

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II

L. inw.

4958

Professor W. Weißbrecht,

Lehrbuch

der

Vermessungskunde

Erster Teil

Stuttgart

Verlag von Konrad Wittwer

g 144

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299030

Bz 186 i

Lehrbuch

der

Vermessungskunde.



Bearbeitet

von

Wilhelm Weitbrecht,

Professor an der Kgl. Württ. Fachschule für Vermessungswesen
in Stuttgart.



Erster Teil: Horizontalmessungen.

Mit 368 Figuren und einer lithogr. Beilage.



Stuttgart.

Verlag von Konrad Wittwer.

1910.

W 173

Inspektion der Fliegertruppen
Gruppe: B. c No. 1848 F

Alle Rechte vorbehalten,
insbesondere das Recht der Übersetzung
in fremde Sprachen.



114958

Druck von Carl Hammer, Kgl. Hofbuchdruckerei, Stuttgart.

Akc. Nr. 3938/50

Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch entspringt dem Bedürfnis, bei der vermessungstechnischen Ausbildung der württembergischen Geometer erhöhten Nachdruck auf die Bearbeitung praktischer Übungsaufgaben zu legen und die dafür nötige Zeit durch Befreiung der Studierenden von der Führung und Ausarbeitung von Manuskripten zu gewinnen.

Deshalb enthält es im wesentlichen den (auf die niedere Geodäsie beschränkten) Lehrstoff, den Verfasser seit mehr als zwei Jahrzehnten an der Kgl. Württ. Fachschule für Vermessungswesen vorträgt.

Zunächst für angehende Geometer (Landmesser) geschrieben, stützt sich das Buch auf in jahrzehntelanger, heute noch fort-dauernder Vermessungspraxis in verschiedenen deutschen und ausser-deutschen Staaten, sowie in Studienreisen gesammelte Erfahrungen und kann daher vielleicht auch dem älteren Praktiker einiges bieten.

Möge es vielen Kollegen ein Leitfaden sein für das Eindringen in das praktische Vermessungswesen und ein Anlass, sich auch mit benachbarten, im Buch nur gestreiften Wissensgebieten zu beschäftigen. —

Ich möchte das Buch nicht der Öffentlichkeit übergeben, ohne dem Herrn Prof. Schenk für seine Unterstützung bei Bearbeitung der ins Lehrbuch aufgenommenen Abhandlungen über Optik, dem Herrn Oberbahnsekretär Knoblich für Bearbeitung des § 101 über „Ausweichungen“, dem Herrn Stadtgeometer Schmidt für seine im Lehrbuch benützten Mitteilungen über „mechanische Planvervielfältigungsverfahren“ und für seine Unterstützung bei der Figurenausführung, sowie dem Assistenten an der Fachschule, Herrn Obergeometer Zagst, für die Beihilfe bei Bearbeitung der Figuren und beim Lesen der Korrekturen aufrichtigen Dank zu sagen.

Stuttgart, Herbst 1909.

Der Verfasser.

Inhalts-Übersicht.

Vorwort	Seite III
Einleitung	1

Erster Teil.

Horizontalmessungen.

Abschnitt I. Grundaufgaben der Vermessungskunde	3
Kapitel I. Hilfsmittel zum Abstecken (Sichtbarmachen) von Punkten und Geraden, sowie zum Messen von Strecken	4
§ 1. Hilfsmittel zum Abstecken (Sichtbarmachen) von Punkten und Geraden	4
§ 2. Geräte zum Messen von Strecken	9
§ 3. Längeneinheit. Vergleichungsapparate. Abgekürzte Schreibweise für metrische Massangaben.	15
§ 4. Das Lot oder der Senkel	22
§ 5. Die Wasserwage (Libelle)	24
§ 6. Lattenreiter, Gradbogen, Hängezeug, Gefällmesser und Messkeil	34
Kapitel II. Einfache Instrumente zum Messen und Abstecken von Winkeln	42
§ 7. Diopterinstrumente	42
§ 8. Spiegelinstrumente	46
§ 9. Prismeninstrumente	52
Kapitel III. Ausführung der geodätischen Grundaufgaben .	57
§ 10. Abstecken (Sichtbarmachen) von Punkten	57
§ 11. Abstecken von Geraden	58
§ 12. Messen von Strecken	62
§ 13. Errichten von Loten, Messen und Abstecken von Winkeln mit Benützung einfacher Instrumente. Anwendung auf die Absteckung von Parallelen	81
§ 14. Fehlerquellen bei Ausführung der geodätischen Grundaufgaben. Fehlergrenzen	91
Abschnitt II. Aufnahme von Figuren, Planzeichnung, Flächenberechnung	96
Kapitel IV. Aufnahme von Figuren: „Stückvermessung“ .	96
§ 15. Aufnahmemethoden	96
§ 16. Vorzüge und Nachteile der in § 15 vorggeführten Aufnahmemethoden	103
§ 17. Auswahl der im einzelnen Fall anzuwendenden Stückvermessungsmethode. Zweck und Art der Grenz- und Kleinpunktsvermarkung	105

	Seite
Kapitel V. Planzeichnung	129
§ 18. Zeichenhilfsmittel	129
§ 19. Planzeichnung nach direkten Aufnahmemassen	138
§ 20. Planeingang	143
§ 21. Kopie, Vergrößerung bezw. Verkleinerung, Vervielfältigung von Plänen	145
Kapitel VI. Rechenhilfsmittel	156
§ 22. Methoden zur Erleichterung und Sicherung der direkten Rechnung	156
§ 23. Tafelwerke	162
§ 24. Mechanische Rechenhilfsmittel	166
§ 25. Graphische Rechentafeln	187
Kapitel VII. Flächenberechnung	197
§ 26. Flächenberechnung aus direkten Aufnahme- oder aus berechneten Koordinatenmassen	198
§ 27. Flächenberechnung mit teilweiser Benützung des Plans „halbgraphische Berechnung“	209
§ 28. Reingraphische Flächenberechnung und Hilfsmittel dafür	214
§ 29. Einfluss des Papiereingangs auf die Flächenbestimmung	238
§ 30. Vergleichende Würdigung der verschiedenen Flächenberechnungsmethoden. Fehlerfortpflanzung. Amtliche Fehlergrenzen	239
§ 31. Flächenteilungen	243
§ 32. Grenzausgleichung. Einrechnung von Linienschnitten	257
Kapitel VIII. Verwendung der Ergebnisse der staatlichen Stückvermessung (Aufnahmemasse, Grundstückspläne und Flächenmasse) für die Rechtspflege, die innere und die Steuerverwaltung	264
§ 33. Vermessungsakten. Öffentliche Dokumente über das Eigentum an Grundstücken	264
Abschnitt III. Schaffung bezw. Sicherung und Verfeinerung des Zusammenhangs ausgedehnter Stückvermessungen	274
Kapitel IX. Winkelmessinstrumente mit Fernröhren	274
§ 34. Stative	274
§ 35. Glaslinsen	278
§ 36. Fernröhren	292
§ 37. Ablesevorrichtungen	301
§ 38. Der Theodolit	307
§ 39. Untersuchung und Richtigstellung („Justierung“, „Rektifikation“) des Theodoliten. Untersuchung und Eliminierung der Wirkung nicht verbesserbarer Instrumentenfehler auf die Messung von Horizontalwinkeln	318
§ 40. Wirkung der bei Richtigstellung des Theodoliten etwa zurückgebliebenen Fehlerreste auf Projektion (Einweisen auf unebenem Gelände) und Winkelmessung. Eliminierung dieser Fehlerwirkung	339
Kapitel X. Messen und Abstecken von Horizontalwinkeln	347
§ 41. Behandlung und Aufstellung des Theodoliten. Anzielung mit dem Fernrohr	347
§ 42. Beobachtung von Horizontalwinkeln	350
§ 43. Vergleichende Würdigung der im § 42 vorgeführten Beobachtungsverfahren	367

§ 44.	Absteckung von Winkeln bestimmter Grösse. Absteckung eines zur Stückvermessung nach der Parallelmethode dienenden Netzes von Aufnahmelinien	372
§ 45.	Zentrieren von Richtungen und Winkeln	380
Kapitel XI. Trigonometr. Punktbestimmung („Triangulierung“)		389
§ 46.	Zweck, Wesen und Einteilung der trigonometr. Punktbestimmung	389
§ 47.	Auswahl der Dreieckspunkte I. Ordnung auf dem Gelände, Versicherung (Vermarkung), Signalbau. Winkelmessung	392
§ 48.	Basis- (Grundlinien-) Messung. Basisnetze	394
§ 49.	Berechnung der Längen der Dreiecksseiten	400
§ 50.	Berechnung rechtwinklig-sphärischer (Soldnerscher) Koordinaten für die Dreieckspunkte	403
§ 51.	Berechnung sphärischer Polar- aus rechtwinklig-sphärischen Koordinaten	407
§ 52.	Geographische Koordinaten	409
§ 53.	Bestimmung geographischer Koordinaten aus rechtwinklig-sphärischen (geodätische Übertragung)	414
§ 54.	Einschaltung eines Dreiecksnetzes zweiter in dasjenige erster Ordnung	417
§ 55.	Umwandlung der sphärisch. in ebene Koordinaten. Kartenprojektion	418
§ 56.	Die Beziehungen zwischen ebenen rechtwinkligen und Polarkoordinaten und die Berechnung von Kleinpunkts- und Bogenschnittkoordinaten	435
§ 57.	Verlegung von Dreieckspunkten (exzentrische Aufsteckung)	441
§ 58.	Grundaufgabe: Berechnung der Koordinaten eines Neupunkts aus einem Dreieck auf Grund von Winkelmessung in den Festpunkten. „Vorwärtseinschnitt“	446
§ 59.	„Rückwärtseinschnitt“. (Snelliussche, oder Pothenotsche Vierecksaufgabe)	449
§ 60.	Aufgabe der zwei unzugänglichen Punkte. (Hansensche Aufgabe)	455
§ 61.	Der zweifach gegenseitige Rückwärtseinschnitt	464
§ 62.	Kleintriangulierung mit Überbestimmung. Einleitung	465
§ 63.	Vermarkung der trigonometrischen Festpunkte. Spätere Prüfung ihres Standortes	468
	a) Punkteinschaltung aus Winkelbeobachtungen.	
§ 64.	Übereinstimmende Berechnung aus zwei nebeneinander liegenden Dreiecken durch stufenweise Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen	472
§ 65.	Übereinstimmende Berechnung aus beliebig vielen Dreiecken (nach Oberst Tulla). Auswahl der wahrscheinlichsten Lage des Neupunktes in einer fehlerzeigenden Figur als Schwerpunkt der Einzelschnittpunkte	477
§ 66.	Rückwärtseinschnitt mit graphischer Koordinatenausgleichung. Auswahl des wahrscheinlichsten Punktes P in der fehlerzeigenden Figur unter direkter Benützung der Bestimmungslinien	483
§ 67.	Rückwärtseinschnitt mit rechnerischer Ausgleichung der Beobachtungswidersprüche	494
§ 68.	Vorwärtseinschnitt mit rechnerischer Ausgleichung der Beobachtungswidersprüche	506
§ 69.	Vereinigtes Vor- und Rückwärtseinschneiden mit rechnerischer Ausgleichung der Beobachtungswidersprüche	511
	b) Punkteinschaltung aus Richtungsbeobachtungen.	
§ 70.	Vorwärtseinschnitt mit graphischer Ausgleichung der Zielstrahlen	512
§ 71.	Vereinigtes Vor- und Rückwärtseinschneiden mit graphischer Ausgleichung der Zielstrahlen	516

	Seite
§ 72. Vorwärtseinschnitt mit rechnerischer Ausgleichung der Beobachtungswidersprüche	525
§ 73. Rückwärtseinschnitt mit rechnerischer Ausgleichung der Beobachtungswidersprüche	526
§ 74. Vereinigtes Vor- und Rückwärtseinschneiden mit rechnerischer Ausgleichung der Beobachtungswidersprüche	536
§ 75. Einschaltung eines Punktes als „Folgepunkt“ zu einem vor- gänglich bestimmten „Leitpunkte“	545
Netzeinschaltung.	
§ 76. Zweck der Netzeinschaltung	550
§ 77. Ausgleichung der Messungsergebnisse bei Netzeinschaltungen niederer Ordnung	551
§ 78. Wiederbestimmung von auf dem Gelände verloren gegangenen Dreieckspunkten	560
§ 79. Fehlergrenzen für trigonometrische Punktbestimmung III. und IV. Ordnung	563
Kapitel XII. Polygonometrische Punktbestimmung („Poly- gonisierung“, „Stationierung“)	564
§ 80. Begriffsbestimmung und Zweck	564
§ 81. Polygonometrische Koordinatenberechnung. Abschlussgleichungen und Sätze vom geschlossenen Vieleck	565
§ 82. Vermarkung der Polygonpunkte. Messung. Zugsanlage	569
§ 83. Ausgleichung der bei der Koordinatenberechnung eines beider- seits an Festpunkten angeschlossenen Polygonzugs auf- tretenden Messungswidersprüche	576
§ 84. Zugsanschluss an einen unzugänglichen Punkt	601
§ 85. Zugsanschluss an zwei unzugänglichen Endpunkten: „Zugs- einhängung“	606
§ 86. Zugsnetze	608
§ 87. Berechnung fehlender Stücke in Vielecken	616
§ 88. Aufsuchen grober Messungsfehler in Polygonen	624
§ 89. Wiederbestimmung von auf dem Gelände verloren gegangenen Polygonpunkten	628
§ 90. Fehlerquellen. Fehlerfortpflanzung. Fehlergrenzen	629
Kapitel XIII. Koordinatenumformung (Transformation)	635
§ 91. Formelableitung	635
§ 92. Praktische Anwendung. Ausgleichung von Widersprüchen. Rechenproben. Beispiel	636
Abschnitt IV. Linienabsteckung	642
Kapitel XIV. Absteckung von Geraden und Kurven	642
§ 93. Absteckung von Geraden mit vorgeschriebener Richtung und Lage (Parallelen und Senkrechte zu Koordinatenachsen etc.)	644
§ 94. Absteckung im Fall unmöglicher direkter Zielung (Tunnel- achsen, Waldabteilungsgrenzen etc.)	646
§ 95. Einschneiden von Schnurgerüsten	648
§ 96. Berechnung der Elemente zur Absteckung der Bogenhauptpunkte	653
§ 97. Absteckung der Bogenkleinpunkte	669
§ 98. Flüchtige Bogenabsteckung	675
§ 99. Korbbögen	680
§ 100. Übergangskurven	687
§ 101. Ausweichungen (Weichen)	692

Einleitung.

Die Vermessungskunde (Geodäsie) hat die Aufgabe, die zur bildlichen oder zahlenmässigen Darstellung der Form und Begrenzung, sowie zur Ermittlung der Lage und Grösse bestimmter Gebiete (von Grundstücken, Gemarkungen, Ländern, Erdteilen) erforderlichen Messungen vorzunehmen und weiter zu verarbeiten. Das Eigentumsrecht am Grund und Boden, die Umlage der Grundsteuer, die Projektierung von Bauwerken, die Bewirtschaftung von Grundstücken, verschiedenerlei Massnahmen für den Verkehr u. s. w. stützen sich auf die Ergebnisse jener Messungen. Durch Übertragung der Lage und Höhe von Bauwerken aus dem Projekt auf das Gelände, durch Ermittlung der Ausdehnung geleisteter Bauarbeiten zum Zweck der Kostenberechnung stellt sich die Vermessungskunde in den Dienst der Bautechnik; durch passende Neueinteilung der Grundstücke zum Zweck der Ermöglichung baulicher oder besserer landwirtschaftlicher Ausnützung direkt in denjenigen der Volkswirtschaft.

Aufgabe der Vermessungskunde.

Sehen wir zunächst ab von den natürlichen Unebenheiten der Erdoberfläche, den Bergen und Tälern, und denken uns das aufzunehmende und darzustellende Gebiet als begrenzten Teil einer horizontalen (zur Meeresoberfläche konzentrischen) Fläche, so erkennen wir, dass dessen getreue Wiedergabe auf einem ebenen Plan unmöglich ist, weil diese Fläche (näherungsweise eine Kugel) sich nicht in die Ebene abwickeln lässt. Wir sind daher genötigt, die Darstellung entweder auf einer der Erdoberfläche ähnlichen Fläche zu bewirken, oder die Verzerrungen in Kauf zu nehmen, welche sich als naturnotwendige Folge der Abbildung auf die Ebene ergeben. Diese Verzerrungen werden übrigens um so eher zurücktreten, je kleiner das darzustellende Gebiet im Vergleich zur ganzen Erdoberfläche ist, je weniger auf dessen Ausdehnung die Kugelform der Erde also abweicht von der Berührungsebene, dem Berührungszylinder oder dem Berührungskegel, welche man als abwickelbare Bildflächen in der betreffenden Stelle an die Erde legt. Dabei beträgt, wie wir in § 55 erkennen werden, die räumliche Aus-

Bildfläche für die Darstellung von Teilen der Erdoberfläche.

dehnung des auf abwickelbarer Fläche darstellbaren Gebiets immerhin noch einige hundert Quadratkilometer, wenn man Projektions-Verzerrungen in den Strecken-, Winkel- und Flächengrößen bis zum Betrag von $\frac{1}{10}$ der bei gewöhnlichen Messungen unvermeidlichen Beobachtungsfehler noch zulässt.

An Stelle der schwerfälligen Darstellung begrenzter Teile der Erde auf einer der Erdgestalt ähnlichen Fläche (Kugel u. s. w.) beschränken wir uns daher zunächst auf die für den ausübenden Techniker wichtigste Darstellung auf abwickelbarer Fläche, die „Niedere Geodäsie“.

Wir reduzieren damit den notwendigen mathematischen Hilfsapparat auf die Gebiete der ebenen Geometrie und Trigonometrie, scheiden aber gleichzeitig diejenigen geodätischen Aufgaben aus dem Kreis unserer Betrachtungen vorerst aus, welche vermöge bedeutender räumlicher Ausdehnung des Vermessungsgebiets, oder höherer verlangter Genauigkeit eine solche Beschränkung nicht ertragen und der „Höheren Geodäsie“ angehören.

Unsere bisherige Betrachtung gründete sich auf die Annahme, das aufzunehmende Gebiet sei ein Teil der Meeres- oder einer ihr konzentrischen Fläche. Wir müssen diese Annahme jetzt verlassen, weil sie kaum irgendwo zutrifft. Die Unebenheiten der Erdoberfläche mögen wohl im Vergleich zur Gesamtausdehnung der Erde zurücktreten; für das von uns aufzunehmende, (nach dem vorhergehenden) beschränkte Gebiet spielen sie eine sehr bedeutende Rolle; ihre Darstellung bildet geradezu einen erheblichen Teil unserer Aufgabe.

Damit stellt sich aber die Schwierigkeit der ebenen Abbildung einer auf nicht abwickelbarer Fläche gelegenen Figur, der wir durch Zurückstellung eines Teils unserer Aufgabe vorerst entronnen sind, in erhöhtem Masse wieder ein. Die in jahrtausendelanger Arbeit der Naturkräfte geschaffene Gestalt der Erdoberfläche ist ebenso wenig abwickelbar, als die Kugelfläche, ja sie ist von noch viel komplizierterer Form, als die letztere.

Es bleibt uns — wollen wir uns nicht der, nach Herstellung und Benützung schwerfälligen verkleinerten Kopie, des Reliefs, bedienen — nichts übrig, als auch hier wieder zur Projektion unsere Zuflucht zu nehmen, und unsere Darstellung in eine Horizontal- und eine Vertikalprojektion zu zerlegen.

Damit zerfällt unsere niedere Geodäsie in zwei Hauptabschnitte, nämlich:

- I. „Horizontalmessungen“,
- II. „Vertikalmessungen“.

Einteilung:
Niedere Geo-
däsie.
Höhere Geo-
däsie.

Gelände-
uneben-
heiten.

Horizontal-
messungen.
Vertikal-
messungen.

Erster Teil.

Horizontalmessungen.

Abschnitt I.

Grundaufgaben der Vermessungskunde.

(Abstecken von Punkten und Geraden, Messen von Strecken und Winkeln mit Benützung einfacher Instrumente.)

Einleitung: Wir haben im vorhergehenden uns genötigt gesehen, an Stelle der Wiedergabe der wahren Gestalt von Teilen der Erdoberfläche diejenige ihrer horizontalen und vertikalen Projektion treten zu lassen. Nicht für alle vermessungstechnischen Aufgaben ist aber die Darstellung gleichzeitig in beiden Projektionen notwendig. Vielmehr genügt für viele Zwecke die Horizontalprojektion allein. Für die bauliche, oder landwirtschaftliche Ausnützbarkeit und daher auch für den Verkaufs- und Bestimmungswert eines Grundstücks kommt lediglich dessen **horizontale Erstreckung**, d. h. die Grösse der Horizontalprojektion in Betracht, nach welcher die Grösse der zu schaffenden Wohnräume, die Entfernung der Gebäude, der vertikal wachsenden Halme und Stämme etc. sich ergibt.

Horizontalprojektion für viele Zwecke allein ausreichend.

Wollte man umgekehrt die tatsächliche, geneigte Fläche zugrunde legen, so wäre die im öffentlichen Verkehr wichtige Grundstücksgrösse fortwährenden und willkürlichen Schwankungen unterworfen. Der Verkäufer eines Grundstücks könnte dessen Oberfläche durch Erdarbeiten (Gräben, Dämme etc.) beliebig vergrössern. Nur die Darstellung der Horizontalprojektion schafft ferner die Möglichkeit, auf Grund geodätischer Aufnahmen die Richtung und Länge der Horizontalprojektion unbegangener, ja unzugänglicher Strecken (Waldabteilungsgrenzen, Tunnelachsen etc.) zum voraus und genau zu berechnen und die frühere Lage etwa verloren gegangener Grundstücksgrenzen trotz etwa vor sich gegangenen Geländeumbaus mit Sicherheit wieder anzugeben. Gegen diese zahl-

reichen und wichtigen Benützungsfälle der Horizontalprojektion treten diejenigen zurück, bei denen die wirkliche (geneigte oder krumme) Flächenausdehnung gesucht und zu ermitteln ist (Ausmessung von Pflaster- und anderen Bauarbeiten; Ausnützung von Grundstücken zur Rasenbleiche; Wegkilometrierung etc.). —

Sprachliche
Ungenauig-
keiten.

Wir werden daher im gegenwärtigen Abschnitt, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist, uns die Abbildung der Horizontalprojektion zur Aufgabe stellen und unter einem „Punkt“ bzw. einer „Geraden“ zumeist nicht solche im mathematischen Sinn, sondern diejenigen geometrischen Gebilde verstehen, die sich horizontal als Punkt bzw. als Gerade projizieren (Punkt, vertikale Gerade; Gerade, einfach gekrümmte Linie in vertikaler Ebene, vertikale Ebene). Ebenso werden wir die Horizontalprojektion einer Strecke AB kurz als Strecke AB, diejenige eines Winkels ABC kurz als den Winkel ABC bezeichnen und in allen Fällen nur die ersteren zu ermitteln suchen.

Kapitel I.

Hilfsmittel zum Abstecken (Sichtbarmachen) von Punkten und Geraden, sowie zum Messen von Strecken.

§ 1. Hilfsmittel zum Abstecken (Sichtbarmachen) von Punkten und Geraden.

a) **Stäbe** (Baken, Piquets, Jalons) aus Tannenholz oder Mannesmannrohr dienen zur Sichtbarmachung, zum „Aufstecken“ von Punkten. Sie haben zylindrische Form,*) kreisrunden Querschnitt und 2 bis 4 cm Stärke. Ihre Länge beträgt 1 bis 3 m (je länger um so eher sichtbar auch über Terrainwellen hinweg, aber um so schwieriger in den Boden einzustecken und um so unbequemer bei windigem Wetter). Unten sind sie mit eisernen bzw. stählernen Schuhen versehen, die in gehärteten Spitzen oder (zum Einstecken in Pflasterfugen) in Schneiden endigen. Um ihre Sichtbarkeit auf grössere Entfernungen zu erhöhen sind die Stäbe mit Ölfarbe, meist rot und weiss abwechselnd von 0,5 m zu 0,5 m, angestrichen. Zu kleine oder zu grosse Intervalle (0,1 m bzw. 1,0 m) schädigen die Sichtbarkeit auf grössere Entfernung. Zweckmässigerweise tragen die Stäbe, zur gelegentlichen Verwendung als Massstab, Dezimeterteilung.

*) Nach oben verjüngte Stäbe lassen sich, zumal wenn der stählerne Schuh teilweise mit Blei ausgegossen ist, leichter in den Boden einstecken. Sie sind aber im Hinblick auf die Genauigkeit des Einweisens von Geraden weniger zweckmässig.

Dem Krummwerden des Holzes kann durch Zusammenfügen mehrerer der Länge nach gespaltener bzw. gesägter Stücke, wie auch durch passende Aufbewahrung (Aufhängen oder Auflegen auf satter Unterlage) vorgebeugt werden.

Bei weniger ausgedehnten, oder weniger wichtigen Arbeiten verwendet man wohl auch gewöhnliche gespaltene oder gesägte, von oben herab eingeschlitzte Stäbe, Weinbergpfähle etc., in die, zwecks besserer Sichtbarkeit, symmetrisch nach beiden Seiten ein Stück Papier eingezwängt wird.

Zum Verstreben eines Stabs, der auf einem Markstein etc. direkt aufgestellt werden soll, sind **eiserne Doppelringe** zweckmässig,

Fig. 1.

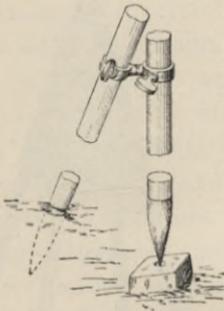
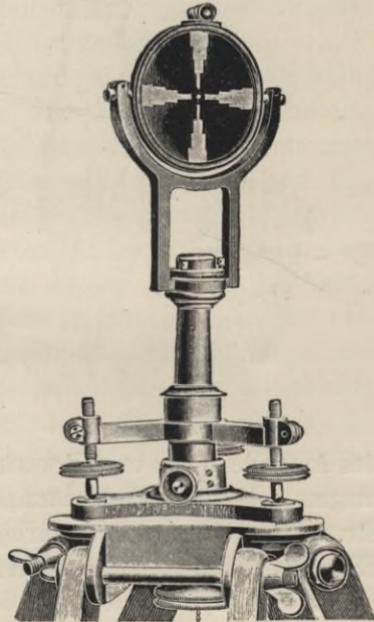


Fig. 2.



deren lichte Weite dem Stabdurchmesser entspricht und von denen der eine, am schief in den Boden zu steckenden Strebestab befestigte, sich um eine in der Ebene des zweiten liegende, an letzterem befestigte Achse drehen lässt (Fig. 1).

Zur Aufsteckung von Punkten auf asphaltierten oder chaussierten Strassen, Trottoirs etc. verwendet man leichte, dreibeinige Stativchen. Deren horizontale Platte ist entweder zur Aufnahme des Stabs zylindrisch durchbohrt, oder durch einen vertikalen zylindrischen Metallring ersetzt, welcher nötigenfalls mittels Schrauben oder Keils, den auf den Punkt senkrecht gestellten Stab festhält.

b) Handelt es sich um grösstmögliche Zielgenauigkeit (Markscheiderarbeiten, Stadtvermessungen etc.), so treten an Stelle der Stäbe **Signalscheibchen**, die mittels eines Fussgestells, ähnlich demjenigen der Theodoliten (s. § 38), auf Spreizen oder Stativen aufgestellt werden (s. Fig. 2).

c) Bei Arbeiten unter Tag werden die unter (b) aufgeführten, aus durchscheinendem Material hergestellten Signalscheibchen von hinten beleuchtet, oder man verwendet zu **Lämpchen** ausgestaltete Senkel (s. Fig. 3), um Zielpunkte sichtbar zu machen.

Bei längeren Zielungen versagen die bisher vorgeführten Signalisiervorrichtungen. Für Entfernungen von $\frac{1}{2}$ bis 5 km verwendet man daher

d) 7 bis 10 cm starke, gerade **Stangen** von 3 bis 5 m Höhe, die man senkrecht im Boden befestigt und entweder mit Kalkmilch anstreicht, oder mit weissem Papier umwickelt. Zur Erleichterung

Fig. 3.

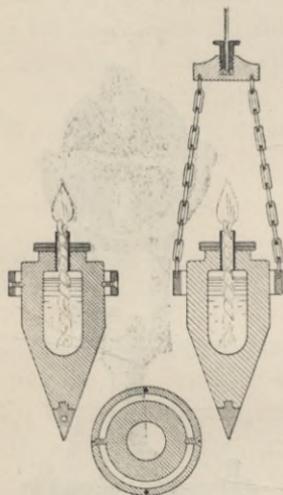
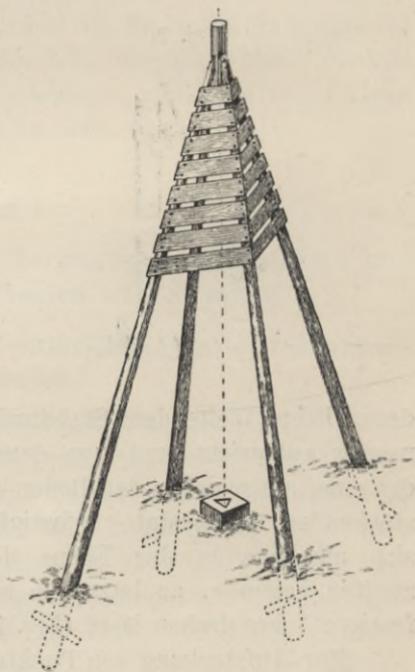


Fig. 4.



des Auffindens und um Verwechslungen mit Telegraphenstangen etc. zu vermeiden, werden farbige Flaggen, Kreuze, angestrichene ballonförmige Körbe etc. an der Spitze angebracht. In Waldgebieten ist man zuweilen genötigt, diese Stangen mit den Gipfeln starker Bäume zu verbinden.

Reicht die Sichtbarkeit der Stangen wegen zu grosser Entfernung nicht aus, so treten an deren Stelle

e) **Holzpyramiden**, welche aus vier Streben konstruiert und von oben herab verschalt sind (s. Fig. 4). (Über die schädliche Wirkung der verschieden starken Beleuchtung der einzelnen Seitenflächen (Phasen) s. § 42.) Sie erleichtern nicht nur das Aufsuchen und ermöglichen eine Steigerung der Zielgenauigkeit durch Übergang von der breiteren unteren zur schmäleren oberen Sehfläche, sondern sie gestatten auch die zentrische Beobachtung unter der

Pyramide selbst nach anderen Punkten, wenn sich der Durchsicht keine Hindernisse entgegenstellen. Befindet sich der Beobachtungspunkt aber im Wald, oder werden gewünschte Zielungen nach ihm durch Wälder, Bergrücken etc. gehindert, so kann man genötigt sein

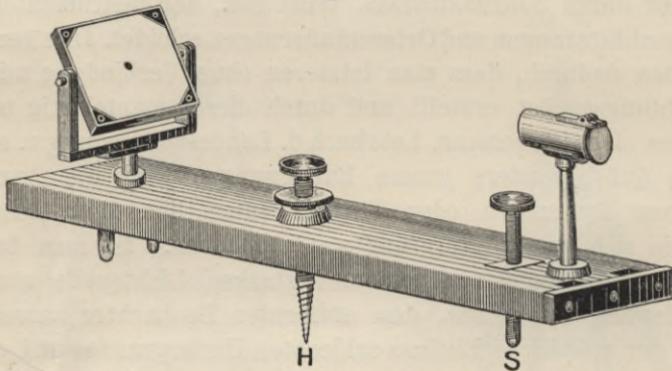
f) **Beobachtungsgerüste** oder Aussichtstürme zu erstellen. Auf die Konstruktion solcher Bauwerke soll hier nicht eingegangen werden. Nur soviel sei gesagt, dass möglichste Unveränderlichkeit der Lage während der Beobachtungsperiode unbedingt Erfordernis ist. Handelt es sich daher, wie gewöhnlich, um Bauwerke aus Holz, so muss dafür gesorgt werden, dass durch Bewegungen des Beobachters oder durch Sonnenstrahlen, Wind etc., der Instrumentenstand keine Erschütterungen und Ortsveränderungen erleidet. Dies geschieht am besten dadurch, dass man letzteren ohne Verbindung mit dem Beobachtungsgerüst erstellt und durch dieses mantelartig umgibt. (Weiteres siehe Hegemann, Lehrbuch d. Landesvermessung u. a. a. O.)

g) Auf besonders grosse Entfernungen wird die Anzielung selbst von Pyramiden oder Türmen namentlich dann schwierig, wenn sie sich vom Hintergrund wenig abheben. Ist man dagegen imstande, Strahlen einer genügend starken Lichtquelle von dem anzielenden Punkt aus, dem entfernten Beobachter zuzusenden, so wird der schädliche Einfluss schlechten Hintergrundes und grosser Länge der Zielung in der Hauptsache ausgeschaltet. Bei Nachtbeobachtungen kann hiebei jede künstliche Lichtquelle verwendet werden, nötigenfalls in Verbindung mit einem parabolischen Spiegel, der die Lichtstrahlen in der Richtung gegen den Beobachter zurückwirft.

Bei Tagbeobachtungen benützt man, einem Gedanken des Göttinger Astronomen C. F. Gauss (1777—1855) folgend, das mittels Planspiegels gegen den Beobachter geworfene Sonnenlicht. Da der scheinbare Sonnendurchmesser ca. $\frac{1}{2}^\circ$ beträgt, so reflektiert jeder Punkt des Spiegels einen Lichtkegel von $\frac{1}{2}^\circ$ Öffnung. Jeder Beobachter, der sich innerhalb dieses Lichtkegels in der Entfernung d vom Spiegel befindet (Durchmesser des Kegelgrundkreises $= \frac{d}{2 \rho^\circ} \sim \frac{d}{100}$) erhält also Strahlen desselben zugesandt. Da die Sonne in 24 Stunden (scheinbar) einen Weg von 360° zurücklegt, so dauert die Bestrahlung eines jeden Punktes bei feststehendem Spiegel $\frac{24 \cdot 60}{720} \sim 2$ Zeitminuten, nach deren Verlauf der Spiegel zu drehen wäre, wenn der Punkt weiterhin beleuchtet sein soll. Es ist also weder nötig, dass der zu beleuchtende Standpunkt genau in der Achse des Lichtkegels sich befinde (bei 50 km Entfernung wird eine Fläche von ca. 500 m Durchmesser beschienen), noch dass der reflektierende Spiegel, entsprechend dem Gang der Sonne, stetig gedreht wird.

Von den verschiedenen Konstruktionen des Instruments, des „**Heliotrops**“, sei hier nur die einfachste, „**Bertramsche**“ angeführt, welche in der neueren Zeit fast ausschliesslich zur Anwendung kommt (s. Fig. 5). Auf einem rechteckigen Brett von ca. 52 cm auf 10 cm, dessen Mittelpunkt durch eine Schraube H auf dem zu signalisierenden Punkt festgehalten wird, und das um diese Schraube in horizontalem Sinn, und mittels einer Stellschraube S um kleine Beträge, auch in vertikalem Sinn, gedreht (gekippt) werden kann, wird einerseits ein mit kleinem Loch versehener Spiegel, anderer-

Fig. 5.



seits ein Röhrchen aufgesteckt, über dessen, dem Spiegel abgewandte, durch einen Klappdeckel verschliessbare Öffnung, zwei sich senkrecht kreuzende Fäden gespannt sind. Das kleine Loch im Spiegel bildet mit dem Kreuzungspunkt der beiden Fäden eine Ziel-(Diopter)-vorrichtung, welche durch Drehen um die Halteschraube H, bzw. Kippen mittels der Stellschraube S in die Richtung nach dem fernen Beobachter (Theodolit) gebracht werden kann. Theodolitstandpunkt einer-, Fadenkreuzpunkt, Halteschraube und Loch im Spiegel des Heliotrops andererseits befinden sich dann in einer Geraden. (Liegt der Standpunkt des Beobachters zu fern, um vom Heliotropenstand aus direkt unterschieden werden zu können, so sendet man entweder vom Theodolit aus mittels eines Spiegels reflektierte Sonnenstrahlen dem Heliotropisten zu, oder man berechnet aus der ungefähr zu ermittelnden geographischen Lage und Höhe beider Punkte den Richtungsunterschied ihrer Verbindungslinie gegen eine bekannte, sichtbare Richtung und deren Neigungswinkel gegen die Horizontale, und setzt beide mittels entsprechender Hilfsinstrumente im Heliotropenstand ab.)

Nun wird der Spiegel unter Benützung zweier entsprechender, in horizontalem und vertikalem Sinn wirkender Drehachsen in die-

jenige Lage gebracht, welche den von der durchbohrten Stelle des Spiegels herrührenden Schattenpunkt auf den Kreuzungspunkt der Zielfäden bringt. Ob dies der Fall ist, erkennt man leicht, wenn man die Röhrenöffnung, welche die Fäden trägt, mit einem hellen Gegenstand (Klappdeckel, Papierstück etc.) verschliesst. In demselben Augenblick sind aber die reflektierten Sonnenstrahlen gegen den Beobachter gerichtet. Wegen der wandernden Sonne braucht man dann nur etwa von Minute zu Minute den reflektierenden Spiegel so zu drehen, dass der, von dem Loch im Spiegel herrührende kleine Schattenpunkt, auf den in seiner Lage unveränderten Fadenkreuzungspunkt fällt. Die Zielröhre selbst hindert das Anzielen des Spiegels durch den fernen Beobachter keineswegs. Man kann sie übrigens zum Umklappen einrichten und so zeitweilig aus der Zielrichtung entfernen.

Fallen die Sonnenstrahlen ungünstig ein (liegen z. B. Beobachter, Heliotrop und Sonne in ungefähr derselben Richtung), oder liegt der Heliotropenstand im Schatten, so bedient man sich eines Hilfsspiegels, den man an passender Stelle so befestigt, dass die von ihm nach dem Heliotropenspiegel geworfenen Sonnenstrahlen jetzt wiederholt und ebenso reflektiert werden können, wie ursprünglich die Sonnenstrahlen selbst. Ist das Heliotropenlicht zu stark, so kann es entweder durch ein vor dem Beobachter aufgestelltes feines Haarsieb, oder durch farbige Gläser abgedämpft werden, durch die man es nach erfolgter Spiegelung beim Heliotrop treten lässt. Mit letzterer Einrichtung und mit zeitweiliger längerer oder kürzerer Bedeckung des Spiegels (Lichtblitze) erhält man gleichzeitig ein Mittel zur optischen Verständigung zwischen dem Beobachter und dem Heliotropisten nach Art des Morsealphabets in der Telegraphie.

§ 2. Geräte zum Messen von Strecken.

Die gewöhnlichen Streckenmessgeräte zerfallen in zwei Hauptgruppen, nämlich in

a) **Endmasse**, deren Enden (Flächen, Kanten, Ringmittelpunkte) um eine bestimmte, der Messung zugrund liegende Länge voneinander entfernt sind, und

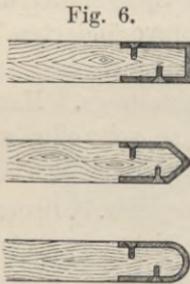
b) **Strichmasse**, bei welchen Strichmarken diese Länge begrenzen. Zu letzteren zählen in gewissem Sinn die Nivellierlatten (s. dieselben). Im übrigen kommen sie hauptsächlich bei feineren Streckenmessungen, „Basismessungen“ (s. § 48) zur Anwendung. Über optische Hilfsmittel zum Streckenmessen vergl. „Tachymetrie“.

Zu den Endmassen gehören:

Messstangen
oder
Messlatten.

a) Die **Messstangen** oder **Messlatten** von 2, 3, 5 m Länge aus astfreiem, trockenem Fichtenholz*) mit rundem, ovalem, vereinzelt auch rechteckigem Querschnitt und 2—4 cm Stärke. Zum Schutz gegen Bruch werden sie gegen die Mitte um etwa 1 cm stärker.

Zum genaueren Anlegen bei möglichster Unveränderlichkeit der Länge sind die Enden mit eisernen Kappen (Zwingen) versehen,



welche in Ebenen, Kanten (Schneiden) oder Zylinderflächen senkrecht zur Stangenachse oder in Kugelhappen endigen und durch seitlich spiralförmig angeordnete Holzschrauben mit versenkten Köpfen an den Stangen befestigt werden. Fig. 6.



Wichtig ist, dass zwischen der inneren Kappenendfläche und der Stirnfläche des Holzes kein hohler Zwischenraum verbleibt, wegen der andernfalls leicht sich einstellenden Längenveränderung infolge Aufwerfens der Stange beim Messen. Es empfiehlt sich daher,

vor dem erstmaligen Gebrauch nach erfolgter Wegnahme der Befestigungsschrauben den Versuch zu machen, mittels eines schweren Hammers die Zwinge einzutreiben. Gelingt dies, so wird sie zuerst herausgenommen und der Zwischenraum, soweit erforderlich, mit Papierscheibchen ausgelegt.

Fig. 7.



Erfahrungsgemäss nützt sich die Stange am raschesten direkt hinter der Zwinge ab, weil dieser Teil durchs Aufwerfen bei der Messung in abscheuernde Berührung mit Steinkörperchen etc. gerät. Fig. 7. Um dieser Abnützung und dem schliesslichen Bruch entgegenzuwirken, werden neuerdings eiserne Schutzstreifen von 0,5 bis 1 m Länge mit den Zwingen vernietet und an der Stange befestigt, eine Einrichtung, welche sich gut bewährt hat.

*) Über metallene Massstäbe vergl. § 48 „Basismessung“.

Zur Erleichterung des Ablesens und zur Abhaltung schädlicher Nässe versieht man die Messstangen mit einem Ölfarbanstrich, dessen Farbe von Meter zu Meter wechselt. Die Grenzen der einzelnen Dezimeter werden durch farbige Ringe (diejenige der halben Meter doppelt) und überdies noch durch kurze Stiftchen bezeichnet.

Die Verwendung der Stangen beim Messen geschieht immer paarweise; durch etwas verschiedenen Anstrich der beiden Individuen eines Paares erlangt man ein Mittel, sich vor Zählfehlern einigermassen zu schützen (s. § 12).

Zerlegbare oder zusammenklappbare oder Messstangen mit Justiervorrichtung sind nicht zu empfehlen. Erstere sind zwar in gewöhnlichen Fuhrwerken bequem zu transportieren, was bei starrer Normallänge von 5 m nicht zutrifft, letztere lassen sich leicht auf die Solllänge einstellen. Bei beiden geht aber diese Bequemlichkeit, angesichts der heftigen Erschütterung beim jedesmaligen Aufwerfen der Stange, auf Kosten des wichtigsten Erfordernisses, der möglichen Unveränderlichkeit während der Messung.

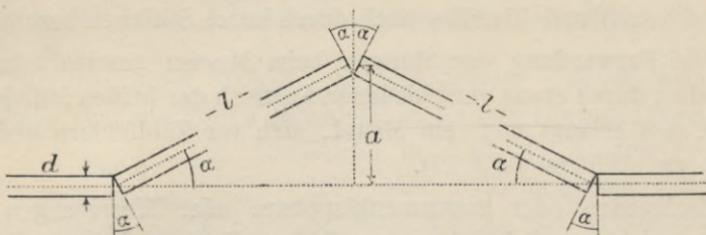
Die ovale Form des Querschnitts hat gegenüber der kreisrunden den Vorzug weniger leichten Rollens, leichterer Verwendbarkeit bei schmutzigem Wetter und geringerer Abnutzung der Dezimeterstriche, weil die Auflage immer auf derselben Seite erfolgt, ferner denjenigen grösserer Sicherheit gegen das Verbiegen und Einschlagen, sie ergibt aber schwerere und unhandlichere Stangen, die weniger leicht als bei der runden Form mit einer Hand zu bedienen sind. Die gewöhnliche Form der Zwingenden ist die ebene. Kleine Abweichungen von der geraden Messungsrichtung in horizontalem, wie in vertikalem Sinn erzeugen bei dieser Form Klaffungen zwischen den Endflächen, welche massverkleinernd, also entgegengesetzt den direkten Folgen der Zickzackmessung wirken.

Es liegt daher der Gedanke nahe, den Einfluss der letzteren durch entsprechende Dicke der Messstangenenden sich aufheben zu lassen. Weicht eine Stangenlage um den Winkel α nach der einen, die folgende um denselben Winkel nach der andern Seite ab, so beträgt die durch Zickzackmessung und Klaffung der Endflächen bedingte Massvergrösserung (vergl. Fig. 8)

$$\begin{aligned} v &= 2l - 2(l \cos \alpha) - 2d \sin \alpha = 2l(1 - \cos \alpha) - 2d \sin \alpha \\ &= 4 \left(l \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{d \sin \alpha}{2} \right) \\ &= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \left(l \sin \frac{\alpha}{2} - d \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Dieser Betrag wird = 0 (abgesehen von dem selbstverständlichen Fall $\alpha = 0$) für $l \sin \frac{\alpha}{2} = d \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$ oder für $d = l \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Fig. 8.



Nimmt man an, das eine Stangenende weiche von der Geraden um den Betrag a ab, so wird $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2l}$ und $d = \frac{a}{2}$. Es müsste also die Dicke des Stangenendes veränderlich und jeweils $= \frac{a}{2}$ sein, wenn die beiden Fehlereinflüsse sich aufheben sollten. Jedenfalls ergibt sich aus dieser Untersuchung, dass die ebene Form des Stangenendes einen Teil der Folgen schlechter Messungsrichtung eliminiert, namentlich insolange die jeweilige Ausbeugung a zwischen 0 und $2d$ bleibt. Sie ist also aus diesem Grund, wie auch wegen der bequemerer Handhabung beim Senkeln, bei gewöhnlichen Messungen der Keilform dann vorzuziehen, wenn dafür gesorgt ist, dass die Zwingenenden genau \perp zur Stangenachse angeordnet sind. Bei Anwendung der Keil-(Schneiden)-enden ist, etwa durch Messung längs gespannter Schnur, für scharfe Einhaltung der geraden Messrichtung Sorge zu tragen.

Veränderungen der Länge von Messstangen werden, abgesehen von direkten Beschädigungen, namentlich erzeugt durch Krümmwerden (Verziehen) der Stangen und durch Einwirkung der Feuchtigkeit. Letztere erzeugt bei 5 m langen Latten Längenänderungen bis zum Betrag von 2 bis 3 mm. Beiden Fehlerquellen wird vorgebeugt durch satte Lagerung in trockenen Räumen, sowie durch Verwendung gut abgelagerten Holzes und dreimaligen Ölfarbanstrich.

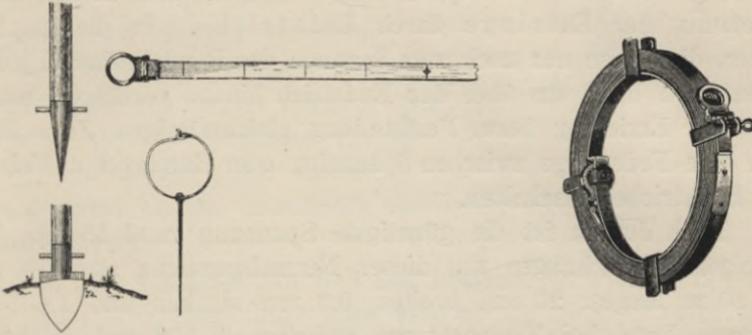
Messband.

β) Das **Messband**, aus Leinen mit Stahldrähten durchzogen, oder aus gehärtetem Stahl, ist in der Regel 10 bis 20 m lang, 1 bis 3 cm breit und etwa $\frac{1}{2}$ mm dick. Ausnahmsweise, bei Verwendung in ebenem Gelände, werden Stahlbänder von erheblich grösserer Länge (in den Vereinigten Staaten von Nordamerika bis zu 100 m Länge bei 6,3 mm Breite) benützt. Eingeschlagene Stiftchen oder eingezätzte Striche bezeichnen die Endpunkte der Dezimeter, die halben und ganzen Meter werden durch aufgenietete

Messingplättchen (um die Ablesung zu erleichtern, von verschiedener Grösse und Form) hervorgehoben. An den beiden Enden sind durch Vermittlung je zweier Gelenke metallene Ringe befestigt, welche über die zugehörigen zylindrischen **Bandstäbe** gestreift werden und

Fig. 9.

Fig. 9a.



deren Mittelpunkte zumeist die Anfangspunkte der Teilung bezeichnen (s. Fig. 9). Die Bandstäbe endigen unten in Spitzen, oder spatenförmigen Schuhen. Stifte oder Scheiben verhindern das Abgleiten des Rings.

Zur Messungseinrichtung gehört noch eine Anzahl 20 bis 40 cm langer eiserner **Nadeln** mit Ösen, welche während des Messens in einem Ring am Gürtel getragen werden und zur jeweiligen Bezeichnung des vorderen Bandendes dienen. Zum Aufbewahren und zum Transport wird das Band über ein Holzkreuz (Haspel), oder eisernen Ring gewickelt und samt den Nadeln und Ringen in einem Kästchen untergebracht (s. Fig. 9a).

Die Länge der Stahlbänder ändert sich bei wechselnder Temperatur, und zwar für 1° C. um das 0,000012fache ihrer Länge. Bei einem Band von 20 m Länge verursacht also eine Temperaturveränderung von 20° C. eine Längendifferenz von

$$20 \times 20000 \times 0,000012 \text{ mm} = \text{ca. } 5 \text{ mm.}$$

Bei feineren Messungen darf dieser Betrag nicht vernachlässigt werden. Man bringt ihn daher entweder bei der gemessenen Strecke in Rechnung, oder schaltet an einem Bandende eine Berichtigungsvorrichtung zwischen Band und Endring ein, mit der die Bandlänge der jeweiligen Bandtemperatur entsprechend verändert werden kann. Da Änderungen in der Bandtemperatur denjenigen der Lufttemperatur nicht durchweg parallel verlaufen, so bildet die Feststellung der ersteren eine Quelle für Ungenauigkeiten bei feineren (Basis-) Messungen. Sie erfordert bei solchen besondere

Massnahmen und Einrichtungen. Weitere Messungsfehler werden erzeugt durch Veränderung des Anreihpunktes bei mehrmaliger Anlegung des Bandes, z. B. infolge starken Zugs mit den Bandstäben, und durch Veränderung dieses auf das Band ausgeübten Zugs selbst. Der Anlegefehler kann eingeengt werden durch Verwendung von Stäben mit spatentartigen Enden, oder besser durch Ersetzung der Endringe durch Endstriche. In diesem Fall dienen die Ringe nur noch zum Spannen des Bandes, das an jedem Ende um 1 bis 2 dm über den Endstrich hinaus verlängert ist.

Zur Erzielung bzw. Feststellung gleichmässigen Zugs kann man eine Federwage zwischen Spannring oder Handgriff und einem der Endstriche einschalten.

Nach Jordan ist die günstigste Spannung rund 15 kg. Bei geringen Abweichungen von dieser Normalspannung streckte sich ein 20 m langes, 20 mm breites, 0,3 mm starkes und 1,675 kg schweres Band bei Temperaturen zwischen $+15^{\circ}$ und $+18^{\circ}$ C.

für jedes kg $\begin{matrix} \text{positiver} \\ \text{negativer} \end{matrix}$ Spannungsänderung

	+ 0,14 mm bei glatter Auflage	
um:	+ 0,2 mm	}
	- 0,5 mm	
	+ 0,6 mm	}
	- 1,9 mm	

Die Untersuchung der Bandlänge (s. § 3) hat bei Ausübung der Normalspannung zu erfolgen.

Bei Messungen ohne Federwage sind Spannungsunterschiede von etwa ± 2 kg zu befürchten.

Messkette.

γ) Die **Messkette** — eine Kette aus $\frac{1}{2}$ m, früher 1 Fuss langen, durch Ringe oder Metallplättchen verbundenen Metallgliedern, an beiden Enden, wie das Messband, mit Stabringen versehen — ist für genauere Messungen heute nicht mehr im Gebrauch, weil Abnutzung, Dehnen und Verschränken der Ringe, Einschleiben fremder Körper zwischen dieselben schwer kontrollierbare und schwankende Einzelfehler verursachen, die das Messungsergebnis ungünstig beeinflussen. Dagegen hat sie im Vergleich zum Messband den Vorzug leichterer Reparatürfähigkeit.

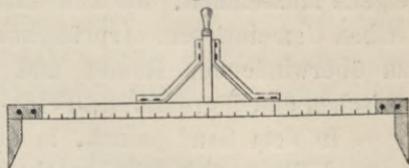
Die die Glieder verbindenden Metallplättchen tragen die Angabe ihrer Entfernung vom Teilungsanfang (Mitte des hinteren Endrings).

Nur für oberflächliche Längenbestimmungen und in dem Falle verwendbar, dass nicht die Horizontalprojektion einer Strecke, son-

dem, ohne Rücksicht auf die Geländeform, letztere selbst gesucht ist (Strassenkilometrierung etc.), sind ferner

δ) Die **Drehlatte**, oder der **Feldzirkel** (Fig. 10), eine geteilte Latte von 3 m (früher 10') Länge, in der Mitte mit einem Handgriff, an beiden Enden aber mit senkrecht zu ihrer Längsachse angeordneten Spitzen versehen, die es gestatten, ähnlich der Verwendung des Zirkels auf dem Papier, unter Festhaltung des einen Endes auf dem Boden den Apparat um die betreffende Spitze um 2 R zu drehen (herumzuschleudern).

Fig. 10.



ε) Das **Messrad**, ein Rad von bestimmtem Umfang (1—5 m), das beim Wegführen über eine Strecke um eine in einer Gabel festgehaltene Achse sich dreht, wobei der Radumfang die durchlaufene Strecke abwickelt.

Die Zählung der Radumdrehungen erfolgt mittels eines von der Radachse in Bewegung gesetzten Zählwerkes. Für die Kilometrierung von Strassen- und Eisenbahnstrecken kann man das Rad mit einem Glockenschlag versehen, der nach Durchlaufen der jeweiligen Teilungseinheit automatisch zum Tönen gebracht wird.

§ 3. Längeneinheit. Vergleichungsapparate. Abgekürzte Schreibweise für metrische Massangaben.

Längeneinheiten sind, im Gegensatz zu der durch Teilung einer vollen Umdrehung zu gewinnenden Einheit für die Winkelmessung, die sich jeder an jedem Ort selbst herstellen kann, künstlich, d. h. nicht von der Natur gegeben, sondern durch Vereinbarung zwischen Personen, Gemeinden, Völkern etc. festgesetzt. An dieser Tatsache ändert das ursprünglich vorhanden gewesene Bestreben, die mittlere Grösse einzelner in der Natur auftretender organischer Gebilde (Fuss, Elle, Klafter, Spanne etc.) oder menschlicher Leistungen (Schritt, Wegstunde etc.) als Längeneinheit festzusetzen, nichts. Denn die Verschiedenheit in der Ausdehnung der Einzelindividuen solcher Gegenstände und Leistungen ist zu gross, als dass ein beliebiges von ihnen als Massstab für irgend eine nur einigermaßen wertvolle Sache hätte dienen können.

So blieb zunächst nichts anderes übrig, als dass jedes selbständige Gemeinwesen, sei es für sich allein, sei es in Anlehnung an ein anderes, politisch oder wirtschaftlich mächtigeres, einen Mittelwert des gewählten Naturmasses als für seinen Machtbereich

gültige Längeneinheit erklärte und — häufig durch Einmauern oder Einmeisseln an Kirchen (Notre Dame in Paris, Dom in Freiburg i/B. etc.) — seinen Angehörigen zur Verfügung stellte. Tatsächlich besass derart noch bis gegen Ende des 18. Jahrhunderts fast jedes selbständige deutsche Städtchen, jede freie Reichsstadt ihre eigene Masseinheit. Ja man unterschied sogar in einem und demselben Gemeinwesen, ursprünglich wohl um den bei der Feldmessung zu überwindenden Rainen und Böschungen Rechnung zu tragen, zwischen einem grösseren „Feld“- und einem kleineren „Werk“mass.

In dem Grad jedoch, in dem der Verkehr zwischen entfernteren Völkern sich hob, wuchs das Bedürfnis nach allgemein gültigen und — verständlichen Längenmassen. Für gewisse Zweige der menschlichen Tätigkeit bürgerten sich aus solchem Grund nebenher, ohne Rücksicht auf die heimische Längeneinheit, mit fast internationalem Geltungsbereich die Masse desjenigen Volkes ein, das auf dem betreffenden Gebiet eine führende Rolle übernommen hatte (z. B. englisches Mass im Maschinenbau, etc.).

Aber auch da, wo man sich scheute, die altüberkommene Längeneinheit zugunsten einer verbreiteteren fremden kurzerhand zu verlassen, sah man sich genötigt, das Verhältnis zwischen den heimischen Massen und denjenigen eines politisch oder wirtschaftlich mächtigeren Staatswesens amtlich festzustellen. Dabei konnte man als dauernde Grundlage das eigene Urmass beibehalten, oder auf dessen Beibehaltung verzichten, sich künftig lediglich auf die festgestellte Verhältniszahl und das fremde Urmass stützend.

Der übermächtige politische Einfluss Frankreichs, sein Reichtum und die dadurch ermöglichte Inangriffnahme grosser baulicher und auch geodätischer Aufgaben auf der einen, die Ohnmacht und Zerrissenheit Deutschlands zu Ende des 18. und zu Anfang des 19. Jahrhunderts auf der anderen Seite brachten es mit sich, dass die Massdefinitionen der deutschen Staaten sich durchweg auf französische Masse stützten. So setzt z. B. ein Direktorialbefehl vom 28. Oktober 1773 für Preussen die Länge einer preussischen oder rheinländischen Rute = 12 preuss. Fuss zu 1669,56 Pariser Linien fest.

Die Massordnung für Württemberg vom 30. Nov. 1806 bestimmt unter Abschaffung der verschiedenen, in den hinzugekommenen Teilen des neugeschaffenen Königreichs in Verwendung gewesenen Lokalmasse, dass 1 Fuss durch die bei $+13^{\circ}$ Reaumur zu messende Länge derjenigen alten Masse bestimmt sei, „welche sich bei den Städten Stuttgart und Tübingen befinden“, dabei aber „die in Alt-Württemberg gebräuchlich gewesene Länge von 127 alt Pariser Linien“ beibehalten soll! (Dessen unpraktische Unterteilung bezw.

Zusammenfassung — 1 Fuss = 12 Zoll, 1 Rute = 16 Fuss — wird bei diesem Anlass durch dezimale Teilung ersetzt.) Diese mehrfache, sich widersprechende Definition der Längeneinheit brachte es in der Folge mit sich, dass für alle öffentlichen Messungsarbeiten (z. B. auch für die Grundstücksaufnahme der Landesvermessung, die vom Jahre 1818 bis 1840 dauerte) der „gesetzliche“ Fuss = 127 Pariser Linien, für die Grundlage der Landstriangulierung, die „Basismessung“, dagegen der „Landesvermessungsfuss“ = 126,97 Pariser Linien zur Anwendung kam!

Schon am 8. Mai 1790 hatte die französische Nationalversammlung, um der Vielgestaltigkeit der Massverhältnisse ein Ende zu machen, beschlossen, wegen Aufstellung eines internationalen Masssystems zunächst mit England in Verbindung zu treten. Nach langwierigen Verhandlungen und auf Grund von geodätisch-astronomischen Messungen („Gradmessungen“) wurde am 10. Dezember 1799 die Länge des „Meters“, die dem 10millionsten Teil eines Erdmeridianquadranten entsprechen sollte, als für Frankreich gesetzliche Längeneinheit festgesetzt und der diese Länge bei einer Temperatur von 0° darstellende Platinstab = 443,296 Pariser Linien als „Urmass“ dem Archiv einverleibt.

(Spätere Gradmessungen zeigten, dass die gefundene Längeneinheit nicht ganz genau der oben genannten Bedingung entspricht und dass die Bogenentfernung vom Äquator bis zum Pol ungefähr 10000856 dieser Einheiten misst. Über die Beziehungen zu anderen Massen vergl. Zeitschrift für Vermessungswesen 1890, S. 265 bis 269.)

Erst im Jahr 1870 gelang es jedoch, eine internationale Kommission zu schaffen, deren Beratungen im Jahr 1875 zu einer Meterkonvention führten (vergl. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1877, S. 278), an welche sich nach und nach die meisten Kulturstaaten der Erde anschlossen. (Über die Organisation des Mass- und Gewichtswesens vergl. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1890, S. 506—508.) Jeder dieser Staaten erhielt eine möglichst genaue Kopie des Pariser „Archivmeters“, welche bei einer Temperatur von 0° C. für die innerhalb seines Gebiets auszuführenden Messungen die Längeneinheit darstellt. Unterdessen hatten verschiedene Staaten die neue Längeneinheit bereits eingeführt. (Holland und Belgien z. B. schon im Jahr 1816, während in Frankreich selbst die alten Masse für den öffentlichen Gebrauch bis 1840 zugelassen waren.) Andere Staaten, z. B. Baden und die Schweiz hatten ihre Masseneinheit, den „Fuss“ auf ein einfaches Verhältnis, nämlich $\frac{3}{10}$ m abgerundet. Durch die Mass- und Gewichtsordnung für den Nord-

deutschen Bund vom 17. August 1868 wurde für dessen Gebiet das Metersystem angenommen, um vom 1. Januar 1870 ab dort allgemein angewandt zu werden. Die süddeutschen Staaten folgten nach.

In Württemberg ist z. B. in Folge minist. Verfügung vom 7. September 1871 seit 1. Januar 1872 die Anwendung des Metermasses für alle öffentlichen Messungen obligatorisch. Für die Umrechnung der früheren Masse ins Metersystem wurden die Verhältniszahlen: 1 gesetzlicher Fuss = 0,286490291 m, 1 Landesvermessungsfuss = 0,28642262 m festgesetzt.

Heute haben fast alle Kulturstaaten der Erde das Metermass, wenn nicht obligatorisch, so doch wenigstens fakultativ, eingeführt. Für das Gebiet des Norddeutschen Bundes geschah dies durch die Eichordnung vom 16. Juli 1869 (samt Nachtrag hiezu vom 30. Juni 1870 bzw. 25. März 1878), welche durch Minist.-Verf. vom 14. März 1871 auch für Württemberg Geltung erlangt hat. Sie wurde aufgehoben bzw. abgeändert durch die neue Eichordnung für das Deutsche Reich vom 27. Dezember 1884, besondere Beilage zu Nr. 5 des Reichsgesetzblatts von 1885.

Organisation
zur Verbrei-
tung der
richtigen
Längen-
masse.

Die für das Deutsche Reich gefertigte Kopie des Pariser Archivmeters, das deutsche „Normalmeter“ wird im Staatsarchiv zu Berlin aufbewahrt und stellt bei 0° C. die für Deutschland gesetzliche Längeneinheit vor. Es misst genau 1,00000301 m und dient nur zur Herstellung:

Unmittelbarer Kopien, welche von der Kaiserl. Normal Eichungskommission teils zu wissenschaftlichen Zwecken, teils zur Abgabe an die Aufsichtsbehörden der Eichämter hergestellt werden.

Diese Aufsichtsbehörden geben sowohl an die Eichämter, als auch an Private Hauptnormale und Kontrollnormale aus, die auf Grund der unmittelbaren Kopien angefertigt werden. Ihre Länge muss innerhalb $\frac{1}{20}$ des im öffentlichen Verkehr zugelassenen Fehlers mit derjenigen des Normalmeters übereinstimmen. Die von denselben Behörden ausgegebenen Gebrauchsnormale sind zum Gebrauch der Eichämter bestimmt. Mit ihrer Hilfe werden die vom Publikum den Eichämtern vorgelegten Verkehrsmasse innerhalb der Genauigkeit geeicht, welche der Hälfte des im öffentlichen Verkehr äusserstenfalls geduldeten Fehlers entspricht. Ihr Maximalfehler beträgt, wenn die Gebrauchsnormale zur Vergleichung verwendet wird, von:

Fehler-
grenzen.

	Präzisions- massen	gewöhnlichen Handelsmassen
für 1 m aus Messing oder Bronze	0,04 mm	0,1 mm
„ 1 m „ Holz		0,3 mm
„ 1 Anschlagmeter aus Stahl		0,3 mm
„ 20 m Bandmass bei 20 kg Spannung		1,6 mm

Der Abstand einer Zwischeneinteilungsmarke, bezogen auf das nächstliegende Ende des Gebrauchsnormals, darf gegenüber der Kontrollnormalangabe um nicht mehr abweichen, als bei

	Präzisions- massen	gewöhnlichen Handelsmassen
von 1 m Länge aus Messing oder Bronze	0,03 mm	0,1 mm
„ 1 m „ „ Holz		0,2 mm
„ 1 m „ „ Stahl mit Anschlag		0,2 mm
„ 20 m Bandmass bei 20 kg Spannung		1,0 mm

Der äusserstenfalls noch geduldete Fehler der Verkehrsmasse beträgt für die Gesamtlänge eines 20 m langen Stahlbands, wie einer 5 m langen Messlatte ± 8 mm, für Holzmassstäbe von 1 m Länge, sofern nur in Zentimeter geteilt, und für zusammenlegbare Massstäbe von gleicher Länge ± 2 mm, für hölzerne Werkmassstäbe von 2 m Länge ± 3 mm.

Der hiernach für die Eichung einer 5 m langen Messstange zugelassene Maximalfehler von 4 mm ist für amtliche Messungen zu gross. Deshalb haben deutsche Vermessungsbehörden für Arbeiten innerhalb ihrer Zuständigkeit besondere Massnahmen getroffen, um eine weitergehende Richtigkeit der Lattenlängen etc. zu sichern. Die preussische Katasterverwaltung schreibt in Anweisung X vom 25. Oktober 1881 z. B. vor, dass jeder Landmesser auf Grund von zu erwerbenden Normalmassen seine Gebrauchsmasse selbst richtig zu stellen hat, und zwar dürfen (unter Berücksichtigung der Wärmeausdehnung) die letzteren, (s. auch Zeitschr. f. Vermessungswesen 1884, S. 160—161) nämlich:

Stahlbänder von 20 m Länge	höchst.	Abweichungen zeigen von	$\pm 3,5$ mm
„ „ 10 m	„ „	„ „	$\pm 2,4$ mm
Messlatten „ 5 m	„ „	„ „	$\pm 1,6$ mm
„ „ 3 m	„ „	„ „	$\pm 1,3$ mm
„ „ 2 m	„ „	„ „	$\pm 1,1$ mm

Das württemb. Steuerkollegium, Abteilung für direkte Steuern, verlangt von den Katastergeometern zwar die Verwendung geeichter Messstangen, für solche von 5 m und 3 m Länge aber gleichzeitig die Einhaltung der obigen äusserstenfalls zulässigen Längenabweichungen.

Zum Zweck der Prüfung hat es den Bezirksgeometern geeichte Messbänder von 20 m Länge, also mit einem Maximalfehler von + 4 mm ausgefolgt.

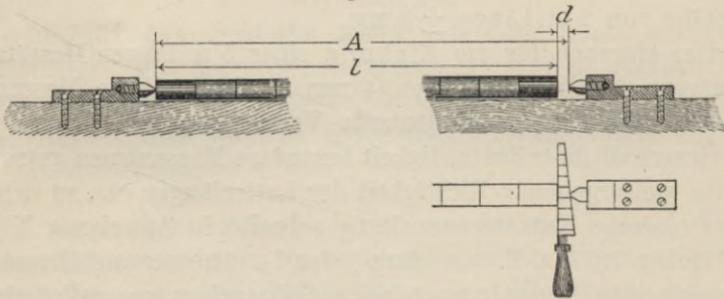
Mass-
vergleich-
ungs-
apparate.

Zur Latten- oder Bandvergleiung können nach dem vorhergehenden Normalmasse erworben werden, deren Länge innerhalb der angegebenen Fehlergrenzen durch die Kaiserl. Normaleichungskommission gewährleistet ist. Solche stählerne Normalmasse mit 1 qcm quadratischen Querschnitt, 1 m Länge und keilförmig abgeschrägten Enden liefert z. B. Mechaniker Bamberg in Berlin. Jeder der Stäbe trägt eine spezielle Bezeichnung, und die Länge eines jeden von ihnen ist als Funktion der Temperatur t durch eine Gleichung ausgedrückt. Für die Länge der beiden Normalmasse der württemb. Fachschule für Vermessungswesen gilt die Gleichung:

$$l = 1 \text{ m} - 0,01 \text{ mm} + 0,011 (t - 18) \text{ mm.}$$

Mit solchen Normalmassen lassen sich nun aber Messlatten und Messbänder (erstere schon wegen der durch die Verdickung gegen innen hervorgerufenen Krümmung) nicht ausreichend genau vergleichen. Einen einfachen, für die gewöhnlichen Zwecke genügenden

Fig. 11.

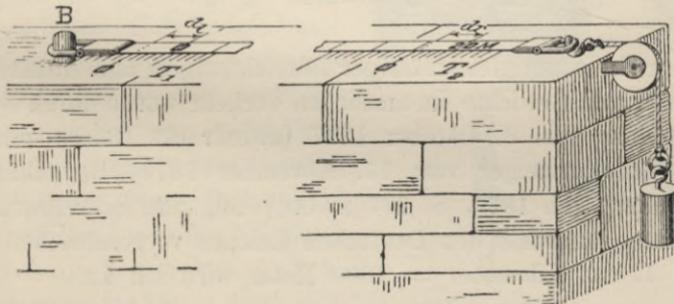


Vergleichungsapparat für Messlatten kann man sich folgendermassen herstellen: Man befestigt zwei eiserne Prismen mit gegeneinander gerichteten stählernen, abgerundeten Spitzen so in einer Mauer, oder auch in einer Bödseite (Diehle) (Fig. 11), dass ihr Abstand A etwas mehr als 5 m beträgt. (Um die zu vergleichende Messlatte bequem zwischen den Spitzen einlegen zu können, kann man einen Rahmschenkel mit der Hochkante in der Vertikalebene der beiden Spitzen, so auf vertikalwirkende Schrauben stellen, dass Durchbiegung vermieden ist und dem Rahmschenkel beliebige Höhe gegeben werden kann.) Wird jetzt die Entfernung A der beiden Spitzen mittels des oben beschriebenen Normalmasses (das, um längenverändernde Wärmeeinflüsse zu vermeiden, nicht mit blosser Hand anzufassen ist) und mittels eines Messkeils (der zwischen die Spitze

des Vergleichsapparates und die Schneide der letzten Lage des Normalmasses eingeschoben wird und die direkte Ablesung von $\frac{1}{10}$ mm gestattet) wiederholt gemessen und schliesslich gemittelt, so braucht man nach entsprechender Regulierung der Höhenlage des Rahmschenkels nur die zu vergleichende Latte mit einem Ende an eine Spitze des Vergleichsapparates anzuschieben und die Entfernung d des anderen von der zweiten Spitze mittels des Messkeils zu ermitteln. Wiederholt man das Verfahren an mehreren Mantellinien der zu vergleichenden Latte, so lässt sich deren Länge $l = A - d$ leicht auf $\frac{1}{10}$ mm Genauigkeit feststellen. (Bei der Prüfung einer 3 oder 4 m langen Latte schiebt man deren eines Ende an eine der Spitzen des Apparats an und vermindert den Abstand nach der zweiten Spitze durch Einschieben eines oder zweier Normalmasse. Der Rest wird schliesslich mittels Messkeils gemessen).

Zur Vergleichung der Stahlmessbänder kann man auf der Deckschicht einer Mauer einen zylindrischen Bolzen B befestigen (s. Fig. 12). Von dessen innerer Mantellinie, oder vom Nullpunkt

Fig. 12.



einer Dopperteilung T_1 aus, setzt man durch zehnmaliges Anlegen des oben beschriebenen Paares von Normalmassen längs abgeschnürter Geraden möglichst genau (mehrfache Wiederholung), unter Berücksichtigung der Masstabtemperatur, die Strecke von 20 m ab. Man erhält damit den Nullpunkt einer (zweiten) auf eingelassenen Metallplättchen nach beiden Seiten aufzutragenden Millimeterteilung T_2 . Das zu vergleichende Band wird jetzt mit einem Endring in den Bolzen B eingehängt. Am anderen Endring wird ein Gewicht, entsprechend dem während der Messung normal ausgeübten Zug, durch eine über eine Rolle geleiteten Faden befestigt.

Zur Bestimmung der Bandlänge misst man nun: 1. den Abstand d_1 des vorigen Messungsanfangs vom entsprechenden Teilungsanfang des Bandes (Ringmittelpunkt oder 0 Strich) und liest

2. den Abstand d_r des hinteren Ringmittelpunktes oder Endstrichs des Bandes auf der hinteren Teilung T_2 ab.

Die Bandlänge ist dann $l = 20,000 \mp d_1 \pm d_r$, je nachdem d_1 und d_r in der Messungsrichtung oder ihr entgegengesetzt liegen. Ist die Entfernung des Messungsanfangs vom Nullpunkt der Teilung T_2 nicht = 20,000 m, sondern = A, so tritt natürlich A an Stelle von 20,000 m und es ist $l = A \mp d_1 \pm d_r$.

Die Länge der Massstäbe und Bänder wird natürlich für diejenige Temperatur ermittelt, bezw. abgeglichen, bei der sie verwendet werden sollen.

Ihre Unterteilung ist gleichfalls zu prüfen, doch haben kleine Ungenauigkeiten darin (falls man daran festhält, nur ganze Latten- oder Bandlängen beim Aneinanderreihen zu verwenden), keine durch Addition sich fortpflanzende Wirkung.

Bei allen geodätischen Massangaben bezeichnet die Anzahl von Stellen nach dem Komma gleichzeitig die damit angestrebte oder verbürgte Genauigkeit.

Eine innerhalb dm Genauigkeit gemessene Strecke von 34 m wird also z. B. geschrieben 34,0 m

„	„	cm	„	„	„	34,00 m
„	„	mm	„	„	„	34,000 m

Zur Erzielung gleichmässiger Bezeichnungen und Abkürzungen der Masse und Gewichte im amtlichen Verkehr wurde durch Bundesratsbeschluss vom 8. Oktober 1877 (abgedruckt Reichs- und Kgl. preuss. Staatsanzeiger vom 17. November 1877, Reg.-Blatt für Württemberg von 1877, S. 267 ff. etc.) folgende Schreibweise zur Anwendung innerhalb des Deutschen Reiches vorgeschrieben:

1. das Kilometer = 1000 Meter wird mit km;
- „ Meter mit m;
- „ Centimeter = $1/100$ Meter mit cm;
- „ Millimeter = $1/1000$ Meter mit mm abgekürzt.
2. Den Buchstaben werden Schlusspunkte nicht beigefügt.
3. Die Buchstaben werden ans Ende der vollständigen Zahlenausdrücke gesetzt (z. B. 25,307 m).
4. Zur Trennung der Einer- von den Dezimalstellen dient das Komma, nicht der Punkt.

Hilfsgeräte und Instrumente zum Streckenmessen.

§ 4. Das Lot oder der Senkel

ist ein an einem Faden aufgehängter schwerer Körper, der dem ersteren die Richtung gegen den Schwerpunkt der Erde gibt. Befindet sich der freischwebende Körper in Ruhe, so liegen Aufhängepunkt,

Abgekürzte Schreibweise der metrischen Massangaben.

Das Lot oder der Senkel.

Befestigungspunkt des Fadens, Lotschwerpunkt und Erdschwerpunkt in einer Geraden (Vertikalen). Um den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Erdoberfläche bequem bestimmen zu können, erhält das Lot eine nach unten spitz zulaufende Form (Birn- oder spitze Kegelform). Die vier erstgenannten Punkte stellen sich selbsttätig in eine Vertikale, sobald der Senkel zur Ruhe kommt, die Senkelspitze gehört ihr aber nur an, wenn sie in der Verlängerung der Verbindungslinie vom Befestigungs- und Lotschwerpunkt liegt. Ob dies zutrifft, wird untersucht, indem man den Faden des in Ruhe befindlichen, freischwebend aufgehängten Senkels zwirnt. Der Durchmesser des von der Senkelspitze etwa beschriebenen Kreises zeigt die doppelte Abweichung der letzteren an.

Weitere, im Interesse pünktlicher Arbeit an den Senkel zu stellende Anforderungen sind: genügende Schwere (ca. 0,25 bis 0,3 kg) und geringe Angriffsfläche für den Wind, geringe Schnurdicke.

Um die Kräfte, welche den schwankenden Senkel zur Ruhe zu bringen bestrebt sind, mit möglichst grossen Hebelarmen auszustatten und die Senkelspitze immer scharf zu erhalten, empfiehlt sich, namentlich zur Aufstellung irgend eines Instruments genau vertikal über einem Bodenpunkt die Verwendung des von Geometer Häussermann konstruierten „Präzisionsenkels“. Ein radförmiger Metallkörper mit schwerem Aussenring (s. Fig. 13) wird durch eine Schraube gehalten, deren Schaft unten in einer feinen Spitze endigt. Dem oberen Ende kann eine an einem Faden aufgehängte Hülse angeschraubt werden. Solange das Lot nicht verwendet wird, dient die Hülse als Schutzhülle für die Spitze.

An Stelle des einfachen wird vielfach der sogen. Doppelsenkel verwendet, dessen Faden durch ein zentrisch durchbohrtes, zylindrisches Metallstück hindurchgeht, an dessen oberem Ende er zweiteilig an Punkten symmetrisch zum Bohrloch befestigt wird (s. Fig. 14).

Der Doppelsenkel hat den Vorzug, dass er an einem Haken bequem aufgehängt, und dass seine Spitze in jeder beliebigen Höhe festgestellt werden kann. Diese Bequemlichkeit lässt sich übrigens

Fig. 13.

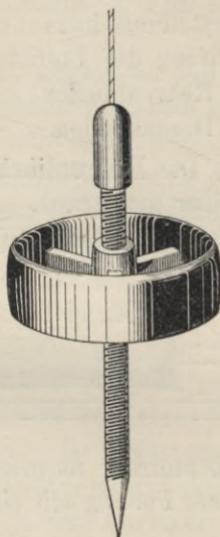
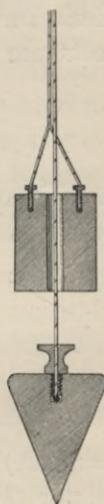


Fig. 14.



auch beim einfachen Senkel durch einen Laufknoten leicht erzielen, ohne dass die Angriffsfläche für den Wind durch ein zweites Metallstück und eine zweite Schnur vermehrt werden müsste. Überdies bewirkt eine etwaige unsymmetrische Befestigung des Gegengewichts beim Doppelsenkel eine Verschwenkung der Bohrung und damit eine, wenn auch leicht zu konstatierende, Parallelverschiebung der beiden Teile der Senkelschnur oberhalb bzw. unterhalb des Gegengewichts.

Aus diesen Gründen ist der einfache dem Doppelsenkel vorzuziehen. Weitere Ablotevorrichtungen, sowie solche für spezielle Zwecke siehe § 82.

Wasserwage.

§ 5. Die Wasserwage (Libelle)

dient zur Herstellung horizontaler Geraden und Ebenen (senkrecht zur Richtung des Lotfadens). Wir unterscheiden zwischen

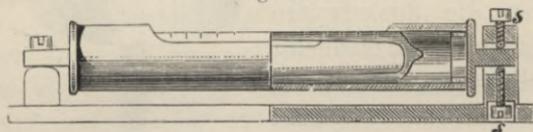
- α) Röhrenlibellen,
- β) Dosenlibellen.

Form des Glaskörpers.

α) Die **Röhrenlibelle** (Fig. 15, 16 und 21)

besteht aus einer gebogenen, oder innen an der zu benützenden Stelle nach einer Drehfläche (Erzeugende = Kreisbogen, Drehachse

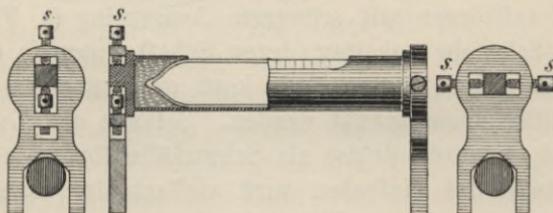
Fig. 15.



Füllung.

= Sehne) tonnenförmig ausgeschliffenen Glasröhre, die nach erfolgter teilweiser Füllung mit einer Flüssigkeit (Weingeist, Schwefel-

Fig. 16.



äther) beiderseits verschlossen (zugeschmolzen) und zum Schutz gegen Beschädigung und direkte Wärmestrahlen in eine, meist metallene, Hülse fest eingebettet wird. Im oberen Teil der Röhre entsteht eine Blase, „Libellenblase“.

Teilung.

Auf der obern (bei Wendelibellen auch auf einer zweiten) Seite erhält die äussere Glasfläche zwei zu einem beliebigen Null-

punkt symmetrische, oder (bei feineren Libellen) von einem Nullpunkt aus nur in einer Richtung bezifferte Teilungen, welche den Zweck haben, die Stellung der bei verschiedenen Temperaturen verschieden grossen Luftblase gegen den Nullpunkt genau erkennen zu lassen. Die Hülse ist auf beiden Stirnflächen mit prismatischen Ansätzen versehen, welche auf vertikalem Ständer befestigt sind, oder welche durch rechteckige Öffnungen von Metallplatten hindurchtreten und durch Verbesserungsschrauben s innerhalb derselben in gewünschter Lage festgehalten werden. Diese Metallplatten erhalten unten ein linealförmiges Verbindungsstück (Tischlibelle, s. Fig. 15) zum Aufsetzen auf einer Ebene, oder sie endigen in y-förmigen Haken, mittels derer die Wasserwage auf zylindrischer Achse aufgesetzt (Stützlibelle, Reiterlibelle, s. Fig. 16), oder aufgehängt wird (Hängelibelle).

Verbindung
der Metall-
hülse mit
dem Lager.

Die Flüssigkeitsoberfläche bildet, abgesehen von ihrer an den Enden infolge Adhäsionseinflusses vorhandenen, aber gleich grossen Aufbiegung, in jeder Lage der Libelle eine horizontale Ebene, welche den Längenschnitt des Libellenkörpers nach einer horizontalen Geraden schneidet. Die Tangente, welche man im Halbierungspunkt (höchsten Punkt) des durch die beiden Luftblasenenden begrenzten Bogens an letzteren gezogen denkt, ist, genauen Kreisschliff vorausgesetzt, parallel dieser Flüssigkeitsoberfläche, also horizontal. Fällt der Halbierungspunkt der Luftblase mit dem Nullpunkt der Libellenteilung zusammen, d. h. „spielt die Libelle ein“, so erhält die in diesem Punkt an den Kreisschliff gedachte Tangente, die „Libellenachse“*) horizontale Lage. Ist dafür gesorgt worden, dass die Verbindungsgerade der beiden Auflagerpunkte parallel der Libellenachse verläuft (Libellenfüsse, je vom Auflagerpunkt bis zum Schnitt mit der Libellenachse, gleich lang) so hat in diesem Augenblick auch die Unterlage, auf der die Libelle ruht, horizontale Richtung.

Grundbegriff
für die
Libellen-
benützung.
Libellen-
achse.

Die Genauigkeit, mit welcher diese horizontale Richtung hergestellt werden kann, ist um so grösser, je kleiner der Neigungswinkel ε ist, um den die Libelle gekippt werden muss, damit sich die Luftblase um einen Teilstrich fortbewege. Um so „empfindlicher“ ist die Wasserwage.

Libellen-
empfindlich-
keit.

Das Mass für die „Empfindlichkeit“ einer Wasserwage ist also der $\frac{1}{\varepsilon}$, um welchen die Libelle geneigt werden muss, damit die Luftblase um einen Teilstrich fortwandere.

*) Bei Libellen mit durchgehender Teilung versteht man unter Libellenachse allgemein die Schlifftangente im Halbierungspunkt des durch die Luftblasenenden jeweils begrenzten Bogens.

Abgesehen von dem oben S. 24 angegebenen Zweck der Libellentheilung, welcher erreicht wird, wenn letztere nur aus gleichen Teilen, gleichviel von welcher Grösse, besteht, dient sie jetzt also auch zur Bezeichnung der Libellenempfindlichkeit. Das Winkelmass ε für letztere setzt daher immer ein bestimmtes Teilungsintervall (meist 1 Pariser Linie = 2,26 mm, neuerdings auch zuweilen 1 Doppelmillimeter) voraus.

Diese Empfindlichkeit hängt in erster Linie ab von dem Halbmesser des der Schlifffläche zugrunde liegenden Kreisbogens. Möge

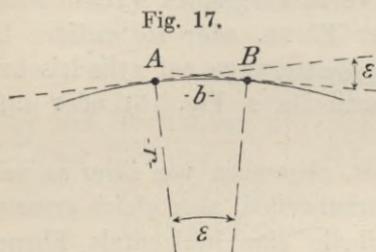


Fig. 17.

bei bestimmter Lage der Libelle der Punkt A der höchste der Libellenschlifffläche sein, so haben beide Luftblasenenden gleiche Entfernungen von A und die Flüssigkeitsoberfläche ist parallel zur Tangente in A, d. h. letztere ist horizontal gerichtet. Neigt man jetzt die Libelle so lange, bis der

um das Teilungsintervall b von A entfernte Punkt B der höchste Punkt der Schlifffläche wird, so trifft dasselbe für B zu, die Tangente in B ist horizontal geworden. Die Libelle hat also eine Neigungsänderung gleich dem Winkel ε beider Tangenten erlitten, welchen auch die beiden nach A und B gezogenen Schliffradien (da sie senkrecht auf den zugehörigen Tangenten stehen) miteinander einschliessen. Man erhält also, wenn r den Schliffradius bezeichnet

$$\text{Empfindlichkeit } \varepsilon'' = \frac{b}{r} \varrho'' = \frac{b}{r} \cdot 206265''.$$

Obige Gleichung sagt: Das Winkelmass für die Libellenempfindlichkeit ist umgekehrt proportional*) dem Schliffradius der inneren Libellenwandung, je grösser der letztere, um so kleiner die Neigungsänderung ε , welche nötig ist, um die Luftblase um einen Teilstrich fortzubewegen. Die feinsten Wasserwagen haben Empfindlichkeiten von 4'' bis 5'' auf 1 Pariser Linie.

Bei ihnen wächst also der Schliffradius auf

$$r = b \frac{\varrho''}{\varepsilon''} = 2,26 \frac{206265}{4} \text{ mm} = \text{rund } 117 \text{ m an,}$$

was bei einer Blasenlänge von 5 cm einer grössten benützten Pfeilhöhe des Schliffs von $\frac{25^2}{234000} \text{ mm} = \frac{1}{370} \text{ mm}$ entspricht. Aber auch eine gewöhnliche Nivellierlibelle mit 20'' Empfindlichkeit besitzt noch einen

*) Die Unbequemlichkeit dieses umgekehrten Verhältnisses: „je kleiner das Winkelmass für die Empfindlichkeit, um so grösser letztere selbst“, hat dazu geführt, zuweilen auch den Schliffradius als Empfindlichkeitsmass zu verwenden.

Schliffradius von $r = 2,26 \frac{206265}{20} \text{ mm} = 23,3 \text{ m}$, also bei ebenfalls 5 cm Luftbasenlänge eine grösste Pfeilhöhe $= \frac{25^2}{46600} \text{ mm} = \frac{1}{75} \text{ mm}$. Hieraus ist ersichtlich, wie genau der Schliff ausgeführt sein muss, d. h. welche Wirkung kleine Unregelmässigkeiten desselben haben. Aus den bisherigen Ausführungen gehen folgende an die Wasserwaage zu stellenden **Anforderungen** hervor:

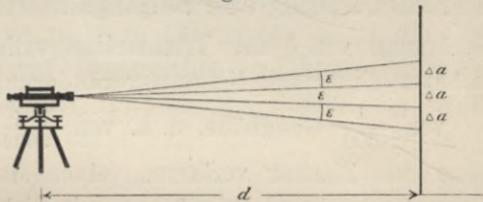
Anforderungen.

1. Die Erzeugende der Schlifffläche soll genau kreisförmig sein.
2. Die Wasserwaage muss eine ihrem Gebrauchszweck entsprechende Empfindlichkeit ε besitzen.
3. Die Libellenachse muss parallel sein zur Lagerfläche (Libellenfüsse gleich lang).

Untersuchung zu 1). Man befestigt die Wasserwaage auf einem Fernrohr, das sich vertikal um kleine Beträge bewegen (kippen) lässt, und liest durch dieses auf einem in der Entfernung d (etwa 50 m) vertikal gestellten Massstab (Nivellierlatte) (siehe Fig. 18) jedesmal ab, wenn die Luftblase durch Kippen des Fernrohrs um ein Libellenintervall verschoben worden ist. Die Ablesungen an dem Massstab müssen sich dann um gleiche Beträge Δa unterscheiden.

Untersuchung zu 1).

Fig. 18.



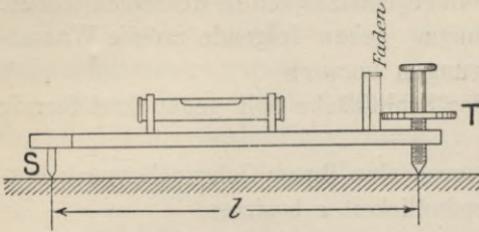
Die Ablesungen an dem Massstab müssen sich dann um gleiche Beträge Δa unterscheiden.

Da Temperaturänderungen Änderungen der Libellenblase erzeugen, ist stets die Blasenmitte mit Hilfe beider Blasenenden zu beobachten. Aus diesem Grund ist es bequemer, umgekehrt den Horizontalfaden des Fernrohrs der Reihe nach auf aufeinanderfolgende cm (oder $\frac{1}{2}$ cm, oder Doppelmillimeter)-Teilpunkte des Massstabs einzustellen und auf der Libellenteilung beide Luftblasenenden jeweils abzulesen. Die Stellungen der hieraus sich ergebenden Luftblasenmitten müssen in diesem Fall um gleiche Libellenstrecken Δl sich unterscheiden. Aus ihnen kann man, wenn gewünscht, die einem Libellenintervall b entsprechende Bewegung Δa an der Latte berechnen. Diese Untersuchung ist über die ganze, von der ein spielenden Luftblase bei wechselnder Temperatur jeweils eingenommene Strecke des Schliffbogens auszudehnen. Ein etwaiger Fehler macht die Libelle unbrauchbar.

Statt die Libelle auf einem Fernrohr zu befestigen, kann man sie zum Zweck schärferer Untersuchung auch auf einem „Legebrett“ auflegen und dessen Neigung gegen die Horizontale unter Be-

obachtung des „Libellenausschlags“ verändern. Das „Legebrett“ (s. Fig. 19) besteht aus einem starren Arm von der Länge l (etwa 400 bis 600 mm), dessen eines Ende mittels zweier Stützen S ,

Fig. 19.



das andere mittels einer, durch sein Muttergewinde durchtretenden, fein geschnittenen Schraube auf fester Unterlage ruht. Die Schraube trägt eine geteilte Trommel T , welche die Ablesung von hundertstel Umdrehungen der Schraube gestattet.

Ist die Ganghöhe der letzteren = g (etwa 0,4 bis 0,6 mm, gemessen durch Abdruck des Schraubengewindes auf Papier und Division des Abstandes zweier beliebiger Striche durch die Zahl der zwischenliegenden Schraubengänge), so entspricht einer vollen Schraubendrehung eine Neigungsänderung von $\alpha'' = \frac{g}{l} \varrho''$. Durch Schätzung von $\frac{1}{5}$ der Trommelintervalle lassen sich bei genügend sicherer Unterlage Neigungsveränderungen

$$\text{von } \frac{1}{500} \text{ Ganghöhe, d. h. von } \frac{g \cdot \varrho''}{500 l} = \frac{0,5 \times 206265''}{500 \cdot 500} = 4'',$$

ohne das Zimmer verlassen, einen Massstab aufhalten, oder ein Fernrohr benützen zu müssen, mit Sicherheit feststellen.

Der Techniker wird sich i. a. der ersten Untersuchungsmethode bedienen.

Unter-
suchung
zu 2).

Die Untersuchung zu 2) ergibt sich als Nebenprodukt der Untersuchung 1: Man bildet das arithmetische Mittel Δa der verschiedenen Ablesungsunterschiede. Als Rechenprobe muss sein, wenn die Luftblase im ganzen um n Teilstriche fortbewegt wurde:

$$\Delta a = \frac{(\text{grösste} - \text{kleinste}) \text{ Lattenablesung}}{n}$$

Nun erhält man:

$$\text{tatsächlich vorhandene Libellenempfindlichkeit } \varepsilon'' = \frac{\Delta a}{d} \varrho'' = \frac{\Delta a}{d} \times 206265''.$$

Die für einen bestimmten Gebrauchszweck nötige Libellenempfindlichkeit ermittelt man beispielsweise wie folgt: Angenommen eine Wasserwaage soll dazu dienen, Zielungen so genau horizontal zu richten (Einwägen), dass der durch ungenaues Einspielen der Luftblase um $\frac{1}{5}$ Skalenteil (noch erkennbare Spieldifferenz) erzeugte Ablesefehler an einer in 50 m Entfernung vertikal aufgestellten Latte höchstens $\frac{1}{2}$ mm betrage. Man erhält dann

$$\frac{\frac{1}{2} \text{ mm}}{50000 \text{ mm}} \varrho'' = \frac{\varepsilon''}{5} \quad \text{und} \quad \varepsilon''_{\text{nötig}} = \frac{2,5 \times 206265''}{50000} = 10''.$$

Ausser dem Schliffradius wirken noch andere Umstände auf die Beweglichkeit der Luftblase und die Genauigkeit der mit der Libelle hergestellten Horizontalen ein. Gleiches Füllmaterial vorausgesetzt, spielt hiebei namentlich die Länge der Luftblase eine Rolle: kurze Blase verursacht träge Bewegung. Versuche haben als zweckmässigste Blasenlänge etwa die halbe Röhrenlänge erwiesen.

Für Feineinwägungen verwendet man		
Röhrenlibellen mit	4" bis 10"	Empfindlichkeit
für gewöhnliche Einwägungen verwendet man		
Röhrenlibellen mit	10" bis 30"	„
für rohe Einwägungen verwendet man		
Röhrenlibellen mit	30" bis 1'	„

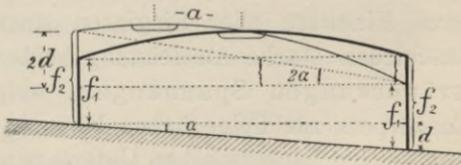
Ist die Empfindlichkeit grösser, als erforderlich, so ist nicht nur der Anschaffungspreis ein hoher, sondern die Luftblase kommt langsamer zur Ruhe, was die Arbeit unnötig erschwert (die praktische Einstellgenauigkeit wächst langsamer, als die Empfindlichkeit). Ist sie zu gering (Schlifffläche zu stark gekrümmt), so ist die verlangte Einstellgenauigkeit nicht zu erreichen, merkbare Abweichungen der Libellenachse von der Horizontalen zeigen sich kaum durch Ausschläge der Luftblase an.

Untersuchung zu 3). Die Flüssigkeitsoberfläche (Luftblase) ist unter allen Umständen horizontal, die im Nullpunkt der Teilung an den Libellenschliff gedachte Tangente, die „Libellenachse“ aber nur dann, wenn bei erfüllter Forderung (1) der durch die Luftblasenenden begrenzte Bogen des Libellenschliffs vom Teilungsnulppunkt halbiert wird, d. h. wenn die Libelle einspielt. Soll in diesem Zustand auch das Lager der Libelle horizontal sein, so muss die Forderung (3) erfüllt sein. Zur Untersuchung

Unter-
suchung
zu 3.

bringt man die Libelle zum Einspielen (Libellenachse horizontal) und setzt sie alsdann um (verwechselt die beiden Auflagerpunkte). Zeigt sich jetzt ein Ausschlag von α Teilstrichen, so beweist er, dass in dieser zweiten Lage die Libellenachse nicht mehr, wie bei der ersten, horizontal, sondern um den Winkel α geneigt ist. Da nun aber, abgesehen von der Vertauschung ihrer Füsse, sich an der Libelle nichts geändert hat, so beweist der Ausschlag weiter die Ungleichheit der beiden Libellenfüsse und eine Divergenz um den Winkel α zwischen der in Lage I horizontal gewesenen Libellen-

Fig. 20.

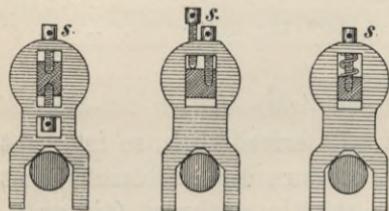


achse und der Libellenunterlage. Ist (s. Fig. 20, wo die stärkere Linie die erste, die schwächere Linie die zweite Lage vorstellt) c die Entfernung der Libellenstützen von einander, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{c} \text{ also } \alpha \sim \frac{d}{c} \text{ und } 2\alpha \sim \frac{2d}{c},$$

d. h.: der etwaige Ausschlag der Luftblase in der zweiten Libellenstellung entspricht der doppelten Ungleichheit der Libellenfüsse. Sie wird

Fig. 21.



mittels der vertikal wirkenden Korrektionsschrauben s (s. Fig. 21) zur Hälfte des Ausschlags weggebracht. (Die andere Hälfte des Ausschlags ward von einer unbeabsichtigten Neigung der Unterlage hervorgerufen und muss an dieser verbessert werden.)

Zur Vermeidung unbeabsichtigter Änderungen in der Länge der Libellenfüsse, namentlich während des Transports, sind die Justiervorrichtungen geodätischer Instrumente mit entgegenwirkenden Zug- oder Druckschrauben s , oder einer Schraube in Verbindung mit gegenwirkender Feder, versehen (s. Fig. 15, 16 und 21).

Einrichtungen zur Reduktion von Fehlerquellen bei feinen Libellen.

Die Genauigkeit der mit der Wasserwage hergestellten Horizontalen hängt, abgesehen von den bisher vorgeführten, noch von verschiedenen anderen Einflüssen ab:

Ist der Glaskörper der Libelle mit dem metallenen Gehäuse durch Einkitten oder Eingipsen starr verbunden, so erzeugt die verschieden starke Ausdehnung beider Materialien bei Temperaturänderungen Spannungen, welche eine Verbiegung des Glaskörpers zur Folge haben können. Damit ändert sich aber die gegenseitige Lage zwischen Unterlage und Libellenachse, und erstere ist trotz einspielender Libelle nicht horizontal. Die feinmech. Werkstätte von Ertel in München fertigt daher Wasserwagen an, bei welchen nur an einer Stelle eine starre Verbindung zwischen Glaskörper und Libellenfassung vorhanden ist, so dass die Längenausdehnung der Metallfassung den Temperaturschwankungen folgen kann, ohne diejenige des Glaskörpers zu beeinflussen.

Auch unvorsichtige Benützung der Justiervorrichtungen bewirkt unter Umständen Materialspannungen, welche denselben Einfluss haben, wie die durch Temperaturänderungen hervorgerufenen.

Dies vermeidet eine von der Firma R. Reiss in Liebenwerda nach den Angaben von Prof. Zwicky in Winterthur konstruierte Libelle, welche einer Änderung der Länge der Libellenfüsse nicht mehr bedarf, sondern den Parallelismus zwischen Libellenachse und Auflagerlinie durch Verschiebung der ersteren herstellen lässt. Zu diesem Zweck ist die Teilung nicht auf dem Glaskörper der Libelle selbst, sondern getrennt von ihm, und parallel zu ihrer Längsrichtung verschiebbar angeordnet. Ist der Träger dieser Teilung ein dem Libellenkörper konzentrischer durchsichtiger Ausschnitt eines Zylindermantels, so erfüllt er die weitere wichtige Aufgabe, den ersteren vor der unvermittelten Einwirkung direkter und einseitiger Wärmestrahlen zu schützen.

Solche Wärmestrahlen erzeugen gleichfalls Verbiegungen des Glaskörpers, die von ganz erheblichem Einfluss sind. Legt man z. B. die Hand auf das eine Ende eines solchen Libellenkörpers, so folgt nach kurzer Zeit die Luftblase dieser Wärmequelle und zwar entgegengesetzt der Wirkung etwaigen Drucks. Bei zwei

Libellen von $\frac{6''}{12''}$ Empfindlichkeit und einem Unterschied von 30° C. zwischen Luft- und Handtemperatur ergab sich z. B. auf diese

Weise eine Verschiebung der Luftblase um $\frac{15}{12}$ Teilstriche gegen die

Wärmequelle hin. Würde man also in diesem Zustand die justierte Wasserwaage zum Einspielen bringen, so würde die (für horizontal gehaltene) Unterlage um $\frac{15}{12} \times \varepsilon$, d. h. rund $2'$ geneigt sein!

Genau denselben Einfluss haben natürlich die Sonnenstrahlen, und in entgegengesetzter Richtung Regentropfen, ein deutlicher Beweis für die Notwendigkeit guter Isolierung der Libellenfassung und der Abhaltung direkter Sonnenstrahlen, oder Regentropfen und Schneeflocken bei genauen Einwägungen.

Kammerlibellen. Eine allzu kurze Luftblase bewegt sich träge und verursacht daher eine geringere Einstellgenauigkeit. Eine allzu lange Luftblase erschwert umgekehrt den Überblick und die Feststellung des genauen Einspielens. Überdies ist der Libellenschliff selten auf seine ganze Ausdehnung völlig fehlerfrei. Es ist daher wünschenswert, dass die Blase eine bestimmte Länge (etwa $\frac{1}{3}$ der Röhrenlänge) beibehält, derart, dass ihre Enden gleichzeitig innerhalb der relativ besten Schliffstellen sich bewegen. Nun bewirken aber gerade bei feinen, empfindlichen Libellen (wegen der sehr geringen Krümmung) Temperaturschwankungen grosse Unterschiede in der Blasenlänge. Um diese auszugleichen, scheidet man

Einseitige
Wärme-
einflüsse.

von dem Hohlraum der Wasserwage durch eine an die obere Leitungsfäche sich anschliessende, nicht ganz herabreichende Zwischenwand eine kleine Kammer ab, welche bestimmt ist, bei zu grosser Blase Luft aus der eigentlichen Libellenröhre zu übernehmen, bei zu kleiner Blase solche an letztere abzugeben. Um diesen Ausgleich zu bewirken, hat man die Wasserwage nach der einen oder anderen Richtung zu neigen, bis die der höchsten Stelle zustrebende Luft, sich in demjenigen Abteil befindet, in dem sie jeweils gebraucht wird.

Chemische
Einflüsse.

Es kommt nicht selten vor, dass Wasserwagen, nachdem sie jahrelang ohne Anstand benützt wurden, einen unregelmässigen Gang der Blase, bald klebende, bald sprungweise Bewegung zeigen, der dauernd auftritt, also nicht von augenblicklichen Wärme- oder Spannungseinflüssen herrühren kann. Es handelt sich hier nach Jordan um Ausscheidungen des Glases, welche punktartig die Schlieffläche belegen. Um sie zu reinigen muss die Röhre an einem ihrer Enden geöffnet werden, was sich aber nur bei feinen Libellen lohnt.

Für gewisse, feinere Arbeiten ist es wünschenswert, die Luftblase nicht bloss in einer einzigen Lage der Libelle, sondern auch in einer zweiten, durch Drehung um ihre Längsachse um einen bestimmten Winkel erzeugten Lage benützen zu können. Solche Libellen heisst man: „Wende- oder Reversionslibellen“.

Wende-
libellen.

Sie müssen natürlich an zwei entsprechenden Stellen in derselben Weise geschliffen sein, welche bisher nur längs einer Mantellinie verlangt wurde. Zu den früher gestellten Anforderungen für jede der beiden Teilungen kommt aber jetzt die weitere hinzu, dass die beiden Libellenachsen (Tangenten an die Schliefflächen in den Null- oder Spielpunkten) einander parallel sein müssen.

Die Untersuchung dieser Forderung siehe bei Behandlung der Nivellierinstrumente.

Die bisher vorgeführte Wasserwage lässt direkt nur die Horizontierung gerader Linien (von Auflagerlinien) zu. Zur Horizontierung einer Ebene bleibt nichts übrig, als zwei in ihr liegende, sich schneidende Geraden durch entsprechendes Versetzen der Libelle wagrecht zu richten. Um Ebenen durch einmaliges Aufsetzen horizontal, oder gerade Linien vertikal zu richten, verwendet man:

Form des
Glaskörpers.

β) Die **Dosenlibelle** (Fig. 22 a und b, 23 und 24).

Sie besteht aus einem mit einer Glasplatte oben verschlossenen zylindrischen Metallgefäss, welches mit einer Flüssigkeit (Weingeist

oder Schwefeläther) nahezu angefüllt ist. Die Füllung erfolgt bei verkehrt gehaltener Wasserwage durch eine Öffnung im Boden des Gefässes, welche mittels einer Schraube mit eingepressten Bleiplättchen verschlossen wird. Teilung und Füllung.

Da bei dieser Konstruktion Verdunstung der Flüssigkeit an den in Fig. 22a mit Pfeilen bezeichneten Stellen zu befürchten ist, so stellt Mollenkopf-Stuttgart neuerdings Dosenlibellen her, bei denen das in die Metallfassung eingebettete Glasgefäss analog der Röhrenlibelle unten zugeschmolzen wird (s. Fig. 22b). Die innere Glasfläche ist oben zur Kugelkappe ausgeschliffen, so dass die Oberfläche des Füllmaterials die Schlißfläche nach einem Kreis schneidet, dessen Ausdehnung mit der Flüssigkeitstemperatur sich ändert. Um die jeweilige Lage dieses Schnittkreises beobachten zu können, sind in die äussere Fläche der Glasplatte einige konzentrische Kreise im gegenseitigen Abstand einer Pariser Linie oder eines Doppelmillimeters eingätzt, oder auf die Schlißfläche gezeichnet.

Ist der Schnittkreis zwischen Flüssigkeitsoberfläche und Libellenschliß konzentrisch diesen Kreisen — „spielt die Wasserwage ein“ — so ist die Berührungsebene an die Schliß-(Kugel)fläche im Mittelpunkt der Kreise, die „Libellenachse“, parallel der Flüssigkeitsoberfläche, d. h. wie diese horizontal. Dasselbe trifft für die Lagerfläche der Wasserwage zu, wenn diese parallel der genannten Berührungsebene ist. Diesen Parallelismus setzen wir als notwendige Anforderung fest.

Zur Untersuchung wird die Wasserwage auf ebenem Lager zum Einspielen gebracht und alsdann ohne Ortsveränderung um ihre Längsachse gedreht. Ein etwaiger Ausschlag erreicht bei einer

Fig. 22 a.

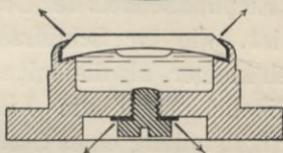
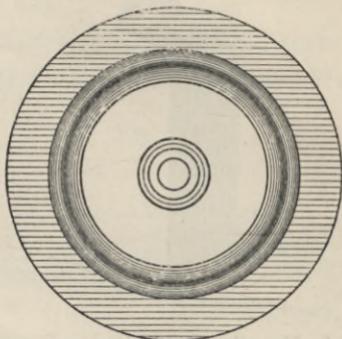
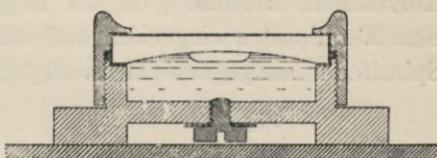
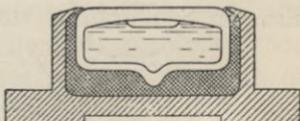


Fig. 22 b.



Anforderung.

Unter-
suchung.

Drehung um 2 R sein Maximum und beweist die Divergenz der Lagerfläche gegenüber der oben genannten Berührungsebene. Verbesserung erfolgt durch Abschleifen der Lagerfläche, falls eine Korrektionsvorrichtung (in der Regel drei Zugschrauben, welche in eine Metallplatte eingreifen und denen eine Blattfeder oder je eine Spiralfeder entgegenwirkt, s. Fig. 24) fehlt.

Fig. 23.

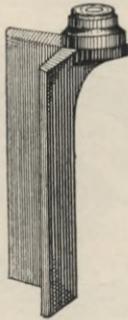
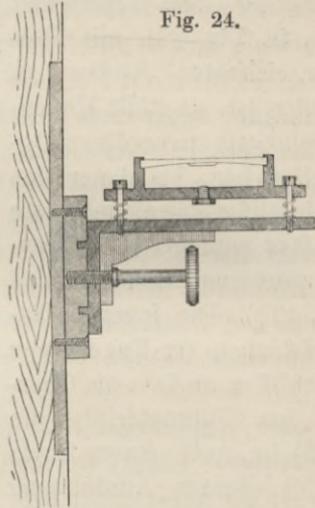


Fig. 24.



Empfindlich-
keit.

Die Empfindlichkeit der Dosenlibelle ist, wie ihr Schliffradius, erheblich kleiner, als diejenige der Röhrenlibelle. Soll die Libelle

zur Vertikalstellung eines Stabs, oder einer Nivellierlatte verwendet werden (s. Fig. 23 und 24) (wobei eine Abweichung von der Senkrechten von $\frac{1}{2}$ dm auf 5 m Länge erst 0,25 mm Ablesungsdifferenz verursacht), so genügt schon eine Empfindlichkeit

$$\varepsilon' = \frac{0,05}{5} \cdot \varrho' = \frac{0,05 \times 3437'}{5} = 34',$$

also ein Schliffradius von

$$r = \frac{b}{\varepsilon'} \cdot \varrho' = \frac{2,26 \times 3437}{34} \text{ mm} = 0,23 \text{ m.}$$

Man verwendet jedoch hier für solche Zwecke Libellen von 5 bis 10 Minuten, für die Horizontierung von Theodoliten solche von etwa 1 Minute Empfindlichkeit.

Empfindlicher als die Dosenlibellen und für die Horizontierung von Ebenen dieselben Vorteile bietend wie sie, sind die sogen. **Kreuzlibellen**, zwei kreuzweis in einer Platte eingelassene Röhrenlibellen, deren jede für sich justierbar ist. Doch ist ihre Verwendung, da das Auge zwei Stellen gleichzeitig beobachten soll, erheblich unbequemer.

§ 6. Lattenreiter, Gradbogen, Hängezeug, Gefällmesser und Messkeil.

Die Libelle dient zur Herstellung horizontaler Richtungen. Die Grösse der Neigung schiefer Richtungen liefert sie unter Be-

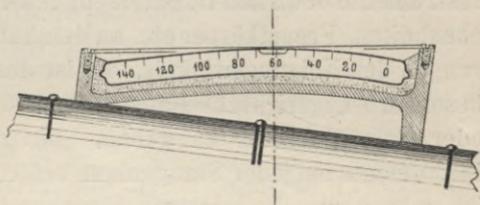
nützung des Ausschlags der Luftblase, entsprechend ihrer Empfindlichkeit, zwar sehr genau, aber nur innerhalb sehr enger Grenzen. (Verfügbare Strecke der Libellentheilung je bis zum äusseren Ende der ausschlagenden Blase etwa 10 Teile, also messbare Maximalneigung $\pm 10 \times \epsilon''$.) Soll eine stärkere Neigung gemessen, oder soll eine Gerade von bestimmter Neigung angegeben werden, so kann man hiezu benützen:

a) Den **Lattenreiter**, ein von Landmesser Schulze der Libelle nachgebildetes Instrument (s. Fig. 25). Lattenreiter.

Die Neigung α einer Schiefen lässt sich innerhalb der soeben angegebenen Grenze von einigen Minuten mit der gewöhnlichen Wasserwaage ermitteln. Ja man kann, wenn man deren

gleiche Teilungsintervalle entsprechend wählt, diese Neigungswinkel in Gradmass an der aufgesetzten Libelle direkt ablesen, also die lästige Multiplikation der Anzahl von der Luft-

Fig. 25.



blase durchlaufener Teile mit dem Empfindlichkeitswinkel ϵ sparen. Auch kann man den Berührungspunkt der Libellenachse (Spielpunkt) nach dem einen Ende der Wasserwaage verlegen, so dass deren ganze Länge für die Neigungsermittlung zur Verfügung steht. Endlich, und das ist der Schulzesche Gedanke, kann man aber den Schliff der inneren Röhrenfläche, im Gegensatz zur gewöhnlichen Libelle, von stetig sich ändernder Krümmung r machen, derart, dass eine gewisse Funktion des Neigungswinkels α , nämlich der Unterschied $d' = l - l \cos \alpha$ der Länge einer geneigt liegenden 5 m Messlatte und ihrer Horizontalprojektion (vergl. § 12), sich ändert proportional dem bei der Neigungsänderung $d\alpha$ von der Luftblase zurückgelegten Weg $r \cdot d\alpha$, also dass $\frac{d(l - l \cdot \cos \alpha)}{r \cdot d\alpha} = \text{const.}$ Die Schulzesche Ableitung der dieser Bedingung entsprechenden Schliffkurve des Instruments siehe Zeitschr. f. Vermessungswesen 1901, S. 550 ff. Der „Lattenreiter“ wird von Ed. Sprenger, Berlin, in einer Länge von 173 mm (also als Tascheninstrument) hergestellt und gestattet die Verwendung bis zu Neigungen von ca. $14^\circ 30'$.

Einem ähnlichen Gedanken entspringt der neuerdings empfohlene:

b) **Schrägmesser** (vergl. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1907, S. 896 ff.). Von zwei, an der Stirnseite durch ein Scharnier verbundenen Holzstäben, trägt der obere eine Libelle. In einer Nute

Schräg-
messer.

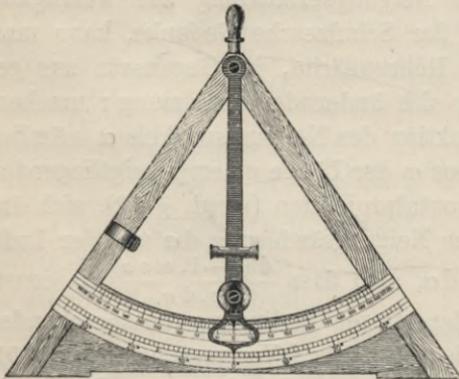
des unteren, mit Anschlag dem einen Messstangenende aufzulegenden Stabs ist ein Keil verschiebbar, welcher auf den oberen Stab drückt und dessen Libelle zum Einspielen bringen lässt. Dabei tritt ein zum Keil gehöriges Schwanzstück um diejenige Strecke über das das Instrument tragende Stangenende hervor, welche dem von der Neigung abhängigen Reduktionsbetrag entspricht. Die Neigungsablesung fällt damit weg und man hat nur, nachdem die Luftblase zum Einspielen gebracht wurde, das Ende des genannten Schwanzstücks (Schiebers) statt dem eigentlichen Stangenende als solches zu betrachten. Das Instrument wird beim Bergaufmessen auf dem hinteren Ende der vorderen Stange, beim Bergabmessen auf dem vorderen Ende der hinteren Stange aufgesetzt.

Angesichts der geringen Entfernung der Auflagerpunkte beider Instrumente bewirken Durchbiegungen der Messstange oder kleine Unebenheiten, Fremdkörper etc. an den Auflagerstellen erhebliche Änderungen des Neigungswinkels. Es ist deshalb nötig, den Messgeräten besonders zugerichtete Lager für das Aufsetzen des Lattenreiters oder Schrägmessers zu geben. Die durch die geringe Höhe des Instruments bei jeder Stangenlage erforderliche Beugung des Körpers ist unbequem. In letzterer Beziehung bequemer ist:

Gradbogen.

c) Der **Gradbogen** (s. Fig. 26). Er besteht aus einem (in der Regel hölzernen) Dreieck von etwa 40—70 cm Seitenlänge, dessen

Fig. 26.



Auflagerlinie (Grundlinie) einen in Gradenmass getheilten metallenen Kreisbogen trägt. Im Mittelpunkt dieses Bogens (Scheitel des Holzdreiecks) ist an starrem Lot ein Gewicht aufgehängt, dessen Spitze oder Ablesemarke sich auf der Teilung frei bewegen kann und, in Ruhe befindlich, dem Lot vertikale Richtung erteilt. Die Kreisteilung ist am Holzdreieck derart

befestigt, dass die Verbindungslinie ihres Nullpunktes mit dem Aufhängepunkt des Lots senkrecht steht auf der Auflagerlinie. Auf eine geneigte Gerade aufgesetzt, schliesst daher die Richtung des Lots mit jener Verbindungslinie denselben Winkel ein, wie die Horizontale mit der Geraden selbst, d. h. den Neigungswinkel der letzteren. Die Teilung gibt also an der Senkelspitze diesen Winkel

in Gradmass (Unterabteilungen von $10'$), zuweilen auf einer zweiten Teilung auch direkt den Betrag d' (s. § 12) an, um welchen das Mass der schief gelegten, 5 m langen Messstange von der Länge ihrer Horizontalprojektion abweicht.

Zu diesem Zweck muss das Instrument folgenden Anforderungen genügen:

Anforderungen.

- 1) Der Teilungsnullpunkt liege auf dem Lot vom Senkel-
aufhängepunkt zur Auflagerlinie.
- 2) Teilungsmittelpunkt = Aufhängepunkt des Senkels.
- 3) Teilungsintervalle und -Bezifferung müssen dem durch
sie bezeichneten Teil des Vollkreises entsprechen.

Untersuchung zu 1). Aufsetzen des Instruments auf fester Unterlage, Ablesung a_1 an der Senkelspitze. Umsetzen des Instruments (Vertauschung der Auflagerpunkte).

Die Senkelspitze zeigt auf a_2 .

Die Bögen $\left\{ \begin{array}{l} 0 - a_1 \\ 0 - a_2 \end{array} \right.$ müssen absolut gleich und entgegengesetzt gerichtet sein, oder Ablesung $a_1 = - a_2$.

Wegen etwaiger Nichterfüllung der Bedingung (2) soll die Auflage bei Untersuchung (1) möglichst horizontal gewählt werden, so dass a_1 und a_2 nahezu = 0.

Verbesserung durch Abhobeln der Auflagerfläche.

Untersuchung zu 2). Es können hier bei etwaiger Nichterfüllung der Anforderung zwei Fälle unterschieden werden, nämlich

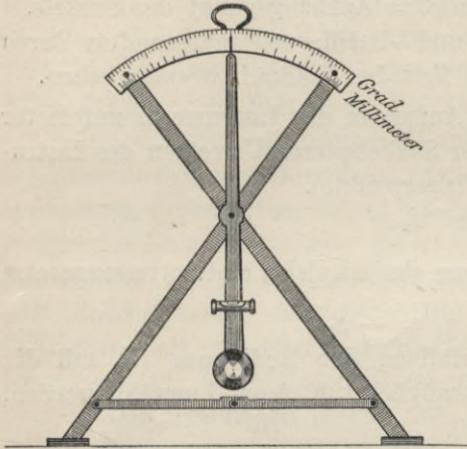
Teilungsnullpunkt, Teilkreismittelpunkt } liegen nicht
;und Senkelaufhängepunkt } liegen

in einer Geraden. Im ersten Fall zeigt sich der Fehler schon dadurch, dass trotz der Erfüllung von Forderung (1) eine beliebige hergestellte (für die Untersuchung möglichst grosse) Neigung auf beiden Seiten der Teilung, d. h. bei umgesetztem Gradbogen verschiedene Werte ergibt, weil die Teilungsintervalle auf dem von der Senkelspitze beschriebenen Weg je nach dem veränderlichen Abstand vom Teilkreismittelpunkt verschieden gross sind.

Im zweiten Fall ergibt sich der Neigungswinkel zwar in beiden Lagen gleich, aber zu ^{gross} klein, wenn der Senkelaufhängepunkt zu ^{hoch} _{nieder} liegt. Man stellt sich daher am besten eine bestimmte Neigung α her (etwa durch Einfügen einer Messstange l zwischen einer vertikalen und einer horizontalen Ebene in der Höhe h , so dass $\sin \alpha = \frac{h}{l}$, oder nach Art des Lattenprofils (s. später)) und untersucht, ob das Instrument beim Aufsetzen diesen Wert α , bezw.

den Reduktionsbetrag $d' = 1 - 1 \cos \alpha$ (s. § 12) anzeigt. Trifft dies zu, so ist nicht nur die zentrische Lage des Aufhängepunkts, sondern auch die Richtigkeit der betreffenden Teilstriche und -Bezifferung konstatiert. Trifft es nicht zu, so legt man sich eine Tabelle an mit den Spalten: 1. am Gradbogen abgelesene Neigung, 2. tatsächliche Neigung, 3. Reduktionsbetrag für die geneigt gelegte Messstange von 1m Länge. Die Spalte 2 kann für die praktische

Fig. 27.



Anwendung nach erfolgter Berechnung der zu (1) gehörigen Beträge (3) wegbleiben.

Untersuchung zu 3). Nachdem unter (2) schon die richtige Lage zweier in grossem und gleichem Abstand vom Teilungsnulldpunkt gelegener Teilstriche festgestellt wurde, genügt es, mittels eines Papierstreifens oder Millimetermassstabs die Gleichheit der Bögen von Teilstrich zu Teilstrich zu untersuchen, welche die Ab-

lesemarke bei Drehung um den Aufhängepunkt beschreibt.

Die bisherigen Verfeinerungen des Gradbogens bewegen sich in zweierlei Richtung. Sie entspringen dem Bestreben:

1. Die Teilung dem Auge zum Zweck bequemerer und schärferer Ablesung näher zu bringen, oder die Teilungsintervalle zu vergrössern.
2. Die Bewegung des Lots von Wind und Wetter (Kleben der Ablesemarke an der Teilung im Falle von Regen) unabhängig zu machen.

Der erstgenannte Zweck wird erreicht durch Verlängerung der beiden Schenkel des Holzdreiecks und des Lots nach oben, und Befestigung des geteilten Bogens in umgekehrter Lage an den Verlängerungsstücken (System Menner), bezw. durch Vergrösserung des Instruments (Gonser). Der zweite durch Anbringung einer Röhrenlibelle (Empfindlichkeit von 5' genügt) am Lot (s. Fig. 27, Systeme Krayl, Wimmer u. a.).

Hängezeug.

d) Das **Hängezeug**, ein geteilter Halbkreis, dessen Teilungsanfang auf dem zum Grenzdurchmesser senkrechten Halbmesser liegt. Parallel zum Grenzdurchmesser, also zur Verbindungslinie der beiden 90°-Teilstriche verläuft die durch Haken hergestellte

Aufhängelinie, während um den Mittelpunkt des Teilkreises ein Lot schwingt. Der Winkel zwischen Aufhängelinie und Wagrechter (Neigungswinkel einer gespannten Schnur) wird, wie beim Gradbogen, auf der Kreisteilung durch den Winkel zwischen freischwebendem Lot und 0-Halbmesser angezeigt.

Auch die Anforderungen an das Instrument und deren Untersuchung sind den an den Gradbogen gestellten analog.

e) Der **Gefällmesser** dient wie der Lattenreiter, der Gradbogen und das Hängezeug zur Bestimmung des Neigungswinkels, sowie zur Reduktion geneigter Strecken auf die Horizontalebene. Überdies erfährt er aber eine ausgedehnte Verwendung zur direkten Absteckung von Linien bestimmter Neigung auf dem Feld (Tracieren von Feld- und Waldwegen). Er verlangt keine materielle Gerade, auf welcher das Instrument, ähnlich den vorbenannten Instrumenten, aufzusetzen wäre, sondern lässt an die Stelle der Auflagerlinie eine Ziellinie treten.

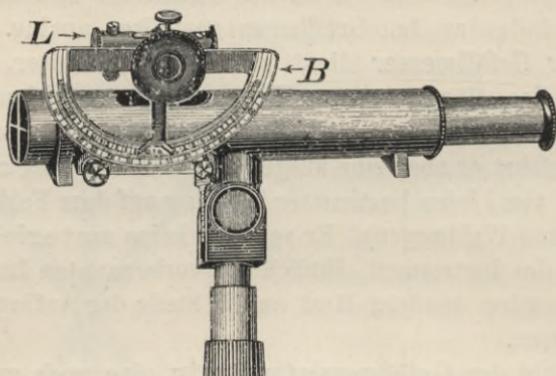
Gefäll-
messer.

Die Zahl der Gefällmesserformen ist eine noch grössere, als diejenige der Gradbögen. Einige von ihnen seien im nachfolgenden vorgeführt. Der ihnen gemeinsame Grundgedanke ist etwa folgender: Mit einer Zielvorrichtung (kleines Loch mit gegenüber horizontal aufgespanntem Faden, oder auch Fernröhrchen) ist ein geteilter, während der Benützung vertikaler Kreis, oder ein Zeiger starr verbunden, der die um eine horizontale Achse ausgeführten Vertikalbewegungen der Ziellinie mitmacht. Im ersten Fall wird der Zeiger, im zweiten der Vertikalkreis selbsttätig (mittels Gewichten), oder künstlich (unter Benützung einer Wasserwage) in diejenige Lage gebracht, welche bei horizontaler Zielung die Ablesung 0 und bei beliebig geneigter Zielung die vorhandene Neigung in Gradmass, oder in Prozenten, oder auch dasjenige Mass angibt, um welches die wirkliche, geneigte Strecke (Messbandlänge) grösser ist, als ihre jeweilige Horizontalprojektion.

Ein für die Absteckung von Linien bestimmter Neigung, wie für die Neigungsermittlung bestimmter Linien gleich geeignetes Instrument ist der nachfolgend kurz beschriebene Tesdorpf'sche Spiegel-Gefällmesser (s. Fig. 28—30). Mit der Zielvorrichtung ist ein beim Gebrauch vertikaler Teilkreis B fest verbunden, dessen Radius nach dem Teilungsnullpunkt senkrecht steht auf der Ziellinie und um dessen Mittelpunkt sich ein mit einer Wasserwage verbundener Zeiger drehen lässt. Die Achse dieser Wasserwage ist senkrecht zum Zeiger angeordnet. Wird die Zielvorrichtung auf einen entfernten Punkt eingestellt und gleichzeitig die Wasserwage L zum Einspielen gebracht, so gibt der jetzt vertikale Zeiger auf dem Teilkreis die

Neigung der Ziellinie in einem der obengenannten Masse an. Soll das Instrument freihändig, oder (was Regel ist) auf einem Stock verwendet werden, so ist es notwendig, die (für solche Benützung nur wenig empfindliche) Wasserwage in dem Augenblick des An-

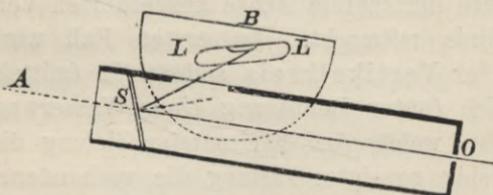
Fig. 28.



ziels zum Einspielen zu bringen. Dies wird dadurch ermöglicht, dass die eine Hälfte des Zielrohrs durch einen schief angebrachten Spiegel S (Fig. 29) ausgefüllt ist. Dieser wirft das Bild der Li-

Fig. 29.

Fig. 30.



bellensluftblase, welches durch eine Öffnung in der oberen Rohrwand eintritt, gegen das beobachtende Auge 0. Durch Drehen des Zeigers samt Libelle sorgt man während der Anzielung durch die offene Rohrhälfte A (Fig. 30) dafür, dass das Bild der Luftblase durch den Horizontalfaden halbiert wird (d. h. die Libelle einspielt).

Während bei der soeben beschriebenen Konstruktion der Teilkreis mit der Zielvorrichtung starr verbunden war und dem senkrecht zur Libellenachse angeordneten Zeiger während der Zielung vertikale Richtung gegeben wurde, ist bei der nächsten, Brücknerschen, der Zeiger durch die Zielrichtung selbst ersetzt. Der Teilkreis trägt zwei Teilungen (links prozentische Gefälle von 2 zu 2% fortschreitend, rechts Reduktionsbeträge $d' = 1 - 1 \cos \alpha$ für $l = 20$ m). Er schwingt beim Gebrauch innerhalb einer zylindrischen

metallenen Büchse, deren Mantel an zwei gegenüberliegenden Seiten und zwar an der einen durch einen horizontalen Spalt, an der andern durch eine Glasplatte mit horizontalem Strich unterbrochen ist. Spalt und Strich bilden die Zielvorrichtung. Die Sehlinie streift den Teilkreis, welcher, um eine horizontale Achse sich drehend, durch ein Gewicht sich selbsttätig so stellt, dass der Zielstrich bei horizontaler Zielung mit dem 0-Strich übereinstimmt, bei geneigter Zielung aber den Betrag dieser Neigung und der entsprechenden Reduktion anzeigt. Zur bequemeren Ablesung dient eine neben der Zielspalte angeordnete Lupe. Das Instrument wird freihändig benützt.

Zum Schutz der den Teilkreis tragenden Horizontalachse gegen Beschädigungen dient eine Arretiervorrichtung.

An die Gefällmesser sind ganz dieselben Anforderungen, wenn auch in etwas veränderter Form, zu stellen, wie an den Gradbogen. Da sich aber die Untersuchung der verschiedenartigen Konstruktionen nicht übereinstimmend in identische Einzeloperationen auflösen lässt, wollen wir uns mit der zusammengefassten Forderung begnügen: die Instrumente müssen die beobachteten Neigungswinkel oder prozentischen Gefälle, bezw. die ihnen entsprechenden Reduktionsbeträge richtig ergeben.

Um dies zu untersuchen, ermittelt man auf Grund einnivellierter Höhen und gemessener Entfernungen einige Neigungen in zuverlässiger Weise und beobachtet sie auch durch das zu prüfende Instrument.

Die Grundbedingung, dass bei horizontaler Zielung Höhenwinkel und Reduktionsbetrag sich gleich 0 ergeben, wie auch die Bedingung, dass Teilkreismitelpunkt und Zeigerdrehpunkt zusammenfallen, kann man prüfen, indem man den Neigungswinkel einer Strecke AB vor und zurück beobachtet (Gegenzielung, vergl. Justierung des Nivellierinstrumentes). Die ermittelten Neigungen und Reduktionsbeträge müssen absolut gleich sein, die Höhenwinkel aber verschiedenes Vorzeichen (Höhenwinkel — Tiefenwinkel) haben.

Etwaige Berichtigung erfolgt je nach der Konstruktion des Instruments durch Verschieben des die Lage des schwingenden Teilkreises bestimmenden Gewichts, oder durch Justierung der Zeigerlibelle.

f) Ein einfaches, aber nur bei wenig geneigtem Gelände anwendbares Instrument zur Bestimmung des Reduktionsbetrags d' , um den ein geneigt liegendes Messband länger ist, als seine Horizontalprojektion, stellt ein Bandstab mit nachfolgend zu beschreibender Teilung vor. In gleicher Entfernung von der Stabspitze trägt

der eine Bandstab eine horizontale Zielvorrichtung, der andere den Teilungsnulldpunkt. Da der Reduktionsbetrag beim 20 m-Band und h m Höhenunterschied beider Enden beträgt:

$$d' = 20 - \sqrt{20^2 - h^2} \quad \text{also} \quad h^2 = 40 d' - d'^2,$$

so kann man für Reduktionsbeträge

$$d' = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \text{ cm}$$

die zugehörigen Höhenunterschiede

$$h = 63 \quad 89 \quad 110 \quad 126 \quad 141 \quad 155 \text{ cm}$$

berechnen und vom Nullpunkt aus nach beiden Seiten als ungleichmässige Teilung abtragen. Der am einen Bandende horizontal zielende Techniker liest dann am anderen Bandstab direkt den zur Bandlage gehörigen Reduktionsbetrag ab.

Messkeil.

g) **Der Messkeil** von Geometer Menner ist ein Aluminiumwinkel von $22\frac{1}{2}^\circ$ in der Form eines rechtwinkligen Dreiecks. Rechtwinklig zur grösseren Kathete sind Teilungsrippen angegossen, deren Längen zwischen dieser Kathete und der Hypotenuse den des öfteren berührten Reduktionsbetrag (s. § 12)

$$d' = l - l \cos \alpha = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

für den veränderlichen Neigungswinkel α und für die Stangenlänge $l = 5$ m darstellen. Die Parallelabstände der Rippen wachsen im Fall der Anwendung eines Gradbogens mit Winkelteilung entsprechend der durch die Rippenlänge dargestellten Funktion ungleichmässig (s. § 25). Die Grösse des zu jeder Rippe gehörigen Neigungswinkels α ist durch angegossene Zahlen ersichtlich.

Gibt der Gradbogen die Reduktionsbeträge in Millimetern an, so werden die Rippenabstände des zugehörigen Messkeils gleich gross.

Kapitel II.

Einfache Instrumente zum Messen und Abstecken von Winkeln.

Die einfachen Winkelinstrumente lassen sich einteilen in

- a) Diopterinstrumente,
- b) Spiegelinstrumente,
- c) Prismeninstrumente.

§ 7. Diopterinstrumente.

Die **Diopterinstrumente** (Kreuzscheiben) besitzen eine oder mehrere Durchseh- (Diopter-) Vorrichtungen, je bestehend aus zwei einander gegenüberliegenden, ca. 0,2 mm breiten Schlitzten, oder

einem solchen Schlitz in Verbindung mit einem in breitem Spalt gegenüber aufgespannten Rosshaarfaden, oder aus einem kleinen Loch mit gegenüberliegendem Schlitz oder Faden. Der Faden ist je nur auf die halbe Länge der Zielvorrichtung ausgedehnt und geht sodann in den in der Mitte in einem Punkt geschlossenen Schlitz über, so dass in jeder Richtung das an den Schlitz angelegte Auge gegenüber einen Faden vorfindet.

Die Form des Trägers dieser Zielvorrichtung (Kreuzscheibenkopfs) — hohler, metallener Kegelrumpf oder (in der Regel achtseitiges) Prisma oder Kugel, oder Zylinder — ist bestimmend

Träger des
Diopters.

Fig. 31.



Fig. 32.

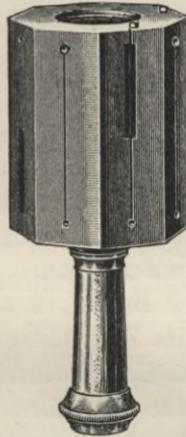
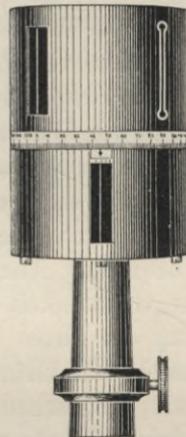


Fig. 33.



für die Bezeichnung „Kegelkreuzscheibe“ (Fig. 31), „prismatische Kreuzscheibe“ oder „Winkeltrommel“ (Fig. 32), „Kugelkreuzscheibe“, „zylindrische Kreuzscheibe“ (Fig. 33). Der Kreuzscheibenkopf trägt zur bequemen Vertikalstellung häufig eine Dosenlibelle und ist auf einem hölzernen oder metallenen Stab (Mannesmannrohr) befestigt, der unten in eine gehärtete Spitze endigt.

Zum Abstecken von Winkeln konstanter Grösse (1 Rechter, Zweck und Einrichtung. bisweilen auch $\frac{R}{2}$) sollen die Zielvorrichtungen derart angeordnet sein, dass die durch sie gebildeten Ebenen den verlangten Winkel miteinander einschliessen.

Sollen die Instrumente zum Messen von Winkeln beliebiger Grösse verwendet werden, so ist bei der Kegelform (Gradscheibe) auf der Verlängerung der Grundplatte, bei der zylindrischen Form (Pantometer) (Fig. 33) auf dem Mantel des in beiden Fällen um

eine vertikale Achse leicht drehbaren Kopfes eine Kreisteilung (Intervall etwa 1°) angebracht, welche mit einer Ablesevorrichtung (Zeiger, Nonius, vergl. § 37) korrespondiert, die mit dem Stab fest verbunden ist (Nonienangabe 2 bis 4 Minuten). Der Träger der letzteren kann eine zweite Zielvorrichtung (Versicherungsdiopter) tragen, zur Feststellung etwaigen Mitschleppens des Stabes beim Drehen des Kreuzscheibenkopfes (s. Fig. 33). Um Beschädigungen anlässlich des Einstossens des Stabes in den Boden zu vermeiden, werden Instrumente mit drehbaren Teilen, oder mit Winkelteilungen zweckmässigerweise auf dem Stab nicht festgeschraubt, sondern mittels schwach konischer (kegelrumpfförmiger) Hülsen auf eine entsprechende Verlängerung des Stabs erst gesetzt, wenn letzterer in die Erde eingestossen ist.

Von den verschiedenen Diopterröhrchen ist diejenige zweier korrespondierender Schlitze die zweckmässigste (unabhängiger von Witterungseinflüssen als die Fadeneinrichtung, nicht so leicht zu beschädigen, kein Verdecken des Ziels). Als Trägerform empfiehlt sich besonders der Kegelrumpf (oben bei geringer Entfernung der gleich breiten Schlitze grosses Gesichtsfeld und daher bequemes Anzielen, unten kleines Gesichtsfeld und damit grössere Genauigkeit je nach Bedarf verwendbar; durch Abwärtsbewegung des Auges längs des Zielschlitzes Übergang vom grossen Gesichtsfeld zum kleinen allmählich, wodurch Zielung erleichtert und verfeinert; abgesehen von der Kugelform grösstmögliche Steilheit der Zielung; Schutz gegen Beschädigung beim Umfallen durch die verlängerte Grundplatte).

Der Kopf der (namentlich in Württemberg, wo die übliche Aufnahmemethode möglichst genauen Winkelscheitel verlangt, gebräuchlichen) Kegelkreuzscheibe hat etwa folgende Dimensionen:

oberer Durchmesser	ca. 4—5 cm
unterer	„ „ $12\frac{1}{2}$ cm
Höhe etwa 8 cm.

Der Kegelrumpf ist unten abgeschlossen durch eine gegen die Wirkung heftiger Stösse mit Rippen verstärkte Grundplatte, welche ein Muttergewinde trägt, zur Befestigung auf dem Stab.

Die prismatische, wie auch die zylindrische Form wird meist in kleineren Dimensionen hergestellt (Prisma mit etwa 4—6 cm Durchmesser und ca. $7\frac{1}{2}$ cm Höhe, Zylinder mit ca. 9 cm Durchmesser), weil sie Anwendung namentlich in denjenigen Ländern finden, in denen Aufnahmemethoden üblich sind, die nicht genauen Winkelscheitel verlangen (s. § 17).

Anforderungen an die Kreuzscheibe.

1. Die beiden zusammengehörigen Zielvorrichtungen (Schlitze, oder Spalt mit Faden) eines Diopters müssen je in einer Ebene liegen.
2. Die Schnittlinie beider Diopterebenen muss mit der Stabachse zusammenfallen.
3. Die Diopterebenen müssen sich unter dem verlangten Winkel schneiden.
4. Die Libelle muss bei vertikalem Stab einspielen.
5. Der Stab muss gerade sein.

Anforderungen.

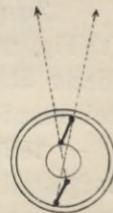
Untersuchung zu (1). Bei beliebig (nicht notwendigerweise vertikal) gestelltem Stab muss das am Diopter auf und ab bewegte Auge ein und denselben Punkt (Blitzableiterspitze etc.) im Gesichtsfeld erblicken (Einfluss windschiefer Schlitze auf die Zielung siehe Fig. 34).

Untersuchung.

Fig. 34.

Die Anforderung (2) zerfällt in die wichtigere:

- $\alpha)$ Die Schnittlinie der Diopterebenen muss parallel sein der Stabachse, und die weniger wichtige:
- $\beta)$ Der Parallelabstand der beiden Linien muss $= 0$ sein.



Zu $\alpha)$. Bei vertikal gestelltem Stab muss der Faden eines freischwebend, nahe bei der Kreuzscheibe aufgehängten Lots ganz im Gesichtsfeld des entsprechend orientierten Instruments erscheinen.

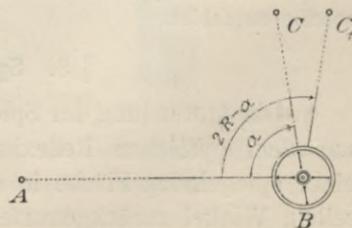
Zu $\beta)$. Durch die Schlitze jedes der Diopter werden nach beiden Seiten 4 Punkte in geringer, ungefähr gleicher Entfernung vom Instrument eingewiesen. Nach erfolgter Drehung um etwa $2R$ und genauer Einstellung auf einen der genannten Punkte muss je der zugehörige, rückwärts in gerader Linie liegende wieder im Gesichtsfeld erscheinen. Etwaige Differenz entspräche dem vierfachen Fehler.

Zu (3).

Fig. 35.

$\alpha)$ Für rechtwinkligen Schnitt der Diopterebenen:

Nachdem die Kreuzscheibe in beliebigem Punkt B (Fig. 35) vertikal gestellt ist, weist man durch die beiden Diopter die Stäbe A und C



ein. Dreht man alsdann die Scheibe um ihre vertikale Achse so, dass der Stab A im Gesichtsfeld des bisher nach C gerichteten Diopters erscheint (um ca. 1 R), so muss Stab C durch das andere Diopter sichtbar sein. Etwaige Abweichung entspräche dem doppelten Kreuzscheibenfehler.

Auch beim Vorhandensein eines solchen kann man übrigens einen genauen rechten Winkel mit dem Instrument abstecken. Man hat zu diesem Zweck die Absteckung nur bei um 1 R gedrehter Kreuzscheibe zu wiederholen und die Entfernung der beiden eingewiesenen Punkte zu halbieren.

β) Für 45° Schnitt der Diopterebenen.

Von jedem der beiden Schenkel des (wie oben angegeben) abgesteckten rechten Winkels trägt man nach innen den zu prüfenden Winkel von $\frac{R}{2}$ ab durch Einweisen eines Punktes nach erfolgter Orientierung der Kreuzscheibe. Die etwaige Abweichung beider Richtungen ist gleich dem doppelten Fehler des Schnittwinkels.

Zu (4). Mit Hilfe eines Senkels oder einer Dosenlibelle (s. Fig. 23) stellt man den Kreuzscheibenstab vertikal. Spielt in dieser Stellung die Wasserwage ein, so wird umgekehrt künftig auch bei einspielender Libelle der Stab vertikal stehen.

Andere Art der Untersuchung: Bei Drehung des auf dem Boden aufgestellten, oben in einer yförmigen Gabel festgehaltenen Stabs um seine Längsachse muss die zum Einspielen gebrachte Luftblase einspielend bleiben.

Zu (5). Bei rascher Drehung des Stabs um seine Längsachse zeigt sich etwaige Krümmung desselben durch leicht wahrnehmbare Schwankungen in horizontalem Sinn.

Die Wichtigkeit der oben aufgezählten Anforderungen für die Anwendung ist verschieden, und nimmt ab in der Reihenfolge der vorstehenden Aufzählung.

Verbesserungen an der Kreuzscheibe sind durch den Mechaniker auszuführen.

Für die Absteckung längerer Schenkel rechter Winkel, wie sie bei Anwendung der Parallelmethode für die Stückvermessung (s. § 17) vorkommt, kann sich die Anwendung kreuzweise aufgehängter Fernröhrchen an Stelle der Kreuzscheibe empfehlen.

§ 8. Spiegelinstrumente.

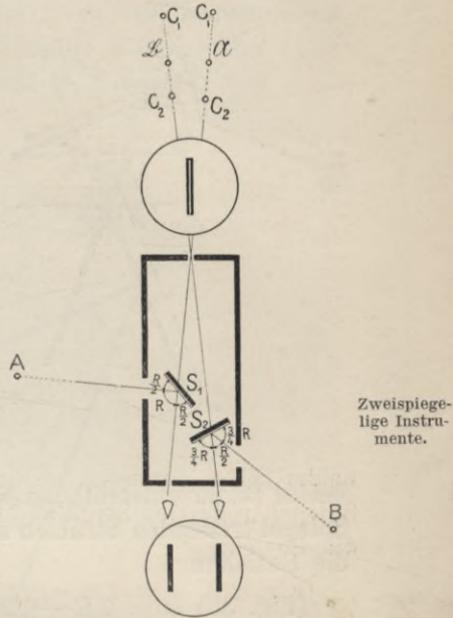
Die Anwendung der Spiegelinstrumente in der Geodäsie beruht auf dem optischen Reflexionsgesetz, wonach ein Lichtstrahl von einer spiegelnden Fläche in der Ebene des Einfallslotes unter demselben Winkel zurückgeworfen wird, unter dem er auftritt.

Kommt **ein einziger Spiegel** zur Verwendung, so steht er in Verbindung mit einer Dioptervorrichtung und schliesst mit der hierdurch gebildeten Ziellinie einen bestimmten Winkel $\frac{R}{2}$, $\frac{3}{4} R$

Einrichtung
einspiege-
liger Instru-
mente.

(s. Fig. 36) ein. Sorgt man durch entsprechende Stellung der Stäbe A bzw. B, oder durch entsprechende Wahl des Instrumentenorts dafür, dass das durch den Spiegel S_1 bzw. S_2 erzeugte Bild \mathfrak{A} oder \mathfrak{B} der ersteren in die über die Spiegel hinweg durch die Diopter gesehene Richtung $C_2 C_1$ fällt, so bildet der den Spiegel treffende Strahl AS_1 bzw. BS_2 mit der Zielrichtung des Diopters den doppelten Winkel zwischen letzterer und dem Spiegel.

Fig. 37.



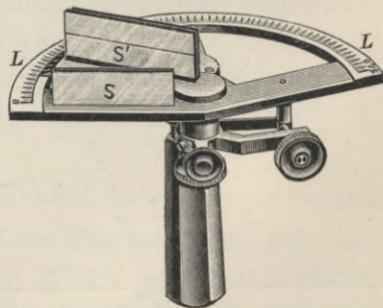
Häufiger kommen **zwei Spiegel** zur Anwendung, die einen konstanten, oder einen veränderlichen Winkel miteinander einschliessen, und welche die von den Zielpunkten ausgehenden Lichtstrahlen ein- oder zweimal reflektieren.

a) Zweispiegelige Instrumente mit Verwendung je einmaliger Reflexion.

Das Pantogon von G. Meissner, Berlin besteht (s. Fig. 37) aus einem Teilkreis LL von etwa 80 mm Halbmesser mit Teilungs-

intervallen von $\frac{1}{2}^\circ$, die aber ihrem doppelten Betrag entsprechend beziffert sind, und einem senkrecht dazu und parallel zum 0-Radius fest angeordneten Spiegel S. Ein zweiter etwas breiterer Spiegel S' ist um eine durch den Kreismittelpunkt gehende, zum Teilkreis senkrechte Achse drehbar; sein Trägerarm endigt bei der Winkelteilung in einem Nonius (s. § 37). Dreht man nun den beweglichen

Fig. 36.



Spiegel S' (s. Fig. 38) bis das durch ihn erzeugte Bild \mathfrak{B} des Punktes B in derselben Richtung erscheint, wie das durch den festen Spiegel S erzeugte Bild \mathfrak{A} des Punktes A (so dass Deckung

Fig. 38.

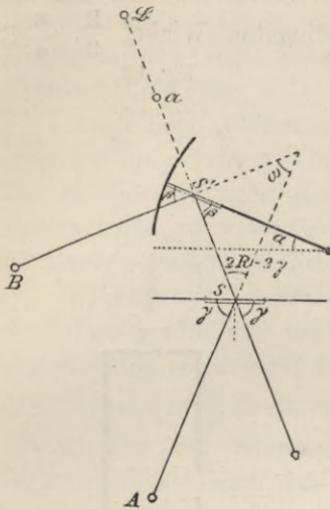
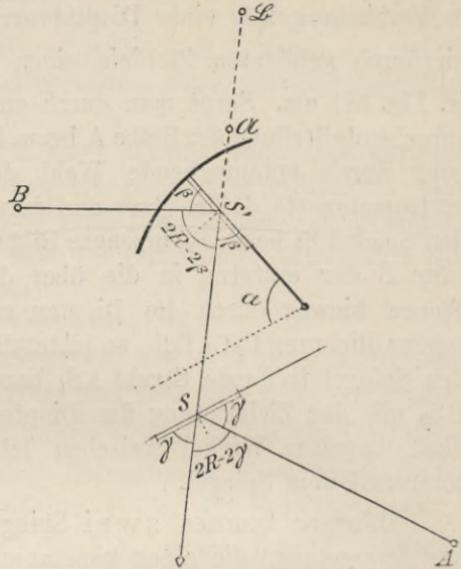


Fig. 39.

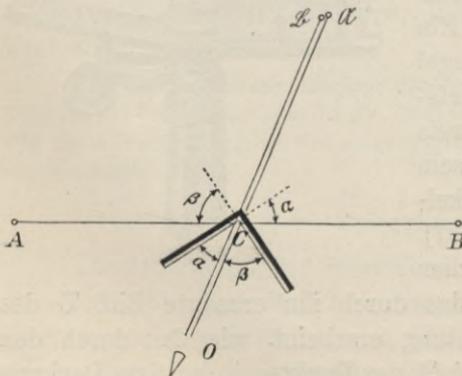


beider Bilder entsteht), so besteht zwischen dem Winkel ω der die Spiegel treffenden Strahlen und dem Winkel α zwischen den Spiegeln die Beziehung:

$$\begin{aligned} \text{(Fig. 38)} \quad \omega &= 2R - \{2\beta + 2R - 2\gamma\} = 2\gamma - 2\beta \\ \alpha &= 2R - \{\beta + 2R - \gamma\} = \gamma - \beta \\ \hline \omega &= 2\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(Fig. 39)} \quad \omega &= 2R - 2\beta + 2R - 2\gamma = 4R - 2\beta - 2\gamma \\ \alpha &= 2R - (\beta + \gamma) = 2R - \beta - \gamma \\ \hline \omega &= 2\alpha. \end{aligned}$$

Fig. 40.



Statt hintereinander, kann man die beiden Spiegel auch übereinander so anordnen, dass das innerhalb des Winkelraums befindliche Auge (vergl. den „Winkelspiegel“ S. 49) die Spiegelbilder \mathfrak{A} und \mathfrak{B} der beiden Punkte A und B in der Schnittlinie der Spiegel erblickt — „Spiegelkreuz“.

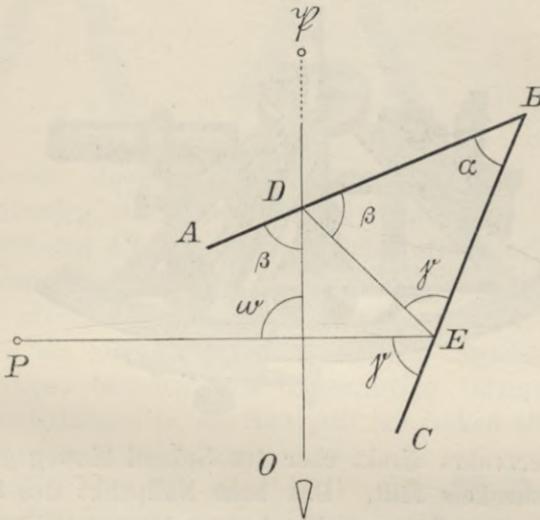
Ist der Winkel zwischen beiden Spiegeln $= R$, so ist in

diesem Fall derjenige zwischen den Strahlen AC und BC = 2R —, letztere bilden eine Gerade (Fig. 40).

β) Zweispiegelige Instrumente mit Verwendung doppelter Reflexion.

Stellt ABC in Fig. 41 einen Schnitt ⊥ zu den Spiegelebenen vor, welche gegen das Innere des Winkelraums α angeordnet sind, Weg des Lichtstrahls. so wird ein von P kommender Lichtstrahl in E nach D und in D

Fig. 41.



nach O zurückgeworfen, so dass ein in O befindliches Auge das Spiegelbild Ψ von P über den Spiegel AB hinweg in der Entfernung $D\Psi = (EP + ED)$ erblickt. Die beiden in Betracht kommenden Strahlen PE und ΨDO bilden miteinander den Winkel

$$\begin{aligned} \omega &= 2R - 2\beta + 2R - 2\gamma \\ &= 4R - 2(\beta + \gamma) \\ &= 4R - 2(2R - \alpha) \\ &= 2\alpha \end{aligned}$$

d. h. ω ist gleich dem doppelten Winkel der beiden Spiegel.

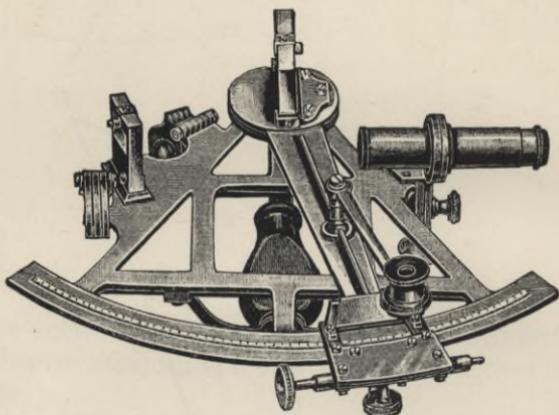
Zum Zweck der Anwendung dieses Gesetzes kann man, wie beim Pantogon, den einen der beiden Spiegel auf einem Teilkreis und senkrecht zu dessen Ebene fest, den andern dagegen auf einer Schiene, welche sich um eine durch den Kreismittelpunkt gehende zum Teilkreis senkrechte Achse drehen lässt, und welche wieder an dessen Teilung in einem Nonius endigt, so anordnen, dass die Spiegelfläche des ersteren parallel zum 0-Radius der Kreisteilung,

Spiegel-
sextant.

diejenige des letzteren parallel zum 0-Radius der Noniusteilung verläuft, oder dass beide um denselben Winkel gegen diese Nullradien verdreht sind. „Sextant“ (s. Fig. 42).

Alsdann kann zum Zweck der Winkelbeobachtung durch entsprechende Drehung der Schiene dafür gesorgt werden, dass das durch doppelte Reflexion erzeugte Spiegelbild des rechten Schenkels eines beliebigen Winkels ω in die Richtung des mit freiem Auge

Fig. 42.



oder mittels Fernrohrs direkt über den Spiegel hinweg gesehenen linken Winkelschenkels fällt. Das beim Nullpunkt des Schienenonius abgelesene, auf dem Teilkreis in seinem doppelten Betrag bezifferte Winkelmaß, der doppelte Spiegelwinkel, ist dann gleich demjenigen der beiden Strahlen, von denen aber, im Gegensatz zum Pantogon, der eine direkt, der andere erst nach doppelter Spiegelung ins Auge gelangt.

Spezielle Fälle.

Werden die beiden Spiegel unter einem Winkel $\alpha = \frac{R}{2}$ fest gegeneinander angeordnet, so schneiden sich die beiden genannten Strahlen unter $1 R$ und das Instrument — der **gewöhnliche Winkelspiegel** — bezeichnet den Scheitel eines rechten Winkels zwischen dem Strahl PE und dessen mit einem Winkelschenkel zur Übereinstimmung gebrachten doppelt reflektierten Strahl $\text{P}DO$ (Fig. 41).

Den Spiegelwinkel $\alpha = R$ benützt das „**Spiegelkreuz**“ (s. Fig. 40). Beide speziellen Fälle vereinigt der **Wendelsteinsche Winkelspiegel**, bei welchem drei gegeneinander gerichtete Spiegel die Seitenflächen eines dreiseitigen Prismas von rechtwinklig gleichschenkligen Querschnitt darstellen.

Zur Verbindung der Spiegel dient ein Gehäuse (s. Fig. 43 Einrichtung. und 44), mit welchem der eine Spiegel fest, der andere (A B) durch Schrauben (Zug- und Druckschraube, Schraube in Verbindung mit gegenwirkender Feder) so verbunden ist, dass kleine Änderungen des Spiegelwinkels möglich sind, sich aber nicht selbsttätig voll-

Fig. 43.

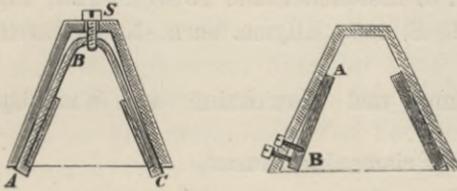
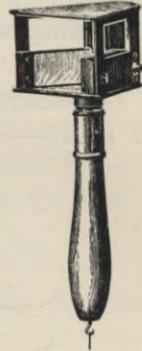
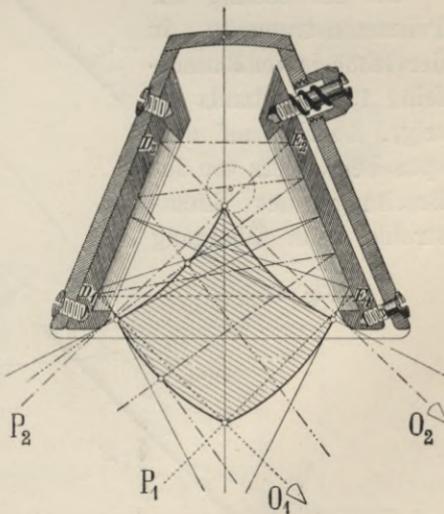


Fig. 44.



ziehen können. Zuweilen sind die Spiegel auch auf einem federnden, durch die Schraube S festgehaltenen Stahlband ABC befestigt, welches sich mit den vorderen Enden gegen die Seitenwände des Gehäuses presst. Über den Spiegeln, neuerdings wohl auch als nicht belegter horizontaler Streifen inmitten der Spiegelflächen, befinden sich fensterartige Öffnungen. In den Boden des Gehäuses ist ein Handgriff mit Haken eingeschraubt, an welchem man ein Lot befestigt. Zweckmässiger ist der Abschluss des Handgriffs durch eine Metallkugel, welche in die abwärts sich verengende Bohrung eines unten mit Blei ausgegossenen Stabs eingedrückt wird.

Fig. 45.



Verfeinerung. Von dem Punkt P (s. Fig. 41) gehen ∞ viele Strahlen aus, welche den Spiegel BC in verschiedenerelei Punkten E und je nach der Lage des Spiegels unter veränderlichem Winkel treffen. Der Scheitel des durch den eintretenden und den doppelt reflektierten Strahl gebildeten Winkels ist daher, und zwar bei der normalen Instrumentengrösse von ca. 3 cm Spiegellänge um im Max. etwa $3\frac{1}{2}$ cm veränderlich (Fig. 45).

Für β (s. Fig. 41) $\sim \frac{3}{4} R$ wird die Abweichung der Schnittpunkte paralleler Strahlen zu einem Maximum (s. P_1 u. P_2 in Fig. 45)
 Für β (s. Fig. 41) $> \frac{R}{2}$ geht der mehrfach reflektierte Strahl ins Spiegelgehäuse ohne auszutreten.
 Für β (s. Fig. 41) $< \frac{R}{2}$ geht der mehrfach reflektierte Strahl ins Spiegelgehäuse ohne auszutreten.

Um die dadurch hervorgerufene Unsicherheit der Winkelabsteckung wegzubringen werden neuerdings besondere Einrichtungen getroffen. Vergl. Zeitschr. f. Instrumentenk. 1907, S. 125; Zeitschr. f. Vermessungswesen 1906, S. 457; Allgem. Verm.-Nachrichten 1906, S. 157 u. a. a. O.

(Anwendung, Prüfung und Korrektur des Winkelspiegels siehe § 13.)

§ 9. Prismeninstrumente.

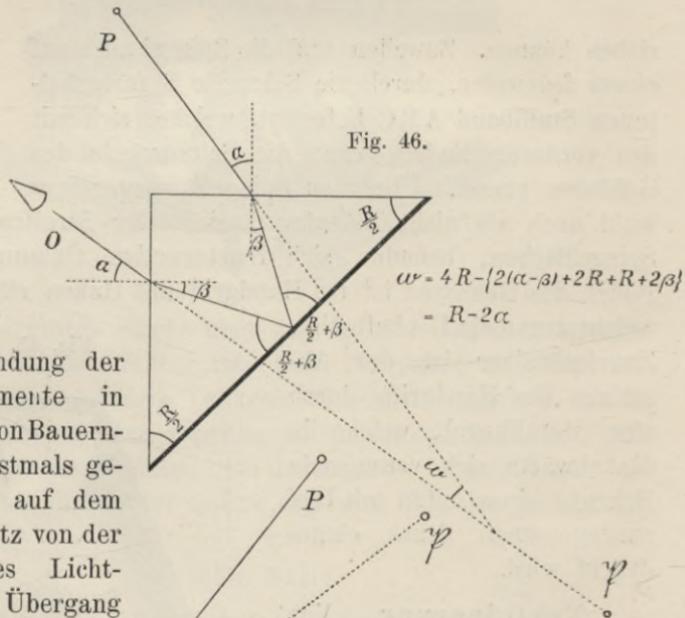
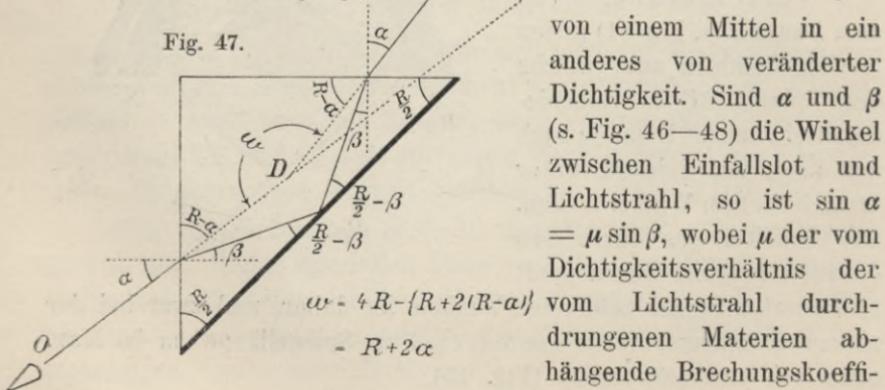


Fig. 46.

Lichtbrechungsgesetz.

Die Anwendung der Prismeninstrumente in der Geodäsie, von Bauernfeind 1851 erstmals gezeigt, beruht auf dem optischen Gesetz von der Brechung des Lichtstrahls beim Übergang

Fig. 47.



von einem Mittel in ein anderes von veränderter Dichtigkeit. Sind α und β (s. Fig. 46—48) die Winkel zwischen Einfallslot und Lichtstrahl, so ist $\sin \alpha = \mu \sin \beta$, wobei μ der vom Dichtigkeitsverhältnis der vom Lichtstrahl durchdrungenen Materialien abhängende Brechungskoeffi-

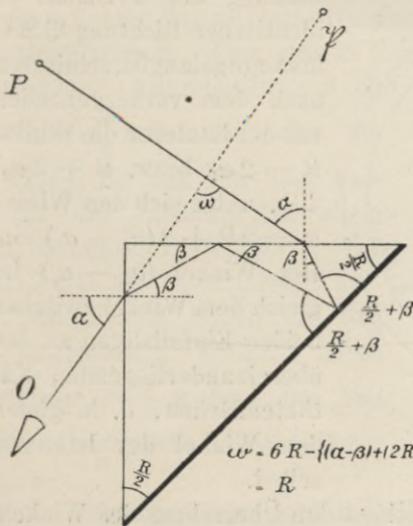
zient ist. Für den Übertritt von Luft in Glas wird er durchschnittlich $= 1,5$.

1. **Bauernfeindsches Winkelprisma.** Tritt ein in einer Ebene senkrecht zur Prismenkante befindlicher, vom Punkt P ausgehender Lichtstrahl in ein dreiseitiges Prisma aus Glas von gleichschenkligh-rechtwinkligem Querschnitt, dessen Hypotenusenfläche als Spiegelfläche wirkt, so kann er im Prisma, je nach dem Ort und der Richtung seines Eintritts, die in Fig. 46—48 angegebenen Wege machen. Das in O befindliche Auge wird daher in der Richtung O P das Spiegelbild von P erblicken. Wir erkennen, dass der Lichtstrahl das Prisma immer unter demselben Winkel α gegen die eine Kathetenfläche verlässt, unter dem er die andere getroffen hat und dass in den Fällen der Fig. 46 und 47 der eintretende mit dem austretenden Strahl den Winkel $\omega = R + 2\alpha$ einschliesst, je nachdem der $\sphericalangle \alpha$ vom Einfallslot aus der rechtwinkligen Kante ab- zu- gekehrt ist. Da jede kleine Drehung des Instruments den $\sphericalangle \alpha$ und damit den $\sphericalangle \omega$ ändert, so wird das Spiegelbild P von P je nach der Haltung des Prismas seine Lage ändern — es wird einen beweglichen Strahl ins Auge senden. Dieser bewegliche Strahl findet beim einfachen Winkelprisma in der Geodäsie keine Verwendung.

Weg des Lichtstrahls im Prisma.

Im dritten Fall (Fig. 48), in welchem an einer Kathetenfläche totale Reflexion deshalb eintritt, weil der Winkel β zwischen ihr

Fig. 48.



$$\omega = 6R - \{(\alpha - \beta) + (2R + 2\beta) + (R - 2\beta) + (2R - \alpha + \beta)\}$$

$$= R$$

Fig. 49.



und dem Strahl unter den Grenzwert für die Austrittsmöglichkeit herabsinkt, fällt α bei der Ableitung von ω heraus, d. h. ω ist

(unabhängig von etwaiger Instrumentendrehung) = R . Der vom Gegenstand P ausgehende und der von dem gleichweit entfernten Spiegelbild \mathfrak{P} ins Auge gelangende feste Lichtstrahl stehen \perp aufeinander. Dieser feste Strahl wird in der Geodäsie beim Bauernfeindschen einfachen Prisma zum Abstecken rechter Winkel allein angewandt.

Einrichtung.

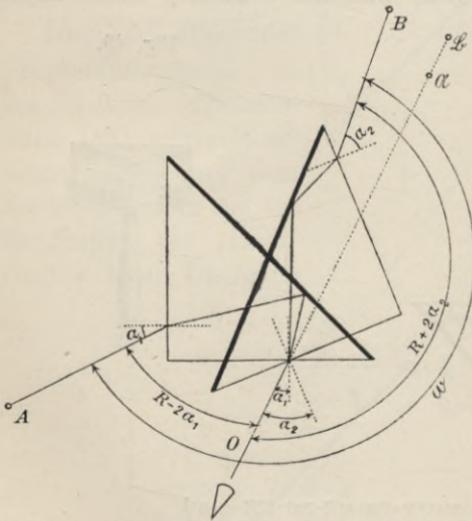
Zum Schutz des Glaskörpers gegen Beschädigung und zum Zweck seiner Verbindung mit einem Senkel oder Stab ist das Prisma in ein Metallgehäuse, welches die Deckflächen und die Hypotenusenfläche umfasst, eingeschlossen. Dieses endigt wie beim Winkelspiegel, zum Zweck des Anhängens eines Senkels, oder der Befestigung auf einem Stab, nach unten in einem Haken, einer Öse, einer Schraube oder einer Metallkugel (s. Fig. 49).

Zum Messen bzw. Abstecken von Winkeln beliebiger Grösse verwendet man eine Verbindung zweier Glasprismen, die übereinander so angeordnet sind, dass ihre Seitenkanten parallel gehen.

2. Die „Prismentrommel“. Das obere Prisma ist um eine, den Seitenkanten parallele Achse drehbar.

Die von zwei Punkten A und B (s. Fig. 50) ausgehenden Lichtstrahlen, von denen einer ins obere, der andere ins untere

Fig. 50.

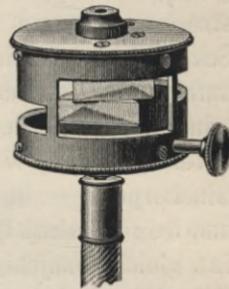


Prisma eintritt und deren bewegliche Bilder, bei entsprechender gegenseitiger Stellung der Prismen, in identischer Richtung $\mathfrak{B}\mathfrak{A}O$ ins Auge gelangen, schliessen nach dem vorhergehenden mit der letzteren die Winkel $R - 2\alpha_1$ bzw. $R + 2\alpha_2$, d. h. unter sich den Winkel $\omega = 2R + 2(\alpha_2 - \alpha_1)$ ein. Der Winkel $(\alpha_2 - \alpha_1)$ ist gleich dem Winkel zwischen beiden Einfallsloten an den übereinanderliegenden Kathetenflächen, d. h. gleich dem Winkel der letzteren selbst.

Sein doppelter Betrag bezeichnet den Überschuss des Winkels zwischen beiden von A bzw. B nach dem Prisma gesandten Strahlen über $2R$. Würde man also das obere Prisma in der Richtung der

dem Auge zugekehrten Kathetenfläche mit einem Zeiger, das untere mit einem Teilkreis verbinden, dessen Mittelpunkt in der Drehachse des oberen und dessen Nullpunkt in der Richtung der dem Auge zugekehrten unteren Kathetenfläche läge, so könnte man mit der Prismentrommel genau ebenso Winkel beliebiger Grösse messen, wie mit dem Spiegelsextanten. Die gewöhnliche Prismentrommel (Fig. 51) entbehrt allerdings dieser letzteren Einrichtungen, so dass sich ihre Prismen wohl auf Winkel beliebiger Grösse, die durch drei Punkte auf dem Gelände gegeben sind, einstellen lassen, (etwa zum Zweck der Verlegung des Winkelscheitels eines konstanten Winkels bei Absteckung von Kreisbögen durch drei gegebene Punkte). Zur Ermittlung des Gradmasses solcher Winkel ist die Prismentrommel dagegen nicht eingerichtet.

Fig. 51.



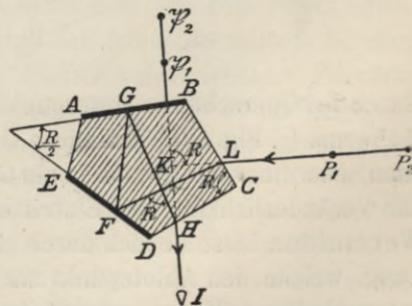
Einen speziellen Fall der Prismentrommel stellt

3. das Bauernfeindsche „Prismenkreuz“ dar, bei welchem die beiden dem Auge zugekehrten Kathetenflächen parallel gehen (bezw. in eine Ebene fallen). Da jetzt der Winkel $\alpha_2 - \alpha_1$ (s. Fig. 50) zwischen den genannten Kathetenflächen = 0 ist, so wird $\omega = 2R$, d. h. die von verschiedenen Seiten ins Prisma gelangenden Strahlen bilden eine Gerade, sobald die Spiegelbilder der sie aussendenden Punkte sich decken.

4. Das Prandtl'sche (fünfseitige) Glasprisma oder das Winkelspiegelprisma. Zwei durch Versilberung zu Spiegelflächen umgestaltete Grenzebenen AB und DE des Prismas schliessen den Winkel $\frac{R}{2}$ miteinander ein. Die

beiden, für den Ein- und Austritt der Lichtstrahlen allein bestimmten Seitenflächen BC und CD stehen senkrecht aufeinander und bilden mit den Spiegelebenen Winkel, deren Summe $= \frac{5}{2}R$ ist. Die hintere Grenzfläche AE ist beliebig gelegt.

Fig. 52.



Tritt ein Lichtstrahl bei einer der Seitenflächen BC oder CD so ein, dass er nach erfolgter Brechung den gegenüberliegenden Spiegel ED oder AB trifft, so wird er von ihm nach dem zweiten

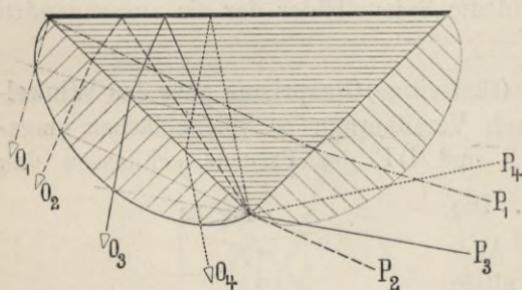
Spiegel und von diesem nach der Seitenfläche CD bzw. BC zurückgeworfen, durch welche er in die Luft austritt.

Innerhalb des Glaskörpers macht dann der eingetretene Strahl genau denselben Weg, wie beim gewöhnlichen Winkelspiegel bei gleichfalls doppelter Reflexion, folglich stehen seine beiden Teilstrecken LF und GH senkrecht aufeinander. Da demnach die Schenkel der beiden Winkel GHC und FLB paarweise senkrecht aufeinander stehen, sind sie einander gleich: der Lichtstrahl trifft innerhalb des Glaskörpers die beiden Flächen BC und CD unter gleichen Winkeln. Folglich ist dies auch ausserhalb des Glaskörpers — in der Luft — der Fall, \sphericalangle BLP ist gleich CHI, und der Winkel PKI zwischen ein- und austretendem Strahl ist gleich demjenigen zwischen den beiden offenen Flächen BC und CD also gleich 1 R.

Das Winkelspiegelprisma hat also dieselbe strahlenablenkende Wirkung wie das dreiseitige Winkelprisma. Zwei der fünfseitigen Prismen lassen sich genau ebenso zum Prismenkreuz zusammensetzen, wie zwei der letzteren.

Wie beim Winkelspiegel wechselt auch beim Winkelprisma der Schnittpunkt der beiden Richtungen eines durch ihn gegangenen Lichtstrahls (Winkelscheitel) seine Lage mit der Eintrittsstelle und dem

Fig. 53.



Winkel zwischen Strahl und Eintrittsebene. Er befindet sich im allgemeinen ausserhalb des Prismenquerschnitts. Bei der normalen Grösse der Prismen (Querschnittskathete ca. 19 mm) beträgt die Maximalentfernung des tatsächlichen Winkelscheitels von der

durch den Querschnittsschwerpunkt gehenden Handgriffachse ungefähr $14\frac{1}{2}$ mm (s. Fig. 53). Um diese Unsicherheit zu vermindern, setzt man neuerdings das Prisma in ein Gehäuse, in welchem Spaltöffnungen die Veränderlichkeit von Eintritts- und Austrittsstelle einschränken. Vermeiden lässt sie sich durch eine von Schellens gezeigte Einrichtung, welche den Ablostepunkt nach dem im Falle bestimmter Instrumentenhaltung (Hypotenusenfläche parallel oder senkrecht zur beobachteten Richtung) tatsächlichen Strahlenschnittpunkt ausserhalb des Prismenquerschnitts verlegt und diese Haltung des Instruments durch Einstellung eines mit dem Instrument verbundenen Stifts auf

das Bild ermöglicht. (Vergl. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1906, S. 457 ff.; Zeitschr. f. Instrumentenk. 1907, S. 125 ff.).

(Anwendung, Prüfung und Richtigstellung der Prismeninstrumente siehe § 13.)

Kapitel III.

Ausführung der geodätischen Grundaufgaben.

§ 10. Abstecken (Sichtbarmachen) von Punkten.

Wir verstehen darunter die vertikale Aufpflanzung eines Stabs, die Anbringung einer Zieltafel etc. in dem durch einen Pflock, eine Röhre oder einen Markstein bezeichneten Punkt.

Zur Vertikalstellung dient — wenn die näherungsweise Beurteilung nach dem Auge nicht genügt — ein in etwa 2 m Entfernung aufgehaltener Senkel, längs dessen freischwebendem Faden man das Auge in einiger Entfernung bewegt, um zu untersuchen, ob er dem Stab auf seine ganze Ausdehnung parallel verläuft. Diese Untersuchung hat in zwei senkrecht zueinander stehenden Ebenen zu geschehen. Zweckmässig ist auch die Verwendung eines mit Dosenlibelle verbundenen Winkeleisens, das an den Stab angelegt wird (s. Fig. 23). Erweist sich eine Veränderung der durch Einstossen des Stabs erhaltenen Stellung als nötig, so ist immer (z. B. durch gleichzeitiges Festtreten der Erde) dafür zu sorgen, dass beim Abdrücken kein Hohlraum zwischen Stab und der ihn haltenden Umgebung entsteht.

Kann der betreffende Punkt nicht direkt aufgesteckt werden, weil dessen Materie das Eindringen der Stabspitze hindert (Markstein etc.), so verwendet man einen Dreifuss, dessen Platte gerade Raum bietet für den durchzusteckenden und auf dem Punkt aufzustellenden Stab, oder man befestigt den letzteren mittels Streben an einigen in der Nähe in den Boden eingetriebenen Pflocken. Kann man einen Stab nahe beim aufzusteckenden Punkt genügend fest in den Boden schief einstecken, so dass er den an richtiger Stelle vertikal gehaltenen Stab berührt, so kann man beide mittels einer Schnur, oder noch besser mittels des durch Fig. 1 beschriebenen Doppelrings aneinander befestigen.

Ist der aufzusteckende Punkt jeweils nur von einer bestimmten Richtung her anzuzielen, so kann man den Stab auch vor, oder hinter dem Markstein in der genannten Richtung in die Erde stecken. Nur darf dann nicht versäumt werden, die Aufsteckung zu verändern, sobald die Zielrichtung sich ändert.

Die Aufstellung der zur Erreichung grösserer Zielgenauigkeit verwendeten Signalscheibchen (s. Fig. 2) wird bei der Aufstellung des Theodoliten beschrieben werden.

Sollen, zur Sichtbarmachung auf grosse Entfernungen, dickere Stangen an bestimmter Stelle aufgepflanzt werden, so ist mittels eines hiezu geeigneten Gerätes (Hopfenlocher), oder mittels Grabwerkzeugen zuvor eine Grube von genügender Tiefe herzustellen, in welcher hernach die Stange eingesetzt und eingestampft, bezw. verkeilt wird. In diesem Fall wird der Sollpunkt vor Beginn der Arbeit in mindestens zwei, ungefähr senkrecht zueinander angeordneten Richtungen in bestimmter Entfernung versichert („abgelegt“). Diese Versicherungspunkte dienen dazu, während der und nach erfolgter Aufpflanzung der Stange die Übereinstimmung ihres Standortes mit dem Sollpunkt herstellen, bezw. prüfen zu können.

