mauerpfeilers, s. Figur 277 u. 277a, wirkt im Punkte  $\alpha$  eine Kraft  $R = 40000 \text{ kg}$  unter einem Winkel  $\varepsilon = 80^\circ$  gegen die Fugenfläche geneigt. Welche Spannungen entstehen in den Querschnittsrändern  $ad$  und  $bc$ ?

**Auflösung.** Da im vorliegenden Falle die äussere Kraft  $R$  durch den Kernpunkt  $\alpha$  geht, so fällt die Neutralachse mit dem Querschnittsrande  $ad$  zusammen; in dem letzteren herrscht daher die Spannung Null, während in  $bc$  die grösste Druckspannung  $\mathcal{S}_1$  auftritt. Die normal zur Querschnittsfläche wirkende Druckkraft ist:

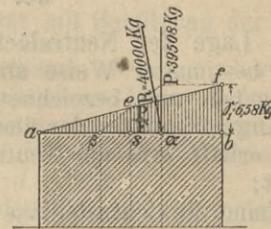
$$P = R \cos 10^\circ = 40000 \cdot 0,98769 = 39508 \text{ kg}$$

daher ist:

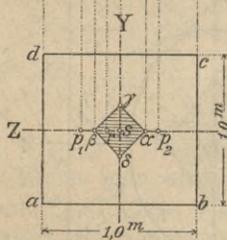
$$\mathcal{S} = \frac{2P}{F} = \frac{2 \cdot 39508}{120 \cdot 100} = 6,58 \text{ kg}$$



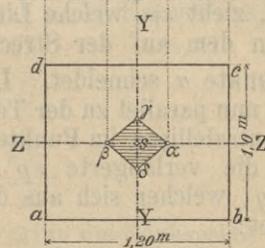
Figur 278.



Figur 277.



Figur 279.



Figur 277 a.

292) **Aufgabe 127.** Eine quadratische Granitplatte von 1 m Seitenlänge, siehe Figur 277 und 278, hat die Auflagerdrücke von zweien Brückenträgern im Betrage von  $P_1 = 30000 \text{ kg}$  und  $P_2 = 15000 \text{ kg}$  auf das Mauerwerk eines Pfeilers zu übertragen. Die Angriffspunkte  $p_1$  und  $p_2$  von  $P_1$  und  $P_2$  liegen je 25 cm von dem nächsten Querschnittsrande entfernt auf der Mittelachse  $Z$ . Wie gross sind die Spannungen in den Querschnittsrändern  $ad$  und  $bc$ ?

**Auflösung.** Vereinigt man  $P_1$  und  $P_2$  zu einer Resultante  $R$ , so liegt deren Angriffspunkt  $r$  auf  $Z$  in einer Entfernung  $z = 8,4 \text{ cm}$  vom Schwerpunkte  $s$ . Es ist nun im vorliegenden Falle:

$$e = \frac{100}{6} = 16,6 \text{ cm}$$

$$z_1 = e + z = 16,6 + 8,4 = 25,0 \text{ cm}$$

$$z_2 = z - e = 16,6 - 8,4 = 8,2 \text{ cm}$$

Demnach ist:

$$\mathcal{S}_1 = \frac{R}{F} \frac{z_1}{e} = \frac{45000}{10000} \cdot \frac{25}{16,6} = 6,75 \text{ kg}$$

$$\mathcal{S}_2 = \frac{R}{F} \frac{z_2}{e} = \frac{45000}{10000} \cdot \frac{8,2}{16,6} = 2,21 \text{ kg}$$

und

Durch Konstruktion ergeben sich dieselben Werte. Man hat:

$$\frac{R}{F} = 4,5 \text{ kg}$$

Nimmt man nun als Kraftmassstab 1 mm = 1 kg, so hat man  $\overline{se} = \frac{P}{F} = 4,5 \text{ mm}$  anzutragen,  $\alpha e$  und  $\beta e$  zu ziehen und  $\overline{rf}$  bzw.  $\overline{rg}$  nach  $ak$  und  $\overline{bi}$  zu übertragen. Dann ist:

$$ah = 6,75 \text{ mm} = 6,75 \text{ kg} \text{ und } \overline{bi} = 2,21 \text{ mm} = 2,21 \text{ kg}$$

## 2) Beziehungen zwischen der Lage der Neutralachse und jener des Angriffspunktes der excentrischen Druckkraft.

### a) Konstruktion der Lage der Neutralachse bei gegebenem Angriffspunkte der Druckkraft.

293) Die Lage der Neutralachse ist von jener des Angriffspunktes der Druckkraft, in bestimmter Weise abhängig. Ist in Figur 280 ein rechteckiger Querschnitt gegeben und bezeichnet  $p$  die Lage des Angriffspunktes der äusseren Kraft, so erhält man die Neutralachse wie folgt:

Man bestimmt die Centralellipse  $K$ , siehe Figur 280, zieht  $sp$ , welche Linie die Ellipse  $K$  in dem auf der Strecke  $sp$  liegenden Punkte  $a$  schneidet. Die Neutralachse ist nun parallel zu der Tangente an die Centralellipse im Punkte  $a$  und schneidet die verlängerte  $sp$  in einem Punkte  $q$ , welcher sich aus der Beziehung ergibt:

$$173 \text{ a) } \dots \overline{sq} \cdot \overline{sp} = \overline{sa}^2$$

Macht man also  $\overline{st}$  senkrecht zu  $ps$  und gleich  $\overline{sa}$ , zieht  $pt$  und durch  $t$  eine Senkrechte hierzu, so schneidet letztere die  $ps$  in einem Punkte  $q$  der Neutralachse  $nn$ .

Unter Berücksichtigung der in der Figur 280 angegebenen Bezeichnungen erhält man dann die in den äussersten Querschnittsrändern, d. i. im vorliegenden Falle an den Stellen  $g$  und  $i$  auftretenden grössten Spannungen:

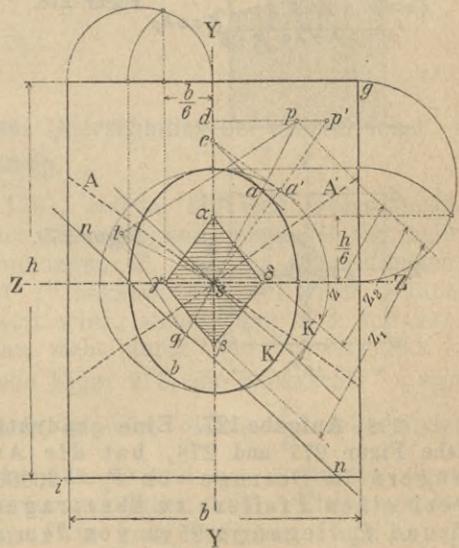
$$174) \dots \mathfrak{S}_1 = \frac{P}{F} \frac{z_1}{e} \text{ und } \mathfrak{S}_2 = \frac{P}{F} \frac{z_2}{e}$$

Da die Neutralachse die Querschnittsebene schneidet, so ist  $\mathfrak{S}_1$  die grösste Druck-,  $\mathfrak{S}_2$  aber die grösste Zugspannung.

Aus den Beziehungen 174) ist ersichtlich, dass die Spannungen  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  gerade proportional den Längen  $z_1$  bzw.  $z_2$ , dagegen umgekehrt proportional der Strecke  $e$  sind.

Zieht man daher durch den Schwerpunkt  $s$  des Querschnittes Senkrechte zu den Kernrändern  $\alpha\delta$ ,  $\beta\gamma$ , bzw.  $\alpha\gamma$ ,  $\beta\delta$ , so ergeben sich die beiden Linien

Figur 280.



$A'$  und  $A$ . Bei ein und demselben  $z_1$  bzw.  $z_2$  erhalten die Spannungen  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  ihren grössten Wert, wenn der Angriffspunkt  $p$  von  $P$  auf einer der beiden Linien  $A'$  oder  $A$  liegt.

**Anmerkung 42.** Will man die in No. 293) besprochene Konstruktion ausführen, ohne die Ellipse  $K$  selbst zu zeichnen, so kann dies wie folgt geschehen: Man zeichnet über der grossen Achse der Centralellipse den Kreis  $K'$ , zieht  $dp$  senkrecht zur Achse  $Y$  und ermittelt auf  $dp$  den Punkt  $p'$  so, dass das Verhältnis  $\frac{\overline{dp}}{\overline{dp'}}$  gleich ist dem Verhältnis der kleinen zur grossen Achse der Ellipse  $K$ , zieht  $sp'$ , welche Linie die  $K'$  in  $a'$  schneidet; die Senkrechte durch  $a'$  zu  $Y$  liefert auf  $sp$  den Ellipsenpunkt  $a$ , während die Kreistangente in  $a'$  auf  $Y$  einen Punkt  $c$  so ausschneidet, dass die Verbindungslinie  $ca'$  die Ellipsentangente im Punkte  $a$  liefert. Nunmehr kann nach No. 293) der Punkt  $q$  und damit auch die Lage der Neutralachse ermittelt werden.

**b) Konstruktion des Kernes eines Querschnittes mit Benützung der Centralellipse.**

294) Mittels der Beziehung 173a) unterliegt es keiner Schwierigkeit, für einen gegebenen Querschnitt die Kernbegrenzung zu konstruieren, sobald man die Centralellipse kennt. Ist z. B. der gegebene Querschnitt von der Form der Figur 281, so ermittelt man nach No. 186) die Werte der Halbachsen der Centralellipse, wodurch man deren Scheitel  $a, b, c, d$  erhält.

Nimmt man nun die Neutralachse mit dem Querschnittsrande  $ef$  zusammenfallend an, so ergeben sich die Punkte  $\beta$  und  $\alpha$  des Kernes aus der Beziehung:

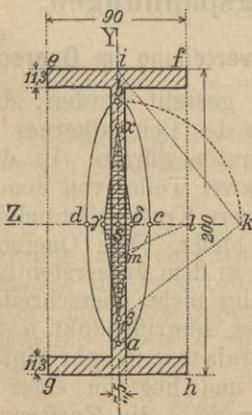
$$\overline{s\beta} = \overline{s\alpha} = \frac{\overline{sb}^2}{\overline{si}}$$

ebenso ist:

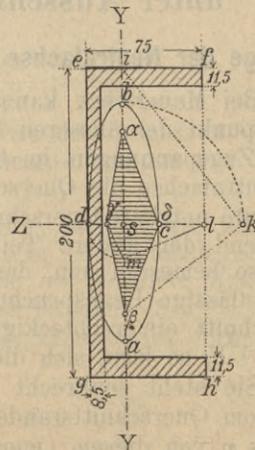
$$\overline{s\delta} = \overline{s\gamma} = \frac{\overline{sd}^2}{\overline{sl}}$$

Macht man also  $\overline{sk} = \overline{sb}$ , zieht  $\overline{ik}$ , so trifft die Senkrechte zu  $\overline{ik}$  in  $k$  die  $Y$ -Achse im Punkte  $\beta$  des Kernes; ebenso ist  $\overline{sm} = \overline{sd}$  anzutragen,  $\overline{lm}$  zu ziehen, so liefert die Senkrechte  $\overline{m\gamma}$  zu  $\overline{lm}$  den Kernpunkt  $\gamma$ .

Figur 281.



Figur 282.



In ähnlicher Weise ist für den in Figur 282 dargestellten Querschnitt der Kern ermittelt worden. Es ist:

$$\bar{s}a = \bar{s}\beta = \frac{\bar{s}b^2}{\bar{s}i}, \quad \bar{s}\gamma = \frac{\bar{s}c^2}{\bar{s}l}, \quad \bar{s}\delta = \frac{\bar{s}c^2}{\bar{s}d}$$

Im vorliegenden Falle wird, weil  $\bar{s}d = \bar{s}c$  ist, auch  $\bar{s}\delta = \bar{s}c$ .

### c) Übungsaufgaben.

295) **Aufgabe 128.** Man konstruiere den Kern für folgende Querschnittsformen:

- 1) voller Kreisquerschnitt,
- 2) ringförmiger Querschnitt,
- 3) regelmässiges Achteck,
- 4) Querschnitt, begrenzt durch zwei concentrische regelmässige Achtecke,
- 5)  $\perp$ förmiger Querschnitt,
- 6)  $+$ förmiger Querschnitt,
- 7) Querschnitt eines gleichschenkligen Winkeleisens,  
Querschnitt eines ungleichschenkligen Winkeleisens,
- 8) Querschnitt eines Z-Eisens.

Die Querschnittsdimensionen können beliebig gewählt werden in den Fällen 1 bis 4; in den Fällen 5 bis 8 sollen deutsche Normalprofile zu Grunde gelegt werden. Die Lage der Hauptachsen ist aus den Profiltabellen zu entnehmen.

296) **Aufgabe 129.** Für die in Aufgabe 128 genannten Querschnittsformen ist unter Annahme einer excentrischen Druckkraft  $P$  für einen beliebig innerhalb des Querschnittsrandes zu wählenden Angriffspunkt  $p$ :

- 1) die Lage der zugehörigen Neutralachse,
- 2) die Grösse der Randspannungen zu ermitteln.



## 3) Excentrische Druckbelastung ausserhalb des Centralkernes unter Ausschluss von Zugspannungen.

### a) Lage der Neutralachse und Spannungsverteilung im Querschnitt.

297) Bei Mauerwerk kann die Forderung gestellt werden, dass, obwohl der Angriffspunkt der äusseren Kraft ausserhalb des Centralkernes gelegen ist, doch keine Zugspannungen im Querschnitt auftreten dürfen. In diesem Falle teilt die Neutralachse die Querschnittsfläche in zwei Teile, von denen der eine, der sogenannte nutzbare Querschnittsteil, die äussere Kraft vollständig aufnehmen muss, während der andere Teil spannungslos bleibt. Die Querschnittsgrösse muss dann so bemessen sein, dass die Spannung in dem äussersten Querschnittsrande die zulässige Beanspruchung des Materiales nicht überschreitet. Ist der Mauerquerschnitt ein rechteckiger und liegt der Angriffspunkt  $p$  in der Symmetrieachse  $YY$ , so lässt sich die Lage der Neutralachse in sehr einfacher Weise ermitteln. Sie steht senkrecht zur Achse  $YY$  und liegt in einer Entfernung gleich  $3u$  vom Querschnittsrande  $cd$  entfernt, wenn  $u$  die Entfernung des Angriffspunktes  $p$  von diesem Querschnittsrande bezeichnet; dann denkt man sich

die in den einzelnen zur Neutralachse parallelen Streifen herrschenden Spannungen als Strecken parallel zu  $nn$  auf der Linie  $bd$  aufgetragen, so stellt das Dreieck  $ode$  die Gesamtspannung in dem Querschnittsteile  $oo_1cd$  dar, die Resultante der sämtlichen Spannungen geht aber durch den Schwerpunkt  $s$  des Dreieckes  $ode$  hindurch, es wird also durch den Punkt  $p$  die Strecke  $rg$  im Verhältnis 2:1 geteilt. Für die Gesamtspannung in dem Querschnitte  $oo_1cd$  erhält man nun den Ausdruck  $\frac{3u}{2} \mathfrak{S}_1 b$ , daher besteht die Gleichung:

$$P = \frac{3u}{2} \mathfrak{S}_1 b$$

oder es ist:

$$175) \dots \mathfrak{S}_1 = \frac{2P}{3ub}$$

298) Für einen Querschnitt von beliebiger Form ist die Ermittlung der Lage der neutralen Achse ziemlich umständlich und kann hier nicht erörtert werden. Dagegen soll noch ein Fall besprochen werden, der für den Bauingenieur von praktischer Wichtigkeit ist, der Fall nämlich, dass der Querschnitt die Form eines regelmässigen Polygons, bezw. eines Kreisringes habe, wie dies bei Schornsteinquerschnitten in der Regel eintritt.

Ist etwa der in Figur 284 dargestellte Querschnitt und  $p$  der Angriffspunkt der äusseren Kraft  $P$  gegeben, so weiss man zunächst nur, dass die Neutralachse  $nn$  senkrecht steht zur Achse  $yy$ . Für irgend einen in der Entfernung  $z$  von der Neutralachse befindlichen Flächenstreifen  $f$  herrscht die Spannung  $\mathfrak{S}f$ . Nun ist aber die Spannung um so grösser je grösser die Entfernung  $z$  ist und es besteht zwischen  $z$  und  $\mathfrak{S}$  die Beziehung  $\mathfrak{S} = kz$ , wo  $k$  eine konstante Grösse bezeichnet; ist  $P$  die äussere in  $p$  angreifende Kraft, so hat man  $P = \sum f kz = k \sum fz$ . Wenn nun Gleichgewicht zwischen der äusseren Kraft und der inneren Spannung herrschen soll, so muss das Moment der äusseren Kräfte dem Moment der inneren gleich sein, d. h. man hat die Gleichung:

$$Pv = k \sum fz^2$$

hieraus folgt:

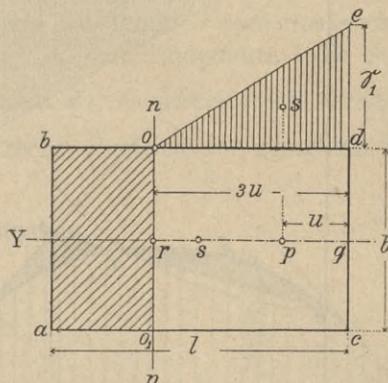
$$176) \dots v = \frac{k \sum fz^2}{P} = \frac{k \sum fz^2}{k \sum fz} = \frac{\sum fz^2}{\sum fz}$$

Hierin bezeichnet  $\sum fz^2$  das Trägheitsmoment des nutzbaren Querschnittsteiles,  $\sum fz$  dessen statisches Moment, beide Momente bezogen auf die Neutralachse  $nn$ .

Das Trägheitsmoment  $\sum fz^2$  ergibt sich nun, siehe Figur 284, dadurch, dass man parallel zur Achse  $nn$  den Querschnitt in sehr schmale Streifen teilt, die Flächeninhalte dieser Streifen als zur Achse  $nn$  parallele Kräfte auffasst und für letztere ein Seilpolygon konstruiert. Es ist dann  $\sum fz^2 = 2HF$ , unter  $H$  die Poldistanz, unter  $F$  die Fläche  $egfbd$  verstanden, ferner hat man  $\sum fz = H\overline{ed}$ ; es ist daher:

$$v = \frac{2HF}{H\overline{ed}} = \frac{2F}{\overline{ed}} \quad \text{oder:} \quad F = \frac{v \cdot \overline{ed}}{2}$$

Figur 283.





setzt man nun  $v = \bar{e}d$ , so erhält man die Spannung in einer Entfernung  $\bar{od}$  von der Neutralachse:

$$177) \dots \mathfrak{S} = \frac{P}{H}$$

Zieht man in der Figur 284 etwa durch den Punkt  $d$  eine Senkrechte  $di$  zu  $nn$  und macht dieselbe gleich  $\bar{de}$ , trägt in dem Endpunkte  $i$  die Strecke  $\bar{ik} = \mathfrak{S} = \frac{P}{H}$  als Parallele zu  $nn$  auf und zieht  $dk$ , so schneidet die verlängerte  $lm$  zwischen den Linien  $di$  und  $dk$  die Strecke  $\bar{ot}$  gleich der gesuchten Randspannung  $\mathfrak{S}_1$  aus.

**b) Übungsaufgaben.**

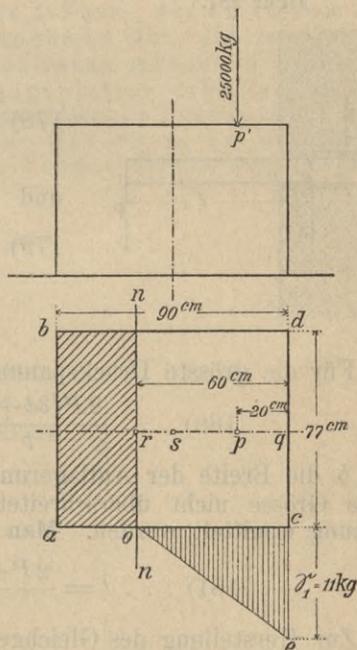
Figur 286.

299) **Aufgabe 130.** Auf einen Mauerpfeiler von den in Figur 286 angegebenen Ausmassen wirkt in der Symmetrieachse im Abstände = 20 cm vom Querschnittsrande  $cd$  eine Kraft  $P = 25000$  kg. Es ist die Lage der Neutralachse, sowie die in dem äussersten Querschnittsrande herrschende Druckspannung zu ermitteln.

**Auflösung.** Die Neutralachse  $nn$  ist vom Querschnittsrande 60 cm entfernt. Die Grösse der Randspannung beträgt:

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{2 \cdot 25000}{3 \cdot 20 \cdot 77} = \frac{5000}{462} = 11,2 \text{ kg}$$

Diese Spannung ist noch zulässig bei gutem Backsteinmauerwerk in Cementmörtel ausgeführt.



300) **Aufgabe 131.** Für die in Figur 284 dargestellte Querschnittsform ist unter Annahme einer äusseren Achtecksseite = 0,50 m und einer Mauerstärke = 0,51 m, eines Abstandes des Angriffspunktes  $p$  vom Schwerpunkte = 0,60 m, einer Belastung  $P = 180000$  kg, die Lage der Neutralachse und die grösste Druckspannung im äussersten Querschnittsrande zu ermitteln.

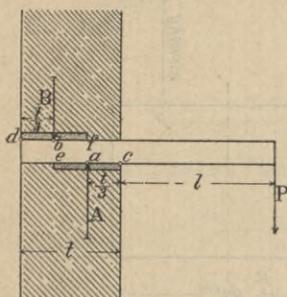
301) **Aufgabe 132.** Von einem kreisringförmigen Querschnitt beträgt der äussere Durchmesser 2,0 m, die Dicke 0,51 m; der Angriffspunkt  $p$  der äusseren Kraft liegt 0,55 m vom Querschnittsmittelpunkte entfernt. Die Belastung des Querschnittes beträgt 150000 kg. Es ist die Lage der Neutralachse, die Grösse des nutzbaren Querschnittes, sowie die Randspannung zu ermitteln.

## 4) Die Einmauerung der Freiträger.

## a) Berechnung der Einmauerungstiefe, Verwendung von Unterlagsplatten.

302) Wenn ein Freiträger in einer Mauer aufgelagert werden soll, so wird letztere auf excentrischen Druck beansprucht. Sollen in den Auflagerquerschnitten nur Druckspannungen herrschen, so dürfen die Angriffspunkte der Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  nicht über den Kernrand des betreffenden Querschnittes hinausfallen, müssen also von den Begrenzungen der Mauer um  $\frac{t}{3}$  entfernt liegen, wenn  $t$  die Mauerstärke, bezw. die Einmauerungstiefe bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung erhält man für die Grössen der Auflagerdrücke die Gleichungen:

Figur 287.



$$B \frac{t}{3} = P \left( l + \frac{t}{3} \right) \quad a \text{ Drehpunkt}$$

Hieraus folgt:

$$178) \dots B = \frac{P \left( l + \frac{t}{3} \right)}{\frac{t}{3}} = \frac{P(3l+t)}{t}$$

und

$$179) \dots A = P + B = P + \frac{P(3l+t)}{t} = \frac{P(3l+2t)}{t}$$

Für die grösste Druckspannung bei  $c$  erhält man die Gleichung:

$$180) \dots \frac{2P(3l+2t)}{t} = \mathcal{S}bt$$

unter  $b$  die Breite der Auflagerung des Trägers verstanden. Damit  $\mathcal{S}$  die zulässige Grösse nicht überschreitet, muss die Grösse  $t$  aus der vorliegenden Gleichung ermittelt werden. Man erhält hierfür:

$$181) \dots t = \frac{2P + \sqrt{P(6bl\mathcal{S} + 4P)}}{\mathcal{S}b}$$

Zur Herstellung des Gleichgewichtes des Trägers muss über demselben so viel Mauerwerk stehen, dass derselbe dem nach aufwärts gerichteten Auflagerdruck  $B$  hinlänglich Widerstand zu leisten vermag. Wollte man den Träger direkt auf der Mauer auflagern, so würde in der Regel die aus Gleichung 181) berechnete Mauertiefe einen für die Zwecke der Ausführung viel zu grossen Wert erhalten; desgleichen würde auch in den meisten Fällen die über dem Träger erforderliche Mauerhöhe eine viel zu grosse werden. Man wird deshalb, wenn die Mauerstärke von vornherein gegeben ist, sowohl unter wie über dem Träger Auflagerplatten verwenden, deren Länge man zweckmässig  $= \frac{2}{3}t$

wählt, wobei jetzt  $t$  die gegebene Einmauerungstiefe bezeichnet, während man die Breite so bestimmt, dass die grösste Druckspannung im Mauerwerk die zulässige Grösse, also 7 bezw. 10 kg per Quadratcentimeter nicht überschreitet.

Bezeichnet nun  $x$  die Breite der unteren Platte, so hat man die Gleichung:

$$\frac{2}{3}tx\mathcal{S} = A = \frac{P(3l+2t)}{t}$$

daher ist:

$$182) \dots x = \frac{3P(3l + 2t)}{2l^2 \ominus}$$

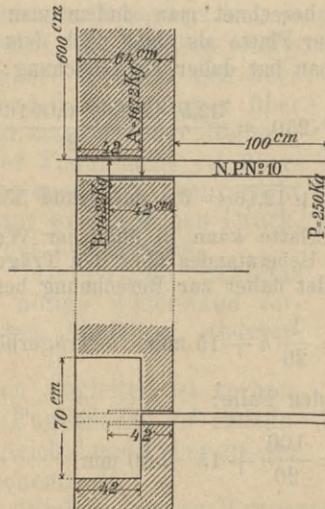
Die Breite der oberen Auflagerplatte berechnet sich aus der Bedingung, dass bei gegebener Mauerhöhe das über dem Träger befindliche Mauergewicht mindestens die doppelte Grösse von  $B$  besitzen muss.

Anstatt den Träger durch über demselben befindliches Mauerwerk zu belasten, kann man ihn auch mit dem unter ihm befindlichen Mauerwerk verankern; es muss dann die hierzu erforderliche Ankerplatte, entsprechend der im vorstehenden erwähnten oberen Auflagerplatte, so tief unter dem Träger angebracht werden, dass das Gewicht des zwischen Träger und Ankerplatte liegenden Mauerwerkes die Auflagerreaktion  $B$  zu ersetzen im stande ist.

**b) Übungsaufgaben.**

303) **Aufgabe 133.** Ein Freiträger von I-Form, der an seinem freien Ende eine Einzellast von 250 kg aufzunehmen hat, ist in eine 64 cm starke Mauer einzulagern. Welche Ausmasse müssen die unter und über dem Träger anzuordnenden Unterlagsplatten erhalten, wenn das Mauerwerk nur bis zu 7 kg per Quadratcentimeter beansprucht werden darf und die über dem Träger vorhandene Mauerhöhe 6 m beträgt. Wie stark müsste die Mauer sein, wenn der Träger direkt auf das Mauerwerk aufgelagert werden sollte?

Figur 288.



**Auflösung.** Zunächst ergibt sich das Trägerprofil aus der Gleichung:

$$W = \frac{250 \cdot 100}{750} = 33,33$$

Hierfür genügt *N. P. No. 10* mit einem  $W = 34,4$ .

Die Auflagerdrücke sind:

$$A = \frac{250(2 \cdot 64 + 300)}{64} = 1672 \text{ kg}$$

und

$$B = \frac{250(64 + 300)}{64} = 1422 \text{ kg}$$

Die Einmuerungstiefe berechnet sich aus der Gleichung:

$$t = \frac{2 \cdot 250 + \sqrt{250(6 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 7 + 1000)}}{7 \cdot 5} = 81 \text{ cm}$$

Da die Mauerstärke aber nur 64 cm beträgt, so müssen Unterlagsplatten verwendet werden. Wählt man deren Länge zu 42 cm, so ergibt sich zunächst die Breite  $x$  der unteren Platte aus der Bedingung, dass die grösste Pressung auf das Mauerwerk nur 7 kg betragen darf. Man hat also die Gleichung:

$$42 \cdot x \cdot 7 = 1672$$

daher:

$$x = \frac{1672}{294} = 8 \text{ cm}$$

Bei einer Mauerhöhe von 6 m ist zur Hervorbringung eines vertikalen Druckes von 1422 kg ein Mauerprisma erforderlich, dessen Inhalt beträgt:  $6 \cdot 0,42 \cdot y$ , unter  $y$  die Breite der oberen Platte verstanden; man hat also die Gleichung:

$$6 \cdot 0,42 \cdot y \cdot 1600 = 1422$$

oder:

$$y = \frac{1422}{6 \cdot 0,42 \cdot 1600} = 0,35 \text{ m}$$

Will man also einen doppelt so grossen Druck als 1422 kg durch die über dem Träger liegenden Mauerkörper hervorbringen, so muss derselbe eine Breite von:

$$2 \cdot 0,35 = 0,70 \text{ m} = 70 \text{ cm}$$

besitzen. Die Ausmasse der oberen Platte sind also  $42/70$  cm.

Die Dicke  $z$  der Platte berechnet man, indem man den über die obere Trägerflansche hervorragenden Teil der Platte als einen nach dem zweiten Belastungsfalle beanspruchten Träger behandelt; man hat daher die Gleichung:

$$\frac{1}{6} \cdot 42 \cdot z^2 \cdot 250 = \frac{32,5 \cdot 42 \cdot 600 \cdot 0,0016 \cdot 32,5 \cdot 6}{2}$$

daher ist:

$$z = \sqrt{12,16} = 3,4 \text{ oder rund } 35 \text{ mm}$$

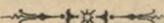
Die Dicke der unteren Platte kann in ähnlicher Weise wie die obere berechnet werden. Wegen des geringen Ueberstandes über den Träger würde aber diese Dicke zu gering ausfallen; man verwendet daher zur Berechnung besser die empirische Formel:

$$z_1 = \frac{1}{20} h + 15 \text{ mm} \quad h \text{ Trägerhöhe}$$

es wird demnach im vorliegenden Falle:

$$z_1 = \frac{100}{20} + 15 = 20 \text{ mm}$$

304) **Aufgabe 134.** Ein Balkon von 3 m Länge und 1,20 m Breite wird durch drei Freiträger von I-Form gestützt, die in einer 0,77 m starken Mauer auflagern. Der Balkon ist durch eine 0,80 m hohe  $1/2$  Stein starke Brüstung eingefasst. Das Gewicht der Balkondecke beträgt einschliesslich der Nutzlast 700 kg per Quadratmeter. Die über dem Träger zur Verfügung stehende Mauerhöhe beträgt 6 m. Es sind die Träger, sowie die zur Druckverteilung erforderlichen Auflagerplatten zu berechnen.



### III. Abschnitt.

## Stabilität der Mauern und Gewölbe.

### A. Stabilität freistehender Mauern.

#### 1) Stabilitätsbedingungen.

305) Wirkt eine äussere Kraft unter einem von  $90^\circ$  verschiedenen Winkel auf die Querschnittsfläche  $ab$  einer freistehenden Mauer, siehe Figur 289, ein, so wird irgend ein horizontaler Querschnitt, z. B.  $cd$ , beansprucht durch die Resultante  $R$  aus der Kraft  $P$  und dem über dem Querschnitte stehenden Mauergericht  $Q$ . Die Resultante  $R$  zerlegt sich in zwei Komponenten  $H$  und  $N$ , von denen die erstere parallel, die letztere senkrecht zur Querschnittsfläche  $cd$  gerichtet ist. Die Komponente  $H$  sucht den über dem Querschnitte  $cd$  stehenden Mauerkörper über  $cd$  hinweg zu schieben und muss von der Reibung des Mauerwerkes längs der Fugenfläche  $cd$  überwunden werden; die Komponente  $N$  beansprucht die Querschnittsfläche  $cd$  auf excentrischen Druck, bezw. sucht den Mauerkörper umzukanten.

Soll die Mauer die erforderliche Stabilität besitzen, so muss also der nötige Widerstand vorhanden sein, einerseits gegen Abgleiten, andererseits gegen Umkanten.

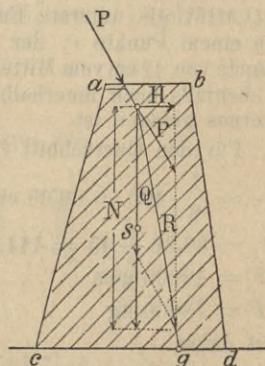
Der Widerstand gegen Abgleiten ist vorhanden, wenn die längs der Fugenfläche  $cd$  stattfindende Reibung mindestens gleich, besser aber grösser ist als die Horizontalkomponente  $H$ .

Bezeichnet man den Winkel, dessen Tangente gleich ist dem Reibungskoeffizienten  $f$  des Mauerwerkes, mit  $\varphi$ , so muss, damit  $H < fN$  ist,  $\frac{H}{N} < f$ , d. h. kleiner als  $\text{tg } \varphi$  sein.

„Damit die Mauer die nötige Sicherheit gegen Abgleiten einer Fuge längs der anderen gewähre, muss der Winkel der Resultante aus äusserer Kraft und dem auf der Fuge stehenden Mauergericht mit der Normalen zur Fugenfläche kleiner sein als der Reibungswinkel des Mauerwerkes.“

„Die Vertikalkomponente  $N$  muss, wenn ein Umkanten der Mauer nicht eintreten soll, die Fugenfläche  $cd$  innerhalb ihrer Begrenzung treffen.“

Figur 289.



Im letzteren Falle beansprucht sie die Fugenfläche auf excentrischen Druck, wobei der Angriffspunkt  $g$  von  $N$  innerhalb des Kernrandes der Fugenfläche sich befinden soll, ist dieses aber nicht der Fall, so muss untersucht werden, ob der nutzbare Querschnittsteil innerhalb der zulässigen Grenze beansprucht wird; nur wenn die im äussersten Querschnittsrande auftretenden Druckspannungen die zulässige Grenze nicht überschreiten, ist die Mauer als stabil zu erachten.

### 2) Übungsaufgabe.

306) **Aufgabe 135.** Ein Brückenpfeiler von den in der Figur 290 bezeichneten Ausmassen erhält in den Punkten  $a$  und  $b$  die Drücke zweier Gewölbepögen,  $P_1 = 18000$  kg,  $P_2 = 25000$  kg, unter den eingezeichneten Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$ . Das Gewicht eines Kubikmeters Pfeilermauerwerk beträgt 2000 kg. Es ist die Stabilität des Pfeilers zu untersuchen und die Grösse der Randspannungen in den Fugen  $lm$  und  $no$  festzustellen.

**Auflösung.**

Gewicht des Pfeilerteiles I	$= 2 \cdot 3 \cdot 2000 = 12000$ kg	} Gewicht von $I + II = Q_1 = 48000$ kg
" " " II	$= \frac{2+4}{2} \cdot 6 \cdot 2000 = 36000$ kg	
" " " III	$= 5 \cdot 2 \cdot 2000 = 20000$ kg	
Gewicht des ganzen Pfeilers $Q$		$= 68000$ kg

Bestimmt man die Resultante aus  $P_1$ ,  $P_2$  und  $Q_1$ , so trifft diese die Fugenfläche  $lm$  in einem Punkte  $g$ , dessen Abstand vom Mittelpunkte  $h$  etwa 45 cm beträgt, der also noch innerhalb des Centralkernes liegt.

Die Resultante  $R_3$  aus  $P_1$ ,  $P_2$  und  $Q$  trifft die unterste Fugenfläche  $no$  in einem Punkte  $i$ , der in einem Abstände von 42 cm vom Mittelpunkte  $k$ , also ebenfalls noch innerhalb des Centralkernes gelegen ist.

Für den Querschnitt  $lm$  ist:

$$e = \frac{1}{6} \cdot 400 = 66,66 \text{ cm}$$

$$z_1 = 66,66 + 45 = 111,666 \text{ cm}$$

$$F = 40000 \text{ qcm}$$

$$P = 73000 \text{ kg}$$

Es ist daher:

$$\sigma_1 = \frac{73000}{40000} \cdot \frac{111,666}{66,666}$$

$$= 1,825 \cdot 1,67 = 3,05 \text{ kg}$$

Für den Querschnitt  $no$  ist:

$$e = \frac{1}{6} \cdot 500 = 83,333 \text{ cm}$$

$$z_1 = 83,333 + 42 = 125,333 \text{ cm}$$

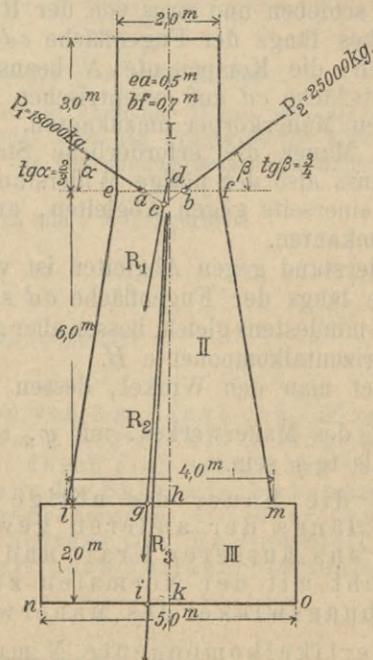
$$P = 93000 \text{ kg}$$

$$F = 50000 \text{ kg}$$

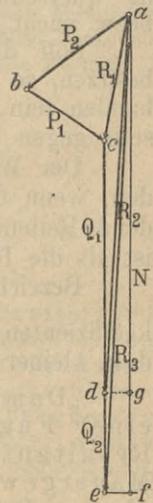
Es ist somit:

$$\sigma_1 = \frac{93000}{50000} \cdot \frac{125,333}{83,333} = 1,86 \cdot 1,50 = 2,79 \text{ kg}$$

Figur 290.



Figur 291.



Die Pressung in der Fuge  $lm$  ist also unter der zulässigen Beanspruchung, dagegen ist die Randpressung im Fundamente schon etwas über die zulässige Beanspruchung hinausgehend.

## B. Stabilität freistehender Fabrikschornsteine.

### 1) Stabilitätsbedingungen.

307) Bei der Untersuchung eines Schornsteines hinsichtlich seiner Standfähigkeit und der Beanspruchung seiner einzelnen Querschnitte auf Druckfestigkeit, werden in der Regel die Ausmasse von vornherein gegeben sein, indem die lichte Weite und Höhe durch den Zweck, welchen der Schornstein als Teil einer Feuerungsanlage zu erfüllen hat, bedingt sind. Kennt man aber die lichte Weite und Höhe, so sind auch die Mauerstärken innerhalb gewisser Grenzen bestimmt, indem man als oberste Stärke mindestens einen Stein wählt und die Verstärkung nach unten in ähnlicher Weise eintreten lässt, wie dies bei der Umfassungsmauer eines Gebäudes der Fall ist.

Die statischen Anforderungen, welchen der Schornstein zu genügen hat, bestehen in der hinlänglichen Sicherheit gegen Umkanten durch den Winddruck und gegen Zerdrücken der untersten Schichten durch das Mauergewicht; auch darf die Belastung des Baugrundes die zulässige Grenze nicht überschreiten.

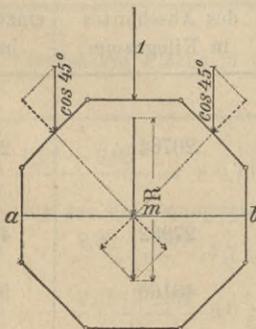
Was die Grösse des Winddruckes anbelangt, so ist durch Ministerialerlass vom 25. Juli 1889 die Annahme von 125 km per Quadratmeter senkrecht getroffene Fläche als genügend zu erachten. Die am häufigsten auftretenden Querschnittsformen sind das regelmässige Achteck und der Kreis. Für die erstere Form tritt die stärkste Beanspruchung durch den Winddruck auf, wenn die Horizontalprojektion der Windrichtung senkrecht zu einer Achtecksseite vorausgesetzt wird, denn in diesem Falle hat man, die Achtecksseite = 1 gesetzt, als Resultante des Winddruckes auf die vertikale Fläche  $ab$ , siehe Figur 292:

$$R = 1 + \cos 45^\circ = 1,70711$$

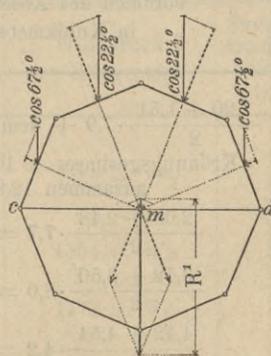
für die Grösse der gedrückten Fläche aber:

$$F = 1 + 2 \cos 45^\circ = 2,41422$$

Figur 292.



Figur 293.



Es besteht somit das Verhältnis:

$$183) \dots \frac{R}{F} = \frac{1,70711}{2,41422} = 0,71 \text{ oder es ist } R = 0,71 F.$$

Nimmt man die Horizontalprojektion der Windrichtung senkrecht zu einer Diagonale  $cd$  an, siehe Figur 293, so ergibt sich für die Resultante des Winddruckes senkrecht zur Fläche  $cd$  die Beziehung:

$$R' = 2 \cos^3 22 \frac{1}{2}^\circ + 2 \cos^3 67 \frac{1}{2}^\circ = 1,68998$$

für die Grösse der gedrückten Fläche erhält man:

$$F' = 2 \cos 22\frac{1}{2}^\circ + 2 \cos 67\frac{1}{2}^\circ = 2,61312$$

daher ist:

$$184) \dots \frac{R'}{F'} = \frac{1,68998}{2,61312} = 0,65 \quad \text{oder} \quad R' = 0,65 F'$$

Der Winddruck wird für den achtseitigen Schornstein unter der ersten Voraussetzung einen grösseren Wert ergeben, als im zweiten Falle und es ist deshalb die erstere Annahme der Rechnung zu Grunde zu legen.

Zur Berechnung der Grösse des Winddruckes wählt man als gedrückte Fläche einen durch die Schornsteinachse senkrecht zu einer Achtecksseite geführten Vertikalschnitt und zieht von dem auf die volle Fläche treffenden senkrechten Druck 71 Prozent, d. i. für den Quadratmeter  $0,71 \cdot 125 = 89$  kg in Rechnung. Der Angriffspunkt des Winddruckes liegt im Schwerpunkte der gedrückten Fläche.

Zur Feststellung der Stabilität des Schornsteines wählt man nun eine Anzahl von Querschnitten, in der Regel an jenen Stellen, wo die Mauerstärke wechselt, bestimmt das Gewicht für den über dem betreffenden Querschnitte liegenden Schornsteinteil und den auf letzteren treffenden Winddruck. Die Resultante aus Mauergewicht und Winddruck wird die Querschnittsfläche in einem Punkte schneiden und es ist nun zu untersuchen, ob dieser Punkt innerhalb des Centralkernes liegt oder nicht, sowie ob in beiden Fällen die in dem äussersten Querschnittsrande auftretende Spannung innerhalb der zulässigen Grenze bleibt, siehe No. 297). Das ganze Verfahren soll an einem Beispiele gezeigt werden.

## 2) Übungsaufgaben.

308) **Aufgabe 136.** Für den in Figur 294 im Vertikalschnitt dargestellten Schornstein ist die Stabilitätsuntersuchung auszuführen.

**Auflösung.** Man teilt den Schornstein etwa in die Abschnitte A bis K, bestimmt deren Volumina und hieraus die Gewichte. Die Volumenberechnung für den achteckigen Teil wird genau genug dadurch vorgenommen, dass man die mittlere Querschnittsfläche eines Abschnittes berechnet und mit der Höhe des letzteren multipliziert. Für die Volumina und Gewichte ergeben sich die in der folgenden Tabelle aufgeführten Werte:

Schornstein Abschnitt	Volumen des Abschnittes in Kubikmeter	Gewicht des Abschnittes in Kilogramm	Gewichtssumme der einzelnen Abschnitte in Kilogramm
A	$\frac{1,20 + 1,51}{2} \cdot 7,9 + \text{dem Volumen des Krönungsgesimses} = 10,67 + 2,25$ zusammen 12,98	20764	$20764 = N_1$
B	$\frac{2,06 + 2,48}{2} \cdot 7,7 = 14,479$	27982	$48746 = N_2$
C	$\frac{3,12 + 3,50}{2} \cdot 8,0 = 26,48$	43168	$91916 = N_3$
D	$\frac{4,12 + 4,54}{2} \cdot 4,2 = 18,21$	20132	$112048 = N_4$
E	$7,92 \cdot 6,6 + \text{Gesimsvorsprung} = 5,03$ $= 52,27 + 5,03 = 57,3$	91683	$203731 = N_5$
F	$9,6 \cdot 0,6 = 5,76$	9214	$212945 = N_6$
G	$14,47 \cdot 0,8 = 11,58$	18522	$231467 = N_7$
H	$18,52 \cdot 0,8 = 14,82$	23708	$255175 = N_8$
J	$28,51 \cdot 0,7 = 19,96$	31938	$287113 = N_9$
K	$36,00 \cdot 1,5 = 54,00$	86400	$373513 = N_{10}$

Die zur Volumenberechnung erforderlichen Ausmasse und die hieraus abgeleiteten Flächeninhalte der einzelnen Querschnitte, desgleichen die Formeln zur Berechnung der Kernweite für den achteckigen und quadratischen Querschnitt sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Querschnitt	Lichte Weite in m	Mauerstärke in m	Aeusserer Dicke in m	Innere Achtecksseite in m	Aeusserer Achtecksseite in m	Innere Durchmesser in m	Aeusserer Durchmesser in m	Querschnittsfläche in qm	Kernseite	Bemerkungen
I	1,10	0,26	1,62	0,41	0,67	—	—	1,20	—	Die Kernweite $e$ bestimmt sich für den achteckigen Querschnitt aus der Beziehung: $e = \frac{(D^2 + d^2) 0,244}{D}$ $D$ und $d$ der äusseren bzw. inneren Durchmesser.  Für die Querschnitte IX bis XIII bestimmt sich die Kernweite aus der Beziehung: $e = \frac{D^2 + d^2}{12D}$ $e = \frac{1}{6}$ der äusseren Weite.
II	1,50	0,26	2,02	0,62	0,83	1,62	2,18	1,51	0,41	
III	1,26	0,38	2,02	0,52	0,83	—	2,18	2,06	—	
IV	1,60	0,38	2,36	0,66	0,97	1,73	2,55	2,48	0,54	
V	1,34	0,51	2,36	0,55	0,97	—	2,55	3,12	—	
VI	1,60	0,51	2,62	0,66	1,04	1,73	2,83	3,50	0,47	
VII	1,34	0,64	2,62	0,55	1,04	—	2,83	4,13	—	
VIII	1,50	0,64	2,78	0,62	1,15	1,73	3,01	4,54	0,49	
IX	1,30	0,90	3,10	—	—	1,84	4,38	7,92	0,43	
X	1,30	1,03	3,36	—	—	1,84	4,75	9,60	0,46	
XI	1,30	1,36	4,02	—	—	1,84	5,69	14,47	0,53	
XII	1,30	1,69	4,68	—	—	1,84	6,62	18,52	0,59	
XIII	—	5,34	—	—	—	—	—	28,51	0,89	
XIV	—	6,00	—	—	—	—	—	36,00	1,00	

In der folgenden Tabelle sind die auf die einzelnen Abschnitte A bis F treffenden Teilwinddrücke und deren Summen berechnet und zusammengestellt.

Schornstein Abschnitt	Gedrückte Fläche in Quadratmeter	Winddruck in Kilogramm	Summe der Winddrücke auf die einzelnen Abschnitte in Kilogramm
A	$\frac{1,62 + 2,02}{2} \cdot 7,9 + 0,79 \text{ qm} = 15,17$ für das Bekrönungsgesims	1353 = $W_A$	1353 = $W_1$
B	$\frac{2,02 + 2,36}{2} \cdot 7,7 = 16,86$	1504 = $W_B$	2857 = $W_2$
C	$\frac{2,36 + 2,62}{2} \cdot 8,0 = 19,92$	1773 = $W_C$	4630 = $W_3$
D	$\frac{2,62 + 2,78}{2} \cdot 4,2 = 11,34$	1010 = $W_D$	5640 = $W_4$
E	3,10 · 6,60 = 20,46	2557 = $W_E$	8198 = $W_5$
F	3,36 · 0,60 = 2,02	252 = $W_F$	8450 = $W_6$

Die Angriffspunkte der oben berechneten Teilwinddrücke liegen in den Schwerpunkten  $s_1$  bis  $s_6$ , siehe Figur 294, der zugehörigen Flächenabschnitte A bis F. Die Angriffspunkte  $S_1$  bis  $S_6$  der Winddrücke  $W_1$  bis  $W_6$  bestimmen sich am bequemsten mittels eines



Seilpolygone, siehe Figur 294 und 295. Nunmehr lassen sich die Resultanten  $R_1$  bis  $R_{10}$  aus den Winddrücken  $W_1$  bis  $W_6$  und  $N_1$  bis  $N_6$  bzw.  $W_6$  und  $N_{6-10}$ , siehe Figur 296, der Grösse und Richtung nach ermitteln, wodurch sich durch Parallele hierzu durch die entsprechenden Angriffspunkte  $S_1$  bis  $S_6$  die Angriffspunkte  $r_1$  bis  $r_{10}$  in den Querschnitten II bis XIV, siehe Figur 294, ergeben. Aus der Lage dieser Angriffspunkte geht hervor, dass die Stabilität des Schornsteines gegen Umknicken gesichert ist. Für die Entfernungen der Angriffspunkte  $r$  von den zugehörigen Querschnittsschwerpunkten ergeben sich die folgenden Werte:

Querschnitt	Entfernung des Punktes $r$ vom Schwerpunkte in $m$
II	0,30
IV	0,45
VI	0,55
VIII	0,65
IX	0,58
X	0,58
XI	0,55
XII	0,55
XIII	0,50
XIV	0,40

Ein Vergleich mit den zu den Querschnitten gehörigen Kernweiten ergibt, dass der Angriffspunkt  $r$  nur in den Querschnitten VI, VIII, IX, X und XI ausserhalb der Kernfläche zu liegen kommt. Für diese Querschnitte muss sonach untersucht werden, ob im nutzbaren Querschnittsteile die Randpressung die zulässige Grenze nicht überschreitet; diese Untersuchung ist für den Querschnitt VIII vorgenommen worden, siehe Figur 297 und 298.

Es wurde der Querschnitt parallel zur Neutralachse  $nn$ , deren Richtung ja bekannt ist, in 22 Streifen geteilt; die Flächeninhalte dieser Streifen sind als Kräfte parallel zu  $nn$  wirkend aufzufassen und zum Kräftepolygon, s. Fig. 298, Massstab 1 mm = 0,04969 qm, anzutragen. Mittels der beliebig gewählten Poldistanz  $H$  (30 mm = 30 · 0,04969 = 1,488 qm) ergibt sich das Seilpolygon. In demselben zieht man nun durch den Punkt  $c$  die Linie  $cfe$  so, dass die Flächeninhalte der Figuren  $bcf$  und  $fge$  einander gleich werden, dann geht durch  $e$  die Neutralachse  $nn$  hindurch. Es ist nun die Pressung  $\mathcal{S}$  in einer Entfernung  $\overline{ed} = \overline{hi}$  von der Neutralachse:

$$\mathcal{S} = \frac{N_4}{H} = \frac{112048}{14880} = 7,53 \text{ kg per Quadratcentimeter.}$$

In dem äussersten Querschnittsrande  $lm$ , siehe Figur 295, ist die Pressung:

$$\mathcal{S}_1 = \frac{\mathcal{S}_1 \overline{ho}}{\overline{hi}} = \frac{7,53 \cdot 47}{56} = 6 \text{ kg per Quadratcentimeter.}$$

Die Pressung  $\mathcal{S}_1$  bleibt also innerhalb der zulässigen Beanspruchung; dasselbe ist auch bezüglich der übrigen auf die gleiche Weise zu untersuchenden Querschnitte IX, X und XI der Fall.

Liegt der Angriffspunkt  $r$  innerhalb der Kernfläche, wie z. B. in den Querschnitten II, IV, XII, XIII und XIV, so ist die ganze Querschnittsfläche als nutzbar zu betrachten, und es berechnen sich die Pressungen in den Querschnittsrändern aus den Gleichungen 173).