§ 11. Abstecken von Geraden

(„Einrichten“ oder „Einweisen“ zwischen zwei gegebenen Punkten, „Verlängern“ über einen der gegebenen Endpunkte hinaus).

Zahl der Punkte.

Eine Gerade gilt als abgesteckt, wenn von ihr so viele Punkte an Ort und Stelle bezeichnet sind, als den vorhandenen Umständen nach (Zweck der Absteckung, Witterung, Geländeform, Individualität des die Gerade Benützenden) nötig erscheint. Punktentfernung 10 m bis 60 m.

Ausführung des Einrichtens.

Nur in seltenen Fällen, namentlich bei kurzen Linien, erfolgt die Bestimmung der Geraden durch „Abschnüren“, sonst aber meist durch Zielung mit freiem, oder bewaffnetem Auge. Der Gehilfe welcher einen Stab vertikal in der Hand hält, wird dabei durch Hand- bezw. Armbewegung (mit dem linken Arm, wenn der Stab nach links, mit dem rechten, wenn er nach rechts verschoben werden soll; rasch, wenn es sich um einen grossen, langsam, wenn es sich um einen kleinen Rückungsbetrag handelt; mit gesenktem Arm, wenn der Stab im ganzen, mit erhobenem Arm, wenn er nur oben — senkrecht stellen! — zu verändern ist) darüber verständigt, an welcher Stelle und wie er den Stab einstecken soll. Das Signal „Feststecken“ wird durch Vertikalbewegung eines Arms, das Zeichen „Fertig“ durch gleichzeitige Vertikalbewegung beider Arme gegeben. Bei geringer Entfernung können die Weisungen auch zugerufen werden („vor“, „zurück“, je mit Angabe des ungefähren Rückungsbetrags).

Ein Punkt der Geraden ist näherungsweise gewonnen, wenn der eingewiesene Zwischenstab vom Anfangspunkt aus beobachtet, den Endstab der Geraden verdeckt. Für die endgültige, genaue Feststellung muss man sich aber noch vergewissern, ob die Bewe-

gungen des Auges nach links und rechts gleich gross sind, welche vom Anfangspunkt aus gemacht werden müssen, um den, vom soeben eingewiesenen, jetzt verdeckten hinteren Stab zu erblicken.

Der Einweisende stellt sich niemals direkt am Anfangspunkt, sondern immer einige Schritte hinter dem betreffenden Stab auf, auch wählt er die Zielrichtung derart, dass er Sonne und Wind möglichst im Rücken hat und den Anfangsstab unten benützt.

Die Art des Hintergrunds ist für die deutliche Sichtbarkeit des Endstabs, also für die Genauigkeit der abgesteckten Geraden von grosser Bedeutung. Häufig ist eine bessere Sichtbarkeit des Endstabs zu erzielen, wenn sich ein Messgehilfe aufrecht mit geschlossenen Beinen genau hinter ihm aufstellt. Ist die abzusteckende Linie kürzer als 200 m, so wird von „ausen herein“, d. h. zunächst der entfernteste, dann der zweite, nach ihm der dritte u. s. f. immer weniger entfernte Punkt abgesteckt, ist sie länger, oder die Witterung ungünstig, so ist es besser, zuerst den zunächstgelegenen Punkt abzustecken, und hernach durch Aufstellung des Einweisenden hinter diesem den zweiten u. s. w.

Wird die Fortsetzung der Geraden AB über einen der gegebenen Punkte, z. B. über A hinaus verlangt, „Verlängerung“, so wird zuerst der äusserste Punkt der verlangten Richtung so gesteckt, dass von ihm aus der zunächst gelegene (A) der gegebenen Stäbe als genau „eingewiesen“ erscheint. Alsdann wird die nötige Zahl von Zwischenpunkten nach dem Einweiseverfahren bestimmt.

Verlängerung.

Beim Verlängern einer Geraden ist zu beachten, dass jede Unrichtigkeit in der Aufsteckung eines der beiden gegebenen Punkte (ungenauere Punktwahl, ungenaue Vertikalstellung, oder Krümmung des Stabs, einseitige Beleuchtung) sich um so schädlicher äussert, je kürzer deren Entfernung und je grösser das zu verlängernde Stück ist.

Ungenaue Vertikalstellung der Stäbe wirkt besonders schädlich bei unebenem Gelände, wenn bald das untere, bald das obere Stabende zur Verwendung kommt.

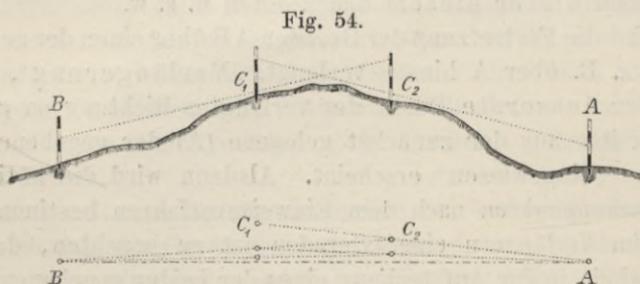
Befindet sich zwischen beiden Endpunkten der Geraden ein Tal, so wird zunächst der tiefste Punkt eingewiesen. Zu diesem Zwecke lässt man das Auge längs des, im vorliegenden Fall besonders genau senkrecht zu stellenden, Stabes oder, noch besser, längs des Fadens eines über dem Anfangspunkt aufgehängten Senkels in der Richtung nach dem jenseitigen Endpunkt abgleiten, die durch beide gebildete Vertikalebene nach unten verlängernd. Diese verlängerte Vertikalebene bestimmt den verlangten Punkt. (Je grösser diese Verlängerung, d. h. je stärker der Neigungsunterschied der beiden

Geländeschwierigkeiten.

Zielungen, um so unsicherer die Bestimmung, um so nötiger die Anwendung eines Projektionsinstruments z. B. eines Theodoliten). Von ihm aus erfolgt jetzt das Einrichten an beiden Talhängen aufwärts nach den soeben vorgeführten Methoden. Zur Probe müssen die zwei, dem tiefsten Punkt zu beiden Seiten benachbarten Punkte mit ihm in einer Geraden liegen.

Sind die beiden Endpunkte unzugänglich, oder verwehren Geländeerhebungen die direkte Absteckung, so kann man ohne Anwendung eines Projektionsinstruments meist nur genähert zum Ziel gelangen. Am einfachsten löst sich die Aufgabe, wenn mittels Ersetzung eines der allzu niederen Endpunkte durch eine (in diesem Fall besonders genau vertikal aufzuhaltende) Messstange, oder besser, durch Wahl eines nachher herabzulotenden Richtpunktes an einem Gebäude die Sichtbarkeit vom andern Endpunkt aus erzielt werden kann.

Die Methode des „gegenseitigen Einweizens oder Einrückens“ (s. Fig. 54) ist anwendbar, sobald sich zwei Punkte finden lassen,



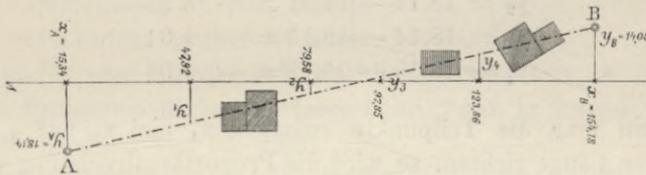
von deren jedem aus man über den andern weg einen Endpunkt der Strecke sehen kann. Man wählt zu diesem Zweck einen Punkt C_1 , möglichst entfernt von A, und einen zweiten C_2 , möglichst entfernt von B so aus, dass die Punkte in der Reihenfolge, AC_2C_1B aufeinander folgen. Nun weist man von C_1 aus den Stab C_2 in der Richtung nach A, von C_2 aus den Stab C_1 in der Richtung nach B ein und fährt damit abwechselnd solange fort, bis C_1C_2A und C_2C_1B als Gerade erscheinen. Man hat damit nichts anderes getan, als die Strecke C_1C_2 nach beiden Seiten bis A, bezw. B, verlängert. Für die Genauigkeit der Geraden gilt daher das beim Verlängern Gesagte: ihre Ausbauchung (bezw. Einschlag) wächst bei geringer Ungenauigkeit im Einweizen im Verhältnis $\frac{AB}{C_1C_2}$.

Dass und wie die Zahl der vergeblichen Rückungsversuche durch einfache Überlegung reduziert werden kann, braucht wohl nicht besonders erklärt zu werden.

Dieses Verfahren setzt die Verfügung über einen Gehilfen voraus. Man kann aber auch ohne einen solchen zum Ziel gelangen durch Verwendung der Kreuzscheibe, des Spiegelkreuzes oder des Prismenkreuzes (s. §§ 7 bis 9) auf einem Zwischenpunkt, wenn von ihm aus beide Streckenendpunkte sichtbar sind. Wenn ein solcher Punkt sich nicht finden lässt, so kommt man durch Zerlegung der Strecke in Teilstrecken mittels mehrmaliger Annäherungsversuche je in wechselnder Richtung zum Ziel.

Stehen bauliche-, oder Kulturhindernisse (Bäume etc.) Bauliche
Hindernisse. der direkten Absteckung im Weg, so wählt man eine beliebige andere Gerade, möglichst nahe und gleich gerichtet der abzusteckenden AB (Fig. 55). Man fällt sodann mittels eines der

Fig. 55.



im zweiten Kapitel vorgeführten Instrumente Lote von ihr nach den gegebenen Endpunkten A und B und misst sowohl deren Länge y_A und y_B , als auch den Abstand x_A und x_B ihrer Fusspunkte von einem beliebigen Punkt der abgesteckten Geraden. Es ergibt sich dann durch einfache Rechnung die Länge der Lote $y_1, y_2 \dots$ bis zur gesuchten Geraden, welche senkrecht zur abgesteckten Linie von denjenigen Punkten aus abzumessen sind, die man gelegentlich des Durchmessens bezeichnet hat.

Legt man nämlich den in der Vorwärtsrichtung und rechts von der abgesteckten Linie verlaufenden Strecken das Vorzeichen +, den übrigen das Vorzeichen - bei, so ergibt sich ohne Rücksicht auf die Lage der Figur aus ihr die Proportion (man denke sich zu deren Gewinnung durch A eine Parallele zur x-Achse gezogen bis zum Schnitt mit der verlängerten Ordinate von B)

$$(y_B - y_A) : (x_B - x_A) = (y_1 - y_A) : (x_1 - x_A),$$

woraus

$$y_1 - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x_1 - x_A) \text{ oder } y_1 = y_A + (x_1 - x_A) \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$y_2 = y_A + (x_2 - x_A) \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Beispiel: $y_B - y_A = - 14,08 - 18,14 = - 32,22$		1.50813 n
(z. Fig. 55). $x_B - x_A = 154,18 - 15,34 = 138,84$		2.14251
$x_A = 15,34$	$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$	9.36562 n
$x_1 = 47,92$	$x_1 - x_A = + 32,58$	1.51295
$x_2 = 79,58$	$x_2 - x_A = + 64,24$	1.80781
$x_3 = 97,85$	$x_3 - x_A = + 82,51$	1.91651
$x_4 = 123,86$	$x_4 - x_A = + 108,52$	2.03551
	$(x - x_A) \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \left\{ \begin{array}{l} - 7,56 \\ - 14,91 \\ - 19,15 \\ - 25,18 \end{array} \right.$	0.87857 n
		1.17343 n
		1.28213 n
		1.40113 n
$y_1 = 18,14 - 7,56 = + 10,58$		
$y_2 = 18,14 - 14,91 = + 3,23$		
$y_3 = 18,14 - 19,15 = - 1,01$		
$y_4 = 18,14 - 25,18 = - 7,04$		

Kann man die Teilpunkte zwischen x_A und x_B auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ etc. der ganzen Länge richten, so wird die Proportionalrechnung wesentlich vereinfacht; ist es möglich, die Hilfsgerade parallel der abzusteckenden Geraden zu legen, so fällt jede Rechnung weg, sämtliche y sind gleich gross. (Über Abstecken von Parallelen s. § 13.)

Je geringer die Divergenz zwischen der abgesteckten und der abzusteckenden Geraden, um so geringeren Einfluss auf den berechneten Wert der Ordinate y haben kleine Ungenauigkeiten in den Entfernungen x , um so weniger genau braucht man diese also zu messen.

Ist die abzusteckende Gerade AB sehr lang, oder gelingt es aus anderen Gründen nicht, eine Hilfsgerade auf ihre ganze Ausdehnung zu legen (Tunnelabsteckung, Abteilungsgrenzen in Wäldern), so ist man genötigt, eine Verbindung von Strecken, deren Längen und Brechungswinkel gemessen werden (Polygonzug), oder eine Kette von Dreiecken zu benutzen, deren Eckpunkte durch Winkel- bzw. Streckenmessung in gegenseitige Verbindung gebracht werden.

Die Messung dieser Grössen und die Berechnung der Absteckungselemente aus ihnen siehe Abschnitt III und IV.

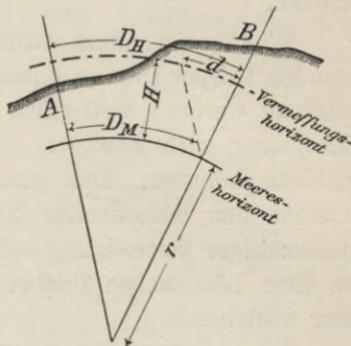
§ 12. Messen von Strecken.

In allen Fällen, in denen es sich um die Ermittlung der Horizontalprojektion irgendwie begrenzter Gebiete und zu diesem Zweck um die Messung von Strecken handelt, sind natürlich nicht

die tatsächlichen Längen dieser Strecken, sondern diejenigen ihrer Horizontalprojektionen gesucht.

Bei der Aufnahme grösserer Gebiete ist dabei zunächst festzustellen, auf was für eine Fläche (Vermessungshorizont) die Projektion erfolgen soll, und namentlich in welcher Entfernung von der Meeresoberfläche dieser Vermessungshorizont gedacht werden will. Als Projektionsfläche für die Aufnahme und Darstellung eines Landes von der Ausdehnung eines deutschen Mittelstaates, darf trotz der unregelmässigen wahren Erdgestalt, die Kugel gewählt werden, ohne dass dadurch allzu grosse Verzerrungen in den Abbildungen entstünden. Dabei ist aber das Mass für eine Strecke AB merklich verschieden, je nachdem man die Projektionsfläche in Meereshöhe, oder in irgend welchem grösseren Abstand von ihr wählt.

Fig. 56.



Der Unterschied $D_H - D_M$ beider Masse für die Strecke AB ist genähert $d = H \cdot \frac{D_M}{r}$.

Für eine mittlere Höhe $H = 500$ m einer Strecke $D = 10$ km wird z. B. dieser Unterschied $d = 500 \cdot \frac{10}{6370}$ m = 79 cm!

Die meisten Staaten haben als Vermessungshorizont direkt die Meeresoberfläche gewählt. Die Landesvermessung Württembergs wählte hiefür, entsprechend der mittleren Landeshöhe, die in einer Entfernung von 844 Pariser Fuss (= ca. 274 m) über dem Meer liegende Kugeloberfläche. Alle Längenmasse sind auf diesen Horizont reduziert. (Dies wäre bei der Vergleichung von Längenmassen verschiedener Staaten zu beachten.) Zur Aufnahme von Geländen, die 500 m höher als dieser Horizont gelegen sind, muss daher jede 5 m lange Messlatte das normale Mass von 5 m um $d = 500 \cdot \frac{5}{6370}$ mm = 0,4 mm überschreiten.

a) Messung mit Messstangen (Messlatten).

α) In horizontalem Gelände. Es werden zwei Messstangen verwendet, von denen abwechselungsweise immer eine auf dem Boden liegen bleibt, bis die nächste am vorderen Ende der ersteren angelegt ist. Man beginnt konsequent immer mit einer und derselben Stange und zwar damit, dass man am hinteren Ende anfassend, durch Wippen zunächst deren vorderes Ende in die Gerade bringt. Alsdann erst wird das hintere Stangenende mit dem Anfangspunkt

Messungs-
verfahren.

der Strecke zur Übereinstimmung gebracht. Die zweite Messstange wird, nachdem ihr vorderes Ende auf gleiche Weise in die Gerade gebracht worden ist, mit ihrem hinteren Ende am vorderen Ende der liegenden Messstange (1) angelegt. Nun wird Messstange (1) aufgenommen, an (2) angelegt und so fort bis zum Endpunkt der Strecke.

Wichtig ist, dass durch das Anlegen der Messlatten keine fremden Körper (Steine u. dergl.), auf denen die Stange ruht, aufgekantet werden, weil diese leicht infolge nachträglicher äusserer Einwirkung sich bewegen und die auf ihnen ruhende Stange verschieben könnten. Das genaue Anlegen erfolgt daher durch Einstreifen des betreffenden Stangenendes von oben herab, unter gleichzeitiger Beseitigung solcher Körper durch Drehen der Stange um ihre Längsachse (hiebei niemals in der Längsrichtung ziehen oder schieben!).

Beim Aufnehmen der hinteren Messstange (Vorsicht, damit die vordere keine Verschiebung erleidet!) wird das niederste Mass, das auf der liegenden Messstange abgelesen werden kann, laut gezählt.

Zur Bedienung der Stangen ist in horizontalem Gelände immer nur ein einziger Messgehilfe erforderlich, welcher die aufzuhebende Stange an ihrem vorderen Ende anfasst und während des Vorgehens bis zum vorderen Ende der liegenden Stange in der Hand bis zur Mitte gleiten lässt. An letzterem Punkt angelangt, wirft der Gehilfe durch kurze schleudernde Bewegung das vordere Stangenende in die Gerade vor, während er das hintere zum Zweck des Anlegens in der Hand behält. Abgesehen von der Messung längs einer Mauer etc., an welche die Latte angepresst wird, wobei je ein Mann die Festhaltung der Stange, ein dritter das Anlegen besorgt, darf niemals eine Latte während des Anlegens in der Mitte angefasst werden.

Das Schlussstück auf der zuletzt angelegten Messlatte gibt, zur zuletzt gerufenen Zahl addiert, die ganze Streckenlänge.

Ist die Zahl der Längeneinheiten pro Messstange ungerade (3 m, 5 m), so ergeben sich beim Aufheben der Messstange (1) (Unterscheidung durch verschiedenfarbigen Anstrich) immer ungerade Zahlen, beim Aufheben von (2) lauter gerade Zahlen, wodurch man einen gewissen Schutz gegen Zählfehler gewinnt.

Zerfällt eine Strecke in verschiedene Abschnitte (Abszissen), so werden diese zweckmässigerweise nicht abgesetzt, sondern es

wird die ganze geradlinige Erstreckung durchlaufend gemessen und an den Zwischenpunkten jeweils nur abgelesen.

Häufig kommt es vor, dass nachträglich noch weitere Punkte in die zuvor durchlaufend ausgeführte Messung einzuschalten sind. Beschränkt sich dies auf einen einzigen Punkt, so kann man seine Entfernung von je einem vorwärts und einem rückwärts gelegenen, bereits abgelesenen Punkt ermitteln und durch Addition bezw. Subtraktion das ihm zugehörige Mass mit Probe rechnen. Ist die Zahl der einzuschaltenden Punkte grösser, so zieht man zum Schutz gegen Rechnungs- etc. Fehler vor, an einem früher abgelesenen, in der Nähe der einzuschaltenden Punkte gelegenen Punkt das ursprünglich abgelesene Mass wieder anzulegen (die ursprüngliche Stangenlage herzustellen), und alsdann weiter messend die fraglichen Ablesungen nachzuholen. Niemals darf dann jedoch versäumt werden, an einem weiteren, gleichfalls in der ersten Messung enthaltenen, am Ende der einzuschaltenden Punktgruppe gelegenen Punkt die Richtigkeit der nachträglich wiederhergestellten Stangenlage zu prüfen.

Nachträgliche Einschaltung von Punkten.

Die Wiederholung der ganzen Messung vom Anfangspunkt aus wäre nicht bloss zeitraubender, sondern, infolge der unvermeidlichen, teilweise in verschiedener Richtung wirkenden kleinen Messungsfehler, auch ungenauer.

Die Einschaltung kann in der ursprünglichen Messungsrichtung, oder ihr entgegengesetzt erfolgen. Im ersten Fall ist natürlich aufwärts wie bei der Urmessung, im zweiten Fall abwärts laut zu zählen und zwar in beiden Fällen immer das kleinstmögliche Mass, das auf der jeweils liegenden Stange abgelesen werden kann.

Ist eine Folge von Messstangen wesentlich und allmählich aus der zu messenden Geraden gekommen, so ist die Fehlerwirkung auch bei verhältnismässig erheblicher Ausbeugung unbedeutend, wenn die Rückkehr in diese Gerade nicht plötzlich, sondern allmählich geschieht. Bei einer Ausbeugung z. B. um 50 cm würde sofortiges, auf eine einzige Lattenlänge beschränktes, Einschwenken in die Soll-Gerade ein um $(5 - \sqrt{5^2 - 0,5^2})\text{m} = 25\text{ mm}$ zu langes Mass ergeben. Die Verteilung des Einschwenkens auf 5 Messstangen würde dagegen diesen Fehler auf $25 - \sqrt{25^2 - 0,5^2}\text{m} = 5\text{ mm}$ herabdrücken.

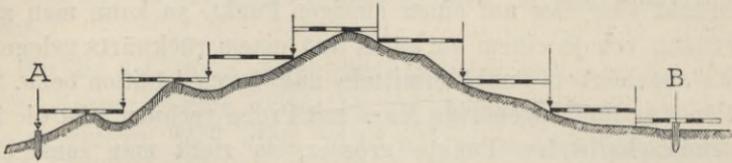
β) In geneigtem oder unebenem Gelände. Unsere Aufgabe besteht, wie wir festgestellt haben, in der Ermittlung der Horizontalprojektion der verlangten Strecke AB.

Diese wird erhalten (1) durch „Staffelmessen“ (s. Fig. 57), bei welchem jede Messstange horizontal derart gelegt wird, dass sie in einem Punkt auf dem Boden aufruht. Mittels Senkels sorgt man dafür, dass das hintere Ende der anzulegenden Stange genau

Staffelmessen.

vertikal über oder unter dem vorderen Ende der andern sich befindet. Da das Auge nicht gleichzeitig an zwei Punkten (oben und unten) die Übereinstimmung von Stangenende und Senkel prüfen

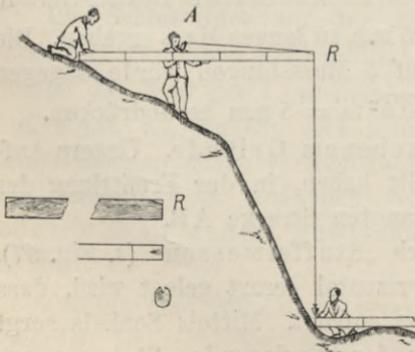
Fig. 57.



kann, wird die Senkelschnur mit dem Zeigefinger der rechten Hand gegen das höher liegende Stangenende gepresst, und die ganze Aufmerksamkeit auf die Übereinstimmung des unteren Stangenendes mit der Senkelspitze gerichtet. Die horizontale Lage wird mittels eines Gradbogens, einer Libelle oder auch bloss nach dem Augenmass hergestellt. Um das „Einschlagen“ der nur in einem Punkt auf dem Boden aufliegenden, meist nicht völlig geraden Latte zu verhindern, ist deren Bogen nach oben zu richten, was dann erreicht ist, wenn der grösste Kraftaufwand gegen selbsttätige Drehung der Stange um die Verbindungsgerade ihrer Enden nötig ist.

Bei sehr stark geneigtem Gelände fällt das Absenkeln wegen der grossen Höhe des einen Stangenendes über dem Boden schwer. Es werden in solchem Fall vielfach Teile der Stangenlänge (2, 3, 4 m) abgesenkelt. Dieses Verfahren ist unzweckmässig, weil die Unterabteilungen der Messgeräte häufig nicht genügend genau bezeichnet sind, überdies die Fehlerfortpflanzung eine ungünstige und die Gelegenheit zu Zählfehlern leicht gegeben ist. Auch das indirekte Abloten ganzer Stangenlängen durch Seitwärtsaufstellen des Beobachters und Zielen entlang der Senkelschnur ist ungenau. Besser ist es, direkt und grundsätzlich nur ganze Stangenlängen abzuloten und zu diesem Zweck Rillen R entlang derjenigen Mantellinie jedes der beiden

Fig. 58.



Zwingenenden einzufeilen, welche nach oben zu liegen kommt, wenn man die Stange mit dem einen Ende auf den Boden, mit dem andern auf die flache Hand legt (Krümmung nach unten). Bei der Messung bringt der Messgehilfe, welcher das auf dem Boden aufliegende Stangenende anlegt und festhält, die an diesem angebrachte, folglich auch die andere Rille, nach oben. In

letzterer läuft der nötigenfalls hinten bei A (s. Fig. 58) gehaltene Senkelfaden, wenn es bei horizontaler Stangenhaltung unmöglich ist, zu dem hochgehaltenen Stangenende zu gelangen.

Die Frage, ob bergauf oder bergab gemessen werden soll, ist eine teils technische, teils wirtschaftliche.

Messungs-
richtung
bergauf oder
bergab?

Die besten Resultate liefern das $\left. \begin{array}{l} \text{Bergabmessen mit 4} \\ \text{Bergaufmessen mit 3} \end{array} \right\}$ Gehilfen (an jedem Stangenende ein Gehilfe). Ersteres erfordert einen Gehilfen mehr als das letztere, zum Anlegen und Festhalten des hinteren Endes der vorderen Messstange, der beim Bergaufmessen dadurch erspart werden kann, dass der absenkelnde Gehilfe das vordere Ende der hinteren Messstange nebenbei mit dem Fuss auf dem Boden festhält. Er hat aber in diesem Fall — nach erfolgtem Anlegen der Stange am Senkelfaden bzw. während des Festtretens von deren äusserstem, auf der Erde aufliegendem Ende durch den dritten Mann — jedesmal zu kontrollieren, ob hiebei nicht eine Verschiebung der soeben angelegten Messstange erfolgt ist. Dies geschieht durch Beobachtung etwaiger Schwankungen des Senkels, dessen Faden während des Festtretens des vorderen Stangenendes an dem hinteren Ende angepresst bleibt. Sodann übergibt er das soeben angelegte Stangenende dem hinteren Gehilfen, nimmt die hintere Stange nach vorn und setzt seinen Fuss hinter denjenigen des dritten Mannes, der jetzt erst loslassen darf, um (auf der entgegengesetzten Seite vom Absenkelnden) eine Stangenlänge weiter vorn auf Zuruf des letzteren das Ende der nächsten Stange wie zuvor festzuhalten u. s. f.

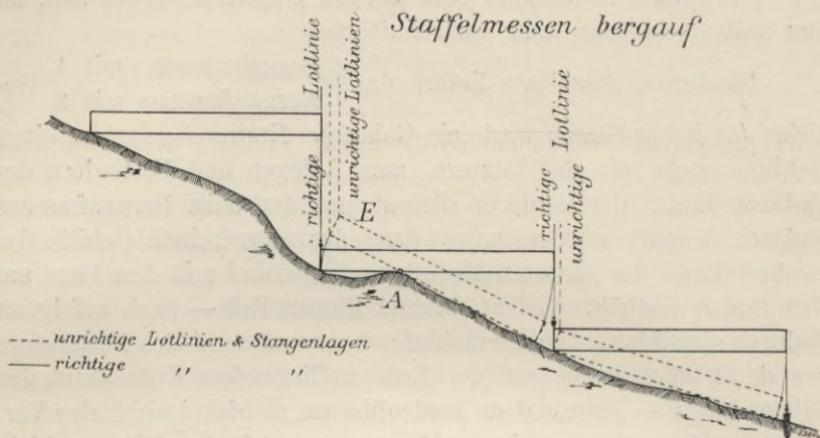
Bei Beschränkung des Hilfspersonals auf zwei Mann muss man bei steilem Gelände darauf verzichten, das obere Stangenende festtreten zu lassen, und sich mit der freien Haltung des unteren begnügen. Man läuft aber Gefahr, dass hiebei Verschiebungen der jeweils in horizontaler Lage unverändert zu erhaltenden Stange eintreten, welche Längenfehler erzeugen.

Ist die Geländeneigung nur gering, so ist es nicht absolut erforderlich, beide Messstangen gleichzeitig horizontal zu halten. Vielmehr kann dies auf diejenige Stange beschränkt werden, deren vom Boden abstehendes Ende eben angelegt werden soll, oder für das Anlegen der nächsten Stange massgebend ist. Nur darf dann nicht vergessen werden, die Senkelspitze mit demjenigen Punkt der geneigtliegenden Messstange in Übereinstimmung zu bringen, der bei Rückkehr zur normalen (horizontalen) Stangenhaltung seine Lage beibehält, — d. h. dem auf dem Boden aufliegenden. Ausgeschlossen ist diese Erleichterung, welche beim Messen bergauf wie bergab je einen Gehilfen sparen, d. h. bergauf mit zwei Ge-

Staffeln bei
geringer
Neigung.

hilfen auskommen lässt, wenn (vergl. Fig. 59) das obere Ende E der geneigt liegenden Stange den Boden nicht berührt und daher beim

Fig. 59.



Kippen selbst einen Kreisbogen um den Auflagerpunkt A beschreibt.

Messung bergab mit Abgleiten des Senkels.

Auch beim Messen bergab lässt sich übrigens mit zwei Gehilfen auskommen, wenn man die folgende Stange nicht an der freischwebenden Senkelspitze, sondern an dem Punkt anlegt, den der am knotenfreien Faden vom oberen Stangenende rasch aber ruhig abgleitende Senkel auf dem Boden erzeugt. Voraussetzung für dieses bequeme und rasch fördernde Verfahren ist nur, dass die Bodenverhältnisse sich hierfür eignen (keine Geröllhalden), und dass die durch kleine Senkelschwankungen und Ablenkungen beim Einspicken der Senkelspitze in den Boden verursachten Fehler in Kauf genommen werden wollen.

Bei sehr geringen Neigungen und wenn drei Mann zur Verfügung stehen, empfiehlt es sich, zwei Stangen in der Mitte zusammenzuhalten und (bei Anwendung von 5 m langen Stangen) je 10 m abzusenkeln.

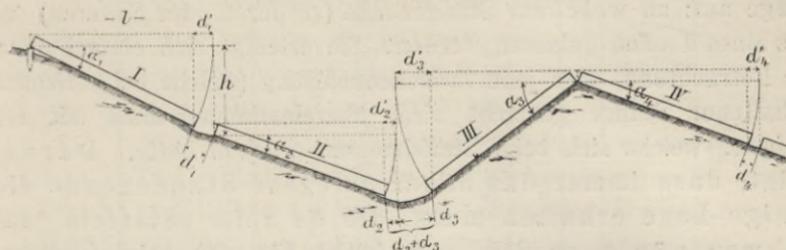
Einen Ersatz für das immerhin zeitraubende Staffelmessen bildet bei wenig und gleichmässig geneigtem Gelände:

Messen mit „Zugeben“.

2) Das Messen mittels „Zugeben“. Man legt hiebei die Messstange auf den Boden, lässt aber, gleichgültig, ob bergab oder bergauf gemessen wird, einen kleinen Zwischenraum d zwischen den Stangenenden offen, dessen Grösse von der Geländeneigung abhängig ist, und sich ergibt als Abstand des Fusspunkts des bei horizontal gehaltener Stange vom hochgelegenen Ende herabgelassenen Lots von dem Ort, den dasselbe Stangenende einnimmt, wenn man bei

Festhaltung des oberen Endes die Stange auf das Gelände herabkippt (s. Fig. 60). Dieser „zuzugebende“ Zwischenraum d wird entweder auf die soeben geschilderte Art von Zeit zu Zeit versuchs-

Fig. 60.



weise, oder durch Verwertung des Höhenunterschiedes h der beiden in Betracht kommenden Stangenenden rechnerisch ermittelt.

Ist nämlich die Stangenlänge = l , so wird

$$d = \sqrt{l^2 + h^2} - l$$

oder durch Entwicklung

$$d = \frac{h^2}{2l} - \frac{h^4}{8l^3} + \frac{h^6}{16l^5} - \dots$$

Für kleine Höhendifferenzen h treten die hinteren Summanden gegenüber dem ersten völlig zurück, wie nachstehende, für die Lattenlänge $l = 5$ m berechnete Tabelle zeigt.

h	Summand			Gesamt- mass d mm	h	Summand			Gesamt- mass d mm
	I	II	III			I	II	III	
dm	+ mm	- mm	+ mm	mm	dm	+ mm	- mm	+ mm	mm
1	1	0	0	1	10	100	1,0	0	99
2	4	0	0	4	11	121	1,4	0	120
3	9	0	0	9	12	144	2,1	0	142
4	16	0	0	16	13	169	2,9	0	166
5	25	0	0	25	14	196	3,7	0	192
6	36	0,1	0	36	15	225	5,1	0	220
7	49	0,2	0	49	16	256	6,5	0	249,5
8	64	0,4	0	64	17	289	10,5	0	278,5
9	81	0,6	0	80	18	324	13,1	0	311

Die zusammengehörigen Werte in der ersten und letzten Spalte zeigen bis zum Höhenunterschied $h = 9$ dm die sehr einfache und leicht zu merkende Beziehung:

$$d = \frac{h^2}{10} \text{ m etc. oder } d_{\text{mm}} = (h \text{ dm})^2,$$

d. h. das Quadrat des in dm ausgedrückten Höhenunterschieds ist bei Anwendung von 5 m langen Messgeräten gleich der Anzahl der zuzugebenden mm. (Der durch un-

richtige Lattenhaltung erzeugte Fehler f_h im Vertikalabstand h wirkt auf die Entfernung d mit dem Betrag $f_d = 2 \cdot h \cdot f_h$, wächst also mit der Höhe.)

Beim Überschreiten von Tal- und Rückenbildungen tritt die Frage auf: an welchem Stangenende (vorderen oder hinteren) soll das Mass d offen gelassen werden? Sie erledigt sich einfach durch die Betrachtung, dass jede Zwischenablesung (welche bei horizontal gehaltener Stange gemacht wird) übereinstimmen muss mit derjenigen, welche sich beim Staffelmessen ergeben hätte. Daraus folgt, dass immer das höher gelegene Stangenende diejenige Lage erhalten muss, die es beim „Staffeln“ einnehmen würde, so dass z. B. (siehe Fig. 60) beim Übergang von Gefäll zu Steigung beide Lücken nebeneinander auftreten, von Steigung zu Gefäll keine der Lücken auftreten.

Gradbogen-
messung.

Statt das zuzugebende Stück d aus dem Höhenunterschied h zu berechnen, welcher auf eine Stangenlänge l entfällt, kann man es auch aus dem Neigungswinkel α der Messstange ermitteln, den man mit Hilfe des in der Stangenmitte aufgesetzten Gradbogens, oder Lattenreiters abliest.

Es ergibt sich nämlich für die Horizontalprojektion von d

$$d' = l - l \cdot \cos \alpha = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Für die Stangenlänge

$$l = 5 \text{ m} \text{ wird } d' = 10 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Trägt der Gradbogen oder der Lattenreiter statt einer gleichmässigen Winkelteilung eine (in diesem Fall ungleichmässige, und von der Länge der verwendeten Latte abhängige) Teilung nach runden Werten des horizontalen Reduktionsbetrags d' , so wird dieser direkt abgelesen und braucht nicht erst errechnet zu werden.

Bei Anwendung des „Schrägmessers“ (s. § 6) erscheint das zuzugebende Stück d' direkt zwischen den betr. Stangenenden, sobald die Wasserwage einspielt. Andernfalls schiebt man entweder den Messkeil bis zu dem der abgelesenen Stangenneigung entsprechenden Strich zwischen die aneinander anzulegenden Lattenenden, oder man legt sich nach vorstehender Formel für die zu verwendende Lattenlänge l und wechselnde Werte des Neigungswinkels α eine Tafel über die Reduktionsbeträge d' in der Form der nachstehenden, dem v. Schleicherschen Geometer-Kalender entnommenen, an (s. S. 71). Letztere liefert für $l = 10 \text{ m}$ die horizontal gemessenen Reduktionsbeträge:

$$d' = 20 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Für Neigungswinkel α in alter Teilung:

α			α			α		
°	'	mm	°	'	mm	°	'	mm
0	0	0	9	0	123	18	0	489
	10	0		10	128		10	498
	20	0		20	132		20	508
	30	0		30	137		30	517
	40	1		40	142		40	526
	50	1		50	147		50	535
1	0	2	10	0	152	19	0	545
	10	2		10	157		10	554
	20	3		20	162		20	564
	30	3		30	167		30	574
	40	4		40	173		40	583
	50	5		50	178		50	593
2	0	6	11	0	184	20	0	603
	10	7		10	189		10	613
	20	8		20	195		20	623
	30	10		30	201		30	633
	40	11		40	207		40	644
	50	12		50	213		50	654
3	0	14	12	0	219	21	0	664
	10	15		10	225		10	675
	20	17		20	231		20	685
	30	19		30	237		30	696
	40	20		40	243		40	707
	50	22		50	250		50	717
4	0	24	13	0	256	22	0	728
	10	26		10	263		10	739
	20	29		20	270		20	750
	30	31		30	276		30	761
	40	33		40	283		40	772
	50	36		50	290		50	784
5	0	38	14	0	297	23	0	795
	10	41		10	304		10	806
	20	43		20	311		20	818
	30	46		30	319		30	829
	40	49		40	326		40	841
	50	52		50	333		50	853
6	0	55	15	0	341	24	0	865
	10	58		10	348		10	876
	20	61		20	356		20	888
	30	64		30	364		30	900
	40	68		40	372		40	912
	50	71		50	379		50	925
7	0	75	16	0	387	25	0	937
	10	78		10	395		10	949
	20	82		20	404		20	962
	30	86		30	412		30	974
	40	89		40	420		40	987
	50	93		50	428		50	999
8	0	97	17	0	437	26	0	1012
	10	101		10	445		10	1025
	20	106		20	454		20	1038
	30	110		30	463		30	1051
	40	114		40	472		40	1064
	50	119		50	480		50	1077
9	0	123	18	0	489	27	0	1090

Für Neigungswinkel α in neuer Teilung:

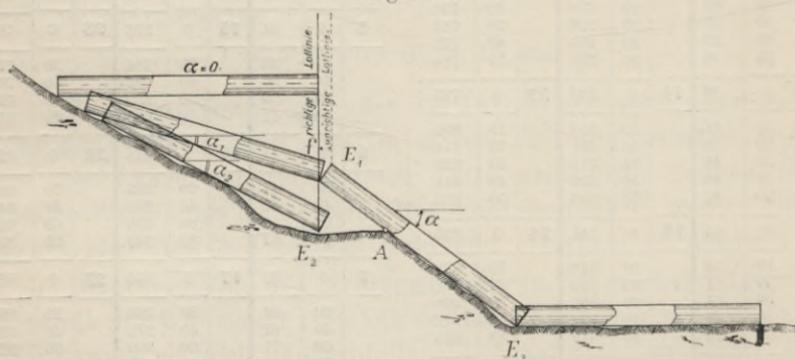
α			α			α		
°	'	mm	°	'	mm	°	'	mm
0	0	0	10	0	123	20	0	489
	20	0		20	128		20	499
	40	0		40	133		40	509
	60	0		60	138		60	519
	80	1		80	144		80	529
1	0	1	11	0	149	21	0	539
	20	2		20	154		20	549
	40	2		40	160		40	560
	60	3		60	166		60	570
	80	4		80	171		80	581
2	0	5	12	0	177	22	0	591
	20	6		20	183		20	602
	40	7		40	189		40	613
	60	8		60	195		60	624
	80	10		80	201		80	635
3	0	11	13	0	208	23	0	646
	20	13		20	214		20	657
	40	14		40	221		40	668
	60	16		60	227		60	679
	80	18		80	234		80	691
4	0	20	14	0	241	24	0	702
	20	22		20	248		20	714
	40	24		40	255		40	726
	60	26		60	262		60	737
	80	28		80	269		80	749
5	0	31	15	0	276	25	0	761
	20	33		20	284		20	773
	40	36		40	291		40	785
	60	39		60	299		60	798
	80	41		80	306		80	810
6	0	44	16	0	314	26	0	822
	20	47		20	322		20	835
	40	50		40	330		40	848
	60	54		60	338		60	860
	80	57		80	346		80	873
7	0	60	17	0	354	27	0	886
	20	64		20	363		20	899
	40	67		40	371		40	912
	60	71		60	380		60	925
	80	75		80	388		80	938
8	0	79	18	0	397	28	0	952
	20	83		20	406		20	965
	40	87		40	415		40	979
	60	91		60	424		60	992
	80	95		80	433		80	1006
9	0	100	19	0	442	29	0	1020
	20	104		20	451		20	1034
	40	109		40	461		40	1048
	60	113		60	470		60	1062
	80	118		80	480		80	1076
10	0	123	20	0	489	30	0	1090

Bei Verwendung 5 m langer Latten sind vorstehende Tafelangaben also nur je zur Hälfte zuzugeben. Sind innerhalb der beiden Endpunkte einer Strecke Zwischenablesungen oder Absteckungen zu machen, so lässt man zwischen den einzelnen Stangenlagen je den Zwischenraum d' offen, andernfalls ist es bequemer, die Latten durchweg zur Berührung zu bringen, und die Summe dieser Reduktionsbeträge d' am Schlusse von dem zusammenhängend und geneigt gemessenen Gesamtmass abzuziehen.

Erfolgt die Ablesung auf einer geneigt liegenden Messstange, so ist für die Schlussstrecke natürlich nur der verhältnismässige Anteil des auf die ganze Stange entfallenden Reduktionsbetrags in Rechnung zu nehmen (Beispiel einer Gradbogenmessung mit nachträglicher Berücksichtigung der Reduktionsbeträge s. § 44).

Vor dem Aufsetzen des Gradbogens ist, um unbeabsichtigte Lattenverschiebungen zu vermeiden, darauf zu achten, dass jede Messlatte satt auf dem Boden aufruft. Erhalten in dieser Lage die aneinander anzulegenden Stangenenden verschiedene Höhe, so ist deren Übereinstimmung durch Abloten, keinesfalls aber (im Gegensatz zur Staffelmessung) durch nachträgliche, wenn auch noch so geringe, unberücksichtigte Änderung der bereits in Rechnung gezogenen Stangenneigung herzustellen. (Nötigenfalls wiederholte Ablesung der veränderten Neigung.) Etwaige unbeachtete nachträgliche Hebung eines

Fig. 61.



Stangenendes wirkt um so verhängnisvoller, je grösser die Neigung der Stangenlage gegen die Horizontale ist (s. Fig. 61 Lattenende links).

Von besonderer Wichtigkeit bei der geneigten Messung ist das Anlegen am richtigen Stangenendpunkt. (Bei Stangen mit Endflächen, konsequent Unterkante an Unterkante, keilförmige Enden sind hier vorzuziehen.)

Gegenüber der geneigten hat bei der Verwendung von Latten die Staffelmessung den Vorzug, dass sie keinerlei Überlegung,

sondern nur einige Übung des Messgehilfen erfordert. Auch erzeugt bei ihr ein gewisser Neigungsfehler der horizontal zu haltenden Messstange unabhängig von der Geländeform einen konstanten und nur geringen Anlegefehler (n^2 mm bei n dm Fehler in der Höhe eines der Stangenenden), während bei geneigter Messung der Einfluss desselben Neigungsfehlers proportional dem \sin^2 der halben Lattenneigung wächst. Je stärker die letztere, um so verhängnisvoller ein bei ihrer Ermittlung unterlaufener kleiner Fehler. Aus diesem Grund wird die Staffelmessung, auch wenn die einzelnen unveränderlichen Fehlerquellen bei der Gradbogenmessung kleiner sind, bei stärkeren Geländeneigungen die genaueren Resultate liefern. Man kann die Grenzneigung, bis zu welcher die Gradbogen —, von welcher ab aber die Staffelmessung im Hinblick auf die Genauigkeit im Vorteil ist, angenähert wie folgt errechnen:

Hauptsächliche Fehlerquellen der Staffelmessung		Hauptsächliche Fehlerquellen der Gradbogenmessung
Einfluss unrichtiger Höhe des abzusenkelnden Stangenendes	+ 1,5 mm	} regel. Fehler Anlegefehler (Unterkante an Unterkante) ($\pm 0,5$ mm)
Einfluss des Stangenein- schlags	+ 1,5 mm	
Vernachlässigter Einfluss der Senkelschnurdicke	- 0,5 mm	
Unsicherheit des Anlegens am schwankenden Lot (windiges Wetter, stumpfe Spitze)	$\pm 1,5$ mm	} unregelm. Fehler Zulässiger Einfluss des Feh- lers f_α in der Ermittlung der Lattenneigung $\alpha \pm 3,1$ mm
Verschiebung der Latte beim Horizontalhalten, Absenkeln etc.	± 1 mm	
Mittlere Gesamtwirkung $= \sqrt{2,5^2 + 1,5^2 + 1^2} = 3,1$ mm		

also zulässig $1 \cos \alpha - 1 (\cos \alpha \pm f_\alpha) = 3,1$ mm. Entwickelt man und setzt den unvermeidlichen Fehler in der Neigungsermittlung (Ablesefehler, Einfluss von Wind und Regen, Divergenz zwischen Stangenachse und Auflagerlinie etc.) $f_\alpha = \pm 10'$ a. T. ($\frac{\cos f_\alpha}{\sin f_\alpha} = \frac{1}{f_\alpha}$) so wird

$$3,1 \text{ mm} = \pm 1 \cdot f_\alpha \sin \alpha \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{3,1}{1 \cdot f_\alpha} = \frac{3,1 \cdot g'}{5000 \cdot 10} = 0,21$$

$$\alpha = \text{ca. } 12^\circ.$$

Die Richtigkeit vorstehender Annahmen vorausgesetzt, liefert also die Gradbogenmessung bis zu Neigungen von 12° die besseren Resultate. Bei stärkeren Neigungen ist die Staffelmessung überlegen.

Bei der vorstehenden Untersuchung wurden regelmässige, in konstanter Richtung wirkende, Fehlerquellen mit zufälligen vermenget, was streng genommen unzulässig ist. In der Tat zeigen die mit Studierenden der württb. Fachschule für Vermessungswesen seit Jahren angestellten Versuche, dass die mehrfach wiederholte Staffelmessung mit schätzungsweise Herstellung der horizontalen Stangenlage für dieselbe gleichgültig — ob mehr, oder weniger geneigte — Strecke nicht bloss den grösseren unregelmässigen Fehler, sondern immer ein (erheblich) grösseres Mass liefert.

Wirtschaftlich ist die Gradbogenmessung durchaus im Vorteil, weil sie weniger Personal und erheblich weniger Zeit beansprucht, als die Stafflung, und etwaige Zählfehler des Messgehilfen durch die Zahl der notierten Reduktionsbeträge offenbart.

b) Zum Messen mit Band oder Kette sind zwei Mann erforderlich, von denen jeder einen der durch die Endringe gesteckten Stäbe bedient. Der erste stellt seinen Stab auf den Anfangspunkt und weist den andern Gehilfen zunächst in die Gerade ein. (Vorgängiges Einweisen von Zwischenpunkten bei der Bandmessung unnötig.) Es folgt sodann ein kurzes Heben mit gleichzeitigem Anspannen des vorderen Band- (Ketten-) Endes. Dabei wird der Endpunkt des Bandmasses auf dem Gelände eingestochen und sodann mittels einer Nadel bezeichnet. Beide Gehilfen bewegen sich nun vorwärts, bis der am hinteren Ende befindliche die vorhin gesteckte Nadel erreicht, die er durch seinen Bandstab ersetzt. Das Verfahren wiederholt sich in gleicher Weise bis zum Endpunkt der Strecke. Die Zahl der vom hinteren Gehilfen gesammelten Nadeln gibt die Zahl der durchmessenen Bandlängen an. Während der Fortbewegung ist, namentlich bei Verwendung des Bandes, darauf zu achten, dass dasselbe sich nicht verschränkt, weil es sonst beim Anspannen leicht bricht. (Über Einrichtungen zur Verringerung des Anreihfehlers und des Einflusses veränderten Zugs vergl. § 2 β).

Bei geneigtem Gelände wird an einem der Bandstäbe ein Gefällmesser, am andern in gleicher Höhe von der Stabspitze eine Zieltafel befestigt. Man erhält dann den Reduktionsbetrag d' wie bei Verwendung des Gradbogens aus der beobachteten Neigung α des Bandes und seiner Länge l :

$$d' = l - l \cos \alpha.$$

Zeigt der Gefällmesser die Neigung in Prozenten p an, so wird

$$d' = l - \sqrt{l^2 - \left(\frac{p \cdot l}{100}\right)^2} = l - l \sqrt{1 - \frac{p^2}{10000}}$$

und durch Ausziehen der Wurzel

$$d' = \frac{p^2 l}{20000} + \frac{p^4 l}{80000000} + \dots$$

oder
$$d' \text{ in mm} = \frac{p^2 l}{20} + \frac{p^4 l}{800000} + \dots$$

Für die Bandlänge $l = 20 \text{ m}$ wird

$$d'_{\text{mm}} = p^2 + \frac{p^4}{40000} + \dots$$

Das zweite und die weiteren Glieder treten bei geringen Neigungen gegenüber dem ersten zurück und es bleibt für das 20 m lange Band und Geländeneigungen bis etwa 10% eine ebenso leicht zu merkende Regel, wie S. 69 für die 5 m-Stange:

$$d' \text{ in mm} = p^2,$$

d. h. das Quadrat der in Prozenten ausgedrückten Geländeneigung ist bei Anwendung von 20 m langen Messgeräten gleich der Anzahl der zuzugebenden mm.

Vergleichende Würdigung der Stangen-, Band- und Kettenmessung. Die Anwendung von Band und Kette ist bei stark wechselndem Gelände (Mauern, Raine, Konvexformen) sehr schwerfällig und bei Schollenbildung gegenüber der Stangenmessung weitaus minderwertig; bei stark mit Gräben etc. durchzogenem Wiesengelände, gleichmässige, nicht allzugrosse Neigung vorausgesetzt, dagegen der Stangenmessung vorzuziehen. Immerhin beansprucht sie neben dem ablesenden Techniker stets zwei Messgehilfen, während die Stangenmessung (wenigstens in der Horizontalen) nur einen Mann erfordert. Dagegen ist der Zeitaufwand für die Bandmessung in horizontalem Gelände schon mit Rücksicht auf den Wegfall der Absteckung von Zwischenpunkten in die Gerade geringer, der Transport des Bandes ist bequemer, als derjenige der Messstangen.

Stangen-,
Band- oder
Ketten-
messung?

Über die bei Anwendung der verschiedenen Geräte und Messungsverfahren erzielbare Genauigkeit und den damit verbundenen Aufwand an Zeit und Arbeitskräften geben Messungsversuche Aufschluss, welche unter wechselnden Umständen je mehrfach ausgeführt werden. Die bei einer Messungsreihe erreichte Genauigkeit zeigt sich rechnerisch wie folgt: Die mehrfache, gleich sorgfältige Messung einer Strecke, ausgeführt

nach einem Verfahren (oder mit Geräten) **A** nach einem Verfahren (oder mit Geräten) **B**

haben folgende Werte ergeben:

$l_1 = 255,26$	$l'_1 = 255,31$
$l_2 = 255,36$	$l'_2 = 255,21$
$l_3 = 255,27$	$l'_3 = 255,20$
$l_4 = 255,31$	$l'_4 = 255,21$
$l_5 = 255,11$	$l'_5 = 255,31$
$l_6 = 255,25$	$l'_6 = 255,32$

Als bestmöglichen Wert für die Streckenlänge erhält man in beiden Fällen das arithmetische Mittel

$$L = 255,26$$

$$L' = 255,26.$$

Bildet man jetzt die Verbesserungen v in beiden Gruppen, welche den einzelnen Messungsergebnissen zuzuschlagen sind, um diese zum wahrscheinlichsten Wert zu ergänzen (deren Summe = 0 sein muss), je ausgedrückt in cm:

v	
+	—
0	
	10
	1
	5
15	
1	
$\Sigma = 16 \quad \quad 16$	

v	
+	—
	5
5	
6	
5	
	5
	6
$\Sigma = 16 \quad \quad 16$	

so bildet deren Grösse einen Massstab für die bei jeder Einzelmessung erreichte Genauigkeit um so sicherer, je näher das gebildete arithmetische Mittel der wahren Streckenlänge kommt. Für die bei einer Messung in jeder der beiden Gruppen im Mittel erreichte Genauigkeit ist man geneigt, den durchschnittlichen Betrag der zugehörigen v , im vorliegenden Fall also beidesmal zu setzen: durchschnittlicher Fehler einer Messung

$$d = \pm \frac{32}{6} = \pm 5,3 \text{ cm.}$$

Die nähere Betrachtung der Abweichungen v beider Gruppen zeigt aber, dass die beiden Messungsgruppen durchaus nicht die gleiche Zuverlässigkeit verbürgen, dass vielmehr in der ersten Gruppe nur das zufällige Auftreten einiger, dem Mittelwert nahestehender Beobachtungswerte die zugehörige Verbesserung v über Gebühr herabdrückte. Denn lediglich als glücklicher Zufall ist es zu betrachten, wenn bei einem Messungsverfahren, das bei einzelnen Messungen 10 und 15 cm Abweichung liefert, zwischenhinein sehr kleine Abweichungen, (wenn auch mehrmals), auftreten. Nicht derjenige gilt als guter Schütze, der zwar einigemal ins Schwarze trifft, gelegentlich aber sogar die Scheibe fehlt! Die Erfahrung lehrt, dass auf allen Gebieten derartige Zufallstreffer die Folgen einer vorhandenen gegensätzlichen Veranlagung nicht dauernd beeinflussen können. Wir müssen also, der Erfahrung folgend, die stärkeren Abweichungen stärker in die Wagschale werfen, wenn wir uns ein zutreffendes Urteil bilden wollen, und dies geschieht, wenn wir statt der Abweichungen selbst, eine Potenz von ihnen betrachten. Um das störende Vorzeichen wegzubringen, wählen wir hiezu eine gerade, und, einem allgemeinen Naturgesetz entsprechend, im Zweifelsfalle die einfachste, also die zweite Potenz, vergleichen also jetzt die Quadrate der Abweichungen:

v ²	v ²
0	25
100	25
1	36
25	25
225	25
1	36
<hr style="width: 10%; margin-left: auto; margin-right: 0;"/> 352	<hr style="width: 10%; margin-left: auto; margin-right: 0;"/> 172

Der Mittelwert der quadrierten Abweichungen v ist in beiden Gruppen jetzt erheblich verschieden. Wir wählen nun zum Vergleich der Messungsgenauigkeit beider Gruppen im vorliegenden Fall, in welchem nur der wahrscheinliche, nicht der wahre Wert der Strecke L bekannt geworden ist, nicht das einfache arithmetische Mittel, sondern dividieren durch die Zahl der überschüssigen Beobachtungen, (vgl. hierüber u. a. Weitbrecht, Ausgleichsrechnung. Leipzig 1906, Göschenscher Verlag, S. 27), also hier durch 5.

Der mittlere Fehler einer Messung ergibt sich hiernach zu:

$$m_{\text{Gruppe A}} = \pm \sqrt{\frac{352}{5}} = \pm 8,4 \text{ cm} \qquad m_{\text{Gruppe B}} = \pm \sqrt{\frac{172}{5}} = \pm 5,9 \text{ cm.}$$

Um ein völlig objektives Urteil über die mit einem Verfahren erreichbare Genauigkeit zu erlangen, wird man i. a. nicht Versuchsmessungen lediglich zu diesem Zweck vornehmen, sondern man wird die Ergebnisse von Doppelmessungen, wie sie in der Vermessungspraxis, namentlich bei Polygonisierungen in grosser Zahl ausgeführt werden, zum Vergleich heranziehen, und in Gruppen mit gleichen äusseren Umständen (Verfahren, Geländeneigung, Kulturzustand, verwendete Geräte etc.) vereinigen. Die dabei errechneten mittleren Fehler müssen zum Vergleich dann von der Länge l auf gleiche Streckenlänge (etwa die Längeneinheit) zurückgeführt werden. Da die auftretenden Abweichungen bei jeder Doppelmessung, welche mit gleichen Geräten nach gleicher Methode und unter gleichen äusseren Umständen ausgeführt wurde, in der Hauptsache nur zufällige, nicht systematische Fehler zum Ausdruck bringen, die sich nicht wie die letzteren proportional zur Länge, sondern proportional zur Wurzel aus dieser fortpflanzen), so erhalten wir als mittleren Fehler pro Längeneinheit $\mu = \frac{m}{\sqrt{l}}$.

Die Vergleichung der Abweichungen von für praktische Zwecke ausgeführten Doppelmessungen hat ergeben, dass gleiche Übung des Messgehilfen mit jedem der Geräte vorausgesetzt, die Messung mit Messstangen die schärfsten Resultate liefert, und dass die unvermeidlichen Messungsfehler bei Anwendung der üblichen Messungsmethoden sich bei Stangen-, bezw. Band-, bezw. Kettenmessung

ungefähr verhalten wie 3 : 5 : 8. Tatsächlich hat sich denn auch die Anwendung von Messstangen für feinere Messungen (z. B. Stadtvermessungen) überall durchgesetzt.

c) Ermittlung unzugänglicher Strecken.

Ist es möglich, von jedem der Endpunkte A und B der gesuchten Strecke aus, den andern zu sehen, so steckt man eine Parallele zu AB in beliebigem (möglichst geringem) Abstand dadurch ab, dass man (s. Fig. 62) in A und B Lote auf AB errichtet und auf ihnen die beliebige Strecke $AC = BD$ abmisst. Es ist alsdann $AB = CD$.

Lässt sich das verwendete Rechteck nicht direkt abstecken, weil zwischen A und B nicht zusammengesehen werden kann, so kann man die Parallele CD auch gewinnen, indem man AC zunächst schätzungsweise \perp AB abmisst und sodann D derart bestimmt, dass

$$\left\{ \begin{array}{l} \sphericalangle CDB = R \\ \text{und } BD = AC \end{array} \right\}.$$

Jetzt wird C definitiv so abgesteckt, dass

$$\left\{ \begin{array}{l} \sphericalangle ACD = R \\ \text{und } AC = BD \end{array} \right\}.$$

Bequemer als nach dieser Einrückungsmethode wird die Parallele folgendermassen gewonnen (s. Fig. 63):

Von einer beliebigen Geraden L werden Lote nach A und B gefällt. Die Endpunkte C und D der auf ihnen abgemessenen beliebigen, aber gleichen Strecken $AC = BD$ bestimmen die Seite CD des Parallelogramms ABDC, so dass $AB = CD$.

Statt des Parallelogramms lässt sich zur Ermittlung der unzugänglichen Streckenlänge AB auch ein gleichschenkliges Dreieck oder Trapez anwenden, welches man erhält, wenn man $\left\{ \begin{array}{l} FD = FB \\ EC = EA \end{array} \right\}$ je \perp einer beliebigen Geraden EF ab-

Verwendung
von
Parallelen.

Fig. 62.

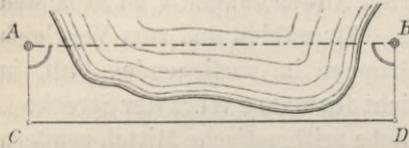


Fig. 63.

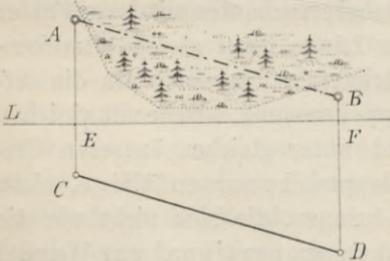
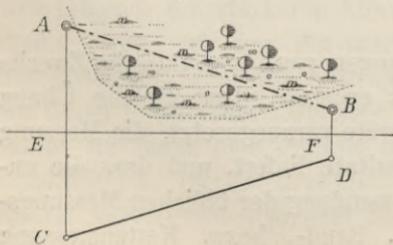


Fig. 64.



Verwendung
gleichschenkliger
Trapeze.

misst. Auch hier ist $CD = AB$ (s. Fig. 64). Je kürzer die Lote, um so besser die Bestimmung der gesuchten Strecke.

Hat man zur Absteckung von AB (vergl. Fig. 55) eine beliebige Gerade benützt, so lassen sich die gemessenen Koordinaten $\left. \begin{matrix} y_A & y_B \\ x_A & x_B \end{matrix} \right\}$ beider Endpunkte zur Berechnung von AB verwenden. Es gilt nämlich unter Beachtung der dort gegebenen Vorzeichenregel allgemein:

$$AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

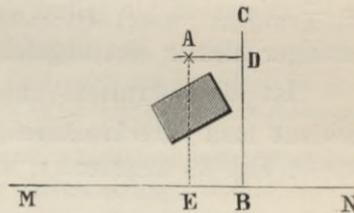
Im Gegensatz zur Absteckung der Geraden bei geringer Divergenz der Hilfslinie kommt es aber bei Bestimmung der Streckenlänge mehr auf die Genauigkeit der Abszissen x , als der Ordinaten y an.

Das Beispiel zu Fig. 55 liefert:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-14,08 - 18,14)^2 + (154,18 - 15,34)^2} \\ &= \sqrt{(-32,22)^2 + (138,84)^2} = \sqrt{1038 + 19277} \\ &= \sqrt{20315} = 142,53. \end{aligned}$$

Ist der senkrechte Abstand eines durch ein Hindernis verdeckten Punktes A von einer Geraden MN zu messen (Fig. 65), so kann man in beliebigem Punkt B ein Lot BD auf der Geraden und durch A wieder ein Lot DA auf dem eben abgesteckten Rechteck wie vorhin den gesuchten Abstand $EA = BD$ und (wenn gewünscht) den Lotfusspunkt E durch Abtragen von $BE = DA$.

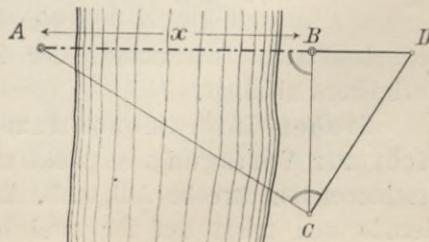
Fig. 65.



Die Lote sind hier, da sich eins auf das andere aufbaut, mit besonderer Sorgfalt zu fällen. Kleine Unsicherheiten in denselben wirken um so ungünstiger, je länger DA ist.

Ist weder die gesuchte Strecke AB selbst, noch eine andere ungefähr in ihrer Richtung verlaufende Strecke begehbar (See, Fluss, s. Fig. 66), so fällt man in dem einen Endpunkt B auf AB ein Lot BC und auf CA ein zweites Lot, welches die Verlängerung von AB in D schneidet. Es ist dann

Fig. 66.



Verwendung beliebiger Hilfsgereaden.

$$AB = x = \frac{BC^2}{BD},$$

$$\text{oder } x = \frac{DC^2}{BD} - BD = \frac{DC^2 - BD^2}{BD}.$$

Man kann die gesuchte Strecke auch durch Messung proportionaler oder gleicher Strecken finden. Zu diesem Zweck fällt man (s. Fig. 67 und 68) in B und D Lote und wählt

Fig. 67.

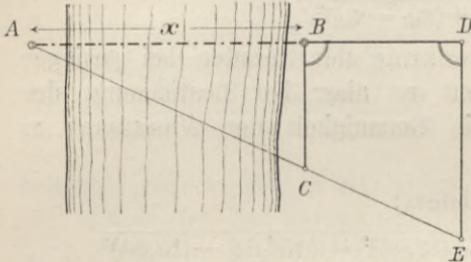
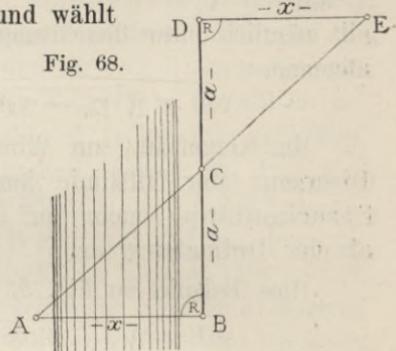


Fig. 68.



die Punkte C und E so, dass ACE = Gerade. Alsdann ist (s. Fig. 67)

$$AB = BD \cdot \frac{BC}{DE - CB}$$

bezw. (s. Fig. 68)

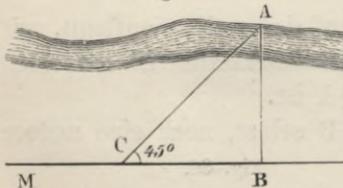
$$AB = DE \cdot \frac{BC}{CD}.$$

(Für $BC = CD$ wird $AB = DE$).

In beiden Fällen ist anzustreben, den Winkel bei A annähernd $= \frac{R}{2}$ zu machen. Je spitzer derselbe, um so ungünstiger die Wirkung etwaiger kleiner Messungsfehler in den Hilfsgrößen.

Ist ein Instrument zum Abstecken von $\frac{R}{2}$ zur Verfügung, so gewinnt man Streckenlängen, z. B. über einen Fluss oder Bach, wie in Fig. 69 angedeutet, wo $AB = BC$, wenn $\sphericalangle B = R$.

Fig. 69.



dem benützten Instrument, der Sorgfalt und Gewandtheit des Technikers abhängt.

Alle die angegebenen Methoden zur indirekten Erlangung unzugänglicher Strecken bringen Fehlerquellen in die Bestimmung herein, welche die direkte Messung vermeidet, — jedes abgesteckte Lot, jede eingelegte Hilfsstrecke enthält eine Ungenauigkeit, deren Betrag von der Sorgfalt und Gewandtheit des

Stehen Instrumente zum Abstecken rechter Winkel nicht zur Verfügung, so zieht man von einem Endpunkt der zu bestimmenden Strecke AB, z. B. A aus (s. Fig. 70) eine beliebige Gerade und misst auf ihr zwei beliebige aber gleiche Strecken

Verfahren im Falle des Mangels an Winkelinstrumenten.

AC = CD ab. Verlängert man dann BC um sich selbst bis E, so ist DE gleich und parallel AB.

Auch der Abstand eines Punktes A von einer Geraden MN lässt sich ohne Winkelinstrument bestimmen. Misst man die Ver-

Fig. 70.

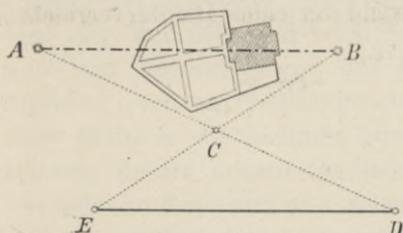
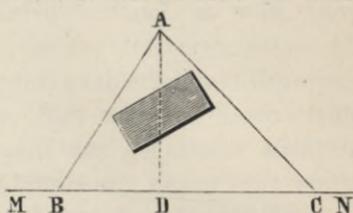


Fig. 71.



bindungsstrecken AB und AC zweier beliebiger Punkte B und C der MN mit A und ferner BC, so ergibt sich (s. Fig. 71):

$$BD = \frac{-CA^2 + AB^2 + BC^2}{2BC}$$

und

$$DA = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{AC^2 - CD^2}.$$

Versagen die bisher angegebenen Mittel zur Erlangung der Länge nicht direkt messbarer Strecken, so kommen je nach den Umständen, Polygonzüge und Dreiecksketten (s. Abschnitt III), oder auch optische Distanzmesser zur Anwendung.

Für ganz untergeordnete Entfernungsbestimmungen genügt unter Umständen auch das Abschreiten (gegebenenfalls mit Schrittzähler), das Schätzen, oder die Beobachtung der Zeit, in welcher man zu Fuss, oder mit irgend einem Beförderungsmittel, oder in welcher der Schall die zu messende Strecke zurücklegt.

§ 13. Errichten von Loten, Messen und Abstecken von Winkeln mit Benützung einfacher Instrumente.

Anwendung auf die Absteckung von Parallelen.

Wie bei den Strecken handelt es sich auch bei der Messung und Absteckung von Winkeln nicht um ihre Grösse zwischen den tatsächlich abgesteckten Schenkeln, sondern um diejenige zwischen deren Horizontalprojektionen.

Die Aufgabe tritt in doppelter Form auf und zwar:

α) Gegeben der Winkelscheitel B und Punkte A eines von B ausgehenden Schenkels des abzusteckenden Winkels. Gesucht ein Punkt C des zweiten Schenkels.

β) Gegeben die Richtung des einen Schenkels durch Stäbe $A_1, A_2 \dots$ und ein Punkt C des andern. Gesucht der Scheitel B des Winkels α , wobei $\alpha = R$, oder $= 2R$, oder von irgendwelcher gegebenen Grösse ist.

Absteckung.

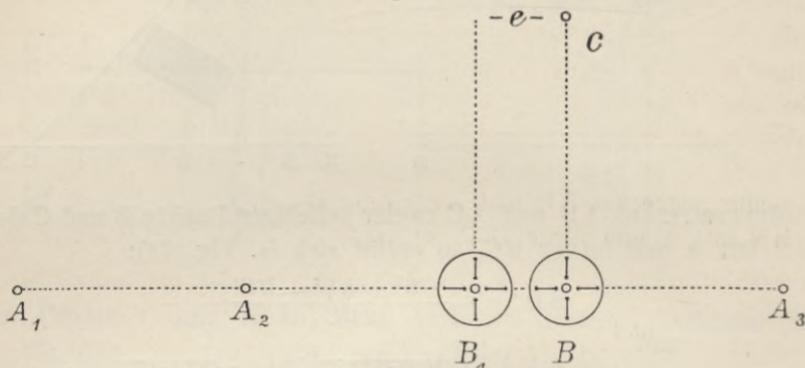
Lösung.

a) Mittels Dipterinstrumenten.

α) Ein Schenkel und der Winkelscheitel gegeben.

Die Kreuzscheibe wird im gegebenen Scheitel B (s. Fig. 72) vertikal aufgestellt und der Stab um seine Längsachse so gedreht, dass A_2 oder A_3 mitten im Gesichtsfeld der einen Diptervorrichtung

Fig. 72.



erscheint (orientiert). Hierauf wird durch die zweite Diptervorrichtung ein Stab C in die Mitte ihres Gesichtsfelds eingewiesen. (Ist die benützte Entfernung BA, „die Anlage“, kürzer als der abzusteckende Winkelschenkel, so ist die Zielung nach einem der entfernteren Punkte z. B. A_1 zu nehmen und daher der Stab A_2 zuvor schief zu drücken, falls er nicht so tief steht, dass über ihn hinweg das Fussende des entfernteren Stabs anzielbar ist.)

Zur Verlängerung einer Geraden über den Scheitelpunkt hinaus kann man ein und dasselbe Dipter nach beiderlei Richtung benützen, doch liefert die Absteckung mit freiem Auge im allgemeinen ein schärferes Ergebnis.

Soll — mittels Gradscheibe oder Pantometers — ein gegebener Winkel α (d. h. nicht der Schnittwinkel der Dipterebenen) abgesteckt werden, und macht man nach erfolgter Orientierung gegen A an der Ablesevorrichtung die Anfangsablesung a , so braucht man nur den Kreuzscheibenkopf bei feststehendem Stab zu drehen bis die Ablesemarke auf $c = (a + \alpha)$ zeigt. Jetzt wird durch die erstmals benützte Zielvorrichtung der Punkt C in die Mitte des Gesichtsfelds eingewiesen.

Verwendet man das Pantometer, so kann mittels der mit dem Stab fest verbundenen zweiten Zielvorrichtung untersucht werden, ob beim Drehen des oberen Teils des Kreuzscheibenkopfs nicht ein Mitdrehen des Stabs stattgefunden hat. Zutreffendenfalls müsste die fragliche zweite Zielvorrichtung vor dem Einweisen von C wieder nach A orientiert werden.

Sorgt man durch vorgängige Einstellung, dass die Anfangsablesung, welche sich bei Zielung nach A ergibt, gleich 0 ist, so zeigt die Ablesemarke bei Zielung nach C den Winkel α und umgekehrt.

β) Winkelscheitel B gesucht.

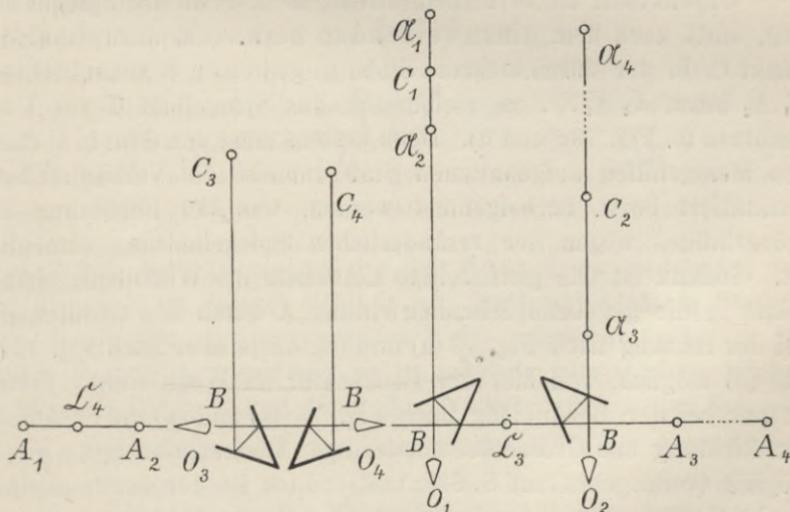
Im näherungsweise angenommenen Winkelscheitel B_1 , auf der gegebenen Richtung $A_1 A_2 A_3$ (s. Fig. 72), wird das Instrument vertikal aufgestellt und nach einem der entfernteren Stäbe A orientiert. (Nötigenfalls vorheriges Umdrücken der Zwischenstäbe.) Erscheint alsdann der gegebene Punkt C nicht im Gesichtsfeld der zweiten, oder der um den $\sphericalangle \alpha$ verdrehten Zielvorrichtung, so wird durch Auf- und Niederbewegen des Auges an der letzteren seine Abweichung e von der Ziellinie geschätzt, oder, nach erfolgtem Einweisen eines Stabs in die Ziellinie, gemessen. Nun wird die Kreuzscheibe um den derart ermittelten Betrag e auf der gegebenen Richtung verstellt und das Verfahren, wenn die Abweichung geschätzt wurde, so lange wiederholt, bis der richtige Scheitel B gefunden ist.

Unpraktisch wäre es, die Orientierung der Zielvorrichtung von B_1 aus statt nach der gegebenen Richtung A nach Punkt C zu bewirken, weil im Falle der Nichtübereinstimmung der Stäbe A alsdann nur diese Tatsache, nicht aber die Richtung und Grösse der Abweichung, um welche das Instrument auf der gegebenen Geraden zu verstellen ist, direkt ersichtlich wäre.

b) Mittels Spiegelinstrumenten.

Wir unterscheiden dieselben Formen der Aufgabe wie bei (a).

Fig. 73 c. Fig. 73 d. Fig. 73 a. Fig. 73 b.
(unpraktisches Verfahren) (praktisches Verfahren)



Zu a). Man hält das Instrument, dessen Spiegelebenen den halben abzusteckenden Winkel einschliessen, mittels Stabs oder Senkels vertikal über dem gegebenen Winkelscheitel B so auf, dass (wie in

Winkelscheitel gegeben.

Fig. 73 a und b ersichtlich) die von A_1 bzw. A_3 und etwaigen weiteren Richtungspunkten kommenden Strahlen nach doppelter Zurückwerfung durch den Spiegel ins Auge O_1 bzw. O_2 gelangen, dort die Vorstellung erzeugend, als ob sie von den Spiegelbildern $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ bzw. $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4$ herkämen.

Weise nun, über den Spiegel hinwegschauend, den Stab C_1 bzw. C_2 so ein, dass er die Fortsetzung der Spiegelbilder $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \dots$ zu bilden, d. h. mit ihnen der Richtung nach zusammenzufallen scheint.

Ungenau wäre es, bei stark geneigtem Gelände die Spiegelebenen vertikal zu halten, weil in diesem Fall die Spiegelbilder $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \dots$ erheblich höher oder tiefer als C sich befänden, wodurch die Feststellung der Deckung wesentlich erschwert würde. Vielmehr ist, zumal wenn einer der Winkelschenkel horizontal liegt, der Schnittlinie der Spiegelebenen die Lage \perp zur Schenkelebene ABC zu geben. Allerdings erscheinen dann die Spiegelbilder der vertikal gesteckten Stäbe $A_1 A_2 \dots$ als geneigte Gerade und man hat nur die Möglichkeit, den abzusteckenden Winkel zwischen den Richtungen nach einem bestimmten ins Auge zu fassenden Punkt des Stabs A und einem solchen des Stabs C herzustellen (vergl. hierüber und über die Unterscheidung zwischen Horizontalwinkel und Positionswinkel, welche bei der verlangten Instrumentenhaltung in Frage kommt, S. 89.)

Unpraktisch ist es ferner, direkt, d. h. über die Spiegel hinweg, statt nach dem einzuweisenden bzw. dem anzuwinkelnden Punkt C, in der durch mehrere Stäbe gegebenen Schenkelrichtung $A_1 A_2$ bzw. $A_3 A_4 \dots$ zu zielen und das Spiegelbild \mathfrak{C} von C zu benutzen (s. Fig. 73 c und d). Denn erstens muss von dem in C durch den Messgehilfen aufgehaltenen Stab zumeist die Vertikalstellung konstatiert bzw. herbeigeführt werden, was bei Benützung des Spiegelbildes wegen der veränderlichen Spiegelhaltung unmöglich ist. Sodann ist das gleichzeitige Einweisen des Winkelspiegelstabs selbst in die gegebene Schenkelrichtung A durch den Gehilfen nur bei der Haltung nach Fig. 73 (a) und (b), nicht aber nach Fig. 73 (c) und (d) möglich, weil hier der Beobachter im Wege steht. Ferner ist nur bei der Behandlung nach Fig. 73 (a) und (b) die Schätzung von Richtung und Grösse des notwendigen Rückungsbetrags e direkt möglich (vergl. oben auf S. 83), und endlich ist der anzuwinkelnde Punkt C häufig der lichtschwächere (Hauskante etc.), so dass eine Lichteinbusse durch die Spiegelung hier vermieden werden sollte.

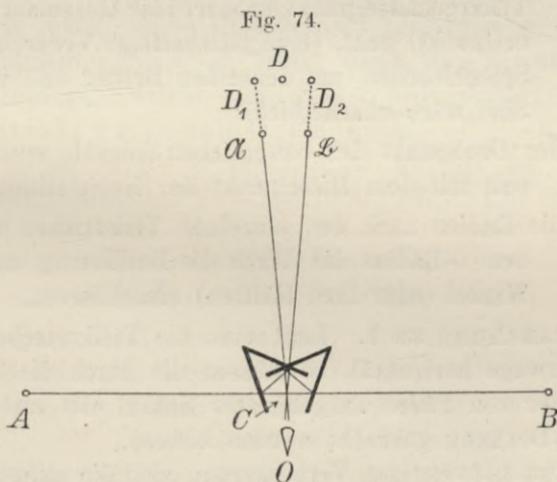
Zu β). Man bewege den Spiegel, wie in Fig. 73 (a) und (b) gezeigt, auf der gegebenen Richtung $A_1 A_2 \dots$ hin, bis die Spiegel-

bilder der Stäbe A den über den Spiegel hinweg direkt gesehenen anzuwinkelnden Stab C decken, bzw. dessen scheinbare Fortsetzung bilden. In diesem Augenblick befindet sich das Instrument vertikal über dem gesuchten Winkelscheitel.

Prüfung und Berichtigung des Winkelspiegels.

Von den einfachen Spiegelinstrumenten verlangen wir neben Anforderung. der leicht zu untersuchenden Bedingung ebener und heller Spiegel (Verzerrung der Bilder im Falle unebener Spiegel) nur, dass die Spiegelebenen unter sich, oder mit der Diopterebene den nach vorhergehendem verlangten Winkel einschliessen.

Um z. B. beim einfachen Winkelspiegel zu untersuchen, ob Prüfung. dieser Winkel $= \frac{R}{2}$ ist, steckt man mit freiem Auge eine Gerade ACB (Fig. 74) ab und hält über dem Zwischenpunkt C das Instru-



ment so auf, dass das einmal das Bild \mathfrak{A} von A, das anderemal das Bild \mathfrak{B} von B im Spiegel sichtbar ist. Beidemale wird ein Stab D_1 bzw. D_2 , in der oben angegebenen Weise eingerichtet. Fallen die Punkte D_1 und D_2 zusammen, so ist jeder der abgesteckten Winkel $ACD_1 = D_2CB = R$ und somit der Winkel zwischen den Spiegeln $= \frac{R}{2}$. Andernfalls wird der letztere mit Hilfe der Korrektions-

Ver-
besserung.

schrauben (vergl. Fig. 43, 44 und 45) so verbessert, dass der die Strecke $D_1 D_2$ halbierende Punkt D von den Spiegelbildern gedeckt wird.

Soll der Spiegelwinkel $= \frac{R}{4}$ sein, so wird auf gleiche Weise wie vorher sein doppelter Betrag von jedem der Schenkel eines rechten

Winkels nach innen abgetragen, wobei wieder beide erhaltenen Richtungen sich decken müssen.

Zur Untersuchung des Spiegelkreuzes steckt man entweder mit freiem Auge drei Punkte einer Geraden ab und verbessert hienach nötigenfalls den Winkel der Spiegel des auf dem Zwischenpunkt aufgehaltene Instruments, oder man steckt die Gerade mit letzterem doppelt und zwar von beiden Seiten einrückend ab. Die etwa sich ergebende Abweichung entspricht letzterenfalls dem doppelten Fehler.

Unter-
suchung des
Sextanten.

Beim Pantogon und dem Sextanten treten zu der Bedingung ebener Spiegel noch die Forderungen hinzu:

1. Beide Spiegel müssen senkrecht zur Teilkreisebene stehen;
2. der feste Spiegel muss parallel zum 0-Radius des Teilkreises, der bewegliche so angeordnet sein, dass die Verlängerung seiner bilderzeugenden Ebene durch den Teilkreismittelpunkt und durch die Ablesemarke (Noniusnullpunkt) geht, (eine gleichzeitige Verdrehung beider Spiegelebenen um denselben Betrag und in gleichem Sinn wäre unschädlich);
3. der Drehpunkt des beweglichen Spiegels muss identisch sein mit dem Mittelpunkt der Kreisteilung;
4. die Radien nach den einzelnen Teilstrichen müssen mit dem 0-Radius die durch die Bezifferung angegebenen Winkel (oder ihre Hälften) einschliessen.

Untersuchung zu 1. Legt man die Teilkreisebene mittels einer Wasserwage horizontal, so müssen die durch die Spiegel erzeugten Bilder von Fäden aufgehängter Senkel mit anderen ebensolchen zur Deckung gebracht werden können.

Zur etwa notwendigen Verbesserung sind die spiegeltragenden Platten mit Verbesserungsschrauben versehen.

Zu 2. Dreht man die Schiene des beweglichen Spiegels so, dass beim Pantogon die in beiden Spiegeln erzeugten Bilder eines und desselben Gegenstands, beim Sextanten der letztere und sein durch den einen Spiegel gesehenes Bild sich decken, so muss die Ablesemarke (Noniusnullpunkt) die Ablesung 0 zeigen.

Etwaige Verbesserung erfolgt durch obengenannte Verbesserungsschrauben.

Zu 3. und 4. (Teilungsfehler). Beliebige, mittels eines Theodoliten auf dem Gelände hergestellte Winkel müssen sich, mit dem zu prüfenden Instrument nachgemessen, innerhalb entsprechender Genauigkeitsgrenzen übereinstimmend ergeben. Ohne Hilfsinstru-

ment: zerlegt man einen, ohne Instrument auf dem Gelände absteckbaren Winkel (2 R, 4 R) durch Zwischenstäbe in einzelne, mit dem Sextanten messbare Teile und misst diese, so muss ihre Summe mit dem Sollbetrag übereinstimmen.

Verbesserung ist auf einfachem Weg unmöglich. Im Falle vorhandener Teilungsfehler kann man aber mit Benützung eines fehlerfreien Instruments Winkel von bestimmter **runder** Grösse abstecken und diese sodann mit dem fehlerhaften Instrument nachmessen. Die (nötigenfalls durch Interpolation ergänzte) Gegenüberstellung zusammengehöriger Werte beider Gruppen bildet für das betr. Instrument eine Tabelle zur Umwandlung der mit ihm gemessenen in verbesserte Winkel.

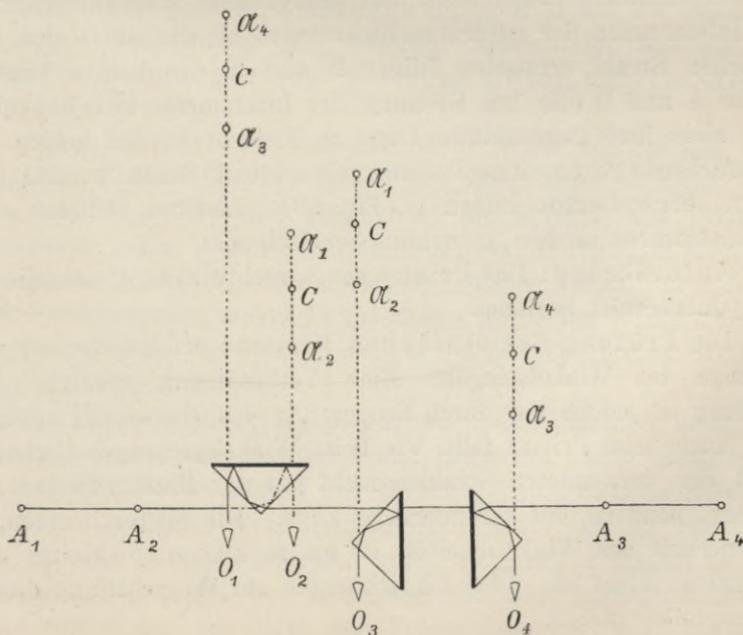
➤ Schlussbemerkung. Der Scheitel des abgesteckten Winkels fällt streng genommen nicht mit der Handgriff- bzw. Stabachse zusammen, sondern ist der veränderliche Schnitt des eintretenden und des doppelt reflektierten Strahls (s. § 8). Die aus dieser Veränderlichkeit resultierende Unsicherheit übersteigt jedoch bei normaler Instrumentengrösse im Mittel kaum den Betrag von 2 cm. Über Einrichtungen, welche diese Fehlerquelle beseitigen s. § 8.

c) Mittels Prismeninstrumenten.

Wir haben in § 9 erfahren, dass wir bei der Verwendung von Prismeninstrumenten zwischen beweglichem und festem Licht-

Aufsuchen
des festen
Strahls.

Fig. 75.



strahl zu unterscheiden haben. Wir müssen also ein Mittel finden, das durch den festen Strahl erzeugte, zum Abstecken rechter Winkel allein benützbare Bild als solches zu erkennen. Merkmale hiefür sind: 1. das vom festen Strahl erzeugte Bild ist lichtschwächer, als das vom beweglichen Strahl erzeugte, 2. es bleibt beim Drehen des Prismas um seine Achse (abgesehen von kleinen Schwankungen infolge von Neigungen dieser Achse) in Ruhe, 3. der feste Strahl tritt in der Nähe einer Seitenkante aus und zwar bei zur Sehrichtung annähernd paralleler Stellung der Hypotenusenfläche beim rechten Winkel, bei annähernd senkrechter Stellung derselben beim $\frac{1}{2}$ R-Winkel.

Absteckungs-
verfahren.

Die Anwendung des Prismas zum Abstecken rechter Winkel ist ähnlich der des Winkelspiegels. Die durch den festen Strahl erzeugten Bilder \mathfrak{A} der gegebenen Richtungsstäbe A müssen mit der über das Instrument hinweg direkt gesehenen Richtung nach dem abzusteckenden Winkelschenkel übereinstimmen, sie müssen die scheinbare Fortsetzung des anzuwinkelnden Stabes C bilden. Auch hier wird zweckmässigerweise nicht in der Richtung des gegebenen Schenkels, sondern in derjenigen nach dem anzuwinkelnden Punkt direkt gezielt (s. Fig. 75).

Bei der Verwendung der Prismentrommel und des Prismenkreuzes zum Abstecken beliebig grosser Winkel und gerader Linien gebraucht man den beweglichen Strahl. Man bewegt sich mit aufgehaltene Instrument auf dem festen Schenkel, oder in der Halbierenden der gesuchten Richtungen, bis die durch den beweglichen Strahl erzeugten Bilder \mathfrak{A} und \mathfrak{B} der beiden Linienpunkte A und B (die bei Drehung des Instruments sich bewegen, ohne aber ihre gegenseitige Lage zu ändern) in den beiden, in entsprechende gegenseitige Stellung gebrachten Prismen übereinander stehen, eine Gerade bilden (s. Fig. 50). Alsdann befindet sich das Instrument in dem gesuchten Scheitelpunkt.

Anforderung
ans Winkel-
prisma.

Anforderung: Das Prisma muss rechtwinklig gleichschenkligen Querschnitt besitzen.

In-
strumenten-
prüfung.

Die Prüfung des einfachen Prismas erfolgt ebenso, wie diejenige des Winkelspiegels. Eine Verbesserung etwaiger Abweichung ist jedoch nur durch Erneuerung des Glasschliffs möglich.

Auch beim Prisma fällt, wie beim Winkelspiegel, der Schnittpunkt der verwendeten Strahlen nicht mit der Handgriffachse zusammen, sondern hat veränderliche Lage. Die hiedurch erzeugte Unsicherheit des Winkelscheitels ist um so kleiner, je kleiner das Instrument selbst ist. Über Einrichtungen zur Wegschaffung dieser Fehlerquelle vgl. § 9.

Bei der Prismentrommel verlangt man noch, dass die Seitenkanten beider Prismen einander parallel laufen. Dies trifft zu, wenn bei entsprechender Instrumenthaltung parallele Gerade, z. B. die Fäden zweier aufgehängter Senkel in beiden Prismen Bilder erzeugen, die in eine Gerade fallen.

Anforderung
an die
Prismen-
trommel.

Für etwa notwendige Veränderung der gegenseitigen Lage beider Prismen ist eines von ihnen an dem Gehäuse fest, das andere derart aufgehängt, dass eine Drehung, und mittels dreier Korrektschrauben, die auf die Prismenfassung drücken, auch eine kleine Neigung des letzteren bewirkt werden kann.

Beim Prismenkreuz müssen wir weiter noch die Bedingung stellen, dass zwei Kathetenflächen einander parallel gehen. Ob dies zutrifft, wird untersucht, wie die analoge Forderung beim Spiegelkreuz, etwaige Abweichung aber wird durch Drehung des aufgehängten Prismas gehoben.

Anforderung
aus Prismen-
kreuz.

Die Spiegel- und Prismeninstrumente gewähren beim Messen und Abstecken von Winkeln gegenüber den Diopterinstrumenten die Vorzüge rascheren Arbeitens (weil das unter allen Umständen zeitraubende, oft unmögliche Einstecken des Stabes in den Boden entfällt), bequemeren Transports, der Möglichkeit gleichzeitigen Beobachtens beider Winkelschenkel (wertvoll namentlich bei beweglichem oder unsicherem Standpunkt, bezw. beweglichen Zielen), der gelegentlichen Verwendung zur Herstellung horizontaler Zielungen (Spiegelbild des am Handgriff befestigten Senkelfadens bei ungefähr horizontaler Haltung des Handgriffs), eines grossen Gesichtsfeldes, und ca. dreimal billigeren Preises.

Vergleich der
Vorzüge und
Nachteile der
Diopter-, der
Spiegel- und
der Prismen-
instrumente.

Dieser Summe von Vorzügen steht neben der lästigen Veränderlichkeit des Winkels zwischen den Spiegeln ein einziger, aber sehr gewichtiger Nachteil gegenüber: die Spiegel- und Prismeninstrumente geben nicht die verlangte Horizontalprojektion der gemessenen Winkel (Horizontalwinkel), sondern, wenn die Spiegel- bzw. Prismenflächen senkrecht zur Ebene der beiden Winkelschenkel gehalten werden, die Winkel zwischen den beobachteten Strahlen selbst (Positionswinkel) an.

In horizontalem Gelände, wo dieser Nachteil nicht zur Geltung kommt, weil Positions- und Horizontalwinkel gleich sind, ist also die Verwendung der Spiegel- und Prismeninstrumente vorzuziehen; in geneigtem Gelände ist zu beachten, dass der mit ihnen gemessene, bezw. abgesteckte Winkel im allgemeinen nicht gleich dem zu zeichnenden oder verlangten Horizontalwinkel ist, und dass der Fehler mit der Geländeneigung

wächst. Nur wenn wenigstens ein Schenkel horizontal liegt, ist der mit geneigtem Instrument abgesteckte rechte Winkel auch in der Horizontalprojektion = R. (Je nach der Lage der Winkelschenkel zur Projektionsebene kann die Projektion eines Winkels alle Werte von 0 bis 4 R annehmen. Ein in bergigem Gebiet mittels der Spiegel- oder Prismeninstrumente rechtwinklig abgesteckter Neubau würde beispielsweise bedenkliche Abweichung gegen die Rechtecksform zeigen, wenn nicht zufälligerweise einer der Winkelschenkel horizontal verläuft. Hier ist daher die Anwendung der Diop-
terinstrumente, bei denen die Zielungen in vertikalen und unveränderlichen Diopterebenen liegen, deren Keilwinkel die verlangte Grösse $R, \frac{R}{2}$ etc. hat, unerlässlich.)

In der Gruppe der Spiegel- und Prismeninstrumente haben erstere den Vorzug lichtstärkerer Bilder, leichter Ersetzbarkeit etwa zugrunde gegangener Spiegel und billigeren Preises, die letzteren dagegen denjenigen der Unveränderlichkeit und des noch bequemeren Transports.

d) Ohne Winkelinstrumente.

1. Vom gegebenen Scheitel B des abzusteckenden Winkels (s. Fig. 76 a) wird in der gegebenen Richtung das Stück $BA = 3$ Längeneinheiten (m, Ellen,

Fig. 76 a.

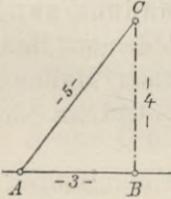


Fig. 76 b.

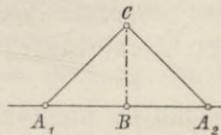
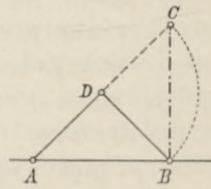


Fig. 76 c.



Ruten etc.) abgemessen. In A und B werden Bänder oder Schnüre befestigt, welche 5 bzw. 4 derselben Längeneinheiten messen, angespannt und solange gedreht, bis ihre Endpunkte in C sich decken. Alsdann ist C ein Punkt des gesuchten Winkelschenkels, weil $AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 5^2 = AC^2$. (Pythagoräischer Lehrsatz.)

2. Vom Winkelscheitel B (s. Fig. 76 b) aus werden auf der gegebenen Richtung nach beiden Seiten gleiche Stücke $BA_1 = BA_2$ abgetragen. Werden die Endpunkte eines Bandes, das länger ist, als $A_1 A_2$ in A_1 und A_2 befestigt und wird alsdann das Band angespannt, so bezeichnet sein Halbierungspunkt (horizontale Bandhaltung vorausgesetzt) einen Punkt C des gesuchten Lotes.

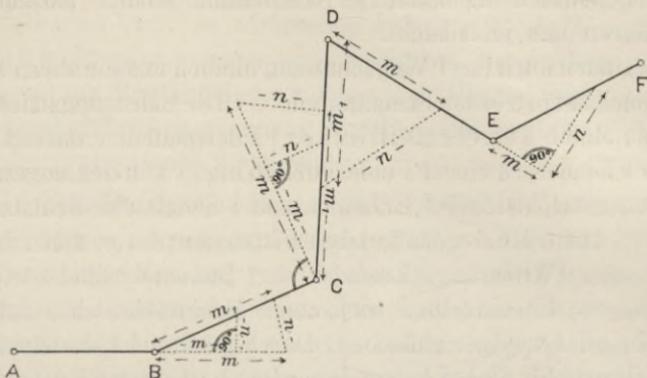
3. Das eine Ende eines Bandes wird im gegebenen Winkelscheitel B, das andere in einem Punkt A der gegebenen Richtung festgesteckt und der Mittelpunkt des angespannten Bandes in D markiert. Alsdann wird das Bandende bei B in die Verlängerung von AD nach C versetzt, derart, dass das gespannte Band über D geht. C ist ein Punkt des gesuchten Winkelschenkels, weil $DA = DB = DC$ und ADC Gerade (Winkel im Halbkreis, s. Fig. 76 c).

Rechte Winkel durch Ver-
reihung.

Um Winkel beliebiger Grösse zu messen, bildet man je nach Sachlage ein beliebiges, ein rechtwinkliges, oder ein gleichschenkliges Dreieck, das den fraglichen Winkel (oder sein Supplement, oder seinen Überschuss über 1 R) enthält, und misst in demselben (vergl. Fig. 77) die Strecken m , m_1 und n . Ist

Winkel
beliebiger
Grösse
durch Ver-
reihung.

Fig. 77.



für die Weiterverwendung der Zahlenwert des Winkels nötig, so lässt er sich aus den gemessenen Strecken berechnen; für graphische Benützung dienen die letzteren direkt.

Absteckung von Parallelen.

Parallele Gerade sind abzustecken als Grenzlinien von Strassen etc., zur Ermittlung unzugänglicher Strecken, im Falle paralleler Wegnetze bei Feldbereinigungen, sowie bei Anwendung paralleler Aufnahmelinien für die Stückvermessung (z. B. der in Württemberg amtlich bevorzugten Parallelmethode, s. §§ 17 und 44). Liegt kein Bedürfnis für grössere Genauigkeit vor, so führt der Aufbau von Lot auf Lot zum Ziel. In einfacheren Fällen kann man nach Fig. 62, 63, 67, 68 oder 70 verfahren.

Ist der Parallelabstand von der Grundlinie dagegen gross und ist möglichste Genauigkeit der abzusteckenden Parallelen nach Lage und Richtung anzustreben, so stützt sich deren Bestimmung auf mindestens zwei; besser auf drei, oder vier ungefähr gleichweit voneinander entfernte und durchzumessende Senkrechte. Die (nötigenfalls abzugleichenden) Endpunkte dieser Senkrechten bilden die Stützpunkte der abzusteckenden Parallelen.

§ 14. Fehlerquellen bei Ausführung der geodätischen Grundaufgaben. Fehlergrenzen.

Infolge der Unzulänglichkeit der menschlichen Sinne sowohl, als auch infolge von äusseren Einflüssen und von Mängeln an den verwendeten Instrumenten und Geräten treten bei der Ausführung aller Vermessungsarbeiten Ungenauigkeiten auf, welche deren Ergebnis schädlich beeinflussen.

Grobe Fehler.

Die „groben“ Fehler, welche durch Unachtsamkeit, oder durch abnorme Einwirkung störender äusserer Einflüsse hervorgerufen werden, sind unter allen Umständen durch entsprechende Massregeln (wiederholte Beobachtung, oder Beobachtung anderer Grössen, welche mit den gesuchten in bekannter Beziehung stehen) auszumerzen, und berühren uns jetzt nicht.

Unvermeidliche Fehler.

Aber auch nach ihrer Wegschaffung bleiben uns die wahren Werte der Beobachtungsgrössen unzugänglich. Die Messungsmittel sind durch eine Reihe „unvermeidlicher“ Fehlerquellen entstellt. Die Grösse des Einflusses dieser Fehlerquellen hängt von der angewandten Beobachtungsmethode, der Erfahrung und Sorgfalt des Beobachters, von der Art und Güte der verwendeten Instrumente, von den äusseren Verhältnissen (Witterung, Zustand der Bodenoberfläche etc.) und davon ab, ob die einzelnen wirksamen Fehlerteile sich zufälligerweise mehr oder weniger aufheben. Durch praktische Versuche lassen sich Mittelwerte für die bei Anwendung einer bestimmten Beobachtungsmethode voraussichtlich eintretenden unvermeidlichen Fehler, sowie Werte für die im ungünstigsten Fall (der zufälligen Addition der einzelnen unvermeidlichen Fehlerwirkungen) zu befürchtenden Maximalfehler feststellen, deren Kenntnis für den Techniker, der seine Angaben und Arbeiten vertreten muss, von grosser Bedeutung ist und die Voraussetzung bildet für die amtliche Festsetzung von höchstensfalls zulässigen „Fehlergrenzen“.

Fehler beim Einweisen.

Die Grösse der beim Einweisen von Geraden mit freiem Auge auftretenden Fehler hängt — abgesehen von der Sehschärfe des Beobachters (s. § 35) und von der mehr oder weniger scharfen Bezeichnung der Ausgangspunkte — ab von der Luftdurchsichtigkeit, der Beleuchtung des Ziels und dessen Hintergrund, der Windrichtung und -Stärke, der Bodenform (eben, konkav, konvex) und von der Entfernung des Einzuweisenden und des Endpunktes vom Beobachter. Prof. Jordan hat mit ungeübten Beobachtern einen mittleren Zielfehler von 1' bis 2' festgestellt, während Prof. Stampfer mit geübten Beobachtern bei günstigen Umständen den Zielfehler auf 10" und weiter herabdrückte.

Streckenfehler.

Die Genauigkeit der **Streckenermittlung** hängt bei Anwendung bestimmter Messungsmethoden und bestimmter Geräte ab von der Form und Beschaffenheit der Bodenoberfläche — horizontal oder bergig; kurzer Rasen, bzw. krümelige Erde, oder grobe Schollenbildung, Stoppelfeld, hohes Gras, Klee etc. Schneefeld —, von der Witterung — Regen, Wind, Schmutz — und von der Gewandtheit und Sorgfalt des Messgehilfen. Die hiebei auftretenden unvermeidlichen Fehlerteile folgen verschiedenerlei Gesetzen.

Entspringen sie z. B. kleinen Unsicherheiten der Endpunkte (unregelmässige Marksteine etc.), kleinen Lattenverschiebungen infolge ungünstiger Auflage (Steine, Stoppeln etc.), Ungenauigkeiten im Anreihen der Messwerkzeuge (Zwischenraum, Rückstoss, schwankender oder stumpfer Senkel), Ungenauigkeiten im Aufsetzen oder Ablesen des Gradbogens etc., so wirken sie bald positiv bald negativ und heben sich mehr oder weniger gegenseitig auf. Sie wachsen also nicht proportional zur Streckenlänge, sondern, wie Überlegungen auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung ergeben und praktische Versuche bestätigen, proportional ihrer Wurzel.

Wir bezeichnen die Wirkungen solcher Ursachen als „zufällige“ oder „unregelmässige“ Fehler. Ist irgendwie festgestellt worden, dass auf 1 m Länge der mittlere unregelmässige Fehler μ_u mm beträgt, so wird sein wahrscheinlicher Betrag bei einer Strecke von s m Länge wachsen auf $m_u = \mu_u \sqrt{s}$ mm (s. § 12).

Zufällige Fehler.

Entspringen die Fehlerteile andererseits Ursachen, welche, jede für sich, immer in derselben Richtung und ungefähr gleicher Grösse wirken, wie z. B. Ungenauigkeiten der Stangenlänge, Ausbiegungen aus der Geraden, Abweichungen von der horizontalen Stangenlage, Einschlagen der Latten und Bänder, der Vernachlässigung der Senkelschnurdicke beim Staffeln, unrichtigem Nullpunkt der Gradbogenteilung, Abgleiten des Senkels beim Einspicken in den geneigten Boden etc., so wächst ihre Wirkung proportional zur Streckenlänge. Man bezeichnet sie als „regelmässige“ Fehler. Ist der regelmässige Fehler pro 1 m Länge zu μ_r mm festgestellt worden, so wird sein wahrscheinlicher Betrag bei einer Strecke von s m Länge anwachsen auf $m_r = \mu_r \cdot s$ mm.

Regelmässige Fehler.

Messen wir eine Strecke mehrmals nach derselben Methode unter gleichen äusseren Umständen mit denselben Geräten, so zeigt sich in den auftretenden Widersprüchen in der Hauptsache nur die Wirkung der unregelmässigen Fehler, da die regelmässigen immer in ungefähr gleicher Grösse und Richtung auftreten.

Trennung der Wirkung des regelmässigen, von derjenigen des unregelmässigen Fehlers.

Verwenden wir dagegen verschiedenerlei Messgehilfen, Methoden und Geräte, und messen unter veränderten äusseren Umständen, so gesellt sich zu der ersteren noch die Wirkung regelmässiger Fehler.

Jede richtige Fehleruntersuchung und -Einteilung und jede behördliche Feststellung von Fehlergrenzen muss beide Fehlergattungen trennen und im Fall ihres Zusammenwirkens dem Ausdruck für den höchstens zulässigen Streckenfehler d etwa folgende Form geben: $d = \mu_u \sqrt{s} + \mu_r \cdot s$, oder, falls eine teilweise gegen-

seitige Aufhebung beider Fehlergattungen als Regel angenommen werden will: $d = \sqrt{\mu_u^2 s + \mu_r^2 \cdot s^2}$.

Bestimmungen, welche, wie das früher üblich war, den höchstens zulässigen Fehler etwa in Prozenten der Länge ausdrücken, sind bei langen Strecken zu lax, bei kurzen Strecken kaum erfüllbar (0,1% ergäbe z. B für 1000 m Länge 1 m, für 1 m Länge 1 mm, d. h. im ersten Fall einen viel zu grossen, im letzteren einen nicht aufrecht zu erhaltenden zulässigen Fehler). Sie gleichen einem Kleid, welches das eine Mal um den Leib schlottert, das andere Mal viel zu eng ist.

Für die Grösse μ_u des unvermeidlichen unregelmässigen Fehlers pro Meter Länge hat Prof. Jordan aus einem ausgiebigen, zum Teil vom Deutschen Geometerverein gesammelten Material mittlere Werte berechnet, nämlich:

für Lattenmessung	$\mu_u = \pm 3$ mm
„ Band „	$\mu_u = \pm 5$ mm
„ Ketten „	$\mu_u = \pm 8$ mm.

Nimmt man, wie üblich und praktisch durchführbar, als äusserstenfalls zu duldbenden und möglicherweise von unglücklichem Zusammenwirken der Einzelfehler herrührenden Maximalfehler den dreifachen mittleren Fehler an, so erhält man hiefür aus den obigen Werten $0,009\sqrt{s}$ bzw. $0,015\sqrt{s}$ bzw. $0,024\sqrt{s}$.

Amtliche Fehlergrenzen.

Für Württemberg sind als äusserste Fehlergrenzen, welche von dem Unterschied der Ergebnisse zweier amtlich ausgeführten Messungen keinesfalls überschritten werden dürfen durch die techn. Anweisung vom 19. Januar 1895 festgesetzt:

In Geländeklasse I (nahezu eben)	$d = 0,010\sqrt{s} + 0,0005s$	}	Im Falle unsicherer Endpunkte treten für jeden derselben noch weitere 5 cm hinzu.
„ „ II (etw. geneigt)	$d = 0,015\sqrt{s} + 0,0006s$		
„ „ III (sehr uneben)	$d = 0,020\sqrt{s} + 0,0007s$		

Für Preussen bestimmt hierüber die Anweisung VIII vom 25. Oktober 1881, bzw. die Anweisung II vom 21. Februar 1896 (unter der näheren Erläuterung, dass der zulässige Fehler sich in allen Fällen, in denen die Streckenendpunkte nicht auf 1 cm genau bestimmbar sind, auf 1 dm erhöht):

Geländeklasse I	$d = 0,01\sqrt{4s + 0,005s^2}$
„ II	$d = 0,01\sqrt{6s + 0,0075s^2}$
„ III	$d = 0,01\sqrt{8s + 0,01s^2}$.

Bei Ermittlung aus Plänen in kleinerem Massstab als 1:4000 ist das $1\frac{1}{2}$ fache des hienach sich ergebenden Betrags, wenigstens aber eine Strecke von 3 dm als Fehler zugelassen.

Für Bayern lauten die Fehlerformeln (nach der Anweisung vom 25. Juni 1885):

Geländeklasse	I	$d = 0,012\sqrt{s} + 0,0008 s$
„	II	$d = 0,018\sqrt{s} + 0,0008 s$
„	III	$d = 0,024\sqrt{s} + 0,0008 s$

Für Elsass-Lothringen bestimmt die Anweisung vom 30. Januar 1889 hierüber:

Geländeklasse	I	$d = 0,008\sqrt{s} + 0,00064 s$
„	II	$d = 0,012\sqrt{s} + 0,00064 s$
„	III	$d = 0,016\sqrt{s} + 0,00064 s$

Die oben gegebenen Ausdrücke für den höchstens zulässigen Längenfehler sind weder abhängig von der Art der verwendeten Messgeräte, noch von der angewandten oder durch die Umstände bedingten Messungsmethode, sondern nur von der Geländeneigung und der Länge. Es bestehen also, gleiche Geländeneigung vorausgesetzt, keine behördlichen Bestimmungen, welche eine schärfere Messung hochwertigen Geländes verlangen. (Für die Messung eines Grundstücks, bei dem 1 qm tausende von Mark wert ist, ist amtlich keine grössere Schärfe vorgeschrieben, als für ein völlig wertloses Grundstück! Diese Vernachlässigung der wirtschaftlichen Bedeutung einer Messung wird sich auf die Dauer nicht aufrecht erhalten lassen.)

Gegenüberstellung zulässiger Streckenfehler in einigen Staaten.

Strecke in m	Höchstens zulässige Abweichung zweier Messungen in cm											
	Württemberg Geländeklasse			Preussen Geländeklasse			Bayern Geländeklasse			Elsass-Lothringen Geländeklasse		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
50	10	14	18	15	18	21	13	17	21	9	12	15
100	15	21	27	21	26	30	20	26	32	14	18	22
150	20	27	35	27	33	38	27	34	41	18	24	29
200	24	33	42	32	39	45	33	41	50	24	30	35
250	28	39	49	36	45	51	39	48	58	29	35	41

Die Fehler beim Abstecken von Loten und beim Messen von Winkeln mit Benützung der in §§ 7—9 vorgeführten Instrumente unterliegen denselben Einflüssen, wie diejenigen des Einweisens von Geraden mit freiem Auge. Nur werden letztere noch vergrößert durch die Helligkeitseinbusse und die Beugung, welche die Lichtstrahlen beim Durchtritt durch das benützte Instrument

erleiden, sowie durch die Wirkung etwaiger unrichtiger Haltung, bezw. Aufstellung des letzteren.

Prof. Lorber in Leoben gibt in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1888, S. 381 ff. als mittleren Fehler der Absteckung eines rechten Winkels an:

Bei Benützung		was auf 50 m Schenkellänge einer linearen Unsicherheit von		2,3 cm entspricht
der Kegelkreuzscheibe	$\pm 1,6'$	"	"	3,8 cm "
" Zylinder	$\pm 2,6'$	"	"	1,9 cm "
des Winkelspiegels	$\pm 1,3'$	"	"	1,6 cm "
" Winkelprisma	$\pm 1,1'$	"	"	"

Abschnitt II.

Aufnahme von Figuren, Planzeichnung, Flächenberechnung.

Kapitel IV.

Aufnahme von Figuren: „Stückvermessung“.

§ 15. Aufnahmemethoden.

Um die Horizontalprojektion eines abgegrenzten n-Ecks nach Gestalt und Grösse darstellen zu können, müssen wir zunächst diejenige Zahl voneinander unabhängiger Bestimmungsstücke — Strecken oder Winkel — ermitteln, welche nach den Grundsätzen der Planimetrie nötig ist. Sie beträgt für ein Dreieck 3, für jede weitere Ecke 2 weitere, für das n-Eck also allgemein $(2n - 3)$ unabhängiger Stücke.

Nun haften aber allen durch Beobachtung gefundenen Grössen Mängel und Unvollkommenheiten an, die im Vergleich zur Ausdehnung der Einzelgrösse vielleicht ohne Bedeutung sind, die aber je nach der Anordnung der fehlerhaften Stücke im Zusammenwirken das gesuchte Resultat — Figur oder Inhalt des n-Ecks — erheblich und ungünstig beeinflussen können.

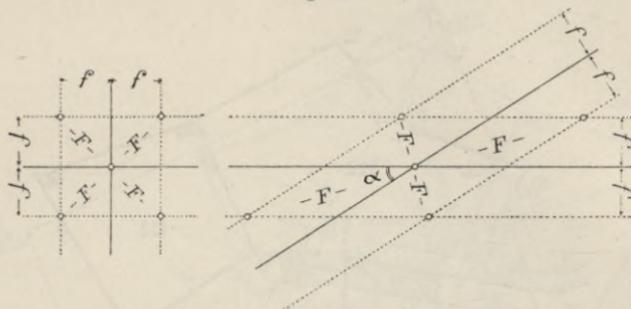
Wenn z. B. ein Punkt durch den Schnitt zweier Kreisbögen sich bestimmt, deren Radien gemessen sind, so ist die Wirkung F etwaiger Messungsfehler f dieser Radien auf die Lage des Punktes eine wesentlich verschiedene, je nachdem die Kreisbögen sich unter spitzem oder rechtem Winkel schneiden.

Zahl der nötigen Bestimmungsstücke.

Auswahl der zu messenden Bestimmungsstücke.

Bezeichnet man mit α den spitzen Schnittwinkel zweier Kreisbögen, und setzt den Messungsfehler f (Ungenauigkeit ihrer Halbmesser) als gleich voraus, so ist (s. Fig. 78)

Fig. 78.



$$F_{\text{Max.}} = \frac{f}{\sin \frac{\alpha}{2}} \text{ in der Richtung der Halbierenden von } \alpha$$

$$\left(F_{\text{Min.}} = \frac{f}{\sin \frac{2R - \alpha}{2}} = \frac{f}{\cos \frac{\alpha}{2}} \text{ senkrecht zur Halbierenden von } \alpha \right)$$

Für den Schnittwinkel $\alpha = R$ wird $F_{\text{Max.}} = F_{\text{Min.}} = f \sqrt{2}$,
für $\alpha = 0$ wird $F_{\text{Max.}} = \infty$.

Konstruiert man unter Benützung eines derart unrichtig festgelegten Punktes durch Bogenschnitt einen zweiten Punkt, baut sodann auf diesen einen dritten auf etc., so wird jeder folgende neben den Fehlern seiner eigenen Bestimmung noch diejenigen seiner Vorgänger enthalten und es werden durch Addition der an sich vielleicht kleinen Einzelfehler und ihrer Wirkungen schliesslich sehr merkbare und schädliche Abweichungen des Bildes von der wahren Gestalt sich ergeben.

Dieses zwingt zu einer in der reinen Planimetrie nicht geübten Rücksichtnahme auf die Auswahl und Anordnung der Bestimmungsstücke, d. h. auf die Wahl passender Aufnahmemethoden.

Einbindemethode.

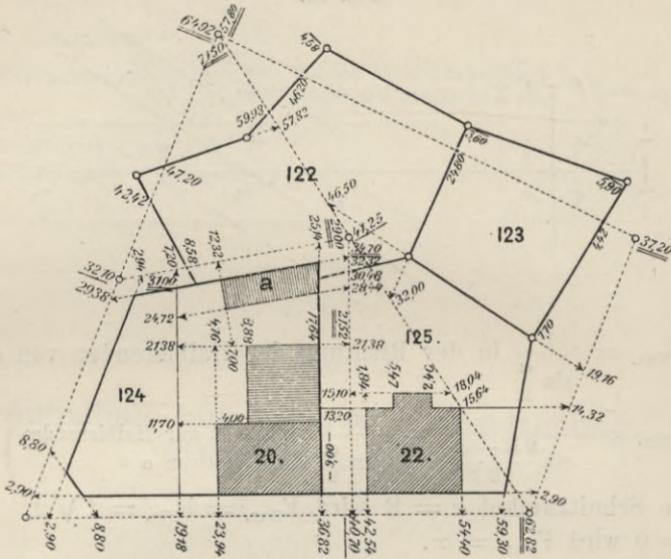
Lassen wir die in der Hauptsache auf Winkelmessung sich stützende Methode des Einschneidens (s. „Trig. Punktbestimmung“ und „Messtischverfahren“) vorläufig ausser Betracht, und beschränken wir uns zunächst auf diejenigen Verfahren, welche zur Festlegung ausschliesslich oder hauptsächlich in Zahlen ausgedrückte Streckenlängen verwenden, so müssen wir folgende Aufnahmemethoden unterscheiden:

1. Die **Einbindemethode** (s. Fig. 79). Sie verwendet als Bestimmungsstücke ausschliesslich Längenmasse, die zu Dreiecken verbunden, die Konstruktion jedes Punktes durch Schnitt zweier Kreisbögen (Bogenschnitt) ermöglichen. Durch passende Anordnung der Messungslinien (z. B. Verlängerung der Verbindungslinie zweier

Aufnahmemethoden.

aufzunehmenden Punkte bis zum Schnitt mit den Seiten eines durch $2n - 3$ gemessene Strecken bestimmten Dreiecksnetzes) ist es häufig

Fig. 79.



möglich, die notwendige Streckenmessung nach Zahl und Ausdehnung zu reduzieren.

2. Die **Koordinatenmethode** bestimmt die gegenseitige Lage der aufzunehmenden Punkte durch Messung von (a) Polar- oder (b) rechtwinkligen Koordinaten in bezug auf einen beliebig gewählten oder gegebenen Punkt als Ursprung (Nullpunkt) und eine durch ihn gehende Gerade als Abszissenachse (Aufnahmelinie).

Polar-
koordinaten.

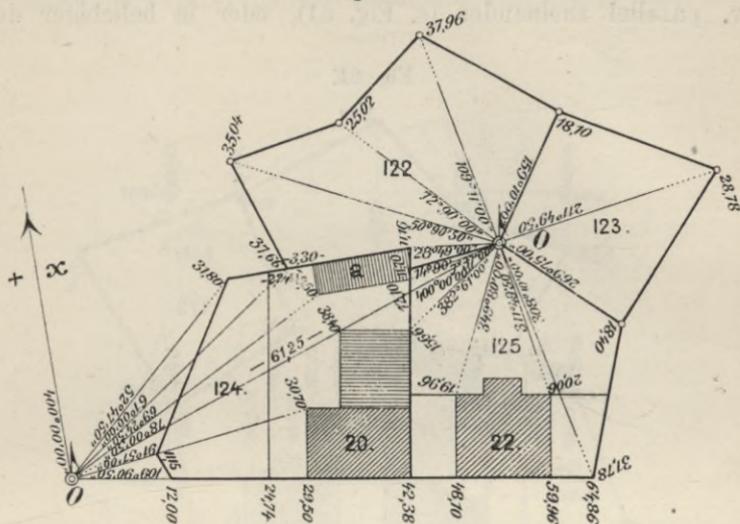
a) **Polarkoordinaten** (s. Fig. 80). Von dem als Ursprung gewählten Punkt O werden die Entfernungen nach allen aufzunehmenden Punkten und die Winkel gemessen, welche diese Verbindungsstrahlen je mit der x-Achse einschliessen (Richtungswinkel).

Unpraktisch wäre es, die Winkel zu messen, welche die genannten Strahlen unter sich einschliessen, weil in diesem Fall ein einziger Winkelfehler nicht bloss den einen Strahl, sondern alle weiteren darauf aufgebauten Strahlen verdrehen würde.

Ist einer der Eckpunkte der Figur als Nullpunkt, eine von ihm ausgehende Grenzlinie als x-Achse gewählt, so sind $n - 1$ Strecken und $(n - 2)$ Winkel, d. h. zusammen $(2n - 3)$ Stücke zu messen. Wird ein beliebig gelegener Punkt als Ursprung und eine beliebige Gerade als x-Achse gewählt, so braucht man n Strecken und n Winkel, also $2n$ Stücke. (Der scheinbare Widerspruch gegen die

eingangs allgemein geforderte Zahl von $2n - 3$ Bestimmungsstücken erklärt sich daraus, dass zur Festlegung der nicht der Figur angehörig Aufnahmeinie und ihres Nullpunkts drei weitere Masse nötig sind.) Ist die aufzunehmende

Fig. 80.



Figur sehr gross, oder die Zugänglichkeit erschwert, so kann man auch statt eines einzigen Ursprungs und Polarkoordinatensystems deren mehrere verwenden, die durch entsprechende Messungen (etwa nach der Einbindemethode, oder nach dem Polygonalverfahren, s. unter 3.) in gegenseitige Verbindung gebracht werden müssen.

Die Messungsergebnisse werden bei dieser Methode nach pünktlicher Numerierung der Punkte entweder schematisch, oder mit Benützung einer Handskizze ins Feldbuch eingetragen.

Häufiger angewandt und im folgenden immer gemeint, wenn kurzweg von „Koordinatenmethode“ die Rede ist, ist die Aufnahme mittels

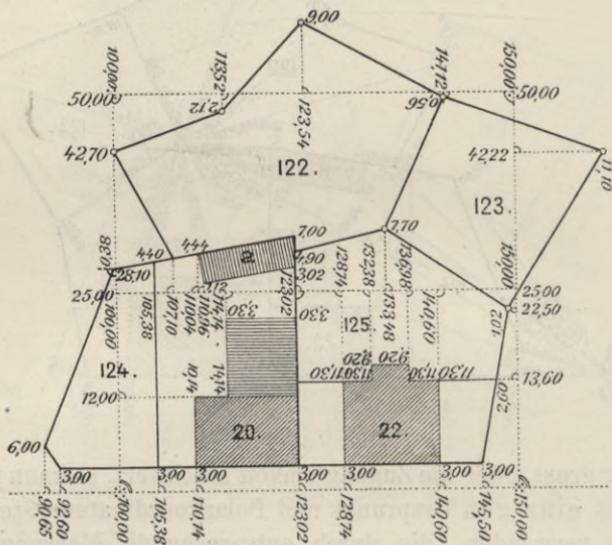
b) Rechtwinkliger Koordinaten (s. Fig. 81 und, als Beispiel der Verwendung mehrerer, geometrisch zusammenhängender, Achsen, Fig. 134).

Rechtwinkliger Koordinaten.

Man legt eine Gerade (Aufnahmelinie, Abszissenachse) der Längsrichtung nach durch das aufzunehmende Gebiet, so dass sie möglichst nahe den aufzunehmenden Punkten verläuft (wenn möglich durch zwei Grenzpunkte, oder, bei der Aufnahme langgestreckter Bauwesen, entlang deren Achsen und ihren Verlängerungen). Alsdann winkelt man die Eckpunkte der Figur an (fällt von jedem ein Lot auf die Linie) und misst (entweder während des Fällens der Lote,

oder — für Anfänger zweckmässiger — nachher zusammenhängend) die Länge sämtlicher Lote (Ordinaten) und ihren gegenseitigen Abstand (Abszissen). Reicht eine einzige Aufnahmelinie nicht aus, so tritt an ihre Stelle ein System von solchen, welche entweder senkrecht bzw. parallel zueinander (s. Fig. 81), oder in beliebiger durch

Fig. 81.



Streckenmessung geometrisch in gegenseitigen Zusammenhang gebrachter Lage (s. Fig. 134) angeordnet werden. Die Messung der Abszissen erfolgt statt einzeln (von Lotfusspunkt zu Lotfusspunkt), durchlaufend von einem beliebigen Anfangspunkt aus, weil andernfalls ein etwaiger Ablesefehler nicht bloss den betreffenden Punkt, sondern jeden folgenden verschieben würde, ähnlich wie bei den Richtungswinkeln der Polarkoordinatenmethode.

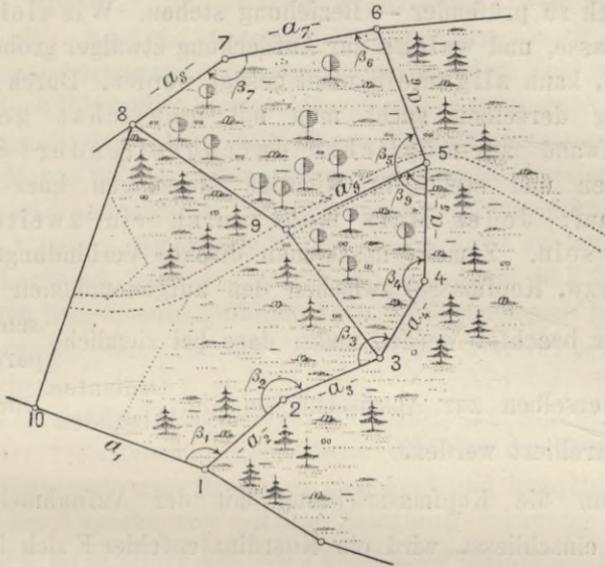
Da jeder Punkt nur bestimmt ist, wenn von ihm sowohl Ordinate als Abszisse (die Koordinaten) gemessen werden, so ist die Zahl der nötigen Masse im n Eck nicht $= 2n - 3$, sondern $= 2n$. Auch hier sind nämlich, wie bei der Methode 2a, drei Masse nötig, um die Aufnahmelinie nach Richtung und Anfangspunkt in der Figur festzulegen.

3. Die **Polygonalmethode** (s. Fig. 82) verbindet die aufzunehmenden Punkte durch einen Streckenzug, von welchem die Brechungswinkel je zweier aufeinanderfolgenden Strecken und die Längen der letzteren gemessen werden. (Zahl der nötigen unabhängigen Masse $= 2n - 3$.) Winkel und Strecken werden hier statt in einer Skizze meist in tabellarischer Form aufgezeichnet, weshalb die Eckpunkte mit Nummern zu versehen sind.

Als aufzunehmender Eckpunkt der Figur gilt bei Marksteinen und Pflöcken (falls nicht besondere Merkmale, wie eingemeiselte Kreuze und Vertiefungen, eingetriebene Drahtstifte etc. hiefür massgebend sind) immer die vertikale Symmetralachse. (Vertikalstellung daher nötig.) Bei Hausecken gilt, je nach den be-

Nähere Bezeichnung der Eckpunkte.

Fig. 82.



treffenden amtlichen Bestimmungen einzelner Staaten, der Hausgrund oder das Fundament bezw. der Sockel. In Württemberg dürfen laut Vollziehungsverfügung zur Bauordnung Fussmauern (Sockel) bis zu 20 cm über die Baulinie auf die Strasse vorragen. Es gilt daher als Gebäudegrenze gegen die Strasse der Hausgrund, und zwar bei verputzten Fachwerksbauten die Aussenkante des Verputzes. (Gegen fremdes Privateigentum dürfen Fussmauern etc. die Grundstücksgrenze natürlich nicht überschreiten).

Ausser den **kleinen, unvermeidlichen** Fehlern, deren möglichste Unschädlichmachung die Aufgabe der gewählten und daraufhin noch zu untersuchenden Aufnahmemethode ist, können sich bei den Messungen infolge äusserer Störungen, von Unachtsamkeit oder Ungewandtheit des Technikers etc. auch noch **grobe** Fehler (Zählfehler, Ablesefehler etc.) einschleichen. Sie sind noch verhängnisvoller als die ersteren, weil ein einziger von ihnen eine vollständige Verzerrung des die Grundstücksgrenzen und -Einteilung

Kontrollmasse.

wiedergebenden Bildes zur Folge haben könnte. Sie müssen daher unter allen Umständen erkannt und ausgemerzt werden. Die nächstliegende Gegenmassregel, nämlich die wiederholte Messung, bietet hiezu kein sicheres Mittel, weil erfahrungsgemäss einmal gemachte Fehler sich gerne wiederholen. Man zieht es daher vor, andere Grössen, „Kontrollmasse“, zu ermitteln, welche zu den eigentlichen Bestimmungsmassen in bekannter — rechnerisch oder zeichnerisch zu prüfender — Beziehung stehen. Wie viele solcher Kontrollmasse, und welche zur Aufdeckung etwaiger grober Fehler nötig sind, kann allgem'ein nicht gesagt werden. Durch passende Anordnung derselben sucht man mit möglichst geringem Arbeitsaufwand zu möglichst durchgreifender Sicherung zu kommen und stellt für wichtige Messungen kurz die Bedingung auf: Jedes Mass muss durch ein zweites kontrolliert sein. Zumeist misst man direkte Verbindungsstrecken (Binde- bzw. Kopfmass) zwischen den aufgenommenen Punkten, wobei aber beachtet werden muss, dass bei ziemlich senkrechtem parallelem Verlauf derselben zur Abszissenachse die Ordinaten nicht, oder kaum kontrolliert werden.

(Wenn die Kopfmassrichtung mit der Aufnahmelinie den Winkel $\frac{R}{2}$ einschliesst, wird ein Koordinatenfehler F sich im Betrag $\frac{F}{\sqrt{2}}$ auf dessen Länge übertragen.)

Wir stossen hier auf einen zweiten, wesentlichen Unterschied zwischen der praktischen und der reinen Geometrie — die letztere kennt und braucht keine Überbestimmung.

Ob wir die Kontrollmasse ihrer eigentlichen Bestimmung entsprechend lediglich als Warnungssignale für etwaige grobe Fehler in den Bestimmungsmassen, oder ob wir sie selbst als Bestimmungsmasse ansehen und weiterhin durch Ausgleichung der unvermeidlichen Widersprüche zur gegenseitigen Verbesserung dieser Masse benützen, hängt von der verlangten Genauigkeit und von den zur Verfügung stehenden Mitteln ab. Die im letztgenannten Fall anzuwendende Ausgleichungsrechnung (vergl. u. a. des Verfassers Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Göschen 1906) bildet ein wichtiges Hilfsmittel der Vermessungskunde.

§ 16. **Vorzüge und Nachteile der in § 15 vorgeführten Aufnahmemethoden.**

1. **Einbindemethode.** Vorzüge: Beschränkung auf die Anwendung einfachster Messgeräte (Stangen und Stäbe), welche überall in irgend welcher Form zur Verfügung stehen; erleichterte Möglichkeit systematischer Abstufung des Liniennetzes: „Übergang vom Grossen zum Kleinen“; Wahl der Messungslinien völlig frei, daher bequemes Anpassen an örtliche Verhältnisse, wodurch genaue Messung eher möglich; unreelles Drücken der (durch Rechnung schwer kontrollierbaren) Messungsgrössen auf dem Feld seitens unzuverlässiger Hilfskräfte ausgeschlossen, daher möglichste Messungszuverlässigkeit das einzige Mittel, um Übereinstimmung der beobachteten Masse bei der späteren Ausarbeitung zu erzielen; die hier ausschliesslich verwendeten Verlängerungen und Linienschnitte (sogen. „Abgänge“ bezw. „Richtungen“) sind, wenn nicht zu lange und zu schief schneidend, genauer, als die mit einem der in Kapitel 2 beschriebenen Instrumente gefällten Lote. (Ausgenommen hievon sind Verlängerungen von, aus der Vertikalebene ausgewichenen, alten Mauerflächen.)

Ver-
gleichende
Würdigung
der
Aufnahme-
methoden.

Nachteile: Ungünstige Fehlerfortpflanzung bei schiefem Schnitt der bestimmenden Kreisbögen. Addition der Fehlerwirkung beim Aufbau mehrerer Dreiecke; unsichere und komplizierte Feststellung der Ursache von bei der Zeichnung erkannten Messdifferenzen und ihres Ortes (ob von Fehlern der Streckenmessung oder von der Ausbauchung abgesteckter Geraden herrührend); Verwendung der Kontrollmasse zur rechnerischen Verbesserung ihrer selbst und der übrigen Masse schwerfällig, zur Kontrolle nur zeichnerisch verwertbar; die selbständige Aufzeichnung eines bestimmten Teils der Aufnahme (einzelner Grundstücke etc.) ist nur nach vorausgegangener Kartierung eines ausgedehnten Netzes von Messungslinien, die zur verlangten Figur direkt in keiner Verbindung zu stehen brauchen, möglich; zur Wiederherstellung irgend eines verloren gegangenen Punktes (z. B. Grenzpunktes) ist immer ein zweiter aufgenommener Punkt nötig, über den die Aufnahme- richtung geht, und der aber möglicherweise selbst nicht vorhanden ist; die Flächenbestimmung ist ohne umständliche Hilfsrechnungen nur mit Benützung des Planes möglich, ebenso die Ermittlung etwaiger nicht direkt gemessener Strecken und Winkel.

2. **Koordinatenmethode.** a) Polarkoordinaten. Vorzüge: Etwaige grobe Strecken- oder Winkelfehler übertragen sich nicht auf weitere Aufnahmeteile, sondern erzeugen lediglich eine Verschiebung des durch das betreffende Mass bestimmten Punktes;

die unvermeidlichen Messdifferenzen haben infolge rechtwinkliger Schnitte der Bestimmungslinien möglichst unschädliche Wirkung; in Verbindung mit der Polygonalmethode und unter Beschränkung auf geringe räumliche Ausdehnung der Einzelsysteme ist die Messung von Polarkoordinaten überall möglich (z. B. auch zur Aufnahme nur von einer einzigen Seite zugänglicher Höfe innerhalb von Häuserblöcken etc.); bei zweckmässiger Anordnung werden durch jedes Kontrollmass vier Masse (zwei Winkel und zwei Strecken) geprüft, daher geringe Zahl nötiger überschüssiger Masse.

Nachteile: Ohne häufigen Wechsel des Koordinatenursprungs (Beschränkung auf kleine Gebiete) ist die Gesamtlänge der zu messenden Strecken unverhältnismässig gross, wenn es auch (was infolge von baulichen-, Kultur- oder Terrainhindernissen meist nicht zutrifft), möglich wäre, die aufzunehmenden Punkte anzuzielen; die sichere Wiederherstellung eines etwa verloren gegangenen Koordinatenursprungs und, über ihn, der einzelnen von ihm aus aufgenommenen Punkte, ist um so schwieriger, je weniger ausgedehnt sein Aufnahmegebiet ist; zu jeder Arbeit ist die Verwendung komplizierter Winkelinstrumente erforderlich.

b) Rechtwinklige Koordinaten. Vorzüge: Etwaige grobe Ablese- oder Winkelfehler pflanzen sich nicht auf weitere Punkte fort, sondern erzeugen lediglich eine Verschiebung des durch das betreffende Mass aufgenommenen Punktes; unvermeidliche Messdifferenzen haben infolge durchaus rechtwinkliger Schnitte der Bestimmungslinien möglichst unschädliche Wirkung; zur Zeichnung, wie zur Wiederbestimmung einzelner, nachträglich etwa verloren gegangener aufgenommenener Punkte ist ein nur auf den betreffenden Teil sich erstreckendes Liniennetz erforderlich, das an Ort und Stelle um so leichter wieder herstellbar ist, je mehr noch vorhandene Punkte auf dasselbe bezogen sind, d. h. je länger die Aufnahmelinie gewählt wurde; die spezielle Wiederbestimmung eines Punktes erfolgt völlig unabhängig von etwaigen weiteren Punkten derselben oder einer benachbarten Grenze; die rechnerische Feststellung von Flächen-, Strecken-, und Winkelgrössen ist aus Originalmassen ohne Verwendung eines Planes auf elementar-mathematischem Wege möglich; die Kontrollmasse lassen sich nach Belieben und leicht zur rechnerischen oder zeichnerischen Prüfung, wie zur Ausgleichung der Messungsgrössen verwenden.

Nachteile: Wenig ausgeprägte Gliederung des Liniennetzes; gebundene Messungsrichtung und damit Erschwerung, Verteuerung und Genauigkeitseinbusse bei den Streckenmessungen; geringe Möglichkeit, das Liniennetz abnormen Begrenzungsformen anzupassen,

daher häufig lange und ungenaue Lote; Unanwendbarkeit in überbautem Gelände und im Wald; mangelnde Identität der zur Flächenbestimmung und zur etwaigen späteren Grenzwiederherstellung dienenden Masse — der Koordinaten einer-, der Kopfmasse andererseits — Leichtigkeit, Kontrollmasse statt durch Messung durch Rechnung zu gewinnen (unzuverlässige Hilfskräfte!).

3. Polygonalmethode. Vorzüge: Anwendung überall möglich, weil die Aufnahmelinien (Polygonseiten) der Bodeneinteilung und Geländeform sich am leichtesten anpassen lassen; durchgreifende Kontrolle gegen grobe Fehler schon bei einem einzigen überschüssigen Stück im Polygon wenigstens summarisch vorhanden; Messungsgenauigkeit und -Bequemlichkeit wegen der leichten Anpassung an Geländeform etc. am grössten.

Nachteile: Zur Aufnahme, wie zur etwaigen späteren Wiederherstellung verloren gegangener Punkte sind kompliziertere Winkelinstrumente nötig. Der Zeitaufwand ist verhältnismässig gross, schon in Rücksicht auf die nötige rechnerische Ausnützung der gemessenen Grössen. Die Fehlerfortpflanzung ist die denkbar ungünstigste, insofern ein einziger Streckenfehler den ganzen ferneren Zugsteil parallel verschiebt, ein Winkelfehler denselben sogar verschwenkt.

§ 17. **Auswahl der im einzelnen Fall anzuwendenden Stückvermessungsmethode.**

Zweck und Art der Grenz- und Kleinpunktsvermarkung.

Die Wahl der Aufnahmemethode ist abhängig von der Geländeform und der Benützungsort des Aufnahmegebiets, von dem Zweck der Aufnahme und da, wo letztere öffentliche Glaubwürdigkeit beansprucht, von behördlichen Vorschriften. Der letztere Umstand bedingt es, dass in jedem einzelnen Staat, auch bei sonst ähnlichen äusseren Umständen, und beeinflusst zum Teil von der verschiedenartigen historischen Entwicklung des Vermessungsdienstes die Stückvermessung in mehr oder weniger abweichender Form — die in § 15 vorgeführten reinen Methoden irgendwie kombinierend — erfolgt.

Sachlich empfiehlt sich in bergigem, und bewaldetem Gebiet für die Aufnahme der hauptsächlichsten Grenzzüge die Anwendung der (verhältnismässig engmaschig auszubildenden) Polygonalmethode. Sie liefert die Grundlage für die mittels der Koordinatenmethode zu bewirkende Einschaltung untergeordneten Details.

Auswahl der Stückvermessungsmethode in Rücksicht auf Geländeform und Benützungsort.

Je ebener und offener das Gelände, um so weitmaschiger wird zweckmässigerweise das grundlegende Polygonnetz und um so stärker tritt das mit letzterem nach der Einbindemethode geometrisch in Verbindung zu setzende Aufnahmeliniennetz in den Vordergrund.

Ist das Gelände sehr offen und eben, und legt man besonderen Wert auf die Möglichkeit, beliebige Winkel-, Strecken- und Flächenmasse aus direkten Aufnahmemassen bequem berechnen zu können, so kann man für die in das Polygonnetz einzubindenden Aufnahmelinien die Bedingung gegenseitig parallelen, bezw. senkrechten Verlaufs aufstellen: „Parallelmethode“ (s. S. 112). In diesem Fall folgt die mittels der Polygonalmethode, oder durch Triangulierung (s. Kapitel 11 und 12) zu schaffende Grundlage für dieses Netz von Aufnahmelinien sowohl sachlich als zeitlich der Anlage der letzteren. Auch das Stückvermessungsverfahren im einzelnen zeigt die ausgedehnteste Anwendung der Koordinatenmethode.

In eng bebautem Gebiet (Städten) wird je nach der verlangten Genauigkeit und den zur Verfügung stehenden Geldmitteln ein enges Netz von Stützpunkten durch Triangulierung (s. Kapitel 11) oder nach der Polygonalmethode (s. Kapitel 12) geschaffen, als Grundlage für die einzubindenden (als Koordinatenachsen für das Detail dienenden) Aufnahmelinien, oder, (in Lichthöfen etc.), für die Aufnahme durch Polarkoordinaten.

Feldbuch.

Feldaufzeichnungen: Welche Aufnahmemethode auch verwendet werden möge, in allen Fällen werden die Ergebnisse der Stückvermessung (Masszahlen, Aufnahmelinien, Grenzlinien und -Punkte, Angabe der Kulturen, Namen der Eigentümer, topographische Einzelheiten, Datum der Aufnahme, anwesende Urkundspersonen etc.) im Feldbuch eingetragen. Eine der Wirklichkeit möglichst ähnliche, deutliche Skizze wird erzielt, wenn man die Länge jedes Lotfusspunkts und die Länge jeder Ordinate, d. h. jeden aufgenommenen Punkt massstäblich erst einzeichnet, wenn die betreffende Strecke gemessen ist und deren Masszahl eingeschrieben werden soll. Die Skizze entsteht dann durch entsprechende Verbindung der aufgenommenen Punkte und hält gleichen Schritt mit dem Fortschreiten der Aufnahme selbst. Bei grösseren Grundstücken empfiehlt sich für das Feldbuch der Massstab $1 \text{ mm} = 1 \text{ m}$, für Ortsaufnahmen etwa der Massstab $3 \text{ mm} = 1 \text{ m}$. Der Massschrieb erfolgt bei durchlaufender Messung immer senkrecht zur Messungsrichtung am Endpunkt des betreffenden Abschnitts auf der entgegengesetzten Seite der Abzweigerichtung und zwar so, dass die Schreib- und Leserichtung gleichzeitig die Messungsrichtung angibt.

Nur die Ordinaten werden, auch wenn dies in einzelnen Fällen nicht zutreffen sollte, zweckmässig so eingeschrieben, als ob sie von der Achse ausgehend gemessen worden wären. Bei Einzelmessung (z. B. Bindemass zwischen zwei durch Koordinaten auf-

genommenen Punkten), bei welcher nur die gegenseitige Entfernung der beiden Endpunkte einer Strecke abgelesen wurde, wird das Mass parallel zur Messungsrichtung in die Mitte der Strecke geschrieben. Die Übersichtlichkeit des Masseinschriebs wird gefördert, wenn Masse, welche nicht dem System der Aufnahmelinien angehören (durchlaufende Bindemasse und Kopfmass) überstrichen werden und zwar das Endmass doppelt. Masse für die Abzweigung untergeordneter Aufnahmelinien von solchen höherer Ordnung werden einfach, Endmasse der Aufnahmelinien doppelt unterstrichen. Ordinaten werden durch ausgezogene, Fluchtlinien (Richtungen) durch punktierte Linien, die betreffenden Fusspunkte durch ein Kreuz bezw. einen Pfeil bezeichnet.

➤ Ist die Aufgabe mit der Gewinnung eines Planes erledigt, so kann man auf die Anwendung irgend einer der vorbeschriebenen Stückvermessungsmethoden verzichten und sich des Messtischverfahrens, oder, falls die damit erreichbare Genauigkeit genügt, der Tachymetrie (s. Teil II) bedienen.

Auswahl der Stückvermessungsmethode in Rücksicht auf den Zweck.

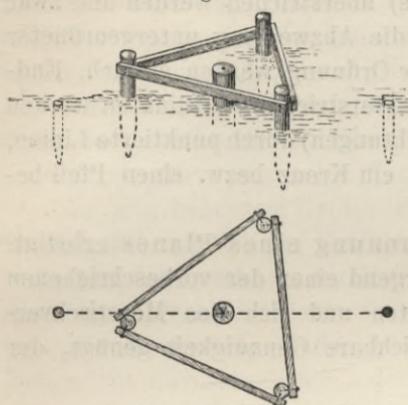
Soll dagegen die Aufnahme dazu dienen, Flächengrössen, oder die Lage von Grenzlinien derart festzulegen, dass Veränderungen, welche innerhalb enger, oder weiter begrenzter Zeiträume daran vor sich gehen, jederzeit innerhalb der bei der Uraufnahme erzielten Genauigkeit nachgewiesen werden können, so ist die Anwendung einer Aufnahmemethode nötig, welche die Wiederherstellung der Lage jedes aufgenommenen Punktes auf einfachste Weise ermöglicht. Hier empfiehlt sich eine auf ein Polygon- oder Dreiecksnetz sich aufbauende Kombination von Koordinaten- und Einbindemethode. Für die Lage der Aufnahmelinien, die nötige Messungsgenauigkeit und die Art der Versicherung (Vermarkung) der Messungs- und Grenzpunkte ist der Zweck und die Geltungsdauer der Aufnahme massgebend. Es ist deshalb zu unterscheiden zwischen Aufnahmen, welche zur Projektierung von Bauwesen, zu deren Absteckung auf dem Gelände und zur Abrechnung des Grunderwerbs und der Bauarbeiten dienen und welche nach erfolgter Fertigstellung des Baues und der Abrechnung bedeutungslos werden „Aufnahme für Bauzwecke“ und zwischen Aufnahmen, welche zur Feststellung und Sicherung des Eigentums an Grund und Boden dienen und dauernden Wert haben sollen „Katasteraufnahmen“.

Für die Durchführung von Aufnahmen zu Bauzwecken bestehen zumeist keine behördlichen Vorschriften. Zweckmässigerweise werden die Aufnahmelinien so gelegt, dass durch ihre Benützung während der Bauzeit die Bauarbeiten einerseits möglichst wenig gestört werden, dass sie aber andererseits dem Bauobjekt

möglichst benachbart verlaufen (Parallele zu den Achsen) und während des Baues leicht absteckbar sind.

Die Hauptpunkte des Liniennetzes werden derart versichert, dass sie bis zur Beendigung des Baues jederzeit leicht

Fig. 83.



und unzweideutig wieder aufzufinden und gegen unabsichtliche Beschädigung durch Fuhrwerk etc. nach Lage und Höhe geschützt sind (Oberflächenversicherung mittels eichener Pflöcke und Lattendreiecke, s. Fig. 83). Gegen böswillige Beschädigung schützen verdeckt gehaltene, mit den Hauptpunkten durch Messung verbundene, in genügender Entfernung von ersteren unter die Ackerkrume herabgetriebene Pflöcke.

Die notwendige Messungsgenauigkeit ist, wenn die Lage des Bauobjekts feststeht, grösser in nächster Nähe des letzteren, geringer in solcher Entfernung davon, dass die Aufnahme nurmehr den Zwecken der Übersicht und der etwa nötig werdenden Neuregelung von Rechtsverhältnissen (Fahrlasten etc.) dient.

Jede solche Bauaufnahme, welche alles für das auszuführende Bauobjekt Wichtige — Eigentumsgrenzen, Bäume, Zäune, Brunnen, Quellen, vorhandene Bauten etc. — umfasst, bildet ein für sich bestehendes Werk, das nicht notwendig einer in der Nachbarschaft ausgeführten anderen Vermessung organisch sich eingliedern muss.

Die Aufnahmen für Katasterzwecke zerfallen in „Neuaufnahmen“ — Feststellung und Vermessung der zur Zeit der Aufnahme vorhandenen Grundstücksbegrenzung und Bodenkultur zum Zweck der Anlegung von Grundstücksplänen und Grundsteuer oder Eigentumskatastern — und in „Fortführungsaufnahmen“ — Feststellung der infolge Kaufs, Tauschs, Neubaus etc. im Lauf der Jahre vor sich gegangenen Änderungen am ursprünglichen Bestand nach Tatsache und Ausdehnung und Nachtrag derselben im Vermessungswerk. —

In Verbindung mit den Katastermessungen werden zumeist Bedürfnisse der Topographie und Landeskunde befriedigt durch gleichzeitige Aufnahme topographischer Einzelheiten (Brücken- und Wehrbauten etc.).

Gegenüber den Vermessungen für Bauzwecke weisen die Katastermessungen namentlich folgende Unterscheidungsmerkmale auf:

1. Die Ergebnisse der Katastermessungen haben eine nicht nur nach einzelnen Jahren zu bemessende, sondern unabsehbar lange Dauer. Danach richtet sich sowohl die Art der Vermarkung der Grenz- und Messungspunkte, als auch die Wahl der auch nach Jahrzehnten immer wieder zu benützenden Messungslinien. Für letztere ist mitbestimmend die anzuwendende Aufnahmemethode. Ist letztere je nach den Gelände- und Grundeigentumsverhältnissen, und dem vorangestellten Zweck (zum Teil auch nach der zufälligen Auffassung der leitenden Behörde) etc. für ein Land einmal gewählt, so ist eine Änderung später nur mit erheblichem Kostenaufwand durchführbar.

Möglichster Unveränderlichkeit und Dauer der Messungspunkte und dauernder Absteckungsmöglichkeit der Messungslinien gebührt bei Katasteraufnahmen grössere Rücksichtnahme, als der Forderung ihrer leichten Auffindbarkeit während einer beschränkten Zeitspanne. Die Grenzvermarkung erfordert besondere organisatorische Massnahmen.

2. Katastervermessungen umfassen ganze Provinzen oder Staatsgebiete. Jede Einzelvermessung, auch wenn sie sich über ein verhältnismässig grosses Gebiet erstreckt, ist daher nur ein Baustein in dem Vermessungswerk des Landes, nichts Unabhängiges für sich. Eine gewisse Gleichartigkeit der in verschiedenen Landesteilen von verschiedenen Personen zu verschiedenen Zeiten bearbeiteten Aufnahmen ist daher unumgänglich und durch ins Einzelne gehende Vorschriften, sowie durch behördliche Aufsicht zu gewährleisten. Die nötige Instandhaltung des Vermessungswerks bezüglich der im Lauf der Jahrzehnte vor sich gehenden Änderungen des ursprünglichen Zustandes verlangt besondere Rücksichtnahme.

3. Die nötige Genauigkeit der Arbeiten ist (je zum mindesten bezüglich der Gebiete von gleichen Bodenwerten) eine über das ganze Land gleichmässige, von dem Bedürfnis und den zur Verfügung stehenden Mitteln abhängige.

Ursprünglich nur dem Bedürfnis einer gerechten Verteilung der Grundsteuer entsprungen, sind die Katastermessungen in über 100jähriger stetiger Entwicklung zu den wesentlichsten Grundlagen für die Feststellung des Eigentumsrechts an Grund und Boden, für den Realkredit und den Verkehr mit Grund und Boden, also volkswirtschaftlich von grösster Bedeutung geworden. Den höheren Zwecken mussten sich naturgemäss auch die Anforderungen an Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Vermessungswerke und die Aufnahmemethoden anpassen.

Überall da, wo die ursprüngliche Vermessung weder die heute nötige Zuverlässigkeit, noch Vervollkommnungsfähigkeit besass, oder wo die Art des Nachtrags der im Lauf der Jahre eintretenden Veränderungen die Entstehung von Widersprüchen im Vermessungswerk begünstigte, wurde und wird die wiederholte Neuaufnahme zum unabweisbaren Bedürfnis.

Katasterneumessung.

Gegenstand der Katasterneumessung sind sämtliche Grundstücke nach ihren Eigentums-, Kultur-, sowie ihren öffentlichen und privaten Rechtsverhältnissen. Für Zwecke der Landeskunde treten sodann alle topographisch wichtigen Gegenstände (Felswände, Raine, Quellen, Brücken, Wehre etc.) hinzu.

Die wichtigste Vorbereitung der Stückvermessung bildet die Vermarkung. Vermarkung sämtlicher Eigentumsgrenzen zumeist mit ca. 50 cm langen vierkantig zugerichteten Natur-, oder mit Kunststeinen von entsprechender Form und zwar bei Kleinbesitz derart, dass je eine möglichst grosse Zahl von Mittelmarken auf eine die Grundstücksgrenzen quer schneidende Gerade „Steinlinie“ zu stehen kommt. Letztere spielt hernach die Rolle einer Aufnahmelinie.

Die Haupt- oder Netzpunkte der Aufnahmelinien werden gleichfalls, und zwar im Interesse möglicher Unveränderlichkeit, wo es nötig erscheint, unter der Ackerkrume, vermarkt. Hiefür werden die verschiedensten Hilfsmittel — Drainröhren (zum Schutz gegen Beschädigung durch die Grabwerkzeuge beim Aufsuchen mit einer Steinplatte bedeckt); 30 cm lange Hohlziegel mit quadratischem Querschnitt von 10 cm Seite- und runder, 5—6 cm weiter Längshöhhlung; metallene Röhrenstücke; mit Loch zur Aufnahme des Stabs versehene Marksteine; in Betonklötze eingebettete, und (zur leichten Auffindbarkeit, sowie zur Fortsetzung der Strassenoberfläche) von gusseisernen, oben abgedeckten Schutzgehäusen umschlossene Metallröhren, im Eisenbahnkörper einbetonierte, vertikal gestellte, mit einem geformten Ende, oder (zur scharfen Punktbestimmung) oben eingehauenen Kreuz über die Bodenoberfläche hervorragende Stücke von Eisenbahnschienen etc. — verwendet.

Stückvermessungsmethoden.

Nach dem vorhergehenden lassen sich Katastervermessungen nur in der Umgrenzung der einzelnen Staaten näher betrachten. Dabei seien die verschiedenen, in allen deutschen Staaten schon vom 16. Jahrhundert, in Frankreich vom Ende des 18. Jahrhunderts ab begonnenen, tastenden Versuche zur Erlangung eines Vermessungs-

werkes über sämtliche Grundstücke im nachfolgenden übergangen und es seien nur diejenigen geodätischen Arbeiten (und zwar, da für Wald- und Grossgrundbesitz das Messtisch-, oder das Polygonalverfahren allein in Betracht kommt, in der Hauptsache unter Beschränkung auf die im Gemenge liegenden landwirtschaftlich benutzten Flächen) kurz berührt, deren Ergebnisse in unsere Zeit hereinragen und teilweise heute noch grundlegend sind.

Während der ersten Entwicklungsperiode der Kataster-(Steuer-)vermessungen schien die vermessungstechnische Aufgabe mit der Gewinnung des Flächenmasses für jedes einzelne Grundstück erschöpft. Da sich diese Flächenmasse für Steuerzwecke genügend genau aus einem Plan ermitteln liessen, so beschränkten sich die Feldaufnahmen auf die Gewinnung eines solchen Plans und es ergab sich dadurch von selbst die Anwendung des am billigsten zum Ziel führenden „Messtischverfahrens“ zum Teil in Verbindung mit derjenigen des Reichenbachschen Distanzmessers (s. Teil II).

Die Katastervermessung des Königreichs Bayern (1808 bis 1853), welche sich die kurz zuvor begonnene französische zum Vorbild nahm, und von 1817 an diejenige der Länder der österreichisch-ungarischen Krone (in neuerer Zeit noch von Bosnien und der Herzegowina) waren Messtischaufnahmen. In Bayern wurde dabei die Lage der topographisch wichtigen Gegenstände und der Verlauf sämtlicher Eigentums- und Kulturgrenzen auf quadratisch begrenzten Plänen von je 8000 Fuss Seitenlänge im Massstab 1:5000 zur Darstellung gebracht.

Dem Vorbild Bayerns folgte Württemberg (1818—1840). Da jedoch der sehr zersplitterte Grundbesitz hier eine schärfere Flächenbestimmung nahelegte und die Vermessungsbehörde, um eine solche zu erzielen, die Höhe des dem Aufnahmegeometer zu vergütenden Akkordsatzes u. a. von der Zahl der aus unmittelbar gemessenen Strecken berechenbaren Grundstücke abhängig machte, verlor der Messtisch seine Bedeutung für die eigentliche Stückvermessung. Er diente vielmehr nur noch dazu, die verschiedenen Aufnahmelinien auf den Plan zu bringen.

Die auf dem Gelände erhobenen Streckenmasse und das sie enthaltende Feldbuch („Brouillon“) erhielten gesteigerte Bedeutung. Letzteres stellt auf dem Feld mit dem Fortschreiten der Aufnahme entstehende, in Heftform zusammengefasste Skizzen dar, welche sämtliche erhobenen Masszahlen für den Verlauf der Eigentums- und Kulturgrenzen je innerhalb einer quadratischen Fläche (Messtischblatt) von 4000 Fuss Seitenlänge (Absteckung der Blattgrenzen s. § 93) enthalten. Über die ganze geradlinige Erstreckung jeder Aufnahme-

linie wurde durchlaufend fortgemessen. Da sodann die Flächenberechnung sich am ehesten rein aus unmittelbar gemessenen Strecken dann ermöglichen liesse, wenn die Koordinatenmethode der Aufnahme zu Grund gelegt wurde, und da jedes neue Koordinatensystem weitere schwerfällige Messtischanwendung und weitere doppelte Aufnahme von Grenzpunkten bedingte, so lag es nahe, die einmal irgendwie gewählte und abgesteckte Koordinatenachse durch Parallelen und Senkrechte, ein Parallelsystem, über möglichst grosse Flächen, nämlich so lange fortzusetzen, als überhaupt Grundstücksrichtung, Bodenanbau und Bodenform dies zuliess. Dies um so mehr, als die durch eine besondere Gemeindebehörde (Untergangsgericht) bewirkte Grenzvermarkung zwar im Lauf der Jahre eine durchgreifende und durch Unterlegung unverweslicher Geheimzeichen (Zeugen) gesicherte wurde, aber der Leitung durch den Vermessungstechniker und deshalb der Anordnung in „Steinlinien“ ermangelte. Denn es entfiel damit der anderwärts zwingende Grund zur Durchmessung gerade dieser, für jedes einzelne Gewende passend gelegten Steinlinien. Die „Parallelmethode“, eine Eigentümlichkeit der württembergischen Stückvermessung war entstanden!

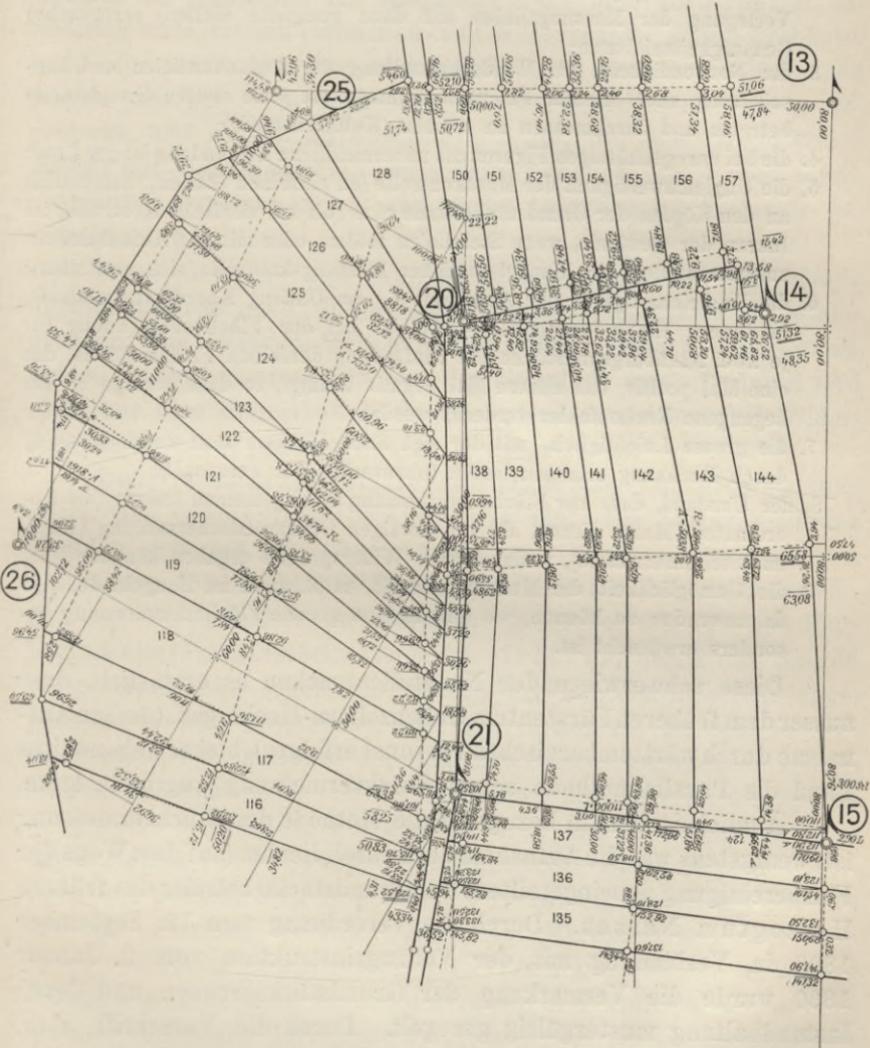
Während der ungefähr 80 Jahre ihrer Anwendung auf dem engen Gebiet eines deutschen Mittelstaats hat sie nur verhältnismässig geringe, vielfach auf das Formale sich beschränkende Weiterbildung erfahren. Materiell von Bedeutung ist in dieser Beziehung die Ersetzung des Messtischanschlusses der verschiedenen Systeme von Aufnahmelinien aneinander und an das Landesdreiecksnetz durch polygonometrische, bzw. trigonometrische Bestimmungen (s. Kap. 11 und 12), in Beziehung auf die Stückvermessung speziell aber namentlich, dass überall da, wo eine Neuvermarkung nach „Steinlinien“ erfolgt, die letzteren selbstverständlich durchgemessen werden, auch wenn sie, entgegen dem erstrebten Zustand, mit der Koordinatenrichtung nicht zur Übereinstimmung gebracht werden können. Damit entstand eine Gruppe weiterer, ursprünglich nicht vorhandener, dem Aufnahmesystem nicht angehöriger Messungslinien. Auch sonst hat sich die Zahl der Kontrollmasse, zu den eigentlichen Aufnahmemassen hinzutretend, in teilweise unnötiger und unwirtschaftlicher Weise gesteigert, so dass die heutige Parallel- im Vergleich zu allen anderen Stückvermessungsmethoden das umfangreichste Zahlenmaterial beansprucht. In einer Beziehung bewegte sich die Weiterbildung in der Richtung gegen die Einbindemethode: es werden die Schnitte der Aufnahmelinien mit den Grundstücksgrenzen, die „Abgänge“ und „Richtungen“ abgelesen. Ja die Mittelmarken pflegen unter Wegfall von Koordinaten sogar ganz mittels der Einbindemethode aufgenommen zu werden, s. Fig. 84.

Als Vorzüge der „Parallelmethode“ sind anzuführen:

Vorzüge der Parallelmethode.

1. Die Möglichkeit widerspruchsfreier Strecken-, Winkel- und Flächenberechnung ohne Zuhilfenahme eines Plans;
2. die Möglichkeit der Aufzeichnung jedes aufgenommenen Grundstücks für sich allein, ohne Verwendung eines ausgedehnten Netzes von Konstruktionslinien;

Fig. 84.



3. die erleichterte Wiederherstellung etwa verloren gegangener Markpunkte auf dem Feld infolge der grossen räumlichen Ausdehnung jedes Koordinatensystems und, damit zusammenhängend der grossen Zahl von auf dasselbe bezogenen Mark- etc. -Punkten;
4. die leichte rechnerische gegenseitige Kontrolle aller gemessenen Strecken, und
5. die Möglichkeit der selbständigen Konstruktion des Stückvermessungsnetzes unabhängig vom Polygonnetz.

Diesen Vorzügen stehen aber folgende Nachteile gegenüber:

1. Die schwerfällige, zeitraubende, daher kostspielige Absteckung und Durchmessung der langen zueinander parallelen oder senkrechten Aufnahmelinien namentlich in wechselndem oder angebautem Gelände, über Zäune, Hecken, Mauern etc. hinweg, bei der Unmöglichkeit, ihre Lage dem Geländezustand anzupassen;
2. die dadurch (gegenüber der bei anderen Aufnahmemethoden möglichen Verlegung der Messungslinien auf dazu geeignete Stellen) verursachte Genauigkeitseinbusse;
3. die Notwendigkeit, bei Wiederherstellung der Aufnahmelinien und Einschaltung auch kleiner Flächenaufnahmen oft viele andere Grundstücke betreten und durchmessen zu müssen (Kulturzustand!);
4. die bei unregelmässigen Figuren oft unvermeidliche Anwendung langer Lote;
5. die Ungleichwertigkeit der Masskontrolle (an einzelnen Stellen, namentlich an den Köpfen der Grundstücke kann eine (bis zu) vierfache Kontrolle, im Innern der Gewande, wenn Steinlinien fehlen, oder mit der Aufnahmelinie zusammenfallen ein Mangel jeglicher Messungskontrolle sich einstellen);
6. die Ungleichartigkeit der Aufnahme — am Umfang Koordinatenmethode, im Innern Einbindemethode — welche bei der Flächenberechnung für je zwei Nachbargrundstücke die Einführung desselben Flächenstücks, das eine Mal positiv, das andere Mal negativ bedingt, so dass etwaige in ihm begangene Rechenfehler verdeckt werden;
7. die grosse Leichtigkeit, mit der sich Kontrollmasse statt durch Messung durch Rechnung erlangen lassen (unzuverlässiges Personal!);
8. der Umstand, dass zur Flächenbestimmung im allgemeinen andere (die Koordinaten-)Masse dienen, als zur etwaigen Grenzwiederherstellung (Kopf- und Steinlinienmasse), wodurch sich Widersprüche ergeben können;
9. die Unmöglichkeit, die Methode überall, z. B. auch im Baugelände, also da anwenden zu können, wo gerade eine genaue Flächenbestimmung besonders erwünscht ist.

Diese schwerwiegenden Nachteile machen es erklärlich, dass ausser dem früheren Fürstentum Hohenzollern-Hechingen, (dessen Aufnahme durch württembergisches Personal erfolgte), bisher kein zweites Land die Parallelmethode seiner Stückvermessung zugrunde legte.

Ähnlich isoliert in bezug auf die Methode der Stückvermessung ist, wenigstens was die Aufnahme der konsolidierten (auf dem Wege der Flurbereinigung neueingeteilten) Feldgrundstücke betrifft, das frühere Herzogtum Nassau. Durch die Verordnung vom 12. September 1829 in Verbindung mit der Vollzugsinstruktion vom 2. Januar 1830 wurde die Vermarkung der Grundstücksgrenzen und deren Instandhaltung mustergültig geregelt. Durch die Vorschrift aber, dass innerhalb jeder Gewann die Steinlinien einander in passenden Abständen parallel sein sollen, leistet die Vermarkung schon einen Teil der Stückvermessung und zwingt diese zur gewannweisen Behandlung. Die Absicht, etwaige spätere Grenzwiederherstellungen ohne Zuhilfenahme von Winkelinstrumenten zu ermöglichen, beschränkt die Stückvermessung weiterhin nach erfolgter Messtisch-

bezw. (seit 1862) Polygonalaufnahme der Gewanngrenzen auf die Einbindung der Steinlinien in diese und die Erhebung der einzelnen Grundstücksbreiten von Grenzstein zu Grenzstein. Auf eigentümliche Weise und entsprechend sowohl der oben angegebenen Absicht, als dem Bedürfnis der ausgewählten Flächenberechnungsmethode erfolgte die Aufnahme der Bruchpunkte der quer zur Grundstücksrichtung verlaufenden Gewannen- und Weggrenzen. Durch Probieren wurde für jeden derselben eine Parallele zu einer der beiden, den Punkt zwischen sich schliessenden Grundstückslängsgrenzen abgesteckt, und sodann ihr Abstand b_0, \dots, b_4 von jener Grundstücksgrenze auf der Steinlinie, sowie ihre Länge $l_0, l_1 \dots$ vom aufzunehmenden Bruchpunkt bis zur nächst benachbarten Steinlinie gemessen (s. Fig. 138).

Diese Gewinn- und Wegbruchpunkte sind also unabhängig doppelt aufgenommen, das eine Mal bei der Aufnahme der Gewinn- und Weggrenzen vom Polygonnetz aus, das andere Mal mit der gewannweisen Parzellenvermessung von der Steinlinie aus. Dadurch wird nicht nur eine Mehrarbeit bedingt, sondern es werden auch Widersprüche in das Vermessungswerk hineingetragen.

Das Grossherzogtum Hessen leitete seine Landesvermessung durch das Gesetz vom 13. April 1824 ein. Die Stückvermessung gründet sich auf die Gesetze vom 23. Oktober 1830 und vom 11. Januar 1831. Da die Staatsverwaltung für ihre Steuerzwecke sich auf die Aufnahme und Vermarkung der Gemarkungs- und Flurbegrenzung (Flächenstücke von je 50—75 ha, auf deren aus Koordinaten ermittelten Inhalt die Flächen der Einzelgrundstücke abgeglichen werden) beschränkte und den Gemeinden die spätere Vermarkung und Einmessung der einzelnen Grundstücksgrenzen anheim stellte, so ergab sich für die Aufnahme der ersteren die gemarkungsweise angewandte Polygonmethode und die Schaffung eines engen Netzes von Polygonpunkten von selbst. Die in Bayern, Oesterreich und Württemberg eingeführte Verwendung künstlicher Grenzen für die einzelnen Vermessungsgebiete (Kartenblätter) fällt weg. Einer straffen Organisation des Vermarkungswesens entsprang sodann die einheitliche Grenzvermarkung in Steinlinien, die hernach als Aufnahmelinien durchgemessen, und — als einzige geometrische Konstruktion — in die bereits festgelegten Flur-, oder in noch weiter polygonometrisch bestimmte Abteilungs- und Gewinn- und Weggrenzen „eingebunden“ wurden. Die Messung rechtwinkliger Koordinaten fällt in der Hauptsache weg.

Gross-
herzogtum
Hessen.

Durchgreifende Messungsprobe ergibt die Vergleichung der zusammenhängend gemessenen Entfernung beider Einbindepunkte

jeder Linie mit der Summe der hernach abgesetzt gemessenen Grundstücksbreiten.

Die Feldaufzeichnung der Grenzen und Messungszahlen (letztere abgesetzt, als Einzelbreiten gemessen) erfolgt in Handrissblättern, deren jedes möglichst abgerundete Gewanne darstellt.

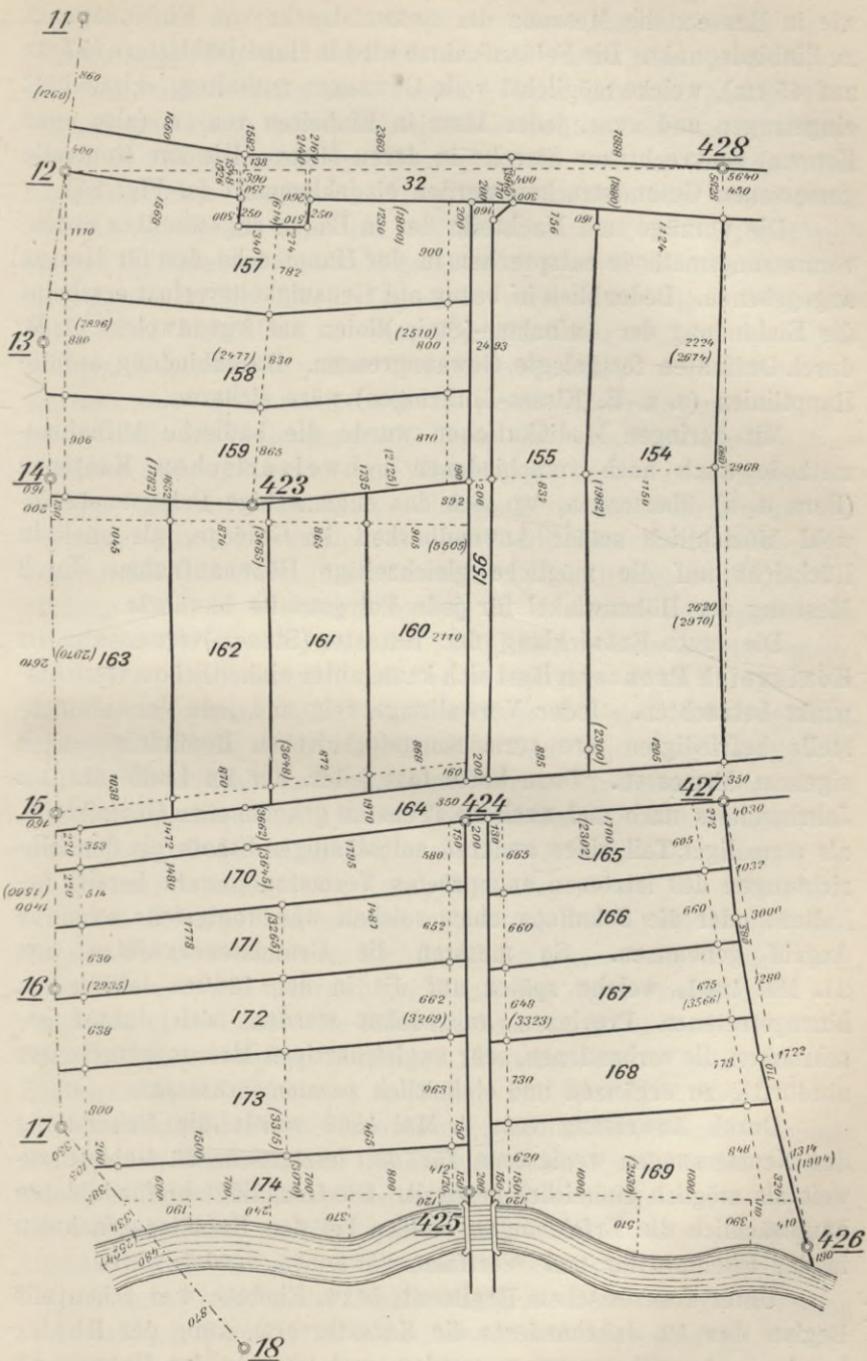
Der Katasteraufnahme im Grossherzogtum Hessen eigen ist demnach ein durch Flur-, Abteilungs- und Gewinnsgrenzen ausserordentlich enges Netz von Polygonpunkten, und dementsprechend eine sehr einfache, bei dauerhafter Vermarkung billige und gute, fast ausschliesslich auf die Einbindemethode sich gründende Stückvermessung. Die Wiederherstellung einzelner verloren gegangener Grundstücksgrenzen ist die denkbar einfachste und sicherste. Als Nachteil ergibt sich die der Polygonalmethode anhaftende Erschwerung der sicheren Wiederherstellung verloren gegangener, nicht den Steinlinien angehöriger Grenzmarken im Fall des Verlustes auch der Polygonpunkte (ungünstige Fehlerfortpflanzung) und der Gewinnung von Winkel-, Strecken- und Flächengrössen direkt aus den Messungszahlen.

Gross-
herzogtum
Baden.

Im Grossherzogtum Baden wird die Katasteraufnahme auf Grund des Gesetzes vom 26. März 1852 durchgeführt. Sie folgt in bezug auf die Stückvermessungsmethode und die Gemarkungs- bzw. gewannweise Abgrenzung der Kartenblätter dem hessischen Vorbild. Wie dieses gründet sie sich auf ein enges Netz polygonometrisch festgelegter Punkte und auf eine straff organisierte, der Vermessung vorangehende Vermarkung in Steinlinien, hat aber mit ihm die scharfe, auch auf die Kostentragung sich erstreckende Trennung in verschiedene Perioden — Aufnahme der Flur-, Abteilungs- und Gewinn-, und endlich der Grundstücksgrenzen — nicht gemein. Die gegenseitige Lage der Haupteckpunkte der Gemarkungs- und Gewinnsgrenzen und nötigenfalls weiterer Punkte wird mit Hilfe der Polygonalmethode (unter ausgedehnter Anwendung von Schnittpunkten) festgelegt. Auf die Polygonseiten als Abszissenachsen werden die übrigen Gewinn- und Wegecken mittels rechtwinkliger Koordinaten bezogen (wobei jedoch, um scharfes Absetzen der Lote entbehrlich zu machen, den Kopf- und Bindemassen neben ihrer Bedeutung als Sicherung gegen grobe Messungsfehler in den Abszissenmassen die Aufgabe zukommt, letztere für die Zeichnung und etwaige spätere Wiederherstellung verloren gegangener Punkte zu ersetzen).

Die Gewinnsgrenzen bilden die Grundlage für die spezielle Stückvermessung, welche die Steinlinien auf sie, ähnlich wie in Hessen, einbindet, aber auch die gelegentliche Anwendung der Koordinatenmethode bei Schlussparzellen (Ordinaten nicht über 30 m in der Ebene, 15 m im Gebirge) und des Bogenschnitts (Entfernung von zwei bereits festgelegten Punkten) nicht verschmäht. Die Grund-

Fig. 85.



stücksbreiten werden abgesetzt gemessen. Zur Kontrolle erfolgt, wie in Hessen, die Messung der Gesamtstrecke von Einbindepunkt zu Einbindepunkt. Die Feldaufnahme wird in Handrissblättern (57 cm auf 45 cm), welche möglichst volle Gewannen enthalten, skizzenhaft eingetragen und zwar, jedes Mass in Einheiten von cm (also ohne Komma) senkrecht zur Strecke in deren Mitte. Die zur Kontrolle gemessenen Gesamtstrecken werden eingeklammert (s. Fig. 85).

Die Vorzüge und Nachteile der in Baden angewandten Stückvermessungsmethode entsprechen in der Hauptsache den für Hessen angegebenen. Bedenklich in bezug auf Genauigkeitsverlust erscheint die Einbindung der Aufnahme-(Stein-)linien auf irgendwelche, z. B. durch Ordinaten festgelegte Gewanngrenzen. Durchbindung auf die Hauptlinien (s. z. B. Elsass-Lothringen) wäre sicherer.

Mit geringen Modifikationen wurde die badische Aufnahmemethode auch nach verschiedenen schweizerischen Kantonen (Bern u. a.) übertragen, wo sich das engmaschige Polygonnetz sowohl hinsichtlich seiner Anwendbarkeit im Gebirge, als auch in Rücksicht auf die mögliche gleichzeitige Höhenaufnahme durch Messung der Höhenwinkel für jede Polygonseite bewährte.