Man erhält z. B. für den Querschnitt II, siehe Figur 297:

$$\mathcal{S}_1 = \frac{N_1}{F} \frac{z_1}{e} = \frac{20764}{15100} \cdot \frac{0,712}{0,412} = 2,4 \text{ kg per Quadratcentimeter}$$

und

$$\mathcal{S}_2 = \frac{N_1}{F} \frac{z_2}{e} = \frac{20764}{15100} \cdot \frac{0,112}{0,412} = 0,4 \text{ kg per Quadratcentimeter.}$$

Für den Querschnitt XIII findet man:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \frac{N_9}{F} \frac{z_1}{e} = \frac{287113}{360000} \cdot \frac{1,5}{1,0} = 1,2 \text{ kg} \\ \mathcal{S}_2 &= \frac{N_9}{F} \frac{z_2}{e} = \frac{287113}{360000} \cdot \frac{0,5}{1,0} = 0,4 \text{ kg} \end{aligned} \right\} \text{ per Quadratcentimeter.}$$

Die Pressung auf den Baugrund im untersten Querschnitt XIV beträgt:

$$\mathcal{S}_1 = \frac{373513}{360000} \cdot \frac{1,4}{1,0} = 2 \text{ kg} \text{ bzw. } \mathcal{S}_2 = \frac{373513}{360000} \cdot \frac{0,6}{1,0} = 0,6 \text{ kg}$$

Die vorstehende Untersuchung liefert ein klares Bild über die Beanspruchung der einzelnen Schornsteinquerschnitte durch die äusseren Kräfte und zeigt, dass die gewählten Abmessungen beibehalten werden können.

**Anmerkung 43.** Für den runden Schornstein ist zur Berechnung des Winddruckes gleichfalls ein durch die Schornsteinachse geführter Vertikalschnitt zu wählen und von dem auf die volle Fläche treffenden Drucke zwei Drittel als Winddruck der Rechnung zu Grunde zu legen. Im übrigen bleibt der Gang der Untersuchung der gleiche wie in dem vorstehend behandelten Falle.

309) **Aufgabe 137.** Der in Figur 292 dargestellte Vertikalschnitt soll für einen runden Schornstein zu Grunde gelegt werden. Es ist in ähnlicher Weise, wie in Aufgabe 136 gezeigt wurde, die Stabilitätsuntersuchung des runden Schornsteines durchzuführen.

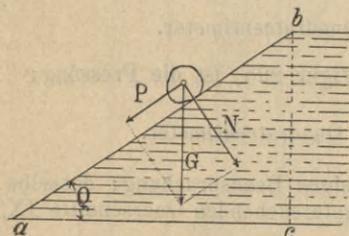
## C. Der Erddruck.

### 1) Der natürliche Böschungswinkel.

#### a) Begriff des natürlichen Böschungswinkels.

310) Wird eine lockere, kohäsionslose Erdmasse auf einer festen Unterlage  $ac$ , siehe Figur 300, aufgeschüttet, so schliesst die Fläche  $ab$ , nach welcher die Erdmasse sich abböscht, mit der horizontalen Fläche  $ac$  einen Winkel ein, dessen Grösse von der natürlichen Beschaffenheit der Erdmasse abhängig ist. Dieser Winkel heisst der natürliche Böschungswinkel des Materiales.

Figur 300.



Ein Erdteilchen  $P$  wird auf der schrägen Fläche  $ab$  im Gleichgewicht sein, d. h. nicht abrutschen, wenn die Gleichung besteht:

$$185) \dots P = Nf$$

Num ist aber:

$$P = G \sin \varphi \text{ und } N = G \cos \varphi$$

daher ist:

$$186) \dots f = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Man kann also sagen: „Der natürliche Böschungswinkel ist jener Winkel, dessen Tangente gleich dem Reibungskoeffizienten der Erdmasse ist.“

**Anmerkung 44.** Unter Böschung versteht man das Verhältnis  $\frac{ac}{bc} = \operatorname{cotg} \varphi$ .

b) Grösse des natürlichen Böschungswinkels für einige Erdarten und Gewichte der letzteren per Kubikmeter.

311) In der folgenden Tabelle ist für einige der am häufigsten vorkommenden Erdarten die Grösse des natürlichen Böschungswinkels, sowie das Gewicht per Kubikmeter angegeben. Im Mittel darf man den natürlichen Böschungswinkel für die meisten Erdarten zu  $30^\circ$  annehmen.

Material	Reibungswinkel $\varrho$	Gewicht per Kubikmeter
Lockere Dammerde, trocken . . . . .	$40^\circ$	1400
feucht . . . . .	$45^\circ$	1580
mit Wasser gesättigt . . . . .	$27^\circ$	1800
Lockere Lehmerde, trocken . . . . .	$40^\circ$	1500
feucht . . . . .	$45^\circ$	1550
mit Wasser gesättigt . . . . .	$27^\circ$	2040
Sand, trocken . . . . .	$35^\circ$	1640
feucht . . . . .	$40^\circ$	1740
mit Wasser gesättigt . . . . .	$24^\circ$	2000
Gerölle, eckig . . . . .	$45^\circ$	1770
rundlich . . . . .	$30^\circ$	1770

## 2) Begriff des Erddruckes.

312) Soll eine Erdmasse unter einem grösseren Winkel als dem natürlichen Böschungswinkel abgeböschet werden, so ist zu ihrer Stützung eine Wand  $ab$  erforderlich, siehe Figur 301. Infolge der Reibung längs  $ab$  wird bei einem Nachgeben der Wand die Erdmasse nicht auf der natürlichen Böschung, sondern längs einer steileren Böschung  $ac$ , der sogenannten Gleitfläche, abrutschen; der von dem Keile  $abc$  auf die Wand  $ab$  ausgeübte Druck heisst der Erddruck; man erhält den letzteren durch Zerlegung des Gewichtes  $G$  des Erdkeiles  $abc$  in zwei Komponenten  $P$  und  $Q$ , von welchen  $P$  unter dem Reibungswinkel  $\varrho'$  zwischen der Wand  $ab$  und der Erdmasse,  $Q$  unter dem Reibungswinkel  $\varrho$  gegen die Normale zu  $ab$  bzw.  $ac$  geneigt ist.  $P$  gibt die Grösse des auf die Wand ausgeübten Erddruckes an.

## 3) Ermittlung der Gleitfläche.

313) Ist die Terrainlinie unter einem kleineren Winkel als der natürliche Böschungswinkel gegen die Horizontale geneigt, bezeichnet ferner  $ac$  die Gleitfläche und  $G$  das Gewicht des durch die letztere und die Wand  $ab$  begrenzten Erdkeiles, so zerlegt man  $G$  in die Kräfte  $P$  und  $Q$  und zeichnet zu den Kräften  $G$ ,  $P$  und  $Q$  das Kräftedreieck  $def$ , siehe Figur 302. Für eine andere, der  $ac$  unendlich nahe gelegenen Gleitfläche  $ac_1$  ergibt sich das Kräftedreieck  $de_1f$ . Es finden nun die folgenden Beziehungen statt.

Es ist:

$$\begin{aligned} \triangle abc : \triangle acc_1 &= G : \triangle G, \quad \triangle G = \text{dem Gewicht des Erdprismas } acc_1, \\ &= \overline{de} : \overline{ee_1} \end{aligned}$$





Wand  $ab$  an; hierbei ist die Breite der Fläche  $ab$  gleich der Einheit angenommen gedacht.“

**b) Angriffspunkt und Richtung des Erddruckes.**

315) Trägt man die Erddrücke auf die Wandstücke  $\overline{bc}$ ,  $\overline{cd}$  und  $\overline{da}$ , siehe Figur 304, als Senkrechte  $\overline{cc'}$ ,  $\overline{dd'}$ ,  $\overline{aa'}$  zur Wand  $ab$  auf, so stellt die Verbindungslinie der Punkte  $b, c', d', a'$  eine Kurve dar, durch welche die Zunahme des Erddruckes von oben nach unten zu versinnbildlicht wird. Man kann diese Kurve als die Drucklinie des Erddruckes auf die Wand  $ab$  bezeichnen. Die von letzterer und der Drucklinie eingeschlossene Fläche  $ba'a$  bedeutet das

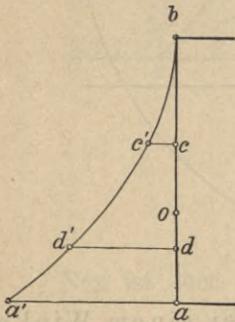
statische Moment des ganzen Erddruckes hinsichtlich des Drehpunktes  $a$ . Ist nun  $o$  der Angriffspunkt der Resultante des Erddruckes, so ist das statische Moment derselben gleich  $\overline{ao} \cdot \overline{aa'}$ . Der Inhalt der Fläche  $ba'a$  ist, weil die Kurve  $bc'd'a'$  eine Parabel mit dem Scheitel  $b$  ist, gleich  $\frac{1}{3} \overline{aa'} \cdot \overline{ab}$ . Man hat also die Gleichung:

$$\overline{ao} \cdot \overline{aa'} = \frac{1}{3} \overline{aa'} \cdot \overline{ab}$$

d. h. es ist:

$$188) \dots \overline{ao} = \frac{1}{3} \overline{ab}$$

Figur 304.



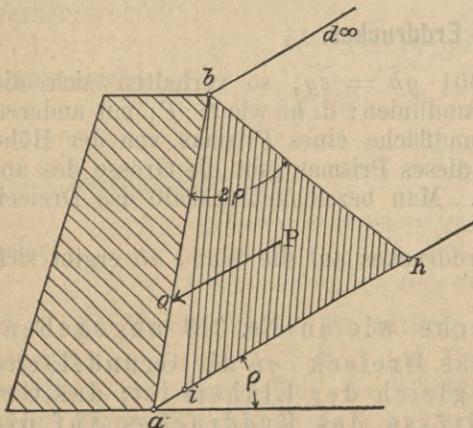
„Der Angriffspunkt des Erddruckes auf eine ebene Wand liegt, unter der Voraussetzung, dass die obere Abgrenzung der Erdmasse eine ebene ist, in ein Drittel der Höhe der Wand über dem Fusse der letzteren.“

Die Richtungslinie des Erddruckes bildet mit der Normalen zur gedrückten Wand den Reibungswinkel  $\rho$ .

**5) Ermittlung der Gleitfläche in besonderen Fällen.**

**a) Die Terrainlinie ist unter dem natürlichen Böschungswinkel zur Horizontalen geneigt.**

Figur 305.



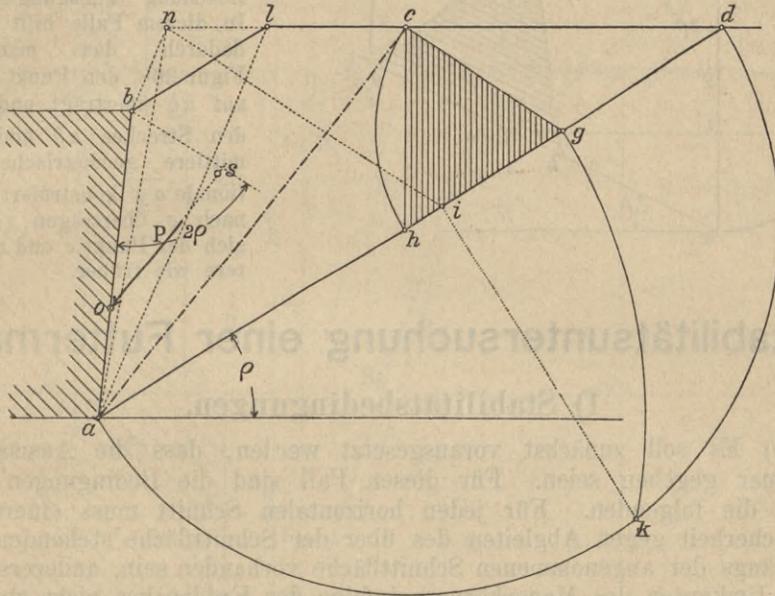
316) In diesem Falle ergibt sich das Druckdreieck sehr einfach, indem man, siehe Figur 305, die Hauptlinie  $bh$  zeichnet und hierauf  $\overline{hi} = \overline{bh}$  macht. Der Angriffspunkt des Erddruckes liegt gleichfalls in ein Drittel der Höhe der gedrückten Wand  $ab$ .

### b) Die Terrainlinie ist eine gebrochene Linie.

317) Man verwandelt das Dreieck  $abl$ , siehe Figur 306, in das flächengleiche Dreieck  $aln$ , dessen Grundlinie mit der verlängerten Linie  $dl$  zusammenfällt, zieht  $ni$  parallel zur Hauptlinie, und verfährt im übrigen wie früher.

Zur Ermittlung des Angriffspunktes  $o$  verschafft man sich den Schwerpunkt  $s$  der Figur  $ablc$ , so liefert die Parallele durch  $s$  zu  $ac$  auf  $ab$  den Angriffspunkt  $o$  des Erddruckes.

Figur 306.

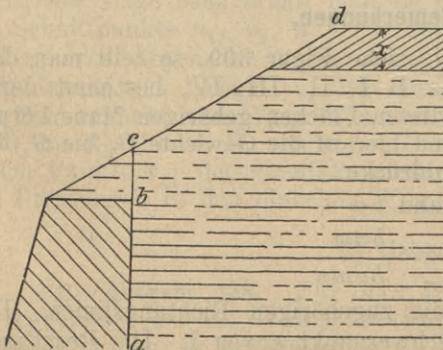


In der Figur 306 ist die Richtungslinie von  $P$  unrichtig eingezeichnet, sie bildet mit der Normalen zur Wand  $ab$  den Winkel  $\rho$ .

### c) Die Terrainlinie ist eine gebrochene Linie und die obere Begrenzungsfläche belastet.

318) Man reduziert die zufällige Belastung auf Belastung durch Erdmaterial, indem man die Höhe  $x$ , s. Figur 307, ermittelt, bis zu welcher Erde aufgeschüttet werden müsste, um dieselbe Belastung zu erzielen wie die gegebene. Ist  $Q$  die gegebene Belastung per Quadratmeter,  $G$  das Gewicht eines Kubikmeters Erde, so ergibt sich  $x$  aus der Gleichung

Figur 307.



$x = \frac{Q}{G}$ . Man betrachtet jetzt die Linie  $bcd$  als Terrainlinie und verfährt wie im vorhergehenden Falle.

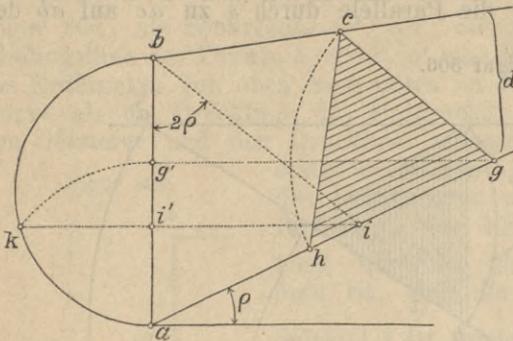
319) Als zufällige Belastung, bezw. als Verkehrslast, rechnet man bei Eisenbahndämmen 1400, bei Strassendämmen 400 kg per Quadratmeter; in ersterem Falle ist dann, das Gewicht eines Kubikmeters Dammerde zu 1600 kg angenommen,

$$x = \frac{1400}{1600} = 0,875 \text{ m}$$

in letzterem Falle aber ist:

$$x = \frac{400}{1600} = 0,250 \text{ m}$$

Figur 308.



**Anmerkung 46.** Bei der Konstruktion zur Ermittlung der Gleitfläche kann der Fall eintreten, dass der Schnittpunkt *d* der Terrainlinie mit der natürlichen Böschung unzugänglich wird. In diesem Falle hilft man sich dadurch, dass man, siehe Figur 308, den Punkt *i* nach *i'* auf *ab* überträgt und nun zu den Strecken *ab* und *ai'* die mittlere geometrische Proportionale *ag'* konstruiert; wird *g'* nach *g* übertragen, so ergibt sich der Punkt *c* und alles Weitere wie früher.

## D. Stabilitätsuntersuchung einer Futtermauer.

### 1) Stabilitätsbedingungen.

320) Es soll zunächst vorausgesetzt werden, dass die Ausmasse der Futtermauer gegeben seien. Für diesen Fall sind die Bedingungen für die Stabilität die folgenden. Für jeden horizontalen Schnitt muss einerseits die nötige Sicherheit gegen Abgleiten des über der Schnittfläche stehenden Mauerkörpers längs der angenommenen Schnittfläche vorhanden sein, andererseits darf auch ein Umkanten des Mauerkörpers infolge des Erddruckes nicht stattfinden.

Beide Bedingungen sind erfüllt, wenn für jeden Schnitt die Resultante aus dem über der Schnittfläche stehenden Mauergewicht und dem auf diesen Mauerkörper treffenden Erddruck nicht nur mit der Normalen zur Schnittfläche einen kleineren Winkel bildet, als den Reibungswinkel, sondern ausserdem die betreffende Schnittfläche innerhalb ihrer Umgrenzung trifft. Dabei dürfen an keiner Stelle die auftretenden grössten Pressungen die zulässige Beanspruchung des Materiales überschreiten.

### 2) Ausführung der Stabilitätsuntersuchung.

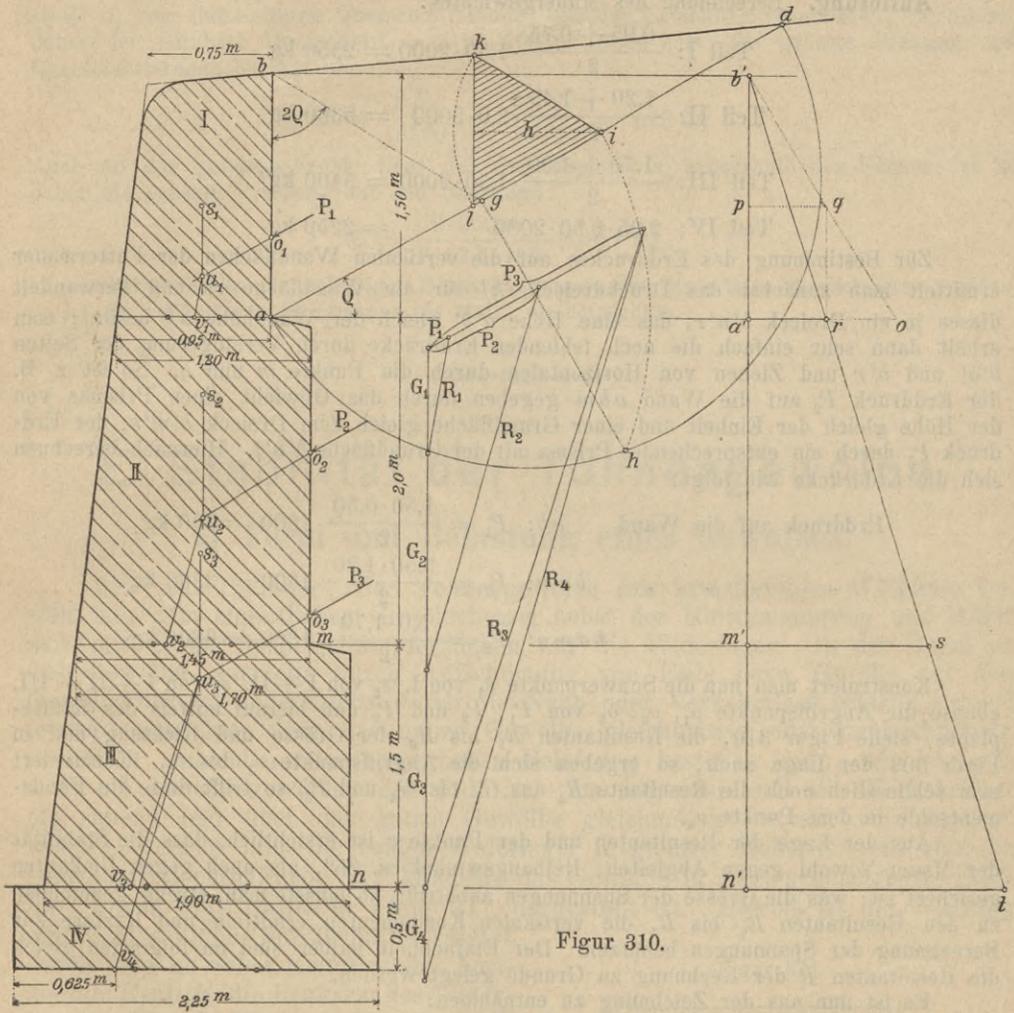
#### a) Allgemeine Bemerkungen.

321) Hat die Futtermauer das Profil, siehe Figur 309, so teilt man dasselbe zweckentsprechend in Abschnitte, z. B. I, II, III, IV, bestimmt deren Flächeninhalte, sowie die Inhalte der zu diesen Flächen gehörigen Mauerkörper von der Tiefe gleich der Längeneinheit und hierauf die Gewichte  $G_1$  bis  $G_4$  der letzteren. Nunmehr ermittelt man die Erddrücke:

- $P_1$  auf die Wand *ba*
- $P_2$  " " " *bam*
- $P_3$  " " " *bamn*

deren Angriffspunkte  $o_1, o_2, o_3$ , sowie die zugehörigen Richtungslinien. Die Richtungslinie von  $G_1$  geht durch den Schwerpunkt *s* von I. Die Resultante

Figur 309.



Figur 310.

aus dem Mauergewicht  $G_1 + G_2$  enthält den Schwerpunkt  $s_2$  von I + II, jene von  $G_1 + G_2 + G_3$  den Schwerpunkt  $s_3$  von I + II + III. Mittels des Kräfteplanes, siehe Figur 310, ergeben sich die Resultanten  $R_1$  von  $G_1$  und  $P_1$ ,  $R_2$  von  $G_1 + G_2$  und  $P_2$ ,  $R_3$  von  $G_1 + G_2 + G_3$  und  $P_3$  der Grösse und Richtung nach; der Lage nach erhält man sie durch die Parallelen zu  $R_1, R_2, R_3$  durch die Schnittpunkte  $u_1, u_2, u_3$ . Hierdurch ergeben sich die Schnittpunkte  $v_1, v_2$  und  $v_3$ , von denen die ersten beiden die Fugenflächen durch  $a_1$  und  $m$  innerhalb des Kernes treffen.  $v_3$  liegt ausserhalb des Kernes. Die Vertikale durch den Schwerpunkt von IV geht in vorliegendem Falle gleichfalls durch  $u_3$ , daher auch die Resultante  $R_4$  von  $G_4$  und  $P_3$ ; sie trifft die Fundamentesole in einem Punkte  $v_4$ , der ebenfalls ausserhalb des Kernes liegt. Nunmehr können die Pressungen in den einzelnen Fugenflächen ermittelt werden.

**b) Übungsaufgabe.**

322) **Aufgabe 138.** Für die in Figur 309 im Profil dargestellte Futtermauer ist die Stabilitätsuntersuchung durchzuführen, ein Kubikmeter Mauerwerk = 2000 kg; ein Kubikmeter Erdmaterial = 1600 kg.

**Auflösung.** Berechnung des Mauergewichtes:

$$\text{Teil I: } \frac{0,95 + 0,75}{2} \cdot 1,50 \cdot 2000 = 2550 \text{ kg}$$

$$\text{Teil II: } \frac{1,20 + 1,45}{2} \cdot 2,0 \cdot 2000 = 5300 \text{ kg}$$

$$\text{Teil III: } \frac{1,70 + 1,90}{2} \cdot 1,50 \cdot 2000 = 5400 \text{ kg}$$

$$\text{Teil IV: } 2,25 \cdot 0,50 \cdot 2000 = 2250 \text{ kg}$$

Zur Bestimmung des Erddruckes auf die vertikalen Wandflächen der Futtermauer ermittelt man zunächst das Druckdreieck  $ikl$  für die Wandfläche  $\overline{ab}$  und verwandelt dieses in ein Dreieck  $b'a'r$ , das eine Höhe  $\overline{a'b'}$  gleich der Wandhöhe  $\overline{ab}$  besitzt; man erhält dann sehr einfach die noch fehlenden Erddrücke durch Verlängerung der Seiten  $b'a'$  und  $b'r$  und Ziehen von Horizontalen durch die Punkte  $m$  und  $n$ . So ist z. B. der Erddruck  $P_2$  auf die Wand  $abm$  gegeben durch das Gewicht eines Prismas von der Höhe gleich der Einheit und einer Grundfläche gleich dem Dreieck  $b'm's$ , der Erddruck  $P_3$  durch ein entsprechendes Prisma mit der Grundfläche  $b'n't$ . Hiernach berechnen sich die Erddrücke wie folgt:

$$\text{Erddruck auf die Wand } ab: P_1 = \frac{1,50 \cdot 0,50}{2} \cdot 1600 = 600 \text{ kg}$$

$$\text{" " " " } bam: P_2 = \frac{3,50 \cdot 1,20}{2} \cdot 1600 = 3360 \text{ kg}$$

$$\text{" " " " } bamn: P_3 = \frac{5,0 \cdot 1,70}{2} \cdot 1600 = 6800 \text{ kg}$$

Konstruiert man nun die Schwerpunkte  $s_1$  von I,  $s_2$  von I + II,  $s_3$  von I + II + III, ebenso die Angriffspunkte  $o_1, o_2, o_3$  von  $P_1, P_2$  und  $P_3$  und hierauf mittels des Kräfteplanes, siehe Figur 310, die Resultanten  $R_1$  bis  $R_3$  der Grösse und Richtung und in Figur 309 der Lage nach, so ergeben sich die Angriffspunkte  $v_1$  bis  $v_3$ . Konstruiert man schliesslich noch die Resultante  $R_4$  aus  $G_1$  bis  $G_4$  und  $P_3$ , so trifft diese die Fundamentsohle in dem Punkte  $v_4$ .

Aus der Lage der Resultanten und der Punkte  $v$  ist ersichtlich, dass die Stabilität der Mauer sowohl gegen Abgleiten, Reibungswinkel ca.  $35^\circ$ , als auch gegen Umkanten gesichert ist; was die Grösse der Spannungen anbetrifft, so müsste man, streng genommen, zu den Resultanten  $R_1$  bis  $R_4$  die vertikalen Komponenten ermitteln und letztere zur Berechnung der Spannungen benützen. Der Einfachheit halber sind im folgenden gleich die Resultanten  $R$  der Rechnung zu Grunde gelegt worden.

Es ist nun aus der Zeichnung zu entnehmen:

$$R_1 = 15 \cdot 200 = 3000 \text{ kg}$$

$$R_2 = 50 \cdot 200 = 10000 \text{ kg}$$

$$R_3 = 90 \cdot 200 = 18000 \text{ kg}$$

$$R_4 = 110 \cdot 200 = 20000 \text{ kg}$$

Für die Fuge  $v_1a$  erhält man als Pressung:

$$\mathcal{S} = \frac{R_1}{F} = \frac{3000}{9500} = \text{ca. } 0,3 \text{ kg}$$

für die Fuge  $v_2m$  ist zunächst:

$$e = \frac{145}{6} = 24 \text{ cm} \quad \text{und} \quad z = 20 \text{ cm}$$

daher ist:

$$z_1 = 24 + 20 = 44 \text{ cm} \quad \text{und} \quad z_2 = 26 - 24 = 2 \text{ cm}$$

Man erhält demnach als grösste Pressungen:

$$\mathcal{S}_1 = \frac{R_2}{F} \frac{z_1}{e} = \frac{10000}{14500} \cdot \frac{44}{24} = 1,2 \text{ kg}$$

$$\mathcal{S}_2 = \frac{R_3}{F} \frac{z_2}{e} = \frac{10000}{145} \cdot \frac{2}{24} = 0,05 \text{ kg}$$

Für die Fugenfläche  $nv_3$  fällt  $v_3$  ausserhalb des Centralkernes und es ist der Abstand  $v_3$  vom linksseitigen Querschnittsrande, aus der Zeichnung entnommen, ca. 55 cm, daher der nutzbare Querschnitt =  $3 \cdot 55 \cdot 100 = 16500$  qcm; die grösste Pressung am Querschnittsrande beträgt also:

$$\mathcal{S} = \frac{2R_3}{16500} = \frac{36000}{16500} = 2,18 \text{ kg}$$

Auch an der Fundamentsohle liegt der Angriffspunkt  $v_4$  ausserhalb des Kernes; es ist daher die grösste Pressung auf den Baugrund:

$$\mathcal{S} = \frac{2 \cdot 20000}{3 \cdot 62,5 \cdot 100} = 2,1 \text{ kg}$$

Da an keiner Stelle die zulässigen Beanspruchungen des Materiales überschritten werden, so ist die vorgeführte Stützmauer als stabil zu betrachten.

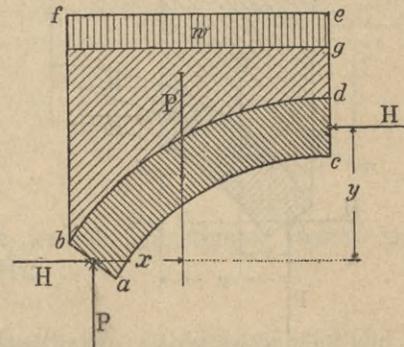


## E. Stabilität der Tonnengewölbe.

### 1) Form und Belastung eines Gewölbes.

323) Ein Cylinder- oder Tonnengewölbe mit kreisförmiger Wölblinie besteht aus dem eigentlichen Gewölbobogen nebst der Hintermauerung und stützt sich mittels der beiden Kämpferflächen auf die Widerlager. In der Regel ist das Gewölbe einerseits durch Aufschüttung von Erde bzw. Gerölle auf den Gewölberücken, andererseits durch die Nutz- oder Verkehrslast belastet, wobei letztere aus einer über das ganze Gewölbe gleichmässig oder ungleichmässig verteilten, ruhenden oder beweglichen Belastung bestehen kann, wie letzteres z. B. bei Brückengewölben der Fall ist. Im folgenden soll die Verkehrslast als ruhend und über das ganze Gewölbe gleichmässig verteilt vorausgesetzt werden. Liegen dann die beiden Widerlager in gleicher Höhe, so teilt eine die Gewölbachse enthaltende Vertikalebene das Gewölbe in zwei symmetrische Hälften, wovon eine Hälfte in Figur 311 dargestellt ist. Hierbei ist die Wirkung der rechtsseitigen Gewölbehälfte ersetzt durch eine im Scheitel auftretende horizontale Kraft  $H$ , die Reaktion des Widerlagers aber durch eine der Kraft  $H$  gleichgrosse und entgegengesetzt gerichtete Kraft  $H$  sowie eine vertikal nach aufwärts gerichtete Kraft  $P$ , welche letztere gleich ist dem Gewichte der Gewölbehälfte, einschliesslich der gesamten Gewölbebelastung. Die Verkehrslast  $w$  ist dabei ersetzt gedacht durch eine Schichte Füllmaterial von bestimmter Höhe. Die Lage der Angriffspunkte der Kräfte  $H$  und  $P$  auf den Fugenflächen  $ab$  und  $cd$ , siehe Figur 311, ist nicht bekannt, doch weiss man, dass, wenn in den betreffenden Fugen nur Druckspannungen herrschen sollen, diese Punkte innerhalb des Centralkernes der bezüglichen Fugen, also im mittleren Drittel der letzteren liegen müssen.

Figur 311.



Die Wölblinie kann verschiedenartig geformt sein; je nach dem Zwecke, dem das Gewölbe zu dienen hat, kommen elliptische, parabolische und kreis-

förmige Wölblinien in der Technik vor. Im nachfolgenden soll stets eine kreisförmige Wölblinie vorausgesetzt werden.

## 2) Stabilitätsbedingungen.

324) Soll ein Gewölbe allen Anforderungen in Bezug auf Stabilität entsprechen, so muss in demselben Gleichgewicht vorhanden sein:

- 1) gegen Drehen,
- 2) gegen Zerdrücken und
- 3) gegen Gleiten.

### a) Gleichgewicht eines Gewölbes gegen Drehen, Horizontalschub, Drucklinien.

325) Betrachtet man einen Gewölbestreifen von der Tiefe gleich der Einheit und nimmt die Angriffspunkte der im Scheitel und Kämpfer wirkenden Kräfte zunächst in den Schwerpunkten dieser Flächen, endlich das Gewicht der Gewölbehälfte als eine im Schwerpunkte des Gewölbestreifens wirkende vertikale Kraft  $P$  an, so liegen die sämtlichen in Betracht kommenden Kräfte in einer Vertikalebene und es wird Gleichgewicht bestehen, wenn sowohl die Resultante aller dieser Kräfte, als auch die Summe der statischen Momente der letzteren bezüglich eines beliebigen in der Ebene der Kräfte gewählten Drehpunktes gleich Null ist. Man hat also die Beziehungen:

$$P = P$$

$$H = H$$

$$Px = Hy$$

Aus der letzten Gleichung berechnet sich die im Scheitel des Gewölbes wirkende Horizontalkraft:

$$189) \dots H = \frac{Px}{y}$$

Denkt man sich, siehe Figur 312, den Gewölbekörper durch eine in beliebigem Abstände  $v$  vom Mittelpunkte der Kämpferfuge durch eine parallel zur Gewölbeachse geführte Vertikalebene durchschnitten, die Wirkung des abgeschnittenen Gewölbestückes ersetzt durch eine Kraft  $R$  und letztere in eine horizontale und vertikale Komponente  $H$  und  $V$  zerlegt, so wird der links von der Schnittebene befindliche Gewölbesteil im Gleichgewicht sein, wenn die Gleichungen stattfinden:

$$190) \dots P = G + V$$

$$191) \dots H = H$$

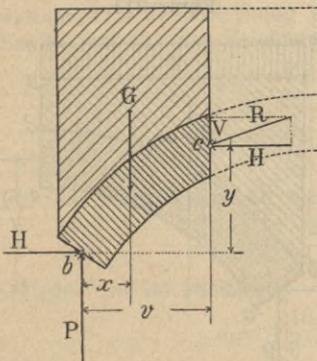
$$192) \dots Hy = Gx + Vv$$

Hierin bezeichnet  $V$  das Gewicht des zwischen Scheitel und Schnittebene liegenden Gewölbestückes, während  $H$  der Horizontalschub des Gewölbes genannt wird.

Aus Gleichung 192) folgt weiter:

$$193) \dots y = \frac{Gx + Vv}{H}$$

Figur 312.



Da die Grösse von  $H$  aus Gleichung 189) bestimmt ist, so lässt sich nunmehr mittels der Gleichung 193) der Wert von  $y$  ermitteln; die Lage des Angriffspunktes  $c$  von  $R$  ist demnach bestimmt, sobald die Angriffspunkte von  $H$  und  $P$  im Scheitel und Kämpfer gewählt sind. Aus den Beziehungen 189) bis 193) ergeben sich die folgenden Sätze:

„Im Scheitel eines Gewölbes wirkt eine horizontale Kraft  $H$ , welche der Horizontalschub des Gewölbes heisst und durch das ganze Gewölbe hindurch von gleicher Grösse ist, sobald ihr Angriffspunkt im Scheitel und jener der Widerlagsreaktion im Kämpfer gewählt sind.“

„Führt man durch das Gewölbe eine Anzahl vertikaler Schnitte, so hat für jeden solchen Schnitt der Angriffspunkt der Resultante aus Horizontalschub und dem Gewichte des zwischen Scheitel und Schnittebene befindlichen Gewölbeteiles eine ganz bestimmte Lage, sobald der Angriffspunkt des Horizontalschubes im Scheitel und jener der Widerlagsreaktion im Kämpfer gewählt sind.“

Die vorgenannten Resultanten bilden in ihrer Gesamtheit ein Polygon, welches ein Druckpolygon oder eine Drucklinie des Gewölbes heisst.

Da die Angriffspunkte des Horizontalschubes und der Widerlagsreaktion innerhalb des mittleren Drittels der betreffenden Fugen beliebig wählbar sind, so gibt es im Gewölbe unzählig viele Drucklinien.

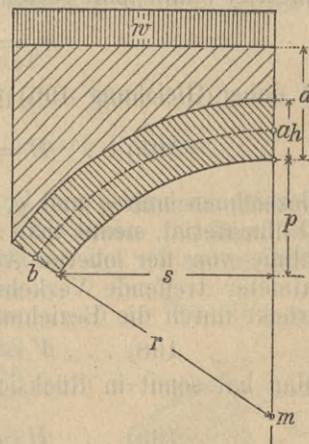
Zu jeder Drucklinie gehört ein ganz bestimmter Horizontalschub, der sich aus Gleichung 189) ermitteln lässt; er wird am grössten, wenn  $y$  seinen kleinsten und  $x$  seinen grössten Wert annimmt, dagegen am kleinsten, wenn  $y$  am grössten und  $x$  am kleinsten ist.

Wählt man also im Scheitel den unteren, im Kämpfer den oberen Endpunkt des mittleren Fugendrittels als Angriffspunkte von  $H$ , so entsteht der grösste Horizontalschub im Gewölbe; wird dagegen im Scheitel der obere, im Kämpfer der untere Endpunkt des mittleren Fugendrittels als Angriffspunkt von  $H$  angenommen, so ergibt sich der kleinste Horizontalschub des Gewölbes.

Die sämtlichen möglichen Drucklinien müssen, wenn im Gewölbe nur Druckspannungen auftreten sollen, jede Fuge innerhalb ihres mittleren Drittels treffen.

Von allen möglichen Drucklinien ist jene die günstigste, welche sich der Mittellinie des Gewölbes am meisten nähert.

Figur 313.

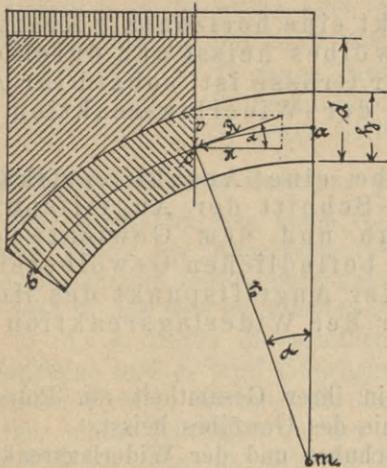


## b) Gleichgewicht eines Gewölbes gegen Zerdrücken, Schlusssteinhöhe und Stärke des Gewölbebogens.

326) Denkt man sich im Gewölbe etwa die Mittellinie des Gewölbebogens als Drucklinie angenommen und an irgend einer Stelle einen Vertikalschnitt parallel zur Gewölbeachse geführt, hierauf für die Schnittfläche die Kräfte  $R$ ,  $V$

und  $H$  ermittelt, endlich im Punkte  $c$  an die Drucklinie, welche an der Stelle  $c$  einer Kreislinie mit dem Halbmesser  $r_0$  angehören soll, die Tangente an letztere gezogen, so erkennt man zunächst, dass:

Figur 314.



$x$  = Entfernung der Schnittebene von der Scheitelvertikalen des Gewölbes.

gesetzt werden kann,  $r_0$  ist der Krümmungshalbmesser der Drucklinie im Gewölbescheitel und kann ohne grossen Fehler gleich dem Halbmesser  $r$  der inneren Wöblinie plus der halben Schlusssteinhöhe angenommen werden; wird letztere mit  $h$  bezeichnet, so kann man setzen:

$$r_0 = \frac{h}{2} + r$$

es geht daher Gleichung 196) über in folgende:

$$197) \dots H = V \left( \frac{h}{2} + r \right)$$

Bezeichnen nun  $g$  und  $g_1$  die Gewichte der Kubikeinheit von Mauerwerk bzw. Füllmaterial, nennt man ferner  $d$  den Abstand des Scheitels der inneren Gewöblinie von der oberen Abgrenzung des Füllmaterials und  $w$  die auf den Quadratmeter treffende Verkehrslast, so ist die Scheitelbelastung des Gewölbes ausgedrückt durch die Beziehung:

$$198) \dots V = w + (d - h) g_1 + hg$$

Man hat somit in Rücksicht auf Gleichung 197):

$$199) \dots H = [w + (d - h) g_1 + hg] \left( \frac{h}{2} + r \right)$$

Mit Bezugnahme auf die Festigkeit des Wöblmaterials darf der Horizontalschub eine bestimmte Grösse nicht überschreiten; doch muss bei einem Gewölbe, schon wegen der Unbestimmtheit der Lage des Angriffspunktes von  $H$  eine bedeutend grössere Sicherheit gegen Zerdrücken angenommen werden, als dies sonst bei Mauerwerk der Fall ist. Auch ist die Beanspruchung im Scheitel abhängig von der Gewölbeform, d. h. von der Spannweite, Pfeilhöhe und dem Halbmesser der inneren Wöblinie.

Entweder nimmt man als zulässige Beanspruchung „ $\frac{1}{2}$ “ des Wöblmaterials, einen beliebigen Bruchteil, jedoch nie mehr als die Hälfte der sonst

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H} = \frac{x}{\sqrt{r_0^2 - x^2}}$$

ist. Hieraus folgt:

$$194) \dots H = \frac{V \sqrt{r_0^2 - x^2}}{x}$$

Setzt man nun  $x = 1$  und nimmt die Einheit sehr klein, d. h. führt man den Schnitt in unmittelbarer Nähe des Gewölbescheitels, so geht die Gleich. 194) über in die folgende:

$$195) \dots H = \frac{V \sqrt{r_0^2 - 1}}{1}$$

oder unter Vernachlässigung der Grösse 1 gegenüber dem Werte  $r_0^2$ .

$$196) \dots H = V r_0$$

Hierbei bezeichnet  $V$  die nahe am Scheitel des Gewölbes wirkende Vertikalskraft, welche gleich der Scheitelbelastung

zulässigen Beanspruchung des betreffenden Steinmaterials oder man berechnet sich „ $\mathcal{S}$ “ aus empirischen Formeln, siehe Anmerkung 47:

Ist die Grösse „ $\mathcal{S}$ “ gewählt, so erhält man für den Horizontalschub die weitere Beziehung:

$$200) \dots H = \mathcal{S} h$$

Aus den beiden Gleichungen 199) und 200) folgt die weitere Gleichung:

$$201) \dots \mathcal{S} h = [w + (d - h) g_1 + h g] \left( \frac{h}{2} + r \right)$$

Hierin ist nur mehr die Grösse  $h$  unbekannt und kann somit berechnet werden; man erhält, unter der Voraussetzung, dass:

$$g_0 = \frac{g + g_1}{2}$$

sein soll:

$$202) \dots h = \frac{2r(g_0 d + w)}{2\mathcal{S} - (g_1 d + w)}$$

**Anmerkung 47.** Zur Feststellung der im Gewölbescheitel zulässigen Beanspruchung „ $\mathcal{S}$ “ kann man folgende empirische Formel benützen. Es ist:

$$\mathcal{S} = 0,0026 s + 0,323 \frac{r}{p}$$

Hierin bezeichnet  $s$  die Spannweite,  $p$  die Pfeilhöhe und  $r$  den Halbmesser der inneren Wölblinie in Centimeter ausgedrückt; es ergibt sich dann  $\mathcal{S}$  in Kilogramm per Quadratcentimeter.

**Anmerkung 48.** Für die Berechnung der Schlusssteinhöhe gibt es eine Reihe von empirischen Formeln, welche zur vorläufigen Ermittlung von  $h$  gleichfalls benutzt werden können. Solche Formeln sind:

$$h = 0,069 + 0,325 \text{ m nach Perronet}$$

$$h = 0,2 \sqrt{s} + 0,1 \text{ m nach Lesquiller}$$

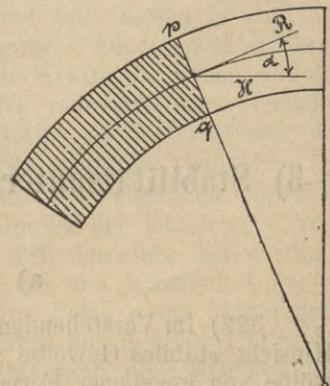
$$h = 0,346 \sqrt{r} \text{ für Kreisbogengewölbe nach Rankine.}$$

327) Der Gewölbebogen wird in der Regel aus einzelnen Steinen hergestellt, deren Lagerflächen entweder normal zur Mittellinie des Gewölbebogens beziehungsweise normal zur inneren Wölblinie gerichtet sind. Was nun die Stärke des Gewölbebogens zwischen Scheitel und Kämpfer anbetrifft, so kann man entweder durch das ganze Gewölbe die Stärke gleich der Schlusssteinhöhe nehmen; dann nimmt die Pressung in den einzelnen Fugen vom Scheitel nach dem Kämpfer hin zu, oder man kann die Forderung stellen, dass die Pressung in jeder Fuge gleich gross sein soll, dann muss die Gewölbestärke vom Scheitel nach dem Kämpfer grösser werden. Ist z. B., siehe Fig. 315,  $pq$  eine beliebige Lagerfuge zwischen Scheitel und Kämpfer normal zur Mittellinie des Bogens gerichtet,  $R$  die auf die Fugenfläche wirkende normale Druckkraft, so ist:

$$R = \frac{H}{\cos \alpha}$$

daher wenn  $l$  die Länge der Fuge  $pq$  bezeichnet:

Figur 315.



$$l \cdot 1 \cdot \mathcal{E} = \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{h \mathcal{E}}{\cos \alpha}$$

d. h. es ist:

$$203) \dots l = \frac{h}{\cos \alpha}$$

Soll also die Pressung in jeder Fuge zwischen Scheitel und Kämpfer gleich gross sein, so muss die Länge jeder Fuge so gewählt werden, dass ihre rechtwinklige Projektion auf eine Vertikale gleich der Schlusssteinhöhe ist.

Für die Länge der Kämpferfuge ergibt sich:

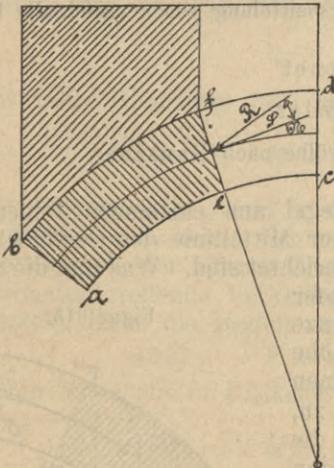
$$204) \dots l = \frac{h}{\cos \alpha}$$

Zur Feststellung der äusseren Wölblinie genügt es, die Gewölbstärke im Scheitel und an den Kämpfern nach den Gleichungen 202) und 204) zu ermitteln und durch die so bestimmten drei Punkte eine Kreislinie zu legen.

Ist die innere Wölblinie ein voller Halbkreis, so wirkt als eigentliches Gewölbe nicht der ganze über dem Halbkreise befindliche Gewölbebogen, sondern jener Teil, welcher zwischen den beiden unter  $30^\circ$  gegen die Horizontalebene geneigten Lagerflächen sich befindet; der grösste Centriwinkel, welcher zu einem Gewölbebogen gehören kann, beträgt somit  $120^\circ$ . Der übrige Teil des Gewölbebogens ist zum Widerlager zu rechnen.

### c) Gleichgewicht eines Gewölbes gegen Gleiten.

Figur 316.



328) Ist  $ef$ , siehe Figur 316, eine zwischen Scheitel und Kämpfer liegende Lagerfläche und  $R$  die auf die Fugenfläche wirkende Resultante der äusseren Kräfte, so muss, soll ein Gleiten längs der Fugenfläche  $ef$  vermieden werden, der Winkel  $\varphi$  zwischen der Resultante  $R$  und der Normalen zur Fugenfläche kleiner sein als der Reibungswinkel. Erfahrungsgemäss darf die Grösse des Winkels  $\varphi$  höchstens  $17^\circ$  betragen. In der Regel wird die notwendige Sicherheit gegen Gleiten vorhanden sein.

## 3) Stabilitätsuntersuchung bei symmetrischer Belastung des Gewölbes.

### a) Stabilität des Gewölbebogens.

329) Im Vorstehenden sind die Bedingungen aufgeführt, welche ein in jeder Hinsicht stabiles Gewölbe zu erfüllen hat; im folgenden soll nun für ein Gewölbe von gegebener Form die Stabilitätsuntersuchung vollständig durchgeführt werden. Es betrage, siehe Figur 317, die Spannweite  $s = 10$  m, die Pfeilhöhe

$p = 3$  m. Die innere Wölblinie sei eine Kreislinie. Das Gewölbe soll bis auf eine Höhe von 1,20 m über dem Scheitel der inneren Wölblinie mit Dammerde aufgeschüttet und die Aufschüttung horizontal abgeglichen sein. Die Verkehrsbelastung betrage 400 kg per Quadratmeter. Ein Kubikmeter Wölbsteinmauerwerk wiege 2000 kg, ein Kubikmeter Füllmaterial 1600 kg.

Aus der gegebenen Pfeilhöhe und Spannweite bestimmt sich zunächst der Halbmesser  $r$  der inneren Wölblinie mittels der Gleichung:

$$r^2 = (r - 3)^2 + 5^2$$

Es folgt hieraus:

$$r = 5,66 \text{ m}$$

Die Formel:

$$\mathfrak{S} = 0,0026s + 0,323 \frac{r}{p}$$

liefert die Scheitelpressung:

$$\mathfrak{S} = 0,0026 \cdot 1000 + 0,323 \cdot \frac{566}{300} = 3,2 \text{ kg per Quadratcentimeter}$$

Nunmehr berechnet sich die Schlusssteinhöhe aus der Beziehung:

$$h = \frac{2r(g_0 d + w)}{2\mathfrak{S} - (g_1 d + w)} = \frac{2 \cdot 5,66 (1800 \cdot 1,2 + 400)}{2 \cdot 32000 - (1600 \cdot 1,2 + 400)} = 0,47 \text{ m}$$

oder rund 0,50 m

Hiermit ist auch die Länge  $\overline{ab}$  der Kämpferfuge bestimmt; es ist nämlich:

$$\overline{ab} = \frac{0,5}{\cos \alpha} = \frac{0,5 \cdot 5,66}{2,66} = 1,06 \text{ m}$$

Eine Kreislinie durch die Punkte  $d$  und  $b$  mit dem Mittelpunkte  $m'$  auf der Linie  $dm$  bestimmt die Abgrenzung des Gewölberückens.