Königreich
Preussen.

Die erste Entwicklung der Kataster-(Steuer-)vermessung im Königreich Preussen lässt sich kaum unter einheitlichem Gesichtspunkt betrachten. Jeder Verwaltungszweig und jede Verwaltungsstelle befriedigten ihre vermessungstechnischen Bedürfnisse nach eigenem Ermessen. Dazu hatte fast jeder, der im Laufe des 19. Jahrhunderts nach und nach zu Preussen gekommenen Gebietsteile, als vormaliger Teil eines anderen selbständigen Staats ein den Einrichtungen des letzteren angepasstes Vermessungswerk bereits erhalten, oder die Schaffung eines solchen war wenigstens schon in Angriff genommen. So mussten die Grundsteuergesetze vom 21. Mai 1861, welche später auf die in den 1860er Jahren neu hinzugetretenen Provinzen ausgedehnt wurden, sich darauf beschränken, die vorhandenen, sehr ungleichartigen Messungsergebnisse notdürftig zu ergänzen und einheitlich zusammenzufassen.

Durch Anweisung vom 7. Mai 1868 wurde die Behandlung der Neumessungen wenigstens für die letztgenannten Gebiete soweit als möglich einheitlich geregelt. Die Grundlage hierfür bildeten hauptsächlich die Erfahrungen, welche bei den Katasteraufnahmen in der Rheinprovinz und Westfalen gewonnen worden waren:

Erste Ent-
wicklungs-
periode.

Unter französischem Regiment, bzw. Einfluss, war schon mit Beginn des 19. Jahrhunderts die Katastervermessung der Rheinlande in Angriff genommen worden, und zwar in der Hauptsache unter Benützung des Messtischverfahrens, aber mit natürlicher

Begrenzung der einzelnen Blätter. Nach dem Übergang an Preussen (1815—1819) wurden am 11. Februar bezw. 22. März 1822 neue Instruktionen für das fernerhin anzuwendende Messungsverfahren erlassen. Die erweiternden Bestimmungen vom 25. August 1857 bezweckten sodann namentlich eine bessere Regelung der, allerdings durch die Grundeigentümer selbst aber von jetzt an in Steinlinien, auszuführenden Grenzvermarkung. Sie beschränkten die fernere Anwendung der Bussole und des Messtisches (s. Teil II) und verlangten in Tinte auf dem Feld geführte, je natürlich begrenzte Fluren umfassende Feldhandrisse. Der erste, vorbereitende Riss, „Vorriss“ hatte dabei Aufschluss zu geben über den Grenzverlauf unter gleichzeitiger Numerierung aller Grenzbruchpunkte. Der „Stückvermessungsriß“ (Format 26 auf 19 preuss. Zoll) dagegen enthielt, (nötigenfalls in Verbindung mit Registern), sämtliche zur Plankonstruktion nötigen Strecken- und Winkelmasse, erstere in der Messungsrichtung und auf die ganze geradlinige Erstreckung fortlaufend eingetragen. Ein Netz von Dreiecken, anfänglich durch direkte Messung der Seitenlängen, dann durch Beobachtung der Dreieckswinkel in Verbindung mit einer in jeder Gemeinde zu messenden und genähert zu orientierenden Standlinie (Basis), später im Anschluss an ein gemeinsames Hauptdreiecksnetz, nach Grösse und Lage gegen die Himmelsrichtungen bestimmt, bildete die Grundlage. Die eigentliche Stückvermessung benützte nach eingetretener Zurückdrängung der Bussole und des Messtisches anfänglich entweder die Einbindemethode (wobei die ausgedehnten geometrischen Konstruktionen direkt auf die Dreiecksseiten aufzubauen waren), oder die Polygonmethode unter Anschluss an die zuvor festgelegten Dreieckspunkte. Die hiebei nicht erfassten Grenzpunkte wurden mittels rechtwinkliger Koordinaten von den Polygonseiten oder Einbindelinien aus, ausnahmsweise auch, unter Verwendung anderweitiger Kontrolle, durch Bogenschnitt eingemessen. Dabei hatte die Feldaufnahme möglichst die zur Flächenberechnung (s. Kapitel 7) nötigen Breitenmasse (in regelmässigen Feldlagen Steinlinienmasse) zu liefern.

Zweite Entwicklungsperiode.

Im Verlauf der Weiterentwicklung tritt die Einbindemethode immer mehr in den Vordergrund. Die Steinlinien werden direkt in die Polygonseiten, bezw. Konstruktionslinien eingebunden und durchgemessen. Ein weitmaschiges, an die Dreieckspunkte sich anschliessendes Polygonnetz bildet das Gerippe und dient gleichzeitig zur Aufnahme der Flurgrenzen (Grenzen der Kartenblätter), welche mittels Messung rechtwinkliger Koordinaten (ausnahmsweise durch Schieflinien, deren Endpunkte mit dem Polygonnetz auf gleiche Weise verbunden sind) auf die Polygonseiten bezogen werden. Die Aufnahme der unregelmässig

Dritte Entwicklungsperiode.

verlaufenden Eigentums Grenzen im Innern dagegen stützt sich unter Ablesung der Grenzschnitte und Verwendung rechtwinkliger Kleinkoordinaten auf einen geometrischen Aufbau gerader und zwischen je zwei Polygonseiten oder Konstruktionslinien vollständig durchzumessender Aufnahmelinien. Letztere bilden in ihrer Gesamtheit ein in sich und mit dem Polygonnetz direkt zusammenhängendes, vom Grossen zum Kleinen derart sich abstufendes Netz, dass die Hauptlinien Punkte der Polygonseiten „Kleinpunkte“ geradlinig verbinden, und jede derart festgelegte Gerade selbst wieder Trägerin von Kleinpunkten ist, also in bezug auf die Linienfestlegung an Stelle der Polygonseite tritt.

Die auf Dreiecksmessung gestützte Polygonalmethode kommt also als grundlegende Operation zur Anwendung. Ihr gliedert sich, und zwar in grosser Ausdehnung, und mit langen Geraden die Einbindemethode systematisch ein, während die Koordinatenmethode nur zur Aufnahme untergeordneter Details Anwendung findet.

Auch für Messungsproben wird, was die Aufnahmelinien betrifft, gesorgt. Für jede Messungslinie, deren Lage nicht durch eine andere, in sie eingebundene, gesichert ist, und deren Einfallswinkel gegen ihre Stützlinie um nicht mehr als 20° von der Senkrechten abweicht, muss ausser der Einbindung und der eigenen Länge noch ein versicherndes Mass erhoben werden. —

Die Anweisung vom 7. Mai 1868 überträgt das derart in den Rheinlanden zur Entwicklung gebrachte Verfahren auf alle Neumessungen des Staates. Nur in einzelnen Punkten (z. B. Versicherungsmass für die Einbindung einer Linie ist schon nötig, wenn der Einfallswinkel nicht um mehr als $\frac{1}{4}$ R von der Senkrechten abweicht; Ordinaten von mehr als 40 m Länge sind bezüglich ihrer Richtung durch Hypotenusenmessung zu sichern; die Anwendung von Bussole und Messtisch ist im allgemeinen verboten etc.) sind Modifikationen nötig geworden. Auch die unterm 25. Oktober 1881 für das Verfahren bei Erneuerung der Karten etc. innerhalb der ganzen preussischen Monarchie mit Ausschluss Hohenzollerns erlassene Anweisung VIII stellt hinsichtlich der Stückvermessung lediglich ein weiteres Entwicklungsstadium der seit 1857 bewährten Vermessungsmethode vor:

Hienach sind auf Grund der vorhandenen Karten „Vorrisse“ (im Format 666 auf 500 mm) anzulegen, welche alle aufzunehmenden Grenzen und Grenzmarken, Grundstücksnummern, Besitzernamen, Kulturangaben etc., sowie die neue Blatteinteilung der Gemarkungskarte und das der Vermessung zugrund zu legende Dreiecks- und Polygonnetz enthalten.

Die Grenzvermarkung, und zwar in regelmässigen Feldlagen

in Steinlinien, durch Grenzsteine oder angekohlte, mit Querholz versehene Pfähle wird überall da angestrebt, wo nicht aufgeworfene Wälle bezw. Grenzhügel, oder Gräben, Hecken, Zäune sie entbehrlich erscheinen lassen und ihr Bestand durch die Feldbebauung nicht in Frage gestellt ist. Besonders bevorzugt ist die Vermarkung mit Hohlziegeln unterhalb der dem Feldbau unterworfenen Ackerkrume, oder wenigstens die Unterlegung unverweslicher Gegenstände unter die Marksteine.

Die Ergebnisse der Stückvermessung werden in „Stückvermessungsrisse“ (Format der „Vorrisse“) auf dem Feld in Tinte eingetragen (bei schlechten Witterungs- und Geländeverhältnissen ist die Verwendung eines Feldbuchs und der Aufschrieb mit hartem Bleistift zugelassen), und zwar derart, dass zunächst die Hauptlinien des trigonometrischen, polygonometrischen und Messungsliniennetzes annähernd massstäblich vorgezeichnet werden, so dass der übrige Eintrag während der Stückvermessung selbst mittels Massstablineals erfolgen kann. Jedes Blatt der „Gemarkungskarte“ füllt mehrere Stückvermessungsrisse aus und zwar erfolgt der gegenseitige Anschluss der Karten und der Risse durchweg nach natürlichen Grenzen. Der Zusammenhang wird durch entsprechende Begrenzungsschrift, sowie für jedes Kartenblatt durch einen „Linienetzriss“ verdeutlicht, welcher das ganze hiefür in Betracht kommende trigonometrische und polygonometrische, sowie das Netz der Messungslinien samt dessen Einbinde-, End- und Versicherungsmassen enthält.

Die Stückvermessung, welche alle Eigentums- und Kulturgrenzen, alle Grenzzeichen, Gebäudeflächen (Fundamentlinien, da wo sie zutage treten), Wasserläufe, Deiche, Hecken, Zäune, Mauern, Erdwälle, Steinhaufen etc., Nummernsteine an Strassen, Nivellements festpunkte (s. Teil II) der Landesaufnahme, Lochsteine der Bergverwaltung, alle topographisch wichtigen Gegenstände etc. umfasst, gründet sich auf ein Netz von, wo es angeht, mit Steinlinien zusammenfallenden Aufnahmelinien, für deren Lage ihre bequeme Messbarkeit, leichte Möglichkeit der Massbenützung für die Flächenberechnung und Erfassung der Aufnahmeobjekte durch kurze Ordinaten oder unmittelbare Schnitte bestimmend ist, und welche entsprechend der Instruktion von 1857 in das trigonometrische-, oder Polygonnetz eingebunden werden und ganz durchzumessen sind. Die Messung erfolgt grundsätzlich durchlaufend (nicht abgesetzt), der Eintrag der Masse senkrecht zur Messungslinie je zum Endpunkt. Die Endmasse jeder Strecke werden doppelt, die Einbindemasse einfach unterstrichen. Einzelmasse, (Kopfmasse etc.) werden parallel der betreffenden Strecke in ihre Mitte geschrieben.

Neu und sehr zweckmässig ist die Anordnung der Vermarkung der Kleinpunkte mittels gut durchgebrannter Drainröhren 30—50 cm unter der Bodenoberfläche. Sicherungsmessung für die Einbindung einer Messungslinie in eine solche höherer Ordnung wird verlangt, sobald der spitze Winkel zwischen beiden $\geq \frac{2}{3} R$ ist, es wäre denn, dass im Einbindepunkt gleichzeitig weitere Linien abzweigten, oder Messungslinien niederer Ordnung an geeigneten Stellen in die zu sichernde Linie einbinden. Die zulässige Länge der Ordinaten zur Aufnahme von Grenzpunkten und die Aufnahme durch Bogenschnitt sind beschränkt. Auch für die Aufnahme der Grenzlinien sind, „soweit es irgend erreichbar“, Messungsproben vorgeschrieben. Namentlich sind die Schnitte der Messungs- mit den Grenzlinien oder ihren Verlängerungen (Abgänge) abzulesen, falls letztere nicht allzu lang sind. In regelmässigen Feldlagen sind die Grundstücksbreiten ausser in den Steinlinien auch in den Kopfgrenzen, jedoch abgesetzt, zu messen. Die Gebäudeecken sind durch die Schnittpunkte ihrer Fluchten (im allgemeinen die Fundamentlinien) mit den Messungslinien fest zulegen. Zur Probe werden die Dimensionen der Gebäude und ihre Abstände von benachbarten Gebäuden gemessen.

Die Bussole wird auf die Aufnahme von Forstwirtschaftsgrenzen etc. beschränkt. Ihre Anwendung zur Aufnahme von Eigengrenzen ist, wie die Anwendung des Messtisches, untersagt.

Zusammenfassung.

Das Wesentliche der vorbeschriebenen, auf preussischem Boden entstandenen Stückvermessungsmethode lässt sich kurz folgendermassen zusammenfassen: weitmaschiges Polygon-, und ausgedehntes, diesem in Abstufungen vom Grossen zum Kleinen direkt und geradlinig eingebundenes, im Gegensatz zur Parallelmethode von geometrischen Bedingungen freies und daher nur in Verbindung mit dem Polygonnetz konstruierbares Netz von Aufnahmelinien; Bevorzugung der Einbinde- vor der Koordinatenmethode auch für die Aufnahme der Einzelobjekte; durchgreifende Messungskontrolle für das Aufnahmeliniennetz; Messung der für halbgraphische Flächenberechnung (s. § 27) nötigen Breiten- und Kopfmasse.

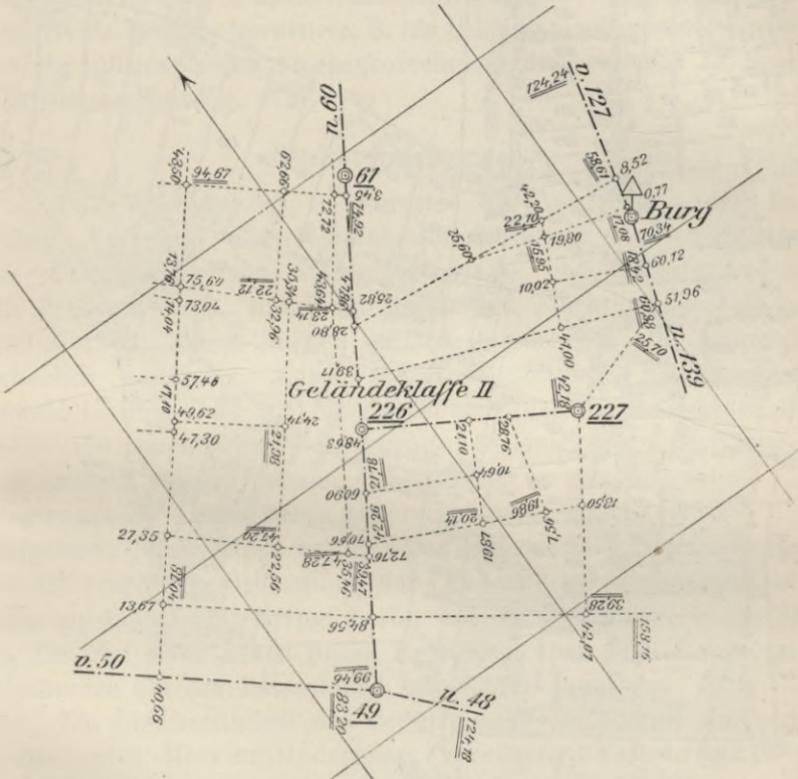
Diese Methode vereinigt — im Hinblick auf bequeme Wiederbestimmung etwa verloren gegangener Punkte (lange, und daher, abgesehen von der unterirdischen Vermarkung der Kleinpunkte, leicht wieder herstellbare Linien), und auf die (wenigstens halbgraphische) Flächenberechnung — die Vorzüge der württb. Parallel-, mit — im Hinblick auf die Möglichkeit bequemer, und daher genauer Streckenmessung und leichter Anwendbarkeit auf jederlei Gelände, sowie auf die Unmöglichkeit, Messungsübereinstimmung durch un-reelle Mittel zu erzielen — den Vorzügen der in Baden, Hessen etc.

angewandten Polygonverfahren, vermeidet aber einen Teil der den beiden anhaftenden Nachteile.

Ihr jüngstes Anwendungsgebiet bilden — abgesehen von neueren Städtevermessungen namentlich in Bayern — die Katasterneu-messungen von Elsass-Lothringen auf Grund der $\frac{2}{3}$ Anweisung vom 30. Januar 1889 und der zugehörigen Nachträge. Der dem

Elsass-Lothringen.

Fig. 86.

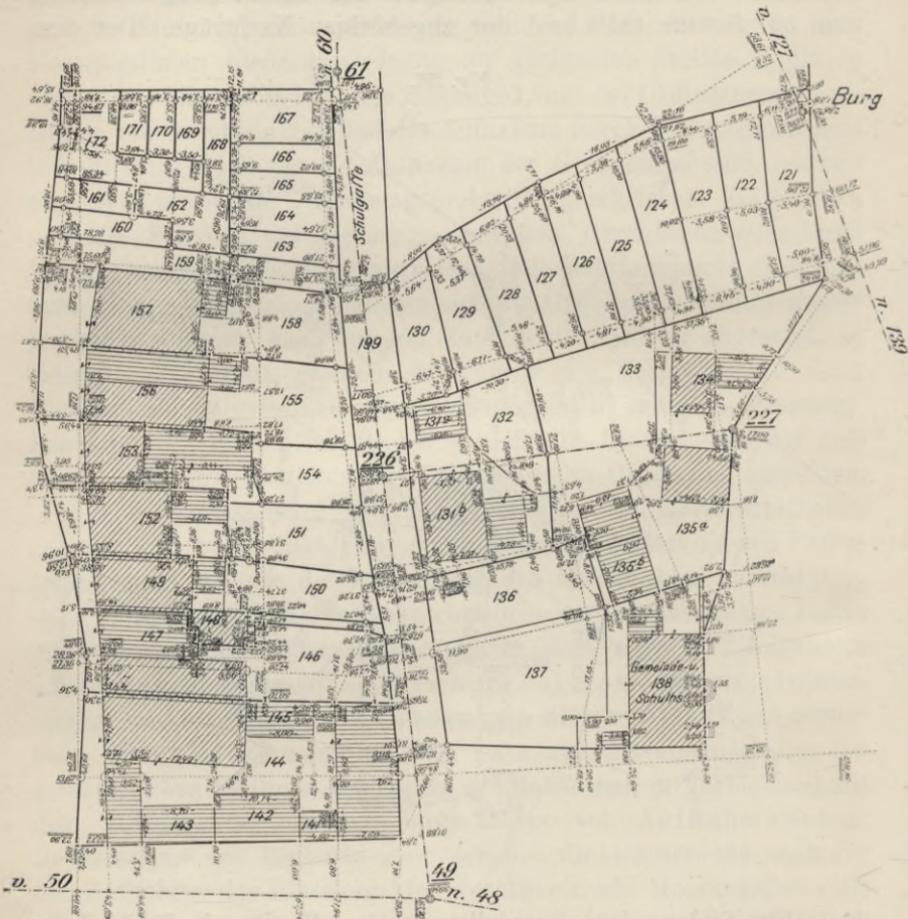


deutschen Süden eigene zersplitterte Grundbesitz, in Verbindung mit der anlässlich der Vermessung lückenlos und systematisch in Steinlinien durchgeführten Vermarkung der Grundstücksgrenzen; das Bestreben endlich, das Vermessungswerk ohne erhebliche Kostenvermehrung zum beweiskräftigen Eigentumskataster auszubauen, bedingten hiebei eine Weiterentwicklung auch der Stückvermessungsmethode in Beziehung auf möglichste Genauigkeit und unbedingte Sicherheit gegen grobe Fehler.

Das Polygonnetz wird etwas engmaschiger, als in Preussen (entfernt aber nicht so engmaschig, wie in Hessen und Baden) angelegt, Endpunkte von Aufnahmelinien dürfen weder durch Bogenschnitt,

noch durch rechtwinklige Koordinaten in bezug auf andere Aufnahmelinien festgelegt werden — das Prinzip des geradlinigen, direkten Einbindens in das Polygonnetz wird streng durchgeführt (s. Liniennetzriss Fig. 86).

Fig. 87.



Kein Mass, welches zur Bestimmung einer Aufnahmelinie, oder einer Eigentumsgrenze dient, gilt als richtig, wenn es nicht durch ein zweites geprüft wird. Um Kosten zu sparen, und im Hinblick auf die gute Grenzvermarkung wird auf die unterirdische Vermarkung der Kleinpunkte verzichtet, auch die sowohl für die Messungs- als für die Flächenberechnungskontrolle zweckmässige Bestimmung wird verlassen, wonach in Gewinnlagen die Grundstücksbreiten sowohl auf den Gewinn Grenzen (Kopfmasse), als auch auf den in deren Nähe verlaufenden Steinlinien zu messen sind. Die zum Zweck der Messungskontrolle in Preussen (wie auch in Württemberg)

verlangte Herstellung jedes rückwärts vermarkten Parzelleneckpunkts auf der Gewanngrenze, und die Verlängerung von Eigentumsgrenzen auf — in der Nachbarschaft vorüberziehende — Aufnahmelinien wird, ohne an Zuverlässigkeit der Aufnahme zu verlieren, dadurch erspart, dass jede Steinlinie vom Aufnahmegeometer zuerst durchlaufend, jede Grundstücksbreite (auf der Steinlinie, oder, wenn diese die Längsgrenzen sehr schief schneidet, die senkrechte Breite), nachträglich aber vom Revisionspersonal unabhängig abgesetzt gemessen wird. Senkrechte Breiten werden (z. B. für Schlussparzellen) da gemessen, wo die halbgraphische Flächenberechnung dies verlangt (s. Stückvermessungsriß Fig. 87).

Städtevermessungen.

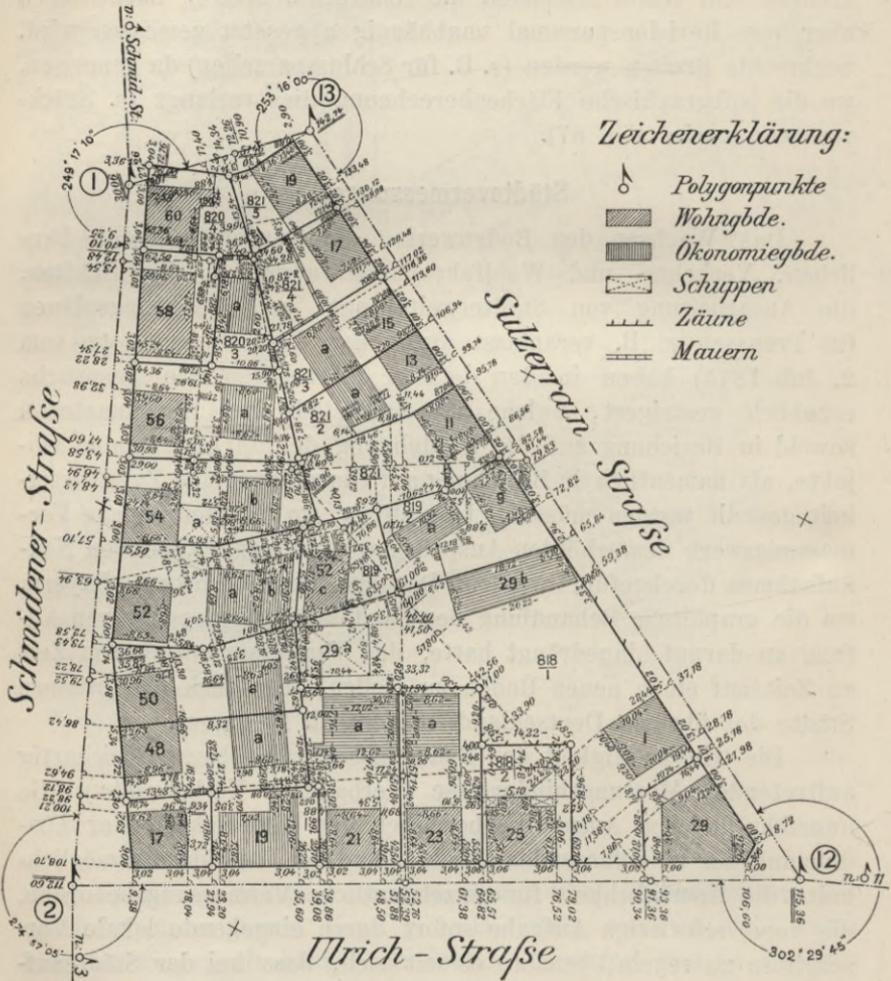
Städtever-
messung.

Das Wachsen des Bodenwerts, die Ausdehnung der baulichen, Verkehrs- und Wohlfahrtseinrichtungen in den Städten, die Ausarbeitung von Stadterweiterungs- und Bebauungsplänen (in Preussen z. B. veranlasst durch das Fluchtliniengesetz vom 2. Juli 1875) haben in den letzten Jahrzehnten die Ansprüche erheblich gesteigert, welche an das städtische Kartenmaterial sowohl in Beziehung auf die Ausdehnung der darzustellenden Objekte, als namentlich in Beziehung auf Genauigkeit und Zuverlässigkeit gestellt werden müssen. Überall da, wo das vorhandene Vermessungswerk den erhöhten Ansprüchen nicht genügt, müssen Neuaufnahmen durchgeführt werden. Das trifft namentlich zu für Bayern, wo die graphische Behandlung der Landesstückvermessung von Anfang an darauf hingedrängt hatte, das Vermessungswerk von Zeit zu Zeit auf einen neuen Boden zu stellen, aber auch für grössere Städte des übrigen Deutschland, namentlich Preussens.

Die Gleichzeitigkeit des Bedürfnisses; die überall gleichartig auftretenden Messungshindernisse (Verbauung, Verkehr etc.); die ungefähr gleichen Ansprüche bezüglich der Genauigkeit, der Ausdehnung der zu erfassenden Objekte, und der Fortführungsmöglichkeit; die Unmöglichkeit für einzelstaatliche Vermessungsbehörden, die neue, schwierige Aufgabe sofort durch eingehende lokale Vorschriften zu regeln, brachte es mit sich, dass bei der Städteaufnahme mehr als bei der Aufnahme landwirtschaftlich benützter Grundstücke eine gewisse Einheitlichkeit über ganz Deutschland sich herausbildete. Nur die Frage, ob als Grundlage der Stückvermessung das polygonometrisch bestimmte Netz zugunsten des genaueren, aber kostspieligeren trigonometrisch bestimmten mehr oder weniger zurücktreten soll, ist, weil hauptsächlich wirtschaftlicher Natur, in den einzelnen Städten verschieden beantwortet.

Die für die Stückvermessung passend gelegenen Festpunkte ($\delta 1$, $\delta 2$, $\delta 12$, $\delta 13$, Fig. 88), deren geradlinige Verbindungsstrecken sich zu Hauptlinien der Stückvermessung eignen, werden daher je nach der wirtschaftlichen Lage der Städte und der Bedeutung, welche sie dem Vermessungswerk beilegen, vorwiegend

Fig. 88.



auf trigonometrischem, oder polygonometrischem Weg auf das Koordinatennetz der Gesamtaufnahme bezogen.

Um die spätere Wiederherstellung der Linien zu erleichtern, werden diese Punkte, wenn immer möglich, auf Parallelen zu den Baulinien, oder so ausgewählt, dass die durch sie gehenden Hauptlinien nach entfernten, dauernd sichtbaren Punkten (Blitzableitern, Türmen, Gebäudeecken etc.) gerichtet sind. Die Markierung von für die Stück-

vermessung nötigen Zwischenpunkten (auf Randsteinen etc.) erfolgt im Fall starken Strassenverkehrs in den frühen Morgenstunden. An Stelle der Absteckung tritt hernach in diesem Fall für die Stückvermessung die Abschnürung von Zwischenpunkt zu Zwischenpunkt. Lote auf diese Linien können nötigenfalls mittels Schiebdreiecks gewonnen werden. In Strassen, welche häufig aufgedrungen werden müssen, in denen also die Vermarkung weder gegen den Verlust, noch gegen Verschiebungen der Messungspunkte durch einseitige Setzungen sichert, ist deren Rückversicherung nach festen Gebäudeteilen, oder an ihnen angebrachten Marken besonders wichtig. Die von dem Hauptnetz abzweigenden Messungslinien werden durch vorhandene Winkel, Höfe, Gärten, Scheuern, korrespondierende Fensteröffnungen etc. vom Grossen zum Kleinen abstuftend unter Verwendung ebensolcher Richtpunkte (Fensterkreuze etc.) soweit möglich geradlinig durchgeführt und in das Hauptnetz eingebunden.

Ist die geradlinige Durchbindung der Messungslinien unmöglich (geschlossene Bauweise mit Innenhöfen etc.), so schafft man sich Festpunkte im Innern der Blöcke (polygonometrische Schnittpunkte, oder Herunterbringen von auf den Dächern trigonometrisch bestimmten Punkten, s. Kap. 12) und bewirkt von ihnen aus die Aufnahme mittels Polarkoordinaten. Gegen Widersprüche der verschiedenen benachbarten Kleinsysteme sucht man sich dann durch Messung von Bindemassen (Länge von Trennungsmauern etc.) zu schützen.

Sämtliche Schnitte mit Eigentums Grenzen, oder Messungslinien (soweit sie nicht allzu spitz sind) werden eingewiesen und abgelesen, im übrigen kann die Stückvermessung unter Bevorzugung der Koordinatenmethode (bei Gebäuden namentlich dann, wenn deren Wände aus ihrer Lage gewichen sind), oder der Einbindemethode (kurze Verlängerungen!) erfolgen.

Die Fortführungsvermessungen

haben den Zweck, in dem durch die Neuaufnahme gewonnenen Vermessungswerk alle Änderungen nachzutragen, welche an der Begrenzung, oder der Kulturart etc. der aufgenommenen Gegenstände im Lauf der Jahre eintreten, d. h. in jedem Änderungsfall gewissermassen einen Teil des Urplans durch ein neues, genau in den vorherigen Rahmen passendes Stück zu ersetzen. Bei richtiger Anlage der Uraufnahme sichert eine entsprechende Organisation und Durchführung der Fortführungsvermessung der ersteren unbegrenzte Dauer. Beim Beginn der Katastervermessungen war man sich in den wenigsten Fällen auch nur über das Bedürfnis einer „Fortführung“ klar, viel weniger also über den dafür einzuschlagenden Weg. Teils glaubte man in der

Fortführungsvermessungen.
Zweck.

Hauptsache mit Renovationsmessungen auskommen zu können, welche nach Verfluss einer gewissen Zeitspanne sich über diejenigen Gebiete erstreckte, in denen zahlreiche Änderungen eingetreten waren (Rheinlande, Bayern etc.), teils beschränkte man sich auf die Fortführung des Flächenbeschriebs ohne gleichzeitige Ergänzung des Kartenwerks (das heutige Bedürfnis der Neumessung Frankreichs und Elsass-Lothringens ist eine Folge davon), teils erfolgte Aufnahme und Nachtrag der Veränderungen jeweils erst nach längeren Fristen (Schweiz etc.), oder mittels anderer, weniger zuverlässiger Messungsmethoden, als sie der Uraufnahme zugrunde lagen. Fast überall beschränkte man sich anfänglich darauf, mittels der erhobenen Masse die neuen, oder veränderten Objekte in den Katasterplan einzuzeichnen und hieraus entweder die Lageübereinstimmung der erfassten Eigentumsgrenzen mit dem früheren Zustand, oder die Tatsache und Ausdehnung etwa eingetretener Veränderungen festzustellen.

Bei guter Grenzvermarkung war damit eine Zeitlang zur Not auszukommen. Wo diese von Anfang an aber fehlte, oder ungenügend war, waren erhebliche Unsicherheiten unvermeidlich.

Anforderung.

Neuerdings wird von jeder Fortführungsvermessung verlangt, dass sie die Tatsache und Ausdehnung jeder Grenz- etc. Veränderung innerhalb der Genauigkeit der Uraufnahme feststelle. Dies ist nur zu erreichen durch Anwendung der Grundlagen und des Verfahrens der letzteren selbst, auch für die Fortführungsvermessung. Aus diesem Grund sind im allgemeinen zur Aufnahme jeder nachzutragenden Veränderung die zur Aufnahme der betreffenden Objekte ursprünglich benützten Messungslinien und -Punkte — ein zwingender Grund für deren dauerhafte Versicherung — wieder zu verwenden, so dass jede sich zeigende Abweichung einer neuen von einer früheren Messungszahl, wenn sie nicht auf Messungsfehler zurückzuführen ist, eine innerhalb der Messungsgenauigkeit feststellbare Änderung des ursprünglichen Zustandes beweist.

Grundsatz
für die
Ausführung.

Hiernach kann es sich also für die Fortführungsvermessungen um ein Verlassen der ursprünglichen Aufnahmemethode nur dann handeln, wenn aus Kopf-, Steinlinien-, oder Bindemassen für jeden einzelnen Grenzpunkt die Tatsache und Grösse etwaiger Veränderung mit Sicherheit erschlossen werden kann, die bisherigen und künftigen Messungslinien als solche also nur den nötigen Zusammenhang dieser Masse bezwecken. Eine neuzuschaffende einheitliche Grundlage (z. B. ein auf die Koordinatenachsen des Vermessungsgebiets bezogenes Netz gut und dauerhaft vermarkter Polygonpunkte) ermöglicht dann den allmählichen Aufbau eines neuen Vermessungswerkes aus Anlass der in langen Zeiträumen nach und nach vor sich gehenden Fortführungsaufnahmen.

Kapitel V.

Planzeichnung.

Bei der Aufzeichnung geodätischer Aufnahmen kann es sich nur um verkleinerte ähnliche Bilder des darzustellenden Gebiets handeln, wobei die Verjüngung, je nach dessen Ausdehnung, dem Zwecke des Plans und etwaigen zu beachtenden amtlichen Vorschriften eine verschiedene ist. (1:100, 1:200, 1:250, 1:500, 1:1000, 1:1250, 1:2000, 1:2500, 1:5000.)

Verjüngungsverhältnis.

§ 18. Zeichenhilfsmittel.

Da auf die Genauigkeit der Zeichnung namentlich da viel ankommt, wo Projekte und Eigentumsfeststellungen sich darauf gründen sollen, und diese von der Güte der Zeichenhilfsmittel wesentlich abhängt, so mögen zunächst diese kurz betrachtet werden.

1. Das Lineal, längs dessen Kante mit dem keil- oder kegelförmig geschärften Bleistift, der Reissfeder, oder der Zirkelspitze Gerade gezogen werden, muss selbst gerade sein (Prüfung durch Ziehen eines Strichs längs der Linealkante, alsdann Umlegen des Lineals, so dass es auf der vorherigen Oberfläche ruht und jeder seiner Punkte der Länge nach seine erste Lage wieder einnimmt. Der längs der Linealkante jetzt zu ziehende Strich muss den ersten in allen Punkten decken. Etwaige Abweichung zeigt den doppelten Fehler). Es soll sich ferner dem Zeichentisch anschmiegen (biegsam sein), weil ein wechselnder Abstand der Linealkante von der Zeichnung infolge von Tischunebenheiten sogar bei senkrechter Bleistifthalung Ausbauchungen der Geraden zur Folge hat, wegen der konischen Form der Bleistiftspitze. (Hierwegen, wie auch wegen der von ihnen gebotenen Sicherheit gegen das Krummwerden besonders empfehlenswert sind die von Wolz in Bonn hergestellten „Sägeblattlineale“.)

Lineal.

Zum Abtragen oder Abnehmen von Strecken auf dem Plan verwendet man häufig

2. den Zirkel, dessen beiden gehärteten und möglichst spitz gehaltenen Stahlenden der gewünschte Abstand gegeben wird. Wichtig ist ein gleichmässiger, nicht allzuschwerer Gang der Zirkelfüsse, welcher durch eine sorgfältige Bearbeitung der beiden aneinander vorbeigleitenden Metallflächen erzielt wird. Stehen die beiden Enden schief auf dem Papier auf, so wird das Eindringen derselben einerseits eine Erweiterung der Zirkelstiche, andererseits eine Veränderung der Entfernung der Zirkelspitzen hervorrufen. Je schiefere die Zirkelspitzen, um so grösser der Zeichenfehler, zumal bei etwas gewelltem Papier. Es ist deshalb vor jedem Einstecken

Zirkel.

eines Punktes die betreffende Zirkelspitze senkrecht zur möglichst eben gerichteten Papierfläche zu bringen. Um dies zu erleichtern, sind die Zirkel gegen die Spitze meist etwas einwärts gebogen, so dass die Spitzen bei mittlerer Endentfernung normal zur Papierfläche stehen. Grössere Strecken als etwa 1 dm sollten mit gewöhnlichen „Handzirkeln“ nicht direkt abgegriffen werden.

Soll zum Abtragen längerer Strecken der Zirkel Verwendung finden, so ist eine hierfür speziell geschaffene Konstruktion, der „Stangen-zirkel“ vorzuziehen, dessen beide parallel gerichtete Spitzen in — auf einem prismatischen Stab verschiebbaren — Hülsen senkrecht und so angeordnet sind, dass sie mittels Schrauben und Federn auf eine geplante Entfernung genau eingestellt und in ihrer Lage festgehalten werden können. Allerdings sind Federungen der Stange und der Zirkelspitzen nicht zu vermeiden. Wo die Arbeit dies zulässt, ist es daher zweckmässiger, auf die Benützung des Stangen-zirkels zu verzichten (dieselbe auf die Zeichnung etwa vorkommender Kreisbögen, wenn Kurvenlineale fehlen, zu beschränken) und mittels einer feinen Nadel nach einer dünnen, oder prismatisch abgeschrägten, geteilten Linealkante die Hauptmasse einzustechen, deren weitere Unterteilung mittels Handzirkels vorgenommen werden kann.

Papier-
eingang.
Plan-
reduktion.

Zur mechanischen Berücksichtigung des Papiereingangs bei Bearbeitung älterer Pläne, wie auch zur Vergrösserung, bezw. Verkleinerung eines Plans in bestimmtem Verhältnis kann man „Reduktionszirkel“ verwenden, die statt zwei Spitzen deren vier besitzen. Für die letztgenannte Aufgabe werden die stabartigen, in der Mitte je mit einem prismatischen Schlitz und an jedem der beiden Enden mit gehärteten Spitzen versehenen Zirkelarme an der Stelle des Zirkelkopfes (Scharniers) durch eine Schraube an beliebig veränderlicher Stelle zusammengepresst, so dass zu beiden Seiten der Schraube ein Paar je unter sich gleichlanger Zirkelarme entsteht und die Entfernungen der beiden Spitzenpaare sich verhalten wie die zugehörigen Schenkellängen. Weniger schwerfällig im Gebrauch, als der soeben beschriebene ist der sogen. „Differenz-Reduktionszirkel“, eine dem Ingenieur Weidenmüller in Opladen bei Köln patentierte Vervollständigung des gewöhnlichen Handzirkels, welche darin besteht, dass auf dessen beiden mit Teilungen versehenen Armen je eine mittels Schraube feststellbare und mit Einstellmarke (bezw. Nonius s. § 37) versehene Hülse sich verschieben lässt, die eine weitere Zirkelspitze so trägt, dass bei gleicher Einstellung der Hülsen die beiden Paare von Zirkelspitzen proportionale Strecken begrenzen, deren Verhältnis lediglich von der gewählten Hülsenstellung abhängt.

Zur Ermittlung der Längenmasszahlen für auf dem Plan verzeichnete Strecken, oder zum Eintrag von, ihren Masszahlen nach gegebenen Strecken in den Plan dienen

3. Massstäbe aus Holz, Glas oder Metall, mit einfacher oder Transversalteilung (s. Fig. 89), die, um Rechenarbeit zu sparen, nach Grösse der Teile wie nach Bezifferung dem jeweiligen Verjüngungs- oder Massstabverhältnis $1 : v$ entsprechen. Z. B. stellt im Massstab $1 : 500$ 1 m Planmass 500 m in Wirklichkeit vor. 1 m wirkliches Mass wird also durch $\frac{1}{500}$ m = 2 mm, 10 m durch 20 mm Planmass dargestellt. Der Endpunkt letzterer Strecke des Massstabs wird nicht mit „20 mm“, sondern mit „10 m“ bezeichnet.

Zeichen-
massstäbe.

Für viele Zwecke genügend sind

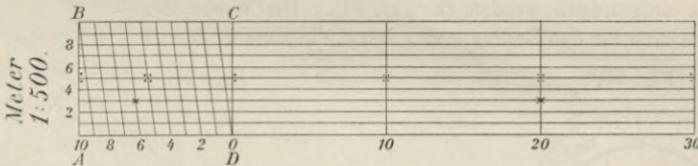
a) die auf prismatisch abgefaster Linealkante angebrachten einfachen Teilungen: Prismamassstäbe aus Holz, Metall oder aus Holz mit aufgeleimten Zelluloidstreifen.

Um das Einschätzen von Unterteilen überflüssig zu machen, bzw. zu verfeinern, verwendet man vielfach

b) den Transversalmassstab:

Er besteht aus 11 in beliebiger, aber gleicher gegenseitiger Entfernung auf Papier, Holz, Messing, Glas etc. gezogenen Parallelen, welche in Abständen von je 10 m wirkliches, also $\frac{10}{v}$ m Planmass durch senkrechte Gerade geschnitten werden. Das von der 0-Linie links liegende Endstück DA bzw. CB von 10 m

Fig. 89.



(bzw. u. U. 100 m oder 1 m), wird auf der 0ten und 10ten Linie in 10 Teile geteilt, deren Endpunkte von unten nach oben je um einen Teil ansteigend verbunden werden. Nach der Proportionallehre kann man derart direkt Zehntel und durch Einschätzung noch Hundertstel eines Teils abgreifen. Z. B. zeigt die in Fig. 89 durch Kreuzchen begrenzte Strecke das Mass 26,30 m im Massstab $1 : 500$. Um cm abzugreifen sind die Zirkelspitzen in geschätztem Parallelabstand zwischen diejenigen 2 Parallelen einzusetzen, welche der nach oben und unten zunächst benachbarten dm Angabe entsprechen.

Da der Teilungsträger, aus welchem Material er auch bestehen möge, seine Länge mit der jeweiligen Temperatur ändert, sorgt man dafür, dass die Teilung ihre Normallänge bei Zimmertemperatur besitzt, bei welcher der Massstab zumeist verwendet wird.

Soll der Massstab nicht zum Auftragen, sondern zum Abgreifen von Massen, bzw. zur Planprüfung verwendet werden, so empfehlen sich

c) Glasplatten, auf welche entsprechende Teilungen eingeritzt, eingätzt, oder auf mechanischem Weg (etwa unter Verwendung lichtempfindlichen Belags) übertragen worden sind.

Zum Fällen kurzer Lote auf dem Papier dienen

Schieb-
dreiecke.

4. Schiebdreiecke aus Holz, Zellstoff oder, wo möglichste Unveränderlichkeit gefordert wird, aus Metall, die in der Dicke mit dem verwendeten Lineal übereinstimmen (also event. Sägeblattdreiecke). Auf die Richtigkeit ihres rechten Winkels werden sie ganz ebenso geprüft, wie die Winkelinstrumente auf dem Feld, nämlich durch zweifaches Abtragen des Instrumentenwinkels nach derselben Seite einer Geraden und zwar das einmal rechts und das andere mal links eines auf ihr liegenden Punktes. Dabei wird, um möglichst lange Anlage zu haben (falls nicht die Reisschiene zur Anwendung kommt), die Hypotenuse (und nicht eine Kathete) angelegt und nachdem ein zweites Schiebdreieck, oder ein Lineal an der linken Kathete satt angeschoben wurde, die bisher rechts liegende Kathete mit diesem zur Berührung gebracht. Die Lage der Hypotenuse bezeichnet alsdann den gesuchten Winkelschenkel. Um trotz häufigen Gebrauchs das Beschmutzen des Plans zu verhüten, werden die Auflagerflächen metallener Schiebdreiecke mit einem dünnen Ölfarbanstrich, oder Papierüberzug versehen.

Winkel beliebiger Grösse können, wenn die damit erreichbare Genauigkeit genügt, mittels

5. Transporteurs (s. Fig. 90), oder (nach Zurückführung auf spitze Winkel durch Verlängerung eines Schenkels, oder durch ein Lot auf denselben) genauer mittels Sehnen- oder Tangentenlängen s bzw. a aufgetragen werden (s. Fig. 91). Die Werte der letzteren sind für den Radius $r = 1$ bzw. die Kathete $b = 1$

Fig. 90.

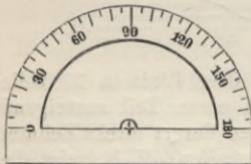
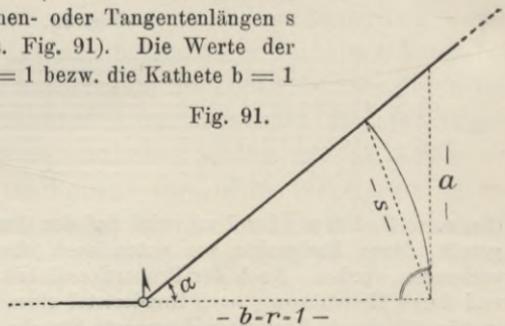


Fig. 91.



entsprechenden Tafeln zu entnehmen (z. B. Gauss, 5 stellige log. Tafeln, Taf. VII).

Grössere Arbeitsbeschleunigung und Genauigkeit bei der Zeichnung von durch rechtwinklige Koordinaten aufgenommenen Punkten, als mit Zirkel und Transversalmassstab, lässt sich erzielen durch Verwendung folgender Einrichtung:

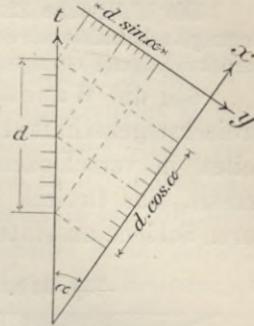
Projiziert man eine Teilung t rechtwinklig auf die Achsen eines Koordinatensystems, dessen Abszissenachse x um den $\neq \alpha$ gegen die Teilungskante divergiert, so entstehen auf diesen neue Teilungen, deren Intervalle proportional denen der ersten sind: sie zeigen die $\cos \alpha$ - bzw. $\sin \alpha$ -fache Grösse dieser. Will man umgekehrt auf der Geraden x oder y (Aufnahmelinie), Strecken in

Zeichnung
von Winkeln
beliebiger
Grösse.

Kartierungs-
instrumente.

einem bestimmten Verjüngungsverhältnis $1:v$ absetzen, so lässt sich dies durch Projektion der Teilung t erreichen, wenn nur deren Teile $\frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$ bzw. $\frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$ mal grösser sind. Nimmt man z. B. $\alpha = \frac{R}{2}$, so dass $\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so braucht man auf der Teilung t $\sqrt{2}$ mal grössere Intervalle, also ein $\sqrt{2}$ mal grösseres Verjüngungsverhältnis als dasjenige des zu zeichnenden Plans. Dann kann man aber auch $\sqrt{2}$ mal genauer ablesen, als wenn man im Planmassstab selbst arbeiten würde. Diesen Gedanken benützt u. a.

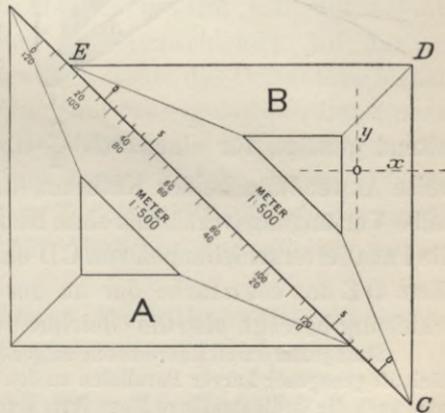
Fig. 92.



6 a) ein Patent von C. Müller in Zürich, welches auf Linealen (oder auf der Hypotenuse gleichschenkelig rechtwinkliger Schieb-dreiecke A) Teilungen in verschiedenen, aufs $\sqrt{2}$ fache vergrösserten Verjüngungsverhältnissen anbringt (s. Fig. 93 a). Zur weiteren Genauigkeitssteigerung trägt die Hypotenuse des zugehörigen, zur Zeichnung verwendeten Schieb-dreiecks B statt blosser Anlegemarken entsprechende Nonien

Fig. 93 a.

(s. § 37). Legt man die Kathete CD vom Schieb-dreieck B an die Ordinatenachse y an und schiebt die Teilungskante von A an die Hypotenuse von B derart heran, dass die Noniusnullpunkte mit den Teilungsnullpunkten übereinstimmen, so gibt die Zeichenkante CD die Lage der zu irgend einem Abszissenmass x gehörigen Ordinate an, sobald man an dem festgehaltenen Dreieck oder Lineal A das Dreieck B berührend so verschiebt, dass der Noniusnullpunkt von B mit dem Abszissenmass x auf der A-Teilung zusammenfällt. Um auch Ordinatenrichtungen für negative Abszissen absetzen zu können, ist die Teilung A in 2 facher Richtung beziffert und sind auf Schieb-dreieck B zwei entgegengesetzt bezifferte Nonien aufgezeichnet.



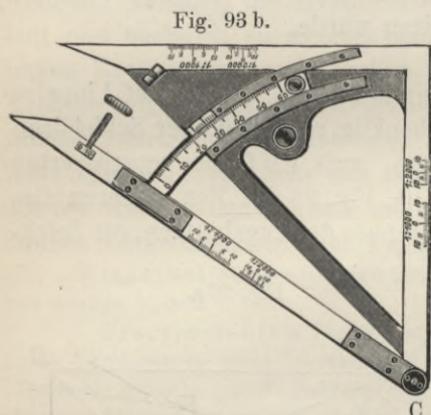
Genau dieselbe Rolle, wie DC für die Abszissen-, spielt die Kante DE für die Ordinatenmasse, wenn man dafür gesorgt hat, dass in dem Augenblick ihrer Übereinstimmung mit der x -Achse sich an der Skale A die Ablesung 0 ergab.

Genau dieselbe Rolle, wie DC für die Abszissen-, spielt die Kante DE für die Ordinatenmasse, wenn man dafür gesorgt hat, dass in dem Augenblick ihrer Übereinstimmung mit der x -Achse sich an der Skale A die Ablesung 0 ergab.

Man erhält somit den Planort jedes durch rechtwinklige Koordinaten aufgenommenen Punktes durch den Schnitt zweier, längs den Katheten vom Dreieck B gezogener Geraden.

Die Müllersche Einrichtung erfordert ebensoviele Dreieckpaare, als Verjüngungsverhältnisse verwendet werden wollen und überdies die rechnerische Berücksichtigung etwaigen Planeingangs. Dies vermeidet

6b) die Wauesche Einrichtung, welche das Dreieck A (dessen Dreieckseigenschaft keine Verwendung erfährt) durch ein auf mehreren Seiten in verschiedenen Verjüngungsverhältnissen geteiltes Lineal ersetzt, das Dreieck B aber mit einer um den Eckpunkt C drehbaren Schiene ausstattet, mit der ein in einer Führung des Dreiecks B



laufender, und auf ihr in jeder Lage feststellbarer geteilter Kreisbogen in starrer Verbindung steht (s. Fig. 93b). Diese Schiene, welche ebensoviele verschiedene Nonien, als das Lineal Teilungen, trägt, tritt als Anlegelinie an Stelle der Hypotenuse CE von B und ermöglicht jede beliebige Änderung des Winkels α , also die Anwendung jedes gewünschten Verjüngungsverhältnisses. Nur ist, wie ein-

leitend gezeigt, für einen von $\frac{R}{2}$ abweichenden Winkel α die wahlweise Anwendung beider Katheten des Dreiecks B für ein und dasselbe Verjüngungsverhältnis ohne Neueinstellung ausgeschlossen, weil die Parallelverschiebungen von CD das $\sin \alpha$ fache, diejenigen der Kathete DE das $\cos \alpha$ fache der an der Linealteilung abgelesenen Verschiebung beträgt, also die Gleichheit beider nur für $\alpha = 45^\circ$ besteht.

Statt jeden durch Koordinaten aufgenommenen Punkt als Schnitt zweier mit Bleistift gezogener kurzer Parallelen zu den Koordinatenachsen zu zeichnen, kann man auch die Ordinatenlänge längs ihrer durch die Zeichenkante gegebenen Richtung mittels einer Nadel einstechen. Zu diesem Zweck werden mit dem Waueschen Apparat Ordinatenchieber mit Nadeleinsatz geliefert.

Andere Formen von Kartierungsinstrumenten machen das Ziehen von Geraden zum Zweck der Zeichnung von rechtwinkligen Koordinaten überhaupt überflüssig, ergeben vielmehr für jeden dadurch aufgenommenen solchen Punkt direkt einen Nadelstich. Ein solches Hilfsmittel ist z. B.

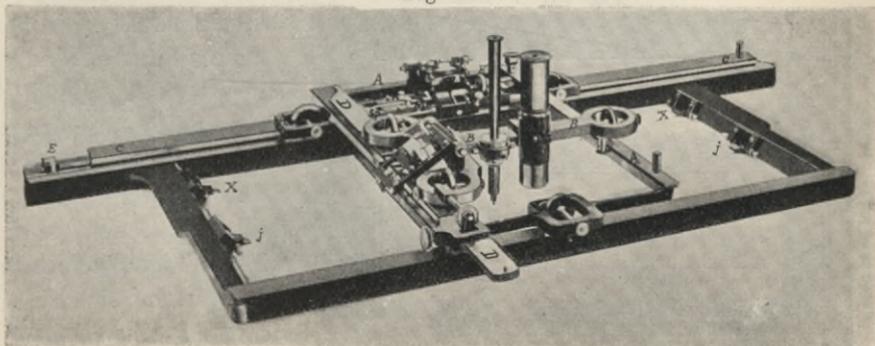
c) das Nadel-Kartierungsinstrument nach Landmesser Friedel in Düsseldorf. Es besteht aus drei Teilen: nämlich α) dem in dem anzuwendenden Verjüngungsverhältnis mit vor- und rückläufiger Teilung versehenen Abszissenlineal; β) dem Ordinatenchieber

in Form eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem eine, am Lineal anzuschiebende Kathete zwei, entsprechend der Linealteilung in entgegengesetzter Richtung bezifferte Nonien, die andere Kathete eine von einem Nullpunkt aus nach beiderlei Richtungen bezifferte mit derjenigen des Lineals genau übereinstimmende Teilung trägt, und γ) der Nadelvorrichtung, bestehend aus einem an der geteilten Kante des Ordinatschiebers gleitenden Schlitten mit korrespondierendem Doppelnonius und einer darauf senkrecht stehenden Säule als Führung eines die Nadel tragenden, gegen die Säule federnden Hohlzylinders. Der letztere gleitet bei leichtem Druck, die führende Säule umschliessend, senkrecht abwärts, wodurch die äusserst feine Nadel in das Zeichenpapier eindringt. Lässt der Druck nach, so hebt sich Zylinder und Nadel wieder nach oben. Sollen Koordinaten aufgetragen werden, so legt man zunächst das Abszissenlineal durch Probieren so, dass in der Normalzusammenstellung — Ordinatschieber mit der Noniuskathete am Lineal gleitend, Noniusnull der Nadelvorrichtung mit dem Teilungsnulldpunkt der andern Kathete des Ordinatschiebers übereinstimmend — die herabgedrückte Nadel bei Verschiebung des Ordinatschiebers die (bereits gezeichneten) Anfangs- und Endpunkte der Aufnahmelinie erfasst, und dass beim Erfassen des Anfangspunkts die Ablesung 0 am Abszissenlineal erscheint. Alsdann braucht man nur am Abszissenlineal den Nullpunkt des Ordinatschiebers auf das gegebene Abszissen- und an der zweiten Kante des Ordinatschiebers den Nullpunkt der Nadelvorrichtung auf das gegebene Ordinatenmass einzustellen, um durch leichtes Herabdrücken der Nadelführung die Lage des Punktes in Form eines feinen Nadelstichs zu erhalten.

Neuerdings fertigt Coradi in Zürich für Kleinkartierungen ein dem „Koordinatographen“ S. 137 ähnliches und ähnlich zu verwendendes Instrument,

d) den nachstehend abgebildeten „Detailkoordinatographen und Koordinatometer“ (Fig. 95 c).

Fig. 95 c.



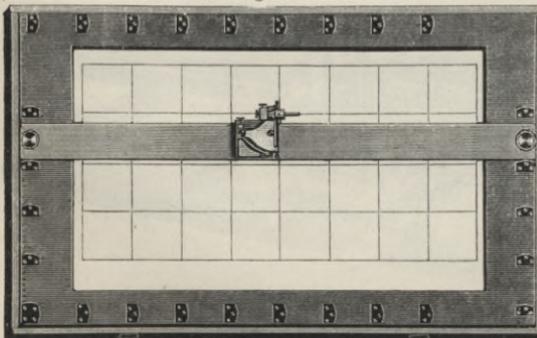
Die bisher vorgeführten Kartierungsinstrumente dienen nur zur Aufzeichnung der Stückvermessungsergebnisse. Handelt es sich um die Aufzeichnung ausgedehnter Aufnahmen, welche grosses Format der Pläne erfordert, so muss sowohl für die Aufzeichnung der Hauptpunkte der Messung (Polygonpunkte etc.), als auch um etwaige spätere — an verschiedenen Planstellen verschieden wirkende — Papieränderungen jederzeit genau feststellen und berücksichtigen zu können, zunächst ein möglichst scharfes Netz gleichabständiger, parallel zu den Achsen des für die Aufnahme gewählten Hauptkoordinatensystems verlaufender Geraden, ein „Quadratnetz“ aufgezeichnet werden. Hier genügt die Verwendung des Schiebdreiecks (schon wegen der unzureichenden Länge seiner Seiten) zum Zeichnen der rechten Winkel nicht mehr. Einige mechanische Hilfsmittel für diesen Zweck mögen nachfolgend kurz beschrieben sein:

7. Der Quadratnetzstecher, wohl das älteste hieher gehörige Hilfsmittel besteht aus einer ebenen Glas-, Zink- oder Messingplatte mit Bohrlöchern an den Kreuzungspunkten des Quadratnetzes, durch welche diese mittels der Punktirnadel auf das untergelegte Zeichenblatt übertragen werden.

Oberlandmesser Rödder in Königsberg hat daran verschiedene Verbesserungen angebracht und sich patentieren lassen, deren hauptsächlichste darin besteht, dass die Kreuzungspunkte durch, mit der Platte festverbundene aber in ihrer Lage justierbare Nadeln bezeichnet sind. Letztere sind gegen Beschädigung durch eine besondere Vorrichtung geschützt und bezeichnen gleichzeitig sämtliche Netzpunkte auf dem untergelegten Plan, wenn gegen die Platte ein Druck nach abwärts ausgeübt wird. (Vergl. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1898 S. 526, 1899 S. 559, 1902 S. 186.)

8. Der Rahmenapparat von Dennert & Pape in Altona besteht aus einem Stahlrahmen, unter welchem das auf einer Tafel

Fig. 94.

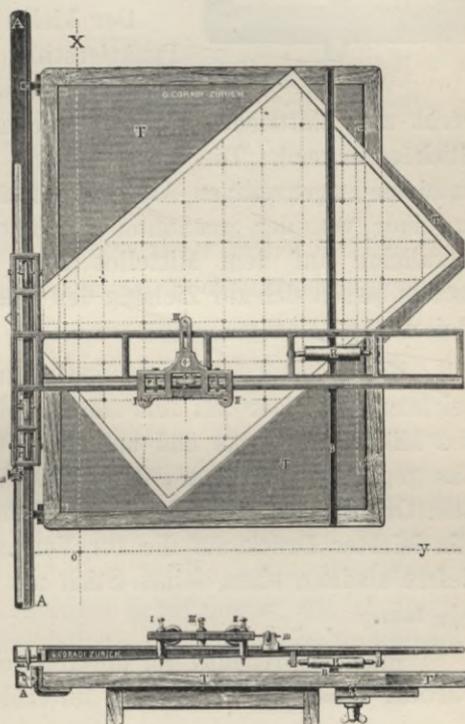


ruhende Kartenblatt festgeklemmt wird. Auf dem Rahmen sind im Abstand gleich einer Seite des zu zeichnenden Quadratnetzes Stahlklötze befestigt. Gegen sie wird ein Lineal gelegt, auf welchem sich ein Schlitten mit selbst-

fallender Reissfeder oder Nadel bewegen lässt, der die Netzlinien zeichnet. Ähnliche Apparate mit Sägeblattlineal, längs dessen das Quadratnetz mit der Handreissfeder gezeichnet wird, liefert Wolz in Bonn.

9. Der Koordinatograph, von Coradi in Zürich, besteht (s. auch Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1902 S. 339 ff.) aus einem gusseisernen und vernickelten Abszissenlineal A, welches während des Gebrauchs durch Winkeleisen oder Träger mit dem Zeichentisch T in feste Verbindung gebracht wird. Es trägt auf Zimmer-temperatur (+ 18 bis 20° C.) abgegliche Teilungen in den gewünschten Verjüngungsverhältnissen (s. Fig. 95 a). Die Bezifferung für die Teilung ist, um letztere ohne Rechnung für jede beliebige Entfernung vom Koordinatenursprung und für verwandte Verjüngungsverhältnisse anwenden zu können, auf einem Leinenband angebracht. Dieses ist auf Metallspulen aufgewickelt und lässt sich mit der Linealteilung an beliebigen Stellen zur Übereinstimmung bringen. Eine dem Lineal eingehobelte scharfe Rinne gibt die Führung ab für zwei Stahlrollen r eines Wagens, welcher somit unter Zuhilfenahme der auf einem

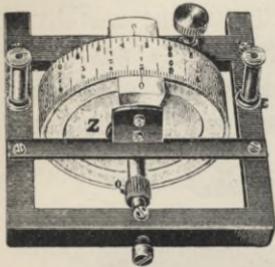
Fig. 95 a.



lose aufgelegten Metalllineal B liegenden Laufwalze R auf drei Punkten ruht und sich hin und her bewegen lässt. Zur Feinbewegung dient ein Mikrometerwerk m. Der Wagen selbst besteht aus einem Gitterwerk, dessen einer Rahmen, das Ordinatenlineal, eine ebensolche Teilung und Rinne zur Führung der entsprechenden Rollen r trägt, wie das Abszissenlineal. In letztgenannter Rinne ist ein zweiter, kleinerer Wagen beweglich und feststellbar. Die beiden Wagen bewegen sich in zwei zu einander senkrechten Richtungen. Diese Bewegungen werden gemessen durch je eine mikroskopische Verzahnung (0,25 mm) der Teilkanten, in welche entsprechende Zähne

der Massrädchen O eingreifen (s. Fig. 95 b). Der Umfang der letzteren umfasst eine durch 10 oder 100 teilbare Anzahl von Metern

Fig. 95 b.



in den gewählten Massstabverhältnissen und misst etwa 20 mm. Auf ihrer Achse ist je ein geteilter Zylinder Z aus weissem Zelluloid befestigt, dessen Umfang $7\frac{1}{2}$ mal grösser ist, als der Umfang des Zahnradchens. Die Bewegung der Wagen, welche an den Zahnradchen abgewickelt wird, erscheint also auf dem Teilkreis $7\frac{1}{2}$ mal vergrössert.

Der kleine Wagen trägt drei justierbare Punktierstifte (I, II und III), welche durch federnde Hülsen hochgehalten, sich senkrecht zur Blattrichtung niederdrücken lassen, dabei einen feinen Stich erzeugend. Die Spitzen I und II treffen dieselben Ordinate in einem gegenseitigen Abstand von 200 mm. Die Spitze III liegt in einer von der genannten Ordinate um 200 mm verschobenen Parallelen auf dem Mittellot über I—II. Statt der Punktiernadeln lassen sich zur Ziehung des Quadratnetzes auch selbstfallende Reissfedern einsetzen.

Um einen, seinen Koordinaten nach gegebenen Punkt aufzuzeichnen, wird der auf dem Abszissenlineal laufende Wagen mittels des Mikrometerwerks und unter Benützung der Bandbezeichnung auf das gegebene Abszissen-, der kleine Wagen in gleicher Weise auf dem Ordinatenlineal auf das gegebene Ordinatenmass eingestellt. Ein leichter Druck auf die zur Verwendung kommende Nadelhülse liefert alsdann einen feinen Stich mit einer Genauigkeit von nahezu $\frac{1}{100}$ mm.

Eine Besprechung der übrigen Zeichenhilfsmittel — Reissfeder, Farben, Pinsel etc. kann hier unterbleiben.

§ 19. Planzeichnung nach direkten Aufnahmemassen.

Die Planzeichnung beginnt mit dem Auftragen des grundlegenden Netzes, innerhalb dessen nach dem Grundsatz der „Arbeit vom Grossen zum Kleinen“ zunächst die Aufnahmelinien und dann erst die auf sie bezogenen Einzelobjekte eingetragen werden.

Netz-
zeichnung.

Zeichnung und Orientierung des Quadratnetzes bei ausgedehnten Aufnahmen.

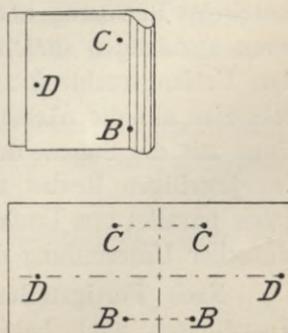
Wird zur Netzzeichnung keines der vorgeführten mechanischen Hilfsmittel verwendet, so hebt man zunächst darauf ab, als Grund-

lage für die Zeichnung ein möglichst genaues, den Plan umschliessendes Rechteck von bestimmten, runden Seitenlängen b und l (s. Fig. 97) zu erhalten. Man beginnt mit der scharfen Zeichnung eines in der ungefähren Blattmitte sich rechtwinklig schneidenden Achsenkreuzes. Zu diesem Zweck zieht man zuerst eine Gerade, welche die Schmalseiten des Blattes halbiert. Alsdann kann man mittels Stangenzirkels oder Prismamassstabs von dem auf ihr in der ungefähren Blattmitte gewählten Achsschnitt aus nach beiden Seiten der Geraden gleiche Strecken abtragen und aus deren End- als Mittelpunkten Kreise mit gleichen Radien beschreiben, deren Schnitte Punkte des gesuchten Lots sind.

Hat man die auf der ersten Geraden vom Achsschnitt aus nach beiden Seiten abgetragene Strecke gleich der halben Langseite $\frac{l}{2}$ des zu zeichnenden Rechtecks, und den Kreisradius gleich $\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ gewählt, wobei b die Breitseite des Rechtecks darstellt, so hat man von den gewonnenen vier Punkten aus nur noch Kreisbögen mit den entsprechenden halben Rechtecksseiten $\frac{b}{2}$ und $\frac{l}{2}$ zu beschreiben, um in deren Schnittpunkten die vier Ecken des Umfangsrechtecks zu erhalten. Elastische Durchbiegungen der die beiden Zirkelfüße verbindenden Stange und federnde Ortsveränderungen der Zirkelspitzen selbst verursachen aber beim geringsten Druck auf den Stangenzirkel Zeichnungsungenauigkeiten. Besser ist es daher, die sich schneidenden Kreisbögen nur in Bleistift und vorläufig zu ziehen. Alsdann erst trägt man mit Benützung der Nadel und eines genügend langen prismatischen Massstabs je in der Richtung nach dem vorläufigen Schnittpunkt, die als Radien vorgesehenen Strecken ein und fällt in den erhaltenen Endpunkten Lote auf den genannten Richtungen, deren Schnitte die gesuchten Netzpunkte ergeben.

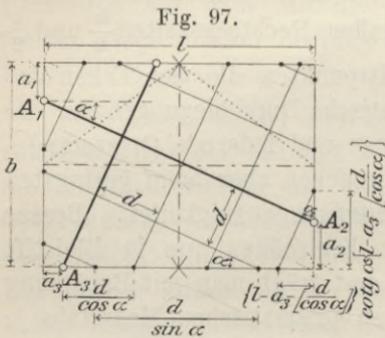
Auf nicht allzu dickem und nicht zur Wellenbildung geneigtem Zeichenpapier lässt sich das Achsenkreuz auch ohne umständliche Konstruktion wie folgt zeichnen: Man biegt den Bogen nach Fig. 96 so um, dass die ideelle Falzlinie etwa mit der gewollten kurzen Seite des Achsenkreuzes übereinstimmt und sorgt durch Anschieben eines schweren Lineals möglichst nahe an jene ideelle Falzlinie dafür, dass Papierwellen sich nicht bilden können. Alsdann

Fig. 96.



sticht man mit einer feinen und senkrecht geführten Nadel einen Punkt D und zwei Punkte B und C so durch, dass die Verbindungslinie der beiden Stiche D und diejenige der Halbierungspunkte der Stiche B und C das Achsenkreuz darstellen. Auf dieses baut sich das Umfangsrechteck auf, wie soeben gezeigt.

Das Quadratnetz des Plans, dessen Teilungslinien in runden Abständen parallel zu den Achsen des für das Aufnahmegebiet gewählten Hauptkoordinatensystems verlaufen, kann sich nun, je nach der geographischen Lage des durch den Plan darzustellenden Geländes parallel, oder schief zu dem gezeichneten Umfangsrechteck ergeben. Um hierüber Aufschluss zu erhalten, benützt man einen über das fragliche Gebiet in kleinem Massstab gezeichneten Übersichtsplan. Ist dessen Verjüngungsverhältnis n fach kleiner, als dasjenige des zu zeichnenden Plans, so legt man ein auf Pauspapier entworfenes Rechteck (Schablone) mit den Seiten $b = \frac{b}{n}$ und $l = \frac{l}{n}$ so auf die Übersichtszeichnung, dass das auf



ihr verkleinert dargestellte Bild des gewünschten Kartenblatts sich passend in die Schablone einfügt. Alsdann entnimmt man der Schablone die Abschnitte a_1, a_2, a_3 , welche zwei zu zeichnende Netzlinien auf dem Umfangsrechteck bilden und trägt die Strecken $n \cdot a_1 = a_1, n \cdot a_2 = a_2, n \cdot a_3 = a_3$ im projizierten Planmassstab auf dem Umfang des Planrechtecks ab. Berechnet man jetzt den Winkel α zwischen Netzlinie und Umfangsrechteck aus: $\text{tg } \alpha = \frac{b - a_1 - a_2}{l}$ (s. Fig. 97), so erhält man — von A_1 bzw. A_3 je bis zur Rückkehr nach diesen Punkten alle vier

Seiten des Umfangsrechtecks durchlaufend — durch einfache trigonometrische Rechnung unter Probe die Masse, welche auf den letzteren abzutragen sind, um die Schnittpunkte des Quadratnetzes mit dem Umfangsrechteck zu erhalten. Der Übergang von einer Rechtecksseite auf die nächste erfolgt durch Vergleichung ihrer Gesamtlänge mit der Summe der errechneten Abschnitte und Multiplikation des jeweiligen Restes mit $\text{tg } \alpha$ bzw. $\text{ctg } \alpha$. Verlaufen die Netzlinien parallel zum Umfangsrechteck, so ergeben sie sich auf Grund einfacher Unterteilung der Seiten des letzteren.

Nach Fertigstellung des Quadratnetzes werden die ihren Koordinaten nach bekannten Polygon- und Messungskleinpunkte,

je ausgehend von der zunächst gelegenen, und mit jedesmaliger Kontrolle nach der entfernteren Quadratseite eingetragen. Damit ist eine möglichst innige Verbindung des zu zeichnenden Plans in allen seinen Teilen mit dem Quadratnetz gewährleistet.

Nun erfolgt, übereinstimmend mit der Behandlung kleiner Aufnahmen, bei denen das Netz der Aufnahmelinien (Dreiecke, Vierecke etc.) die Zeichnungsgrundlage bildet, die Aufzeichnung der Stückvermessung.

Bei Verwendung des Zirkels werden zunächst die Polygon-, bzw. längeren Umfangsseiten in passende Unterabteilungen von rundem Längenmass (etwa 1 dm wirklicher Länge) in der Weise zerlegt, dass von allen Messungsend- und Kleinpunkten aus die Massdifferenz nach der nächstliegenden runden Abteilungsgrenze vorwärts oder rückwärts abgetragen und sodann die Streckenlänge zwischen dem erhaltenen Teilpunkt und der nächsten Abteilungsgrenze in die nötige Zahl gleicher Teile zerlegt wird. Diese Teilpunkte haben den Zweck, etwaige Papiereingänge, oder kleine Zeichnungsungenauigkeiten im Netz derart zu verteilen, dass sie nirgends zu schädlichen Beträgen sich häufen. Von ihnen, und nicht vom Anfangspunkt der Messung aus werden die Abszissen für Einzelpunkte der Stückvermessung, entsprechend ihren Masszahlen, eingezeichnet. Ganz ebenso verfährt man mit den von Netzlinie zu Netzlinie durchbindenden untergeordneten Aufnahmelinien, deren Lage sich stufenweise durch gradlinige Verbindung je zweier auf den Netzlinien, oder mittels ihrer Koordinaten eingezeichneten Abzweige-(Klein-)punkte ergibt. Sämtliche Kontrollmasse müssen durch Abgreifen geprüft werden.

Detail-
zeichnung.

Bei genügender Sorgfalt und Übung lässt sich selbst bei Verwendung des Zirkels der mittlere Zeichenfehler auf etwa $\frac{1}{10}$ mm pro Punkt herabdrücken (vergl. hierüber Zeitschr. f. Vermessungswesen 1907 S. 531 ff.).

Für die Ausführung der Reinzeichnung bestehen, soweit die Pläne amtlichen Zwecken zu dienen haben, in den einzelnen Staaten Vorschriften, die übrigens im wesentlichen übereinstimmend lauten. Hienach sind:

Farben-
behandlung
des Plans.

Die Linien des Quadratnetzes fein rot oder blau, Dreieckpunkte blau oder schwarz, und Polygonpunkte rot, je mit entsprechender Signatur,

Wasserläufe preussisch-blau mit blauer Kolorierung, oder mit Wasserlinien,

bestehende Eigentumsgrenzen kräftig schwarz mit kleinen schwarzen Kreischen, oder Quadrätchen für die Marksteine,

alte, herausfallende Eigentumsgrenzen fein schwarz mit kleinen schwarzen Kreischen, oder Quadrätchen für die Marksteine,

neu entstehende Eigentumsgrenzen kräftig rot mit kleinen roten Kreischen, oder Quadrätchen für die Marksteine ausziehen,

alte, bezw. neu entstandene Kulturgrenzen schwarz bezw. rot zu punktieren.

Die Gebäudegrundflächen werden schwarz (Tusche mit etwas Indigo), bei Unterscheidung zwischen Wohn- und Betriebsgebäuden dagegen rot bezw. gelb koloriert, ihre Grenzlinien fein schwarz ausgezogen.

Bei Projekten (Gebäude, Baulinien, Strassen, Eisenbahnen etc.) werden die zukünftigen Grenzlinien rot ausgezogen, die einer Veränderung unterliegenden Flächen rot koloriert, oder bandiert und die Masse rot eingeschrieben.

Genehmigte Baulinien werden blau ausgezogen (in derselben Farbe erfolgt die Angabe der Genehmigungsurkunde) und mit Sepia-streifen gebändert.

Bauverbot genehmigt wird blau ausgezogen und grün gebändert.
projektiert wird rot

Vorgärten genehmigt werden blau ausgezogen und grün koloriert.
projektiert werden rot

Aufgehobene Baulinien werden gelb ausgezogen und gelb gebändert.

Je nach dem Zweck des Plans werden die Aufnahmemasse ganz, teilweise, oder gar nicht eingetragen, ebenso verhält es sich mit den Namen der Grundstückseigentümer, den Parzellennummern und Kulturarten. Ein Orientierungszeichen, ein Massstab im Verjüngungsverhältnis des Plans, oder wenigstens die Angabe dieses Verhältnisses in Zahlen (1 : v) und die Unterschrift des Planfertigers mit Datum darf nie fehlen.

Der Einschrieb der Aufnahmemasse, wo erforderlich, der Eigentümernamen, von Orientierungspfeil, Massstab, Namensunterschrift und Datum erfolgt in schwarzer,

der Einschrieb der Gebäude-, Grundstücks-, Weg-, Wasser-, Eisenbahnnummern in roter Farbe.

Bäume werden mit schwarzen Ringen bezeichnet und indisch-gelb koloriert mit grüner Abtönung.

Die verschiedenen Kulturarten werden entweder blau in Worten (event. unter Beschränkung auf Anfangsbuchstaben) eingeschrieben, oder durch Farbenbänder begrenzt, und zwar

Äcker gelb,

Wiesen hellgrün (indisch-gelb und preussisch-blau),
 Gärten grün, (indisch-gelb und preussisch-blau),
 Wälder dunkelgrün (indisch-gelb und preussisch-blau),
 Weinberge Neutraltinte.

Einschnittsböschungen werden mit Sepia, Auffüllungsböschungen grün mit schwarzer Abtuschung,

Chaussierte Strassen und Erdwege indisch-gelb,

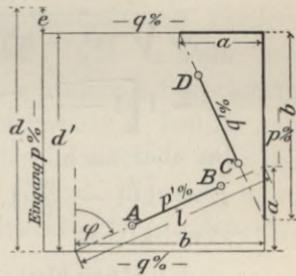
Pflasterflächen (Kandel, Strassenkreuzungen etc.) mit Neutraltinte, Gehwege (Asphalt, Platten etc.) mit Neutraltinte und etwas Tusche, bekieste Gehwege mit gebrannter Siena koloriert.

Zeitraubender, aber allgemeiner verständlich ist die Darstellung durch Kulturenzeichnung, wie sie u. a. für die württembergischen Katasterpläne angewandt wird. (Vergl. Beilage am Schluss des Buchs.)

§ 20. Planeingang.

Das zur Planzeichnung verwendete Papier und mit ihm die auf ihm entworfene Zeichnung ändern ihre Ausdehnung unter dem Einfluss veränderter Feuchtigkeit und Temperatur. Diese Veränderung, welche bis zu 2—3% ansteigen kann, ist sowohl bei späteren Nachkartierungen, als bei der Entnahme von Massen aus dem Plan zu berücksichtigen. Hiefür bietet das grundlegende Quadratnetz die Möglichkeit. Ist infolge der vorbenannten Umstände an Stelle der ursprünglichen Maschenweite d (s. Fig. 97 und 98) jetzt die um e kleinere Strecke d' getreten (was in Rücksicht auf Massstabverschiedenheiten natürlich mit demjenigen Massstabexemplar festzustellen ist, mit dem jetzt gezeichnet, oder abgegriffen werden soll), so beträgt das prozentische Eingangsverhältnis $p = \frac{100 e}{d}$.

Fig. 98.



Man hat also jedes auf dieser Netzlinie abzusetzende Mass a zu verkürzen um $a \cdot \frac{e}{d} = p \times 0,01 a$, und umgekehrt jedes dem Plan entnommene Mass a' zu verlängern um

$$a' \cdot \frac{e}{d'} \sim a' \cdot \frac{e}{d} \sim p \times 0,01 a'.$$

Das Eingangsverhältnis ist nun nicht an allen Stellen des Plans und in jeder Richtung gleich gross (bei auf mechanischem Weg hergestellten Plänen ist das Eingangsverhältnis namentlich auch in den beiden Blattrichtungen häufig erheblich verschieden), und schon aus diesem Grund darf das Quadratnetz nicht allzu weitmaschig sein. Angenommen nun, die rechten Winkel des Quadratnetzes seien

trotz der Papieränderung erhalten geblieben und es sei der Eingang in der Nord-Südrichtung zu $p\%$, in der Ost-Westrichtung zu $q\%$ festgestellt worden, so müssen alle in dieser Richtung einzutragenden, oder zu entnehmenden Masse um $p\%$ bzw. $q\%$ verkürzt, bzw. vergrößert werden. Es entsteht aber die Frage: in welchem Verhältnis p' sind Masse AB zu verändern, deren Richtung sich schief in das Netz einlegt?

Mögen die Abschnitte der Verlängerung von AB auf beiden Netzlinien a bzw. b betragen, auf dem Plan aber sich zu a' bzw. b' ergeben, wobei

$$a' = a \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

$$b' = b \left(1 - \frac{q}{100}\right).$$

Die zwischen den Netzlinien liegende Diagonalstrecke l misst dann auf dem Plan

$$\begin{aligned} l' &= \sqrt{a'^2 + b'^2} \\ &= \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 + b^2 \left(1 - \frac{q}{100}\right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + \frac{a^2 p^2}{10000} - \frac{2a^2 p}{100} + b^2 - 2\frac{b^2 q}{100} + \frac{b^2 q^2}{10000}} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2) \left[1 - \frac{2(a^2 p + b^2 q)}{100(a^2 + b^2)} + \frac{a^2 p^2 + b^2 q^2}{10000(a^2 + b^2)}\right]} \end{aligned}$$

oder unter Vernachlässigung kleiner Glieder

$$\begin{aligned} &\sim \sqrt{(a^2 + b^2) \left[1 - \frac{a^2 p + b^2 q}{100(a^2 + b^2)}\right]^2} \\ &\sim l \left[1 - \frac{a^2 p + b^2 q}{100(a^2 + b^2)}\right]. \end{aligned}$$

Da aber auch

$l' = l \left(1 - \frac{p'}{100}\right)$, so ergibt sich: das prozentische Eingangsverhältnis

$$p' \sim \frac{a^2 p + b^2 q}{a^2 + b^2} \sim \frac{a'^2 p + b'^2 q}{a'^2 + b'^2}$$

der Schiefen gleich dem arithmetischen Mittel der beiden prozentischen Eingangsverhältnisse der Netzlinien, wenn jedem von ihnen das Quadrat des zugehörigen Netzlinienabschnitts als Gewicht zugeteilt wird.

Der Wert für p' bleibt nach vorstehender Gleichung unverändert, wenn die Netzlinienabschnitte a und b sich proportional verändern, d. h. wenn die Gerade AB parallel mit sich selbst verschoben wird. In diesem Falle bleibt der Winkel φ zwischen der Strecke l und der Parallelen zur nordwärts gerichteten Netzlinie, der „Richtungswinkel“, unverändert.

Da nun

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi,$$

so erhält man für das Eingangsverhältnis der Schiefen l' auch

$$p' = p \cos^2 \varphi + q \sin^2 \varphi.$$

Für die zu l' Senkrechte CD wird der Richtungswinkel

$$= \left(\varphi + \frac{R}{3R} \right)$$

und da

$$\sin^2 \left(\varphi + \frac{R}{3R} \right) = \cos^2 \varphi \quad \text{und} \quad \cos^2 \left(\varphi + \frac{R}{3R} \right) = \sin^2 \varphi,$$

so erhält man für das prozentische Eingangsverhältnis von CD:

$$\begin{aligned} q' &= p \sin^2 \varphi + q \cos^2 \varphi \\ &= \frac{b^2 p + a^2 q}{a^2 + b^2} \sim \frac{b'^2 p + a'^2 q}{a'^2 + b'^2}. \end{aligned}$$

Ist das prozentische Eingangsverhältnis der beiden parallelen Netzlinien verschieden, so haben nicht nur die Strecken, sondern auch die Winkel Verzerrungen erlitten. Für die Kartierung der Katasterstückvermessung, welche nur kurze Ordinaten verwendet, bleibt dies ohne Bedeutung; nur muss das Kleinpunktnetz und das Quadratnetz genügend verengt werden, so dass innerhalb jedes einzelnen Quadrates die Anwendung je eines vermittelten Wertes für p und q genügt. Kommen ausnahmsweise längere Lote vor, so berechnet man die Koordinaten ihrer Endpunkte und kartiert letztere unter Benützung des Quadratnetzes. Nur im Falle der Punktaufnahme mittels Polarkoordinaten muss, falls die Berechnung rechtwinkliger Koordinaten unterbleibt (Tachymetrie s. Teil II) und die Kartierung mit Richtungswinkel und Strecke erfolgt, auch die Winkelverzerrung berücksichtigt werden. (Vergl. hierüber u. a. Hammer, „Eintragen von Messungen in gedruckte Pläne“, Zeitschr. f. Verm. 1895, S. 161.)

§ 21. Kopie, Vergrößerung bezw. Verkleinerung, Vervielfältigung von Plänen.

A) Auf zeichnerischem Wege:

a) Kopie.

Das einfachste Kopierungsverfahren bildet das Durchpausen Kopie. auf Ölpapier.

Soll die Kopie auf Zeichenpapier gefertigt werden, so kann man die zu übernehmenden Punkte entweder von der Pause, oder auch direkt vom Originalplan mittels feiner Kopiernadeln durch-

stechen. Letzteres Verfahren hat jedoch den Nachteil, dass der Originalplan leicht dabei notleidet.

Zur Kopierung von Plänen mit vielen und unregelmässig begrenzten Einzelheiten (topographische Pläne etc. in kleinem Massstab) eignet sich ein engmaschiges, durch entsprechende Linien- oder Farbenunterscheidung möglichst übersichtlich gestaltetes Quadratnetz, das einerseits auf Pauspapier gezeichnet auf den Originalplan aufgelegt, andererseits in gleicher Grösse auf dem für die Kopie bestimmten Zeichenbogen in Bleistift entworfen wird. Der Übertrag innerhalb der einzelnen quadratischen Felder kann dann mit freiem Auge oder mittels einfacher Hilfsmittel (Zirkel, Pausverfahren etc.) erfolgen.

b) Vergrösserung bezw. Verkleinerung.

Statt die beiden im vorhergehenden verwendeten Quadratnetze kongruent zu zeichnen, kann man auch die Seiten des der Kopie zugrund liegenden Netzes in dem gewünschten Vergrösserungs- oder Verkleinerungsverhältnis verändern. Die Übertragung innerhalb der reduzierten Felder wird dann nach freiem Auge, oder einem mechanischen Verfahren bewirkt (Fig. 99 a und 99 b).

Massstab-
veränderung
mittels
Quadrat-
netzes.

Fig. 99 a.

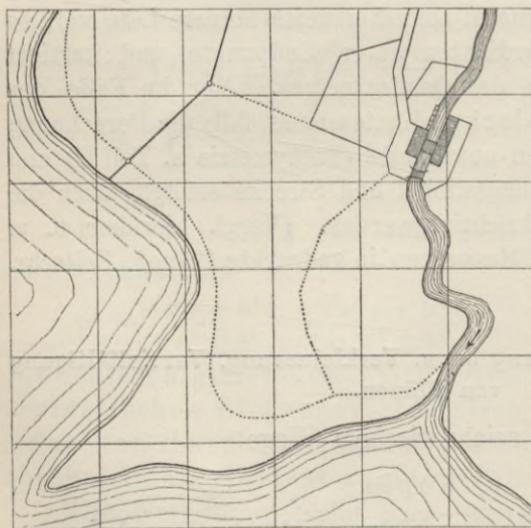


Fig. 99 b.



Auf den Sätzen der Ähnlichkeitslehre beruhen folgende Verfahren: Befestigt man das für die gewünschte Figur bestimmte Zeichenblatt so auf dem Originalplan, dass die

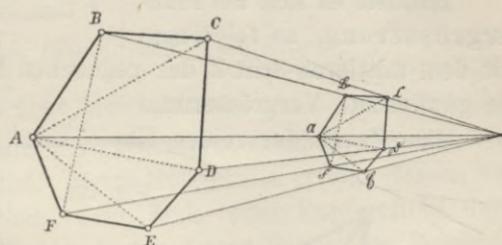
Figur des letzteren frei bleibt und zieht irgend eine Strecke der gewünschten Reduktion mittels Schiebendreiecks parallel zu ihrer homologen im Original, so müssen alle übrigen homologen Strecken beider Figuren ebenfalls einander parallel sein. Man braucht daher

nur durch die beiden Endpunkte der grundlegenden Strecke, deren Länge irgendwie gleich dem der gewünschten Verjüngung entsprechenden Teil, d. h. $= \frac{m}{n}$ der homologen Strecke des Originals gemacht wurde, Parallele zu entsprechenden Grenzlinsen, oder Diagonalen des Originals zu ziehen, so ergeben sich die einzelnen Ecken der reduzierten Abbildung als Schnittpunkte homologer Parallelen. Im Falle schiefen Schnittes und zur Zeichenprobe kann man von Zeit zu Zeit eine Strecke $= \frac{m}{n}$ ihrer Originallänge auf dem homologen Strahl abtragen.

Wählt man irgend einen Punkt der Zeichenebene als Ähnlichkeitspunkt und verbindet ihn mit den Ecken der gegebenen Figur

AB... (s. Fig. 100), so liegen auf diesen Verbindungslinien, oder ihren Verlängerungen die homologen Ecken der zu zeichnenden ähnlichen Figur $\mathcal{A}\mathcal{B}...$ Ihre Entfernungen vom Ähnlichkeitspunkt stehen in demselben Verhältnis $m : n$ wie die Seiten, über-

Fig. 100.



dies sind alle homologen Seiten parallel. Man kann daher denselben Weg einschlagen wie vorhin und hat in den Ähnlichkeitsstrahlen weitere Hilfsmittel für bequeme und genaue Zeichnung.

Das soeben angegebene Verfahren führt zu einem einfachen mechanischen Reduktionsinstrument, dem „Storchnabel“ oder „Pantographen“ (vergl. Deutsche Mechanikerzeitung 1903, S. 125 ff., 1904, S. 244 ff. u. a. O.). Vier Flachsienen aus Holz oder Metall werden (bei primitiver Form lediglich durch Löcher und durchzusteckende Schrauben nach Fig. 101, für genauere Arbeiten dagegen nach Fig. 102) beliebig veränderlich derart miteinander verbunden, dass die Strecken

$$C_2 Z = C_1 C_3$$

$$C_1 C_2 = C_3 Z$$

$$\text{und } P C_2 : P C_1 = C_2 Z : C_1 F = m : n.$$

Es bilden infolge dieser Proportion die mit senkrechten Stiften versehenen Punkte P, Z und F immer eine Gerade, welche Winkel auch die Rahmen $P C_1$ und $F C_1$ miteinander einschließen mögen. Stellt man daher einen dieser Punkte, z. B. den Polstift P irgendwo fest, und umfährt mit einem zweiten, etwa dem Fahrstift F eine beliebige Figur, so beschreibt der Zeichenstift Z, der den Ähn-

Storchnabel-
(Pantograph).

lichkeitsstrahl PF in dem konstanten Verhältnis $m:n$ teilt, die gesuchte Figur.

Bei sehr starker Verkleinerung (auf $\frac{1}{50}$ und weniger) wird die Bewegung des Zeichenstifts unsicher. Für diesen Fall fertigt die Firma Ott in Kempten den Doppelpantograph, bei welchem der normale Zeichenstift des einen durch Verkoppelung den Fahrstift eines zweiten Pantographen bildet. Der Zeichenstift des letzteren liefert die stark verkleinerte Figur.

Handelt es sich um Planvergrößerung, so folgt man mit dem mittleren Stift Z der gegebenen Figur, alsdann zeichnet F die gewünschte Vergrößerung.

Zum Zweck der reinen Kopie kann man Z feststellen. Um-

Fig. 101.

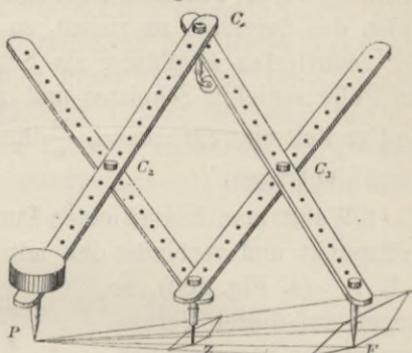
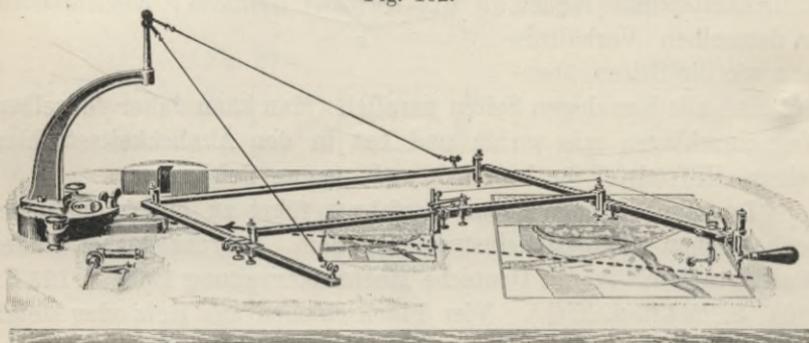


Fig. 102.



fährt man dann mit P die Figur, so liefert der Zeichenstift F das symmetrische Bild der ersteren, das man mittels Nadelstichen auf die abgewandte Seite des Zeichenpapiers als direkte Kopie übertragen kann.

B) Auf mechanischem Wege.

Das Original kann hiefür
in Strich- oder Kreidezeichnung, oder
als Halbtonbild (abgetuscht oder bunt bemalt)
ausgeführt sein.

Erfolgt die Vervielfältigung auf dem Weg a) des Drucks, so wird nach dem Original (Spiegelbild) zunächst die „Druckplatte“

hergestellt, von der unter Beigabe von Druckfarbe die Abzüge nach einem geeigneten Druckverfahren gewonnen werden.

Davon grundsätzlich verschieden sind **b) die chemischen Verfahren** der Kopie, oder Vervielfältigung durch Verwendung lichtempfindlicher Platten, Papiere etc. (Photographie, Lichtpause).

Eine Verbindung beider stellen **c) die photomechanischen Verfahren** dar, bei welchen der Übertrag der Zeichnung vom Original auf die Platte auf chemischem Wege erfolgt, während die Kopien mittels irgend eines Druckverfahrens gewonnen werden.

Beim

a) Druckverfahren

Druck-
verfahren.

unterscheidet man:

- α) den Hochdruck, oder Buchdruck,
- β) den Tiefdruck (Gravüre auf Stein-, Kupfer- oder Zinkplatten),
- γ) den Flachdruck (Steindruck, Lichtdruck).

α) Der Hochdruck:

Die Bildfläche ist auf der Druckform erhaben und steht frei über dem vertieften Grund. Beim Holzschnitt erfolgt dessen Vertiefung mittels des Stichels, beim Zink- oder Kupferliché durch Ätzung, gegen welche die durch den fetten Strich der Zeichnung gedeckten Stellen widerstandsfähig sind.)

Die Werkzeuge (Tampon, Walze) tragen die Druckfarbe nur auf die erhabene Bildfläche auf, der Grund bleibt rein. Der Abdruck von der Form erfolgt mittels Pressen durch senkrechten Druck.

β) Beim Tiefdruck

ist die Bildfläche in die Druckplatte (mittels des Grabstichels oder der Nadel) eingeschnitten. Das Verfahren beruht auf der i. J. 1798 von Alois Senefelder gemachten Entdeckung, wonach ein gewisser Stein, der bei Solnhofen auftretende Kalkstein, die Eigenschaft hat, sich glatt schleifen zu lassen und aufgebrachte Fettstoffe begierig aufzunehmen, während diese Fettaufnahme unterbleibt, wenn die Steinoberfläche mit einer schwach angesäuerten Lösung von Gummi arabicum präpariert wird.

Wird demnach die zu kopierende Zeichnung in eine derart präparierte Steinplatte mittels eines Stichels eingegraben, so wird dabei die präparierte Oberflächenschicht entfernt und der ursprüngliche, für Fette empfängliche Stein blossgelegt. Reibt man jetzt den Stein mit fetter Druckfarbe (Leinölfirnis und Farbstoff) ein, so wird diese von den präparierten hochstehenden, glattpolierten Flächen

abgestossen (bezw. ist leicht abzuwischen), während die vertieften Stellen die Farbe aufnehmen. Der Stein zeigt also die wiederzugebende Zeichnung in schwarzen (oder je nach der Druckfarbe gefärbten) Strichen oder Flächen, in welchen die Druckfarbe die eingegrabenen Vertiefungen ausfüllt. (Kupferplatten werden mittels Stichels oder Radierung ebenso bearbeitet, wie der Stein. Dagegen weist deren Oberfläche die Druckfarbe nicht chemisch ab, sondern muss mechanisch gereinigt werden.) Auf die „Druckplatte“ wird das für die Kopie bestimmte, angefeuchtete Papier gelegt. Zieht man beide zusammen durch die Handpresse, so gibt die Platte die Druckfarbe, d. h. die Zeichnung an das in die Vertiefungen gepresste Papier ab.

Zur Vervielfältigung von Plänen mit höherer Auflage wendet man, zumal wenn Masshaltigkeit verlangt wird,

γ) den Flachdruck

(direkter Übertrag der Zeichnung auf die Platte), an. Überträgt man eine Zeichnung in fetter Tusche direkt auf den eben geschliffenen, aber nicht präparierten Stein und behandelt ihn hernach mit der oben genannten ätzenden Lösung, so nehmen nur die von der Zeichnung bedeckten und dadurch gegen die ätzende Wirkung der Lösung geschützten Stellen die angeriebene fette Druckfarbe auf, während die geätzten Stellen der Steinoberfläche diese Farbe abstossen, bezw. von ihr leicht gereinigt werden können. Auch hier zeigt also der Stein die wiederzugebende Zeichnung in schwarzer Farbe. Letztere ist aber nicht vertieft, eher ist dies (infolge der Ätzung) mit dem Grund der Fall. Durch die Presse gezogen gibt der Stein an das aufgelegte (nicht angefeuchtete) Zeichenpapier die Zeichnung ab, es entsteht ein masshaltiges Bild in der Druckfarbe.

Statt das Bild direkt auf den Stein zu zeichnen, kann man es auch auf ein mit einer Kleister-, Gummi- oder Leimschicht überzogenes Papier bringen und dieses mit der Zeichenseite auf die Druckplatte legen (Autographie). Setzt man es alsdann einer Pressung aus und befeuchtet es auf der Rückseite, so löst sich die Kleisterschicht auf, welche das fette Bild trägt und dieses bleibt auf der fettempfänglichen Druckplatte haften. Diese benützt man dann, wie oben gezeigt.

Als Ersatz für den kostspieligen und schwerfällig zu behandelnden Stein verwendet man heute auch Platten aus Zink oder Aluminium, deren Oberfläche durch entsprechende Behandlung die angeführte Eigenschaft des Lithographiesteins erteilt wird.

Für die Auswahl unter den oben angedeuteten Druckverfahren ist der verlangte Grad von Feinheit der Kopie, ihre „Masshaltigkeit“ (Vermeidung des Papiereingangs), der Kostenaufwand, die grössere oder geringere Korrekturfähigkeit etc. bestimmend. Der Tiefdruck liefert die schärfsten Bilder, auch ist speziell der Kupferstich fast unbegrenzt korrekturfähig und in dieser Beziehung der Stein- oder Zinkgravüre weitaus überlegen. Andererseits schädigt die dabei nötige Anfeuchtung des Papiers die Masshaltigkeit. Man druckt deshalb auch Stiche, bezw. Gravüren auf Stein, Zink oder Aluminium über (Flachdruck), um die erforderliche Auflage auf der lithographischen Schnellpresse herstellen zu können.

Der Übertrag der Originalzeichnung auf die Kupfer-, Stein- oder Zinkplatte kann, wie oben gezeigt, mit Hilfe einer Handpause, oder auf photographischem Wege erfolgen.

Bei den

b) chemischen Kopierverfahren

wird die Zeichnung durch Belichtung auf ein lichtempfindliches Papier, bezw. eine mit lichtempfindlicher Masse (Chromsalze in Verbindung mit organischen Stoffen, wie Leim, Eiweiss, Gummi, Zucker etc.) übergossene Metallplatte projiziert. Jene Masse verliert durch die Einwirkung des Lichts, also an den im Original nicht überzeichneten Stellen, ihre Fähigkeit, sich in Wasser aufzulösen, während die von der aufgelegten Zeichnung durch schwarze, gelbe, oder rote Striche bezw. Farbe gedeckten Stellen diese Fähigkeit beibehalten.

Das Positiv-Lichtpauserverfahren erfordert ein auf Pauspapier mittels tiefschwarzer, nicht zu feiner Tuschklinien gezeichnetes Original. (Blasser Tusche lässt beim Belichten Strahlen durch und kopiert daher schlecht. Stark radierte Stellen verursachen auf dem Pauspapier wellenförmige Unebenheiten, werden daher im Kopierrahmen nicht genügend auf das lichtempfindliche Papier gepresst. Dies hat zur Folge, dass in der Kopie unterbrochene Linien entstehen.) Dieses Original wird mit der Bildseite gegen die Glasplatte glatt in den Kopierrahmen gelegt und mit dem lichtempfindlichen Papier — gestrichene Seite gegen das Original — bedeckt. Beide Papiere werden mittels des Rahmens fest aneinander gepresst und so dem Licht ausgesetzt. Die Belichtungsdauer ist je nach der Jahreszeit, sowie der Dicke und Farbe des Originals verschieden. Sie genügt, wenn der vom Pauspapier bedeckte Teil des Lichtpauspapiers fast ebenso weiss geworden ist, wie dessen über die Pause vorstehender Rand. Die belichtete Kopie kommt in ein Wasserbad,

in welchem die vom Licht nicht getroffenen Stellen sich schwarz färben, während der Grund weiss bleibt. Nicht völlig auskopierte Pausen zeigen mehr oder weniger ins Violette gehenden Hintergrund.

Dieses Positiv-Lichtpausverfahren, auch Tintenkopierverfahren genannt, beruht auf der Lichtempfindlichkeit gewisser Ferrisalze (Eisenoxydsalze), welche im Lichte in Ferrosalze (Eisenoxydulsalze) übergehen. Durch die darauf folgende Einwirkung von Gallussäure, welche durch eine besondere Methode in das Papier eingerieben wird, entsteht mit Ferrisalzen ein schwarzer Niederschlag (Tinte) während die Ferrosalze sich nicht oder bei Luftzutritt doch nur langsam mit der erwähnten Säure färben.

Bei sorgfältiger Behandlung und Auswässerung der Kopien bleiben die Striche ziemlich lange schwarz, doch sind sie nicht unbegrenzt haltbar, mit der Zeit blassen sie ab. Auch leidet die Originalpause darunter, dass sie bei jeder Kopie benützt wird.

Ist daher eine grössere Anzahl von Kopien notwendig, so ist es besser, sich zur Schonung des Originals des Sepia-Lichtpausverfahrens, unter Verwendung eines Silbereisenpapiers, zu bedienen. Das Original, das auch auf Zeichenpapier hergestellt sein darf, wird umgekehrt, d. h. mit der Bildseite gegen die lichtempfindliche Seite des erwähnten Silbereisenpapiers gelegt. Durch Belichtung und Wässerung erhält man ein mit weissen Linien auf dunkelbraunem Grunde erscheinendes verkehrtes Negativ. Von diesem lassen sich beliebig viele Positive mit braunen oder blauen Linien auf weissem Grunde herstellen, je nachdem man für diesen Zweck das oben genannte Sepiapapier oder das blausaure Eisenpapier verwendet.

Als dritte Art der Vervielfältigung auf diesem Wege kommen noch die bekannten Blaupausen in Betracht.

Dieses Verfahren gibt nach Zeichnungen negative Kopien, d. h. Kopien mit weissen Linien auf blauem Grunde und ist daher für geodätische Zwecke wenig brauchbar, wenn es auch den Vorteil der rascheren Kopierfähigkeit besitzt.

Der chemische Vorgang beruht hier darauf, dass auf dem mit einem Gemisch von Ferrisalz und Ferrizyankalium bestrichenen Papier nach der Belichtung im Wasserbad ein Niederschlag von Berlinerblau entsteht, durch Reduzierung des Ferrisalzes in Ferrosalz.

Alle diese Verfahren weisen sehr starken Papiereingang auf, weil sie nach der Belichtung in Wasser behandelt werden müssen und geben daher verzerrte Bilder.

Diesen Missstand vermeiden die unter verschiedenen Namen bekannten direkten Kopierverfahren z. B.:

der Gelatinedruck. Er bedingt wieder ein auf möglichst durchsichtiges Pauspapier gezeichnetes Original. Dasselbe wird auf blausaures Eisenpapier kopiert. Die Kopie wird, ohne sie zu wässern, auf eine mit eisenhaltiger Gelatinemasse übergossene Zinkplatte abgeklatscht. Diese Gelatinemasse hat die Eigenschaft, im Sinne des Lithographiesteins zu wirken, d. h. sie nimmt infolge einer Gerbung durch Ferrizyankalium an den unbelichteten Stellen Druckfarbe an und stösst sie andererseits nach dem Prinzip des Stein-drucks an den belichteten Stellen ab, weil die vom Lichte getroffenen Stellen erhärtet worden sind und so die Gelatinemasse beim Überklatschen nicht mehr beeinflussen (gerben).

Für die von Hand zu gewinnenden Abdrücke eignet sich jedes glatte Zeichen-, Schreib- oder Pauspapier, doch ist ihre Zahl auf 10—20 beschränkt.

Die Abzüge sind masshaltig, dagegen sind Korrekturen und Nachträge auf der Gelatinemasse ausgeschlossen.

Sind höhere Auflagen erforderlich und stellt man höhere Anforderungen an die Reinheit der Striche, so verwendet man den sogenannten Gisal-, Faksimile- etc. Druck.

Das auf Paus-, oder holzfreiem Zeichenpapier hergestellte Original wird durch Belichtung auf eine lichtempfindliche (mit lichtempfindlicher Lösung, z. B. doppeltchromsaurem Ammonium, übergossene) Zink- oder Aluminiumplatte übertragen. Ein auf die Platte gerichteter leichter Wasserstrahl löst die dabei vom Licht nicht getroffenen Stellen des Aufgusses und schwemmt sie weg, während die vom Licht getroffenen Stellen erhärten und auf der Platte haften bleiben. Nun wird die Platte mit fetter Druckfarbe eingerieben, wobei letztere in die freigelegten Stellen der Metallplatte eindringt. In fließendes Wasser gebracht, löst sich schliesslich die noch auf der Platte haftende Lösung auf und wird entfernt, so dass die Zeichnung schwarz auf dem Metallgrund der Platte steht.

Um die Abstossung der Druckfarbe von den leeren Stellen der Platte zu bewirken, wird letztere nun mit einer schwach angesäuerten Lösung von Gummi arabicum und Wasser leicht angeätzt und ist damit zum Druck fertig.

Von diesen Platten lässt sich auf der lithographischen Schnellpresse eine beliebige Zahl von Drucken abnehmen, die masshaltig und dem Original völlig getreu sind. An Schönheit kommen sie einem guten Umdruck von einem Stich oder einer Gravüre nahezu

gleich. Nachträge und Korrekturen lassen sich in beschränktem Mass ausführen.

Vollkommener in letzterer Hinsicht, sowie in Beziehung auf etwaige Änderung des Massstabverhältnisses (Planeingang) sind:

c) die photomechanischen Verfahren.

1. Die Heliogravüre.

Ein verkehrtes photographisches Negativ der bis ins kleinste Detail durchgeführten Originalzeichnung wird durch Belichtung auf eine mit einer Chromsalzlösung übergossene versilberte Kupferplatte übertragen. Bei der darauffolgenden Wässerung werden die nicht belichteten Stellen der Salzschicht aufgelöst und von der Platte weggeschwemmt, während diese an den anderen Stellen erhärtet. Von der so erhaltenen Reliefplatte fertigt man auf galvanischem Wege eine Tiefdruckplatte in Kupfer.

Der Übertrag des Bildes auf die Platte mittels der Photographie gestattet, im Gegensatz zu den früher beschriebenen Verfahren, die Anwendung jeder beliebigen proportionalen Vergrößerung oder Verkleinerung des Originalbildes (z. B. auch Papierengang).

Ähnlich ist die Behandlung mittels

2. der Photolithographie.

Hiebei wird das photographische Negativ des Bildes mittels lichtempfindlichen Chromgelatinepapiers, auf welches die Zeichnung kopiert und mit fetter Farbe eingeschwärzt ist, oder direkt auf die Platte übertragen. Letzteres Verfahren ist in Rücksicht auf die Masshaltigkeit und die Schärfe der Linien vorzuziehen und mag nachstehend kurz angegeben sein: Ein verkehrtes photographisches Negativ wird durch Belichtung auf eine mit einer Chromsalzlösung präparierte Aluminium- oder Zinkplatte übertragen. Diese wird in dunklem Raum mit Druckerschwärze angerieben und sodann in ein Wasserbad gebracht, wobei sich an den vom Licht nicht getroffenen Stellen die Farbe samt der Salzschicht ablöst. Die Platte enthält also dann nur das Spiegelbild des Originalplans, und bedarf lediglich noch einer Ätzung, um druckfertig zu sein. Die lithographische Presse liefert hievon, wie bei der Federzeichnung oder der Autographie, direkt, d. h. ohne Umdruck, masshaltige Trockendrucke in unbegrenzter Zahl.

Ein weiteres Verfahren für die Anfertigung von Tabellen, Übersichtsplänen, graphischen Darstellungen etc. bildet, wenn es sich um grosse Auflagen handelt, die Anwendung der

3. Zinkhochätzung,

einer auf photomechanischem Weg hergestellten in der Buchdrucker-
presse verwendbaren Druckform (Cliché).

Mit den bisher angeführten Verfahren lassen sich kolorierte
Flächen nicht wiedergeben. Durch Einschaltung von Glasplatten,
auf welchen feine, parallel und nahe beieinander verlaufende, schwarze
Linien in sich kreuzenden Richtungen gezogen sind „Rasterplatten“
in die photographische Kamera ist es aber möglich, die geschlossenen
Halbtöne der Photographie in Punkte aufzulösen, die durch weisse
Zwischenräume getrennt, in der Kopie den Eindruck des Halbtons
oder Kolorits erzeugen. Das derart bei der Aufnahme in Punkte
aufgelöste photographische Negativ wird zur Herstellung einer Druck-
form für den Buch- oder Steindruck verwendet.

Dieses Verfahren der

4. Autotypie

ist allerdings kaum für die Wiedergabe geometrischer Pläne ge-
eignet, weil es deren Schriften und Linien gleichfalls auflöst, wohl
aber für diejenige von Ansichten, architektonischen Bildern etc. Sie
liefert Druckformen sowohl für den Stein- als auch für den Buchdruck.

Ist das Original in Farben ausgeführt, so verwendet man zur
Vervielfältigung den

5. Lichtdruck,

ein photomechanisches Verfahren, bei welchem die belichtete Chrom-
gelatineschicht direkt als Druckplatte benützt wird und die Farben
des Originals einfarbig, aber in ihren Tonarten wiedergibt.

Verlangt man eine farbige Wiedergabe der verschiedenen
Farben des Originals durch

6. Farbendruck,

so erfordert jede einzelne Farbe eine besondere (je nur mit der
für sie gewählten Druckfarbe angeriebene) Druckplatte. Diese wird
ganz ebenso behandelt, wie im vorhergehenden gezeigt wurde.

Sind auf die Pläne Flächentöne einzudrucken, so geschieht
dies auf dem Wege des lithographischen Farbendrucks. Der Ab-
druck auf einem festen, masshaltenden Papier wird mit Rötel ein-
gestäubt, der an den fetten Stellen der Druckfarbe haften bleibt
und so auf die für den Flächenton bestimmte Stein-, Zink- oder
Aluminiumplatte abgeklatscht werden kann. Der jetzt nur lose
auf der Platte sitzende rote Staub gibt die Ausdehnung der Flächen-
töne und kann nach Deckung der Konturen leicht abgewischt werden.
Die farbig zu gebenden Flächen werden jetzt mit lithographischer
Tusche gedeckt und wie bei der Photolithographie weiter behandelt.

Durch Strich- oder Punkttöne (Raster) lassen sich noch Abstufungen in den Farbwerten erreichen.

Zieht man einen Vergleich zwischen den vorgeführten Reproduktionsverfahren, so zeigt sich in Rücksicht auf die Feinheit der Kopie der Kupferstich und die Gravur auf Stein unübertroffen.

Dagegen weisen die photomechanischen Verfahren folgende Vorzüge auf:

1. Das zeitraubende Übertragen der Zeichnung von Hand fällt weg.
2. Übertragungsfehler sind ausgeschlossen.
3. Das Gravieren, bezw. Stechen fällt weg.
4. Das Lesen der Korrekturen beschränkt sich auf ein Minimum.
5. Die Zeichnung kann in beliebigem Verhältnis vergrößert oder verkleinert werden. Bei Verkleinerung nimmt die Strichreinheit und -Schärfe zu.
6. Die Kosten wie auch der Zeitaufwand für die Herstellung der Druckplatte sind erheblich niedriger.

Kapitel VI.

Rechenhilfsmittel.

(Eine eingehende Behandlung dieses Gegenstandes vergl. u. a. Mehmke, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I, S. 938—1079.)

Die Umarbeitung der gemessenen Strecken und Winkel in andere Formen — Koordinaten, Richtungswinkel etc. — sowie zur Auswertung von Flächen- und Körpermassen erfordert ausgedehnte Rechnungen, deren Abkürzung unter Verminderung der geistigen Beanspruchung bezw. möglicher Ersetzung durch mechanische Vorrichtungen wünschenswert ist. Hiezu dienen verschiedenerlei Kunstgriffe und Hilfsmittel. Wir unterscheiden:

1. Methoden zur Erleichterung und Sicherung der direkten Rechnung.
2. Tafelwerke.
3. Mechanische Hilfsmittel.
4. Graphische Tafeln.

§ 22. Methoden zur Erleichterung und Sicherung der direkten Rechnung.

Eine Vorführung der verschiedenen Wege für vollständige, wie auch für abgekürzte Multiplikation, Division etc. möge hier unterbleiben. Dagegen sei gezeigt:

1. Die Einführung dekadischer Ergänzungen für die Dekadische
Ergänzungen.
Addition und Subtraktion.

Die Addition einer Anzahl teils positiver, teils negativer Summanden erfolgt zumeist getrennt für die Gruppe der positiven und der negativen Summanden je für sich, und nachträgliche Bildung des Unterschieds beider Gruppen. Diese Behandlung erfordert aber neben dreiteiliger Summation eine Trennung der Summanden nach ihrem Vorzeichen, also doppelte Vertikalspalten. Die hiedurch bedingte Tabellerweiterung wird nach dem Vorgang der preussischen Landesaufnahme vermieden durch Zerlegung jedes negativen Summanden in die Differenz zweier Zahlen, deren Subtrahend eine Potenz von 10, und deren Minuend die dekadische Ergänzung des ursprünglichen negativen Summanden zu dieser Potenz ist. Der negative Summand wird alsdann durch eine einzige negative Einheit an passender Stelle ersetzt, die bei der Addition leicht zu berücksichtigen ist.

Als Zeichen für sie wurde ein liegendes Kreuz an der betreffenden Stelle eingeführt. Dies berücksichtigend schreiben wir jetzt

statt —	26243,18	jetzt ×	73756,82
„ —	751,08	„ ×	248,92
„ —	6,94	„ ×	3,06
„ —	0,84	„ ×	,16
„ —	0,04	„ ×	,6

Beispiel: Man bilde die Summe nachfolgender Zahlen:
auf gewöhnliche Weise mit Benützung dekadischer

	+	—	Ergänzungen
	48,92		48,92
		364,08	× 635,92
	712,94		712,94
		815,08	× 184,92
	1348,96		1348,96
		7,66	× 2,34
		0,18	× ,82
	2110,82	1187,00	923,82
	<div style="display: flex; justify-content: center; align-items: center;"> } 923,82 </div>		

2. Genäherte Division mit Zahlen oder Quotienten nahe bei 1, 10 etc.

Die algebraische Durchführung der Division führt zu folgenden Ausdrücken:

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Für sehr kleines} \\ x \text{ kann man da-} \\ \text{her setzen:} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{1+x} \sim 1 - x \\ \frac{1}{1-x} \sim 1 + x \end{array}$$

$$(b) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{a+x} &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \left\{ 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \dots \right\} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \dots \\ &\text{Für sehr kleines } x \text{ --- } \frac{1}{a+x} \sim \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} \\ \frac{1}{a-x} &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \left\{ 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots \right\} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \dots \\ &\text{Für sehr kleines } x \text{ --- } \frac{1}{a-x} \sim \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} \end{aligned} \right.$$

$$(c) \left\{ \begin{aligned} \frac{a}{a+x} &= \frac{1}{1+\frac{x}{a}} \sim 1 - \frac{x}{a} \\ \frac{a}{a-x} &= \frac{1}{1-\frac{x}{a}} \sim 1 + \frac{x}{a} \end{aligned} \right.$$

$$(d) \left\{ \begin{aligned} \frac{a}{1+x} &= a \cdot \frac{1}{1+x} \sim a(1-x) \\ \frac{a}{1-x} &= a \cdot \frac{1}{1-x} \sim a(1+x) \end{aligned} \right.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \frac{1}{0,9992} &\sim 1,0008 \\ \frac{1}{100,64} &= \frac{1}{100 \times 1,0064} \sim \frac{0,9936}{100} \text{ oder } \sim \frac{1}{100} - \frac{0,64}{10000} \\ \frac{1}{1,0061} &\sim 0,9939 & \frac{67,32}{1,000035} &\sim 67,32 \times 0,999965 \\ \frac{1}{999,38} &= \frac{1}{1000 \times 0,99938} \sim \frac{1,00062}{1000} & \frac{265,74}{999,622} &\sim \frac{265,74 \times 1,000378}{1000} \\ \text{oder } &\sim \frac{1}{1000} + \frac{0,62}{1000000} \\ \frac{384,26}{384,32} &\sim 1 - \frac{0,06}{384} \sim 0,999844 \quad (\text{Mit Rechenschieber-Ausrechnung des zweiten Summanden}) \\ \frac{593,652}{593,604} &\sim 1 + \frac{0,048}{594} \sim 1,0000808 \quad (\text{Mit Rechenschieber-Ausrechnung des zweiten Summanden}) \end{aligned}$$

3. Genähertes Ausziehen der Quadratwurzel von Zahlen nahe bei 1.

Die Anwendung des binomischen Lehrsatzes liefert:

$$(e) \left\{ \begin{aligned} \sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots \\ &\text{und für kleines } x \text{ --- } \sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2} \\ \sqrt{1-x} &= (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \dots \\ &\text{und für kleines } x \text{ --- } \sqrt{1-x} \sim 1 - \frac{x}{2} \end{aligned} \right.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \sqrt{1,0064} &\sim 1,0032; \quad \sqrt{100,64} = \sqrt{1,0064 \times 100} \sim 10 \times 1,0032; \\ \sqrt{0,999982} &\sim 0,999991; \\ \sqrt{9999,82} &= \sqrt{10000 \times 0,999982} \sim 100 \times 0,999991. \end{aligned}$$

4. Successive Annäherung an einen Wurzelwert.

(Berechnung des Kopfmasses k aus der grossen Kathete Δx und der kleinen Kathete Δy eines rechtwinkligen Dreiecks, oder Berechnung der grossen Kathete Δx aus dem Kopfmass k und der kleinen Kathete Δy). Allgemein ist:

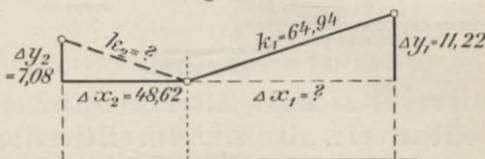
$$k^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\text{also } k^2 - (\Delta x)^2 = (k + \Delta x)(k - \Delta x) = (\Delta y)^2$$

$$(f) \quad \underline{\underline{k - \Delta x}} = \frac{(\Delta y)^2}{k + \Delta x} \sim \frac{(\Delta y)^2}{2k} \sim \frac{(\Delta y)^2}{2(\Delta x)}$$

Fig. 103.

Der Unterschied zwischen dem Kopfmass und der grossen Kathete kann hienach mittels des Rechenschiebers (s. § 24) zunächst genähert aus einer der hinteren Formeln (f) bestimmt werden.



Ihn von $2k$ abziehend erhält man den Nenner $(k + \Delta x)$ zu $2(\Delta x)$ zuschlagend und damit auch wieder den Unterschied $(k - \Delta x)$ schärfer u. s. f. Beispiele siehe beim „Rechenschieber“.

5. Neunerprobe für die verschiedenen Rechenoperationen.

Eine beliebige, mehrstellige, nach der arabischen Schreibweise geschriebene Zahl $a b c d e$ stellt die Summe von e Einern, d Zehnern, c Hundertern, b Tausendern, a Zehntausendern dar, heisst also ausgeführt: $a \times 10000 + b \times 1000 + c \times 100 + d \times 10 + e$. Teilbarkeit durch 9.

$$\begin{aligned} \text{Da nun } 10000 &= 9999 + 1 \\ 1000 &= 999 + 1 \\ 100 &= 99 + 1 \\ 10 &= 9 + 1 \end{aligned}$$

so lässt sich obige Zahl auch schreiben

$$\begin{aligned} &a (9999 + 1) + b (999 + 1) + c (99 + 1) + d (9 + 1) + e \\ &\quad \text{Klammer I} \qquad \qquad \qquad \text{Klammer I'} \\ &= (9999 a + 999 b + 99 c + 9 d) + (a + b + c + d + e) \end{aligned}$$

Ebenso können wir die nach arabischer Schreibweise geschriebene Zahl $m n o p$ auseinanderziehen in:

$$\begin{aligned} &m (999 + 1) + n (99 + 1) + o (9 + 1) + p \\ &\quad \text{Klammer II} \qquad \qquad \qquad \text{Klammer II'} \\ &= (999 m + 99 n + 9 o) + (m + n + o + p) \end{aligned}$$

Die erste Klammer ist in beiden Fällen durch 9 teilbar.

Jede der beiden Zahlen ist es also gleichfalls, wenn die zweite Klammer, d. h. die „Quersumme“ ihrer Ziffern durch 9 teilbar ist, oder: Wenn man von einer Zahl ihre Quersumme ab-

zieht, so ist der Rest durch 9 teilbar. Folglich ist auch die Summe zweier, oder beliebiger Zahlen durch 9 teilbar, wenn man von jedem Summanden seine Quersumme (oder wenigstens deren Überschuss über ein Vielfaches von 9), d. h. wenn man von der Summe der Zahlen die Summe der Quersummen (oder wenigstens ihren Überschuss über ein Vielfaches von 9) abzieht.

Beispiel:	46 815	Quersumme 24.	Ihr Überschuss über ein Vielfaches von 9 ist	6
	7 822	" 19	" " "	1
	935	" 17	" " "	8
	<u>116 712</u>	" 18	" " "	<u>0</u>
$\Sigma =$	<u>172 284</u>	Summe der Quersummen } 78	" " "	6
hievon ab den Überschuss der Summe der Quersummen über ein Vielfaches von 9	} 6			
	<u>172 278.</u>			

Dieser Rest muss, als Probe für richtige Addition, durch 9 teilbar sein, also eine durch 9 teilbare Quersumme besitzen.

Im Fall der Subtraktion ist die Quersumme des Subtrahenden von der des Minuenden abzuziehen.

Analog ist die Neunerprobe für Multiplikation:

Von dem Produkt der nach arabischer Schreibweise geschriebenen beiden Faktoren

$abcde \times mnop = (\text{Klammer I} + \text{Klammer I}') (\text{Kl. II} + \text{Kl. II}')$
 ist in der Ausführung jedes Teilprodukt durch 9 teilbar, das die Klammer I, oder Klammer II als Faktor enthält. Folglich ist es auch das Gesamtergebn $abcde \times mnop$ und damit seine Quersumme, sobald auch der letzte Summand
 (Klammer I' \times Klammer II'),

d. h. das Produkt beider Quersummen durch 9 teilbar ist.

Trifft dies nicht zu, so muss das Produkt der beiden Faktoren-Quersummen, als einziger nicht durch 9 teilbarer Summand, das nächstgelegene Vielfache von 9 um ebensoviel überschreiten, als das Schlussresultat, also auch die Quersumme des Schlussresultats es tut.

Dieselbe Probe gilt natürlich für jede Zeile der ausgeführten Multiplikation.

Beispiel:	38653	Quersumme 25.	Ihr überschuss über ein Vielfaches von 9, d. h. „der Neunerrest“ ist	7
	<u>973</u>	" 19		1
	<u>115959</u>	" 30	$3 = \overline{7} \times 3 - 2 \times 9$	
	270571	" 22	$4 = \overline{7} \times 7 - 5 \times 9$	
	347877	" 36	$0 = \overline{7} \times 9 - 7 \times 9$	
	<u>37609369</u>	" 43	$7 = \overline{7} \times 1 - 0 \times 9 = \underline{7}$	

Neunerprobe für Addition.

Neunerprobe für Multiplikation.

Die Neunerprobe für die Division geht aus derjenigen Neunerprobe für Division. für die Multiplikation hervor. Die Begriffsbestimmung:

Dividend = Divisor \times Quotient + Rest ergibt

a) für Rest = 0 (Division geht auf)

Neunerrest der Quersumme des Dividenden = Neunerrest des Produkts aus den Quersummen von Divisor und Quotient;

b) für Rest nicht = 0 (Division geht nicht auf)

Neunerrest der Quersumme des Dividenden = Neunerrest des Produkts aus den Quersummen von Divisor und Quotient + Neunerrest des Restes.

Auch hier lässt sich jeder Schritt der Rechnung für sich prüfen.

Beispiel zu a) mit Beschränkung auf die Schlussprobe:

Neunerrest = 5 Neunerrest = 7 Neunerrest = 2

75218738 : 38653 = 1946

36565

17780

23191

00000

Probe: $2 \times 7 -$ nächstvielfachem von 9
 $= 14 - 9 = 5 =$ Neunerrest des
 Dividenden.

Beispiel zu b) mit schrittweiser Probe:

Neunerrest = 6 Neunerrest = 5 Neunerrest

57649758 : 2435 = 23675 4 6 5

894

1644

1837

1330

→

Neunerrest = 5
 Neunerrest = 0
 Neunerrest = 2

 Neunerrest = 2

1133 →	$5 \times 5 + 8 = 33.$	Neunerrest = 6	} wie beim Dividenden.
1590 →	$0 \times 5 + 6 = 6.$	" = 6	
1290 →	$6 \times 5 + 3 = 33.$	" = 6	
725	$2 \times 5 + 5 = 15.$	" = 6	

⋮

Die Begriffsbestimmung für das Radizieren

Radikand = Wurzel ^{Exponent} + Rest

ergibt für die Quadratwurzel

Radikand = Wurzel \times Wurzel + Rest, also

Neunerrest des Radikanden = (Neunerrest der Wurzel)² Neunerprobe für Quadratwurzel.
 + Neunerrest des Restes.

Beispiel für rationale Wurzel:

$$\begin{array}{r} \text{Neunerrest } \underline{7!} \\ \sqrt{2062096} = 1436 \\ 2 \quad 1 \\ 28 \quad 10 \\ 286 \quad 171 \end{array}$$

0000 (Neunerrest der Wurzel)² = 5² = 25 hat den Neunerrest 7, wie der Radikand.

Beispiel für irrationale Wurzel:

$$\begin{array}{r} \text{Neunerrest } \underline{3!} \\ \sqrt{48379521} = 695553 \\ 12 \leftarrow 12 \\ 138 \leftarrow 76 \\ 3910 \leftarrow 770 \end{array} \quad \text{Probe:}$$

13910 ← 7496	(Neunerrest v. 6955) ² + 8 = 49 + 8 = 57,	Neunerrest 3	}	wie beim Radikanden.
139110 ← 54075	(. 69555) ² + 3 = 9 + 3 = 12,	„ 3		
1234191	(. 695553) ² + 3 = 36 + 3 = 39,	„ 3		

Ähnlich wie die Neunerprobe sind die 11er, 37er, 101er Probe. Eine untrügliche Garantie gegen Rechenfehler bietet jedoch keine derselben. Zum Beispiel zeigt die Neunerprobe weder Stellenversetzungen, noch die Verwendung einer unrichtigen Faktorzahl an, wenn der andere Faktor den Neunerrest 0 hat.

Man wird daher der Neunerprobe noch eine zweite ergänzende Probe, z. B. Rechenschieberrechnung zugesellen.

§ 23. **Tafelwerke.**

Für häufig vorkommende Beziehungen zwischen mehreren veränderlichen Grössen kann man deren einander entsprechende Zahlenwerte ein für allemal gewissermassen auf Vorrat berechnen und, in Zahlentafeln eingeordnet, der bequemen und allgemeinen Verwendung zugänglich machen.

Diesen Zahlentafeln ist folgende Einrichtung gemeinsam:

Die Werte der einen Veränderlichen, des Arguments, die man in gleichen runden Intervallen fortschreiten lässt, füllen die linke Vertikalspalte, den „Einlauf“, aus, die zugehörigen Werte der zweiten Veränderlichen, die Funktionswerte, stehen rechts dabei:

Einargumentige
Tafeln.

Argument	Funktion
0	0,20
1	0,57
2	0,82
3	1,06

Will man die Argumentintervalle auf $\frac{1}{10}$ der vorherigen reduzieren, wodurch obige Tafel zu lang und schwerfällig würde, so wird der Einlauf auch auf die Köpfe der zehn nebeneinander angeordneten, zur Aufnahme der Funktionswerte bestimmten Vertikalspalten ausgedehnt. Der zu einem aus Einern und Zehnteln gebildeten Argument gehörige Funktionswert findet sich dann im Schnittpunkt der zu den ersteren gehörigen Horizontal- bzw. Vertikalspalten.

Beispiel.

Argument	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
0										
1	Funktionswerte									
2										

Wächst die Zahl der Argumente, von denen jeder Funktionswert abhängig ist, auf zwei, so kann man die runden Werte des einen Arguments links in vertikaler, die des andern oben in horizontaler Reihe und den jedem Argumentpaar zugehörigen Funktionswert im Schnittpunkt der durch die beiden Argumentwerte bestimmten Reihen anordnen.

Zwei-argumentige Tafeln.

Beispiel: Kilometerzeiger (Ortsentfernungen in km)

Bezirksorte	Cannstatt	Fellbach	Hedelfingen	Lobenroth	Mühlhausen	Münster	Obertürkheim	Öffingen	Rohracker
Cannstatt	—	5,0	6,8	14,7	6,5	2,2	6,5	6,2	8,7
Fellbach	—	—	6,8	9,0	6,6	7,2	6,5	4,4	8,7
Hedelfingen	—	—	—	15,9	13,3	9,0	1,6	11,1	1,9
Lobenroth	—	—	—	—	20,6	16,3	15,6	13,5	17,9
Mühlhausen	—	—	—	—	—	4,3	13,0	5,1	15,2
⋮									

Ebenso Taglohntabelle etc.

Die vorgeführte Anordnung ist nur durchführbar, wenn die Zahl der beiderseits in Betracht kommenden Argumentwerte klein ist. Kommen für eines der beiden Argumente viele Werte in Betracht,

so ordnet man das andere in horizontaler Reihe oben an und zerlegt die Tafel durch vertikale Trennungsstriche in die nötige Zahl von Seiten. Ist die Zahl von Werten bei beiden Argumenten gross, so dass sowohl in horizontaler als in vertikaler Richtung eine Seite der Tafel nicht ausreicht, so löst man die letztere in so viele Einzel tafeln auf, als das eine von beiden Argumenten Werte annimmt. (Beispiel: Die Crellesche Multiplikationstafel.) Jeder dieser Werte gilt dann für die ihm zugehörige Einzeltafel als Konstante und die Tafel nimmt die Seite 163 gezeigte Form an.

Hängen die Funktionswerte gleichzeitig von mehr als zwei unabhängigen veränderlichen Argumenten ab (Körperinhalte, Zins etc.), so ist ihre Unterbringung in Zahlentafeln dann unzweckmässig, wenn für alle diese Veränderliche eine grosse Zahl von Werten in Frage kommt. Bei geringer Zahl von Werten einer der Veränderlichen zerfällt das Zahlenwerk in eine ebenso grosse Zahl zweiargumentiger Einzel tafeln.

Sind die Funktionswerte, wie dies die Regel sein wird, Irrationalzahlen, so muss man sich bei Anlegung der Tafeln entscheiden, auf wieviele Dezimalstellen jeder von der ersteren berechnet und angegeben werden will.

Man hat demnach zu unterscheiden: einerseits zwischen Tafeln mit 1, 2 und mehr Argumenten, andererseits zwischen 3-, 4-, 5-, 6- und mehrstelligen Tafeln.

Für die Grösse der Argumentintervalle ist die Art der darzustellenden Funktion und die Stellenzahl massgebend, mit der ihre Werte angegeben werden wollen.

Ist die Funktion linear ($f_x = m \cdot x + n$), so könnten die Argumentintervalle an sich beliebig gross sein. Die genaue Einschaltung (Interpolation) des Funktionswerts zu einem beliebigen, nicht in der Tafel direkt angegebenen Argument, würde lediglich eine Proportionalrechnung beanspruchen, die durch Beifügung einer einzigen Proportionaltafel für das Fortschreiten der Funktionswerte auf $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, des Argumentintervalls in eine einfache Addition umgestaltet werden könnte. Trotzdem wird man auch hier die Argumentintervalle der Bequemlichkeit halber (möglichst kleiner Proportionalzuschlag) um so weniger gross machen, je grösser die verlangte Zahl von Dezimalstellen ist.

Noch stärker beschränkt ist man in der Grösse der Argumentintervalle bei Darstellung einer nicht linearen Funktion (Funktion höherer algebraischer Ordnung, transzendente Funktion), namentlich

Tafel
mit mehr als
zwei
Argumenten.

Stellenzahl.

Argument-
intervalle.

an denjenigen Stellen, an denen sich die Funktionswerte $y = (f_x)$ besonders unregelmässig verändern. Unter keinen Umständen dürfen die Argumentintervalle so gross sein, dass die lineare (proportionale) Interpolation zwischen zwei Tafelwerte herein irgendwo einen Funktionswert y liefert, der um mehr als $\frac{1}{2}$ Einheit der letzten Stelle unrichtig ist. (In Fig. 104, wo die zusammengehörigen Argument- und Funktionswerte als rechtwinklige Koordinaten aufgetragen sind, würde z. B. die lineare Interpolation zwischen die normalen Argumente $x = 9$ und $x = 10$ herein Funktionswerte y bis zur punktierten Geraden, statt zur Funktionskurve liefern, also erhebliche Ungenauigkeiten zur Folge haben.)

Aus diesem Grund ist es oft zweckmässig, die Argumentintervalle gruppenweise zu verändern.

Zu den 1-argumentigen Tafeln gehören:

Die Umwandlungstafeln für Winkel-, Längen-, Flächen-, und Körpermasse, für Geld etc.

Die Quadrattafeln (Gauss, Joppen, Ludwig Zimmermann, Ehrhardt u. a.), und die Kubiktafeln. Die Tafeln für die goniometrischen Funktionen und deren Logarithmen, die Logarithmentafeln etc.

Letztere werden in der Geodäsie am häufigsten gebraucht und sind in 3, 4, 5, 6, 7 und mehr Dezimalstellen für alte und neue Kreisteilung (Vega, Callet, Borda-Delambre, Wiberg, Bremiker, Plansoles, Jordan, Gauss, Wittstein, Schlömilch, Wild, Göschen, Treutlein u. a.) im Buchhandel.

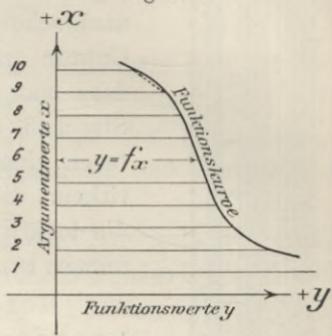
Zu den 2-argumentigen Tafeln gehören:

Die Kilometerzeiger, die Multiplikations- (Crelle, Ernst, Dr. H. Zimmermann, Ludwig Zimmermann, Henselin, Cario-Schmidt u. a.), Koordinaten- (Gauss, Defert, Clouth, Löwe, Ulfers, Dittmann, Reissig, Fenner und Reutzel, Seyffert u. a.) und Tachymetertafeln (Jordan, Jadanza u. a.), die Tafeln für die höchstens zulässigen Messungsfehler in verschiedenen Geländeklassen, die Tafeln für Kreisbogenabsteckung (Hanhart und Waldner, Knoll-Weitbrecht, Sarrazin-Overbeck, Jordan, Winkel, Kröhnke, Kauffmann, Schulze, Hecht, Morawitz, Gysin u. a.), für barometrische Höhenmessung (Schoder, Jordan u. a.); die Taglohnlisten etc.

3-argumentige Tafeln mit beschränkter Ausdehnung des einen oder anderen Arguments sind:

Die Zinstafeln, Tafeln für die Inhaltsberechnung der Bauhölzer etc.

Fig 104.



Die Beschreibung der speziellen Einrichtung dieser Tafelwerke und ihrer Anwendung darf hier übergangen werden.

§ 24. Mechanische Rechenhilfsmittel.

Das einfachste, für die allgemeine Anwendung geeignete, mechanische Rechenhilfsmittel ist

1. Der „Logarithmische Rechenstab“, oder „Rechenschieber“. (Vergl. u. a. Hammer, „der log. Rechenschieber“, Stuttgart 1908). Dem Wesen nach schon um 1620 von dem englischen Astronomen Gunter erfunden, beruht er auf dem Gedanken, dass man durch passendes Aneinanderreihen von Strecken, deren Länge den Logarithmen der Faktoren eines Produkts entsprechen, die zum Logarithmus dieses Produkts gehörige Strecke, und falls die logarithmischen Strecken mit den zugehörigen numeri beziffert sind, das Produkt selbst, erhält.

Beschreibung a) des gewöhnlichen Rechenschiebers (s. Fig. 105 a und b).

Er besteht aus einem 26 cm langen Stab S mit zwei Nuten N_1 (s. Fig. 105 b), in welchen die Zunge (der Schieber) Z, verschoben werden kann. Die oberen, in einer Ebene liegenden Flächen von Stab und Zunge tragen logarithmische Teilungen und zwar wird die Teilungslänge von 25 cm von den einander kongruenten Teilungen A und B zu zweimaliger Darstellung der Logarithmen der Zahlen 1—10

$$(\log 1 = 0, \log 10 = 1 = 12,5 \text{ cm})$$

(oder zur einmaligen Darstellung der Logarithmen von den Zahlen 1 bis 100) benutzt. Die beiden unteren, ebenfalls einander kongruenten Teilungen C und D bringen auf derselben Länge die Logarithmen der Zahlen 1—10 nur einmal, (also im doppelten Massstab) zur Darstellung. Für Multiplikationen, Divisionen etc. kann man also die oberen Teilungen A und B ebensogut benutzen, wie die unteren Teilungen C und D, nur ergeben letztere ein genaueres Resultat. Die Bezifferung

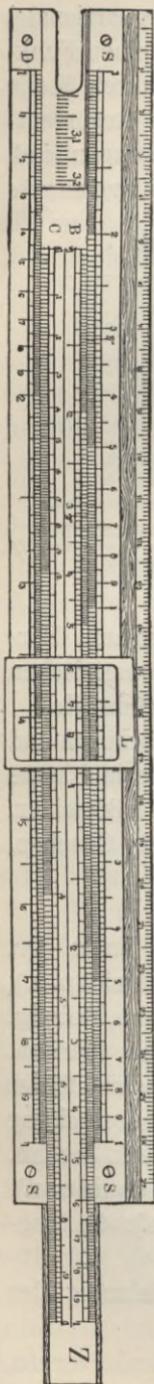


Fig. 105 a.



Fig. 105 b.

und Länge der Teilstriche entspricht den zugehörigen Numéri. Der Läufer (Reiter), L, welcher in zwei, aussen am Stab (Lineal) eingefrästen Nuten N_2 ebenfalls verschiebbar ist, besteht neuerdings zumeist aus einem metallenen Rahmen mit Glasplatte und auf ihr eingezättem, senkrecht zur Teilkante gerichtetem Ableserstrich. Dieser hat den Zweck, Punkte einer der Teilungen ohne Anstrengung fürs Auge festzuhalten, oder auf eine andere Teilung zu projizieren.

Die Rückseite der Zunge enthält drei weitere Teilungen, eine mittlere, welche die Teilungslänge von 25 cm in 500 gleiche Teile zerlegt und zwei äussere, für die Logarithmen der Funktionen sinus (S) und tangens (T) spitzer Winkel.

Wert und lineare Grösse der Teilungsintervalle sind auf den Teilungen A bis D und den beiden hinteren Aussenteilungen, entsprechend dem ungleichmässigen Fortschreiten der dargestellten Funktionen, wechselnd, und durch Strichlängen und -Bezifferung kenntlich gemacht.

Das wichtigste Erfordernis für eine innerhalb der durch das Instrument bedingten Genauigkeitsgrenzen fehlerfreie Rechnung mit dem Rechenschieber ist die nur durch Übung zu erlangende Sicherheit in der raschen Ablesung jeder beliebigen Stelle der Teilungen.

Anwendung des Rechenschiebers auf die in der Vermessungspraxis häufig auftretenden Rechnungsformen:

1. Multiplikation.

Beispiel: $3,83 \times 5,12 = ?$

Rechnung oben:

Stelle $J_{1,B}^1$ auf 3,83 von A u. lese oberhalb 5,12 von B auf A als Resultat 19,60 ab
 Rechnung unten:
 stelle $J_{r,C}$ auf 3,83 von D „ „ unterhalb 5,12 „ C „ D „ „ 19,60 „

Kommastellung durch Überschlagung.

Die Vertauschung der Faktoren ändert am Ergebnis nichts. Sind mehrere Multiplikationen durchzuführen und tritt ein und derselbe Faktor wiederholt auf, so bleibt die Zungenstellung unverändert, nachdem ihr Index auf jenen konstanten Faktor eingestellt ist. Mit welchem der Indices die Einstellung erfolgt (d. h. etwaige Verschiebung der Zunge um ihre halbe, oder ganze Länge bei Rechnung oben, um ihre ganze Länge bei Rechnung unten), ist, bei Ermittlung der Kommastellung durch Überschlagung, gleichgültig.

Beispiel: $12,35 \times 4,75 \times 3,14 = ?$

Rechnung oben:

Stelle $J_{1,B}$ auf 12,35 von A und J_L auf 4,75 von B; sodann $J_{1,B}$ auf J_L und lese oberhalb 314 von B auf A das Schlussergebnis 184 ab.

¹⁾ Die Indices der verschiedenen Teilungen A, B, C und D und des Reiters L mögen künftig kurz mit

$J_{1,A}, J_{m,A}, J_{r,A};$
 $J_{1,B}, J_{m,B}, J_{r,B};$
 $J_{1,C}, J_{r,C}; J_{r,D},$
 $J_{1,D}$ bezeichnet sein.
 J_L

Rechnung unten:

Stelle $J_{1,C}$ auf 12,35 von D und J_L auf 4,75 von C, sodann $J_{r,C}$ auf J_L ein und lese unterhalb 3,14 von C auf D das Schlussergebnis 184,1 ab.

2. Division.

Beispiel: $\frac{48,93}{9,76} = ?$

Rechnung oben:

Stelle 9,76 von B auf 48,93 von A und lese oberhalb eines der Indices von B auf A das Resultat 5,01 ab.

Rechnung unten:

Stelle 976 von C auf 4893 von D und lese unterhalb J_r von C auf D das Resultat 5,01 ab.

Bleibt für eine Reihe von Brüchen der Dividend unverändert, so stellt man den Reiter J_L auf diesen konstanten Dividenden unter Benützung von Teilung A oder D ein und bringt die Zunge unter Benützung der Teilung B oder C der Reihe nach mit dem veränderlichen Divisor unter den Reiterindex. Die Ablesung des Resultats erfolgt auf A oder D je nachdem die erste Einstellung auf A oder D (die Divisoreinstellung auf B oder C) erfolgte. (Eine zweite Lösung mit Umkehrung der Zunge bleibt, als weniger zweckmässig, hier weg.)

Ist umgekehrt für eine Anzahl von Brüchen der Divisor konstant, so bringt man den ihm entsprechenden Punkt der Teilung $\frac{B}{C}$ zur Übereinstimmung mit einem der Indices der Teilungen $\frac{A}{D}$ und liest der Reihe nach oberhalb unterhalb des dem veränderlichen Dividenden entsprechenden Punktes der Teilung $\frac{B}{C}$ auf der Teilung $\frac{A}{D}$ das Resultat ab.

3. Multiplikation und Division mit beliebig vielen Faktoren.

Die Aufgabe stellt eine Erweiterung der bisherigen nur insofern vor, als man darauf verzichtet, die Zwischenresultate, welche als Produkt oder Quotient je zweier Zahlen sich ergeben, abzulesen. Man stellt vielmehr jedes solche Zwischenresultat lediglich mit dem Reiterindex ein und verfährt mit dieser Einstellung weiter, wie wenn sie den einen Faktor eines zweigliedrigen Produkts, oder den Dividenden eines Bruchs darstellen würde. Da die Reihenfolge der Multiplikationen und Divisionen das Endresultat nicht beeinflusst, so kann man durch entsprechende Abwechslung zwischen Multiplikation und Division auch bei Verwendung der unteren Teilung dafür sorgen, dass Verschiebungen der Zunge um ihre ganze Länge erspart werden können. Zu merken ist nur: Bei Multiplikation wird immer der Schieberindex

Division dem Divisor entsprechende Schieberteilpunkt auf das Zwischenresultat (Reiterindex) eingestellt und hernach der letztere auf den dem nächsten Faktor entsprechenden Schieberteilpunkt gebracht. Eine in der Schieberindex

Vermessungspraxis besonders häufig auftretende Aufgabe dieser Art ist die

„Proportionalrechnung“. Bei jeder beliebigen Schieberstellung zeigen einerseits die miteinander übereinstimmenden Teilpunkte der Teilungen A und B, andererseits diejenigen der Teilungen C und D alle in gleichem geometrischem Verhältnis zueinander stehende Zahlen, z. B.

$$5 : 3 = 6 : 3,6 = 7 : 4,2 = 8 : 4,8 = 9 : 5,4 = \frac{10}{6} = \frac{11}{66} \text{ etc.}$$

Stellt man daher den Schieber dem gegebenen Verhältnis entsprechend auf die Linearteilung ein, so kann man zu einer dritten Zahl die im selben Verhältnis stehende vierte auf dem Lineal oberhalb der betreffenden Schieberteilstelle ablesen.

Im Interesse bequemer und sicherer Rechnung sorgt man durch entsprechende Aufstellung, und nötigenfalls Umformung des Grundverhältnisses dafür, dass

1. die gesuchte Grösse immer dieselbe Stellung in der Proportion einnimmt (4. Glied),
2. kein Wert ohne Probe gerechnet wird und
3. für die auf der Rechenschieberteilung abzulesende gesuchte Zahl drei zählende Ziffern (Rechenschiebergenauigkeit) genügen.

Die Bedingung (2) ist erfüllt, wenn es gelingt, die zu berechnenden Grössen so auszuwählen, dass ihre Summe oder Differenz zum voraus bekannt ist (s. hiezu Fig. 106).

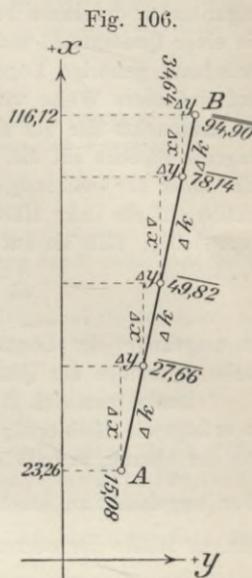
Um die dritte Bedingung zu erfüllen, ist es oft nötig, das Grundverhältnis umzuformen.

Zu diesem Zweck werden folgende Sätze angewandt:

a) In jeder Proportion verhält sich das erste Glied zur Differenz des 1ten und 2ten, wie das 3te Glied zur Differenz des 3ten und 4ten.

b) Eine Proportion bleibt richtig, wenn man ein äusseres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multipliziert, oder dividiert.

Beispiel: Die Koordinaten der in obiger Skizze durch Kopfmasse eingemessenen Punkte sind mittels des Rechenschiebers unter durchgreifender Probe zu berechnen.



Man entnimmt der Figur	Δk	Rechenschieber $(\Delta k - \Delta x)^1$	Δx	x	Rechenschieber $(\Delta y - 0,2 \cdot \Delta k)^2$	Δy	y	
				23,26			15,08	
92,86	27,66	Δx	0,59 (+)	27,07	50,33	0,17	5,70	20,78
94,90	19,56	Δy	0,48	21,68	72,01	0,14	4,57	25,35
(18,98) ²⁾	28,32		0,61	27,71	99,72	0,17 ₄	5,84 (+)	31,19
	16,76		0,36	16,40	116,12	0,10	3,45	34,64
	94,90		2,04	92,86		0,58	19,56	
	(18,980)							

¹⁾ Für die Berechnung von Δx wurde umgeformt:

$$94,90 : (94,90 - 92,86) = \Delta k : (\Delta k - \Delta x),$$

woraus

$$(\Delta k - \Delta x) = \frac{94,90 - 92,86}{94,90} \times \Delta k$$

$$\Delta x = \Delta k - (\Delta k - \Delta x).$$

²⁾ Für die Berechnung von Δy wurde das 1te und 3te Glied je mit 0,2 multipliziert (Zahlen in Klammern) und hernach die Proportion benützt:

$$18,98 : (19,56 - 18,98) = 0,2 \cdot \Delta k : (\Delta y - 0,2 \cdot \Delta k),$$

woraus

$$\Delta y - (0,2 \times \Delta k) = \frac{0,58}{18,98} \times 0,2 \Delta k$$

$$\Delta y = 0,2 \cdot \Delta k + \frac{0,58}{18,98} \times 0,2 \cdot \Delta k.$$

4. Quadrieren.

Der Logarithmus der 2. Potenz einer Zahl ist gleich dem doppelten Logarithmus der letzteren. Da die Strecken der Rechenschieberteilungen den Logarithmen der ihnen beigeschriebenen Zahlen entsprechen, so hat man, um die einer Quadratzahl entsprechende Strecke zu finden, also nur nötig, die zur Grundzahl gehörige Logarithmenstrecke, etwa mittels Zirkels, zu verdoppeln. Auf einfachere Weise wird diese Verdoppelung erreicht durch Heraufprojizieren des Endpunkts der auf den Teilungen C und D in doppeltem Massstab aufgetragenen Strecke auf die Teilungen A oder B. Hierzu dient der Reiterindex J_L , oder einer der Indices $J_{I, B}$ und $J_{I, C}$ bzw. $J_{r, B}$ und $J_{r, C}$. Fällt dabei die Projektion auf die linke Hälfte der Teilung A oder B, so ist die Quadratzahl 1, 3, 5 ... stellig; fällt sie auf deren rechtsseitige Hälfte, so ist die Quadratzahl 2, 4 ... stellig.

5. Beim Radizieren

ist umgekehrt der Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten (beim Ausziehen der Quadratwurzel also durch 2) zu dividieren.

Denkt man sich diesen Logarithmus auf der unteren Teilung aufgetragen, so erfolgt die Halbierung der entsprechenden Strecke durch Herunterprojizieren von der oberen, in halb so grossem Massstab aufgetragenen Teilung. Dabei ist aber umgekehrt zu beachten, dass ungeradstellige Radikanden von der linksgeradstellige Radikanden von der rechtsseitigen Hälfte der oberen Teilung herunterzuprojizieren sind.

6. Multiplikation eines Quadrats mit einer Zahl.

Beispiel: $5,34 \times 1,88^2$.

Ist bei mehreren Beispielen der lineare Faktor (hier 5,34) konstant, (wie z. B. bei π -Berechnung von Kreisflächen), so stellt man einen der Indices der Teilung B auf 5,34 von A und projiziert mittels J_L den Teilpunkt 1,88 von C auf A. Resultat 18,9.

Tritt umgekehrt die Quadratzahl $1,88^2$ in mehreren Produkten auf, so stellt man $J_{I, C}$ auf 1,88 von D und liest oberhalb $\begin{matrix} 5,34 \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$ von B auf A die Resultate $\begin{matrix} 18,9 \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$ ab.

7. Division eines Quadrats durch eine Zahl.

Diese Rechnung kommt z. B. vor (vergl. Ziff. 4 S. 159) bei Berechnung der Hypotenuse k eines rechtwinkligen Dreiecks aus beiden Katheten, oder der grösseren Kathete Δx aus der Hypotenuse k und der anderen Kathete Δy durch sukzessive Annäherung.

Beispiel: $\frac{6,34^2}{2,08} = ?$

Stelle J_L auf 6,34 von D und auf J_L den Teilpunkt 2,08 von B. Lese oberhalb eines der Indices von B auf A das Resultat 19,3 ab.

Weitere Beispiele (s. Fig. 103)

$$(k_1 - \Delta x_1) = \frac{11,22^2}{k_1 + \Delta x_1} \sim \left(\frac{11,22^2}{2 k_1} = \frac{11,22^2}{129,88} \right) \begin{matrix} \text{in} \\ \text{besserer} \\ \text{Näherung} \end{matrix} \sim \frac{11,22^2}{129,88 - 0,97} = 0,98,$$

also $\Delta x_1 = 64,94 - 0,98 = 63,96$

$$(k_2 - \Delta x_2) = \frac{7,08^2}{k_2 + \Delta x_2} \sim \left(\frac{7,08^2}{2 \Delta x_2} = \frac{7,08^2}{97,24} \right) \begin{matrix} \text{in} \\ \text{besserer} \\ \text{Näherung} \end{matrix} \sim \frac{7,08^2}{97,24 + 0,52} = 0,51,$$

also $k_2 = 48,62 + 0,51 = 49,13.$

8. Division einer Zahl durch ein Quadrat.

Beispiel: $\frac{49,62}{5,14^2} = ?$

Stelle J_L auf 49,62 von A und auf J_L den Teilpunkt 5,14 von C. Lese sodann über einem der Indices von B auf A ab $\cdot 1,88$.

9. Quadrieren eines Bruchs.

Schiebe den Bruch nach Aufgabefall 2 und 3 auf Teilung D ab. Die Ablesung auf A oberhalb eines der Indices von B liefert das Resultat.

10. Multiplikation einer Quadratwurzel mit einer Zahl.

Beispiel: $2,8 \sqrt{7} = ?$

Stelle $J_{1,C}$ auf 2,8 von D und lese unter Benützung des Reiters unterhalb des Teilpunkts 7 von B links auf D das Resultat 7,41 ab.

Würde die Projektion des Radikanden von B auf D ausserhalb des Rechenschiebers fallen, so wäre beim Beginn statt $J_{1,C}$ einfach $J_{r,c}$ auf den linearen Faktor einzustellen.

11. Quadratwurzel aus einem Bruch.

Schiebe den Radikanden nach Beispiel 2 und 3 auf Teilung A ab. Die mittels des Schieberindex oder nötigenfalls mittels des J_L bewirkte Projektion auf D unterhalb des auf A eingestellten Radikanden gibt die gesuchte Wurzel.

Bei der Projektion von Teilung A auf D ist zu beachten, dass für ungeradstellige Radikanden die linke Seite der Teilung zu verwenden und daher geradstellige Radikanden die rechte Seite der Teilung zu verwenden und daher der Radikand zunächst wenigstens bezüglich der Stellenzahl roh zu schätzen ist.

12. Bestimmung des Log einer Zahl.

Da die auf den Teilungen A bis D abgetragenen Strecken nichts anderes sind, als die im Massstab $1 = 12,5$ cm (oben), bzw. $1 = 25$ cm (unten) aufgetragenen Logarithmen der jeweils beigeschriebenen Zahlen, so braucht man die für einen Logarithmus aufgetragene Strecke nur (etwa mittels eines Zirkels) von einer der Teilungen wieder abzunehmen und auf dem betreffenden Massstab abzumessen. Der Massstab $1 = 25$ cm befindet sich auf der Rückseite der Zunge in deren Mitte. Die Abnahme der Logarithmenstrecke mittels des Zirkels wird dadurch entbehrlich, dass in der Normalstellung (zusammengehörige Lineal- und Zungenindices in Deckung) der Index einer auf der Rückseite rechts vorhandenen Aussparung den Nullpunkt des zu verwendenden Massstabs deckt. Schiebt man daher $J_{1,c}$ auf irgendeinen Punkt P der Teilung D, so hat sich jener Nullpunkt um ebensoviel verschoben und man kann das Mass der Verschiebung, d. h. den Logarithmus von P an dem Index der hinteren Aussparung rechts ablesen.

Statt den Schieber für jede Zahl frisch einzustellen, kann man ihn auch, die Rückseite nach vorn, derart ins Lineal einschieben, dass die Bezifferung ihrer Mittelteilung wie diejenige von D von links nach rechts ansteigt und ihr Nullpunkt mit dem der Teilungen A und D übereinstimmt. Der Logarithmus irgend einer Zahl ergibt sich dann durch Heraufprojizieren dieser Zahl von Teilung D auf die Mittelteilung mittels des Reiters und umgekehrt.

13. Wert des sinus eines Winkels.

Man steckt den Schieber wieder mit der Rückseite nach vorn, jedoch so ins Lineal ein, dass die S-Teilung von links nach rechts ansteigt und die Indices

mit denen von A und D übereinstimmen. Alsdann liest man direkt über der S-Teilung auf A den zu jedem Winkel gehörigen sinus-Wert ab, wobei nur beachtet werden muss, dass jede Ablesung beginnt mit 0, .. und dass der ersten Wertziffer noch eine Null vorzusetzen ist, wenn die Ablesung auf der linken Seite der Teilung A erfolgt.

Da die S-Teilung nur bis auf 35' heruntergeht, so berechnet man bei noch kleineren Winkeln

$$\sin \alpha = \operatorname{arc} \alpha = \frac{\alpha'}{\rho'} = \frac{\alpha''}{\rho''},$$

oder man bestimmt den sin eines Vielfachen von α und dividiert diesen dann durch den gewählten Faktor.

Da allgemein $\cos \alpha = \sin (R - \alpha)$, so kann man die S-Teilung auch zur Bestimmung von cos-Werten verwenden, wenn man nur statt des Winkels α sein Komplement nimmt.

Beispiel:

$$\sin 15^\circ 28' = 0,267$$

$$\sin 3^\circ 48' = 0,0663$$

$$\sin 10' 23'' = \frac{623''}{206265''} = 0,00302$$

oder

$$\sin 10' 23'' = \frac{1}{5} \times \sin 51' 55'' = \frac{0,0151}{5} = 0,00302$$

$$\cos 37^\circ 15' = \sin 52^\circ 45' = 0,796.$$

Häufiger, als das Bestimmen eines sin-Wertes kommt die Multiplikation eines solchen mit einer Strecke (Koordinatenbildung), oder die Division einer Strecke durch einen sinus-Wert vor. Hierbei lässt sich der Schieber nicht in der bisherigen umgekehrten Stellung verwenden. Dies ist auch nicht nötig. Vielmehr braucht man den wieder normal eingesteckten Schieber nur so weit herauszuziehen, bis der Winkelwert α der S-Teilung mit dem Index der Linealaussparung rechts der Rückseite übereinstimmt. Alsdann liest man unterhalb $J_{r,A}$ auf B die sinus-Werte wie zuvor ab.

14. Multiplikation des sinus oder cos eines Winkels mit einer Zahl.

Beispiel: $89,4 \sin 35^\circ 48' = \Delta y$

$$89,4 \cos 35^\circ 48' = \Delta x.$$

Stelle $35^\circ 48'$ der S-Teilung auf J_r der hinteren Aussparung ein und lese unterhalb 89,4 der Teilung A ab

$$\Delta y = 52,3.$$

Bei Berechnung von Δx stelle statt $35^\circ 48'$ das Komplement $54^\circ 12'$ ein und verfähre ebenso. Damit wird $\Delta x = 72,5$.

15. Division einer Zahl s durch den sinus oder cos eines Winkels.

Stellt man den Winkelwert auf J_r der hinteren Aussparung ein, so hat man nach vorhergehendem dessen sinus-Wert auf B unterhalb J_r von A. Folglich befindet sich der Wert $\frac{1}{\sin \alpha}$ oberhalb der $J_{r,B}$ auf A und $\frac{s}{\sin \alpha}$ oberhalb s von B auf A.

Beispiel: $\frac{52,4}{\sin 35^\circ 48'} = ?$

Stelle $35^\circ 48'$ der S-Teilung auf J_r hinten und lese oberhalb 52,4 von B auf A ab — 89,6.

Die Bestimmung des Werts der tg eines Winkels erfolgt unter Benützung der hinteren T-Teilung genau ebenso, wie diejenige des sinus . Kehrt man den Schieber um, so dass die T- und die D-Teilung aneinander liegen und die Bezifferungen beider in gleicher Richtung ansteigen und bringt man die Indices zur Übereinstimmung, so ergeben sich die tangens-Werte auf D direkt unter den entsprechenden Stellen der T-Teilung.

$$\begin{aligned} \text{Z. B. } \text{tg } 26^{\circ} 40' &= 0,502 \\ \text{tg } 15^{\circ} &= 0,267 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Zum Zweck der Multiplikation, oder Division von Zahlen mit der tangens eines Winkels bleibt der Schieber in der Normallage und die Einstellung erfolgt am J der linksseitigen Aussparung der Rückseite.

Für Winkel $> 45^{\circ}$ verwendet man $\frac{1}{\text{tg}}$ des Komplementwinkels.

Rechenschieberteilungen für weitere Funktionen.

Mit dem logarithmischen Rechenstab lassen sich Multiplikationen und Divisionen mit Faktoren ausführen, die ihrerseits beliebige Funktionen von beliebigen Argumenten darstellen, wenn nur die beiden, je zusammen in Verwendung kommenden logarithmischen Teilungen entsprechend ausgestaltet und beziffert werden.

So trägt der Läufer beim „Wildschen“ Rechenschieber für Zwecke der tachymetrischen Entfernungsbestimmung eine mit der Teilung A für die Zahlen R der natürlichen Zahlenreihe korrespondierende $\cos^2 \alpha$ -Teilung, ($\alpha =$ Höhenwinkel), welche die Berechnung der Horizontalentfernung $d = R \times \cos^2 \alpha$ gestattet. Die Zunge dagegen trägt für Höhenberechnungen eine Teilung mit der Bezifferung α für die Funktion des Neigungswinkels α

$$f = \frac{1}{2} \sin 2\alpha,$$

womit der Höhenunterschied

$$\Delta h = d \cdot \text{tg } \alpha = \frac{1}{2} R \sin 2\alpha \text{ sich ergibt.}$$

Der Rechenschieber nach „Voigt“ (vergl. Zeitschr. f. Verm., Jahrg. 1894, S. 183), von Dennert & Pape in Altona hergestellt, ersetzt die Sinus- und Tangens-Teilung und die zur Bestimmung von Log.-Werten dienende mittlere Teilung der Zungenrückseite durch Teilungen für Funktionen der Argumente s , bzw. Δx , Δy und φ , wo Δx und Δy Koordinatenunterschiede zweier Punkte, s deren Verbindungsstrecke, und φ den zugehörigen Richtungswinkel (vergl. § 56) darstellt.

Bei der trigonometrischen Punkteinschaltung nach der Methode der kleinsten Quadrate (s. §§ 67—69 und 72—74) bedarf man für jeden Bestimmungsstrahl der Ausrechnung der Ausdrücke

$$a = -\frac{\sin \varphi}{s} \varrho = -\frac{\sin \varphi}{\frac{\Delta x}{\cos \varphi}} \varrho = -\frac{\frac{\varrho}{2} \sin 2\varphi}{\Delta x} = -\frac{\varrho}{\Delta x} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi$$

$$b = \frac{\cos \varphi}{s} \varrho = \frac{\cos \varphi}{\frac{\Delta y}{\sin \varphi}} \varrho = \frac{\frac{\varrho}{2} \sin 2\varphi}{\Delta y} = \frac{\varrho}{\Delta y} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

Mittels zweier Skalen, von denen die eine, gewöhnliche, die Logarithmen der Strecken Δx bzw. Δy , die andere (auf der Zungenrückseite) diejenigen des Zählers $\left(\frac{\varrho}{2} \sin 2\varphi\right)$ mit der Bezeichnung φ darstellt, lassen sich diese Werte durch je einmalige Einstellung gewinnen, ebenso aber auch durch logarithmische Teilungen, deren eine $\frac{\varrho}{\Delta x \text{ oder } \Delta y}$, die andere $\frac{1}{2} \sin 2\varphi$ darstellt.

Ebenso lassen sich entsprechend geteilte Rechenschieber bei der barometrischen Höhenberechnung verwenden (s. dort).

Der Rechenschieber System „Rietz“ bringt auf dem Stab S vier statt bisheriger zwei Längsteilungen an und zwar:

auf dem oberen Stabstreifen:

A' (entlang der auf der schrägen Fläche angeordneten cm-Teilung) 3mal hintereinander die Log. der Zahlen 1 bis 10
(Massstab $1 = \frac{25}{3}$ cm),

A (entlang der oberen Zungenteilung B) 2mal hintereinander die Log. der Zahlen 1 bis 10 (wie beim gewöhnlichen Rechenschieber. Massstab $1 = \frac{25}{2}$ cm);

auf dem unteren Stabstreifen:

D (entlang der unteren Zungenteilung C) 1mal die Log. der Zahlen 1 bis 10 (wie beim gewöhnlichen Rechenschieber. Massstab $1 = 25$ cm),

D' (entlang der senkrecht ab-geschnittenen cm-Teilung) die mittlere, gleichmässige Teilung der Zungenrückseite.

Dieser Rechenschieber ist in seinem mittleren Teil genau gleich dem gewöhnlichen, eingangs vorgeführten. Die beiden äusseren Linealteilungen ermöglichen aber mit Hilfe des Läufers das direkte Kubieren und Logarithmieren, und die damit zusammenhängenden weiteren Rechnungen.

Verfeinerungen des Rechenschiebers.

Wichtiger sind die Rechenschieberformen, welche eine Verfeinerung der Rechnungsergebnisse bezwecken.

Der gewöhnliche Rechenschieber von 25 cm Länge gestattet die Ablesung der Endresultate nur auf eine Genauigkeit von ca. $\frac{1}{800}$, d. h. bis auf 3—4 Ziffernstellen (4, wenn die erste zählende Ziffer 1, kaum 3, wenn sie 8 oder 9 lautet).

Diese Genauigkeit genügt für viele praktische Bedürfnisse nicht. Sie ist steigerungsfähig: entweder durch entsprechende Verfeine-

rung der Teilungen in Verbindung mit einem Vergrößerungsglas (Lupe), oder durch Verwendung einer grösseren Längeneinheit für die ersteren.

Den erstgenannten Weg beschreitet Nestler in Lahr, der die Glasplatte des „Reiters“ durch einen als Lupe wirkenden Glaskörper ersetzt. Die Einrichtung liefert aber verzerrte Bilder der zu beiden Seiten des Ablesestrichs gelegenen Teilungslinien und stört überdies die bequeme Übersicht.

Den zweiten Gedanken sucht eine grössere Zahl von Konstruktionen nutzbar zu machen.

Die nächstliegende ist eine entsprechende Verlängerung des Stabs. Mittels des 50 cm langen Rechenstabs kann z. B. die Rechenungenauigkeit auf ca. $\frac{1}{1200}$ herabgedrückt werden. Die Unhandlichkeit setzt aber der Anwendungsmöglichkeit so langer Stäbe enge Grenzen.

Bringt man zwei Kreisscheiben von ungleichen Halbmessern zentrisch so übereinander, dass sich die obere (Schieberscheibe) unabhängig von der unteren (Grundplatte) um eine durch den Mittelpunkt senkrecht zu den Kreisen angeordnete Achse drehen lässt und teilt den Umfang des Grenzkreises sowohl auf der Grundplatte, als auf der Schieberscheibe logarithmisch (Umfang $2r\pi = 1 = \log 10$), so hat man die „Rechenscheibe“, deren Teilungen den Teilungen C und D des Rechenstabs jedoch mit dem Unterschied entsprechen, dass der Teilungsträger zum Kreis umgebogen ist. Der Reiter wird radial und ebenfalls um die erwähnte Achse drehbar angeordnet.

Rechen-
scheibe.

Bei gleicher Längen-, aber allerdings grösserer Breitenausdehnung bietet diese Einrichtung gegenüber dem gewöhnlichen Rechenstab eine π fache Vergrößerung der Teilungen C und D
 2π „ „ „ „ „ A und B' Die in
 sich zurückkehrende Teilung enthebt überdies der bei Benützung von C und D des gewöhnlichen Rechenstabs oft sich einstellenden Notwendigkeit, den Schieber um seine ganze Länge zu verschieben.

Versagt einerseits diese einfache Rechenscheibe bei der direkten Ausföhrung einzelner der mit dem Rechenstab vorgeföhrten Rechnungsformen, so gestattet der ihr zugrundliegende Gedanke anderseits die Anordnung und rechnerische Verwendung einer beliebig grossen Zahl von Funktionen mittels beliebig vieler, zum bisherigen Teilkreis auf der Schieberscheibe gezeichneter konzentrischer Kreise, sobald der Reiter die radiale Projektion von jedem der letzteren auf die geteilte Grundplatte zulässt. Ermöglicht er nicht bloss die radiale Projektion, sondern noch die Festhaltung irgend

einer Einstellung auf der Grundplatte, während der Schieber gedreht und mit irgend einem seiner Teilpunkte, oder dem Index auf den Reiterindex eingestellt wird, so kann man die Teilung der Grundplatte auf einen einzigen, den Nullstrich, beschränken, auf den dann z. B. im Fall der Multiplikation zu Beginn und am Ende der Rechnung der Schiebernullpunkt eingestellt wird. Zur Einstellung, wie Ablesung wird dann neben dem Grundplattennullstrich lediglich Reiterindex und Schieberteilung benützt. (Über Rechenscheiben vergl. u. a. auch Lüdemann, Zeitschr. f. Verm. 1907, S. 241 und 513.)

Rechenrad. Kehren wir zu den aneinander verschiebbaren, geradlinig geteilten einfachen Längsstreifen zurück und biegen diese zum Mantel eines Kreiszylinders um, so kommt man zum Beyerlenschen „Rechenrad“, welches, — auf einem Gestell vertikal und, wie der Reiter, um die Zylinderachse drehbar aufgehängt, — die Vorzüge des Rechenstabs mit denjenigen der Rechenscheibe verbindet. Das Zurückkehren der Teilung in sich selbst enthebt, wie bei der Rechenscheibe, der Notwendigkeit, den Schieber jeweils um seine ganze Länge zu verschieben. Der Anbringung beliebiger weiterer Teilungen ($\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, logarithmische Teilung in halber, Drittelslänge für Quadrate, Kuben etc.) auf Lineal, oder Schieber steht natürlich auch hier keinerlei Hindernis im Wege.

Um eine längere Teilungskante zu erzielen, ordnet der Fullersche Spiralrechenschieber die logarithmische Teilung auf einer um einen Zylinder sich windenden Schraubenlinie, und zwar in einer Teilungseinheit von etwas über 12,5 m Länge an. Das Instrument besteht aus einem Achszylinder von 30 cm Länge und 6 cm Durchmesser, über welchen der 16 cm lange Teilungszylinder, der Schieber, gestreift wird. Die mit dem Instrument erreichbare Genauigkeit gibt Hammer zu rund $\frac{1}{11000}$ an. (Näheres vergl. Zeitschr. f. Verm. 1907, S. 434.)

Über den hierher gehörigen Hamannschen „Proportionalrechenschieber“ vergl. Zeitschr. f. Verm. 1899, S. 660 ff.

Der Anordnung der logarithmischen Teilung in grösserem Massstab, d. h. mit längerer Einheit, wurden neue Möglichkeiten eröffnet durch den Gedanken, hiezu statt einfacher, kontinuierlicher, abgesetzte und parallel oder konzentrisch nebeneinander gestellte, für Stab und Schieber aber gleiche und gleich angeordnete Teilungsträger zu verwenden. Auch die (der S. 168 unten angegebenen entgegengesetzte) Eigenschaft kongruenter, aber gegenläufig angeordneter logarithmischer Teilungen, bei beliebiger gegenseitiger Stellung auf die ganze Teilungslänge Zahlen zur Koinzidenz

zu bringen, die ein konstantes Produkt liefern, öffnet neuen Anordnungen den Weg:

Rechenstäbe
und
-Scheiben mit
abgesetzten
Teilungen.

Der Franksche Rechenschieber benützt die alte Stabform und -Grösse, ordnet aber die Schieberteilung der Linearteilung gegenläufig an. Die Teilungskanten A und D mit zusammen 50 cm Länge werden zusammen als eine Teilungseinheit ausgenützt (das rechtsseitige Ende der A-Kante entspricht erst dem Teilpunkt $\sqrt{10} = 3,162$), so dass der Teilungsmassstab gegenüber der A- und B-Teilung des gewöhnlichen Rechenschiebers 4mal grösser ist. Die Ablesegenauigkeit ist daher dieselbe wie bei der C- und D-Teilung des 50 cm langen Rechenstabs.

Den Gedanken der abgesetzten Teilung unter Beibehaltung der Stabform verwendet auch Lallemand (s. Zeitschr. f. Verm. 1900, S. 233) bei seinem 50 cm langen, zur Berechnung der Koordinatenunterschiede von Polygonseiten bei der neuen französischen Katastervermessung bestimmten Rechenstab. Die Teilungseinheit ist hiebei auf 1 m gesteigert, der mittlere Fehler auf ca. $\frac{1}{8000}$ herabgedrückt.

Bei der Rötherschen Präzisionsrechenscheibe (vergl. Zeitschr. f. Verm. 1887 S. 303, 1899 S. 697 und 1907 S. 247 ff. und 513 ff.) sind die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 auf vier konzentrischen Kreisen von zusammen 2,30 m Umfang angeordnet. (Die Werte weiterer Funktionen sind auf drei anderen konzentrischen Kreisen aufgetragen und werden radial projiziert.) Die Rechenunsicherheit sinkt bei Anwendung dieser Scheibe im Mittel auf ca. $\frac{1}{13000}$ herab.

Die Scherersche Rechentafel ordnet auf der Grundplatte die Logarithmen der Zahlen 1 bis 10 auf 20 parallel nebeneinander liegenden Geraden abgesetzt und zwar in 4facher Wiederholung so an, dass die Einheit eine Gesamtlänge von 1,5 m erhält. An Stelle des Schiebers tritt eine durchsichtige Zelluloidplatte. Sie trägt genau dieselbe Teilung wie die Grundplatte, aber in ein-facher Anordnung. Stellt man daher ihren Anfangsstrich auf den dem einen Faktor entsprechenden Teilpunkt der Grundplatte ein, so korrespondiert (nötigenfalls nach geringer Verschwenkung der aufgelegten Platte wegen der verschieden grossen Ausdehnung beider) der Endstrich mit dem gleichbezahlten Teilpunkt einer der Wiederholungen der Grundteilung. Die Ablesung des Produkts erfolgt auf der letzteren neben dem dem zweiten Faktor entsprechenden Teilpunkt der Zelluloidplatte.

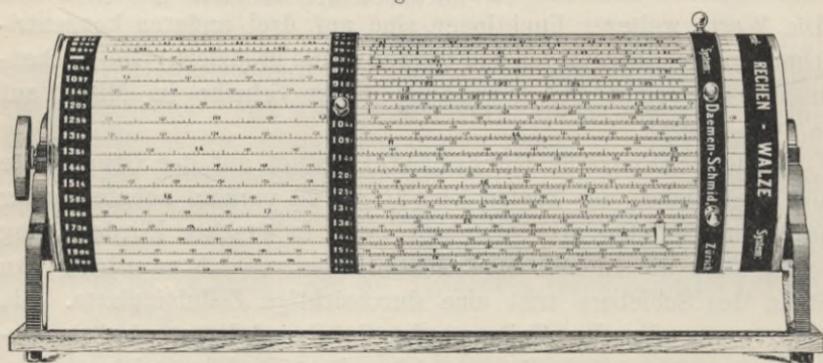
Abgesetzte Anordnung des Teilstreifens, und zwar auf den Mantellinien eines Zylinders, verwenden endlich in ausgedehntem Mass die verschiedenen Formen von Rechenwalzen. Unter diesen

Rechen-
walzen mit
abgesetzten
Teilungen.

sei namentlich genannt die (in Nordamerika viel gebrauchte) Thacher'sche, welche die log der Zahlen von 1 bis 10 auf 40, zusammen 18 m langen Mantellinien des inneren, 49¹/₂ cm langen Achsenzylinders unterbringt, über den, wie beim Fullerschen Spiralrechenschieber (s. S. 176), ein zweiter Zylinder als Schieber gestreift wird. Letzterer besteht aus 20 Metallrippen von je 47 cm Länge, zwischen denen beiderseits Ableseschlitze offen bleiben. Jede Rippe trägt zwei Teilstreifen, welche satteldachartig nach aussen so angeordnet sind, dass die Teilungsträger mit denen der kongruenten inneren Achsenzylinderteilung zur Deckung gebracht werden können. Der Gebrauch entspricht genau dem des gewöhnlichen Rechenschiebers, oder der Schererschen Tafel; die Rechengenauigkeit kann mit diesem Instrument nach Hammer (vergl. Zeitschr. f. Verm. 1891, S. 441) bis auf ¹/₃₂₀₀₀ gesteigert werden, entspricht also nahezu derjenigen 5 stelliger Logarithmen.