Die Verkehrsbelastung soll durch eine Lage Füllmaterial dargestellt werden. Da nun der Quadratmeter Gewölbefläche mit 400 kg belastet ist und 1 cbm Füllmaterial 1600 kg wiegt, so muss die Höhe der die Verkehrslast ersetzenden Füllmaterialschicht offenbar:

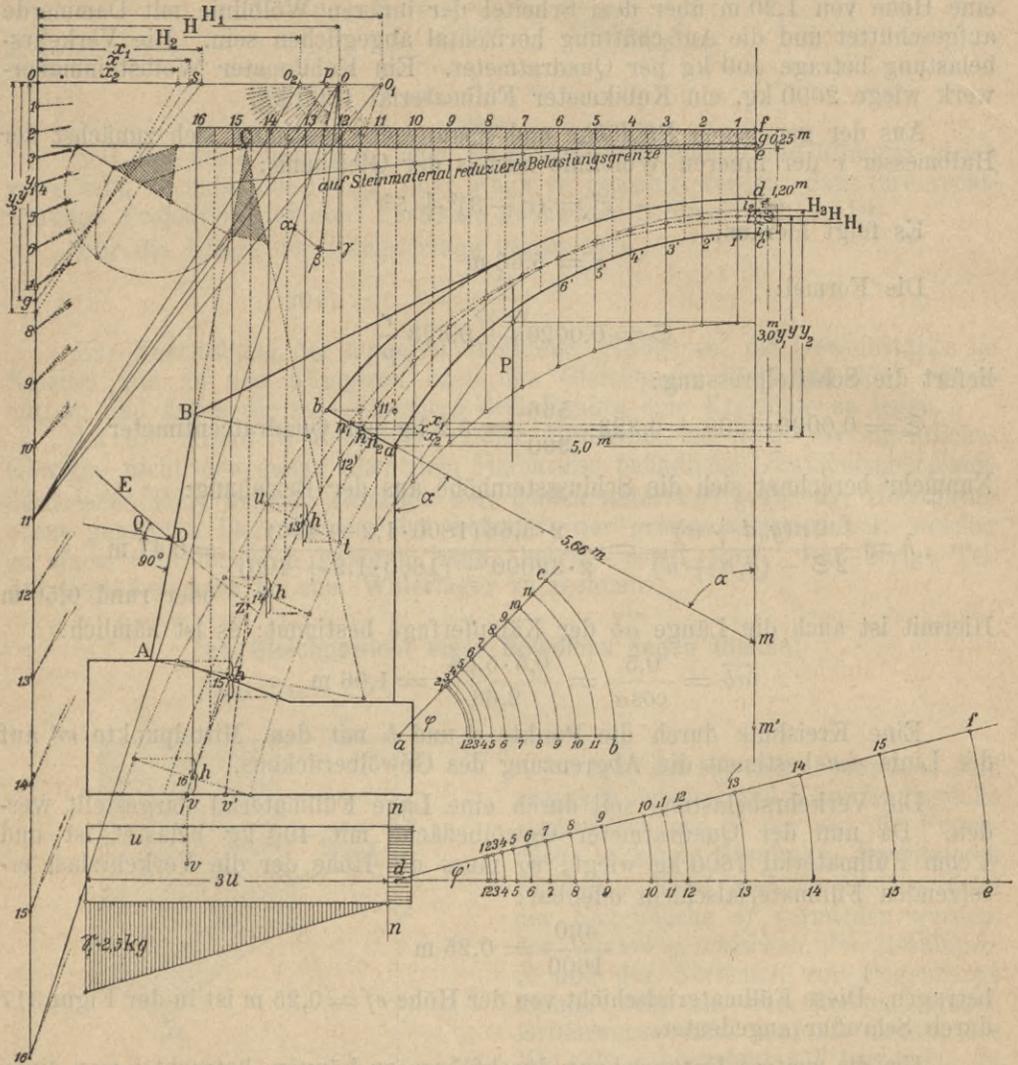
$$\frac{400}{1600} = 0,25 \text{ m}$$

betragen. Diese Füllmaterialschicht von der Höhe  $ef = 0,25$  m ist in der Figur 317 durch Schraffur angedeutet.

Um die weitere Untersuchung durchführen zu können, betrachtet man einen Gewölbestreifen von der Tiefe gleich der Einheit und teilt diesen in eine Anzahl von Lamellen von beliebiger aber gleicher Breite. Die Gewichte dieser Lamellen wirken in deren Schwerlinien als vertikale Kräfte belastend auf das Gewölbe. Zur bequemen Ermittlung dieser Kräfte reduziert man zunächst, nach Anleitung der No. 92) das vorhandene Füllmaterial auf Steinmaterial, wodurch sich die in der Figur 317 bezeichnete, auf Steinmaterial reduzierte Belastungsgrenze ergibt. Nunmehr sind die Gewichte der einzelnen Gewölbelamellen direkt proportional den Längen der Mittellinien der letzteren. Trägt man diese bzw. einen aliquoten, z. B. den vierten Teil derselben als vertikale Kräfte zu einem Kräftepolygon, siehe Figur 317a, an und konstruiert mittels eines auf der Horizontalen durch  $o$  beliebig gewählten Poles  $p$  ein Seilpolygon, so liefert letzteres die Lage von  $P$ , d. h. die Resultante aus den Gewichten der Lamellen 1 bis 11 der linken Gewölbehälfte. Wählt man die Mittelpunkte  $i$  und  $n$  der Scheitel- und Kämpferfuge als Angriffspunkte des Horizontalschubes

Figur 317a.

Figur 317.



und der Widerlagsreaktion, so ergeben sich aus der Zeichnung die Hebelarme  $x$  und  $y$ , wodurch mittels der Gleichung:

$$Px = Hy$$

der Horizontalschub  $H$  des Gewölbes sich bestimmen lässt und zwar am bequemsten graphisch als vierte geometrische Proportionale aus den Grössen  $P$ ,  $x$  und  $y$ ; man macht zu diesem Zwecke, siehe Figur 317a,  $og = y$  und  $os = x$  und zieht, da die Länge  $0 \cdot 11$  die Grösse von  $P$  darstellt, durch den Punkt 11 eine Parallele zu  $gs$ , welche auf der Horizontalen  $op$  den Horizontalschub  $H$  abschneidet. Konstruiert man nun mittels des Poles  $o$  ein neues Seilpolygon, dessen erste Seite durch den Mittelpunkt  $i$  der Scheitelfuge geht, so stellt dieses Seilpolygon eine Drucklinie des Gewölbes dar; erstere muss, soll das Gewölbe stabil sein, innerhalb des Kernes des Gewölbebogens verlaufen, sowie ausserdem durch den Mittelpunkt  $n$  der Kämpferfuge hindurchgehen.

Man kann ausser der eben erwähnten Drucklinie auch noch andere Drucklinien des Gewölbes konstruieren, z. B. jene, welche durch die Kernränder von Scheitel- und Kämpferfuge hindurchgehen, also entweder die Punkte  $i_1$  und  $n_1$  oder  $i_2$  und  $n_2$  enthalten. Der zu jeder dieser Drucklinie gehörige Horizontal-schub  $H_1$  bzw.  $H_2$ , bestimmt sich in gleicher Weise wie vorhin. In den Figuren 317 und 317a ist die Konstruktion angedeutet.

## b) Stabilität des Widerlagers.

### α) Ohne Berücksichtigung des Erddruckes.

330) Um zu untersuchen, ob das Widerlager des Gewölbes die notwendige Stabilität besitzt, bestimmt man auch für dieses eine Drucklinie, indem man die Lamellenteilung daselbst fortsetzt. Die letzte Seite in jenem Seilpolygon, das die Drucklinie im Gewölbebogen bildet, ist im vorliegenden Falle die Linie  $11'12'$  parallel zum Polstrahl  $0 \cdot 11$ ; diese trifft die Mittellinie der Lamelle 12 im Punkte  $12'$ . Nunmehr trägt man im Kräftepolygon, siehe Figur 317a, von der Höhe der Lamelle 12, d. i. die Strecke  $12 \cdot 12'$ , siehe Figur 317, denselben Bruchteil, nämlich  $\frac{1}{4}$  der ganzen Höhe als neue Kraft  $11 \cdot 12$  an, erhält hierdurch den neuen Polstrahl  $0 \cdot 12$  und hierdurch den Seilstrahl  $12'13'$  parallel zum Polstrahl  $0 \cdot 12$ . Auf diese Weise findet sich die Strecke  $13 \cdot 13'$  als Höhe der Lamelle 13, mit der man ebenso verfährt wie im vorhergehenden Falle u. s. w. Hierdurch ergibt sich eine Drucklinie, welche bis zum festen Baugrund hinabreicht. Ist nun die Widerlagerstärke von vornherein gegeben, so muss die Drucklinie im Widerlager einen solchen Verlauf haben, dass in keiner Fugenfläche der Angriffspunkt der Resultante der äusseren Kräfte ausserhalb der Kernfläche liegt. Soll dagegen die Stärke des Widerlagers erst bestimmt werden, so errichtet man in den durch die Drucklinie auf den Mittellinien der Lamellen sich ergebenden Punkten  $12'$ ,  $13'$  u. s. w. Senkrechte zur zugehörigen Seite der Drucklinie und bestimmt deren Längen derart, dass die Projektion der Fuge auf eine Vertikale gleich der Schlusssteinhöhe  $h$  wird. Die Fundamentstärke des Widerlagers ist so zu bemessen, dass die Beanspruchung des Baugrundes innerhalb der zulässigen Grenze bleibt, d. h. im allgemeinen 2,5 kg per Quadratcentimeter nicht überschreitet.

### β) Mit Berücksichtigung des Erddruckes.

331) Ist das Gewölbe und Widerlager mit Erdmaterial hinterfüllt, so verschiebt sich durch die Wirkung des Erddruckes auf die seitliche Abgrenzung  $AB$  die Drucklinie etwas nach dem Innern des Widerlagers. In der Figur 317 ist die Grösse des Erddruckes auf die Wand  $AB$  ermittelt worden. Der Angriffspunkt dieses Erddruckes ist der Mittelpunkt  $D$  von  $AB$ , die Richtungslinie  $ED$  bildet mit der Normalen zu  $AD$  den Reibungswinkel  $\varrho$ . Vereinigt man nun den Erddruck mit der letzten Seite der Drucklinie, d. i. der Parallelen durch  $16'$  zum Polstrahl  $0 \cdot 16$  zu einer Resultante, so trifft diese die unterste Fundamentfläche in dem Punkte  $v$ .

## c) Berechnung der im Gewölbe auftretenden äusseren Kräfte und der hierdurch verursachten Pressungen.

332) Bisher ist die ganze Stabilitätsuntersuchung des Gewölbes und Widerlagers durchgeführt worden, ohne die in Betracht kommenden Kräfte im Kräfte-

mass ausgedrückt zu haben. Es sollen nun im folgenden diese Kräfte berechnet werden.

Der Massstab der Zeichnung ist infolge der vorgenommenen Verkleinerung der Originalzeichnung der folgende:

47 mm der Zeichnung bedeuten 5 m; man hat also den Massstab 1:106,3 die Breite der Lamellen ist 0,5 m; daher ist das Gewicht der ersten Lamelle  $= 0,5 \cdot 1,28 \cdot 10 \cdot 2000 = 1280 \text{ kg}$  ( $1,28 =$  Höhe der Lamelle). Der Massstab der Kräfte berechnet sich wie folgt: Die Höhe der ersten Lamelle beträgt 14 mm; im Kräftepolygon sind aber nur die vierten Teile der Lamellenhöhen angetragen worden, es ist also:

$$v = \frac{14}{4} \text{ mm} = 1280 \text{ kg} \text{ oder } 1 \text{ mm} = 365 \text{ kg}$$

Auf Grund dieses Kräftemassstabes berechnet sich zunächst die Grösse des Horizontalschubes:

$$H = 39 \text{ mm} = 39 \cdot 365 = 14235,4 \text{ kg} \text{ oder rund } 14240 \text{ kg}$$

Scheitelpressung des Gewölbes. Die Schlusssteinfläche ist:  $50 \cdot 100 = 5000 \text{ qcm}$ , daher ist die Scheitelpressung  $\mathcal{S} = 14240 : 5000 = 2,85 \text{ kg}$  ein Wert, der wohl beibehalten werden kann und der etwas kleiner ist, als der frühere empirisch berechnete Wert.

Pressung in der Kämpferfuge. Die Länge der Kämpferfuge beträgt 1,06 m. Die auf die Fläche wirkende Kraft ergibt sich aus dem Kräftepolygon gleich der Länge des Seilstrahles  $\overline{0 \cdot 11}$  und diese ist  $= 69 \text{ mm}$ , daher ist:

$$\mathcal{S} = \frac{69 \cdot 365}{10600} = \text{ca. } 2,5 \text{ kg}$$

Pressung auf den Baugrund, ohne Berücksichtigung des Erddruckes. Die Länge  $u$  beträgt 13 mm, d. i.:

$$\frac{13 \cdot 5}{47} = 1,383 \text{ m}$$

daher ist die Länge des nutzbaren Querschnittes gleich  $3u = 4,149 \text{ qm}$ . Der vertikale Druck auf den Baugrund ist durch die Länge  $\overline{0 \cdot 16}$  im Kräftepolygon gegeben, diese Länge beträgt  $127 \text{ mm} = 127 \cdot 365 = 46355 \text{ kg}$ . Es ist daher die Pressung:

$$\mathcal{S} = \frac{2 \cdot 46355}{41490} = 2,2 \text{ kg}$$

Pressung auf den Baugrund mit Berücksichtigung des Erddruckes. Die Grösse des Erddruckes auf die Wand  $AB$  ergibt sich aus der Fläche des über  $AB$  punktiert gezeichneten Trapezes; diese Fläche beträgt:

$$\frac{5}{47} \cdot \frac{(28 + 15)}{2} \cdot \frac{32 \cdot 5}{47} = 2,28 \cdot 3,4 = 6,752 \text{ qm}$$

daher ist der Erddruck:

$$P = 6,752 \cdot 1600 = \text{rund } 10800 \text{ kg}$$

das sind in dem gewählten Kräftemassstab:

$$10800 : 365 = 29,6 \text{ mm}$$

Vereinigt man nun die auf die Fundamentfläche treffende Resultante der äusseren Kräfte, welche durch die Länge des Polstrahles  $\overline{0 \cdot 16}$  dargestellt ist, mit dem eben berechneten Erddruck zu einer neuen Resultante und wählt, zur besseren Darstellung den Kräftemassstab etwa siebenmal kleiner als bisher, so

braucht man nur  $\overline{o\alpha} = \frac{1}{7} \overline{0.16}$  und  $\overline{o\beta}$  parallel zu  $ED$  und gleich  $\frac{29,6}{7} = 4,2$  mm anzutragen, so ist die Strecke  $\overline{o\beta}$  die auf die unterste Fundamentfläche treffende Resultante der äusseren Kräfte; ihre Vertikalkomponente ist  $\overline{o\gamma}$  und beträgt 21,5 mm oder  $21,5 \cdot 7 \cdot 365 = 54932,5$  kg oder rund 54940 kg.

Für die unterste Fundamentfläche beträgt nun:

$$e = \frac{42 \cdot 5}{47 \cdot 6} = 0,83 \text{ m} = 83 \text{ cm}$$

ferner ist:

$$z = \frac{3 \cdot 5}{47} = 0,32 = 32 \text{ cm}$$

daher ist:

$$z_1 = 83 + 32 = 115 \text{ cm} \quad z_2 = 83 - 32 = 51 \text{ cm}$$

Die Randspannungen in der untersten Fundamentfläche sind:

$$\mathcal{S}_1 = \frac{54940}{44600} \cdot \frac{115}{83} = 1,6 \text{ kg}$$

$$\mathcal{S}_2 = \frac{54940}{44600} \cdot \frac{51}{83} = 0,73 \text{ kg}$$

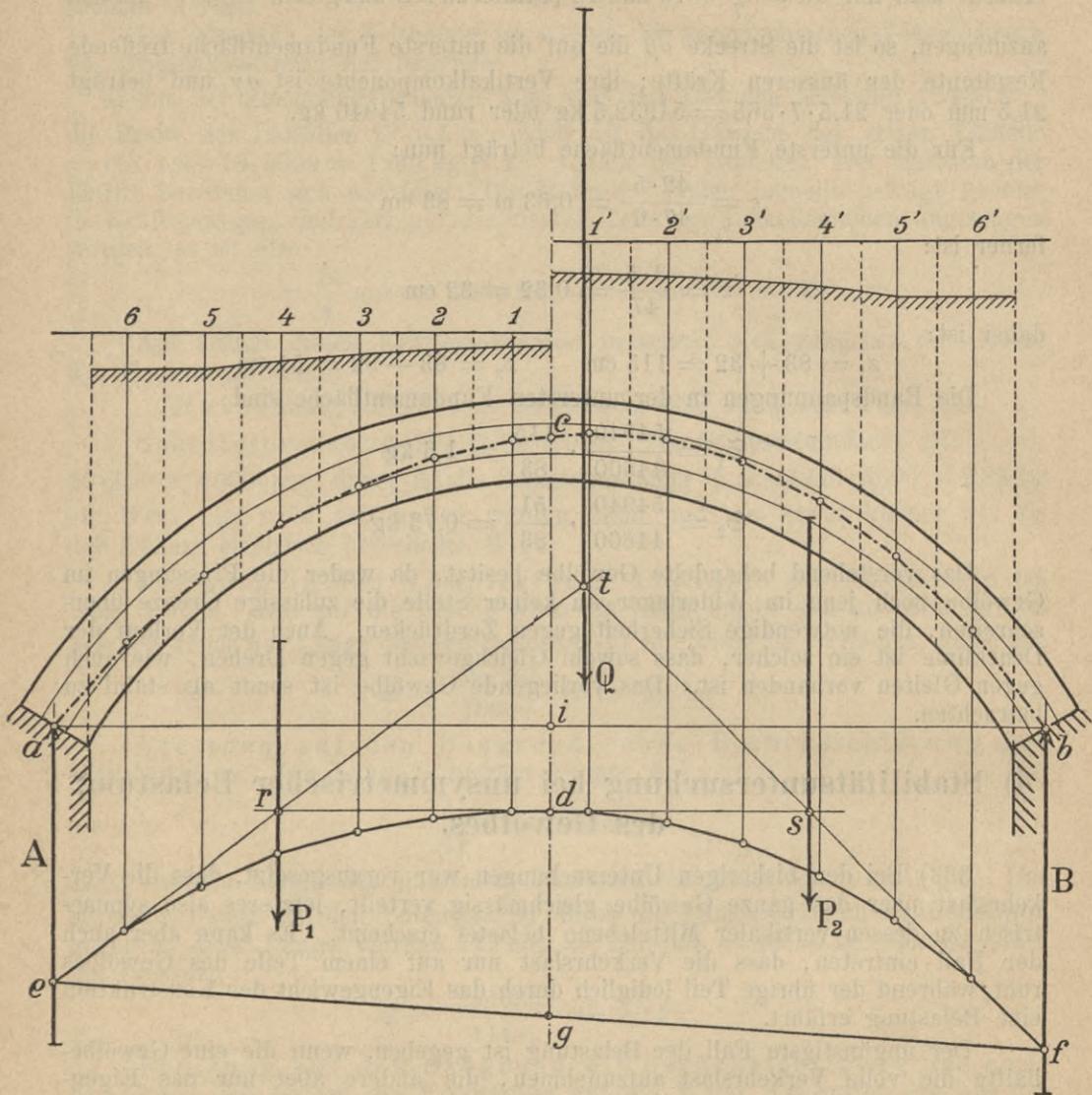
Das vorstehend behandelte Gewölbe besitzt, da weder die Pressungen im Gewölbe noch jene im Widerlager an keiner Stelle die zulässige Grenze überschreiten, die notwendige Sicherheit gegen Zerdrücken. Auch der Verlauf der Drucklinie ist ein solcher, dass sowohl Gleichgewicht gegen Drehen, wie auch gegen Gleiten vorhanden ist. Das vorliegende Gewölbe ist somit als stabil zu betrachten.

#### 4) Stabilitätsuntersuchung bei unsymmetrischer Belastung des Gewölbes.

333) Bei den bisherigen Untersuchungen war vorausgesetzt, dass die Verkehrslast über das ganze Gewölbe gleichmässig verteilt, letzteres also symmetrisch zu dessen vertikaler Mittelebene belastet erscheint. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass die Verkehrslast nur auf einem Teile des Gewölbes ruht; während der übrige Teil lediglich durch das Eigengewicht der Konstruktion eine Belastung erfährt.

Der ungünstigste Fall der Belastung ist gegeben, wenn die eine Gewölbehälfte die volle Verkehrslast aufzunehmen, die andere aber nur das Eigengewicht zu tragen hat. Auch in diesem Falle kann man in dem Gewölbe Drucklinien konstruieren und ersteres als stabil betrachten, wenn es gelingt, eine Drucklinie zu ermitteln, welche durch das ganze Gewölbe hindurch innerhalb des Kernes des Gewölbebogens verläuft. Die Konstruktion lässt sich in ganz ähnlicher Weise ausführen wie beim symmetrisch belasteten Gewölbe. Man verschafft sich zunächst, siehe Figur 318, in beiden Gewölbehälften die auf Steinmaterial reduzierte Belastungsgrenze, teilt jede Gewölbehälfte in die gleiche Anzahl von gleich breiten Lamellen, deren Höhen wieder proportional den Lamellengewichten zu nehmen sind. Entsprechende Proportionalteile dieser Höhen trägt man als vertikale Kräfte zu einem Kräftepolygon, siehe Figur 319, aneinander an und konstruiert mittels eines beliebigen Poles  $p$  ein zu dem Kräftepolygon gehöriges Seilpolygon. Infolge der unsymmetrischen Belastung des Gewölbes ist die im Gewölbescheitel wirkende Kraft nicht mehr horizontal, son-

Figur 318.



den gegen die Horizontale in bestimmter Weise geneigt. Ihr Angriffspunkt ist nicht bekannt, sondern kann innerhalb des mittleren Fugendrittels beliebig angenommen werden. Man wählt hierzu den Mittelpunkt  $c$  der Schlusssteinhöhe; desgleichen kennt man auch die Angriffspunkte der Widerlagsreaktionen nicht von vornherein, sondern nimmt hierfür gleichfalls die Mittelpunkte  $a$  und  $b$  der beiden Kämpferfugen an. Durch die drei so gewählten Punkte  $a$ ,  $b$  und  $c$  ist nun eine Drucklinie bestimmt, die man in folgender Weise erhält:

Man verlängert die äussersten Seiten des vorhin konstruierten Seilpolygons bis zu den Vertikalen durch die Punkte  $a$  und  $b$  und erhält so die Punkte  $e$  und  $f$ , deren Verbindungslinie die Schlusslinie des Seilpolygons ergibt. Parallel zu dieser Schlusslinie zieht man durch den Pol  $p$ , s. Figur 319, eine Parallele  $pq$ , so

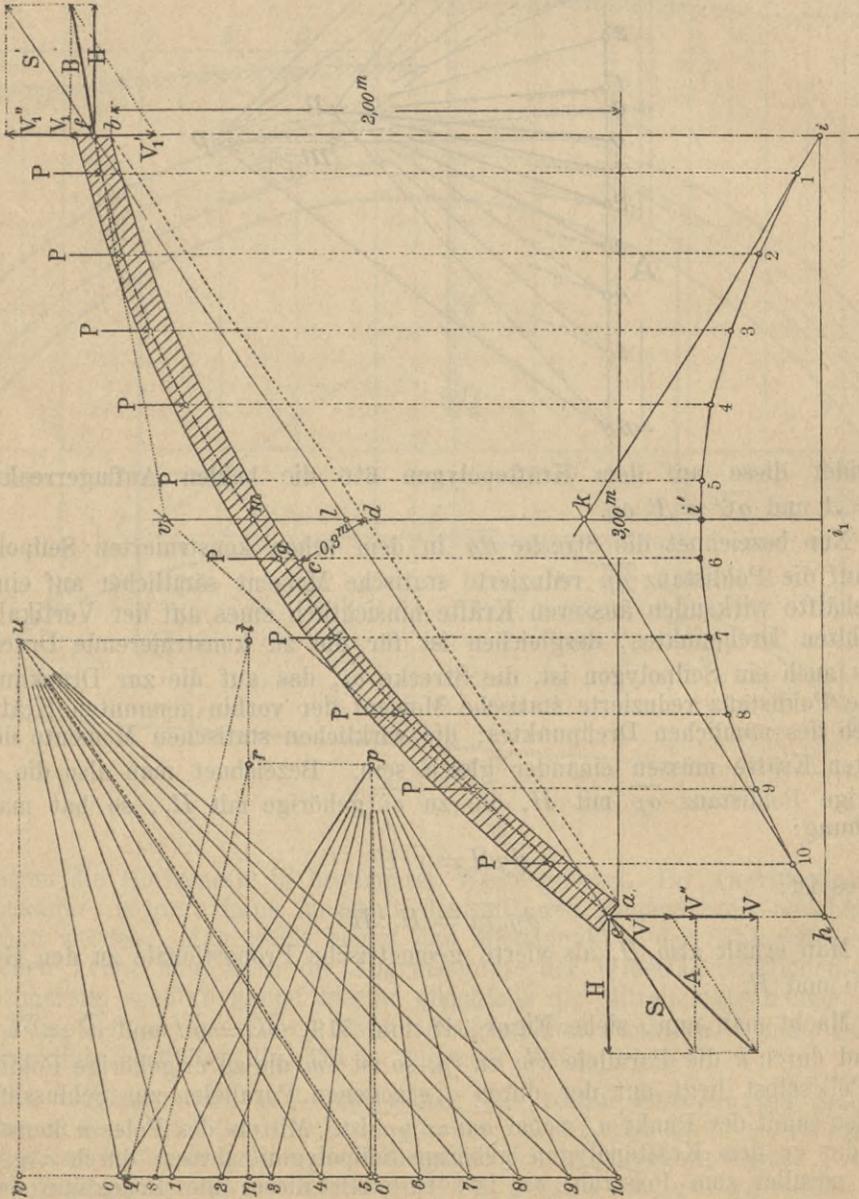


symmetrisch belasteten Gewölbes dar. Diese bleibt in ihrem ganzen Verlaufe innerhalb des Kernes des Gewölbebogens; das Gewölbe besitzt demnach auch bei unsymmetrischer Belastung hinreichende Stabilität.

### 5) Übungsaufgaben.

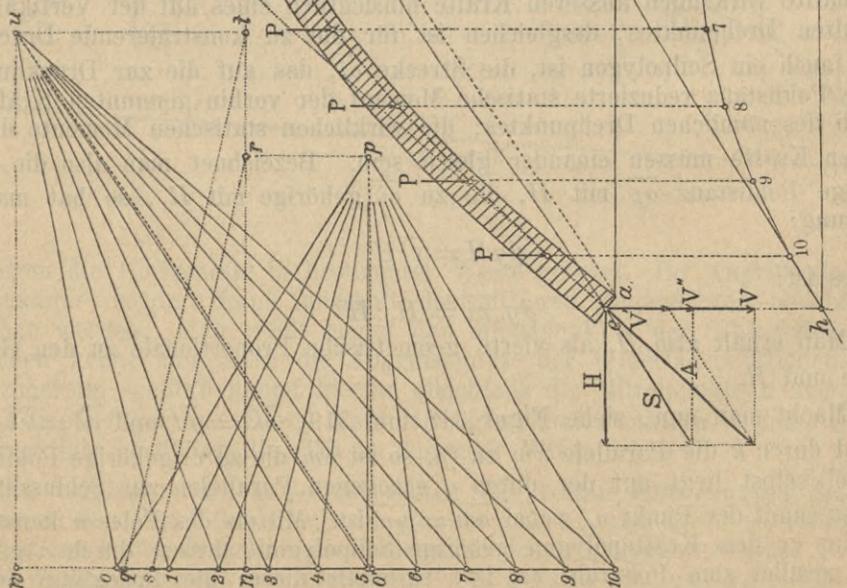
334) **Aufgabe 139.** Für ein Treppengewölbe, das sich in den Punkten *e* und *f*, siehe Figur 320, auf zwei Podestträger als Widerlager stützt, ist der Verlauf einer Drucklinie zu zeichnen und ausserdem die Belastung anzugeben, welche ein Podestträger durch das Gewölbe erfährt.

Figur 320.



Figur 321.

Figur 322.



**Auflösung.** Die auf jede Stufe treffende Belastung einschliesslich des Eigengewichtes sei  $P$  und wirke so, wie in der Figur 320 angegeben, auf den Gewölbebogen. Man trägt zunächst die Kräfte  $P$  zu einem Kräftepolygon an, konstruiert mittels eines beliebigen Poles  $p$ , siehe Figur 322, ein Seilpolygon, siehe Figur 321, und zeichnet dessen Schlusslinie  $hi$ .

Zieht man ferner durch den Schnittpunkt  $k$  der äussersten Polygonseiten die Vertikale  $vk$  und wählt auf letzterer den Punkt  $m$  in der Mitte zwischen innerer und äusserer Wöblinie, so kann man durch die drei Punkte  $f$ ,  $m$  und  $e$  ein Seilpolygon legen, dessen Schlusslinie die Gerade  $ef$  ist.

Nun bedeutet die Strecke  $\overline{v'i_1}$ , siehe Figur 321, das auf die zu  $p$  gehörige Poldistanz  $H_0$  reduzierte statische Moment der auf eine Gewölbehälfte wirkenden Kräfte hinsichtlich eines auf der Vertikalen  $vk$  gewählten Drehpunktes, desgleichen ist  $\overline{ml}$  das auf eine bestimmte Poldistanz  $H$  reduzierte statische Moment der nämlichen Kräfte bezüglich desselben Drehpunktes. Man hat daher die Gleichung:

$$H_0 \cdot \overline{v'i_1} = H \cdot \overline{lm},$$

woraus sich  $H$  bestimmt. Man wählt, siehe Figur 322, den Punkt  $n$  auf  $0 \cdot 10$  beliebig, zieht  $nr$  senkrecht zu  $0 \cdot 10$  und gleich  $H_0$ , macht  $\overline{ns} = \overline{ml}$  und  $\overline{nq} = \overline{v'i_1}$ , zieht  $sr$  und zu letzterer Linie parallel die Linie  $qt$ , so ist  $\overline{nt} = H$ .

Zieht man ferner durch  $p$ , siehe Figur 322, eine Parallele  $po'$  zur Schlusslinie  $hi$  des Seilpolygones, siehe Figur 321, endlich durch  $o'$  eine Parallele  $o'u$  zur Schlusslinie  $ef$ , siehe Figur 320, so liegt auf  $o'u$  der zum Seilpolygon  $fme$  gehörige Pol und zwar in einer Entfernung  $H = \overline{nt}$  von der Linie  $0 \cdot 10$  der Kräfte. Mittels des Poles  $u$  konstruiert man ein Seilpolygon, dessen erste Seite durch  $f$  geht, dann stellt dieses eine Drucklinie für den Gewölbebogen dar und enthält die Punkte  $m$  und  $e$ . Der Verlauf der Drucklinie muss innerhalb des Kernes des Gewölbebogens stattfinden.

Die äussersten Seiten  $ve$  und  $vf$  des Seilpolygones  $fme$  bestimmen die Richtungslinien der Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  des Gewölbebogens auf die Podesträger. Die Grössen dieser Auflagerdrücke sind aus dem Kräfteplan zu entnehmen und zwar ist:

$$A = \overline{u \cdot 10} \text{ und } B = \overline{u \cdot 0}$$

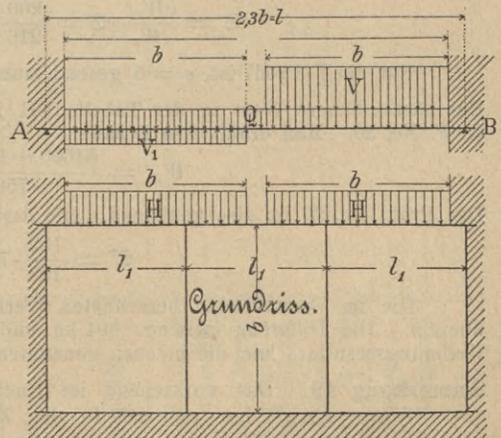
Beide Auflagerdrücke zerlegen sich in einen Horizontalschub  $H = \overline{uw}$  und in einen vertikalen Druck  $V = \overline{w10}$  bzw.  $V_1 = \overline{0w}$ . Letzterer Druck ist nach aufwärts gerichtet und wirkt entlastend auf den Podesträger.

Die Belastungsskizze für einen durch die Gewölbebögen der beiden Treppenläufe belasteten Podesträger ist in Figur 323 im Aufriss, in Figur 324 im Grundriss dargestellt. Es bezeichnet in Figur 323  $Q$  die Podestbelastung,  $V$  den vertikalen Druck durch den aufsteigenden und  $V_1$  den vertikalen, entlastend wirkenden Druck durch den absteigenden Gewölbebogen; in Figur 324 ist die Belastung durch den Horizontalschub der beiden Gewölbebögen dargestellt.

Ist der Podest ein Kappenpodest, so wirkt der Horizontalschub des letzteren dem Horizontalschub  $H$  der Gewölbebögen entgegen; übt der Podest aber keinen Horizontalschub aus, so muss der Horizontalschub der Gewölbebögen durch besondere Konstruktionsteile aufgenommen werden.

335) **Aufgabe 140.** Man führe die Stabilitätsuntersuchung für das in No. 329) behandelte Gewölbe unter der Voraussetzung durch, dass die rechtsseitige Gewölbehälfte durch die Verkehrslast beansprucht, die andere Hälfte aber nur durch das Eigengewicht belastet sei.

Figur 323.



Figur 324.

336) **Aufgabe 141.** Für das in Figur 320 dargestellte Treppengewölbe ist die Stabilitätsuntersuchung durchzuführen, wenn die Breite der Treppe 1,20 m und die Belastung per Quadratmeter Horizontalprojektion 1000 kg beträgt. Auch ist der zugehörige Podestträger zu berechnen, wenn der Podest ein Plattenpodest und die Belastung per Quadratmeter dieselbe wie für die Treppe sein soll. Der Horizontal Schub der Gewölbe soll durch vier Steifen von  $\perp$  Form aufgenommen werden.

### Nachtrag zur Profilbestimmung von auf zusammengesetzte Biege- festigkeit beanspruchten Trägern.

337) Die Ermittlung der Profile von Trägern, die auf zusammengesetzte Biegefestigkeit beansprucht sind, kann in etwas anderer Art, als in No. 244) mitgeteilt wurde, geschehen, wenn in den zur Verfügung stehenden Profiltabellen nicht nur die Werte von  $W_y$  und  $W_z$ , sondern auch jene des Quotienten  $\frac{W_z}{W_y}$  enthalten sind. Die Gleichung:

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}$$

lässt sich, wenn  $\frac{W_z}{W_y} = c$  gesetzt wird, auch so schreiben:

$$205) \dots \sigma = \frac{M_z + c M_y}{W_z} \text{ oder } W_z = \frac{M_z + c M_y}{\sigma}$$

Hierin bezeichnet „ $\sigma$ “ die zulässige Beanspruchung des Materiales.

Aus den Tabellen VI und VII ist zu entnehmen, dass die Werte von  $c$  bei  $\perp$ -Profilen zwischen 5,8 und 8,9, bei  $\lceil$ -Profilen zwischen 1,5 und 6,7 schwanken.

Um nun für einen bestimmten Fall mittels Gleichung 205) das zugehörige Profil zu berechnen, setzt man zunächst  $c = 7$  für  $\lceil$ -Profile bzw.  $c = 5$  für  $\perp$ -Profile und berechnet aus Gleichung 205) einen angenäherten Wert  $W_z'$ .

Man ermittelt nun aus der Tabelle den diesem Werte am nächsten kommenden höheren Wert, nebst dem zugehörigen Wert von  $c$ . Unter Benützung des letzteren bestimmt man aus Gleichung 205) den genauen Wert von  $W_z$  und das diesem zugehörige Profil. Zur Erläuterung des Verfahrens diene die Aufgabe 110.

Für diesen Fall ist, siehe Aufgabe 110,  $M_z = 54600$  und  $M_y = 13650$ ; daher für  $\lceil$ -Profil  $c = 7$  gesetzt,

$$W_z' = \frac{54600 + 7 \cdot 13650}{550} = 200$$

Der nächst höhere Wert  $W_z$  in der Tabelle VI ist 216 und ihm entspricht N. P. No. 20; für dasselbe ist in der Tabelle VI  $c = 7$ . Daher wird  $W_z' = 200$  sein. Für die grösste in dem Profile auftretende Spannung erhält man:

$$\sigma' = \frac{W_z'}{W_z} \cdot \sigma = \frac{200}{216} \cdot 750 = 694 \text{ kg per Quadratcentimeter}$$

Für ein  $\perp$ -Profil ist,  $c = 5$  gesetzt, zunächst:  $W_z' = \frac{54600 + 5 \cdot 13650}{750} = 163$

Der nächst höhere Wert in der Tabelle VII ist  $W_z = 193$  mit einem  $c = 6$ . Ihm entspricht N. P. No. 20. Man erhält also genauer:

$$W_z' = \frac{54600 + 6 \cdot 13650}{750} = 182$$

Das Profil No. 20 ist also genügend. Die darin auftretende grösste Spannung ist:

$$\sigma' = \frac{182}{193} \cdot 750 = 707 \text{ kg}$$

Die im Vorstehenden berechneten Werte von „ $\sigma$ “ stimmen mit jenen in Aufgabe 110 überein. Die Differenz zwischen 694 kg und 697 kg rührt lediglich von Aufrundungen der Rechnungsergebnisse her, die in oben genanntem Beispiele vorgenommen wurden.

**Anmerkung 49.** Das vorstehend im Nachtrage mitgeteilte Verfahren rührt von Professor Land her und ist in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrgang 1895, Heft 8 und 10 von dem genannten Autor veröffentlicht worden.

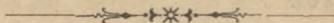


Tabelle I.

Material	Elastizitätsmodulus $E$			Proportionalitätsgrenze			Festigkeit			Zulässige Beanspruchung			Bemerkungen		
	Zug	Druck	Biegung	Zug	Druck	Biegung	Zug	Druck	Biegung	Zug	Druck	Schub		Biegung	
Kiefernholz . .	120000	110000	120000	360	130	250	700	330	60	500	80	60-70	6-7	60	Die angegebenen Zahlenwerte bezeichnen Kilogramm und beziehen sich auf den Quadratcentimeter-Fläche. Sämtliche Zahlenwerte sind nur als angeäherte Mittelwerte zu betrachten.
Eichenholz . .	110000	100000	100000	470	150	216	880	440	80	600	100	80	8	80	
Buchenholz . .	180000	170000	150000	580	105	250	1000	320	80	720	100	80	8	80	
Schweisseisen .	2000000	2100000	1800000	1600	—	1600	3600	3600	3300	3000	750	600	600	750	
Flusseisen . .	2150000	—	2000000	2200	—	2000	4000	4000	3400	3600	800	800	650	750	
Flussstahl . .	2200000	2300000	2100000	3500	3500	4000	6000	6000	4000	6000	1200	1200	800	1200	
Gussstahl . .	2500000	—	—	3750	5000	5000	7600	8000	6400	7600	1500	1500	1300	1500	
Gusseisen . .	1000000	1000000	—	—	—	—	1300	6000	1000	—	250	500	200	—	
Granit . . . .	—	—	—	—	—	—	ca. 160	800 bis 1200	ca. 60	—	2	40-60	ca. 6	—	
Muschelkalk .	—	—	—	—	—	—	30	600	60	—	1	30	6	—	
Sandstein . .	—	—	—	—	—	—	12	600	20	—	0,6	30	2	—	
Ziegelmauerwerk in Kalkmörtel	—	—	—	—	—	—	7	70	0,75	—	0,7	7	0,075	—	
Bestes Ziegelmauerwerk in Cementmörtel	—	—	—	—	—	—	14	140	4,0	—	1,4	14	0,4	—	
Ziegelmauerwerk in Cementmörtel, Mittelwert	—	—	—	—	—	—	10	100	—	—	1	10	—	—	
Guter Baugrund	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

## Tabelle II.

### Belastung der Zwischendecken.

In Kilogramm pro Quadratmeter.

Art der Konstruktion	Eigenlast Kilogramm	Nutzlast Kilogramm	Totallast Kilogramm
<b>a) In Wohngebäuden oder in Fabriken mit leichten Maschinen.</b>			
Gewölbte Decke, $\frac{1}{4}$ Stein stark, einschl. Hintermauerung, zwischen eisernen Trägern für 1 m bis 1,50 m Spannweite, einschl. Putz und Fussboden.	300	200	500
Gewölbte Decke, $\frac{1}{2}$ Stein stark, sonst wie vorhin .	400	200	600
Gewölbte Decke, $\frac{1}{2}$ Stein stark, für 2 bis 3 m Spannweite, sonst wie vorhin . . . . .	500	200	700
Decke aus Wellblech, Buckelplatten oder Barreneisen mit Beton zwischen Trägern (13 cm dick im Beton) . . . . .	250	200	450
Holzbalkendecke mit einfachem Fussboden . . . .	80	200	280
Holzbalkendecke mit doppeltem Fussboden oder mit einfachem Fussboden und einem Deckenputz . .	100	200	300
Holzbalkendecke mit halbem Windelboden, Fussboden und Deckenputz . . . . .	300	200	500
Holzbalkendecke mit ganzem Windelboden, sonst wie vorhin . . . . .	400	200	600
<b>b) In Fabriken mit schweren Maschinen, in Speichern und in Tanzlokalen.</b>			
Holzbalkendecke mit halbem Windelboden, für Tanzlokale, Heu- und Fruchtböden . . . . .	350	350	700
Holzbalkenlage mit Bohlenbeleg in Salzspeichern .	200	600	800
Holzbalkenlage mit Bohlenbeleg in Kaufmannspeichern . . . . .	250	750	1000
Gewölbte Decke, $\frac{1}{2}$ Stein stark, zwischen eisernen Trägern für 1 bis 1,50 m Spannweite, in Fabriken oder Lagerräumen . . . . .	450	500	950
Gewölbte Decke, 1 Stein stark, für 2 bis 3 m Spannweite, sonst wie vorhin . . . . .	650	500	1150
Decke aus Wellblech, Buckelplatten oder Barreneisen mit Beton (20 cm dick), sonst wie vorhin . . . .	350	500	850

Tabelle III.

**Eigengewichte und Gesamtbelastungen,**

welche die Baupolizei in Berlin bei Revision von Hochbauprojekten im allgemeinen zu Grunde legt. Auch bei der Königlichen Regierung zu Breslau werden diese Werte bei statischen Berechnungen in der Regel angewandt.

Eigengewicht	Kilogramm pro Kubikmeter	Eigengewichte und Belastungen	Kilogramm pro Kubikmeter
Erde und Lehm . . . . .	1600	Balkenlage in Wohngebäuden . . . . .	250
Ziegelmauerwerk aus vollen Steinen . . . . .	1600	„ einschl. der Belastung . . . . .	500
Ziegelmauerwerk aus porösen Steinen . . . . .	1300	„ in Fabrik- und Lagergebäuden . . . . .	250
Ziegelmauerwerk aus porösen Lochsteinen . . . . .	1100	Balkenlage einschliesslich d. Belastung . . . . .	750
Sandsteinmauerwerk . . . . .	2400	„ in Getreidespeichern, einschliesslich der Belastung . . . . .	850—1000
Granit und Marmor . . . . .	2700	Gewölbte Decke aus porösen Steinen in Wohngebäuden . . . . .	350
Beton . . . . .	2000	desgl. einschliesslich der Belastung . . . . .	600
Gypsdien . . . . .	700	Gewölbte Decke in Fabrikgebäuden einschliesslich der Belastung . . . . .	1000
Gussasphalt . . . . .	1500	Gewölbte Decke unter Durchfahrten und benachbarten Höfen einschl. der Belastung . . . . .	1250
Glas . . . . .	2600	Wellblechdecken einschliesslich der Belastung . . . . .	500—1000
Kiefernholz . . . . .	580	Gewölbte Treppen . . . . .	500
Eichenholz . . . . .	800	desgl. einschliessl. der Belastung . . . . .	1000
Gusseisen . . . . .	7200	Dachflächen in der Horizontalprojektion gemessen einschliessl. Schnee- und Winddruck bei Metall- oder Glasdeckung gemäss der Neigung . . . . .	125—150
Schweisseisen . . . . .	7800	desgl. bei Schieferdeckung . . . . .	200—240
Flusseisen . . . . .	7850	„ bei Ziegeldeckung . . . . .	250—300
Kupfer . . . . .	8900	„ bei Holz-Zementdeckung . . . . .	350
Zink . . . . .	7150	Steile Mansardedächer . . . . .	400
Blei . . . . .	11350		
Eis . . . . .	910		
Kies . . . . .	1525		
Steinkohlen . . . . .	1280		
Torf . . . . .	550		
Roggenschüttung . . . . .	650		
Mehl von Weizen . . . . .	1600		

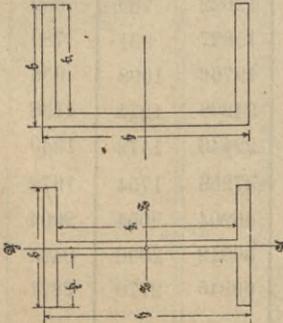
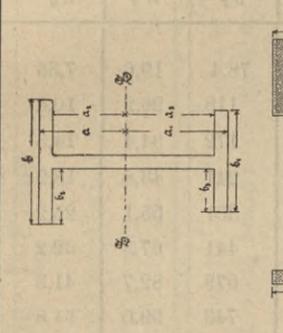
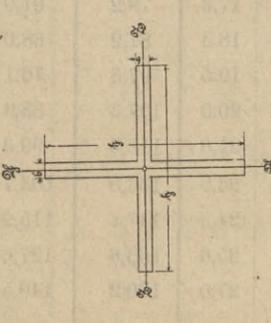
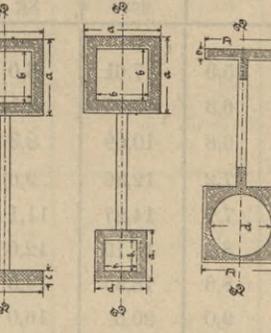
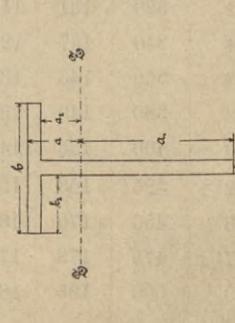
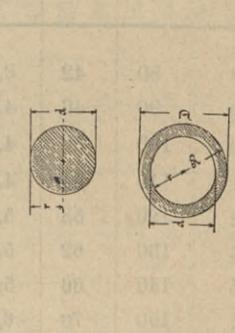
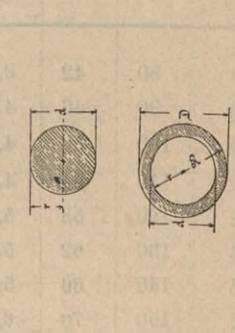
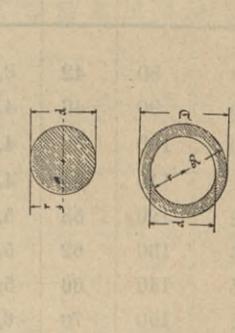
Nach der Baupolizeiordnung der Stadt Breslau ist zu rechnen:

Das Gewicht von 1 cbm Mauerwerk . . . . .	= 1600 kg
„ „ „ 1 qm Balkendecke in Wohnräumen einschliesslich der zufälligen Belastung . . . . .	= 500 kg
Das Gewicht von 1 qm Kellergewölbe . . . . .	= 750 kg
„ „ „ 1 qm Treppenlauf . . . . .	= 500 kg
„ „ „ 1 qm Dachfläche in der Horizontalprojektion einschliesslich Schnee- und Winddruck . . . . .	= 250 kg

Tabelle IV. Normalgewichte der wichtigsten Frachtgüter.

Material	Gewicht in Kilogramm
Granit-Werkstücke pro Kubikmeter . . . . .	2700
Granit-Pflastersteine, regelmässig behauen, pro Raummeter . . . . .	1900
Granit-Pflastersteine, unregelmässig behauen, pro Raummeter . . . . .	1800
Granit-Bruchsteine pro Raummeter . . . . .	1650
Basalt-Pflastersteine, behauen, pro Raummeter . . . . .	2000
Basalt-Bruchsteine pro Raummeter . . . . .	1800
Sandsteine (Werkstücke) pro Kubikmeter . . . . .	2300
Kalk, Marmor pro Kubikmeter . . . . .	2700
Kalk, Bruchsteine pro Raummeter . . . . .	1550
Baukalk, fetter, " " . . . . .	1000
Baukalk, magerer, " " . . . . .	1200
Gneis, " " . . . . .	1600
Serpentin, " " . . . . .	1600
Quarz, " " . . . . .	1600
Porphyr, " " . . . . .	1600
Dolomit, " " . . . . .	1600
Thonschiefer " " . . . . .	1650
Grünsteinbruchsteine pro " . . . . .	1600
Hornblendebruchsteine pro Raumm. . . . .	1800
Bruch- oder Feldsteine " " . . . . .	1600
Kies und Sand " " . . . . .	1650
Steinkohle " " . . . . .	900
Kokes " " . . . . .	350
Eisen, gewalzt, pro Kubikmeter . . . . .	7700
Eisen, gegossen, " " . . . . .	7000
Eisenerze pro Raummeter . . . . .	3500
Walzzink pro Kubikmeter . . . . .	7200
Ziegelwerk: Formatsteine pro 1000 Stück . . . . .	5000
Klinkersteine " " . . . . .	4000
Chamottesteine " " . . . . .	3000
Feldbrandsteine " " . . . . .	3000
Drainröhren 2" " " . . . . .	2250
Flachwerke " " . . . . .	1750
Eichen- oder Buchenholz als Brennholz pro Raummeter . . . . .	500
Kiefern- oder Fichtenholz als Brennholz " " . . . . .	350
Eichen- oder Buchenholz als Bauholz pro Kubikmeter . . . . .	800
Kiefer oder Fichte als Bauholz . . . . .	650
Rüben pro Raummeter . . . . .	650
Rübenschnitzel " " . . . . .	850
Holzstoff " " . . . . .	700
Kartoffeln " " . . . . .	600
Spiritus einschl. Fass pro Hektoliter . . . . .	110
Zucker, raffiniert, pro grosses Fass . . . . .	650
Zucker raffiniert, pro kleines Fass . . . . .	375
Lehm pro Raummeter . . . . .	1400
Blockeis " " . . . . .	800
Roggen " " . . . . .	650
Weizen " " . . . . .	700
Mehl " " . . . . .	1500
Stallmist " " . . . . .	750
Cement " " . . . . .	2200
Kalk, gebrannt, pro Raummeter . . . . .	1500
Heu, pro Raummeter . . . . .	100
Stroh von Erbsen und Wicken, pro Raummeter . . . . .	50
Stroh von Gerste und Hafer " " . . . . .	70
Stroh von Roggen und Weizen " " . . . . .	90
Petroleum inkl. Fass pro Hektoliter . . . . .	110
Schlempe " " " " . . . . .	120

Tabelle V. Querschnittstafel.