Die Dämen-Schmidsche Rechenwalze besteht aus einem Zylinder von 47 cm Länge und 50 cm Querschnittsumfang, welcher auf 50 gleichabständigen Mantellinien von je rund 40 cm Länge die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 in abgesetzter Teilung 2mal

Fig. 107.



hintereinander derart trägt, dass jede der beiden Teilungen einen halben (den links- bzw. rechtsseitigen) Vollzylinder kongruent bedeckt. Über die Walze ist eine Muffe (Schieber) von etwa halber Walzenlänge gestreift, welche auf Endringen 50 je ca. 5 mm breite Stege mit einer (der vorgenannten kongruenten) Teilung trägt. Zwischen je zwei Schieberstreifen befindet sich ein ca. 5 mm breiter Schlitz, durch den die darunterliegende Walzenteilung und -Bezeichnung sichtbar wird. Der Schieber kann also 2mal, nämlich sowohl mit der links-, als auch mit der rechtsseitigen Walzenteilung, zur völligen, ziffern-, wie teilungsgleichen Deckung gebracht werden.

(Bei der Schererschen Rechentafel trifft dies 4mal zu.) Zur Darstellung der Einheit ($\log 10$) ist eine Länge von 10 m verwendet. Zur Festhaltung der Einstellungen auf dem Schieber bei mehrfacher Multiplikation oder Division dienen „Kluppen“, welche auf den Stegen an beliebigen Stellen eingesetzt werden können.

Die Anwendung entspricht, sinngemäss erweitert, derjenigen der Schererschen Rechentafel. Für Division, Proportionalrechnung etc. bringen jedoch die Kluppen eine schätzenswerte Erleichterung. Das Aufsuchen der Teilpunkte und das Ablesen auf der Dämen-Schmidschen Rechenwalze ist bequem, die Resultate erhält man auf 4 und bei Unterstützung durch eine kleine Kopfrechnung auf 5 zählende Ziffern richtig (ungünstigstenfalls, d. h. in der Nähe von 9,99, wird die Einheit der vierten Stelle durch eine Strecke von $\frac{1}{2}$ mm, günstigstenfalls, d. h. in der Nähe von 1,00, durch eine solche von ca. 4,3 mm dargestellt).

Für mehrstellige Multiplikationen oder Divisionen, in denen das Endresultat auf mehr als 4—5 Ziffernstellen genau sein soll, verwendet man:

2. Rechenmaschinen.

Von den verschiedenen Formen sollen hier nur die in der Vermessungspraxis gebräuchlichen Kurbelmaschinen kurz vorgeführt werden, deren wesentliche Bestandteile das „Schaltwerk“ und das „Zählwerk“ bilden.

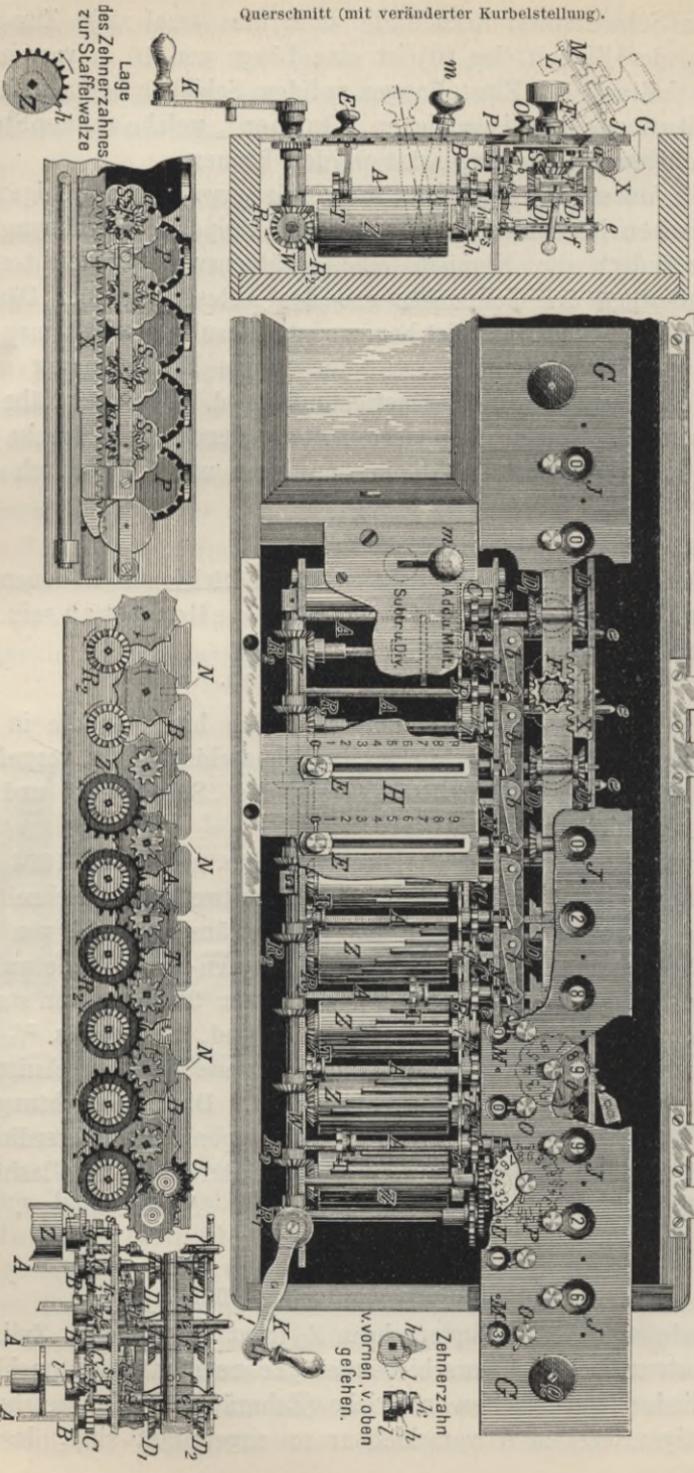
Das von Leibnitz erfundene, von ihm selbst um 1694 und später von anderen vielfach verwendete Schaltwerk zur gleichzeitigen Drehung aller Zählscheiben je um die gewünschte Zahl von Einheiten beruht auf der Verwendung von Stufen- oder Staffelwalzen, d. h. von Zylindern Z (s. Fig. 108), auf denen 9 Rippen von staffelweise abnehmender Länge so aufgesetzt sind, dass etwa $\frac{3}{5}$ des Zylinderumfangs frei bleiben und der letztere im Querschnitt am unteren Ende 0, am oberen 9 Zähne zeigt. Diese Einrichtung benutzten 1770/76 Pfarrer Hahn in Onstmettingen bezw. Echterdingen, 1820 X. Thomas in Colmar, seit 1878 A. Burkhard in Glashütte, später Bunzel in Wien u. a. zum Bau ihrer „Arithmometer“. Von diesen Maschinen sei näher beschrieben:

Die Staffelmaschine „Thomas“.

Jede von den Zylinderachsen Z trägt hinter dem Zylinder einen automatisch sich verschiebenden „Zehnerzahn“ h (s. nachher). Die Zylinderrippen greifen in Triebe (Zahnräder) T ein, welche auf vierkantigen Wellen A verschiebbar so angeordnet sind, dass je

Thomas'sche Rechenmaschine (Massstab 1:3 d. nat. Gr.).

Fig. 108.



nach ihrer Stellung auf A: 0, 1, 2, . . . 9 der Rippen als Zähne zur Wirkung kommen und der betreffenden Welle $0 \frac{1}{10}, \frac{2}{10} \dots \frac{9}{10}$ einer vollen Drehung geben, wenn die Stufenwalze eine volle Wälzung ausführt. Letztere wird erzeugt durch jede Voldrehung der Kurbel K, welche einer Kegeleradverbindung R_1 und durch die Welle W einer zweiten Kegeleradverbindung R_2 gleichzeitig ebenfalls eine volle Umdrehung verleiht. Auf jeder Welle A sitzen drei Zahnräder und eine Sicherungsscheibe B. Letztere und das Zahnrad C sind fest mit der Welle verbunden, während die unter sich ebenfalls fest verbundenen Kegeleräder D_1 und D_2 auf ihr — und zwar sämtliche gleichzeitig durch Umstellen des Hebels m — verschiebbar angeordnet sind. Das Kegelerad D_1 oder (bei Subtraktion, bzw. Division) D_2 dreht durch Vermittlung des Kegelerads F die auf ihrem Umfang mit den Ziffern 0 bis 9 versehene „Zählscheibe“ S um ebensoviele Zehntel einer Voldrehung, als sie die zugehörige Welle A ausgeführt hat, d. h. als Rippen der Stufenwalze zur Wirkung kamen. Je eine Stufenwalze Z, Welle A; Zahnrad T; D_1 (oder D_2); F und Zählscheibe S gehören also zusammen zur Bildung einer Resultatziffer.

Addition und Multiplikation.

Verschiebt man beispielsweise mit Hilfe der „Einstellknöpfe“ E, deren Zeiger sich in die Vertiefungen einer von 0 bis 9 gehenden Einteilung des Schaltbrettes H einstellen lassen, die Triebe T auf den Wellen A so, dass von rechts nach links gesehen bzw. 2, 0, 7 Rippen der Stufenwalzen in sie eingreifen können und gibt dann der Kurbel K eine volle Umdrehung, so führen sowohl die Welle W, als sämtliche Stufenwalzen Z ebenfalls eine solche aus. Dabei drehen sich die Wellen A samt den Rädern T, D_1 , D_2 , F und den Zählscheiben S von links nach rechts gesehen um $0 \dots 0 \frac{7}{10} 0 \frac{2}{10}$ einer Drehung. Haben daher vor der Drehung die Ziffern 0 vor allen Schaulöchern J gestanden (Grundstellung), so werden jetzt die Ziffern $0 \dots 0 702$ sichtbar sein. Eine zweite Kurbeldrehung wird eine zweite, gleich grosse Drehung der Zählscheiben hervorrufen. In dem Augenblicke aber, in welchem die Zählscheibe S, welche nach der ersten Umdrehung 7 zeigte, von 9 auf 0 übergeht, wird durch den Daumenansatz a der Hebel b (in die Stellung wie bei b_1 gezeichnet) zurückgedrückt. Mit Hilfe des um c drehbaren zweiarmigen Hebels d, und der am verschiebbaren Stift e befindlichen Gabel g bewegt sich dadurch der Zehnerzahn h in die Ebene des Rades C und dreht dabei die nächste Zählscheibe links um $\frac{1}{10}$ einer Drehung („Zehnerübertragung“), so dass nach der zweiten Kurbeldrehung die Zahl 1404 unter den Schaulöchern J erscheint. Die Zehnerübertragung

Addition.
Multiplikation.

hat also bei der vierten Welle A_{10}^1 Umdrehung erzeugt, ohne dass der ihr zugehörige Einstellknopf die Nullstellung verlassen hätte.

Vor Beendigung der zweiten Umdrehung der (von rechts nach links) dritten Stufenwalze werden Zehnerzahn h , samt dem Stift e und dem Hebelwerk g und d , welche durch die Federn ff in ihrer Stellung gehalten werden, mit Hilfe der Knacke k auf dem Stift s schleifend in ihre ursprüngliche Lage zurückgedrückt. Der Zehnerzahn steht jetzt wieder, von den Federn ff gehalten, in seiner Ruhestellung und kann in dem Zwischenraum zwischen den Sicherungsscheiben B und den Rädern C ungehindert mit den Zylindern Z rotieren. Gleichzeitig legen sich die Metallkörper l in die Ausschnitte der Sicherungsscheiben B und verhindern jede unbeabsichtigte Drehung der Wellen A . Nach der dritten Kurbeldrehung erscheint in den Schaulöchern J die Zahl 2106 als Ergebnis der Multiplikation 3×702 etc.

Diese Auflösung der Multiplikation in eine fortgesetzte Addition gleicher Summanden wäre bei mehrstelligem Multiplikator viel zu zeitraubend. Die Zahl der auszuführenden Kurbeldrehungen wäre gleich derjenigen der Multiplikatoreinheiten. Um dies entbehrlich zu machen, sind die Zahnräder F samt den Zählscheiben S an einem metallenen Lineal (Schlitten) GG aufgehängt, den man nach rechts um 1, 2, 3... Stellen verschieben kann, wobei sich die am (punktiert gezeichneten, s. Fig. 108) aufgeklappten Lineal sichtbare Lamelle L in die Ausschnitte N der mittleren Gehäusewand einlegt. Ganz analog der direkten Multiplikation ergibt sich damit z. B. das Produkt 702×413 wie folgt:

1. Sämtliche Zählscheiben in Grundstellung. Einstellung der E auf 702, dann Ausführung von drei Kurbeldrehungen gibt als 1. Teilresultat (702×3) unter den Schaulöchern	2106
Nun: 2. Verschiebung des Schlittens um eine Stelle und einmalige Kurbeldrehung addiert selbsttätig	702
und gibt	9126
als 2. Teilresultat (702×13) unter den Schaulöchern.	
Endlich: 3. Nochmalige Verschiebung des Schlittens um eine weitere Stelle und viermalige Kurbeldrehung addiert selbsttätig . .	2808
und liefert	289926
als Endergebnis (702×413) unter den Schaulöchern.	

Im Grund handelt es sich also auch jetzt noch um fortgesetzte Addition von Teilprodukten, die je ebenso gebildet werden, wie das erste Produkt 702×3 . Die Gesamtzahl der nötigen Kurbeldrehungen ist aber nur noch gleich der Quersumme des Multiplikators, der ebensoviele Ziffernstellen haben darf, als Schlittenstellungen

möglich sind (um 1 weniger als die Zahl der Wellen A). Der Multiplikand darf ebensoviele Ziffernstellen haben, als Stufenwalzen Z vorhanden sind.

Ausser den Schaulöchern J befindet sich auf dem Schlitten noch eine weitere Reihe von Schaulöchern M, in welchen der Multiplikator während der Multiplikation dadurch erscheint, dass die Zahl der Kurbeldrehungen in jeder Linealstellung durch das Rad U auf die Zähne der jeweils mit diesem Rade im Eingriff befindlichen Scheibe P übertragen wird.

Die Ziffern der Resultatreihe J können nach Abnahme des Ergebnisses durch Bewegen der Zahnstange X mittels des Knopfes Q auf Null zurückgeführt (gelöscht) werden. Im Fall der Belassung werden sie zum folgenden Produkt mechanisch addiert. Bei neueren Maschinen erfolgt die Löschung der Resultatreihe J sowohl, als auch der Reihe M je durch Hebeldruck.

Subtraktion und Division.

Statt Vielfache des Multiplikanden mehrfach zu addieren (rechtsläufige Drehung der Zähl scheiben S) kann man sie auch fortgesetzt subtrahieren. Dies geschieht bei den Staffelmashinen durch Verschiebung der Zahnräder D_1 und D_2 mittels des Hebels m derart, dass jetzt die Räder D_2 statt D_1 in F eingreifen. Dadurch drehen sich die Zähl scheiben S linksläufig, der am Schaltbrett eingestellte Summand (bezw. Multiplikand) wird zum Subtrahend, das vorherige, unter den Schaulöchern J erschienene Summierungs-, oder Multiplikationsergebnis zum Minuenden, bezw. Dividenden. Die Zahl der Kurbeldrehungen, d. h. die Zahl der möglichen Subtraktionen gibt den Quotienten. Unter den Schaulöchern J erscheint der jeweilige Rest, den durch fortgesetzte Subtraktion gleich Null zu machen die Aufgabe der Division ist. Auch hier wären also ebensoviele Kurbeldrehungen auszuführen, als der Quotient Einheiten hat. Dies wird erspart durch entsprechende Verschiebung des Schlittens, jedoch entgegengesetzt derjenigen bei der Multiplikation. In jeder einzelnen Schlittenstellung wird der Divisor so oft subtrahiert, bis ein Sprung in den Restziffern, oder besser ein für diesen Zweck eingebautes Glockensignal anzeigt, dass die Subtraktion zu oft erfolgt ist. Einmalige Kurbeldrehung bei Additionsstellung des Hebels m führt zum richtigen Teilquotienten (erste Ziffer links) und Teilrest. Nun wird der Schlitten um eine Stelle nach links verschoben und in derselben Weise fortgefahren bis zur Erlangung der zweiten Quotientenziffer links etc.

Subtraktion.
Division.

Rechen-
maschine
„Gauss“.

Fig. 109.



Maschine mit
verschieb-
baren
Zähnen.

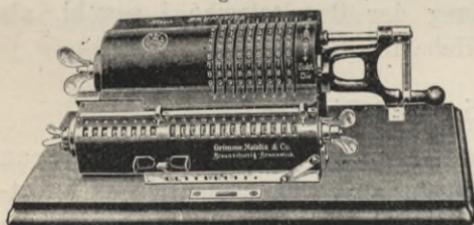
Eine Abart der vorgeführten Staffel-
maschinen stellt die

Rechenmaschine „Gauss“

vor, welche Schaltbrett und Lineal auf Kreis-
scheiben anordnet, mit sehr wenig Geräusch
arbeitet und erheblich billiger ist, als die
S. 179 aufgezählten Konstruktionen (s. Fig. 109).

Weniger Raum, als die Staffelwalzen
nehmen Zahnräder in Anspruch, von deren
9 Zähnen sich beliebig viele nach innen (Brunsviga etc.),
oder seitwärts (Monopol etc.) schieben und dadurch unwirksam
machen lassen. Das schon von Leibnitz gekannte Hilfsmittel

Fig. 110.



wird seit etwa 1890 benützt
bei den Rechenmaschinen
System Odhner: der „Berol-
lina“, des „Duplikator“
und der „Monopol“; bei
der „Triumphator“; der
von Grimme, Natalis & Co.
in Braunschweig herge-
stellten, sehr verbreiteten

Rechenmaschine „Brunsviga“ (s. Fig. 110) u. a.

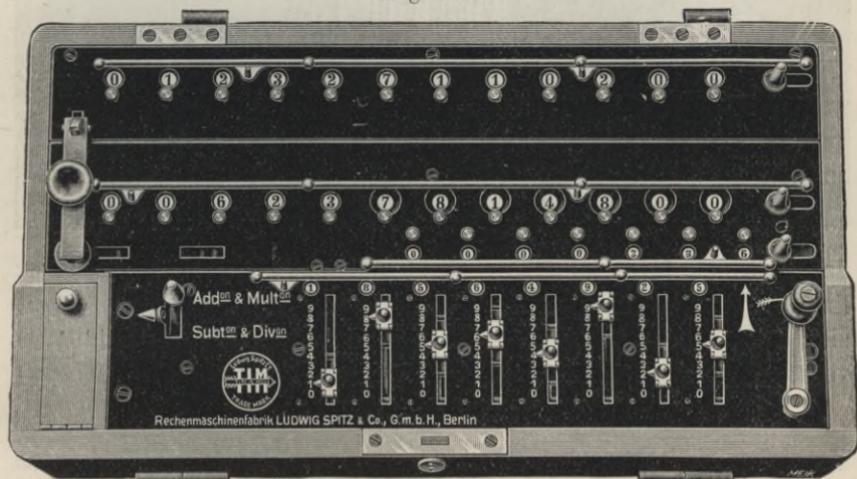
Die Einstellknöpfe für den Multiplizieren sind hier ersetzt
durch Hebel, die auf die Multiplizierenziffern am Schaltzylinder
eingestellt, je ebensoviele Zähne herauschieben und bei der Kurbel-
drehung zur Wirkung bringen.

Zur Berücksichtigung der Ziffernstellung bei der Rechnung wird
der untere Teil, „Schlitten“, wie bei der Thomasschen Maschine, ver-
schoben. Der Multiplikator (Anzahl der Kurbeldrehungen in jeder
Schlittenstellung) erscheint auf dem Schlittenteil links, das Produkt
in dessen vertikal unter den Stellhebeln angeordneten Schaulöchern
rechts. Bei auszuführender Addition und Multiplikation wird
die Kurbel hier rechtsläufig, bei auszuführender Subtraktion
und Division linksläufig gedreht.

Diese Konstruktion lässt eine Reduktion der nötigen Kurbel-
drehungen dadurch zu, dass man statt 6-, 7-, 8-, 9 maliger Multiplika-
tionsdrehung in der betreffenden Schlittenstellung eine 4-, 3-, 2-, 1 malige
Divisionsdrehung und zum Ausgleich in der nächsthöheren Ziffernstelle
eine 1 malige Multiplikationsdrehung ausführen kann [$8x = (10 - 2)x$].
Die von der Grundstellung ausgehende Divisionsdrehung wird im
Multiplikator (Schlittenteil links) durch rote Ziffern, die Multipli-
kationsdrehung durch schwarze Multiplikatorziffern angezeigt.

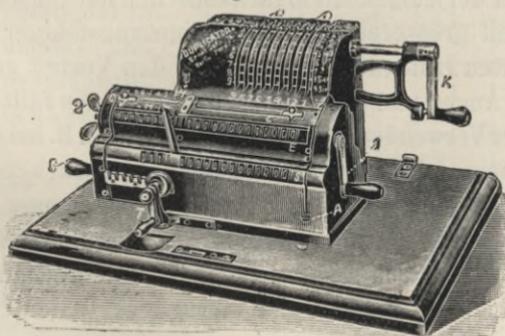
Beide Formen der Rechenmaschinen — Stufenwalze, wie Zahnrad mit einschiebbaren Zähnen — haben in der neueren Zeit eine Vervollständigung erfahren, welche den Zweck hat, das zu bildende Produkt gleichzeitig auf ein zweites Zählwerk addierend, oder subtrahierend zu übertragen, so dass nach erfolgter Durchführung jeder Multiplikation deren Ergebnis auf dem einen, die Summe oder Differenz der von irgend einem Zeitpunkt ab berechneten Produkte auf einem zweiten Zählwerk erscheint.

Fig. 111.



Bei der Maschine der ersteren Form ist es die „Unitas“, eine Verbesserung der „Saxonia“, von L. Spitz & Co., Berlin (s. Fig. 111),

Fig. 112.



bei der zweiten die „Duplikator“, eine Verbesserung der „Berolina“ von Ernst Schuster, Berlin, welche diese Erweiterung trägt (s. Fig. 112).

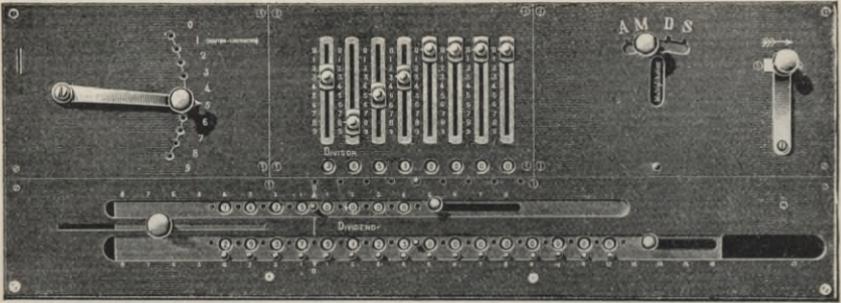
Alle bisher vorgeführten Rechenmaschinen sind im Grund weiter nichts, als Additionsmaschinen, wenn auch die Zahl der Additionen unter Beachtung des Ziffernrangs durch Verstellung des

Lineals, oder Schlittens entsprechend dem Verfahren bei der gewöhnlichen Multiplikation erheblich eingeschränkt wurde.

Eigentliche
Multi-
plikations-
maschine.

Die einzige, wirkliche Multiplikationsmaschine ist die von Egli-Steiger in Zürich erfundene und von der Fabrik Stolzenberg in Oos hergestellte Maschine „Millionär“, welche für jede Stelle

Fig. 113.



des Multiplikators, oder Quotienten nur eine Einstellung (Zeiger links) und eine einzige Kurbeldrehung erfordert. Hieraus ergibt sich als weiterer Vorzug die Möglichkeit automatischer Schlittenverschiebung. (Näheres s. u. a. Zeitschr. f. Verm. 1899, S. 674 ff.)

Vergleich zwischen der Verwendung logarithmischer Teilungen und von Rechenmaschinen.

Die Rechnung mittels Maschine hat gegenüber derjenigen mit Zahlentafeln den Vorzug grösserer Raschheit, Sicherheit und Einfachheit, gegenüber derjenigen mit logarithmischen Rechenstäben, -Walzen etc. den Vorteil grösserer, beliebig steigerungsfähiger Genauigkeit, beiden genannten Hilfsmitteln gegenüber den Vorteil geringerer Anstrengung der Augen und des Gehirns (Interpolation fällt weg) und der Möglichkeit der Verwendung beliebiger (nicht wie z. B. bei der Rechnung mit Logarithmentafeln zuvor hierfür geeignet zu machender) Formeln. Manche, bei direkter oder logarithmischer Rechnung zu bildende Zwischenwerte werden bei Verwendung der Maschine entbehrlich, die Schreibearbeit wird durch Reduktion der Zwischenrechnungen wesentlich vereinfacht, die Wirkung der Abrundungsfehler eingeschränkt.

Wenn es gelänge, eine Maschine zu bauen, welche neben der Einstellung von Zahlenwerten auch diejenige von \sin , \cos und tangens von Winkeln direkt an einer Winkelskala gestattete, (statt der Zwischenverwendung von Tafeln mit ihren natürlichen Werten), so wäre wohl die Logarithmentafel bald endgültig aus der Reihe der im Vermessungsberuf zu benützenden Rechenhilfsmittel zu streichen.

§ 25. Graphische Rechentafeln.

(Vergl. Lalanne, annales des ponts et chaussées 1846, S. 1—69; Vogler, graph. Tafeln, Berlin 1877; Zeitschr. f. Verm. 1893, S. 154, 1906, S. 801, 1907, S. 927 u. s. w.)

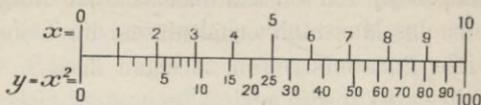
Der Gedanke, Zahlenwerte durch Strecken darzustellen, der zum logarithmischen Rechenstab führte, lässt sich auch für die zeichnerische Darstellung beliebiger Funktionen verwenden.

I. Graphische Darstellung von Beziehungen zwischen zwei veränderlichen Grössen.

Hängt der zu berechnende Funktionswert y von einem einzigen Argument x ab, so sind zwei Methoden der Darstellung gebräuchlich, nämlich

- a) durch eine Doppelteilung zu beiden Seiten einer Achse (Beispiels. Fig. 114 einer Quadrattafel und Fig. 117 einer Proportionalteilung)

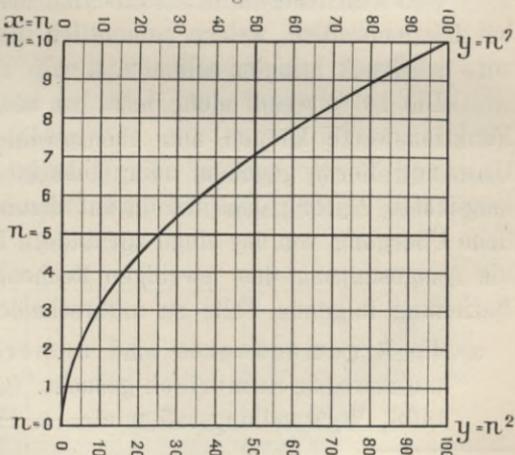
Fig. 114.



- und
- b) durch die stetige Verbindungslinie von Punkten, welche aufgezeichnet werden mittels der als rechtwinklige Koordinaten aufgefassten, — zusammengehörigen,

Fig. 115.

und durch Rechnung (im Falle bekannter Beziehung), oder Beobachtung (im Falle nicht bekannter Beziehung) gefundenen — Argument- und Funktionswertpaare, die „Funktionslinie“.



(Beispiel s. Fig. 115 einer Quadrattafel, Fig. 116 einer Proportionalteilung und Fig. 118 der Berechnung von Querschnittsflächen bei unveränderlichem Normalprofil und veränderlicher Einschnittstiefe.)

Die erstgenannte Methode erleichtert die Ablesung des Funktions- zu einem beliebigen aufgezeichneten Argumentwert und umgekehrt und erfordert wenig Raum. Sie ist aber nur anwendbar bei Beschränkung auf zwei Veränderliche, eignet sich also namentlich für Umwandlungstabellen, Darstellung von Fehlergrenzen, Rich-

tungskoeffizienten bei konstanter (z. B. 1 km) Entfernung, Reduktionsbeträgen für Gradbogenmessung etc.

Die zweite Methode (b) erleichtert sowohl die Interpolation zwischen zwei direkt gezeichnete Funktionsbildpunkte hinein, als auch die Erkenntnis des Wesens der zwischen beiden Veränderlichen bestehenden Beziehung nach den Gesetzen der analytischen Geometrie. Auch kommen bei ihr etwaige Zeichnungs-, oder Beobachtungsfehler schärfer zum Ausdruck. Letztere lassen sich leichter ausgleichen. Aus letzterem Grund eignet sie sich namentlich für die Darstellung von nicht linearen, und von auf Beobachtungen zu erschliessenden Beziehungen.

Die Ablesungsgenauigkeit in der graphischen Darstellung hängt von der Länge ab, die man der Einheit gibt (dem Massstabverhältnis); letzteres ist also im einzelnen Fall aus der nötigen Rechnungsgenauigkeit rückwärts zu erschliessen. Dabei hat das Verfahren (a) den Vorteil, dass sich zur Steigerung der Ablesegenauigkeit, also des Massstabverhältnisses, die Teilungsachse bequem in beliebig viele Parallelstreifen zerlegen lässt¹⁾, während anderseits das Verfahren (b) für die beiden Rechnungsgrössen x und y , die Anwendung von gerade für sie passenden, unter sich nötigenfalls verschiedenen Massstabverhältnissen zulässt, ohne dass dabei das Wesen der Funktionslinie — Gerade, Konkav-, Konvexform etc.— erschüttert würde.

(Verschiedenerlei Massstabverhältnisse werden z. B. angewandt bei Längenprofilen, welche namentlich die Höhenverhältnisse scharf zum Ausdruck bringen sollen u. s. w.)

Die zu verwendenden, bezw. zu berechnenden Argument- und Funktionswerte können nun ebensowohl in numerischer als in linearer Form gegeben oder gesucht sein. In Rücksicht auf möglichste Zeitersparnis ist darauf abzuheben, dass jeder entbehrliche Übergang von der einen zur andern Form vermieden wird. Für die Ausgestaltung des jeweiligen Rechenhilfsmittels sind in dieser Beziehung folgende Fälle zu unterscheiden:

- a) die Argumentwerte sind numerisch bekannt, die Funktionswerte numerisch gesucht. (Quadrattafel, Logarithmentafel, Verwandlungstafeln etc., s. Fig. 114 bis 117.)

¹⁾ Verlangt man z. B. eine graphische Längenmassumwandlungstabelle, (etwa von Fuss in Meter und umgekehrt), welche die Längen bis auf 1 cm genau ablesen lässt (was sicher erreicht wird, wenn 1 cm durch eine Strecke von 0,5 mm dargestellt wird), so erfordert eine maximale Umwandlungsstrecke von 150 m = 15 000 cm eine Teilungslänge von 7500 mm = 7,5 m. Wird diese in Stücke von 30 cm nach Methode (a) zerlegt, so sind also $\frac{7,5}{0,3} = 25$ parallele Teilungsstreifen nötig, die sich zur Not auf halbem Kanzleiformat unterbringen lassen.

Die gezeichneten Strecken sind hier nur Mittel zu dem Zweck, die Zahlenwerte korrespondierend anschreiben zu können. Die Darstellungsart (a) (s. Fig. 114 und 117) ist vorzuziehen.

- β) Die Argumentwerte sind linear bekannt, die Funktionswerte linear gesucht. (Planreduktion etc.)

In diesem Fall muss der Umweg über die Zahl möglichst vermieden werden. Der Anschrieb von Zahlenwerten ist daher zu beschränken, oder überhaupt entbehrlich. Die Darstellungsmethode (b) z. B. nach Fig. 116 ist bequemer, als nach (a) Fig. 117.

- γ) Die Argumentwerte sind numerisch bekannt, die Funktionswerte linear gesucht. (Planzeichnung in verjüngtem Massstab, Gewinnung der Horizontalentfernung aus dem Lattenabschnitt zwischen den Distanzfäden eines Fernrohrs und dem Höhenwinkel etc.)

Hier beziehen sich die Streckenlängen auf die eine, die beigeschriebenen Zahlen auf die andere Veränderliche. Beide Formen sind gleich wichtig.

- δ) Die Argumentwerte sind linear bekannt, die Funktionswerte numerisch gesucht. (Feldaufnahmen, Massübertragung

Fig. 116.

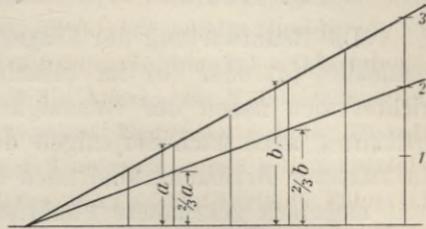


Fig. 117.

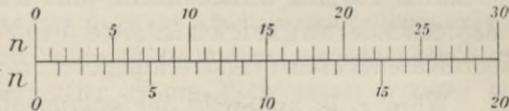


Fig. 118 a.

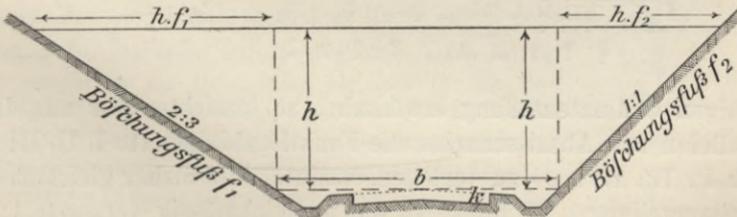
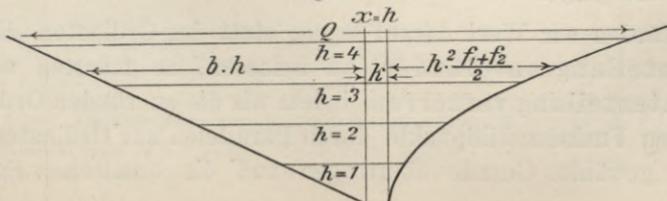


Fig. 118 b.

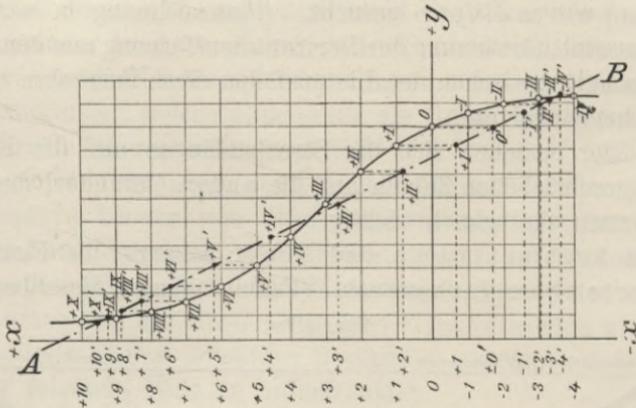


aus dem Plan aufs Gelände, Ermittlung der Geländeneigung aus gezeichneten Schichtenlinien, graphische Flächenberechnung, Berechnung von Querprofilflächen für bestimmte Normaleinschnittsprofile aus der abgegriffenen Einschnittshöhe, s. Fig. 118 a und 118 b etc.)

Die Beantwortung der Frage, welche der beiden Darstellungsmethoden (a) oder (b) im einzelnen Fall den Vorzug verdient, richtet sich neben der Genauigkeit und Bequemlichkeit der Benützung auch nach derjenigen der Gewinnung der Diagramme. In letzterer Beziehung sind nach irgend einem komplizierteren Gesetz mehrfach gekrümmte Funktionslinien natürlich unerwünschter, als geradlinige, oder kreisförmige. Um erstere in eine der letztgenannten Formen umzuwandeln, hilft man sich nötigenfalls durch entsprechende ungleichmässige Verzerrung der Teilung der Koordinatenachsen (Verstreckung).

Wäre z. B. an Stelle der gekrümmten Funktionslinie Fig. 119 eine geradlinige, etwa AB, und dazu die Beibehaltung der gleich-

Fig. 119.



mässigen Ordinatenenteilung erwünscht, so brauchten wir nur durch Parallelen zur Abszissenachse die Funktionsbildpunkte I, II, III.... nach I', II', III'.... zu verlegen, wodurch die bisher gleichmässige Abszissentheilung 1, 2, 3.... in die ungleichmässig verzerrte 1', 2', 3'.... überginge.

Würden wir Wert darauf legen, statt der Ordinaten- die Abszissentheilung unverändert zu belassen, so müssten wir die Ordinatenenteilung verzerren, indem wir die zu runden Ordinaten gehörigen Funktionsbildpunkte durch Parallelen zur Ordinatenachse auf die gewählte Gerade übertragen und die erhaltenen Schnitte

als Punkte neuer runder Ordinaten auf die Ordinatenachse projizieren würden.

Ja wir können, falls in beiden Fällen die Ungleichmässigkeit der Teilung zu stark und störend würde, beide Achsenteilungen gleichzeitig ungleichmässig verzerren, indem wir auf der gewählten Geraden beliebig (z. B. gleichabständig) ausgewählte Punkte als Ersatz bestimmter ursprünglicher Funktionsbildpunkte erklären und ihren Projektionsfusspunkten auf die Achsen die Koordinatenwerte dieser Funktionsbildpunkte zuschreiben. In beiden auf den Koordinatenachsen derart neu gewonnenen Punktreihen mit möglicherweise zunächst teilweise unrundern Werten lassen sich hernach die rundzifferigen Teilpunkte durch Interpolation finden.

Die zuerst vorgeführte Behandlung, welche die Ordinaten unverändert lässt, setzt voraus, dass die Abszissenwerte numerisch bekannt oder gesucht sind, während die Ordinatenwerte auch linear eingeführt werden können. Der zweite Weg setzt ersteres von den Ordinaten, und der dritte Weg von beiden, sowohl von den Abszissen- als den Ordinatenwerten, voraus.

Statt die ursprüngliche Funktionslinie nach Fig. 119 zunächst aufzuzeichnen, und die neuen ungleichmässigen Achsteilungen nach Einziehung der gewählten Ersatzlinie (Gerade oder Kreis) graphisch zu bestimmen, kann man genauer auf rechnerischem Weg verfahren.

Als Beispiel wählen wir den Messkeil (s. § 6), mittels dessen das zwischen je zwei Messstangenlagen offen zu lassende, bei bestimmter Lattenlänge l nur vom Neigungswinkel α abhängige Stück

$$d^1 = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (\text{s. § 12})$$

während der Messung berücksichtigt wird. Dieser musste bei gleichmässiger Teilung der α -Kante eine zweite Kante besitzen, die der 21-fach überhöhten Kurve $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ entspräche, also gekrümmt wäre (s. Fig. 120). Eine solche wäre sowohl für die Herstellung, als auch für die Benutzung unbequem. Statt dessen gibt man dem Keil einen beliebigen Winkel β und erhält dann für die mit α zu beziffernden, ungleichmässig verzerrten Kathetenstrecken x bei unverzerrten, weil linear zu gebrauchenden Ordinaten y die Beziehung:

$$y = d^1 = x \cdot \text{tg } \beta = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

woraus für $l = 5 \text{ m}$

$$\beta = \frac{R}{4} \quad x = \frac{10 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\text{tg } \beta} = 10 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \text{ctg } \frac{R}{4}.$$

Diese Kathetenstrecken x wachsen also bei geraden Kanten des Keils proportional zum Quadrat des \sin des halben Neigungswinkels (s. Fig. 121).

Fig. 120.

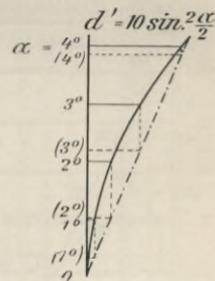
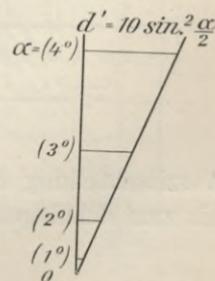


Fig. 121.



Als zweites Beispiel wählen wir die Ersetzung einer geschlossenen Funktionslinie durch einen Kreis:

Die darzustellende Funktion zwischen x und y laute: $k = m x^2 + n y^2$, wo k , m und n konstante Zahlen, x und y Veränderliche sind.

Diese Funktion lässt sich auch schreiben:

$$\frac{x^2}{n k} + \frac{y^2}{m k} = 1$$

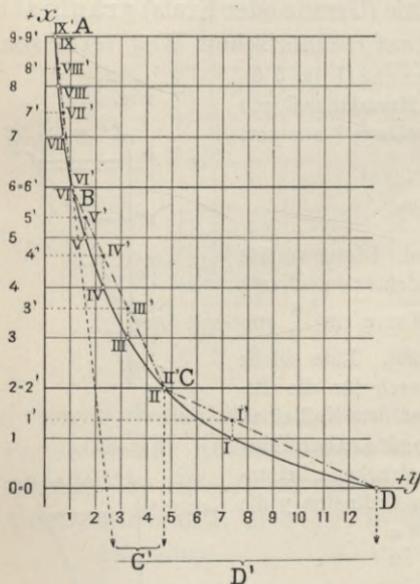
in welcher Form die Funktionslinie als Ellipse mit den Halbachsen $a = \sqrt{n k}$
 $b = \sqrt{m k}$

sich zeigt. Wäre das Achsverhältnis $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{n k}}{\sqrt{m k}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} = 1$, so hätten wir den speziellen Fall der Ellipse — den Kreis. Dies erreichen wir, wenn wir die grosse Achse, d. h. die Abszissen \sqrt{m} -fach vergrößert auftragen. Sei etwa kleine " " " " Ordinaten \sqrt{n}
 $m = 9$, $n = 4$ so müssen die Abszissen in dreifacher, die Ordinaten in doppelter Grösse aufgetragen werden. Die Achsteilungen werden also aufs doppelte, bezw. dreifache verzerrt, bleiben aber gleichmässig geteilt, die Ellipse wird zum Kreis.

Die Fig. 119 zeigt, dass vom Verlauf der Funktionslinie, welche durch eine einfach zu zeichnende Linie ersetzt werden soll, der Grad der Ungleichmässigkeit

der Achsteilungen abhängt. Eine allzu starke Ungleichmässigkeit ist aber unbequem wegen der erschwerten Interpolation und in Rücksicht auf die verfügbare Zeichenfläche. Ihr kann man vorbeugen, indem man die Funktionslinie statt durch eine einzige Gerade durch einen polygonalen Streckenzug $ABCD \dots$ mit wechselnder Divergenz gegen die Koordinatenachsen ersetzt. In Fig. 122 würde z. B. ohne diesen Ausweg die Beibehaltung der Ersatzgeraden AB auf die ganze Erstreckung der Funktionslinie in ihrem rasch ansteigenden Kurvenzweig CD die Ungleichmässigkeit der

Fig. 122.



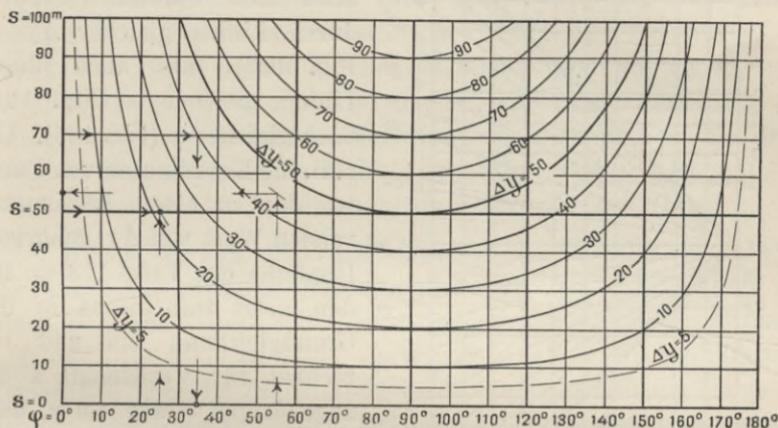
Abszissentheilung ins Unerträgliche und die Grösse der Zeichnung bis zum Schnittpunkt D' gesteigert haben!

II. Graphische Darstellung von Beziehungen zwischen mehr als zwei veränderlichen Grössen.

Enthält die darzustellende Beziehung ausser konstanten Grössen nur die Veränderlichen x und y , von denen nach Belieben jede als Argument, oder als Funktion aufgefasst werden kann, so ist sie wie

Fig. 123.

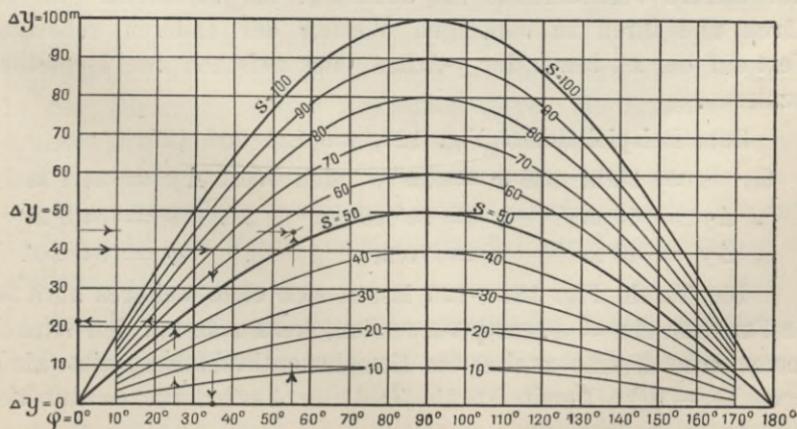
Funktion $\Delta y = s \cdot \sin \varphi$.
Linien-gleicher s .



bisher gezeigt, durch eine einzige Funktionslinie darstellbar. Wächst die Zahl der Veränderlichen über zwei, so genügt zur graphischen Dar-

Fig. 124.

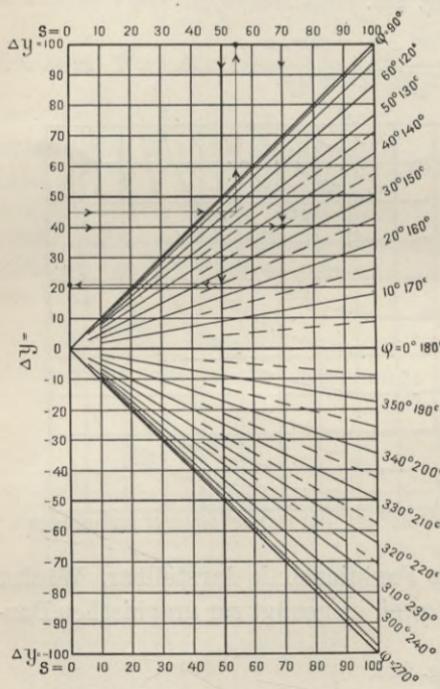
Funktion $\Delta y = s \sin \varphi$.
Linien-gleicher s .



stellung nicht mehr eine einzige Linie, vielmehr wird eine Schar von solchen notwendig, deren einzelne Individuen Linien gleicher Funktions- oder Argumentwerte, nach Vogler „Isoplethen“ sind. Jede

einzelne von diesen wird genau ebenso gezeichnet, wie die bisher jeweils benützte Funktionslinie.

Fig. 125.
Funktion $\Delta y = s \cdot \sin \varphi$
durch Linien gleicher φ



Beispiel:

Die Funktion $\Delta y = s \cdot \sin \varphi$ lässt sich darstellen sowohl durch Linien gleicher Δy (s. Fig. 123), als auch durch Linien gleicher s (Fig. 124), oder gleicher φ (Fig. 125). Um z. B. die Koordinaten von Punkten der zu einem bestimmten runden Wert von Δy gehörigen Isoplethe der Tafel 123 zu finden, setzt man diesen in der Grundgleichung ein und berechnet für wechselnde s die zugehörigen Werte von φ , oder umgekehrt. Jedes solche Wertpaar stellt dann die Koordinaten eines Punktes der fraglichen Isoplethe, deren stetige Verbindungslinie die letztere selbst dar.

Alle drei Darstellungen gestatten nach Belieben, die eine, oder andere Veränderliche als abhängig, als „Funktion“ zu erklären und ihren zu beliebigen Werten der anderen gehörigen Wert auf der x-, bzw. der y-Achse, oder zwischen zwei Isoplethen abzulesen.

Zum Beispiel liefert Fig. 123, wie 124 und 125

- für $s = 50$ m und $\varphi = 25^\circ$ den Wert $\Delta y = 21,1$ m
- „ $\Delta y = 45$ m $\varphi = 55^\circ 10'$ „ „ $s = 54,8$ m
- „ $\Delta y = 40$ m $s = 70$ m „ „ $\varphi = 34^\circ 50'$.

Die Tafeln Fig. 123—125 lassen sich ohne weiteres auch für die Funktion $\Delta x = s \cdot \cos \varphi$ verwenden, wenn man nur den Winkelwerten φ noch eine zweite, die Komplementbezeichnung gibt [$\sin \varphi = \cos (R - \varphi)$]. Damit ist die Zahl der Veränderlichen auf vier ($\Delta x, \Delta y, s, \varphi$) gestiegen.

Begreiflicherweise lässt sich durch entsprechende Verzerrung der Achsteilungen jede der Isoplethen, wie vorhin die einzelne Funktionslinie, zu einer, oder mehreren Geraden oder zum Kreis umwandeln. Im ersten Fall kann man zuweilen die gestreckten Isoplethen durch einen Punkt (Pol) gehen lassen. Dann braucht man sie nicht einmal zu zeichnen, sondern kann mit Gewinn für die Übersichtlichkeit die jeweils gebrauchte Funktionslinie durch Anspannen eines im Pol befestigten Fadens herstellen.

Eine andere, sehr übersichtliche, und für die Anwendung bequeme Darstellungsmethode für Funktionen mit drei Veränderlichen x , y , z , ist die Mehmkesche „Methode der fluchtrechten Punkte“. Diese beruht auf der passenden Auswahl von Trägern von Punktreihen x , y , z , die so angeordnet werden, dass die geradlinige Verbindung je zweier Wertpunkte (z. B. x und y), die dritte Skala in dem zugehörigen Wert z schneidet. Hienach ist u. a. die Werkmeistersche Tachymetertafel entworfen (s. Teil II).

Wächst die Zahl der Veränderlichen über 3, oder kommen Bedingungen für etwaigen Zusammenhang der Argumente unter sich hinzu, so treten weitere Scharen von Isoplethen oder Achsbezeichnungen auf und die Überlegenheit der graphischen Rechenhilfsmittel namentlich über die Zahlentafeln wird, soweit es sich um Übersichtlichkeit und Bequemlichkeit handelt, und die damit erreichbare Genauigkeit dem Zweck genügt, eine immer grössere. Ja man kann auch höhere Anforderungen an die Genauigkeit von einzelnen Veränderlichen noch erfüllen, durch entsprechenden Zahlenbeischrieb. So enthalten z. B. die graphischen Fahrpläne in der Regel als Achsteilungen die Angaben von Tageszeit und Kilometerzahl, bezw. Stationsnamen. Die einzelnen Eisenbahnzüge — die Isoplethen — werden als Verbindungslinien zusammengehöriger Orts- und Zeitpunkte gezeichnet. Dabei hindert nichts, ihre Abgangs- und Ankunftszeiten auf wichtigen Stationen in Zahlenwerten beizuschreiben. In der Divergenz dieser Zugslinien gegen die Koordinatenachse drücken sich Fahrtrichtung und -Geschwindigkeit aus. Die Steigungs- und Kurvenverhältnisse der Bahnlinie lassen sich parallel zu der die Kilometerteilung tragenden Achse, verschiedenerlei Uhrzeiten, da, wo solche in Frage kommen, parallel zur Tageszeitachse darstellen.

Auch sonst sind derartige graphische Tafeln im Gebrauch und durch den Buchhandel verbreitet. Angeführt seien nur die „Schleussingerschen graphischen Parametertafeln,“ welche zur Berechnung einer Streckenlänge s aus den Differenzen Δa

und Δo der Koordinaten ihrer Endpunkte (wobei $\Delta a > \Delta o$ sein mag) mittels der Gleichung dienen:

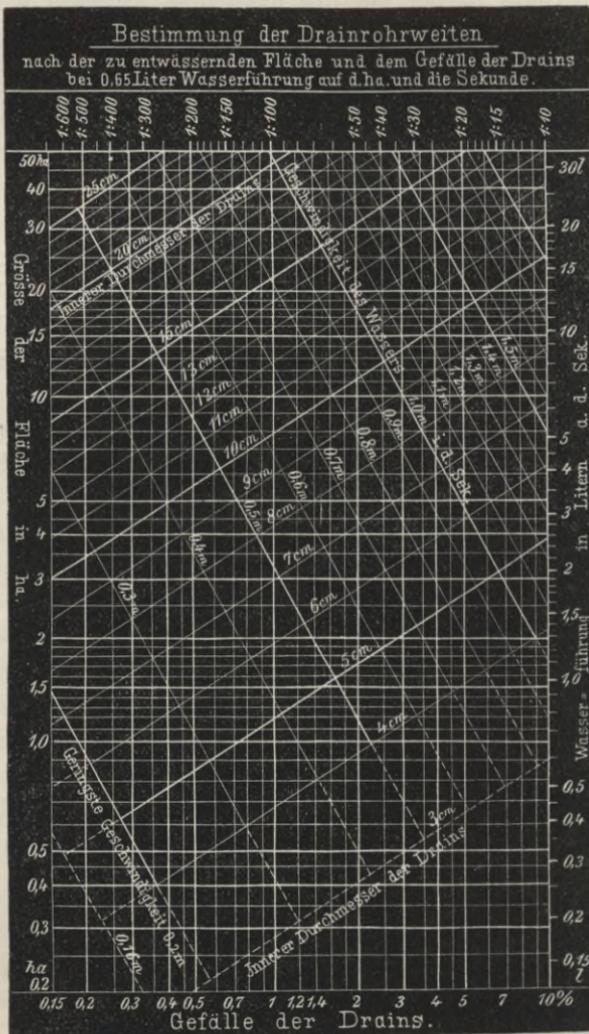
$$s = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta o^2} = \Delta a + p$$

$$\Delta o^2 = p(2\Delta a + p).$$

Für die Argumente Δa und Δo , die als Abszissen und Ordinaten aufgetragen sind, geben die Linien gleicher Differenzen p flache Kurven.

Die Landmesser Fennerschen Tafeln dienen, (wie die nach der Methode der fluchtrechten Punkte entworfenen Werkmeisterschen) zur Bestimmung der Horizontalentfernungen d und der Höhenunter-

Fig. 126.



schiede Δh aus den Abschnitten I zwischen den Distanzfäden und den veränderlichen Höhenwinkeln durch polygonale, verstreckte Iso-
plethenscharen (vergl. Tachymetrie).

Graphische Tafeln von Landmesser Egert-Berlin, wie auch solche von Seyffert, liefern für veränderliche Richtungswinkel φ und Strecken s die Richtungskoeffizienten $a = -\frac{\sin \varphi}{s} \varrho$, $b = \frac{\cos \varphi}{s} \varrho$ für trig. Punkteinschaltungen.

Die „Hürtenschen Kurventafeln zur Bestimmung der Leistungsfähigkeit unter Druck liegender Bauwerke“ geben die nötigen Querschnitte und Ausflussgeschwindigkeiten für Wasserleitungen, Durchlässe etc. als Funktion der zu befördernden Wassermenge, der vorhandenen Druckhöhe und der Länge des Bauwerks.

Der „Kalender für Vermessungswesen und Kulturtechnik“, herausgegeben von Schleich, enthält eine von Gebhardt entworfene graphische Tafel mit zwei Scharen von geradgestreckten Iso-
plethen für Drainrohrweiten und Durchflussgeschwindigkeiten, als Funktion von Gefälle und Grösse des zu entwässernden Gebiets bezw. sekundl. abzuführender Wassermenge (s. Fig. 126).

Soweit solche graphische Tafeln nicht veröffentlicht sind, lassen sie sich unschwer durch Zeichnung herstellen. Z. B. gibt die Multiplikation mit veränderlichen Faktoren x und y gleichseitige Hyperbeln als Iso-
plethen (s. Fig. 140), welche zu geraden, die Achsen unter 45° schneidenden Linien degenerieren, wenn man die Achsteilung statt mit gleichmässigen, mit logarithmischen Skalen versieht, wie beim Rechenstab.

Kapitel VII.

Flächenberechnung.

Die Ermittlung der Flächengrössen ist bei Horizontalmessungen häufig das Endziel der Aufnahmen, bei Vertikalmessungen dann, wenn es sich um Verwendung von Querprofilflächen zur Berechnung von Körperinhalten handelt, Mittel zum Zweck. Je nach den der Flächenberechnung zugrunde zu legenden Bestimmungsmitteln unterscheiden wir zwischen

Zweck und
Unter-
scheidung.

1. der Flächenberechnung aus (gemessenen oder berechneten) Masszahlen: „Berechnung aus Originalzahlen ohne Planbenützung“;
2. der Flächenberechnung mit teilweiser Benützung des Plans, oder „halbgraphischer Berechnung“;

3. der Flächenberechnung mittels ausschliesslicher Benützung des Plans oder „reingraphischer Berechnung“.

Als Flächeneinheit gilt das Quadrat über der Längeneinheit, in Deutschland also das Quadratmeter, wobei $1 \text{ qm} = 100 \text{ qdm} = 10\,000 \text{ qcm} = 1\,000\,000 \text{ qmm} = \frac{1}{1\,000\,000} \text{ qkm}$.

§ 26. Flächenberechnung aus direkten Aufnahme- oder aus berechneten Koordinatenmassen.

Die einfachste geschlossene Figur ist das Dreieck. Dessen Form und Grösse ist bestimmt:

1. Aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel und man hat für die doppelte Fläche (s. Fig. 127)

$$2F = ab \sin \gamma = bc \sin \alpha = ca \sin \beta.$$

2. Aus einer Seite und zwei anliegenden Winkeln und man hat

für die doppelte Fläche

$$2F = \frac{a^2}{\text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma} = \frac{b^2}{\text{ctg } \gamma + \text{ctg } \alpha} = \frac{c^2}{\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta}$$

3. Aus drei Seiten und man hat für die Fläche

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei s den halben Umfang vorstellt.

Ohne Kenntnis der speziellen Form lässt sich aber der Dreiecksinhalt auch berechnen aus Grundlinie und zugehöriger Höhe; und man hat $2F = ah = bh' = ch''$.

Der Inhalt des Vierecks wird am einfachsten berechnet als

Summe zweier Dreiecke nach den soeben kennen gelernten Regeln oder aus den Koordinaten der Eckpunkte in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem. Wählt man eine Diagonale f als Abszissenachse, einen Eckpunkt als Ursprung, so ergibt sich der Flächeninhalt am bequemsten (s. Fig. 128)

$$2F = fy_1 + fy_3 = f(y_1 + y_3).$$

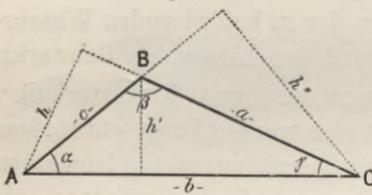
Aus beiden Diagonalen f und g und deren Schnittwinkel α ergibt sich der doppelte Inhalt als Summe desjenigen von vier Dreiecken zu

$$2F = f_1 g_1 \sin(2R - \alpha) + f_1 g_2 \sin \alpha + f_2 g_2 \sin(2R - \alpha) + f_2 g_1 \sin \alpha$$

und da $\sin \alpha = \sin(2R - \alpha)$

Fläche des Dreiecks.

Fig. 127.



Fläche des Vierecks.

Fig. 128.

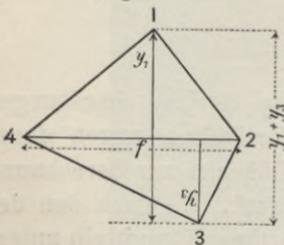
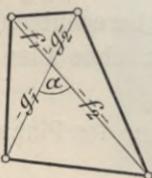


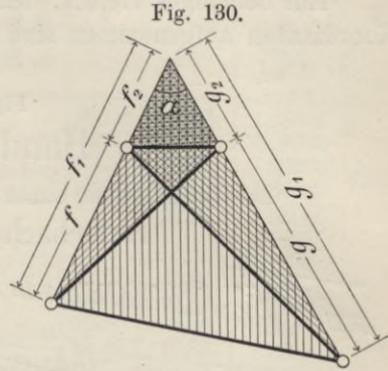
Fig. 129.



$$\begin{aligned} 2F &= \sin \alpha (f_1 g_1 + f_1 g_2 + f_2 g_2 + f_2 g_1) \\ &= \sin \alpha [f_1 (g_1 + g_2) + f_2 (g_1 + g_2)] \\ &= fg \sin \alpha. \end{aligned}$$

Dieselbe Formel führt zu dem (als Differenz der beiden betreffenden Dreiecke aufgefassten) Inhalt des verschränkten Vierecks. Die durch Schraffierung in Fig. 130 angedeutete Dreieckszusammenstellung liefert

$$\begin{aligned} 2F &= f_1 g_1 \sin \alpha - f_1 g_2 \sin \alpha \\ &\quad - f_2 g_1 \sin \alpha + f_2 g_2 \sin \alpha \\ &= \sin \alpha [f_1 (g_1 - g_2) \\ &\quad - f_2 (g_1 - g_2)] \\ &= f \cdot g \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$



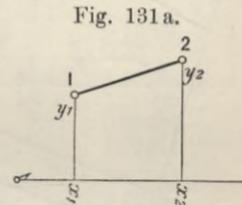
Hievon ist die Inhaltsformel

$$2F = ab \sin \gamma \text{ für das Dreieck}$$

nur der spezielle Fall gegenseitiger unendlicher Annäherung zweier Ecken des Vierecks.

Eine namentlich bei der Aufnahme nach rechtwinkligen Koordinaten häufig auftretende Form des Vierecks ist das Trapez, dessen beide Parallelseiten (Ordinaten) senkrecht stehen auf einer der andern (Abszisse). Man hat hier (s. Fig. 131a)

$$2F = (y_1 + y_2) \cdot (x_2 - x_1) = \Sigma y \cdot \Delta x.$$

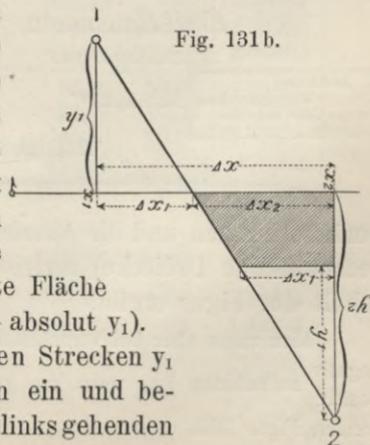


Liegen die Ordinaten auf verschiedenen Seiten der Achse (s. Fig. 131b), und versteht man unter dem Inhalt des (verschränkten) Trapezes wie oben die Differenz (nicht Summe) der beiden entstandenen Dreiecke, so

ergibt sich dieser als Trapez, wenn man die kleinere Ordinate (hier y_1) vom Endpunkt der grösseren (hier y_2) aus in der Richtung gegen die Achse abträgt. Das durch eine Parallele zur Abszisse abgeschnittene Dreieck ist dann kongruent dem linksseitigen und es bleibt für das verschränkte Viereck die in Fig. 131b schraffierte Fläche

$$2F = (\Delta x_1 + \Delta x_2) \text{ (absolut } y_2 - \text{ absolut } y_1).$$

Führt man statt der absoluten Strecken y_1 und y_2 deren algebraische Längen ein und behaftet, wie bisher konsequent die nach links gehenden



Ordinaten mit einem — Zeichen, so wird

$$2 F = (y_1 + y_2) (x_2 - x_1)$$

vollkommen übereinstimmend mit dem Inhalt des normalen (nicht verschränkten) Trapezes.

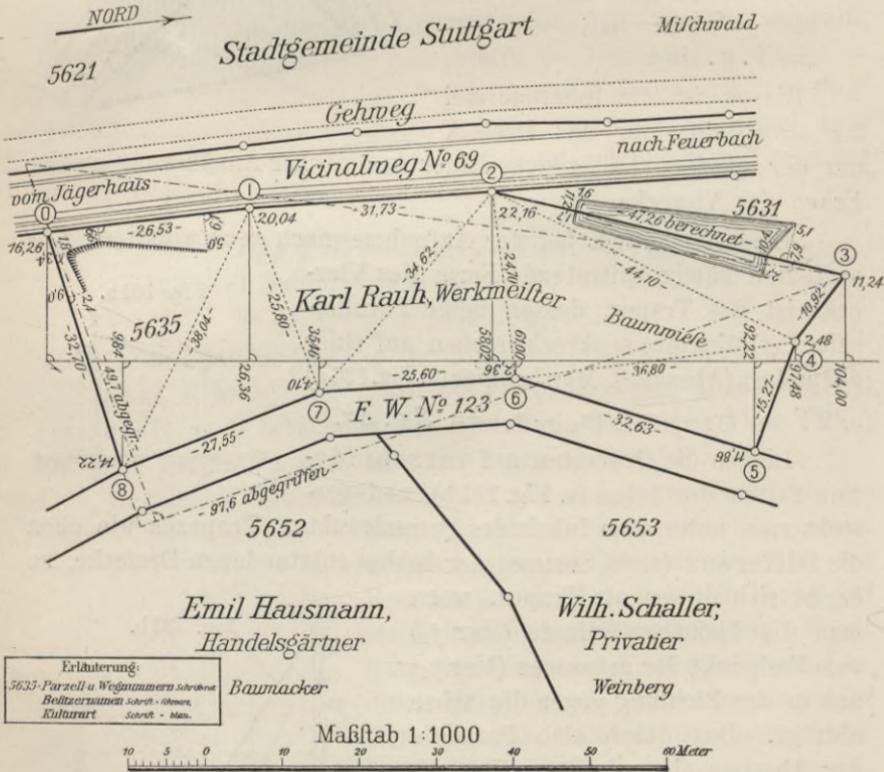
Fläche des Vielecks.

Ein beliebiges Vieleck, dessen Eckpunkte durch rechtwinklige Koordinaten aufgenommen sind (s. Fig. 132), wird durch die Eck-

Fig. 132.

Handriß

über die Aufnahme eines Grundstückes auf der
Feuerbacher Heide



punktsordinaten und die Abszissenachse in lauter Trapeze (eventuell rechtwinklige Dreiecke) zerlegt, deren Flächensumme den Gesamthalt der Figur ergibt.

Man muss aber bei verschränkten Trapezen beachten, dass deren Inhalt negativ zu nehmen ist, wenn die grössere Ordinate ausserhalb der zu berechnenden Figur fällt.

Beispiel der Flächenberechnung eines Grundstücks (Fig. 133)
 a) aus Koordinaten: b) aus Kontrollmassen¹⁾:

Abstich	Abszissen-Differenz	Ordinaten-Summe	Doppelter Inhalt	
			+	-
0-1	26,36	37,00	975,32	
1-2	31,66	42,20	1336,05	
2-3	45,98	33,40	1535,73	
3-4	6,52	-13,72		89,45
4-5	5,26	9,38	49,34	
5-6	31,22	14,22	443,95	
6-7	25,54	6,46	164,99	
7-8	25,62	18,32	469,36	
8-0	9,84	-2,74		26,96

$2F = 4858,33$
 $F = 2429,16 \text{ qm}$
 $= 24 \text{ a } 29 \text{ qm}$

Bezeichnung des Dreiecks	a	s	log s	F
	b	s - a	" s - a	
	c	s - b	" s - b	
	$2s$	s - c	" s - c	
		$2s$	log F ²	
			log F	+
0-1-8	38,04	48,63 ₅	1.68695	426,04
	32,70	10,59 ₅	1.02510	
	26,53	15,93 ₅	1.20236	
	97,27	22,10 ₅	1.34449	
		97,27	5.25890	
			2.62945	
1-7-8	27,55	45,69 ₅	1.65987	355,35
	38,04	18,14 ₅	1.25876	
	25,80	7,65 ₅	0.88395	
	91,39	19,89 ₅	1.29874	
		91,39	5.10132	
			2.55066	
1-2-7	34,62	46,07 ₅	1.66347	391,80
	25,80	11,45 ₅	1.05899	
	31,73	20,27 ₅	1.30696	
	92,15	14,34 ₅	1.15670	
		92,15	5.18612	
			2.59306	
2-6-7	25,60	42,46	1.62798	315,72
	34,62	16,86	1.22686	
	24,70	7,84	0.89432	
	84,92	17,76	1.24944	
		84,92	4.99860	
			2.49930	
2-3-4	10,92	51,14	1.70876	237,08
	44,10	40,22	1.60444	
	47,26	7,04	0.84757	
	102,28	3,88	0.58883	
		102,28	4.74960	
			2.37480	
2-4-6	36,80	52,80	1.72263	454,46
	24,70	16,00	1.20412	
	44,10	28,10	1.44871	
	105,60	8,70	0.93952	
		105,60	5.31498	
			2.65749	
4-5-6	32,63	42,35	1.62685	248,73
	36,80	9,72	0.98767	
	15,27	5,55	0.74429	
	84,70	27,08	1.43265	
		84,70	4.79146	
			2.39573	

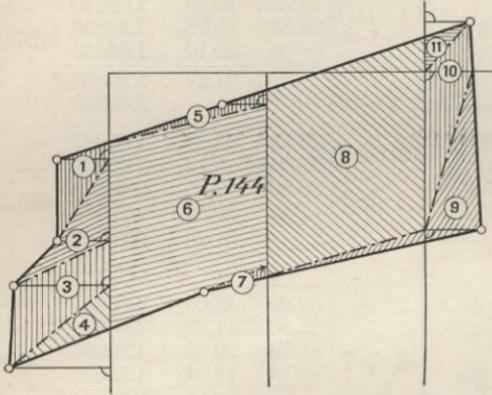
$F = 2429,13$
 $= 24 \text{ a } 29 \text{ qm}^1$

¹⁾ Um Übereinstimmung zu erzielen, wurden (im Gegensatz zur sonstigen Behandlung) die Koordinaten- und Kontrollmasse gegenseitig ausgeglichen.

Bei der Flächenberechnung aus Koordinaten wird immer zunächst der doppelte Betrag ermittelt. Die Halbierung jedes einzelnen Flächenteils (Abstichs) würde wie diejenige je eines der Faktoren jedes Abstichs neben der erweiterten Arbeit des Halbierens und der Gefahr der Stellenvermehrung (bei ungeraden cm-Massen müssen durch Halbieren mm mitgeschleppt werden) weitere Fehlerquellen bedingen und die Nachrechnung (Aufsuchen der Abstiche!) erschweren.

Als Beispiel der Berechnung eines nach der Parallelmethode aufgenommenen Grundstücks

Fig. 133.



methode aufgenommenen Grundstücks mit Benützung sämtlicher Aufnahme- (nicht Kontroll-)Masse möge P. 144 in Fig. 84 dienen, (siehe schematische Figur 133). Durch entsprechende Zerlegung (s. eingetragene Nummern) wurde dafür gesorgt, dass möglichst wenig Abstiche in Nachbarparzellen wiederholt auftreten:

Abstich 1)	$2,92 \times 5,06$	=	14,78
2)	$3,62 \times 6,20$	=	22,44
3)	$13,58 \times 10,78$	=	146,39
4)	$11,54 \times 6,42$	=	74,09
5)	$2,50 \times 9,74$	=	24,35
6)	$(13,32 + 12,34) \times 50,00$	=	1283,00
7)	$0,24 \times 1,24$	=	0,30
8)	$(12,78 + 14,14) \times 60,00$	=	1615,20
9)	$1,24 \times 16,52$	=	20,48
10)	$2,80 \times 14,36$	=	40,21
11)	$2,90 \times 0,76$	=	2,20

$$2 F = 3243,44$$

$$F = 1621,72$$

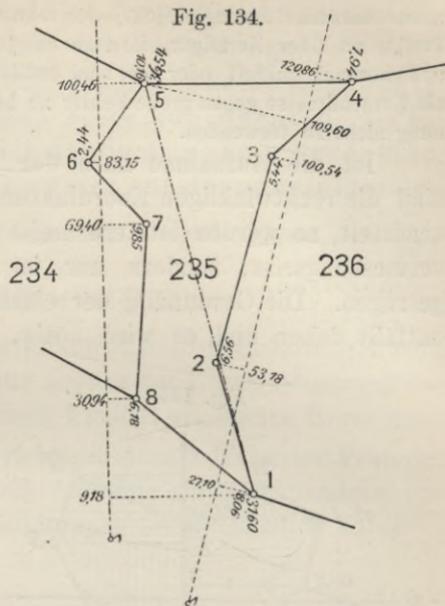
$$= 16 \text{ a } 22 \text{ qm.}$$

Mehrere, unter sich schiefe Aufnahmeflinien.

Sind statt einer einzigen Abszissenachse der Aufnahme mehrere solcher gegeneinander divergierender Geraden zugrunde gelegt, so müssen diese irgendwie in gegenseitige Verbindung gebracht sein. Die in Rücksicht auf die Flächenberechnung bequemste Verbindung wird dadurch hergestellt, dass je zwei Grenzpunkte

auf zwei aufeinanderfolgende Grundlinien aufgenommen werden (s. Fig. 134).

Die Figur wird in diesem Falle in ebensoviele Hauptteile zerfällt, als Grundlinien vorhanden sind. Als Berechnungsgrenzen für jeden dieser Teile dienen die Verbindungslinien je der beiden auf zwei aufeinanderfolgende Achsen doppelt aufgenommenen Punkte. In Fig. 134 sind die Eckpunkte (1) und (5) doppelt aufgenommen, ihre Verbindungslinie bildet daher die Berechnungsgrenze.



Abstich	Abszissen- differenz	Ordinaten- summe	2 F	
			+	-
1. Figur 1—2—3—4—5				
1—2	26,08	1,50	39,12	
2—3	47,36	— 12,00		568,32
3—4	20,32	2,50	50,80	
4—5	11,26	28,60	322,04	
5—1	82,50	28,48	2349,60	
2. Figur 1—8—7—6—5				
1—8	21,76	— 37,78		822,09
8—7	38,46	— 16,03		616,51
7—6	13,75	— 7,41		101,89
6—5	17,31	— 7,72		133,69
5—1	91,28	41,76	3811,85	
			6573,41	2242,44

$$2 F = 4330,97 \text{ qm}$$

$$F = 2165,49 \text{ qm} = 21 \text{ a } 65 \text{ qm.}$$

Ein weiteres Beispiel dieser Art liefert Parzelle 128 in Figur 84.

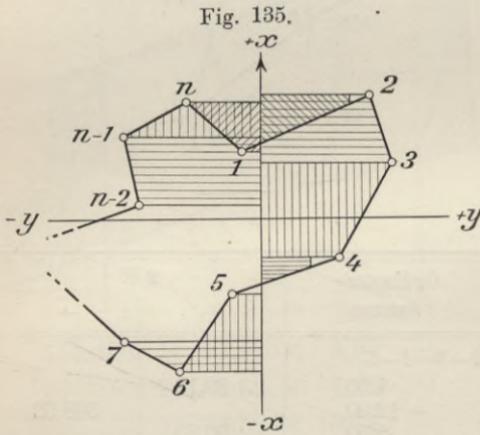
Ist statt eines der doppelt aufgenommenen Grenzpunkte ein beliebiger anderer, dem Umfang der Figur nicht angehöriger Punkt auf beide Linien bezogen (z. B. der Schnitt der letzteren eingemessen), so lässt sich die Figur ebensogut aufzeichnen, also auch ihrer Fläche nach berechnen. Nur müssen dann zu letzterem Zwecke die auf eine Linie bezogenen Koordinaten eines weiteren Grenzpunktes durch Rechnung auf die andere Linie „transformiert“ werden (s. Kap. 13).

Sind umgekehrt mehr als zwei Grenzpunkte auf je zwei aufeinanderfolgende Aufnahmelinien doppelt aufgenommen, so ist die Verbindung der letzteren überbestimmt. Es müssen daher Widersprüche in der Zeichnung und in der berechneten Flächengröße auftreten. Um solche zu eliminieren, sind die betreffenden Aufnahme-

masse entweder auszugleichen, oder man verbindet die doppelt aufgenommenen Punkte zu einer Kernfigur, die man aus jedem der Systeme unabhängig rechnet und hernach mittelt oder es sind endlich die überschüssigen Masse lediglich als Kontrollmasse gegen grobe Fehler zu betrachten und für die Flächenberechnung nicht zu verwenden.

Flächenberechnung ohne Benutzung einer Figur.

Ist die Aufnahme nach der Polygonalmethode erfolgt, und sind die rechtwinkligen Koordinaten der Eckpunkte durch Rechnung ermittelt, so werden letztere meist weder im Plan, noch im Stückvermessungsriß, sondern nur im „Koordinatenverzeichnis“ eingetragen. Die Gewinnung der einzelnen Abstiche aus der Figur entfällt daher und es wird nötig, allgemein gültige Beziehungen zwischen Flächengröße und Koordinaten aufzustellen.



Numeriert man zu diesem Zweck die Eckpunkte so, dass man beim Umgehen nach der Nummernfolge die Figur zur Rechten hat, so erhält man (mit Einführung der Koordinaten zunächst lediglich ihrem absoluten Wert nach) deren doppelten Inhalt $2F$ aus einer Summe von Trapezen je mit den Ordinaten

als Parallelseiten (s. Fig. 135):

$$2F = - (y_2 - y_1)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_3 + y_4)(x_3 + x_4) + (y_4 - y_5)(x_5 - x_4) - (y_5 + y_6)(x_6 - x_5) + \dots + (y_{n-2} + y_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + (y_{n-1} + y_n)(x_n - x_{n-1}) - (y_n + y_1)(x_n - x_1).$$

Legt man sämtlichen nach unten gerichteten Abszissen negativen Vorzeichen bei, so geht obige Gleichung über in:

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} 2F &= (y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_3 + y_4)(x_3 - x_4) \\ &+ (y_4 + y_5)(x_4 - x_5) + (y_5 + y_6)(x_5 - x_6) + \dots \\ &+ (y_{n-2} + y_{n-1})(x_{n-2} - x_{n-1}) + (y_{n-1} + y_n)(x_{n-1} - x_n) \\ &+ (y_n + y_1)(x_n - x_1). \end{aligned} \right.$$

Durch Ausmultiplikation und veränderte Zusammenstellung erhält man aus (I):

$$(II) \quad \left\{ \begin{aligned} 2F &= (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)(y_3 - y_2) + (x_3 + x_4)(y_4 - y_3) \\ &+ (x_4 + x_5)(y_5 - y_4) + (x_5 + x_6)(y_6 - y_5) + \dots \\ &+ (x_{n-2} + x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) + (x_{n-1} + x_n)(y_n - y_{n-1}) \\ &+ (x_n + x_1)(y_1 - y_n). \end{aligned} \right.$$

Die beiden Gleichungen I und II, „Trapezformeln“, lassen sich als Satz wie folgt ausdrücken: Hat man beim Umgehen in der Richtung des Numerierungszugs ein durch seine Eckpunktskoordinaten gegebenes n-Eck stets zur Rechten, so ist dessen doppelter Inhalt gleich der Summe von n Produkten, je bestehend aus der Summe zweier aufeinanderfolgenden Ordinaten mal der Differenz der zugehörigen, in der selben Reihenfolge eingeführten entgegengesetzten Abszissen

Rechenproben.

Rechenproben und Vereinfachungen. Eine durchgreifende Schlussprobe für die Berechnung liegt in der Übereinstimmung der zwei bei Benützung beider Formeln I und II erhaltenen Ergebnisse.

Zwischenproben für den richtigen Ansatz der beiden Faktoren jedes Produkts erhält man durch Addition der gleichnamigen von ihnen. Nachstehende vier Zahlengruppen liefern nämlich dabei:

y_1	+	y_2	x_1	+	x_2	x_1	—	x_2	y_2	—	y_1
y_2	+	y_3	x_2	+	x_3	x_2	—	x_3	y_3	—	y_2
y_3	+	y_4	x_3	+	x_4	x_3	—	x_4	y_4	—	y_3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
y_{n-2}	+	y_{n-1}	x_{n-2}	+	x_{n-1}	x_{n-2}	—	x_{n-1}	y_{n-1}	—	y_{n-2}
y_{n-1}	+	y_n	x_{n-1}	+	x_n	x_{n-1}	—	x_n	y_n	—	y_{n-1}
y_n	+	y_1	x_n	+	x_1	x_n	—	x_1	y_1	—	y_n
$\Sigma = 2 [y]$		$\Sigma = 2 [x]$		$\Sigma = 0$				$\Sigma = 0$			
Summenfaktoren						Differenzfaktoren.					

Die Ziehung dieser Summenproben wird wesentlich erleichtert durch Einführung dekadischer Ergänzungen für die negativen Summanden (vergl. § 22).

Auf das nachfolgende Beispiel angewandt, hätte diese Massnahme nicht bloss die Addition der Eckpunktskoordinaten erleichtert, sondern auch die sechs Vertikalspalten auf jeder Seite des Tabellenkerns auf je drei zu reduzieren erlaubt.

Zahlenkürzung. Liegt der Ursprung des Koordinatensystems weit entfernt von der Fläche, deren Inhalt berechnet werden soll, so sind die Eckpunktskoordinaten, also auch die Summenfaktoren sehr gross und die Multiplikation wird schwerfällig. Eine Vereinfachung, ohne Änderung des Flächeninhalts wird erzielt durch Parallelverschiebung jeder der beiden Koordinatenachsen, d. h. durch Reduktion sämtlicher Eckpunktskoordinaten um beliebige, gleiche runde Beträge. (Im nachfolgenden Beispiel sind die Abszissen um 25 200 m, die Ordinaten um 12 000 m reduziert.)

Kürzung der Faktoren.

$2F$	$y_r - y_{r-1}^1)$	$x_{r-1} + x_r$	$\frac{N_r}{k}$	Abszisse x x reduziert	Ordinate y y reduziert	$y_{r-1} + y_r$	$x_{r-1} - x_r^1)$	$2F$
+	+	+				+	+	+
6866,49	75,94	90,42	1	+ 25226,24 + 26,24	- 12163,18 - 163,18	250,42	37,94	9500,93
11923,24	97,00	122,92	2	+ 25264,18 + 64,18	- 12087,24 - 87,24	77,48	5,44	421,49
			3	+ 25258,74 + 58,74	- 11990,24 + 9,76			
1629,29	21,58	75,50	4	+ 25216,76 + 16,76	- 12011,82 - 11,82	2,06	41,98	86,48
	24,20	2,41	5	+ 25180,83 - 19,17	- 11987,62 + 12,38	0,56	35,93	20,12
1867,10	20,31	91,98	6	+ 25127,24 - 72,76	- 12007,93 - 7,93	4,45	53,59	238,47
4255,29	53,81	79,08	7	+ 25193,68 - 6,32	- 12061,74 - 61,74	69,67	66,44	4628,87
	101,44	19,92				224,92	32,56	7323,40
2020,68	197,14	308,76				5,01	136,94	21711,79
24912,12	197,14	173,42	2	$[x] = + 135,34$	$2[y] = + 619,54$	619,54	136,94	507,97
		135,34					0	
$2F = + 21203,83$ qm								$2F = + 21203,82$ qm
$F = 1$ ha 06 a 02 qm.								$F = 1$ ha 06 a 02 qm.

¹⁾ Bildet man die Differenzfaktoren sowohl aus den reduzierten als auch aus den nicht reduzierten Koordinaten, so sind diese, wie die Reduktion selbst kontrolliert. Die einzelnen Produkte können direkt oder mit Benützung der im sechsten Kapitel vorgeführten Rechenhilfsmittel ausgerechnet werden.

Die vorn zur Bildung von Gleichung (II) ausmultiplizierte Trapezformel (I) liefert durch Streichung der sich aufhebenden Produkte aus Faktoren mit gleichen Indices die weiteren Formeln:

Dreiecksformeln.

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} 2F = y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + y_4(x_3 - x_5) \\ \quad + y_5(x_4 - x_6) + \dots + y_{n-2}(x_{n-3} - x_{n-1}) + y_{n-1}(x_{n-2} - x_n) \\ \quad + y_n(x_{n-1} - x_1) \end{array} \right.$$

und

$$(IV) \left\{ \begin{array}{l} 2F = x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_5 - y_3) \\ \quad + x_5(y_6 - y_4) + \dots + x_{n-2}(y_{n-1} - y_{n-3}) + x_{n-1}(y_n - y_{n-2}) \\ \quad + x_n(y_1 - y_{n-1}). \end{array} \right.$$

Die beiden Gleichungen III und IV, „Dreiecksformeln“, die sich ebenso wie die Trapezformeln, aus der Figur ablesen lassen (vergl. z. B. die Abstiche 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11 in Fig. 133) lauten in Satzform: Hat man beim Umgehen in der Richtung des Numerierungszuges ein durch seine Eckpunktskoordinaten gegebenes n-Eck stets zur Rechten, so ist dessen doppelter Inhalt gleich der Summe von n Produkten, je bestehend aus einer Ordinate mal der Differenz der vorhergehenden — der nachfolgenden Abszisse. der nachfolgenden — der vorhergehenden Ordinate.

Vergleichung beider Formelgruppen. Die Dreiecksformeln sind für die Rechnung bequemer, als die Trapezformeln, weil bei ihnen die Bildung der Summe je zweier Koordinaten wegfällt, und für jeden auf der Abszissen-, oder Ordinatenachse liegenden Grenzpunkt ein Produkt gleich 0 wird.

Vergleichung der Berechnungsformeln.

Rechenproben: Für den richtigen Ansatz der Differenzfaktoren ergibt sich eine analoge Zwischenprobe, wie bei den Trapezformeln, nämlich:

Rechenproben.

$x_n - x_2$	$y_2 - y_n$
$x_1 - x_3$	$y_3 - y_1$
$x_2 - x_4$	$y_4 - y_2$
$x_3 - x_5$	$y_5 - y_3$
$x_4 - x_6$	$y_6 - y_4$
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
$x_{n-3} - x_{n-1}$	$y_{n-1} - y_{n-3}$
$x_{n-2} - x_n$	$y_n - y_{n-2}$
$x_{n-1} - x_1$	$y_1 - y_{n-1}$
$\Sigma = 0$	$\Sigma = 0.$

Als Beispiel verwenden wir das vorn behandelte wieder, führen jedoch an Stelle negativer Zahlen jetzt deren Ergänzungen ein:

2 F qm	y_{r+1} — y_{r-1}	Punkt Nr.	Abszisse x reduziert (25200)	Ordinate y reduziert (12000)	x_{r-1} — x_{r+1}	2 F qm
× 330,88	× 74,50	1	25226,24 26,24	× 87836,82 × 836,82	× 29,50	11504,19
11099,29	172,94	2	25264,18 64,18	× 87912,76 × 12,76	× 67,50	2835,30
4430,17	75,42	3	25258,74 58,74	× 88009,76 9,76	47,42	462,82
43,91	2,62	4	25216,76 16,76	× 87988,18 × 88,18	77,91	× 079,10
× 25,43	3,89	5	25180,83 × 80,83	× 88012,38 12,38	89,52	1108,26
5392,97	× 25,88	6	25127,24 × 27,24	× 87992,07 × 2,07	× 87,15	101,90
981,18	× 844,75	7	25193,68 × 3,68	× 87938,26 × 38,26	× 01,00	6112,26
21203,83	0,00				0,00	21203,83

F = 1 ha 06 a 02 qm

F = 1 ha 06 a 02 qm.

Spezielle Fälle.

Vierecks-
berechnung.

Die Dreiecksformel (III) liefert für den doppelten Inhalt eines Vierecks

$$2 F = y_1 (x_4 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_4) + y_4 (x_3 - x_1) \\ = - \{ (y_1 - y_3) (x_2 - x_4) + (y_2 - y_4) (x_3 - x_1) \},$$

d. h. der doppelte Inhalt eines Vierecks ist gleich der negativen Summe zweier Produkte je bestehend aus der Differenz der Abszissen zweier Gegenpunkte mal der Differenz der Ordinaten der beiden anderen, wobei die faktorenbildenden Koordinatendifferenzen in der Reihenfolge der das Viereck rechtslassenden Umgehung zu bilden sind.

Dreiecks-
berechnung.

Fasst man das Dreieck als ein Viereck auf, dessen beide Ecken 3 und 4 in 3 zusammenfallen, so dass $x_4 = x_3$, $y_4 = y_3$, so wird der doppelte Dreiecksinhalt $2 F = (y_1 - y_3) (x_3 - x_2) + (y_3 - y_2) (x_3 - x_1) \\ = (y_2 - y_3) (x_1 - x_3) - (y_1 - y_3) (x_2 - x_3).$

Jede der vier Klammern stellt die Abszisse bzw. Ordinate eines der Eckpunkte 1 oder 2 vor, wenn man das Koordinatensystem parallel mit sich selber in die Ecke 3 verschiebt. Bezeichnet man diese reduzierten Koordinaten mit $\xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2$, so ist für das Dreieck:

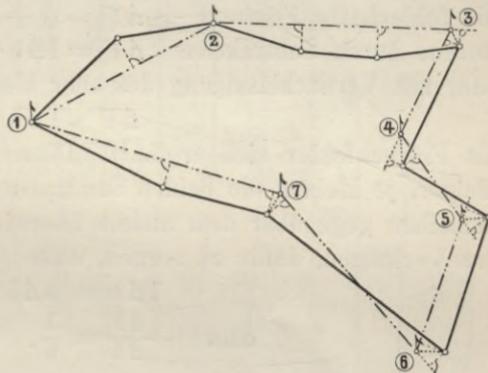
$$2 F = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 \text{ (Ursprung in 3)}$$

$$2 F = \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 \text{ (" " 1) etc.}$$

d. h. der doppelte Dreiecksinhalt ist gleich der Differenz der Produkte aus den verwechselten Koordinaten der beiden Eckpunkte, wenn der Koordinatenursprung mit der dritten Ecke zusammenfällt. Fällt dazu noch eine Dreiecksseite mit einer Koordinatenachse zusammen, so dass ein weiterer Eckpunkt auf letzterer liegt, so wird dessen Ordinate = 0 und die obige Formel geht über in die einfachste Form: $2 F = \xi_2 \eta_3 = a \cdot h$ (s. S. 198).

Sind nicht alle Eckpunkte der Figur auf die Hauptachsen koordiniert, sondern zum Teil auf Verbindungsstrecken koordinierter Punkte mittels rechtwinkliger Koordinaten aufgenommen, wie das bei Gemarkungs-, Flur-, Waldvermessungen die Regel ist (s. Fig. 136), so muss zum Zweck der Flächenberechnung je beim

Fig. 136.



Vieleck als Grundlage der Stückvermessung.

Übergang von einer Polygonseite zur andern, ein Grenzpunkt (nötigenfalls durch Koordinatenumformung, s. Kap. 13) auf zwei aufeinanderfolgende Polygonseiten bezogen werden.

Die dem Hauptpolygon zuzuschlagende, bzw. abzuschreibende Fläche zwischen den Polygonseiten und der Eigentumsgrenze wird dann durch Berechnungsgrenzen je vom doppelt aufgenommenen Grenz- zum fraglichen Polygonpunkt in einzelne Stücke zerlegt, deren Berechnung nach dem oben vorgeführten Verfahren erfolgt.

§ 27. Flächenberechnung mit teilweiser Benützung des Plans „halbgraphische Berechnung“.

Die halbgraphische Flächenberechnung, welche jede Einzelfläche als Produkt einer aus dem Plan abgegriffenen Strecke l und einer direkt gemessenen Strecke b ermittelt, hat namentlich auf dem Gebiet der neueren Katastervermessungen und der Grund-

Wesen und Anwendungsgebiet.

stücksteilungen eine hervorragende Bedeutung erlangt. Ohne der Berechnung aus direkten Masszahlen an Genauigkeit merklich nachzustehen (namentlich wenn beachtet wird, dass die gemessenen Koordinaten mit wesentlich grösseren Ungenauigkeiten behaftet sind, als die der halbgraphischen Berechnung zugrunde liegenden, bequemer zu messenden Kopf- und Steinlinienmasse), erfordert sie wesentlich geringeren Zeitaufwand, benützt zur Flächenbestimmung dieselben Masse, die zur etwaigen Grenzwiederherstellung dienen, und ist bei jedem beliebigen Aufnahmeverfahren anwendbar.

Sind die beiden Längendimensionen l und b , durch deren Multiplikation (gleichgültig, ob es sich um ein Dreieck, Rechteck oder Trapez handelt) die Flächenabstiche berechnet werden, mit den (mit algebraischen Vorzeichen eingeführten) Fehlern Δl und Δb behaftet, so erhält man statt der gesuchten Fläche

$$F = l \times b$$

die fehlerhafte Fläche $F + \Delta F = (l + \Delta l) (b + \Delta b)$,

woraus durch Subtraktion $\Delta F = l \Delta b + b \Delta l + \Delta l \times \Delta b$,

oder mit Vernachlässigung des sehr kleinen letzten Summanden

$$\Delta F \sim l \Delta b + b \Delta l$$

als Flächenfehler sich ergibt¹⁾. Dieser Flächenfehler wird um so kleiner, je kleiner die beiden Summanden sind und je weniger einer derselben gegenüber dem andern überwiegt. Es ergibt sich hieraus das Verlangen, dafür zu sorgen, dass

$$l \Delta b = b \Delta l$$

$$\text{oder} \quad \frac{\Delta l}{\Delta b} = \frac{l}{b}.$$

Die Dimensionen l und b einer zu berechnenden Figur lassen sich nur wenig (durch entsprechende Zerlegung der Figur) beeinflussen. Dagegen entspringen ihre Fehler Δl und Δb verschiedenerlei Ursachen und sind — weil die eine Strecke dem Plan entnommen, die andere direkt gemessen ist — verschieden gross. Der Fehler der abgegriffenen Strecke hängt ausser von der Messungs- und Zeichengenauigkeit namentlich vom Planmassstab, also zum Teil von unserem Willen ab, ist aber jedenfalls grösser, als der reine Messungsfehler. Folglich muss nach obiger Gleichung auch die zu ihm gehörige Berechnungsstrecke die grössere sein, d. h. das grössere Mass (die Länge l) ist abzugreifen, das kleinere (die Breite b) zu messen. Nimmt man an, aus dem Plane lasse sich eine Strecke mit einem Fehler von $\frac{2}{10}$ mm Planmass abgreifen, während sich ein Breitenmass mit einem Fehler von 2 cm messen lasse, so wird $\Delta l = \left(\frac{2}{10} \cdot m\right)$ mm, wobei m das Massstabsverhältnis des Plans bedeutet und $\Delta b = 2 \text{ cm} = 20 \text{ mm}$.

¹⁾ Kürzer: $F = l \cdot b$

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial l} \cdot dl + \frac{\partial F}{\partial b} \cdot db = b dl + l db \quad \text{oder für} & \begin{aligned} dF &= \Delta F \\ dl &= \Delta l \\ db &= \Delta b \end{aligned} \\ \Delta F &= b \Delta l + l \cdot \Delta b. \end{aligned}$$

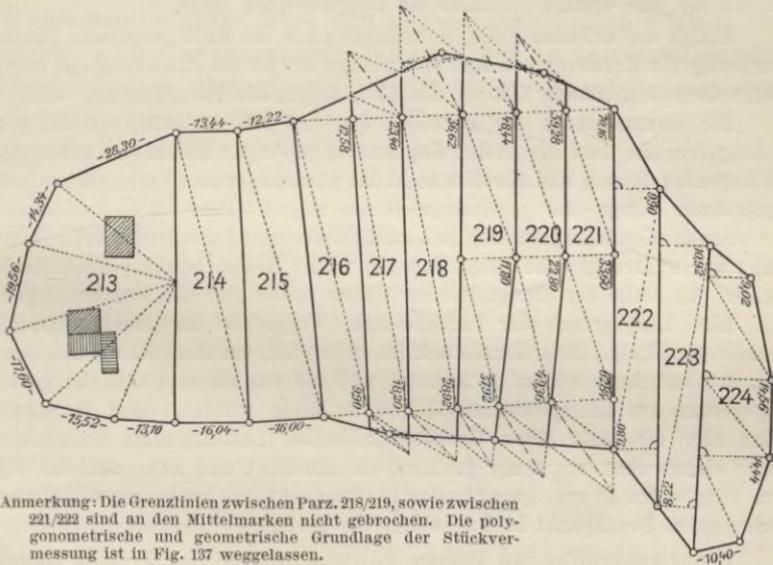
Für $m = 1000$ (Massstab 1 : 1000) wird damit das erwünschte Streckenverhältnis:

$$\frac{1}{b} = \frac{\Delta l}{\Delta b} = \frac{\frac{2}{10} \cdot 1000}{20} = 10.$$

Unter obiger Voraussetzung eignet sich demnach der Massstab 1 : 1000 besonders für die halbgraphische Berechnung von Grundstücken, deren Länge l ungefähr das Zehnfache der Breite b beträgt, der Massstab 1 : 500 für solche, die fünfmal so lang sind, als breit etc.

Besonders geeignet für die halbgraphische Berechnung sind demnach langgestreckte schmale Figuren. Dieselben werden durch Berechnungsgrenzen (Fig. 137) in Dreiecke oder Vierecke (Doppel-

Fig. 137.



Anmerkung: Die Grenzlinien zwischen Parz. 218/219, sowie zwischen 221/222 sind an den Mittelmarken nicht gebrochen. Die polygonometrische und geometrische Grundlage der Stückvermessung ist in Fig. 137 weggelassen.

dreiecke) mit gemessener Grundlinie zerlegt, deren Höhe abgegriffen wird. Allgemein erhält man (s. Fig. 128) den doppelten Inhalt eines Doppeldreiecks (Vierecks) = Diagonale \times senkrechtem Abstand der beiden zu ihr durch die zwei andern Ecken gezogenen Parallelen.

Die Parzelle 213 in Fig. 137 wird von einem beliebigen Punkt der Längsgrenze aus in Dreiecke zerlegt, deren Höhen aus dem Plan abgegriffen werden, während die gemessenen Grenz- (Kopf-) Masse von Markstein zu Markstein die Grundlinien bilden. Zur zweiten (Kontrollberechnung) wird die gemeinsame Spitze der Dreiecke verändert. Die Zeichnung der Berechnungsgrenzen ist unnötig.

Beispiele.

Bei den Parzellen 214 und 215 genügt je eine Diagonale zur Zerlegung in zwei passende Dreiecke. Diese Diagonale wird für die erste Berechnung grundsätzlich linkschief (von den Gewandgrenzen aus gesehen), für die zweite (Kontroll-) Berechnung rechtschief gedacht.

Bei den Parzellen 216, 217 und 218 ist zunächst das zwischen Steinlinie und Gewandgrenze liegende Flächenstück jeder Parzelle in ein Dreieck derart zu verwandeln, dass die Steinlinienbreite Grundlinie wird und die Spitze auf die Verlängerung der linksseitigen Grenze fällt. Durch eine (je von der Gewandgrenze aus gesehen) linksschiefe Diagonale denkt man sich die Grundstücke je in zwei Doppeldreiecke zerlegt, deren gemessene Dimension die Steinlinienbreite ist. Die abzugreifende Höhe ist je der Abstand zweier durch die Gegenecken gezogenen Parallelen zur Steinlinie. Für die zweite Berechnung wird, wenn nicht etwa die Kopfmasse auf der Gewandgrenze gemessen sind, deren Verwendung eine Kontrolle sowohl für die Flächenberechnung als auch für die Messung ergeben würde, das Flächenstück ausserhalb der Steinlinie nach rechts hinaus verwandelt und die Trennungslinie für jedes Paar von Doppeldreiecken rechtsschief gedacht.

Die Parzellen 219—221, deren Längsfurchen in der Mitte gebrochen sind, werden genau wie die vorigen behandelt, nur erhält man statt zweier Doppeldreiecke für jede weitere Steinlinie ein Doppeldreieck mehr.

Einige der seltenen Fälle, in welchen auch die halbrgraphische Flächenberechnung die Erhebung von Massen verlangt, die für die Zeichnung und etwaige spätere Grenzbestimmung fast wertlos sind, zeigen die Parzellen 222—224.

Die Gewandgrenze der Parzellen 222 und 223 verläuft so schief gegen die Längsfurchen, dass die zu den Kopfmassen gehörigen Höhen sich nur mangelhaft abgreifen lassen, und überdies nicht das wünschenswerte Verhältnis zwischen abgegriffener Länge und gemessener Breite zeigen. Hier ist es zweckmässig, auch wenn das Kopfmass gemessen ist, noch die senkrechte Parzellenbreite (Lotfusspunkt nur näherungsweise nötig, dagegen scharf in die Gerade einzuweisen) zu messen. An Stelle der abzugreifenden Höhen treten hier die Furchenlängen.

Eine Längsgrenze der Parzelle 224 (Weggrenze der „Schlussparzelle“) ist nicht geradlinig. Das Grundstück ist zu schmal, um ähnlich, wie das Grundstück 213 berechnet werden zu können, weil die von einem Punkt der geraden Längsgrenze aus abzugreifenden Höhen zu klein würden. Zur Berechnung dienen hier die senkrechten Grundstücksbreiten (Lotfusspunkte scharf in die Grenze einzuweisen, sonst nur genähert abzustecken), und zwar wird die Figur durch Diagonalen je vom gezeichneten Lotfusspunkt aus nach dem schief gegenüberliegenden Bruchpunkt in Doppeldreiecke zerlegt.

Hilfsmittel
zum Ab-
greifen der
Höhen.

Die abzugreifenden Höhen können mittels des Zirkels (direkt, oder bei grossen Dimensionen nach Einzeichnung einer in bestimmtem Abstand gezogenen Parallelen zur Steinlinie bzw. Gewandgrenze) dem Plan entnommen werden.

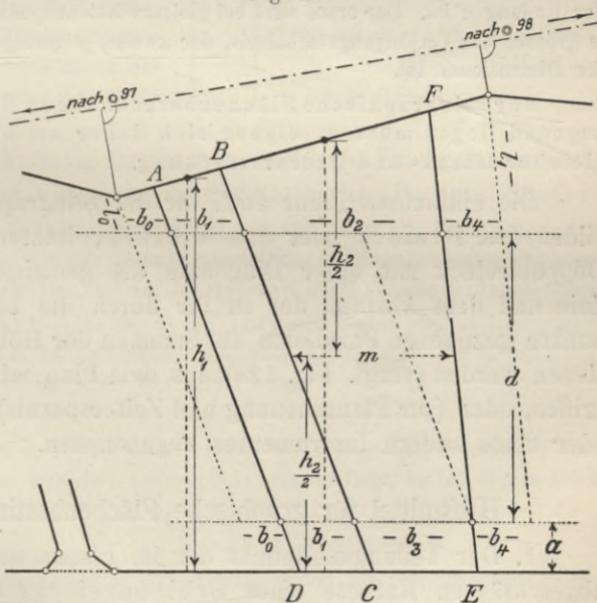
In Rücksicht auf Planschonung, Zeitersparnis und Genauigkeitssteigerung ist es aber zweckmässiger, Glastafeln zu verwenden, auf denen in Abständen von je 1 m oder $\frac{1}{2}$ m, oder 1 dm (im doppelten Planmassstab, um das Halbieren zu sparen) feine farbige Parallellinien und die zugehörigen Zahlen eingätzt oder durch Photographie auf eine dünne Gelatineschicht übertragen sind. Dieselben werden (die Ätzung nach unten) auf den Plan so gelegt, dass ihre Linienrichtung mit der Stein- oder Gewandlinie übereinstimmt und alsdann nötigenfalls längs eines seitlich angelegten Lineals parallel verschoben, bis die Nulllinie die Grundlinie bzw.

den unteren Eckpunkt des Doppeldreiecks deckt. Die Ablesung der Höhe, bezw. des Parallelabstandes am oberen Eckpunkt erfolgt durch Einschätzung zwischen die eingezöhten Parallelen.

Für die erste und zweite Berechnung werden getrennte Hefte geführt, die zur besseren Übersicht auf ein Schema gegründet werden können. Der Eintrag der Grundstücksnummern und der Berechnungsmasse erfolgt dann im Interesse der Zeitersparnis und Planschonung in zwei Zügen, nämlich: zuerst Eintrag der Parzellnummern und der Breitenmasse Grundstück für Grundstück durch die ganze Gewinn hindurch aus dem Handriss, sodann, nötigenfalls nach erfolgter Verwandlung der zwischen Steinlinie und Gewinn-grenze liegenden Flächenstücke (s. Fig. 137, Parzelle 217—221) und zusammenhängend über den ganzen geradlinigen Verlauf einer Steinlinie oder Gewinn-grenze: Ablesung der zu den Breitenmassen gehörigen halben Höhen. Schliesslich folgt, ebenfalls zusammenhängend, die Multiplikation der Abstände und die Zusammenstellung der Inhalte.

Eine eigentümliche Art der halb-graphischen Flächenbestimmung ist den nassauischen Konsolidationen mit ihren unter sich und zu einer Gewinn-grenze parallelen Steinlinien (s. Fig. 138) entsprungen: Für den Inhalt jedes viereckigen, von zwei Steinlinien durchschnittenen Grundstücksteils erhält man nur einen einzigen Abstich.

Fig. 138.



So ergibt sich $F_{ABCD} = b_1 \times h_1$, $F_{BCEF} = m \times h_2$ etc., wobei im Fall divergenter Längsgrenzen die Mittelbreite m zuerst aus folgender Proportion mittels Rechenschiebers zu berechnen ist:

$$(m - b_3) : (b_2 - b_3) = \left(\frac{h}{2} - a\right) : d$$

$$\text{also } m - b_3 = \frac{(b_2 - b_3) \left(\frac{h}{2} - a\right)}{d} = \frac{(b_2 - b_3) (h - 2a)}{2d}$$

$$m = b_3 + \frac{(b_2 - b_3) (h - 2a)}{2d}$$

§ 28. Reingraphische Flächenberechnung.

Anwendungsgebiet.

Die reingraphische Flächenberechnung muss häufig (z. B. für die Ermittlung der Inhalte von Querprofilflächen, Bonitätsabschnitten, sowie für Proberechnungen) angewandt werden, wenn örtlich erhobene Masszahlen nicht zur Verfügung stehen. Sie wird ausserdem, ohne dass dieser Zwang vorläge, in Rücksicht auf Zeitersparnis sogar bei Grundstücksberechnungen angewandt namentlich beim Vorhandensein von Grossgrundbesitz.

Sind l und b die dem Plan zu entnehmenden Strecken (Faktoren), Δl und Δb die ihnen anhaftenden Fehler, so wird wieder (wie S. 210)

$$\Delta F = l \Delta b + b \Delta l.$$

Da aber jetzt beide Masse abgegriffen sind, so ist auch

$$\Delta l = \Delta b, \text{ daher } \Delta F = \Delta l (l + b) = \Delta l \cdot \frac{u}{2},$$

wobei u den Umfang des Rechtecks aus beiden Bestimmungsmassen bezeichnet.

Der Fehler ΔF wird um so kleiner, je kleiner der Abgreiffehler Δl und der Umfang u ist. Der erste wird bei gleicher Zeichengenauigkeit um so kleiner, je grösser das Verjüngungsverhältnis, der zweite, je geringer die Verschiedenheit der Dimensionen ist.

Beste Grundform für reingraphische Flächenbestimmung.

Für reingraphische Flächenberechnungen, denen genaue Pläne zugrund liegen müssen, eignen sich daher am besten Figuren von gleicher Längs- und Quererstreckung.

Die einfachste Figur auch für die reingraphische Berechnung bildet das Dreieck oder das Viereck, letzteres betrachtet als Doppeldreieck mit einer Diagonale als gemeinschaftlicher Grundlinie und dem Abstand der zu ihr durch die beiden andern Eckpunkte gezogenen Parallelen als Summen der Höhen. Beide Dimensionen werden (vergl. Fig. 128) aus dem Plan mittels Zirkels abgegriffen, oder (zur Planschonung und Zeitersparnis) mittels Glastafel, oder eines andern Instrumentes abgenommen.

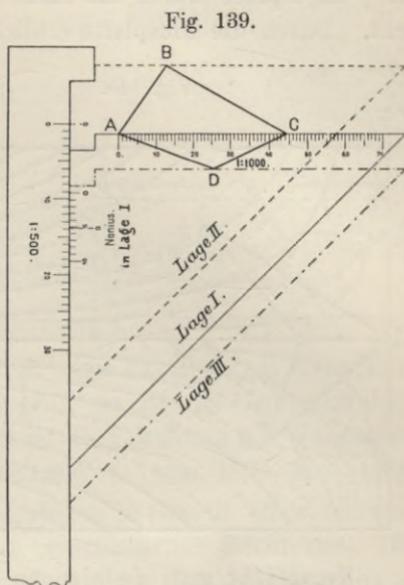
Hilfsmittel für graphische Flächenbestimmungen.

Hilfsmittel für graphische Berechnung von Vierecksflächen.

1. Der Teilungsnulldpunkt der im Planmassstab getheilten und abgeschrägten Kathete eines Schiebdreiecks (s. Fig. 139) wird mit dem Eckpunkt A, die Kathete selbst mit der Diagonale AC des Vierecks ABCD zur Deckung gebracht und alsdann die Länge der letzteren abgelesen (s. Lage I). Nachdem das hakenförmige Lineal an die andere Kathete angeschoben ist, wird die erste Kathete auf Punkt B parallel und sodann das Lineal gleichfalls verschoben, bis dessen Haken an der rechteckigen Aussparung des Schiebdreiecks ansteht (s. Lage II). In dieser Lage stimmt der Nullpunkt der im doppelten Planmassstab ausgeführten Lineal-

teilung mit dem Zeiger der linksseitigen Kathete überein. Endlich wird das Dreieck am Lineal nach abwärts geschoben, bis die abgeschrägte Kathete die Ecke D deckt. In dieser Lage (III) zeigt der Ablesestrich der linken Kathete auf der Linealteilung die halbe Höhensumme (9,2) an. Zur Verfeinerung der Ablesung kann man den Ablesestrich auf der Kathete durch einen Nonius (s. § 37) ersetzen.

An Stelle des in Fig. 139 dargestellten Instruments lässt sich zur Entnahme der beiden Berechnungsmasse (Diagonale und Abstand der zu ihr durch die zwei übrigen Eckpunkte gezogenen Parallelen) auch das in § 18 vorgeführte Müllersche, bzw. Wanische Kartierinstrument (s. Fig. 93) in der aus seiner Beschreibung hervorgehenden Weise verwenden.



2. Sehr zweckmässig für die reingraphische Flächenbestimmung von Dreiecken oder Vierecken ist die Klothsche „Hyperbeltafel“.

Die Hyperbel hat bekanntlich die Eigenschaft, dass alle Parallelogramme, von denen zwei Seiten mit den Asymptotenrichtungen übereinstimmen, während die Gegenecke ihres Schnittpunkts auf der Hyperbel liegt, konstanten Inhalt haben.

Für jeden Punkt P einer der in Fig. 140 gezeichneten gleichseitigen Halbhyperteln, deren senkrecht aufeinander stehende Asymptoten die Koordinatenachsen x und y darstellen, lautet diese Beziehung:

$$x \cdot y = K.$$

Wählt man also z. B. die Ordinate des Punktes P als Grundlinie eines Dreiecks, dessen Spitze irgendwo auf der y -Asymptote liegt, so ist dessen Inhalt

$$F = \frac{y \cdot x}{2} = \frac{K}{2}.$$

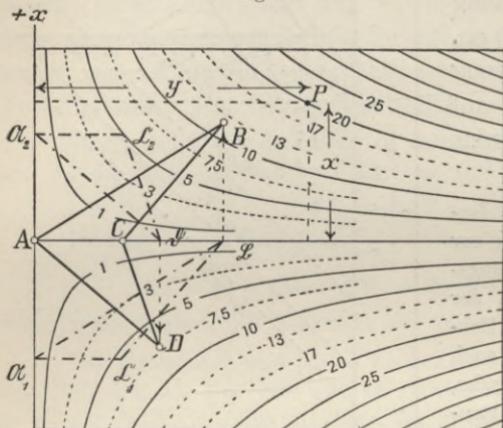
Der betreffenden Halbhypertel ist aus diesem Grund die Bezeichnung $\frac{K}{2}$ beigeschrieben.

Durch Übertragung der in Fig. 140 dargestellten doppelten Schar von Halbhyperteln samt ihren Werten $\frac{K}{2}$ und den Asymptoten auf eine Glasplatte erhält man die „Hyperbeltafel“.

Um mit ihrer Hilfe den Inhalt des Dreiecks ABC zu berechnen, legt man sie (die mit den Hyperbeln überzeichnete Seite nach unten) so auf den Plan, dass die y -Asymptote mit der Grundlinie AC und der Ursprung mit dem Eckpunkt A übereinstimmt (Normallage

von Fig. 140). Alsdann verrückt man an einem links angeschobenen Lineal die Tafel nach oben parallel mit sich selbst so lange, bis die y -Asymptote durch die Ecke B des zu berechnenden Dreiecks geht. Durch die Glasplatte erblickt man jetzt das Dreieck ABC im

Fig. 140.



Verhältnis zu den Hyperbeln in der Lage $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B} \mathfrak{C}_1$ und kann in \mathfrak{C}_1 direkt dessen Inhalt $F = 5,60$ ar ablesen.

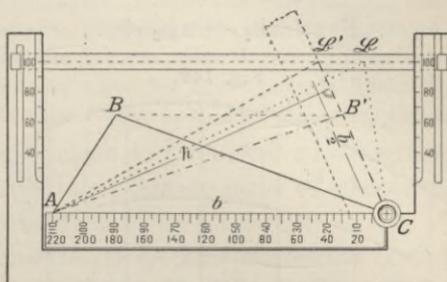
Um den Inhalt des Vierecks ABCD zu ermitteln, legt man die Hyperbelntafel so auf den Plan, dass deren Ursprung mit einer Ecke (etwa A) und die Richtung der y -Asymptote mit der zugehörigen Diagonale übereinstimmt.

Verschiebt man sie alsdann wie vorhin parallel mit sich selbst nach oben (y -Asymptote durch B, Dreieckslage im Vergleich zu den Hyperbeln = $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B} \mathfrak{C}_1$), so kann man wie vorhin den Inhalt $F_{ABC} = 5,6$ ar beim Punkt \mathfrak{C}_1 —, verschiebt man sie nach unten, bis die y -Asymptote durch D geht (Dreieckslage = $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}$), so kann man den Inhalt $F_{ACD} = 5,0$ ar beim Punkt \mathfrak{C}_2 ablesen. Daraus erhält man $F_{ABCD} = F_{ABC} + F_{ACD} = 5,6 + 5,0 = 10,6$ ar.

3. Von Waue in Hannover stammt ein auf folgende Überlegung sich gründendes, den Flächeninhalt von Dreiecken ebenfalls ohne Rechnung lieferndes Instrument: Der Inhalt eines Dreiecks $A \mathfrak{B} C$ von 100 m Höhe, $F = \frac{AC}{2} \cdot 100$, ergibt sich direkt durch Abgreifen der Grundlinie $AC = b$ im 50-fach verkleinerten Planmassstab zu 110 a. Schneidet man die durch die Ecke \mathfrak{B} gezogene Parallele zur Grundlinie AC in \mathfrak{B}' durch einen um C mit dem Radius $\frac{b}{2}$ beschriebenen Kreisbogen, so hat das Dreieck $A \mathfrak{B}' C$ die Eigenschaft, nicht bloss flächengleich mit $A \mathfrak{B} C$ zu sein, sondern auch in seiner Seite $C \mathfrak{B}'$ ein Mass für seine Flächengrösse zu besitzen. Nun ist es allerdings ein seltener Fall, dass das Dreieck, mit der Geraden AC , dessen Inhalt gesucht ist, gerade die Höhe 100 m besitze. Aber wenn seine dritte Ecke zufälligerweise auf der Geraden $C \mathfrak{B}'$, etwa in B' läge, so hätte es mit dem Dreieck $A \mathfrak{B}' C$ die Höhe h gemein. Die Flächen beider Dreiecke würden

sich also verhalten wie die zugehörigen Seiten $C\mathfrak{B}'$ und CB' . Also würde die in 100-fach verkleinertem Massstab abgegriffene Strecke CB' genau ebenso ein Mass für den Dreiecksinhalt $AB'C$ abgeben, wie die Strecke $C\mathfrak{B}'$ ein solches für $A\mathfrak{B}'C$. Aber auch die Ecke B des zu berechnenden Dreiecks ABC wird kaum je zufälligerweise auf die konstruierte Gerade $C\mathfrak{B}'$ zu liegen kommen. Also ist auch diese Betrachtung zunächst hin-

Fig. 141.



fällig. Verlegt man sie jedoch durch eine Parallele zur Grundlinie AC nach B' , so dass $ABC = AB'C$, so ist der Dreiecksinhalt $F = CB'$ direkt abgreifbar. Damit ist die Erklärung des Waueschen Instruments vorbereitet. (Vergl. Zeitschr. f. Verm. 1905, S. 554 ff.)

Es besteht aus einem Metallrahmen in Gestalt eines mit verschiebbarem Zelluloidstreifen oben geschlossenen Rechtecks. Die untere Langseite enthält ein um einen ihrer Punkte C drehbares Lineal mit geteilter Kante. Der Teilungsnullpunkt fällt zusammen mit dem Drehpunkt. Der Zelluloidstreifen lässt sich, sei es mit Benützung des Planquadratnetzes, sei es unter Benützung von Teilungen, welche auf den Schmalseiten des Rechtecks angebracht sind auf die Entfernung 100 m verschieben. Ermittelt man nun an dem Massstab die halbe Länge der Dreiecksgrundlinie und dreht ihn dann so weit, dass das ermittelte Mass den Zelluloidstreifen trifft, so braucht man bloss das ganze Instrument längs eines der Langseite angeschobenen Lineals zu verschieben bis der Massstab die dritte Ecke B des Dreiecks deckt. Die an dieser Ecke auf dem Massstab abgelesene Zahl stellt den Dreiecksinhalt dar.

Bei Berechnung eines Vierecks wählt man eine der Diagonalen als gemeinsame Grundlinie beider Dreiecke und kommt dann mit einer einzigen Einstellung des Massstabs aus.

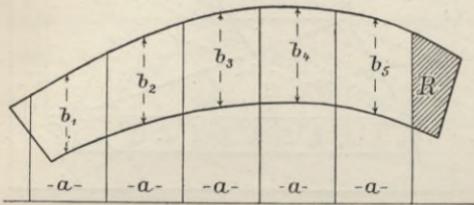
Jedes n -Eck lässt sich durch Diagonalen in $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ bzw. Zerlegung in Vierecke. (wenn zum Schluss ein Dreieck nötig wird) in $\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)$ Vierecke zerlegen, deren jedes man mit einem der vorgeführten Instrumente berechnen kann. Sein Flächeninhalt ist dann gleich der Summe der letzteren.

Unregelmässig begrenzte, namentlich langgestreckte Figuren (Flüsse, Strassen etc.) berechnen sich jedoch, wenn über-

hauptzerlegung angewandt werden will, bequemer durch Zerlegung in Trapeze mittels paralleler Geraden, deren Abstand man gleich einer runden konstanten Strecke a wählt. Man erhält dann mit den je in der Mitte abgegriffenen Breiten b den Flächeninhalt (s. Fig. 142)

$$F = ab_1 + ab_2 + \dots + ab_n + R = a[b] + R.$$

Fig. 142.



Die Parallelen werden möglichst \perp zur Längsrichtung der Figur gezogen, weil nur bei solcher Lage die mittleren Breiten b sich ohne Einzeichnung der Mittellinie scharf abgreifen lassen. Durch

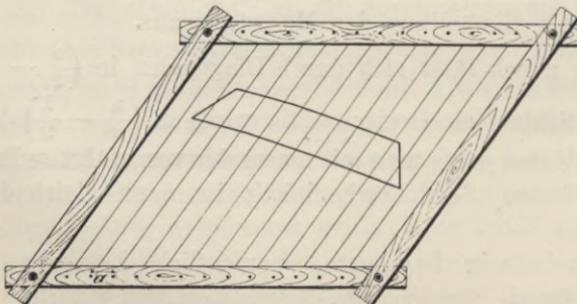
leichte Verdrehung der Parallelen ist es übrigens bei nicht zu grossem Parallelabstand a möglich, dafür zu sorgen, dass der Rest R wegfällt (d. h. dass an jedem Gewandend eine der Parallelen die Ausgleichungslinie bildet, wie in Fig. 142 am Gewandende links). In diesem Fall ist $F = a[b]$. Auch die Multiplikation dieser beiden Faktoren lässt sich noch sparen, wenn man die Breitensumme $[b]$ statt im Verjüngungsverhältnis des Plans $\left(\frac{1}{m}\right)$ im Massstab $\frac{1}{a \cdot m}$ abgreift.

Die Addition der Breiten b erfolgt mechanisch mittels des Zirkels, (das Restglied R ergibt sich nötigenfalls aus vermittelter Länge mal Breite).

Um den Plan zu schonen, werden die Parallelen nicht auf ihn, sondern auf einen Streifen Pausleinwand gezeichnet, welcher auf die Zeichnung gelegt wird.

Noch zweckmässiger ist ein rechteckiger Rahmen aus Karton bzw. Metall oder Holz, von welchem man zwei parallele Gegenseiten in lauter gleiche Stücke a teilt. Die korrespondierenden Teilpunkte werden harfenartig durch Seidenfäden verbunden (s. Fig. 143). Erfolgt die Verbindung der Seiten des Rahmens durch Scharniere, so lässt sich ihr Parallelabstand entsprechend etwaigem Planeingang durch Verschieben des Rechtecks in ein Parallelogramm regulieren.

Fig. 143.



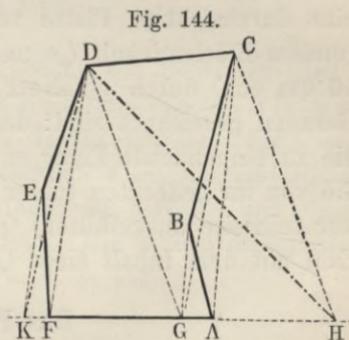
Die mechanische Addition der Breiten b wird noch etwas erleichtert durch Verwendung einer justierbaren Sperrvorrichtung am Zirkel, welche wirkt, sobald die Entfernung der Zirkelspitzen ein gewisses rundes Mass erreicht hat.

Schliesslich gibt es noch Instrumente, welche zum Zweck der Planschonung die Anwendung des Zirkels überhaupt vermeiden und die nötige Breiten-summe durch Abwicklung einer über die fraglichen Strecken hinweggeführten Rolle (Planimeter Mönkemöller s. Zeitschr. f. Verm. 1895, S. 331 ff.), oder durch mechanische Addition (Parallelverschiebung einer durchsichtigen, ein Rechtecknetz tragenden Zelluloidplatte mittels einer Nadel, s. Wildas Planimeter) liefern.

Statt das zu berechnende Vieleck in Dreiecke, oder Vierecke zu zerlegen, kann man es auch mittels Schiebdreiecks in eine solche Grundfigur flächengleich verwandeln.

Nach dem Satz der Planimetrie „Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich“ werden dabei die Ecken, eine nach der andern, verlegt auf eine der beiden nächsten ihr nicht anliegenden Grenzlinien. Fig. 144 zeigt z. B. die Verwandlung des Sechsecks $ABCDEF$ in das Dreieck KDH .

Verwandlung.



In Rücksicht auf Zeitersparnis, Genauigkeit des Resultats und möglichste Planschonung sind bei der an sich einfachen Ausführung folgende Regeln zu beachten:

1. Die Verwandlungsbasen sind so zu wählen und der Plan so zu legen, dass
 - a) die Grundlinie (hier AF) jeweils auf derjenigen Seite sich befindet, auf welcher die Nadel gehalten wird (rechts) und dass die Zeichenkante des Schiebdreiecks gut beleuchtet ist,
 - b) die entstehenden Figuren möglichst gleich lang und breit,
 - c) die Winkel zwischen Basis und zu ziehender Parallele möglichst $= R$.
 - d) die nötigen Parallelen möglichst kurz, jedenfalls kürzer, als die zu ihrer Orientierung dienenden Diagonalen werden.
2. Die in Fig. 144 gezeichneten Diagonalen und Parallelen werden nicht gezogen, sondern es werden nur die Schnitte der Parallelen mit der Verwandlungsbasis mittels feiner Punktiernadel eingestochen.
3. Die Verwandlung erfolgt mechanisch nach der Regel: Anlegen des Schiebdreiecks am Basisausgangs- und übernächsten Eckpunkt, Parallelschub nach dem zwischenliegenden Eck und Einstecken des Schnittpunktes der Schiebdreieckskante mit der Basis; Wiederanlegen des Schiebdreiecks an der Nadel und links am über-

nächsten Eck, sodann Parallelverschub zu dem ihm vorhergehenden Eckpunkt, Einstecken mit der Nadel etc.

Beispiel der Verwandlung eines n-Ecks in ein Dreieck vergl. Fig. 133. Das Ergebnis (strichpunktierte Grenzlinien) ist:

$$F = \frac{G h}{2} = \frac{97,6 + 49 \cdot 7}{2} = 24 \text{ a } 25 \text{ qm.}$$

Liegt dem Plan ein Quadratnetz zugrunde, so kann man jede zu berechnende Figur in ein Dreieck verwandeln, dessen Grundlinie eine der Quadratseiten ist. Man braucht dann nur die Höhe abzugreifen. Die runde Länge der Grundlinie vereinfacht die Multiplikation und erleichtert gleichzeitig die Berücksichtigung des Papiereingangs.

Schätz-
quadrat.

Für oberflächliche Berechnungen kann man schliesslich auch eine durchsichtige Platte verwenden, auf welcher Quadrate von rundem Flächeninhalt (je nach dem Planmassstabe etwa 1 a, oder 10 qm etc.) durch ein Netz senkrecht und parallel eingerissener Geraden gezeichnet sind: das „Schätzquadrat“. Wird dieses auf die zu berechnende Figur entsprechend gelegt, so braucht man nur die von ihr gedeckten (unter schätzungsweiser Berücksichtigung der nur teilweise ausgefüllten) Quadrate zu zählen und die erhaltene Zahl mit dem Inhalt eines Quadrats zu multiplizieren.

Das Polarplanimeter.

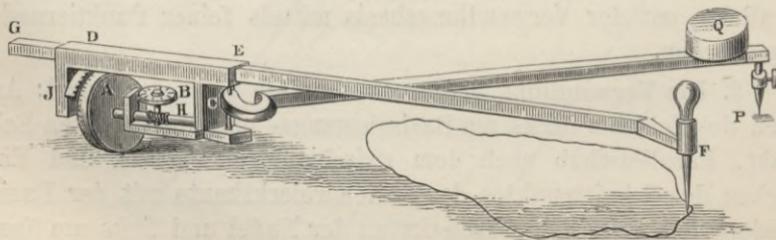
Instrument
zur Berech-
nung beliebig
begrenzter
Flächen.

Im Prinzip von dem bayerischen Trigonometer Hermann im Jahr 1814 erfunden, wurde das Planimeter seitdem vielfach, so namentlich im Jahr 1856 durch Prof. Amsler in Schaffhausen, später durch Hohmann, Coradi u. a. verbessert und hat sich eine hervorragende Stelle unter den Flächenberechnungsinstrumenten verschafft. Es liefert den Inhalt einer Figur durch einfaches Umfahren ihres Umfangs.

Ein-
richtung.

Das Amslersche Polarplanimeter besteht (s. Fig. 145) aus einem Arm FG, dem Fahrarm, der in dem Fahrstift F endigt und über den eine verschiebbare Hülse DE gestreift ist. Die letztere

Fig. 145.



trägt die beiden Lager für die parallel zum Fahrarm gerichtete Achse H einer Laufrolle (Fahrrad) A und für ein senkrecht zum Fahrarm stehendes Scharnier C, durch welches der Polarm CP mit dem Fahrarm in Verbindung gesetzt ist. Der bei der Flächenermittlung feststehende Pol P wird durch ein Gewicht Q beschwert. Durch ein Zahnrad werden die Umdrehungen der Rolle A bzw. ihrer Achse H behufs ihrer Zählung auf eine geteilte Scheibe B übertragen, von deren Umfang sich bei jeder vollen Drehung der Rollennachse ein Teil an einem mit der Hülse verbundenen Zeiger vorbeibewegt. Zur Ablesung von Teildrehungen der Laufrolle ist ihr Umfang in 100 Teile zerlegt. Ein mit der Hülse verbundener, zu einem zehnteiligen Nonius (vergl. § 37) ausgebildeter zweiter Zeiger J ermöglicht die Ablesung von $\frac{1}{1000}$ einer Achsen- bzw. Rollendrehung.

Die Anwendung des Instruments beruht auf folgender Überlegung¹⁾: Führt man eine Rolle derart über eine Strecke $AB = b$ hinweg, dass ihre Achse sich in allen Lagen parallel bleibt, so wickelt sich auf ihrem Umfang ein Bogenstück a ab, dessen Grösse abhängt von der Länge b der durchfahrenen Strecke und dem Winkel α zwischen ihr und der Radebene. Die Grösse dieser Abwicklung beträgt im Fall der Fig. 146 a, d. h. für

$$\alpha = 0 \quad \therefore \quad a = b \cos 0 = b$$

im Fall der Fig. 146 b, d. h. für

$$\alpha = R \quad \therefore \quad a = b \cos R = 0.$$

Fig. 146 a.

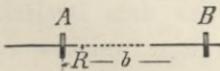
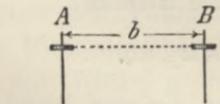
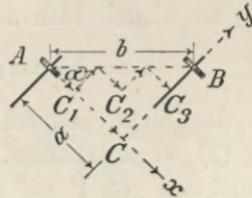


Fig. 146 b.

Fig. 146 c.



Ableitung der Beziehung zwischen Fläche und Rollenabwicklung.

Im Fall der Fig. 146 c (α von beliebiger Grösse) bleibt die Abwicklung a unverändert, ($a = AC = b \cos \alpha$), gleichgültig, ob man

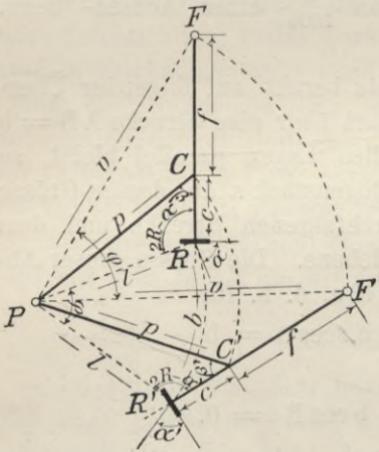
¹⁾ Die elementare Ableitung des Planimetergesetzes wird hier derjenigen durch Integration vorgezogen, weil das Planimeter vielfach von Technikern benützt wird, denen jenes mathematische Gebiet fremd ist und weil auch an den geodätischen Fachschulen die Lehre von der Flächenberechnung zumeist vor Einführung in die höhere Analysis behandelt werden muss.

die Rolle über die beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ACB, oder staffelförmig über C₁ C₂ C₃, oder (mit ∞ vielen, ∞ kleinen Staffeln) über AB selbst hinwegführt. Denn die Bewegung in der y-Richtung erzeugt keinerlei Drehung des Rades, während bei Bewegung in der x-Richtung jedesmal das durchfahrene Streckchen sich abwickelt. Die Summe der letzteren ist gleich der Projektion AC von AB. Für das Mass a der Abwicklung gilt also allgemein

$$(1) \quad a = b \cdot \cos \alpha.$$

Diese zwangsläufige Bewegung der Rolle (konstanter Winkel α zwischen Radebene und Weg) wird nun erreicht, wenn man bei

Fig. 147.



feststehendem Pol P mit dem Fahrstift F einen Kreisbogen um P als Mittelpunkt durchfährt. Denn in jeder Lage des Instruments (s. Fig. 147) bleiben unter obiger Voraussetzung die Strecken v, f, p und c einander gleich.

Es ist daher

$$\begin{aligned} \triangle PCF &\cong \triangle PC'F', \\ \text{also} \quad \sphericalangle \beta &= \beta' \\ \triangle PRC &\cong \triangle PR'C', \\ \text{also} \quad 2R - \alpha &= 2R - \alpha' \\ \alpha &= \alpha'. \end{aligned}$$

Wenn also der Fahrstift von F nach F' geführt wird, wobei das Fahrrad den Weg $b = RR'$

durchläuft, so wickelt sich auf letzterem die Strecke

$$(2) \quad a = b \cdot \cos \alpha = \frac{\varphi}{e} l \cdot \cos \alpha \quad ab.$$

Um die nicht bequem bestimmbaren Grössen l und α aus Gleichung (2) wegzuschaffen, setzen wir aus dem Dreieck PRC durch Projektion von P auf f (allgemein gültig, welches auch die Instrumentenstellung sein möge):

$$(3) \quad p \cos \beta = c + l \cdot \cos \alpha, \quad \text{also} \quad l \cdot \cos \alpha = p \cos \beta - c$$

und zur Eliminierung von β (ebenfalls allgemein gültig, da $\cos \beta = -\cos(2R - \beta)$):

$$(4) \quad v^2 = f^2 + p^2 + 2pf \cos \beta, \quad \text{also} \quad p \cos \beta = \frac{v^2 - f^2 - p^2}{2f}.$$

Damit liefert Gleichung (2):

$$(5) \quad a = \frac{\varphi}{e} \cdot \left(\frac{v^2 - f^2 - p^2}{2f} - c \right) = \frac{\varphi}{e} \cdot \frac{v^2 - (f^2 + p^2 + 2fc)}{2f}.$$

Der Klammerausdruck im Zähler, der nur vom Instrument abhängige Grössen enthält, lässt sich geometrisch deuten:

Verschiebt man den Fahrstift F auf dem Radius FP nach innen, oder aussen, bis die Verlängerung der Radebene durch P geht, (also P sich in R auf den Fahrarm projiziert) (s. Fig. 148), so ändert sich (nach dem allgemeinen pythagoräischen Lehrsatz) v^2 in

$$(6) \quad g^2 = f^2 + p^2 + 2fc,$$

so dass Gleichung (5) übergeht in

$$a = \frac{\varphi}{e} \frac{v^2 - g^2}{2f} \quad \text{oder}$$

$$(7) \quad \underline{af = \frac{\varphi}{e} \cdot \frac{v^2}{2} - \frac{\varphi}{e} \cdot \frac{g^2}{2}.}$$

Beide Summanden rechts stellen die Flächeninhalte von Kreissektoren mit dem gemeinsamen Zentriwinkel φ und den Halbmessern v bzw. g , ihr Unterschied also den Inhalt eines Kreisringsektors vor, der, (abgesehen von beiden Radien), von dem durchfahrenen Bogen FF' einer- und von dem Bogen GG' desjenigen Kreises anderseits begrenzt ist, auf dem der Fahrstift geführt werden muss, damit die Verlängerung der Radebene stets durch den Pol geht. Letzterer Kreis heisst der „Grundkreis“. Er hat die Eigenschaft, dass, wenn man den Fahrstift in irgendwelcher Richtung über ihn wegführt, (wobei der Winkel α zwischen Radebene und Weg konstant = R bleibt), nach Gleichung (1) die Abwicklung $a = b \cdot \cos R = 0$ wird. Das Rädchen gleitet nur, ohne sich zu drehen.

Die Ableitung der Gleichung (7) bleibt nun dieselbe wie oben, wenn der vom Fahrstift durchlaufene Bogen FF' statt ausserhalb des Grundkreises innerhalb desselben fällt, etwa die Lage F₁F'₁ annimmt (s. Fig. 149). Nur wird bei der Führung des Fahrstifts von F in der Richtung gegen den Mittelpunkt P der Winkel α zwischen Radebene und Weg immer grösser, erreicht im Fall der Figur 148 den Wert R, und wird schliesslich stumpf.

Damit ändert $\cos \alpha$, in Gleichung (1) also auch die Abwicklung a (Drehrichtung des Rädchens) das Vorzeichen.

Fig. 148.

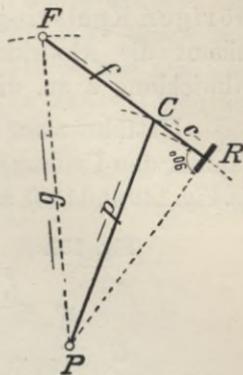
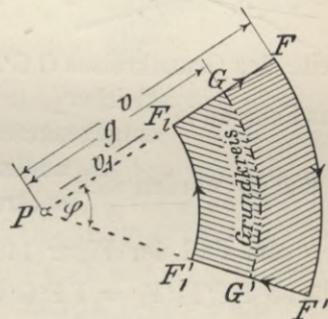


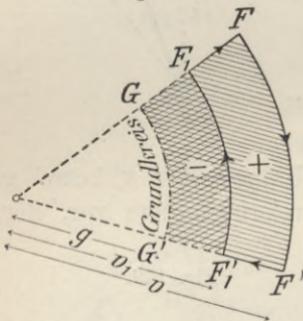
Fig. 149.



Durchfährt man daher in Fig. 149 statt des Bogens FF' mit dem Fahrstift jetzt den Bogen F_1F_1' , so wickelt sich eine Strecke a_1 auf dem Fahrrad ab, welche nach (7) mit der Fahrarmlänge f multipliziert den Inhalt des zugehörigen Kreisringsektors bis zum Grundkreis liefert. Nur nimmt die Abwicklung a_1 das entgegengesetzte Vorzeichen der Abwicklung a an, die sich beim Durchfahren von FF' ergab.

Umfährt man, statt die beiden Bögen FF' und F_1F_1' zu durchfahren, den Umfang des Sektors $FF'F_1'F_1$ etwa in der Pfeilrichtung (s. Fig. 149 und 150), so entspricht jeder bei der radialen Fahrt $F'F_1'$ auftretenden Instrumentenstellung eine genau-kongruente bei der Rückfahrt F_1F , da aber letztere der ersteren entgegengesetzt gerichtet und gleich gross ist, werden sich die Abwicklungen beim Durchfahren dieser beiden Radialstrecken gegenseitig aufheben. Bei dieser Fahrt werden sodann weiter die Bögen FF' bzw. $F_1'F_1$ in entgegengesetzter Richtung durchfahren.

Fig. 150.



Liegen diese also auf verschiedener derselben

Seite des Grundkreises GG' , so wird sich nach dem Vorhergehenden das Fahrrad in gleicher entgegengesetzter Richtung drehen, die Abwicklungen a und a_1 werden sich addieren subtrahieren.

Im Fall der Figur 149 wird also werden:

$$\text{Fläche } FF'F_1'F_1 = FF'G'G + GG'F_1'F_1 = af + a_1f = Af \quad (8)$$

im Fall der Figur 150 dagegen:

$$\text{Fläche } FF'F_1'F_1 = FF'G'G - GG'F_1'F_1 = af - a_1f = Af \quad (8)$$

wenn A die beim Umfahren des Sektors erzielte Abwicklung auf dem Fahrrad vorstellt, d. h. Satz: Umfährt man einen beliebigen Kreisringsektor, in dessen Mittelpunkt der Pol steht, mit dem Fahrstift, so wickelt sich auf dem Fahrrad ein Bogen ab, welcher mit der Länge des Fahrarms multipliziert den Inhalt des Sektors gibt.

Hat man den Inhalt einer beliebigen Figur zu berechnen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

Figur 151 Pol P ausserhalb der Figur

„ 152 „ P innerhalb „ „ .

Denkt man sich die Figur durch vom Pol P ausgehende Strahlen in schmale Sektoren zerlegt, und das zugehörige Stückchen der Grenzlinie je durch ein kleines um P beschriebenes Kreisbögen und ein radiales Zäckchen ohne Flächenänderung ersetzt und denkt man sich weiter um P den Grundkreis beschrieben, so erhält man ebensoviele zwischen letzterem und den betreffenden Teilstreckchen des Umfangs liegende Kreisringsektörchen, deren Fläche nach (7) sich berechnen lässt, wenn man die Grenzlinie bei in P feststehendem Pol mittels des Fahrstifts durchfährt. Da die bei den radialen Fahrten (Zäckchen) auftretenden Abwicklungen auf dem Fahrrad wegen der

Fig. 151.

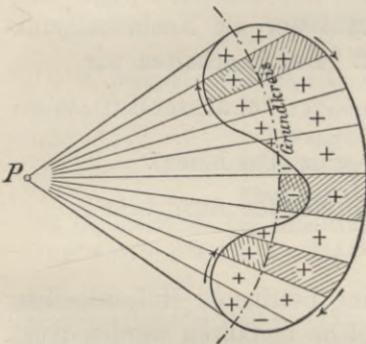
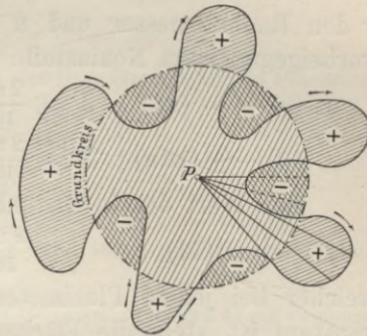


Fig. 152.



schliesslichen Rückkehr zur Anfangsstellung (je gleicher und entgegengesetzt gerichteter Weg bei kongruenter Instrumentenstellung) sich gegenseitig aufheben, so braucht man diese Fahrten gar nicht erst zu machen. Hieraus erhält man den Satz: Wird eine Fläche, welche den Pol nicht in sich schliesst (Fig. 151) mittels des Fahrstifts umfahren, so wickelt sich auf dem Fahrrad ein Bogen a ab, welcher mit der Länge f des Fahrarms multipliziert den Inhalt J der Fläche ergibt:

$$(9) \quad J = a \cdot f \quad (\text{Pol aussen}).$$

Genau dieselbe Betrachtung führt zum Flächeninhalt im Fall der Figur 152 (Pol innerhalb). Die ausserhalb des Grundkreises liegenden Grenzteile geben beim Durchfahren mit Fahrstift positive, die innerhalb liegenden Teile negative Drehung des Fahrrads. Das Produkt aus abgewickelmten Bogen und Fahrarmlänge liefert also nach (9) lediglich die Fläche der zwischen Grundkreis und Flächenumfang liegenden (möglicherweise verschränkten) Figur, d. h. den Unterschied der ausserhalb und innerhalb liegenden Flächen-teile. Der Gesamtinhalt ergibt sich demnach durch Hinzufügung der Grundkreisfläche

$$(10) \quad J = a \cdot f + g^2 \pi \quad (\text{Pol innen}),$$

wobei aber das Vorzeichen der Abwicklung a, das sich positiv ergibt, wenn der Grundkreis kleiner ist als J, zu berücksichtigen ist.

Der Rollenumfang ist nun schon aus dem Grund nicht etwa in mm eingeteilt, weil er weder eine runde Zahl solcher umfasst, noch darauf erhalten werden könnte (Abnützung). Vielmehr ist er (s. oben S. 221) in (zumeist 100, mit Hilfe des Nonius in 1000) gleiche Teile geteilt. Man kann also nicht die Abwicklung a in mm, sondern nur die Anzahl N von Umdrehungen ablesen, welche das Fahrrad beim Umfahren einer Figur mit dem Fahrstift gemacht hat und erhält dann die Abwicklung $a = N \cdot 2 r \pi = \frac{2 r \pi n}{1000}$, wenn r den Radhalbmesser und n die Anzahl der am Noniusnullpunkt vorbeigegangenen Noniusteile vorstellt. Damit erhalten wir

$$\text{aus (9) — } \cdot \text{ (9a) } \quad J = \frac{2 r \pi n}{1000} f \quad (\text{Pol aussen})$$

$$\text{„ (10) — } \cdot \text{ (10a) } \quad J = \frac{2 r \pi n}{1000} f + g^2 \pi \quad (\text{Pol innen}).$$

Bedeutung
der Nonius-
einheit.

Der Wert des in 9a und 9b auftretenden Ausdrucks

$$(11) \quad \frac{2 r \pi f}{1000},$$

welcher bei jedem Planimeter für eine bestimmte Hülsenstellung konstant ist, stellt die Fläche dar, welche umfahren werden muss, damit die Laufrolle sich um einen Noniusteil dreht. Er ist nur von der Länge f des Fahrarms und dem Rollenhalmmesser r abhängig und heisst: „Wert der Noniuseinheit“. Bezeichnet man ihn mit M, so erhält man

$$\text{aus (9a) — } \cdot \text{ (9b) } \quad J = M n \quad (\text{Pol aussen})$$

$$\text{aus (10a) — } \cdot \text{ (10b) } \quad J = M n + g^2 \pi \quad (\text{Pol innen}).$$

Je kleiner M, um so grösser wird für eine bestimmte Figur die Umdrehungszahl n, um so geringer also der Einfluss kleiner Ablesefehler in n.

Einstellung
einer be-
stimmten
Nonius-
einheit.

Eine Verkleinerung von (11) $M = \frac{2 r \pi f}{1000}$ lässt sich (da eine Verkleinerung des Radhalbmessers r die Teilungsintervalle, also die Ablesegenauigkeit, in gleichem Verhältnis reduzieren und überdies der Achsreibung grösseren Einfluss verschaffen würde) nur erzielen durch Verkleinerung der Fahrarmlänge f (Verschiebung der Hülse DE (Fig. 145) auf dem Fahrarm). Im ungefähr quadratischen Verhältnis nimmt aber die Grösse der Figur ab, welche bei verkleinertem Fahrarm aus einer Polstellung noch umfahren werden kann. Dies bestätigt die allgemeine Regel, dass die aufzuwendende Mühe im Quadrat der erreichten Verfeinerung des Ergebnisses wächst.

Einstellung
der Fahrarm-
länge.

Für die praktische Benützung ist es bequem, M gleich einer

runden Zahl (1, 2, 5, 10 etc.) von qmm Planfläche oder qm Feldfläche zu haben. Zu diesem Zweck hat man aus (11)

$$f = \frac{1000 M}{2 r \pi}, \text{ wo } f \text{ in mm und } M \text{ in qmm Planfläche, } \left. \begin{array}{l} \text{oder } f = \frac{1000 M \cdot 1000000}{2 r \pi \cdot m^2}, \text{ wobei } f \text{ in mm, } M \text{ in qm Feldfläche} \end{array} \right\} \text{ aus-} \\ \text{gedrückt ist und m das Verjüngungsverhältnis des Plans bedeutet.}$$

1. Beispiel: Gesucht die Fahrarmlänge f für ein Planimeter, dessen Lauf-
radhalbmesser $r = 12$ mm beträgt, für $M = 5$ qmm Planfläche.

$$f = \frac{1000 \cdot 5}{2 \cdot 12 \cdot \pi} = 66,3 \text{ mm.}$$

2. Beispiel: Wie lang ist der Fahrarm zu machen, wenn der Wert der
Noniuseinheit auf einem in 1 : 500 gezeichneten Plan 2 qm Feldmass entsprechen
soll und der Radhalbmesser 12,6 mm misst?

$$f = \frac{1000 \cdot 2 \cdot 1000000}{2 \cdot 12,6 \pi \cdot 500 \cdot 500} = 101,05 \text{ mm.}$$

3. Beispiel: Wie gross ist die Fläche des Grundkreises für ein Planimeter
mit den Dimensionen: Fahrarm $f = 132,6$ mm

$$\text{Polarm } p = 160 \text{ mm}$$

$$\text{Radachslänge } c = 40 \text{ mm}$$

$$\text{Planmassstab } 1 : 500 ?$$

Gl. (6) liefert für den Grundkreis:

$$g^2 \pi = (f^2 + p^2 + 2fc) \pi = (132,6^2 + 160^2 + 2 \cdot 132,6 \cdot 40) \pi = 168988 \text{ qmm Planmass,}$$

oder:

$$\frac{g^2 \pi \cdot m^2}{1000000} = (132,6^2 + 160^2 + 2 \cdot 132,6 \cdot 40) \pi \cdot \frac{250000}{1000000} \text{ qm} = 4 \text{ ha } 22 \text{ a } 47 \text{ qm Feldmass.}$$

Nun lässt sich aber weder der Raddurchmesser $2r$, noch die
Fahrarmlänge f , oder die Radachslänge c am Instrument mit genügender
Genauigkeit direkt abnehmen. Die vorstehenden Rechnungen
finden daher für praktische Zwecke keine Anwendung. Vielmehr
befinden sich in der Regel auf dem Fahrarm Massangaben für den
Grundkreis und Marken, auf welche ein Zeichen der Hülse einzu-
stellen ist, damit die Noniuseinheit den bei der Marke stehenden
Wert M erhalte. Jedoch ist auch diese Einstellung schon im Hin-
blick auf den Papiereingang nur als genäherte zu betrachten.

Zum Zweck der **genauen** Einstellung auf eine gewünschte
Noniuseinheit M für einen bestimmten Plan umfährt man mit dem
Fahrstift bei ausserhalb der Figur stehendem Pol eine durch
die Linien des Quadratnetzes begrenzte, oder wo dieses fehlt,
im Planmassstab gezeichnete Figur (Quadrat, Kreis, Rechteck)
von bekanntem Inhalt Q , also gewünschter Sollumdrehungszahl.
Erhält man hiebei statt der gewünschten Umdrehungszahl n die
Zahl n_1 , so ist nach Gleichung (9b) $Q = n \cdot M = n_1 \cdot M_1$

$$\text{oder nach Gleichung (11) } n : n_1 = M_1 : M = \frac{2 r \pi f_1}{1000} : \frac{2 r \pi f}{1000} = f_1 : f,$$

d. h. die Fahrarmlänge ist umgekehrt der gewünschten
Umdrehungszahl zu vergrössern oder zu verkleinern.

Zur Probe ist das Verfahren nach erfolgter Veränderung der Fahrarmlänge zu wiederholen. Statt die Kontrollfigur zu zeichnen, kann man unter Verzicht auf die Berücksichtigung etwaigen Papiereingangs auch einen Kreis, oder ein Quadrat umfahren, dessen Umfang in eine Metallplatte eingraviert ist. Oder man setzt den Fahrstift in ein Korn eines mit feiner Nadel auf dem Papier befestigten Metallstäbchens (Kontrolllineals) und zwingt letzteres durch Führung des Fahrstifts, um diese Nadelspitze einen vollen Kreis zu beschreiben.

Bestimmung
der Grund-
kreisfläche.

Der Inhalt des Grundkreises lässt sich, wenn der Fahrarm nach vorhergehendem auf die richtige Länge eingestellt ist, ebenfalls genauer durch Versuch ermitteln. Man umfährt irgendwelche Fläche zuerst mit aussenstehendem Pol (wodurch sich die Umdrehungszahl n_a ergeben möge), und sodann mit innenstehendem Pol (resultierende Umdrehungszahl n_1).

$$\begin{aligned} \text{Dann ist nach Gleichung (9b)} \quad J &= M \times n_a \\ \text{„ „ „ (10b)} \quad J &= M \times n_1 + g^2 \pi \\ \text{also Grundkreis} \quad g^2 \pi &= J - M \cdot n_1 = M \cdot n_a - M \cdot n_1 \\ &= M (n_a - n_1) \text{ qmm Planmass} \\ (12) \quad &= \frac{M (n_a - n) m^2}{1000000} \text{ qm Feldmass.} \end{aligned}$$

Sind nur wenige Flächen zu berechnen, so lohnt es sich meist nicht, die genaue Einstellung durch Probieren zu bewirken. Man wird dann lieber mit genäherter Einstellung die Probefigur Q umfahren und aus der hiebei erhaltenen Umdrehungszahl n die Noniuseinheit

$$M = \frac{Q}{n}$$

berechnen. Mit diesem (allerdings nicht runden) Wert von M sind die bei Umfahung der zu berechnenden Flächen erhaltenen Umdrehungszahlen zu multiplizieren, um deren Inhalte zu finden.

Praktische
Anwendung
des Plani-
meters.

Praktische Anwendung des Planimeters.

Um die Zahl n der an der Ablesemarke vorübergegangenen Noniusteile zu erhalten, wird der Pol ausserhalb der zu berechnenden Figur derart festgestellt, dass während des Umfahrens mit dem Fahrstift der Winkel zwischen Polarm und Fahrarm nie sich allzuweit von 1 R entfernt¹⁾ (das wird erreicht, wenn man zunächst den Fahrstift ungefähr in den Schwerpunkt der Figur, den Polstift aber so setzt, dass er in die, die Figur der Breite nach durchschneidende Achse und gleichzeitig in die Richtung der Radebene fällt) und das Rädchen dabei stets auf dem Plan sich bewegt. Der Beginn der Fahrt mit dem Fahrstift ist auf einen Punkt zu verlegen, wo sich das Rädchen möglichst langsam dreht. Der Plan (der selbstverständlich frei von Gummiresten, Falten, Wellen etc. zu halten ist) muss auf satter,

¹⁾ Einerseits zum Zweck grösstmöglicher Stabilität der Aufstellung und zur Vermeidung von Druck bzw. Zerrung am Pol und am Scharnier bei Fahrt in der ungefähren Richtung des Polarms, andererseits zur möglichsten Unschädlichmachung etwa vorhandener Rollenschiefe (s. S. 231).

ungefähr horizontaler Unterlage ruhen. Von Wert ist ein gleichmässig rasches, daher am besten freihändiges Umfahren. Beim Anfassen sind Scharnier- und Achslager sorgfältig zu schonen, die Laufrolle darf nicht berührt werden. Es geht daher nicht an, zu Beginn etwa die Ablesung 0 an der Rolle herzustellen, vielmehr wird vor Beginn der Fahrt und am Ende derselben, d. h. nachdem der Fahrstift wieder auf den Ausgangspunkt zurückgekehrt ist, abgelesen. Die Umdrehungszahl n ergibt sich dann als Differenz der beiden Ablesungen. Zum Schutz gegen etwa vor sich gegangene Unregelmässigkeiten wird das Umfahren wiederholt. Über die Anzahl der Wiederholungen bestimmt die preussische Anweisung VIII

vom 25. Oktober 1881, dass sie mindestens $\left. \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \right\}$ betragen muss,

wenn das Umfahren der Figur $\left. \begin{matrix} \text{mehr als 50} \\ \text{zwischen 30 und 50} \\ \text{weniger als 30} \end{matrix} \right\}$ am Nullpunkt

vorbeibewegte Noniuseinheiten liefert. Mögen die Ablesungen sein:

Vor Beginn der Fahrt 2543	} so ist	{	$n_1 = 1332$	$n_{\text{Mittel}} = 1333$
nach Beendigung der ersten Fahrt 3875			$n_2 = 1334$	
" " " zweiten " 5209				

und der Inhalt der umfahrenen Figur $J = 1333 \times M$.

Noch besseren Schutz gegen Ablese-, Umfahrungs- und gleichzeitig gegen Instrumentenfehler gewährt das Verstellen des Pols vor der zweiten Umfahrung.

Ist die zu berechnende Figur zu gross, um mit aussenstehendem Pol umfahren werden zu können, so kann man den letzteren auch in die Figur hineinsetzen. Man muss dann aber s. Gleichung (10b) zum Wert $M \times n$ noch den Inhalt des Grundkreises nach Gleichung (12) addieren. Dabei muss aber das Vorzeichen der Umdrehungszahl beachtet werden, welches positiv ist, wenn die umfahrene Fläche \geq ist, als der Grundkreis. Erfahrungsgemäss unterlaufen hiebei leicht Fehler und man zieht daher vor, die grosse Figur in kleinere Unterabteilungen zu zerlegen, die je mit aussenstehendem Pol umfahren werden. —

Untersuchung des Planimeters. Bei Ableitung der Planimeterformel setzten wir voraus:

Planimeter-
unter-
suchung.

1. dass gleicher Rollenabwicklung eine gleiche Zahl von Teilungsintervallen entspreche (Rollen- und Noniusteilung gleichmässig und richtig),

2. dass keine Reibungswiderstände die Rollenbewegung beeinflussen und

3., dass die Radachse mit dem Fahrarm zusammenfalle, oder wenigstens ihm parallel in der Ebene seiner Projektion auf den Zeichentisch liege.

Die Erfüllung der ersteren Forderung prüfen wir, indem wir den Planimeterpol in den Mittelpunkt eines Kreises stellen, dessen Umfang in gleiche Teile geteilt ist. Durchfahren wir dann mit dem Fahrstift die Bogenstrecken, so müssen die dabei erhaltenen Umdrehungszahlen der Rolle einander gleich sein. Etwa nötige Korrektur wäre Sache des Mechanikers.

Auch auf die zweite Anforderung ist das Planimeter leicht zu prüfen. Führt man nach erfolgter Ablesung den Fahrstift längs eines Lineals von einem scharf bezeichneten Anfangspunkt aus des Öfteren beliebig hin und her, so muss die Schlussablesung nach erfolgter Rückkehr auf den Anfangspunkt (da keine Fläche umfahren würde) mit der Anfangsablesung übereinstimmen.

Zu 3. Die Formelableitung ging von der Annahme aus, Fahrarm und Rollenachse fallen zusammen. Es wird aber die auf dem Fahrrad abgewickelte Strecke offenbar nicht verändert, wenn die Radachse von dieser Lage parallel mit sich selbst in der Projektionsebene zum Plan verschoben wird. Denn es ändert sich dadurch weder die Lage, noch die Länge b des vom Rad durchlaufenen Bogens, noch der konstante Winkel α zwischen ihm und der Radebene (s. Fig. 147).

Parallel ver-
schobene
Radachse
und
Radebene.

Ebenso lässt sich bei der Umfahrung mit aussenstehendem Pol der Abstand c vom Scharnierpunkt bis zur Radebene beliebig verändern, d. h. das Rad an irgendwelcher Stelle des Fahrarms FC , oder seiner Verlängerung anordnen, ohne dadurch die Gültigkeit der Formel (9) ($J = a \cdot f$) zu erschüttern. Denn eine Längsverschiebung der Rolle auf dem Fahrarm hat lediglich eine veränderte Grösse des um den Pol beschriebenen, bei Umfahrung mit aussenstehendem Pol aus der Formel eliminierten „Grundkreises“ zur Folge. Dasselbe zeigt übrigens schon die Tatsache, dass bei Ableitung von (9) c gar nicht auftrat! Bei Umfahrung mit innenstehendem Pol ergab sich dagegen

$$(10) \quad J = af + g^2 \pi, \text{ wo } g^2 = f^2 + p^2 + 2fc. \quad (6)$$

Hier ändert sich also zwar nicht das Planimetergesetz, wohl aber die Grundkreisfläche, sobald sich der Abstand c ändert.

Eine Parallelverschiebung der Radachse nach innen, oder aussen in horizontalem Sinn um die beliebige Strecke a (s. Fig. 153) ändert zwar den ursprünglichen Winkel α zwischen Radebene und Weg um den Betrag δ ; jedoch bleibt auch dieser neue Winkel ($\alpha \pm \delta$) während der Führung des Fahrstifts auf dem

um P beschriebenen Kreisbogen von F nach F' unverändert. Also tritt an Stelle von Gleichung (2) für die Grösse der Abwicklung jetzt lediglich die Gleichung

$$(2a) \quad a' = b \cdot \cos(\alpha \pm \delta).$$

Führt man diesen neuen Abwicklungsbetrag a' in der vorhergehenden Ableitung ein, so ergeben sich wieder die Gleichungen (9) und (10), mit dem

einzigsten Unterschied, dass der Grundkreis $g^2 \pi$ einen veränderten Wert annimmt. Das Planimeter-Grundgesetz bleibt also unverändert.

Anders liegt die Sache, wenn die Radachse gegen diejenige des Fahrarms um einen Winkel λ divergiert, (das Instrument „Rollenschiefe“ aufweist), so dass der Winkel zwischen Radebene und dem vom Rad zurückgelegten Weg statt α wird $\alpha \pm \lambda$.

Auch dieser Winkel bleibt zwar, während in Fig. 147 der Fahrstift auf dem Bogen FF' geführt wird, unverändert, so dass auch hier die Abwicklung wird

$$(2b) \quad a'' = b \cdot \cos(\alpha \pm \lambda) = \frac{\varphi}{e} l \cos(\alpha \pm \lambda).$$

Aber die Gleichung (3), welche bei (2) zur Eliminierung von α , bei (2a) zur Eliminierung von $(\alpha \pm \delta)$ und schliesslich zu Gleichungen (9) und (10) führte, lässt λ unberührt.

Man erhält bei sehr kleinem λ aus (2b)

$$(2c) \quad a'' = \frac{\varphi}{e} l (\cos \alpha \mp \lambda \sin \alpha) = \frac{\varphi}{e} l \cos \alpha \mp \frac{\varphi}{e} \lambda l \cdot \sin \alpha$$

und beeinflusst von λ : (3) $p \cos \beta = c + l \cos \alpha$ zur Eliminierung von l und α .

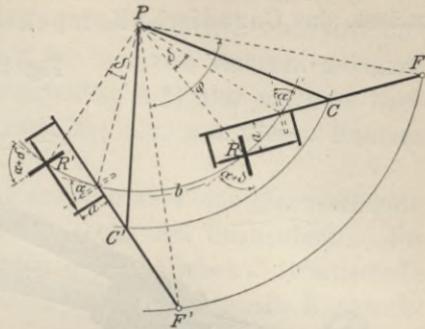
Die weitere Untersuchung zeigt, dass vorhandene Rollenschiefe Abwicklungsfehler erzeugt, die beim Übergang von stumpfwinkliger zu spitzwinkliger Armstellung beständig wachsen (bezw. abnehmen) und in der Nähe der rechtwinkligen Armstellung den Betrag 0 erreichen. (Hierüber vergl. u. a. Zeitschr. f. Verm. 1878, S. 249 ff., 1892 S. 609 ff. und 1894 S. 353 ff.)

Um ein Instrument auf etwa vorhandene Rollenschiefe zu untersuchen, wird man daher eine beliebige Figur mit verschiedenen Polstellungen umfahren. Die erhaltenen Umdrehungszahlen müssen dann innerhalb enger, durch Ables- und Umfahrungsfehler erklärlicher Grenzen miteinander übereinstimmen. Zur Wegschaffung etwa vorhandener Rollenschiefe bringen einzelne Werkstätten an ihren Planimetern eine Vorrichtung zur Veränderung der gegenseitigen Lage von Fahrarm und Radachse an.

Weitere Entwicklung von Planimeterformen.

Die soeben festgestellte Wirkung der Rollenschiefe hat zur Konstruktion eines Polarplanimeters geführt, der bei der zweiten

Fig. 153.



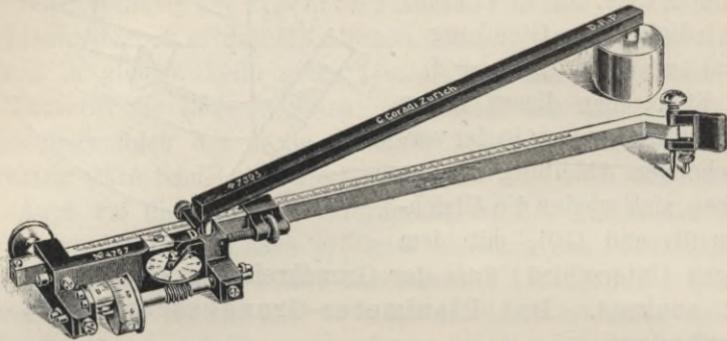
Rollenschiefe.

Andere Planimeterformen.

Umfahrung eine der ersten symmetrische Stellung der beiden Arme zulässt, das Coradische Kompensationsplanimeter (s. Fig. 154).

Kompensationsplanimeter.

Fig. 154.



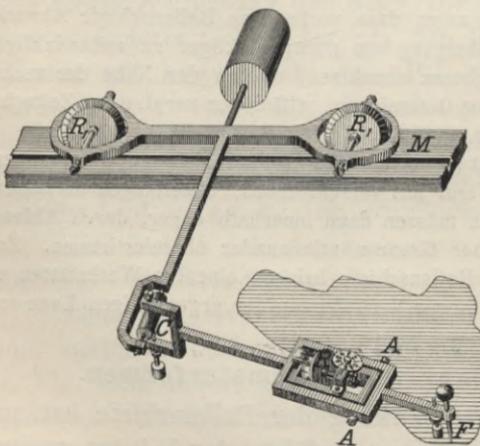
Dieses ersetzt das Scharnier C (Fig. 145) durch eine kegelförmige Bohrung D der Fahrarmhülse, in welche ein kugelförmiges Hakenende des Polarms einpasst, so dass Pol und Polarm bei der ersten Umfahrung auf der einen, bei der zweiten Umfahrung auf der andern Seite vom Fahrarm angeordnet werden können. —

Die Gleichung (9) $J = a \cdot f$ zeigt, dass bei Umfahrung mit aussenstehendem Pol die Länge p des Polarms keinen Einfluss auf die Flächenbestimmung ausübt: Fahrarmlänge f und Abwicklung $a = b \cdot \cos \alpha$ sind von p völlig unabhängig.

Daraus geht hervor, dass der vom Scharnierpunkt C (Fig. 145) um den Pol beschriebene Kreis auch ∞ grossen Halbmesser haben, eine Gerade sein darf.

Dies wurde von Prof. Amsler schon im Jahr 1856 erkannt

Fig. 155.

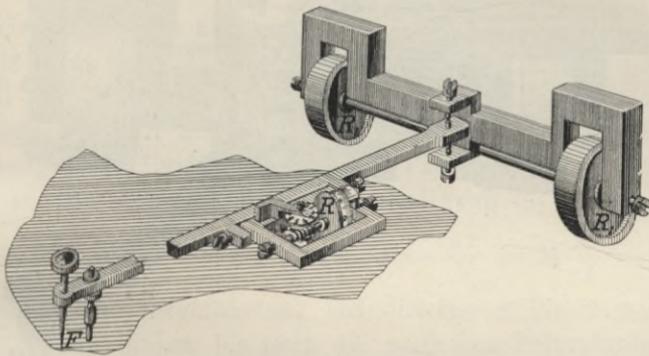


und zur Konstruktion seines Integrators (Fig. 155) benützt, der in einer Rille eines schweren Metallstücks M die beiden Räder R_1 eines Wagens laufen lässt, wobei sich der Scharnierpunkt C parallel dazu bewegt. Der Pol liegt in diesem Fall senkrecht zur Rille in unendlicher Entfernung, also jedenfalls ausserhalb der zu berechnenden Fläche. Die Auflagerpunkte der

bewegten Instrumententeile sind: der Fahrstift F, die Räder R_1 und die Unterstützung des Scharniers C. Die (zwischen Fahrstift und Scharnier angeordnete) Fahrrolle R ist in einem Rahmen gelagert, welcher sich um die Spitzen der Schrauben AA, also um eine horizontale Achse drehen kann. Letztere hat also nur diesen Rahmen zu tragen.

Die vier Punkte R_1 , R_1 , C und F ergeben aber eine überbestimmte Lagerung des Instruments und verursachen bei Unebenheiten des Zeichentisches schädliche Bewegungen des Scharniers C (wechselnde Scharnierschiefe). Diesem Missstand begegnet folgende Konstruk-

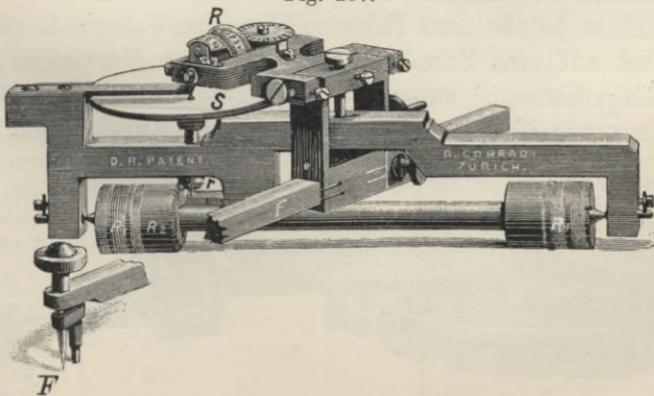
Fig. 156.



tion, welche gleichzeitig für die mit dem Fahrstift F aus einer Instrumentenstellung umfahrbare Figur wenigstens in einer Richtung jede beliebige Grösse zulässt:

Statt durch ein Metallstück M mit Rille gibt man den Rädern R_1 durch ihr eigenes Gewicht und durch eine geriffelte Oberfläche zwangsläufige Bewegung, verlegt also bei gleichen Rad-

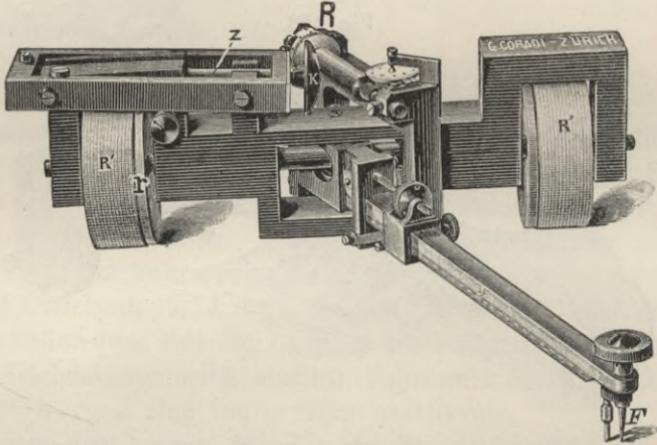
Fig. 157.



Präzisions-
planimeter.

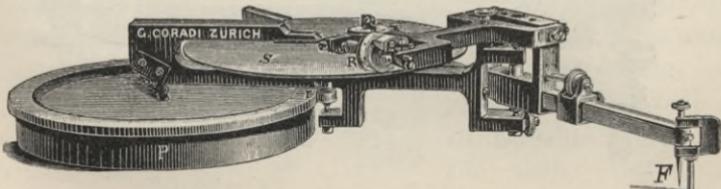
durchmessern den in der Richtung der gemeinsamen Radachse liegenden Pol in unendliche (bei um wenig ungleichen Durchmessern in sehr grosse) Ferne. (Fig. 156.) Die in Fig. 155 und 156 angedeuteten Konstruktionen fanden keine praktische Verwendung. Sie führten aber zur Erfindung einer Reihe neuer Planimeterformen (Präzisionsplanimeter) und zwar zunächst des Hohmann-Coradischen Scheibenrollplanimeters (Fig. 157), dann des Kugelrollplanimeters (Fig. 158), des freischwebenden Kugelplanimeters und des Präzisions-scheibenplanimeters (Fig. 159).

Fig. 158.



Dabei wurde, abgesehen von dem berührten Gedanken, das Bestreben wirksam, die Grösse der Rollenabwicklung zu multiplizieren, (so dass kleine Ablesedifferenzen geringeren Einfluss auf die Flächengrösse haben), und sie von dem jeweiligen Zustand des Planpapiers (wellig, zerschissen etc.) unabhängig zu machen. Um dies zu erreichen, ist — unter Beibehaltung der Grundbedingungen des Planimeters (Scharnierpunktsweg auf einem Kreis um den Pol, Fahrradachse parallel zum Fahrarm F) — das Fahrrad R vom Plan wegverlegt auf eine Scheibe S, welche (unter Verwendung einer Zahnradübersetzung r) unter jenem weggezogen wird (Fig. 157 und 159). Ja sogar diese Scheibe S kommt beim „Kugelrollplanimeter“

Fig. 159.



schliesslich in Wegfall. Die Achse des bei ihm zur „Zählrolle“ gewordenen Fahrrads R ist zu einem (sorfältig gearbeiteten und polierten) Metallzylinder ausgebildet, der durch Federkraft gegen eine polierte metallene Kugelkappe K gepresst wird. Die Achse Z der letzteren trägt ein Zahnrad, welches in die, mit um wenig kleinerem Durchmesser angelegte Riffelung r der linksseitigen Rolle R' eingreift.

Bei Fortbewegung des Wagens wickelt sich auf dem Zahnrad derselbe Bogen ab, wie auf der Riffelung r und es dreht sich dementsprechend die Achse Z, die Kugelkappe K und, wachsend mit der Entfernung der Berührungsstelle des Zylinders von ihrem Scheitel, die Achse der Zählrolle R.

Beim selten benützten „freischwebenden Kugelplanimeter“ wird, wie beim Scheibenplanimeter (s. Fig. 159), in Ermanglung der Rollen R' die Riffelung r ersetzt durch diejenige einer Polplatte P.

Bezeichnen wir den Faktor, mit dem durch die angedeuteten Einrichtungen die Umdrehungszahl des Fahrrads multipliziert wird, mit k, so tritt jetzt an Stelle von Gleichung (9) ($J = a \cdot f$) und

(9 b) ($J = M \cdot n$) die Gleichung (9 c) $J = \frac{a f}{k} = M \cdot \frac{n}{k} = M_1 \cdot n$.

Die zuletzt vorgeführten, komplizierteren Planimeterformen (Fig. 157—159) haben bis jetzt die einfachen Polarplanimeter in der Praxis nicht zu verdrängen vermocht. Ja sie sind, wie das freischwebende Kugelplanimeter, zum Teil wieder verlassen worden. Dies mag daher rühren, dass sie nicht bloss kostspieliger in der Anschaffung, sondern auch empfindlicher gegen störende Einflüsse und falsche Behandlung beim Gebrauch sind. (Flächenberechnungen werden zumeist von Hilfskräften bewirkt!)

Aus diesem Grund mag hier die vorstehende, mehr andeutungsweise Behandlung genügen. Näheres vergl.: „Die Planimeter Coradi“ von J. J. Stambach, Stuttgart, Konrad Wittwer 1889 und „Die Planimeter Coradi“ von G. Coradi, Zürich 1895.

Genauigkeit der Flächenberechnung mittels Polarplanimeters (nach Landmesser Lang in Neuwied, s. Zeitschr. f. Verm. 1894 S. 366).

Genauigkeit
der Plani-
meterberechnung.

Inhalt des verwendeten Kontrollkreises	Mittl. Fehler einer Umdrehung		Mittlerer Fehler des Mittels aus	
	mit Amslers Polarplan.	mit Kompensa- tionspolarplan.	zwei einseitigen Umdrehungen	zwei rechts- u. zwei linksseitigen Umdrehungen
qmm	qmm	qmm	mit dem Kompensationspolarplanimeter qmm	qmm
2 00 00	16	10	7,1	4,2
50 00	14,8	7,2	5,1	3,0
12 50	12,5	4,1	2,9	1,7

Auch bei Verwendung des einfachen Amslerschen Polarplanimeters lässt sich die Genauigkeit der Flächenbestimmung steigern, durch gleichpolige Umfahrung eines der zu bestimmenden Fläche benachbarten Netzquadrates als Kontrollfigur und Verwendung des daraus ermittelten Werts der Noniuseinheit.

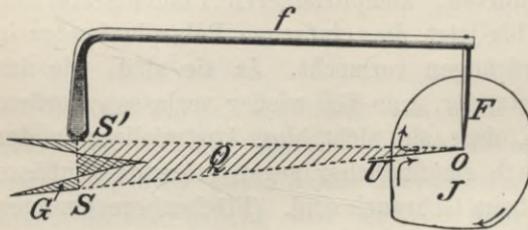
Untersuchungen von Prof. Lorber in Leoben haben als mittleren Fehler einer Umfahrung u. a. ergeben:

bei einer Flächen- größe J von qmm	mit Amslers Polarplan. (M = 10 qmm)	mit frei- schwebendem Kugelplan. (M = 1 qmm)	mit dem Rollplanimeter	
			(M = 1 qmm)	(M = 0,5 qmm)
1000	$\frac{J}{75}$	$\frac{J}{625}$	$\frac{J}{625}$	$\frac{J}{1000}$
5000	$\frac{J}{355}$	$\frac{J}{2500}$	$\frac{J}{2000}$	$\frac{J}{3000}$
10 000	$\frac{J}{682}$	$\frac{J}{4167}$	$\frac{J}{3333}$	$\frac{J}{5000}$

Stangen-
planimeter.

In den Verfeinerungsbestrebungen entgegengesetzter Richtung, nämlich derjenigen der Vereinfachung des Instruments, bewegt sich eine im Jahre 1886 gemachte Erfindung von H. Prytz:

Fig. 160.



diejenige des „**Stangenplanimeters**“. Letzteres besteht (s. Fig. 160) aus einem Fahrarm f mit dem Fahrstift F am einen und der in ihrer Verlängerung durch F gehenden beilförmigen Schneide S' am anderen

Ende. Der gegen Misshandlung so sehr empfindliche Scharnierpunkt C und die Fahrrollen der bisher geschilderten Planimeterformen mit ihren ebenso empfindlichen Achslagern sind weggefallen, mit ersterem aber auch die Geltung der oben gegebenen Ableitung des Planimetergesetzes.

Zu dessen allgemein gültiger Ableitung folgen wir Runge (Zeitschr. f. Verm. 1895 S. 321) und Dr. O. Eggert, „Einführung in die Geodäsie“, Leipzig 1907:

Lässt man einen Stab von konstanter und genügender Länge f (s. Fig. 161) derart fortrücken, dass das eine Ende F dem Umfang einer Figur J, das andere Ende S aber demjenigen einer zweiten Figur G folgt, so bestreicht er beim Übergang von einer Lage I zu einer andern Lage II ein viereckiges Flächenelement, dessen doppelter Inhalt 2 d Q nach § 26, gleichgültig ob die Figur normal oder verschränkt ist, sich ergibt aus

$$2 d Q = (y' - y - d y) (x' + d x' - x) + (y' + d y' - y) (x + d x - x').$$

Durch Ausmultiplikation und Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung ergibt sich hieraus:

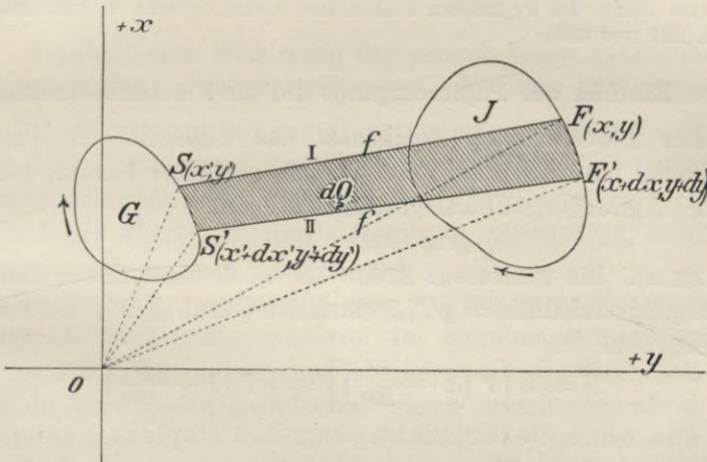
$$2 d Q = [x (y + d y) - y (x + d x)] - [x' (y' + d y') - y' (x' + d x')] + (y' d x + x d y') - (y d x' + x' d y).$$

Die eckigen Klammerausdrücke stellen (s. § 26) die doppelten Dreiecksinhalte FOF', bezw. SOS', die runden Klammern die Differenz der Differentiale aus den Produkten der verwechselten Koordinaten beider Endpunkte des Stabs (d. h. das Differential des Dreiecks SOF) vor, also

$$2 d Q = 2 F O F' - 2 S O S' + d (x y') - d (x' y).$$

Lässt man den Stab f sich so fortbewegen, dass der Endpunkt F den ganzen Umfang von J, der Punkt S denjenigen von G durchläuft, und dass die

Fig. 161.