Querschnittsform	Trägheitsmoment $J_z$ bezogen auf die horizontale Schwerachse $Z$	Querschnittsform	Trägheitsmoment $J_z$ bezogen auf die horizontale Schwerachse $Z$
	$\frac{1}{12} (b h^3 - b_1 h_1^3)$		$\frac{1}{3} (b a^3 + b_1 a_1^3 - 2 b_2 a_2^3 - 2 b_3 a_3^3)$
	$\frac{b}{12} [b h^3 + (h - b) b^2]$		$\frac{1}{12} (a^4 - b^4 + c b^3)$
	$\frac{1}{3} (b a^3 + b_1 a_1^3 - 2 b_2 a_2^3)$		$\frac{1}{4} \left( \frac{D^3 (D + b)}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right)$
			$\frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi r^4}{4}$
			$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$

## Tabelle VI.

## Normalprofile für I-Eisen.

Bis  $h = 250$  mm ist  $b = 0,4h + 10$  mm;  $d = 0,03h + 1,5$  mm

Für  $h > 250$  mm ist  $b = 0,3h + 35$  mm;  $d = 0,036h$

Neigung der inneren Flanschflächen  $14\%$ .  $r_2 = d$ ;  $r_1 = 0,6d$

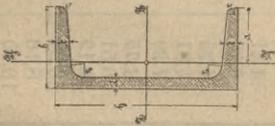
1 Profil- No.	2 Dimensionen in Millimeter				3 Quer- schnitt $F$ qcm	4 Gewicht per lauf. Meter $G$ kg	5 Momente bezogen auf die Achse				6 $\frac{W_z}{W_y}$ $c$
	7 $h$	8 $b$	9 $d$	10 $t$			11 $Z$		12 $Y$		
							13 $J_z$	14 $W_z$	15 $J_y$	16 $W_y$	
8	80	42	3,9	5,9	7,61	6,0	78,4	19,6	7,35	3,5	5,6
9	90	46	4,2	6,3	9,05	7,1	118	26,2	10,4	4,5	5,6
10	100	50	4,5	6,8	10,69	8,3	172	34,4	14,3	5,7	6,0
11	110	54	4,8	7,2	12,36	9,6	241	43,8	18,9	7,0	6,2
12	120	58	5,1	7,7	14,27	11,1	331	55,1	25,2	8,7	6,3
13	130	62	5,4	8,1	16,19	12,6	441	67,8	32,2	10,4	6,5
14	140	66	5,7	8,6	18,35	14,3	579	82,7	41,3	12,5	6,6
15	150	70	6,0	9,0	20,5	16,0	743	99,0	51,8	14,8	6,7
16	160	74	6,3	9,5	22,9	17,9	945	118	64,4	17,4	6,7
17	170	78	6,6	9,9	25,4	19,8	1177	139	78,8	20,2	6,8
18	180	82	6,9	10,4	28,0	21,9	1460	162	95,9	23,4	6,9
19	190	86	7,2	10,8	30,7	24,0	1779	187	115,2	26,8	6,9
20	200	90	7,5	11,3	33,7	26,2	2162	216	138	30,7	7,0
21	210	94	7,8	11,7	36,6	28,5	2587	246	163	34,6	7,0
22	220	98	8,1	12,2	39,8	31,0	3090	281	192	39,2	7,1
23	230	102	8,4	12,6	42,9	33,5	3642	317	224	43,9	7,2
24	240	106	8,7	13,1	46,4	36,2	4288	357	261	49,3	7,2
26	260	113	9,4	14,1	53,7	41,9	5798	446	341	60,3	7,3
28	280	119	10,1	15,2	61,4	47,9	7658	547	429	72,1	7,5
30	300	125	10,8	16,2	69,4	54,1	9888	659	530	84,8	7,7
32	320	131	11,5	17,3	78,2	61,0	12622	789	652	99,5	7,9
34	340	137	12,2	18,3	87,2	68,0	15827	931	789	115	8,1
36	360	143	13,0	19,5	97,5	76,1	19766	1098	956	134	8,2
38	380	149	13,7	20,5	107,5	83,9	24208	1274	1138	153	8,3
40	400	155	14,4	21,6	118,3	92,3	29446	1472	1349	174	8,4
42 <sup>1/2</sup>	425	163	15,3	23,0	133,0	103,7	37266	1754	1672	205	8,5
45	450	170	16,2	24,3	147,7	115,2	46204	2054	2004	236	8,6
47 <sup>1/2</sup>	475	178	17,1	25,6	163,6	127,6	56912	2396	2424	272	8,8
50	500	185	18,0	27,0	180,2	140,5	69245	2770	2871	310	8,9

Tabelle VII.  
Normalprofile für [Eisen.

$$b = 0,25h + 25 \text{ mm}$$

Neigung der inneren Flansflächen 8 0/10

$$r_2 = t; r_1 = \frac{t}{2}$$



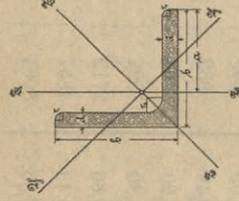
1 Profil- No.	2 Dimensionen in Millimeter				6 Querschnitt $F$ qcm	7 Gewicht $G$ per lauf. Meter kg	8 Schwer- punkts- abstand $a$ cm	9 Momente bezogen auf die Achse				13 $\frac{W_z}{W_y}$	14 $J_y$	15 Zwei zusammen- gesetzte [Eisen $W_y$	
	3 $h$	4 $b$	5 $d$	$t$				10 Z		11 Y					12 $W_y$
								$J_z$	$W_z$	$J_y$	$W_y$				
3	30	33	5	7	5,42	4,2	1,86	6,5	4,3	5,2	2,8	1,5	$J_y$	für $W_z$ 8,6	
4	40	35	5	7	6,20	4,8	2,04	14,2	7,1	7,3	3,6	2,0	$J_y$	für $W_z$ 11,3	
5	50	38	5	7	7,12	5,6	2,32	26,7	10,7	10,0	4,3	2,5	$J_y$	13,6	
6 <sup>1/2</sup>	65	42	5,5	7,5	9,05	7,1	2,66	58,2	17,9	15,7	5,9	3,0	$J_y$	17,8	
8	80	45	6	8	11,04	8,6	2,93	107	26,7	21,7	7,4	3,6	$J_y$	21,8	
10	100	50	6	8,5	13,5	10,5	3,31	207	41,4	33,1	10,0	4,1	$J_y$	28,6	
12	120	55	7	9	17,04	13,3	3,76	308	61,3	49,2	13,1	4,6	$J_y$	36,7	
14	140	60	7	10	20,4	15,9	4,09	609	87,0	71,2	17,4	5,0	$J_y$	48,5	
16	160	65	7,5	10,5	24,1	18,8	4,49	932	117	97,4	21,7	5,4	$J_y$	59,7	
18	180	70	8	11	28,0	21,9	4,90	1364	152	130	26,6	5,7	$J_y$	72,6	
20	200	75	8,5	11,5	32,3	25,2	5,30	1927	193	171	32,2	6,0	$J_y$	87,2	
22	220	80	9	12,5	37,6	29,3	5,66	2712	247	226	39,9	6,2	$J_y$	108	
26	260	90	10	14	48,4	37,8	6,42	4857	374	365	56,9	6,5	$J_y$	153	
30	300	100	10	16	58,8	45,9	7,05	8064	538	564	80,0	6,7	$J_y$	215	

Tabelle VIII. Normalprofile für

$$d_{\min.} = 0,1 \quad b \text{ für } b < 100 \text{ mm}$$

$$d_{\min.} = \frac{1}{11} b > 1000 \text{ mm}$$

$$r_2 = \frac{d_{\min.} + d_{\max.}}{2}; \quad r_1 = \frac{r_2}{2}$$



gleichschenkelige Winkelisen.

Die Hauptachsen sind: ZZ als Winkelhalbierende.  
YY  $\perp$  ZZ

1	2	3		4	5	6	7-12					
		Dimensionen in Millimeter					Momente bezogen auf die Achse.					
Profil- No.	b	d	F	Schwer- punkts- abstand $\alpha$	G	cm	Z			Y		
							$J_z$	$W_z$	$J_{z1}$	$J_y$	$W_y$	$J_{y1}$
1 <sup>1/2</sup>	15	3	0,81	1,02	0,63	0,252	0,238	0,066	0,096	0,159	0,11	
			1,04	0,98	0,81	0,309	0,291	0,081	0,109	0,194	0,13	
2	20	3	1,11	1,39	0,87	0,640	0,455	0,169	0,194	0,404	0,22	
			1,44	1,35	1,12	0,792	0,563	0,209	0,226	0,500	0,26	
2 <sup>1/2</sup>	25	3	1,41	1,76	1,10	1,30	0,735	0,342	0,329	0,820	0,37	
			1,84	1,73	1,44	1,64	0,926	0,432	0,397	1,03	0,45	
3	30	4	2,24	2,10	1,75	2,93	1,38	0,77	0,608	1,85	0,69	
			3,24	2,02	2,33	4,01	1,89	1,05	0,755	2,53	0,88	
3 <sup>1/2</sup>	35	4	2,64	2,48	2,06	4,80	1,94	1,26	0,876	3,03	0,98	
			3,84	2,40	3,00	6,62	2,68	1,74	1,12	4,18	1,28	
4	40	6	3,04	2,85	2,97	7,33	2,59	1,93	1,18	4,67	1,32	
			4,41	2,77	3,46	10,2	3,60	2,68	1,94	6,4	1,75	
4 <sup>1/2</sup>	45	8	5,76	4,49	4,49	12,7	4,48	3,34	1,82	8,0	2,10	
			4,25	3,19	3,32	12,8	4,08	3,37	1,82	8,05	2,03	
5	50	7	5,81	3,11	4,53	16,9	5,31	4,45	10,65	2,57		
			7,29	3,04	5,69	20,4	6,41	5,38	2,60	12,85	3,00	
5 <sup>1/2</sup>	55	9	4,75	3,56	3,7	17,8	5,03	4,68	11,20	2,61		
			6,51	3,49	5,1	23,5	6,64	6,18	2,89	14,85	3,28	
5 <sup>1/2</sup>	55	6	8,19	3,41	6,4	28,6	8,08	7,53	18,05	3,85		
			6,24	3,91	4,9	28,2	7,26	7,43	3,29	17,75	3,66	
5 <sup>1/2</sup>	55	8	8,16	3,83	6,4	35,7	9,18	9,38	22,5	4,50		
			10,00	3,76	7,8	42,6	11,0	11,2	26,8	5,25		

Tabelle VIII.

Tabelle VIII.

6	60	6	6,84	4,28	5,3	37,0	8,72	9,74	4,02	23,35	4,49
			8,96	4,21	7,0	47,2	11,1	12,4	4,90	29,70	5,54
6 <sup>1/2</sup>	65	7	11,00	4,14	8,6	56,3	13,3	14,8	5,64	35,45	6,40
			8,61	4,62	6,7	54,4	11,8	14,3	5,38	34,25	6,02
7	70	7	10,9	4,55	8,5	67,0	14,6	17,6	6,38	42,15	7,22
			13,1	4,48	10,2	78,5	17,1	20,7	7,24	49,95	8,22
7 <sup>1/2</sup>	75	8	9,31	4,99	7,3	68,5	13,9	18,0	6,32	43,20	7,10
			11,8	4,92	9,2	84,8	17,2	22,3	7,58	53,00	8,56
8	80	8	14,2	4,85	11,1	99,8	20,2	26,3	8,65	63,00	9,81
			11,4	5,33	8,9	95,0	18,0	25,0	8,16	60	9,22
8 <sup>1/2</sup>	85	9	14,0	5,26	10,9	115,0	21,7	30,3	9,60	72	10,8
			16,6	5,19	12,9	133,0	25,1	35,0	10,7	84	12,3
9	90	9	12,2	5,71	9,5	117	20,6	30,8	9,48	74	10,7
			15,0	5,63	11,7	141	24,9	37,1	11,1	89	12,6
9 <sup>1/2</sup>	95	10	17,8	5,56	13,9	162	28,6	42,7	12,4	103	14,4
			15,4	6,42	12,0	187	29,4	49,2	13,5	118	15,3
10	100	10	18,6	6,35	14,5	222	34,9	58,4	15,6	140	17,6
			21,7	6,28	16,9	254	39,9	66,8	17,4	160	19,7
10 <sup>1/2</sup>	105	11	19,0	7,13	14,8	285	40,2	75,0	18,5	180	21,0
			22,6	7,06	17,6	333	47,1	87,7	21,2	210	24,1
11	110	11	26,0	6,99	20,3	378	53,4	99,5	23,5	238	26,7
			21,0	7,88	16,4	385	49,4	101	22,9	243	25,9
11 <sup>1/2</sup>	115	12	25,0	7,81	19,5	450	57,7	118	26,2	284	29,9
			28,9	7,74	22,5	513	65,9	135	29,3	324	33,5
12	120	12	25,2	8,59	19,7	549	64,8	144	29,8	346	33,8
			29,5	8,52	23,0	634	74,9	167	33,8	400	38,1
12 <sup>1/2</sup>	125	13	33,8	8,45	26,3	715	84,4	188	37,5	451	42,8
			29,8	9,31	23,2	763	83,1	201	38,6	482	43,4
13	130	13	34,4	9,24	26,9	867	94,4	229	43,0	548	48,3
			39,0	9,17	30,5	970	106	256	47,3	613	53,7
13 <sup>1/2</sup>	135	14	34,7	10,02	27,1	1035	104	270	47,9	647	54,5
			39,8	9,95	31,0	1160	117	305	53,2	732	60,4
14	140	14	44,7	9,88	34,9	1290	130	339	58,0	814	66,6
			40,0	10,7	31,2	1360	128	358	59,3	859	67,0
14 <sup>1/2</sup>	145	15	45,4	10,7	35,4	1525	144	401	65,3	963	74,2
			50,8	10,6	39,6	1685	159	443	71,1	1064	80,5
15	150	15	45,8	11,5	35,7	1760	156	463	71,8	1112	81,2
			51,5	11,4	40,2	1970	174	518	79,0	1244	89,6
15 <sup>1/2</sup>	155	16	57,2	11,3	44,6	2160	191	569	85,5	1365	97,6
			6,84	4,28	5,3	37,0	8,72	9,74	4,02	23,35	4,49



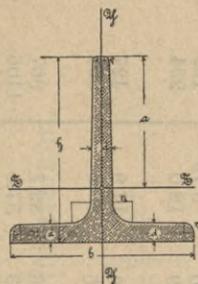


Tabelle X.

## Normalprofile für hochstegige I-Eisen.

$$h = b; \quad d = 0,1 h + 1 \text{ mm}$$

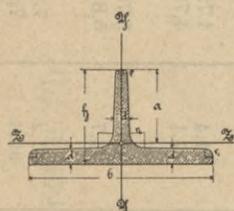
$$r_2 = d; \quad r_1 = \frac{r_2}{2}; \quad \rho = \frac{r_2}{4}$$

Neigung im Fuss 2 0/0; an jeder Seite des Steges 2 0/0.

1 Profil- No.	2 Dimensionen in Millimeter			5 Quer- schnitt $F$ qcm	6 Gewicht $G$ per laufend. Meter kg	7 Schwer- punkts- Abstand $a$	8 Momente bezogen auf die Achse			
	$b$	$h$	$d$				Z		Y	
							$J_z$	$W_z$	$J_y$	$W_y$
2/2	20	20	3	1,11	0,9	1,39	0,403	0,29	0,204	0,20
2 1/2   2 1/2	25	25	3,5	1,63	1,3	1,75	0,931	0,53	0,463	0,37
3/3	30	30	4	2,24	1,7	2,10	1,86	0,88	0,914	0,61
3 1/2   3 1/2	35	35	4,5	2,95	2,3	2,46	3,34	1,36	1,63	0,93
4/4	40	40	5	3,75	2,9	2,82	5,56	1,97	2,70	1,35
4 1/2   4 1/2	45	45	5,5	4,65	3,6	3,17	8,74	2,76	4,23	1,88
5/5	50	50	6	5,64	4,4	3,53	13,1	3,71	6,33	2,54
6/6	60	60	7	7,91	6,2	4,24	26,4	6,23	12,8	4,25
7/7	70	70	8	10,6	8,2	4,96	48,4	9,76	23,1	6,62
8/8	80	80	9	13,6	10,6	5,67	81,5	14,4	38,8	9,70
9/9	90	90	10	17,0	13,3	6,38	129	20,3	61,4	13,6
10/10	100	100	11	20,8	16,2	7,10	195	27,5	92,7	18,5
12/12	120	120	13	29,5	23,0	8,52	389	45,6	189	31,5
14/14	140	140	15	39,8	31,0	9,95	734	73,7	347	49,5

Tabelle XI.

## Normalprofile für breitfüßige I-Eisen.



$$h = \frac{b}{2}$$

Neigung im Fuss 2 0/0; an jeder Seite des Steges 4 0/0

$$d = 0,15 h + 1 \text{ mm}$$

$$r_2 = d; \quad r_1 = \frac{r_2}{2}; \quad \rho = \frac{r_2}{4}$$

1 Profil- No.	2 Dimensionen in Millimeter			5 Quer- schnitt $F$ qcm	6 Gewicht $G$ per laufend. Meter kg	7 Schwer- punkts- abstand $a$	8 Momente bezogen auf die Achse			
	$b$	$h$	$d$				Z		Y	
							$J_z$	$W_z$	$J_y$	$W_y$
6/3	60	30	5,5	4,64	3,6	2,30	9,98	3,33	2,91	1,26
7/3 1/2	70	35	6	5,94	4,6	2,69	17,3	4,94	5,12	1,90
8/4	80	40	7	7,91	6,2	30,7	30,1	7,52	8,87	2,89
9/4 1/2	90	45	8	10,16	7,9	3,45	49,0	10,9	14,4	4,18
10/5	100	50	8,5	12,02	9,4	3,84	71,3	14,3	21,2	5,51
12/6	120	60	10	17,0	13,3	4,62	145	24,2	43,2	9,35
14/7	140	70	11,5	22,8	17,8	5,39	265	37,8	79,1	14,7
16/8	160	80	13	29,5	23,0	6,17	446	55,8	134	21,7
18/9	180	90	14,5	37,0	28,9	6,95	709	78,8	213	30,5
20/10	200	100	16	45,4	35,4	7,72	1073	107	323	41,8

Tabelle XII. Normalprofile für  $\Gamma$ -Eisen.

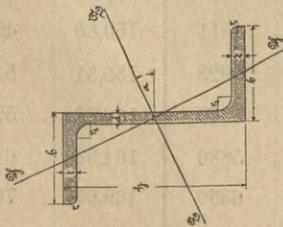
$$b = 0,25 h + 30 \text{ mm}$$

$$d = 0,035 h + 3 \text{ mm}$$

jedoch auf halbe Millimeter abgerundet

$$t = 0,05 h + 3 \text{ mm}$$

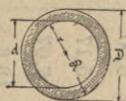
$$r_2 = t; r_1 = \frac{t}{2}$$



1 Profil-No.	2 Dimensionen in Millimeter				6 Querschnitt $F$ qcm	7 Gewicht per laufenden Meter kg	8 Lage der Hauptachse $Z$ $\text{tg } \alpha$	9 Momente bezogen auf die Achse			
	3 $h$	4 $b$	5 $d$	5 $t$				9 $Z$		11 $Y$	
								$J_z$	$W_z$	$J_y$	$W_y$
3	30	38	4	4,5	4,26	3,3	1,69	18,3	4,75	1,61	1,14
4	40	40	4,5	5	5,35	4,2	1,20	28,3	6,76	3,00	1,79
5	50	43	5	5,5	6,68	5,2	0,96	45,2	9,80	5,17	2,69
6	60	45	5	6	7,80	6,1	0,80	67,9	13,6	7,07	3,34
8	80	50	6	7	10,96	8,6	0,61	142,9	24,4	13,6	5,82
10	100	55	6,5	8	14,26	11,1	0,52	272	39,7	21,1	8,14
12	120	60	7	9	17,94	14,0	0,46	474	60,1	30,0	10,7
14	140	65	8	10	22,60	17,6	0,42	773	88,0	44,6	14,2
16	160	70	8,5	11	27,13	21,2	0,39	1193	120,5	58,8	16,9

Tabelle XIII.

## Trägheitsmomente von Kreisringen (hohle Säulen).



$F$  = Flächeninhalt  
 $J$  = Trägheitsmoment  
 Dimensionen in Centimeter

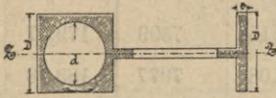
Durchmesser $D$	$\delta = 1,5$		$\delta = 2$		$\delta = 2,5$		$\delta = 3$	
	$F$	$J$	$F$	$J$	$F$	$J$	$F$	$J$
5	16,49	—	18,85	—	—	—	—	—
6	21,21	—	25,13	—	27,49	—	—	—
7	25,92	105	31,42	114	35,34	117	37,70	118
8	30,63	170	37,70	188	43,20	197	47,12	200
9	35,34	258	43,98	291	51,05	309	56,55	318
10	40,06	373	50,27	427	58,90	460	65,97	478
10,5	42,41	441	53,41	509	62,83	552	70,69	577
11	44,77	518	56,55	601	66,76	655	75,50	688
11,5	47,12	602	59,69	703	70,69	771	80,11	814
12	49,48	696	62,83	817	74,61	900	84,82	954
12,5	51,84	799	65,97	942	78,54	1043	89,54	1111
13	54,19	911	69,12	1080	82,47	1201	94,25	1284
13,5	56,55	1034	72,26	1231	86,39	1374	98,96	1475
14	58,90	1167	75,40	1395	90,32	1564	103,67	1685
14,5	61,24	1311	78,54	1573	94,25	1770	108,38	1914
15	63,62	1467	81,68	1766	98,17	1994	113,10	2163
15,5	65,97	1635	84,82	1975	102,10	2238	117,81	2433
16	68,33	1815	87,96	2199	106,03	2498	122,52	2726
16,5	70,69	2008	91,11	2440	109,96	2780	127,23	3042
17	73,04	2214	94,25	2698	113,88	3082	131,95	3381
17,5	75,40	2434	97,39	2973	117,81	3405	136,66	3745
18	77,75	2668	100,53	3267	121,74	3751	141,37	4135
18,5	80,11	2917	103,67	3580	125,66	4119	146,08	4551
19	82,47	3180	106,81	3912	129,59	4511	150,80	4995
19,5	84,82	3459	109,96	4264	133,52	4928	155,51	5467
20	87,18	3754	113,10	4637	137,44	5369	160,22	5968
20,5	89,54	4065	116,24	5031	141,37	5836	164,93	6499
21	91,89	4394	119,38	5447	145,30	6330	169,65	7062

Durch- messer $D$	$\delta = 1,5$		$\delta = 2$		$\delta = 2,5$		$\delta = 3$	
	$F$	$J$	$F$	$J$	$F$	$J$	$F$	$J$
21,5	94,25	4739	122,52	5885	149,23	6850	174,36	7655
22	96,60	5102	125,66	6346	153,15	7399	179,07	8282
22,5	98,96	5483	128,81	6831	157,08	7977	183,78	8942
23	101,32	5883	131,95	7340	161,01	8584	188,50	9637
23,5	103,67	6301	135,09	7873	164,93	9221	193,21	10367
24	106,03	6739	138,23	8432	168,86	9889	197,92	11133
24,5	108,38	7197	141,37	9017	172,79	10589	202,63	11936
25	110,74	7676	144,51	9628	176,71	11321	207,35	12788
25,5	113,10	8175	147,65	10267	180,64	12086	212,06	13658
26	115,45	8695	150,80	10933	184,57	12885	216,77	14578
26,5	117,81	9237	153,94	11627	188,50	13719	221,48	15538
27	120,17	9801	157,08	12350	192,42	14588	226,19	16540
27,5	122,52	10388	160,22	13103	196,35	15493	230,91	17585
28	124,88	10997	163,36	13886	200,28	16435	235,62	18673
28,5	127,23	11630	166,50	14699	204,20	17415	240,33	19805
29	129,59	12287	169,65	15544	208,13	18433	245,04	20982
29,5	131,95	12968	172,79	16420	212,06	19489	249,76	22205
30	134,30	13674	175,93	17329	215,98	20586	254,47	23475
31	139,02	15161	182,21	19246	223,84	22901	263,89	26158
32	143,73	16753	188,50	21300	231,69	25385	273,32	29040
33	148,44	18453	194,78	23495	239,55	28042	282,74	32127
34	153,15	20264	201,06	25836	247,40	30879	292,17	35425
35	157,87	22190	207,35	28329	255,25	33901	301,59	38943
36	162,58	24234	213,63	30976	263,11	37115	311,02	42687
37	167,29	26405	219,91	33784	270,96	40526	320,44	46664
38	172,00	28692	226,19	36757	278,82	44140	329,87	50881
39	176,71	31113	232,48	39899	286,67	47964	339,29	55347
40	181,43	33666	238,76	43216	294,52	52002	348,72	60016

## Trägheitsmomente durchbrochener Wände.

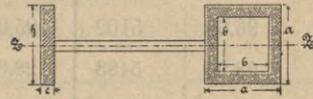
$F$  = Flächeninhalt.  $J$  = Trägheitsmoment. Dimensionen in Centimeter.

### Tabelle XIV.



No.	$D$	$d$	$b$	$F$	$J$
1	10	7,6	3	85	920
2	10	7,0	3	92	965
3	10	6,4	3	98	1001
4	11	8,6	3	96	1284
5	11	8	3	104	1352
6	11	7,4	3	111	1411
7	12	9,6	4	120	1887
8	12	8,4	4	137	2060
9	12	8	4	142	2103
10	13	10,6	4	133	2493
11	13	10	4	142	2622
12	13	9,4	4	152	2729
13	13	9	4	157	2790
14	13	8,6	4	163	2844
15	13	8	4	171	2911
16	14	11,6	4	146	3227
17	14	11	4	157	3397
18	14	10,4	4	167	3542
19	14	10	4	173	3625
20	14	9	4	188	3794
21	14	8,4	4	197	3871
22	15	12	4	172	4326
23	15	11,4	4	183	4515
24	15	11	4	190	4625
25	15	10,6	4	197	4724
26	15	10	4	206	4853
27	15	9,4	4	216	4960
28	16	13	5	203	5766
29	16	12,4	5	215	6007
30	16	12	5	223	6150
31	16	11,6	5	230	6279
32	16	11	5	241	6449
33	16	10,4	5	251	6594
34	16	10	5	257	6677

### Tabelle XV.



No.	$a$	$b$	$c$	$F$	$J$
1	10	1,2	3	72	805
2	10	1,5	3	81	883
3	10	1,8	3	89	944
4	10	2	3	94	975
5	11	1,2	3	80	1107
6	11	1,5	3	90	1212
7	11	1,8	3	99	1303
8	11	2	3	105	1353
9	11	2,5	3	118	1445
10	12	1,2	4	100	1596
11	12	1,8	4	121	1889
12	13	1,2	4	109	2060
13	12	2,5	4	143	2104
14	12	3	4	156	2196
15	13	1,5	4	121	2279
16	13	1,8	4	133	2462
17	13	2	4	140	2565
18	14	1,2	4	117	2607
19	13	2,2	4	147	2656
20	13	2,5	4	157	2772
21	14	1,5	4	131	2896
22	13	3	4	172	2912
23	14	1,8	4	144	3141
24	14	2	4	152	3283
25	14	2,5	4	171	3570
26	15	1,5	4	141	3616
27	14	3	4	188	3775
28	15	1,8	4	155	3936
29	15	2	4	164	4124
30	15	2,2	4	173	4292
31	15	2,8	4	197	4693
32	16	1,5	5	167	4788
33	16	1,8	5	182	5198
34	16	2	5	192	5440

# Tabelle XVI.

## Tabelle über die erforderlichen Anschlussnieten für gleichschenklige Winkel-eisen.

Nach dem Musterbuch für Eisenkonstruktionen.

Winkel-eisen		Anschlussnieten		Winkel-eisen		Anschlussnieten		Winkel-eisen		Anschlussnieten		Winkel-eisen		Anschlussnieten		Winkel-eisen		Anschlussnieten			
		Normalprofil	Dicke	Normalprofil	Dicke	Normalprofil	Dicke	Normalprofil	Dicke	Normalprofil	Dicke	Normalprofil	Dicke	Normalprofil	Dicke	Normalprofil	Dicke	Normalprofil	Dicke	Erforderl. Anzahl	
No.	mm	No.	mm	No.	mm	No.	mm	No.	mm	No.	mm	No.	mm	No.	mm	No.	mm	No.	mm	No.	mm
3 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	4	3	5	6 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	7	3	8	5	10	11	10	5	20	8	8	5	26	14	13	8	26
"	6	4	7	"	9	4	10	4	22	"	12	5	22	"	15	6	"	"	9	"	"
—	—	—	9	"	11	5	12	5	"	"	14	5	"	"	17	6	"	"	10	"	"
4	4	3	6	7	7	4	9	4	22	12	11	5	22	9	14	6	26	15	14	9	26
"	6	4	8	"	9	4	11	4	24	"	13	5	24	11	16	7	"	"	10	"	"
"	8	4	10	"	11	5	13	5	"	"	15	6	"	"	18	8	"	"	11	"	"
4 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	5	3	6	7 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	8	4	10	4	24	13	12	5	24	10	15	7	26	16	15	10	26
"	7	4	8	"	10	4	12	5	26	"	14	5	26	12	17	8	"	"	12	"	"
"	9	5	10	"	12	5	14	6	"	"	16	6	"	16	19	9	"	"	13	"	"

**Bemerkung.** Die in der Tabelle gewählten Nietdurchmesser sind 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 und 26 mm, dieselben sind also durch die geraden Zahlen von 12 bis 26 bestimmt. Es ist sehr zu empfehlen, bei der Ausführung von Eisenkonstruktionen stets nur Nieten mit den hier angenommenen Durchmessern zu wählen. Die Nieten sind als zweischneitig vorausgesetzt.

Tabelle XVII. Nietungen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nietstärke $d$	Tragfähigkeit $N$ einer Niete in Tonnen bei		$e$ cm	$e_1$ cm	$\alpha$ cm														Nietstärke $d$ mm
	ein-schnitt.	zwei-schnitt.																	
mm	Nieten															mm			
14	0,98	1,96	2,8	2,1	4,2	1,26	1,47	1,68	1,89	2,10	—	—	—	—	—	—	—	—	14
16	1,28	2,56	3,2	2,4	4,8	1,44	1,68	1,92	2,16	2,40	2,64	—	—	—	—	—	—	—	16
18	1,62	3,24	3,6	2,7	5,4	1,62	1,89	2,16	2,43	2,70	2,97	3,24	—	—	—	—	—	—	18
20	2,00	4,00	4,0	3,0	6,0	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00	3,30	3,60	3,90	4,20	—	—	—	—	20
22	2,42	4,84	4,4	3,3	6,6	1,98	2,31	2,64	2,97	3,20	3,53	3,86	4,19	4,52	4,85	—	—	—	22
24	2,88	5,76	4,8	3,6	7,2	2,16	2,52	2,88	3,24	3,60	3,96	4,32	4,68	5,04	5,40	5,76	6,12	—	24
26	3,38	6,76	5,2	3,9	7,8	2,34	2,73	3,12	3,51	3,90	4,29	4,68	5,07	5,46	5,85	6,24	6,63	7,02	26

Es bedeutet  $d =$  Nietdurchmesser,  $N$  und  $P =$  Kraft, welche durch eine Niete übertragen werden kann,  $e =$  kleinster Abstand der Nietmitte vom Blechrande, in der Krafrichtung gemessen,  $e_1 =$  kleinster Abstand der Nietmitte vom Blechrande senkrecht zur Krafrichtung gemessen,  $\alpha =$  kleinste Entfernung der Nietmitte von einander. — Ergibt sich  $P$  aus Spalte 7 bis 19 kleiner, als  $N$  aus Spalte 2 und 3, so ist die Nietzahl nach dem Werte der Spalten 7 bis 19 zu bestimmen.

**Tabelle XVIII.**  
**Scharfgängige Schrauben.**

	$d$ mm	$d_1$ mm	$n$	$D$ mm	$U$ mm	$u$ mm	$h$ mm	$P$ kg
	6	4,1	7	13	17	2	4	37
	8	5,9	6	16	21	3,5	6	77
	10	7,7	5 <sup>1/2</sup>	19	25	3	7	130
	12	9,5	5	22	29	3	8	199
	15	12,2	4 <sup>1/2</sup>	26	34	4	11	327
$d$ = Bolzendurchmesser der Schraube	18	14,9	4	30	40	4	13	488
$d_1$ = Kerndurchmesser	21	17,6	3 <sup>3/4</sup>	34	45	4	15	681
$n$ = Zahl der Gänge auf 10 mm Bolzenlänge	24	20,3	3	39	52	4	17	907
$D$ = Durchmesser des dem Sechseck der bearbeiteten Schraubemutter eingeschriebenen Kreises	27	23	3	43	57	5	19	1164
	30	25,7	2 <sup>1/2</sup>	47	63	5	21	1453
$U$ = Durchmesser der bearbeiteten Unterlagsscheibe	34	29,3	2 <sup>1/2</sup>	53	70	5	24	1889
$u$ = deren Dicke	38	32,9	2 <sup>1/2</sup>	58	77	6	27	2381
$h$ = Höhe des Schraubenkopfes.	42	36,5	2 <sup>1/8</sup>	64	85	6	29	2931
$P$ = Tragkraft der Schraube	46	40,1	2 <sup>1/8</sup>	69	92	7	32	3538
Höhe der Mutter gleich dem Bolzendurchmesser.	50	43,7	1 <sup>7/8</sup>	75	100	7	35	4201
	55	48,2	1 <sup>7/8</sup>	82	109	8	39	5111
	60	52,7	1 <sup>5/8</sup>	89	119	9	42	6110
	65	57,2	1 <sup>5/8</sup>	96	128	10	46	7198
	70	61,7	1 <sup>3/8</sup>	103	137	10	49	8375
	75	66,2	1 <sup>3/8</sup>	110	147	11	53	9641



# Darstellende Geometrie

für

## Bauhandwerker.

Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker.

Erster Teil:

Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittlungen.

Mit 258 Figuren.

Zweiter Teil:

Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers, Schiftung bei Dächern, windschiefe Dächer, Darstellung eines Treppenkrümmings, Steinschnitt, Centralperspektive.

Anhang: Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern.

Mit 217 Figuren.

Bearbeitet von

**Jakob Vonderlinn,**

Ingenieur, Lehrer an der Kgl. Oberreal- und Baugewerkschule, sowie an der Sonntags- und Abendschule für Handwerker zu Breslau.

Preis eines jeden Teils: brosch. *M.* 3. —, gebunden *M.* 3. 30.

---

## Vorlegeblätter

für den

**Unterricht im Linear- und Projektionszeichnen.**

Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerschulen u. s. w.

12 Tafeln mit erläuterndem Texte.

Entworfen und gezeichnet von

**Jakob Vonderlinn.**

In Mappe *M.* 5. 50.

---

# Verlag von Julius Maier in Stuttgart.

Von *Kleyers Encyclopädie der gesamten mathematischen, technischen u. exakten Natur-Wissenschaften* sind nachstehende Bände vollständig erschienen:

- Lehrbuch der Grundrechnungsarten.** Erstes Buch: Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen. Mit 71 Erklärungen und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von A. Frömter. Preis: M. 3.—.
- do. do. **Zweites Buch: Das Rechnen mit benannten Zahlen.** Mit 30 Erklärungen und einer Sammlung von 518 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Frömter und Neubüser. Preis: M. 3.—.
- do. do. **Drittes Buch: Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen.** (Die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche.) Mit 260 Erklärungen und einer Sammlung von 309 gelösten und ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von J. G. Maier. Preis: M. 3.—.
- Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens.** Erster Teil: Die Schluss- und Kettenrechnung (die einfache und zusammengesetzte Regeldeetri und der Reesische Satz) nebst Anwendungen. Mit 100 Fragen, 325 Erklärungen, 63 Anmerkungen, 1250 Aufgaben, 18 Figuren, den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben und einer Münz-, Mass- und Gewichtstabelle. Zum Selbststudium, Nachschlagen, sowie zum Schulgebrauch bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Richard Olbricht. Preis: M. 4 50.
- do. do. **Zweiter Teil: Die Prozent- und Zinsrechnung nebst ihren Anwendungen,** mit Einschluss der Diskontrechnung, der Terminrechnung, der Kalkulationen und Kontokorrente. Mit 130 Fragen, 444 Erklärungen, 27 Anmerkungen, 1520 Aufgaben, zahlreichen schematischen Figuren, einem Formelverzeichnis, einer Fristen- und Zinsberechnungstabelle, sowie den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. R. Olbricht. Preis: M. 6.—.
- do. do. **Dritter Teil: Die Gold-, Silber-, Münz-, Effekten- und Wechselrechnung, sowie die** Gesellschafts- und Mischungsrechnung. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. R. Olbricht. — Befindet sich unter der Presse —
- Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrößen** (Elemente der Buchstabenrechnung), der Verhältnisse und Proportionen mit einer Sammlung von 478 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von Hans Staudacher, Prof. an der kgl. Industrieschule zu Nürnberg. Erster Teil. Preis: M. 5.—.
- do. do. **Zweiter Teil: Elemente der Zahlenlehre, Dezimal- und Kettenbrüche und** Rechnung mit unvollständigen Zahlen. Mit einer Sammlung v. 277 gelöst. u. analogen ungelöst. Aufg., nebst d. Resultaten d. letzteren. Bearb. n. System Kleyer v. Prof. Hans Staudacher. Preis: M. 5.—.
- Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln** nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 6.—.
- Lehrbuch der Logarithmen** nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 4.—.
- Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln** nebst einer trigonometrischen Tafel und einer Anzahl von anderen Tabellen. Von Ad. Kleyer. Preis: gebunden M. 2. 50.
- Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen, der zusammengesetzten, harmonischen-, Ketten- und Teilbruchreihen** nebst einer Sammlung von über 400 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 4.—.
- Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung** nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 6.—.
- Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten.** Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 8.—.
- Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten.** Sammlung von 905 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 403 Erklärungen und Anmerkungen. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Otto Prange. Preis: M. 7.—.
- Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten.** (Quadrat. Gleichungen.) Sammlung von 1650 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form erläutert durch 872 Erklärungen und 53 Figuren. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Aug. Blind. Preis: M. 10.—.
- Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades** (Quadratische Gleichungen) mit zwei und mehreren Unbekannten. Sammlung v n 361 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 185 Erklärungen und 8 in den Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Conrad Metger. Preis: M. 4.—.
- Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades, nebst der trigonometrischen Auflösung der** Gleichungen 2. Grades. Sammlung von 253 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 251 Erklärungen und 10 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Conrad Metger. Preis: M. 6.—.
- Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des 1. Grades.** (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebst den Abhandlungen des Bachez de Méziriac, im französischen Originale mit beigefügter deutscher Uebersetzung. Bearbeitet zum Teil nach System Kleyer von W. Fr. Schüler. Erstes Buch. Preis: M. 4. 50.
- Geschichte der Geometrie für Freunde der Mathematik** gemeinverständlich dargestellt von Richard Klimpert. Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Preis: M. 3.—.
- Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie** (Planimetrie). Erster Teil: Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 1. 80.

**Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie).** Zweiter Teil: Der Winkel und die parallelen Linien. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 201 Erklärungen und 113 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. J. Sachs. Preis: M. 2. 20

do. do. **Dritter Teil: Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 737 Erklärungen und 343 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. J. Sachs. Preis: M. 6. —

do. do. **Vierter Teil: Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Oerter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 529 Erklärungen und 230 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: M. 6. —

do. do. **Fünfter Teil: Die Flächen der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 346 Erklärungen und 96 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: M. 4. —

do. do. **Sechster Teil: Proportionalität der Strecken.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 378 Erklärungen und 90 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: M. 4. —

do. do. **Siebenter Teil: Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 394 Erklärungen und 76 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: M. 4. —

**Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben** gelöst durch geometrische Analysis. Erster Teil: Aufgaben, gelöst ohne Anwendung der Proportionslehre. Mit 1952 gelösten und ungelösten Aufgaben, 178 Anmerkungen, 207 Erklärungen und 214 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von E. R. Müller. Preis: M. 5. —

do. do. **Zweiter Teil: Aufgaben gelöst mit Anwendung der Proportionslehre.** Mit 1327 gelösten und ungelösten Aufgaben, 126 Anmerkungen, 100 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von E. R. Müller. Preis: M. 4. —

do. do. **Dritter Teil: Verwandlungs- und Teilungsaufgaben, sowie Aufgaben über ein- und umschriebene Figuren.** Mit 510 gelösten und ungelösten Aufgaben, 40 Anmerkungen, 72 Erklärungen und 54 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. E. R. Müller. Preis: M. 2. —

**Das apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben.** Sammlung von 163 gelösten und ungelösten Aufgaben und 200 Figuren. Zur Ergänzung des Schulunterrichts und zum Selbststudium. Nach System Kleyer durchaus neu bearb. Zweite Aufl. Von Prof. Heiner Cranz. Preis: M. 6. —

**Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Erster Teil: Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 271 Erklärungen und 226 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn, Privatdocent an der techn. Hochschule in München. Preis: M. 3. 50.

do. do. **Zweiter Teil: Ueber die rechtwinklige Projektion ebenfächiger Körper.** Mit 130 Erklärungen und 99 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn. Preis: M. 3. 50.

do. do. **Dritter Teil. Erste Hälfte: Schiefe Parallelprojektion, Centralprojektion** einschliesslich der Elemente der projektiven Geometrie. Mit 195 Erklärungen und 169 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn. Preis: M. 3. 50.

do. do. **Dritter Teil. Zweite Hälfte: Centralcollineation ebener und räumlicher Systeme, Kegelschnitte, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie.** Mit 218 Erklärungen und 210 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn. Preis: M. 5. —

do. do. **Vierter Teil: Krumme Linien (ebene und räumliche Kurven). Krumme Oberflächen. Schattens- und Beleuchtungslehre.** Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn. Befindet sich unter der Presse.

**Lehrbuch der Analytischen Geometrie der Ebene.** Erster Teil: Analytische Geometrie des Punktes und der Geraden. Mit einer Sammlung von 100 Aufgaben, 206 gelösten Übungsaufgaben und 92 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Heiner Cranz. Preis: M. 6. —

do. do. **Zweiter Teil: Analytische Geometrie der einzelnen Linien zweiten Grades.** Mit einer Sammlung von 116 Aufgaben, 286 gelösten Übungsaufgaben und 200 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. H. Cranz. Preis: M. 8. —

**Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre)** mit 307 Erkl. und 52 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung v. 513 gelöst. u. ungelöst. analogen Aufgaben. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 7. —

**Lehrbuch der ebenen Trigonometrie.** Eine Sammlung von 1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben und 178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Mit 797 Erkl., 563 in den Text gedruckten Fig. u. 65 Anmerk. nebst einem ausführlich. Formelverzeichnis von über 500 Formeln. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 18. —

**Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 236 Erklärungen und 56 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. W. Laska. Preis: M. 4. 50.

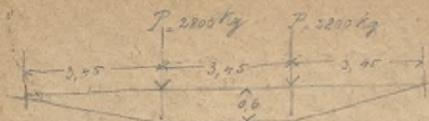
**Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.** Mit 52 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 29 Erkl. und 17 in den Text gedruckten Figuren. Bearb. nach System Kleyer von Dr. K. J. Bobek. Preis: M. 5. —

- Lehrbuch der Vermessungskunde (Geodäsie).** Mit einer Sammlung von 153 gelösten Aufgaben und angewandten Beispielen, zahlreichen Erklärungen und 481 in den Text gedruckten Figuren. Unter Berücksichtigung des Selbstunterrichts für Geometer-Eleven, Studierende des Bau-, Berg- und Ingenieur-Fachs, sowie zum praktischen Gebrauch für Feldmesser, Kulturtechniker, Katasterbeamte etc. Von Dr. W. Láska. Preis: M. 10.—
- Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie).** Erster Teil: Die Lage von geraden Linien und Ebenen im Raum. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 573 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. H. Seipp. Preis: M. 6.—
- Lehrbuch der Körperberechnungen.** Erstes Buch. Mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 184 in den Text gedruckten Figuren. Zweite Auflage. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 4.—
- do. do. Zweites Buch. Eine Sammlung von 772 vollständig gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 742 Erklärungen und 256 in den Text gedruckten Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 9.—
- Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen.** Erster Teil. Mit einer Sammlung von 460 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. G. Weichold. Preis: M. 10.—
- do. do. Zweiter Teil. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. G. Weichold.  Befindet sich in Bearbeitung. 
- Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen.** Mit 221 Erklärungen und 38 in den Text gedruckten Figuren. Mit einer Sammlung von 269 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Krüger. Preis: M. 5.—
- Lehrbuch der Differentialrechnung.** Erster Teil: Die einfache und wiederholte Differentiation explizierter Funktionen von einer unabhängigen Variablen. Ohne Anwendung der Grenzen- und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Zweite Auflage. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 5.—
- do. do. Zweiter Teil: Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwicklungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima. Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren und 230 Erklärungen. Bearbeitet nach dem System Kleyer von Prof. Dr. Haas. Preis: M. 8.—
- do. do. Dritter Teil: Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven. Nebst 425 gelösten Aufgaben, 138 Erklärungen und 164 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Dr. Haas. Preis M. 7.—
- do. do. Vierter Teil: Anwendung der Differentialrechnung auf Raumkurven und Flächen. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Dr. Haas.  Befindet sich in Bearbeitung. 
- Lehrbuch der Integralrechnung.** Erster Teil. Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung von Adolph Kleyer. Preis: M. 10.—
- Einführung in die Funktionentheorie.** Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Mit 23 in den Text gedruckten Figuren. Von Dr. W. Láska. Preis: M. 1. 50.
- Lehrbuch der Kombinatorik.** Ausführliche Darstellung der Lehre von den kombinatorischen Operationen (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Mit 506 gelösten und analogen ungelösten Übungsbeispielen nebst den Resultaten der letzteren nach System Kleyer für den Unterricht und zum Selbststudium bearbeitet von Prof. H. Staudacher. Preis: M. 6.—
- Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Mit 303 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 68 Erklärungen und 27 in den Text gedruckten Figuren. Nach System Kleyer bearbeitet von Dr. K. J. Bobek. Preis: M. 6.—
- Lehrbuch der sphärisch. und theoret. Astronomie und der mathematischen Geographie.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Mit 328 Erklärungen, Formelverzeichnis, 148 in den Text gedruckten Figuren und 2 Tafeln. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. W. Láska. Preis: M. 6.—
- Lehrbuch der allgemeinen Physik.** (Die Grundbegriffe und Grundsätze der Physik.) Mit 549 Erklärungen, 83 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 120 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Klimpert. Preis: M. 8.—
- Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen.** Mit 352 Fragen, 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben nebst den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. H. Hovestadt. Preis: M. 6.—
- Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik).** Mit 291 Erklärungen und 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Klimpert. Preis: M. 9.—
- Lehrbuch der Dynamik fester Körper (Geodynamik).** Mit 690 Erklärungen, 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 500 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: M. 13. 50.
- Lehrbuch über die Percussion oder den Stoss fester Körper.** Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Klimpert. Preis: M. 3.—
- Lehrbuch der Elasticität und Festigkeit.** Mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Klimpert. Preis: M. 5. 50.

- Lehrbuch der Statik flüssiger Körper (Hydrostatik).** Mit 425 Erklärungen, 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 208 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Klimpert. Preis: M. 8. —
- Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik).** Erster Band: Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhrenleitungen bei konstanter sowie veränderlicher Druckhöhe fließen. Mit 434 Erklärungen, mehr als 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 220 gelösten und ungelösten Aufgaben, und den Resultaten der letzteren. Bearb. nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: M. 8. —
- do. do. Zweiter Band. Erste Hälfte: Die Bewegungserscheinungen des Wassers in Kanälen und Flüssigkeiten, sowie der dabei ausgeübte Stoss und Widerstand. Mit 282 Erklärungen, mehr als 150 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 134 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: M. 5. —
- do. do. Zweiter Band. Zweite Hälfte: Von der Anwendung der lebendigen Kraft des bewegten Wassers als Motor oder Beweger. Mit 203 Erklärungen, 88 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 30 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: M. 3. 50.
- Lehrbuch über das spezifische Gewicht fester, flüssiger und gasförmiger Körper.** Mit 55 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Preis: M. 2. —
- Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus.** Nebst einer Samml. von gelösten u. ungelösten Aufgaben erläutert durch 189 in den Text gedr. Fig. u. 10 Karten. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 6. —
- Lehrbuch der Reibungselektricität (Frikctions-Elektricität, statischen oder ruhenden Elektricität).** Erläutert durch 860 Erklärungen und 273 in den Text gedruckte Figuren, nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 7. —
- Lehrbuch der Kontaktelektricität (Galvanismus).** Nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben. Mit 731 Erklärungen, 238 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Oscar May. Preis: M. 8. —
- Lehrbuch der Elektrodynamik.** Erster Teil. Mit 105 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Oscar May. Preis: M. 3. —
- Lehrbuch des Elektromagnetismus.** Mit 302 Erklärungen, 152 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Oscar May und Adolf Krebs. Preis: M. 4. 50.
- Lehrbuch der Induktionselektricität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik).** Mit 432 Erklärungen und 213 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Adolf Krebs. Preis: M. 6. —
- Lehrbuch der angewandten Potentialtheorie.** Mit 588 Erklärungen und 47 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von erläuternden Beispielen und Übungsaufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. H. Hovestadt. Preis: M. 7. —
- Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Erster Band: Die Metalloide.** Mit 2208 Erklärungen, 332 Experimenten und 366 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Wilh. Steffen. Preis: M. 16. —
- do. do. Anorganische Experimental-Chemie. Zweiter Band: Die Metalle. Mit 573 Erklärungen, 174 Experimenten und 33 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von W. Steffen. Preis: M. 16. —

*Im gleichen Verlag sind ferner erschienen:*

- Vierstellige logarithmische Tafeln** der natürlichen und trigonometrischen Zahlen nebst den erforderlichen Hilfstabellen. Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet von E. R. Müller. Preis: gebunden 60 Pfg.
- Das Zeichnen der Stereometrie.** Als Vorschule zur darstellenden Geometrie und zum Fachzeichnen für Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. 28 Tafeln mit Text. Von Prof. A. Brude. Preis: M. 6. —
- Stereoskopische Bilder** aus der Stereometrie. Bezogen auf den Kubus und entnommen dem Werke desselben Verfassers „Das Zeichnen der Stereometrie“. Von Prof. A. Brude. Preis: M. 3. —
- Vorlegeblätter für den Unterricht im Linear- und Projektionszeichnen.** Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerschulen u. s. w. 12 Tafeln mit erläuterndem Text. Entworfen und gezeichnet von Jakob Vonderlinn, Ingenieur, Lehrer an der Kgl. Oberreal- und Baugewerkschule, sowie an der Sonntags- und Abendschule für Handwerker zu Breslau. Preis: In Mappe M. 5. 50.
- Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Erster Teil: Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittlungen.** Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Mit 258 Figuren. Bearbeitet von Jakob Vonderlinn. Preis: broschirt M. 3. —, gebunden M. 3. 30.
- do. do. Zweiter Teil: Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers. Schiftung bei Dächern, Windschiefe Dächer, Darstellung eines Treppenkrümmings, Steinschnitt, Centralperspektive. Anhang: Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Mit 217 Fig. Bearbeitet von J. Vonderlinn. Preis: M. 3. —, geb. M. 3. 30.
- Statik für Bauhandwerker.** Ein Lehrbuch für den Unterricht an Baugewerkschulen, sowie zum Selbstunterricht. Mit 141 Übungsaufgaben und 324 Figuren, nebst einem Anhang von Tabellen. Bearbeitet von J. Vonderlinn, staatlich geprüfter Ingenieur. Preis: M. 3. —, geb. M. 3. 30.



Spannweite = 10,35 m

Gesamtlast = 10,35 · 250 · 250 = 6520 kg

Ladung der Knotenpunkte:

$$\frac{4520}{3} = \text{et. } 2800 \text{ kg}$$

$$p_1 = 2800 \cdot \frac{3,45}{6} = 16100 \text{ kg}$$

$$p_2 = 2800 \cdot \frac{\sqrt{3,45^2 + 1}}{6} = 16324 \text{ kg}$$

darauf in einem folgenden Ausschnitt entsprechend

$$p_3 = \frac{16100}{750} = 21,47 \text{ mm}$$

dem entspr. Feig. No. 16 mit  $F = 22,99 \text{ mm}$

$$p_2 = \frac{16324}{750} = 21,77 \text{ mm} = \text{Ø Runderisen von } 2,2 \text{ cm}$$

$$p_3 = \text{Fußreifen } \frac{2800}{500} = 5,6 \text{ mm} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = 11,9 \text{ mm}$$

Flächeninhalt  $H$ , aus  $F$  bestimmt.

Ladung  $4,40 \cdot 9,85 \cdot 250 = 2510 \text{ kg}$

$$W = \frac{2510 \cdot 4,40}{p \cdot 80} = 15,94 \quad \frac{1}{6} b \cdot h^2 \quad b = \frac{5}{7} h$$

$$15,94 = \frac{5}{42} h^3 \quad h = \sqrt[3]{42 \cdot 15,94} = 24 \text{ mm}$$

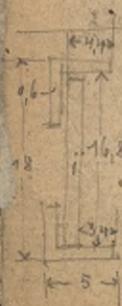
Wassermantel in einem Kreis mit  $W$  in  $\frac{1}{4}$  Kreis

Flächeninhalt  $W = 140$

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{4,4}{6} \cdot 18^2 = 355$$

$$\frac{3,4}{6} \cdot 16,8^2 = 216$$

$$W = 139 \text{ mm} \text{ alle nach dem} \\ \text{Referenzwert}$$



Verlag von Julius Maier in Stuttgart

# Darstellende Geometrie

für

## Bauhandwerker

Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen Anstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker

Erster Teil:

Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachansichten

Mit 258 Figuren.

Zweiter Teil:

Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche, Schiftung bei Dächern, windschiefe Dächer, Darstellung von Krümmungen, Steinschnitt, Centralperspektive

Anhang: Bildliche Darstellung der Beleuchtung

Mit 217 Figuren.

Bearbeitet von

**Jakob Vonderlinn,**

Ingenieur, Lehrer an der Kgl. Oberreal- und Baugewerkschule, sowie an der für Handwerker zu Breslau.

Preis eines jeden Teils: brosch. M. 3. —., gebunden

## Vorlegeblätter

für den

Unterricht im Linear- und Projektionszeichnen

Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerseminaren

12 Tafeln mit erläuterndem Text

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299129

von

J. V. linn.