Schlusslage mit der Anfangslage SF identisch ist, d. h. integriert man $d Q$ innerhalb der genannten Grenzen, so liefert die erste eckige Klammer die doppelte Fläche J, die zweite Klammer die doppelte Fläche G, während die Integration der beiden letzten Glieder diese zum Verschwinden bringt. Man hat also:

$$2 \int d Q = 2 Q = 2 J - 2 G \\ Q = J - G, \text{ oder } J = Q + G.$$

Die Anfangsstellung O des Fahrstifts F (s. Fig. 160) kann dabei ganz beliebig, z. B. auch innerhalb der Fläche J gewählt werden. Nur müssen letzterenfalls die Wege von der Anfangsstellung zum Umfang der Figur, und umgekehrt von letzterem zur Schlussstellung, identisch sein. Durchfährt man also mit dem Fahrstift F eines Prytzschen Planimeters von der Anfangsstellung OS aus zunächst die Strecke OU, dann den Umfang der zu berechnenden Figur J und kehrt schliesslich auf dem Weg UO auf den Ausgangspunkt zurück, so nimmt (s. Fig. 160) der Stab f die Lage OS' ein und man hat als Fläche Q, welche dieser Stab während der Fahrt bestrichen hat (nachdem er durch Drehung um O wieder in seine Anfangsstellung OS zurückgebracht wurde) einen zweifach durchlaufenen Kreissector

$$2 Q = 2 \cdot \frac{\widehat{SS'}}{2} \cdot f. \text{ Der Inhalt der umfahrenen Figur ist also:}$$

$$(13) \quad J = \widehat{SS'} \cdot f + G.$$

Der Bogen $\widehat{SS'}$ stellt die Abwicklung a beim Polarplanimeter vor, die Formel (9) ist also durch den Wegfall des Scharniers lediglich um die von der Schneide S beschriebene Fläche G erweitert worden.

Der Inhalt dieser Fläche G (welche bei Fahrbeginn am Umfang kreis-sektorähnliche, beim Beginn im Innern der Figur verschränkte Form annimmt) muss irgendwie ermittelt werden. Er wird aber annähernd gleich Null, wenn man mit der Fahrt in möglichster Nähe des Schwerpunkts O der Figur beginnt. Er wird eliminiert, wenn man die Figur doppelt umfährt mit zwei gegeneinander um $2R$ verdrehten Anfangsstellungen des Fahrarms und das Mittel aus beiden erhaltenen Bögen SS' einführt. Alsdann erhält man also mit dem Prytz-schen, wie zuvor mit dem Polarplanimeter den Inhalt der umfahrenen Figur:

$$(13a) \quad J = \widehat{SS'} \cdot f = a \cdot f.$$

Die Stangenlänge f wird natürlich ebensowenig direkt gemessen, als die Fahrarmlänge beim Polarplanimeter, sondern wie dort durch Umfahrung von ihrem Inhalt nach bekannten Flächen bestimmt. (Über die Benützung des Stangen-planimeters zur Schwerpunktsbestimmung siehe Zeitschr. f. Verm. 1895 S. 331. Über eine Abart des Prytzschen Planimeters siehe Zeitschr. f. Instrumentenk. 1902 S. 221 und 338).

§ 29. Einfluss des Papiereingangs auf die Flächenbestimmung.

Der Papiereingang beeinflusst das Ergebnis der Flächen-berechnung natürlich nur, wenn Planmasse hiebei benützt werden, also bei Anwendung a) halbgraphischer, oder
b) graphischer Methoden.

Papierein-gang b. halb-graphischer Flächen-bestimmung.

Zu a). Die gemessene Breite sei b , die abgegriffene Länge l' , ihr Eingangsverhältnis = p' ‰, dann ist (vergl. § 20) die richtige Flächengrösse

$$F = b \left[l' \left(1 + \frac{p'}{100} \right) \right] = b l' \left(1 + \frac{p'}{100} \right),$$

d. h. das ohne Berücksichtigung des Papiereingangs auf halbgraphischem Weg ermittelte Flächenmass erhält den-selben prozentischen Zuschlag, wie ihn die abgegriffene Strecke hätte erhalten müssen.

Papierein-gang bei rein-graphischer Flächen-bestimmung.

Zu b). Die prozentischen Eingangsverhältnisse der beiden abgegriffenen, senkrecht aufeinanderstehenden Strecken m und n , deren Produkt die Fläche liefert, seien (vergl. § 20)

$$p' = \frac{a'^2 p + b'^2 q}{a'^2 + b'^2} \quad \text{und} \quad q' = \frac{b'^2 p + a'^2 q}{a'^2 + b'^2},$$

so dass

$$F = m \times n = m' \left(1 + \frac{p'}{100} \right) \times n' \left(1 + \frac{q'}{100} \right) \\ = m' n' \left(1 + \frac{p' + q'}{100} + \frac{p' \cdot q'}{10000} \right) \quad \text{und durch}$$

Vernachlässigung der unbedeutenden letzten Summanden in der Klammer

$$F = m \times n \sim m' n' \left(1 + \frac{p' + q'}{100} \right) \sim m' n' \left(1 + \frac{a'^2 p + b'^2 q + b'^2 p + a'^2 q}{100 (a'^2 + b'^2)} \right) \\ \sim m' n' \left\{ 1 + \frac{(a'^2 + b'^2) p + (a'^2 + b'^2) q}{100 (a'^2 + b'^2)} \right\} \\ \sim m' n' \left(1 + \frac{p + q}{100} \right).$$

Die Eingangsverhältnisse p' und q' der zum Quadratnetz schiefen Berechnungsstrecken sind aus der Formel herausgefallen. An ihre Stelle sind die Eingangsverhältnisse p und q der Netzlinien getreten und zwar ist das prozentische Eingangsverhältnis der Fläche ohne Rücksicht auf die Lage ihrer Hauptdimensionen gleich der Summe der beiden Eingangsverhältnisse der senkrecht aufeinanderstehenden Seiten des umgebenden Netzquadrates.

(Zeigen die beiden Parallelseiten des genannten Netzquadrats je verschiedenen Eingang, so wird aus den zusammengehörigen Wertpaaren ein passendes Mittel gewählt.)

§ 30. Vergleichende Würdigung der verschiedenen Flächenberechnungsmethoden. Fehlerfortpflanzung. Amtliche Fehlergrenzen.

Die Berechnung a) aus Originalmassen ergibt (es wäre denn, dass Überbestimmung vorhanden wäre und die gemessenen Strecken sich gegenseitig widersprüchen) unabhängig von der Person des Rechners übereinstimmende Resultate, gleichgültig, welche Berechnungsmethode auch benützt wird.

a) Aus Originalmassen.

Flächenfehler werden in diesem Fall nur durch Messungsfehler erzeugt und sind unabhängig von der Zeichnungsgenauigkeit, ein Plan ist zur Flächenberechnung überhaupt nicht erforderlich. Sind daher die gemessenen Koordinaten gleich zuverlässig, wie die (bequemer zu messenden) Kopf- oder Steinlinienbreiten, was allerdings nicht ohne weiteres anzunehmen ist, so liefert selbstverständlich die Berechnung aus Originalmassen die genauesten Resultate.

Dagegen ist der hiebei erforderliche Zeitaufwand erheblich. Zur Flächenberechnung werden, ein weiterer Nachteil, vielfach andere Masse (Koordinaten) verwendet, als zur etwaigen Grenzwiederherstellung (Steinlinien- und Kopfmasse).

Die b) halbgraphische Berechnung benützt, s. § 27 S. 210, zur Flächenbestimmung dieselben Breiten- und Kopfmasse, welche gewöhnlich zur Grenzbestimmung dienen. Deren Messung kann gemeinhin genauer erfolgen, als diejenige der Originalkoordinatenmasse. Die Berechnung lässt sich leicht schematisch anordnen. Der dafür erforderliche Zeitaufwand ist erheblich geringer, als bei Anwendung der Methode (a). Dagegen erfordert Methode (b) nicht nur einen Plan, sondern die Genauigkeit ihrer Ergebnisse wird auch von dessen Fehlern mitbeeinflusst.

b) Halbgraphische Berechnung.

Die c) reingraphische Flächenberechnung erfordert den geringsten Zeitaufwand. Sie ist beim Vorhandensein eines Plans leicht durchführbar, auch wenn die Aufnahmemasse fehlen, oder die

c) Reingraphische Berechnung.

Aufnahme systemlos erfolgte, so dass für die Flächenbestimmung direkt brauchbare Masse ohne Planverwendung nur auf Grund schwerfälliger Umformungen (s. Kap. 13) ermittelt werden könnten. Sie bedingt aber andererseits das Vorhandensein eines genau gezeichneten Plans und liefert je nach Plangenauigkeit und Individualität des Rechners verschiedenerlei Ergebnisse für identische Flächen.

Die Berechnung aus Originalmassen wird (abgesehen von der württembergischen Katastervermessung, bei der sie die Regel bildet) nur da angewandt, wo äussere Umstände (Hochwertigkeit des Grund und Bodens, der zu berechnenden Bauarbeit etc.) die äusserst erreichbare Schärfe schon bei der Aufnahme verlangen. Die halbgraphische Flächenbestimmung entspricht bei regelmässigen Grundstücksformen allen praktischen Genauigkeitsanforderungen und wird daher bei allen neueren Katastervermessungen, bei Feldbereinigungen etc. zur Berechnung der Flächengrösse von Grundstücken fast ausschliesslich angewandt.

Die reingraphische Flächenbestimmung ist am Platze, wo auf die grösste erreichbare Genauigkeit verzichtet werden kann (grosse, weniger hochwertige Grundstücke in Gebirgsgegenden, Kontrollberechnungen zum Schutz gegen grobe Fehler etc.) oder wo ein genau gezeichneter Plan in genügend grossem Massstab vorhanden ist, bzw. die Aufnahmemethode den Bedürfnissen der Flächenberechnung nicht vollständig Rechnung tragen konnte. (Querprofilflächen, städtische Grundstücke in eng bebautem Gebiet etc.)

Abgesehen von den angeführten sachlichen Gründen sind endlich vielfach amtliche Vorschriften bestimmend für die Auswahl der anzuwendenden Flächenberechnungsmethode.

Fortpflanzung von Streckenfehlern auf die Fläche.

Da die Flächenberechnung in der Praxis fast ausschliesslich aus Streckenmassen erfolgt, genügt es, die Fortpflanzung von Streckenfehlern auf die Flächen zu untersuchen. Ist der Fehler einer Strecke l bzw. b nach Richtung und Grösse $= \Delta l$ bzw. Δb , ergibt sich die Fläche F als Produkt aus Länge l und Breite b , also statt

$$F = l \cdot b$$

zu

$$F + \Delta F = (l + \Delta l) (b + \Delta b),$$

so beträgt der Einfluss dieser Streckenfehler auf die Flächengrösse:

$$\Delta F = l \cdot \Delta b + b \cdot \Delta l + \Delta b \cdot \Delta l,$$

oder wenn man den kleinen, letzten Summanden vernachlässigt, allgemein:

$$\text{Fehler } \Delta F \sim l \cdot \Delta b + b \cdot \Delta l^1) \quad (I)$$

¹⁾ Kürzer: $dF = d(b \cdot l) = b \cdot dl + l \cdot db$.

Sind 1.) die Streckenfehler Δb und Δl unabhängig von der Streckenlänge einander gleich (Unsicherheit der Endpunkte, Abgreifen aus einem vom Papiereingang nicht beeinflussten Plan etc.), so ergibt sich aus (I) der Flächenfehler

$$\Delta F_1 \sim (l + b) \Delta l \sim (b + l) k \sim c_1 U,$$

wenn U den Umfang darstellt. Die Wirkung eines konstanten Streckenfehlers auf die Flächengröße ist also proportional dem Umfang und um so kleiner, je kleiner der Umfang bei bestimmtem Inhalt ist.

Diese Betrachtung führte in § 28 zu dem Schluss, dass für graphische Berechnung sich am besten solche Grundstücke, oder Grundstücksteile eignen, welche ungefähr gleiche Länge und Breite zeigen. Zu ähnlichem Ergebnis führt die Betrachtung der Wirkung nicht ganz scharfer Verfolgung der Grenzlinien mittels des Planimeterfahrstifts auf die Flächengröße. Auch sie wächst mit (der Wurzel aus) dem Grenzumfang. Je kleiner dieser, um so geringer bei gleicher Flächengröße der Fehler.

Setzt man demnach voraus: $b \sim l$, so wird

$$\Delta F_1 \sim 2\sqrt{F} \cdot k \sim C_1 \sqrt{F},$$

d. h. der konstante Streckenfehler pflanzt sich bei quadratischen Figuren fort proportional zur $\sqrt{\text{Fläche}}$.

Sind 2.) die vorhandenen Streckenfehler proportional der Streckenlänge (Abgreifen aus einem Plan, dessen Papiereingang unbestimmbar ist, Messung mit zu langen oder kurzen Messgeräten etc.), ergibt sich also die letztere zu $\begin{cases} l + kl \text{ statt zu } l \\ b + k \cdot b \text{ „ „ } b, \end{cases}$ so wird nach (I)

$$\Delta F_2 \sim l \cdot kb + b \cdot kl \sim 2bl \cdot k \sim c_2 \cdot F,$$

d. h. die Wirkung des regelmässigen Streckenfehlers auf die Flächengröße wächst dieser proportional.

Gegen die beiden vorgeführten Fehlerquellen tritt das Vorkommen des

3.) unregelmässigen, proportional zur $\sqrt{\text{Strecke}}$ wachsenden Streckenfehlers erheblich zurück. Er ergibt durch gleiche Betrachtung aus (I)

$$\begin{aligned} \Delta F_3 &= l \cdot k \sqrt{b} + b k \sqrt{l} = k \sqrt{l^2 b + b^2 l} = k \sqrt{b l (l + b)} \\ &= c_3 \sqrt{U \cdot F}. \end{aligned}$$

Eine Fehlerfunktion, welche allen vorgenannten Fehlermöglichkeiten Rechnung tragen würde, müsste also eine Funktion von Fläche und Umfang sein und etwa lauten:

$$(II) \quad \Delta F = c_1 U + c_2 \cdot F + c_3 \sqrt{F \cdot U}, \text{ oder besser}$$

$$\Delta F = \pm \sqrt{k_1 U^2 + k_2 F^2 + k_3 F \cdot U}.$$

Amtliche
Fehler-
grenzen.

Da jedoch der dritte Summand gegen die beiden anderen zurücktreten wird, und es überdies der Einfachheit halber erwünscht ist, den Flächenfehler als Funktion der berechneten Fläche auszudrücken, so kann man sie reduzieren auf:

$$(III) \Delta F = C_1 \sqrt{F} + c_2 F, \text{ oder besser } \Delta F = \pm \sqrt{K_1 F + K_2 F^2}.$$

In der Tat lautet die durch Steuerkollegialerlass vom 8. Februar 1887 aufgestellte und in die technische Katasteranweisung vom 19. Januar 1895 übernommene Formel für die bei

1.) württembergischen amtlichen Vermessungen höchstensfalls zulässigen Unterschiede zweier unabhängiger Flächenbestimmungen:

Für Gelände- klasse	I (nahezu horizontal)	$\Delta F = 0,25 \sqrt{F} + 0,00075 F$	}	Fu. ΔF in qm ausgedr. drückt.
	„ II (mittel geneigt)	$\Delta F = 0,5 \sqrt{F} + 0,00075 F$		
	„ III (stark geneigt)	$\Delta F = 0,75 \sqrt{F} + 0,00075 F$		

Der zweite, den regelmässigen Längenfehlern Rechnung tragende Summand ist hiebei als unabhängig von der Geländeform angenommen, d. h. es sind nur Abgreiffehler und Fehler der Messstangenlänge vorausgesetzt. Ebenso ist der zulässige Fehlerbetrag nicht direkt in Beziehung gebracht zur angewandten Berechnungsmethode. Nur durch Zusatzbestimmung ist bei graphischer Berechnung auf Plänen, deren Verjüngungsverhältnis unter 1 : 1250 herabsinkt (z. B. 1 : 2500) eine Erhöhung des Fehlerbetrags auf das 1 $\frac{1}{2}$ -fache des aus obigen Formeln sich ergebenden erlaubt. Diese Behandlung hängt damit zusammen, dass in Württemberg normalerweise die zweite Berechnung, wenn sie als der ersten gleichwertig angesehen werden soll aus denselben Originalmassen, wie die erste erfolgt, und nur ausnahmsweise auf eine zweite unabhängige Aufnahme oder auf den Plan (letzteres z. B. bei Feldbereinigungen) sich stützt. In anderen Staaten trägt die Formel für den zulässigen Flächenfehler teilweise dem Umstand Rechnung, dass beide Fehlerteile sich nicht notwendig zu addieren brauchen, oder dem Umstand, dass das Verjüngungsverhältnis des Plans auf den Fehlerbetrag von Einfluss ist.

So bestimmt für

2.) Preussen die Anweisung VIII vom 25. Oktober 1881, bezw. die Anweisung II vom 21. Februar 1896, als höchste zulässige Abweichung zweier Flächenbestimmungen auf Grund derselben Vermessung:

$$\Delta F = 0,01 \sqrt{60 F + 0,02 F^2}$$

wobei F und ΔF in a ausgedrückt sind.

Nach dem preussischen Feldmesserreglement vom 2. März 1871 gilt eine Messung als richtig, wenn die Revisionsmessung keine grössere Flächenabweichungen zeigt, als

- 1,4 qm pro Ar bei Flächen < 1 ha
- 0,8 " " " " " > 1 ha < 10 ha
- 0,7 " " " " " > 10 ha.

Für die zulässigen Flächenfehler in

3.) Bayern bestimmt die Katasterinstruktion vom 25. Juni 1885 folgende Höchstgrenzen:

$\Delta F = 0,005 \sqrt{F + 0,01 F^2}$	beim Planmassstab 1 : 1000	}	wobei F und ΔF in ha ausgedrückt sind.
$\Delta F = 0,00625 \sqrt{F + 0,01 F^2}$	" " 1 : 1250		
$\Delta F = 0,0125 \sqrt{F + 0,01 F^2}$	" " 1 : 2500		
$\Delta F = 0,025 \sqrt{F + 0,01 F^2}$	" " 1 : 5000		

> Die 4.) elsass-lothringische Katasteranweisung vom 30. Januar 1889 setzt als obere Grenze für die zulässige Abweichung zweier Flächenbestimmungen fest:

$\Delta F = 0,004 \sqrt{F + 0,01 F^2}$	beim Planmassstab 1 : 500	}	wobei F und ΔF in ha ausgedrückt sind.
$\Delta F = 0,006 \sqrt{F + 0,01 F^2}$	" " 1 : 1000		
$\Delta F = 0,008 \sqrt{F + 0,01 F^2}$	" " 1 : 2000		
$\Delta F = 0,010 \sqrt{F + 0,01 F^2}$	" " 1 : 4000		

Hieraus ergibt sich folgende

Gegenüberstellung zulässiger Streckenfehler in qm ausgedrückt:

Fläche Ar	1. Württemberg Geländeklasse			2. Preussen auf Grund identischer Auf- nahme.	3. Bayern Planmassstab				4. Elsass-Lothring. Planmassstab			
	I	II	III		1/1000	1/1250	1/2500	1/5000	1/500	1/1000	1/2000	1/4000
0,5	2	4	5	6	4	4	9	18	3	4	6	7
1	3	5	8	8	5	6	12	25	4	6	8	10
5	6	12	17	17	11	14	29	57	9	13	18	22
10	9	17	24	25	16	20	40	79	13	19	25	32
20	13	24	35	35	22	28	56	113	18	27	36	45
100	33	58	83	79	50	63	126	251	40	60	80	101

§ 31. Flächenteilungen.

Die Aufgabe der Flächenteilung tritt in folgenden Formen auf:

- A) Von einer Figur soll ein Flächenstück von bestimmtem Inhalt abgetrennt werden (Flächenzuteilung).
- B) Die Fläche eines Grundstücks soll in Teile von bestimmtem Flächenverhältnis zerlegt werden (Proportionalteilung).
- C) Von einer Figur, deren einzelne Teilflächen verschiedenwertig sind, soll ein Stück von bestimmtem Wert abgetrennt werden (Wertszuteilung).

Die zu suchenden Grenzlinien der an sich vieldeutigen Lösungen dieser Aufgaben müssen zumeist noch Nebenbedingungen (Grenzrichtung etc.) genügen, wodurch sie erst eindeutig, oder beschränkt-eindeutig werden.

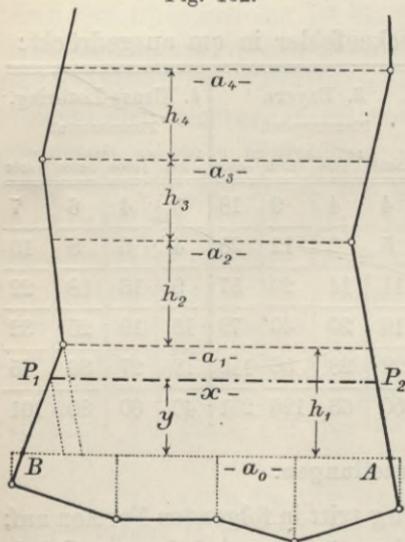
A. Flächenzuteilung.

a) Parallelteilung.

α) Auf Grund von Originalmassen.

Die gewöhnlichste Aufgabe der parallelen Flächenzuteilung, auf die sich viele Fälle zurückführen lassen, lautet: Parallel einer gegebenen Richtung sollen von einem Viereck Flächenstücke von bestimmtem Inhalt abgeschnitten werden. Die Umfangsgrenzen der Gewinn bezieht man, sei es durch Messung direkt, sei es durch Koordinatenumformung (s. Kap. 13) auf eine parallel oder senkrecht zur verlangten neuen Grenzrichtung verlaufende Abszissenachse A B (s. Fig. 162). Verläuft die Gewandgrenze unregelmäßig, so schneidet man zunächst durch eine beliebige Parallele zur künftigen Grenze (womöglich die Aufnahmelinie A B selbst) ein Flächenstück ab, dessen Inhalt man rechnet. Dann erübrigt für das

Fig. 162.



zuerst abzutrennende Grundstück nur noch, von dieser Hilfsgeraden aus durch eine Parallele $P_1 P_2$ das Trapez $AB P_1 P_2$ gleich der Differenz zwischen Ist- und Sollfläche nach oben, oder unten abzuteilen.

Von den mancherlei Lösungen dieser Spezialaufgabe möge folgende hier Platz finden: Durch die einzelnen Bruchpunkte der Gewandgrenzen lege Parallelen $a_1, a_2 \dots$ zur neuen Grenz-, d. h. Abszissenrichtung und bestimme (sei es durch Proportionalrechnung, sei es durch Messung)

deren Länge a und Parallelabstand h .

Ist die von a_0 aus abzuschneidende Fläche gleich F , so ist (s. Fig. 162)

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} 2F &= (a_0 + x) y \\ (2) \text{ bzw. } (2a) \quad (x - a_0) \cdot (a_1 - a_0) &= y : h_1 \text{ oder } (x - a_0) \cdot h_1 = (a_1 - a_0) \cdot y \end{aligned} \right\}$$

Durch Division kommt als y -Eliminat aus (1) und (2a)

$$\frac{2 F}{(x - a_0) h_1} = \frac{a_0 + x}{a_1 - a_0}$$

$$\frac{2 F}{h_1} = \frac{(x + a_0)(x - a_0)}{a_1 - a_0} = \frac{x^2 - a_0^2}{a_1 - a_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{a_0^2 + \frac{a_1 - a_0}{h_1} \cdot 2 F} \\ y = \frac{2 F}{a_0 + x} \end{array} \right.$$

Aus diesen Werten ergeben sich die Koordinaten der neuen Eckpunkte durch einfache Addition, bzw. Proportionalrechnung.

Sind, wie z. B. bei Zerstückelung von Allmenden, Bauplätzen etc., mehrere Grundstücke von paralleler Grenzrichtung zuzuteilen, so tritt jede berechnete Grenzlänge x für die nächste Parallele wieder an die Stelle von a_0 . Die Berechnung wird in diesem Fall am besten schematisch angelegt, und es wird die Richtigkeit der Zuteilung innerhalb jedes durch die Parallelen a begrenzten und seinem Inhalt nach bekannten Trapezes („Elements“) durch Zusammenstellung der zugehörigen Parzellen und Parzellenteile geprüft.

Sind schliesslich Eckpunktskoordinaten in bezug auf irgend ein anderes, als das zur Zuteilung verwendete Achssystem verlangt, so findet man diese durch Proportionalrechnung aus den ohnedies (für die Absteckung auf dem Feld) zu rechnenden Kopfmassen.

Die Kartierung, wenn überhaupt (für andere Zwecke) erforderlich, erfolgt zusammenhängend erst nach vollständigem Abschluss der Zuteilungsarbeit.

Bei β) halbgraphischer Behandlung

ergibt sich die senkrechte Breite y aus (1) $y = \frac{2 F}{a_0 + x}$, wobei a_0 und x abgegriffen werden. Für die Kartierung jeder folgenden Trennungslinie werden die gewonnenen senkrechten Breiten y addiert, so dass eine Addition der bei Einzelkartierung unvermeidlichen Zeichenfehler entfällt. Dabei bildet die in passende runde Unterabteilungen zerlegte Gesamtbreite der Gewinn die Grundlage für die Kartierung. Statt nach den senkrechten Breitemassen der Grundstücke kann man auch nach ihren durch proportionale Einrechnung hieraus gewonnenen und fortlaufend zusammengestellten schrägen Steinlinien-, oder Kopfmassen kartieren.

Letztere dienen jedenfalls, ohne Rücksicht auf die Art der Zuteilung, zur Übertragung der neuen Parzellenlängsgrenzen auf das Gelände.

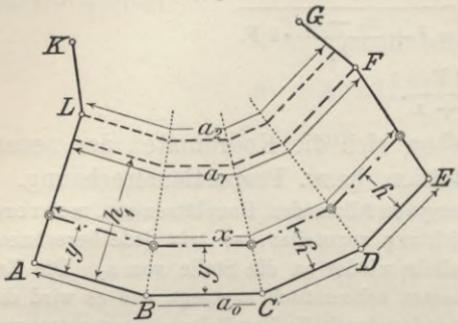
(Beispiel s. in Verbindung mit der Aufgabe einer Grenzausgleichung § 32.)

Eine Erweiterung der obigen Aufgabe zeigt Fig. 163.

Sie bietet jedoch nur theoretisches Interesse, weil die Bedingung durchweg gleicher Grundstücksbreite y die neuen Grenz-

bruchpunkte in die Halbierenden der Brechungswinkel B, C und D etc. verweisen würde. Diese Lage der „Steinlinien“ ist aber häufig un-

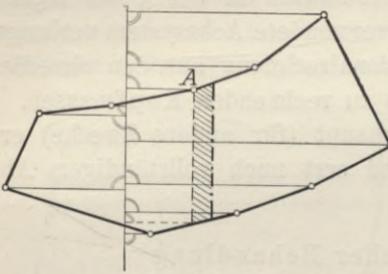
Fig. 163.



durchführbar. Es ist in diesem Fall also entweder auf die konstante Parzellenbreite y , oder auf den Parallelismus der Längsgrenzen, oder auf beides zugleich zu verzichten und nach erfolgter Ermittlung der Breite y die Lösung analog Fig. 170 zu suchen.

Eine Anwendung der gezeigten Lösung für Parzellenteilung bietet auch die Querteilung (s. Fig. 164), wenn es möglich ist, die Richtlinie für die gesuchte Grenze (Baulinie etc.) als x -Achse für die Aufnahme zu wählen. Man hat in diesem Fall auf Grund graphischer Vorbehandlung nur den Inhalt bis zu der Parallelen zur Richtlinie zu berechnen, welche durch einen, der neuen Grenze benachbarten Bruchpunkt der Aussengrenze geht, und alsdann

Fig. 164.



mit der Differenz gegen den Sollinhalt nach vorhergehendem zu verfahren.

b) Radiale Zuteilung.

a) Auf Grund von Originalmassen.

Radiale
Zuteilung.

Gestatten Geländeform und Kulturart die Bodenbearbeitung mit landwirtschaftlichen Maschinen, so ist die Parallelzuteilung der Radialteilung im allgemeinen vorzuziehen, wenn sie auch in jeder Gewann mit divergenten Längsgrenzen mindestens an einem Ende eine „Missform“ übrig lässt.

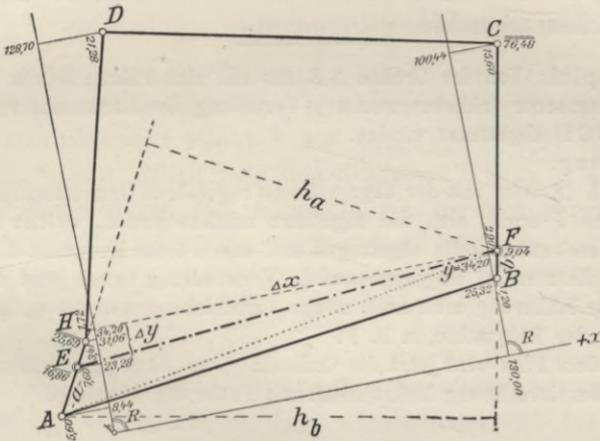
Ist jedoch die Divergenz jener Grenzen, der „Gehren“, so gering, dass der Anteil jedes Grundstücks daran auch bei maschineller Bodenbearbeitung vernachlässigt werden kann, oder handelt es sich um Kulturen, welche letztere überhaupt nicht zulassen (Baumgüter, Weinberge etc.), so kann dessen Verteilung auf die Einzelgrundstücke (radiale Zuteilung) angezeigt, ja sogar von Natur gegeben sein (Bergkegel). Dabei kann die Bedingung radialer Längsgrenzen streng (Bauplätze an Bogenstrassen), oder nur genähert (landwirtschaftlich benützte Grundstücke) erfüllt sein müssen.

Unter allen Umständen entfällt hier die Möglichkeit der Auswahl der Abszissenachse parallel zu den neuen Längsgrenzen.

Am einfachsten führt folgendes Verfahren zum Ziel:

1. Vorläufige (d. h. genäherte) graphische Ermittlung der gesuchten Grenzlage, etwa durch Verwandlung.
2. Abgreifen einer der Koordinaten ($y_F = -34,20$, s. Fig. 165) für einen der beiden neuen Eckpunkte und proportionale Einrechnung der zugehörigen zweiten Koordinate ($x = 132,90$) nach der Bedingung, dass der angenommene Punkt auf der Gewandgrenze liegt.

Fig. 165.



3. Berechnung der Koordinaten des Schnittpunkts H der durch den soeben gewählten neuen Eckpunkt F zur Abszissenachse gedachten Parallelen, mit derjenigen Gewandgrenze, welche den zweiten Grenzpunkt E voraussichtlich enthält, oder ihrer Verlängerung ($x = -1,72$, $y = -34,20$).
4. Bestimmung des Flächeninhalts der Figur ABFH, welcher um den Betrag ΔF vom Grundstücks-Sollinhalt abweichen möge.
5. Berechnung der Höhe (Ordinatendifferenz) Δy für den gesuchten zweiten Eckpunkt E, so dass

$$FEH = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2} = \Delta F, \text{ also}$$

$$\Delta y = \frac{2 \cdot \Delta F}{\Delta x}$$

und damit der Ordinate jenes Eckpunktes

$$y = -34,20 + \frac{2 \cdot \Delta F}{\Delta x}.$$

6. Proportionale Einrechnung der Abszisse $x_E (-7,60)$.
7. Prüfung, ob die derart gefundene neue Längsgrenze genügend genau radial verläuft, entweder (bei Feldgrundstücken) graphisch, oder (namentlich bei Baugrundstücken) durch Vergleichung des

aus den Eckpunktskoordinaten ermittelten Richtungswinkels ¹⁾ x_{EF} mit dem Sollbetrag x_{EO} , wobei O den Schnittpunkt von DC und AB , bzw. den Mittelpunkt der Bogenstrassengrenzlinie bezeichnet.

Nötigenfalls mit Hilfe des festgestellten Richtungswinkel-
fehlers:

8. Verdrehung der (in diesem Fall nur als vorläufig anzusehenden) Grenze EF um ihren Halbierungspunkt und Nachprüfung des Einflusses dieser Drehung auf die Flächengrösse.
9. Berechnung der zur Übertragung auf das Gelände dienenden „Kopfmasse“ AE und BF aus den Koordinaten der betreffenden Streckenendpunkte.

Beispiel: Von der Grenze AB aus soll eine Fläche J von $16 \text{ a } 36 \text{ qm}$ unter angemessener (näherungsweise) Verteilung der Breitendifferenz des Gewandes $ABCD$ abgetrennt werden.

Lösung:

1. Durch Division mit der abgegriffenen ungefähren Grundstückslänge in die Fläche J ergibt sich die ungefähre mittlere Breite, welche im Plan an entsprechender Stelle abgetragen und durch deren Endpunkt die genäherte Grenzlinie radial eingezogen wird. Verwandlung liefert jetzt die für eine zweite Näherung etwa noch nötige Verschiebung und die endgültige Lage eines der Eckpunkte, z. B. F .
2. Aus dem Plan wird jetzt die Ordinate $y_F = 34,20$ abgegriffen. Rechenschieberrechnung liefert hierzu mit Probe die Abszisse:

$$75,12 : 14,40 = \frac{66,24}{75,12} : \Delta x \quad \left| \begin{array}{r|l} \Delta x & x \\ & 1,20 \\ 1,70 & 2,90 \\ \hline 12,70 & 15,60 \text{ (stimmt).} \\ \hline & 14,40 \end{array} \right.$$

3. Zur Ordinate $y = 34,20$ des Punktes H liefert Rechenschieberrechnung ebenfalls mit Probe die Abszisse:

$$\underbrace{22,62}_{(11,31)} : \underbrace{12,19}_{(11,31)} = \underbrace{3,14}_{(1,57)} : \Delta x \quad \left. \begin{array}{l} \text{(Diff.) } \Delta x \\ 1,00 (-13,88 + 15,60) = 1,72 \\ 0,12 (-1,69 + 3,41) = 1,72 \end{array} \right\} \text{ (stimmt).}$$

$$\underbrace{0,88}_{(11,31)} \quad \left| \begin{array}{r|l} & 0,88 \\ \hline & 0,88 \end{array} \right.$$

4. Fläche J_1 des Vierecks $ABFH$:

$$\frac{132,92 \times 25,76}{3424,0192} \quad \frac{148,50 \times 8,88}{1318,68} \quad \frac{3424,02}{1318,68}$$

$$2J_1 = 4742,70 \text{ qm}$$

$$\text{hievon ab } 1470,70$$

gibt den doppelten Sollinhalt $2F = 3272 \text{ qm}$, und

5. die Höhe des abzuschneidenden Dreiecks HEF mit $\frac{1470,70}{2} \text{ qm}$:

$$\Delta y = \frac{1470,70}{134,62} = 10,92.$$

Hieraus erhalten wir $y_E = -34,20 + 10,92 = -23,28$.

¹⁾ Die Erklärung der Bezeichnung „Richtungswinkel“ s. § 56.

6. Zur Einrechnung der Abszisse x_E wird wieder die Proportion (3) benützt:

$$\begin{array}{r}
 22,62 : 12,19 = \frac{14,84}{(7,42)} : \Delta x \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{(11,31)} \qquad \qquad \frac{7,78}{(3,89)} \\
 0,88 \qquad \qquad \frac{22,62}{(11,31)}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \text{(Diff.)} \quad \Delta x \quad x \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 15,60 \\
 0,58 \quad 8,00 \quad \underline{7,60} \\
 0,30 \quad \underline{4,19} \quad 3,41 \text{ (stimmt).} \\
 \hline
 0,88 \quad 12,19
 \end{array} \right.$$

7. Die graphische Untersuchung beweist genügend genaue radiale Richtung der neuen Grenze EF.
8. Berechnung der neuen Kopfmasse a und b mittels des Rechenschiebers nach einem der in § 24 gezeigten Verfahren.

Viel bequemer ist die:

β) Halbgraphische Behandlung.

Möge wieder wie vorhin die ungefähre Lage der neuen Grenze EF durch Verwandlung gefunden, und möge das Kopfmass $BF = b$ für den festzuhaltenden Punkt F auf dem Plan zu 9,04 abgegriffen worden sein. Dann erhält man das Kopfmass $AE = a$, wenn man die neue Parzelle durch die Diagonale FA in zwei Dreiecke zerlegt, aus:

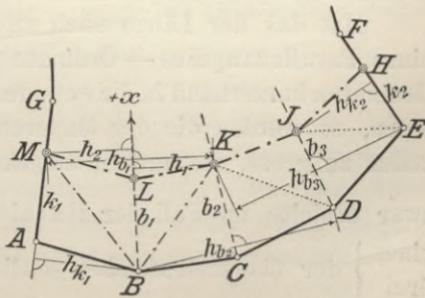
$$\begin{aligned}
 2J &= 3272 \text{ qm} = 9,04 \times h_{A,b} + a \times h_{F,a}, \text{ also } a = \frac{3272 - 9,04 \cdot h_{A,b}}{h_{F,a}} \\
 &= \frac{3272 - 9,04 \times 140,0}{119,0} = 16,86 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

Statt einen der neuen Eckpunkte auf Grund graphischer Berechnung von vornherein als fest anzunehmen und hernach die ganze, dieser weniger scharfen Methode entspringenden Differenz am andern Ende des Grundstücks zu berücksichtigen, kann man (besonders leicht bei halbgraphischer Behandlung) beide Kopfmasse a und b zunächst als vorläufige ansehen und die an jedem von ihnen anzubringende Verbesserung x berechnen aus

$$\begin{aligned}
 2J &= (b + x) h_{A,b} + (a + x) h_{F,a} \\
 x &= \frac{2J - (b \times h_{A,b} + a \times h_{F,a})}{h_{A,b} + h_{F,a}}.
 \end{aligned}$$

Ganz analog erfolgt die Lösung im Fall gebrochener Grenzen. Man entnimmt auf Grund vorgängiger graphischer Behandlung dem Plan die sämtlichen neuen Kopf- und Steinlinienmasse k und b bis auf eines (etwa b_1) und berechnet hieraus halbgraphisch, oder mittels der aus diesen

Fig. 166.



Massen durch Rechnung abgeleiteten Koordinaten der Grenzbruchpunkte den Flächeninhalt der Figur ABCDEHJKBMA. (Im letzteren Fall ist es zweckmässig, diejenige Steinlinie als x-Achse zu wählen, der die gesuchte Breite b_1 angehört.) Der Abmangel ΔJ gegen den Sollinhalt ergibt dann die noch fehlende Breite b_1 aus

$$\Delta J = b_1 \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{2 \cdot \Delta J}{h_1 + h_2}.$$

Statt am Schluss die eine Breite b_1 mit der ganzen Flächenausgleichung ΔJ zu belassen, ist bei halbgraphischer Behandlung ebenso bequem die Berechnung des Zuschlags x zu jeder der auf Grund graphischer Zuteilung vorläufig gefundenen Breiten b und k :

$$2F = (k_2 + x) h_{k_2} + (b_3 + x) h_{b_3} + (b_2 + x) h_{b_2} + (b_1 + x) h_{b_1} \\ + (k_1 + x) h_{k_1},$$

(wobei h die dem jeweiligen Doppeldreieck, oder Dreieck angehörige Höhe vorstellt). Hieraus

$$x = \frac{2J - (k_2 h_{k_2} + b_3 h_{b_3} + \dots + k_1 \cdot h_{k_1})}{h_{k_2} + h_{b_3} + \dots + h_{k_1}}.$$

In schwierigen Fällen wird die Lösung durch Probieren bewirkt, indem man die neue Grenze zunächst in erster Näherung feststellt, die durch sie abgeschnittene Fläche berechnet und alsdann durch Rückung um den ungefähren Flächenabmangel eine zweite Näherung für die Teilungslinie erreicht. Mit ihr wird dann ebenso verfahren, wie mit der ersten Näherung u. s. f.

B. Proportionalteilung.

Die Proportionalteilung von Grundstücken kommt namentlich bei Erbschaftsübergang, aber auch bei gemeinsamen Grundstückskäufen vor. Ihre Lösung kann genau nach Fall (a) behandelt werden, indem man zuerst den Gesamthalt des zu teilenden Grundstücks und hieraus die den einzelnen Teilen zukommenden Flächengrössen berechnet. Letztere brauchen dann nur unter Beachtung etwaiger Bedingungen für die Grenzrichtung „zugeteilt“ zu werden.

In einfachen Fällen, namentlich der Längstrennung, lässt sich jedoch die eigentliche Flächenberechnung und Zuteilung umgehen.

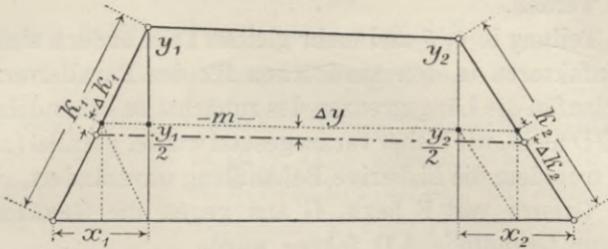
Hat das der Länge nach zu spaltende Grundstück die Form eines Paralleltrapezes — Ordinate $y_1 = y_2$ — und würde man diese Ordinaten kurzerhand in die entsprechende Anzahl gleicher Teile zerlegen, so würden die der längeren Grenzfurche zugekehrten Parzellen zu gross, die andern umgekehrt zu klein sich ergeben, und

zwar erhielte im Fall der Halbierung das kürzere Grundstück
eines } „ längere „
drei } der überschüssenden seitlichen Dreiecke, von denen jeder

Längsteilung
in zwei
gleiche Teile.

Teil zwei zu beanspruchen hat (s. Fig. 167). Man hat daher die vorläufige Teilungslinie in der Richtung gegen die längere Grenz-

Fig. 167.



furche von der Mitte aus noch zu verschieben um

$$\Delta y = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{8 m}, \quad \text{wobei } m \text{ die mittlere (nur näherungsweise zu ermittelnde) Länge ist}$$

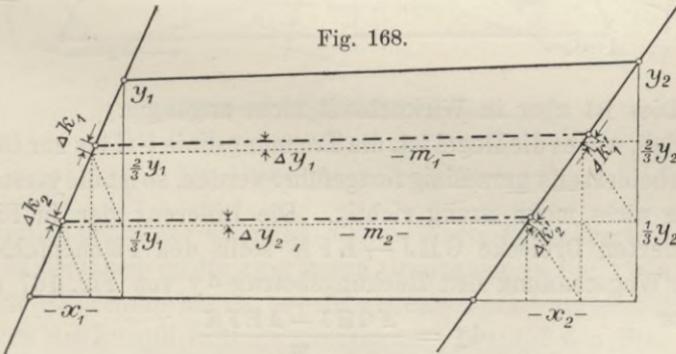
bezw. an den Gewandgrenzen um:

$$\Delta k = \Delta y \cdot \frac{k}{y}.$$

Bei Dreiteilung ist die Zahl der überschüssenden kleinen Dreiecke beiderseits = 9 (s. Fig. 168). Jedes Teilgrundstück hat also drei von ihnen zu beanspruchen. Wenn die vorläufigen Teilungs-

Längsteilung
in drei
gleiche Teile.

Fig. 168.



linien durch die Drittelpunkte der Ordinaten beibehalten würden, so hätte also der $\left\{ \begin{array}{l} \text{kürzeste Teil zu wenig} \\ \text{längste „ „ viel} \end{array} \right.$ um zwei solcher kleinen Dreiecke. Um dies zu vermeiden, sind diese Verbindungslinien zu verschieben um

$$\Delta y_1 = \frac{2(x_1 y_1 + x_2 y_2)}{18 m_1} \quad \text{bezw.} \quad \Delta y_2 = \frac{2(x_1 y_1 + x_2 y_2)}{18 m_2}.$$

Fällt eines der Gewandgrendreiecke über die Figur hinaus (s. Fig. 168), so verwandelt sich das zu seiner Fläche gehörige + Zeichen im Zähler in -. Die auf der Gewandgrenze nötige Verschiebung Δk wird berechnet wie oben bei der Halbierung.

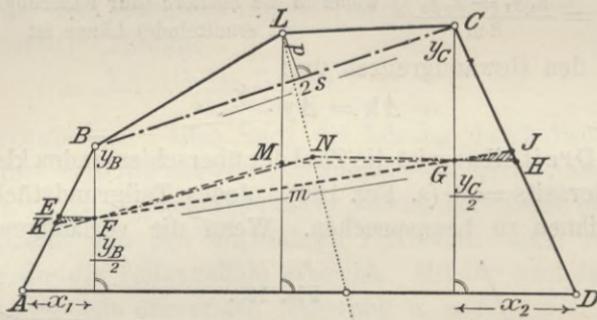
Je kleiner die Summe der überschüssenden seitlichen Dreiecke ist, um so weniger kommt eine kleine Differenz in der Messung der Mittellinien m zur Geltung, d. h. um so oberflächlicher kann m ermittelt werden.

Bei Teilung in 4, 5 und mehr gleiche Teile ändern sich lediglich die Zahlenfaktoren in den Ausdrücken für den Parallelverschub Δy .

Verlaufen die Längsgrenzen des zunächst zu behandelnden Vierecks $ABCD$ nicht, wie bisher vorausgesetzt wurde, parallel (s. Fig. 169), so bliebe trotzdem die bisherige Behandlung unverändert, wenn man die neue Grenze von F bzw. G aus gegen die Gewanngrenze je parallel zur Grundlinie AD führen würde.

Längsteilung
in beliebig
viele Teile.

Fig. 169.



Dies ist aber in Wirklichkeit nicht angängig.

Soll, wie es die Regel ist, die Trennungslinie FG bis zur Gewanngrenze beiderseits geradlinig fortgeführt werden, so ist die vorstehende Lösung nicht mehr streng richtig. Die Differenz der in Fig. 169 schraffierten Dreiecke $GHJ - EFK$ stellt den Flächenfehler vor, dessen Wegschaffung den Rückungsbetrag Δy von Fig. 167 um die Strecke

$$dy = \frac{\Delta GHJ - \Delta EFK}{m}$$

vergrößern würde. Diese Verbesserung dy wird um so geringer, je geringer die Divergenz der beiden Längsgrenzen, oder der Unterschied der Strecken x_1 und x_2 ist.

Ist endlich eine der Längsgrenzen z. B. BC in L gebrochen, (so dass das Fünfeck $ABLCD$ an Stelle des Vierecks $ABCD$ tritt) so kann man entweder auch die neue Teilungslinie in M , oder in einem Punkt N der Steinlinie brechen. In diesem Fall erfährt die vorige Betrachtung lediglich doppelte Anwendung. (Vergl. Ausführungen zu Fig. 170.)

Oder man kann die neue Grenze gerade legen, muss sie dann aber um einen dritten Rückungsbetrag δy (im vorliegenden

Fall entgegengesetzt Δy und dy) verschieben, der dem halben Dreiecksinhalt BLC entspricht, wobei also

$$\delta y = \frac{p \cdot s}{2m}$$

Damit ist man bereits übergegangen zum Fall:

Gebrochener Längsgrenzen.

Sind beide Längsfurchen des Grundstücks n -mal gebrochen, so zerfällt das Grundstück in $(n + 1)$ in gleicher Weise wie vorhin zu teilende Vierecke (s. z. B. $A_1 B_1 B_2 A_2$ in Fig. 170). Die einzelnen dabei gewonnenen vorläufigen Grenzlinien $P_1 P_2, P_3 P_4$ etc. schneiden sich aber dann nicht auf den Kopfgrenzen der einzelnen Vierecke, d. h. auf den Steinlinien $A_1 B_1, A_2 B_2$ etc. Dort würde vielmehr jeder Teil

Gebrochene
Längs-
grenzen.

Fig. 170.

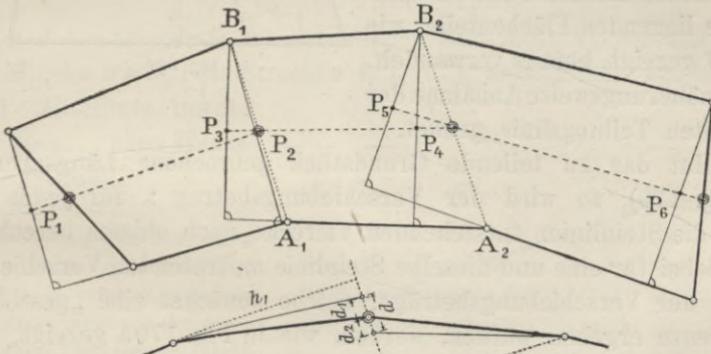


Fig. 170 a.

der neuen Längsgrenze absetzen, um in einem benachbarten Punkt wieder zu beginnen (s. die zwei feinen Grenzlinien in Fig. 170 a), was praktisch undurchführbar ist, sowohl wegen des erschwerten Feldbaus, als wegen der komplizierten Vermarkung. Die auf den Steinlinien erscheinende lineare Differenz d ist daher unter Berücksichtigung der jeweiligen Grenzlängen auszugleichen. Dies geschieht auf Grund der Bedingung (vergl. Fig. 170 a)

$$d_1 \cdot h_1 = d_2 \cdot h_2 \text{ oder } d_1 : d_2 = h_2 : h_1 \text{ und } (d_1 + d_2) : d_2 = (h_2 + h_1) : h_1$$

Teilung mit halbgraphischer Berechnung.

Möge die Teilungslinie auf beiden Gewinnsgrenzen je um den Betrag x aus der Mitte zu verschieben sein, so wird (s. Fig. 171)

Teilung
mit halb-
graphischer
Berechnung.

$$\begin{aligned} \frac{F}{2} &= \left(\frac{a}{2} - x\right) \frac{h_1}{2} + \left(\frac{b}{2} - x\right) \frac{h}{2} \\ &= \left(\frac{a}{2} + x\right) \frac{h_2}{2} + \left(\frac{b}{2} + x\right) \frac{h}{2} \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 x & \left(\frac{h_2}{2} + \frac{h}{2} + \frac{h_1}{2} + \frac{h}{2} \right) \\
 &= \frac{a}{2} \left(\frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2} \right) + \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{2} \right) \\
 &= \frac{a}{4} (h_1 - h_2) \\
 x &= \frac{2 a (h_1 - h_2)}{4 (h_1 + h_2 + 2 h)} \\
 x &= \frac{a (h_1 - h_2)}{2 (h_1 + h_2 + 2 h)}.
 \end{aligned}$$

Sind die neuen Grenzmarken auf „Steinlinien“ zu setzen, die innerhalb der Kopfgrenzen des Grundstücks verlaufen, so werden die zwischen Steinlinie und Gewandgrenze liegenden Flächenteile, wie in § 27 gezeigt, heraus verwandelt, wobei näherungsweise Annahme der gesuchten Teilungslinie genügt.

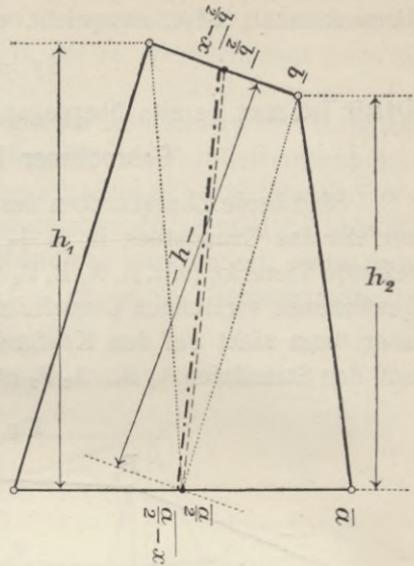
Hat das zu teilende Grundstück gebrochene Längsgrenzen (s. Fig. 170), so wird der Verschiebungsbetrag x für jedes der durch die Steinlinien entstehenden Vierecke nach obigem berechnet. Die hiebei für eine und dieselbe Steinlinie auftretenden Verschiedenheiten der Verschiebungsbeträge, welche zunächst eine „gestelzte“ Neugrenze ergeben würden, werden, wie in Fig. 170a gezeigt, ausgeglichen.

C. Zuteilung nach Wertklassen.

Die Aufgabe der Zuteilung nach Wertklassen tritt sowohl bei städtischen als auch bei landwirtschaftlich benützten Grundstücken auf.

Im ersteren Fall sind die Klassengrenzen zumeist durch Privatverträge festgesetzte Parallelen zur Baulinie. Sie begrenzen demgemäss Streifen (Bauplatz, Vorgarten, Hof etc.) von bestimmter gleicher, durch direkte Masszahlen festgelegter Breite. Die Zuteilung der Flächenstücke von vorausbestimmtem Wert erfolgt, schon im Hinblick auf den hohen Bodenpreis, hier in der Regel unter Benützung von Originalmassen. Die Aufgabe, die sich zumeist dadurch vereinfacht, dass die Grundstücksgrenzen senkrecht zur Baulinie (Aufnahmelinie) verlaufen müssen, wird am leichtesten durch Probieren gelöst, indem man die Inhalte und Werte der den einzelnen Klassen angehörigen Flächenstücke bis zu einer vorläufig angenommenen Neugrenze berechnet, zusammenstellt, mit dem Sollwert vergleicht und aus dem Unterschied gegen letzteren

Fig. 171.



eine bessere zweite Näherung für die Neugrenze gewinnt. Ihr folgt nach Wiederholung des Verfahrens nötigenfalls eine dritte Näherung etc.

Bei der Zuteilung landwirtschaftlich benützter Grundstücke sind zumeist keine zur Flächenberechnung direkt verwertbare Masszahlen für die Grenzen der einzelnen Wertklassen (Bonitäten) vorhanden. Letztere wurden vielmehr auf einfachste Weise, nur so aufgenommen, dass sie in den Plan an der richtigen Stelle eingezeichnet werden konnten.

Daher kann es sich hier nur um

halbgraphische Zuteilung mit halbgraphischer, oder reingraphischer Berücksichtigung der Wertklassen
handeln.

a) Parallele Zuteilung.

Auf der irgendwie roh gefundenen Mittellinie AB des künftigen Grundstücks werden die Strecken $l_1, l_1 \dots l_n$ abgegriffen, welche von dieser Mittellinie in der 1ten, 2ten ... nten Wertklasse liegen.

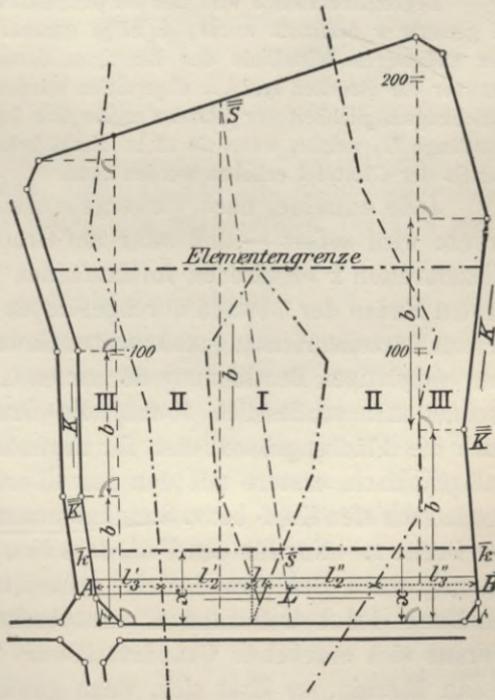
Fig. 172.

(Da, wo die Klassengrenze nicht geradlinig zwischen beiden Längsgrenzen des künftigen Grundstücks verläuft, oder wo eine Klasse nicht von der einen zur anderen Längsgrenze reicht, wird dieser Zustand durch graphische Verwandlung erzielt, wie z. B. bei Kl. I in Fig. 172.)

Würde nun AB die Mittellinie eines 1 m breiten Flächenstreifens bilden, so würden die abgegriffenen Längen gleichzeitig die Anzahl von qm angeben, welche diesem Flächenstreifen in jeder Wertklasse zugehören. Man erhielte also den Wert w des 1 m breiten Mittelstreifens als Summe der Werte der einzelnen Klassenabschnitte

$$w = w_1 l_1 + w_2 l_2 + \dots + w_n l_n$$

wobei $w_1, w_2 \dots$ den Wert eines qm der betreffenden Klasse vorstellt.



Wird das zuzuteilende Grundstück x m breit, sind also die Inhalte seiner Klassenabschnitte $x \cdot l_1, x \cdot l_2 \dots$ so wird sein Gesamtwert

$$W = x \cdot l_1 \cdot w_1 + x \cdot l_2 \cdot w_2 + \dots + x \cdot l_n \cdot w_n = x [w l] = x \cdot w.$$

Bei bekanntem Sollwert W wird also die senkrechte Grundstücksbreite $x = \frac{W}{w}$.

(Der Wert der Eckabschrägungsflächen muss natürlich dem zuzuteilenden Sollwert zugeschlagen werden, wenn man sie nicht durch Verwandlung als Längenreduktion wirken lassen will.)

Die Multiplikationen $w_1 l_1, w_2 l_2 \dots$ lassen sich bei Berechnung des Durchschnittswertes w schliesslich sparen, wenn man die Strecken $l_1 \dots l_n$ statt im Planmassstab $\frac{1}{m}$ im wechselnden Verjüngungsverhältnis $\frac{1}{m \cdot w_1}, \frac{1}{m \cdot w_2} \dots$ abgreift, wodurch man direkt die w -fachen Längen $w_1 l_1, w_2 l_2 \dots$ erhält. Auch bei Berechnung des Gesamtwertes W des Grundstücks kann die Flächenbestimmung $x l_1, \dots x l_n$ dann zunächst unterbleiben, wenn es sich nur um das Aufsuchen der neuen Grenzlage handelt und diese Flächen hernach bei der Proberechnung ermittelt werden.

Begreiflicherwise wird sich die Grundstücksbreite um so schärfer ergeben, je genauer w ermittelt wurde, d. h. je genauer die vorläufige Mittellinie AB der endgiltigen Mittellinie des künftigen Grundstücks sich anpasste und je genauer die Strecken $l_1, l_2 \dots$ abgegriffen wurden. Eine Verfeinerung und Ausgleichungsmöglichkeit für letztere ergibt sich durch Zusammenstellung zur Gesamtlänge L , welche, wenn sie nicht direkt bekannt ist (parallele Gewandwege) mittels der Glastafel erhoben werden kann.

Jede einzelne, nach vorhergehendem errechnete Grundstücksgrenze wird sofort — und zwar auf Grund der durch Addition der Einzelbreiten x erhaltenen fortlaufenden Breitenmasse und einer an beiden Enden der Gewinn durchgeführten genauen hm Unterteilung der zur Parzellenrichtung senkrechten Gewinnbreite — scharf kartiert. Zur endgültigen Bestimmung der neuen Grenze, bezw. zur Probe berechnet man schliesslich sowohl die Grundstücksgesamtfläche, als auch die Flächengrössen der ihr zugehörigen Klassenabschnitte je halbgraphisch, erstere mit den zur Übertragung aufs Gelände dienenden schiefen Kopf- bzw. Steinlinienmassen, letztere mit Benützung der Breite x . (Nur für den Fall, dass eine Klassengrenze nicht beide Längsgrenzen des Grundstücks schneidet, ist reingraphische Behandlung des betreffenden Klassenabschnitts nötig.) Stimmt der hieraus sich ergebende Grundstückswert mit dem Sollwert W nicht genau überein, so lässt sich, wenn gewünscht, d. h. wenn scharfe Zuteilung nötig ist, die Abweichung durch Parallelverschiebung der in diesem Fall zunächst als „vorläufig“ geltenden neuen Grenze wegbringen.

Zur Sicherung gegen Rechenfehler, wie auch zur Übersicht für den Zuteilungsentwurf teilt man vor der Zuteilung (hier bei der Wertswie früher bei der Flächenzuteilung) die Gewinn in, je nach der normalen Grundstücksgrösse, 50 bis 100 m breite „Elemente“ ein, deren Grenzen parallel den zukünftigen Grundstücksgrenzen verlaufen und deren Flächeninhalte und Werte vorgängig berechnet werden. Bei jeder solcher Grenze ergibt sich dann durch Zusammenstellung der im Element bis dahin zuteilten Grundstücke bzw. Grundstücksteile eine Rechenprobe für Breite, Fläche und Wert.

Sind sämtliche senkrechte Grundstücksbreiten x innerhalb einer Gewinn ermittelt, so erhält man die zur Absteckung dienenden schiefen Steinlinien- und Kopfmasse s oder k durch einfache Proportion, wenn auf irgendwelche Weise (z. B. durch Messung oder Ordinatumumformung auf die Grundstücksrichtung als x -Achse etc.) das einer Anzahl senkrechter Breiten $[x] = b$ entsprechende Steinlinien- oder Kopfmass S oder K bekannt ist, aus:

Berechnung
der
Absteckungs-
masse.

$$b : \begin{cases} S \\ K \end{cases} = x_1 : \begin{cases} s_1 \\ k_1 \end{cases}$$

$$x_2 : \begin{cases} s_2 \\ k_2 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Berechnet man derart auch die Mittelsteinlinien und legt die berechneten Masse der Absteckung zugrunde, so erhält man eine bequeme und durchgreifende Absteckungs- und Steinsatzkontrolle durch nachträgliche Untersuchung des geradlinigen Verlaufs jeder Eigentumsgrünze.

b) Die radiale Zuteilung

Radiale
Zuteilung.

unterscheidet sich von der Parallelteilung nur dadurch, dass an Stelle der gesuchten senkrechten Breite x für die halbgraphische Berechnung der ganzen Grundstücksflächen sofort die zur Absteckung auf dem Feld dienende Steinlinien- oder Kopfbreite tritt, und dass die halbgraphische Berechnung der Klassenabschnitte der reingraphischen weichen muss. Im übrigen wird, wie bei der Parallelteilung, eine vorläufige Grenzlinie der ersten Berechnung zugrunde gelegt und der Unterschied gegen den Sollwert durch Rückung weggeschafft. Die radiale Grenzrichtung wird lediglich auf graphischem Weg festgestellt.

§ 32. Grenzausgleichung. Einrechnung von Linienschnitten.

Die Aufgabe der Grenzausgleichung tritt zumeist in folgenden Formen auf:

Die Grenzlinie zwischen zwei Grundstücken soll derart verändert werden, dass

a) die neue Grenze eine vorgeschriebene Richtung (z. B. \perp zur Baulinie) erhält, oder durch einen vorgeschriebenen Punkt geht, und dass

b) die Summe der von dem einen Grundstück zum andern übergehenden Flächen k mal so gross ist, als die Summe der in umgekehrter Richtung vertauschten (einfachste Lösung ergibt sich für $k = 1$, also flächengleichen Tausch), bzw. dass — auf Grund eines vereinbarten, oder sonstwie festgestellten Wertmassstabs (Bonitierung) — die Summen der zwischen beiden Parteien auszutauschenden Flächenstücke je gleichwertig sind.

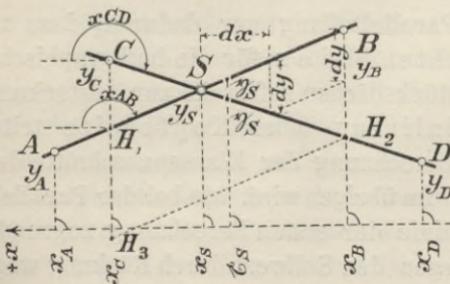
Im Grund handelt es sich also auch hier lediglich um Aufgaben der Flächen- bzw. Wertsberechnung und -Zuteilung, die am bequemsten gelöst werden durch: 1. vorläufige Annahme einer genäherten Grenzlinie, 2. Berechnung der zwischen ihr und der alten Grenze liegenden Flächen (je nach der verlangten Genauigkeit aus Koordinatenmassen, oder graphisch) und Werte, und 3. darauffolgende Rückung der vorläufigen Grenzlinie als zweite, bessere Näherung. Alsdann Wiederholung des Verfahrens so lange, bis der Zweck erreicht ist.

Hiebei sind häufig die **Koordinaten des Schnittpunkts zweier Linien** (der alten und der neuen Grenze) zu berechnen und zwar:

I. Schnitt zweier Geraden AB und CD.

Schnitt zweier Geraden. Die Punkte A, B, C und D (s. Fig. 173) mögen (wie gewöhnlich) durch rechtwinklige Koordinaten in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem aufgenommen sein.

Fig. 173.



Von den verschiedenen Lösungen seien folgende angeführt:

Erste (geometrische) Lösung. Berechnet man die Ordinaten der beiden Hilfspunkte H_1 und H_2 , in denen die Ordinatenlinien der dem Schnittpunkt zunächst gelegenen Punkte B und C je die andere Gerade schneiden, durch einfache Proportion (Verwendung des Rechenschiebers, nötigenfalls,

um damit die verlangte Genauigkeit zu erzielen, nach erfolgter Umformung der Proportion durch Differenzenbildung oder durch Multiplikation zweier homologer Glieder mit einer passenden Zahl) und denkt sich durch einen dieser Punkte (etwa H_2) eine Parallele $H_2 H_3$ zur anderen Geraden gezogen, so kennt man

$$\begin{aligned} H_3 H_1 &= H_2 B \\ H_1 C &= y_C - y_{H1}, \end{aligned}$$

also auch $H_3 C$ und hat nun aus dem $\Delta H_2 H_3 C$ die weiteren Proportionen

$$H_3 C : (x_C - x_B) = \frac{H_1 C : (x_C - x_S)}{B H_2 : (x_B - x_S)}$$

Aus diesen Proportionen erhält man $\frac{x_C - x_S}{x_B - x_S}$ und durch Subtraktion von

$\frac{x_C}{x_B}$ die Abszisse x_S des gesuchten Schnittpunktes doppelt.

Berechnet man jetzt zu der gefundenen Abszisse die Ordinate y_S dieses Schnittpunktes durch Proportion sowohl auf der Geraden AB , als auch auf CD , so liefert die Übereinstimmung beider Werte gleichzeitig eine durchgreifende Probe für die Richtigkeit der ganzen Rechnung.

(Statt der Schnittpunkte H_1 und H_2 der Ordinatenlinien mit den Geraden AB und CD hätten ebensogut die Schnittpunkte zweier etwa durch A und C gezogener Parallelen zur Abszissenachse je mit der anderen Geraden verwendet werden können.)

Dieses Verfahren verlangt die Ausrechnung von fünf Proportionen, die allerdings bei sinngemässer Anwendung des Rechenschiebers nicht allzuviel Arbeit erfordern (zumal nur drei verschiedene Anschriebe nötig werden), aber immerhin weitere Vereinfachung wünschenswert machen.

Eine zweite (trigonometrische) Lösung, welche (bei Anwendung von Additionslogarithmen) für die logarithmische Berechnung geeignet ist, ergibt sich durch Verwendung der Richtungswinkel (s. § 56) der Geraden AB und CD . Sind diese abgeleitet, so erhält man allgemein gültig

$$y_{H_1} = y_A + (x_{H_1} - x_A) \operatorname{tg} x AB$$

und

$$x_C - x_S = \frac{H_1 C}{\operatorname{tg} x AB - \operatorname{tg} x CD}$$

Durch Subtraktion dieses Wertes von x_C erhält man die gesuchte Schnittpunktsabszisse x_S . Ergibt jetzt die auf Grund dieser gefundenen Abszisse durchgeführte Berechnung der gesuchten Schnittpunktsordinate aus

$$y_S = y_A + (x_S - x_A) \operatorname{tg} x AB \text{ und}$$

$$y_S = y_C + (x_S - x_C) \operatorname{tg} x CD$$

übereinstimmende Werte, so ist die Richtigkeit der ganzen Rechnung durchgreifend gesichert.

In der Praxis steht zumeist ein massstäblich gezeichneter Plan zur Verfügung. In diesem Fall ist eine

dritte (halbgraphische) Lösung besonders empfehlenswert.

Greift man die gesuchte Abszisse x_S aus dem Plan ab, so hat man dadurch jedenfalls einen Näherungswert ξ_S für sie gefunden. Nun berechnet man zu diesem Näherungswert die Ordinaten η_S der Punkte, in welchen eine durch den Punkt ξ_S gezogene Senkrechte zur Abszisse die Geraden AB und CD schneidet. Dies geschieht entweder mittels der Proportion

$$\begin{aligned} (x_B - x_A) : (y_B - y_A) &= (\xi_S - x_A) : (\eta_S - y_A) \\ &= (\xi_S - x_B) : (\eta_S - y_B) \end{aligned}$$

welche nach entsprechender Umformung die Anwendung des Rechenschiebers gestattet, oder mittels der allgemein gültigen Beziehung

$$\eta_S = y_A + (\xi_S - x_A) \operatorname{tg} x AB \text{ etc.}$$

und logarithmischer Berechnung.

Ergeben sich hiebei beide Werte η_s gleich gross, so hat man beim Abgreifen zufälligerweise den wahren Abszissenwert x_s erlangt und die Aufgabe ist gelöst — die vorläufigen Werte $\begin{matrix} \xi_s \\ \eta_s \end{matrix}$ stellen zugleich die gesuchten, endgültigen $\begin{matrix} x_s \\ y_s \end{matrix}$ vor. Trifft dies aber (wie es die Regel sein wird) nicht zu, so zeigt die Differenz der beiden erhaltenen Ordinaten η_s sofort an, ob ξ_s zu klein oder zu gross abgegriffen wurde. (Ist, wie in Fig. 173, η auf AB $>$ η auf CD, so ist ξ_s zu klein abgegriffen und umgekehrt.) Trägt man jetzt die Abweichung $d\eta$ der beiden berechneten η in grossem Massstab (etwa 1 : 10) zwischen den Schenkeln des Winkels senkrecht zur x-Achse auf (s. Fig. 173), so kann man — auf Millimeter genau — die an der vorläufigen Abszisse ξ anzubringende Korrektion dx , ebenso aber auch die an jeder der vorläufigen Ordinaten η anzubringenden Korrekturen aus dem Plan abgreifen und durch Addition zu den ersteren die endgültigen Werte erlangen.

Von ganz besonderem Einfluss auf die Zuverlässigkeit des Endresultats ist bei dieser Behandlung die fehlerfreie Berechnung der beiden vorläufigen Werte η_s . Man wird diese daher — wie es sich übrigens auch in allen anderen Fällen empfiehlt — immer von beiden Endpunkten der jeweiligen Geraden herein ermitteln.

Spezieller Fall. Weicht die Richtung einer der beiden Geraden nur sehr wenig von derjenigen der x-Achse oder der y-Achse ab, so greift man zunächst diejenige Schnittpunktskoordinate ab, welche der zur Geraden nahezu parallelen Achse angehört. Aus ihr wird man, auch wenn sie mit einem kleinen Fehler behaftet sein sollte, die andere Koordinate auf die nahezu parallele Schnittgeraden sofort endgültig, d. h. genau einrechnen können. Diese liefert dann umgekehrt auf der stärker divergierenden zweiten Geraden direkt das endgültige Mass für die zweite, zuvor abgegriffene Koordinate.

Die halbgraphische Lösung lässt sich, sinngemäss ausgestaltet, auf die Aufgabe der Bestimmung

II. des Schnitts beliebiger, ihren Bildungsgesetzen nach bekannter Linien

anwenden.

Seien z. B. in Fig. 174 die Koordinaten des Schnittpunktes S eines Kreises um O und einer Geraden AB gesucht. Der Kreismittelpunkt O und die Endpunkte A und B der Geraden seien in bezug auf irgend ein Koordinatensystem aufgenommen. Die Gleichung des (in der Richtung der x-Achse um x_0 , in der Richtung der y-Achse um y_0 verschobenen) Kreises ist unter Berücksichtigung der Vorzeichen dieser Mittelpunktskoordinaten in Fig. 174:

$$(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 = r^2.$$

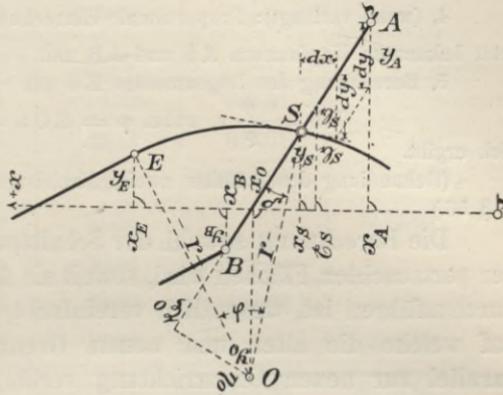
Greift man nun wieder den vorläufigen Wert ξ_s für die Abszisse des Schnittpunktes S aus dem Plan ab, so kann man die Ordinaten η_s der Schnittpunkte der durch den Punkt ξ_s gezogenen Senkrechten zur Abszisse mit den beiden Linien berechnen. (Bezüglich der Geraden AB wie im vorigen Fall, bezüglich des Kreises um O durch Einsetzung des Wertes ξ_s an Stelle von x in vorstehender Gleichung.) Ergeben sich beide Werte für η zufälligerweise gleich gross, so stellt die genäherte Abszisse ξ_s deren endgültigen Wert x_s dar und es sind damit wieder die endgültigen Koordinaten des Schnittpunktes ge-

funden, andernfalls wird, wie im vorigen Fall, die Differenz dy in grossem Massstab zwischen die Gerade und die in S an den Kreis gezogene Tangente eingelegt und sodann die an g anzubringende Korrektur dx abgegriffen.

Sind die gegebenen Linien von der zweiten, dritten etc. Ordnung, so wird dadurch an der Lösung prinzipiell nichts geändert.

Mittels der Kopfmasse AS und BS (s. Fig. 174) ist die Absteckung des Schnittpunktes S auf dem Gelände am bequemsten. Dieselben lassen sich aus den Koordinaten der betreffenden Punkte nach § 56 berechnen.

Fig. 174.



Beispiel. Gegeben $x_0 = + 28,91$ $y_0 = - 43,30$; $r = 55$ m
 $x_A = + 44,93$ $y_A = + 15,44$
 $x_B = + 39,48$ $y_B = + 5,56$.

Gesucht die Koordinaten des Schnittpunktes S.

1. Lösung. Die Schnittpunktsabszisse x_s ergibt sich aus dem Plan (also genähert), zu + 41,90, hiezu liefert proportionale Rechenschiebereinrechnung die Ordinate auf der Geraden AB:

	Δy	y	
		5,56	
5,45 : 9,88 =	$\frac{2,42}{3,03} : \Delta y$	4,38	
	$\frac{5,45}{5,45}$	5,50	$\frac{9,94}{15,44} = y_s^0$
		<u>9,88</u>	

Für die Differenz Δy zwischen Kreisordinate und Mittelpunktsordinate hat man

$$\Delta y = \sqrt{r^2 - \Delta x^2} = \sqrt{55^2 - 12,99^2} = \sqrt{2856,26} = 53,45$$

also Kreisordinate = $- 43,30 + 53,45 = + 10,15 = y_s$.

Die Kreisordinate ist also $>$ die Geradenordinate um $10,15 - 9,94 = 0,21$, d. h. die abgegriffene Abszisse war zu klein. (Die Figur 174 entspricht nicht dem speziellen Beispiel.)

Trägt man die Differenz dy von 21 cm in grossem Massstab (etwa 1 : 10) senkrecht zur Abszisse zwischen AB und die in S an den Kreis gezogene Tangente ein, so kann man direkt abgreifen:

Abzissenkorrektur $dx = + 0,10$ also endgültige Abszisse = 42,00
 Geradeordinaten " = + 0,18 " " Ordinate = 10,12
 Kreisordinaten " = - 0,03 " " " = 10,12

2. Lösung. Man kann auch umgekehrt die Kopfmasse vorgängig ermitteln und aus ihnen, wenn nötig, die Koordinaten x_s und y_s berechnen wie folgt:

1. Berechnung des Richtungswinkels α_{AB} und der Strecke AB nach dem im § 56 zu zeigenden Verfahren;

2. Umformung der Koordinaten x_0 und y_0 des Kreismittelpunktes O auf AB als Abszisse und A als Ursprung (s. Kapitel 13). Aus den sich hiebei ergebenden Werten ξ_0 und η_0 kommt:

3. Berechnung des Kopfmasses

$$AS = \xi_0 - \sqrt{r^2 - \eta_0^2}$$

oder $AS = \xi_0 - r \cos \delta$, wobei $\sin \delta = \frac{\eta_0}{r}$;

4. (wenn verlangt): Proportionale Einrechnung der Koordinaten x_s aus den jetzt bekannten Kopfmassen AS und AB und

5. Berechnung des Bogenmasses ES aus

$$ES = \frac{\varphi}{\rho} r, \text{ wobei } \varphi = \text{EOS} = xOS - xOE$$

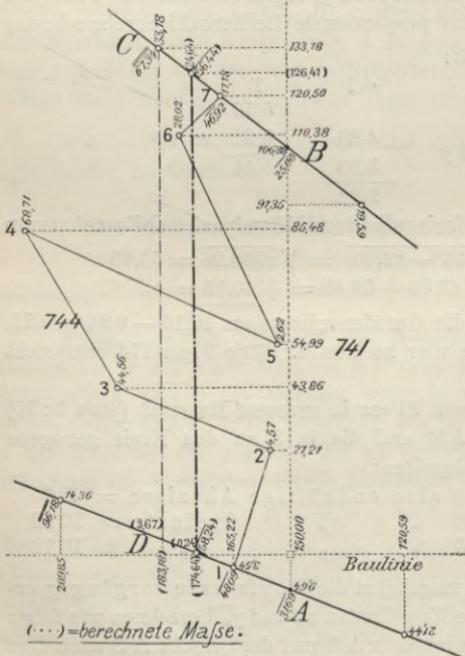
sich ergibt.

(Behandlung des Schnitts zweier Kreisbogen und Kleinpunktsberechnung s. § 56.)

Wahl der
der_Auf-
nahmelinie.

Die Berechnung sowohl der Schnittpunktskoordinaten als auch der vertauschten Flächen wird, soweit sie überhaupt mit Koordinaten durchzuführen ist, wesentlich vereinfacht, wenn die Abszissenachse, auf welche die alten und neuen Grenzpunkte bezogen werden, parallel zur neuen Grenzrichtung verläuft, oder durch den vorgeschriebenen Grenzpunkt geht. (Dies lässt sich, wenn nicht schon bei der Feldaufnahme dafür gesorgt wurde, durch rechnerische Koordinatenumformung, s. Kapitel 13, erreichen.)

Fig. 175.



Für die einfachste Form der Grenzausgleichung, den flächengleichen Tausch, bedarf es in diesem Fall nicht einmal der Annahme einer vorläufigen Grenzlinie. Vielmehr wird man am besten zunächst die Fläche zwischen der alten Grenze 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (s. Fig. 175) und der Aufnahmelinie AB berechnen und sie hernach von der letzteren aus als Trapez zuteilen.

Beispiel: Die gebrochene Grenzlinie 1—2—3—4—5—6—7 (s. Fig. 175) soll durch eine Gerade senkrecht zur Baulinie derart ersetzt werden, dass die beiden Grundstücke P. 744 und P. 741 dem Flächeninhalt nach keine Veränderung erleiden.

Auflösung. Als Aufnahmelinie würde eine Senkrechte AB zur Baulinie (Parallele zur gesuchten Grenze) verwendet und es ergaben sich für die Lage der Grenzpunkte die in Fig. 175 eingetragenen Masse.

Es folgt nun:

1. Berechnung der Fläche A—1—2—3—4—5—6—7—B.

Abstich	Abszissen- differenz	Ordinaten- summe	2 F	
			+	-
A—1	6,10	15,22	92,84	
1—2	30,75	19,79	608,54	
2—3	16,65	49,13	818,01	
3—4	41,62	113,27	4714,30	
4—5	-30,49	71,33		2174,85
5—6	55,39	30,64	1697,15	
6—7	10,12	45,20	457,42	
7—B	-13,62	17,18		233,99

$$\begin{aligned}
 & 8388,26 \quad 2408,84 \\
 & 2 F = 5979,42 \\
 & F = 29 \text{ a } 89,71 \text{ qm.}
 \end{aligned}$$

2. Zuteilung der Fläche F = 29 a 89,71 qm parallel zur Aufnahmelinie AB und von ihr ausgehend:

α) Berechnung der durch den nächstgelegenen Bruchpunkt C der Kopfgränze gezogenen Parallelen CD = a₁ mittels Rechenschiebers:

$$\begin{aligned}
 44,63 : 17,90 &= \frac{17,96}{26,67} : x \quad - \quad 3,54 \\
 & \quad \quad \quad \frac{7,21}{10,69} + \frac{3,67}{14,36} \quad a_1 = 133,18 - 3,67 \\
 & \quad \quad \quad \frac{17,90}{17,90} + \quad \quad \quad = 129,51.
 \end{aligned}$$

β) Flächenzuteilung (nach dem Verfahren des § 31 A, a, α).

129,51 = a ₁ = CD		
116,52 = a ₀ = AB		
+ 12,99 = a ₁ - a ₀	a ₁ - a ₀	1.11361
33,18 = h ₁	h ₁	1.52088
	$\frac{a_1 - a_0}{h_1}$	9.59273
5979,42 = 2 F	2 F	3.77666
242,69 = (a ₀ + x)	a ₀ + x	2.38505
2340,9 = $\frac{a_1 - a_0}{h_1} \cdot 2 F$	$\frac{a_1 - a_0}{h_1} \cdot 2 F$	3.36939
13577 = a ₀ ²		
15918 = a ₀ ² + $\frac{a_1 - a_0}{h_1} \cdot 2 F$		
126,17 = $\sqrt{a_0^2 + \frac{a_1 - a_0}{h_1} \cdot 2 F} = x$		
24,64 = y	y	1.39161

γ) Berechnung der zur Absteckung dienenden Kopfmasse für die neuen Eckpunkte und der zugehörigen Koordinaten (mittels Rechenschiebers).

		Grenze A D			
		Δ k	k	Δ y	y
			48,09		— 3,54
44,63 :	48,09	= 9,42 :	Δ k	10,15	58,24
	17,90		Δ y	37,94	96,18
		35,21		48,09	14,12
		44,63			17,90
					+
					0,24
					+
					14,36
		Grenze B C			
		Δ k	k	Δ x	x
			46,92		120,50
16,00 :	20,42	= 7,46 :	Δ k	9,52	56,44
	12,68		Δ x	10,90	67,34
		8,54		20,42	6,77
		16,00			12,68
					+
					126,41
					+
					133,18

Die zuweilen auftretende Aufgabe der Begradigung nur schwach gebrochener Längsgrenzen bzw. der Verlegung der alten Grenzknickpunkte auf neue Steinlinien wird am bequemsten direkt auf dem Feld und zwar ohne Ermittlung der Flächeninhalte analog der zeichnerischen Verwandlungsmethode gelöst. Das auf dem Feld natürlich undurchführbare Parallelabschieben wird dabei durch Absetzen der nach erfolgtem Einweisen zu messenden Pfeilhöhen auf der Verwandlungsbasis in gleicher Richtung ersetzt. Handelt es sich nicht um eine Geradstreckung des ganzen Verlaufs der Längsgrenze, sondern nur um Verminderung und Verlegung ihrer Knickpunkte, so werden die Grenzstrecken zwischen zwei aufeinanderfolgenden Steinlinien je für sich ausgeglichen und die dabei auf diesen sich ergebenden „Stelzen“ nach dem in Figur 170 a gezeigten Verfahren beseitigt.

Kapitel VIII.

Verwendung der Ergebnisse der staatlichen Stückvermessung (Aufnahmemasse, Grundstückspläne und Flächenmasse) für die Rechtspflege, die innere und die Steuerverwaltung.

§ 33. Vermessungsakten. Öffentliche Dokumente über das Eigentum an Grundstücken.

Um einen zuverlässigen Massstab für eine gerechte Verteilung der Grundsteuer zu gewinnen, deren Höhe von dem erzielbaren Grundstücksertrag, d. h. von der Flächengrösse und der Bonität der Grundstücke abhängt, haben die meisten Kulturstaaten Europas seit dem Ende des 18., namentlich aber während des 19. Jahr-

hunderts zusammenhängende Vermessungen aller einzelnen Grundstücke ihrer Gebiete in Rücksicht auf deren Begrenzung und Kultur durchgeführt bezw. in Angriff genommen (Katastervermessungen). Diese Vermessungen haben nach und nach und zumal da, wo eine regelrechte Grenzvermarkung der Vermessung vorausging, eine Bedeutung auch in bezug auf die Sicherung des Eigentums an Grund und Boden erlangt, die den ursprünglichen Zweck der blossen Grundsteuerumlage weit überragt. Denn sie bilden in vielen Fällen — auch sogar da, wo die ihnen innewohnende Genauigkeit und Zuverlässigkeit an sich kaum einem weiteren, als dem ursprünglichen Zweck genügte — das einzige Hilfsmittel, um über den zur Zeit der Vermessung vorhanden gewesenen, später zum Teil verwischten Grenzverlauf Aufschluss zu geben. In dem Masse, in welchem die Erkenntnis des Werts dieser Seite der Katastervermessungen wuchs, wurden seitens der leitenden staatlichen Behörden die Vorschriften bezüglich anzuwendender Messungs- und Berechnungsmethoden und verlangter Genauigkeit den höheren Zwecken angepasst.

Die neueren Katastervermessungen werden von Anfang an unter dem Gesichtspunkt ausgeführt, künftig als Grundlage eines Eigentumskatasters — des Grundbuchs — dienen zu können, dessen Beweiskraft (innerhalb kleiner unvermeidlicher und daher zu duldender Fehler) für die Flächenangaben und namentlich für den Verlauf der Eigentumsgrenzen zum Bedürfnis geworden ist. Wenn derart eine fortschreitende Entwicklung des Katastervermessungswesens den einzelnen Vermessungswerken den Stempel ihrer Entstehungszeit sowohl in Rücksicht auf Zweck als auf Methode, Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Durchführung aufdrückt, so waren es andererseits die verschiedenartigen speziellen Bedürfnisse, wirtschaftlichen Verhältnisse und politischen Gruppierungen der einzelnen Staaten, welche der Schaffung eines gleichartigen und gleichwertigen Vermessungswerkes auch nur innerhalb Deutschlands entgegenstanden.

Innerhalb des hier zur Verfügung stehenden Raumes ist daher eine auch nur annähernd erschöpfende Behandlung der Ergebnisse der Katastervermessungen Deutschlands unmöglich.

Gemeinsam ist den verschiedenen Vermessungswerken folgendes: Als Grundlage der Aufnahmen dient ein vom Grossen ins Kleine bis zu Seiten von etwa 1 km Länge herab sich abstuftendes Netz von Dreiecken (s. Kapitel 11), auf welches sich ein Netz von Polygonzügen (s. Kapitel 12) stützt. Beide zusammen bilden die Grundlage für die (nach einer der in § 17 geschilderten oder aus ihnen kombinierten Methode ausgeführte) Stückvermessung. Nun erfolgt

Eigentums-
kataster.

Aufnahme-
methode.

Katasterpläne. die Kartierung in über das ganze Land gleichem, oder je nach der durchschnittlichen Grundstücksgrösse veränderlichem Massstab auf Plänen von bestimmtem Format mit natürlicher (Wege, Flüsse etc.), oder künstlicher (Parallele bzw. Senkrechte zur Achse der Landesvermessung) Abgrenzung. Diese Pläne (Katasterpläne) werden nach den jedem Staat eigentümlichen Vorschriften zeichnerisch ausgeführt und dann auf mechanischem, oder auf zeichnerischem Weg kopiert. Kopien sind den Interessenten zugänglich und befinden sich überdies zu allgemeiner Einsichtnahme auf den Rathäusern der Gemeinden. Jedes Einzelgrundstück erhält eine Nummer, unter welcher es samt seiner (nach Kapitel 7 ermittelten) Flächengrösse, dem Namen des Eigentümers, der Lage und Kulturbezeichnung und zwar nach der Nummernfolge (Realordnung) gemeindeweise bzw. markungsweise geordnet im Kataster (Primärkataster, Lagerbuch, Flurbuch) aufgeführt wird. Ein weiteres Buch (Grundbuch) enthält denselben Beschrieb der Grundstücke, vermehrt noch um Angaben über deren private Rechtsverhältnisse und zwar zumeist den gesamten Grundbesitz jedes der in alphabetischer Ordnung aufgeführten Besitzer im Zusammenhang umfassend. (Personalordnung.)

Kataster.

Grundbuch.

Katasterfortführung. Überall erwies sich nach Schaffung des Vermessungswerkes dessen Fortführung (d. h. Nachtrag der im Laufe der Zeit eingetretenen Veränderungen in Buch und Plan) als notwendig, und überall ist daher ein besonderer Katasterfortführungsdienst — ganz oder teilweise staatlich — organisiert. Auf die zum Zweck der Katasterfortführung entstehenden und gesammelten Akten (Messurkunden, Handrisse etc.) wird in den Urdokumenten (Katastern) bei jedem Grundstück verwiesen, so dass jede im Lauf der Jahre eingetretene Veränderung in der Begrenzung, oder dem inneren Bestand nachgeschlagen werden kann. Die sämtlichen Grenz- und Kulturänderungen werden durch staatliche Behörden überdies in besonderen Kartenexemplaren nachgetragen.

Württembergische Katastervermessung. Als spezielles Beispiel möge die Katastervermessung des Königreichs Württemberg dienen, die in verhältnismässig kurzer Zeit (1818—1840), völlig einheitlich nahezu bis ins kleinste Detail, durchgeführt wurde.

Triangulierung. Das Dreiecksnetz (s. Kapitel 11) steigt in drei ineinander eingegliederten Stufen von 75 km langen Seiten bis auf solche von 0,7 km Länge herunter und gründet sich auf eine gemessene Basis von ca. 13 km Länge (Solitude—Ludwigsburg), im übrigen aber auf Winkelbeobachtungen. Als Ursprung des rechtwinklig sphärischen Koordinatensystems, auf das die Dreieckspunkte bezogen wurden, wurde für das ganze Land (sowie für die hohenzollernschen Lande)

die Tübinger Sternwarte gewählt. Die Abszissenachse bildet (abgesehen von einer geringen, nachträglich konstatierten Abweichung) der Nordzweig des durch den Ursprung gehenden Erdmeridians.

Unter Zugrundelegung der berechneten Koordinaten für die Dreieckspunkte wurde auf dem Felde ein Netz von Linien abgesteckt, deren eine Schar senkrechte Grosskreise zum Nullmeridian (Landesvermessungsachse) in Abständen von je 4000 Fuss bilden. Die hiedurch begrenzten, von West nach Ost ziehenden Streifen heissen Schichten; sie werden mit römischen Ziffern bezeichnet und vom Ursprung aus gegen Nord und Süd je mit I anfangend gezählt.

Planbegrenzung.

Als zweite Schar begrenzender Linien dienen Parallelkreise zum Nullmeridian ebenfalls in gegenseitigen Abständen von je 4000 Fuss. Die hiedurch gebildeten von Süd nach Nord ziehenden Streifen heissen Nummern, sie werden mit arabischen Ziffern vom Nullmeridian nach Ost und West je mit 1 anfangend bezeichnet. Durch den Nullmeridian selbst und ihre im Ursprung errichtete Normale wird das Land in die vier „Regionen“: Nord-Ost (N.O.), Süd-Ost (S.-O.), Süd-West (S.-W.) und Nord-West (N.-W.) zerlegt (s. Fig. 176), so dass z. B. durch die Bezeichnung

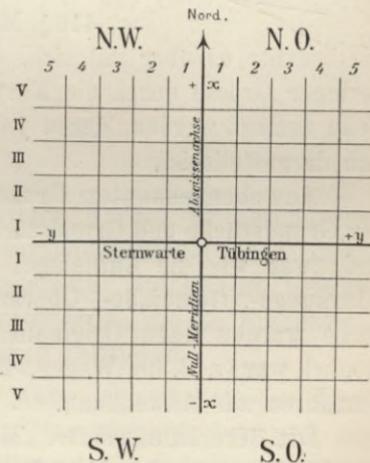
N.O. XXI. 12

die Lage eines durch die genannten Linien (ungefähr quadratisch) begrenzten Flächenstücks (Kartenblatts) von 4000 Fuss = 1145,69 m Länge und Breite eindeutig bestimmt ist.

Zur bequemeren Benützung in den Gemeinden tragen die Pläne ausser dieser allgemeinen Landesbezeichnung noch weitere, in der nordwestlichen Ecke jeder Gemeindemarkung mit I beginnende, von West nach Ost und von Nord nach Süd fortschreitende „Gemeindekartennummern“.

Das Karten-(Messtisch)blatt bildet die Aufnahmeeinheit. Im Anschluss an seine Grenzlinien und die innerhalb liegenden, ihren Koordinaten nach bestimmten Dreieckspunkte, „Signalpunkte“, sowie nötigenfalls auf Grund weiterer mittels des Messtisches bestimmter „geometrischer Punkte“, erfolgte die Aufnahme der Grundstücke und Grundstücksteile zumeist nach der Koordinatenmethode. Die

Fig. 176.



hiebei gewonnenen Masszahlen sind in (für jedes Kartenblatt getrennten) Feldbüchern, „Landesvermessungsbrouillons“ (die wichtigsten und der württembergischen Landesvermessung eigentümlichsten Dokumente) niedergelegt.

Kartierung.

Auch die Kartierung erfolgte nach den künstlichen Grenzen jener Abschnitte (Kartenblätter) und zwar fürs ganze Land einheitlich im Massstab 1 : 2500. (Einzelne Stadt- und Ortsgebiete wurden überdies, gleichfalls nach künstlichen, rechtwinkligen Grenzen, in grösseren Massstäben, wie 1 : 1250 oder 1 : 1000, dargestellt.) Die Pläne „Flurkarten“ enthalten sämtliche Eigentums-, Kultur- und politischen Grenzen, alle Arten von Wegen und Wasserläufen, die Zeichnung der Kulturarten, die Namen der Oberämter, Markungen und Gewände, jedoch weder Parzellnummern, noch Aufnahmemasse und werden durch Lithographie vervielfältigt. Abdrücke sind käuflich (Preis 90 Pfg.) zu haben.

Die geschilderte künstliche Begrenzung der Pläne ermöglichte neben bequemer Zusammensetzung beliebig vieler benachbarter zu einer auf grosse Flächen sich erstreckenden Karte die einfache Feststellung der auf jedem von ihnen dargestellten Gesamtfläche

$$(4000' \times 4000' = 16\,000\,000 \text{ Quadratfuss} = 416\frac{2}{3} \text{ Morgen} \\ = 416\frac{5}{8} \text{ Morgen, } 16 \text{ Rth.})$$

Sie brachte es aber mit sich, dass einzelne Grundstücke auch bei geringer Grösse durch die Kartenrandlinien in mehrere (bis zu vier) Teile zerlegt werden, deren jeder auf einer anderen „Karte“ bildlich dargestellt ist.

Flächen-
berechnung.

Aus obengenanntem Grund erfolgte die Flächenberechnung der Grundstücke und Grundstücksteile nach Kartenblättern getrennt, und zwar wie die Aufnahme, ohne Rücksicht auf die politischen (Markungs-, Gemeinde-, Oberamts-, Kreis-) Grenzen. In der Hauptsache wurden dazu Originalmasse verwendet. Soweit dies nicht möglich war (z. B. bei Wegen, Flüssen etc.), kam das reingraphische Verfahren zur Anwendung.

Die Berechnungshefte, „Messregister“ enthalten die Beschriebe der berechneten Grundstücksteile und die Zusammenstellung zu den einzelnen Markungsanteilen sowie zur Gesamtfläche des Kartenblatts. Die (bis zu $\frac{1}{2}\%$ zulässige) Differenz gegen die Sollfläche wurde nachgewiesen aber nicht ausgeglichen.

Die Sammlung der berechneten Flächenstücke und die Zusammenstellung zu ganzen Parzellen und Gemeindemarkungen erfolgte nach geschehener markungsweiser Numerierung (Gebäude, Feldgüter, Ortswege, Hauptstrassen, Vizinalwege, Feldwege, Flüsse, Bäche, Wassergräben und — seit deren Bestehen — Eisenbahnen je

Nume-
rierung.

mit 1 anfangend) in der Ordnung der Parzellnummern im „Primärkataster“. Neben der näheren Lagebezeichnung (Kartenummer, Gewandnamen) und der Flächengröße gibt dieses noch die Kulturart der Grundstücke und die Namen der Eigentümer an.

Kataster.

Eine Abschrift des Primärkatasters, sowie des Verzeichnisses der trig. Signalpunkte samt Übersichtsplan und — soweit die Gemeinden hiefür die Mittel bewilligten — auch der Landesvermessungsbrouillons, sowie je eines Exemplars der mit Parzellenummern versehenen (und durch den Bezirksgeometer auf dem neuesten Stand erhaltenen) Flurkartenabdrücke befindet sich auf den Ortsregistaturen, die Originalakten der Landesvermessung samt den lithographischen Steinen dagegen in der Obhut des Königlichen Katasterbureaus in Stuttgart.

Katasterfortführung.

Im Falle eintretender Veränderungen in der Benützungart oder Begrenzung von Grundstücken sind die Grundeigentümer gehalten, durch verpflichtete Geometer (Katastergeometer) Messurkunden und Handrisse darüber fertigen zu lassen, welche sich auf die Landesvermessungsdokumente, oder auf die seit der Landesvermessung bereits gelieferten Messurkunden stützen und welche zur alljährlichen Ergänzung eines bei der Bezirksgeometerstelle befindlichen Kartenexemplars (Ergänzungskarte) dienen. Die Gemeinden lassen ihr Exemplar von Flurkartenabdrücken hienach ebenfalls alljährlich ergänzen.

Messurkunden über Veränderungen.

Ergänzungskarte.

Die Messurkunden samt Handrissen werden in besonderen, jahrgangweise abgeschlossenen „Messurkundenbänden“ gesammelt, die in der betreffenden Gemeindeführatur aufbewahrt werden. Auf sie wird in der Primärkatasterabschrift, wie im Eigentumskataster (Grundbuch) und im Steuerbuch verwiesen.

Messurkundenbände.

Ausser den bereits genannten Akten (Primärkataster, Flurkarten, Verzeichnis der Signal-, der trigonometrischen und der polygonometrischen Punkte, Abschriften der Landesvermessungsbrouillons, Messurkundenbände) enthält jede Ortsregistratur noch folgende Dokumente der Katastervermessung:

1. Den Ergänzungsband Teil I, enthaltend den buchmässigen Beschrieb der auf der betreffenden Markung vom Zeitpunkt des Abschlusses der S. 267—268 berührten Aufnahmen bis zum 1. Juli 1840 (dem Schlusstermin für die Landesvermessung im ganzen) vor sich gegangenen Änderungen in der Bodeneinteilung und -Benützung. — Die zugehörigen, von staatlichen Geometern ge-

Ergänzungsbande.

fürhten Originalfeldbücher samt Flächenberechnungen befinden sich in einem besonderen Band, dem „Ergänzungsrouillon“.

2. Den Ergänzungsband Teil II, enthaltend den buchmässigen Beschrieb der zwischen dem 1. Juli 1840 und dem 1. Juli 1849 vor sich gegangenen Veränderungen. — Die zugehörigen, von Privatgeometern beigebrachten Handrisse und Messurkunden sind in einem besonderen Band (Messurkundenband pro 1840/49) vereinigt, gelten nur als Beilagen zum Ergänzungsband II und sind nicht jahrgangsweise abgeschlossen.

Änderungs-
protokoll.

3. Das Änderungsprotokoll zum Primärkataster (bis zum Jahr 1900 „Güterbuchsprotokoll“), in welchem der Ratschreiber die zur Kenntnis der Gemeindebehörden kommenden Veränderungen an der Begrenzung, oder dem inneren Bestand der Grundstücke in der Reihenfolge des Anfalls notiert und welches alljährlich abgeschlossen wird. Die erfolgte Berücksichtigung der auf Grund des Eintrags im Änderungsprotokoll von den Beteiligten beigebrachten Messurkunden in den Ergänzungskarten, dem Primärkataster und dem Steuerbuch, sowie die erfolgte Vermarkung der neu entstandenen Eigentumsgrenzen wird teils im Messurkundenband und auf den einzelnen Messurkunden, teils im Änderungsprotokoll von den betreffenden Beamten beurkundet.

Öffentliche Dokumente über das Eigentum an Grundstücken.

Auf Grund der genannten Akten der Landes- (Kataster-) Vermessung wurden das Grundeigentumskataster „Grundbuch“ und das Steuerbuch, auf Grund der Katasterkarten und der wasserrechtlichen Konzessionen das Wasserrechtsbuch angelegt.

Grundbuch.

Die Anlage und Führung des Grundbuchs ist geordnet durch das Bürgerliche Gesetzbuch und die Grundbuchordnung (Reichsgesetz vom 18. Aug. 1896, Landesgesetz vom 28. Juli 1899, Königl. Verordnung vom 30. Juli 1899 und Verfügung des Justizministeriums vom 2. Sept. 1899). In jeder Gemeinde Württembergs ist ein Grundbuchamt errichtet und es bildet der Gemeindebezirk zugleich den Grundbuchamtsbezirk. Das Grundbuchamt wird hier in der Regel von dem Bezirksnotar verwaltet, zu dessen Bezirk die betreffende Gemeinde gehört.

Hinsichtlich exemter standesherrlicher und ritterschaftlicher Güter ist das Amtsgericht, in dessen Bezirk das betreffende Gut liegt, als Grundbuchamt bestellt.

Das Grundbuchsystem dient dem Immobiliarsachenrecht als Grundlage. Alle Grundstücke, soweit nicht gewisse Kategorien vom Gesetz ausgenommen sind (Grundstücke des Königs und anderer

Landesherren, der Bundesstaaten, des Reichs, der bürgerlichen Gemeinden, der Kirchengemeinden und der Amtskorporationen, sowie die öffentlichen Wege und Gewässer etc.), sind dem Buchzwang unterworfen.

Jedes dem Buchzwang unterliegende Grundstück erhält im Grundbuch eine besondere Stelle, das Grundbuchblatt des betreffenden Grundstücks. Die an jedem einzelnen Grundstück bestehenden Rechte Privater werden durch das Grundbuch nachgewiesen. Die Erwerbung dieser Rechte ist für die Regel von der Eintragung des Inhalts der vor einem Notar abzuschliessenden Rechtsgeschäfte im Grundbuch abhängig.

Zu Gunsten desjenigen, welcher ein Recht an einem Grundstück, oder ein Recht an einem solchen Recht durch Rechtsgeschäft in gutem Glauben erwirbt, gilt der Inhalt des Grundbuchs als richtig (öffentlicher Glaube des Grundbuchs). Auf die Angaben über Lage und Grösse des Grundstücks, welche ausschliesslich dem in den verschiedenen Teilen des deutschen Reichs sehr verschiedenwertigen Katastervermessungswerk entnommen sind, erstreckt sich der öffentliche Glaube des Grundbuchs (infolge jener Verschiedenwertigkeit) jedoch allgemein nicht.

Das Grundbuch besteht aus den einzelnen (nach dem Personalformular geführten gemeinschaftlichen) Grundbuchheften, bzw. den (nur ein Grundstück enthaltenden, nach dem Realformular geführten) Grundbuchblättern.

Das beinahe ausnahmslos gebräuchliche Personalformular enthält einen Titel und drei Abteilungen.

Eingetragen werden:

- a) auf dem Titel: die Person des Eigentümers mit Name, Stand oder Gewerbe und Wohnort;
- b) in Abt. I: die Beschreibung nach Parzellennummer, Lage, Grösse und Kulturart der selbständigen Grundstücke, welche dem auf dem Titel eingetragenen Eigentümer gehören;
- c) in Abt. II: privatrechtliche Lasten und Beschränkungen des Eigentums, wie Dienstbarkeiten, Vorkaufsrechte, Reallasten u. s. w.¹⁾
- d) in Abt. III: Hypotheken, Grund- und Rentenschulden.

Bei dem Realformular fällt die Bezeichnung des Eigentümers auf dem Titel weg. An ihre Stelle tritt diejenige der Parzellen-

¹⁾ Über öffentlich rechtliche Lasten und Beschränkungen des Grundeigentums gibt das Grundbuch keinen Aufschluss. Soweit solche überhaupt registriert sind, müssen andere Bücher (Baulastbuch, Reversbuch, Vormerkungsbuch) zu Rate gezogen werden.

nummer. Abt. I enthält hier eine weitere Spalte zur Bezeichnung des Eigentümers. Im übrigen ist die Einrichtung dieselbe, wie bei dem Personalformular.

Die Eintragungen in das Grundbuch erfolgen für die Regel nicht von Amtswegen, sondern nur auf Antrag derjenigen Person, deren Recht von der Eintragung betroffen wird, oder zu deren Gunsten die Eintragung erfolgen soll.

Zu dem nach der Personalordnung geführten Grundbuch gehört ein Parzellen- und ein Namenverzeichnis; zu dem nach der Realordnung geführten ein alphabetisches Namensregister. In diesen ist das Grundbuchheft (bezw. -Blatt) bezeichnet, in dem das Grundstück aufgeführt ist, bezw. es sind die Nummern der Grundstücke zusammengestellt, welche dem einzelnen Eigentümer gehören.

Interessenten ist die Einsichtnahme des Grundbuchs gestattet.

Wasser-
rechtsbuch.

Auf Grund des Gesetzes vom 1. Dezember 1900 über die Benützung der öffentlichen Gewässer und nach den Verfügungen des Kgl. Minist. d. Innern vom 4. bis 12. Nov. 1901 Reg.-Blatt Nr. 28 wurden Wasserrechtsbücher eingeführt, welche den Zweck haben: 1. die sämtlichen neu entstehenden, wie auch die bei Schaffung des Gesetzes bereits vorhanden gewesenen Rechtsverhältnisse an den öffentlichen Gewässern festzustellen und durch Registrierung gegen unbefugte Eingriffe Dritter zu schützen; 2. eine rationelle und möglichst ausgedehnte Wasserbenützung durch Landwirtschaft und Industrie zu fördern; 3. eine sachgemässe Handhabung der Wasserpolizei zu ermöglichen und 4. Wasserstreitigkeiten künftig tunlichst vorzubeugen. In das Wasserrechtsbuch müssen alle, die Benützung der öffentlichen Gewässer betreffenden Rechtsverhältnisse eingetragen werden, welche nach Inkrafttreten des Gesetzes unter Mitwirkung der Behörden neu begründet, oder hinsichtlich ihres Bestands oder Umfangs geordnet werden. Die zum genannten Zeitpunkt bereits bestandenen Rechtsverhältnisse sollen in das Wasserrechtsbuch eingetragen werden und zwar bei denjenigen Nutzungsrechten, über deren Bestand und Umfang öffentliche Urkunden (z. B. Konzessionsurkunden) bei den Kreisregierungen vorliegen, von Amtswegen nach vorgängiger Vernehmung der Beteiligten, bei den übrigen nach Beibringung der bezüglichen Beweise, zunächst nur auf Antrag der Beteiligten.

Der letzteren Einschränkung wegen vorerst nur als Vormerkbücher und Beweisurkunden für die in ihnen eingetragenen Rechtsverhältnisse dienend und der ausschliessenden Beweiskraft gegenüber nicht eingetragenen Rechten entbehrend, werden die Wasserrechtsbücher bei den vier Kreisregierungen des Landes und

zwar je von einem technischen und einem administrativen Mitglied, nach Oberamtsbezirken getrennt, geführt.

Innerhalb jedes Oberamtsbezirks zerfallen sie in fünf Teile:

1. Das T-Buch für „Triebwerke“ mit oder ohne Stauanlagen.
2. Das E-Buch für „Entnahme“ von Wasser mittels einer bleibenden Vorrichtung mit oder ohne Stauanlage.
3. Das B-Buch für „Brücken“, Stege, Fuhrten, Fähren etc.
4. Das F-Buch für „Flussbau“ (Rechtsverhältnisse, die sich auf die Uferlinien, die Uferbaulast und die Reinigungspflicht beziehen, oder die Unterhaltung der Schutzvorkehrungen gegen Hochwasserschaden bezwecken).
5. Das S-Buch für „Sonstiges“ (allgemeine Bezirksvorschriften und Gemeindegesetze).

Jedem der fünf Bücher eines Oberamtsbezirks ist eine Beilagensammlung, eine Inhaltsübersicht und ein Übersichtsplan (Katasterplan) beigegeben.

Jedes eingetragene Rechtsverhältnis erhält eine innerhalb jedes Oberamts und jeder Rechtsart gesonderte Nummer (z. B. Oberamt Ulm, T Nr. 115).

Jedes Oberamt besitzt eine beglaubigte Abschrift der Einträge seines Bezirks.

Die Einsichtnahme bei der Kreisregierung und dem Oberamt ist jedem Interessenten gestattet, auch werden beglaubigte Abschriften auf Verlangen gegen Kostenersatz ausgefolgt.

Das Steuerbuch. Nach dem Steuergesetz vom 28. August 1873 bzw. 8. August 1903 bildet jede Markung einen besonderen Steuerdistrikt. Für jeden Steuerdistrikt ist ein Verzeichnis — „das Steuerbuch“ — angelegt, worin die zur Entrichtung von Grund-, Gefäll- oder Gebäudesteuer verpflichteten Personen und deren steuerbarer Besitz in alphabetischer Reihenfolge (Personalordnung) beschrieben sind (Verfügung des Finanzministeriums vom 18. Januar 1900, Reg.-Bl. Nr. 5).

Steuerbuch.

Die Steuerbuchführung liegt für die Regel dem Ratschreiber ob.

Wer ein steuerbares Grundstück, Gefäll oder Gebäude erwirbt, hat hievon vor dem 15. Januar des auf die Erwerbung folgenden Jahres dem Ortsvorsteher Anzeige zu erstatten. Tritt eine sachliche Änderung an einem steuerbaren Objekt ein, so muss die Anzeige hierüber ebenfalls dem Ortsvorsteher spätestens bis zum 15. Januar des auf die Änderung folgenden Jahres gemacht werden. Die Gerichte, Grundbuchbeamten und öffentlichen Notare, sowie die an der Fortführung des Steuerbuchs nicht beteiligten Gemeinde-

beamten sind verpflichtet, die zum Zwecke der Steuerbuchführung erforderliche Hilfe zu leisten. Deshalb ist namentlich angeordnet, dass die Grundbuchbeamten den Steuerbuchführern periodisch schriftliche Mitteilungen über die in das Grundbuch eingetragenen Veränderungen des Eigentums an Grundstücken (einschliesslich der Gebäude) zu machen haben.

Die Fortführung des Steuerbuchs erfolgt in der Weise, dass die anfallenden Änderungen in der Steuerpflicht auf den 1. Januar jeden Jahres nachgetragen werden. Der Steuerpflichtige wird nach Name, Stand und Wohnort bezeichnet, sodann die Gebäude, hierauf die Gefälle und endlich die Grundstücke aufgeführt. Je am Schluss der einzelnen Steuergattung wird ein entsprechender Raum offen gelassen für späteren Nachtrag neu erworbener Steuerobjekte.

Die Beschreibung der Steuergegenstände umfasst:

Nummer der Markungskarte und der Parzelle oder des Gebäudes; Lage und Kulturart des Objekts; das Flächenmass. Ferner bei Gebäuden sowohl den Steueranschlag (Kapitalwert) als auch die steuerbare 3^o/_oige Rente dieses Anschlags, bei Grundstücken und Gefällen das Steuerkapital.

Zum Steuerbuch gehört ein alphabetisches Namensverzeichnis der Steuerpflichtigen mit Angabe des Bandes und der Seite des Steuerbuchs, wo sich deren Eintrag findet.

Interessenten ist die Einsichtnahme des Steuerbuchs gestattet.

Abschnitt III.

Schaffung, bzw. Sicherung und Verfeinerung des Zusammenhangs ausgedehnter Stückvermessungen.

Kapitel IX.

Winkelmessinstrumente mit Fernröhren.

A. Zubehörden.

§ 34. Stative

Zweck. sind Gestelle, mittelst welcher Instrumente vertikal über einem auf dem Boden gegebenen Punkt in eine für den Gebrauch bequeme Höhe gebracht werden.

Dieselben lassen sich einteilen in:

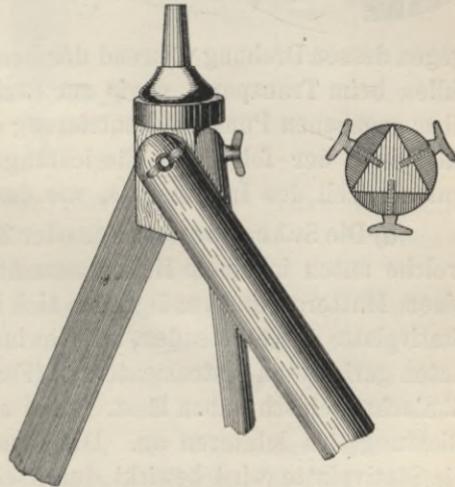
1. Stockstative, Stäbe aus Holz oder Metallröhren (Mannesmannröhren), ca. 1,5 m lang, 3—4 cm stark, unten endigend in einer gehärteten Spitze, oben in einem Schraubengewinde oder einer Bohrung bezw. einem Prisma zur Befestigung des mit einem Muttergewinde oder mit Metallkugel, bezw. Hülse versehenen Instrumententeils. Stockstativ.

Stockstative eignen sich nur bei Verwendung in weichem Boden und für die Befestigung von Instrumenten, welche durch Stoss nicht notleiden, bezw. gegen dessen schädliche Folgen durch Verstärkungsplatten, eiserne Rippen etc. geschützt werden können (Kreuzscheiben etc.).

2. Dreibeinige Stative (Dreifüsse).

a) Das Zapfenstativ, Fig. 177, besteht aus einem zylindrischen Kopfstück, das nach unten in ein dreiseitiges Prisma endigt. Gegen die Seitenflächen des letzteren werden beim Gebrauch die drei, an der betreffenden Stelle eben gearbeiteten, unten in eiserne Spitzen auslaufenden Stativbeine mittelst je einer Flügelschraube gepresst. Zapfenstativ.

Fig. 177.



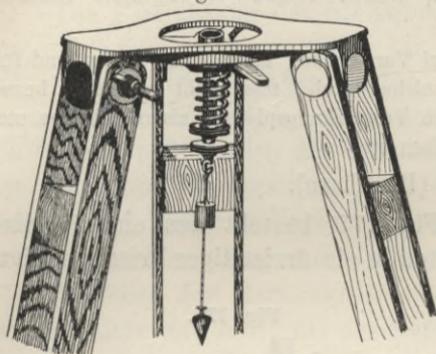
Das Instrument, zu dessen Aufstellung das Zapfenstativ dienen soll, muss in einer zylindrischen Hülse endigen, welche über den Zapfen gestreift und in ihrer Lage durch eine zentral wirkende Schraube erhalten wird. Das Zapfenstativ ist in Rücksicht auf die wenig sichere Befestigung des Instruments, den kurzen, der Horizontalrotation entgegenwirkenden Hebelarm und den geringen Widerstand der Stativbeine gegen seitliche Biegung nur verwendbar für Instrumente, bei denen eine geringe unbeabsichtigte Drehung in horizontalem Sinn unschädlich ist (Nivellierinstrumente). Dagegen ist es für den Transport bequemer, als

b) Das Scheibenstativ, Fig. 178, bei welchem das zylindrische Kopfstück des Zapfenstativs durch eine ebene (hölzerne oder metallene) Platte ersetzt wird. Diese läuft aus in drei Ansätze, gegen welche während der Benützung die gabelförmig gespaltenen Stativbeine durch Flügelschrauben gepresst werden. Weniger zweckmässig, schon weil dem Aufsetzen des Instruments hinderlich, ist die Befestigung der Stativfüsse durch Schraubenbolzen, welche die Stativplatte von oben senkrecht durchdringen und unten in Ösen endigen zum Festhalten des Querbolzens der Stativfüsse; (ältere Konstruktion). Scheibenstativ.

Für magnetische Beobachtungen müssen die metallenen Stativbestandteile, welche, falls sie aus Eisen wären, die Richtung der Magnetaedel beeinflussen könnten, aus anderem Material, etwa Messing, hergestellt werden.

Das Scheibenstativ gewährt im Vergleich zum Zapfenstativ eine grössere Sicherheit sowohl gegen Verbiegung der Stativbeine während der Benützung, als gegen horizontale Drehung der Platte. Letztere ist zylindrisch durchbohrt (je weiter die Bohrung, um so grösser die Verschiebungsmöglichkeit des Instruments auf dem Stativ für dessen genaue Zentrierung vertikal über einem Bodenpunkt).

Fig. 178.



Befestigung
des Instru-
ments auf
dem Stativ.

Zum Zweck der Befestigung des Instruments auf dem Stativ, zur Sicherung

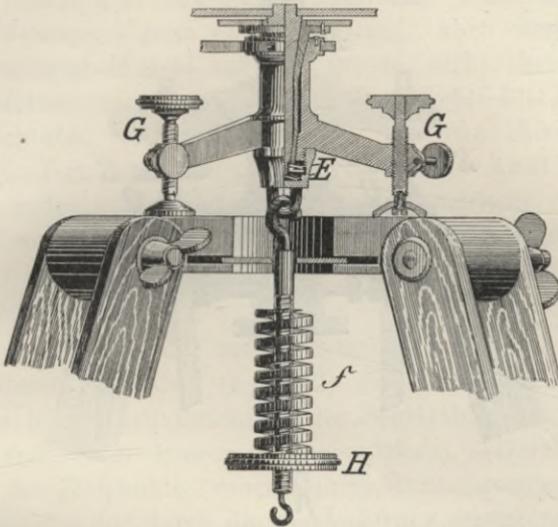
gegen dessen Drehung während der Benützung (oder gegen das Herabfallen beim Transport), sowie zur Erzielung zentrischer Aufstellung über gegebenen Punkten (Zentrierung des Instruments) ist das Stativ mit einer der folgenden Einrichtungen versehen (die man ebenso gut als Teil des Instruments, wie des Stativs ansehen kann):

a) Die Schraubenstange oder Zentralschraube (s. Fig. 178), welche unten in einem Haken zum Anhängen des Senkels, oben in einem Muttergewinde endigt, das sich in den, durch die Bohrung der Stativplatte durchtretenden, mit Gewindeteil versehenen vertikal nach unten gerichteten Instrumententeil (Fussgestellachse, Stellachse, Vertikalachse) einschrauben lässt. Dabei nimmt die Schraubenstange die Richtung des letzteren an. Die Pressung des Instruments gegen die Stativplatte wird bewirkt durch eine, gegen letztere von unten drückende Spiral- oder Blattfeder, welche auf einer Halteschraube ruht. Wird die Schraubenstange aus einer ausziehbaren, unten mit Spitze und Trittgabel versehenen Röhre hergestellt, so tritt diese an die Stelle des Senkels und man hat durch Verbindung mit einer Dosenlibelle das von Mechaniker Meissner-Berlin empfohlene starre Lot (s. § 82).

β) Der Stengelhaken (s. Fig. 179) wird nicht, wie die Zentralschraube, an einem Fortsatz der Fussgestellachse angeschraubt, sondern in eine Öse des letzteren eingehängt. Er nimmt daher nicht die Richtung dieser Fussgestellachse an, sondern hängt, wenn die Halteschraube und die Feder lose sind, selbsttätig vertikal. Bei angezogener Halteschraube kann der Stengelhaken, an dessen

unterem hakenförmigem Ende der Senkel befestigt wird, eine von der Vertikalen sowohl, als von der Fussgestellachse abweichende Richtung annehmen, der Lotpunkt entspricht also bei angezogener

Fig. 179.



Feder möglicherweise nicht der Stellachse des Instruments und darf daher in diesem Zustande weder angezielt, noch als Ablesepunkt an Stelle dieser Achse benützt werden.

Bei Schraubenstange und Stengelhaken wird durch das Anziehen der Halteschraube H ein Druck auf die Fussgestellschrauben G des Instruments ausgeübt, der ihre Benützung erschwert und sie möglicherweise beschädigt.

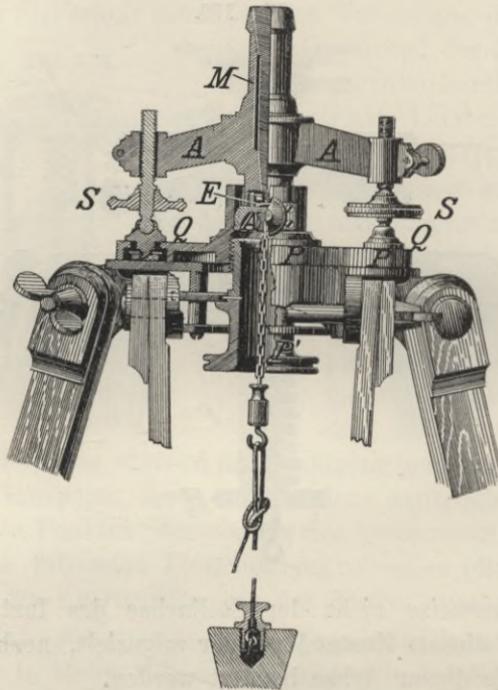
Auch verursachen Verbiegungen der Schraubenstange Zentrierungsfehler in der Instrumentenaufstellung. Endlich bewirkt jede nach erfolgter Instrumentenzentrierung mittelst der Stellerschrauben G noch bewirkte Änderung der Stellachsenrichtung (nachträgliche Horizontierung) eine um so grössere Verschwenkung des Senkelaufhängepunkts und damit die Notwendigkeit neuer Zentrierung, je grösser die Vertikalentfernung dieses Aufhängepunkts von der Angriffsebene der Fussgestellschrauben ist.

Diesen Nachteilen begegnet die Ersetzung der Einrichtungen (α und β) durch

γ) einen mit Schrauben-Gewinde ausgestatteten Metallzylinder P' , der in eine als Trägerin des Fussgestells dienende Metallplatte P eingeschraubt, die Stativplatte zwischen letztere und sich starr hereinpresst (s. Fig. 180).

Hier erfolgt die Senkelaufhängung im Punkt A, der, weil ungefähr in der Höhe der Angriffsebene der Fussgestellschrauben

Fig. 180.



liegend, seine Lage bei nachträglicher Instrumentenhorizontierung nicht ändert. (Über den gegen diesen Vorzug eingetauschten Nachteil vergl. übrigens § 38.)

§ 35. Glaslinsen.

Das Sehen
mit freiem
Auge.

Wenn Lichtstrahlen, die von leuchtenden Gegenständen ausgehen, das menschliche Auge treffen, so erzeugt dieses mit Hilfe seines lichtbrechenden Apparats (Kristall-Linse etc.) Reizungen der Netzhaut, welche die letztere als „Bild“ der betr. Gegenstände dem Gehirn übermittelt.

Bei wechselnder Gegenstands Entfernung und Lichtstärke verändern sich die Krümmungs- und Lageverhältnisse der Kristalllinse und erweitert, bzw. verengert sich die Eintrittsöffnung für die Lichtstrahlen (Pupille) ohne bewusste Arbeit des Menschen derart, dass die Reizungsstelle gerade in der Tiefe der Netzhaut liegt, und dass die zur Erzeugung deutlicher Bilder nötige Lichtmenge eindringt: „Anpassung“ („Akkommodation“). Das Auge vermag derart

nach einander Gegenstände in sehr verschiedener Entfernung deutlich wahrzunehmen, dagegen gelingt ihm deren gleichzeitige Beobachtung nicht. (Bei Beobachtungen entfernter Punkte durch Faden- oder Schlitzdioptr wird weder der Faden noch der Schlitz als solcher betrachtet. Vielmehr dienen diese Einrichtungen lediglich dazu, Sehstrahlen in gewissen Richtungen unmöglich zu machen oder zu begrenzen. Damit erledigt sich der scheinbare Widerspruch gegen obige Feststellung). Auch erstreckt sich die Anpassungsfähigkeit wohl auf sehr grosse, nicht aber auf abnorm kleine Entfernungen. Man erhält die deutlichsten Bilder, wenn sich die beobachteten Gegenstände in der für das betreffende Auge richtigen Entfernung, „der günstigsten oder deutlichen Sehweite“ befinden. Die letztere beträgt für normale Augen 20 bis 25 cm, schwankt aber bei Kurz-, bzw. Weitsichtigen etwa zwischen 10 und 50 cm. (Durch Tragen passender Brillen kann man diesen Unterschied aufheben.)

Von der Schärfe der auf der Netzhaut erzeugten Bilder hängt neben anderen Einflüssen (s. S. 92) die Genauigkeit ab, mit der sich kleine Richtungsunterschiede der Sehstrahlen nach entfernten Punkten feststellen lassen (Zielgenauigkeit). (Durch Ortsveränderungen der Zielpunkte herbeigeführte Richtungsunterschiede werden während der und durch die die Änderung erzeugende Bewegung leichter wahrgenommen, als wenn die Zielpunkte in Ruhe sind. Dies gehört jedoch nicht hierher.)

Für feinere Arbeiten reicht die mit freiem Auge mögliche Zielgenauigkeit nicht aus. Die Ortsveränderung eines 1 km entfernten Punktes um 1 cm \perp zur Zielrichtung bedingt z. B. eine Richtungsänderung von nur $\frac{e''}{100000} \sim 2''$, also von $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{10}$ der unter günstigsten Umständen mit freiem Auge noch erreichbaren Zielgenauigkeit. (Vergleiche S. 92.)

Zu ihrer Steigerung verwendet man Glaslinsen, d. h. Glaskörper, welche durch zwei Kugelflächen begrenzt sind.

Zweck und Form der Glaslinsen.

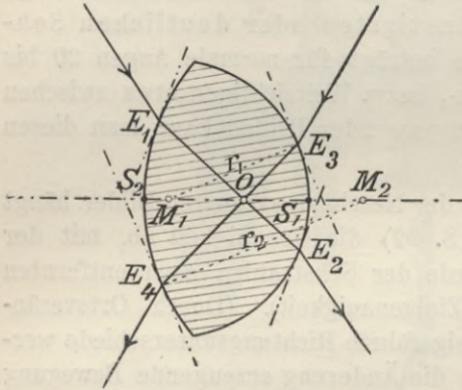
Haben diese Grenzflächen eine solche Lage zueinander, dass der Glaskörper in der Mitte dicker wird, als aussen, so heisst die Linse: „Konvex- oder Sammellinse“, wird die Linse gegen aussen dicker, so heisst sie: „Konkav- oder Zerstreuungslinse“. Im folgenden wird in der Hauptsache nur von den ersteren die Rede sein. Die Verbindungslinie beider Kugelmittelpunkte heisst „Achse“, ihr in den Glaskörper fallendes Stück: „Dicke“ der Linse. Der Durchmesser des Schnittkreises von Sammellinsen heisst deren „Öffnung“.

Wirkung der Glaslinsen.

Beim Durchgang durch eine Glaslinse wird die Richtung eines Lichtstrahls i. a. geändert, denn es entsteht bei den kugeligen Grenzflächen in denjenigen Punkten, in denen er die Linse trifft, bzw. verlässt, genau dieselbe Lichtbrechung, wie beim Glasprisma (s. § 9). An die Stelle der Prismenflächen in § 9 treten hier die in den beiden Treffpunkten an die Kugelflächen gedachten Berührungsebenen.

Optischer Mittelpunkt.

Fig. 181.



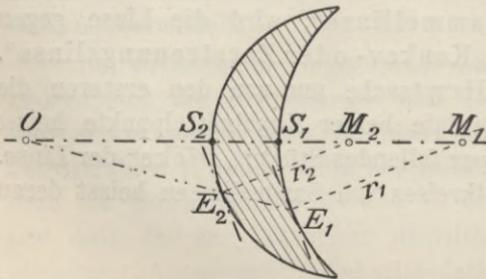
Sind die letzteren (also auch die Radien nach den Treffpunkten) einander parallel gerichtet (s. E in Fig. 181), so erleidet der Lichtstrahl keine Brechung, sondern nur eine mit der Divergenz zwischen Lichtstrahl und Achse wachsende, bei der geringen Linsendicke aber nur unbedeutende Parallelverschiebung.

Es ist geometrisch klar, dass sämtliche Verbindungslinien von Endpunkten E paralleler Radien sich in einem Punkt O schneiden. Dieser Punkt, durch den also alle Lichtstrahlen gehen, welche beim Durchgang durch die Linse keine Richtungsänderung erleiden, heisst deren „optischer Mittelpunkt“. Seine Lage auf der Achse ergibt sich aus der Proportion

$$\begin{aligned} M_1 E_3 : M_1 O &= M_2 E_4 : M_2 O \text{ d. h.} \\ M_1 S_1 : M_1 O &= M_2 S_2 : M_2 O \\ M_1 S_1 : (M_1 S_1 - M_1 O) &= M_2 S_2 : (M_2 S_2 - M_2 O) \\ r_1 : O S_1 &= r_2 : O S_2 \text{ oder: } O S_1 : O S_2 = r_1 : r_2 \end{aligned}$$

d. h. der optische Mittelpunkt teilt die Linsendicke im Verhältnis der Kugelhalbmesser. Je kleiner der eine Kugelradius ist, um so näher liegt der optische Mittelpunkt der zugehörigen Schliifffläche. Bei plan-konvexen

Fig. 181 a.



konkav-konvexen Linsen liegt er auf stärker gekrümmten Fläche (s. Fig. 181 a).

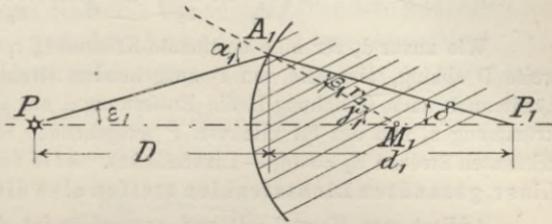
Neben dieser strahlenbrechenden Wirkung hat die Glaslinse noch die Eigenschaft, alle von einem leuchtenden Punkt ausgehenden, durch sie durchtretenden Lichtstrahlen

derart zu brechen, dass sie sich wieder in einem Punkt vereinigen, dort ein Bild des ersteren erzeugend.

Um den Ort des Bildes zu finden, denken wir uns zunächst den Glaskörper so dick, dass ein von P ausgehender Lichtstrahl die Linse in A_1 und nach erfolgter Ablenkung die Achse noch innerhalb des Glases in P_1 trifft (s. Fig. 182). Man erhält dann unter Beschränkung auf sehr kleinen Winkel ε_1 zwischen Achse und Lichtstrahl

Ort des Bildes.

Fig. 182.



$$\text{im Dreieck } P A_1 M_1: \frac{\sin(2R - \alpha_1)}{\sin \gamma_1} = \frac{P M_1}{P A_1} \sim \frac{D + r_1}{D}$$

$$\text{„ „ } M_1 A_1 P_1: \frac{\sin \beta_1}{\sin(2R - \gamma_1)} = \frac{M_1 P_1}{A_1 P_1} \sim \frac{d_1 - r_1}{d_1}$$

$$\text{Durch Division wird: } \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} \sim \frac{(D + r_1) d_1}{D (d_1 - r_1)}$$

Es ist aber nach dem Lichtbrechungsgesetze auch: $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \mu^1$, woraus

$$\mu (D d_1 - D r_1) \sim D d_1 + d_1 r_1 \text{ oder durch Division mit } D d_1 r_1$$

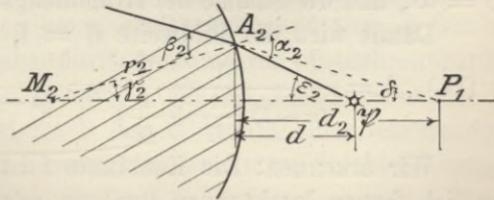
$$(1) \quad \mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{d_1} \right) \sim \frac{1}{r_1} + \frac{1}{D}$$

Für einen bestimmten Schliffradius r_1 und eine bestimmte Gegenstandsweite D ist also d_1 innerhalb des Geltungsbereichs der vorstehend vorgenommenen Vernachlässigungen konstant, d. h. sämtliche unter kleinem Winkel ε_1 von P ausgehenden und in die Glaslinse eintretenden Lichtstrahlen werden beim Eintritt in letztere so gebrochen, dass sie durch denselben Punkt P_1 gehen.

So dick, dass der ganze geschilderte Vorgang in der Linse sich abspielen könnte, ist diese nun aber nicht.

Bevor der im bisherigen verfolgte Lichtstrahl den Punkt P_1 erreicht, verlässt er den Glaskörper wieder in A_2 (siehe Fig. 182 a) und wird hiebei ein zweites Mal gebrochen, so dass er die Achse in \mathfrak{P} (statt in P_1) trifft (s. Fig. 182 a).

Fig. 182 a.



Nun liefern die Dreiecke $M_2 A_2 P_1$ bzw. $M_2 A_2 \mathfrak{P}$

$$\frac{\sin(2R - \beta_2)}{\sin \gamma_2} = \frac{M_2 P_1}{A_2 P_1} \sim \frac{r_2 + d_2}{d_2} \text{ und}$$

$$\frac{\sin(2R - \alpha_2)}{\sin \gamma_2} = \frac{M_2 \mathfrak{P}}{A_2 \mathfrak{P}} \sim \frac{r_2 + d}{d}$$

¹⁾ Der „Brechungskoeffizient“ μ ist eine von dem Dichtigkeitsverhältnis der beiden vom Lichtstrahl durchheilten Materialien abhängige Konstante.

Durch Division kommt unter Beachtung des Brechungsgesetzes:

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2} = \frac{1}{\mu} \sim \frac{(r_2 + d_2) d}{(r_2 + d) d_2},$$

woraus durch Anmultiplikation und Division mit $d d_2 r_2$

$$(II) \quad \mu \left(\frac{1}{d_2} + \frac{1}{r_2} \right) \sim \frac{1}{d} + \frac{1}{r_2}.$$

Wie zuvor d_1 für eine bestimmte Krümmung r_1 nur von der Gegenstandsweite D abhing, also alle von P ausgehenden Strahlen sich in P_1 trafen, so hängt auch nach Gleichung II die Entfernung d nur ab von der hinteren Linsenkrümmung r_2 und der für alle von P ausgehenden Strahlen als unveränderlich erkannten Strecke $d_2 = (d_1 - \text{Linsendicke})$. Alle von P (Fig. 182) durch die Linse gesandten Lichtstrahlen treffen also die Achse in \mathfrak{B} (Fig. 182a).

Addiert man (I) und (II) und vernachlässigt die Linsendicke (setzt also $d_1 = d_2$), so erhält man

$$(IIIa) \quad \mu \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sim \frac{1}{r_1} + \frac{1}{D} + \frac{1}{d} + \frac{1}{r_2}, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} \sim (\mu - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Die rechte Seite enthält nur konstante Grössen. Wir können sie daher zusammenfassen und etwa durch $\frac{1}{f}$ ersetzen. Dann erhalten wir

die Grundgleichung der Linsentheorie:

$$(III) \quad \underline{\underline{\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}}}}$$

Versuche ergeben, dass im gemeinsamen Strahlenschnittpunkt \mathfrak{B} ein „Bild“ des Strahlen aussendenden Punktes P entsteht, dessen Entfernung d von der zugekehrten Linsenfläche, oder (unter Vernachlässigung kleiner Ungenauigkeiten) vom optischen Mittelpunkt, bezw. von der zugehörigen „Hauptebene“ (vergl. S. 285) man seine „Bildweite“ heisst.

Um f zu deuten, setzen wir in (III) die Gegenstandsweite $D = \infty$, und die Summe der Krümmungshalbmesser $(r_1 + r_2) = m$.

Damit wird die Bildweite $d = f$, und

$$\text{Brennweite. (IV) } f = \frac{1}{(\mu - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{r_1 \cdot r_2}{(\mu - 1) (r_1 + r_2)} = \frac{r_1 \cdot r_2}{(\mu - 1) m}.$$

Wir erkennen: Die Konstante f ist die Bildweite d eines unendlich fernen leuchtenden Punktes, oder die „Brennweite“ der Linse. Der Bildpunkt F (s. Fig. 183a) des unendlich fernen Punktes P'' der Achse heisst „Brennpunkt“ der Linse. Jede Linse hat zwei Brennpunkte, deren Entfernungen vom optischen Mittelpunkt, bezw. von den Hauptebenen nach Gleichung IV unabhängig von etwaiger Verschiedenheit der Schliifhalbmesser der beiden Linsenflächen beiderseits gleich sind.

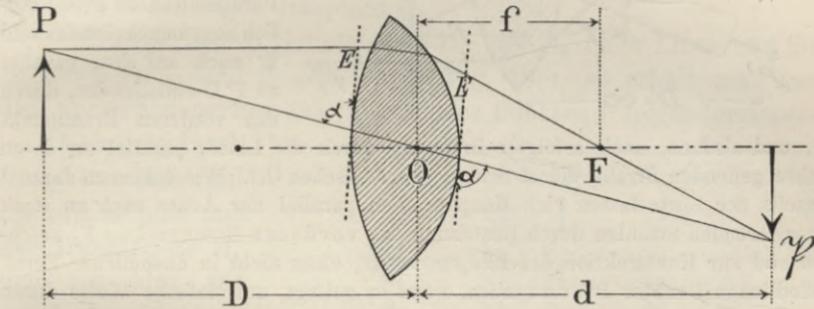
Für den Brechungskoeffizienten $\mu = 1,5$ wird die Brennweite

$$f = \frac{2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}, \text{ d. h. für } r_1 = r_2 \text{ wird } f = r_1 = r_2$$

„ $r_1 = \infty$ „ $f = 2 r_2$.

Die Grundgleichung (III) ist im vorhergehenden zunächst nur für leuchtende Punkte auf der Achse der Linse abgeleitet. Sie gilt aber auch für Punkte in der Nähe der Achse, d. h. für kleine Gegenstände. Ja für solche Punkte P ausserhalb der Achse lässt sich auf Grund der festgestellten Tatsache, dass sämtliche

Fig. 183.



von ihnen ausgehende Strahlen sich wieder in einem Punkt \mathfrak{P} schneiden und dort ein Bild von P erzeugen, die Lage dieses Bildpunktes sogar bequemer konstruieren, als für Achspunkte selbst, sobald wir den Weg von zweien der Strahlen zu zeichnen vermögen.

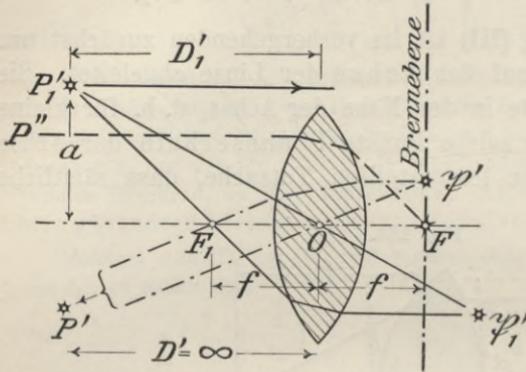
Zeichnung
der Lage des
Bildes.

Letzteres gelingt 1. von dem durch den optischen Mittelpunkt O gehenden Strahl PO, der geradlinig durchläuft (wenn man die kleine Parallelverschiebung vernachlässigt, welche der Durchgang durch die Linse verursacht) und 2. von dem parallel zur Achse einfallenden Strahl, der gedeutet werden kann, als herkommend vom ∞ fernen Punkt der Achse und der daher durch den hinteren Linsenbrennpunkt F geht (s. Fig. 183). Der Bildpunkt des leuchtenden Punktes P ist somit \mathfrak{P} und umgekehrt ist P der Bildpunkt eines leuchtenden Punktes \mathfrak{P} . Die beiden zur Konstruktion benützten Strahlen heissen „Hauptstrahlen“.

Das angegebene Konstruktionsverfahren versagt nun allerdings, wenn, wie es die Regel sein wird, der leuchtende Punkt einen Abstand a von der Achse hat, welcher die halbe Linsenöffnung übersteigt. Denn in diesem Fall trifft der parallel zur Achse kommende Lichtstrahl die Linse überhaupt nicht. Die Schwierigkeit lässt sich aber zunächst für einen ∞ fernen leuchtenden Punkt P' (s. Fig. 183a) überwinden, wenn man beachtet, dass sein Bild \mathfrak{P}' offenbar ebenfalls in der Entfernung der Brennweite f vom optischen Mittelpunkt der Linse,

sodann aber auch auf dem von P' ausgehenden Hauptstrahl durch den optischen Mittelpunkt liegen muss. Es entsteht also im Schnittpunkt dieses Hauptstrahls mit einer durch den hinteren Brennpunkt F gehenden Kugelfläche, die sich genähert

Fig. 183 a.



durch eine senkrechte Ebene, die „Brennebene“ ersetzen lässt. Wäre \mathfrak{P}' der leuchtende Punkt und P' sein Bild, so läge dieses auch auf dem von \mathfrak{P}' zunächst parallel zur Achse ausgesandten, und dann durch den vorderen Linsenbrennpunkt F_1 gehenden Parallelstrahl zu $\mathfrak{P}'O$. Folglich liegt umgekehrt das Bild \mathfrak{P}' auch auf dem parallel zu $P'O$ einfallenden, durch den vorderen Brennpunkt

F_1 , und alsdann, nach erfolgter Brechung durch die Linse, parallel zu deren Achse gehenden Strahl, einem dritten geometrischen Ort. Wir erkennen daraus: jenseits der Linse lassen sich Hauptstrahlen parallel zur Achse auch zu stark divergierenden Strahlen durch Benützung des vorderen Brennpunktes F_1 zeichnen und zur Konstruktion des Bildpunktes \mathfrak{P}'_1 eines nicht in unendlicher Ferne befindlichen Punktes P'_1 verwenden, wenn es gelingt, auf einfache Weise deren Weg durch den Linsenkörper zu finden. (Hierüber s. S. 285 ff.).

In Fig. 183a liegt nach dem Gesagten der Bildpunkt \mathfrak{P}'_1 von P'_1 erstens auf dem Hauptstrahl P'_1O und zweitens auf derjenigen Parallelen zur Achse, welche die Fortsetzung des Strahlenwegs $P'F_1$ nach erfolgtem Durchtritt durch die Linse bildet.

Zum Zweck bequemer Konstruktion des Wegs eines durch die Linse hindurchgetretenen Lichtstrahls, sowie um die in der Rechnung bisher vernachlässigte Linsendicke berücksichtigen zu können, führen wir die

„optischen Kardinalpunkte“ und „-Ebenen“

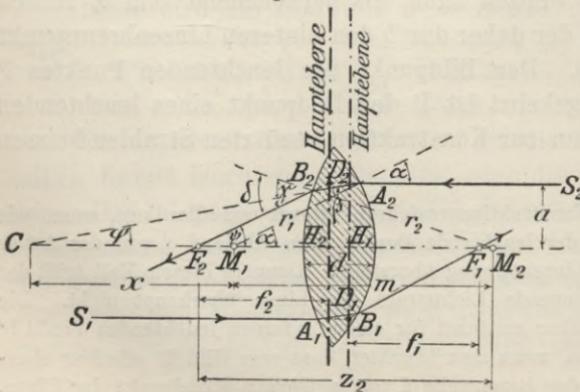
ein, nämlich:

Zwei Hauptebenen und zwei Brennebenen, ferner zwei Haupt- und zwei Knotenpunkte, die sich zu den bisher benutzten zwei Brennpunkten gesellen.

Fällt ein Lichtstrahl S_2 (s. Fig. 184) parallel zur Achse auf eine Linse, so wird er (wie früher gezeigt) zweimal gebrochen und schneidet die Hauptachse im Brennpunkt F_2 . Sein Weg folgt

Hauptebenen.

Fig. 184.



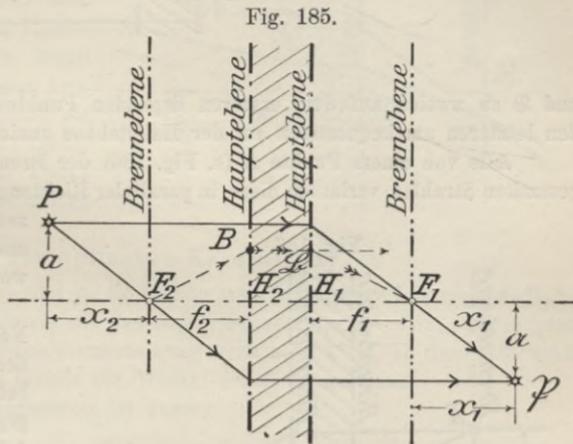
dem Linienzug $S_2 A_2 B_2 F_2$. Die beiden wesentlichen Richtungen des Strahls schneiden sich in D_2 . Führt man für weitere von derselben Seite herkommende Parallelstrahlen dieselbe Konstruktion durch, so erhält man ebensoviele Schnittpunkte D_2 , welche sämtlich auf einer krummen Fläche liegen. Berücksichtigt man jedoch nur diejenigen Strahlen, welche sehr nahe bei der Achse liegen, so geht die krumme Fläche in eine Ebene $D_2 H_2$ über, die senkrecht zur Achse ist. Ihr Schnittpunkt H_2 mit der Achse heisst „Hauptpunkt“, die Ebene selbst „Hauptebene“.

Kommen die parallelen Strahlen von der entgegengesetzten Seite S_1 her, so gehen sie ganz analog durch den zweiten Brennpunkt F_1 und wir erhalten einen zweiten Hauptpunkt H_1 . Die Brennweiten der Linse definieren wir jetzt schärfer als vorhin, als die Entfernungen $f_1 = H_1 F_1$ und $f_2 = H_2 F_2$ ihrer Brennpunkte je von dem zugehörigen Hauptpunkt.

Sind die beiden Hauptebenen H_1 und H_2 einer Linse und ihre Brennweiten f_1 und f_2 gegeben (s. Fig. 185), so erhält man nach dem vorhergegangenen das Bild \mathfrak{P} eines Punktes P folgendermassen:

Lage des Bildes aus den Hauptebenen.

Man zieht durch P den Parallelstrahl bis zum Schnitt mit der Hauptebene H_1 und von hier aus durch den hinteren Brennpunkt F_1 ; sodann zieht man durch P den Brennstrahl $P F_2$ durch den vorderen Brennpunkt F_2 bis zur Hauptebene H_2 und dann parallel zur Achse.



Der Schnittpunkt \mathfrak{P} beider Strahlen bezeichnet den Ort des durch die Linse erzeugten Bildes.

Eine Beziehung zwischen Gegenstands-, Bild- und Brennweite erhält man hieraus wie folgt:

Sind x_1 und x_2 die Entfernungen der Punkte \mathfrak{P} und P von den Brennebenen, so erhält man aus ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{x_1}{f_1} = \frac{a}{a}$$

$$\frac{x_2}{f_2} = \frac{a}{a}$$

$$\frac{x_1}{f_1} = \frac{f_2}{x_2}$$

folglich

oder (V)

$$x_1 x_2 = f_1 f_2.$$

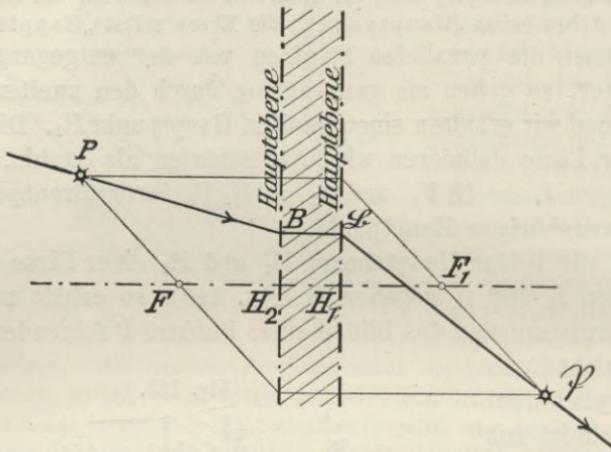
Aus vorstehender Betrachtung geht zugleich hervor:

Liegt ein Punkt B auf der Hauptebene H_2 ($x_2 = -f_2$), so liegt sein Bild \mathfrak{B} auf der Hauptebene H_1 ($x_1 = -f_1$) und umgekehrt.

Weg eines beliebigen Lichtstrahls.

Die Richtung eines zu einem beliebigen Eintrittsstrahl P B (Fig. 185 a) gehörigen Austrittsstrahles $\mathfrak{B} \mathfrak{B}$ findet man durch Konstruktion der Bilder \mathfrak{P}

Fig. 185 a.

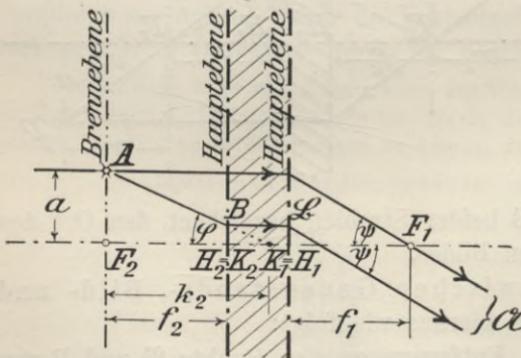


und \mathfrak{B} zu zweien auf dem ersteren liegenden Punkten P und B, (wobei man den letzteren am bequemsten auf der Hauptebene annimmt).

Weg parallel auf die Linse treffender Lichtstrahlen.

Alle von einem Punkte A (s. Fig. 186) der Brennebene durch die Linse gesandten Strahlen verlassen diese in paralleler Richtung, weil der durch sie erzeugte Bildpunkt \mathfrak{A} im Unendlichen liegt (Gleich. V, worin $x_2 = 0$).

Fig. 186.



Für das Verhältnis der Neigungswinkel φ und ψ der beiden Richtungen eines beliebigen durch die Linse gegangenen Strahls, z. B. A B \mathfrak{B} \mathfrak{A} gegen die Achse gibt Fig. 186

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{k_2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{a}{f_1}.$$

Da φ und ψ klein sind, kann man also für das Verhältnis der Neigungswinkel φ

und ψ der von einem Punkt einer Brennebene ausgehenden Strahlen allgemein setzen:

$$(VI) \quad \frac{\varphi}{\psi} = \frac{a/k_2}{a/f_1} = \frac{f_1}{k_2}.$$

Ein einziger Strahl des von A ausgehenden Strahlenbüschels, nämlich der durch den optischen Mittelpunkt gehende, behält nun nach früherem seine ursprüngliche Richtung bei und wird nur um wenig parallel verschoben. Für ihn ist

$$(VII) \quad \frac{\varphi}{f_1} = \frac{\psi}{k_2}$$

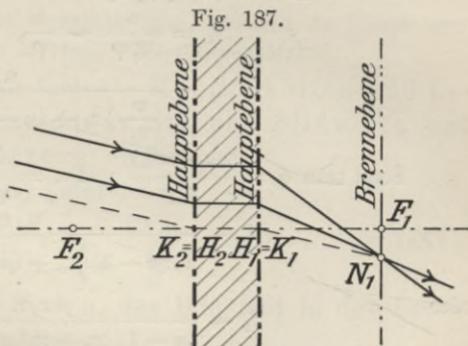
und analog für den entgegengesetzt gerichteten Strahl

$$f_2 = k_1.$$

Die durch ihre Entfernungen $k_2 = f_1$ bzw. $k_1 = f_2$ von den Brennpunkten bestimmten Punkte K_2 und K_1 heissen die „Knotenpunkte“ der Linse. Zeichnerisch erhalten wir die Lage des Knotenpunktes K_2 nach vorstehendem als Schnitt einer durch A gezogenen Parallelen zu den jenseits der Linse gegen den unendlich fernen Bildpunkt \mathfrak{M} gerichteten Strahlen und wir finden weiter den Satz:

Ein Strahl, welcher beim Eintritt nach dem vorderen Knotenpunkt K_2 hinzielt, geht beim Austritt durch den hinteren Knotenpunkt K_1 und zwar parallel zum eintretenden Strahl. Dabei fallen, wenn die beiden Brennweiten f_1 und f_2 einer Linse einander gleich sind, was vorne (allerdings unter Vernachlässigungen und mit dem optischen Mittelpunkt als Endpunkt der Brennweite) bewiesen wurde, und hernach (s. Gleichung IVa und IVb) allgemein bestätigt werden wird, nach Gleichung VII die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen.

Um umgekehrt zu einem in beliebiger Richtung einfallenden Parallelstrahlenbündel die gebrochenen Strahlen jenseits der Linse zu finden, konstruieren wir (s. Fig. 187) für den nach dem Knotenpunkt K_2 zielenden Hauptstrahl des Bündels den zugehörigen parallel verlaufenden Austrittsstrahl durch K_1 , welcher die hintere Brennebene im Nebenbrennpunkt N_1 schneidet. Durch N_1 gehen alle Austrittsstrahlen des Bündels.



Lage der optischen Kardinalpunkte.

In Fig. 184 seien r_1 und r_2 die Radien einer bikonvexen Linse, $S_2 A_2 B_2 F_2$ (bzw. $S_1 A_1 B_1 F_1$) ein durch sie tretender Parallelstrahl. Die auftretenden Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi$ sind der Voraussetzung nach sehr klein, so dass man statt ihrer Sinus und Tangens jeweils die Winkel selbst setzen kann.

Nach dem Brechungsgesetz ist daher:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \mu.$$

Da aber

$$\alpha = \frac{a}{r_1},$$

so ist

$$\beta = \frac{a}{\mu r_1};$$

ferner

$$\varphi = \alpha - \beta = \frac{a}{r_1} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = \frac{a(\mu - 1)}{r_1 \cdot \mu}.$$

Der sin-Satz liefert im Dreieck $A_2 C M_1$

$$x : r_1 = \beta : \varphi, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{r_1 \cdot \beta}{\varphi} = \frac{r_1 \cdot a \cdot r_1 \mu}{\mu r_1 a (\mu - 1)} = \frac{r_1}{\mu - 1}.$$

Im Dreieck $M_2 B_2 C$ ist:

$$\gamma : \varphi = (m + x) : r_2, \text{ also}$$

$$\gamma = \frac{\varphi \cdot (m + x)}{r_2}.$$

Ferner ist nach dem Brechungsgesetz

$$\frac{\delta}{\gamma} = \mu, \text{ woraus:}$$

$$\delta = \gamma \mu = \frac{\mu \cdot \varphi \cdot (m + x)}{r_2}.$$

Im Dreieck $C F_2 B_2$ ist

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi + \delta - \gamma \\ &= \varphi + \frac{\mu \varphi (m + x)}{r_2} - \frac{\varphi \cdot (m + x)}{r_2} \\ &= \varphi \cdot \left\{ 1 + \frac{(m + x)}{r_2} (\mu - 1) \right\} \\ &= \frac{\varphi}{r_2} \{ r_2 + (\mu - 1) (m + x) \}. \end{aligned}$$

Nun ist im Dreieck $F_2 D_2 H_2$

$$f_2 = \frac{a}{\text{tg } \psi} \sim \frac{a}{\psi}, \text{ also}$$

$$f_2 \sim \frac{a}{\frac{\varphi}{r_2} \{ r_2 + (\mu - 1) (m + x) \}}.$$

Setzt man $\varphi = \frac{a(\mu - 1)}{r_1 \mu}$ und $x = \frac{r_1}{\mu - 1}$ ein, so wird

$$f_2 \sim \frac{a \cdot r_2 \cdot r_1 \mu}{a \cdot (\mu - 1) \left\{ r_2 + (\mu - 1) \left(m + \frac{r_1}{\mu - 1} \right) \right\}}$$

oder

$$f_2 \sim \frac{\mu r_2 r_1}{(\mu - 1) \{ r_2 + m(\mu - 1) + r_1 \}}.$$

Die Dicke der Linse ist nach Fig. 184

$$d = r_2 + r_1 - m,$$

womit die obige Gleichung übergeht in:

$$(IVa) \quad f_2 \sim \frac{\mu r_2 r_1}{(\mu - 1) \{ d + \mu m \}}.$$

Der Abstand z_2 des Brennpunktes F_2 vom Mittelpunkt M_2 ergibt sich aus Dreieck $M_2 B_2 F_2$:

$$\begin{aligned} z_2 : r_2 &= \delta : \psi, \text{ also} \\ z_2 &= \frac{r_2 \cdot \delta}{\psi} = \frac{r_2 \cdot \mu \varphi (m + x) \cdot r_2}{r_2 \cdot \varphi \{ r_2 + (\mu - 1) (m + x) \}} \\ &= \frac{\mu (m + x) \cdot r_2}{r_2 + (\mu - 1) (m + x)} \\ &= \frac{\mu r_2 \left(m + \frac{r_1}{\mu - 1} \right)}{r_2 + (\mu - 1) \left(m + \frac{r_1}{\mu - 1} \right)} \\ &= \frac{\mu r_2 \{ m(\mu - 1) + r_1 \}}{(\mu - 1) \{ r_2 + (\mu - 1) \cdot m + r_1 \}}, \text{ oder} \end{aligned}$$

$$(VIII) \quad z_2 = \frac{\mu r_2 \{ m(\mu - 1) + r_1 \}}{(\mu - 1) \{ d + \mu m \}}.$$

Für die Brennweite f_1 und die Entfernung z_1 des Brennpunktes F_1 vom Mittelpunkt M_1 (s. Fig. 184) findet man durch entsprechende Vertauschung:

$$(IVb) \quad f_1 \sim \frac{\mu r_1 r_2}{(\mu - 1) \{d + \mu m\}}$$

$$(VIIIa) \quad z_1 = \frac{\mu r_1 \{m(\mu - 1) + r_2\}}{(\mu - 1) \{d + \mu m\}},$$

d. h. die beiden, jetzt von der Hauptebene aus gemessenen Brennweiten f_1 und f_2 ergeben sich auch bei Berücksichtigung der Linsendicke d einander gleich und die unter Vernachlässigung der letzteren abgeleitete Gleichung IV (s. S. 282) erleidet nur eine unbedeutende Modifikation. Es hindert uns daher nichts, für die allgemeine Betrachtung der Linswirkung die im Vergleich zur Bild- und Gegenstandsweite sehr kleine Entfernung der beiden Hauptebenen zu vernachlässigen, wodurch die Haupt- samt den Knotenpunkten im optischen Mittelpunkt zusammenfallen.

Hiebei ergeben sich dann folgende Möglichkeiten und Beziehungen zwischen Gegenstandsweite und Bildweite und für die Eigenschaft der erzeugten Bilder:

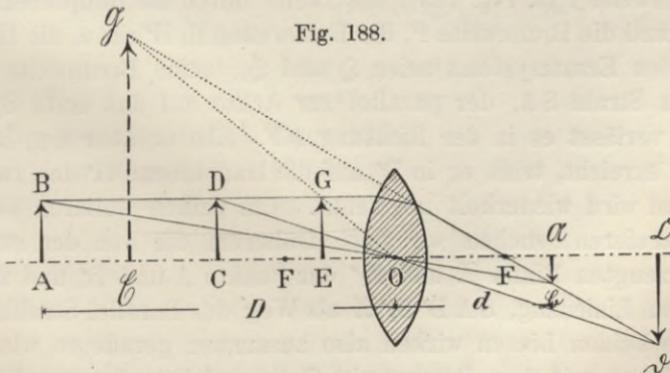
Die Grund-Gleichung (III) liefert:

$$\text{Bildweite } d = \frac{D \cdot f}{D - f} = \frac{f}{1 - \frac{f}{D}} \quad (IX)$$

Für $D = \infty$ wird damit $d = f$, d. h. das Bild fällt in den Brennpunkt und ist unendlich klein,

für $D = 2f$ wird $d = \frac{2f^2}{f} = 2f$, d. h. Bildweite und Gegenstandsweite sind gleich gross, ebenso wie Bild und Gegenstand selbst.

Allgemein erkennen wir: 1) Nimmt die Gegenstandsweite D von ∞ bis zur doppelten Brennweite ab, so nimmt die Bildweite d erst langsam, dann aber immer rascher von f bis $2f$ zu. Die



Linse erzeugt von dem Gegenstand AB (Fig. 188) ein umgekehrtes reelles Bild $A'B'$ (das sich auf einer in der Entfernung der Bildweite d aufgestellten Wand auffangen lässt) und das kleiner ist

als der Gegenstand. (Für $D = 2f = d$ wird das Bild so gross als der Gegenstand.)

Dies ist die Wirkung der dem Gegenstand zugekehrten Linse (Objektivlinse) des Fernrohrs (s. § 36).

$$\text{Für } D = \frac{3}{2}f \text{ wird ferner: } d = \frac{\frac{3}{2}f^2}{\frac{1}{2}f} = 3f$$

$$\text{„ } D = f \text{ „ „ } d = \frac{f^2}{0} = \infty$$

d. h. 2) Sinkt die Gegenstandsweite unter die doppelte Brennweite herab, bleibt aber grösser als die Brennweite, so entfernt sich das Bild $\mathcal{C}\mathcal{D}$ des Gegenstandes CD (s. Fig. 188) sehr rasch von der Linse und wird immer grösser, es bleibt aber reell und umgekehrt.

Diese Wirkung wird beim Mikroskop sowie dann benützt, wenn man mittels Projektionsapparaten Bilder von kleinen Gegenständen stark vergrössert auf einer Wand erzeugen will. (Demonstrationsmittel.)

Für $D = kf$ (wo $k < 1$) wird endlich $d = \frac{kf^2}{f(k-1)} = \frac{kf}{k-1}$ also negativ, d. h. 3) Liegt der Gegenstand EG zwischen Brennpunkt und Linse, so erzeugt letztere ein aufrechtes, vergrössertes, virtuelles (nicht mehr reelles) Bild $\mathcal{E}\mathcal{G}$ auf derselben Seite, auf welcher sich der Gegenstand befindet — die Linse wird zur „Lupe“. Dies ist die Wirkung der zweiten, dem Auge zugekehrten Linse (Okularlinse) im Fernrohr (s. §§ 36 u. 37).

Zusammensetzung zweier Linsen mit gemeinsamer Achse.

Zwei optische Systeme lassen sich durch ein einziges ersetzen. Das erste System sei gegeben durch die Hauptebenen H und H_1 und die Brennweite f (s. Fig. 189), das zweite durch die Hauptebenen H' und H_1' und die Brennweite f' , die Entfernung $H_1 H'$ sei e , die Hauptpunkte des Ersatzsystems seien \mathcal{S} und \mathcal{S}_1 , seine Brennweite f .

Ein Strahl SA , der parallel zur Achse auf das erste System auffällt, verlässt es in der Richtung AF . Ehe er aber den Brennpunkt F erreicht, trifft er in B' auf die Hauptebene H' der zweiten Linse und wird wiederholt abgelenkt. Um seinen weiteren Verlauf zu konstruieren, suchen wir nach früherem die von der zweiten Linse erzeugten Bilder \mathcal{A} und B_1' der Punkte A und B' und finden derart den Linienzug, $SA B' B_1' \mathcal{A}$ als Weg des Parallel-Strahls SA .

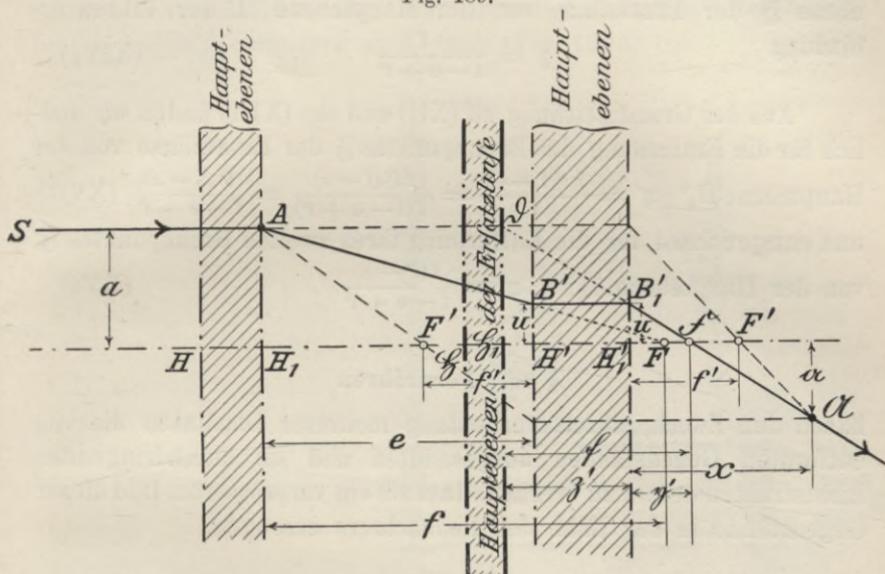
Die beiden Linsen wirken also zusammen gerade so wie eine einzige Linse mit dem Brennpunkt \mathcal{F} (in welchem der parallel zur Achse herkommende Strahl S die Achse schneidet), der Brennweite f und der Hauptebene \mathcal{S}_1 durch den Punkt \mathcal{D} (den Schnittpunkt der endgültig abgelenkten mit der ursprünglichen Strahlenrichtung).

Aus ähnlichen Dreiecken erhält man nun folgende Beziehungen für die Brennweite \bar{f} und die Lage der Ersatzlinse:

$$a : a = \bar{f} : (\bar{z}' + x - \bar{f}), \text{ oder}$$

$$(a + a) : a = (\bar{z}' + x) : \bar{f}. \quad (X)$$

Fig. 189.



Aus den beiden in Fig. 189 abzulesenden Proportionen

$$(a + a) : a = x : f'$$

und $(a + a) : a = e : (e - f')$ folgt ferner

$$x = \frac{e f'}{e - f'}, \text{ womit (Gl. x) und die letzte Gleichung}$$

liefern

$$\bar{f} = \frac{a(\bar{z}' + x)}{(a + a)} = \frac{(e - f')(\bar{z}' + x)}{e} = \frac{e - f'}{e} \left\{ \bar{z}' + \frac{e f'}{e - f'} \right\}$$

$$\text{also } \bar{z}' = \frac{e \bar{f}}{e - f'} - \frac{e f'}{e - f'} = \frac{e(\bar{f} - f')}{e - f'} \quad (XI)$$

Des weiteren liefert Figur 189

$$a : u = \bar{f} : (\bar{f} - \bar{z}') = \bar{f} : y'$$

$$\text{und } a : u = f : (f - e),$$

daher

$$\bar{f} - \bar{z}' \equiv y' = \frac{\bar{f} \cdot u}{a} = \frac{\bar{f} \cdot (f - e)}{f}$$

und

$$\bar{z}' = \frac{e \bar{f}}{f} \quad (XII)$$

Aus (XI) und (XII) folgt $\bar{z}' = \frac{e(\bar{f} - f')}{e - f'} = \frac{e \bar{f}}{f}$, woraus wir als

Brennweite \bar{f} der die zwei zusammengesetzten Systeme vertretenden Ersatzlinse erhalten

$$\bar{f} = \frac{f f'}{f - e + f'} \quad (XIII)$$

Ihre Hauptebene \mathfrak{S}_1 ist von der hinteren Hauptebene der Linsenverbindung entfernt um

$$\mathfrak{S}_1 H_1' \equiv \mathfrak{z}' = \frac{e f}{f} = \frac{e f'}{f - e + f'} \quad (\text{XIV})$$

Analog findet man für die Entfernung der zweiten Hauptebene \mathfrak{S} der Ersatzlinse von der Hauptebene H der Linsenverbindung

$$\mathfrak{z} = \frac{e f}{f - e + f'} \quad (\text{XIVa})$$

Aus der Grundgleichung zu (XII) und aus (XIII) finden wir endlich für die Entfernung des Brennpunktes \mathfrak{F} der Ersatzlinse von der Hauptebene H_1'

$$\eta' = \frac{\bar{f} \cdot (f - e)}{f} = \frac{f f' (f - e)}{f (f - e + f')} = \frac{f' (f - e)}{f - e + f'} \quad (\text{XV})$$

und entsprechend für die Entfernung ihres zweiten Brennpunktes \mathfrak{F}' von der Hauptebene H:

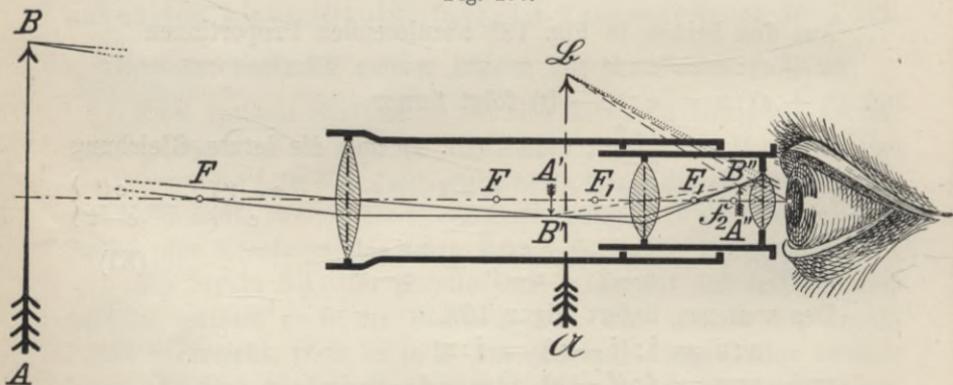
$$\eta = \frac{f (f' - e)}{f - e + f'} \quad (\text{XVa})$$

§ 36. Fernröhren

Zweck.

haben den Zweck, durch Verbindung mehrerer Glaslinsen die von entfernten Gegenständen ausgesandten und sie durchdringenden Lichtstrahlen derart zu brechen, dass sie ein vergrößertes Bild dieser Gegenstände in der Nähe des Beobachters erzeugen.

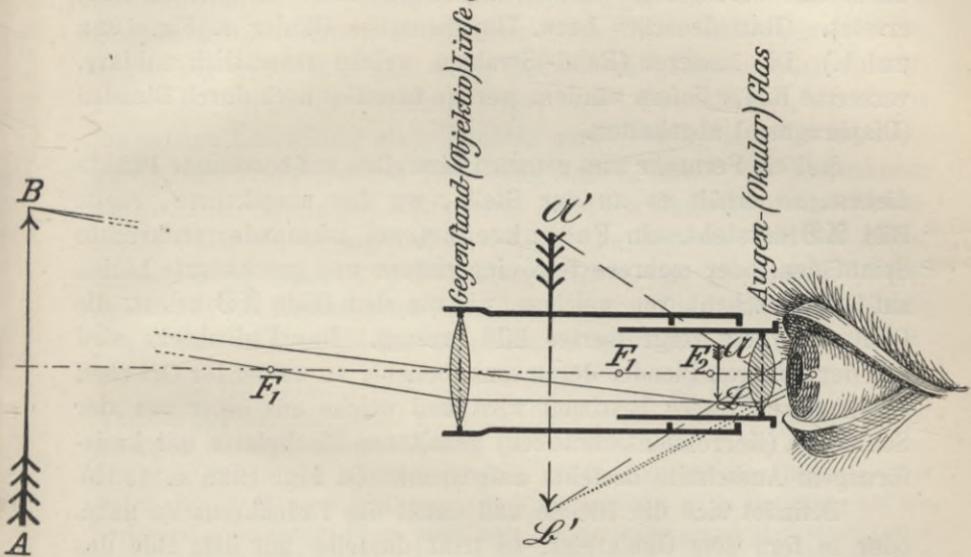
Fig. 190.



Für die Vermessungspraxis kommt hauptsächlich in Betracht das „astronomische Fernrohr“ (s. Fig. 190 a), welches von dem beobachteten Gegenstand ein umgekehrtes und das „terrestrische“ (s. Fig. 190), welches von ihm ein aufrechtes Bild erzeugt. Weniger Bedeutung dagegen hat für diese Zwecke das holländische, oder Galileische Fernrohr. (In der einfachsten Zusammensetzung bestehen die beiden ersteren aus Sammellinsen, das letztere aus einer Sammellinse und einer Zerstreulinse.)

Das einfache astronomische (Kepler'sche) Fernrohr besteht aus zwei, je mit einer zylindrischen Röhre verbundenen Linsen, von denen die grössere, dem Zielpunkt zugekehrte „Objektiv- oder Gegenstandslinse“, die kleinere, dem Auge zugekehrte „Okular- oder Augenlinse“ heisst. Die Röhren sind ineinander verschiebbar, um die gegenseitige Entfernung der beiden Linsen beliebig verändern zu können (Fig. 190a).

Fig. 190a.



Dringen von einem entfernten Gegenstand AB Lichtstrahlen durch die Objektivlinse, so vereinigen sich hinter derselben je die von einem Punkt dieses Gegenstands ausgehenden und erzeugen von eben diesem Punkt ein umgekehrtes, reelles, verkleinertes Bild $U'B$ im Innern der auf die betreffende Richtung eingestellten Röhre und in der Nähe des Objektivbrennpunkts F_1 (vergl. oben Fall 1). Schiebt man die zweite Röhre so nahe heran, dass dieses Bild zwischen die Okularlinse und ihren Brennpunkt F_2 zu liegen kommt, so erzeugt letztere von dem Bild abermals ein — aber virtuelles — Bild $U'B'$, das vergrössert und in seiner umgekehrten Lage erscheint (vergl. oben Fall 3), und welches das hinter die Okularlinse gehaltene Auge dann erblickt, wenn die Entfernung von ihm bis zum Bild $U'B'$ gleich der deutlichen Sehweite des Beobachters ist. Letztere Bedingung wird erreicht durch entsprechende, für jedes veränderte Auge verschiedene Verschiebung des Okularauszugs.

Die vom einfachen (Keplerschen) Fernrohr erzeugten Bilder haben infolge der verschiedenen starken Brechung der in ihrer Gesamtheit den Eindruck weiss erzeugenden farbigen Strahlen beim Durchtritt durch die Objektivlinse farbige Ränder, und sind überdies um so stärker verzerrt, je grösser das benützte Gesichtsfeld ist. Diese Mängel lassen sich dadurch vermeiden, dass man die einfache Objektivlinse durch eine Doppellinse mit Glassorten von verschiedener Dichtigkeit (achromatische Linse) und die Okularlinse durch eine Verbindung von zwei Linsen (Kollektiv- und Okularlinse) ersetzt. (Ramsdensches bzw. Huyghensches Okular s. Fig. 193a und b.) Die äusseren (Rand-)Strahlen, welche namentlich unklare, verzerrte Bilder liefern würden, werden überdies noch durch Blenden (Diaphragmen) abgehalten.

Zusammen-
gesetzte
Okulare und
Objektive.

Soll ein Fernrohr zum genauen Einstellen auf bestimmte Punkte dienen, so erhält es an der Stelle, wo das umgekehrte, reelle Bild $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ entsteht, ein Fadenkreuz (zwei zueinander senkrechte Spinnfäden, oder mehrere fein eingerissene und geschwärzte Linien auf Glasplättchen), von welchem, wie von dem Bilde $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ selbst, die Okularlinse ein vergrössertes Bild erzeugt. Das Fadenkreuz wird auf der hinteren Blende, deren sonst beliebig zu wählender Ort eben durch diesen Zweck bestimmt wird und welche aus einer von vier Schrauben (Korrektionsschrauben) gehaltenen Blechplatte mit kreisförmigem Ausschnitt besteht, aufgespannt (s. Fig. 193a u. 193b).

Fadenkreuz
als Ziel-
vorrichtung.

Befindet sich die Blende und damit das Fadenkreuz zu nahe, oder zu fern dem Okularglas, so trifft dasselbe mit dem Bild des Fadenkreuzes zu; dieses erscheint nicht in der deutlichen Sehweite vom Auge und ist undeutlich, oder gar nicht sichtbar. Es ist daher — für jeden Beobachter ein für allemal — die Entfernung zwischen Okularglas und Fadenkreuz durch Probieren so zu regeln, dass das Fadenkreuz möglichst deutlich sichtbar ist. Zu diesem Zweck wird das Fernrohr in beliebiger Stellung des Okularauszugs gegen einen hellen Hintergrund gerichtet und alsdann das samt seiner Fassung eingeschraubte Okularglas (s. Fig. 193a), oder das in Längsschlitzen durch Schrauben festgehaltene Diaphragma (Blende) (s. Fig. 193b) so verschoben, dass das Fadenkreuz deutlich schwarz erscheint.

Ziellinie.

Die Verbindungslinie des optischen Mittelpunkts vom Objektiv mit dem (samt der Okularröhre und der Okularlinse in der Längsachse des Fernrohrs verschiebbaren) Kreuzungspunkt der beiden Fäden heisst Ziellinie. Sie wird beim Anzielen eines Punktes mit der durch den Punkt, sein Bild und den genannten optischen Mittelpunkt der Objektivlinse bestimmten Geraden zum Zusammenfallen (zur Kollimation) gebracht. Zu diesem Zwecke ist

die Okularröhre mittelst des Getriebes (bei jeder Zielung aufs neue) so zu stellen, dass das Bild des Zielpunktes deutlich sichtbar ist, „hell zu stellen“. Alsdann erst bringt man das bei jeder Okularstellung gleich gut sichtbare Bild des Kreuzungspunktes der Fäden zur Deckung mit dem Bild des Zielpunktes: „man stellt ein“.

Entsteht das Bild des Zielpunktes nicht in der Ebene des Fadenkreuzes (was zur Folge hat, dass das virtuelle Bild des Gegenstands, oder dasjenige des Fadenkreuzes, oder beide sich nicht in deutlicher Sehweite vom Auge befinden, also nicht bestmöglich sichtbar sind), so scheinen beim Hin- und Herbewegen des Auges vor der Okularlinse diese Bilder sich gegeneinander zu verschieben. Diese Erscheinung heisst man „Parallaxe“, sie macht die genaue Einstellung eines Punktes unmöglich. Sie rührt her entweder von mangelhaftem Hellstellen, oder, wenn das Fadenkreuz unklar, von unrichtiger Entfernung zwischen Okularglas und Fadenkreuz. Um sie wegzuschaffen, ist also im ersteren Fall der ganze Okularauszug mittelst des Okulargetriebes, im zweiten Fall, (bei unrichtiger Entfernung des Fadenkreuzes vom Okularglas) die Blende gegen das Okularglas wie oben gezeigt zu verschieben.

Parallaxe.

Vom Okularauszug muss verlangt werden, dass bei Benützung der Trieb- schraube der Kreuzungspunkt der Fäden sich genau in einer Geraden bewege, die durch den optischen Mittelpunkt des Objektivs geht. Trifft dies nicht zu, so ändert die Ziellinie beim Verschrauben des Okularkopfes ihre Richtung. Zur Untersuchung, ob diese Forderung erfüllt ist, zunächst a: in Beziehung auf die horizontal-projizierende Ebene stellt man das Fernrohr genau über einem festen Punkt auf und richtet gegen einen zweiten, etwa 100 m entfernten Punkt unter Vermeidung von Kippbewegungen eine Anzahl von Zwischenpunkten in ca. 10 m gegenseitiger Entfernung mehrfach so scharf als möglich ein (Bleistiftstrich, Ritz mit dem Messer), wobei der Okularauszug seiner ganzen Länge nach gebraucht wird. Alsdann stellt man das Fernrohr über dem vorherigen Zielpunkt auf und untersucht, ob von hier aus gesehen sämtliche eingewiesenen Punkte wieder in der Geraden erscheinen. Eine etwaige Abweichung würde, richtiges Einweisen vorausgesetzt, von unregelmässigem Gang des Okularauszugs herrühren, und dazu nötigen, entweder auf dessen Benützung zu verzichten (Wahl möglichst gleicher und grosser Zielweiten) oder den Fehler zu beseitigen. Untersuchung b: in Beziehung auf unveränderlichen Vertikalwinkel s. hinten bei: Nivellieren aus der Mitte. (Über die Ergebnisse solcher Untersuchungen vergl. Zeitschr. f. Verm. 1878 S. 305, 1897 S. 272, 1905 S. 673 u. a. a. O.)

Gang des Okularauszugs.

Unter linearer Fernrohrvergrösserung v versteht man das Verhältnis der Gesichtswinkel, unter welchen ein entfernter Gegenstand erscheint, wenn man ihn das eine Mal durch das Fernrohr und das andere Mal mit freiem Auge beobachtet:

Fernrohrvergrösserung.

$$v \sim \frac{2\beta}{2\alpha} \sim \frac{\beta}{\alpha} \quad (\text{s. Fig. 191}).$$

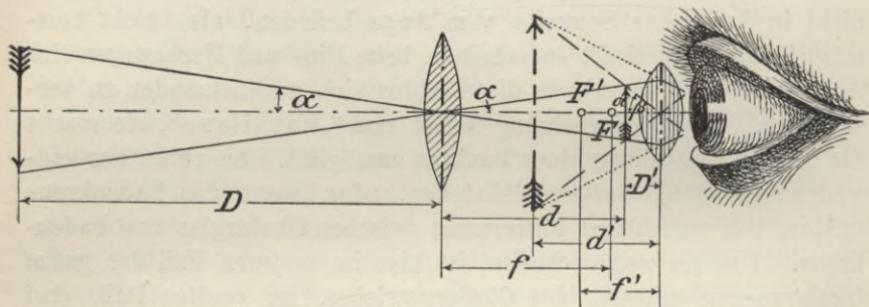
Da β und α sehr klein sind, so wird

$$v = \frac{\beta}{\alpha} \sim \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \sim \frac{a/D'}{a/d} \sim \frac{d}{D'} \quad (1)$$

Nach Formel IX des § 35 ist nun

$$d = \frac{D \cdot f}{D - f} = f \cdot \frac{1}{1 - \frac{f}{D}} = f \left(1 + \frac{f}{D} + \frac{f^2}{D^2} + \dots \right)$$

Fig. 191.



oder, da D im Verhältnis zu f sehr gross ist, in erster Näherung

$$d \sim f \quad (\text{in zweiter Näherung } d \sim f + \frac{f^2}{D}).$$

Ebenso ergibt sich für die Okularlinse aus der Formel

$$\frac{1}{D'} - \frac{1}{d'} = \frac{1}{f'} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Die Bildweite } d' \text{ ist hier negativ nach} \\ \text{Fall 3 des Schlusses vom § 35} \end{array} \right)$$

woraus
$$\frac{1}{D'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{d'} = \frac{d' + f'}{f' \cdot d'}$$

$$D' = \frac{f' d'}{f' + d'} = f' \frac{1}{1 + \frac{d'}{f'}} = f' \left(1 - \frac{d'}{f'} + \frac{d'^2}{f'^2} - \dots \right)$$

oder, da auch d' 20 bis 30mal grösser ist, als f'

in erster Näherung $D' \sim f'$ (in zweiter Näherung $D' \sim f' - \frac{f'^2}{d'}$).

Hieraus liefert (1) $v \sim \frac{d}{D'} \sim \frac{f}{f'}$ (2)

oder: die lineare Fernrohrvergrößerung ist gleich dem Verhältnis der Brennweiten von Gegenstandslinse und Augenlinse.

Je grösser also die Objektivbrennweite, um so stärker die Vergrößerung, um so länger und schwerer aber auch das Fernrohr. Je kleiner die Okularbrennweite, um so stärker die Vergrößerung, um so stärker aber auch die Verzerrung der Bilder, weil damit die in Fig. 184 als sehr klein vorausgesetzten Winkel wachsen.

Da die Brennweiten, zumal bei zusammengesetzten Linsensystemen, ohne besondere Vorkehrung nicht zu ermitteln sind, bestimmt man jedoch die Fernrohrvergrößerung v am besten wie folgt: Man beobachtet eine Backsteinwand, oder Nivellierlatte mit dem einen Auge direkt, mit dem andern gleichzeitig durchs Fernrohr. Die Zahl der mit freiem Auge gesehenen Backsteinschichten bezw. cm, deren Gesamthöhe der Höhe des Fernrohrbildes einer einzigen Schicht bezw. eines cm gleichkommt, gibt dann die lineare Vergrößerung an.

Das Gesichtsfeld eines Fernrohrs ist der Lichtkegel mit dem optischen Mittelpunkt der Gegenstandslinse als Spitze und der Öffnung der das Fadenkreuz tragenden Blende als Grundfläche. Die ausserhalb dieses Kegelgrundkreises die Blende treffenden, in die Fernröhre eingetretenen Lichtstrahlen werden durch erstere abgehalten, ins Auge zu gelangen. Damit nicht durch Reflexionen letzterer Strahlen das Bild gestört wird, sind die inneren Rohrwandungen rauh geschwärzt.

Gesichtsfeld.

Ist der Durchmesser der Blendenöffnung gleich c , so ist die Öffnung des Lichtkegels bei Zielung nach einem fernen Punkt

$$\gamma = \frac{c}{f} \varrho,$$

wobei f die Brennweite des Objektivs vorstellt.

Wählt man c ungefähr gleich der halben Brennweite f' des

Okulars (zu grosses c ermöglicht störenden Randstrahlen, welche das Bild verzerren würden, die Mitwirkung bei der Bilderzeugung, zu kleines c beschränkt allzusehr das Gesichtsfeld),

$$\text{so wird} \quad \gamma = \frac{0,5 f'}{f} \cdot \varrho = \frac{0,5 \varrho}{\frac{f}{f'}} = \frac{0,5 \varrho}{v} \quad (3)$$

d. h. das Gesichtsfeld eines Fernrohrs ist umgekehrt proportional seiner linearen Vergrößerung.

Um seine Grösse zu bestimmen, liest man entweder auf einem in beliebiger Entfernung D auf die Erde gelegten, oder senkrecht aufgestellten Massstab die äussersten noch wahrnehmbaren Teilpunkte ab und erhält aus deren gegenseitiger Entfernung l den Winkel γ des Gesichtsfelds c :

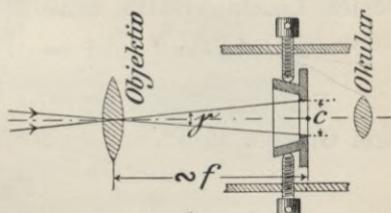
$$\gamma = \frac{l}{D} \varrho,$$

oder man merkt sich zwei einander gegenüberliegende, durch das Fernrohr gerade noch erkennbare Punkte und misst sodann den gesuchten Winkel γ zwischen ihnen direkt.

In das Fernrohr treten, durch die Blenden beschränkt, eine bestimmte Menge von Lichtstrahlen ein (Lichtkegel des Gesichtsfelds).

Helligkeit.

Fig. 192.



feldes), welche das durch die Objektivlinse erzeugte und durch die Okularlinse linear auf das v fache, der Fläche nach also auf das v^2 fache vergrößerte Bild beleuchten. Folglich muss dieses vergrößerte Bild v^2 mal weniger hell sein, als das vom Objektiv direkt erzeugte, oder: die Helligkeit H des Fernrohrs ist umgekehrt proportional seiner Flächenvergrößerung,

$$(3a) \quad H = \frac{k}{v^2}, \text{ wo } k \text{ eine konstante Zahl ist.}$$

Einfluss der Okularkonstruktion auf Vergrößerung und Helligkeit.

Wie schon in der Einleitung dieses § begründet, ersetzt man die Okularlinse durch ein System zweier Linsen, und zwar entweder derart, dass das Fadenkreuz ausserhalb der beiden Linsen, dem Objektiv zu, oder zwischen beiden Linsen liegt. Das erste heisst man „Ramsdensches“, das andere „Huyghenssches“ Okular. (Streng genommen bildet bei letzterem die innere (Kollektiv)linse einen Teil des Objektivs, ist aber durch die Okularröhre mit dem Augenglas fest verbunden.)

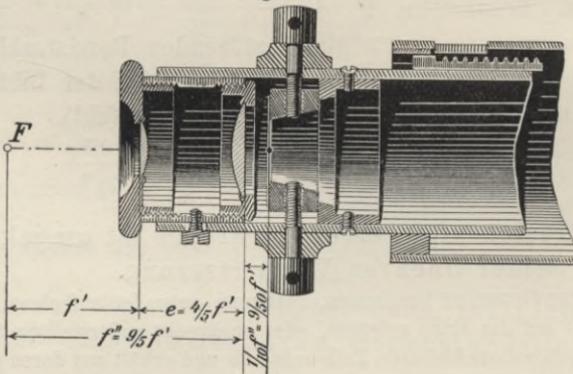
Bezeichnen wir mit f' und f'' die Brennweiten des Okulars, bzw. des Kollektivs und mit e ihre Entfernung, so können wir die beiden Linsen ersetzt denken durch eine einzige, deren Brennweite ist

$$\bar{f} = \frac{f' f''}{f' + f'' - e} \quad (\text{XIII des § 35}).$$

Ramsdensches Okular.

Für das Ramsdensche Okular (s. Fig. 193 a) werden die drei Grössen f' , f'' und e in den verschiedenen Werkstätten ver-

Fig. 193 a.



schieden, jedoch ungefähr nach der Proportion gewählt

$$(4) \quad f' : e : f'' = 5 : 4 : 9.$$

Damit erhält man

$$(4a) \quad \bar{f} = \frac{f' \cdot f''}{f' + f'' - \frac{4}{5} f'} = \frac{f' \cdot \frac{9}{5} f'}{f' + \frac{9}{5} f' - \frac{4}{5} f'} = \frac{9 f'}{10}.$$

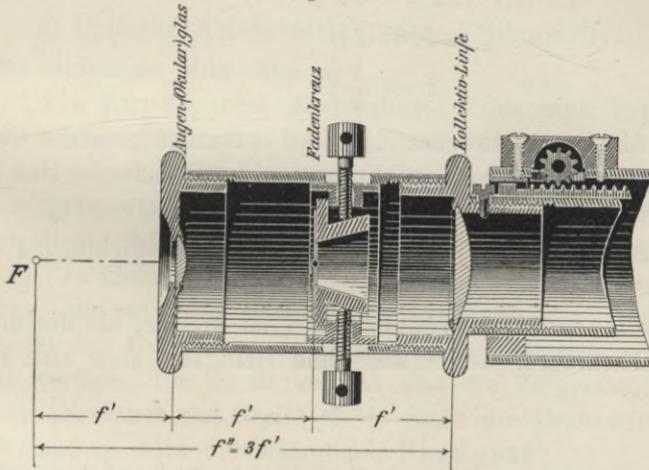
Durch die Verbindung der beiden Linsen nach Ramsden ist also die Brennweite der Ersatzlinse des Okulars kleiner geworden. Folglich ist nach Gleichungen (2), (3) und (3a) die lineare Vergrößerung v stärker, das Gesichtsfeld und die Helligkeit geringer als beim einfachen Okular. Für den Abstand η' des Brennpunktes der Ersatz- von der zugehörigen Hauptebene, oder dem optischen Mittelpunkt der Kollektivlinse ergibt Gleichung (XV des § 35)

$$(5) \quad \eta = \frac{f''(f' - e)}{f' + f'' - e} = \frac{\frac{9}{5}f'(f' - \frac{4}{5}f')}{f' + \frac{9}{5}f' - \frac{4}{5}f'} = \frac{9f'}{50}.$$

Beim Huyghensschen Okular (s. Fig. 193b) tritt die Ersatzlinse an Stelle des Objektivs (mit der Brennweite f) und des Kollektivs (mit der Brennweite f''). Ihre Brennweite sei wie bisher \bar{f} und

Huyghenssches Okular.

Fig. 193b.



die Entfernung ihres Brennpunktes von der Kollektivlinse η' . Die Formeln (XIII) und (XV) des § 35 heissen also

$$(6) \quad \bar{f} = \frac{f f''}{f + f'' - e}$$

$$(7) \quad \eta' = \frac{f''(f - e)}{f + f'' - e}$$

Der jetzt veränderliche Abstand e beider Linsen (des Objektivs und des Kollektivs) ist zu eliminieren. Zu diesem Zweck bemerken wir, dass das von diesen Linsen erzeugte Bild vom Okular eine Entfernung haben muss, welche nahezu gleich der Brennweite f' des letzteren ist. Wählt man, wie üblich, die Entfernung zwischen Okular und Kollektiv gleich $2f'$ und die Brennweite des Kollektivs $3f'$, so ergibt sich daraus auch, dass $f' = \eta'$ ist, und obige Formeln gehen über in

$$(6a) \quad \bar{f} = \frac{f \cdot 3 f'}{f + 3 f' - e}$$

$$(7a) \quad \eta' = f' = \frac{3 f' (f - e)}{f + 3 f' - e}$$

Aus (6 a) erhält man:

$$f + 3 f' - e = \frac{f \cdot 3 f'}{\bar{f}}$$

und durch Einsetzung in (7 a)

$$f' = \frac{(f - e) \bar{f}}{f}$$

$$\text{oder } (f - e) = \frac{f f'}{\bar{f}}$$

$$\text{und aus (6 a)} \quad (f - e) = \frac{-f \cdot 3 f' + 3 f f'}{\bar{f}} = \frac{3 f' (f - \bar{f})}{\bar{f}}$$

Gleichsetzung ergibt:

$$f f' = 3 f' (f - \bar{f})$$

$$2 f = 3 \bar{f}$$

$$(8) \quad \bar{f} = \frac{2}{3} f$$

also ist die Brennweite der die jetzt zusammengesetzte Objektivlinse substituierenden Linse nur noch $\frac{2}{3}$ der Brennweite des eigentlichen Objektivs.

Daraus ergibt sich nach den früheren Entwicklungen für die Huyghens'sche Anordnung:

Die lineare Vergrößerung v ist kleiner, als die des einfachen Fernrohrs, Gesichtsfeld und Helligkeit aber sind grösser.

Ter-
restrisches
Fernrohr.

Das „astronomische“ Fernrohr (s. Fig. 190a) erzeugt umgekehrte Bilder. Bei mangelnder Übung des Beobachters erscheint dies störend, namentlich wenn mittels des Fernrohrs eingewiesen, oder an einer Teilung abgelesen werden soll. Zur Abhilfe erweitert man durch Einschaltung einer weiteren Sammellinse den Okularauszug des bisherigen astronomischen Fernrohrs selbst wieder zu einem astronomischen Fernrohr im kleinen, das gegen das umgekehrte, durch die Objektivlinse erzeugte Bild gerichtet wird, und von ihm ein abermals umgekehrtes, also jetzt wieder aufrechtes Bild erzeugt. Aus dem einfachen astronomischen wird dadurch ein „einfaches terrestrisches Fernrohr“ (s. Fig. 190). Natürlich geht durch die Einschaltung der weiteren Linse ein Teil der Helligkeit des Bildes verloren.

Statt des einen Umkehrglases verwendet man, um die früher

erwähnten Fehler stark brechender Linsen — Verzerrung und Farbenzerstreuung — zu verkleinern, deren zwei oder drei.

Auch die bei dem astronomischen Fernrohr erwähnten weiteren Verbesserungen (achromatische Objektivlinse, Doppelokular) werden bei dem terrestrischen Fernrohr angebracht.

§ 37. Die Ablesevorrichtungen

haben den Zweck, die Genauigkeit der Ablesung an Teilungen über ein — im Hinblick auf die Übersichtlichkeit und die Möglichkeit der Teilungsdurchführung und der Unterscheidung mit freiem Auge nach unten beschränktes — Teilungsintervall hinaus zu steigern.

Sie lassen sich einteilen in

- a) optische Ablesevorrichtungen und
- b) mechanische „

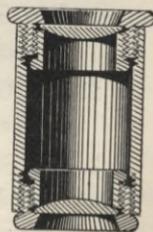
a) Optische Ablesevorrichtungen (Mikroskope).

Das einfachste Mikroskop ist

1) „die Lupe“, eine Konvexlinse, oder eine Verbindung mehrerer solcher Linsen mit kleinen Brennweiten, welche so nahe an den zu beobachtenden Gegenstand herangebracht werden, dass dessen vergrößertes, virtuelles Bild in der deutlichen Sehweite auf derselben Seite entsteht (Gegenstandsweite $<$ Brennweite s. S. 290). Je kleiner die Brennweite, d. h. je stärker die Linsenkrümmung, um so näher dem Brennpunkt kann der Gegenstand unbeschadet der Entstehung des Bildes in der deutlichen Sehweite gebracht werden. Um so stärker ist also die Vergrößerung, um so kleiner aber auch das Gesichtsfeld. Sinkt die Brennweite unter etwa 30 mm, so wird die eintretende Kugel- und Farbenabweichung störend. Man verwendet daher hier besser Lupen, die sich aus mehreren Linsen zusammensetzen. Für Messinstrumente setzt man in diesem Fall in der Regel zwei plankonvexe Linsen so zusammen, dass ihre gekrümmten Flächen gegeneinander gerichtet sind (Wilsonsche Lupe s. Fig. 194). Die einfachen Lupen haben eine zwei- bis dreifache, zusammengesetzte Lupe aber bis zu 27facher Vergrößerung.

Lupe.

Fig. 194.



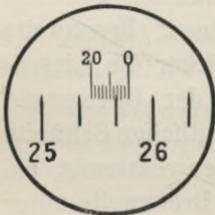
Das 2) eigentliche „Mikroskop“ stellt ein, meist Ramsden'sches, Fernrohr in kleinen, mit zwei getrennten Linsensystemen — Objektiv und Okular — von geringer Brennweite dar, das auf die Teilung des Messinstrumentes eingestellt wird und von ihr ebenfalls in der deutlichen Sehweite vom Auge, ein Bild erzeugt. Die

Entfernung der zu beobachtenden Teilung vom Objektiv bewegt sich bei Anwendung des Mikroskops zwischen der einfachen und der doppelten Brennweite des Objektivs (Strahlengang ähnlich wie bei Fig. 191). Seine hauptsächliche Bedeutung gegenüber der Lupe beruht darauf, dass in der Ebene des reellen Bildes eine Einstell- und Messvorrichtung, bestehend in einer Schar fester Fäden — beim „Schätzmikroskop“ —, oder einem einzigen beweglichen Faden — beim „Schraubenmikroskop“ — angebracht werden kann.

Gegenüber dem hernach vorzuführenden „Nonius“ bietet es den Vorzug, störende Parallaxe und Exzentrizität beider Teilungen leicht wegbringen zu lassen. Dagegen ist es empfindlicher gegen unsachgemässe Behandlung als jener.

Beim α) „Schätzmikroskop“ („Strich-, oder Fadenmikroskop“) ist das Fadenkreuz ersetzt durch eine feine Strichteilung, bestehend aus einer Anzahl (bei Dezimalteilung meist 11) mikroskopisch feiner Parallelstriche, deren Gesamtentfernung ebenso gross ist, als das durch das Objektiv des Mikroskops erzeugte Bild eines Intervalls der zu beobachtenden Teilung. (Zur feineren Einstellung sind die Striche der letzteren häufig in Spitzen ausgezogen.) Als Ablesestelle

Fig. 195.



dient einer der beiden Endstriche (der „Nullstrich“) der Mikroskopteilung. Die Interpolation innerhalb jedes Intervalls der Hauptteilung erfolgt durch Abzählen der Mikroskopteile und Schätzung von $\frac{1}{10}$ innerhalb dieser Mikroskopteile.

In Fig. 195 stellt z. B. jeder Mikroskopteil eine Doppelminute vor. Die Ablesung lautet $25^{\circ} 46,8'$.

An das Schätzmikroskop stellt man folgende Anforderungen:

1. Die Strichteilung muss deutlich sichtbar sein (nötigenfalls Verschiebung des Okularglases).
2. Die Grundteilung muss deutlich sichtbar sein (nötigenfalls Verschiebung der Okularröhre).
3. Die Strichteilung des Mikroskops muss nach Richtung, Lage und Intervallgrösse mit der Grundteilung übereinstimmen [nötigenfalls a) Drehung des Mikroskops um seine Längsachse; b) Berichtigung der Stellung der an den Fernrohrträgern befestigten Mikroskopträgern mittels der entsprechenden Justierschrauben, bis die beiden Teilungen über einander greifen; c) Veränderung der Entfernung zwischen Teilung und Objektiv, und damit im Zusammenhang entsprechende Verschiebung der Okularröhre].

4. Die Entfernung der Nullstriche beider Mikroskope soll 2 R betragen (nötigenfalls Verschiebung der Mikroskope nach rechts, oder links durch wiederholte Benützung der Justierschrauben für die Mikroskopträger).

β) Das „Schraubenmikroskop“ (s. Fig. 196) stellt eine Verbindung von optischer und mechanischer Ablesevorrichtung dar.

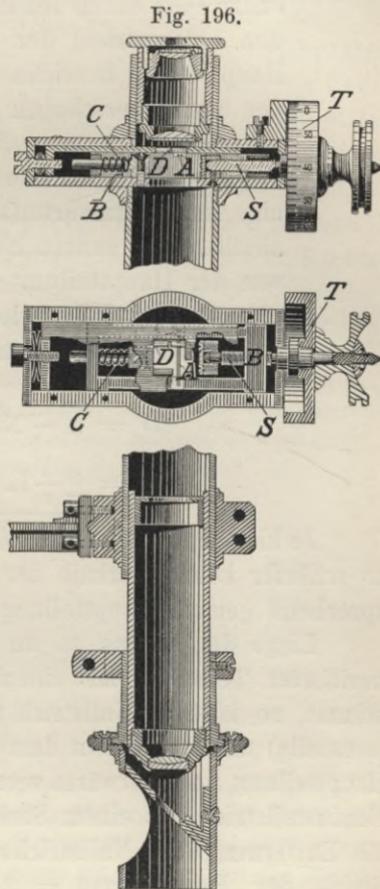
Schraubenmikroskop.

Die Mikroskopteilung beschränkt sich auf einen einzigen Ablesestrich A (gewöhnlich Doppelfaden), der samt dem ihn tragenden Schlitten B, mittels einer fein geschnittenen Schraube S in einer zur Teilung parallelen Ebene gegen eine sich entgegenstimmende Feder C verschoben werden kann. Jede volle Umdrehung der Schraube ergibt eine Verschiebung des Fadens um das in seiner Ebene erzeugte Bild eines Teilungsintervalls. Teile einer solchen Verschiebung, also einer vollen Schraubendrehung, lassen sich ablesen an einer mit der Schraube S verbundenen, geteilten und achsgleichen Trommel T.

Statt die Teilung so eng, oder die Ganghöhe der Schraube so gross zu machen, dass eine einzige Umdrehung der letzteren genügt, um den Faden um das Bild eines Teilungsintervalls fortzubewegen, zerlegt man diese Strecke in der Regel durch einen

in der Fadenebene eingebauten „Rechen“ D in eine runde, nach „Berg“ und „Tal“ leicht zu übersehende Zahl von Teilen, derart, dass eine volle Schraubendrehung den Faden von Berg zu Tal und umgekehrt führt. An diesem Rechen lässt sich dann bequem die Zahl der vollen Schraubendrehungen ablesen, während zur Ablesung der Teildrehungen wie vorhin die Trommel T dient.

Die Untersuchung des Schraubenmikroskops, das jedoch bei gewöhnlichen Feldmessinstrumenten keine Verwendung findet, ist analog derjenigen des Schätzmikroskops.



b) Mechanische Ablesevorrichtungen.

1. Der Transversalteilung (für Streckenlängen s. S. 131), für Kreisteilung schon von Tycho de Brahe (1546—1601) angewandt, kommt heute nur noch geringe Bedeutung zu.
2. Der Nonius (an Stelle eines im Jahre 1542 von dem Portugiesen Nunez (lat. Nonius) gezeigten Ableseverfahrens im Jahre 1631 durch den Franzosen Vernier erfunden) erweitert den Ablesestrich, der die wechselnde Ablesestelle an der Hauptteilung bezeichnet, zu einer (zweiten) Teilung, die an der ersten verschoben wird, sich aber von dieser dadurch unterscheidet, dass die einer gewissen Zahl von Teilen entsprechende Strecke der ersteren das Gesamtmaß für eine um 1 vermehrte (seltener verminderte) Zahl von Teilen abgibt. Zur ganzen Noniuslänge von n Teilen werden also von der Hauptteilung ($n \mp 1$) Teile verwendet. Die Differenz D („direkte Ablesung“, „Noniusangabe“) der Länge N eines Noniusteils und der Länge L eines Hauptteils beträgt demnach

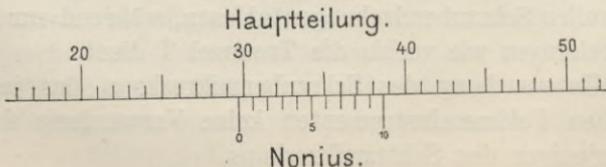
$$D = L - N = L - \frac{(n \mp 1)L}{n}$$

$$D = \pm \frac{1}{n} L.$$

Je kleiner die „direkte Ablesung“, oder „Noniusangabe“ ist, um so schärfer kann innerhalb der deutlichen Wahrnehmbarkeit — entsprechend genaue Hauptteilung vorausgesetzt — abgelesen werden.

Liegt der Nonius so an der Hauptteilung, dass sein mit 1 bezifferter Teilstrich mit einem Strich der Hauptteilung übereinstimmt, so ist sein Nullstrich (Teilungsanfang und eigentliche Ablesestelle) um $1 \times D$ von dem ihm zunächst gelegenen Strich der Hauptteilung nach vorwärts verschoben, stimmt der mit 2 bezifferte Noniusteilstrich mit einem Strich der Hauptteilung überein, so ist die Entfernung des Nullstrichs von dem ihm zunächst gelegenen Strich der Hauptteilung = $2 \times D$; stimmt endlich der mit r bezifferte Noniusteilstrich mit einem Strich der Hauptteilung überein, so ist der Nullstrich des Nonius um $r \times D$ gegenüber dem ihm vorhergehenden Strich der Hauptteilung vorgeschoben.

Fig. 197.



Transversal-
teilung.

Nonius.

Genauigkeit.

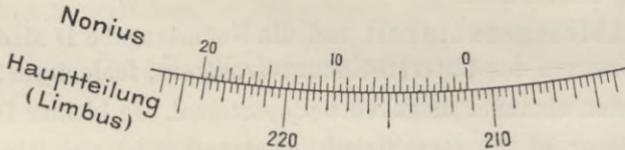
Anwendung.

Umgekehrt kann man daher die genaue Lage des Null-, oder Ablesestrichs (Zeigers) der Noniusteilung zwischen zwei Strichen der Hauptteilung dadurch bestimmen, dass man zu dem kleineren Wert von beiden das Mass $r \times D$ addiert, um welches dieser Nullstrich vorgeschoben werden musste, damit die konstatierte Übereinstimmung des r ten Noniusstrichs erfolgte. Die genaue Übereinstimmung irgend eines Noniusstrichs mit einem Strich der Hauptteilung wird nicht allein an diesem Strich selbst, sondern besser an den zu ihm symmetrisch je rechts und links gelegenen Strichpaaren festgestellt, bei welchen, wenn am genannten Strich wirklich Übereinstimmung vorhanden ist, absolut gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Differenzen sich zeigen müssen. Um diese Ablesungs- und Einstellungsverfeinerung auch für den Anfangs- und Endstrich des Nonius zu haben, wird letzterer häufig mit 1 oder 2 „Überteilstrichen“ durch Fortsetzung der Noniusteilung über die Enden hinaus versehen.

1. Beispiel. Die durch neun Teile einer Hauptteilung vorgestellte Strecke wurde auf dem Nonius in zehn gleiche Teile geteilt und es wurden die Teilstriche mit 0 bis 10 bezeichnet (Planimeter, Barometer, Kalibermassstab etc.). Welche Ablesung entspricht dem Nullstrich (Zeiger) des Nonius, wenn derselbe (s. Fig. 197) sich zwischen 29 und 30 der Hauptteilung befindet, und der Strich 7 des Nonius mit einem Teilstrich der Hauptteilung übereinstimmt?

Antwort: $29 + 7 \times \frac{1}{10} L = 29,7$.

Fig. 198.



2. Beispiel. Ein Vollkreis ist in 1080 gleiche Teile je zu $\frac{1}{3}^\circ$ geteilt. Der durch 39 Teile vorgestellte Bogen wurde auf dem Nonius in 40 gleiche Teile zerlegt. Welche Ablesung entspricht dem Nullstrich (Zeiger) des Nonius, wenn er (s. Fig. 198) sich zwischen den Werten $211^\circ 00'$ und $211^\circ 20'$ der Hauptteilung befindet und wenn sein 23ter Strich mit einem Strich der letzteren übereinstimmt?

Antwort: Die direkte Ablesung ist

$$D = \frac{1}{n} L = \frac{1}{40} \cdot 20' = 30'',$$

somit Ablesung im vorliegenden Fall

$$211^\circ 00' + 23 \times 30'' = 211^\circ 11' 30''.$$

Um die Rechnung von $r \times D$ zu sparen, sind die Noniusstriche nicht mit 1, 2, 3 . . . , sondern mit $1 \times D$, $2 \times D$, $3 \times D$. . . beziffert, bzw. es sind diese Werte durch die verschiedenen Strichlängen in Verbindung mit der Bezifferung kenntlich gemacht.

Die letzte Noniusziffer zeigt dann immer den Wert eines Teils der Hauptteilung an und die Noniusangabe und -Ablesung ergibt sich ohne Rechnung durch einen Blick auf die Nonius-Bezifferung und -Strichlängen.

Vor- bzw.
rücktragen-
der Nonius.

In beiden vorstehenden Beispielen war die Zahl n der Noniusteile um 1 grösser gewählt, als diejenige der zur ganzen Noniuslänge verwendeten Teile L der Hauptteilung. Die Länge N eines Noniusteils blieb daher um die Noniusangabe $D = \frac{L}{n}$ zurück hinter derjenigen eines Teils der Hauptteilung, die Noniusbezifferung dagegen erfolgte in der Vorwärtsrichtung, d. h. in gleicher Richtung mit der Hauptteilung.

Hätte man zur ganzen, in n Teile zerlegten Noniuslänge dagegen $(n + 1)$ Teile der Hauptteilung verwendet, so wäre die Länge N jedes Noniusteils um die Noniusangabe $D = \frac{L}{n}$ grösser geworden, als diejenige eines Teiles L der Hauptteilung. Die Noniusbezifferung hätte dann in der Rückwärtsrichtung (entgegengesetzt derjenigen der Hauptteilung, wie beim Schätzmikroskop) erfolgen müssen. Diese Eigenschaft führt zur unterscheidenden Bezeichnung: „vortragender“ bzw. „rücktragender“ Nonius. Da die letztere Form, trotz grösserer Noniusteile, keine genaueren Ablesungen liefert, als die erstere (Nonienangabe in beiden Fällen $\frac{1}{n} L$), diese aber wegen der mit der Hauptteilung übereinstimmenden Bezifferungsrichtung bequemer ist, wird praktisch nur sie angewandt.

Doppel-
nonius.

Geht die Bezifferung der Hauptteilung von einem Nullpunkt aus nach zwei einander entgegengesetzten Richtungen (Höhenkreis), so muss dasselbe beim Nonius der Fall sein. Man braucht also einen Doppelnonius mit gemeinsamem Nullpunkt, von dem immer derjenige Teil zur Ablesung verwendet wird, dessen Bezifferungsrichtung mit derjenigen der Ablesestelle auf der Hauptteilung übereinstimmt.

Ablese-
genauigkeit
in Beziehung
zur Nonius-
angabe.

Die Ablesegenauigkeit und die Noniusangabe D sind innerhalb der Grenzen des Unterscheidungsvermögens, fehlerfreie Teilung vorausgesetzt, einander umgekehrt proportional. Je kleiner $D = \frac{L}{n}$, um so grösser ist die Genauigkeit. Letztere lässt sich also unter obigen Voraussetzungen steigern durch Wahl kleiner Intervalle L der Hauptteilung und grosser Zahl n der Noniusteile. Beide Hilfsmittel schädigen aber, wenn zu weit getrieben, die Ablesebequemlichkeit (Unübersichtlichkeit der Hauptteilung, allzu langer Nonius).

Setzen wir für das Vermögen, kleine Breitenunterschiede wahrzunehmen, unter normalen Teilungs- und Beleuchtungsverhältnissen einen Gesichtswinkel von $10''$ a. T. fest (nach Versuchen von Eggert geht er unter günstigen Verhältnissen bis zu $3''$ herab), so lässt sich bei einer deutlichen Sehweite von 300 mm mit freiem Auge noch ein solcher von $D = \frac{300 \cdot 10''}{e''} = 0,015$ mm erkennen. Auf einer Kreisteilung von beispielsweise 60 mm Halbmesser können wir also unter obiger Voraussetzung mittels eines Nonius mit freiem Auge noch Winkelwerte bis zu $\frac{0,015 \times e'}{60} = \text{rund } 1' \text{ a. T. ablesen.}$

Diese Ablesegenauigkeit ist für viele praktische Zwecke ungenügend. Wir sind dann je nach der nötigen Ablesegenauigkeit genötigt, zur Beobachtung des Nonius noch eine Lupe, welche eine 2- bis 8fache Vergrößerung ergibt, also die Verbindung einer optischen mit einer mechanischen Ablesevorrichtung zu verwenden.

Verbindung
von Nonius
mit Lupe.

Bei einiger Übung gelingt es leicht, noch Teile einer Noniusangabe D aus der Verschiedenheit benachbarter Unterschiede beider Teilungen heraus zu schätzen, wenn genaue Übereinstimmung eines Noniusstrichs mit einem Strich der Hauptteilung nicht vorhanden ist. Es ist daher nicht dringend erforderlich, die Teilung so weit zu treiben, dass die kleinstmögliche, mit der Lupe noch wahrnehmbare Strecke als Noniusangabe erscheint.

Das Mikroskop hat gegenüber dem Nonius den Vorzug, dass das Bild der Ablesemarke mit dem Bild der Teilung genau zur Deckung gebracht werden kann, also Parallax- und Exzentrizitätsfehler (s. S. 312 und 333) wegfallen. Auch ermöglicht das Fadenmikroskop ein bequemes und rascheres, das Schraubenmikroskop ein genaueres Ablesen. Umgekehrt ist die Justierung des Mikroskops im Falle eingetretener Lageveränderung, oder für Beobachter von verschiedener Sehkraft zeitraubender, als diejenige der Lupenstellung bei Verwendung von Nonien. Das Mikroskop erfordert sorgsamere Behandlung. Für gewöhnliche Feldmessarbeiten, namentlich im Gebirge, ist daher der Nonius in Verbindung mit einer einfachen Lupe dem Mikroskop vorzuziehen.

Mikroskop
oder Nonius?

B. Winkelmessinstrumente.

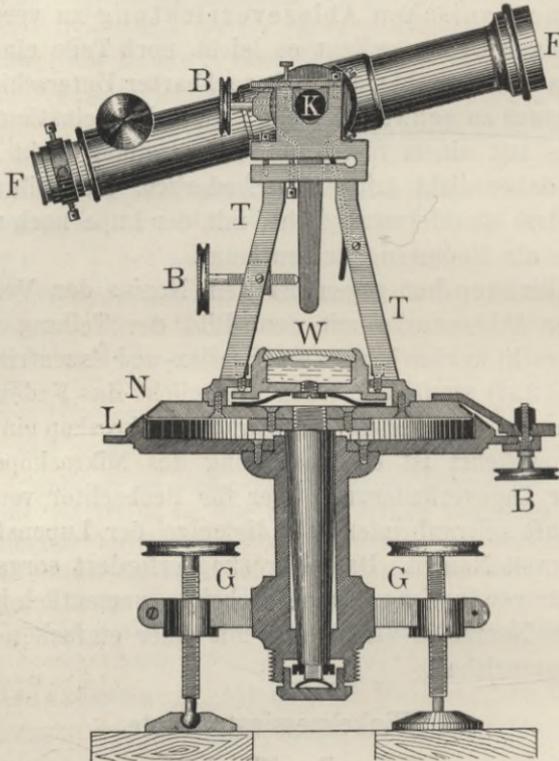
§ 38. Der Theodolit

ist das vollkommenste Instrument zum Messen von Horizontalwinkeln. Seine notwendigen Hauptbestandteile ergeben sich aus folgenden Funktionen: Vom Winkelscheitel aus müssen die beiden Schenkel mittels einer Zielvorrichtung (Fernröhre) angezielt werden, welche sich zum Zweck der vertikalen Projektion der Zielung auf die Horizontalebene um eine horizontale Achse kippen und, um Zielungen nach verschiedenen Richtungen zu ermöglichen, um eine vertikale Achse drehen lässt. Zur Ermittlung der Grösse der ausgeführten Drehung bedarf es einer Kreisteilung, durch deren Mittelpunkt die Drehachse und zwar senkrecht zur Teilkreisebene geht.

Zum Zweck bequemen Anzielens muss sodann das Instrument in einer mittleren Höhe von etwa 1,2 bis 1,3 m (Aughöhe) über dem auf dem Gelände bezeichneten Scheitel auf einem Gestell, dem „Stativ“, aufgestellt und befestigt werden. Um diesen Forderungen genügen zu können, muss der Theodolit folgende Teile besitzen:

1. das „Fussgestell“ G. Mit ihm fest verbunden (s. Fig. 199), oder mittels einer Achse in vertikaler Büchse drehbar (s. Fig. 200 und 201) ist:

Fig. 199.



2. der „Teilkreis“ oder „Limbus“ L, welcher eine feine Winkelteilung trägt. An der letzteren wird die Grösse der mit der Zielvorrichtung jeweils ausgeführten Horizontalrotation abgelesen. Durch die Teilkreisscheibe tritt, gelagert entweder in der Büchse des Fussgestells (s. Fig. 199), oder in einer Bohrung der Limbusachse (s. Fig. 200) ein während der Messung vertikaler Zapfen, die „Drehachse“ des

3. „Zeigers“ oder der „Alhidade“ N. Zur — nötigenfalls mehrfachen — Ablesung der jeweiligen Grösse der Zeigerdrehung auf dem Teilkreis dienen Ablesestriche oder Nonien auf dem Zeiger, bzw. Mikroskope, welche mit letzterem durch

4. die Stützen, oder Träger T fest verbunden sind. Auf den Trägern ruht

5. die „Horizontal-“, oder „Kippachse“ K, welche mittels eines Ringes die

6. „Fernröhre“ F umfasst und mit welcher bei den zum Messen von Vertikalwinkeln eingerichteten Instrumenten der

7. „Höhen-“, oder „Vertikalkreis“ H (s. Fig. 200 und 201) fest verbunden ist.

Schliesslich braucht man zur Horizontierung des Instruments, zur genauen Einstellung des Fernrohrs auf einen Zielpunkt und zur Festhaltung dieser Einstellung, sowie zur Erzielung eines leichten Gangs der beweglichen Instrumententeile noch

8. Vorrichtungen zur Horizontalstellung, Bremsung und Feinbewegung. Federung.

Fig. 200.

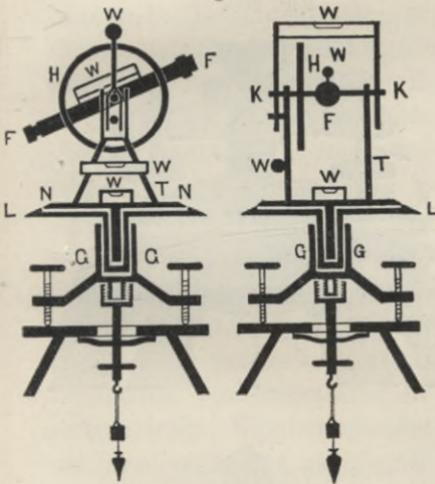
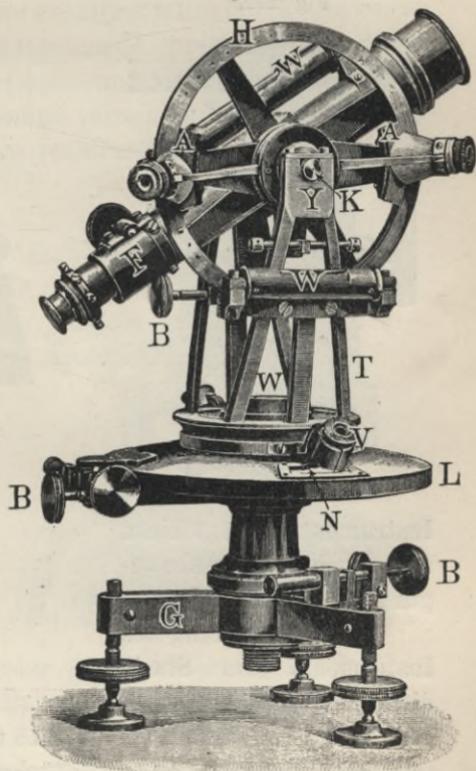


Fig. 201.



Der in Fig. 199 dargestellte Theodolit, bei welchem der Teilkreis L starr mit dem Fussgestell G verbunden ist, heisst „einfacher Theodolit“ im Gegensatz zum „Repetitions- (besser „Multiplikations“) theodoliten“ (s. Fig. 200 und 201), bei welchem neben der Alhidade N auch der Teilkreis L sich um eine durch die Büchse des Fussgestells G gegebene Achse drehen lässt.

Kann das Fernrohr um beliebig grosse Winkel gekippt, d. h. „durchgeschlagen“ werden, so nennt man den Theodoliten „Kompensationstheodolit“, weil bei dessen Verwendung die schädliche Wirkung einer Reihe von Instrumentenfehlern durch entsprechende Messungsverfahren kompensiert (zum Verschwinden gebracht) werden können.

Nähere Betrachtung der einzelnen Instrumententeile.

Fussgestell.

1. Das Fussgestell besteht aus einem zylindrischen Mittelstück, der Büchse M (s. Fig. 180) mit drei symmetrisch angebrachten, von aussen herein der Länge nach aufgeschnittenen und mit Muttergewinden in vertikaler Bohrung versehenen Ansätzen A.

Durch genannte Bohrungen treten die Stellschrauben S, welche entweder mittels Metalltellerchen direkt auf der Stativscheibe aufsitzen (Fig. 199 und 201), oder in einer Metallplatte P (sei es nach Art der Fig. 180 oder der Fig. 203) gelagert sind und zur Horizontierung des Instruments dienen. [Für kleinere, (namentlich Nivellier-)

Fig. 202.

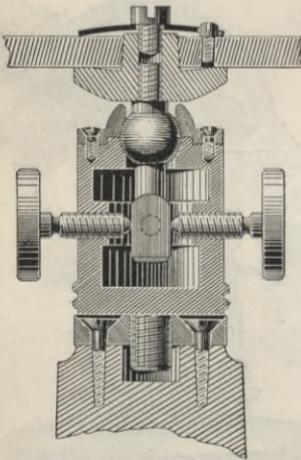
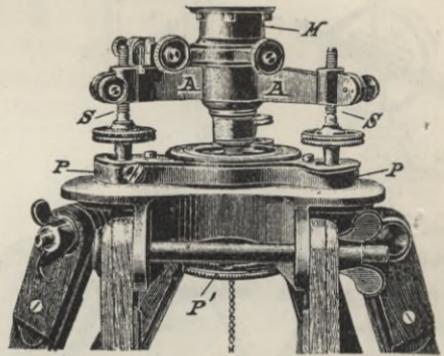
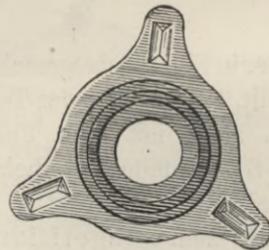


Fig. 203.



Instrumente genügt hiezu u. a. auch die Nussbewegung (s. Fig. 202.)

Zur Festhaltung des Instruments am Stativ dient die Schraubenstange, oder der Stengelhaken (s. Fig. 178 und 179), welche einen Gewinde- teil, bezw. eine Öse des Mittelstücks M fassen (federnde Verbindung), oder die Metallplatte P (s. Fig. 203 und 204) in Verbindung mit der Halteschraube P' (starre Verbindung). (Einleitende Vergleichung der Vorzüge und Nachteile der verschiedenen Befestigungseinrichtungen s. § 34.)



Die Konstruktion nach Fig. 180 erfordert innerhalb der Metallplatte P bewegliche Lagerblöcke Q, weil die Entfernung der von ihnen umschlossenen kugelförmigen unteren Stellschraubenenden (da die Stellschrauben ihre Führung durch die Muttergewinde der Ansätze A

erhalten) sich verändert, sobald die benützten Teile der Stellschrauben (bei wechselnder Stativstellung) ungleiche Entfernung von den Kugellenden erhalten. Diese, wenn auch geringe, Beweglichkeit der Lager bildet eine Fehlerquelle bei Winkelmessungen. Auch die starke Beanspruchung der beweglichen Lagerblöcke Q im Falle schiefer Haltung des beim Wechsel des Standpunkts auf dem Stativ befestigten Instruments erscheint bedenklich.

Diese Nachteile werden ohne Drangabe des erreichten Vorzugs zweckmässiger Senkelaufhängung und des Wegfalls schädlicher Stellschraubenpressung vermieden durch die in Fig. 203 dargestellte Verwendung einer Metallplatte mit radialen Rillen, in denen sich die unteren Stellschraubenenden, gegen das Herabfallen durch eine zweite, dünne Metallplatte geschützt, entsprechend ihrem Abstand selbsttätig, aber nur während der Horizontierung verschieben können. —

An Stelle dreier Stellschrauben verwendet man zur Horizontierung auch zwei, unter einem rechten Winkel voneinander ab-

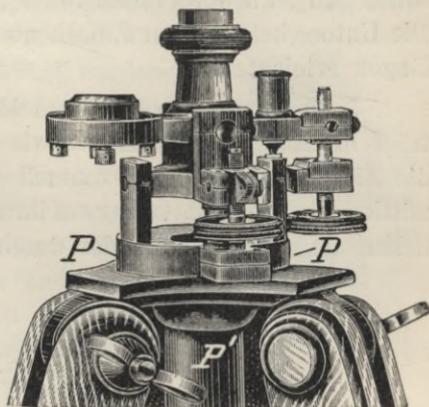
stehende Schrauben, denen je eine gegenüber angebrachte starke Feder entgegenwirkt (Warkentin & M. Krause, Leipzig, s. Zeitschr. f. Instr.-K. 1908, S. 158), oder welche zweien Metallplatten, von denen eine die andere trägt, Kippbewegungen um zwei senkrecht zueinander stehende horizontale Achsen verleihen: „Cardanische Aufhängung“ (s. Fig. 204).

Das Mittelstück M selbst, die „Stehachse“, trägt die Führung für die „Vertikal-“, oder „Drehachse“, sei es in Form einer zentrischen, kegelförmigen Bohrung (s. Fig. 199), eines Zapfens, oder einer angeschliffenen Lagerfläche.

2. Der Teilkreis — beim einfachen Theodoliten mit dem Fussgestell (der Stehachse) starr verbunden, beim Repetitionstheodoliten um eine vertikale Achse drehbar, deren Führung das Fussgestell besorgt — besteht in der Regel aus Messing und wird meist als leicht ansteigender Kegelrumpf angeordnet, weil diese Form bequemeres Ablesen gestattet, als diejenige der Kreisscheibe. Am Rand, „Limbus“, ist ein Streifen eines zur Aufnahme feiner Teilungen geeigneten Materials (Silber, oder entsprechende Legierung etc.) eingelegt.

Für die darauf eingerissene Kreisteilung bildet der Schnitt-

Fig. 204.



Teilkreis.

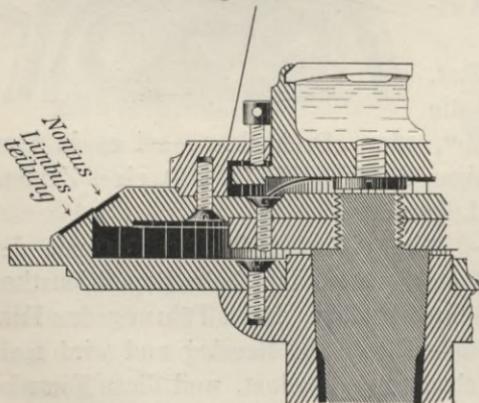
punkt von Vertikalachse und Teilungsfläche den Mittelpunkt. Die Teilung selbst ist, vom Mittelpunkt aus gesehen, rechtsläufig, nach Sexagesimal-, oder Centesimalgraden (360 oder 400) und Unterabteilungen derselben ($\frac{1}{3}^0$, $\frac{1}{8}^0$, $\frac{1}{4}^0$, $\frac{1}{5}^0$, $\frac{1}{6}^0$, $\frac{1}{10}^0$) ausgeführt. Letztere richten sich nach dem Durchmesser des Teilkreises, der (von Ablesestelle zu Ablesestelle, und nicht, wie bei einzelnen Firmen üblich, von Rand zu Rand gemessen) zwischen 7 und 30 cm schwankt. Die Bogenlänge eines Limbusteils bewegt sich in der Regel zwischen 0,2 und 0,6 mm. Je grösser der Teilkreisdurchmesser ist, um so kleiner ist der zu einer bestimmten Bogenlänge gehörige Winkel, um so grösser also — gleiche Ablesevorrichtung und Teilungsgenauigkeit vorausgesetzt — die Ablesegenauigkeit. Um so schwerer aber auch das Instrument, weil eine Steigerung der Ablesegenauigkeit auch eine solche der Zielgenauigkeit, also der Fernrohrvergrösserung fordert, welche längere Fernröhren, und damit einen kräftigeren Unterbau bedingt.

Die Bezifferung richtet sich nach dem Gesichtsfeld der Ablesevorrichtung, weil stets zwei Ziffern gleichzeitig sichtbar sein sollen und ist in Intervallen von 1^0 , oder 5^0 , oder 10^0 durchgeführt. Die Unterscheidung der Zwischenteile wird durch wechselnde Strichlängen erleichtert.

Alhidade.

3. Die um eine vertikale Achse drehbare „Alhidade“ (Zeiger) trägt die Ablesevorrichtung, sowie zumeist eine Dosenlibelle. Auch die Zielvorrichtung und eventuell weitere Libellen sind durch Vermittlung der Fernrohrträger auf ihr aufgebaut. Um letzteres zu ermöglichen, ist sie zur Voll-, oder durchbrochenen Scheibe ausgebildet.

Fig. 205.



(Werden die Ablesevorrichtungen, deren in der Regel zwei einander gegenüberstehend angeordnet werden, durch Nonius gebildet, so setzt man diese etwas tiefer als den Teilkreis, weil, zumal bei starker Lupenvergrösserung, ein an sich kleiner und für die Bewegung nötiger Abstand beider Teilungen als störende Klaffung empfunden würde. Infolge dieser Senkung projiziert sich zwar die Limbusteilung stets auf den Nonius, s. Pfeilrichtung in Fig. 205, andererseits erhalten aber Beobachter mit verschiedener Augstellung trotz unveränderter gegenseitiger Lage der Teilungen verschiedenere Ableesungen. Wechselnde Tiefe des Nonius bedingt ferner scheinbare Änderung der Noniuslänge, also mangelnde Übereinstimmung von Anfangs- und Endstrich.)

beobachtet mit verschiedener Augstellung trotz unveränderter gegenseitiger Lage der Teilungen verschiedenere Ableesungen. Wechselnde Tiefe des Nonius bedingt ferner scheinbare Änderung der Noniuslänge, also mangelnde Übereinstimmung von Anfangs- und Endstrich.)

Je kürzer der Nonius, um so bequemer die Ablesung, um so grösser aber auch bei gleicher Limbusteilung die Noniusangabe.

Je stärker die Lupenvergrößerung, um so kleiner kann umgekehrt die Noniusangabe gehalten werden. Um so länger ist aber bei bestimmter Limbusteilung der Nonius und um so kleiner das Gesichtsfeld der Lupe, also die Bequemlichkeit und Geschwindigkeit der Ablesung.

Normalerweise beträgt die Noniuslänge 20 bis 30°, sie geht aber bei weit getriebener Limbusteilung oder geringer Ablesegenauigkeit wohl auch bis auf 6° herab.

Die Noniusangabe bewegt sich zwischen 10" und 1' a. T., die zugehörige lineare Bogenlänge (Unterschied eines Limbus- und eines Noniusteils) zwischen 1 und 20, im Mittel 5 Tausendstelmillimetern.

Nimmt man, wie oben (S. 306), einen Breitenunterschied von 0,015 mm als noch mit freiem Auge wahrnehmbar an, so erfordert also die lineare Teillänge von 5 Tausendstelmillimeter eine 3fach vergrößernde Lupe.

4. Die auf der Alhidade ruhenden Träger T dienen zur Auf-^{Träger.}lage der Horizontal-, oder Kippachse des Fernrohrs und müssen,

wenn mit „Kompensation“ gemessen und das Fernrohr nicht exzentrisch aufgehängt werden will, so hoch sein, dass man letzteres „durchschlagen“ kann. Sie müssen aber auch dem bei Drehung der Alhidade auf sie ausgeübten Druck ohne elastische, oder gar dauernde Lageveränderung widerstehen können. Damit beim Kippen des Fernrohrs keine andere, als vertikale Bewegung eintritt, soll die Kippachse beiderseits nur in zwei Punkten aufruhen. Zu diesem Zweck endigen die Träger in y-förmigen Lagern (s. Fig. 206) mit wiegenartigen Auflagerflächen. Zur Regulierung der gegenseitigen Höhe beider Lager bestehen entweder beide Träger samt ihrer (zuweilen schalenartigen) Verbindung aus einem einzigen Stück (s. Fig. 201), dessen Befestigung auf der Alhidade mit Justierschrauben veränderlich bewirkt ist, oder einer von ihnen endigt (wie in Fig. 199 oder 206 bzw. 207 gezeigt) so, dass dem entsprechenden Auflagerpunkt der Kippachse kleine Höhenänderungen erteilt werden können.

Fig. 206.

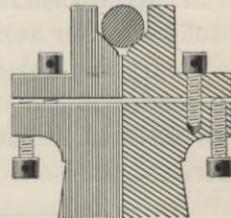
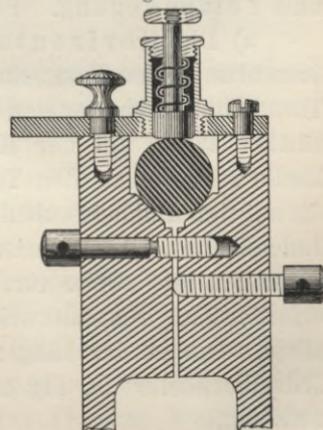


Fig. 207.



Kippachse.

5. Die Horizontal-, oder Kippachse K (s. Fig. 199 und 201) ist ein aus hartem Metall hergestellter Zylinder, welcher in der Mitte eine ringartige Öffnung zeigt. In diese wird das

Fernrohr.

6. Fernrohr F (s. § 36) eingeschoben oder eingeschraubt und in dieser Lage durch Querschrauben gesichert. (Bei etwaiger Lockerung würde ein seitlich ausgeübter Druck auf das Fernrohr Winkelfehler erzeugen, was bei der Messung zu beachten ist.) Senkrecht zur Kippachse und starr mit ihr verbunden ist bei Instrumenten, welche zur Messung von Vertikalwinkeln dienen sollen:

Höhenkreis.

7. der „Höhen-, oder Vertikalkreis“ H, welcher jede Kippbewegung des Fernrohrs mitmacht und eine Kreisteilung trägt, wie der horizontale Limbus. Mittelpunkt dieser Teilung ist der Schnittpunkt der Kippachse mit der Fläche des Höhenkreises.

Diese Einrichtung bedingt den für die Teilungsbezeichnung wesentlichen Unterschied, dass, während, bei der Messung von Horizontalwinkeln der Zeiger sich am feststehenden Teilkreis, sich bei der Vertikalwinkelmessung der Teilkreis am feststehenden (mit dem Träger verbundenen) Zeiger vorbeibewegt. Will man daher die Höhenwinkel wie die Horizontalwinkel rechtsläufig messen, so muss der Höhenkreis linksläufig beziffert sein. Da die Höhenwinkel häufig schärfer verlangt werden, als die Horizontalwinkel, so muss entweder der Höhenkreis grösser sein, als der Horizontalkreis (was zu schwerfälligen und unschönen Instrumenten führt), oder es muss des ersteren Teilung und Ablesevorrichtung feiner sein, als die des Horizontalkreises. Diese Forderung ist bei den wenigsten Instrumenten erfüllt.

8. Vorrichtungen zur Horizontalstellung, Bremsung und Feinbewegung. Federung. Achsanordnung.

Horizontier-
vorrichtung.

a) Die Horizontalstellung, welche mittels der Stellschrauben S des Fussgestells erfolgt, wird geprüft durch die am Theodoliten angebrachten Wasserwagen W (s. Fig. 199 bis 201), nämlich 1. die auf der Kippachse ruhende „Reiter-, oder Stützlibelle“, 2. die an den Trägern befestigte „Trägerlibelle“, und 3. die auf der Alhidade ruhende, meist in Dosenform ausgeführte „Alhidadenlibelle“. Von diesen Libellen ist die erstere nur bei steilen Zielungen, die zweite nur beim Messen von Höhenwinkeln dringend erforderlich. Normalerweise genügt für Horizontalwinkel die dritte allein. Die in der Längsrichtung auf dem Fernrohr angebrachte „Nivellierlibelle“ (s. Fig. 201) findet nur bei Höhenmessungen Verwendung.

Brems- und
Feinbewe-
gungsein-
richtungen.

b) Einrichtungen zur Bremsung und Feinbewegung müssen überall da angebracht sein, wo zum Zweck feiner Messungen Instru-

mententeile um geringe Beträge aneinander zu verschieben und schärfer einzustellen sind, als es durch direkten Druck mit der Hand möglich ist. Dies trifft beim Theodoliten zu:

1) zwischen Träger und Höhenkreis, bezw. Fernrohr, 2) zwischen Limbus und Alhidade und bei Repetitionstheodoliten, noch 3) zwischen Fussgestell und Limbus.

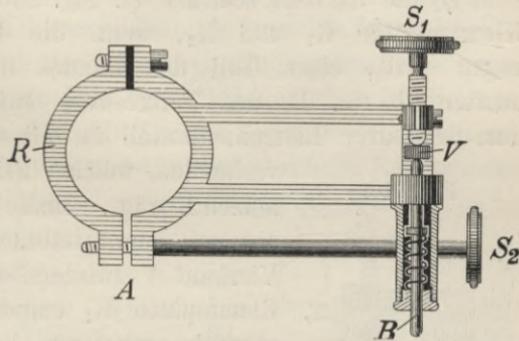
Gebremst wird mittels Klemmen; da aber nach erfolgter Bremsung noch kleine gegenseitige Verschiebungen der in Frage stehenden Instrumententeile möglich sein sollen, dürfen die Klemmen jene Instrumententeile nicht direkt, sondern nur durch Vermittlung eines mit der Bremsvorrichtung verbundenen Zwischenstücks zusammenschliessen, das die Feinbewegung regelt.

Von den in Frage kommenden Konstruktionen seien hier nur folgende drei am meisten verbreitete angeführt (vergl. im übrigen: Vogler, „Abbildungen geodätischer Instrumente“, Berlin, bei P. Parey):

a) die gespaltene, federnde Ringklemme (s. Fig. 208). Der Ring R umfasst lose von aussen die Büchse M des Fussgestells,

in deren Bohrung der drehbare Instrumententeil (die Limbus-, oder die Alhidadenachse) läuft. Ein kurzes, mit diesem drehbaren Instrumententeil starr verbundenes Vierkant V wird zwischen Schraube S_1 und Federbolzen B der Feinbewegungsvorrichtung hereingepresst, so dass diese

Fig. 208.



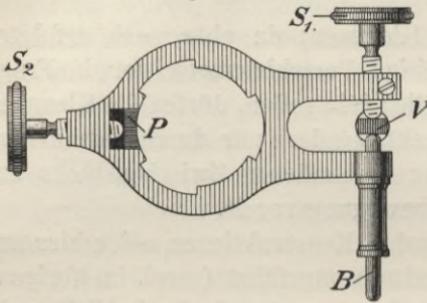
samt dem Ring jede dem beweglichen Instrumententeil gegebene Drehung mitmachen muss. Wird durch Anziehen der Bremschraube S_2 der Spalt A verkleinert, so presst sich die Klemme R gegen die Fussgestellbüchse — die gegenseitige Stellung dieser und des Vierkants V wird durch Vermittlung der Klemme und der Feinbewegungsvorrichtung festgehalten.

Eine Verschiebung von V und damit des das Vierkant tragenden drehbaren Instrumententeils ist nur noch mittels Benützung der Schraube S_1 und innerhalb der von der Feinbewegungseinrichtung gegebenen Grenzen möglich. Die letzte, genaue Einstellung erfolgt hiebei zweckmässig immer derart, dass das Vierkant V und durch dieses der Bolzen B entgegengesetzt der Richtung der Federkraft gedrückt wird. Diese Einrichtung hat den Nachteil, dass beim Lösen

und Bremsen die Schraube S_2 um mehrere Gänge gedreht werden muss. Bequemer ist in dieser Beziehung:

β) die starre Ringklemme (s. Fig. 209). Hier wird die Bremsung statt durch Schliessen eines gespaltenen Rings durch ein

Fig. 209.

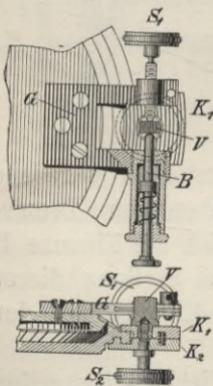


im starren Ring angeordnetes federndes Plättchen P erzielt, das beim Anziehen der Bremschraube S_2 in radialer Richtung gegen den feststehenden Instrumententeil gepresst wird. Dadurch wird umgekehrt auch der Ring fest an diesen Instrumententeil gedrückt. Die Feinbewegungsvorrichtung ist dieselbe wie unter (α). Die starre

Ringklemme hat den Nachteil, dass durch das Anziehen der Bremschraube S_2 leicht ein radiales Mitschleppen des Vierkants und damit ein seitliches Neigen der Drehachse erfolgt. Diesen Nachteil vermeidet:

γ) die R and k l e m m e (s. Fig. 210). Bei ihr pressen zwei Klemmplatten K_1 und K_2 , wenn die Bremschraube S_2 angezogen wird, einen Teil des Randes des feststehenden Instrumententeils (z. B. des Teilkreises) zwischen sich herein. Mit dem drehbaren Instrumententeil ist ein gabelförmiger Rahmen G

Fig. 210.



verbunden, welcher Feinschraube S_1 und Federbolzen B trägt. Beide fassen wieder ein — jetzt aber mit dem feststehenden Teil verbundenes — Vierkant V zwischen sich, das von der oberen Klemmplatte K_1 emporragt. Wird die Bremschraube angezogen, so bildet demnach der unbewegliche Instrumententeil (z. B. der Teilkreis) samt beiden Klemmplatten und dem Vierkant V eine starre Verbindung, gegen welche der Alhidadenkreis durch die an ihm befestigte Feinschraube S_1 und Federbolzen B — und zwar innerhalb der durch den Gabelrahmen G gegebenen Grenzen verschiebbar — festgehalten

wird. Diese Einrichtung hat folgende Nachteile: Das Anziehen der Bremschraube S_2 hat leicht eine Biegung der beiderseitigen Ränder, bezw. eine Neigung der Drehachse infolge Reibung beim Herabziehen der oberen Klemmplatte samt dem Vierkant V zur Folge. Auch erzeugen Schmutz und verharztes Öl in der unteren nutenförmigen Führung des feststehenden Instrumentenrandes, sowie eine etwaige

geringe Verdrehung des Klemmplättchens K_2 unter Umständen Stauchungen, welche zu Messungsfehlern Veranlassung geben können.

Die beiden Einrichtungen (α) und (β) sind im allgemeinen der Einrichtung (γ) vorzuziehen, weil bei ihnen die angedeuteten schädlichen Wirkungen weniger stark in die Erscheinung treten.

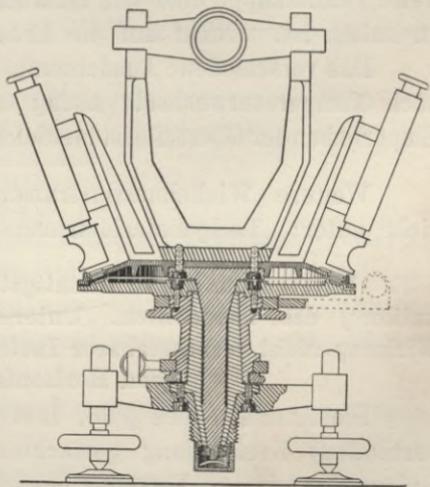
c) *Federung.* Die Drehachsen der Limbus und der Alhidade haben je nach ihrer Anordnung ein grösseres, oder geringeres Gewicht zu tragen. Infolge des hiedurch hervorgerufenen Drucks nach unten würden sich die Achsen beim Mangel von Gegenvorkehrungen im Laufe der Zeit in ihre Lager einbohren, wodurch nicht nur eine Vertiefung der Alhidade samt Nonius (vergl. S. 312—313), sondern auch erschwerte Drehung entstände. Diesem Einbohren und den nachteiligen Folgen beschädigter Drehachsen wird entgegengewirkt, indem man letztere aus besonders hartem Metall (Stahl, Rotguss) herstellt, die Reibungsflächen nicht auf die ganze Konuslänge erstreckt und einen Teil des Drucks durch Einschaltung von Federn aufhebt. Die Art dieser Federung ist, namentlich bei Repetitionstheodoliten, von der Achsanordnung (vergl. auch Vogler, „Abbildungen etc.“) abhängig. Die verbreitetste Achsanordnung ist die Reichenbachsche, bei welcher die aussen konisch geschliffene Limbusachse in der Büchse des Fussgestells ruht, durch eine innere, ebenfalls konische Bohrung aber Raum gibt für die Aufnahme der Alhidadenachse (s. Fig. 180 und 199 für den einfachen, Fig. 179 für den Repetitionstheodoliten). Die Federung E (s. Fig. 179, 180 und 199) hat also beim Repetitionstheodoliten einerseits die Fussgestellbohrung und andererseits die Bohrung der Limbusachse, beim einfachen Theodoliten nur die erstere zu entlasten. Die Reichenbachsche Achsanordnung ermöglicht zwar eine gedrungene Form des Instruments, aber es ist sehr schwer, den äusseren und den inneren Konus des Limbuszapfens achsengleich zu machen.

Einfacher wird die Federung bei der französischen Achsanordnung (schematisch dargestellt in Fig. 211), bei welcher die Büchse des Fussgestells für die Aufnahme der Alhidadenachse konisch durchbohrt, die Fläche zur Führung der Limbusachse ihr

Federung.

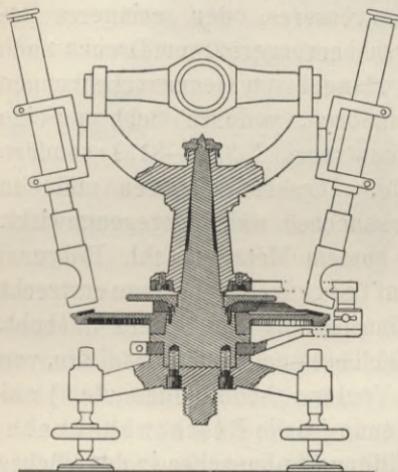
Achsanordnung.

Fig. 211.



dagegen aussen angeschliffen ist. Diese Anordnung hat jedoch den Nachteil, dass, falls die äussere Führungs- und die innere Bohrungsfläche des Fussgestells nicht achsgleich sind (s. Fig. 231), die gemeinsame Drehung von Limbus und daran festgebremster Alhidade nicht erfolgen kann ohne Stauchungen und Änderungen ihrer gegenseitigen Stellung.

Fig. 212.



Verwendet man eine Winkelbeobachtungsmethode, bei welcher das Durchschlagen des Fernrohrs ohne Nachteil durch das Umlegen ersetzt werden kann (Richtungsbeobachtung s. § 42), so können Limbus und Alhidade einen einzigen Achszapfen erhalten, womit sich Führung und Federung wesentlich vereinfacht. Diese Achsanordnung verwenden (Repsold, Pistor und Martins u. a., s. Fig. 212).

Ausserordentlich wichtig ist es, die Berührungsflächen der Achsen gegen die ritzende Wirkung von

Staub und feinen Sandkörnern und gegen Rost zu schützen.

Instrumenten-
behandlung.

Nach Benützung bei windigem oder regnerischem Wetter, wie auch nach längeren Gebrauchsperioden sind diese Teile daher gründlich zu reinigen und mit einem Fetthauch zu versehen.

Über die Dauer von Beobachtungspausen wird eine genügend weite Schutzkappe über das Instrument gestreift, die möglichst rein zu halten ist. (Nicht auf die Erde legen!)

Das verschiedene Ausdehnungsvermögen der Metallteile bewirkt nach Temperaturwechseln häufig erschwerte Achsdrehung. Durch Emporheben der Oberteile ist hier leicht abzuhelfen. (Weiteres s. S. 347.)

Weitere Winkelmessinstrumente, — Messtisch, Bussole — siehe unter: „Tachymeterinstrumente“.

§ 39. Untersuchung und Richtigstellung („Justierung“, „Rektifikation“) des Theodoliten. Untersuchung und Eliminierung der Wirkung nicht verbesserbarer Instrumentenfehler auf die Messung von Horizontalwinkeln.

An den Theodoliten zu stellende Forderungen.

Die Annahme des § 38, dass die auf der horizontalen (bezw. vertikalen) Kreisteilung gemachten Ablesungen die tatsächliche Grösse der mit dem Fernrohr bewirkten Horizontal- (bezw. Vertikal)-drehung, den Winkelwert anzeigen, stützt sich auf die Voraussetzung, dass 1. die Kippbewegung des Fernrohrs bei jeder Zielung

in vertikaler Ebene erfolgt, und dass 2. der die Ablesungen liefernde Teilkreis nicht bloss eine während seiner Verwendung horizontale (bezw. vertikale) Lage hat, sondern auch eine richtige Teilung trägt, deren Mittelpunkt mit dem Schnittpunkt zwischen Teilkreisfläche und Drehachse zusammenfällt. Der erste Teil dieser Voraussetzung ist erfüllt, wenn während der Beobachtung die vertikale Drehachse (beim Repetitionstheodoliten die beiden Drehachsen) genau vertikal, die Kippachse horizontal und die Ziellinie (Kollimationsachse) senkrecht zur Kippachse gerichtet sind; der zweite Teil, wenn Horizontalkreis- und Nonienmittelpunkt, sowie Schnittpunkt von Ziel-, Kipp- und Vertikalachse bei horizontiertem Instrument in einer Vertikalen (bezw. wenn Kippachse und Mittelpunkt der Vertikalkreis- teilung und der zugehörigen Nonien in einer Horizontalen) liegen und dabei die Teilungen selbst richtig ausgeführt sind.

Das Winkelmessinstrument muss demnach folgenden Anforderungen genügen:

Zu 1. a) Die vertikale Drehachse (Vertikalachse, Stehachse) sei senkrecht zur Libellenachse gerichtet.

b) Die Ziellinie stehe senkrecht zur Kippachse.

c) Die Kippachse „ „ „ Vertikalachse.

Um das Anzielen nicht immer genau mit dem Kreuzungspunkt der Fäden bewirken zu müssen, und um leicht feststellen zu können, ob die angezielten Stäbe etc. vertikal stehen, fügen wir als Bequemlichkeitsforderung noch bei:

d) Der Vertikalfaden des Fernrohrs soll in der Kippebene liegen.

Zu 2. e) Vertikalachse, Kippachse, Ziellinie müssen sich in einem Punkt schneiden.

f) Teilkreis- und Nonienmittelpunkt müssen in der verlängerten, vertikalen (bezw. horizontalen) Drehachse liegen.

Von den Teilkreisen verlangen wir:

g) Dienachden verschiedenen Teilstrichengezogenen Teilkreisradien müssen mit dem Nullradius die durch Bezifferung und Strichlängen jeweils angezeigten Winkel einschliessen.

h) Ihre Ebenen sollen senkrecht stehen auf den zugehörigen Drehachsen.

Endlich sollen im Falle der Verwendung eines Repetitionstheodoliten:

i) Limbus- und Alhidadenachse zusammenfallen.

Sind nicht alle Anforderungen a bis i bei einem Theodoliten von vornherein erfüllt, so lässt sich das Instrument innerhalb gewisser

Grenzen wenigstens bezügl. einzelner von ihnen (nämlich der Abweichungen gegen die Forderungen a bis d) durch den Techniker selbst verbessern („justieren“, „rektifizieren“). Abweichungen gegen die Forderungen e bis i lassen sich nicht durch Justierung wegbringen. Ihre Wirkung muss durch geeignete Beobachtungsverfahren eliminiert („kompensiert“), oder wenigstens eingeschränkt werden.

Untersuchung und Richtigstellung des Theodoliten in bezug auf die verbesserbaren Fehler.

Für die Reihenfolge der Untersuchung und Richtigstellung gilt die selbstverständliche Forderung, dass eine bereits erfolgte teilweise Justierung durch den weiteren Verlauf der letzteren nicht wieder aufgehoben werden darf. Diese Forderung führt zur Unterscheidung zweier Theodolitkonstruktionen, nämlich

Konstruktion I: Libelle fest mit der Alhidade verbunden (Dosenlibelle, Trägerlibelle);

Konstruktion II: Libelle abnehmbar und auf der Kippachse umsetzbar (Reiterlibelle).

Viele Instrumente besitzen beide Arten von Libellen. Bei ihnen erfolgt die Richtigstellung mit der empfindlichsten von ihnen.

Nach ihrer Durchführung und erfolgter Horizontierung des Instruments werden zum Schluss dann die anderen Libellen mittels ihrer Korrektionsvorrichtungen zum Einspielen gebracht.

Libelle fest
auf der
Alhidade.

Konstruktion I: Libelle fest mit der Alhidade verbunden. (Dosenlibelle, Trägerlibelle).

Wir beginnen mit der Forderung:

a) Vertikale Drehachse \perp Libellenachse.

Vertikal-
achse \perp Li-
bellenachse.

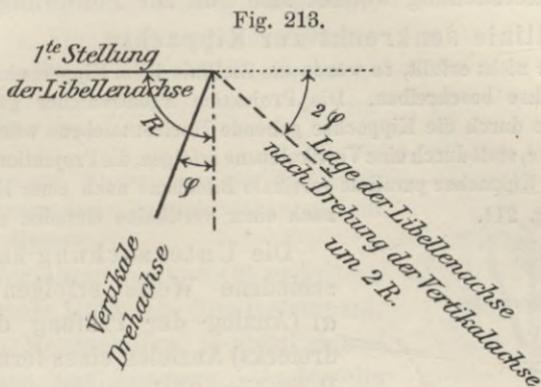
Wäre die Anforderung nicht erfüllt, so würde die um die Vertikalachse gedrehte Libellenachse eine Kegelfläche beschreiben, von der höchstens zwei Mantellinien horizontal gerichtet sein könnten; d. h. die Libelle könnte nur in zwei Lagen einspielen, und müsste in jeder anderen Lage einen Ausschlag zeigen. Würde man durch entsprechende Stellung der Drehachse mittels der Stellerschrauben dafür sorgen, dass die Richtungen dieser beiden horizontalen Mantellinien senkrecht aufeinander stehen, so würde sich der Maximalausschlag nach einer Drehung um $1\frac{1}{2}$ R (genähert um 2 R) von jeder dieser beiden Grundstellungen aus, zeigen.

Die Untersuchung geschieht daher wie folgt:

Allgemeine Horizontalstellung (Einspielen der Libelle in zwei senkrecht zu einander stehenden Lagen zuerst über zwei Stellerschrauben, dann über die dritte) mittels der Fussgestellschrauben, sodann Drehung um die Vertikalachse um 2 R. Der sich zeigende Ausschlag von n Teilstrichen entspricht dem doppelten Fehler der

Achsenstellung (Fehler $\varphi = \frac{n \cdot \varepsilon}{2}$ wenn $\varepsilon =$ Libellenempfindlichkeit, s. Fig. 213), ist also zur Hälfte an den Korrektionsschrauben der Libelle zu verbessern.

Zu grösserer Sicherheit ist die Untersuchung nach erfolgter Berichtigung zu wiederholen, nachdem die allgemeine Horizontalstellung des Instruments wie



zuvor mit der jetzt vorläufig berichtigten Libelle wiederhergestellt ist. Damit und mit der Verbesserung an den Korrektionsschrauben wird fortgefahren, bis die Libelle bei Drehung um $2R$, also auch im ganzen Kreis herum, keinen verbesserten Ausschlag mehr zeigt.

Weichen beim Repetitionstheodoliten die Richtungen von Limbus- und Alhidadenachse voneinander ab (Widerspruch gegen Anforderung i), so zeigt sich dies bei der Reichenbachschen Achsanordnung, wenn zu vorstehender Berichtigung die eine von beiden Achsen benützt wurde, dadurch, dass bei Horizontaldrehung unter Benützung der anderen Achse die berichtigte Libelle wieder ausschlägt. Die französische Achsanordnung lässt vorhandene Divergänz der beiden Vertikalachsen nicht direkt erkennen.

Eine Verbesserung dieses Achsenfehlers hat durch den Mechaniker zu erfolgen. Solange sie nicht bewirkt ist, muss man das Beobachtungs- und Horizontierverfahren der erkannten Instrumenteneigenschaft anpassen (s. Kapitel 10).

Wir wenden uns nun zur Forderung:

d) Vertikalfaden in der Kippebene.

Zum scharfen Anzielen eines fernen Punktes oder Gegenstands mit dem Fernrohr benützen wir nach § 36 das Fadenkreuz und zwar verstehen wir unter der „Ziellinie“ die Verbindungslinie des optischen Mittelpunktes vom Objektiv mit dem Kreuzungspunkt der beiden Fäden. Sie zum Zusammenfallen (zur Kollimation) bringen mit der durch den Zielpunkt, den optischen Mittelpunkt des Objektivs und das Bild bestimmten Geraden heisst: „Anzielen des Gegenstands“. Nun ist beim Einstellen des Fernrohrs die Beschränkung gerade auf den Fadenkreuzungspunkt schwerfällig. Wir ziehen daher, wie schon oben angedeutet wurde, vor, irgend einen in seiner Nähe befindlichen Punkt des Vertikalfadens mit dem anzuzielenden Gegenstand zur Deckung zu bringen. Soll dies zulässig sein, so muss aber dieser Faden während der Zielung vertikale Lage haben, oder in der Kippebene liegen. Daher:

Untersuchung: Anzielen eines festen Punktes (Blitzableiter-

spitze etc.) mit dem Kreuzungspunkt der Fäden (bei nicht notwendig horizontiertem Instrument). Kippen nach oben und unten je um das halbe Gesichtsfeld. Der Vertikalfaden darf den angezielten Punkt nicht verlassen.

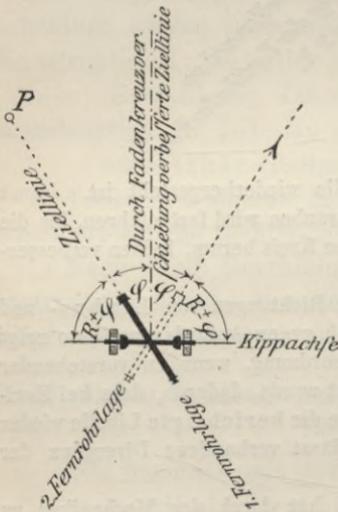
Etwa nötige Verbesserung durch Drehen des Okularkopfes. Die Untersuchung wendet sich nun zur Forderung:

b) Ziellinie
⊥ Kippachse.

b) Ziellinie senkrecht zur Kippachse.

Wäre sie nicht erfüllt, so würde die Ziellinie beim Kippen eine Kegelfläche um die Kippachse beschreiben. Die Projektion irgendwelcher geneigten Zielrichtung auf die durch die Kippachse gehende Horizontalebene würde also durch diese Kegelfläche, statt durch eine Vertikalebene erfolgen, die Projektionsfläche selbst würde eine zur Kippachse parallele vertikale Bildebene nach einer Hyperbel, statt nach einer vertikalen Geraden schneiden.

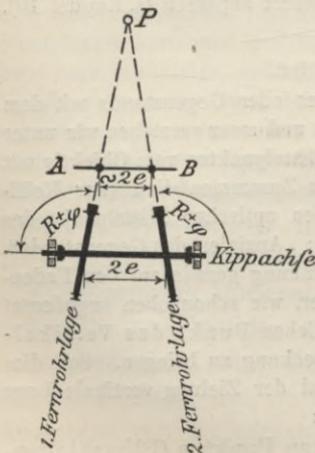
Fig. 214.



Die Untersuchung kann auf verschiedene Weise erfolgen, nämlich:

α) (Analog der Prüfung des Schiebendreiecks) Anzielen eines fernen Punktes P (s. Fig. 214), alsdann vorsichtiges Ausheben der Kippachse und Wiedereinlegen unter verwechselter Benützung der Lager: „Umlegen“. Der Punkt P muss wieder durchs Fadenkreuz gedeckt sein. Eine etwaige Abweichung entspräche dem doppelten Fehler 2φ des Winkels zwischen Ziel- und Kippachse, und wäre durch seitliches Verschieben des Diaphragmas (Fadenkreuzträgers) mittels dessen Korrektionschrauben bis zur Mitte der Abweichung wegzubringen.

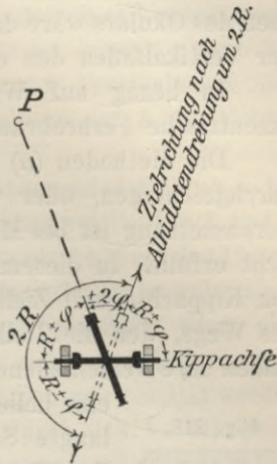
Fig. 215.



Auch hier wird man die Untersuchung so lange wiederholen, bis sich keine Abweichung mehr zeigt. Voraussetzung hiebei ist, dass die Zielachse die zwischen beiden Fernrohrträgern liegende Kippachsenstrecke halbiert. Wäre dieses (beabsichtigter- oder unbeabsichtigterweise) nicht der Fall, so hätte die vorstehende Justierung den Winkel zwischen Kippachse und Ziellinie nicht zu einem Rechten gemacht. Den doppelten Exzentrizitätsbetrag $2e$ könnte man dann direkt auf einem in der Nähe des Instruments senkrecht zur Zielrichtung aufgelegten Maßstäbchen A B ablesen (s. Fig. 215) und bei der endgültigen Herstellung des verlangten rechten Winkels berücksichtigen.

Verfahren β): Anzielen eines fernen Punktes P. Durchschlagen des Fernrohrs und Drehen der Alhidade um $2R$ (bis der Zeiger den „Gegenpunkt“ der ursprünglichen Einstellung zeigt, s. § 40.) P muss wieder vom Fadenkreuz gedeckt sein. Etwaige Abweichung entspräche dem doppelten Fehler 2φ (s. Fig. 216) und wäre wieder zur Hälfte mittels der Verbesserungsschraubchen des Diaphragmas wegzuschaffen.

Fig. 216.



In bezug auf Wiederholung des Verfahrens und etwaige exzentrische Fernrohraufhängung gilt das unter (α) Gesagte.

Die Verfahren (α) und (β) erfordern nur eine sichere Unterlage fürs Instrument, aber keinen Messgehilfen, ja nicht einmal das Verlassen des Zimmers. Andererseits fordert das Verfahren (α), dass dabei die auf die Kippachse drückenden und Reibung verursachenden Bügel ausser Wirkung gesetzt werden. Dies ist unangenehm bei mangelnder Gleichgewichtslage des Fernrohrs in den Trägern. Ebenso bildet beim Verfahren (β) die Notwendigkeit, den Gegenpunkt eines Punktes der Kreisteilung zu bestimmen, eine Erschwerung. Deshalb kann sich unter Umständen folgendes

Fig. 217.

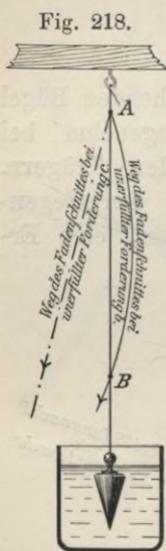
Verfahren (γ) empfehlen, das allerdings die Instrumentenaufstellung im Gelände voraussetzt: Anzielen eines fernen Punktes P (s. Fig. 217), Durchschlagen des Fernrohrs und Einweisen eines Punktes P_1 (bezw. Ablesen auf einem quer gelegten Massstab). Wiederholte Anzielung von P in der durchgeschlagenen Fernrohrlage durch Alhidatendrehung um die Vertikalachse und nochmaliges



Durchschlagen des Fernrohrs (Wiederherstellung der ersten Fernrohrlage). Der Punkt P_1 muss wieder vom Vertikalfaden gedeckt sein. Die etwaige Abweichung $P_2 P_1$ des letzteren von P_1 entspräche dem vierfachen Fehler. Mittels der Verbesserungsschraubchen des Okulars wäre daher das Diaphragma so zu verschieben, dass der Vertikalfaden den ersten Viertelpunkt von P_2 gegen P_1 deckt.

In bezug auf Wiederholung des Verfahrens und etwaige exzentrische Fernrohraufhängung gilt das unter (α) Gesagte.

Die Methoden (α) bis (γ) setzen voraus, dass das Fernrohr durchgeschlagen, oder wenigstens umgelegt werden kann. Diese Voraussetzung ist bei Messtischen und Tachymetertheodoliten häufig nicht erfüllt. In diesem Fall muss die verlangte Senkrechtstellung von Kippachse und Ziellinie geprüft werden durch: δ) Verfolgung des Wegs, den die Ziellinie beim Kippen des Fernrohrs beschreibt. Bilden ihre verschiedenen Lagen eine Ebene, d. h. gehen sie durch



eine beliebige, z. B. vertikale Gerade, so ist die verlangte Senkrechtstellung beider Achsen vorhanden. Zur Untersuchung, ob dies zutrifft, sorgt man mit Benützung der Fussgestellschrauben dafür, dass der Fadenkreuzungspunkt des bei festgebremster Vertikalachse gekippten Fernrohrs zwei Punkte A und B mit grossem Höhenunterschied einer Geraden (Hauskante, gespannter Faden etc.) deckt. Alsdann verfolgt man, durchs Fernrohr blickend, ob dies während dessen Kippung auch bei allen andern Punkten der Geraden der Fall ist. Etwaige wachsende und dann wieder abnehmende Abweichung nach Fig. 218 würde (vergl. Einleitung zu b) die mangelnde Senkrechtstellung von Ziellinie und Kippachse beweisen und wäre — ohne Rücksicht auf etwaige exzentrische Fernrohraufhängung — durch versuchsweise Verschiebung des Diaphragmas mittels seiner horizontal wirkenden Verbesserungsschraubchen wegzubringen.

Als letzte folgt die Untersuchung in bezug auf die Forderung:

c) Kippachse
 \perp Vertikal
 achse.

c) Kippachse senkrecht zur Vertikalachse. Die beim Kippen von der Ziellinie beschriebene Ebene muss während der Messung vertikal sein. Dies ist nur der Fall, wenn die Kippachse horizontal, d. h. senkrecht zu der mittels der Wasserwagen vertikal gerichteten Stehachse ist.

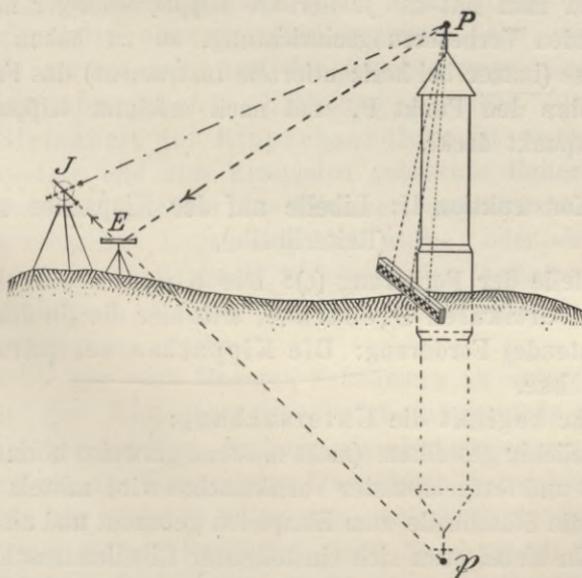
Verfahren α) der Untersuchung: Nachdem das Instrument horizontalisiert ist, zielt man einen hochgelegenen Punkt A (s. Fig. 218) einer vertikalen Geraden (Faden mit einem — zur Dämpfung der

Pendelbewegungen — in Wasser gehängten Gewicht) an. Verlässt der Vertikalfaden des Fernrohrs beim Kippen diese Gerade und zwar mit der Grösse der Kippbewegung stetig wachsend, so weicht die dabei wirksame Dreh-, nämlich die Kippachse, von der wagrechten Lage ab und muss mittels der Verbesserungsschrauben des einen Lagers, bezw. der Träger, in diese gebracht werden. Dies ist erreicht, wenn bei horizontiertem Instrument und festgebremster Vertikalachse der Fadenkreuzungspunkt nach erfolgter Einstellung auf A die Vertikale A B beim Kippen nicht verlässt. —

Der vorgezeigte, abgesehen von der Instrumentenstellung — Instrument hier horizontiert, dort Ziellinie durch zwei Punkte A und B gehend — mit der Methode b, δ übereinstimmende Weg der Untersuchung, welcher das Aufhängen eines Senkels verlangt, ist unbequem, weil der Senkelfaden durch Luftströmungen beeinflusst wird, und weil bei starker Kippbewegung die Zielweiten sich derart ändern, dass zur Feststellung der Fadendeckung der Okularauszug benützt werden muss. Diese Nachteile werden vermieden durch das Verfahren

β) der Verwendung einer horizontalen spiegelnden Ebene (See; Gefäss mit spiegelnder Flüssigkeit (z. B. reiner Tinte); mittels Libelle horizontierter Spiegel, d. h. „künstlicher Horizont“). Der von einem hochgelegenen Punkt P (s. Fig. 219) ausgehende, auf eine

Fig. 219.



spiegelnde horizontale Ebene E treffende, liegt mit dem von ihr zurückgeworfenen, ins Auge, oder ins Fernrohr des horizontierten Instru-

ments gelangenden Lichtstrahl EJ in einer vertikalen Ebene (Einfallslot vertikal). Deckt daher das Fadenkreuz nach entsprechender Kippung des Fernrohrs bei festgebremster Drehachse und horizontiertem Instrument sowohl den Punkt P als sein Spiegelbild \mathfrak{P} , so ist die Kippbewegung vertikal, und die Kippachse horizontal, d. h. senkrecht zur Vertikalachse. Wird dabei einer der Punkte P oder \mathfrak{P} vom Fadenkreuz nicht gedeckt, so muss wie bei (α) das justierbare Fernrohrlager mittels der entsprechenden Verbesserungseinrichtung entsprechend gehoben oder gesenkt werden.

Die beiden Verfahren (α) und (β) verlangen keine durchschlagbare Fernröhre, auch ermöglicht (β) die Benützung einer sehr starken Kippbewegung. Doch stehen nicht immer die dabei benützten Hilfsmittel zur Verfügung. Man kann dann, durchschlagbares, oder wenigstens umlegbares Fernrohr vorausgesetzt,

γ) den hochgelegenen Punkt P bei horizontiertem Instrument mittels Kippbewegung des Fernrohrs auf einen unten quer gelegten Massstab in beiden Lagen des Fernrohrs (Alhidade um $2R$ gedreht, womit die Kippachsenlager verwechselte Stellung einnehmen) herunterprojizieren. Fallen beide Projektionen zusammen, so war die Kippachse horizontal, also senkrecht zur Vertikalachse. Andernfalls halbiert die horizontal projizierende Ebene des Zielstrahls JP die Verbindungsstrecke beider erhaltenen Projektionspunkte, und man hat das justierbare Kippachsenlager mittels der entsprechenden Verbesserungseinrichtung, so zu heben bzw. zu senken, dass (immer bei horizontiertem Instrument) das Fadenkreuz des Fernrohrs den Punkt P , und nach erfolgter Kippung jenen Halbierungspunkt deckt.

Theodolit-Konstruktion II: Libelle auf der Kippachse umsetzbar (Reiterlibelle).

An Stelle der Forderung (c): Die Kippachse stehe senkrecht zur vertikalen Drehachse, tritt hier die (in der Wirkung gleichbedeutende) Forderung: Die Kippachse sei parallel der Libellenachse.

Kippachse
parallel
Libellen-
achse.

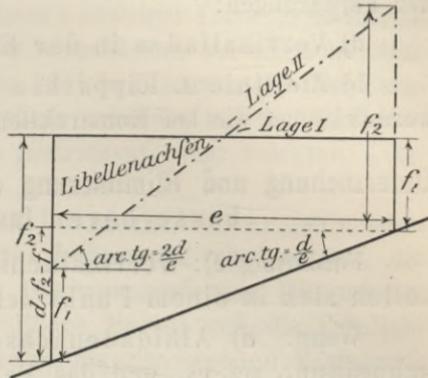
Mit ihr beginnt die Untersuchung:

Bei beliebig gestelltem (nicht notwendigerweise horizontiertem) Instrument und festgebremster Vertikalachse wird mittels der Stellschrauben die Stützlibelle zum Einspielen gebracht und alsdann umgesetzt. Ein hiebei etwa sich einstellender Libellenausschlag würde (wie S. 29) Ungleichheit der Libellenfüsse und zwar (wie dort und in Fig. 220 zu ersehen) in ihrem doppelten Betrag anzeigen und wäre zur Hälfte mittels deren vertikal wirkenden Korrektions-

schrauben (zur andern Hälfte durch Veränderung des Lagers mittels der Fussgestellschrauben) wegzubringen.

Um schädliche Spannungen zu vermeiden, sind die Ausschnitte der Stützen, mittels derer das Aufsetzen der Reiterlibelle auf der Kippachse erfolgt, grösser, als nötig. Dadurch werden aber kleine gleitende Bewegungen der aufgesetzten Libelle parallel und senkrecht zur Kippachse möglich. Hierbei darf sich kein Libellenausschlag zeigen. Etwaige Ausschläge beim Gleiten parallel zur Kippachse würden auf Unregelmässigkeiten der letzteren schliessen lassen, die durch den Mechaniker zu entfernen wären. Beim Drehen der Libelle senkrecht zur Kippachse etwa auftretende Ausschläge würden windschiefe Lage des Libellenkörpers innerhalb der Libellenfüsse beweisen und durch Benützung der horizontal wirkenden Verbesserungsschrauben der Libelle zu entfernen sein.

Fig. 220.



Durch die geschilderten Untersuchungen und Verbesserungen wurde die obere Mantellinie der Kippachse parallel zur Libellenachse gerichtet, nicht aber die jeweils untere, auf welcher die Wälzung bei der Kippbewegung erfolgt. Etwaige Divergenz beider Mantellinien, d. h. ungleiche Dicke der Kippachse, würde trotz horizontaler oberer, eine geneigte Lage der unteren Mantellinie verursachen, und der Kippbewegung eine von der Vertikalen abweichende Richtung verleihen. Die hiernach nötige Gleichheit der Kippachsendicke ist vorhanden, wenn die aufgesetzte und zum Einspielen gebrachte Reiterlibelle auch wieder einspielt, nachdem das Fernrohr umgelegt (die Kippachse in die verwechselten Lager eingelegt) wurde, oder wenn bei einspielender Reiterlibelle nach Erfüllung der Anforderung (b) die bei Konstruktion I gezeigten Untersuchungsverfahren α , β , oder γ keine Abweichungen ergeben.

Die — nur nach längeren Zeiträumen zu untersuchende — Gleichheit der Kippachsendicke wäre nötigenfalls durch den Mechaniker herzustellen. So lange sie nicht erzielt ist, müsste das Instrument wie der Konstruktion I angehörig (bei welcher die Kippachsendicke gar nicht in Frage kam), behandelt werden. Es wäre also die umsetzbare Reiterlibelle, gleich als ob sie mit der Alhidade fest verbunden wäre, immer nur in einer und derselben Lage zu benützen.

Nun folgt die Untersuchung der Forderung

a) Vertikalachse \perp Libellenachse.

a) Vertikalachse \perp Libellenachse, genau, wie unter Ia gezeigt. Eine etwaige Abweichung dürfte aber nicht wie dort an den Verbesserungsschrauben der Libelle, sondern müsste an dem justierbaren Kippachsenlager berichtigt werden.

Die nun folgende Untersuchung und nötigenfalls — Erfüllung der Forderungen:

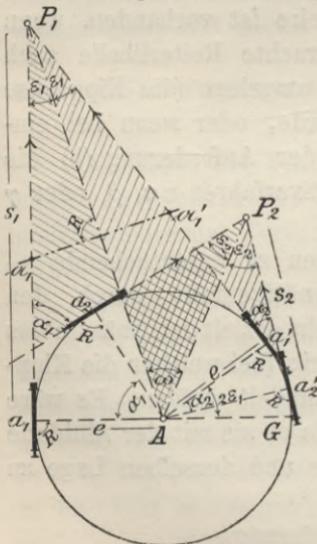
- d) Vertikalfaden in der Kippfläche und
 - b) Ziellinie \perp Kippachse
- werden genau wie bei Konstruktion I bewirkt.

Untersuchung und Eliminierung der Wirkung der nicht verbesserbaren Instrumentenfehler.

Forderung e): Vertikalachse, Kippachse und Ziellinie sollen sich in einem Punkt schneiden.

Wenn: α) Alhidadenachse und Ziellinie sich nicht schneiden, sei es, weil das Fernrohr, um keine allzu hohen Träger, oder um Raum für die Aufsetzung einer Bussole zu bekommen, mit Absicht seitlich aufgehängt ist, sei es unbeabsichtigterweise, so bildet die Gesamtheit aller Fernrohrlagen beim Drehen der Alhidade die Umhüllenden eines Kreises, um den Alhidadendrehpunkt A, dessen Durchmesser gleich der zweifachen Exzentrizität ($= 2e$) ist. Auf das Mass eines Höhenwinkels bleibt diese Exzentrizität ohne Einfluss, dagegen erhält man bei der Horizontalwinkelmessung, statt des zu messenden Winkels $\omega = \angle P_1 A P_2$ als Unterschied der beiden, beim Anzielen der Punkte P_1 und P_2 gemachten Ablesungen a_1 und a_2 den Winkel α_1 , welcher im allgemeinen nicht gleich ω ist. Wiederholt man die Messung mit durchgeschlagenem Fernrohr (wobei dieses auf die andere Seite des Exzentrizitätskreises zu liegen kommt), so erhält man als Unterschied der beiden Ablesungen a_1' und a_2' den Winkel α_2 und es ergibt sich aus den zwei, je durch gleichgerichtete Schraffur hervorgehobenen Scheiteldreieckspaaren in Fig. 221

Fig. 221.



so erhält man als Unterschied der beiden Ablesungen a_1' und a_2' den Winkel α_2 und es ergibt sich aus den zwei, je durch gleichgerichtete Schraffur hervorgehobenen Scheiteldreieckspaaren in Fig. 221

$$\alpha_1 + \varepsilon_1 = \omega + \varepsilon_2$$

$$\alpha_2 + \varepsilon_2 = \omega + \varepsilon_1 \quad \text{und durch Addition}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\omega \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

d. h. der Einfluss der Fernrohrexzen-

trizität auf die Horizontalwinkelmessung wird durch Messung in beiden Fernrohrlagen aufgehoben („kompensiert“).

In Rücksicht auf die mit dem Instrument auszuführende Aufgabe des Einweisens gerader Linien, wie auch für den Fall der Winkelmessung in nur einer Fernrohrlage (Tachymetrie) kann es wünschenswert sein, die lineare Grösse e etwaiger Fernrohrexzentrizität zu ermitteln. Zu diesem Zweck braucht man nur einen und denselben entfernten Punkt P_1 (s. Fig. 221) in beiden Lagen des Fernrohrs anzuzielen und bei jeder Zielung entweder auf dem Teilkreis, oder auf einem in der Nähe des Instruments quer gelegten Massstab abzulesen.

Ist keine Fernrohrexzentrizität vorhanden, so müssen beim ersteren Verfahren, justiertes Instrument vorausgesetzt, die beiden Ablesestellen a_1 und a_1' „Gegenpunkte“ sein (sie müssen mit der Alhidadenachse in einer Ebene liegen) und die Parallaxwinkel ε_1 sind gleich 0. Bei Anwendung des zweiten Verfahrens werden im Fall des Zutreffens der obigen Voraussetzung die Ablesungen a_1 und a_1' auf dem quer gelegten Massstab einander gleich.

Ist dagegen Fernrohrexzentrizität vorhanden, so zeigt sich deren absolute Grösse e bei der zweiten Untersuchungsart direkt: $2e \sim a_1' - a_1$. Bei Anwendung des zuerst gezeigten Verfahrens der Untersuchung wird die Ablesestelle a_1' des Teilkreises vom Gegenpunkt G zu a_1 um den Betrag $2\varepsilon_1$ abweichen. Man kann also $e = s_1 \cdot \frac{\varepsilon_1}{\rho}$ berechnen, sobald man ε_1 , d. h. sobald man den Gegenpunkt G zu a_1 kennt, dessen Lage sich bei Einstellung eines der beiden Noniennullpunkte auf a_1 ohne weiteres als Ort des Nullpunkts vom anderen Nonius ergeben würde, wenn diese beiden Nullpunkte mit der Alhidadenachse in einer Ebene lägen. In Fig. 222 sind z. B. die Punkte a_1' und a_1'' ebenso wie a_2' und a_2'' Gegenpunkte, trotzdem ihre Winkelentfernung auf dem Teilkreis mit dem Mittelpunkt T gemessen (infolge vorhandener Exzentrizität, s. S. 331), keineswegs $2R$ beträgt.

Diese Annahme ist aber keineswegs zulässig.

Liegen nun die Noniennullpunkte mit der Alhidadenachse nicht in einer Ebene, so findet man den Gegenpunkt eines Teilpunktes a , wenn man einen, dem halben Teilkreisumfang etwa gleichen (nämlich den zwischen beiden Noniusnullpunkten liegenden) Bogen von a_1 aus das eine Mal nach links, das andere Mal nach rechts auf dem Kreis um den Alhidadendrehpunkt A herumträgt (zuerst Nonius I, dann Nonius II auf a_1 einstellt), als Halbierungspunkt der beiden hiebei erhaltenen jenseitigen Ablesestellen.

Bestimmung
des Gegen-
punktes.

Beispiel: Gesucht der Gegenpunkt des Teilungsnullpunktes.

Erste	Einstellung	Non. I	auf	0	Ableseung	auf	Non. II	179° 59' 00"
Zweite	"	"	"	II	"	"	"	I 179° 58' 00"

Der Gegenpunkt des Teilungsnullpunktes ist $179^{\circ} 58' 30''$
 und nicht, wie es eigentlich der Fall sein sollte, $180^{\circ} 00' 00''$.

Wenn: β) Ziellinie und Kippachse sich nicht schneiden (erstere höher oder tiefer liegt, als letztere), so bleibt dies ohne Einfluss auf die Horizontalwinkelmessung. Für die Vertikalwinkelmessung bilden die verschiedenen Fernrohrlagen genau ebenso die Umhüllenden eines um den Schnittpunkt der Kippebene mit der Kippachse beschriebenen Kreises mit derselben, (durch Messung in zwei Fernrohrlagen kompensierbaren) Wirkung, wie unter (α) für die Horizontalwinkel gezeigt.

Wenn: γ) Vertikalachse und Kippachse sich nicht schneiden (letztere zu weit vorn, oder hinten lagert) so beschreibt die Kippachse bei der Drehung der Alhidade einen Kreis um die Achse der letzteren. Die Kippebenen gehen aber (wenn das Fernrohr nicht etwa nach Fall (α) seitlich verschoben ist) trotzdem sämtlich durch die Alhidadenachse. Also ist der Fehler auf die Horizontalwinkelmessung ohne Einfluss. Der durch die geringe Vor- bzw. Rückverlegung der Kippachse, also des Scheitels zu messender Vertikalwinkel bei diesen sich einstellende Fehler ist schon wegen seiner Geringfügigkeit unschädlich, wird aber überdies durch Messen in zwei Fernrohrlagen eliminiert, weil dabei die Kippachse das eine Mal ebensoweit vor, wie das andere Mal hinter dem eigentlichen Scheitel sich befindet. Die Untersuchung zeigt also:

Der Einfluss etwaiger Abweichungen gegen die Forderung (e) auf die Horizontal- und Vertikalwinkelmessung wird durch Beobachtung in zwei Fernrohrlagen völlig kompensiert.

Forderung f): Teilkreis- und Nonienmittelpunkte müssen in der Drehachse liegen.

Zur näheren Betrachtung werden zunächst nur die vertikale Drehachse und der horizontale Teilkreis herangezogen.

Die Grösse des zu messenden Winkels zweier Zielungen ist gleich der horizontalen Fernrohrdrehung, d. h. gleich dem Winkel zwischen den Horizontalprojektionen der beiden zum Zweck der Zielung hergestellten Fernrohrlagen. Dabei ist es, falls α) Teilkreis- und Alhidadendrehpunkt T und Alhidadendrehpunkt A nicht zusammenfallen angesichts ihrer höchstenfalls hundertstel von Millimetern betragenden Abweichung und im Hinblick auf die langen

β) Ziellinie und Kippachse sollen sich schneiden.

γ) Alhidadenachse und Kippachse sollen sich schneiden.

α) Teilkreis- und Alhidadendrehpunkt T und Alhidadendrehpunkt A sollen zusammenfallen.

Schenkel für dieses Winkelmaß völlig gleichgültig, ob der eine oder andere (oder keiner) von beiden Punkten mit dem Winkelscheitel auf dem Gelände mathematisch genau übereinstimmt. Dagegen unterscheidet sich der Winkel $\omega = P_1 A P_2$ zwischen den beiden Fernrohrlagen wohl, und unter Umständen erheblich, von dem durch die beiden zugehörigen Ablesestellen am Teilkreis bestimmten Winkel, weil für den Scheitel des letzteren der Teilkreismittelpunkt T gilt und die Schenkel (Teilkreis-halbmesser r) sehr kurz sind. Der bequemeren Darstellung wegen sollen (was praktisch ohne Bedeutung ist) die Ablesepunkte in der Horizontalprojektion der Zielvorrichtung (nicht, wie es tatsächlich der Fall, senkrecht zu ihr) und auf dem Kreis um T (nicht, wie in Wirklichkeit um A) liegend angenommen werden. Sie seien (wie gewöhnlich) zweifach, einander gegenüberliegend angeordnet, so dass sich bei der Zielung nach P_1 die Ablesungen a_1' und a_1'' , bei der Zielung nach P_2 die Ablesungen a_2' und a_2'' ergeben. Wir erhalten demnach als Differenz der je an identischer Ablesevorrichtung gemachten Ablesungen die Winkelwerte

$$\alpha_1 \equiv a_1' T a_2' = a_2' - a_1'$$

$$\alpha_2 \equiv a_1'' T a_2'' = a_2'' - a_1'',$$

die weder unter sich noch dem zu messenden Winkel ω gleich sind.

Der Unterschied der drei Werte wird um so kleiner, je näher das Viereck mit den Ecken A, T und den beiden Ablesestellen dem Kreisviereck kommt. Er erreicht umgekehrt sein Maximum $= \frac{e}{r} \cdot \varrho$, wenn die eine Zielung in der Richtung AT und die andere senkrecht dazu verläuft. Für $e = \frac{1}{100}$ mm und $r = 8$ cm wird er in diesem Fall $= \frac{0,01 \cdot \varrho}{80} = 26''$ a. T.

Der Figur 222 ist aber zu entnehmen:

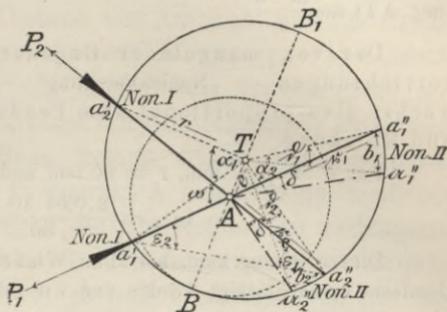
$$\alpha_2 = 2 \varepsilon_2 \quad (\text{Zentri- und Peripheriewinkel})$$

$$\alpha_1 = 2 \varepsilon_1 \quad (\text{ " " " })$$

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \omega.$$

Die vorstehende Ableitung ist auch zutreffend, wenn, wie es in Wirklichkeit zutrifft, die beiden Ablesevorrichtungen um etwa 1 R von der Zielrichtung abweichend angeordnet sind, ja überhaupt, wenn die Ablesung auf dem Teilkreis immer bei zwei festen Punkten der Alhidade erfolgt, die mit dem Alhidadendrehpunkt in gerader Linie liegen. Befinden sich die beiden Ablesestellen nicht scharf in einer Ebene mit der Alhidadenachse, sondern schliessen die Verbindungslinien

Fig. 222.



des Alhidadendrehpunkts mit den beiden Ablesestellen a' und a'' den Winkel $2R \pm \delta$ mit einander ein (s. strichpunktierte Linie in Fig. 222), so werden statt der Ablesungen a_1'' am Nonius II bei der Zielung nach P_1 die Ablesungen a_1'' gemacht. An Stelle des Winkelwerts $\alpha_2 = a_1'' T a_2''$ tritt also für den vom Nonius II zurückgelegten Weg der Winkelwert $\alpha_1'' T a_2''$. Diese beiden Werte unterscheiden sich aber nur um den Unterschied der beiden Winkel δ_1 und δ_2 voneinander, d. h. um $f = \frac{b_1 - b_2}{r} \cdot \rho = \delta \cdot \frac{r_1 - r_2}{r}$ und im Maximum (Zielungen in der Richtung AT) um $\frac{2e \cdot \delta}{r}$.

Der von mangelnder Gegenständigkeit der beiden Ablesevorrichtungen — „Nonienknickung“ — herrührende Winkelfehler f wächst also proportional zum Produkt aus linearer Exzentrizität und Knickung.

Für $e = \frac{1}{100}$ mm, $r = 80$ mm und $\delta = 10'$ wird er im äussersten Fall

$$f_{\text{Max}} = \frac{2,0,01 \cdot 10 \cdot 60}{80} = 0,15''.$$

Dieser Betrag kann bei allen Winkelmessungen für Zwecke der niederen Geodäsie vernachlässigt werden und wir erkennen:

Die Wirkung etwaiger geringer Exzentrizität zwischen Teilkreismitelpunkt und Alhidadendrehpunkt wird durch Ablesung an zwei ungefähr diametral einander gegenüberstehenden Ablesevorrichtungen eliminiert. Wir schliessen aber weiter: Da bei einer zweiten Winkelmessung mit durchgeschlagenem Fernrohr auch bei Benützung nur einer Ablesevorrichtung diese in Gegenstellung kommt zu ihrer bei der ersten Messung eingenommenen Lage, also hier den Nonius II vertritt, so wird auch durch Messung in beiden Fernrohrlagen der Einfluss etwaiger Alhidadenexzentrizität auf den Winkel kompensiert.

Es wäre nun noch die Wirkung des bisher vernachlässigten Umstandes zu untersuchen, dass die Ablesevorrichtungen bei der Drehung um die Alhidadenachse sich auf einem Kreis um A und nicht auf einem solchen um T bewegen, und dass die Ablesestriche radial gegen A, die Teilkreisstriche dagegen radial gegen T gerichtet sind.

Die Divergenz der Teilstriche an sich ist nun, schon wegen der Geringfügigkeit der Exzentrizität e , unerheblich. Dagegen hat diese Exzentrizität im Falle versenkter Nonien zur Folge, dass nur an einer Stelle, nämlich in der Verlängerung B von TA, Teilung und Nonius sich berühren, während sonst überall, am meisten in der Verlängerung B_1 von AT, Klaffungen sich zeigen, die nicht nur das Ablesen erschweren, sondern auch die mit der Noniusteilung zu vergleichenden Abstände der verlängerten radial gegen T gerichteten Teilstriche verschieden

gross erscheinen lassen (um so kleiner, je näher Ablesevorrichtung und Teilkreismitelpunkt aneinander stehen, am grössten bei B). Letztgenannter Mangel würde sich weniger störend zeigen, wenn zur Ablesung bloss ein Strich (wie beim Schraubenmikroskop) und nicht eine Teilung (wie beim Nonius und beim Schätzmikroskop) verwendet würde. Er tritt um so stärker in die Erscheinung, je länger diese Teilung ist, also beim Nonius stärker als beim Schätzmikroskop. Ja er macht den Nonius an denjenigen Stellen direkt unverwendbar, an denen der Abstand des Anfangs- und Endstrichs der n Noniusteile von dem Bogen der zugehörigen $(n - 1)$ Limbusteile merklich, z. B. um etwa die Hälfte der Noniusangabe abweicht. Hieraus lässt sich die Grösse der äusserstenfalls zulässigen Exzentrizität e berechnen. Dazu kommt ferner beim Nonius, dessen Teilungsmittelpunkt im Drehpunkt A liegen möge, noch der weitere Nachteil, dass seine gegen die Kreisteilung zu verlängern den, gegen A radialen Teilstriche ebenfalls verschieden grosse Abstände zeigen, um so grösser, je weiter entfernt von der Berührungsstelle B.

Wenn also nach der ersten Untersuchung durch Ablesen an zwei gegenüberliegenden Stellen die Wirkung einer etwaigen Alhidadenexzentrizität e aufgehoben wird und somit das Vorhandensein einer solchen, wenigstens bei Ablesung an zwei Gegenpunkten, gleichgültig erschien, so zeigen die letzten Betrachtungen, dass sie keinesfalls so gross sein darf, dass die Noniuslänge an irgend einer Stelle vom zugehörigen Teilkreisbogen erheblich, z. B. um die halbe Noniusangabe $\frac{D}{2}$ abweicht, oder in den Noniusintervallen selbst ein merkbarer periodischer Unterschied entsteht. Sie zeigen ferner in Übereinstimmung mit S. 307 die Überlegenheit des Mikroskops über den Nonius.

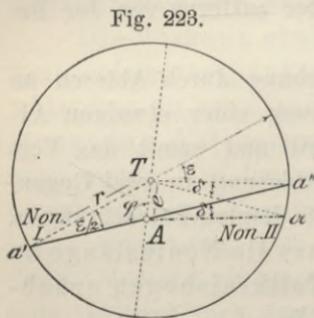
Nun ist zwar bei eingelassenen Nonien, wie sie beim Horizontalkreis die Regel bilden, eine allzu grosse Exzentrizität schon deshalb kaum zu befürchten, weil dabei die (durch die Lupe noch vergrössert sichtbare) Klaffung sich beim Ablesen äusserst störend bemerkbar machen würde. Wohl aber kann eine grössere Exzentrizität vorhanden sein bei „Klappnonien“, wie sie häufig, aber schon wegen der in diesem Fall beim Ablesen auftretenden grösseren Parallaxfehler ganz zu Unrecht, an Höhenkreisen Verwendung finden. Dort deckt der auf der Teilung schleifende Nonius an den verschiedenen Stellen lediglich verschieden grosse Stücke der Teilstriche zu.

Wir müssen also, zum mindesten bei Verwendung von Klappnonien, oder wenn aus irgend welchem Grund nicht in beiden Fern-

rohrlagen beobachtet wird, Grösse und Wirkung der etwa vorhandenen Alhidadenexzentrizität feststellen.

Zu diesem Zweck wird zunächst zu untersuchen sein, ob an keiner Stelle des Teilkreises die Noniuslänge von der zugehörigen Länge des Teilkreisbogens um mehr, als etwa höchstens $\frac{D}{2}$ abweicht, sowie durch Vergleichung sämtlicher Noniusintervalle mit irgend einem der Teilkreisintervalle, ob die ersteren keine wechselnde Grösse zeigen. Das Vorhandensein auch nur eines dieser beiden Fehler würde den Nonius unbrauchbar machen. Das Schätzmikroskop ist — im Fall etwa vorhandener geringer Exzentrizität — auf ein mittleres Teilungsintervall einzustellen.

Sei nun in Fig. 223 A wieder der Alhidadendrehpunkt, mit dem die beiden um ihn sich drehenden Ablesestellen a' und a'' zunächst als in gerader Linie liegend angenommen werden, so dass sie Gegenpunkte bezeichnen. T sei wieder der Teilkreismittelpunkt. Dann



wird je nach der Lage der Verbindungslinie der beiden Ablesemarken zur Zentrallinie AT der Unterschied der beiden zusammengehörigen Ablesungen, d. h. ($a'' - a'$) sich ändern. Er wird im Fall der Figur 223 gleich $2R + \epsilon$, d. h. mehr, oder, falls T in den Winkelraum $a'Aa''$ hineinfällt, weniger, dagegen nur dann genau $2R$ betragen, wenn diese „Ableselinie“ mit AT zusammenfällt.

Für die derart veränderliche Abweichung ϵ von $2R$ hat man aus dem Dreieck ATa'

$$\sin \frac{\epsilon}{2} = \frac{e \cdot \sin \varphi}{r},$$

oder, da $\frac{\epsilon}{2}$ jedenfalls sehr klein

$$(1) \quad \epsilon' = 2 \frac{e}{r} \cdot \varphi' \sin \varphi.$$

Dieser Wert erreicht den Betrag 0 für $\varphi = \frac{0}{2R}$, d. h. wenn die Ableselinie in der Verlängerung von AT liegt, wie oben bereits aus der Figur erschlossen.

ϵ' erreicht sein Maximum, nämlich $\frac{2e}{r} \varphi'$ (z. B. für $e = \frac{1}{100}$ mm, und $r = 70$ mm rund 1' a. T.) für $\sin \varphi = \pm 1$, d. h. für $\varphi = \frac{R}{3R}$.

Würde es also gelingen, diejenigen Teilkreisstellen zu finden, an denen der Unterschied der beiden an diametral angeordneten Ablesevorrichtungen gemachten Ablesungen gerade $2R$ betrüge, so

Feststellung
der Grösse
etwa vorhandener Alhidadenexzentrizität.

wäre damit auch die Lage der Zentrallinie AT gefunden. Man könnte dann senkrecht dazu diejenigen beiden Ablesungen machen, deren Unterschied, vermindert um $2R$, gleich ε_{Max} wäre, woraus sich die lineare Exzentrizität

$$e = \frac{\varepsilon'_{\text{Max}} \cdot r}{2\rho'} \quad (2)$$

berechnen liesse. Nun steht aber von vornherein ebensowenig fest, dass die beiden Ablesemarken Gegenpunkte bezeichnen, wie dass die Teilung fehlerfrei ist. Wir müssen im Gegenteil annehmen, die Ableselinie erleide in A eine Knickung um einen unbekanntem Winkel δ , so dass die bisher in a'' angenommene Ablesestelle II, um δ verschoben, in α sich befindet. (Dabei unterscheidet sich, wie oben S. 332 bewiesen, der Winkel $a''Ta$ vom Knickungsbetrag $a''A\alpha$ so wenig, dass beide einander gleich gesetzt werden dürfen.) Dann wird der Unterschied der zusammengehörigen Ablesungen II—I statt $2R + \varepsilon$ jetzt betragen

$$ITII = \alpha - a' = 2R + \varepsilon + \delta. \quad (3a)$$

Bringt man nun durch positive Drehung um A die Ablesevorrichtung II auf a' , auf welcher Stelle bisher I sich befand, so wird I keineswegs die bisher von II gedeckte Teilungsstelle bezeichnen. Dies wäre nur der Fall, wenn nicht (infolge der Knickung) die Ablesestelle a'' nach α verschoben worden wäre. Man muss vielmehr wegen dieser Knickung, nachdem der in der ersten Lage bei a'' gelegene Alhidadenpunkt mit a' zur Deckung gebracht wurde, die Alhidade um den Winkel δ wieder zurückdrehen, um die bisher bei α liegende tatsächliche Ablesestelle II auf a' zu bringen. Dadurch wird jetzt der Unterschied beider Ablesungen II—I, d. h. der den Punkt T nicht in sich schliessenden Winkel in der neuen Lage

$$ITII = 2R - \varepsilon + \delta. \quad (3b)$$

Durch Subtraktion erhält man:

$$(3a) - (3b) = (2R + \varepsilon + \delta) - (2R - \varepsilon + \delta) = 2\varepsilon \quad (4)$$

d. h.: Stellt man nacheinander Nonius I und dann Nonius II auf einen Teilpunkt a' ein und liest jedesmal am anderen Nonius ab (Bestimmung des Gegenpunkts, s. S. 329), so liefert die halbe Differenz der beiden Unterschiede II—I die dem Teilpunkt a' entsprechende Abweichung ε der beiden von a' durch Rückverlängerung einerseits über den Teilkreis-mittelpunkt T, andererseits über den Alhidadendrehpunkt A bestimmten Teilkreisstellen.

Wählt man zur Einstellung runde, gleichabständige Teilpunkte a' und trägt die nach obigem gewonnenen Werte für ε in beliebigem Massstab als Ordinaten zu den als Abszissen aufgefassten Werten a' auf, so erhält man durch stetige Verbindung der Bildpunkte, wie

Gleichung (1) zeigt, eine (überhöhte) Sinusoide. Ihr kann man sowohl die Grösse, als den Ort von ε_{Max} entnehmen, um daraus nach (1) und (2) die gegenseitige Lage der Mittelpunkte A und T zu berechnen.

Die zweite Einstellung wird nur wenig, und der Unterschied (3b) $\text{II} - \text{I} = 2\text{R} - \varepsilon + \delta$ wohl gar nicht geändert, wenn man, statt jeweils auch den Nonius II auf das zuvor benützte runde Mass a' einzustellen, den Nonius I auf $a' + 2\text{R}$ stellt.

Die Addition der beiden Gleichungen (3a) und (3b) liefert (5) $= (3a) + (3b) = (2\text{R} + \varepsilon + \delta) + (2\text{R} - \varepsilon + \delta) = 2\delta$, d. h.: die halbe Summe der beiden Unterschiede $\text{II} - \text{I}$ liefert das konstante Mass δ für etwa vorhandene Knickung der Ableselinie. Die hieraus sich ergebende Forderung gleicher Summen der gebildeten Ablesungsunterschiede bildet also ebensowohl eine Probe für richtige Ablesung, als für richtige Teilung (s. S. 338).

Beispiel. Untersuchung des zum geodätischen Apparat der württembergischen Fachschule für Vermessungswesen gehörigen Nonientheodolits von Kaiser VII. 23. 41. ($r = 70 \text{ mm.}$)

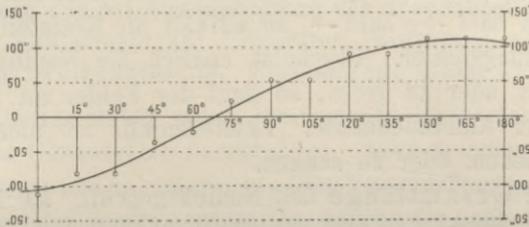
Non. I °	Non. II ' "	II—I "	2ε "	2δ "	II—I "	Non. I °	Non. II ' "
0	02 00	+ 120	+ 225	+ 15	- 105	180	58 15
15	01 15	+ 75	+ 165	- 15	- 90	195	58 30
30	01 30	+ 90	+ 165	+ 15	- 75	210	58 45
45	00 45	+ 45	+ 75	+ 15	- 30	225	59 30
60	59 30	- 30	+ 45	- 15	+ 15	240	00 15
75	00 00	0	- 45	+ 45	+ 45	255	00 45
90	59 30	- 30	- 105	+ 45	+ 75	270	01 15
105	59 45	- 15	- 105	+ 75	+ 90	285	01 30
120	58 45	- 75	- 180	+ 30	+ 105	300	01 45
135	59 00	- 60	- 180	+ 60	+ 120	315	02 00
150	58 30	- 90	- 225	+ 45	+ 135	330	02 15
165	58 00	- 120	- 225	- 15	+ 105	345	01 45

Aus Fig. 224, in welcher die Noniuseinstellungen a' als Abszissen, die Beträge ε als Ordinaten aufgetragen sind, entnehmen wir:

1. $\varepsilon_{\text{Max}} = 112'' = 1' 52''$, somit
 $e = \frac{112'' \cdot 70}{2 \cdot 9''} = 0,019 \text{ mm.}$

2. Die Verbindungslinie AT schneidet den Teilkreis in den Teilpunkten 68° und 248° .

Fig. 224.



Statt auf graphischem Weg lässt sich Lage und Grösse der Exzentrizität unter Ausgleichung der obigen Ablesungen natürlich auch mittels der Methode der kleinsten Quadrate finden. —

Wenn β) der Noniusmittelpunkt nicht, wie unter (α) angenommen, mit dem Alhidadendrehpunkt A, ebensowenig aber mit dem Teilkreismittelpunkt T zusammenfällt, so hat dies lediglich eine etwas andere Verschwenkung der Nonius- gegenüber der Limbusteilung und eventuell die schon im bisherigen ins Auge gefasste Knickung der Verbindungsstrecke $a'' A a''$ um einen kleinen Winkel δ zur Folge. Das Ergebnis der bezüglichen bisherigen Untersuchung gilt also auch hier.

β) Der Noniusmittelpunkt soll in die Drehachse fallen.

Die Untersuchung des Vertikalkreises samt den zugehörigen Ablesevorrichtungen und der Kippachse auf das Vorhandensein von Exzentrizität ist identisch mit der soeben vorgeführten.

Forderung g): Die Limbusteilung und die Nonienteilungen müssen genau sein.

Die Fehler, mit denen Teilungen behaftet sein können, lassen sich in zwei Gruppen einteilen, nämlich in:

1. zufällige, oder unregelmässige, welche die einzelnen Teilstriche um kleine Beträge bald in positivem, bald in negativem Sinn und
2. periodische, oder regelmässige, welche ganze Gruppen von Teilstrichen in einer gewissen Richtung verschieben.

Erstere Fehler können z. B. entstehen durch ungenaue Einstellung, oder Führung des Reissers bei dem Teilgeschäft, die letzteren durch ungleichmässige Erwärmung des Teilkreises während der Teilung.

Beim Nonius, dessen Teilung im Gegensatz zu der des Teilkreises nicht in sich zurückkehrt, ist zunächst zu untersuchen, ob die ganze Länge der n -Intervalle mit der Sollzahl (im allgemeinen

Untersuchung der Nonien durch Vergleichung mit der Limbusteilung.

n — 1) von Intervallen des Teilkreises innerhalb der höchstensfalls zulässigen Differenz $\frac{D}{2}$ (halbe Noniusangabe s. S. 304) übereinstimmt. Würde die Vergleichung an verschiedenen Stellen des Teilkreises periodisch sich ändernde Abweichungen ergeben, so wäre auf vorhandene Teilungsexzentrizität (s. S. 330 ff.) zu schliessen. Lassen die beim Vergleich sich zeigenden Unterschiede kein Gesetz erkennen, sondern sind bald +, bald —, so enthält die Kreisteilung unregelmässige Teilungsfehler. Erscheint endlich die Noniuslänge durchweg zu klein, oder zu gross, so liegt der Fehler an ihr bzw. an der Lage der Alhidadenachse. Letzterenfalls ist diese samt dem Nonius zu heben, oder zu senken.

Ist die Gesamtlänge des Nonius geprüft, so ist zu untersuchen, ob dessen Teilstriche sämtlich gleichabständig sind. Dies geschieht durch Vergleichung ihres Abstandes mit einem und demselben Intervall der Limbusteilung. Gleichmässiges Wachsen bzw. Abnehmen dieser Abstände liesse auf einen periodischen Teilungsfehler des Nonius, oder auf eine Verschwenkung der Noniusteilung, also eine Exzentrizität ihres Mittelpunktes, unregelmässig sich ändernde Intervalle auf zufällige Nonienteilungsfehler schliessen. Die Abweichung darf in keinem Fall den Betrag von $\frac{D}{2}$ erreichen.

Unter-
suchung der
Limbustei-
lung.

Die Limbusteilung kehrt in sich zurück; bei ihr ist also nicht die Gesamtlänge, sondern nur die Unterteilung zu untersuchen. Dies geschieht, indem man von einem Teilstrich ausgehend eine konstante Bogenlänge auf dem ganzen Kreis herumträgt, vergleichend, ob sie durchweg dieselbe Zahl von Limbusintervallen deckt. Als solchen Bogen kann man entweder die Länge eines Noniusteils, oder diejenige eines ganzen Nonius, wie bei der Untersuchung des letzteren S. 338, oder — um Klarheit darüber zu erlangen, ob etwa sich zeigende periodische Unterschiede von periodischen Limbusfehlern, oder von Alhidadenexzentrizität herrühren — die Entfernung der beiden Noniusnullpunkte verwenden. Letztere Methode wurde für einen anderen Zweck in dem Beispiel S. 336 angewandt und es sollte nach Gleichung (5) der Knickungsbetrag 2δ auch bei etwa vorhandener Exzentrizität konstant sein. Auftretende Schwankungen können nur von Ablese-, oder Teilungsfehlern herrühren. Schaltet man die erstere Möglichkeit aus, indem man Einstellungen und Ablesungen mehrfach und unabhängig wiederholt und die gewonnenen Ablesungen mittelt, so erhält man in den Abweichungen der Werte δ von ihrem Mittel die Grösse der Teilungsfehler und zugleich eine Entscheidung, ob es sich bei ihnen um regelmässige, oder unregelmässige Fehler handelt.

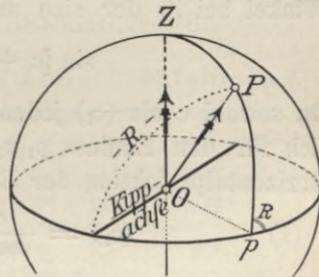
Auf die Forderungen h) und i): Die Teilungsflächen müssen senkrecht stehen auf den Drehachsen, Limbus- und Alhidadenachse müssen zusammenfallen — soll in §§ 40 und 43 eingegangen werden, ebenso wie auf die Frage der Eliminierung von Teilungsfehlern.

§ 40. Wirkung der bei Richtigstellung des Theodoliten etwa zurückgebliebenen Fehlerreste auf Projektion (Einweisen auf unebenem Gelände) und Winkelmessung. Eliminierung dieser Fehlerwirkung.

Die Richtigstellung eines Instruments lässt sich keineswegs mit absoluter Genauigkeit durchführen. Auch vollziehen sich durch äussere Einflüsse und unbemerkt zuweilen Verschiebungen in der gegenseitigen Lage der Instrumententeile, welche die nach § 39 bewirkte Justierung wieder stören. Es erscheint daher nötig, die Wirkung zu untersuchen, welche durch kleine Achsenfehler auf die Messungsergebnisse — Einweisen von Geraden bei notwendiger Kippbewegung, Messung von Horizontal- und Vertikalwinkeln — ausgeübt wird. Dabei wollen wir zunächst voraussetzen, dass jeweils nur eine einzige der in § 39 aufgestellten Forderungen unerfüllt bleibt.

Zur Untersuchung der Wirkung dieses Fehlerrestes denken wir uns die Teilkreisebene parallel mit sich selbst in den Schnittpunkt O der drei Achsen (Vertikalachse, Kippachse, Zielachse) des zur Messung fertig aufgestellten Theodoliten heraufgeschoben, und um diesen Punkt eine Kugel beschrieben. Wäre das Instrument fehlerfrei, so läge in diesem Fall die Kippachse in der (heraufgeschobenen) Teilkreisebene und die beim Anzielen beschriebenen Kippebenen ständen senkrecht auf ihr und gingen durch das Zenit Z (Fig. 225).

Fig. 225.



Schliesst dagegen (s. Fig. 226) im Widerspruch zu der Forderung b: die Ziel- mit der Kippachse statt des rechten Winkels den Winkel $R \pm c$ ein — Zielachsenfehler = c — so zeigt die aufwärts gerichtete Zielachse bei horizontiertem Instrument nicht nach Z, sondern nach Z_1 . Auch beschreibt sie keine senkrechte Ebene um die Kippachse, sondern eine Kegelfläche, welche beim Kippen zum Zweck des Anzielens von P_1 die Kugel nach einem Kleinkreis $Z_1 P_1 p_1$ schneidet. Handelt es sich daher um die Projektion einer Zielung $O P_1$ in die Horizontalebene, etwa zum Zweck des Einweises einer Geraden, so erhält man die Richtung $O p_1$ an Stelle

Wirkung eines Zielachsenfehlers c .

tion der jeweiligen Zielung liegenden Winkel, $R + x$, oder noch einfacher, ihrer beiden Überschüsse x über R setzen.

Für Zielung nach dem Punkt P_1 (s. Fig. 227) ergibt sich der Winkel $R + x_1$ aus dem rechtwinkelig sphärischen Dreieck $P_1 K_1 p_1$ und x_1 , aus:

$$\sin x_1 = \mp \frac{\sin c}{\cos h_1},$$

also für kleines c und x

$$x_1 = \mp \frac{c}{\cos h_1} = \mp c \cdot \text{sech}_1 \quad (2)$$

Ebenso ist für Zielung nach einem Punkt P_2 :

$$x_2 = \mp \frac{c}{\cos h_2} = \pm c \cdot \text{sec } h_2,$$

also der Einfluss auf die Horizontalprojektion

$$\text{eines Winkels } P_1 O P_2 = x_2 - x_1 = \mp c (\text{sec } h_2 - \text{sec } h_1) \quad (3)$$

Zu demselben Ausdruck führt auch die Benützung der Formel (1) und der Figur 226, in welcher $p_1 O p_2$ den richtigen, $p_1 O p_2$ den infolge Zielachsenfehlers unrichtigen Horizontalwinkel, und $(c_2) - (c_1)$ deren Unterschied darstellt.

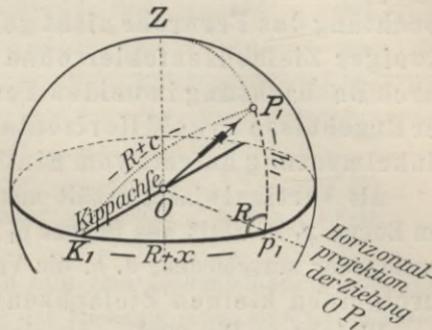
Einige Werte des aus Gleichung (1) sich ergebenden Projektionsfehlers sind in nachfolgender Tafel zusammengestellt.

Projektionsfehler (c) als Folge von Zielachsenfehlern c.

c	H ö h e n w i n k e l h					
	1°	3°	5°	10°	20°	45°
1'	0	0,1"	0,2"	0,9"	3,8"	25"
2'	0	0,2"	0,5"	1,9"	7,7"	50"
3'	0	0,3"	0,7"	2,8"	11,5"	1' 14"
5'	0,1"	0,4"	1,2"	4,6"	19,2"	2' 04"
10'	0,1"	0,8"	2,3"	9,3"	38,5"	4' 09"

Der aus dem Zielachsenfehler c sich ergebende Winkelfehler $c (\text{sech}_2 - \text{sec } h_1)$ ist gleich der Differenz zweier, der obigen Tabelle entnommener, zusammengehöriger Projektionsfehler, und gleich 0 für $\text{sech}_2 = \text{sec } h_1$ d. h. für $h_2 = \pm h_1$, d. h. namentlich für den Fall, dass die beiden Punkte P_1 und P_2 ohne Kippbewegung angezielt werden können.

Fig. 227.



Bei der Messung in der zweiten Fernrohrlage fällt der Zielachsenfehler c auf die entgegengesetzte Seite der Vertikalen, er geht über in $-c$. Die Projektionen in Figur 226 erfolgen entlang den strichpunktiierten Kreisen nach p_1' und p_2' , und die Gleichungen (1) und (3) für den Projektions-, bezw. Winkelfehler, nehmen entgegengesetztes Vorzeichen an. Wir finden also: Muss bei der Beobachtung das Fernrohr nicht gekippt werden, so bleibt ein etwaiger Zielachsenfehler ohne Einfluss, andernfalls werden durch Beobachtung in beiden Fernrohrlagen und Mittelung der Ergebnisse sowohl Horizontalprojektion, als Horizontalwinkelmessung befreit vom Einfluss des Zielachsenfehlers.

Als Vertikalwinkel erhält man infolge des Zielachsenfehlers den Bogen $p_1 P_1$ statt des Bogens $p_1 P_1$. Beide sind nicht merklich voneinander verschieden, d. h. die Vertikalwinkelmessung wird durch einen kleinen Zielachsenfehler nicht berührt.

Wirkung
eines Kipp-
achsen-
fehlers i .

Weicht (s. Fig. 228) — als einziger Achsenfehler und Verstoß gegen die Forderung c — die Kippachse des horizontierten Instruments um den kleinen Winkel i von der Horizontalen (um $R \pm i$ von der Vertikalachse) ab, so beschreibt die Ziellinie beim Kippen eine Ebene, welche aber nicht senkrecht steht auf derjenigen des Teilkreises, sondern mit ihr den Winkel $R \pm i$ einschliesst. Die Zielrichtung nach P_1 wird deshalb beim Einweisen in die Horizontale nicht nach p_1 , sondern nach p_1 , also um den Winkel $p_1 O p_1$ verdreht heruntergebracht. Die Fehlerwirkung $p_1 O p_1 = (i_1)$ ergibt sich aus dem rechtwinklig sphärischen Dreieck $P_1 p_1 p_1$, in welchem ausser dem Winkel $R - i$ noch eine Seite, nämlich der Höhenwinkel h_1 gegeben ist zu:

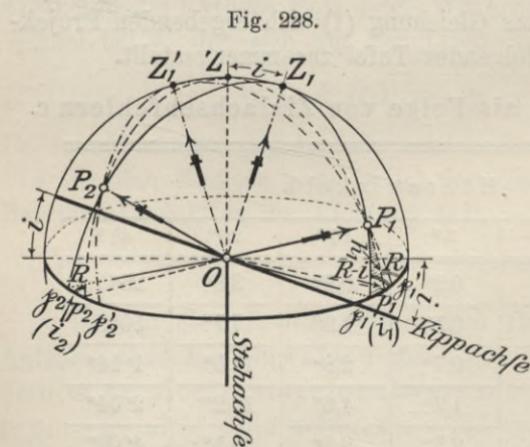


Fig. 228.

Die Zielrichtung nach P_1 wird deshalb beim Einweisen in die Horizontale nicht nach p_1 , sondern nach p_1 , also um den Winkel $p_1 O p_1$ verdreht heruntergebracht. Die Fehlerwirkung $p_1 O p_1 = (i_1)$ ergibt sich aus dem rechtwinklig sphärischen Dreieck $P_1 p_1 p_1$, in welchem ausser dem

Winkel $R - i$ noch eine Seite, nämlich der Höhenwinkel h_1 gegeben ist zu:

$$\sin (i_1) = \operatorname{tg} h_1 \operatorname{ctg} (R - i) = \operatorname{tg} h_1 \operatorname{tg} i$$

und da i und (i_1) jedenfalls klein,

$$(4) \quad (i_1) = i \operatorname{tg} h_1.$$

Die Wirkung i des Kippachsenfehlers i auf die Projektion wächst also mit der tg des Neigungswinkels und wird für horizontale Zielung $= 0$.

Die nachfolgende Tafel gibt einige Werte der nach Gleichung (4) berechneten Wirkung (i) des Kippachsenfehlers i.

Projektionsfehler (i) als Folge von Kippachsenfehlern i.

i	H ö h e n w i n k e l h					
	1°	3°	5°	10°	20°	45°
30"	0,5"	1,6"	2,6"	5,3"	10,9"	30"
1'	1,1"	3,1"	5,3"	10,6"	21,8"	1' 00"
3'	3,1"	9,4"	15,8"	31,7"	1' 06"	3' 00"
5'	5,2"	15,7"	26,3"	52,9"	1' 49"	5' 00"
10'	10,5"	31,4"	52,5"	1' 46"	3' 38"	10' 00"

Dieser, seinem Wert nach nur vom Höhenwinkel h abhängige Projektionsfehler (i) kommt bei der Messung eines Horizontalwinkels bei beiden Zielungen, also 2mal zur Wirkung.

Soll z. B. die Horizontalprojektion $p_1 O p_2$ des Winkels $P_1 O P_2$ gemessen werden, so liefert die Zielung nach P_1 die Ablesung p_1 , die Zielung nach P_2 die Ablesung p_2 , also die einfache Messung als Unterschied der Ablesungen $p_2 - p_1$ den Winkel $p_1 O p_2$ statt des richtigen Horizontalwinkels $P_1 O P_2$. Der Winkelfehler ist also

$$(5) \quad \begin{aligned} p_1 O p_2 - P_1 O P_2 &= (i_2) - (i_1) \\ &= i (\underline{\underline{\text{tg } h_2 - \text{tg } h_1}}). \end{aligned}$$

Dieser Fehler wird = 0 für $h_1 = h_2 = 0$ und für $\text{tg } h_1 = \text{tg } h_2$ also für den Fall, dass das Fernrohr zwischen den Zielungen nach P_1 und P_2 nicht gekippt werden muss. Er wächst mit dem Unterschied der tg der Höhenwinkel, und es addieren sich also, im Gegensatz zu (3) die beiden Fehlerteile, wenn eine Zielung aufwärts, die andere abwärts gerichtet ist.

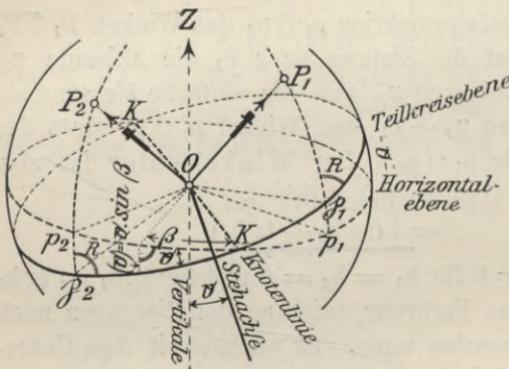
Schlägt man das Fernrohr durch und zielt wieder nach P_1 , so geht die Neigung i der Kippachse auf die andere Seite, d. h. an Stelle von i in Gleichungen (4) und (5) tritt $-i$. Der Projektions- bzw. Winkelfehler nimmt also entgegengesetztes Vorzeichen an (die Projektion geht in Fig. 228 entlang den strichpunktierten Kreisen) und wir erkennen: Muss das Fernrohr nicht gekippt werden, so bleibt ein etwaiger Kippachsenfehler ohne Einfluss, andernfalls werden durch Beobachtung in beiden Fernrohrlagen und Mittelung die Ergebnisse sowohl des Einweisens, als der Horizontalwinkelmessung befreit vom Einfluss des Kippachsenfehlers. Als Vertikalwinkel erhält man infolge des Kippachsenfehlers den Bogen $p_1 P_1$

statt des Bogens $p_1 P_1$. Beide sind nicht merklich voneinander verschieden, d. h. die Vertikalwinkelmessung wird durch einen kleinen Kippachsenfehler nicht berührt.

Wirkung
eines Steh-
achsen-
fehlers v .

Ist — als einziger Achsenfehler und Verstoss gegen die Forderung a) — die Stehachse nicht senkrecht zur Libellenachse (was wir daran erkennen, dass die in $2 \perp$ zueinander stehenden Lagen einspielende Libelle bei beliebiger Drehung der Alhidade oder des Limbus ausschlägt), sondern weicht bei in 2 Lagen einspielender Libelle um den Winkel v von der Vertikalen ab, so erhält sowohl die auf ihr senkrechte Teilkreisebene (auf der die Horizontalwinkel abgelesen werden sollen), als auch die ebenfalls auf ihr senkrechte Kippachse dieselbe Neigung gegen die horizontale Solllage. Die Neigung der Teilkreisebene hat zur Folge, dass, wenn wir zunächst vertikale Kippbewegung voraussetzen, die Zielungen gegen P_1 bzw. P_2 nach p_1 und p_2 statt nach p_1 und p_2 projiziert

Fig. 229.



werden, so dass man, gerade wie wenn die Teilkreisebene nicht \perp auf der an sich vertikalen Stehachse stände, den Winkel $p_1 O p_2$ statt des Horizontalwinkels $p_1 O p_2$ abliest. Der Unterschied dieser beiden Winkel, d. h. der Einfluss einer geringen Neigung des Teilkreises ist — dies zeigt schon

der Anblick von Fig. 229 — bei genügend kleinem v ebenso zu vernachlässigen, wie vorhin der Einfluss des Ziel- und des Kippachsenfehlers auf den Vertikalwinkel (s. oben).

Anders verhält es sich mit der Kippachse. Wenn diese infolge des Vertikalachsenfehlers v um den zunächst unbekanntem Betrag (v) gegen die Horizontale neigt, so erzeugt diese Kippachsenneigung nach Seite 342 Projektionsfehler im, unter Umständen sehr erheblichen Betrag von

$$(6) \quad [(v)] = (v) \operatorname{tg} h.$$

Die durch den Stehachsenfehler v erzeugte, uns noch unbekannt Neigung (v) der Kippachse ist nun je nach der Richtung der letzteren, oder der Ziellinie verschieden. Sie erreicht ihren Minimalbetrag (v) = 0, wenn die Kippachse mit der Schnittlinie, KK der Horizontal- und der schiefen Teilkreisebene, der „Knoten-

linie“ (also die Ziellinie mit der Vertikalebene durch die Stehachse) zusammenfällt (Winkel α zwischen Knoten- und Ziellinie gleich R, Winkel β zwischen Knotenlinie und Horizontalprojektion der Kippachse gleich 0). Sie erreicht ihren Maximalbetrag $(v) = v$, wenn die Kippachse senkrecht steht auf der Knotenlinie, d. h. in die Vertikalebene der Stehachse (und die Zielung in die Richtung der Knotenlinie) fällt ($\alpha = 0, \beta = R$). Die hienach mit dem Winkel β zwischen Kippachse und Knotenlinie veränderliche Neigung (v) der Kippachse kann bei jeder einzelnen Zielung mittels der Reiterlibelle festgestellt werden. Sie lässt sich aber (s. Fig. 229) auch allgemein in v und β ausdrücken: $tg(v) = tg v \cdot \sin \beta$,

oder da v und (v) kleine Winkel

$$(7) \quad (v) = v \sin \beta.$$

Will man statt des Winkels β zwischen Knotenlinie und Kippachse den Winkel α zwischen Knotenlinie und Ziellinie einführen, wobei

$$\alpha = \beta \pm R, \text{ also } \sin \beta = \pm \cos \alpha, \text{ so wird}$$

$$(7a) \quad (v) = v \cos \alpha$$

in Übereinstimmung mit dem oben erhaltenen Resultat der beiden Grenzfälle

$$(\text{für } \alpha = 0 \text{ wird } (v) = v, \text{ für } \alpha = R \text{ wird } (v) = 0).$$

Setzt man (7) in (6) ein, so erhält man als Wirkung eines Stehachsenfehlers v auf die Horizontalprojektion einer um den Höhenwinkel h geneigten Zielung

$$(8) \quad \underline{[(v)]} = v \cos \alpha \operatorname{tg} h = v \sin \beta \operatorname{tg} h.$$

Sie wächst nur im äussersten Fall (nämlich für $\cos \alpha = \sin \beta = 1$, d. h. für $\beta = R$) auf diejenige des Kippachsenfehlers von gleicher Grösse, ist also ihrem absoluten Wert nach weniger bedenklich.

Während aber die Einflüsse von Ziel- und Kippachsenfehlern bei Beobachtung in beiden Fernrohrlagen dadurch eliminiert wurden, dass dabei diese Fehler entgegengesetztes Vorzeichen annahmen, ändert das Durchschlagen des Fernrohrs am Stehachsenfehler nichts. Die Kippachse behält ihre fehlerhafte Neigung bei. Der Richtstellung des Instruments ist also in bezug auf die Anforderung (a) auch dann grösste Aufmerksamkeit zu schenken, wenn die Beobachtung in zwei Fernrohrlagen erfolgt.

Die Horizontalprojektion eines Winkels $P_1 O P_2$ als Differenz der Ablesungen am Teilkreis bei Zielung nach P_2 bezw. P_1 ergibt sich durch die Wirkung des Stehachsenfehlers v unrichtig um

$$(9) \quad f = v \cos \alpha_2 \operatorname{tg} h_2 - v \cos \alpha_1 \operatorname{tg} h_1 = \underline{v(\cos \alpha_2 \operatorname{tg} h_2 - \cos \alpha_1 \operatorname{tg} h_1)}.$$

Dieser Fehler wird nur gleich 0 für α_1 und $\alpha_2 = R$, oder $h_1 = h_2 = 0$, im Gegensatz zum bisherigen aber nicht, wenn beide Objekte ohne Kippbewegung angezielt wurden. Beide Fehlerteile addieren sich, wenn entweder $\cos \alpha_1$ und $\cos \alpha_2$, oder $\operatorname{tg} h_1$ und $\operatorname{tg} h_2$ entgegengesetztes Vorzeichen erhalten. Ersteres ist z. B. der Fall, wenn der zu messende Winkel ungefähr $2R$ beträgt (Polygonisierung) und die beiden Zielungen aufwärts (Standpunkt im Tal), oder abwärts (Standpunkt auf einem Bergrücken) gerichtet sind.

Zusammenfassung.

Sind alle drei Achsenfehler c , i und v gleichzeitig vorhanden, so ist ihre Gesamtwirkung

1. auf die nur in einer Fernrohrlage erfolgende Horizontalprojektion (Einweisen)

$$f_p = \pm c (\sec h - 1) \pm i \operatorname{tg} h \pm v \cos \alpha \operatorname{tg} h$$

auf die in beiden Fernrohrlagen erfolgende Horizontalprojektion

$$f_p = \pm v \cdot \cos \alpha \operatorname{tg} h,$$

2. auf die nur in einer Fernrohrlage ausgeführte Horizontalwinkelmessung

$$f_\omega = \pm c (\sec h_2 - \sec h_1) \pm i (\operatorname{tg} h_2 - \operatorname{tg} h_1) \\ \pm v (\cos \alpha_2 \operatorname{tg} h_2 - \cos \alpha_1 \operatorname{tg} h_1),$$

auf die in beiden Fernrohrlagen ausgeführte Horizontalwinkelmessung

$$f_\omega = \pm v (\cos \alpha_2 \operatorname{tg} h_2 - \cos \alpha_1 \operatorname{tg} h_1).$$

Der Einfluss des Stehachsenfehlers auf die Vertikalwinkelmessung ist gleich (v). Am grössten also, nämlich $= v$, wenn die Kippachse mit der Knotenlinie zusammenfällt, am kleinsten, nämlich $= 0$, wenn die Ziellinie diese Lage hat. Um letzteres zu erreichen, benützt man bei der Messung von Vertikalwinkeln eine Libelle in der Richtung der Ziellinie (Trägerlibelle, Nivellierlibelle).

Der **schädlichste** aller Achsenfehler ist, falls die Beobachtung in beiden Fernrohrlagen erfolgt, derjenige der **Stehachse**. Völlig unschädlich ist unter dieser Voraussetzung der Fehler der Ziellinie und der Kippachse.

Bei **horizontaler Zielung** kommen die Achsenfehler nicht zur Wirkung, auch wenn **nur in einer Fernrohrlage beobachtet** wird. Dasselbe trifft beim Fehler der Ziellinie und der Kippachse zu, wenn das Fernrohr nicht gekippt zu werden braucht.

Die an das Instrument im Falle von Zeitmangel allein, aber auch notwendigerweise zu stellende Forderung ist demnach die unter (a) gegebene: die vertikale Drehachse muss senkrecht stehen auf der Libellenachse, d. h. die Libelle muss bei Drehung um die Vertikalachse im ganzen Kreis herum einspielen.

Gerade diese Anforderung werden wir später beim Nivellierinstrument als nebensächlich erkennen.

Kapitel X.

Messen und Abstecken von Horizontalwinkeln.

Einleitung. Man unterscheidet je nach der Lage der durch die beiden Schenkel eines Winkels bestimmten Ebene dreierlei Arten von Winkeln, nämlich:

1. Horizontalwinkel, deren Schenkel von vornherein, oder durch Projektion horizontale Lage haben.
2. Vertikalwinkel, oder Höhenwinkel zwischen einer geneigten Zielung und ihrer Horizontalprojektion.
3. Positionswinkel zwischen zwei beliebig geneigten Schenkeln.

Im gegenwärtigen Teil der Vermessungskunde betrachten wir nur die Messung von Horizontalwinkeln.

§ 41. Behandlung und Aufstellung des Theodoliten. Anzielung mit dem Fernrohr.

Behandlung (s. auch S. 318). Der Transport des Instruments erfolgt im Kasten unter möglichster Vermeidung von stossweisen, oder schütternden Bewegungen. Das Aus- und spätere Wiedereinpacken geschieht, um Verbiegungen von Instrumententeilen zu vermeiden, stets mit gelösten Bremsschrauben und ohne jeden grösseren Kraftaufwand. Die Bremsvorrichtungen sind im Kasten daher immer nach vorn anzuordnen. Erst nachdem man sich (beim Einpacken) von der richtigen Lage aller Instrumententeile überzeugt, und die Kastentüre zur Probe vorläufig geschlossen hat, erfolgt das Anziehen der Bremsschrauben. Vor Regengüssen und direkten Sonnenstrahlen ist das Instrument während der Arbeit durch einen Schirm, vor plötzlichen Staubwolken durch eine Schutzkappe zu schützen. Letztere darf nie auf die Erde gelegt werden, damit nicht Sandkörner etc. an ihr haften bleiben. Von Zeit zu Zeit, namentlich nach regnerischem oder staubigem Wetter ist das Instrument mittels Pinsels bezw. Lederlappens zu reinigen. Haben sich Sandkörner zwischen die bewegten Teile eingespielt, oder ist das Öl (namentlich

lich an der Vertikalachse, oder an den Randklemmen) dick und zäh geworden, so sind zur Reinigung, — letzternfalls mit einem mit Petroleum angefeuchteten Lappen, — die betr. Teile auseinanderzunehmen. Die bei der Winkelmessung aneinander sich vorbeibewegenden Achsen sind mit einem leichten Ölhauch zu überziehen.

Aufstellung.

Aufstellung. Zum Zwecke der Winkelmessung ist unter allen Umständen der Teilkreis in die Ebene des zu messenden Winkels (bei Horizontalwinkeln also horizontal) — Horizontierung — und sein Mittelpunkt auf den Winkelscheitel — Zentrierung — zu bringen. Beide Teile des Aufstellungsgeschäfts erfolgen nicht getrennt, sondern, zumal bei Verwendung der Schraubenstange (s. § 34), in sukzessiver Annäherung. Zur Ausführung des ersteren dienen die Libellen, samt der Horizontiervorrichtung des Fussgestells, zu derjenigen des letzteren in der Regel ein angehängtes Lot (Senkel), ausnahmsweise auch das „Meissnersche starre Lot“, oder ein vertikal abwärts nach dem vermarkten Aufstellungspunkt gerichtetes „Zentrierfernrohrchen“ (s. § 82).

Zunächst wird der auf dem Stativ befestigte Theodolit mit gelösten Stativflügelschrauben so über den Scheitelpunkt gebracht, dass die Stativscheibe nahezu horizontal ist und die Zentriervorrichtung angenähert auf dem gegebenen Punkt einspielt. Dann werden die Stativfüsse in den Boden eingedrückt und die Flügelschrauben des Stativs angezogen. Die Horizontierung erfolgt mittels der Fussgestellschrauben entweder einfach dadurch, dass man in irgendwelcher Lage der Alhidade die Dosenlibelle zum Einspielen bringt, oder bei Benützung einer Röhrenlibelle, durch Horizontieren derselben in zwei senkrecht zueinander gerichteten Lagen (parallel zu zweien und sodann über die dritte Stellschraube).

Wich die Stativscheibe ursprünglich allzu stark von der horizontalen Lage ab (was schon im Interesse möglichst rascher Aufstellung vermieden werden sollte), so ist nicht nur die Horizontierung eine langweiligere (weil die Stellschrauben ausgiebig benützt werden müssen), sondern es kann auch die ursprüngliche Zentrierung über dem Winkelscheitel verloren gehen, wenn der Senkel an der Verlängerung (Stengelhaken, Schraubenstange) der (ursprünglich nicht vertikalen) Stehachse hängt. Nach angenäherter Horizontalstellung ist daher die Zentrierung wiederholt zu prüfen und eventuell zu berichtigen. Wirkt die Befestigungsschraube auf die Stellschrauben des Fussgestells (s. Fig. 199 bis 201, 211 und 212), so darf sie erst dann scharf angezogen werden, wenn die Horizontierung annähernd vollzogen ist.

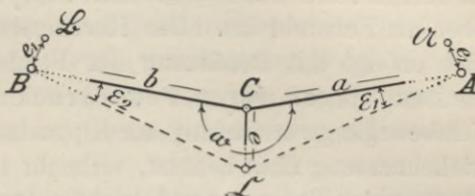
Wenn der Standpunkt frei gewählt werden kann, so sucht man zur Vermeidung der durch etwaige nachträgliche unbeabsichtigte Änderungen in der Zentrierung und Horizontierung erzeugten Winkelfehler sumpfiges Gebiet und Geröllhalden möglichst zu umgehen.

Eingetretene Änderungen, d. h. Ungenauigkeiten in der Horizontierung wirken wie der im vorigen § untersuchte Stehachsenfehler.

Folgen ungenauer Horizontierung und Zentrierung.

Wurde der Theodolit statt genau über dem Winkelscheitel C um eine kleine Strecke e unrichtig, nämlich in G zentriert, so beeinflusst diese Ungenauigkeit den zu messenden Winkelwert ω im günstigsten Fall, nämlich wenn A, B, C und G auf einem Kreisviereck liegen, gar nicht. Da aber über die wirkliche Lage von G ausser dem linearen Exzentrizitätsbetrag e nichts bekannt ist, müssen wir, um sicher zu gehen, für die Untersuchung der möglichen Fehlerwirkung f den ungünstigsten Fall voraussetzen, welcher

Fig. 230.



eintritt (s. Fig. 230), wenn der exzentrische Standpunkt auf der Halbierenden des zu messenden Winkels liegt. Dann ist

$$f'' = \varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' = e \varrho'' \sin \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

der Einfluss dieser Zentrierungenauigkeit. Kommt noch ungenaue Aufsteckung der Zielpunkte A und B, ein „Pointierungsfehler“ je um den linearen Betrag e_1 hinzu, der den Winkel im Maximum um

$$e_1 \cdot \varrho \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

ändert, so kann die schädliche Gesamtwirkung äusserstenfalls wachsen bis auf

$$f''_{\text{Max}} = \varrho'' \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(e_1 + e \sin \frac{\omega}{2} \right).$$

Je kürzer die Schenkel und je näher der zu messende Winkel ω dem Wert $2R$ kommt, um so schärfere Zentrierung und Pointierung ist also nötig.

Für $\omega = 2R$ wird

$$f''_{\text{Max}} = \varrho'' \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (e + e_1), \text{ d. h. für}$$

- a = b = 50 m und e = e₁ = 0,005 m wird f''_{Max} = 82'' a. T.
- a = b = 100 m „ e = e₁ = 0,005 m „ „ = 41'' a. T.
- a = b = 1000 m „ e = e₁ = 0,005 m „ „ = 4'' a. T.

Anzielung. Je länger die Zielungen und je grösser die nötige Winkelgenauigkeit, um so mehr kommt es auf Ausnützung der passenden Zeit- und Nebenumstände an. Allgemein soll man Sonne und Wind während der Beobachtung möglichst auf den Rücken bekommen. Die Spätnachmittag- und Abendstunden sind zumeist am

Anzielung.

günstigsten. Die Einstellung der Zielpunkte (Stangen, Blitzableiter etc.) erfolgt stets möglichst weit unten in der Nähe des Austritts aus dem Befestigungsmittel und zwar möglichst mit dem Kreuzungspunkt der Fäden.

Zum Zweck des Kippens wird das Fernrohr am Objektivende angefasst (die Berührung am Okularauszug ist wegen der möglichen Verschiebung des letzteren unstatthaft).

Um Horizontaldrehung des Teilkreises zu bewirken, fasst man an dessen Rand (zur Alhidadendrehung an den Trägern), keinesfalls aber am Fernrohr an. Das Hereingehen mit dem Fadenkreuz ins Ziel erfolgt mit Benützung der Feinbewegungsvorrichtung immer konstant gegen deren Federdruck gerichtet. Die Brems- und Feinbewegungsvorrichtung der Kippachse wird bei der Horizontalwinkelmessung nicht benützt, vielmehr ist durch entsprechende Aufhängung des Fernrohrs und leichten Druck der Trägerbügel auf die Kippachse dafür zu sorgen, dass ersteres in jeder Lage festhält. Durch Spreizen der Beine sucht der Beobachter eine feste Stellung zu erlangen. Weder Stativ noch Instrument dürfen zur Stütze des Körpers dienen!

§ 42. Beobachtung von Horizontalwinkeln.

A. Winkelbeobachtung.

1. Einfache Winkelmessung.

Hiezu genügt ein einfacher Theodolit (nur die Alhidadenachse drehbar), auf dessen horizontalem Teilkreis man an zwei Ablesevorrichtungen (Nonien etc.) nach erfolgter Einstellung des Fernrohrs auf den Zielpunkt A links (s. Fig. 230) etwa die Ablesungen a_1 und a_2 machen möge. Nachdem sodann durch Drehung der Alhidade und, soweit nötig, Kippen des Fernrohrs dieses auf den Zielpunkt B rechts eingestellt wurde, ergaben sich auf dem Teilkreis die Ablesungen b_1 und b_2 . Man hat dann die Grösse des zu messenden, vom Fernrohr bestrichenen Winkels $ACB = \omega$, doppelt, nämlich an jeder der beiden Ablesevorrichtungen und es soll sein:

$$\omega = b_1 - a_1 = b_2 - a_2.$$

Falls infolge von unvermeidlichen kleinen Ables- und Teilungsfehlern, sowie infolge etwaiger Teilungsexzentrizität beide Werte nicht identisch sind, erhält man unter Reduktion der ersteren und Kompensation der letzteren (s. § 40)

$$\omega_{\text{Mittel}} = \frac{(b_1 - a_1)}{2} + \frac{(b_2 - a_2)}{2} = \frac{b_1 + b_2}{2} - \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Rechnet man den Winkel ω nach beiden vorstehenden

Gleichungen aus, so liefert die erste eine Probe gegen grobe Ablesungs-, die zweite eine solche gegen Rechenfehler.

Will man neben den Ablesefehlern auch die Wirkung etwaiger Ziel-, Kreisteilungs- und Achsenfehler des Theodoliten reduzieren, bzw. kompensieren, so wiederholt man das soeben angewandte Verfahren, nachdem das Fernrohr durchgeschlagen, und durch Drehung des Instruments auf dem Stativ (bzw. — wenn dieses ein Repetitionstheodolit — nur des Limbus) um etwa 1 R dafür gesorgt wurde, dass bei der Ablesung andere Stellen des Teilkreises zur Verwendung kommen. Dabei werden sich wieder zwei unter sich und gegenüber den vorigen etwas verschiedene Werte ergeben.

Wiederholte
einfache
Winkel-
messung.

Als wahrscheinlichsten Winkelwert wird man das arithmetische Mittel der vier erhaltenen, gleich genauen Messungsergebnisse einzuführen haben.

2. Repetitionsweise Winkelmessung.

Dieses schon von Tobias Mayer (1723—1762) gezeigte Verfahren erfordert einen Repetitionstheodoliten und beruht darauf, dass man den zu messenden Winkel auf dem Teilkreis mehrmals ($2n$ -mal) aneinander legt und den für die Summe erhaltenen Wert alsdann durch $2n$ dividiert¹⁾. Dadurch wird der etwaige kleine Ablesefehler $2n$ -mal verkleinert und auch der Einfluss etwaiger Zielfehler proportional zur Wurzel aus der Zahl der Zielungswiederholungen reduziert. Auch hier benützt man (zur Eliminierung etwaiger Instrumentenfehler) das Fernrohr n -mal in der einen und n -mal in der durchgeschlagenen Lage.

Repetitions-
(Multi-
plikations-)
Messung.

Bei der Messung verfährt man demgemäss nach bewirkter zentrischer Aufstellung und Horizontierung des Instruments über dem Winkelscheitel C wie folgt:

a) Anzielen des Winkelschenkels A links, Festbremsen von Limbus und Alhidade und Ablesung a_I und a_{II} an den Nullstrichen der beiden Ablesevorrichtungen auf dem Teilkreis.

b) Drehen der Alhidade bei feststehendem Limbus. Anzielen und Einstellen des Winkelschenkels B rechts. Jeder Punkt der Alhidade, folglich auch die Noniennullpunkte, haben jetzt den zum gesuchten Winkel gehörigen Bogen zurückgelegt und man kann an ihnen auf dem Teilkreis die Ablesungen b_I und b_{II} erheben. Die Differenzen $b_I - a_I$, bzw. $b_{II} - a_{II}$ ergeben, jede für sich, den gesuchten Winkelwert. (Da diese Ablesung des einfachen Winkels übrigens

¹⁾ Das Verfahren würde daher besser „additionsweise“, oder „multiplikationsweise“ Messung genannt.

nicht zur eigentlichen Winkelberechnung dient, sondern nur zum Schutz gegen grobe Fehler, und zur Entscheidung der Frage, ob im ferneren Verlauf der Messung der volle Kreisumfang ein-, oder mehrmals überschritten wurde (s. unten), so wird nach einmaliger Messung des Winkels nur b_I (am Nonius I) abgelesen und auf b_{II} verzichtet.) Zur Verfeinerung des Resultats in Rücksicht auf etwaige kleine Ablese-, Ziel- und Instrumentenfehler dreht man jetzt

c) den Limbus samt festgebremster Alhidade zurück, (wobei die soeben erreichte Stellung zwischen Limbus und Alhidade unverändert bleibt) und kippt das Fernrohr, bis der linke Zielpunkt A wieder durch den Vertikalfaden gedeckt erscheint, bremst den Limbus in dieser Lage fest und führt das Fernrohr bei geöffneter Alhidade nach B. Dies wiederholt man n - (ein-, zwei- oder auch drei-)mal. Nun wird

d) das Fernrohr durchgeschlagen, bei geöffnetem Limbus und festgebremster Alhidade auf den linken Winkelschenkel A eingestellt und in der neuen Fernrohrlage das erste Verfahren gleich oft, (nämlich ebenfalls n -mal) wiederholt.

e) Die Ablesung an beiden Nonien gibt jetzt die Werte b_I^{2n} und b_{II}^{2n} und man hat

$$\text{am Nonius I: } \omega_1 = \frac{b_I^{2n} - a_I}{2n}, \quad \text{am Nonius II: } \omega_2 = \frac{b_{II}^{2n} - a_{II}}{2n}.$$

Die beiden Werte ω_1 und ω_2 sollten einander gleich sein. Im Falle eines kleinen Unterschieds nimmt man

$$\begin{aligned} \omega_{\text{Mittel}} &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\frac{(b_I^{2n} - a_I) + (b_{II}^{2n} - a_{II})}{2}}{2n} \\ &= \frac{\frac{(b_I^{2n} + b_{II}^{2n})}{2} - \frac{(a_I + a_{II})}{2}}{2n}. \end{aligned}$$

Zeigt die mit $2n$ multiplizierte erste Ablesung für den einfachen Winkel, dass während der Repetitionsmessung die Ablesestelle den Teilungsendpunkt ($4R$) überschritten hat, so erhält die Schlussablesung, oder besser der Winkel ω den aus ersterer zu erschliessenden runden Zuschlag.

Die Rechnung gewinnt an Bequemlichkeit, wenn vor der ersten Zielung auf A die Ablesung 0 wenigstens näherungsweise eingestellt wurde, sie wird geprüft durch Benützung beider vorstehender Gleichungen.

Die Messung wird geprüft durch Beobachtung aller zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Strahlen liegenden Winkel um den Standpunkt herum, so dass ihre Summe $4R$ betragen muss. Eine etwaige kleine Differenz der Summe der erhaltenen Winkelwerte gegen diesen Sollbetrag wird auf alle Werte gleichmässig verteilt.

Wird jedoch hiebei die Zahl der auf einem Punkt zu messenden Winkel sehr gross, so bietet die Probe: [Winkelwerte] = $4R$ keinen sicheren Schutz mehr gegen kleine Beobachtungs- und Ablesefehler. In diesem Fall misst man die Winkel besser in mehreren je sich zu $4R$ schliessenden Gruppen, sorgt aber

gleichzeitig dafür, dass mindestens zwei Winkelschenkel in den verschiedenen Gruppen wiederholt auftreten. Besonders kurze Strahlen werden ohnedies ausgeschieden und mit Probe hernach eingefügt, weil kleine, unbedeutende Zielfehler bei ihnen grosse Winkelunterschiede hervorrufen würden, die nicht auf die anderen Winkel eingeteilt werden dürfen.

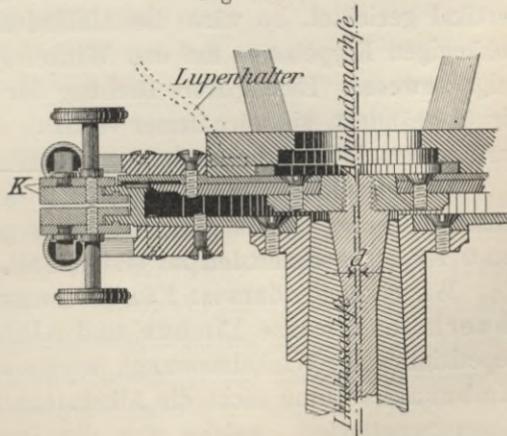
Die Zahl der Repetitionen wird je nach der verlangten Genauigkeit und der zur Verfügung stehenden Zeit bemessen (für gewöhnliche Arbeiten gleich zwei oder vier). Der Aufschrieb geschieht am besten schematisch, s. Beispiel unten.

Bezeichnung der Punkte	Zahl der Repetitionen	A b l e s u n g						Mittel			Bemerkungen über Punktver- sicherung etc. Einfacher Winkel.
		Non. I			Non. II			o	i	"	
		o	i	"	o	i	"				
Zielpunkt links A . . .		0	00	00	01	00	0	00	30		
Standpunkt C	1	53	04	00							
Zielpunkt rechts B . . .	4	212	17	30	18	00	212	17	45		
Ausgeglichener Winkel 53° 04' 10"	4	212	17	30	17	00	212	17	15	53° 04' 19"	

Verbesserung wegen Ausgleich. auf 4 R. — 9"

In der vorstehenden Anweisung ist die „Horizontierung des Instruments“, d. h. die Vertikalstellung der Drehachse, verlangt. Dabei ist nun die Frage zu beantworten: Ist die Limbus-, oder die Alhidadenachse vertikal zu richten, wenn beide weder zusammenfallen, noch einander parallel gehen (s. Forderung i des § 35). Der Beantwortung muss die Erledigung der Vorfrage vorausgehen: Ist jede Achsanordnung geeignet für repetitionsweise Winkelmessung? Wesentliches Erfordernis für letztere ist jedenfalls die Möglichkeit gemeinsamer Drehung von Limbus samt Alhidade ohne Änderung der gegenseitigen Lage von Teilkreis und Zeiger. Diese Forderung wird am sichersten erfüllt von Konstruktionen, welche beide Achsen in unmittelbare Berührung bringen. (Reichenbach u. a.). Weniger zweckmässig erscheint in dieser Beziehung die französische Achsanordnung, bei welcher die Büchse des Fussgestells sich zwischen Limbus- und Alhidadenachse

Fig. 231.



hineinschiebt, so dass die geometrische Drehachse des Limbus durch die äussere, diejenige der Alhidade durch die innere Fläche dieser Büchse bestimmt ist. Werden z. B. bei dieser Konstruktion Limbus und Alhidade durch eine Randklemme K (s. Fig. 231) und die zugehörige Feinbewegung zusammengekuppelt und sollen beide dann gemeinsam gedreht werden, so sucht Limbus sowohl, als Alhidade die Drehung je um die eigene Achse auszuführen. Sind also beide Achsen nicht identisch, so treten hiebei Spannungen auf bis zum Betrag der doppelten linearen Exzentrizität d beider Achsen, welche die gegenseitige Stellung von Teilkreis und Zeiger samt der Höhenlage ihrer Achsen zu ändern bestrebt sind. Instrumente mit französischer Achsanordnung eignen sich daher im allgemeinen nicht für repetitionsweise Winkelmessung.

Nach Erledigung dieser Vorfrage kommen wir nun zur Hauptfrage: Soll, die Reichenbachsche, oder eine ähnliche andere Achsanordnung vorausgesetzt, bei der repetitionsweisen Beobachtung die Limbus-, oder die Alhidadenachse vertikal gerichtet werden, falls beide um den Winkel ν gegeneinander divergieren?

Richtet man die Alhidadenachse vertikal, so weicht die Achse der Fussgestellbohrung (Limbusachse) um den Winkel ν von der Vertikalen ab. Solange nun nur die Alhidadenachse gedreht wird, bleibt sie, wie auch die von ihr abhängigen Kippebenen vertikal. Dreht man jedoch Limbus samt Alhidade, so beschreibt die Achse der letzteren um die Limbusachse eine Kegelfläche. Sie erhält samt den von ihr abhängigen Kippebenen eine geneigte Lage und zwar erreicht die Neigung ihr Maximum $\nu = 2\nu$, wenn die bewirkte Drehung der Limbusachse $2R$ beträgt.

Hätte man umgekehrt von Anfang an die Limbusachse vertikal gerichtet, so wäre die Alhidadenachse samt den von ihr abhängigen Kippebenen um den Winkel ν gegen die Vertikale geneigt gewesen. Eine spätere Drehung der Limbusachse hätte hieran nichts geändert, sie wäre immer vertikal, die Alhidadenachse immer nur um den Winkel ν geneigt geblieben.

Der schädliche Projektionseinfluss des konstanten Alhidadenachsenfehlers $\nu = \nu$ ist aber jedenfalls geringer, als derjenige des von 0 bis 2ν wechselnden im ersten Fall.

Wir erkennen daraus: Für Messungsmethoden, bei denen abwechselungsweise Limbus und Alhidade zu drehen sind (repetitionsweise Winkelmessung), wird zweckmässigerweise die Limbusachse (und nicht die Alhidadenachse), bei Anwendung von Messungsmethoden, welche nur die Drehung der Alhidaden-

achse verlangen (Richtungsbeobachtungen s. S. 356) diese vertikal gerichtet.

Würde man den zu messenden Winkel statt 2 n-mal, nur n-mal addierend und dann aber n-mal subtrahierend auf dem Teilkreis aneinanderlegen, so hätte man neben der soeben benützten Summe n — (4 R) für jeden Winkelwert noch eine durchgreifende Einzelprobe. Dieses, von K. F. Gauss 1843 gezeigte Repetierverfahren der

3. gleichzeitigen Messung eines Winkels und seines Implements

Gauss'sches Repetierverfahren.

wendet in der Fernrohrlage I n-malige Repetition an, genau wie oben gezeigt, mit rechtsläufiger Alhidaden- und linksläufiger Limbusdrehung. Nachdem dann die Ablesung an beiden Nonien bewirkt ist, folgt die n-malige Beobachtung in Fernrohrlage II, wobei aber die Alhidade vom Zielpunkt rechts zum Zielpunkt links, der Limbus also rechtsläufig gedreht, und der zu messende Winkel von der auf dem Teilkreis im ersten Teil des Verfahrens erhaltenen Summe n-mal abgezogen wird. Zum Schluss muss sich also die Anfangsablesung wieder zeigen.

Beispiel: Zu messen ist (s. Fig. 230) der Winkel A C B:
Einstellg. des Kreuzfadens auf A. Ablesg. a_I bzw. a_{II} auf Non. I bzw. II.
Nach n-facher repetitionsweiser Messung des Winkels ω in Fernrohrlage I [s. (a) bis (c) des vorigen Verfahrens] erfolgt die Ablesung . . . b_I^n „ b_{II}^n „ „ „
Nach abermals n-facher, rückläufiger Repetition in Fernrohrlage II erfolgt Ablesung $\underline{a_I^{2n}}$ „ $\underline{a_{II}^{2n}}$ „ „ „

Aus den Ablesungen ergibt sich nun

$$\begin{aligned} n \omega &= b_I^n - a_I = b_{II}^n - a_{II} \\ n \cdot (-\omega) &= a_I^{2n} - b_I^n = a_{II}^{2n} - b_{II}^n \end{aligned}$$

und durch Subtraktion:

$$2n \omega = 2 b_I^n - (a_I + a_I^{2n}) = 2 b_{II}^n - (a_{II} + a_{II}^{2n}),$$

d. h. der 2n-fache Winkel ω ergibt sich auf jeder der beiden Ablesevorrichtungen als Überschuss der doppelten Zwischen-, über die Summe von Anfangs- und Endablesung. Eine Probe für die wichtige Zwischenablesung ist hiebei aber nicht vorhanden. Sie müsste durch Kontrollablesung etwa an einer weiteren Ablesemarke (vergl. Tachymeterbeobachtung) geschaffen werden.

Die Addition der beiden obigen Gleichungen liefert

$$0 = a_I^{2n} - a_I = a_{II}^{2n} - a_{II}$$

d. h. auf jedem der beiden Nonien muss, eine wichtige Messungsprobe, die Schlussablesung gleich der Anfangsablesung sein.

Dieses Verfahren hat den Vorzug, dass im Falle des Vorhandenseins einer Divergenz ν zwischen Limbus- und Alhidadenachse jeder geneigten Stellung der Kippachse eine zweite von entgegengesetzt gleicher Neigung zugeordnet wird, welche den Fehler einfluss der ersteren tilgt, sobald man wie bei (2) die Horizontierung des Instruments mittels der Limbusachse bewirkt.

Weitere Beobachtungsverfahren — einfache Winkelmessung in allen Kombinationen der vom Scheitel ausgehenden Strahlenpaare, nötigenfalls, da die Winkelgenauigkeit trotz gleicher Repetitionszahl verschieden sein wird, sobald Beleuchtungsverhältnisse, Strahlenlänge etc. wechseln, bis zur Erreichung eines als zulässig zum voraus festgesetzten mittleren Fehlers („auf die stehende Sekunde“), Verbindung der zu beobachtenden Richtungen, statt unter sich, mit derjenigen nach einer Nullmarke („Mire“) —, die nur bei Messungen für Zwecke höherer Ordnung Anwendung finden, können hier übergangen werden.

Von grosser Bedeutung für die Aufgaben der niederen Geodäsie ist dagegen

B. Die Beobachtung von Richtungen.

Hiebei handelt es sich nicht um die Ermittlung des Winkels zwischen zwei bestimmten, sondern um die gleichzeitige Feststellung der gegenseitigen Lage aller in Betracht kommenden, von einem Standpunkt ausgehenden Strahlen.

4. Richtungsbeobachtung in vollen Sätzen.

Unter einem „Satz“ versteht man im gegenwärtigen Fall die je einmalige Einstellung aller zu beobachtenden Richtungen in jeder der beiden Lagen des Fernrohrs samt jedesmaliger Ablesung an beiden zum Horizontalkreis gehörigen Ablesevorrichtungen.

Die Ausführung geschieht folgendermassen:

Nachdem das Fernrohr des auf dem Standpunkt zentrierten und, im Gegensatz zur Repetitionsmessung, mittels der Alhidadenachse horizontalen Theodoliten auf einen der bestbeleuchteten Zielpunkte eingestellt ist, wird an beiden Nonien (bezw. Mikroskopen) abgelesen. Alsdann wird bei festem Limbus und geöffneter Alhidade das Fernrohr in der Reihenfolge von links nach rechts auf alle Zielpunkte eingestellt und jedesmal an beiden Nonien abgelesen. Zuletzt wird, der Probe halber, wieder auf den Ausgangspunkt eingestellt. Die hiebei gewonnene Kontrollablesung muss mit der An-

fangsablesung übereinstimmen. Ist die sich einstellende Differenz zu gross (z. B. grösser als die Nonienangabe), so ist die bisherige Beobachtung zu wiederholen, weil die Abweichung auf einen groben Fehler (Erschütterung des Instruments, Drehung des Limbus, Veränderung des Zielpunkts, Ablesefehler etc.) hinweist. Damit ist ein „Halbsatz“ erledigt.

Nun wird das Fernrohr durchgeschlagen, zuerst auf den letzten Punkt und dann auf die übrigen in umgekehrter Reihenfolge (von rechts nach links) wieder eingestellt unter jedesmaliger Ablesung an beiden Nonien. Auch hier muss die Schlussablesung mit der in der II. Fernrohrlage gemachten Anfangsablesung innerhalb zulässiger Fehlergrenzen übereinstimmen. Andernfalls ist der zweite Halbsatz nachzubeobachten. Ist Übereinstimmung erzielt, so ist der I. Satz beendet.

Sind s Sätze zu beobachten (für Arbeiten der niederen Geodäsie genügen im allgemeinen deren 2 bis 3), so wird der Limbus, um mit den Ablesungen auf allen Stellen des Teilkreises und des Nonius herumzukommen, vor jedem neuen Satz (und zwar bei Verwendung von Repetitionstheodoliten mittels Öffnung der Limbusbremsschraube, bei Verwendung einfacher Theodoliten durch Drehung des Instruments auf dem Stativ) annähernd um $\frac{2}{s} R$ gedreht, die Horizontierung des Instruments mit Benützung der Alhidadenachse in dieser neuen Limbusstellung nachgesehen, bezw. verbessert und die Fernrohrlage I wiederhergestellt. Alsdann erfolgt die Beobachtung des 2., 3., sten Satzes, wie zuvor diejenige des ersten.

Als Anfangsablesung im I. Satz kann man den Wert 0 einstellen.

Mit Rücksicht auf das bequemere Aufsuchen von, ihren Koordinaten nach gegebenen Zielpunkten und auf bequemere Abrissaufstellung (s. § 63) ist es jedoch zumeist zweckmässiger, durch vorgängige Berechnung und Einstellung des angenäherten Richtungswinkels φ (s. § 56) für den Anfangsstrahl, auch für die übrigen Strahlen genäherte Richtungswinkel abzulesen.

Beispiel s. S. 358 und 359.

Rechnerische Vereinigung der bei jedesmaliger Ablesung an zwei Nonien und aus s Sätzen für jede Richtung gewonnenen $4s$ Richtungswerte.

Die Feldarbeit ergab, soweit nicht auch (um etwa nötig werdende Nachbeobachtungen sofort bewirken zu können) die Weiterverarbeitung sofort an Ort und Stelle durchgeführt wurde, die Ausfüllung der Vertikalspalten 1—4 mit den direkten Messungsergebnissen, nämlich 4 Richtungswerten in jedem Satz für jeden Strahl. Ihre Vereinigung zu je einem Mittelwert ist nötig, erfolgt aber

Gemessen am 2./XI. 1907

von

Ziel- punkte.	Non. I.		II.		Mittel aus Non. I u. II.	Mittel aus Lage I und II Richtungswerte reduziert a) nach einer Anfangsrichtung b) nach Satzmitteln	Mittel aus den reduzierten Richtungen 6 a 6 b	Bemerkungen und Rechenproben.
	0	1	2	3				
I.	3.				5.	6.	7.	8.

Satz I.

I	50	01	50	02	00	01 75 ³⁾	50	02 43 ₇₅	
II	250	03	00	03	25	08 12 ₆			
I	137	32	25	32	50	32 37 ₅	137	33 06 ₂₅	
II	337	33	75	33	75	38 75			
I	6	75	00	75	25	75 12 ₅	6	75 98 ₇₅	
II	206	76	75	76	75	76 75			
I	(50	01	50	02	00)				
II	(250	02	75	03	00)				
I		22	25	23	50	222 87 ₅ ×	111 43 ₇₅ ×		
II									

Satz II.

I	115	98	75	99	00	98 87 ₅	115	99 00	
II	315	99	00	99	25	99 12 ₆	50 02 43 ₇₅	50 02 25 ³⁾	
I	203	29	00	29	50	29 25	203 29 50		
II	3	29	75	29	75	29 75	137 32 98 ₇₅	137 32 75	

Bei Nebenbeobachtung:
Zielpunkt Links: Kappel.
Standpunkt: Höhe zentrisch.
Signalpunkt: Höhe (Stange).
Winkel.
einfach 202° 00' Entfernung. 0,935
zweifach 4° 20' 0,931
Mittel 202° 10' 0,933

I	72	72	75	72	50	72 62 ₆	72	73 18 ₇₅	
II	272	74	00	73	50	73 75	6	76 62 ₆	
I	(115	99	00	99	00)				
II	(315	99	50	99	25)				
I		43	25	43	50	403 37 ₅ ×	201 68 ₇₅ ×	313 68 ₇₅ †	111 43 ₇₅ δ)
II									

Satz III.

I	185	02	75	03	00	02 87 ₅	185	08 62 ₆	
II	385	04	25	04	50	04 37 ₆	50 03 06 ₂₅	02 43 ₇₅	50 02 58 ₃
I	272	33	00	33	00	38 00	272 38 81 ₂₅	32 87 ₆	32 87 ₆
II	72	34	50	34	75	34 62 ₆	137 33 25 137 33 02 ₁		
I	141	75	25	75	50	75 37 ₅	141 75 68 ₇₅	6 75 68 ₇₅	6 75 82 ₃
II	341	76	00	76	00	76 00	6 74 50 6 75 12 ₅		
I	(185	02	50	02	75)				
II	(385	04	00	04	00)				
I		25	75	26	75	226 25	113 12 ₅ ×	222 68 ₇₅ †	111 43 ₇₅ δ)
II									

× [Spalte 5] = $\frac{[\text{Spalte } \delta] + [\text{Spalte } 4]}{2}$
 × [Mittel aus Lage I und II] = $\frac{[5]}{2}$

Verdre-
winkel $\omega_a^1 = 115^\circ 99' 00'' - 50^\circ 02' 43'' = 65^\circ 96' 56''$.
 (Zum Verfahren nach Anm. 2)
 † Probe: [Spalte 5] — n. $\omega = [\text{Mittel aus Lage I u. II} + \text{Sp. 6 a}]$
 $403' 37'' - (3 \times 96' 56'' = 89' 68'') = 313' 68''$.
 $\omega_{\text{Mittel}} = \frac{[\text{Mittel a. Lage I u. II}]_{\text{Satz I}} - [\text{Mittel a. Lage I u. II}]_{\text{Satz II}}}{3}$
 (Zum Verfahren nach Anm. 3)
 $\frac{111' 43'' - 201' 68''}{3} = 33^\circ 03' 25''$.
 δ) Probe [6b]_{II} = [6] Satz I.
 Verdre-
winkel $\omega_a^2 = 185^\circ 03' 62'' - 50^\circ 02' 43'' = 135^\circ 01' 18''$.
 (Zum Verfahren nach Anm. 2)
 † Probe: [Spalte 5] — n. $\omega = [\text{Mittel aus Lage I u. II} + \text{Sp. 6 a}]$
 $226' 25'' - (3 \times 01' 18'' = 3' 56'') = 222' 68''$.
 $\omega_{\text{Mittel}} = \frac{111' 43'' - 113' 12''}{3} = 26^\circ 09' 43''$.
 (Zum Verfahren nach Anm. 3)
 δ) Probe: [6b]_{III} = [6] r.
 Hauptprobe für die Behandlung nach Anm. 2:
 [Spalte 6 Satz I]
 1) $\frac{313' 68'' - 89' 68''}{2} = 111' 43''$.
 2) $\frac{222' 68'' - 3' 56''}{2} = 112' 00''$.
 1) $\frac{222' 68'' - 3' 56''}{2} = 109' 56''$.
 2) $\frac{333' 00''}{3} = 111' 00''$
 = [7 a].
 Mittel = $\frac{333' 00''}{3} = 111' 00''$
 = [7 a].

*) Zum mindesten die Spalten 1 bis 4 enthalten ausschliesslich Feldaufschriebe.
 **) Die Spalten 5 bis 7 können im Zimmer ausgefüllt werden und zwar beziehen sich die senkrechten Ziffern auf die rechnerische Ausmittelung der Richtungswerte nach einem feststehenden Anfangswert.
 ***) Die schrägen Ziffern beziehen sich auf die rechnerische Ausmittelung der Richtungswerte nach Satzmitteln.

(unter Ausschluss der letzten, Kontroll, Ablesung) nur bezüglich der Minuten und Sekunden, während die Gradwerte von Nonius I und Lage I unverändert beibehalten werden. Zur Mittelung der Ablesungen an Nonius I und Nonius II dient Spalte 5, zu derjenigen der so erhaltenen Mittelwerte für Lage I und II die obere Zeile der Spalte 6. Zur Probe zieht man die Summen [], wobei sein muss:

$$\frac{[\text{Spalte 3}] + [\text{Spalte 4}]}{2} = [\text{Spalte 5}] = 2 \cdot [\text{Spalte 6, obere Zeile}].$$

Nun sind für jede Richtung noch s Werte, — einer in jedem Satz (s . Spalte 6, obere Zeile) — vorhanden, deren Vereinigung durch direkte Mittelung, namentlich im Fall der Verwendung alter Winkelteilung, allzu schwerfällig wäre. Um sie zu erleichtern, vermindert man die gewonnenen „Mittel aus Lage I und II“ in jedem Satz um einen konstanten Winkelwert, also ohne Veränderung der gegenseitigen Lage der Strahlen, derart, dass jedem Strahl in allen beobachteten Sätzen ungefähr derselbe Richtungswert zukommt. Dies lässt sich erreichen:

1. indem man dem Anfangsstrahl in allen Sätzen den gleichen, zum voraus gewählten Richtungswert 0 oder φ wie im Satz I zuschreibt, und die danach „reduzierten Richtungen“ in die zweite Zeile der Spalte 6 einträgt (s . aufrechte Ziffern im vorigen Beispiel). Als Rechenprobe ergibt sich dann für die Gesamtsumme der Sp. 6 in jedem Satz, in welchem Reduktion stattfand, $[6] = [5] - n \cdot \omega$, wenn n die Anzahl der Strahlen und ω den im betreffenden Satz eingeführten Reduktionsbetrag (den Verdrehungswinkel) bezeichnet, um welchen dessen sämtliche Richtungswerte vermindert wurden. Damit sind s „reduzierte“ Richtungswerte für jeden Strahl gewonnen, von denen diejenigen für den Anfangsstrahl genau, diejenigen für die übrigen Strahlen annähernd einander gleich sind. Aus ihnen wird das in Spalte 7 des letzten Satzes mit aufrechten Ziffern eingetragene „Mittel aus den reduzierten Richtungen“ gebildet. Als Schlussprobe für die richtige Mittelung aus allen s Sätzen ergibt sich dann:

$$[7] = \frac{\frac{1}{2} ([6] - n \cdot \omega)_{\text{I. Satz}} + \dots + \frac{1}{2} ([6] - n \cdot \omega)_{\text{s. Satz}}}{s}$$

Statt das durch jeden Satz gewonnene Richtungsbüschel nach einem in allen Sätzen festgehaltenen Richtungswert α_1^0 des Anfangsstrahls zu orientieren und damit für die „reduzierte Richtung“ gerade dieses Anfangsstrahls identische Werte in allen Sätzen einzuführen, hätte man die Orientierung ebensogut nach einem in allen Sätzen festzuhaltenden Richtungswert für den zweiten, oder für den dritten etc. Strahl bewirken können.

Laut technischer Anweisung vom 19. Januar 1895 ist für Katastervermessungen in Württemberg höchstensfalls zulässig

$$M = \pm 25'' \text{ n. T.}$$

Es drängen sich jetzt noch folgende Fragen auf:

a) Welches ist die zweckmässigste Art der Vereinigung der Sätze?

Die Orientierung der Sätze nach einem als fest angenommenen Richtungswert hat den Vorteil, die leichte Ausschaltung einer in irgend einem Satz etwa fehlerhaft beobachteten Richtung zu ermöglichen, ohne die Reduktion seiner wegen wiederholen zu müssen, wenn der Fehler sich durch auffallende Abweichung des fraglichen von den übrigen reduzierten Richtungswerten desselben Strahls zeigt. Seine Nachbeobachtung ändert bei Anwendung des genannten Reduktionsverfahrens an der Orientierung der übrigen Richtungen nichts, und die Reduktionsberechnung selbst ist sehr bequem.

Die Orientierung nach Satzmitteln dagegen ermöglicht die Berechnung des mittleren Beobachtungsfehlers.

b) Ist es wünschenswerter, viele, oder wenige Strahlen in einen Satz einzubeziehen?

Bei Einbeziehung vieler Strahlen können plötzliche Witterungs- und Beleuchtungsveränderungen die Fertigstellung eines Satzes verhindern, so dass die in ihm bereits bewirkten Beobachtungen nutzlos sind. Die Einstellung schwer zu sichtender Punkte ist nach längeren Zeiträumen schwieriger, als nach kurzen; etwaige äussere Einflüsse (Stativerschütterungen durch Wind, Folgen schwanken Untergrundes, Drehung des Stativs nach der wandernden Sonne, Federnachwirkungen etc.) wirken in langen Zeiträumen stärker und ungleichmässiger, als in kurzen, Störungen am Instrument durch Ungeschicklichkeit dritter können bei grossen Sätzen die Ausschaltung grösserer Beobachtungsreihen nötig machen. (Im Feldbuch ist bei jedem Fall derartiger Ausscheidung von Beobachtungen die Ursache anzugeben.) Es ist daher zweckmässig, nicht allzuviele Richtungen (nur etwa 6—8) in eine Beobachtungsgruppe aufzunehmen und nötigenfalls die Strahlen lieber (s. unter 6. S. 366) in mehreren Gruppen unterzubringen.

c) Ist die Vernachlässigung der letzten (Kontroll)-Ablesung bei der Vereinigung der Beobachtungswerte berechtigt?

Wenn in jeder Fernrohrlage Anfangs- und Endablesung eines Satzes einander gleich sind, so ist die Vernachlässigung der letzteren ohne Bedeutung. Sind beide nicht einander gleich, so kann die Differenz herrühren von unvermeidlichen kleinen Ablese-, oder Zielfehlern, oder von einer während der Satzbeobachtung eingetretenen Teilkreisrotation.

Bilden die erstgenannten Fehlerquellen den Grund der Abweichung, so würde eine Berücksichtigung der Kontrollablesung bei der Mittelbildung dem Richtungswert des Anfangsstrahls eine $\sqrt{2}$ mal grössere Genauigkeit, also ein 2fach grösseres Gewicht verschaffen, als den übrigen Richtungswerten. Damit aber auch einen nutzlos vermehrten Arbeitsaufwand bei der Weiterverwendung. In diesem Fall ist also die Vernachlässigung der Kontrollablesung wohl berechtigt.

Rührt dagegen die Differenz zwischen der Kontroll-, und der ersten Ablesung von einer während der Beobachtung vor sich gegangenen Teilkreisrotation

her, so hat die Vernachlässigung der Kontrollablesung lediglich die Wirkung, dass für die Vereinigung an ihre Stelle die erste, vor der Drehung bewirkte Ablesung tritt. Dadurch entsteht im Winkel zwischen dem letzten und dem ersten Strahl eine Klaffung, welche durch entgegengesetzt gerichtete Fehler in den Winkeln zwischen den übrigen Strahlen verdeckt wird, welche aber, gleichmässige Drehung des Teilkreises vorausgesetzt, bei Mitverwendung der Schlussablesung ausgeglichen würde.

Daraus geht hervor, dass namentlich dann, wenn die Schlussablesung zur Richtungsmittlung nicht verwendet werden will, durch entsprechende Befestigung des Instruments auf dem Stativ, scharfe Klemmung der (besser etwas zu schwer als zu leicht gehenden) Limbusachse und Verhinderung etwaiger Stativdrehung innerhalb eines Satzes durch beschleunigte Beobachtung für möglichst unveränderte Lage des Teilkreises zu sorgen ist. Etwaiges, wenn auch gleichmässiges Mitschleppen des Teilkreises wird nicht etwa eliminiert durch

d) die veränderte Reihenfolge der Anzielung im II. Halbsatz.

Möge z. B. der Limbus je von einem Zielpunkt zum nächsten um den Winkel μ mitgeschleppt werden, so erhält man bei der Drehung der Alhidade von links nach rechts (I. Halbsatz) zu kleine, bei umgekehrter Drehung zu grosse Ablesungen. Die Richtungsfehler betragen demnach im Falle der Beobachtung von n Strahlen:

	A	B	C	... (R + 1) ...	A
bei Zielung nach Punkt					
im I. Halbsatz (Drehung rechtsläufig)					
	0	$-\mu$	-2μ	$-r\mu$	$-n\mu$
im II. Halbsatz (Drehung linksläufig)					
	$+n\mu$	$+(n-1)\mu$	$+(n-2)\mu$	$+(n-r)\mu$	0,

also bei Mittelung unter Vernachlässigung der Kontrollablesung:

$$+\frac{n}{2}\mu + \frac{n-2}{2}\mu + \frac{n-4}{2}\mu + \frac{n-2r}{2}\mu \dots - \frac{n}{2}\mu.$$

Würde dagegen in beiden Halbsätzen die Alhidadendrehung rechtsläufig ausgeführt, so betrügen bei Zielung nach

	A	B	C	... (R + 1) ...	A
die Richtungsfehler im I. Halbsatz	0	$-\mu$	-2μ	$-r\mu$	$-n\mu$
" " " II. "	0	$-\mu$	-2μ	$-r\mu$	$-n\mu$,

also bei Mittelung unter Vernachlässigung der Kontrollablesung:

$$0 \quad -\mu \quad -2\mu \quad -r\mu \dots -n\mu.$$

In beiden Fällen wächst also die Unrichtigkeit von Richtung zu Richtung um μ , die Klaffung zwischen dem letzten und dem ersten Strahl beträgt bei n Winkeln $n \cdot \mu$.

Wenn derart die Anordnung der Beobachtung des zweiten Halbsatzes in entgegengesetzter Reihenfolge für gewöhnlich ohne sachliche Bedeutung ist, so gewinnt sie solche unter Umständen für feinere Messungen durch die Wirkung, eine etwaige gleichmässig drehende Bewegung des Stativs, oder Beobachtungsgerüsts (s. § 43) zu eliminieren. Auch die Wirkungen einseitiger Beleuchtung der Zielpunkte (der stärker beleuchtete, hellere Streifen erscheint breiter, als der dunklere, wodurch an unrichtiger Stelle angezielt wird) „Lichtphasen“ werden durch das beschriebene Verfahren, welches die Anzielung zeitlich symmetrisch zur Mittelzielung anordnet, eingeschränkt.

Vereinigung der nach einer Anfangsrichtung reduzierten Rich-
Nachmessungs

	Zielpunkte																	
	1) Röthe				3) Neustadt				7) Korber Höhe									
	0	'	"	+	-	0	'	"	+	-	0	'	"	+	-			
Satz I	0	0	0			7	10	25			112	33	75					
Berichtigter Satz I (Mittel) . .	399	99	92	2	4	7	10	25	10	100	112	34	04	32	1024			
Nachmessung zu Satz I	0	0	0								112	34	50					
Orientierte Nachmessung zu Satz I	399	99	83								112	34	33					
Reduzierter Satz II	0	0	0			7	10	00			112	34	25					
Berichtigter Satz II (Mittel) . .	399	99	87			7	10	00			112	34	50					
Nachmessung zu Satz II	0	0	0								112	34	25					
(Auf Anfangsrichtung 0 reduziert)																		
Orientierte Nachmessung	399	99	75								112	34	25					
Nach Satz I orientierter berich- tigter Satz II	0	0	0	11	121	7	10	14	1	1	112	34	39	3	9			
Reduzierter Satz III	0	0	0			7	10	50			112	35	50					
Berichtigter Satz III (Mittel) . .	0	0	21			7	10	50			112	35	09					
Nachmessung zu Satz III	0	0	0								112	34	25					
(Auf Anfangsrichtung 0 reduziert)																		
Orientierte Nachmessung	0	0	42								112	34	67					
Nach Satz I orientierter berich- tigter Satz III	399	99	76	14	196	7	10	05	10	100	112	34	64	28	784			
Endgültige Mittelwerte aus den orientierten berichtigten Sätzen	399	99	90	14	13	321	7	10	15	11	10	201	112	34	36	32	31	1817
	$m_{Röthe} = \pm \sqrt{\frac{321}{2}}$					$m_N = \pm \sqrt{\frac{201}{2}}$					$m_{K.H.} = \pm \sqrt{\frac{1817}{2}}$							
	$= \pm 13''$					$= \pm 10''$					$= \pm 30''$							
	$m = \pm \sqrt{\frac{321 + 201 + 1817 + 18 + 2393 + 834}{5 \cdot 2}} = \pm 24''$																	

5. Nachträgliche Einschaltung von Satzteilen.

Tritt der Fall ein, dass irgend ein Zielpunkt vorübergehend schlecht beleuchtet ist, also nicht eingestellt werden kann, oder ergeben sich bei der Orientierung, bzw. Mittelbildung (Spalten 5 bis 7 S. 358/359) starke, ihrer Ursache nach unbekannte Differenzen einer Richtung in einem, oder dem anderen Satz gegenüber dem Mittelwert, so wird man nicht die ganze übrige Satz-messung wegwerfen wollen. Man wird vielmehr Nachbeobachtungen ausführen und durch sie den angezweifelten Satzteil ersetzen. Zur Nachbeobachtung, welche sich auf die angezweifelten und min-

tiongswerte in den einzelnen Sätzen mit den zugehörigen ergebnissen.

	Zielpunkte																	
	10) Weidach				2) Schmidn				5) Waibl. Wacht.									
	0	'	"	+	-	0	'	"	+	-	0	'	"	+	-			
						286	62	25			370	90	00					
240 55 83				3	9	286	62	04	39	15	21	370	90	00	23	529		
240 56 00						286	62	00										
240 55 83						286	61	83										
240 55 50						konnte nicht beob. werd.				370	90	25						
240 55 63						286	61	25			370	90	25					
240 56 00						286	61	50										
240 55 75						286	61	25										
240 55 77				3	9	286	61	39	26	676	370	90	39	16	256			
240 56 25						286	61	75			370	90	75					
240 56 25						286	61	96			370	90	75					
						286	61	75										
						286	62	17										
240 55 80				0	0	286	61	51	14	196	370	90	30	7	49			
240 55 80				3	3	18	286	61	65	40	39	2393	370	90	23	23	23	834
	$m_w = \pm \sqrt{\frac{18}{2}}$					$m_{sch.} = \pm \sqrt{\frac{2393}{2}}$					$m_w = \pm \sqrt{\frac{834}{2}}$							
	$= \pm 3''$					$= \pm 35''$					$= \pm 20''$							
	$M = \pm \frac{24}{\sqrt{3}} = \pm 14''$																	

destens zwei weitere nicht angezweifelte Werte erstreckt, wählt man natürlich dieselbe Teilkreisstellung und Fernrohr-lage, welche bei dem betreffenden Satzteil selbst vorhanden war. Der Einfügung in die ursprüngliche Beobachtung hat die Ausschaltung aller grob fehlerhaften Werte voranzugehen. Hiezu gehören in erster Linie diejenigen, die durch eine bekannte Fehler-Ursache — Veränderung des Zielpunkts, Ablesefehler etc. — beeinflusst wurden, sodann aber auch diejenigen, deren starke Abweichung vom zu erwartenden Mittelwert nur durch unzulässiges Zusammenwirken unvermeidlicher Fehlerursachen erklärlich ist, oder die Wirkung

grober Fehler vermuten lässt. (Dies ist der Fall, wenn diese Abweichung den dreifachen mittleren Fehler¹⁾ überschreitet.) Nach den übrigen Werten α^0 der ersten Messung im selben Satz wird das durch Nachmessung gewonnene Richtungsbüschel dabei zunächst orientiert (Verdrehungswinkel ω , der zu den nachbeobachteten Richtungen addiert wird, $\omega = \frac{\alpha_1^0 - \alpha_1 + \dots + \alpha_r^0 - \alpha_r}{r}$). Schliesslich wird das Mittel der vorhandenen, nicht ausgeschiedenen Werte, bezw. der orientierte Nachmessungswert eingeführt. (Beispiel s. S. 364 und 365.)

6. Einschaltung weiterer Strahlen.

Wenn einzelne zu beobachtende Strahlen infolge mangelhafter Beleuchtung, oder sonstiger vorübergehender Hindernisse wegen zunächst nicht anzielbar sind, oder wenn die Gesamtzahl der auf einem Punkt zu beobachtenden Strahlen für die gleichzeitige Aufnahme in einen Satz zu gross erscheint, so zerlegt man das Strahlenbündel in Gruppen, deren jede eine zulässige Zahl von Strahlen enthält und in der normalen Zahl von Sätzen beobachtet wird. Jede folgende Gruppe muss jedoch in diesem Fall mindestens zwei Strahlen von vorhergehenden Gruppen enthalten. Sind dann die Richtungswerte innerhalb jeder Gruppe, nach Verfahren (4) für sich gemittelt, so erfolgt zum Schluss die Vereinigung aller, durch Auswahl einer „Leitgruppe“ und Orientierung der übrigen nach ihr (s. Beispiel S. 367).

7. Benützung mehrfacher Standpunkte.

Kann örtlicher Hindernisse wegen kein Stand gefunden werden, von dem aus sämtliche auf dem betreffenden Punkt zu beobachtende Strahlen sichtbar sind, so wählt man in der Nähe des letzteren andere, „exzentrische Standpunkte“, von denen aus gruppenweise nach Verfahren (4) die Beobachtungen gemacht und je unter sich vereinigt werden. Auch hier muss jede Gruppe mindestens zwei Strahlen anderer Gruppen wiederholt enthalten. Durch „Zentrierungsberechnung“ (s. § 45) gewinnt man alsdann aus den gemittelten exzentrischen diejenigen Richtungswerte jeder Gruppe, die man erhalten hätte, wenn die Messung auf einem gemeinsamen

¹⁾ Der mittlere Fehler m einer in einem Satz beobachteten Richtung kann für bestimmte Verhältnisse (Strahlenlänge, Beleuchtung, Beobachtungsmethode, Instrument etc.) aus früheren Beobachtungen nach dem S. 361 gezeigten Verfahren erschlossen, oder einer amtlichen Vermessungsanweisung entnommen werden. Die württembergische Anweisung vom 19./I. 1895 bestimmt hiefür in § 56 Abs. 3: $m = 8\sqrt{s''}$ a. T. oder $25\sqrt{s''}$ n. T. Als grobem Fehler entsprechen gelten Abweichungen $> 3 m$.

Vereinigung der Richtungswerte mehrerer, auf identischem Standpunkt beobachteter Strahlengruppen.

Zielpunkt	0			0			0			0			0		
	0	'	"	0	'	"	0	'	"	0	'	"	0	'	"
	Standpunkt: Höhe zentrisch (Δ mitten)														
	Leitgruppe = Richtungsgruppe I (Mittel a. 3 Sätzen)			Richtungsgruppe II (Mittel a. 3 Sätzen)			$\omega = I - II$			III = red. Gruppe II = II + ω			IV = Vereinigte Gruppe I und III		
Haiger . . .	50	02	58	110	06	38	339	96	20	50	02	64	50	02	61
Kappel . . .	137	33	02										137	33	02
Halde . . .	6	75	83	66	79	51	339	96	32	6	75	77	6	75	80
Kalkofen . . .				115	33	40				55	29	66	55	29	66
Neupunkt 5 .				310	16	40				250	12	66	250	12	66
		111	43		135	69	339	96	26		120	73		153	75
	(Siehe S. 359)			Übereinstimmend mit der Vereinigung der 2. Gruppe im Winkelformulare			gleich ω Mittel			(= 135' 69" + 4 ω zur Probe)			(Als Probe für künftige Überträge)		

Winkelscheitel ausgeführt worden wäre. Zu diesem Zweck ist die Entfernung e des Standpunkts von diesem Scheitel und der Winkel zwischen dieser Verbindungsstrecke und einem der beobachteten Strahlen zu messen und in Spalte 8 (s. S. 358) einzutragen.

Die Vereinigung der zentrierten Gruppen erfolgt schliesslich nach Fall (6).

§ 43. Vergleichende Würdigung der im § 42 vorgeführten Beobachtungsverfahren.

Die vorgeführten Beobachtungsmethoden lassen nach Durchführung, erreichbarer Genauigkeit und nötigem Zeitaufwand zwei Gruppen unterscheiden, nämlich

A die Winkelbeobachtungen (von denen hier eigentlich nur die Verfahren (2) und (3) in Frage kommen) und

B die Richtungsbeobachtungen.

Richtungsbeobachtungen müssen namentlich da angewandt werden, wo nicht zum voraus feststeht, welche Winkel zwischen gegebenen Strahlen im ferneren Verlauf der Arbeit zur Verwendung kommen. (Triangulierung). Allen Richtungswerten, sowie allen aus ihnen durch Abzug je zweier etwa gewonnenen Winkeln, kommt gleiche Genauigkeit und gleiches Gewicht zu, während Genauigkeit, bezw. Gewicht eines aus mehreren gemessenen Winkeln durch Addition oder Subtraktion zusammengesetzten Winkels abnimmt, proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl der verwendeten Summanden, bezw. proportional der letzteren selbst.

Anwendungsbereich.

Richtungsbeobachtungen müssen ferner bei solchen Theodolitkonstruktionen angewandt werden, welche eine unveränderliche gegenseitige Lage von Limbus und Alhidade bei gleichzeitiger Drehung beider nicht gewährleisten (z. B. französische Achsanordnung s. Seite 353), oder bei welchen eine Drehung des Limbus nicht möglich ist (einfache Theodoliten).

Umgekehrt müssen Winkelbeobachtungen da angewandt werden, wo das zum Zweck des Ablesens bei Richtungsbeobachtungen nötige Umgehen des Instruments nicht möglich oder nicht zulässig ist, also bei der Beobachtung auf steilen Felsen, Turmbrüstungen etc. und auf schwankem Grund (Sumpf). Zum Zweck der Ablesung bringt man in diesem Fall nach erfolgter Messung Teilkreis samt festgebremstem Zeiger in eine für die Ablesung bequeme Lage. Die Beobachtung dagegen kann durch bloße Bewegung des Rumpfes ermöglicht werden.

Winkelbeobachtungen können sich auch empfehlen bei langen Strahlen, bei denen es unter Umständen schwierig ist, sämtliche Punkte ohne Unterbrechung in vollen Sätzen anzuzielen, während die Möglichkeit, gleichzeitig zwei Punkte gut beleuchtet zu haben, öfter gegeben ist. Allerdings kann es sich in solchem Fall nur handeln um Winkelmessung in allen Kombinationen, oder unter Verwendung eines stets sichtbaren Zielpunktes, einer „Mire“.

Genauigkeit von Winkel- bzw. Richtungsbeobachtungen.

Genauigkeit.

Die Richtungsbeobachtungen, bei denen für jeden Satz die Alhidadenachse vertikal gestellt und erhalten wird, sind frei von dem Einfluss des durch etwaige Divergenz zwischen Limbus- und Alhidadenachse verursachten Vertikalachsenfehlers. Bei der Repetitionsmessung ist dieser Fehler im Fall einer Divergenz ν beider Achsen günstigstenfalls $= \nu$. Sein, durch Durchschlagen des Fernrohrs zwar nicht, wohl aber durch passende Messungsmethode (s. S. 355) kompensierbarer Einfluss also $= \nu \cos \alpha \operatorname{tg} h$ (s. S. 345).

Wenn weiterhin Zentrierungs-, Horizontier- und Aufsteckungsfehler ausser Betracht bleiben, weil sie bei beiden Beobachtungsformen in gleicher Grösse wirken, so setzt sich der zu befürchtende Winkelfehler zusammen aus dem bei jeder Zielung auftretenden Zielfehler $\pm \alpha$, welcher abhängt von der Beleuchtung, Strahlenlänge, Fernrohrhelligkeit und — Vergrößerung, Veränderung der Ziellinie (z. B. Druck auf den Okularauszug),

dem Ablesefehler $\pm \beta$, von unregelmässigen Teilungsfehlern, Fehlern der Ablesevorrichtung, Nonienparallaxe und ungenauem Ablesen an sich herrührend,

einem Fehler $\pm \gamma$, der herrührt vom Mitschleppen des Limbus bei Drehung der Alhidade, Bewegung des Fernrohrs in seinen Lagern etc., und dem periodischen

Teilungsfehler $\pm \delta$.

Lassen wir vorerst γ und δ ausser Betracht, so erzeugen die Quellen α und β bei einfacher Winkelmessung und jedesmaliger Ablesung an zwei Nonien (bezw. Mikroskopen) den mittleren Fehler

$$m_{\text{einer einfachen Winkelmessung}} = \pm \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2 + \alpha^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pm \sqrt{2\alpha^2 + \beta^2}.$$

Die Messung in s Sätzen kommt in Beziehung auf die Fehler α und β der $2s$ mal wiederholten einfachen Winkelmessung gleich. Der Winkelfehler wird also durch sie auf den $\sqrt{2}$ sten Teil heruntergedrückt und beträgt für das Mittel eines Winkels aus den s Sätzen

$$M_{\text{eines Winkels aus } s \text{ Sätzen}} = \frac{m}{\sqrt{2s}} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{s} + \frac{\beta^2}{2s}},$$

also für das aus s Sätzen gewonnene Mittel einer Richtung

$$M_{\text{einer Richtung aus } s \text{ Sätzen}} = \frac{M}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{2s} + \frac{\beta^2}{4s}}.$$

Messen wir dagegen mit $2n$ -facher Repetition, so haben wir $4n$ mal Gelegenheit, den Zielfehler α , dagegen nur 2mal Gelegenheit, einen Ablesefehler $\frac{\beta}{\sqrt{2}}$ (weil je an beiden Nonien abgelesen wird) zu machen.

Daraus folgt der mittlere Winkelfehler

$$M_{\text{bei } 2n\text{-facher Repetition}} = \pm \frac{\sqrt{4n\alpha^2 + \beta^2}}{2n}.$$

In Anbetracht, dass bei $2n$ -facher Repetition jede Zielung $2n$ mal, bei s Sätzen dagegen jede Zielung $2s$ mal beobachtet wurde, dass also für $2n = s$ Gleichwertigkeit in der Zahl der Zielungswiederholungen besteht, werden wir zum Genauigkeitsvergleich die mittleren Winkelfehler aus s Sätzen und $2n$ Repetitionen heranziehen und bilden

$$D \equiv M_{\text{aus } s \text{ Sätzen}} - M_{\text{aus } 2n \text{ Repetitionen}} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{s} + \frac{\beta^2}{2s}} - \frac{\sqrt{4n\alpha^2 + \beta^2}}{2n}.$$

Für $s = 2n$ wird daraus

$$D = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2n} + \frac{\beta^2}{4n}} - \frac{\sqrt{4n\alpha^2 + \beta^2}}{2n} = \frac{1}{2n} (\sqrt{4n\alpha^2 + n\beta^2} - \sqrt{4n\alpha^2 + \beta^2}).$$

Dieser Wert D wird gleich 0 für $n = 1$, d. h. für einfache Winkelmessung. Nur für diese sind also beide Verfahren im Hinblick auf ihre Genauigkeit gleichwertig. Je grösser n (oder $2n = s$) und je grösser β , um so ungünstiger wirkt in Rücksicht auf die Genauigkeit die satzweise Messung.

Der Zielfehler α ist etwa gleichzusetzen demjenigen für Beobachtungen mit freiem Auge, dividiert durch die Vergrösserungszahl des Fernrohrs, also rund $= \pm 1''$, der Ablesefehler β etwa gleich der Noniusangabe. Letzterer beträgt somit das 10- bis 20-fache des ersteren, wenn gewöhnliche Nonientheodolite verwendet werden. Wir erkennen also:

Wenn aus sachlichen Gründen (weil z. B. die später zu verwendenden Richtungskombinationen während der Messung noch nicht bekannt sind, s. S. 367) mit Richtungen beobachtet werden muss, so muss wenigstens dafür gesorgt werden, dass der Ablesefehler β möglichst klein gehalten wird (feine Ablesevorrichtung, grosser Teilkreis), und dass etwa nötige Genauigkeitssteigerungen weniger durch Vermehrung der Zahl der Sätze, als durch Verwendung guter Instrumente und — tüchtiger Beobachter anzustreben sind.

Auch in wirtschaftlicher Beziehung (Zeitaufwand) ist die Repetitionsbeobachtung der satzweisen überlegen, denn sie erfordert, unabhängig von der Zahl der Wiederholungen, nur zwei Ablesungen an jedem Nonius, während die satzweise Messung bei s Sätzen deren $2s$ für jede Richtung erfordert.

Dieses Untersuchungsergebnis erfährt nun allerdings eine gewisse Einschränkung zugunsten der satzweisen Beobachtung im Hinblick auf die Fehlerquellen γ und δ .

Die repetitionsweise Messung (Verfahren 2 und 3) gibt viel leichter Veranlassung zu unbeabsichtigten Drehungen des Limbus (Mitschleppen, Berühren unrichtiger Schrauben etc.) als die satzweise, und lässt solche überdies nur bei Beobachtung sämtlicher Winkel um einen Punkt herum ($[] = 4R$), und auch dann nur durch andere Fehlerquellen verdunkelt, erkennen. Diese einseitig wirkende Fehlerquelle, wenn sie überhaupt auftritt, zeigt sich dagegen bei der satzweisen Beobachtung sofort nach jedem Halbsatz.

Auch gestattet die satzweise Beobachtung durch Ablesen der Richtungen auf verschiedenen, symmetrisch verteilten Stellen des Teilkreises weit sicherer die Ausmerzungen etwaiger periodischer Teilungsfehler δ , als die Repetitionsverfahren (2) und (3). Denn die letzteren benützen, zumal bei Messung kleiner Winkel, auch

bei Ablesung an zwei Nonien nur zwei Teilkreisstellen, auf denen diese Fehler zufälligerweise gleiches Vorzeichen haben können. Aus diesen Gründen, in Rücksicht ferner auf die heute erreichte Verfeinerung der Kreisteilungen und Ablesevorrichtungen, und unter Beachtung der in neuerer Zeit angewandten Methoden der trigonometrischen Punkteinschaltung, welche Richtungs- bequemer als Winkelwerte verwenden lassen, ist das bei den Landesvermessungen des 19. Jahrhunderts fast ausschliesslich angewandte Repetitionsverfahren für Zwecke der niederen Geodäsie neuerdings durch das Verfahren der Richtungsbeobachtung mehr und mehr verdrängt worden.

Gleichwohl können namentlich bei Verwendung kleiner Nonientheodolite, die repetitionsweisen Winkelmessungsverfahren, und unter ihnen namentlich das Gauss'sche, unter Umständen auch heute noch den Vorzug verdienen. Denn dieses Verfahren liefert für jeden Winkel sofort eine durchgreifende Probe für Zielung und Ablesung: Schlussablesung = Anfangsablesung. Es kompensiert ferner im Fall vorhandener Divergenz beider Vertikalachsen bei vertikal gerichteter Limbusachse den Vertikalachsenfehler dadurch, dass jeder geneigten Gebrauchsstellung der Alhidadenachse eine zweite von entgegengesetzt gleicher Neigung zugeordnet wird.

Fehlergrenzen: Für die höchstens zulässigen Winkelfehler bei amtlichen Messungen sind je nach deren Zweck in den Vermessungsanweisungen Grenzwerte vorgeschrieben. Diese betragen z. B. in Württemberg (Technische Anweisung vom 19./I. 1895):

Fehlergrenzen.

Reiner Beobachtungsfehler für Triangulierung IV. Ordnung.	}	Höchstens zulässiger mittlerer Fehler	
		einer nach Satzmitteln auf den Horizont abgeschlossenen Richtung	= ± 8" a. T.
			= ± 25" n. T.
		Höchstens zulässiger Widerspruch der Dreieckswinkelsumme gegen 2 R	= ± 60" a. T.
			= ± 185" n. T.
Von dem Zusammenwirken von Ungenauigkeiten der Festpunkte mit Beobachtungsfehlern erzeugter Max-Fehler im Schlussergebnis.	}	Höchstens zulässige Abweichung einer endgültig orientierten Richtung gegen den zugehörigen Richtungswinkel (s. § 63) = $(60 + \frac{40000}{s})''$ (wo s die Strahlenlänge in m vorstellt).	
		Höchstens zulässiger Fehler der Winkelsumme bei Polygonisierungen (s. § 83) = $\left. \begin{matrix} 1,5 \sqrt{n} \text{ a. T.} \\ 2,8 \sqrt{n} \text{ n. T.} \end{matrix} \right\}$ wobei n die Anzahl der verwendeten Brechungswinkel bezeichnet.	

§ 44. Absteckung von Winkeln bestimmter Grösse. Absteckung eines zur Stückvermessung nach der Parallelmethode dienenden Netzes von Aufnahmelinien.

1. Winkel von 0° bzw. $2R$: „Einweisen“, „Verlängern“ von Geraden.

a) Wenn die abzusteckende Gerade auf ihre ganze Ausdehnung übersehbar, und

α) wenn Verpflockung der Geraden verlangt ist.

Einweisen: Man horizontiert das Instrument über einem der Endpunkte, zielt den andern an und winkt dann, nachdem in dieser Lage die Stehachsen festgebremst sind, in der Nähe des entferntest zu schlagenden Pflöckes einen vertikal gehaltenen Stab (und zwar, wenn die Pflöcke unter die Ackerkrume geschlagen werden sollen, zunächst angenähert) ein. Nach Aushebung der nötigen Grube wird der Stab schärfer eingewiesen, der Pflöck senkrecht auf die erforderliche Tiefe eingetrieben und, falls die Nachprüfung eine kleine Abweichung erweisen würde, durch seitliches Anschlagen der Erde an den Pflöck in die richtige Lage gebracht. Ein Bleistiftstrich bezeichnet, falls so grosse Genauigkeit nötig ist, schliesslich auf dem Pflöcke den genau eingewiesenen Punkt. Es folgt nun in gleicher Weise, unter zeitweiliger Prüfung, ob die Fernrohreinstellung unverändert geblieben ist, von aussen herein der zweite, dritte etc. Pflöck. Damit ist die Aufgabe dann erledigt, wenn während der Arbeit das Fernrohr unveränderte Lage beibehält. Musste es dagegen stark gekippt werden, wobei etwaige Achsenfehler zur Wirkung kamen, so schlägt man das Fernrohr durch, zielt in dieser neuen Lage den Endpunkt nochmals an und wiederholt in ihr unter Gewinnung eines zweiten Bleistiftzeichens auf jedem Pflöck das Einweisen von innen nach aussen. In die Pflöcke eingeschlagene Drahtstifte bezeichnen schliesslich jeweils die Mitte der beiden Einweisemarken als endgültige Punkte der Geraden. Wird

β) die Strecke nicht verpflockt, sondern nur mit Stäben abgesteckt, so erfolgt die Arbeit unter allen Umständen von aussen herein. Muss dabei das Fernrohr stark gekippt werden, so dass Achsenfehler des Instruments wirksam werden können, so weist man jeden Punkt sofort doppelt, nämlich in jeder Fernrohrlage, ein. Dabei legt man eine Messstange quer zur Richtung der Geraden je vom eingewiesenen Punkt aus nach entgegengesetzten Richtungen auf die Erde, oder liest beide Male auf einem quer auf die Erde gelegten Massstab ab. Die Mitte zwischen beiden an-

Einweisen
auf ebenem
Gelände.

gelegten Stangenenden bezw. Ablesestellen bezeichnet die abzusteckende Gerade. Der in ihr vertikal aufgepflanzte Stab bildet die Anlage für den nächsten u. s. f.

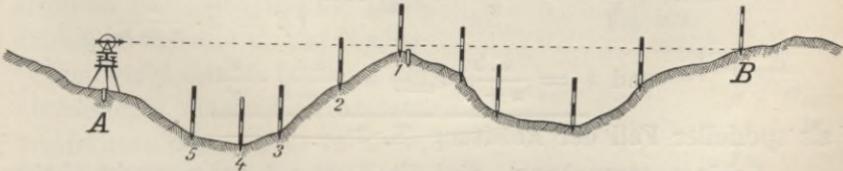
Verlängern einer Geraden. Ist die gegebene Gerade nur kurz, so kann nach erfolgter Instrumentenaufstellung auf ihrem, der gesuchten Verlängerung abgewandten Endpunkt das Einweiserverfahren (α) oder (β) angewandt werden. Nur muss dann der zur Anlage dienende Endstab, falls und so lange er die Zielung nach der einzuweisenden Strecke verdeckt, zur Seite gedrückt und jeweils nur vorübergehend zum Zweck der zeitweiligen Prüfung der Anlage wieder vertikal gerichtet werden. Dies ist unbequem. Man wird daher, zumal wenn die gegebene Gerade lang ist, zur Instrumentenaufstellung ihren, der gesuchten Verlängerung zugewandten Endpunkt wählen und zunächst den entferntesten Punkt dieser Verlängerung mittels Durchschlagen des Fernrohrs in beiden Lagen, also unter Drehung der Alhidade um $2R$ doppelt, wie unter β , bestimmen. Er spielt dann für das darauffolgende Einweisen von Zwischenstäben die Rolle des Endstabes, wie unter (α) und (β) gezeigt. Ist die Verlängerung zu verpflocken, so wird ihr nach vorhergehendem zu bestimmender Endstab einige Meter über die nötige Entfernung hinaus eingewiesen, so dass er durch das nachträgliche Eintreiben des Endpflocks nicht berührt wird.

b) Wenn zwischen beiden Endpunkten der abzusteckenden Geraden ein Berg Rücken liegt, der die Durchsicht hindert.

a) Ist das Gelände wellig und liegt der Endpunkt B auf einer höheren, vom Anfangspunkt A aus übersehbaren Welle, so können die Punkte 1, 2... (s. Fig. 232) von ihm, weitere Punkte in der

Einweisen beim Vorhandensein von Geländehindernissen.

Fig. 232.

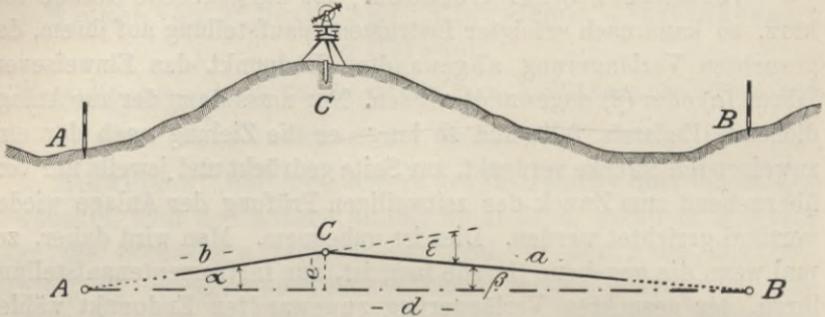


nächsten Geländefalte aber vom entsprechend gewählten Punkt (1) aus nach dem Verfahren a (α) oder (β) eingewiesen werden.

Ist β von keinem der beiden Endpunkte A und B aus der andere sichtbar (s. Fig. 233), können aber beide von einem Zwischenpunkt C aus gesichtet werden, so kann man analog dem S. 61 angedeuteten Kreuzscheibenverfahren durch Probieren dessen Ort so bestimmen, dass der Vertikalfaden des auf A eingestellten und alsdann durch-

geschlagenen Fernrohrs in dessen beiden Lagen den Punkt B deckt, oder — im Fall von Achsenfehlern — in der Mitte lässt.

Fig. 233.



Diese Probiermethode ist aber zeitraubend und unbefriedigend, wenn der Theodolit nicht justiert ist. Auch ist man in der Genauigkeitssteigerung beschränkt.

Besser ist es daher, in einem (etwa mittels Kreuzscheibe) näherungsweise bestimmten Punkt C den Winkel ACB mit der nötigen Genauigkeit nach einem der in § 42 gezeigten Verfahren zu messen. Ergibt er sich = 2 R, so liegt C zufälligerweise genau in der gesuchten Geraden. Ergibt er sich zu 2 R ± ε, so erhält man die abzusetzende Strecke e aus: $e = a \cdot \sin \beta = b \sin \alpha$.

Ist $e < \frac{1}{50}$ der kleineren von beiden Entfernungen a oder b, was mittels einer Kreuzscheibe leicht erreichbar ist, so dürfen wir (Nachweis s. § 45) statt $\sin \alpha$ bzw. $\sin \beta$ die Winkelwerte α bzw. β setzen, womit: $e = a \cdot \beta = b \cdot \alpha$ und $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$,

$$\text{d. h. } \frac{a+b}{a} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha} = \frac{\varepsilon}{\alpha} \text{ oder } \begin{cases} \alpha = \varepsilon \cdot \frac{a}{a+b} \\ \beta = \varepsilon \cdot \frac{b}{a+b} \end{cases}$$

$$\text{und } e = \frac{a \cdot b}{a+b} \varepsilon_{\text{anal.}} = \frac{a \cdot b}{a+b} \cdot \frac{\varepsilon'}{\rho'}$$

als spezieller Fall der Ableitung (S. 380).

Nötige Messungsgenauigkeit. Fehleruntersuchung. Sind die Werte a, b und ε mit den Fehlern f_a , f_b , f_ε behaftet, so wird deren Einfluss auf e ungünstigstenfalls

$$f_e = \left[f_{\text{Messungsgrösse}} \times \frac{\partial e}{\partial \text{Messungsgrösse}} \right] \\ = \frac{(a+b)b - ab}{(a+b)^2} \varepsilon \cdot f_a + \frac{(a+b)a - ab}{(a+b)^2} \varepsilon \cdot f_b + \frac{ab}{a+b} \cdot f_\varepsilon.$$

Setzt man $f_a = f_b$, so geht obige Gleichung über in

$$f_e = \frac{\varepsilon'}{\rho'} \cdot \frac{f_a}{(a+b)^2} \{ a^2 + b^2 \} + \frac{f_{\varepsilon''}}{\rho''} \cdot \frac{ab}{a+b}.$$

Lässt man einen Max-Fehler von 1 cm an e , also $\frac{1}{2}$ cm an jedem der zwei Fehlerteile äusserstenfalls zu, so erhält man für den höchstensfalls zulässigen Fehler f_a der Streckenlänge:

$$f_a < \frac{0.005 (a + b)^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{\varrho'}{\varepsilon'}$$

und für den höchstensfalls zulässigen Fehler f_ε am gemessenen Winkel ε :

$$f_{\varepsilon''} < \frac{0.005 (a + b) \cdot \varrho''}{ab}$$

Hieraus geht hervor: je kleiner ε ist, um so grösser darf der Streckenfehler $f_a = f_b$, je grösser $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, d. h. je kleiner a und b ist, um so grösser der Winkelfehler f_ε sein.

Die grösste Winkelgenauigkeit ist erforderlich für $a = b = \frac{d}{2}$. Hierbei darf der zulässige Streckenfehler höchstens betragen:

$$f_{a \text{ Max}} = f_{b \text{ Max}} = 0,01 \cdot \frac{\varrho'}{\varepsilon'}. \text{ Für } \varepsilon = 5' \text{ muss also z. B. } f_{a \text{ Max}} < \frac{0,01 \cdot 3437}{5} < 6,9 \text{ m.}$$

Dagegen darf der zulässige Winkelfehler f_ε unter derselben Voraussetzung $a = b = \frac{d}{2}$ höchstens betragen:

$$f_{\varepsilon'' \text{ Max}} = \frac{0.02}{d} \varrho'', \text{ also z. B. für } d = 500 \text{ muss } f_{\varepsilon'' \text{ Max}} < 8'' \text{ a. T.}$$

Für die richtige Bestimmung des Zwischenpunktes C ist also scharfe Winkelmessung unerlässlich.

Die geringste Winkelgenauigkeit ist erforderlich für $\left\{ \begin{matrix} a \sim d \\ b \sim 0 \end{matrix} \right.$. Hierbei darf der zulässige Streckenfehler höchstens betragen:

$$f_{a \text{ Max}} = f_{b \text{ Max}} = 0,005 \cdot \frac{\varrho'}{\varepsilon'}. \text{ Für } \varepsilon = 5' \text{ muss also z. B. } f_a < 3,4 \text{ m.}$$

Der zulässige Winkelfehler darf dagegen in diesem Fall wachsen auf:

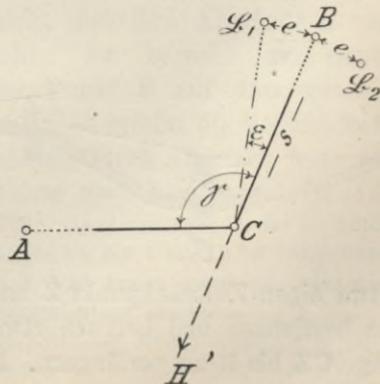
$$f_{\varepsilon''} < \frac{0,005 \cdot a}{0} \varrho \sim \infty.$$

2. Absteckung eines Winkels ACB von beliebiger Grösse γ bei gegebenem Winkelscheitel C.

Sind a) vom Scheitelpunkt C aus die Endpunkte A und B beider Winkelschenkel sichtbar, so zielt man nach erfolgter Horizontierung des Theodoliten im Scheitel C , und Nonius-einstellung 0 mittels Drehung der Limbusachse nach A . Alsdann bremst man den Limbus in dieser Lage fest und dreht die Alhidade bis zur Noniusablesung γ . Nun wird mit dem Fernrohr ein Punkt B_1 des gesuchten Winkelschenkels vorläufig eingewiesen, oder auf einem quer gelegten Massstab abgelesen. Dasselbe Verfahren wiederholt man mit durchgeschlagene-

Winkel
beliebiger
Grösse.

Fig. 234.



nem Fernrohr. Ergibt sich hiebei ein anderer Punkt \mathfrak{B}_2 , so liegt — vorausgesetzt, dass die Abweichung der Punkte \mathfrak{B}_2 und \mathfrak{B}_1 von einander aus Fehlern der Ziel-, oder der Kippachse herrührt — der gesuchte Punkt B in der Mitte.

Bei diesem Verfahren ist man auf das Verständnis des in B aufgestellten Messgehilfen angewiesen. Auch ist beliebige Genauigkeitssteigerung umständlich, weil jede neue Beobachtung einen neuen Punkt \mathfrak{B} liefert.

Besser ist es, wenn man nach erfolgter Einweisung des vorläufigen Stabes \mathfrak{B}_1 den Winkel $\angle AC\mathfrak{B}_1$ nach einem der Verfahren des § 42 genügend oft misst und aus der Differenz ε des Ist- gegen dessen Sollwert die Strecke $e = \frac{\varepsilon}{\varrho} s$ berechnet, um welche der Stab \mathfrak{B}_1 nach der einen, oder anderen Richtung zu verstecken ist.

Auch hier kommt es bei genügend kleinem ε , also genügend genauer vorläufiger Bestimmung von \mathfrak{B} , mehr auf genaue Messung von γ , als von s an. Denn etwaige Fehler f_γ und f_s an γ und s wirken auf den Wert von e ungünstigstenfalls im Betrag von

$$f_e = \left[f_{\text{Messungsgrösse}} \cdot \frac{\partial e}{\partial \text{Messungsgrösse}} \right] = \varepsilon \cdot f_s + s \cdot f_\gamma = \frac{\varepsilon'}{\varrho'} f_s + s \cdot \frac{f_\gamma''}{\varrho''}$$

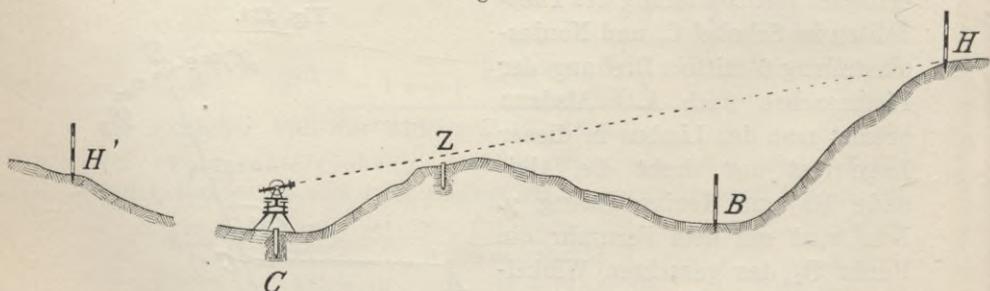
Lässt man für jeden der beiden Fehlerteile äusserstenfalls wieder $\frac{1}{2}$ cm zu, so muss also sein:

$$\text{Der zulässige Fehler } f_s < \frac{0,005 \cdot \varrho'}{\varepsilon'} \left\{ \begin{array}{l} \text{d. h. der zulässige Fehler in } s \\ \text{wächst im umgekehrten Ver-} \\ \text{hältnis von } \varepsilon'. \text{ Für } \varepsilon' = 5' \\ \text{muss z. B. sein} \end{array} \right\} f_s < 0,001 \times \varrho' < 3,4 \text{ m.}$$

$$\text{Der zulässige Fehler } f_\gamma'' < \frac{0,005}{s} \varrho'' \left\{ \begin{array}{l} \text{d. h. der zulässige Fehler in } \gamma \\ \text{wächst umgekehrt proportional} \\ \text{zur Streckenlänge. Für } s = 200 \text{ m} \\ \text{muss z. B. sein} \end{array} \right\} f_\gamma'' < \frac{0,005 \cdot \varrho''}{200} < 5''.$$

b) In welligem Gelände ist es zuweilen nicht möglich, den Winkelschenkel auf die erforderliche Länge CB direkt abzustecken. Es ist aber anderseits, wenn immer möglich, zu vermeiden, auf ihm

Fig. 235.



etwa einen Zwischenpunkt Z nach dem soeben gezeigten Verfahren zu bestimmen und hernach etwa die möglicherweise sehr kurze Anlage CZ bis B zu verlängern. Erhebt sich nun hinter der störenden

Geländewelle, wenn auch in grösserer als derjenigen Entfernung, in welcher der Punkt B verlangt ist, eine zweite, noch höhere, von C aus sichtbare Welle, so bestimmt man auf ihr, wie unter (a) gezeigt, einen Hilfspunkt H, weist dann einen Pflock Z in die Gerade CH ein und stellt endlich den Theodoliten in Z auf, um von dort aus in der Richtung gegen H den Punkt B einzuweisen.

Ist eine solche höhere Geländewelle in der Richtung CB nicht, oder nicht in genügender Nähe vorhanden, so sucht man in der Entfernung $CH' > CB$ (s. Fig. 234 und 235) durch Absteckung des Nebenwinkels $(2R - \gamma)$ einen Punkt H' in der Rückwärtsverlängerung des gesuchten Winkelschenkels zu bestimmen, und ihn selbst alsdann mittels doppelten Durchschlagens des Fernrohrs vom Standpunkt C aus wenigstens bis zum Punkt Z abzustecken. In Z wird schliesslich das Instrument aufgestellt, H' (nicht C) wiederholt angezielt und unter doppeltem Durchschlagen des Fernrohrs der Punkt B über H'Z rückwärts verlängert.

Anlässlich der Absteckung von Aufnahmelinien für die Stückvermessung nach der Parallelmethode ist häufig die Aufgabe zu lösen, die Verpflockung des freien Winkelschenkels genau auf runde Entfernung bzw. in runden Abständen zu bewirken. In diesem Fall gibt man dem vorläufigen Endpunkt \mathfrak{B} (s. Fig. 234), (dessen vorläufige Absteckung mit der Kreuzscheibe in einzelnen Fällen zunächst genügt), eine etwas grössere Entfernung, als für die Absteckung selbst nötig ist und misst dann die Strecke C \mathfrak{B} möglichst genau (mittels Messstangen und Gradbogen) mehrfach durch. Anlässlich der ersten Messung werden hiebei in der Nachbarschaft der künftigen Zwischenpunkte kleine Holzkeilchen, oder Messbandnadeln je etwa 5 m von den Sollpunkten entfernt gesteckt, die bei den folgenden Messungen abgelesen werden. Aus den mehrfachen Messungen und Ablesungen ergeben sich dann unter Berücksichtigung etwaiger Stangenkorrektur die genauen Sollentfernungen dieser Hilfspunkte vom Anfangspunkt und ihre Abstände a vom jeweils zu verpflockenden Sollpunkt. Ist hernach auf Grund repetitionsweiser Winkelmessung der Punkt B auf dem genauen Winkelschenkel nach früherem bestimmt, so erfolgt die Verpflockung der Zwischenpunkte und des Endpunktes durch Absetzen jener Abstände a unter gleichzeitigem Einweisen nach dem Verfahren (1a).

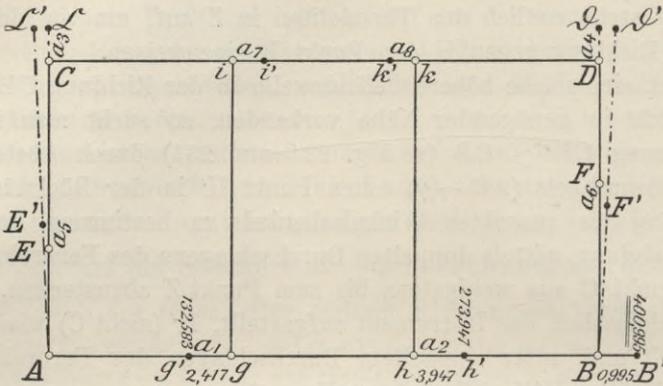
Beispiel. Möge ABCD in Fig. 236a das abzusteckende, für die Stückvermessung grundlegende Rechteck von einigen hm bis 1 oder 2 km Länge bzw. Breite, A den festzuhaltenden Eckpunkt und AB' dessen gegebene, oder nach irgendwelchen Rücksichten ausgewählte Hauptrichtung darstellen.

Man steckt nun die Gerade AB' zunächst mit freiem Auge, oder unter Benützung eines Glases vorläufig, doch immerhin so genau ab, dass die Ab-

Netz
paralleler
und senk-
rechter
Geraden.

weichung von der Sollgeraden an keiner Stelle den Betrag von 1 dm übersteigt. Alsdann misst man die Strecke AB' unter Verwendung des Gradbogens durch, indem man je etwa 5 m entfernt von den Zwischensollpunkten bei g', h' etc.

Fig. 236 a.



Nadeln, oder Holzkeilchen vorsteckt. Bei der Rückwärtsmessung werden diese Vorstecknadeln abgelesen, so dass die Feststellung der genauen Ist-Entfernungen von A für sie und B', wie nachstehend gezeigt, erfolgen kann. Die Ausgleichung geschieht am bequemsten in einer schematischen Figur (s. Fig. 236 b), in welcher dafür gesorgt wird, dass die Summe der beiden in entgegengesetzter Richtung erhobenen, je einem und demselben Punkt zugehörenden Masse den endgültigen Wert der Gesamtstrecke liefert.

Bezeichnung der Punkte	Gradbogenablesung		Reduktion		Länge		Bemerkungen
	0	'	auf Stangenlänge mm	im ganzen mm	geneigt	horizontal	
Fig. 236 b.							
I. Messung.							
A	2	30	5				
Markst.	5	10	20,5				
				
	4	20	14,5				
g'	6	00(t)	16,5 { 11	424	133,00	132,576	
vorgest.	3	50	11				
	4	40	16,5				
				
	2	30	5				
h'	7	20	41	1065	275,00	273,935	
vorgest.	4	10	13				
	6	20	30,5				
				
	3	40	10				
B'	4	40(t)	8,5 { (8)	1597	402,56	400,963	
II. Messung.							
B'	5	10	20,5				
vorgest.	3	50	11				
				
	6	20	30,5				
h'	7	00(t)	11 { 26,5	437	127,48	127,043	
vorgest.	5	10	20,5				
	3	50	11				
				
	4	00	12				
g'	3	50(t)	10 { 1	1161	269,56	268,399	
vorgest.	5	40	24,5				
	4	20	14,5				
				
	4	30	15,5				
A	3	00(t)	3 { (4)	1520	402,44	400,920	

A B' I. Messung	400,963
II. Messung	400,920
Mittel	<u>400,942</u>
Stangenkorrektion	+ 0,053
Endgültige Gesamtstrecke	<u>400,995.</u>

Nun legt man die aus den ausgeklügelten Strecken ermittelten Abstände a_1, a_2, \dots von den Vorstecknadeln bis zu den Punkten g und h vor, bzw. zurück und weist gleichzeitig mit dem Theodolit die Gerade nach früherem ein. Der an der betreffenden Stelle auf die gewollte Tiefe eingetriebene Pflock ist natürlich zum Schluss in beiderlei Richtung nochmals genau zu prüfen und nötigenfalls durch Eintreiben von Steinen oder Anschlagen von Erde genau richtig zu stellen.

Nun werden in A und B (bei wenig ausgedehntem Netz mittels der Kreuzscheibe) die genäherten Lote auf etwas grössere Entfernung als nötig, nach \mathcal{C}' und \mathcal{D}' , abgesteckt. Durch doppelte Messung erhält man, wie vorhin bei AB , die entsprechenden genauen Streckenlängen $A E'$ bzw. $B F'$ und $A \mathcal{C}'$ bzw. $B \mathcal{D}'$ und aus ihnen die abzusetzenden Abstände a_3 und a_4, a_5 und a_6 . Sind hernach die vorläufigen Punkte \mathcal{C}' bzw. \mathcal{D}' auf Grund repetitionsweiser Winkelmessung nach \mathcal{C} und \mathcal{D} , d. h. auf die richtige Schenkellage versteckt, so erfolgt die Verpflockung von C und E bzw. D und F durch gleichzeitiges Einweisen mit dem Theodoliten und Abtragen der ermittelten Abstände a von den Vorstecknadeln wie bei g und h .

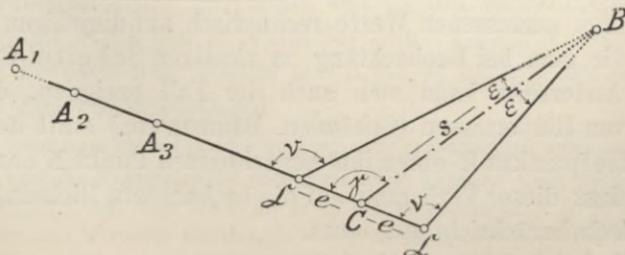
Nun wird, zunächst wieder mit freiem Auge, die Gerade CD eingewiesen und unter Vorsteckung und Ablesung der Nadeln i' und k' hin und zurück durchgemessen. Nach erfolgter Ausgleichung und Ermittlung der abzusetzenden Masse a_7 und a_8 erhält man durch Einweisen mit dem Theodoliten und gleichzeitiges Absetzen der Strecken a die Netzpunkte i und k , wie vorher die Punkte g und h .

3. Absteckung eines Winkels ACB von gegebener Grösse γ , von dem ein Schenkel und ein Punkt des andern, oder von jedem der beiden Schenkel ein Punkt auf dem Gelände gegeben, der Winkelscheitel C aber gesucht ist (s. Fig. 237a und 237b).

Der Fall kommt verhältnismässig selten (z. B. bei der Kreisbogenabsteckung nach dem Satz von gleichem Peripheriewinkel über gleichem Bogen) vor.

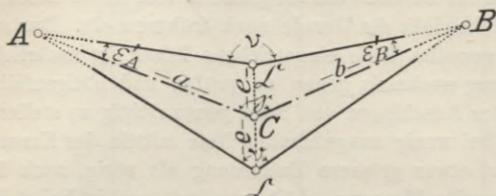
Hat man (etwa mittels einer Gradscheibe, eines Sextanten oder einer Prismentrommel) einen genäherten Punkt \mathcal{C} gefunden,

Fig. 237 a.



und den Winkel $A \mathcal{C} B = \nu$ gemessen, so zeigt dessen Abweichung $\varepsilon = \gamma - \nu$ gegen den Sollbetrag γ die Richtung an, in welcher der Punkt \mathcal{C} nach C zu verschieben ist. (Für $\varepsilon = \pm$ muss \mathcal{C} in den Winkelraum $\lesssim 2 R$ hineingeschoben werden.)

Fig. 237b.



Die Grösse e der Verschiebung errechnet sich im Fall der Figur 237a aus der Gleichung

$$e = \frac{\sin \varepsilon \cdot s}{\sin \nu \text{ oder } \sin \gamma}$$

oder für kleines ε

$$e = \frac{\varepsilon'}{\varrho' (\sin \gamma \text{ oder } \sin \nu)} s.$$

Ist die Schenkelrichtung $A \mathcal{C}$ nicht feststehend, so kann man (s. Fig. 237b) den vorläufigen Punkt \mathcal{C} auf der Halbierenden des Winkels ν nach C verschieben.

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \gamma - \nu = \varepsilon' &= \varepsilon'_A + \varepsilon'_B = -\frac{e \sin \frac{\nu}{2}}{a} \varrho' + \frac{e \sin \frac{\nu}{2}}{b} \varrho' \\ &= e \cdot \varrho' \cdot \sin \frac{\nu}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem Einfluss ungenauer Instrumentenzentrierung, s. S. 349.

Daraus ergibt sich der lineare Verschiebungsbetrag

$$e = \frac{\varepsilon' (= \gamma - \nu)}{\varrho' \cdot \sin \frac{\nu}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} = \frac{\varepsilon'}{\varrho'} \frac{a b}{(a + b) \sin \frac{\nu}{2}}$$

in Übereinstimmung mit dem speziellen Fall S. 374, in welchem $\nu = 2R$, also $\sin \frac{\nu}{2} = 1$.

§ 45. Zentrieren von Richtungen und Winkeln.

In Absatz 7 des § 42 hat sich die Notwendigkeit ergeben, einen dem eigentlichen Winkelscheitel C benachbarten Punkt N als Standpunkt für die Winkelbeobachtung zu wählen und hernach die auf ihm gemessenen Werte rechnerisch auf diejenigen zu reduzieren, die man bei Beobachtung im richtigen Scheitel C erhalten hätte. Andererseits kann sich auch der Fall ereignen, dass man infolge von Hindernissen (Gebäuden, Bäumen etc.) statt des eigentlichen Zielpunkts R einen ihm benachbarten Punkt N anzielen und den Einfluss dieser Verlegung auf die beobachtete Richtung hernach rechnerisch berücksichtigen muss.

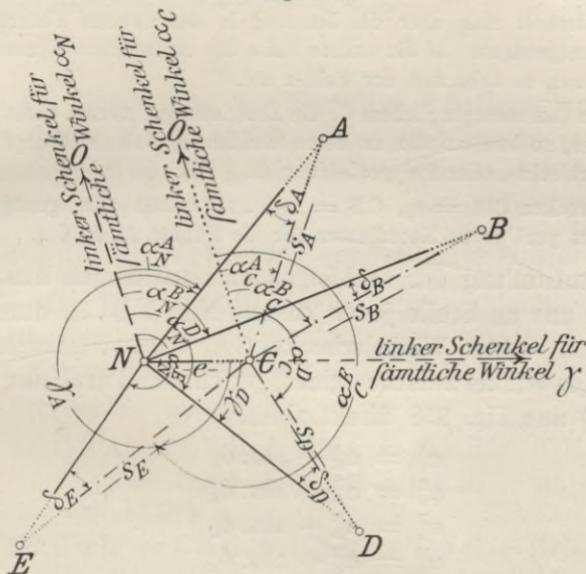
Wir behandeln zunächst die:

I. Verlegung des Winkelscheitels.

a) Bei Richtungsbeobachtungen.

Im Standpunkt (Nebenpunkt) N statt im benachbarten Zentrum C seien von einem beliebigen Anfangsstrahl NO (der Verlängerung des Limbushalbmessers nach dem Teilungsnulldpunkt) aus

Fig. 238.



die Richtungen NA, NB, ND . . . NR mit den Werten $\alpha_N^A, \alpha_N^B, \alpha_N^D \dots \alpha_N^R$ beobachtet.

Gesucht sind die Werte $\alpha_C^A, \alpha_C^B, \alpha_C^D \dots \alpha_C^R$, welche die Messung im Scheitel C von einem zu NO parallelen Nullstrahl aus ergeben hätte.

Die gegenseitige Lage der Punkte N und C unter sich und gegen die Zielpunkte A, B . . . sei durch die Verbindungsstrecke e, die Entfernungen s der Zielpunkte von C, die beobachteten Richtungen α_N und durch den in N mit der Zentralen CN als linkem Schenkel beobachteten Winkel $CNR \equiv \gamma_N^R$ nach einem der vorgenannten Zielpunkte bestimmt.

Die „Zentrierungselemente“ e und γ_N^R werden womöglich direkt gemessen. Da (vergl. S. 386) die Exzentrizität e möglichst klein gehalten wird, ist dabei aber häufig der Punkt C mit dem Fernrohr nicht direkt einstellbar. In diesem Fall wird eine auf dem letzteren aufsitzende Zielvorrichtung (Diopter) für die Beobachtung beider Schenkel des Winkels CNR benutzt (die damit erreichbare Ge-

Beispiel zu (4):

Standpunkt Galgen (exzentrisch)	$\gamma^{\text{Schindelrain}} = 274^{\circ} 40'$			
Beobacht. Richtungen nach Berg	Höhe	Schindelrain	Deschen	Kleinfeld
α_N	$0^{\circ} 00' 00''$	$65^{\circ} 32' 25''$	$132^{\circ} 20' 13''$	$244^{\circ} 38' 12''$
also γ	$142^{\circ} 19' 47''$	$207^{\circ} 52' 12''$	$274^{\circ} 40'$	$26^{\circ} 57' 59''$
(zu addierender Verdrehungswinkel = $\gamma^R - \alpha_N^R = 274^{\circ} 40' - 132^{\circ} 20' 13''$ = $142^{\circ} 19.47$).				

Zu (4a): Wäre γ statt nach Schindelrain, nach dem Anfangsstrahl Berg (mit $142^{\circ} 19' 47''$) beobachtet worden, so wäre die vorgängige Bildung des Verdrehungswinkels entbehrlich, vielmehr zu jedem beobachteten Richtungswert α_N lediglich der beobachtete Wert γ zu addieren gewesen.

Fehleruntersuchung.

Die Werte γ sind nach Gleichungen (3) lediglich zur Berechnung des Zuschlages $\delta = \frac{e}{s} \varrho \sin \gamma$ notwendig. Es fragt sich nun, ob zu diesem Zweck für γ Sekundengenauigkeit nötig, oder ob, unbeschadet der Genauigkeit in α_N , eine Arbeiterleichterung durch Beschränkung der γ auf Minuten zulässig ist.

Mit der Beantwortung dieser Frage wollen wir gleichzeitig diejenige nach der notwendigen Messungsgenauigkeit von e , s und γ überhaupt erledigen.

Nach Gleichung (3) haben die zentrierten Richtungswerte α_C gleiche Genauigkeit, wie die exzentrisch beobachteten α_N , wenn das Zusatzglied δ keine weitere Ungenauigkeit hereinbringt, oder: der Beobachtungsfehler in α_N wird ungünstigstenfalls um die Ungenauigkeit von δ vermehrt. Dieser Beobachtungsfehler betrage für Triangulierungen IV. Ordnung im Mittel $\pm 8''$ a. T. (s. S. 371). Lässt man etwa $\frac{1}{10}$ dieses unvermeidlichen Messungsfehlers noch als Rechenfehler zu, verlangt also, dass der Fehler an $\delta \equiv f_\delta$ unter allen Umständen kleiner sei als $1''$ a. T., so hat man im ungünstigsten Fall (wenn die einzelnen Fehlerteile sich addieren) für diesen Fehler an δ :

$$(5) \quad f_\delta'' = f_e'' = \frac{f_e''}{s} \varrho \sin \gamma = \left[\frac{\partial \delta}{\partial \text{Messungsgrösse}} \cdot f_{\text{Messungsgrösse}} \right]$$

$$= \frac{1}{s} \sin \gamma \varrho'' f_e + \frac{e}{s^2} \varrho'' \sin \gamma f_s + \frac{e}{s} \cos \gamma \cdot f_\gamma < 1''.$$

Bei gleichmässiger Verteilung des zugelassenen Gesamtfehlers auf die drei Summanden müsste also sein:

$$(5a) \quad \frac{\varrho''}{s} \sin \gamma \cdot f_e < \frac{1''}{3} \text{ a. T.}$$

$$(5b) \quad \varrho'' \frac{e \sin \gamma}{s^2} \cdot f_s < \frac{1''}{3} \text{ a. T.}$$

$$(5c) \quad \frac{e}{s} \cos \gamma \cdot f_\gamma < \frac{1''}{3} \text{ a. T.}$$

Aus (5a) folgt die Forderung:

Der zulässige Fehler in e darf höchstens sein:

$$f_e < \frac{\frac{1''}{3} s}{\rho'' \sin \gamma}.$$

Der ungünstigste Fall tritt ein (d. h. der zulässige Fehler f_e wird am kleinsten) für $\sin \gamma = \pm 1$, d. h. $\gamma = \frac{R}{3R}$. Dann darf höchstens sein: $f_e = \frac{\frac{1''}{3} s}{3 \rho''} = \frac{s}{618795}$.

Es zeigt sich also: Der Fehler in der Messung der Exzentrizität e darf proportional zur Ziellänge s zunehmen.

$$\begin{aligned} \text{Für } s = 100 \text{ m} & \text{ muss } f_e < 0,16 \text{ mm} \\ s = 619 \text{ m} & \text{ ,, } f_e < 1 \text{ mm} \\ s = 1000 \text{ m} & \text{ ,, } f_e < 1,6 \text{ mm sein,} \end{aligned}$$

oder: Die Exzentrizität e ist mit mm-Genauigkeit zu messen. Kürzere Strahlen als 600 m dürfen, wenn 1'' als Maximal-Rechnungsfehler festgehalten werden will, überhaupt nicht exzentrisch beobachtet werden.

Aus (5b) folgt:

Der zulässige Fehler in s darf höchstens sein:

$$f_s < \frac{\frac{1''}{3} s^2}{\rho'' \cdot e \sin \gamma}.$$

Auch hier tritt der ungünstigste Fall (zulässiger Fehler für f_s möglichst klein) ein, wenn $\sin \gamma = \pm 1$, d. h. $\gamma = \frac{R}{3R}$, nämlich

$$f_s < \frac{\frac{1''}{3} s^2}{3 e \cdot \rho''} < \frac{s^2}{618795 e}.$$

Je kleiner also die Exzentrizität e , um so ungenauer darf die Strahlenlänge s sein, deren zulässiger Fehler f_s überdies noch mit ihrem Quadrat wächst.

$$\begin{aligned} \text{Für } e = 1 \text{ m und } s = 600 \text{ m} & \text{ muss } f_s < 0,6 \text{ m} \\ s = 1000 \text{ m} & \text{ ,, } f_s < 1,6 \text{ m} \\ s = 2000 \text{ m} & \text{ ,, } f_s < 6,5 \text{ m.} \end{aligned}$$

Werden also Strahlen < 600 m grundsätzlich zentrisch beobachtet und kann $e < 1$ m gehalten werden, so genügt für s im allgemeinen Meter-Genauigkeit.

Aus (5c) folgt:

Der zulässige Fehler in γ darf höchstens sein:

$$f_\gamma < \frac{\frac{1''}{3} \cdot s}{e \cos \gamma} \text{ oder } f_\gamma < \frac{s}{180 e \cos \gamma} \text{ a. T.}$$

Der ungünstigste Fall für f_γ tritt ein, d. h. die relativ grösste Genauigkeit in γ wird verlangt, wenn $\cos \gamma = \pm 1$, d. h. $\gamma = \frac{0}{2R}$.
Dann muss

$$f'_\gamma < \frac{s}{180 e} \text{ a. T.}$$

Je kleiner also e und je grösser s , um so ungenauer darf γ sein:

$$\begin{aligned} \text{Für } e = 1 \text{ m und } s = 600 \text{ m muss } f_\gamma &< \frac{600'}{180} < 3,3' \\ s = 1000 \text{ m} \quad f_\gamma &< 5,5' \end{aligned}$$

Für γ genügt also im allgemeinen eine Genauigkeit von ca. $5'$ a. T.

Damit ist die S. 384 gestellte Frage beantwortet. Es wäre unnütze Rechenarbeit, wenn γ auf Sekunden berechnet werden wollte.

Zum Schluss ist noch die weitere Frage zu erledigen:

Unter welcher Bedingung darf der Parallaxwinkel δ nach der abgekürzten Formel

$$\delta'' = \frac{e}{s} q'' \sin \gamma$$

berechnet werden, bezw. unter welchen Umständen ist die allgemeine Formel zu benützen:

$$\sin \delta = \frac{e}{s} \sin \gamma?$$

Lassen wir entsprechend der möglichen Aufschlaggenauigkeit aus der sin-Tafel die erste Formel zu, wenn sie ein Resultat ergibt, das höchstens um $\frac{1''}{2}$ unrichtig ist, verlangen wir also

$$\delta - \sin \delta < \frac{1''}{2 e''},$$

so wird:
$$\delta - \left(\delta - \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^5}{5!} - \dots \right) < \frac{1''}{2 e''}$$

und unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von δ

$$\delta^3 < \frac{3!}{2 e''} < \frac{6}{412530}.$$

Es muss also

$$\delta' < e' \sqrt[3]{\frac{6}{412530}} < 0,0244 q' < 84' \text{ a. T.}$$

Dies trifft unter allen Umständen zu, wie auch e zum Strahl s liegen möge, und es darf also die abgekürzte Formel benützt werden, wenn

$$\frac{e}{s} < \frac{84'}{e'} < 0,0244 \text{ wird,}$$

d. h. wenn
$$e < \frac{s}{41} \text{ oder rund } < \frac{1}{50} s.$$

Standpunkt Galgen (exzentrisch)

$$e = 0,970$$

$$\gamma_{\text{Schindelrain}} = 274^{\circ} 40'$$

Schiebzettel:

$$\log q'' = 5.3144$$

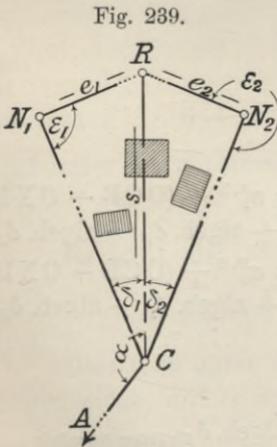
$$\log e = 9.9868$$

$$\log e \cdot q'' = 5.3012.$$

Winkel	Berg—Höhe—Schindelrain—Deschen—Kleinfeld—Berg					
Beobach. Winkel α_N (Probe [] = 4 R)	65° 32' 25"	66° 47' 48"	112° 17' 59"	29° 41' 59"	85° 39' 49"	
γ	152° 20'	207° 52'	274° 40'	26° 58'	56° 40'	142° 20'
(sukzessive Addition der α_N zu γ , ausgehend von $\gamma_{\text{Schindelrain}}$. Probe: der Ausgangswert 274° 40' muss zum Schluss wieder erscheinen)						
$\log \sin \gamma$	9.7861	9.6697 n	9.9986 n	9.6566	9.9219	9.7861
E $\log s$	7.0022	6.8747	6.7952	7.0016	6.6916	7.0022
$\log \delta''$	2.0895	1.8456 n	2.0950 n	1.9594	1.9147	2.0895
$\delta'' =$	+ 2' 03"	- 1' 10"	- 2' 04"	+ 1' 31"	+ 1' 22"	+ 2' 03"
$\delta_r - \delta_l =$ (Probe [] = 0)	- 3' 13"	- 0' 54"	+ 3' 35"	- 0' 09"	+ 41"	
α_C (Probe [] = 4 R)	65° 29' 12"	66° 46' 54"	112° 21' 34"	29° 41' 50"	85° 40' 30"	

II. Verlegung des Zielpunktes.

Ist der Zielpunkt R selbst durch irgend ein Hindernis verdeckt, gelingt es aber, vom Standpunkt C aus einen ihm benachbarten Nebenpunkt N anzuzielen, so kann man aus den zu messenden Exzentrizitätselementen e und ε (ε wie γ unter (I) grundsätzlich von der Centrale zur Signallinie gemessen) den Zuschlag δ berechnen:



$$\sin(\text{absol. } \delta_1) = \frac{e_1 \sin \varepsilon_1}{s},$$

$$\begin{aligned} \sin(\text{absol. } \delta_2) &= \frac{e_2 \sin(4R - \varepsilon_2)}{s} \\ &= -\frac{e_2 \sin \varepsilon_2}{s}, \end{aligned}$$

oder für $e < \frac{s}{50}$ (s. S. 386)

$$\text{algeb. } \delta_1'' = \frac{e_1}{s} q'' \sin \varepsilon_1;$$

$$\text{algeb. } \delta_2'' = -\frac{e_2}{s} q'' \sin \varepsilon_2 \text{ und}$$

$$(8) \quad \underline{\underline{\alpha_C^R = \alpha_C^{N_1} + \frac{e_1}{s} q'' \sin \varepsilon_1 = \alpha_C^{N_2} + \frac{e_2}{s} q'' \sin \varepsilon_2.}}$$

Wie aus (5c) S. 386 festgestellt wurde, beanspruchen wir für den Winkel ε die geringste Genauigkeit (Fehler ca. $10'$ a. T.), wenn $\cos \varepsilon = 0$, d. h. wenn $\varepsilon = \frac{R}{3R}$. Man wird daher N möglichst als Fusspunkt eines mit der Kreuzscheibe zu fällenden Lots auf R auswählen und e möglichst genau (auf mm) messen. Dann geht (8) über in

$$(8a) \quad \alpha_c^R = \alpha_c^{N_1} + \frac{e_1}{s} \varrho'' = \alpha_c^{N_2} + \frac{e_2}{s} \varrho''.$$

Kapitel XI.

Trigonometrische Punktbestimmung („Triangulierung“).

§ 46. Zweck, Wesen und Einteilung der trigonometrischen Punktbestimmung.

Durch grosse räumliche Ausdehnung, wie solche in ebenem, offenem Gelände an sich möglich wäre, und fortschreitendes Aneinanderreihen der einzelnen auf dem Weg der Stückvermessung, also geometrisch gegeneinander festgelegten Systeme von Aufnahmelinien und Grundstücksgrenzen könnte man zwar ganze Markungen, ja Länder aufnehmen und mit allen ihren Einzelheiten in Plänen darstellen. Allein die bei der Stückvermessung unvermeidlichen Ungenauigkeiten würden dabei um so stärkere Verzerrungen des Planbildes und beliebiger, aus der Aufnahme gewonnener Strecken, Winkel und Flächen verursachen, je grösser die Einzelfehler sind und je öfter durch Aneinanderreihen Gelegenheit zu ihrer Addition gegeben wäre.

Aus diesem Grunde haben wir schon bei der Stückvermessung, statt Grundstücksform an Grundstücksform zu reihen, ein möglichst einfaches Netz von Aufnahmelinien vorgängig und mit möglichster Genauigkeit in gegenseitigen Zusammenhang gebracht, ehe wir — vom Grossen zum Kleinen — an die eigentliche Grundstücksaufnahme gingen. In noch erhöhtem Mass ist die Sicherung für den Zusammenhang der verschiedenen Netze von Aufnahmelinien unter sich nötig, da ihre Eckpunkte durch lange und infolgedessen mit grösseren Ungenauigkeiten behaftete Strecken bestimmt sind. Als sichernder Rahmen für sie dient eine Anzahl mit besonderer Schärfe aufgenommener grosser und einfachster, aneinander anschliessender Figuren, — ein „Dreiecksnetz“, dessen Eckpunkte auf dem Gelände vermarktet werden.

Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage der Eckpunkte jedes Dreiecks könnte man an sich ebensowohl ausschliesslich Strecken-, als auch — nach Gewinnung einer einzigen Dreiecksseite — ausschliess-

lich Winkelmessung verwenden. Die Wahl unter diesen verschiedenartigen Bestimmungselementen wird man je nach dem mit jedem dieser Hilfsmittel erreichbaren Genauigkeitsgrad und dem damit verbundenen Zeit- und Kostenaufwand treffen.

In beiderlei Hinsicht erweist sich die Winkelmessung als der Streckenmessung überlegen. Man beschränkt sich daher, seit Snellius im Jahre 1617 und Schickhardt im Jahre 1629 den Weg dafür gewiesen, und der Bau feiner Winkelinstrumente entsprechende Fortschritte gemacht hat, auf die Messung der Dreieckswinkel und, weil diese für sich allein wohl die Form, aber nicht die Grösse der Dreiecke bestimmen, einer (bezw. wegen der Probe einiger) Dreiecksseiten, „Basen“.

Die zur Weiterbenützung der durch jene Messungselemente bestimmten gegenseitigen Lage der Dreieckspunkte unter sich und gegenüber einem Koordinatensystem nötigen Streckenmasse werden dann durch Rechnung, von der Basis aus-, und von einem Dreieck aufs andere übergehend, gewonnen.

In der weiteren Vorfrage, ob grössere, oder kleinere Dreiecke als Grundfiguren des Netzes zweckmässiger sind, spricht einerseits das zu befriedigende Bedürfnis nach einem genügend engen Netz möglichst genau bestimmter Punkte, die unverhältnismässig rasch wachsende Schwierigkeit und Kostspieligkeit der Beobachtung langer Zielungen, die Tatsache, dass ein gewisser mittlerer, unregelmässiger Winkelfehler m den Endpunkt P einer Zielung s um den linearen Betrag $m \cdot s$ verschwenkt, während die Verschwenkung eine $\sqrt{n+1}$ fach geringere ist, wenn gleichgenaue Winkelmessung auf n zwischenliegenden, die Strecke in $(n+1)$ Teile zerlegenden Standpunkten erfolgt (vergl. Kapitel 12), für kürzere Dreiecksseiten. Andererseits lässt aber die Forderung möglichst sicherer Übertragung der Azimute oder Richtungswinkel (s. § 50) von einer beobachteten Dreiecksseite auf die andere über weite Gebiete hinweg, möglicher Reduktion des Einflusses unvermeidlicher Zentrierungs- und Pointierungsfehler und der Berücksichtigung des Einflusses der Erdkrümmung bei der Streckenberechnung lange Dreiecksseiten als vorteilhaft erscheinen, vollends dann, wenn es sich darum handelt, von einer Ausgangsbasis aus über ein zwischenliegendes Gebiet, welches nicht aufzunehmen ist, oder welches keine Standpunkte liefert, rasch wegzukommen. Bei ausgedehnten, ganze Länder umfassenden Aufnahmen überwiegt die Rücksicht auf die letztgenannten Gründe.

So sind z. B. zur Verbindung des spanischen mit dem algerischen Dreiecksnetz zweiseitig beobachtete Zielungen bis zu

graphischen Koordinaten für die Dreieckspunkte, sowie der Richtungswinkel, bezw. Azimute für die Dreiecksseiten.

- F) Einschaltung eines Dreiecksnetzes II. in dasjenige I. Ordnung.
- G) Auswahl der nach den jeweiligen Verhältnissen günstigsten Methode der Übertragung der sphäroidischen oder sphärischen Bestimmungselemente auf die Ebene (Kartenprojektion) und rechnerische Ableitung ebener Koordinaten für die Dreieckspunkte I. und II. Ordnung zum Zweck ihrer Weiterverwendung für die gewöhnlichen Vermessungsarbeiten.
- H) Einschaltung weiterer Dreiecksnetze III., IV. etc. Ordnung, je unter Anschluss an die als fehlerfrei anzunehmenden ebenen Koordinaten der Dreieckspunkte höherer Ordnung.

Die Arbeiten A bis G, welche in das Gebiet der höheren Geodäsie gehören, sollen nachstehend nur kurz berührt werden.

I. Schaffung der Grundlagen für die ebene Triangulierung.

§ 47. Auswahl der Dreieckspunkte I. Ordnung auf dem Gelände, Versicherung (Vermarkung), Signalbau. Winkelmessung.

A) Auswahl
der Dreiecks-
punkte. Ver-
sicherung.
Signalbau.

Den Feldarbeiten geht die Durchsicht des bereits vorhandenen Karten- und Messungsmaterials, z. B. der Triangulierungen I. Ordnung benachbarter Gebiete voraus, an welche angeschlossen werden muss und deren Punkte daher aufzusuchen und zu benützen sind. Dann folgt, von den letztgenannten Punkten ausgehend, die Erkundung des zu triangulierenden Landstrichs, bei der (wenn möglich unter Benützung topographischer Karten) hervorragende, weithin sichtbare Geländepunkte (Kirchtürme möglichst zu vermeiden) in passenden gegenseitigen Entfernungen so ausgewählt werden, dass die Zielung je zwischen den benachbarten von ihnen möglich ist und ihre Verbindungslinien ein Netz annähernd gleichseitiger Dreiecke liefern. Zur Beurteilung dieser Forderungen und zur Identifizierung der Zielpunkte werden gleichzeitig mit einem kleinen Theodoliten die Winkel und mit einem Aneroidbarometer die Höhen roh ermittelt.

Nun erfolgt die Versicherung der Punkte auf dem Gelände durch Steine mit Unterlagsplatten, oder durch Pfeiler aus Bruchsteinmauerwerk, deren einzelne Schichten durch Dübel verbunden werden. Als Rückversicherung dienen vier in einiger Entfernung unter die Ackerkrume versenkte und auf sichere, dauerhafte Punkte gut eingemessene Steine oder Drainröhren („Nebenpunkte“), in deren Diagonalschnitt der Hauptpunkt fällt. Müssen ausnahmsweise Kirchturmspitzen zu Punkten I. Ordnung gewählt werden, so sind solche

(in diesem Fall durch Mauerbolzen vermarkte) Nebenpunkte wertvoll für spätere Untersuchung und Feststellung etwaiger Ortsveränderung des Hauptpunktes. Wenn von einem gewählten Punkt aus die Durchsicht nach den anzuzielenden benachbarten Punkten I. Ordnung (z. B. wegen Hochwaldes) nicht möglich ist, so werden Durchhaue oder Signalbauten notwendig. Letztere umfassen in der Regel zwei ineinander ohne gegenseitige Verbindung (s. S. 7) aufgebaute Gerüste: den Instrumentenpfeiler und das ihn umgebende Gerüste für den Beobachter. (Nähere Angaben über Signalbau und Versicherung der Dreieckspunkte s. u. a. Hegemann, Lehrbuch der Landesvermessung, Berlin 1906. S. 15 bis 34).

Für die Methode der Winkelmessung ist der Umstand bestimmend, dass bei Ziellängen von 20 bis 50 km infolge widriger Witterungseinflüsse, auch bei Verwendung von Heliotropen (s. S. 7 u. 8), nur selten volle Sätze beobachtet werden können. (Das reflektierte Sonnen-, oder — bei Nachtbeobachtungen — künstliche Licht bleibt bald vom einen, bald vom andern Zielpunkt aus, oder erscheint unruhig). Würde man aus diesem Grund aber in unvollständigen Richtungssätzen beobachten, so käme in der Ausgleichung einzelnen Richtungswerten verschiedenes Gewicht zu, was die Weiterverwendung erschweren würde. Überdies sind grosse Sätze, deren Beobachtung längere Zeit erfordert, namentlich bei Verwendung von Leucht-, oder Signalgerüsten schon aus dem Grund unzweckmässig, weil letztere unter der Einwirkung der Sonne im Laufe des Tages krümmende und drehende Bewegungen machen. (An einem 25 Fuss hohen Fichtenstamm hat General Baeyer im Laufe eines halben Tages eine Drehung bis zu 15' beobachtet).

B) Winkel-
messung.

Man zieht daher bei Triangulierungen I. Ordnung vor, entweder die Sätze je auf eine sehr geringe Zahl von Zielungen zu beschränken, welche in Verbindung gesetzt werden mit einer stets sichtbaren, vom Standpunkt $\frac{1}{2}$ bis 1 km entfernt aufgestellten Zieltafel „Nullmarke“ oder „Mire“, oder wiederholte einfache Winkelmessung in allen Kombinationen der Zielstrahlen zu verwenden.

Mit letzterem Verfahren hat z. B. die preussische Landesaufnahme den mittleren Fehler eines ausgeglichenen, mittels Schraubenmikroskoptheodolits von 27 cm Teilkreisdurchmesser und 62facher Fernrohrvergrösserung gemessenen Winkels bei den rheinisch-hessischen Ketten unter Festhaltung eines konstanten Winkelgewichts 24 (bei zwei Richtungen für jeden Winkel 24fache, bei drei Richtungen 16fache, bei vier Richtungen 12fache etc. Beobachtung) auf $\pm 0,18''$ herabgedrückt.

Die Dreiecksseiten II. Ordnung (10 bis 15 km Seitenlänge) werden von der preussischen Landesaufnahme mit 21 cm Theodoliten in sechs vollen Sätzen beobachtet. Dabei ergab sich ein mittlerer Fehler von $\pm 3,2''$ pro Messung.

§ 48. Basis (Grundlinien)messung. Basisnetze.

Durch die Messung der Länge einer Dreiecksseite wird das durch blosse Winkelmessung nur der Form nach bestimmte Dreiecksnetz aus der unendlichen Zahl ähnlicher Figuren herausgehoben zum praktisch verwendbaren Einzelgebilde von bestimmter Grösse. Der endgültigen Einführung eines Wertes für die gemessene Strecke muss aber eine Entschliessung über die Form (Kugelfläche, Ellipsoid etc. s. S. 304) und Lage (Höhe über dem Meere) des der Aufnahme zugrund zu legenden Aufnahmehorizontes (s. S. 63) vorausgehen.

Form und Lage des Vermessungshorizonts.

Die Erde hat in erster Näherung die Form einer Kugel, in zweiter Näherung die eines Umdrehungsellipsoids, das durch Drehung einer Ellipse um ihre kleine Achse b entstanden ist. Aus zehn Breitengradmessungen hat Bessel im Jahr 1841 die halbe grosse Achse $a = 6377,39716$ km, die halbe kleine Achse $b = 6356,07896$ km berechnet. Diese Masse sind zwar keineswegs fehlerfrei. Sie können vielmehr durch Berücksichtigung weiterer Erdmessungen stetige Verbesserungen erfahren. Trotzdem sind sie, weil für geodätische Zwecke genügend scharf, für solche in Deutschland heute noch allgemein im Gebrauch. Ja es wird, um die Berechnungen zu vereinfachen, an Stelle der wahren Erdgestalt für die Wiedergabe von Gebieten, welche sich über nur drei bis vier Breitengrade, also rund 400 km Länge und Breite erstrecken, als Vermessungshorizont die Kugelfläche eingeführt, welche sich jener in der Mitte des Vermessungsgebiets in Meeres-, oder mittlerer Landeshöhe möglichst anschmiegt und deren Halbmesser r (Krümmungshalbmesser des Ellipsoids an der betreffenden Stelle) gleich dem geometrischen Mittel der beiden Krümmungsradien ihres Meridians und ihres zu diesem senkrecht gedachten Normals sind. Auf sie sind die gemessenen Grundlinien zu reduzieren, falls deren tatsächliche Lage eine andere Höhe hatte.

Für die württembergische Landesvermessung wurde z. B. der Vermessungshorizont (Kugelfläche) 844 Par. Fuss = 274 m über dem Meer liegend, und das in dieser Höhe gedachte Ellipsoid in Tübingen ($\varphi = 48^\circ 31'$) berührend, angenommen. Es ergab sich hieraus der zugehörige Halbmesser der Schmiegunskugel zu $r = 6388336$ m. Auf diese Kugelfläche wurde die in einer mittleren Höhe von 331 m über dem Meere gemessene Länge der Grundlinie Solitude—Ludwigsburg reduziert.

Erstrebte Länge der Grundlinie.

Bei den ersten grösseren Vermessungen wurde direkt die Länge einer hiefür möglichst günstig gelegenen Dreiecksseite gemessen. Wollte man im Dreiecksnetz spitze Anschlusswinkel vermeiden, so blieb daher nichts übrig, als die Basis der normalen Länge einer Dreiecksseite I. Ordnung möglichst anzupassen.

So mass u. a. für Zwecke der Erdmessung:

La Condamine in Peru im Jahre 1736 Seiten von über 10 bzw. 12 km Länge,
Maupertuis in Lappland im Jahre 1736 1 Seite von über 14 km Länge,
Delambre und Méchain in Frankreich im Jahre 1792 2 Seiten von über 11 km Länge.

Für Zwecke der Landesvermessung ermittelte

Soldner im rechtsrheinischen Bayern im Jahre 1801 die Seite München—Aufkirchen
mit über 21 km Länge,
Bohnenberger in Württemberg im Jahre 1820 die Seite Solitude—Ludwigsburg
mit über 13 km Länge,
und Lämmle in Rheinbayern im Jahre 1819 die Strecke Speyer—Oggersheim mit
über 15 km Länge.

Die letztgenannte Messung veranlasste den Professor Schwerd am Lyzeum in Speyer zur Behauptung, eine 20 mal kleinere, direkt gemessene und durch Winkelmessung auf die Dreiecksseite übertragene Basis führe mit geringerem Aufwand von Zeit, Mühe und Kosten zu einer ebenso genauen Kenntnis der Länge der Dreiecksseite, wie die direkte Messung. Der unter Beihilfe seiner Schüler von Schwerd erbrachte Beweis für die Richtigkeit seiner Behauptung, ermöglichte in der Folge ohne Kostenvermehrung die Messung mehrerer Basen von reduzierter Länge in verschiedenen Teilen eines Vermessungsgebiets und damit eine Kontrolle der Längen der durch Winkelmessung über dessen ganze Erstreckung übertragenen Dreiecksseiten.

Während der letzten Jahrzehnte galten als zweckmässige Gesamtlänge einer (möglicherweise noch in Teilstrecken zerlegten) Basis 5 bis 7 km. Neuerdings vollzieht sich wieder ein Umschwung zugunsten etwas längerer Seiten.

Basis-
apparate.

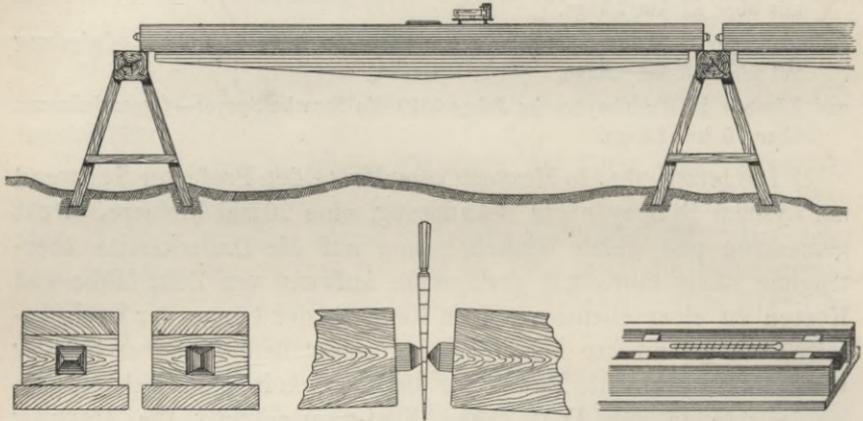
Die ersten Basismessungen wurden mit den gewöhnlichen Werkzeugen (Messbändern — bzw. Ketten und hölzernen Messstangen), wenn auch bezüglich der Feststellung von Richtung und Lage mit grösserer Sorgfalt als gewöhnlich ausgeführt.

Gegen das Ende des 18. Jahrhunderts wurden diese Geräte durch Metallstangen, (ausnahmsweise auch durch solche Bänder, bzw. Drähte) verdrängt, deren Benützung auf Böcken, bzw. zwischen Spreizen erfolgte. Die Verschiedenheit der Länge dieser Werkzeuge bei wechselnder Temperatur nötigte zunächst zur gleichzeitigen Verwendung und Berücksichtigung von Thermometern, mit denen zuerst die Luft —, später (durch Einbau in die Massstäbe) auch die Metalltemperatur zu ermitteln gesucht wurde.

So bestand z. B. der in Württemberg im Jahr 1820 verwendete Basisapparat (s. Fig. 240) aus: 1. fünf eisernen, in Holzkästen eingeschlossenen Messstangen (von je zwölf Pariser Fuss Länge),

in welche je ein Thermometer eingelassen war und deren schneidenförmige Enden aus jenen Kästen hervorragten, 2. einem stählernen Keil zur Messung der jeweiligen Abstände der (nicht zur Berührung gebrachten) Stangen, 3. einer auf den Stangen aufsetz-

Fig. 240.



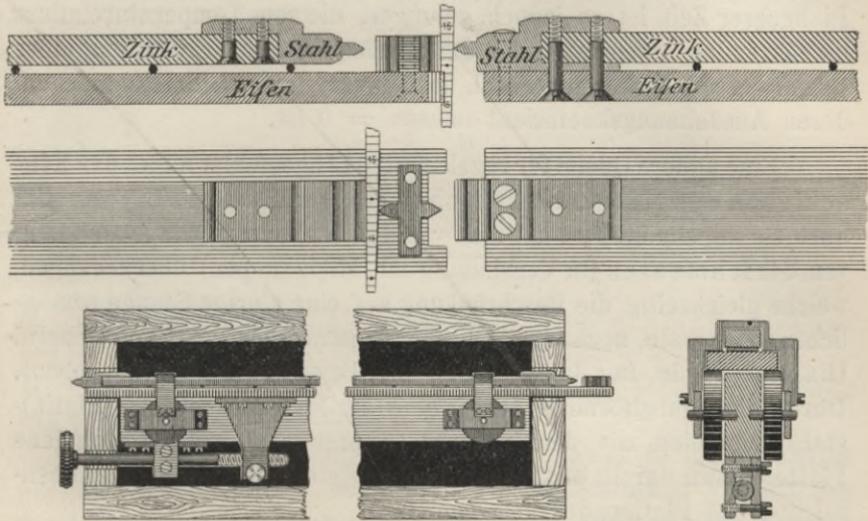
baren Libelle mit Gradbogen zur Ermittlung der jeweiligen Stangenneigung, 4. einer aus sechs festgebauten hölzernen Böcken bestehenden Messbrücke zum Auflegen der Stangen und 5. einem Senkel.

Die nachgewiesene Verschiedenheit zwischen der am Thermometer abgelesenen, und der tatsächlichen Stangentemperatur brachte Fehlerquellen in die Messung hinein, welche zu vermeiden in der Folge verschiedene Mittel versucht wurden. Das erste, von Borda gezeigte, war die Verwendung der zur Längenmessung dienenden Metallstange selbst gleichzeitig als Thermometer.

Dies wurde erreicht durch Verbindung zweier Stäbe aus Metallen von stark verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten, z. B. Platin und Kupfer (Borda), Stahl und Kupfer, oder Messing, Zink etc. Der Besselsche Basismessapparat z. B. (s. Fig. 241), mit dem bis 1903 15 Grundlinien gemessen wurden, benützt vier solcher bimetallicher Stangen, aus Eisen und Zink. An dem einen Ende, oder (bei Porro) in der Mitte sind beide (zusammen in einen hölzernen Kasten eingeschlossene) Stäbe fest miteinander verbunden, während die beiden andern Enden des unteren und des (direkt, oder auf kleinen Rollen) auf ihm aufliegenden oberen Metallstreifens sich entsprechend der Temperaturänderung in der Längsrichtung gegeneinander verschieben können. Jeder Metallstreifen trägt am freien Ende eine Schneide, so dass die Grösse dieser Verschiebung als

veränderlicher Abstand dieser Schneiden mittels gläsernen Keils gemessen werden kann. Durch Versuche wird dieser Abstand in Beziehung gesetzt zur (nebenher auch noch am Quecksilberthermometer abgelesenen) Temperatur bzw. direkt zur jeweiligen

Fig. 241.



Länge des der Messung zugrunde liegenden Metallstabs (Abstand feiner Endschneiden). Für jede Lage wird derart während der Messung mittels Keils die jeweilige Stablänge und mittels desselben Keils der Abstand von der nächsten Stange ermittelt. Zur Messung der Stangenneigung dient eine mit Gradbogen verbundene Libelle.

Eliminierung des Temperatureinflusses.

Versuche, die beiden Metallstäbe zu einem Kompensationsapparat zu verbinden, indem man sie parallel zueinander, und durch ihre Enden zangenartige Querarme anordnete, deren Spitzenentfernung infolge der verschiedenen starken Ausdehnung beider Parallelstäbe bei wechselnder Temperatur konstant blieb, wurden von Colby und von Borden angestellt. Des ersteren Apparat hat aber bei seiner Anwendung in Irland, England und Indien ebenso wenig befriedigt, als derjenige des letzteren in Nordamerika.

Zu befriedigenderen Ergebnissen führte der von der Coast and Geodetic Survey in den Vereinigten Staaten von Nordamerika angewandte Gedanke, die Temperatur des Stabs konstant zu

erhalten durch Einpacken desselben in eine mit schmelzendem Eis gefüllte Röhre. Doch begegnet dieses Verfahren in der Durchführung aus naheliegenden Gründen erheblichen Schwierigkeiten. Ein ähnlicher Gedanke der Abhaltung allzu grosser Temperaturschwankungen führte General Ibanez im Jahre 1864 zur Verwendung tragbarer Zelte, unter denen die Messung sich vollzog. In neuerer Zeit ist es jedoch gelungen, die vom Temperatureinfluss herrührenden Änderungen der Stangenlänge durch Verwendung einer Legierung aus Nickel und Stahl, des „Invar“, unschädlich zu machen, deren Ausdehnungskoeffizient nahezu $= 0$ ist.

Eine andere Quelle für regelmässige Längenfehler bildet das Einschieben des Messkeils zwischen je zwei Stangenlagen. Um auch sie zu eliminieren, ist man von den Endmassen zur Anwendung von Strichmassen (in Verbindung mit Mikroskopen) übergegangen, welche gleichzeitig die Beschränkung auf eine einzige Stange ermöglichen. Der erste, noch bimetallische, Apparat dieser Art von General Ibanez wurde im Jahre 1856 von Brunner in Paris gebaut. Durch eine gabelförmige Aussparung am Ende des oberen (Platin)-stabs tritt eine mit dem unteren (Kupfer-)Stab starr verbundene Platte, deren durchs Mikroskop beobachtete Teilung mit einer eben-solchen des Platinendes korrespondiert.

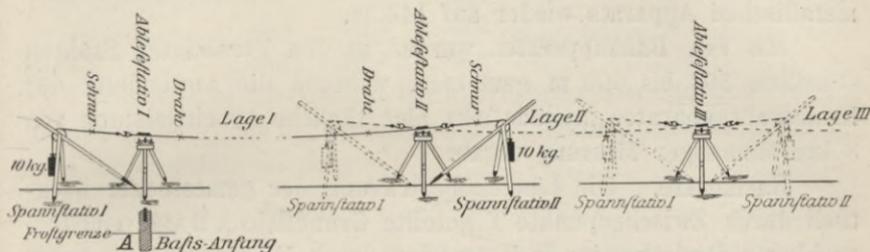
Um den zur Messung nötigen Zeitaufwand zu reduzieren und da die Metallthermometer die auf sie gerichteten Erwartungen nicht voll befriedigt hatten, ging General Ibanez im Jahre 1864 wieder auf die einmetallische (Eisen-)Stange mit eingebetteten Quecksilberthermometern zurück. Die obere schmale Fläche des Stabs von \perp förmigem Querschnitt trägt an ihren Enden auf eingelegten Platinplättchen feine Strichteilungen, welche durch vertikal gerichtete, auf Stativen aufgestellte Mikroskope beobachtet werden.

Dasselbe Bestreben der Verringerung des zur Messung nötigen Zeitaufwands hat den schwedischen Geodäten Jäderin zur Anwendung über Stative, bzw. Spreizen geführter freihängender Metalldrähte (Doppeldrähte aus Stahl, bzw. Messing zum Zweck der Berücksichtigung des Temperaturunterschieds) geführt, an deren Enden kurze, innen geteilte Massstäbchen angebracht sind. Namentlich in den Vereinigten Staaten und in Russland sind solche Apparate — Messbänder und -Drähte — unter Benützung einer bestimmten Spannung (in Amerika 15 kg), vielfach benützt worden. Sie haben eine Tagesleistung von ca. 3500 m gemessener Länge ermöglicht. Die in den Vereinigten Staaten verwendeten Bänder haben eine Länge von 50 m bzw. 100 m. Die Messungen erfolgen bei Nacht, weil bei Tag die Be-

stimmung der Bandtemperatur mit grösseren Fehlern verknüpft ist. Dabei ergab sich als mittlererer Fehler $\frac{1}{780\,000}$ der Länge.

Durch die Entdeckung des „Invars“ ist die ausgiebigere Verwendung einmetallischer Draht- und Bandapparate neuerdings mehr in den Vordergrund gerückt (vergl. hierüber z. B. die Mitteilung von Prof. Dr. Hammer in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1907,

Fig. 242.



S. 425 ff., über Grundlinienmessung mit 24 m langen Invardrähten, der die Fig. 242 entnommen ist).

Auch hat die quantitative Leistungsfähigkeit dieser neuen Apparate nicht nur zu einer weiteren beträchtlichen Vermehrung der Grundlinien, (so dass viel weniger ausgedehnte Dreiecksketten als vordem zwischen den einzelnen Basen zu liegen brauchen), sondern auch — günstige Geländeverhältnisse vorausgesetzt — zu einer erheblichen Verlängerung derselben geführt. Damit werden künftig Basisnetze (s. unten) wohl entbehrlich, oder doch sehr eingeschränkt werden. Für die Triangulierung der englischen Transvaal- und Oranje-River-Kolonie ist man unter Benützung ca. 24 m langer Invardrähte bereits auf Grundlinien bis zu 34 km Länge gekommen.

Genauigkeit und Geschwindigkeit der Basismessungen.

Setzt man die Länge des Basisapparats als richtig voraus (betrachtet also gewissermassen sie als bestimmend für die Masseneinheit), so handelt es sich bei den Messungenungenauigkeiten vorwiegend noch um den unregelmässigen Fehler. Durch mehrfache Messungswiederholung einer in Teile zerlegten Gesamtstrecke ergab sich als unregelmässiger Fehler der einmaligen Messung einer Strecke von 1 km Länge in der Mitte des 18. Jahrhunderts (hölzernen Messstangen) rund 18 mm.

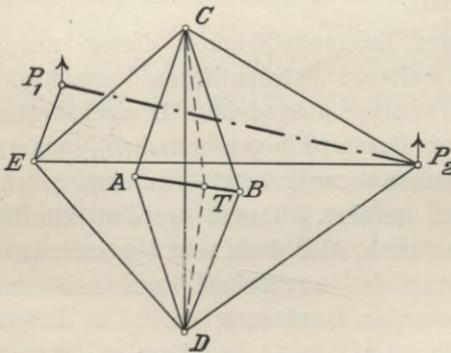
Mit den feinsten aber schwerfälligsten Ibanez-Brunnerschen Apparaten wurde er in der Mitte des 19. Jahrhunderts auf ca. 0,4 mm herabgedrückt und ist heute bei Anwendung der Band-

und Drahtapparate auf etwa 1,5 bis 2,0 mm zu bewerten. Die Messungsgeschwindigkeit betrug im Jahre 1820 (Württembergische Basis mit Bohnenbergerschem Apparat) ca. 114 m pro Stunde. Mit dem Besselschen Apparat wurden in Preussen anfänglich stündlich 125 m, schliesslich aber bis zu 300 m gemessen. Mit dem bimetalischen Ibanez-Brunnerschen Apparat ging die stündliche Messungsgeschwindigkeit ausnahmsweise bis auf ca. 30 m, im Mittel auf 70 m herab, stieg aber bei Anwendung des zweiten einmetallischen Apparats wieder auf 144 m.

Mit den Bandapparaten wurden in den Vereinigten Staaten stündlich 500 bis 600 m gemessen, während die Anwendung des Invardrahtapparates in Südafrika eine tägliche Arbeitsleistung von 8 km einmaliger Messung ergab.

Basisnetze. Die Längenübertragung der gemessenen, eventuell durch Zwischenpunkte T geteilte Grundlinie AB auf eine benachbarte Dreiecksseite $P_1 P_2$ erfolgt durch Winkelmessung unter

Fig. 243.



Benützung eines „Basisnetzes“. Dabei ist zur genauen und möglichst raschen Übertragung die rhombische Form die zweckmässigste. Von besonderem Einfluss auf die Genauigkeit der Längenübertragung (nicht Punktlage) ist die scharfe Messung der der Grundlinie AB (bezw. für die Weiterübertragung CD) gegenüberliegenden spitzen Winkel,

welche, geometrisch betrachtet, jeweils den Kreisbogen bestimmen, der über der Sehne AB (bezw. CD) den gemessenen Winkel fasst.

Neuerdings tritt mit der Steigerung der direkt gemessenen Basislänge die Bedeutung der Basisnetze wieder mehr und mehr zurück.

§ 49. Berechnung der Längen der Dreiecksseiten.

Nachdem unter entsprechender Ausgleichung der Messungswidersprüche aus den Elementen jedes Basisnetzes je die Länge a (s. Fig. 244) der mit ihm in Verbindung stehenden Dreiecksseite abgeleitet worden ist, handelt es sich um die Berechnung der übrigen Seiten des Dreiecksnetzes.

Auch dieser Berechnung geht, wenn mehrere Grundlinien in verschiedenen Teilen des Aufnahmegebiets, oder — was immer der Fall sein wird — über-

schüssige Winkel gemessen sind, oder wenn das zu berechnende Netz an Punkten anschliesst, welche ihrer Lage nach aus benachbarten Dreiecksnetzen, oder solchen höherer Ordnung bereits endgültig bestimmt wurden, eine Ausgleichung etwaiger Messungswidersprüche voraus. Auf sie soll hier nicht eingegangen werden.

Die Seitenberechnung erfolgt von der durch die Basismessung gewonnenen Dreiecksseite ausgehend und die beobachteten Dreieckswinkel mit ihren ausgeglichenen Werten benützend, von Dreieck zu Dreieck fortschreitend. Die sphärische Trigonometrie liefert hierfür zunächst die Formel:

$$(1) \quad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \text{ (Sinus-Satz).}$$

Hiebei sind die Seiten a, b, c in Winkelmass verstanden, welches für die erste (a) aus der gemessenen bzw. berechneten Streckenlänge erst zu ermitteln ist aus:

$$(2) \quad a_{\text{analyt.}} = \frac{a}{r} \text{ und } a' = \frac{a}{r} \cdot \rho'.$$

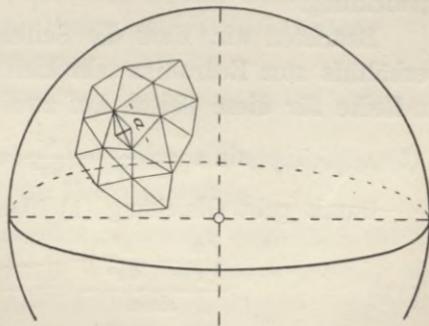
Dies ist unbequem, weil einerseits die spätere praktische Verwendung Streckenmasse erfordert und andererseits die Entnahme der Seitenfunktionswerte auf die nötige Genauigkeit von Hundertelsekunden (1 dm Entfernung zweier Punkte entspricht einem Zentriwinkel von $\frac{1}{r_{\text{dm}}} \cdot \rho'' = \frac{206265}{63883360}'' = 0,0032''$) aus den Logarithmentafeln sehr schwerfällig und unsicher ist.

Umgekehrt ist die direkte Einführung bzw. Gewinnung von Streckenmassen in die oder aus der trigonometrischen Berechnung nur mittels der Sätze der ebenen Trigonometrie möglich. Deren Anwendung auf den kugelförmigen Vermessungshorizont verbietet sich aber schon deshalb, weil die gemessenen Winkel der geodätischen Dreiecke der Grundbedingung in der ebenen Trigonometrie widersprechen, dass ihre Summe $2R$ beträgt. Die Winkelsumme in Kugeldreiecken liegt vielmehr zwischen $2R$ und $6R$ und ihr vom Dreiecksinhalt F abhängiger Überschuss ϵ über $2R$, der „sphärische Exzess“, beträgt

$$\epsilon'' = \frac{F}{r^2} \cdot \rho''.$$

(Zur Berechnung von ϵ ist die Bestimmung des Flächeninhalts F aus einem Plan oder mittels der Formel $2F = \frac{a^2}{\text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma}$ genügend genau).

Fig. 244.



Für kleine Dreiecke auf der Erdoberfläche ist ε allerdings verschwindend klein, und beträgt z. B.

in einem gleichseitigen Dreieck von 2 km Seitenlänge ca. 0,01'',

" " " " " 10 " " " 0,2''.

Zu einem sphärischen Exzess von 5'' gehört schon ein Dreieck von rund 1000 qkm Fläche. Die grössten erreichten Werte für ε (60'', 71'' und 104'') weisen die Verbindungsdreiecke zwischen Spanien und Afrika, bezw. die Dreiecke der englischen Vermessung von Indien auf.

Wir gehen der Schwierigkeit aus dem Wege durch Benützung des von Legendre aufgestellten, hier nicht zu beweisenden Satzes: Konstruiert man aus den Seiten eines kleinen sphärischen Dreiecks ein ebenes Dreieck, so sind dessen drei Winkel je um denselben Betrag $\frac{\varepsilon}{3}$ kleiner, als die entsprechenden Winkel des sphärischen Dreiecks.

Dieser Satz versetzt uns in die Lage, die Gleichung (1) analog dem sin-Satz der ebenen Trigonometrie wie folgt zu schreiben:

$$(1a) \quad \frac{a}{\sin\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right)} = \frac{b}{\sin\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right)} = \frac{c}{\sin\left(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\right)}$$

und, falls alle drei Winkel α, β, γ des Dreiecks gemessen sind, in der rechnerischen Anwendung den Überschuss der Winkelsumme über $2R$ zu behandeln, wie eine gleichmässig auf die drei Winkel zu verteilende Messungsungenauigkeit.

Einen zweiten Weg der direkten Einführung der Streckenlängen a, b, c für die Dreiecksseiten anstatt der Winkelmasse $\frac{a}{r} \varrho, \frac{b}{r} \varrho, \frac{c}{r} \varrho$ in Gleichung (1) finden wir durch Reihenentwicklung.

Beachten wir, dass die Seiten der geodätischen Dreiecke im Verhältnis zum Erdradius sehr klein sind, so können wir uns in der sin-Reihe für diese Seiten auf zwei Glieder beschränken und setzen

$$(3) \quad \sin a = \frac{a}{r} - \frac{a^3}{6r^3} = \frac{a}{r} \left(1 - \frac{a^2}{6r^2}\right).$$

Damit geht Gleichung (1) über in

$$(1b) \quad \frac{\left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{6r^3}\right)}{\sin \alpha} = \frac{\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right)}{\sin \beta}$$

oder

$$\frac{a \left(1 - \frac{a^2}{6r^2}\right)}{\sin \alpha} = \frac{b \left(1 - \frac{b^2}{6r^2}\right)}{\sin \beta}.$$

Setzt man $\log \left(1 - \frac{a^2}{6r^2}\right) = -A_a, \log \left(1 - \frac{b^2}{6r^2}\right) = -A_b,$
 $\log \left(1 - \frac{c^2}{6r^2}\right) = -A_c,$ wobei diese nur von den Seitenlängen abhängigen kleinen Werten A_a, A_b etc. nach Gleichung (3) den Unter-

schied $\log \frac{a}{r} - \log \sin a$, d. h. $\log \text{analyt. Mass} - \log \sin$ vorstellen, so kommt aus (1b)

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \log b = (\log a - A_a) + \log \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + A_b; \text{ und analog} \\ \log c = (\log a - A_a) + \log \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} + A_c. \end{array} \right.$$

Die Zusatzglieder A_a, A_b, A_c heissen „Additamente“ und werden zweckmässig in einer Zahlentafel mit dem Einlauf „log-Seite“ untergebracht. Sie verändern sich sehr langsam, so dass für ihre Entnahme aus der Tafel die gesuchten Seiten b und c zunächst in roher Annäherung eingeführt werden können.

Die „Additamentenmethode“ wurde von dem bayerischen Geodäten Soldner aus Anlass der bayerischen Landesvermessung ausgebildet und später u. a. auch bei der württembergischen Landesvermessung angewandt. Sie hat vor der

Legendreschen Methode den Vorzug voraus, dass sie zur Seitenberechnung wirkliche und nicht reduzierte Dreieckswinkel benützt.

Koordinaten für die Dreieckspunkte.

Die berechneten Dreiecksseiten genügen zwar an sich zur gegenseitigen Festlegung der einzelnen Dreieckspunkte. Sie lassen aber eine bequeme Verwertung der Triangulierungsergebnisse nicht zu. Hiefür sind Koordinaten viel geeigneter, deren wir auf der Erdkugel dreierlei Systeme zu betrachten haben, nämlich:

1. rechtwinklig-sphärische (Soldnersche) Koordinaten,
2. sphärische Polarkoordinaten,
3. geographische Koordinaten.

§ 50. Berechnung rechtwinklig-sphärischer (Soldnerscher) Koordinaten für die Dreieckspunkte.

Rechtwinklig-sphärische Koordinaten wurden einheitlich für die Vermessung ganzer Länder erstmals in Bayern durch Soldner eingeführt und in der Folge fast allen Landesvermessungen zugrunde gelegt. Als Abszissen-, oder x -Achse wählt man irgendeinen Grosskreisbogen und zwar, zumal wenn das Vermessungsgebiet sich hauptsächlich in nordsüdlicher Richtung erstreckt, am besten einen durch seine Mitte verlaufenden Meridian, als Ursprung irgendeinen auf ihm liegenden Punkt O .

Dieser Punkt O kann wohl, muss aber nicht notwendig mit einem der Dreieckspunkte zusammenfallen.

Die Abszissenwerte werden, ganz analog S. 100 auf der Abszissenachse vom Ursprung O aus bis zum Fusspunkt des auf ihr errichteten Lots (hier senkrechten Grosskreisbogens), die Ordinatenwerte auf diesem Bogen vom Lotfusspunkt bis zum Festpunkt gezählt.

So stellen in Fig. 245 x_A und y_A die rechtwinklig-sphärischen Koordinaten des Punktes A vor. Während aber S. 100 sämtliche Ordinaten einander parallel gingen, laufen sie hier in den beiden Gegenpunkten G zur Meridianebene zusammen.

Zur Koordinatenableitung brauchen wir ausser den in § 49 berechneten Dreiecksseiten (Grosskreisbögen), die wir jetzt mit s bezeichnen wollen, noch die Festlegung der Richtungen, unter welchen sie verlaufen. Hiefür hat Soldner die „Richtungswinkel“ φ , d. h. diejenigen Winkel eingeführt, um welche man die durch den Anfangspunkt einer Strecke gedachte Parallelkreisebene zur + x-Achse in positivem Sinn drehen muss, bis sie mit der Strecke zusammenfällt. Der linke Schenkel des Richtungswinkels ist somit im allgemeinen kein Grosskreis-, sondern ein Parallelkreisbogen.

Ist der Richtungswinkel φ irgendeiner Strecke AB bekannt, so kann man mit Hilfe der in ihren Endpunkten gemessenen Winkel diejenigen anstossender Strecken ableiten.

Als Grundlage für die Richtungswinkelbestimmung wird auf geodätisch-astronomischem Weg in irgendeinem Dreieckspunkt A (wenn möglich im Ursprung O), das Azimut α einer Dreiecksseite, d. h. derjenige Winkel gemessen, um welchen man den Standpunktsmeridian in positivem Sinn drehen muss, bis er in die Dreiecksseite fällt.

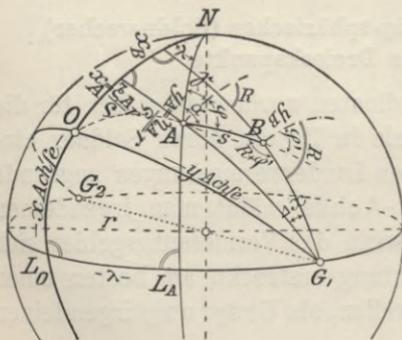
Der Unterschied γ zwischen dem Azimut α und dem Richtungswinkel φ einer von A ausgehenden Strecke AB, oder der um 2 R verminderte Unterschied der Azimute NOA und NAO:

$$\gamma = \alpha - \varphi$$

heisst „Meridiankonvergenz“. Er ist gleich dem sphärischen Exzess des Vierecks $L_0 O A L_A$, also gleich Null für jeden auf der Abszissenachse liegenden Punkt und um so grösser, je grösser dessen Entfernung von

der Achse wird. Dagegen ist er keineswegs gleich dem Unterschied λ der geographischen Längen der beiden Punkte O und A.

Fig. 245.



Letzterer stellt vielmehr den sphärischen Exzess des Dreiecks $L_0 N L_A$ vor. Zur Berechnung der Meridiankonvergenz für einen Punkt A muss man demnach die geographische Breite des Ursprungs O und dazu die (wenn auch nur genähert bekannten) sphärisch-rechtwinkligen, oder die geographischen Koordinaten von A kennen.

Ist allgemein der Richtungswinkel φ eines von A ausgehenden Grosskreisbogens $AB = s$ samt den rechtwinklig-sphärischen Koordinaten von A bekannt, so kennt man im sphärischen Dreieck ABG_1 die Winkelmasse für zwei Seiten, nämlich $AB = \frac{s}{r}$, $AG_1 = \left(R - \frac{y_A}{r}\right)$ und den eingeschlossenen Winkel $(R - \varphi)$. Man kann also die übrigen Stücke berechnen, von denen der Winkel bei G_1 die Abszissendifferenz $\Delta x = y_B - y_A$ zu AB, die Seite BG_1 das Supplement zu y_B je im Winkelmass vorstellt.

Der cos-Satz liefert für die Ordinate des Endpunktes B eines vom Punkt A unter dem Richtungswinkel φ ausgehenden Grosskreisbogens:

$$\sin \frac{y_B}{r} = \cos \frac{s}{r} \sin \frac{y_A}{r} + \sin \frac{s}{r} \cos \frac{y_A}{r} \sin \varphi$$

oder, da y und s verhältnismässig klein sind, durch Reihenentwicklung bis zu den Gliedern $\frac{1}{r^3}$ einschliesslich

$$\frac{y_B}{r} - \frac{y_B^3}{6r^3} = \left(1 - \frac{s^2}{2r^2}\right) \frac{y_A}{r} \left(1 - \frac{y_A^2}{6r^2}\right) + \frac{s}{r} \left(1 - \frac{s^2}{6r^2}\right) \left(1 - \frac{y_A^2}{2r^2}\right) \sin \varphi.$$

Durch Umformung wird hieraus unter Einsetzung von

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta x_0 = s \cos \varphi = m \\ \Delta y_0 = s \sin \varphi = n \end{cases}$$

$$(2) \quad \underline{y_B = y_A + n - \frac{y_A m^2}{2r^2} - \frac{n \cdot m^2}{6r^2}}.$$

Für die Abszissendifferenz Δx erhalten wir aus dem sin-Satz

$$\sin \frac{x_B - x_A}{r} = \sin \frac{\Delta x}{r} = \frac{\sin \frac{s}{r}}{\cos \frac{y_B}{r}} \cos \varphi.$$

Durch Reihenentwicklung bis zu den Gliedern $\frac{1}{r^3}$ einschliesslich für die Funktionen der kleinen Winkel $\frac{\Delta x}{r}$, $\frac{s}{r}$ und $\frac{y_B}{r}$ und kleine Vernachlässigungen kommt mit Benützung der Ersetzungen (1)

$$\Delta x = m + \frac{m(y_A + n)^2}{2r^2} - \frac{m \cdot n^2}{6r^2} \text{ und}$$

$$(3) \quad \underline{x_B = x_A + m + \frac{m(y_A + n)^2}{2r^2} - \frac{m n^2}{6r^2}}.$$

Den Hauptgliedern $\begin{cases} n = s \cdot \sin \varphi \\ m = s \cdot \cos \varphi \end{cases}$ werden wir bei der Be-

handlung in der Ebene, d. h. für $r = \infty$, wieder begegnen. Die beiden hinteren sind sphärische Korrektionsglieder.

Sie werden beide gleich 0, wenn $m = 0$, d. h. wenn $\varphi = R$ ist, oder der Bogen s in die Richtung der Ordinate von A fällt.

Verläuft der Bogen s parallel zu x-Achse, so wird $\varphi = 0$, also $n = 0$, $m = s$ und das zweite Korrektionsglied in den Gleichungen (2) und (3) fällt weg. Das erste erreicht den Wert

$$\frac{y_A s^2}{2 r^2} \quad (2 a)$$

$$\text{bezw.} \quad \frac{s \cdot y_A^2}{2 r^2} \quad (3 a).$$

Der Richtungswinkel φ' des (über B hinaus fortgesetzten) Grosskreisbogens AB ist in A ein anderer, als in B.

Die Tatsache seiner Veränderlichkeit zeigt sich am klarsten, wenn man den Grosskreisbogen AB zum Vollkreis ergänzt und durch beliebige zum 0-Meridian parallele Ebenen schneidet. Zwei der letzteren werden schliesslich den Grosskreis AB sogar berühren und an den Berührungsstellen, gleichgültig, wie auch AB verlaufen möge, den Richtungswinkel $\varphi' = 0$ bezw. $2R$ zeigen.

Die Kenntnis des Richtungswinkels φ' im Endpunkt B eines Grosskreisbogens AB ist aber deshalb nötig, weil aus ihm durch Addition des in diesem Punkt gemessenen Brechungswinkels der Richtungswinkel der nächsten von B ausgehenden Dreiecksseite abgeleitet wird.

Der sin-Satz liefert hiefür aus dem Dreieck ABG_1 :

$$\frac{\sin(R + \varphi')}{\sin(R - \varphi)} = \frac{\cos \frac{y_A}{r}}{\cos \frac{y_B}{r}} \sim \frac{1 - \frac{y_A^2}{2 r^2}}{1 - \frac{y_B^2}{2 r^2}}.$$

Durch kleine Vernachlässigungen und Einsetzung der Werte (1) erhalten wir

$$(4) \quad \begin{aligned} (\varphi' - \varphi)'' &= \Delta \varphi_{\text{Sekd.}} = -m \frac{y_A + \frac{n}{2}}{r^2} \varphi'' \\ \varphi' &= \varphi - m \frac{y_A + \frac{n}{2}}{r^2} \varphi''. \end{aligned}$$

Das sphärische Korrektionsglied in (4) verschwindet, d. h. φ' wird gleich φ : 1. für $r = \infty$ (Berechnung in der Ebene) und 2. für $m = 0$ (d. h. für $\varphi = R$, oder für den Fall, dass der Grosskreisbogen s in die Richtung der Ordinate von A fällt).

Mit Hilfe der Gleichungen (1) bis (4) kann man, von irgendeinem Dreieckspunkt mit bekannten Koordinaten (z. B. vom Ursprung) ausgehend und von Punkt zu Punkt fortschreitend, die rechtwinklig-sphärischen Koordinaten sämtlicher Dreieckspunkte und die Richtungswinkel der in ihnen anschliessenden Dreiecksseiten berechnen. Zur Ermittlung der sphärischen Korrektionsglieder benützt man hiebei am einfachsten Zahlen-, oder graphische Hilfstafeln.

§ 51. Berechnung sphärischer Polar- aus rechtwinklig-sphärischen Koordinaten.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABG_1 der Fig. 245 erhalten wir

$$\cos \frac{s}{r} = \sin \frac{y_A}{r} \sin \frac{y_B}{r} + \cos \frac{y_A}{r} \cos \frac{y_B}{r} \cos \frac{\Delta x}{r}.$$

Reihenentwicklung bis zu den Gliedern von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ einschliesslich liefert

$$1 - \frac{s^2}{2r^2} + \frac{s^4}{24r^4} = \left(\frac{y_A}{r} - \frac{y_A^3}{6r^3} \right) \left(\frac{y_B}{r} - \frac{y_B^3}{6r^3} \right) + \left(1 - \frac{y_A^2}{2r^2} + \frac{y_A^4}{24r^4} \right) \left(1 - \frac{y_B^2}{2r^2} + \frac{y_B^4}{24r^4} \right) \left(1 - \frac{\Delta x^2}{2r^2} + \frac{\Delta x^4}{24r^4} \right),$$

woraus durch Ausmultiplikation bis zur selben Ordnung und Ersetzung von $y_B - y_A$ durch Δy wird

$$-\frac{s^2}{2r^2} + \frac{s^4}{24r^4} = -\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{2r^2} + \frac{1}{24r^4} \left\{ y_A^4 + y_B^4 + 6(y_A^2 + y_B^2)(\Delta x)^2 + 6y_A^2 y_B^2 + \Delta x^4 - 4y_A y_B^3 - 4y_A^3 y_B \right\}.$$

Führen wir als Näherungswert für s ein:

$$(5) \quad \begin{aligned} s_0 &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \text{ und setzen ferner} \\ s &= s_0 + u \end{aligned}$$

so wird (s. Fig. 246)

$$\begin{aligned} (s_0 + u)^2 - \frac{(s_0 + u)^4}{12r^2} &= s_0^2 - \frac{1}{12r^2} \left\{ s_0^4 + 4\Delta x^2 (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \right\} \\ s_0^2 + 2s_0 u + u^2 - \frac{s_0^4 + 4s_0^3 u + 6s_0^2 u^2 + 4s_0 u^3 + u^4}{12r^2} &= s_0^2 - \frac{1}{12r^2} \left\{ s_0^4 + 4\Delta x^2 (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \right\}. \end{aligned}$$

Der Unterschied u zwischen s und s_0 ist jedenfalls so klein, dass die Glieder zweiten und höheren Grads in u vernachlässigt werden können. Damit wird

$$2s_0 u - \frac{4s_0^3 u}{12r^2} \sim -\frac{1}{3r^2} \left\{ \Delta x^2 (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \right\}$$

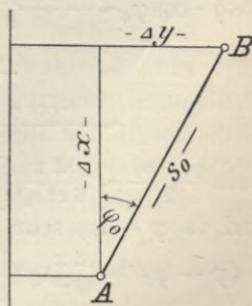
und da für kleines s auch der zweite Summand der linken Seite gegen den ersten verschwindet

$$u \sim -\frac{1}{6r^2} \left\{ \frac{\Delta x^2}{s_0} (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \right\}.$$

Setzt man

$$(5a) \quad \frac{\Delta x}{s_0} = \cos \varphi_0 \text{ (s. Fig. 246), so wird}$$

Fig. 246.



$$u \sim -\frac{1}{6r^2} \left\{ s_0 \cos^2 \varphi (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \right\} \text{ und}$$

$$(6) \text{ Bogen AB} \equiv s \sim s_0 - \frac{s_0}{6r^2} (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \cos^2 \varphi_0.$$

Für den Richtungswinkel φ von AB erhalten wir aus dem Dreieck ABG_1 (Fig. 245)

$$\cos \varphi = \frac{\cos \frac{y_B}{r} \sin \frac{\Delta x}{r}}{\sin \frac{s}{r}}, \text{ woraus durch Entwicklung bis zu den}$$

Gliedern mit $\frac{1}{r^3}$ einschliesslich

$$= \frac{\left(1 - \frac{y_B^2}{r^2}\right)}{\frac{s}{r} \left(1 - \frac{s^2}{6r^2}\right)} \frac{\Delta x}{r} \left(1 - \frac{\Delta x^2}{6r^2}\right)$$

$$= \frac{\Delta x \left(1 - \frac{6y_B^2 + \Delta x^2}{6r^2}\right)}{s_0 \left\{1 - \frac{1}{6r^2} (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \cos^2 \varphi_0\right\} \left(1 - \frac{s^2}{6r^2}\right)}, \text{ oder}$$

$$\cos \varphi \sim \frac{\Delta x}{s_0} \left[1 + \frac{1}{6r^2} (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \cos^2 \varphi_0\right] \left(1 + \frac{s^2}{6r^2}\right) \left(1 - \frac{6y_B^2 + \Delta x^2}{6r^2}\right).$$

Durch Ausmultiplikation unter Vernachlässigung der Glieder $\frac{1}{r^4}$ und Einführung des Näherungswertes

$$(7) \quad \arccos \varphi_0 = \frac{\Delta x}{s_0} \text{ (Fig. 246)}$$

$$\text{oder } \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ erhalten wir}$$

$$\cos \varphi \sim \cos \varphi_0 \left[1 + \frac{1}{6r^2} (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \cos^2 \varphi_0 - \frac{y_B^2}{2r^2} - \frac{1}{6r^2} (\Delta x^2 - s_0^2)\right]$$

$$\sim \frac{\cos \varphi_0}{6r^2} \left[6r^2 + (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) (1 - \sin^2 \varphi_0) - 3y_B^2 - \Delta x^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2\right]$$

$$\sim \frac{\cos \varphi_0}{6r^2} \left[6r^2 - (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \sin^2 \varphi_0 - (y_B + 2y_A) \Delta y\right]$$

$$\cos \varphi - \cos \varphi_0 \sim -\frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi_0}{6r^2} \left[(y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \sin \varphi_0 + (y_B + 2y_A) \frac{\Delta y}{\sin \varphi_0}\right]$$

$$- 2 \sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}$$

$$\sim -\frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi_0}{6r^2 s_0} \left[(y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) (y_B - y_A) + (y_B + 2y_A) s_0^2\right]$$

$$2 \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \sim \frac{\Delta x}{6r^2 s_0^2} \left[y_B^3 - y_A^3 + (y_B + 2y_A) s_0^2\right]$$

und da $\varphi - \varphi_0$ sehr klein

$$(\varphi - \varphi_0)'' \sim \frac{\Delta x}{6r^2} \varphi'' \left[\frac{y_B^3 - y_A^3}{s_0^2} + y_B + 2y_A\right]$$

$$\sim \frac{\varphi''}{6r^2} \left[\Delta x (2y_A + y_B) + \frac{\Delta x (y_B - y_A)}{s_0^2} (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2)\right]$$

$$(8) \quad \varphi \sim \varphi_0 + \frac{\varphi''}{6r^2} \left[\Delta x (2y_A + y_B) + \frac{\Delta x \Delta y}{s_0^2} (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2)\right].$$

§ 52. Geographische Koordinaten.

Unter den geographischen Koordinaten eines Punktes P der Erdoberfläche (s. Fig. 247) verstehen wir die Winkel λ und φ , welche 1. der Meridian dieses Punktes mit einem anderen, dem „Nullmeridian“ (durch Paris, oder 20° westlich davon durch Ferro, oder durch die Sternwarte in Greenwich), und 2. der Erdradius nach P mit seiner Projektion auf die Äquatorebene bilden. Der erstere, nach Ost und West je bis 180° gezählte Winkel λ heisst „geographische Länge“, der vom Äquator aus nach Nord und Süd bis 90° gezählte Winkel φ die „geographische Breite“ des Erdorts.

Fig. 247.

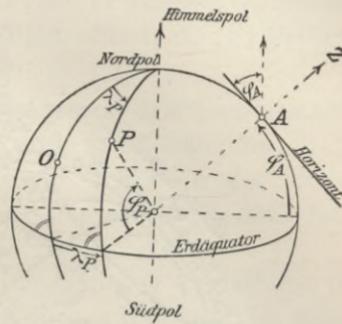
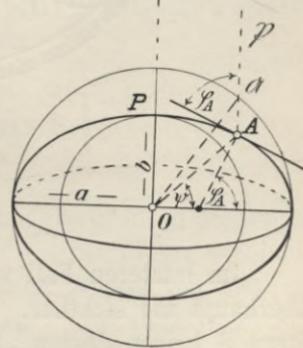


Fig. 248.

Setzen wir an Stelle der ersten Näherung für die Erdform, der Kugel, das durch Drehung einer Ellipse (a, b) um ihre kleine Achse b (s. Fig. 248) entstehende Umdrehungsellipsoid (Abplattung $p = \frac{a-b}{a} \sim \frac{1}{299}$), so bezeichnet die geographische Breite φ_A denjenigen Winkel, welchen die Lotrichtung im Punkt A mit der Äquatorebene bildet und welcher als Polhöhe tatsächlich gemessen wird (s. S. 412). (Zuweilen wird an Stelle der geographischen auch die „geozentrische“ Breite, d. h. der Winkel ψ benutzt, welchen die Äquatorebene mit der Verbindungslinie AO einschliesst, oder die „reduzierte Breite“, d. i. der Winkel zwischen der Verbindungslinie O M und der Äquatorebene.)

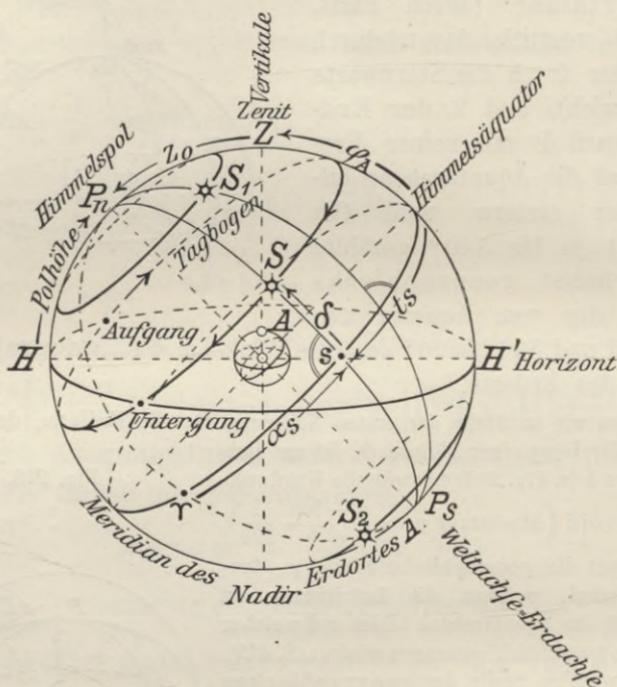


Die Verlängerung des Erdradius über den Punkt A (s. Fig. 249) hinaus bestimmt auf der zur Erdkugel konzentrischen unendlich grossen Himmelskugel dessen Zenit Z. Senkrecht auf diesem Erdradius und im Erdort A berührend, verläuft dessen „Horizont“ HH', welcher für Betrachtungen im ∞ grossen Himmelsraum unter Vernachlässigung der eigentlich nötigen Parallelverschiebung nach dem Erdmittelpunkt als eine Grosskreisebene der Himmelskugel angesehen werden kann. Erdäquator und Himmelsäquator fallen streng zusammen, wie auch Erdachse und Himmelsachse.

Infolge der Drehung der Erde um ihre Achse scheint jeder Stern einen Kreis (Parallelkreis) um diese Achse zu beschreiben, der ent-

weder ganz oberhalb des Horizontes des Erdortes A (Zirkumpolarstern S_1 ; untere bzw. obere Kulmination), oder teils unter, teils über ihm (Stern S; Tagbogen, Nachtbogen; Aufgang, Kulmination, Untergang), oder ganz unter ihm liegt (Stern S_2).

Fig. 249.



Im letzteren Fall wird der Stern vom genannten Erdort aus überhaupt nie sichtbar. Der Grosskreis durch die Pole und einen Stern S heisst dessen „Stunden-“, oder „Deklinationkreis“. Seine jeweilige Lage wird bestimmt durch den „Stundenwinkel“ $t = ZPS$ zwischen ihm und dem Südmeridian des Erdortes. Der Meridianbogen sS vom Himmelsäquator zum Stern heisst dessen Deklination δ (der Bogen PS seine Poldistanz).

Jeder Fixstern wird, während er durch den Meridian eines Erdortes A geht (Stundenwinkel $t = 0$ bzw. $2R$) von diesem Erdort aus unter seinem grössten, bzw. kleinsten Höhenwinkel gesehen (obere bzw. untere Kulmination). Die verschiedenen Sterne kulminieren nicht gleichzeitig, haben also in irgendeinem Augenblick verschiedene Stundenwinkel. Die Unterschiede der letzteren bleiben jedoch konstant.

Da die Kulmination jedes Sterns für jeden auf einem anderen Meridian gelegenen Erdort zu anderer Zeit stattfindet, jeder Stern also im selben Augenblick in jedem solchen Erdort einen anderen Stundenwinkel besitzt, so muss für die allgemein gültige Zählung eine bestimmte Anfangslage festgesetzt werden. Als solche gilt der Stundenkreis nach demjenigen Punkt, in welchem die Sonnenbahn (Ekliptik) den Äquator am 21. März schneidet, „Frühlingspunkt, Widder, \sphericalangle “.

Den Bogen \sphericalangle s, welcher, entgegengesetzt dem Stundenwinkel, von West über Süd nach Ost gezählt wird, nennt man: die „Rektaszension“ oder „gerade Aufsteigung“ $AR = \alpha$ des Sterns. Die Sternörter werden in den Sternverzeichnissen stets nach Rektaszension und Deklination angegeben.

Der Frühlingspunkt nimmt an der täglichen Umdrehung teil, befindet sich also (und zwar auf der nördlichen Halbkugel im Augenblick seiner oberen Kulmination) täglich einmal im Meridian jedes Erdorts.

In diesem Augenblick ist es für diesen Ort 0 Uhr Sternzeit. Im Augenblick der Kulmination eines Sterns S hat der Frühlingspunkt bereits einen gewissen Stundenwinkel Θ zurückgelegt, also ist die Sternzeit der oberen Sternkulmination gleich dessen Rektaszension α . Ist allgemein

$$\begin{array}{l} \Theta \text{ der Stundenwinkel des } \sphericalangle \\ t \text{ „ „ „ „ „ „ } \\ \alpha \text{ die Rektaszension } \left\{ \begin{array}{l} \text{eines Sterns S} \\ \text{eines Sterns S} \end{array} \right\} \end{array}$$

so ist $\Theta = t + \alpha$.

Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichartigen Kulminationen eines Fixsterns, innerhalb welcher dieser scheinbar einen vollen Kreis (Parallelkreis), also einen Winkel von 360° um die Erde beschreibt, heisst ein „Sterntag“. Er umfasst 23 Std. 56 Min. 4,09 Sek. mittl. Sonnenzeit und 24 Stunden Sternzeit.

In 1 Stunde Sternzeit hat also der Stundenkreis jedes Sterns einen Winkel von $\frac{360}{24} = 15^\circ$

in 1 Minute Sternzeit einen solchen von 15 Bogenminuten,
 „ 1 Sekunde „ „ „ „ 15 Bogensekunden
 zurückgelegt.

Der Unterschied der geographischen Längen zweier Erdorte ist also gleich dem 15fachen Betrag der Zeit, die ein Stern braucht, um vom Meridian des östlichen zu dem des westlichen Erdorts zu kommen (telegraphische Übermittlung des Durchgangsaugenblicks), oder gleich der 15fachen

Differenz der Sternzeiten, zu welchen ein an beiden Orten gleichzeitig sichtbares Ereignis (Aufflammen eines Blitzes, elektrischer Funke) bemerkt wird, oder gleich dem 15fachen — mittels eines, von einem Erdort zum andern verbrachten gutgehenden Chronometers festgestellten — Unterschied der beiden Ortszeiten.

Die geographische Breite φ eines Erdorts A ist (s. Fig. 249) das Komplement des Winkels zwischen Erdachse und Vertikaler (Richtung nach dem Zenit).

Dasselbe trifft bei dem Winkel zwischen Horizont und Erdachse, d. h. dem Höhenwinkel zu, unter dem im genannten Erdort der Himmelspol erscheint: „Polhöhe“.

Die Polhöhe ist gleich der geographischen Breite φ des Erdorts. Sie könnte, wenn im Himmelspol ein Stern stünde, abgesehen von kleinen nötigen Verbesserungen (Einfluss der Strahlenbrechung etc.) direkt als dessen Höhenwinkel oder als Komplement seiner Zenitdistanz gemessen werden.

Diese Voraussetzung wird nun von keinem Stern scharf erfüllt. Kann man aber die Zenitdistanz Z_0 irgendeines Sterns mit bekannter Deklination δ im Augenblick seiner Kulmination messen, so erhält man nach Fig. 249

$$\begin{aligned} \varphi_A &= 90^\circ - ZP_n = 90^\circ - [Z_0 \pm (90 - \delta)] \\ &= Z_0 \pm \delta. \end{aligned}$$

Bei diesem Verfahren muss der Zeitpunkt der Kulmination (Sternzeit $\Theta = \alpha$) genügend genau bekannt sein. Den geringsten Einfluss auf den Höhenwinkel haben kleine Zeitungenauigkeiten bei Verwendung des Polarsterns, dessen Deklination δ sich nur um ca. $1^\circ 15'$ von 90° unterscheidet. Ohne den absoluten Uhrstand zu kennen, kann man auch mehrere Höhenwinkel, oder Zenitdistanzen nach einem in der Nähe des Meridians befindlichen Stern beobachten und die Beobachtungswerte als Ordinaten zu den als Abszissen gezeichneten Uhrablesungen auftragen. Der Kulminationspunkt der stetigen Verbindungslinie liefert dann den zur Sternkulmination gehörigen Winkelwert und Zeitpunkt.

(Über feinere Methoden der Breitenbestimmung vergl. die verschiedenen Handbücher der praktischen Astronomie.)

Die Richtung des Meridians (Nord- bzw. Südrichtung), welche man nach dem vorhergehenden zur Bestimmung der geographischen Koordinaten eines Punktes, sodann aber auch zur Orientierung eines ihn enthaltenden Dreiecksnetzes braucht, erhält man durch vertikale Projektion der — im Augenblick seiner Kulmination bewirkten — Zielung nach einem Stern auf den Horizont.

Dieser Augenblick tritt bei einer nach Sternzeit regulierten Uhr ein für $\Theta = \alpha$. Zeigt die Uhr mittlere Zeit, so ist $\Theta = \alpha$ zuvor in mittlere Zeit umzuwandeln. Ohne Verwendung einer Uhr erhält man die Meridianrichtung als Halbierende des Winkels zwischen den Zielungen nach zwei Punkten, in welchen die Bahn eines Sterns bei seiner Auf- bzw. Abwärtsbewegung eine Horizontale (den Horizontalfaden eines um die Alhidadenachse gedrehten, sonst aber unveränderlich festgestellten Theodolitfernrohrs) schneidet.

Bei Anwendung des zuletzt angedeuteten Verfahrens erfolgt je nach erreichter Anzielung die Ablesung auf dem Teilkreis. (Um eine etwaige, in der Zwischenzeit vorgekommene Teilkreisdrehung zu erkennen, wird man bei feststehendem Limbus vor der ersten und nach der zweiten Sterneinstellung und -Ablesung die Richtung nach einem fernen Zielpunkt [Mire] gewinnen.) Die Einstellung des Halbierungspunkts beider Sternablesungen ergibt schliesslich die Zielung im Meridian.

Der Winkel zwischen ihr und der Zielung nach einem zweiten Punkt des Dreiecksnetzes ist das „Azimut“ der betreffenden Dreiecksseite. —

Nach dem vorhergehenden möchte es einfacher erscheinen, die Lage von Erdorten, d. h. ihre geographischen Koordinaten λ und φ samt der Meridianrichtung durch Stern- bzw. Uhrbeobachtungen, als (nach §§ 46 bis 51) auf rein geodätischem Weg zu bestimmen. Abgesehen von den mancherlei sich hiebei noch ergebenden Schwierigkeiten ist dieser Weg aber schon deshalb nicht gangbar, weil die bei ihm erreichbare Punktgenauigkeit nicht genügt. Nimmt man bei Messung geographischer Breiten günstigstenfalls einen maximalen Ziel- und Ablesefehler von $0,2''$ an, so entspricht diesem eine Ortsveränderung von $\frac{0,2}{\rho} r = \text{ca. } 6 \text{ m.}$

Hiezu kommen noch Lotabweichungen infolge von Massendefekten im Erdinnern, welche den zur Breitenbestimmung dienenden Höhenwinkel Z_0 um mehrere Sekunden unrichtig erscheinen lassen können.

Die reinen Beobachtungsfehler bei der Längenübertragung sind zumeist noch grösser, da hier jeder Zeitfehler im 15fachen Betrag als Winkelfehler in die Rechnung eingeht. (Vergl. hierüber u. a. Allg. Verm.-Nachr. Jahrg. 1908, S. 56.)

Nimmt man umgekehrt $0,2''$ als mittleren Fehler eines gemessenen Winkels im Dreiecksnetz bei Triangulierungen I. Ordnung (s. S. 393) an, so wird die dadurch erzeugte Punktverschiebung

bei einer Seitenlänge von beispielsweise 50 km erst

$$\frac{0,2}{e''} 50\,000 \text{ m} = 4,9 \text{ cm.}$$

Aus diesem Grund zieht man vor, nur für einen einzigen Punkt eines Dreiecksnetzes die geographische Länge und Breite direkt zu bestimmen, die Übertragung dieser Werte auf das übrige Netz aber auf geodätischem Weg zu bewirken.

Nur die astronomische Azimutbestimmung ist der geodätischen Übertragung überlegen. Letztere liefert z. B. bei einer Folge von 25 Dreiecksseiten einen mittleren Richtungsfehler der letzten von diesen von $m'' \sqrt{25}$, wenn m den mittleren Winkelfehler darstellt, also von $\pm 1,0''$ für $m = \pm 0,2''$, während bei direkter astronomischer Beobachtung dieser Fehler sich auf $\frac{1}{5}$ dieses Betrags hätte herabdrücken lassen.

Die preussische Landesaufnahme bestimmte z. B. die geographischen Koordinaten des Punktes I. Ordnung Rauenberg (auf den diejenigen der Berliner Sternwarte geodätisch übertragen wurden). Die bayerische Katastervermessung bestimmte die geographischen Koordinaten des nördlichen Frauenturms in München (Ursprung des sphärisch-rechtwinkligen Koordinatensystems) und das Azimut der Seite München-Aufkirchen; Württemberg (gleichzeitig für Hohenzollern) die geographischen Koordinaten der Tübinger Sternwarte (Ursprung des sphärisch-rechtwinkligen Koordinatensystems) und das Azimut Tübingen-Kornbühl; Baden die geographischen Koordinaten der Mannheimer Sternwarte (Ursprung des rechtwinklig-sphärischen Koordinatensystems); (für die Vermessung der bayerischen Rheinpfalz diente derselbe Punkt und das Azimut Mannheim-Speyer, die geographischen Koordinaten jedoch mit Abweichungen von $0,7''$ in φ und $3,6''$ in λ).

§ 53. Bestimmung geographischer Koordinaten aus rechtwinklig-sphärischen (geodätische Übertragung).

Sind für sämtliche Punkte eines Dreiecksnetzes nach § 50 die rechtwinklig-sphärischen und für einen von ihnen die geographischen Koordinaten bekannt, so kann man letztere für jeden dieser Punkte ableiten. Dies wird namentlich notwendig, wenn die Aufnahme neben ihrer Verwendung für Katasterzwecke zum Entwurf einer von Meridianen und Parallelkreisen begrenzten geographischen Karte benützt werden will.

Gegeben seien die rechtwinklig-sphärischen Koordinaten x_P und y_P eines Punktes P in bezug auf den Meridian von O als x -Achse und O als Ursprung, sowie die geographischen Koordinaten λ_0 und φ_0 von O . Gesucht die geographischen Koordinaten von P . Denken wir uns für die folgende Betrachtung die Erde zunächst

als Kugel, so erhalten wir für die geographische Breite von P (in Fig. 250 sichtbar durch den Schnitt des Parallelkreises durch P)

$$\varphi_P = \varphi_0 + \frac{x}{r} \varrho - \Delta \varphi,$$

oder wenn die geographische Breite des Lotfusspunkts gleich φ' gesetzt wird:

$$\varphi_P = \varphi' - \Delta \varphi = R - u.$$

Im Dreieck NPF ist:

$$\begin{aligned} \cos u &= \cos (R - \varphi' + \Delta \varphi) \\ &= \cos \frac{y}{r} \sin \varphi' \end{aligned}$$

und da $\frac{y}{r}$ klein:

$$\sin (\varphi' - \Delta \varphi) \sim \left(1 - \frac{y^2}{2 r^2} \right) \sin \varphi'.$$

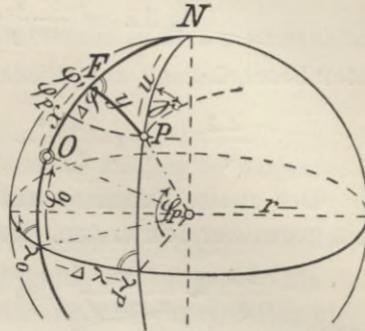
Ebenso ist $\Delta \varphi$ sehr klein, daher

$$\sin \varphi' - \cos \varphi' \frac{\Delta \varphi''}{\varrho''} = \sin \varphi' - \frac{y^2}{2 r^2} \sin \varphi'$$

$$\Delta \varphi'' = \frac{y^2}{2 r^2} \varrho'' \operatorname{tg} \varphi'$$

$$(1) \quad \text{und} \quad \varphi_P = \varphi_0 + \frac{x}{r} \varrho - \frac{y^2}{2 r^2} \varrho'' \operatorname{tg} \varphi'.$$

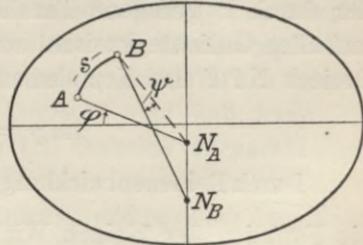
Fig. 250.



Wie auf S. 409 gezeigt wurde, hat die Ellipsoidform der Erde zur Folge, dass die Lotrichtungen verschiedener Oberflächenpunkte sich nicht in einem Punkt schneiden. Nur die auf einem Parallelkreis liegenden Punkte haben je gemeinsamen Lotschnittpunkt auf der Erdachse.

Wenn man daher von einem Erdpunkt A ausgehend aus der Bogenlänge s und dem zugehörigen Azimut die geographische Breite für B sphärisch berechnet, so erhält man sie für N_A als Kugelmittelpunkt, d. h. für den Radius $N_A A$ statt für $N_B B$. Die Divergenz ψ beider Richtungen muss als sphäroidische Korrektur noch eingeführt werden, wenn das durch Rechnung erhaltene Ergebnis für φ mit demjenigen übereinstimmen soll, das die direkte Beobachtung liefert.

Fig. 251.



Ist e die Exzentrizität der Meridianellipse, wobei

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0,00667,$$

so wird

$$\psi'' = e^2 \frac{s^2}{4 r^2} \sin 2 \varphi_A \varrho''.$$

Beachtet man endlich noch die Verschiedenheit des Krümmungshalbmessers r_1 für die Meridianellipse in der Nähe von O und des Halbmessers r_2 für die Ordinate FP, so wird unter Berücksichtigung der Erdabplattung

$$(1a) \quad \varphi_P = \varphi_0 + \frac{x}{r_1} \varrho - \frac{y^2}{2 r_2^2} \varrho \operatorname{tg} \varphi' - e^2 \frac{y^2}{4 r_2^2} \varrho \sin 2 \varphi'.$$

Der Unterschied $\Delta \lambda$ der geographischen Längen zwischen der x-Achse und Punkt P ergibt sich ebenfalls aus dem Dreieck N P F:

$$\operatorname{tg} \Delta \lambda = \frac{\operatorname{tg} \frac{y}{r_2}}{\cos \varphi'} \sim \frac{\frac{y}{r_2} + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{y}{r_2}\right)^3}{\cos \varphi'}$$

Unter Beschränkung auf Glieder bis zur Ordnung $\frac{1}{r^3}$ wird daraus:

$$\frac{\Delta \lambda}{\varrho} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta \lambda}{\varrho}\right)^3 \sim \frac{y}{r_2 \cos \varphi'} + \frac{1}{3 \cos \varphi'} \left(\frac{y}{r_2}\right)^3$$

Der zweite Summand auf jeder Seite der Gleichung ist sehr klein gegenüber dem ersten. Man kann daher näherungsweise setzen

$$\frac{\Delta \lambda}{\varrho} \sim \frac{y}{r_2 \cos \varphi'} \quad \text{also} \quad \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta \lambda}{\varrho}\right)^3 \sim \frac{y^3}{3 r_2^3 \cos^3 \varphi'}$$

woraus

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \lambda}{\varrho} &\sim \frac{y}{r_2 \cos \varphi'} + \frac{y}{3 \cos \varphi'} \left(\frac{y}{r_2}\right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{r_2 \cos \varphi'}\right)^3 \\ &\sim \frac{y}{r_2 \cos \varphi'} - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{r_2 \cos \varphi'}\right)^3 (1 - \cos^2 \varphi') \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \lambda'' \sim \frac{y}{r_2 \cos \varphi'} \varrho'' - \frac{\varrho''}{3} \left(\frac{y}{r_2 \cos \varphi'}\right)^3 \sin^2 \varphi' \\ \lambda_P = \lambda_0 + \frac{y}{r_2 \cos \varphi'} \varrho - \frac{\varrho}{3} \left(\frac{y}{r_2 \cos \varphi'}\right)^3 \sin^2 \varphi' \end{array} \right.$$

Zur Bestimmung der Meridianrichtung in P mit Hilfe des bekannten Richtungswinkels einer von P ausgehenden Dreiecksseite berechnen wir aus der rechtwinklig-sphärischen Ordinate und der geographischen Breite φ von P die Meridiankonvergenz γ in P. (Berechnung aus den sphärischen Polarkoordinaten s. S. 406). Da der durch P gezogene Parallelkreis zur x-Achse senkrecht steht auf allen Ordinatenkreisen, so ist der Winkel bei P im sphärischen Dreieck N P F das Komplement zu γ und wir haben (s. Fig. 250)

$$\sin \gamma = \operatorname{tg} \frac{y}{r_2} \operatorname{tg} \varphi_P$$

Durch Reihenentwicklung bis zur Ordnung $\frac{1}{r^3}$ einschliesslich für die Funktion der kleinen Winkel γ und $\frac{y}{r_2}$ wird:

$$\frac{\gamma}{\varrho} - \frac{1}{6} \left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)^3 = \operatorname{tg} \varphi_P \left[\frac{y}{r_2} + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{r_2}\right)^3 \right] = \frac{y}{r_2} \cdot \operatorname{tg} \varphi_P + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{r_2}\right)^3 \operatorname{tg} \varphi_P$$

Der zweite Summand auf beiden Seiten ist so klein, dass man ihn für näherungsweise Berechnung von γ vernachlässigen kann, womit man erhält:

$$\frac{\gamma}{\varrho} \sim \frac{y}{r_2} \operatorname{tg} \varphi_P \quad \text{und} \quad \left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)^3 \sim \left(\frac{y}{r_2} \operatorname{tg} \varphi_P\right)^3$$

womit durch Einsetzung

$$\gamma'' \sim \frac{y}{r_2} \varrho'' \operatorname{tg} \varphi_P + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{r_2} \right)^3 \varrho'' \operatorname{tg} \varphi_P + \frac{1}{6} \left(\frac{y}{r_2} \operatorname{tg} \varphi \right)^3 \varrho'', \text{ oder}$$

$$(3) \quad \gamma'' \sim \frac{y}{r_2} \varrho'' \operatorname{tg} \varphi_P + \frac{\varrho''}{6} \left(\frac{y}{r_2} \operatorname{tg} \varphi_P \right)^3 (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi_P).$$

Für kleine Ordinaten y und geographische Breiten φ ist genähert

$$(3a) \quad \gamma'' \sim \frac{y}{r_2} \varrho'' \operatorname{tg} \varphi_P.$$

§ 54. Einschaltung eines Dreiecksnetzes zweiter in dasjenige erster Ordnung.

Die gegenseitige Entfernung der nach vorhergehendem ihrer Lage nach bestimmten Punkte I. Ordnung ist zu gross, als dass sich auf letzteren ins einzelne gehende Vermessungsarbeiten direkt aufbauen liessen. Dazu bedarf es der Festlegung weiterer Punkte bis zu gegenseitigen Entfernungen von rund 1 km herab.

Der unvermittelte Übergang von 50 km langen auf 1 km lange Seiten würde nun aber zu ungünstigen Figuren (spitzen bezw. stumpfen Schnitten) führen. Man steigt deshalb stufenweise herab, und bestimmt von den Punkten I. Ordnung als feststehender Grundlage ausgehend durch ein „Dreiecksnetz II. Ordnung“ die Lage von Festpunkten in gegenseitigen Entfernungen von 15 bis 20 km. Die Punkte I. und II. Ordnung zusammen bilden sodann die Grundlage für die Bestimmung weiterer Punkte III. Ordnung in gegenseitigen Entfernungen von 2 bis 5 km. Man kann derart beliebig viele „Ordnungen“ von Dreiecken nach Seitenlänge, oder Bestimmungs-, bezw. Festlegungsart abstufend einschalten bis schliesslich der direkte Anschluss der Stückvermessung möglich wird. Zumeist geht man aber nur bis zu trigonometrischen Punkten IV. Ordnung. Die Wirkung der Kugelgestalt der Erde kommt dabei natürlich immer weniger zur Geltung, je kleiner die Dreiecke sind und kann im allgemeinen schon bei den Dreiecken III. Ordnung vernachlässigt werden.

Für das Dreiecksnetz II. Ordnung, welches sich dem Netz I. Ordnung eingliedert, fällt dadurch die direkte Streckenmessung, die geographische Ortsbestimmung und die Schwierigkeit der Beobachtung übermässig langer Zielungen weg. Dagegen erhebt sich, verschärft durch die grössere Zahl gegebener Punkte, die Schwierigkeit des Anschlusszwangs. Die Zahl überbestimmter Stücke, welche durch Ausgleichung der beobachteten Richtungen und Winkel zur Übereinstimmung gebracht werden müssen, wird grösser. Für die Seiten- und Koordinatenberechnung gelten aber im übrigen die in §§ 49 bis 53 angedeuteten Verfahren.

§ 55. Umwandlung der sphärischen in ebene Koordinaten.
Kartenprojektion.¹⁾

Notwendig-
keit der
Schaffung
ebener
Bilder.

Die Stückvermessung, in welcher der praktische Zweck der Landesaufnahme schliesslich gipfelt, verlangt (s. S. 3) die Feststellung der Horizontalprojektion der aufgenommenen Flächen. Aus diesem Grund muss auch das Netz der Aufnahmelinien und das dafür grundlegende Dreiecksnetz in der horizontalen Ebene dargestellt werden.

Dies wird vorbereitet durch Übertragung des Vermessungshorizontes, der in den meisten Fällen durch die Schmiegunngskugel an das Erdellipsoid in Landesmitte (für Württemberg mit dem Halbmesser $r = 6388\ 336$ m) dargestellt wird samt den nach vorhergehendem darauf abgebildeten Dreieckspunkten I. und II. Ordnung in die Ebene, so dass darauf aufbauend die Koordinaten der weiterhin nötigen Festpunkte niederer Ordnung direkt unter Benützung der Hilfsmittel der ebenen Trigonometrie und Planimetrie bestimmt werden können. Nun ist, wie schon einleitend S. 2 bemerkt wurde, die Kugel- (und ebenso die Ellipsoid-)Fläche nicht abwickelbar, die kongruente Abbildung der auf ihr verzeichneten Figuren also unmöglich.

Winkel-
bezw.
Flächen-
verzerrung.

Es kann sich deshalb nur darum handeln, diejenige Art der Übertragung auf die Ebene herauszusuchen, welche je nach Bedarf die geringste Verzerrung, sei es bezüglich der Winkel-, bestimmter Strecken-, oder der Flächengrössen, liefert. Gleichheit sämtlicher Strecken zwischen Urbild und ebener Abbildung ist ebensowenig erreichbar, als gleichzeitige Treue der Winkel- und der Flächengrössen.

In jedem Punkt der abzubildenden Kugelfläche gibt es zwei sich rechtwinklig schneidende Tangenten, welche ihren Schnittwinkel auch in der Abbildung beibehalten. Beschreibt man um einen Punkt der Kugelfläche einen ∞ kleinen Kreis vom Radius r , so werden dessen auch in der Abbildung \perp aufeinander stehende Radien im allgemeinen verändert, so dass der Kreis als Ellipse mit den Halbachsen a und b sich abbildet. Als Mass für die bei der Abbildung eintretenden Verzerrungen gelten die Funktionen $\frac{a-b}{a+b}$ und $a \cdot b$. Ist an allen Stellen der Karte $a = b$, also $\frac{a-b}{a+b} = 0$, bildet sich also jeder Kreis wieder als Kreis ab, so ist die Projektion „winkeltreu“. Ist $a \cdot b = r^2$, also der Bildellipseninhalte gleich dem Inhalt des Urkreises, so ist sie „flächentreu“. Die Werte von $\frac{a-b}{a+b}$ und $(a \cdot b - r^2)$ geben also ein Mass für die Grösse der Winkel-, bzw. Flächenverzerrung.

¹⁾ Für eingehendere Behandlung der Kartenprojektion vergl. u. a. „Tissot, Die Netzentwürfe geogr. Karten“, bearbeitet von Hammer, 1887, „Hammer, Die geogr. wichtigsten Kartenprojektionen“, Stuttgart 1889, „Herz, Lehrbuch der Kartenprojektionen“, Leipzig 1885.

Die Abbildungen auf einer Kugelfläche werden entweder direkt, d. h. auf perspektivischem Weg auf die Bildebene übernommen, oder nach irgendeinem mathematischen Gesetz zunächst auf eine abwickelbare Fläche übertragen. Die Abwicklung der letzteren liefert dann das ebene Bild.

Bei den

I. Perspektivischen Abbildungen

(welche wegen der Treue der vom Kartenmittelpunkt ausgehenden Azimute zu den „azimutalen“ zählen) ist die Bildfläche dargestellt durch die Berührungsebene an die Kugel im Koordinatenursprung A.

Die Schnittpunkte der von einem Punkt O des durch A gehenden Kugeldurchmessers als Augpunkt nach den darzustellenden Kugelpunkten gezogenen Zielstrahlen mit der Bildebene stellen die gesuchten Bildpunkte dar.

Je nach der gegenseitigen Lage des Berührungs- und Augpunktes ergeben sich verschiedene Unterarten perspektivischer Abbildungen, nämlich:

a) Die gnomonische Projektion. Der Augpunkt O befindet sich (s. Fig. 252) im Kugelmittelpunkt.

Es lassen sich nur solche Teile der Erdoberfläche auf einem Plan abbilden, die kleiner sind als die halbe Erde, denn die Abbildung des zur Bildebene parallelen Grosskreises wäre ein ∞ grosser Kreis. Wird die

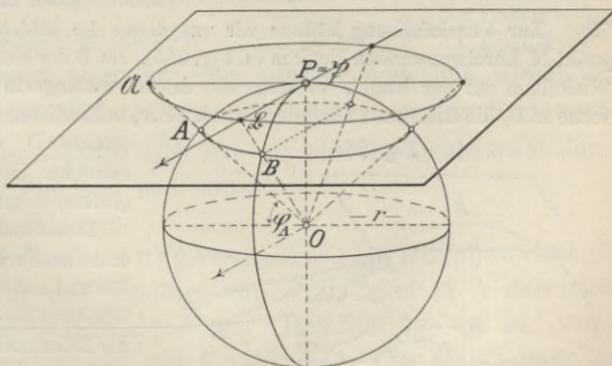
Erdkugel von der Bildebene in einem der Pole P berührt, so bilden sich alle Meridiane als Gerade ab, die sich im Bildpunkt des Pols schneiden.

Aus jedem Parallelkreis φ_A wird ein Kreis mit dem

Halbmesser $r \operatorname{tg}(R - \varphi_A) = r \operatorname{ctg} \varphi_A$ um diesen Pol P, der sein eigener Bildpunkt \mathfrak{P} ist. Die Streckenverzerrung in radialer Richtung wächst also sehr rasch, nämlich im Verhältnis $\frac{\operatorname{ctg} \varphi_A}{\varphi_A}$.

Berührt die Bildebene in einem beliebigen Punkt A mit der geographischen Breite φ_A , so wird aus jedem Parallelkreis eine Ellipse, Parabel, oder Hyperbel, je nachdem seine Poldistanz $\leq \varphi_A$ ist.

Fig. 252.



Die gnomonische Projektion hat hauptsächlich Bedeutung für See- und Himmelskarten, weil alle Grosskreisbilder gerade Linien sind. Für geodätische Zwecke hat z. B. die Schweiz bei Ausgleichung des Dreiecksnetzes von ihr Gebrauch gemacht.

b) Die stereographische Projektion. Der Augpunkt O ist (s. Fig. 253) der Gegenpunkt des Koordinatennull- bzw. Bildberührungspunkts.

Diese Abbildungsart hat die ausgezeichneten Eigenschaften,

- 1.¹⁾ dass die Abbildung jedes Kugelkreises wieder ein Kreis ist und
- 2.²⁾ dass die Bilder winkeltreu (konform) sind.

¹⁾ Beweis zu 1. BC sei ein beliebiger Kleinkreis auf der Kugel, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ seine Abbildung.

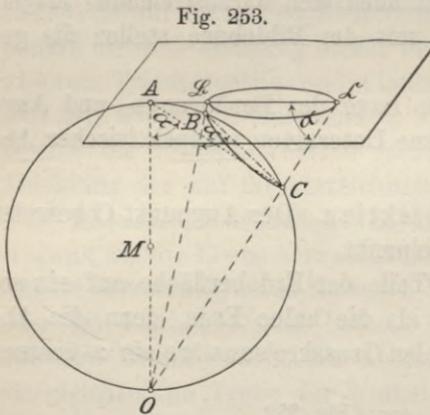


Fig. 253.

Nun ist (s. Fig. 253)

$\sphericalangle A\mathfrak{C}O = \alpha = \mathfrak{C}A O$
(OAC und OAC rechtwinklige Dreiecke),

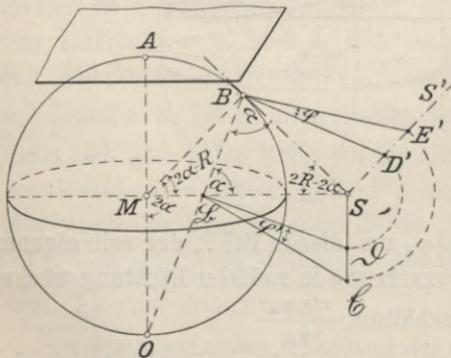
$\sphericalangle CAO = CBO = \alpha$
(Peripheriewinkel über demselben Bogen).

In dem Kreiskegel BCO bildet also der Schnitt $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ der Bildebene einen Wechselschnitt zum Kreis BC , ist folglich selbst ein Kreis.

²⁾ Beweis zu 2. Parallele Verschiebung der Bildebene ändert an den Winkeln der Bilder nichts. Letztere bleiben dabei einander ähnlich.

Zur Vereinfachung können wir uns daher die Bildebene A in den Mittelpunkt M hereingeschoben denken (s. Fig. 254). Ist B der Scheitel eines beliebigen Winkels φ auf der Kugel, so schneidet dessen verlängerte Ebene (Berührungsebene in B) die Bildebene nach der Geraden SS' , auf welcher somit auch die Schnittpunkte D und E der beiden Schenkel (als ihre eigenen Bildpunkte) liegen.

Fig. 254.



Denkt man sich die den Winkel φ enthaltende Berührungsebene um BS und andererseits die nach M verschobene Bildebene um MS je in die Zeichenebene der Fig. 254 umgeklappt, so ist $E'BD' = \varphi$ die Umklappung des auf der Kugel liegenden, $\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D} = \varphi'$ diejenige des abgebildeten Winkels. Dabei ist

$S D' = S D$ und $S E' = \mathfrak{C}\mathfrak{C}$.

Da ferner $\mathfrak{B}S = BS$ (Gleichheit der Winkel α bei B und \mathfrak{B}), so ist Figur $\mathfrak{B}S\mathfrak{D}\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{B}S D' E'$, also $\varphi = \varphi'$.

Die Abbildung ist winkeltreu.

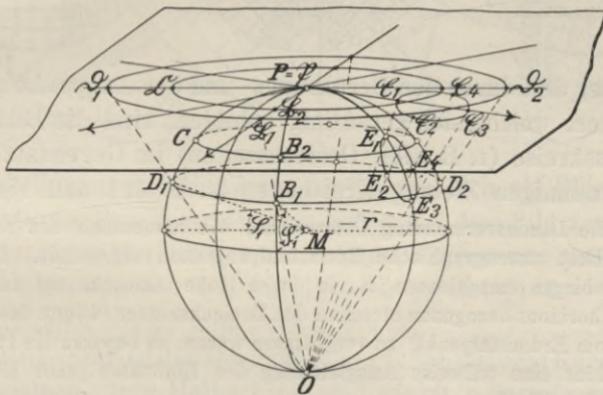
Sie gestattet die zusammenhängende Darstellung der ganzen Erde, dagegen wächst die Längenverzerrung rasch gegen den Rand und wird schliesslich (für den Augpunkt) unendlich gross. Die Figuren 255 a bis c beschränken sich daher je auf die Darstellung der dem Augpunkt abgewandten Halbkugel.

Jeder Kreis, also namentlich z. B. jede Dreiecksseite, die sich (als Stück eines Grosskreises) in der Örtlichkeit als Gerade zeigt, bildet sich als Kreisbogen ab.

Berührt die Bildebene die Kugel

α) in einem Pol („Polarprojektion“), so sind die Bilder sämtlicher Parallelkreise Kreise um den Berührungspunkt.

Fig. 255.



Die Bilder der zwischen Äquator und Bildebene liegenden Parallelkreise mit der Breite φ erhalten dabei den Radius $\frac{2r \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$, diejenigen der zwischen Augpunkt und Äquator liegenden Kreise den Radius $\frac{2r \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$. Das Bild des Augpunkts ist der ∞ grosse Kreis um P .

Die Meridiane stellen sich dar als ein Strahlenbüschel durch den Ursprung (s. Fig. 255 und 255a).

Berührt die Bildebene

β) in einem Punkt A des Äquators („Äquatorialprojektion“), so werden Äquator und Meridian von A als zwei in A sich senkrecht schneidende Gerade abgebildet. Das Bild des um 90° von A abstehenden Meridians ist ein Kreis um A vom Halbmesser $2r$. Für die Mittelpunkte der anderen Meridiane ist das Bild des Äquators der geometrische Ort.

Die Parallelkreise werden durch symmetrisch zum Äquator angeordnete exzentrische Kreise dargestellt (s. Fig. 255b).

Berührt die Bildebene

γ) in einem beliebigen Punkt A von der Breite φ , dem Koordinatenursprung in Landesmitte („Horizontalprojektion“), so sind

die Bilder des Parallelkreises ($-\varphi$) und dasjenige des Meridians von A zwei senkrecht aufeinanderstehende Gerade. Die erstere bildet den geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Meridian-, letztere denjenigen für die Mittelpunkte der Parallelkreisbilder.

Fig. 255 a.



Fig. 255 b.

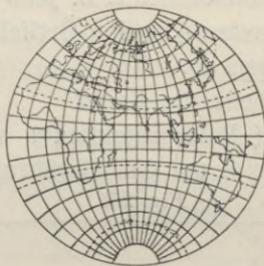
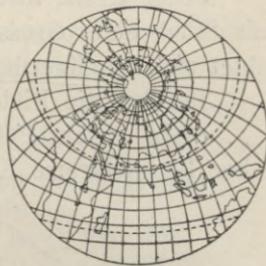


Fig. 255 c.



Ausser den durch den Berührung- und den Augpunkt gehenden Grosskreisen, welche sich geradlinig abbilden, sind die Bilder sämtlicher Grosskreise (z. B. aller Dreiecksseiten) im Gegensatz zur örtlichen geradlinigen Zielung Kreisbögen (s. S. 421 und Fig. 255 c).

Für die Landesvermessung Österreichs, wie namentlich des Königreichs Ungarn ist diese stereographische Horizontalprojektion angewandt. Da Ungarn rings von Gebirgen umschlossen ist, in deren Höhe sämtliche auf den Landesvermessungshorizont bezogenen Strecken des Dreiecksnetzes (wegen des grösseren Abstandes vom Erdmittelpunkt) zu vergrössern wären, so bewirkt die Projektionsverzerrung hier eine teilweise Ausgleichung des Einflusses jener Höhenunterschiede auf die Strecken.

c) Die orthographische Projektion verlegt den Augpunkt O in unendliche Ferne. Die Projektionsstrahlen gehen daher parallel zum Erdhalbmesser nach dem Berührungspunkt A der Bildebene. Je nach deren Lage ist auch hier wieder zu unterscheiden zwischen:

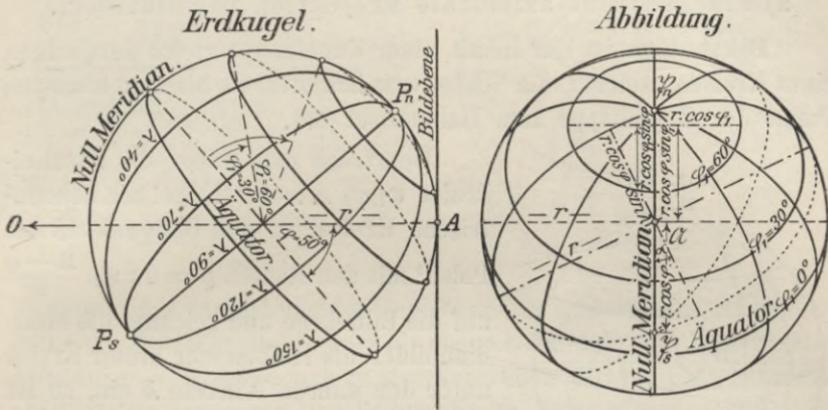
α) der Polarprojektion. Der Augpunkt O liegt auf der Weltachse. Die Bildebene berührt in einem Pol. Sämtliche Meridiane bilden in der Abbildung ein Strahlenbüschel durch den Ursprung, die Parallelkreise konzentrische Kreise mit den wahren Halbmessern (s. Fig. 256a);

β) der Äquatorialprojektion. Der Augpunkt O ist der ∞ ferne Punkt der Schnittlinie des Äquators mit dem Meridian des Berührungspunktes A. Beide Ebenen werden durch senkrecht aufeinanderstehende Gerade, alle Parallelkreise φ durch Parallelen zum Äquatorbild im Abstand $r \sin \varphi$ dargestellt.

Alle Meridianbilder sind Ellipsen mit gemeinsamer grosser Achse $2r$ und der kleinen Halbachse $r \cdot \sin \lambda$, wenn die Längen λ von dem zur Bildebene parallelen Meridian aus gezählt werden (s. Fig. 256b) und

γ) der Horizontalprojektion (s. Fig. 256 und 256c) zum Koordinatenursprung A mit der geographischen Breite φ . Augpunkt ist der unendlich ferne Punkt des Erdradius nach A. Sämt-

Fig. 256.



liche Parallelkreise und Meridiane projizieren sich als Ellipsen. Die Mittelpunkte der Parallelkreisbilder liegen auf dem Bild des zur Bildebene senkrechten Meridians ($\lambda = 0^\circ$) in der Entfernung $r \cdot \cos \varphi \sin \varphi_1$ vom Kartenmittelpunkt. Der Parallelkreis φ_1 hat in der Abbildung die Halbachsen $r \cos \varphi_1$ und $r \cos \varphi_1 \sin \varphi$.

Die Mittelpunkte der Meridianbilder fallen mit dem Kartenmittelpunkt zusammen. Ihre Halbachsen sind gleich r bzw. $r \cdot \cos \varphi \sin \lambda$, wenn die geographischen Längen λ von dem zur Bildebene senkrechten Meridian aus gezählt werden. Die letztere, kleine, Halbachse schliesst mit dem Bild des Nullmeridians den Winkel α ein, wo $\text{ctg } \alpha = \sin \varphi \text{ tg } \lambda$ ist.

Mit der orthographischen Projektion wird namentlich die Oberfläche von Gestirnen (Mond etc.) dargestellt.

Fig. 256 a.

Fig. 256 b.

Fig. 256 c.



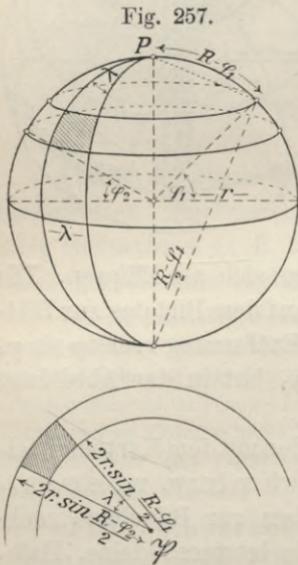
Weitere perspektivische Projektionen, für welche der Augpunkt zwischen der der Bildebene abgewandten Kugelfläche und dem Unendlichen liegt, seien hier übergangen.

II. Übertragung auf eine Ebene, oder auf eine abwickelbare Fläche nach bestimmten Bedingungen.

1. Nichtperspektivische direkte Übertragung auf die Ebene.

a) Flächentreue azimutale Projektion von Lambert.

Bekanntlich ist der Inhalt einer Kugelkappe gleich demjenigen eines Kreises, welcher die Sehne vom Schnittkreis bis zum höchsten Punkt der Kugelkappe zum Halbmesser hat.



Überträgt man daher die Parallelkreise $\varphi_1 \varphi_2 \dots$ der Kugel als konzentrische Kreise um den Bildpunkt \mathfrak{P} des Pols P mit den Radien $\varrho = 2r \sin \frac{R-\varphi}{2}$ auf die Bildebene und zeichnet die Meridianbilder als Halbmesser dieser Kreise unter den wahren Winkeln λ ein, so ist die zwischen zwei beliebigen solchen Kreisbögen und zwei Radien auf der Abbildung liegende Fläche gleich der Kugelfläche zwischen den entsprechenden Parallelkreisen und Meridianen. Diese Abbildung ist also wohl flächen-, aber weder strecken-, noch winkeltreu.

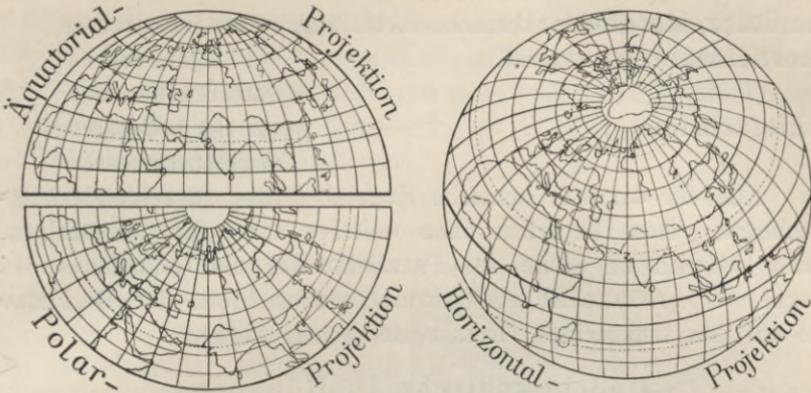
Die einander entsprechenden Parallelkreise haben z. B. auf der Kugel den Halbmesser $r \cos \varphi$, auf der Abbildung den Halbmesser $2r \sin \frac{R-\varphi}{2}$, sind also nicht umfangsgleich. Auch ist ihr Abstand auf der Kugel gleich $r \cdot d\varphi$, auf der Abbildung aber gleich $d \left(2r \sin \frac{R-\varphi}{2} \right) = r \cos \frac{R-\varphi}{2} \cdot d\varphi$, wenn $d\varphi$ den (als sehr klein vorausgesetzten) Unterschied der zugehörigen geographischen Breiten vorstellt. Letztere sind einander nur gleich für $\varphi = R$, d. h. für Parallelkreise nahe dem Pol.

Als Kartenmittelpunkt kann natürlich statt des Pols jeder beliebige Punkt A der Kugeloberfläche treten. Aus der „Polar“- wird dann die „Horizontalprojektion“.

An Stelle der Meridiane treten dabei lediglich die Grosskreise zum Berührungspunkt A der Bildebene, an Stelle der Parallelkreise die Parallelkreise um A.

Würde man b) statt der Sehnen die Bogenlängen als Halbmesser für die Abbildung der Parallelkreise verwenden, also z. B. vom

Fig. 257 a.



Nullpunkt des darzustellenden Gebiets aus die sphärischen Polarkoordinaten der Dreieckspunkte kurz als ebene behandeln, — „Postelsche“ Abbildung —, so käme man zu streckentreuen Mittelpunktsabständen, aber stärker verzerrten Parallelkreisbögen, hätte also weder Winkel-, noch Flächentreue. Eine absichtliche Verzerrung auch der radialen Abstände im Verhältnis der ungewollten Parallelkreisverzerrung würde zur winkeltreuen stereographischen Abbildung führen.

Wie bei der Lambertschen die Flächen-, oder bei der stereographischen Projektion die Winkeltreue erreicht wurde, kann man für die Abbildung also auch die Bedingung der Treue gewisser Streckensysteme, oder die Bedingung aufstellen, dass die Verzerrungsverhältnisse je in vermitteltem Betrag auftreten sollen. Die hieraus sich ergebenden Projektionsarten sollen hier übergangen werden.

2. Kegel- und Zylinderprojektionen.

Die im folgenden zu betrachtenden Projektionsverfahren verwenden als Bildfläche eine die Erdkugel längs eines ihrer Klein-, oder Grosskreise berührende Kegel-, bzw. Zylinderfläche, auf welche zunächst die Hauptlinien der Kugel nach bestimmten Gesetzen übertragen werden, um hernach samt der Bildfläche in die Ebene ausgebreitet zu werden.

A. Die Kegelprojektionen

sind entweder „echt“, oder „unecht“ konische Abbildungen, je nachdem die Übertragung der Meridiane auf die berührende Kegelfläche lediglich durch Verlängerung ihrer Ebenen, oder sonst nach einem irgendwie aufgestellten Gesetz erfolgt. Sie kommen namentlich in Frage, wenn das darzustellende Gebiet sich als schmale Zone einem Kleinkreis folgend um die Erde legt.

Dabei spricht man von
 normaler, oder direkter konischer Abbildung, wenn die Erdachse
 querachsiger (transversal.) „ „ „ irgendein
 Äquatordurchmesser
 schiefachsiger „ „ wenn ein beliebiger
 Kugeldurchmesser } Kegelachse ist.

Alle für direkte konische Kugelabbildung zu zeigenden Beziehungen gelten natürlich ohne weiteres auch für die übrigen, wenn lediglich an Stelle des Parallelkreises als Grundkreis des Kegels der gewählte Kugelkleinkreis, und an Stelle der Meridiane die auf ihm senkrechten Grosskreise gesetzt werden.

Unecht konische Abbildungen.

a) Die einfache, oder gewöhnliche Kegelprojektion.

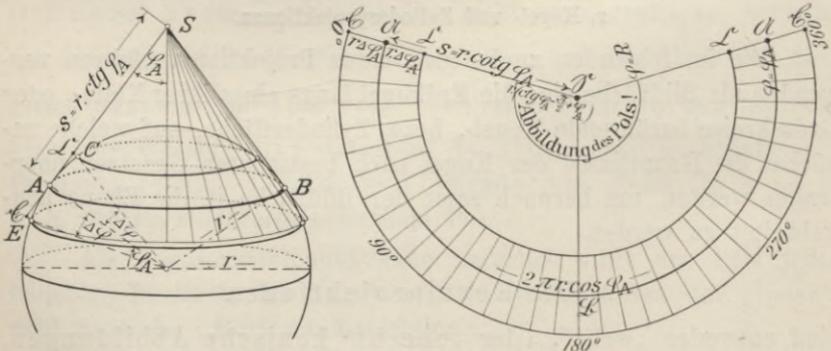
Die Kegelfläche, welche den Träger der Abbildung darstellt, berühre längs des Mittelparallels φ_A vom darzustellenden Gebiet. Die Abbildung dieses Mittelparallels ist nach erfolgter Abwicklung daher ein Kreisbogen vom Halbmesser $s = r \operatorname{ctg} \varphi_A$ und von der wahren Länge $2 \pi r \cos \varphi_A$.

Jeder andere Parallelkreis $\varphi_A \pm \Delta \varphi$ wird abgebildet als konzentrischer Kreisbogen im unverzerrten Abstand $\widehat{AC} = \widehat{AE} = r \cdot \Delta \varphi$, vom Mittelparallel, also mit der Länge

$$x = \frac{2 \pi r \cos \varphi_A (r \operatorname{ctg} \varphi_A \pm r \Delta \varphi)}{r \operatorname{ctg} \varphi_A} = 2 \pi r \cos \varphi_A \frac{\operatorname{ctg} \varphi \pm \Delta \varphi_A}{\operatorname{ctg} \varphi_A}$$

statt der Solllänge $2 \pi r \cos (\varphi_A \pm \Delta \varphi)$.

Fig. 258.



Sämtliche Meridiane werden durch die Mantellinien dargestellt, in welchen die Kegelfläche von den Meridianebenen geschnitten wird.

Nur auf dem Mittelparallel und auf den Meridianen sind demnach die Strecken unverzerrt, die Streckenverzerrung erreicht für jedes Flächenelement ihr Maximum in der Richtung der Parallel-

kreise und wächst mit dem Abstand vom Mittelparallel. Diese Abbildungsmethode, (in welcher häufig Europa auf den Karten dargestellt wird) ist aus diesem Grund weder flächen-, noch winkeltreu.

Statt einem Mittelparallel kann man auch zwei Parallelkreise längentreu abbilden. Der Berührungskegel wird in diesem Fall zum Schnittkegel durch diese beiden Kugelkreise.

b) Flächentreue wird erreicht, sobald man die Parallelkreise nicht bloss ihrem Abstand vom Mittelparallel, sondern auch ihrer Länge nach in wahrer Grösse aufträgt und einteilt.

Damit werden alle Meridianbilder mit Ausnahme eines einzigen, geraden, zu diesem letzteren symmetrische Kurven, welche in einem

Punkt \mathfrak{P} , dem Polbild, zusammenlaufen (s. Fig. 258 a). Diese „Bonne-sche“ Projektion findet man häufig bei Karten von Asien, Nordamerika und auch Europa, sowie für topographische Spezialkarten in Frankreich, Bayern, der Schweiz und der Niederlande angewandt.

c) Verlegt man die Spitze des Berührungskegels in den Pol (so dass der Kegel zur Berührungsebene wird), so werden die Bilder sämtlicher Parallelkreise φ konzentrische Vollkreise um dasjenige des Pols, mit den Radien $r \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$. Sie bilden sich also mit der Länge

$2 r \pi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$ statt mit $2 r \pi \cos \varphi$, oder $\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{\cos \varphi}$ fach verzerrt ab.

In meridionaler Richtung verlaufende Strecken bleiben unverzerrt, dagegen erleiden abgebildete Winkel starke Verzerrung. In dieser Projektion werden häufig die Polargebiete gezeichnet.

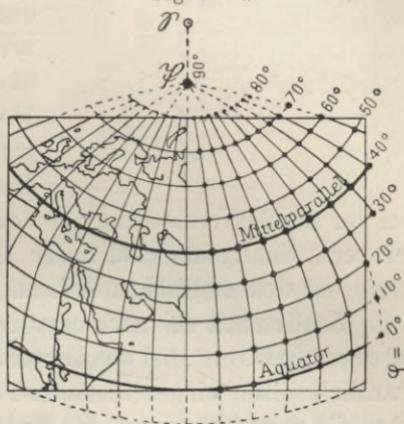
Beziehungen für eine

d) konische winkeltreue Abbildung wurden zuerst von Lambert entwickelt, und durch Paschen, später durch Jordan für die Projektion des hauptsächlich in westöstlicher Richtung sich ausdehnenden Grossherzogtums Mecklenburg ausgebaut. Berührungskreis und gleichzeitig Hauptachse für die sphärischen Koordinaten ist der ellipsoidische Parallelkreis $\varphi = 53^{\circ} 45'$, Nullmeridian derjenige durch den Schweriner Schlossturm.

(Vergl. u. a. Jordan, „Konforme Kegelprojektion der Grossh. Mecklenburgischen Landesvermessung“. Schwerin 1891.)

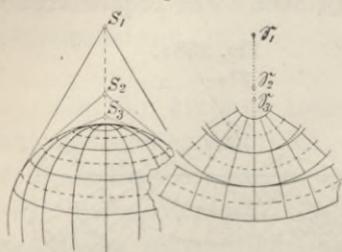
Zu den Kegelprojektionen gehören endlich

Fig. 258 a.



e) die „Polykonischen Entwürfe“, bei welchen wegen der bei Verwendung einer einzigen Kegelfläche mit der Entfernung von

Fig. 259.



Mittelparallel stark wachsenden Verzerrungen auf das strenge Zusammenpassen der Nord- und Südränder der einzelnen Blätter eines Kartenwerks verzichtet und das darzustellende Gebiet zerlegt wird in schmale, durch Meridiane untergeteilte Parallelkreiszonen: „Gradabteilungskarte“.

Diese Projektionsart findet Anwendung bei der Landesvermessung der Vereinigten Staaten, und als Variante mit rechtwinkligem Schnitt der Bilder von Meridian und Parallelkreis bei den englischen Militärkarten.

Schliesslich sei noch erwähnt die sogen. „Preussische Polyederprojektion“, bei welcher jedes von benachbarten Meridianen und Parallelkreisen eingeschlossene Trapez je für sich auf einer Ebene abgebildet und demnach die Erdoberfläche durch ein Polyeder mit trapezförmigen Grenzflächen ersetzt wird. Angewandt ist diese Projektionsart bei der Karte des deutschen Reichs (früher preussische Generalstabskarte) in 1 : 100 000 (Koordinatenunterschiede der einzelnen Karteneckpunkte $\Delta \lambda = 30'$, $\Delta \varphi = 15'$) und Österreich-Ungarns.

B. Die Zylinderprojektionen

stellen den speziellen Fall der Kegelpjektionen dar, in welchem die Kegelspitze in unendlicher Ferne liegt, der Berührungskreis also ein Grosskreis ist. Auch hier wird wie bisher (s. S. 426) im Hinblick auf die Lage des Berührungskreises auf der Erdkugel zwischen „normaler“, „querachsiger“ und „schiefsachsiger“ Projektion unterschieden, ohne dass aber dadurch die Abbildungsgesetze an sich beeinflusst würden.

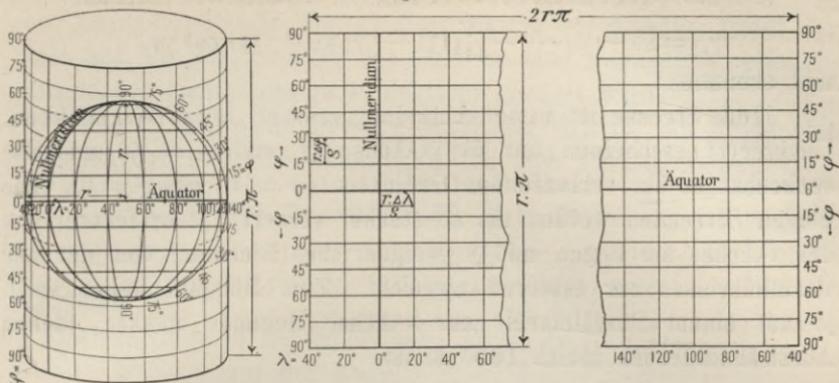
a α) einfache (normale, gewöhnliche) Zylinderprojektion: „quadratische Plattkarte“. Die Meridianbilder — Schnittlinien der Meridianebenen mit dem längs des Äquators berührenden Zylinder — sind Mantellinien des letzteren. Auf ihnen werden im gegenseitigen Abstand $\frac{\Delta \varphi}{\rho} \cdot r$ (wahre Meridianbogenlängen) die Bilder der Parallelkreise φ als Parallelen zum Äquator aufgetragen. Der letzteren Länge ist daher um so mehr verstreckt, je weiter sie sich vom Äquator entfernen. Die zu einer geographischen Breite von

$$\varphi = 0 \quad 15^\circ \quad 30^\circ \quad 45^\circ \quad 60^\circ \quad 75^\circ \quad 90^\circ$$

gehörigen Parallelkreise sind in der Abbildung

$$1 \quad 1,03 \quad 1,15 \quad 1,41 \quad 1,99 \quad 3,85 \quad \infty \text{ mal länger,}$$

Fig. 260.



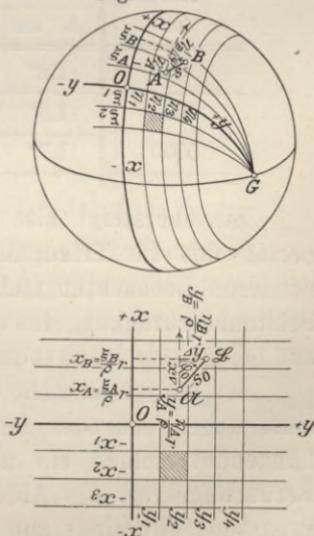
als in Wirklichkeit. Weder winkeltreu, noch flächentreu, und streckentreu nur für die Bilder des Äquators und der Meridiane, eignet sich diese Projektion nur für die Darstellung schmaler Zonen zu beiden Seiten des Berührungskreises. Gerade hiefür hat sie aber in quersachsiger Anwendung unter dem Namen

β) „Soldnersche Projektion“ die ausgedehnteste Verbreitung bei Landesvermessungen gefunden. Die Katasterpläne der meisten deutschen Staaten sind nach ihr entworfen, und zwar wurde sie für diesen Zweck erstmals im Jahre 1809 von Soldner für die bayerische Landesvermessung (die erste, welche auf einheitlichem, das ganze Land umfassendem Dreiecksnetz beruhte) eingeführt. Als Berührungskreis dient hierbei an Stelle des Äquators die Abszissenachse der Landesvermessung (zumeist der Meridian des Koordinatenursprungs). Die Ordinatenkreise treten an Stelle der Meridiane. Die sphärisch-rechtwinkligen Koordinaten ξ und η der Dreieckspunkte werden mit ihren linearen Werten $x = \frac{\xi}{\rho} r$, $y = \frac{\eta}{\rho} r$, also einfach rektifiziert, direkt als ebene Koordinaten benützt (daher auch die Bezeichnung „kongruente Projektion“).

Die geradlinige Entfernung zweier Dreiecksbildpunkte \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ist demnach: $s_0 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, während die wirkliche, auf dem Grosskreisbogen gemessene Entfernung der Ursprünge A und B nach der Ableitung S. 408 beträgt:

$$s \sim s_0 - \frac{s_0}{6r^2} (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \cos^2 \varphi.$$

Fig. 260a.



Für die Streckenverzerrung v_s erhalten wir hieraus:

$$v_s = s - s_0 \sim -\frac{s_0^2}{6r^2}(y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \cos^2 \varphi,$$

und erkennen:

Jede Strecke ist in der Abbildung grösser, als in Wirklichkeit. Unverzerrt erscheinen nur die x-Achse (y_A und $y_B = 0$) und die senkrecht zu ihr verlaufenden Ordinaten ($\varphi = R$, $\cos \varphi = 0$). Die übrigen Strecken werden um so stärker verzerrt, je entfernter von der x-Achse sie liegen und je weniger ihre Richtung von der des Parallelkreises zur ersteren abweicht. Zum Beispiel haben zwei, je auf einem Parallelkreis zur x-Achse liegende Punkte, deren Abszissendifferenz gleich 1000 m ist,

bei einer Ordinatenlänge $y = 0$	eine gegenseitige Entfernung	$s = 1000$ m
" " "	" = 30 km	$s = 999,99$ m
" " "	" = 60 km	$s = 999,96$ m
" " "	" = 90 km	$s = 999,90$ m
" " "	" = 120 km	$s = 999,82$ m.

Die Verzerrung des Richtungswinkels einer Strecke AB ergibt sich aus Gleichung (8) S. 408 zu

$$v''_{\varphi} = (\varphi - \varphi_0)'' = \frac{\rho''}{6r^2} \left[\Delta x (2y_A + y_B) + \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{s_0^2} (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \right].$$

Diese Winkelverzerrung erreicht u. a. für die in nachstehender Tafel aufgeführten Werte von Δx , Δy und y die folgenden Beträge:

$\Delta x = \Delta y$ = $x_B - x_A$ = $y_B - y_A$ m	Mittlere Ordinate y				
	30 km	40 km	60 km	80 km	100 km
500	1,2"	2,1"	4,7"	8,2"	12,9"
1000	1,3"	2,2"	4,8"	8,4"	13"
5000	1,7"	2,8"	5,7"	9,6"	14"

Sie übersteigt also bei einer mittleren Ordinate von 80 km bereits den für Triangulierungen IV. Ordnung noch zugelassenen mittleren Beobachtungsfehler! Dies ist unstatthaft und nötigt zur Breitenbeschränkung des auf eine Achse noch projizierbaren Gebiets auf beiderseits höchstens 60 km.

Ist die westöstliche Ausdehnung eines Landes > 120 km, so muss daher entweder für jeden Flächenstreifen von ungefähr 1° Längenunterschied ein anderer Meridian als Abszissenachse und Berührungskreis des Abbildungszyinders eingeführt (so hat z. B. Preussen, allerdings zum Teil aus historischen und verwaltungs-

technischen Rücksichten, deren 40; Elsass-Lothringen 2 etc.), oder, (bei geringer südnördlicher Erstreckung des Landes) unter Verzicht auf die Nordrichtung der Abszisse eine westöstlich gerichtete Hauptachse (schiefachsigige Projektion) gewählt werden.

Die Flächenverzerrung berechnet sich für ein Kartenblatt zwischen den zwei Ordinaten- und den zwei Parallelkreisen

$$\begin{aligned} \xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2, \text{ oder } x_1 &= \frac{\xi_1}{\varrho} r & x_2 &= \frac{\xi_2}{\varrho} r \\ y_1 &= \frac{\eta_1}{\varrho} r & y_2 &= \frac{\eta_2}{\varrho} r \end{aligned}$$

wie folgt:

Flächengrösse in der Abbildung: $F_0 = (x_2 - x_1) (y_2 - y_1)$,
 „ auf der Kugel:

Höhe der Kugelzone: $h = r \left(\sin \frac{y_2}{r} - \sin \frac{y_1}{r} \right)$,

also Zonenfläche: $Z = 2 r \pi h = 2 r^2 \pi \left(\sin \frac{y_2}{r} - \sin \frac{y_1}{r} \right)$

und tatsächliche Fläche des Kartenblatts

$$\begin{aligned} F &= \frac{2 r^2 \pi \left(\sin \frac{y_2}{r} - \sin \frac{y_1}{r} \right) \frac{x_2 - x_1}{r} \varrho^0}{360^\circ} \\ &= r (x_2 - x_1) \left(\sin \frac{y_2}{r} - \sin \frac{y_1}{r} \right). \end{aligned}$$

In Reihen entwickelt bis einschliesslich zur Ordnung $\frac{1}{r^3}$ wird daraus

$$\begin{aligned} F &\sim r (x_2 - x_1) \left(\frac{y_2}{r} - \frac{y_2^3}{6 r^3} - \frac{y_1}{r} + \frac{y_1^3}{6 r^3} \right) \\ &\sim (x_2 - x_1) \left[y_2 \left(1 - \frac{y_2^2}{6 r^2} \right) - y_1 \left(1 - \frac{y_1^2}{6 r^2} \right) \right] \\ &\sim (x_2 - x_1) \left[(y_2 - y_1) - \frac{1}{6 r^2} (y_2^3 - y_1^3) \right] \\ &\sim F_0 - \frac{1}{6 r^2} (x_2 - x_1) (y_2^3 - y_1^3), \end{aligned}$$

also Flächenverzerrung

$$\begin{aligned} v_F \equiv F - F_0 &\sim - \frac{1}{6 r^2} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) (y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2) \\ &\sim - \frac{F_0}{6 r^2} (y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2). \end{aligned}$$

Wir erkennen hieraus:

Die Fläche der Abbildung ist durchweg zu gross und zwar z. B. für 1 qkm Fläche bei einer mittleren Ordinate y von

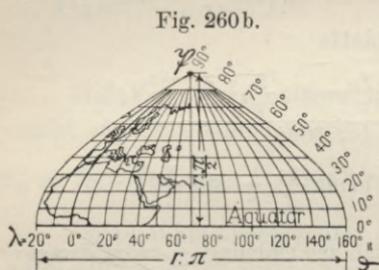
0 km um v_F	\sim 0 qm	90 km um v_F	\sim 100 qm
30 km	\sim 11 qm	120 km	\sim 177 qm.
60 km	\sim 44 qm		

Die letztere Betrachtung führt zu

b) Lamberts isozylindrischer flächentreuer Zylinderprojektion, wenn man den Abstand der Parallelkreisbilder vom Äquator-, bezw. Hauptkreisbild nicht gleich dem zugehörigen Meridian- bezw. Ordinatenbogen, sondern gleich der Zonenhöhe $r \sin \varphi$ bezw. $r \cdot \sin \frac{\varphi}{r} \varphi$ macht, so dass die gegenseitigen Abstände dieser Parallelkreisbilder nach dem Pol P bezw. Gegenpunkt G hin immer kleiner und schliesslich = 0 werden. Die Schnittlinien der verlängerten Meridian- und Parallelkreisebenen mit dem Berührungszylinder sind in diesem Fall die Abbildungen jener Linien.

Statt dessen kann man aber auch, um flächentreue Bilder zu erhalten:

c) nach der „Sanson-Flamsteed unecht zylindrischen Projektion“ die Meridianbogen ihrer wahren Grösse $r \cdot \varphi$ gleich belassen, ebenso aber auch den gegenseitigen Abstand d der Meridianbilder, analog der Bonneschen Projektion, auf jedem Parallelkreis berechnen aus $d = \frac{\Delta \lambda}{\varrho} r \cdot \cos \varphi$.



Die Meridianbilder sind dann

symmetrisch zum geradlinig gezeichneten Mittelmeridian verlaufende, vom Bildpunkt \mathfrak{P} des Pols ausgehende Kurven.

Die letztere Projektionsmethode wird in Atlanten angewandt zu Karten von Afrika, Südamerika etc.

Für manche Zwecke (Seeschifffahrt etc.) wichtiger, als die flächentreue ist aber die

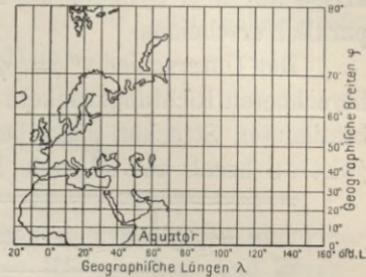
d) konforme, oder winkeltreue zylindrische Abbildung, von Gerhard Kremer, genannt Merkator, (1512—1594) eingeführt und seit 1569 zur Darstellung von Weltkarten angewandt.

Diese „Merkatorprojektion“ behält die parallelen und geradlinigen, sich rechtwinklig schneidenden Meridian- und Parallelkreisbilder bei, verstreckt aber gewaltsam die Abstände der letzteren in demselben Verhältnis $(r \cdot \Delta \lambda) : (r \cdot \cos \varphi \Delta \lambda) = 1 : \cos \varphi$, in welchem sich ohne unser Zutun ihre Länge (infolge paralleler, statt konvergenter Zeichnung der Meridiane) verstreckt. Die Parallelkreis zonen zu gleichen Breitenunterschieden werden in der Abbildung daher um so breiter, je nördlicher sie liegen. Das Bild des Pols ist die ∞ ferne Parallele. Die Flächenverzerrung ist gegenüber der einfachen Zylinderprojektion

eine erhebliche, und zwar um so mehr gesteigerte, je weiter entfernt die Fläche vom Grund-, oder Berührungskreis ist.

Für Flächendarstellungen nach der Merkatorprojektion ist also Beschränkung auf schmale Streifen geboten. Bequem ist aber diese Darstellungsart wegen der Winkeltreue namentlich für Seekarten.

Fig. 260 c.



Die kürzeste Verbindung zweier Erdorte ist zwar der Grosskreis (geodätische Linie). Er schneidet aber die Meridiane unter veränderlichem Winkel. Der Steuermann zieht den Schiffskurs nach derjenigen Linie vor, welche die Meridiane unter konstantem Winkel schneidet. Diese Linie (die „Loxodrome“) ist auf den Merkatorkarten eine Gerade, deren Azimut der Karte entnommen werden kann.

β) Besonders wichtig ist die Winkeltreue (Konformität) für geodätische Arbeiten, weil es hiebei zumeist mehr auf genaue Winkel-, als auf genaue Strecken-, oder gar Flächenangaben ankommt. Überdies ist aber bei der Merkator-, im Gegensatz zur einfachen Zylinderprojektion die Strecken- und Flächenverzerrung von jedem Punkt des Plans aus nach allen Richtungen gleich gross, also leicht zu berücksichtigen. Trotzdem wird man auch bei Anwendung dieser Projektion vermeiden, für die Darstellung irgendeines vom Erdäquator weit entfernten Landes den letzteren als Berührungskreis beizubehalten, und die verschieden starke Verzerrung etwa durch Einführung verschiedener Massstäbe zu berücksichtigen. Vielmehr dient zweckmässig (wie bei der Soldnerschen Methode) ein durch die Mitte des darzustellenden Gebiets ziehender Grosskreis (die Abszissenachse) als Berührungskreis, und der auf ihm senkrechte Erddurchmesser als Zylinderachse (querachsige, oder schiefachsige Projektion), womit die Querabstände, also die Verzerrungsbeträge auf ein Mindestmass herabgedrückt werden.

Die erstmalige Einführung dieser konformen Zylinderprojektion, deren sich u. a. auch die preussische Landesaufnahme bedient, in die Geodäsie erfolgte um 1820 bis 1830 in Hannover durch K. F. Gauss.

Von den sphärisch-rechtwinkligen Koordinaten der darzustellenden Punkte werden dabei die Abszissenwerte $x = \frac{\xi}{\rho} r$ ohne weiteres als ebene eingeführt. Die Ordinaten $y = \frac{\eta}{\rho} r$ erleiden aber eine

Vergößerung im oben angegebenen Verhältnis $m = \frac{1}{\cos \frac{y}{r}} \sim \frac{1}{1 - \frac{y^2}{2r^2}}$,

in welchem die Parallelen zur x-Achse in der Abbildung dadurch verzerrt werden, dass die auf der Kugel konvergierenden Ordinatenkreise auf dem Zylinder als Mantellinien, also in der Abwicklung parallel erscheinen.

Der Unterschied $v'' = (\varphi - \varphi_0)''$ zwischen sphärisch und eben berechneten Richtungswinkeln von durch ihre Endpunktskoordinaten bestimmten Strecken sinkt bei Anwendung dieser Gauss'schen Projektion herab auf folgende Beträge (vergl. hiegegen S. 430):

$\Delta x = \Delta y$	Mittlere Ordinate y				
	30 km	40 km	60 km	80 km	100 km
m					
500	0''	0,1''	0,1''	0,1''	0,1''
1000	0,1''	0,1''	0,2''	0,2''	0,3''
5000	0,4''	0,5''	0,8''	1''	1,3''

ist also für die Arbeiten der niederen Geodäsie bedeutungslos.

Kommen bei den Kartenwerken eines Landes verschiedenerlei Projektionsmethoden zur Anwendung, wie das häufig bei Katasterplänen einer-, und topographischen Karten andererseits zutrifft, und soll das nach der einen Methode gezeichnete Bild direkt (nötigenfalls verkleinert) auf das andere Kartenwerk übernommen werden, so sind unter Zugrundlegung der durch die angewandten Projektionsarten gegebenen Beziehungen zunächst die Koordinaten der Karteneck- und, zur Erreichung genügender Engmaschigkeit, nötigenfalls der Dreieckspunkte aus dem einen System ins andere umzurechnen. Nachdem diese Punkte unter Benützung ihrer umgeformten Werte in das zugehörige Kartenwerk eingezeichnet sind, kann dann die Einschaltung der noch weiter aufgenommenen und gezeichneten Einzelheiten zwischen sie herein auf mechanischem Weg erfolgen.

Die im vorstehenden des Zusammenhangs wegen kurz geschilderten Triangulierungsarbeiten bis herunter zu Dreiecksseiten, für welche die sphärischen Korrektionsglieder

(Gl. 6 S. 408)

$$u = s - s_0 = \frac{s_0}{6r^2} (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \cos^2 \varphi,$$

und (Gl. 8 S. 408)

$$(\varphi - \varphi_0)'' = v''_\varphi = \frac{e''}{6r^2} \left[\Delta x (2y_A + y_B) + \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{s_0^2} (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \right]$$

vernachlässigt werden können, samt der Umrechnung der dabei gewonnenen sphärischen Koordinaten in ebene gehören in das Gebiet der „höheren Geodäsie“. Die Einschaltung weiterer Dreieckspunkte, der engmaschigere Ausbau des Dreiecksnetzes, nach den Sätzen der ebenen Trigonometrie durch Dreiecke III., IV. etc. Ordnung, die „Kleintriangulierung“, der wir jetzt näher treten wollen, ist Sache der „niederer Geodäsie“.

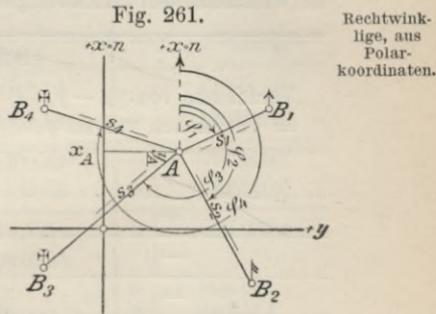
Als grundlegende Aufgabe der

II. Kleintriangulierung

betrachten wir zunächst

§ 56. Die Beziehungen zwischen ebenen rechtwinkligen und Polar-koordinaten und die Berechnung von Kleinpunkts- und Bogen-schnittkoordinaten.

a) Ist ein Punkt A in der Ebene durch seine rechtwinkligen Koordinaten x_A und y_A , und die Lage eines zweiten Punktes B durch seine Entfernung s von A und den Richtungswinkel φ^1 gegeben, so erhält man die rechtwinkligen Koordinaten des Endpunktes B der Strecke s allgemein (s. Fig. 261) aus:



$$(1) \begin{cases} x_B = x_A + s \cdot \cos \varphi \\ y_B = y_A + s \cdot \sin \varphi \end{cases} \text{ Formeln für die Berechnung rechtwink-} \\ \text{ licher, aus Polarkoordinaten.}$$

Sind umgekehrt die rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte A und B bekannt, so erhält man Länge und Richtungswinkel der Verbindungsstrecke AB aus Gleichungen (1) bzw.

$$(1a) \begin{cases} \Delta x \equiv x_B - x_A = s \cos \varphi \\ \Delta y \equiv y_B - y_A = s \sin \varphi \end{cases}$$

durch Division

$$(2) \left. \begin{aligned} & \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \operatorname{tg} \varphi \equiv \operatorname{tgn} AB \\ & \text{und durch Einsetzung} \\ & \frac{y_B - y_A}{\sin \varphi} = \frac{x_B - x_A}{\cos \varphi} = \frac{\Delta y}{\sin \varphi} = \frac{\Delta x}{\cos \varphi} = s \end{aligned} \right\} \text{ Formeln für die Berechnung von Polar-, aus} \\ \text{ rechtwinkligen Koor-} \quad \text{Polar-, aus} \\ \text{ dinaten.} \quad \text{ rechtwink-} \\ \text{ ligen} \quad \text{ ligen} \\ \text{ Koordinaten.} \quad \text{ Koordinaten.}$$

¹⁾ Der „Richtungs“- oder „Neigungswinkel“ $n AB = \varphi$ einer Strecke AB ist (s. S. 404) derjenige Winkel, um welchen man die durch deren Anfangspunkt A gezogene Parallele zur + x-Achse in positivem Sinn drehen muss, bis sie mit der Strecke zusammenfällt. Der Richtungswinkel $n BA$ derselben Strecke in ihrem Endpunkt ist bei ebener Betrachtung (im Widerspruch zur sphärischen Behandlung S. 406) genau um $2R$ davon verschieden.

(Merkregel für $\operatorname{tg} n A B$ und $A B$: Endpunkt voran; $s = \frac{\text{Zähler}}{\sin} = \frac{\text{Nenner}}{\cos}$.)

Der Richtungswinkel φ ergibt sich aus Gleichung (2a) zunächst zweideutig.

Er kann im I., oder im III. Quadranten liegen, wenn $(y_B - y_A)$ und $(x_B - x_A)$ gleiches Vorzeichen, im II., oder IV. Quadranten dagegen, wenn $(y_B - y_A)$ und $(x_B - x_A)$ ungleiches Vorzeichen haben. Denn im ersten Fall ist $\operatorname{tg} \varphi$ positiv, im zweiten negativ.

Diese Doppeldeutigkeit wird gehoben durch die Betrachtung, dass die Strecke s absolut ist, also jedenfalls positiv erscheinen muss. Dies ist nach Gleichung 2b nur der Fall, wenn die Funktion $\sin \varphi$ das Vorzeichen von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hat. Aus den dadurch bestimmten Vorzeichen von $\sin \varphi$ und von $\cos \varphi$ ergibt sich jetzt der Quadrant, in welchem der Richtungswinkel φ liegt, eindeutig, nämlich:

Das		weist φ in den Quadranten
Vorzeichen von $y_B - y_A$ = Vorzeichen von $\sin \varphi$	Vorzeichen von $x_B - x_A$ = Vorzeichen von $\cos \varphi$	
+	+	I
+	-	II
-	-	III
-	+	IV

Bei der Berechnung von φ nach Gleichung 2a wird in der Tafel grundsätzlich zunächst die Funktion $\frac{\operatorname{tg}}{\operatorname{ctg}}$ aufgeschlagen, je nachdem $\operatorname{tg} \varphi = \pm$ und hernach erfolgt der Zuschlag von 1, 2 oder 3 R nach obiger Quadrantenregel.

Die Berechnung von s aus beiden Gleichungen

$$(2a) \quad s = \frac{\Delta y}{\sin \varphi} = \frac{\Delta x}{\cos \varphi}$$

bietet keine sichere Gewähr für richtiges φ , d. h. gegen grobe Fehler in der Bildung von Δx bzw. Δy und ihren Log. Man wird sich daher nach einer besseren Rechenprobe umschaun, und überdies zur Ableitung von s nur diejenige von beiden Gleichungen verwenden, welche Abrundungsungenauigkeiten in $\log \Delta x$, $\log \Delta y$ und $\log \operatorname{tg} \varphi$ am ehesten unschädlich macht. Denn sowohl der berechnete Richtungswinkel φ ist (wenn auch vielleicht nur um Bruchteile von Sekunden), wie der \log von Δx und Δy (letzterer bis zu $\frac{1}{2}$ Einheit der letzten Log.-Stelle), durch Abrundung ungenau. Winkelungenauigkeiten beeinflussen aber den $\frac{\sin}{\cos}$ Wert um so weniger, je

näher der Winkel bei $\frac{1R}{0}$ liegt. Ungenauigkeiten in den Kathetenlog. ($\log \Delta x$ und $\log \Delta y$) werden um so weniger verzerrt, je kleiner der Faktor $\frac{1}{\cos \varphi}$ bzw. $\frac{1}{\sin \varphi}$ ist, mit dem die Kathete zu multiplizieren, d. h. je grösser letztere selbst ist. Zur Streckenberechnung wird man daher bei $\varphi > \frac{R}{2}$ grundsätzlich den $\frac{\cos}{\sin}$, d. h. immer die in der Log. Tafel rechts stehende Funktion, und in Verbindung damit die grössere Koordinatendifferenz (Kathete) verwenden.

Beispiel¹⁾ zu (1) und (2).

A.		Eberhau.				
x_A und y_A		$x = + 45312,94$		$y = - 18784,88$		
B.		Weinbergpfad	Trauberg	Teufelsklinge		
x_B	+	47318,96	+	43912,12	+	44884,36
y_B	-	19665,37	-	18652,14	-	17312,86
$x_B - x_A$	+	2006,02	-	1400,82	-	428,58
$y_B - y_A$	-	880,49	+	132,74	+	1472,02
$\log(x_B - x_A)$	3	302 335	3	146 333 n	2	632 032 n
$\log \cos n \text{ A B}$	9	961 742	9	998 059 n		
$\log \sin n \text{ A B}$					9	982 332
$\log(y_B - y_A)$	2	944 724 n	2	123 002	3	167 914
$\log \text{ctg } n \text{ A B}$	0	357 611 n	1	023 381 n	9	464 118 n
$\log \text{ A B}$	3	340 593	3	148 324	3	185 582
$n \text{ A B}$		373° 66' 91"		193° 98' 54"		118° 03' 66"
A B		2191 m		1407 m		1533 m

Eine durchgreifende Rechenprobe für den Richtungswinkel φ vom Anschrieb der Koordinaten ab erhält man wie folgt:

aus (2) $\frac{\text{tg } \varphi}{1} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ folgt

$$(3) \frac{1 + \text{tg } \varphi}{1 - \text{tg } \varphi} = \left(\text{tg } \frac{R}{2} + \varphi \right) = \frac{x_B - x_A + y_B - y_A}{x_B - x_A - y_B + y_A} = \frac{(x_B + y_B) - (x_A + y_A)}{(x_B - y_B) - (x_A - y_A)}$$

Merkregel: Der Zähler ist die Differenz der Koordinatensummen, der Nenner die Differenz der Koordinatendifferenzen, je mit Endpunkt voran.

¹⁾ In Anlehnung an die württembergische technische Katasteranweisung rechnen wir hier den Richtungswinkel φ statt nach Gleichung (2) mittels der daraus direkt sich ergebenden Formel:

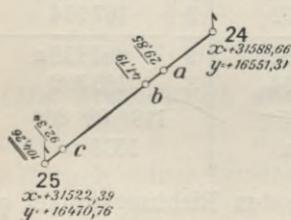
$$\text{ctg } n \text{ A B} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

Beispiel zu (3):

A.		Schiebzettel:				
		Eberhau. $(x_A + y_A) = + 26528,06$ $(x_A - y_A) = + 64097,82$				
x _A und y _A		x = + 45312,94 y = - 18784,88				
B.		Weinbergpfad	Trauberg	Teufelsklinge		
x _B	+	47318,96	+	43912,12	+	44884,36
y _B	-	19665,37	-	18652,14	-	17312,86
x _B + y _B	+	27653,59	+	25259,98	+	27571,50
x _B - y _B	+	66984,33	+	62564,26	+	62197,22
Zähler	+	1125,53	-	1268,08	+	1043,44
Nenner	+	2886,51	-	1533,56	-	1900,60
log. Zähler		3.051 357		3.103 147 n		3.018 467
log. Nenner		3.460 374		3.185 701 n		3.278 891 n
log tg $(\frac{R}{2} + n A B)$		9.590 983		9.917 446		9.739 576 n
$(\frac{R}{2} + n A B)$		23° 66' 91"		243° 98' 54"		168° 03' 67"
n . A B		373° 66' 91"		193° 98' 54"		118° 03' 67"

b) Kleinpunktsberechnung.

Fig. 262.



Eine Vereinigung der beiden Aufgaben [Gleichungen (1) und (2)] liegt vor bei der Berechnung der Koordinaten für Punkte („Kleinpunkte“), welche in der geraden Verbindungsstrecke zweier ihren Koordinaten nach bekannter Punkte liegen und durch Streckenmessung bestimmt sind (s. Fig. 262), falls nicht kurzerhand Proportionalrechnung angewandt werden will (s. § 24 S. 169).

hand Proportionalrechnung angewandt werden will (s. § 24 S. 169).

Berechnung von φ und s.

Punkt N	x	y		log
♁ 24	31588,66	16551,31	Δy	1.90607 n
♁ 25	31522,39	16470,76	E sin φ	0.11225 n
			E cos φ	0.19700 n
	$\Delta x = - 66,27$	$\Delta y = - 80,55$	Δx	1.82132 n
	$\varphi = n - 24 - 25 = 230^\circ 33' 18''$		tg φ	0.08475
	S _{berechnet} = 104,31		s	2.01832
	S _{gemessen} = 104,26			
	Differenz v = + 0,05			

Berechnung von x und y.

Punkt N	Strecke	log Δ x log s log Δ y	Δ x	Δ y
			x	y
♁ 24			+ 31588,66	+ 16551,31
a	29,85 + 2	1.27824 n	— 18,98	— 23,06
		1.47524		
		1.36299 n	+ 31569,68	+ 16528,25
b	11,34 + 1	0.85800 n	— 7,21	— 8,76
		1.05500		
		0.94275 n	+ 31562,47	+ 16519,49
c	51,15 + 2	1.51202 n	— 32,51	— 39,52
		1.70902		
		1.59677 n	+ 31529,96	+ 16479,97
♁ 25	11,92	0.87928 n	— 7,57	— 9,21
		1.07628		
		0.96403 n	+ 31522,39	+ 16470,76
[s] =	104,26 + 5			

c) Eine weitere Anwendung der Gleichungen (1) und (2) liegt vor bei der rechnerischen Bestimmung der Koordinaten eines durch **Bogenschnitt** aus zwei oder mehr bereits festgelegten anderen Punkten A, B.. bestimmten Punktes C.

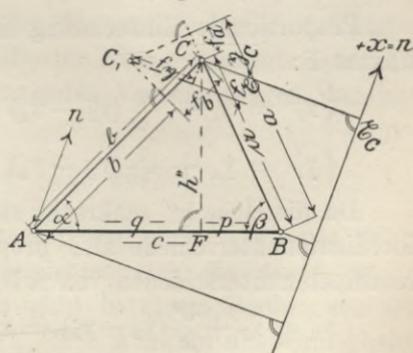
Die zeichnerische Bestimmung des Schnittpunkts C zweier oder mehrerer Kreisbogen kann hier übergangen werden.

Rechnerisch kann sie erfolgen:

a) auf dem Umweg über die Winkel α und β , für welche 1. Lösung.
man hat:

$$(4) \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{1}{s-a} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \frac{1}{s-b} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \end{cases}$$

Fig. 263.



wobei $s = \frac{a+b+c}{2}$ den halben Dreiecksumfang und die zweite Wurzel den Inkreishalbmesser vorstellt.

Aus den Koordinaten der Punkte A und B erhält man jetzt mittels Gleichung (2) den Richtungswinkel von AB und daraus diejenigen von AC und BC (s. Gleichung 4 des § 58):

$$\begin{aligned} n AC &= n AB - \alpha \\ n BC &= n BA + \beta = n AB + 2R + \beta. \end{aligned}$$

Schliesslich liefert die Gleichung (1) die Koordinaten des Punktes C mit Rechenprobe, wenn die Rechnung sowohl von A, als von B aus erfolgt.

2. Lösung.

β) auf dem Umweg über die Abschnitte p und q:

In den durch die Höhe h'' auf AB gebildeten beiden rechtwinkligen Dreiecken ist:

$$\begin{aligned} h''^2 &= a^2 - p^2 = b^2 - q^2, \\ \text{woraus } a^2 - b^2 &= p^2 - q^2 = (p+q)(p-q) = c(p-q) \\ \text{und } \frac{p-q}{2} &= \frac{a^2 - b^2}{2c}. \end{aligned}$$

Nun haben wir:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \\ q &= \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \\ h'' &= \sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{b^2 - q^2}. \end{aligned} \right.$$

Proportionale Einrechnung liefert die Koordinaten des Fusspunktes F:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} x_F &= x_A + \frac{q}{c}(x_B - x_A) = x_B + \frac{p}{c}(x_A - x_B) \\ y_F &= y_A + \frac{q}{c}(y_B - y_A) = y_B + \frac{p}{c}(y_A - y_B) \end{aligned} \right.$$

Da die Höhe h'' senkrecht steht auf AB, die zu ihr gehörigen Koordinatenunterschiede also proportional sind den verwechselten Koordinatenunterschieden von AB, so erhält man:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} x_C &= x_F + \frac{h''}{c}(y_B - y_A) = x_A + \frac{q}{c}(x_B - x_A) \pm \frac{h''}{c}(y_B - y_A) \\ &= x_B + \frac{p}{c}(x_A - x_B) \pm \frac{h''}{c}(y_A - y_B) \\ y_C &= y_F + \frac{h''}{c}(x_B - x_A) = y_A + \frac{q}{c}(y_B - y_A) \pm \frac{h''}{c}(x_B - x_A) \\ &= y_B + \frac{p}{c}(y_A - y_B) \pm \frac{h''}{c}(x_A - x_B). \end{aligned} \right.$$

Die Zweideutigkeit der Gleichungen (7) beseitigt man entweder durch Zuhilfenahme einer aufgetragenen Figur, oder durch Einführung von Vorzeichen für p, q und h'' nach § 91.

γ) auf halbgraphischem Wege:

Man greift (wie in § 32 S. 259 ff.) eine der beiden gesuchten Koordinaten, z. B. x ab. Zu dem dadurch erlangten Näherungswert ξ_C rechnet man die Ordinaten y derjenigen Punkte, in denen die zum Abszissenwert ξ gehörige Senkrechte zur x -Achse von den mit den gemessenen Strecken a bzw. b als Halbmessern um die Punkte B bzw. A beschriebenen Kreisbögen geschnitten wird ($\Delta y_A = \sqrt{b^2 - \Delta \xi_A^2}$, und $y_{C,A} = y_A + \Delta y_A$; $\Delta y_B = \sqrt{a^2 - \Delta \xi_B^2}$, und $y_{C,B} = y_B + \Delta y_B$). Sind beide erhaltenen Ordinatenwerte einander gleich, so sind sie und der abgegriffene Abszissenwert ξ_C richtig. Andernfalls beantwortet ihre Vergleichung mit dem Bild der Kreisbögen um A und B die Frage, ob das abgegriffene Abszissenmass ξ_C zu gross, oder zu klein ist. Der Eintrag des Unterschieds $y_{C,A} - y_{C,B}$ in grossem Massstab zwischen die beiden in C auf AC und BC errichteten Senkrechten liefert wie in § 32 die an $\xi_C, y_{C,A}, y_{C,B}$ anzubringenden Verbesserungen nach Richtung und Grösse.

Bequemer ist folgendes ebenfalls halbgraphische Verfahren:

Man greift beide Koordinaten des Punktes C ab und berechnet aus ihnen rückwärts die Strecken a und b mittels Gleichung (2), oder des pythagoräischen Lehrsatzes. Stimmen sie mit den gemessenen Sollwerten überein, so sind die abgegriffenen Koordinatenwerte ξ und y richtig. Ergeben sie sich dagegen etwas abweichend (zu a und b), so trägt man

$$(8) \quad f_a = a - a \quad \text{und} \quad f_b = b - b$$

von C aus in grossem Massstab (etwa 1 : 10) auf a und b und zwar nach ^{auswärts} ab, wenn $f = \pm$ ist. Die in ihren Endpunkten auf ^{einwärts} diesen Dreiecksseiten gefällten Lote, welche sich in C_1 schneiden, stellen die Richtungen der Kreisbögen, die zur Strecke CC_1 gehören, im verwendeten Massstab abzugreifenden Koordinatenunterschiede f_x und f_y die an ξ_C und y_C anzubringenden Verbesserungen dar und man hat

$$(9) \quad \begin{cases} x_C = \xi + f_x \\ y_C = y + f_y \end{cases} \quad (\text{s. Fig. 263}).$$

Sind die Entfernungen zwischen C und mehr als zwei Festpunkten gemessen worden, so schneiden sich die aus $f_a, f_b \dots$ genau wie zuvor bestimmten Lote nicht in einem Punkt, sondern bilden eine „fehlerzeigende Figur“. Die Auswahl des wahrscheinlichsten Punktes in ihr erfolgt in diesem Fall nach dem Verfahren des § 70.

Bogen-
schnitt aus
mehr als
zwei
Strecken.

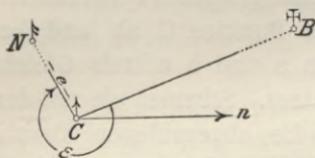
§ 57. Verlegung von Dreieckspunkten (exzentrische Aufsteckung).

Es wird zuweilen infolge von Aufsteckungs-, Gelände-, oder Kulturhindernissen notwendig, einen dem trigonometrischen Punkt C benachbarten Nebenpunkt N statt des ersteren selbst als Ausgangspunkt für weitere geodätische Arbeiten zu benützen.

Zunächst sind dann und unter Zugrundelegung der Koordinaten von C diejenigen von N abzuleiten. Der einfachste Fall ist a) derjenige, in welchem die Aufsteckung (irgendwelcher Hindernisse wegen) um einige dm und zwar in nördlicher, südlicher, bezw. östlicher, oder westlicher Richtung entfernt bewirkt wurde. Hier ist die gemessene Exzentrizität e unter Berücksichtigung des Vorzeichens kurzerhand der Abszisse, bezw. Ordinate des Hauptpunktes zuzuschlagen.

Die Richtung selbst kann mit Hilfe einer Magnetonadel (Missweisung!), oder einer mit der Nordrichtung versehenen Karte genügend genau geprüft werden.

Fig. 264.



Ist die Exzentrizität e grösser, so wird man womöglich

b) auf dem Hauptpunkt C den Winkel ε zwischen ihr und der Richtung nach einem entfernten anderen Signal B messen. Man hat dann allgemein gültig (s. Fig. 264):

Richtungswinkel $n\text{CN} \equiv \varphi_N = n\text{CB} + \text{BCN} = n\text{CB} + \varepsilon$,

wo $\text{tg } n\text{CB} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}$ (s. § 56)

und $\begin{cases} x_N = x_C + e \cdot \cos n\text{CN} \\ y_N = y_C + e \cdot \sin n\text{CN} \end{cases}$ (s. § 56).

Beispiel:

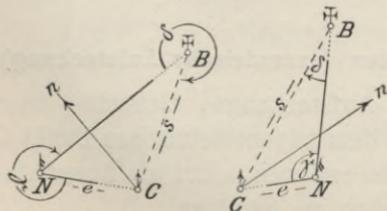
Gegeben die Koordinaten der trigonometrischen Punkte Waiblingen und Eisental. Eisental musste exzentrisch aufgesteckt werden.

Gemessen die Exzentrizität $e = \text{Eisental C} - \text{Eisental N} = 0,449 \text{ m}$; und der Winkel Waiblingen $\text{B} - \text{Eisental } \hat{\text{C}} - \text{Eisental } \hat{\text{N}} = 352^\circ 00' = \varepsilon$.

Gesucht die Koordinaten von Eisental, Nebenpunkt.

Waiblingen	x	y	Δy	2.5159 m	
Stadtkirche B	+ 34576,68	+ 19548,57	Δx	2.9428	
Eisental $\hat{\text{C}}$	+ 33700,08	+ 19876,57	$\text{tg } n\text{CB}$	9.5731 n	$n\text{CB} = 339^\circ 29'$
$\delta x = +$	0,39	$\delta y = -0,21$	δx	9.5961	$\text{BCN} = 352^\circ 00'$
Eisental $\hat{\text{N}}$	+ 33700,47	+ 19876,36	$\cos n\text{CN}$	9.9438	$n\text{CN} = 331^\circ 29'$
$\Delta x = +$	876,60	$\Delta y = -328,00$	$0,449 = e$	9.6523	
			$\sin n\text{CN}$	9.6789 n	
			δy	9.3312 n	

Fig. 264 a.



Ist c) die Winkelmessung im Signalpunkt C selbst nicht möglich (C unzugänglich, oder im dichten Wald, in Baumschulen etc. stehend) wohl aber im Nebenpunkt N, (dessen Stange

vorübergehend entfernt wird), so hat man allgemein gültig (s. Fig. 264 a):

$$\underline{n\,CN} \equiv \varphi_N = n\,CB + BCN = \underline{n\,CB \pm 2R - \gamma - \text{algeb. } \delta},$$

wo $\sin(\text{algeb. } \delta) = \frac{e \sin \gamma}{s}$, oder für kleines e — $\delta = \frac{e}{s} \varrho \sin \gamma$
aus der Richtungszentrierung (s. § 45) sich ergibt.

Für kleines e wird daraus $n\,CN = n\,CB \pm 2R - \gamma - \frac{e}{s} \varrho \sin \gamma$

$$\text{und } \begin{cases} x_N = x_C + e \cdot \cos n\,CN \\ y_N = y_C + e \cdot \sin n\,CN \end{cases}$$

Beispiel:

Gegeben die Koordinaten von Höhe $\hat{\delta}$ und Galgen $\hat{\delta}$. Galgen musste exzentrisch aufgesteckt werden.

Gemessen die Exzentrizität $e = \text{Galgen } \hat{\delta} - \text{Galgen } \hat{\delta} = 1,074$,

der Winkel Galgen $\hat{\delta} - \text{Galgen } \hat{\delta} - \text{Höhe} = \gamma = 211^\circ 48'$.

Gesucht die Koordinaten von Galgen $\hat{\delta}$ (Nebenpunkt).

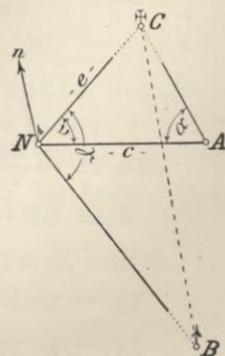
	x	y		3.0052 n	
Höhe $\hat{\delta}$ B	+ 34328,07	- 48121,08		E sin	0.1073 n
Galgen $\hat{\delta}$ C	+ 33518,96	- 47108,94		cos	
	$\delta x = +0,13$	$\delta y = -1,07$		Δ x	2.9080
Galgen $\hat{\delta}$ N	+ 33519,09	- 47110,01		tg n CB	0.0972 n
	$\Delta x = +809,11$	$\Delta y = -1012,14$		s	3.1125
				e	0.0310
				sin γ	9.7218 n
				q'	3.5363
				- 1' = δ	0.1766 n
				δ x	9.1075
				cos n CN	9.0765
				e	0.0310
				sin n CN	9.9969 n
				δ y	0.0279 n

	n CB = 308° 38'
	- γ = 148° 12'
	- algeb. δ = + 1'
	n CN = 276° 51'

Ist d) die direkte Messung der linearen Exzentrizität $CN = e$ nicht möglich (C z. B. Kirchturm), der Nebenpunkt N aber zugänglich, so misst man eine Grundlinie NA und in deren Endpunkten die Winkel α , ν und γ (s. Fig. 265). Man gewinnt dann $e = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \nu)}$ durch Rechnung, wodurch die Lösung auf die vorige zurückgeführt ist.

Diese Aufgabe des „Herunterbringens eines Festpunktes“ spielt namentlich beim Anschluss von Polygonzügen an unzugängliche Punkte (s. § 84 und 85) eine Rolle. Zum Schutz gegen die Folgen von Messungsfehlern wird man in wichtigeren Fällen zwei unabhängige, wo-

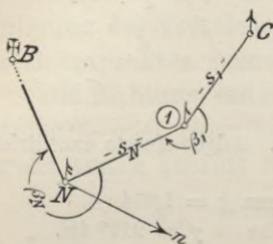
Fig. 265.



möglich von N ausgehende Grundlinien und zwei Winkel γ nach verschiedenen Festpunkten B messen.

Ist e) die direkte Zielung von N nach C unmöglich (C im dichten Wald), so verbindet man beide

Fig. 266.

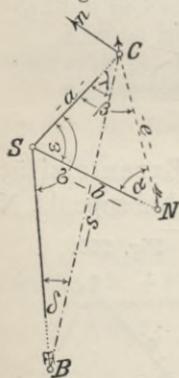


Punkte durch einen Polygonzug mit möglichst wenig Brechungspunkten, dessen Seiten s und Brechungswinkel β man misst (s. Fig. 266). Daraus gewinnt man dann durch Rechnung (s. § 87) die gerade Verbindungsstrecke NC und den Winkel zwischen ihr und der in N anschliessenden Polygonseite. Letzterer mit β_N zusammen liefert den Winkel γ für die Anwendung des Falles (c).

Sind f) der trigonometrische Punkt C und der Nebenpunkt N zwar zugänglich, lässt sich aber in keinem von beiden der Theodolit aufstellen, so wählt man als Instrumentenstand einen benachbarten Punkt S , dessen Entfernungen a und b von C und N gemessen werden (s. Fig. 267).

Der Richtungswinkel $nCN = \varphi$ (und möglicherweise auch die Exzentrizität e) muss in diesem Fall aus (bei wichtigen Fällen zwe) Hilfsdreiecken CSN abgeleitet werden.

Fig. 267.



Die Figur 267 liefert (bei der Vielgestaltigkeit der Fälle lohnt es sich kaum, allgemein gültige Bezeichnungen und Formeln einzuführen):

1. Strecke e und Winkel β aus Dreieck CSN

$$\alpha + \beta = 2R - \varepsilon$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b) \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{(a + b) \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{Z}{N}$$

$$e = \frac{Z}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{N}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

2. Den Winkel λ aus Dreieck CSB

$$\sin \delta = \frac{a \cdot \sin \sigma}{s} \quad \left(\text{wo } s \text{ aus den Koordinaten von B und C} \right)$$

zu berechnen ist

$$\lambda = 2R - (\delta + \sigma).$$

3. Die Koordinaten von N

$$x_N = x_C + e \cos(\varphi = nCN) = x_C + e \cos(nCB + \lambda - \beta)$$

$$y_N = y_C + e \sin(\varphi = nCN) = y_C + e \sin(nCB + \lambda - \beta)$$

Beispiel:

Gegeben die Koordinaten von $\hat{\delta}$ Höllberg (B), und $\hat{\delta}$ Anlage (C).

Aufgesteckt wurde statt $\hat{\delta}$ Anlage (C) ein in dessen Nähe befindlicher Punkt N, auf welchem ebensowenig als auf Anlage selbst Winkel beobachtet werden konnten. Als Standpunkt diente vielmehr ein in der Nähe von C und N liegender Punkt S.

Gemessen wurde $a = 39,21$ $\varepsilon = 113^\circ 68' 07''$ n. T. = $\hat{\delta}$ — Stand — $\hat{\delta}$.
 $b = 69,80$ $\sigma = 139^\circ 49' 34''$ n. T. = $\hat{\delta}$ — Stand — Höllberg.
 $e = 87,05$

Gesucht sind die Koordinaten von Anlage $\hat{\delta}$ (N).

	x	y
$\hat{\delta}$ Höllberg (B)	+ 21214,29	+ 97402,57
$\hat{\delta}$ Anlage (C)	+ 20496,72	+ 97124,17
	$\delta x = + 80,87$	$\delta y = + 32,20$
$\hat{\delta}$ Anlage (N)	+ 20577,59	+ 97156,37
	$\Delta x = + 717,57$	$\Delta y = + 278,40$

$a = 39,21$
 $b = 69,80$

$a + b = 109,01$			
$a - b = - 30,59$	$a - b$	1.48558 n	Δy 2.44467
$\alpha + \beta = 200 - \varepsilon$ $= 86^\circ 31' 93''$	$\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$	9.79741	E \sin
$\frac{\alpha + \beta}{2} = 43^\circ 15' 97''$	$a + b$	2.03747	\cos 0.03044
$\frac{\alpha - \beta}{2} = - 14^\circ 14' 85''$	$\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$	9.89146	Δx 2.85586
	Z	1.28299 n	tg n CB 9.58881
$\alpha = 29^\circ 01' 12''$	$\sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	9.34325 n	$s = \text{CB}$ 2.88630
$\beta = 57^\circ 30' 82''$	e	1.93975	a 1.59340
$\sigma = 139^\circ 49' 34''$	$\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	9.98918	$\sin \sigma$ 9.91045
$\delta = 2^\circ 63' 97''$	N	1.92893	$\sin \delta$ 8.61755
ergänzt: $\lambda = 57^\circ 86' 69''$	$\text{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$	9.35406 n	δx 1.90780
n — Anlage $\hat{\delta}$ — Höllberg = $23^\circ 56' 15''$			$\cos \varphi$ 9.96805
$\varphi \equiv \text{n CN} = \text{n} \hat{\delta} \hat{\delta} = 24^\circ 12' 02''$			e 1.93975
			$\sin \varphi$ 6.56806
			δy 1.50781

Der Fall g), dass keiner der beiden Punkte, von denen wir die Koordinaten des einen kennen, des anderen suchen, zugänglich ist, tritt namentlich ein bei der Verwendung zweier, einander benachbarter Kirchtürme, oder Blitzableiter. Er ist behandelt in den §§ 75 und 78.

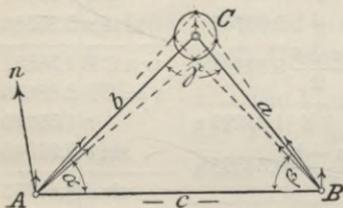
Koordinatenberechnung mittels Triangulierung.

i. Kleintriangulierung ohne Überbestimmung.

§ 58. Grundaufgabe: Berechnung der Koordinaten eines Neupunkts aus einem Dreieck auf Grund von Winkelmessung in den Festpunkten: „Vorwärtseinschnitt“.

Durch Triangulierungen höherer Ordnung, oder vorausgegangene Kleintriangulierungen mögen die ebenen Koordinaten einer Anzahl von auf dem Gelände versicherten Festpunkten gewonnen worden sein. Auf Grund von Winkelmessungen, welche je auf benachbarten Festpunkten ausgeführt wurden, sollen die Koordinaten weiterer, auf dem Gelände gegebener „Neupunkte“ berechnet werden. Diese Aufgabe der „Punkteinschaltung“, bei welcher im Gegensatz zu dem in §§ 46 bis 50 und 54 berührten Verfahren der „Netzeinschaltung“ immer ein Punkt nach dem anderen berechnet wird, um dann sofort als Festpunkt für die Bestimmung des nächsten Neupunktes zu dienen (vergl. auch § 62), tritt sehr häufig auf. Es lohnt sich daher, auch im Hinblick auf tabellarische Anordnung der Rechnung, allgemein gültige Bezeichnungen und Formeln aufzustellen:

Fig. 268.



Stellen wir uns in die Verbindungsstrecke AB der zu benützendenden Festpunkte (Grundlinie) und blicken nach dem Neupunkt C, so haben wir links den Festpunkt A, rechts den Festpunkt B. Die Seiten und Winkel des Dreiecks werden wie üblich mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ bezeichnet.

Man hat dann allgemein gültig:

$$(1) \quad \gamma = 2R - (\alpha + \beta)$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} n_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}; \quad n_{BA} = n_{AB} \pm 2R \\ AB = c = \frac{\Delta y}{\sin n_{AB}} = \frac{\Delta x}{\cos n_{AB}} \end{array} \right.$$

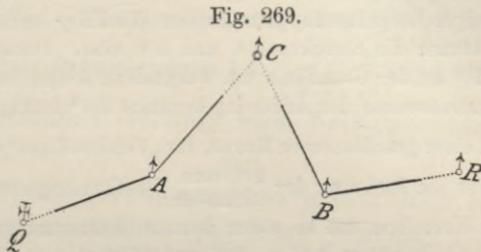
$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} AC = b = \frac{AB}{\sin \gamma} \sin \beta \\ BC = a = \frac{AB}{\sin \gamma} \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_{AC} = n_{AB} + BAC = n_{AB} - \alpha \\ n_{BC} = n_{BA} + ABC = n_{BA} + \beta \end{array} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_C = x_A + AC \cos n_{AC} = x_B + BC \cos n_{BC} \\ y_C = y_A + AC \sin n_{AC} = y_B + BC \sin n_{BC} \end{array} \right.$$

Allgemeiner Fall.

Die Annahme in Fig. 268, wonach die Richtung AB bzw. BA in beiden Endpunkten beobachtet wurde, ist nicht notwendig. Sie bildet nur einen speziellen Fall. Allgemein ist die Lage des Neupunktes C bestimmt, sobald die Winkel gemessen werden zwischen den Neustrahlen AC bzw. BC und irgendwelchen Feststrahlen AQ und BR.



Man hat dann:

$$(4) \quad \begin{cases} n_{AC} = n_{AQ} + QAC \\ n_{BC} = n_{BR} + RBC \end{cases}$$

und rückwärts

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha \equiv CAB = n_{AB} - n_{AC} \\ \beta \equiv ABC = n_{BC} - n_{BA} \end{cases}$$

Hiemit geht dann die Rechnung mit Formeln (2) und (4) weiter, wie zuvor.

Die Übereinstimmung der aus Gleichungen (5) doppelt berechneten Neupunktskoordinaten bildet eine durchgreifende Probe für die richtige Auswertung der Gleichungen (3) bis (5).

Eine rechnerische Zwischenprobe hiefür ergibt sich aus:

$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta) = n_{CA} - n_{CB} = n_{AC} - n_{BC}.$$

Eine Probe für die richtige Ausmittelung von Gleichung (1) liefert die Benützung von Gleichung (3) des § 56.

Ist einer der beiden Festpunkte, z. B. A, unzugänglich, der zweite nötige Dreieckswinkel dagegen im Neupunkt C gemessen: „Seitwärts abschneiden“, so ändert dies an der rechnerischen Behandlung nur das, dass statt des Winkels γ der Winkel α durch Ergänzung zur Dreieckswinkelsumme berechnet wird.

Sind als erste Messungsprobe alle drei Winkel des Dreiecks gemessen, ist also Überbestimmung vorhanden, so wird die etwaige Abweichung gegen den Sollbetrag $2R$, falls sie innerhalb zulässiger Grenzen bleibt, auf die Dreieckswinkel zu gleichen Teilen verteilt. —

Bei jeder stufenweise auszuführenden Vermessungsarbeit, bei welcher ein einmal gewonnenes Ergebnis die Grundlage für die nächste Operation bildet, muss ersteres, auch wenn es nicht völlig frei von kleinen Ungenauigkeiten sein sollte, unabänderlich feststehen, ehe die nächste Arbeit darauf gegründet wird.

Wir werden daher die Koordinaten der benützten Festpunkte künftig immer als fehlerfrei voraussetzen, sofern sich nicht ein grober Fehler in ihnen

Rechen-
proben.

Genauig-
keitsunter-
suchung.

Zur Ausrechnung auf S. 448:

Zur Auswertung der Gleichungen (2) bis (5) verwendet man zumeist Logarithmen. Diese müssen mindestens ebensoviele Mantissenstellen liefern, als die vorkommenden Strecken Ziffern beanspruchen. Für alle Kleintriangulierungen ($s \begin{matrix} > 500 \text{ m} \\ < 5000 \text{ m} \end{matrix}$) sind also, wenn Zentimeter-Rechengenauigkeit verlangt wird, 6 stellige Tafeln genügend, aber auch nötig.

Die eigentliche Koordinatenberechnung kann jedoch auch mit (z. B. Defertschen) Koordinatentafeln ausgeführt werden, (Die Rechenmaschine wird alle anderen Hilfsmittel verdrängen, wenn es dereinst gelingen sollte, sie für die Berechnung mit goniometrischen Funktionen bei blosser Winkeleinstellung geeignet zu machen.)

Trigonometrische Punktbestimmung auf Grund von nur im Neupunkt ausgeführten Winkelbeobachtungen.

§ 59. „Rückwärtseinschnitt“. (Snelliussche, oder Pothenotsche Vierecksaufgabe.)

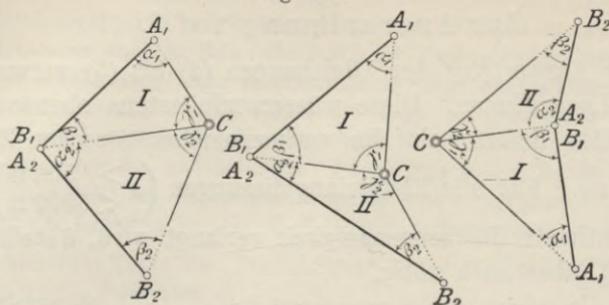
Ist die Winkelbeobachtung auf den gegebenen Festpunkten unmöglich, oder will sie erspart werden, so ist die Lage eines Neupunkts auch bestimmt durch zwei Winkel, welche die Strahlen von ihm nach drei gegebenen Festpunkten miteinander einschliessen.

Denn jeder von diesen Winkeln bestimmt einen Kreis, welcher über der Verbindungsstrecke der zwei zugehörigen und angezielten Festpunkte als Sehne den Winkel „fasst“. Der Schnittpunkt der so bestimmten beiden geometrischen Örter (Kreise) ist der Neupunkt (s. Fig. 271).

Auch diese Aufgabe tritt in der Vermessungspraxis sehr häufig auf, weshalb es sich lohnt, zum Zweck ihrer Durchführung in Formularen allgemeine Bezeichnungen und Formeln aufzustellen. Hiezu werden die drei gegebenen Punkte durch zwei Strecken so miteinander verbunden, dass die letzteren die Grundlinien zweier nebeneinander liegender Dreiecke bilden, welche den Neupunkt als gemeinsame Spitze haben. Stellt man sich dann im mittleren der drei Festpunkte auf und blickt nach dem Neupunkt, so hat man das Dreieck I links, das Dreieck II rechts.

Die Bezeichnung der einzelnen Stücke jedes dieser Dreiecke folgt der Regel des § 58. Speziell heissen die gemessenen Dreieckswinkel γ_1 und γ_2 .

Fig. 270.



Von den verschiedenen Lösungen dieser Aufgabe hat die ganz symmetrisch sich aufbauende „Burckhardtsche“ die ausgedehnteste Verbreitung gefunden:

Die Summe der beiden Dreieckswinkel im mittleren Festpunkt lässt sich als Unterschied zweier Richtungswinkel berechnen. Also kann man mit Benützung der gemessenen Winkel γ auch die Summe der an den beiden anderen Festpunkten liegenden Dreieckswinkel durch Ergänzung zur Viereckswinkelsumme gewinnen. Um ihre Differenz zu finden, drückt man die den beiden Dreiecken gemeinsame Seite in den Stücken jedes Dreiecks aus. Die entstehenden Gleichungen liefern dann zur bekannten Summe noch das sin-Verhältnis beider Winkel und damit diese selbst.

Hienach hat man allgemein gültig:

- (1) $\alpha_2 + \beta_1 \equiv A_1 (B_1 A_2) B_2 = n A_2 B_2 - n B_1 A_1$
- (2) $\alpha_1 + \beta_2 = 4 R - (\gamma_1 + \gamma_2) - (\alpha_2 + \beta_1)$.

Nun ist

$$B_1 C_1 = A_2 C_2 = \frac{A_1 B_1}{\sin \gamma_1} \cdot \sin \alpha_1 = \frac{A_2 B_2}{\sin \gamma_2} \cdot \sin \beta_2,$$

woraus:

$$(3) \quad \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_1} = \frac{A_1 B_1 / \sin \gamma_1}{A_2 B_2 / \sin \gamma_2} = \frac{2 r_1}{2 r_2} = \operatorname{tg} \lambda,$$

wobei r_1 und r_2 die Radien der einleitend aufgeführten geometrischen Örter (Umkreise), und λ einen Hilfswinkel vorstellen.

Durch korrespondierende Addition und Subtraktion erhält man aus (3)

$$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \beta_2}{\sin \alpha_1 - \sin \beta_2} \equiv \frac{2 \sin \frac{\alpha_1 + \beta_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2}}{2 \cos \frac{\alpha_1 + \beta_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \lambda}{1 - \operatorname{tg} \lambda} \equiv \operatorname{tg} \left(\frac{R}{2} + \lambda \right)$$

oder (4) $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{R}{2} - \lambda \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha_1 + \beta_2}{2}.$

Nun ergeben sich die nicht gemessenen Dreieckswinkel:

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_2}{2} + \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} \\ \beta_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_2}{2} - \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} \end{cases}$$

und (6)
$$\begin{cases} \beta_1 = 2R - (\alpha_1 + \gamma_1) \\ \alpha_2 = 2R - (\beta_2 + \gamma_2), \end{cases}$$

womit die Aufgabe auf den „Vorwärtseinschnitt“ (s. § 58) zurückgeführt ist.

Formeldiskussion.

Formel-
diskussion
und andere
Lösungen.

Die Gleichungen (1) und (2) liefern die entsprechenden Winkelwerte eindeutig und geben zu weiteren Untersuchungen zunächst keine Veranlassung.

Dagegen lässt die Substitutionsgleichung (3) $\operatorname{tg} \lambda = \frac{A_1 B_1 / \sin \gamma_1}{A_2 B_2 / \sin \gamma_2}$ zweierlei Werte für λ zu. Unter allen Umständen ist $\operatorname{tg} \lambda$ positiv (weil γ Dreieckswinkel). Damit kann aber λ ebensogut im I., wie im III. Quadranten liegen [$\operatorname{tg} \lambda = (\operatorname{tg} 2R + \lambda)$]! Nun benützt man aber diesen Hilfswinkel λ im weiteren nur noch in Gleichung (4), und zwar in der Verbindung von $\operatorname{tg} \left(\frac{R}{2} - \lambda \right)$.

Beachten wir deshalb, dass

$$\operatorname{tg} \left(\frac{R}{2} - \lambda \right) = \operatorname{tg} \left\{ 2R + \left(\frac{R}{2} - \lambda \right) \right\},$$

so finden wir, dass es völlig gleichgültig ist, welchen der beiden möglichen Werte für λ man verwendet. Man kann daher der Einfachheit wegen ein für allemal festsetzen: λ liegt im I. Quadranten (ist ein spitzer Winkel).

In Gleichung (3) kann sein

$$\left(\frac{A_1 B_1}{\sin \gamma_1} \equiv 2r_1 \right) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \left(\frac{A_2 B_2}{\sin \gamma_2} = 2r_2 \right),$$

und dementsprechend $\operatorname{tg} \lambda \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 1$ also $\lambda \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \frac{R}{2}$. Damit wird in Gleichung (4)

$\left(\frac{R}{2} - \lambda \right)$ ein $\begin{cases} \text{negativer spitzer} \\ \text{zu 0 gewordener} \\ \text{positiver spitzer} \end{cases}$ Winkel, also $\operatorname{tg} \left(\frac{R}{2} - \lambda \right)$

und, weil $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 + \beta_2}{2}$ unter allen Umständen positiv ist (α_1 und β_2 sind Dreieckswinkel, ihre Summe also $< 2R$), $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2}$ $\begin{matrix} \text{negativ} \\ 0 \\ \text{positiv} \end{matrix}$.

Für $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} = 0$ wird $\frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} = 0$ oder $2R$.

Der letztere Wert ist als halber Unterschied zweier Dreieckswinkel unmöglich. Also kann in diesem Fall nur $\alpha_1 = \beta_2$ sein.

Auch für jeden der beiden anderen Fälle besteht zunächst Doppeldeutigkeit, denn:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} \begin{array}{l} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{array} \text{ liefert } \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} \text{ im } \begin{array}{l} \text{II. oder IV. Quadranten} \\ \text{I. „ III. „} \end{array}$$

Als halber Unterschied zweier Dreieckswinkel ist aber dieser Winkelwert unter allen Umständen $< R$, folglich liefert Gleichung (4) $\frac{\alpha_1 - \beta_2}{2}$ unter allen Umständen als positiven, oder negativen spitzen Winkel.

2. Lösung.

Aus Fig. 271 ergibt sich noch eine weitere Lösung durch Benützung der beiden Punkte 1 und 2, in denen die Lote auf den Grundlinien die Kreise M_1 und M_2 schneiden (und deren Koordinaten durch Vorwärtseinschnitt aus ihnen berechnet werden können). Verbindet man beide Punkte mit C, so entstehen zwei Kreisvierecke AB (1 oder 2) C, in denen je der Winkel bei C = R ist.

Folglich ist C der Fusspunkt des Lots auf der Geraden 1—2 nach B_1 .

Seine Lage ist um so sicherer bestimmt, je kürzer CB_1 im Verhältnis zur Strecke 1—2, oder je kürzer 1—2 im Verhältnis zur Strecke CB_1 ist.

Eine dritte Lösung mit Benützung des Collinschen Punktes s. unten.

Spezielle Fälle. Liegt der Neupunkt auf der Verbindungsgeraden zweier Festpunkte ($\gamma_1 + \gamma_2 = 2R$), so lassen sich die beiden Dreieckswinkel α_1 und β_2 als Differenz je zweier aus den gegebenen Koordinaten berechneter Richtungswinkel und die Winkel β_1 und α_2 durch Ergänzung je zur Dreieckswinkelsumme gewinnen. Damit ist die Aufgabe auf diejenige des § 58 zurückgeführt.

(Stehen nur zwei Festpunkte zur Verfügung, so kann man unter Umständen als dritten, mittleren, den ∞ fernen Polarstern benützen. Die gemessenen Winkel γ_1 und γ_2 stellen in diesem Fall (nach erfolgter Verbesserung um den Einfluss des Stundenwinkels des Polarsterns im Augenblick der Beobachtung) die Azimute der Neustrahlen CA_1 und CB_2 vor. Durch Addition bezw. Subtraktion des Winkels zwischen Meridian und Paralleler zur Abszissenachse erhält man ihre Richtungswinkel, wodurch die Aufgabe auf diejenige des Vorwärtseinschnitts aus den Punkten B_2 und A_1 zurückgeführt ist.

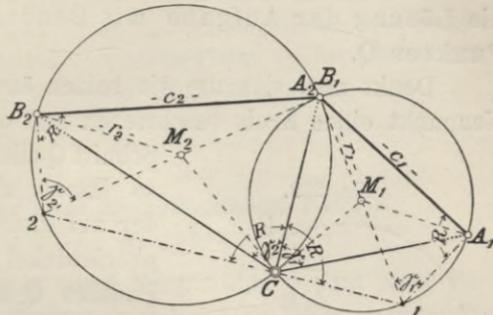
Liegt in diesem Fall C in der Geraden $A_1 B_2$, so ist die Aufgabe unbestimmt. Die beste Lösung liefert $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{R}{3R}$.

Für die Bestimmungsgenauigkeit günstigste, bezw. ungünstigste Punktlage.

Am anschaulichsten wird die Untersuchung auf geometrischem Weg:

Wie einleitend bemerkt, ist der Neupunkt C der Schnittpunkt der beiden Kreise, welche über den Sehnen c_1 bzw. c_2 die Winkel γ_1 bzw. γ_2 fassen.

Fig. 271.



Die Koordinaten der Festpunkte wieder als fehlerfrei vorausgesetzt, ist also C um so genauer bestimmt, je genauer diese Winkel gemessen sind. Denn sie bestimmen die Radien und die Mittelpunkte, also die Lage der Schnittkreise.

$$\left(\begin{aligned} \frac{c}{\sin \gamma} = 2r; \quad x_M &= x_A + r \cos \{nAB \mp (R - \gamma)\} \\ y_M &= y_A + r \sin \{nAB \mp (R - \gamma)\} \end{aligned} \right).$$

Kleine Fehler in γ beeinflussen $\sin \gamma$, also $2r$ um so mehr, je kleiner γ ist. Am genauesten wird r erhalten für $\gamma_1 = \gamma_2 = R$.

Kleine Fehler in den Radien und Mittelpunktslagen der Kreise vorausgesetzt, ist aber der Punkt C um so genauer bestimmt, je kürzer die zu seiner Bestimmung verwendeten Kreisbogenstücke von den nächstgelegenen Festpunkten aus sind und je senkrechter sie sich schneiden.

Daraus folgt:

1. C soll bei gespreizter Lage der Grundlinie möglichst nahe der mittleren, bei geschlossener Lage der ersteren möglichst nahe den beiden äusseren Festpunkten liegen.

2. Wenn, der oben gestellten Forderung entsprechend, die beiden Bögen, also auch ihre Radien, nach dem Neupunkt sich senkrecht schneiden würden, so wäre $M_1 B_1 M_2 C$ ein Kreisviereck, also die Summe der Zentriwinkel für die Sehne $B_1 C = 2R$. Da α_1 und β_2 die zugehörigen Peripheriewinkel sind, so erstreben wir also:

$$\underline{\alpha_1 + \beta_2 \sim R}$$

und in Verbindung mit der Untersuchung oben:

$$\underline{\beta_1 + \alpha_2 \sim R, \quad \gamma_1 + \gamma_2 \sim 2R.}$$

Im entgegengesetzten extremen Fall ($\alpha_1 + \beta_2 = 2R$) fallen beide Bestimmungskreise zusammen, die drei Festpunkte und der Neupunkt liegen auf einem Kreisviereck und der Neu-

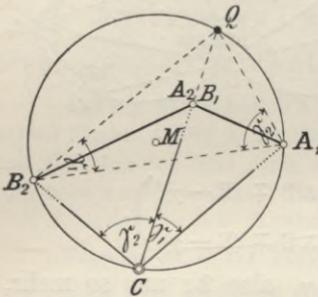
punkt kann auf dem Bogenstück $A_1 B_2$ jede beliebige Lage annehmen. Er ist unbestimmt.

3. Lösung.

Einen weiteren Einblick in die Bestimmungsgenauigkeit liefert die Lösung der Aufgabe mit Benützung des „Collinschen“ Punktes Q.

Denkt man sich um die beiden äusseren Festpunkte und den Neupunkt einen Kreis beschrieben und den Zielstrahl $C B_1$ bis zum Schnitt Q mit ihm verlängert (s. Fig. 272),

Fig. 272.



so lassen sich wegen der Gleichheit der auf gleichen Bögen stehenden Peripheriewinkel die Koordinaten dieses Punktes Q aus der Basis $B_2 A_1$ durch Vorwärtseinschnitt ermitteln. Der hieraus berechnete Richtungswinkel $n Q B_1 = n B_1 C$ liefert durch Addition von γ_1 Subtraktion von γ_2 zum Richtungswinkel vom mittleren, auch noch die Richtungswinkel $n A_1 C$ von den $n B_2 C$ von den

äusseren Festpunkten zum Neupunkt.

Zur Bestimmung der Koordinaten von C hat man also jetzt lediglich wieder einen Vorwärtseinschnitt aus der Grundlinie $A_1 B_1$, oder $A_2 B_2$ auszuführen.

Diese auch rechnerisch gut verwendbare Lösung zeigt deutlich, dass die Lage des Neupunktes C auf dem Kreisbogen $A_1 C B_2$ lediglich durch Verlängerung eines Zeigers $Q B_1$ bestimmt wird. Je kürzer dessen Stützpunktsentfernung, und je unsicherer die Lage von Q namentlich in der Richtung $\perp Q C$ ist, um so unsicherer ist die Bestimmung des Neupunktes. Für $Q B_1 = 0$ (Festpunkte und Neupunkt auf einem Kreis) wird die Lösung unbestimmt. Ein spitzer Winkel bei Q ($\gamma_1 + \gamma_2 \sim 2 R$) ist für die Richtung $Q B_1$, also für die Bestimmung von C ungefährlich, nicht aber ein stumpfer ($\gamma_1 + \gamma_2 \sim 0$).

Rechenproben.

Rechenproben. Für die Ausrechnung hat man folgende Zwischen- und Endproben:

1. müssen die Richtungswinkel $n B_1 C$ und $n A_2 C$ sich gleich ergeben,
2. muss in jedem der beiden Dreiecke sein: $n A C - n B C = \gamma$,
3. muss die Länge der gemeinschaftlichen Seite in beiden Dreiecken gleich erscheinen: $B_1 C = A_2 C$,
4. müssen die Koordinaten für C aus beiden Dreiecken miteinander übereinstimmen.

Beispiel.

Gegeben die Koordinaten von Dürrmenz + 46725,34 — 15478,06,
 Platte + 45145,41 — 15157,67,
 Wasserhalde + 45778,89 — 14994,20.

Gemessen die Winkel Dürrmenz—Stäffelen—Wasserhalde = $135^{\circ} 49' 40''$,
 Wasserhalde—Stäffelen—Platte = $29^{\circ} 58' 58''$.

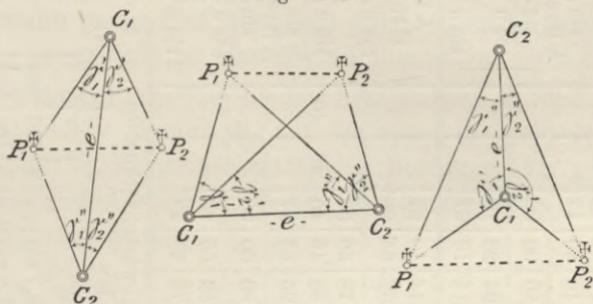
Gesucht die Koordinaten des Neupunkts: „Stäffelen“.

Berechnung s. S. 456.

§ 60. Aufgabe der zwei unzugänglichen Punkte.
 (Hansensche Aufgabe.)

Stehen zur Bestimmung eines Neupunktes C_1 nur zwei Festpunkte P_1 und P_2 zur Verfügung, welche dazu noch unzugänglich sind, so lässt sich von den drei Dreieckswinkeln nur der einzige in C_1 messen. Dieser Winkel $P_1 C_1 P_2$ genügt zur Bestimmung der Lage von C_1 natürlich nicht. Er bestimmt nur einen Kreis über der Sehne $P_1 P_2$ als einzigen geometrischen Ort für C_1 . Wählt man aber noch einen zweiten beliebigen Punkt C_2 , den man von C_1 aus, und von dem aus man sowohl C_1 , als auch die beiden Festpunkte anzielen kann und misst in C_1 und C_2 die Winkel γ_1' und γ_2' bzw. γ_1'' und γ_2'' (s. Fig. 273), so sind in dem fraglichen Viereck fünf unabhängige Stücke bekannt, letzteres ist also bestimmt.

Fig. 273.



Die allgemeine Lösung analog der Burckhardtschen in § 59 gestattet unter Einführung allgemeiner Bezeichnungen die Anwendung vorgedruckter Formulare und den Verzicht auf eine Figur. Wir verwenden jedoch, da die Aufgabe selten vorkommt, und gleichzeitig als Vorbereitung für eine spätere Betrachtung (s. § 77) die „Lösung mittels der fingierten Entfernung“:

Trägt man in den Endpunkten einer beliebigen Strecke $C_1 C_2$ 1. Lösung.
 die gemessenen Winkel γ in derselben Lage an, die sie in Wirk-

Beispiel zu Seite 455.

Bezeichnung der Punkte	Winkel				log-Berechnung				Abszissen				Ordinaten							
	reduziert		gemess.		n	Δx	Δy	±	x	y	±	x	y	±	y					
	0	1	2	3												±	±	±	±	
△ No. 1	n A C	344	17	25	2	815	732	A	+	45	145	41	A	+	15	157	67			
	n A B	14	28	10	0	301	256	△ x	+	1	093	18	△ y	+		307	47			
	α	30	10	45	E sin γ		9	983	466	C	+	46	238	59	C	+	15	465	14	
	γ	29	58	58	cos n A C		3	055	225	3.038691										
A: Platte C: Stäffeln B: Wasserhalde	β	119	50	17	sin n A C		9	432	590	2.487815 n										
	Summe	180	00	00	sin β		9	938	237											
	n B A	194	28	10	A B: sin γ		3	116	988	B	+	45	778	89	B	+	14	994	20	
	n B C	314	18	27	sin α		9	701	314	△ x	+	459	70	△ y	+		470	94		
△ No. 2	n A C	314	18	27	cos n B C		9	844	172	C	+	46	238	59	C	+	15	465	14	
	n A B	332	55	20	BC		2	818	299 ¹	2.662471										
	α	18	36	53	sin n B C		9	854	671	2.672970 n										
	γ	135	49	40	E sin γ		3	026	518	A	+	45	778	89	A	+	14	994	20	
A: Wasserhalde C: Stäffeln B: Dürrmzng	β	25	33	27	AC		0	156	881	△ x	+			△ y	+					
	Summe	180	00	00	A C		2	818	299 ¹	C	+			C	+					
	n B A	152	55	20	sin n A C		9	634	897	B	+	46	725	34	B	+	15	478	06	
	n B C	178	28	47	sin β		3	183	399	△ x	+			75	△ y	+	12	92		
				A B: sin γ		9	504	067	2.687313 n											
				sin α		9	999	847	1.111215											
				cos n B C		2	687	466	C	+	46	238	59	C	+	15	465	14		
				sin n B C		8	423	749												

Richtungswinkel- und Seitenberechnung

Zwischenrechnung bei Rückwärtseinschnitten	log				log				
	1	2	3	n	1	2	3	n	
γ ₁ + γ ₂	165	48	38		YB - YA	2	213	438	
β ₁ + α ₂	138	27	10		E' sin n A B	47			
α ₁ + β ₂	55	44	12		E cos n A B	48	0	013	999
λ	40	38	10		XB - XA	2	801	733	
	4	21	50		tg n A B	9	411	705	
1/2 R - λ	27	52	06		AB	2	815	732	
1/2 (α ₁ + β ₂)	2	18	39		YB - YA	2	684	720	
1/2 (α ₁ - β ₂)	30	10	45		E' sin n A B	86			
α ₁	25	33	27		E cos n A B	45	0	050	420
	25	33	27		XB - XA	9	976	098	
β ₂	30	10	45		tg n A B	9	708	622	
	25	33	27		AB	3	026	518	

1) Mittel aus den beiden Bestimmungen 2.818302 und 2.818296.

lichkeit gegenüber der Strecke $C_1 C_2$ einnehmen, so bilden die Schenkel und ihre Schnittpunkte eine, dem auf dem Gelände faktisch vorhandenen Viereck $C_1 P_1 C_2 P_2$ ähnliche Figur $\mathcal{C}_1 \mathfrak{P}_1 \mathcal{C}_2 \mathfrak{P}_2$, deren sämtliche Strecken den entsprechenden im Gelände proportional und nur um einen bestimmten Winkel ω verdreht erscheinen.

Wenn also die Länge und der Richtungswinkel irgendeiner Strecke, z. B. $P_1 P_2$ bzw. $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ in beiden Figuren ermittelt wird, so stellt $q = \frac{P_1 P_2}{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2}$ den Proportionalitätsfaktor für die Umwandlung und $\omega = n P_1 P_2 - \gamma \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ den Verdrehungswinkel für die Orientierung der Seiten in der ähnlichen Hilfsfigur $\mathcal{C}_1 \mathfrak{P}_1 \mathcal{C}_2 \mathfrak{P}_2$ vor.

Um die tatsächliche Länge und Richtung der im Gelände von den Fest- nach den Neupunkten gehenden Strahlen zu finden, braucht man nur die in der Hilfsfigur errechneten, bzw. angenommenen homologen Strecken-^{werte} mit q zu multiplizieren. Hieraus Richtungswinkel-^{werte} um ω zu vergrößern. Hieraus ergibt sich folgende Lösung:

1. Rechnung an der Hilfsfigur.

- a) Wahl eines der Neupunkte (\mathcal{C}_1 oder \mathcal{C}_2) als Ursprung und ihrer beider Verbindungsstrecke als γ -Achse eines Koordinatensystems. Annahme eines beliebigen (im Interesse bequemer Rechnung namentlich bezüglich der Stellenzahl der wirklichen Entfernung möglichst angenäherten) Streckenwertes $e = \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2$.
- b) Koordinierung der zu beiden Festpunkten P_1 und P_2 homologen Punkte \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 auf die unter (a) gewählte γ -Achse je mittels Vorwärtseinschnitts unter Benützung der gemessenen Winkel γ und Berechnung des Richtungswinkels $\gamma \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ und der Strecke $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$.

2. Rechnung an der wirklichen Figur.

- c) Berechnung des Richtungswinkels $n P_1 P_2$ und der Strecke $P_1 P_2$ aus den gegebenen Landesvermessungskordinaten von P_1 und P_2 .
- d) Bildung des

$$\text{Proportionalitätsfaktors } q = \frac{P_1 P_2}{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2}$$

oder $\log q = \log P_1 P_2 - \log \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$

und des

$$\text{Verdrehungswinkels } \omega = n P_1 P_2 - \gamma \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2.$$

Bezeichnung der Punkte	Winkel						log-Berechnung				
	reduziert			gemess.			n	Δx	Δy		
	0	'	"	'	"						

I. Rechnung an der Hilfsfigur (mit \mathcal{C}_2 als Ursprung, der Richtung $\mathcal{C}_2 \mathcal{C}_1$ als r -Achse und eines angenommenen Masses von 1500 m als Strecke $\mathcal{C}_2 \mathcal{C}_1$).

\triangle No. 1	n A C	358	91	27			A B	3	176	091		
	n A B	0	00	00			E sin γ	0	005	147		
A: Neupunkt \mathcal{C}_2	α	41	08	73	08	73	cos n A C	9	902	471		2.927185
C: Riedlingen \mathfrak{P}_1	γ	109	78	15			A C	3	024	714		
B: Neupunkt \mathcal{C}_1	β	49	13	12	13	12	sin n A C	9	779	247	n	2.803961 n
	Summe	200	00	00			sin β	9	843	476		
	n B A	200	00	00			A B: sin γ	3	181	238		
	n B C	249	13	12			sin α	9	779	247		
							cos n B C	9	855	332	n	2.815817 n
							B C	2	960	485		
							sin n B C	9	843	476	n	2.803961 n

\triangle No. 2	n A C	163	81	03			A B	3	176	091		
	n A B	200	00	00			E sin γ	0	000	706		
A: Neupunkt \mathcal{C}_1	α	36	18	97	18	97	cos n A C	9	925	687	n	3.043014 n
C: Neufra \mathfrak{P}_2	γ	96	37	14			A C	3	117	327		
B: Neupunkt \mathcal{C}_2	β	67	43	89	43	89	sin n A C	9	731	057		2.848384
	Summe	200	00	00			sin β	9	940	530		
	n B A	0	00	00			A B: sin γ	3	176	797		
	n B C	67	43	89			sin α	9	731	057		
							cos n B C	9	689	716		2.597569
							B C	2	907	854		
							sin n B C	9	940	530		2.848384

II. endgültige Rechnung.

\triangle No. 3	n A C	37	36	79			cos n A C	9	920	447		2.823676
	n A B						A C	2	903	229		
A: Riedlingen P_1	α						sin n A C	9	743	387		2.646617
C: Neupunkt \mathcal{C}_1	γ	85	32	09	32	09	cos n B C	9	863	010		2.923081
B: Neufra P_2	β						B C	3	060	071		
	n B C	352	04	70			sin n B C	9	835	062	n	2.895133 n

\triangle No. 4	n A C	255	67	56			cos n A C	9	807	090	n	2.657688 n
							A C	2	850	598		
A: Neufra P_2	α						sin n A C	9	884	940	n	2.735538 n
C: Neupunkt \mathcal{C}_2	γ	108	52	62	52	62	cos n B C	9	829	141	n	2.796599 n
B: Riedlingen P_1	β						B C	2	967	458		
	n B C	147	14	94			sin n B C	9	868	086		2.835544

Abszissen x			Ordinaten y			Richtungswinkel- und Seitenberechnung					
±	,		±	,		log			.		n

A	—	0	000	00	A	—	0	000	00				$y_{\mathfrak{P}_2} - y_{\mathfrak{P}_1}$	3	127	773		
$\triangle x$	+		845	64	$\triangle y$	—		636	74	$y_{\mathfrak{P}_2} - y_{\mathfrak{P}_1}$	+	1342	06	E sin $r \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$	0	023	113	
C	+		845	64	C	—		636	74	$r_{\mathfrak{P}_2} - r_{\mathfrak{P}_1}$	—	449	76	E cos $r \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$				
										$r \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$		120	58	60	$r_{\mathfrak{P}_2} - r_{\mathfrak{P}_1}$	2	652	981 n
															tg $r \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$	0	474	792 n
B	+	1	500	00	B	—	0	000	00						$\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$	3	150	886
$\triangle x$	—		654	36	$\triangle y$	—		636	74									
C	+		845	64	C			636	74									

A	+	1	500	00	A	—	0	000	00									
$\triangle x$	—	1	104	12	$\triangle y$	+		705	32									
C	+		395	88	C	+		705	32									
B	—	0	000	00	B	—	0	000	00									
$\triangle x$	+		395	88	$\triangle y$	+		705	32									
C	+		395	88	C	+		705	32									

A	—	48	512	34	A	+		618	36				$y_B - y_A$	3	089	446		
$\triangle x$	+		666	31	$\triangle y$	+		443	22	$y_B - y_A$	+	1228	70	E sin n A B	0	004	184	
C	—	47	846	03	C	+	1	061	58	$x_B - x_A$	—	171	38	E cos n A B				
										n A B		108	82	27	$x_B - x_A$	2	233	960 n
B	—	48	683	72	B	+	1	847	06					tg n A B	0	855	486 n	
$\triangle x$	+		837	69	$\triangle y$	—		785	48	A B				A B	3	093	630	
C	—	47	846	03	C	+	1	061	58									

A	—	48	683	72	A	+	1	847	06	log $P_1 P_2 = 3.093630$						
$\triangle x$	—		454	66	$\triangle y$	—		543	92	log $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = 3.150886$.						
C	—	49	138	38	C	+	1	303	14	log q (Proportionalitätsfaktor)						
B	—	48	512	34	B	+		618	36	= 9.942744 (für Schiebzettel)						
$\triangle x$	—		626	04	$\triangle y$	+		684	77	Verdrehungswinkel $\omega = n P_1 P_2 - r \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$						
C	—	49	138	38	C	+	1	303	13	= $108^\circ 82' 27'' - 120^\circ 58' 60''$						
										$\omega = 388^\circ 23' 67''$						
										(für Schiebzettel).						

- e) Umwandlung der Streckenlängen und der Richtungswinkel von den Festpunkten zum Neupunkt aus der Hilfsfigur durch Addition von $\log q$ bzw. von ω :

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 C_1 & = & q \cdot \mathfrak{P}_1 C_1, & \text{bzw.} & \log P_1 C_1 & = & \log q + \log \mathfrak{P}_1 C_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ n P_1 C_1 & = & \mathfrak{z} \mathfrak{P}_1 C_1 + \omega & & & & \end{array}$$

- f) Koordinatenberechnung für C_1 und C_2 aus den derart gewonnenen, endgültigen Richtungswinkeln und Strecken.

Beispiel.

Gegeben die Koordinaten der unzugänglichen Punkte:

	x	y
P_1 Riedlingen	- 48512,34	+ 618,36
P_2 Neufra	- 48683,72	+ 1847,06.

In dem Neupunkt C_2 und dem Hilfspunkt C_1 sind gemessen die Winkel:

$$\begin{array}{l} \text{Neufra} - C_1 - C_2 = 36^\circ 18' 97'' \} \\ C_2 - C_1 - \text{Riedlingen} = 49^\circ 13' 12'' \} \\ \text{Riedlingen} - C_2 - C_1 = 41^\circ 08' 73'' \} \\ C_1 - C_2 - \text{Neufra} = 67^\circ 43' 89'' \} \end{array}$$

Gesucht die Koordinaten des Neu- und des Hilfspunkts.
Ausrechnung s. S. 458 und 459.

2. Lösung mit Hilfe der Collinschen Punkte.

Beschreibt man die beiden Kreise, welche über der Grundlinie $P_1 P_2$ als Sehne die in den Neupunkten C_1 und C_2 nach P_1

Fig. 274a.

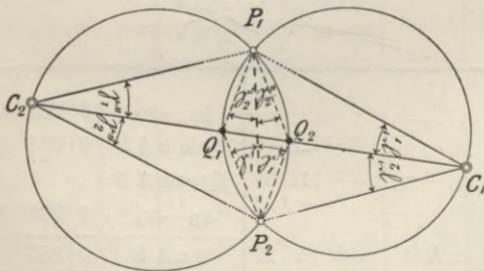
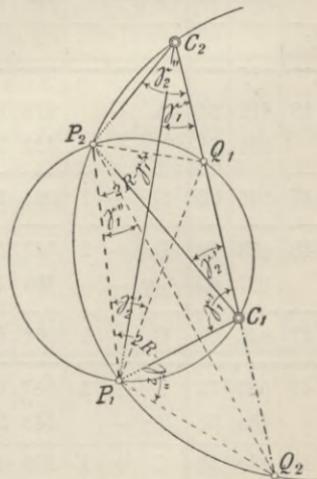


Fig. 274b.



und P_2 gemessenen beiden Winkel fassen (s. Fig. 274a und 274b) und stellt deren Schnittpunkte Q_1 und Q_2 mit der (nötigenfalls verlängerten) Verbindungslinie $C_1 C_2$ her, so zeigt sich aus der Gleichheit der über demselben Bogen stehenden Peripheriewinkel, dass die nötigen Winkel bekannt sind, um die Koordinaten dieser beiden Schnittpunkte Q durch Vorwärtseinschnitt aus der Grundlinie $P_1 P_2$ zu berechnen.

Aus diesen Koordinaten ergibt sich dann der Richtungswinkel $n Q_1 Q_2 = n Q_2 Q_1 \pm 2 R = n C_2 C_1$ und durch entsprechende Addition oder Subtraktion der gemessenen Winkel γ die Richtungswinkel der Neustrahlen P C.

Damit ist die Punktbestimmung auf vier Vorwärtseinschnitte (je einer für Q_1, Q_2, C_1 und C_2) zurückgeführt.

Für die Genauigkeit der Punktbestimmung zeigen die vorggeführten Lösungen direkt: Die Genauigkeit in der Bestimmung von C_1 und C_2 hängt von derjenigen der benützten Strecken und Richtungswinkel von den Fest- nach den Neupunkten ab. Die Genauigkeit von q und ω (Lösung 1) und damit eben dieser Strecken und Richtungswinkel ist um so grösser, je genauer \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 in der Hilfsfigur bestimmt werden können. Daher erstreben wir

Genauigkeitsuntersuchung.

$$\begin{aligned} \gamma_1' + \gamma_1'' &\sim R \\ \gamma_2' + \gamma_2'' &\sim R. \end{aligned}$$

Die Lösung (2), in welcher die Strecke $Q_1 Q_2$ wieder einen Zeiger vorstellt für die Bestimmung der Lage von C_1 und C_2 auf den beiden vorbeschriebenen Kreisen, lässt aber weiter erkennen:

a) dass für die Vorwärtseinschnitte C_1 und C_2 auch sein soll:

$$\begin{aligned} \gamma_1'' - \gamma_2'' &\simeq R \\ \gamma_1' - \gamma_2' &\simeq R, \end{aligned}$$

wenn die Winkel γ je von der Richtung $C_1 C_2$ aus gemessen und mit algebraischen Vorzeichen eingeführt werden und dass,

b) je kleiner das Verhältnis $\frac{Q_1 Q_2}{C_1 C_2}$, um so ungenauer die Bestimmung wird.

Spezieller Fall: Ist $(\gamma_1'' - \gamma_2'') + (\gamma_1' - \gamma_2') = 2 R$ (was allerdings praktisch nie eintreten wird), so ist $P_1 C_1 P_2 C_2$ ein Kreisviereck. Die Neupunkte treten wechselseitig an Stelle der Collinschen Punkte und die Aufgabe lässt sich direkt durch einen einzigen Vorwärtseinschnitt und zwar um so genauer lösen, je näher die Winkel zwischen den Bestimmungsstrahlen einem Rechten kommen.

Muss die Zielung $C_1 C_2$ durch einen Polygonzug ersetzt werden, dessen Anschlusswinkel nach P_1 und P_2 in C_1 und C_2 samt den übrigen Brechungswinkeln und Strecken man misst, so lassen sich die Winkel zwischen $C_1 C_2$ und der ersten, bzw. letzten Polygonseite durch Rechnung (s. § 87), und aus ihnen die Winkel γ_1 und γ_2 ableiten. Man gewinnt dann nebenbei durch die aus dem Polygonzug berechnete Strecke $C_1 C_2$ ein Stück mehr als nötig, also Überbestimmung und damit Messungskontrolle.

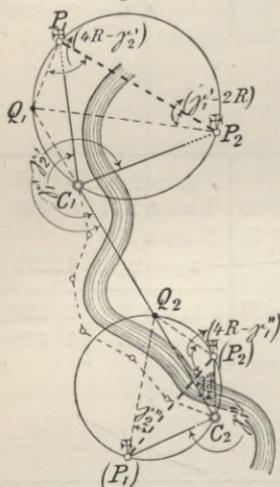
Erweiterung der Aufgabe.

Die vorstehend gelöste Aufgabe ist nur ein spezieller Fall des:

§ 61. **Zweifach gegenseitigen Rückwärtseinschnitts.**

Von jedem der beiden Neupunkte C_1 und C_2 wurde neben ihrer Verbindungsstrecke ein anderes Paar von Festpunkten P_1 und P_2 angezielt. Denkt man sich Kreise beschrieben, deren jeder über der Verbindungslinie der beiden vom selben Neupunkt aus angezielten Festpunkte als Sehne je den Winkel zwischen beiden Zielungen fasst, so erhält man

Fig. 275.



damit je einen geometrischen Ort für die Lage der Neupunkte. Schneidet die (nötigenfalls verlängerte) Verbindungslinie der letzteren die Kreise in Q_1 und Q_2 , so lassen sich die Koordinaten dieser Punkte je durch Vorwärtseinschnitt aus den Grundlinien $P_1 P_2$ bzw. $(P_1)(P_2)$ berechnen, wenn man die in C_1 und C_2 gemessenen Winkel nach dem Satz vom Peripheriewinkel über gleichen Bogen sinngemäss an die Grundlinien überträgt. Daraus kann man dann den Richtungswinkel $n_{Q_1 Q_2} = n_{C_1 C_2}$ und durch Addition der gemessenen Winkel γ die Richtungswinkel der Neustrahlen ableiten. Hieraus ergeben sich die Koordinaten der Neupunkte C_1 und C_2 je mittels eines

Vorwärtseinschnitts aus den Grundlinien $P_1 P_2$.

Beispiel. (Ausrechnung s. S. 462/463.)

		x	y
Gegeben	P_1 Wangen	+ 49617,22	+ 20708,42
	P_2 Untertürkheim	+ 47973,48	+ 22907,34
	(P_1) Berkheim	+ 48612,08	+ 16907,57
	(P_2) Wiflingshausen	+ 46073,96	+ 16003,44.

Gemessen die Winkel in den Neupunkten:

$$\begin{aligned} C_2 C_1 P_1 &= 132^\circ 77' 89'' \\ C_2 C_1 P_2 &= 183^\circ 85' 52'' \\ C_1 C_2 (P_2) &= 59^\circ 73' 12'' \\ C_1 C_2 (P_1) &= 351^\circ 60' 13''. \end{aligned}$$

Gesucht die Koordinaten der Neupunkte C_1 und C_2 .

Lösung.

Nachdem eine auf Grund der gegebenen und der gemessenen Elemente entworfene Skizze Aufschluss über die ungefähre gegenseitige Lage der Fest-, Neu- und Collinschen Punkte erteilt hat, erfolgt die Einsetzung der Grundlinienendpunkte samt ihren Koordinaten und der übertragenen Winkel ins Formular zum Zweck der Berechnung der Koordinaten von Q_1 und Q_2 (s. \triangle I und II S. 462). Aus letzteren erfolgt die Berechnung des Richtungswinkels $n_{Q_2 Q_1}$

(s. Nebenrechnung zu \triangle III), welcher durch Addition der gemessenen Winkel (s. Nebenrechnung zu \triangle IV) die Richtungswinkel der Bestimmungsstrahlen $P_1 C_1$, $P_2 C_1$, $(P_1) C_2$ und $(P_2) C_2$ liefert. Aus ihnen findet man (s. \triangle III und IV) rückwärts die zur Streckenberechnung nötigen Dreieckswinkel und die Koordinaten der Neupunkte.

Die vorstehend behandelte Aufgabe hat namentlich Bedeutung für die Aufnahme breiter Flusstäler etc. Kann dabei die Zielung $C_1 C_2$ nicht genommen, aber ein Polygonzug zwischen C_1 und C_2 gelegt werden, dessen Anschluss- und Brechungswinkel samt den Strecken man misst, so gewinnt man die nach vorstehendem nötigen Winkel γ durch entsprechende Verbindung der in den Neupunkten C nach den Festpunkten P bzw. (P) gemessenen Anschlusswinkel mit den nach § 87 durch Rechnung abgeleiteten Winkeln zwischen der Verbindungsgeraden $C_1 C_2$ und der ersten bzw. letzten Polygonseite. Die nebenbei durch Rechnung gewonnene überschüssige Streckenlänge $C_1 C_2$ bildet alsdann wie in § 60 eine Messungsprobe.

Erweiterung
der Aufgabe.

Die Koordinaten der Punkte Q und C ergeben sich um so schärfer, je senkrechter sich die von ihnen nach den zu ihrer Bestimmung benützten Festpunkten P gezogenen Strahlen schneiden. Dies ist bei Auswahl der Neupunkte C zu berücksichtigen. Je kürzer ferner die Verbindungsstrecke $Q_1 Q_2$ ist, um so stärker beeinflussen kleine Ungenauigkeiten in den Koordinaten ihrer Endpunkte den Richtungswinkel $n_{Q_1 Q_2}$ und damit die Richtungswinkel der Bestimmungsstrahlen nach P_1 und P_2 . Um die Strecke $Q_1 Q_2$ gross zu halten, vermeidet man möglichst diejenige Lage der beiden Neupunkte, in welcher die in jedem von ihnen nach dem zugehörigen Festpunktpaar gemessenen Winkel sich gegeneinander öffnen.

Genauigkeitsunter-
suchung.

Mit dieser Aufgabe ist gleichzeitig auch diejenige erledigt, bei welcher nur drei Festpunkte gegeben sind, von denen zwei von dem einen, einer von ihnen und der dritte aber vom anderen Neupunkt aus angezielt wurden.

2. Kleintriangulierung mit Überbestimmung.

§ 62. Einleitung.

Die trigonometrische Punktbestimmung bedarf, wie jede andere geodätische Arbeit, der Kontrollen, um gegen grobe Messungs- und Rechnungsfehler geschützt zu sein. Aber auch die Wirkung der unvermeidlichen kleinen Beobachtungsfehler muss durch geeignete Massnahmen möglichst eingeschränkt werden.

Da überdies tatsächlich (wenn auch entgegengesetzt der aus anderen Gründen gebotenen Annahme ihrer Fehlerfreiheit) die gegebenen Koordinaten der zur Bestimmung von Neupunkten verwendeten Festpunkte mit kleinen Fehlern behaftet sind, die auf die Genauigkeit der Neupunktsbestimmungen um so sichtbarer einwirken, je näher die Neupunkte anderen Festpunkten kommen, da endlich die Projektionsverzerrung (z. B. bei Anwendung ebener Soldnerscher Koordinaten) die nach den Sätzen der ebenen Trigonometrie berechneten Richtungswinkel und Streckenlängen der Grundlinien und damit der Bestimmungsstrahlen u. U. recht merklich und in verschiedenem Masse verändert, ist es nötig, Überbestimmung einzuführen, d. h. die Lage jedes Neupunkts unter Berücksichtigung sämtlicher benachbarter Festpunkte, statt nur von einer Seite her, zu bestimmen. Hierbei sollen die von letzteren ausgehenden Bestimmungsstrahlen möglichst gleichmässig über den Horizont verteilt sein, wenn die zufälligen Festpunktsfehler und die Verzerrungseinflüsse sich gegenseitig in der Hauptsache aufheben sollen.

Bei der durch die Triangulierungen höherer Ordnung bereits erzielten Verdichtung des Dreiecksnetzes führt diese Forderung des allseitigen Anschlusszwangs zu umfangreichen Ausgleichungen der allein änderungsfähigen gemessenen Stücke. Diesen Ausgleichungsarbeiten¹⁾ legen wir die Bedingung zugrunde, dass die gemessenen Werte l der Bestimmungsstücke um kleinstmögliche, von der Beobachtungsgenauigkeit abhängige Zuschläge v derart zu verbessern sind, dass die unter Benützung der verbesserten Werte berechneten Endergebnisse (Koordinaten) sich übereinstimmend ergeben, gleichgültig, welche von den (in Überzahl vorhandenen) Bestimmungsstücken man auch benützen mag.

Aus dieser Bedingung heraus, welche wir stellen müssen, wenn wir die bei der Beobachtung aufgewandte Mühe nach allen Seiten nutzbar machen wollen, verbietet sich schon allein, abgesehen von dem damit verbundenen grossen Arbeitsaufwand und der Schwierigkeit, ja Unmöglichkeit gleichwertiger Gruppierung der Bestimmungsstücke, die Anwendung des an sich naheliegenden Verfahrens: die gesuchten Koordinaten etwa aus allen möglichen Dreiecken abzuleiten und nachher zu mitteln.

Je nach der Anordnung der gemessenen Bestimmungsstücke, der gegenseitigen Lage der Fest- und Neupunkte und dem eingeschlagenen Rechnungsweg unterscheiden wir bei der Triangulierung

¹⁾ Über Ausgleichungsrechnung vergl. u. a. des Verfassers „Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate“. Bei Göschen in Leipzig 1906.

zwischen der „Netzeinschaltung“ und der „Punkteinschaltung“ (vergl. auch § 58).

Der ersteren geht eine durchgreifende Ausgleichung aller Beobachtungen voraus, derart, dass deren verbesserte Werte identische Koordinaten für die Neupunkte liefern, gleichgültig, welchen von ihnen man auch zuerst bestimmen möge. Diese Methode behandelt demnach alle zusammengehörigen Messungs- und Punktgruppen gleichmässig wie aus einem Guss, ohne Bevorzugung irgendeiner von ihnen, sie ist daher gerechter und verlangt überdies weniger überschüssige Bestimmungsstücke; sie erfordert aber schwerfälligere Ausgleichungsrechnungen, als die Punkteinschaltung. Bei letzterer wird Punkt für Punkt je aus den benachbarten Festpunkten bestimmt. Sobald die Koordinaten eines Neupunktes berechnet sind, wirkt letzterer bei der Berechnung des nächsten, ihm eigentlich gleichgeordneten mit, spielt also ihm gegenüber die Rolle eines Festpunkts höherer Ordnung.

Die Methode der Netzeinschaltung ist technisch, diejenige der Punkteinschaltung mit ihrem schrittweisen Fortschreiten zu meist wirtschaftlich vorzuziehen. Der Nachteil der ungleichmässigen Behandlung gleichwertiger Bestimmungen bei der letzteren kann vermindert werden durch passende Auswahl der Punkte bezüglich der Reihenfolge der Einschaltung. Man beginnt zweckmässigerweise mit der Bestimmung solcher Punkte, welche nach Kürze, symmetrischer Anordnung und sicherer (zweiseitiger, oder durch Beleuchtungsverhältnisse begünstigter) Beobachtung der Bestimmungsstrahlen von Natur aus bevorzugt sind.

Innerhalb der Netzeinschaltung unterscheiden wir wieder zwischen Dreiecksketten, für deren rechnerische Behandlung nur ein von Dreieck zu Dreieck fortschreitender Weg möglich ist, und eigentlichen Dreiecksnetzen, bei welchen durch Aneinanderreihung der Dreiecke nach verschiedenen Seiten und Diagonalbeobachtungen das Fortschreiten der Rechnung in verschiedenartiger Aufeinanderfolge möglich ist.

Bei der Punkteinschaltung halten wir die bisher schon getroffene Unterscheidung aufrecht und bezeichnen eine Bestimmung als:

„Vorwärtseinschnitt“, wenn die Winkelbeobachtungen nach dem Neupunkt nur in den Festpunkten, als:

„Rückwärtseinschnitt“, wenn sie nur in dem Neupunkt und als:

„Vereinigten Vor- und Rückwärtseinschnitt“, wenn die

Winkelbeobachtungen sowohl in Festpunkten-, als im Neupunkt erfolgten.

§ 63. Vermarkung der trigonometrischen Festpunkte. Spätere Prüfung ihres Standorts.

Punkt-
vermarkung.

Das Bedürfnis, zu jeder Zeit, auch nach erfolgtem Abschluss der Vermessung, sei es zum Zweck von Revisionen und Verfeinerungen, sei es zur späteren Einschaltung von Fortführungsvermessungen wieder auf deren Grundlage zurückzugreifen, nötigt zu einer, ihrer Wichtigkeit entsprechenden, örtlichen Vermarkung der Dreieckspunkte. Insoweit, als Teile von Gebäuden (Helmstangen, Blitzableiter, feste Flaggenmasten etc.) die Dreieckspunkte bilden, („Gebäudesignale“), ist innerhalb der durch Setzungen der Bauwerke, Windschwankungen etc. bedingten Genauigkeitsgrenzen deren dauernder Bestand gesichert, sobald durch unterstützende Verwaltungsmassnahmen dafür gesorgt ist, dass etwaige bauliche Änderungen sicher und womöglich schon vor ihrer Ausführung zur Kenntnis der Vermessungsbehörde gelangen. Die auf dem Gelände festgelegten Punkte („Geländepunkte“) müssen dagegen zum Schutz gegen Beschädigungen und Ortsveränderungen durch Feldarbeiten und Frost durch genügend grosse (in Württemberg 90 cm lang mit quadratischem Querschnitt von 25 cm Seitenlänge) und leicht zu identifizierende, daher behauene Steine oder Pfeiler, sei es zentrisch, sei es exzentrisch auf erworbener, oder mit einer Grunddienstbarkeit belegten Fläche vermarktet sein. Eine seitliche, oder in die Tiefe reichende Rückversicherung gegen Beschädigung oder Entfernung (in Württemberg durch quadratische, 10 cm dicke Unterlageplatte von 35 cm Seitenlänge) ist geboten.

Früher erfolgte die Vermarkung in Württemberg im allgemeinen exzentrisch durch in der Nähe gewonnene Steine mit seitlich und vertieft eingehauenen Dreieck. Der Signalpunkt befindet sich in diesem Fall 5 cm entfernt von der das Dreieck tragenden Seitenfläche des Steins. Die im Lauf der Zeit eintretende Verwitterung der Steine (Absplittern gerade der das Dreieckszeichen tragenden Seitenfläche) hat aber zur Verwendung eines dauerhafteren Materials (Granit) und zu zentrischer, nach den Himmelsrichtungen orientierter, Vermarkung geführt. Der Ankauf eines entsprechenden Flächenstücks, bezw. die Auflegung einer Grunddienstbarkeit wurde jedoch versäumt.

Prüfung des
Standorts
der Dreiecks-
punkte.

Der trigonometrischen Bestimmung von Neupunkten hat (wie überhaupt jeder beliebigen Arbeit) eine Untersuchung der zu benützenden Grundlagen auf ihre Richtigkeit voranzugehen. Im vorliegenden Fall ist zu prüfen, ob die zu benützenden Festpunkte im Augenblick ihrer Verwendung an der durch ihre Koordinaten bestimmten Stelle vermarktet sind. Wenn es sich (wie z. Z. in Württemberg) bei Ausführung von Vermessungen in der Hauptsache nur um die Fortführung einer längst fertig-

gestellten Landesvermessung bezüglich eingetretener, oder beabsichtigter Änderungen in der Bodeneinteilung und -Benützung handelt und wenn bei der Uraufnahme die Vermarkung der Signalepunkte der Stückvermessung zuweilen nachfolgte, so kommen für jeden Punkt viererlei mögliche Stellen in Frage, nämlich:

1. diejenige auf (oder nach) der einst die Winkelmessung erfolgte,
2. die durch die gegebenen Koordinaten bestimmte Stelle¹⁾,
3. der Punkt, von dem die Stückvermessung einstens ausging,
4. der zur Zeit vermarkte Punkt.

Diese Punkte sollten identisch sein, sind es aber (abgesehen von möglichen früheren Winkel- und Rechnungsfehlern) dann nicht, wenn etwa anlässlich der Feldbearbeitung in der Zeit zwischen Winkel- und Stückvermessung bzw. Vermarkung die Signalstange versteckt wurde, oder wenn lange, bewaldete Bergrücken eine Verbindung der zu beiden Seiten sich erstreckenden Talketten verhinderten, dabei Netzklaffungen verursachend. Je nach der Art der auszuführenden Vermessungsarbeit kann nun der eine, oder andere dieser viererlei Punkte verlangt sein.

Soll der Signalepunkt zu Grenzwiederherstellungen oder -Aufnahmen benützt werden, so braucht man (3) den bei der Uraufnahme verwendeten —, zu Triangulierungsarbeiten dagegen den unter (2) genannten Punkt.

Letzteres trifft für uns augenblicklich zu, ohne Rücksicht darauf, ob er dabei gleichzeitig mit (1), oder (4) übereinstimmt. Eine bloss geometrische Kontrolle auf Grund der früheren Stückvermessung gibt also für die Übereinstimmung der vermarkten, mit der durch die Festpunktskoordinaten bezeichneten Stelle nicht genügende Sicherheit. Übereinstimmung ist dagegen, wenigstens im Vergleich zu den Nachbarpunkten¹⁾, vorhanden, wenn die auf der vermarkten Stelle gemessenen Winkel nach mindestens drei der letzteren innerhalb zulässiger Grenzen übereinstimmen mit den Unterschieden der entsprechenden, aus den Festpunktskoordinaten errechneten Richtungswinkel (umgekehrte Aufgabe des Rückwärtseinschnitts). Dasselbe ist der Fall, wenn diese Übereinstimmung für die in mindestens zwei benachbarten Festpunkten nach dem zu untersuchenden und je einem weiteren Festpunkt gemessenen Winkel besteht (umgekehrte Aufgabe des Vorwärtseinschnitts).

¹⁾ Es handelt sich hiebei natürlich weniger um die durch die Koordinatenwerte bestimmte Lage des zu untersuchenden Punktes zum Koordinatenursprung, als um die relative Lage zu den benachbarten Festpunkten.

und Dreiecksgenauigkeit abhängende Grenze¹⁾ (was sich aber schon bei der Bildung der einzelnen Werte des Verdrehungswinkels ω gezeigt hätte), so stimmt, falls keine Beobachtungsfehler vorliegen, die Lage der entsprechenden Zielpunkte nicht mit deren Koordinaten überein. Durch Beobachtung auf diesen Zielpunkten, oder nach ihnen von anderen Festpunkten her, wäre dies zu erhärten. Erreicht eine grosse Zahl der v erhebliche Beträge, so haben wir Veranlassung, die Übereinstimmung der Lage unseres Standpunkts C mit seinen Koordinaten anzuzweifeln und den Verdacht durch Wiederholung dieses Verfahrens auf anderen bei der Triangulierung zu benützenden Festpunkten weiter zu verfolgen. Erreicht ein einziger Wert v einen grossen Betrag, ohne dass sich aber ein entsprechender Punktfehler durch Wiederholung des Verfahrens auf anderen Festpunkten bestätigen würde, so liegt vermutlich ein Beobachtungsfehler vor, der durch Nachmessung zu beheben wäre.

Wenn die Abweichungen $v = \varphi - \beta$, wie dies tatsächlich der Fall ist, nicht ausschliesslich Beobachtungs-, sondern zum Teil auch Fehlern im Dreiecksnetz entspringen, so sind streng genommen die einzelnen Werte des Verdrehungswinkels ω für die Mittelbildung im Gegensatz zu (1) mit Gewichten p zu versehen, welche von der Strahlenlänge s abhängen. Diese würden z. B. $p = s^2$, wenn v allein durch Punktfehler verursacht würde. In der Regel wird bei den Kleintriangulierungen auf diese Feinheit verzichtet und ein Ausgleich durch die Bestimmung geschaffen, dass Strahlen für Triangulierungszwecke unter eine gewisse Länge (in Württemberg 300 m) nicht heruntergehen dürfen.

Gewicht für die Bildung des Verdrehungswinkels ω .

¹⁾ Als höchstensfalls zulässige Abweichung $v = \varphi - \beta$, welche sich aus unvermeidlichen Beobachtungs- und Punktfehlern zusammensetzt, bestimmt die technische Anweisung vom 19. Januar 1895 für Punktbestimmung IV. Ordnung in Württemberg:

$$v_{\text{Max}} = \left(60 + \frac{40\,000}{s}\right)'' \text{ n. T.,}$$

wobei s die Strahlenlänge vorstellt. Der zulässige mittlere Beobachtungsfehler einer Richtung ist (s. § 42) $25''$ n. T., der zulässige Max. Fehler also $75''$ n. T.

Ist der auf Rechnung von Fehlern des Dreiecksnetzes III. Ordnung zu setzende Fehleranteil an $v = x$, so ist also

$$x^2 + 75^2 = \left(60 + \frac{40\,000}{s}\right)^2 = 3600 + \frac{4\,800\,000}{s} + \frac{1\,600\,000\,000}{s^2},$$

oder z. B.

$$\text{für } s = 1000 \text{ m } \quad x^2 = -5625 + 3600 + 4800 + 1600, \text{ d. h. } x = \pm 66'',$$

$$\text{für } s = 2000 \text{ m } \quad x = \pm 28''.$$

Unter den obigen Voraussetzungen ist also im württembergischen Landesdreiecksnetz III. Ordnung ein maximaler Punktfehler von etwa 9 bis 10 cm angenommen. In der Zeitschrift für Vermessungswesen 1886 S. 177/197 berechnet Steiff einen mittleren Punktfehler in diesem Dreiecksnetz von ± 1 dm.

Ausnahmsweise vorkommende besonders kurze Strahlen bleiben jedoch für die ω Bildung am besten ausser Betracht.

Abriss.

Die geschilderte Untersuchung der Festpunkte wird am besten im „Abriss“ vorgenommen (s. nachstehendes Beispiel), dessen Anlegung also die eigentliche Triangulierungsberechnung eröffnet und, und wie wir später sehen werden, auch beschliesst.

A b r i s s .

Zielpunkte	Beobachtete Richtungen α			Endgültige Richtungswinkel φ			Unterschiede $\varphi - \alpha$ Orientierungswinkel $\omega = \frac{[\varphi - \alpha]}{n}$			Orientierte Richtungen $\beta = \alpha + \omega$			Verbesserung $v = \varphi - \beta$		Streckenlänge s	Höchstzulässiger Wert von $v = v_{max.}$	
	0	'	''	0	'	''	0	'	''	0	'	''	+	-			m
1.	2.			3.			4.			5.			6.		7.	8.	
Standpunkt Halde ($x = -43269,10$ $y = +50551,72$)																	
8 Nutzwasen	366	89	15	366	89	64	0	00	49	366	89	42	22		993	1	00
1 Heudorf .	19	91	99	19	92	32	0	00	33	19	92	26	6		1231	0	93
11 Egert .	131	39	87	131	39	85	399	99	98	131	40	14		29	1305	0	91
	$3\omega =$		21	01		21	81	[] =	0	80		21	82	28	29		
			81		+	1	$\omega = 0$	00	27								
			21	82		21	82							1			

A. Punkteinschaltung.

a) Aus Winkelbeobachtungen.

§ 64. Übereinstimmende Berechnung aus zwei nebeneinander liegenden Dreiecken durch stufenweise Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen.

Die Bestimmung eines Neupunkts aus zwei nebeneinander liegenden Dreiecken genügt nur für untergeordnete Zwecke. Denn sie widerspricht der wichtigen Forderung, dass die Bestimmungsstrahlen sich gleichmässig über den Horizont verteilen sollen.

a) Sind sämtliche Dreieckswinkel gemessen und im Formular unter „gemessen“ eingetragen, so erfolgt zunächst deren Reduktion, andernfalls ihre Ergänzung auf die Summe von $2R$ in der Spalte „reduziert“ (Beispiel s. S. 476). Nun berechnen wir aus den eingetragenen Koordinaten der Festpunkte in der Nebenrechnung (rechts unten) die Richtungswinkel nAB und nach deren Übertrag in die Spalten „reduziert“, „verbessert“ und „ausgeglichen“, in „reduziert“

b) den Richtungswinkel der gemeinschaftlichen Seite

$$(nAC = nAB - \alpha; nBC = nBA + \beta)$$

in beiden Dreiecken. ($288^{\circ} 21' 90''$ und $288^{\circ} 21' 58''$ im Beisp. S. 476.)

c) Das Mittel ($288^{\circ} 21' 74''$) aus beiden erhaltenen Werten wird jetzt in die Spalte „verbessert“ in beiden Dreiecken eingetragen. Aus ihm und dem Richtungswinkel der vom gleichen Festpunkt ausgehenden Grundlinie erfolgt rückwärts in derselben Spalte die Bildung der beiden der gemeinschaftlichen Seite anliegenden Dreieckswinkel:

$$(1) \quad \alpha = n A B - n A C; \quad \beta = n B C - n B A.$$

Fig. 276 a.

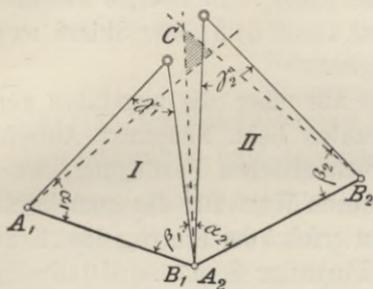
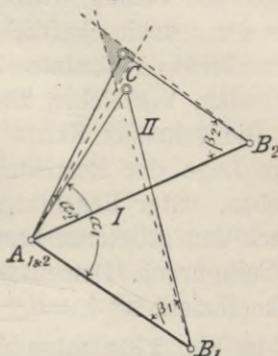


Fig. 276 b.



Damit die durch diese „Verbesserung“ gestörte Dreieckswinkelsumme von $2R$ wieder stimmt, wird die soeben bewirkte Änderung des einen Dreieckswinkels gegenüber seinem „reduzierten“ Wert zu gleichen Teilen mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die beiden anderen, damit ebenfalls „verbesserten“ Dreieckswinkel eingeteilt (s. gestrichelte Linien in Fig. 276 a und 276 b).

d) Aus AB und den „verbesserten“ Werten der Dreieckswinkel erhalten jetzt in der „I. Berechnung“ die Logarithmen der gemeinschaftlichen Seite in beiden Dreiecken voraussichtlich etwas verschiedene Werte (2.654343 und 2.654381 in Beispiel S. 476). Man kann nun, um die jedenfalls nur kleine Differenz auszugleichen:

1. kurzerhand das arithmetische Mittel aus beiden Logarithmen der gemeinschaftlichen Seite¹⁾ in die II. Berechnung als endgültigen Log. einführen und mit ihm und dem „verbesserten“ Richtungswinkel dieser Seite die Koordinatenunterschiede nach dem Neupunkt einfach nach den Formeln $\Delta x = s \cos \varphi$ berechnen. Damit wäre aber die Grundbedingung der Ausgleichsrechnung nicht erfüllt,

¹⁾ Das arithmetische Mittel zweier Logarithmen a und b entspricht dem geometrischen Mittel \sqrt{ab} der zugehörigen Numeri. Dieses ist aber immer kleiner, als das arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$, das eigentlich gewählt werden sollte, wenn man den Neupunkt kurzerhand in die Mitte der Differenz setzen will. Denn es ist $(a+b) - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ also positiv. Jedoch ist die Differenz für grosse Werte a und b , die sich nicht stark voneinander unterscheiden, unbedeutend.

welche verlangt, dass die Verbesserungen an den gemessenen Grössen (unter Berücksichtigung ihrer Genauigkeit) angebracht werden müssen und nicht an den berechneten Streckenlängen.

Wollen wir diese Bedingung erfüllen und den endgültigen Neupunkt auf der bereits verbesserten (in Fig. 276 gestrichelt gezeichneten) Richtung der gemeinschaftlichen Seite belassen, setzen wir ferner die Winkelmessung als gleich genau voraus, so bleibt nichts übrig, als

2. den beiden Winkeln in jedem Dreieck, welche nicht die Lage der gemeinschaftlichen Seite, aber ihre Länge bestimmen, den zunächst unbekanntem Zuschlag x mit dem einer Skizze zu entnehmenden, Vorzeichen hinzuzufügen.

Die genannte Skizze braucht nur über die ungefähre gegenseitige Lage der Bestimmungsstrahlen beim Neupunkt Aufschluss zu geben, unter Beachtung der rechnerischen Festlegung, welches Dreieck den grösseren bzw. kleineren Wert für die gemeinschaftliche Seite ergab. Dementsprechend erfolgt der Eintrag des „Korrektionskoeffizienten“ $k = \pm 1$ im Formular S. 476.

In Fig. 276a muss z. B. $\sphericalangle \alpha_1$ und γ_2 um x vergrössert, γ_1 und β_2 dagegen um x verkleinert werden. Erstere erhalten den Korrektionskoeffizienten $+1$, letztere -1 , und es ist:

$$\frac{A_1 B_1}{\sin(\gamma_1 - x)} \cdot \sin(\alpha_1 + x) = \frac{A_2 B_2}{\sin(\gamma_2 + x)} \sin(\beta_2 - x).$$

Um aus dieser Gleichung die Korrektion x in Sekunden zu berechnen, logarithmieren wir. Wir benützen ferner die Änderungsbeträge $\pm \delta$, welche die $\log \sin$ der auf die Seitenlänge einwirkenden Winkel erleiden, wenn man letztere selbst um $1''$ ändert und welche für spitze Winkel mit stumpfe Winkel entgegengesetzt der Winkeländerung wachsen, d. h. positives Vorzeichen besitzen. Wir haben diese Beträge während der Streckenberechnung der Log.-Tafel entnommen und erhalten daraus jetzt:

$$\begin{aligned} \log A_1 B_1 + (\log \sin \alpha_1 + x'' \cdot \delta_{\alpha_1}) - (\log \sin \gamma_1 - x'' \cdot \delta_{\gamma_1}) &= \log A_2 B_2 \\ &+ (\log \sin \beta_2 - x'' \cdot \delta_{\beta_2}) - (\log \sin \gamma_2 + x'' \cdot \delta_{\gamma_2}) \text{ oder} \\ (\log A_2 B_2 + \log \sin \beta_2 - \log \sin \gamma_2) - (\log A_1 B_1 + \log \sin \alpha_1 - \log \sin \gamma_1) \\ &= x'' (\delta_{\alpha_1} + \delta_{\gamma_1} + \delta_{\beta_2} + \delta_{\gamma_2}), \text{ d. h.} \end{aligned}$$

$$(2) \ x'' = \frac{\log(\text{gr. Wert d. gemeinsch. Seite}) - \log(\text{kl. Wert d. gemeinsch. Seite})}{[\text{algeb. } \delta \text{ der verwendeten Winkel}]}$$

Dieser Ausgleichsbetrag x wird nun mit dem Vorzeichen des betr. Korrektionskoeffizienten den „verbesserten“ Winkelwerten zugeschlagen, wodurch sich die in die Spalte „ausgeglichen“ zu übertragenden Werte ergeben.

Die mit ihnen und den aus ihnen abgeleiteten Richtungswinkeln nAC und nBC ausgeführte „II. Berechnung“ wird aus beiden Dreiecken für die Koordinaten des Neupunkts übereinstimmende Werte liefern.

		Beispiel.	
		x	y
Gegeben:	Die Koordinaten von Egert	— 43887,17	+ 51701,59
	Knauer	— 43132,28	+ 52228,40
	Kirchberg	— 42384,91	+ 51415,04.
Gemessen:	Die Winkel: Neupunkt 1—Egert—Knauer	=	30° 93' 19"
	Knauer—Neupunkt 1—Egert	=	119° 63' 98"
	Egert—Knauer—Neupunkt 1	=	49° 43' 15"
	Neupunkt 1—Knauer—Kirchberg	=	59° 09' 41"
	Kirchberg—Neupunkt 1—Knauer	=	114° 89' 46".
Gesucht:	Die Koordinaten vom Neupunkt 1.		

Ausrechnung s. nächste Seite.

Bei der soeben vorgeführten Lösung setzten wir voraus, dass der endgültige Punkt auf der ihrer Richtung nach „verbesserten“ gemeinschaftlichen Seite zu liegen habe. Man kann aber

3. auch annehmen, dass er in das durch die 3 (gestrichelten) Bestimmungsstrahlen (s. Fig. 276) gebildete „Fehlerdreieck“ hineingehöre. Will man dies durch entsprechende Winkelausgleichung bewirken, so müssen auch die zwischen der gemeinschaftlichen Seite und der Grundlinie liegenden Dreieckswinkel noch eine, wenn auch (weil diese bereits verbessert) kleinere Ausgleichung erfahren. Die unter Zurateziehung der Skizze zu bestimmenden Korrektionskoeffizienten k können dann statt wie vorhin ± 1

im Fall der Fig. 276 a

für α_1 zu + 2	für α_2 zu — 1
β_1 „ + 1	β_2 „ — 2
γ_1 „ — 3	γ_2 „ + 3,

im Fall der Fig. 276 b

für α_1 zu + 1	für α_2 zu + 1
β_1 „ + 2	β_2 „ — 2
γ_1 „ — 3	γ_2 „ + 1

gewählt werden, wobei nur immer, wegen der festzuhaltenden Dreieckswinkelsumme, $[k] = 0$ sein muss.

Die Ableitung unter (2) geht dann für Fig. 276 a über in:

$$\frac{A_1 B_1}{\sin(\gamma_1 - 3x)} \sin(\alpha_1 + 2x) = \frac{A_2 B_2}{\sin(\gamma_2 + 3x)} \sin(\beta_2 - 2x) \text{ oder}$$

$$(\log A_2 B_2 - \log \sin \gamma_2 + \log \sin \beta_2) - (\log A_1 B_1 - \log \sin \gamma_1 + \log \sin \alpha_1)$$

$$= (2x \cdot \delta_{\beta_2} + 3x \cdot \delta_{\gamma_2} + 2x \cdot \delta_{\alpha_1} + 3x \cdot \delta_{\gamma_1}), \text{ woraus}$$

$$x'' = \frac{\log > \text{Streckenwert} - \log < \text{Streckenwert}}{[\text{abs. } k \cdot \text{algeb. } \delta]}.$$

Ausrechnung zu Beispiel S. 475.

Bezeichnung der Punkte	Winkel						II. log-Berechnung I.				Abszissen			Ordinaten									
	verbessert		reduz.		gem.		ausgeg.		n	Δx Δy		x ±	y ±	x ±	y ±								
	0	1	2	3	4	5	0	1		2	3					4	5						
△ No. 1	n A C						7	85	54	2	964	041	A	-	43	887	17	A	+	51	701	59	
	n A B	38	78	86			38	78	86	0	020	999	Δx	+	671	86	Δy	Δy	+	83	33		
A: Eger	α	30	93	17	93	09	93	19	93	E sin γ	9	996	686	C	-	43	215	31	C	+	51	784	92
C: Neupunkt 1	γ	119	63	95	63	87	63	98	-1	cos n A C	2	830	594										
B: Knauer	β	49	42	88	43	04	43	15		sin n A C	9	090	186										
	Summe	200	00	00	00	00	200	00	00	sin β	9	845	554										
	n B A	238	78	86	78	86	238	78	86	AB: sin γ	2	985	040	B	-	43	132	28	B	+	52	228	40
	n B C	288	21	74	21	90	288	21	74	sin α	9	669	319	Δx	+	83	03	Δy	Δy	-	443	48	
△ No. 2	n A C	288	21	74	21	58	288	21	74	cos n B C	9	264	879	C	-	43	215	31	C	+	51	784	92
	n A B	347	30	99	30	99	347	30	99	BC	2	654	359										
A: Knauer	α	59	09	25	09	41	59	09	25	sin n B C	9	992	519										
B: Neupunkt 1	γ	114	89	26	89	26	114	89	41	AB	3	043	201	A	-	43	132	28	A	+	52	228	40
C: Kirchberg	β	26	01	49	01	33	26	01	34	E sin γ	0	011	996	Δx	+	830	40	Δy	Δy	-	369	88	
	Summe	200	00	00	00	00	200	00	00	cos n A C	2	654	360	C	-	43	215	31	C	+	51	784	92
	n B A	147	30	99	147	30	147	30	99	sin n A C	9	599	163										
	n B C	173	32	33	173	32	173	32	33	AB: sin γ	3	055	197	B	-	42	384	91	B	+	51	415	04
										sin α	9	903	392	Δx	+	830	40	Δy	Δy	+	369	88	
										cos n B C	9	960	700	C	-	43	215	31	C	+	51	784	92
										BC	2	958	589										
										sin n B C	9	609	467										

Richtungswinkel- und Seitenberechnung zu △ No. 1

	log		n	
$y_B - y_A$	2	721	654	
$E \sin n A B$	0	086	157	
$E \cos n A B$	2	877	884	
$x_B - x_A$	9	843	770	
$\operatorname{tg} n A B$	2	964	041	

Richtungswinkel- und Seitenberechnung zu △ No. 2

	log		n	
$y_B - y_A$	2	910	283	
$E \sin n A B$	0	132	918	
$E \cos n A B$	2	873	536	
$x_B - x_A$	0	036	747	
$\operatorname{tg} n A B$	3	043	201	

$$x'' = \frac{2,654381 - 2,654343}{-0,21 + 1,29 - 0,16 + 1,57} = \frac{38}{+ 2,49} = 15''$$

Nachdem zur Erlangung der „ausgeglichenen“ Dreieckswinkelwerte die Beträge kx je mit dem Vorzeichen des zugehörigen Korrektionskoeffizienten k den verbesserten Dreieckswinkeln zugeschlagen wurden, erfolgt die Endberechnung in den Spalten „Ausgeglichen“ und „II. Berechnung“ wie zuvor mit demselben Erfolg der Übereinstimmung der aus beiden Dreiecken erhaltenen Neupunktskoordinaten.

Am Verfahren (3) ist übrigens folgendes auszusetzen:

1. Sind alle drei Winkel gemessen, so ist nicht zu billigen, dass im Fall der Figur 276 a die Winkel an den äusseren Endpunkten der Grundlinien bloss wegen der Notwendigkeit: [Zuschläge] = $0''$ einen anderen Zuschlag erleiden müssen, als die Winkel im Neupunkt. Der Mangel wird noch krasser, wenn die Winkel im Neupunkt nicht gemessen sind, und der Fall der Figur 276 a mit stumpfen Winkeln γ , oder der Figur 276 b vorliegt. Denn hier erhalten die nicht gemessenen Winkel teilweise einen kleineren Zuschlag, als die gemessenen.

2. Verlaufen die beiden äusseren Bestimmungsstrahlen genau parallel, so wird die Lage des Fehlerdreiecks, also die Rückungsrichtung für den Neupunkt unbestimmt, verlaufen sie nahezu parallel, so ist nicht zu verstehen, warum der endgültige Punkt in das langgestreckte Fehlerdreieck hereingesetzt werden soll, ohne doch in ihm die Schwerpunktslage einnehmen zu können. —

Einen Mangel der Punktbestimmung aus zwei aneinandерliegenden Dreiecken überhaupt bildet neben der Einseitigkeit der Strahlenlage bei der soeben angedeuteten Richtung der beiden äusseren Bestimmungsstrahlen, (der besten in bezug auf senkrechten Schnitt), der Umstand, dass ein etwa bei Beobachtung auf dem inneren Festpunkt (B_1 in Fig. 276 a) unterlaufener grober Winkelfehler (z. B. die Anzielung eines unrichtigen Zielpunkts C, einer Telegraphenstange etc.) zwar grob fehlerhafte Neupunktskoordinaten liefern würde, ohne sich aber, wenn in C nicht beobachtet wurde, bei der Rechnung selbst irgendwie bemerklich zu machen. Die Messungsprobe wäre also in diesem Fall nur eine scheinbare!

§ 65. Übereinstimmende Berechnung aus beliebig vielen Dreiecken. (Nach Oberst Tulla).

Auswahl der wahrscheinlichsten Lage des Neupunktes in einer fehlerzeigenden Figur als Schwerpunkt der Einzelschnittpunkte.

Verwenden wir, um eine gleichmässige Verteilung der Bestimmungsstrahlen über den Horizont zu erzielen, eine grössere

Zahl von aneinander sich anreihenden Dreiecken, so bildet die Bestimmung nur eine Erweiterung der vorigen Aufgabe. Ihre Behandlung schliesst sich, wenigstens in ihrem ersten Teil, völlig an die des § 64 an. Nachdem alle möglichen Dreiecke ausgewählt und nach den in § 58 gegebenen Regeln samt ihren gegebenen und gemessenen Stücken (Koordinaten und Winkeln) ins Formular eingetragen sind, erfolgt die Reduktion, bezw. Ergänzung der Dreieckswinkelsummen je zu $2R$ in der Spalte „reduziert“. In ihr werden dann auch auf Grund der aus den Festpunktkoordinaten berechneten Richtungswinkel nAB und nBA die Richtungswinkel aller in mehr als einem Dreieck auftretenden Bestimmungsstrahlen gebildet nach Formel (3) des § 58. Deren zusammengehörige Werte werden aber, infolge von Festpunkts-, Projektions-, Verzerrungs- und Beobachtungsfehlern, nicht genau miteinander übereinstimmen. Wir wählen daher je ein Mittel (in der Regel das einfache arithmetische) aus ihnen als „verbesserten“ Richtungswinkelwert des fraglichen Neustrahls aus und tragen dieses in allen ihm anliegenden Dreiecken je in die Spalte „verbessert“ ein. Aus diesen Richtungswinkelwerten und denjenigen, unveränderten, der zugehörigen Grundlinien ergeben sich rückwärts durch Subtraktion nach Gleich. (1) des § 64 die „verbesserten“ Werte aller Dreieckswinkel α und β zwischen solchen mehrfach vorkommenden Seiten und den Grundlinien. Die Kosten dieser „Verbesserung“ haben wegen der Grundbedingung $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ und zwar in jedem Dreieck zu gleichen Teilen diejenigen Winkel zu tragen, welche soeben unverändert geblieben sind, also die γ und die nicht an mehrfach vorkommenden Dreiecksseiten liegenden α und β .

Die „verbesserten“ Dreieckswinkel dienen jetzt zur „ersten“ logarithmischen Berechnung der Längen der in mehreren Dreiecken gemeinschaftlich vorkommenden Seiten nach Formel (2) des § 58. Auch die hiefür erhaltenen, bis auf cm oder mm genau in der obersten und untersten Zeile der Spalte „verbessert“ einzutragenden Längen identischer Seiten werden nun nicht genau miteinander übereinstimmen. Die zur Herstellung dieser Gleichheit erforderliche rechnerische Winkelausgleichung ist aber jetzt nicht mehr so einfach, wie im § 64. Wir ziehen daher die graphische Behandlung vor und suchen zu diesem Zweck die Lage der Bestimmungsstrahlen, welche zunächst der Bedingung widersprechen, sich in einem Punkt zu treffen, in der Gegend ihres Zusammentreffens und zwar derart zu zeichnen, dass ihre auftretenden gegenseitigen Abschnitte in grossem Massstab (etwa 1:10) erscheinen. Dies gelingt uns, wenn wir den durch irgend eines der Bestimmungs-

dreiecke (z. B. mit der Grundlinie 1—2) gebildeten Schnittpunkt als Ursprung O eines Koordinatensystems betrachten und (s. Fig. 277) die zugehörigen beiden Bestimmungsstrahlen aus ihren Richtungswinkeln mittels der Winkelteilung der Figur einzeichnen.

(Da die zu zeichnenden Bestimmungsstrahlen vom Neupunkt, ihre in der Spalte „verbessert“ eingetragenen Richtungswinkelwerte aber von den Festpunkten ausgehen, ist die Winkelbezeichnung um 2R verdreht. Jeder nach seinem Richtungswinkelwert nAC eingezeichnete Strahl wird daher in der Figur die geographisch richtige Lage haben.)

Kommen nun die Seiten 1—C, bzw. 2—C ausser dem Dreieck über der Grundlinie

1—2 auch noch in anderen Dreiecken vor, so kann man die Unterschiede aller daraus gegenüber den aus $\triangle 1-2$ erhaltenen Werten nach Richtung und Grösse in dem gewählten Massstab in die Fehlerfigur eintragen. Die durch die erhaltenen Endpunkte (Schnittpunkte der Neustrahlen 1 und 2 mit weiteren Bestimmungsstrahlen) gezogenen Parallelen zu den durch den jeweiligen Richtungswinkel auf der Gradeinteilung bestimmten Radien zeigen die wahre Lage jener weiteren Bestimmungsstrahlen. Da auch ihre Längen von den Ausgangs- (Fest-) bis zu den entsprechenden Schnittpunkten mit den Neustrahlen 1 und 2 sowohl, als mit anderen Neustrahlen berechnet sind, so kann man an sie anschliessend und in gleicher Weise fortfahrend die Lage aller einzelnen, durch die berechneten Dreiecke bestimmten Schnittpunkte und (soweit Dreiecksseiten nur einfach vorkommen, ihre Richtungswinkel also noch nicht berechnet sind ev. unter Benützung der Winkel γ) Bestimmungsstrahlen einzeichnen.

Zur Probe für die richtige Aufzeichnung und Rechnung müssen die in mehr als einem Dreieck auftretenden Strahlen geradlinig durch alle für sie gezeichneten Punkte gehen.

Schliessen die Bestimmungsdreiecke nicht durchlaufend aneinander an, sondern bilden für sich geschlossene Gruppen (s. 1, 2, 3, 7 einer- und 4, 5, 6 in der Figur 278 andererseits), so werden aus den nach früherem (s. S. 447) berechneten Richtungswinkeln je eines Bestimmungsstrahls beider Gruppen (ausgehend z. B. von 3 und 4) und demjenigen der zugehörigen Basis (3—4) die der letzteren anliegenden Dreieckswinkel und daraus die Strecken 3V und 4V abgeleitet. Dadurch ist die Zeichnungsmöglichkeit wieder hergestellt. Für die Berechnung solcher Hilfs-

Fig. 277.

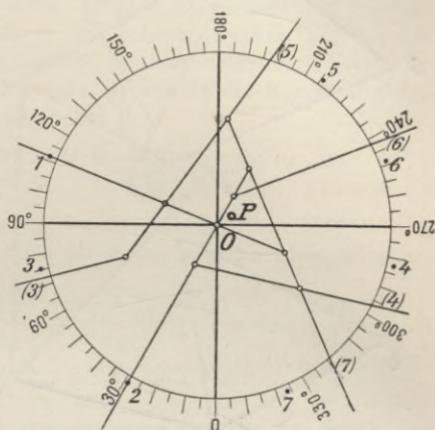
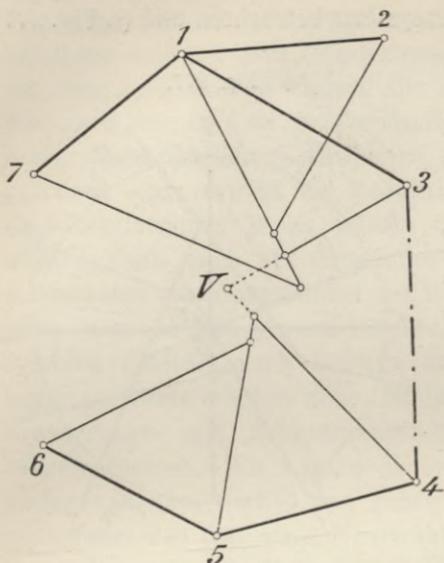


Fig. 278.

Punktwahl
in der
Fehlerfigur.



strecken wird man begreiflicher-
weise ein Dreieck herausuchen,
dessen Bestimmungsstrahlen sich
möglichst senkrecht schneiden.

Auswahl des wahr-
scheinlichsten Punktes
in der fehlerzeigenden
Figur.

Sind nach vorhergehen-
dem alle Bestimmungsstrahlen
eingezeichnet, so haben wir
in der „fehlerzeigenden Figur“,
welche nur ebensoviele Schnitt-
punkte $S_1 S_2 \dots$ für den Neu-
punkt zeigt, als Dreiecke zu
dessen Bestimmung verwendet
wurden, einen vermittelnden
als endgültigen Neupunkt P
auszuwählen.

Hiefür sind verschiedene Wege möglich, nämlich:

a) Wollen wir uns lediglich auf die in der Zeichnung bisher
eingetragenen Schnittpunkte S stützen (wobei natürlich der nur
zur Zeichnung nötige Punkt V im Fall der Fig. 278 ausser Be-
tracht bleibt), wie dies z. B. bei den geometrischen Bestimmungen
eines Markpunktes aus verschiedenerlei, sich widersprechenden
Stückvermessungen vorkommt, so bezeichnet ihr Schwerpunkt diejenige
Stelle, in der wir alle Einzelbestimmungen vereinigt denken können.
Da aber die letzteren nicht gleichwertig sein werden, ist zunächst
die Frage zu entscheiden: Welches Gewicht $p_1 p_2 \dots p_s$ kommt
jeder von ihnen, d. h. dem zugehörigen Punkt S zu?

Sind einmal diese Gewichte bekannt, so erhalten wir die Koor-
dinaten x_P und y_P des Schwerpunktes in der Fehlerfigur durch
Anschieb der Momentengleichung für die Schnitt- (Massen-) Punkte
 $S_1 S_2 \dots S_n$, in denen wir uns je die Kräfte $p_1 p_2 \dots p_n$ parallel zu
den Koordinatenachsen angreifend denken.

Hat der Schwerpunkt S der Massenpunkte, d. h. der gesuchte Punkt P,
in welchem die Gegenresultante mit der Kraft $P = [P]$ parallel zu der Richtung
der anderen Kräfte, nämlich \perp zur x-Achse angreift, die Koordinaten x_P und
 y_P , die Einzelschnittpunkte die aus der Figur abgegriffenen Koordinaten $x_1 \dots x_n$,
 $y_1 \dots y_n$, so ist das System von Massenpunkten in Ruhe, wenn die Summe der
statischen Momente

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - [P] \cdot x_P = 0,$$

d. h. wenn:

$$(1) \quad x_P = \frac{[P \cdot x]}{[P]}.$$

Legt man die Krafrichtung parallel zur x-Achse, so kommt auf dieselbe Weise

$$(1) \quad \eta_P = \frac{[p \cdot \eta]}{[p]}$$

als Ordinate des Schwerpunkts.

Eine für die Ausgleichsrechnung wichtige Eigenschaft des Schwerpunkts fällt uns bei dieser Gelegenheit in den Schoss. Denken wir uns das Koordinatensystem für die Fehlerfigur parallel mit sich selbst verschoben, so dass der Ursprung in den Schwerpunkt P fällt, so werden die Koordinaten der Schnittpunkte $S_1, S_2 \dots$ und ihres Schwerpunkts P

$$\text{statt } \begin{cases} \xi_1, \xi_2 \dots \text{ nun (unter Beachtung ihrer } \xi_1 - \xi_P, \xi_2 - \xi_P \dots \xi_n - \xi_P) \\ \eta_1, \eta_2 \dots \text{ Vorzeichen) allgemein: } \eta_1 - \eta_P, \eta_2 - \eta_P \dots \eta_n - \eta_P \\ \eta_P \text{ und } \xi_P \dots \dots \dots 0. \end{cases}$$

Die Gleichung (1) gilt natürlich auch für dieses neue Koordinatensystem, d. h. es wird

$$0 = \frac{p_1(\xi_1 - \xi_S) + p_2(\xi_2 - \xi_S) + \dots + p_n(\xi_n - \xi_S)}{[p]} = \frac{[p v]}{[p]}$$

$$0 = \frac{p_1(\eta_1 - \eta_S) + p_2(\eta_2 - \eta_S) + \dots + p_n(\eta_n - \eta_S)}{[p]} = \frac{[p v']}{[p]}$$

Die Ableitung wäre ganz dieselbe gewesen, wenn an Stelle des ersten, zur Landesvermessungsachse parallelen, ein anderes, beliebig verdrehtes Achsensystem eingeführt worden wäre, sobald nur die Krafrichtungen jeweils parallel bzw. senkrecht zu ihm angenommen blieben. Daraus folgt der Satz:

Der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten hat die Eigenschaft, dass die Summe der Entfernungen v jeder der Punkte von einer beliebigen, durch den Schwerpunkt gehenden Geraden (Schwerachse), je multipliziert mit dem Punktgewicht ist = 0,

$$(1a) \quad [p v] = 0.$$

Die Gewichte p hängen nun im vorliegenden Fall jedenfalls ab vom Schnittwinkel γ der Bestimmungsstrahlen.

Ein gewisser mittlerer Fehler μ des Schnittwinkels γ verschiebt nämlich (s. § 44) den Schnitt zweier Strahlen mit den Längen

$$a, b \text{ um } e = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{ab}{(a+b)} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}}, \text{ also umgekehrt proportional}$$

dem \sin des halben Schnittwinkels. Man könnte also, wollte man nur die Schnittwinkel γ berücksichtigen, die Gewichte setzen

$$p = \sin^2 \frac{\gamma}{2} \text{ oder, der Einfachheit wegen durch Einführung von Mittelwerten und Multiplikation mit einer Konstanten } k: p = k \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Mit entsprechender Abrundung erhalten wir daraus für einen Schnittwinkel $\gamma = 0^\circ - 15^\circ$ (unbrauchbar) $p = 0$

$$15^\circ - 23^\circ \text{ (sehr schlecht) } p = 1$$

$$23^\circ - 38^\circ \text{ (schlecht) } p = 2$$

$$38^\circ - 54^\circ \text{ (mittel) } p = 3$$

$$54^\circ - 71^\circ \text{ (gut) } p = 4$$

$$71^\circ - 90^\circ \text{ (sehr gut) } p = 5.$$

Damit wäre aber die Strahlenlänge gar nicht berücksichtigt. Besser ist daher die Einführung der Gewichte $p = \frac{1}{e^2}$, oder einfacher

$$(2) \quad p = \frac{(a + b)^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{a^2 b^2},$$

welche, etwa mittels Rechenschiebers, für jeden einzelnen Schnittpunkt zu berechnen sind.

Abgesehen von der damit gesteigerten Schwerfälligkeit der Rechnung erhebt sich aber dabei sofort die Frage: Warum werden bei der endgültigen Punktauswahl diejenigen, unter Umständen sehr guten, Schnitte von Bestimmungsstrahlen, für welche zufälligerweise kein Dreieck existiert (z. B. 3, 7, oder 6, 7 etc. in Fig. 278), nicht berücksichtigt? Sie wären doch zu berücksichtigen gewesen, wenn (was möglicherweise durch die Beobachtung eines einzigen weiteren Winkels hätte erzielt werden können, der die Strahlenlage selbst nicht, oder kaum geändert hätte) die betreffenden Dreiecke berechnet worden wären! Man kann nun, um diesem Einwand zu begegnen, sämtliche Schnitte der ihrer gegenseitigen Lage nach nun doch einmal gezeichneten Strahlen benützen, gleichgültig, ob sie in Dreiecken vorkommen, oder nicht. Dabei wird aber deren Zahl $\binom{n}{2}$ sehr gross, die Berechnung also schwerfällig sein. Überdies werden viele Schnitte nur schwach konvergierender Strahlen ausserhalb der Zeichnung fallen und müssen daher vernachlässigt werden, wenn keine Weiterungen entstehen sollen. Es wäre daher wohl zweckmässiger, auf die Benützung der Schnittpunkte der Bestimmungsstrahlen überhaupt zu verzichten und letztere selbst und direkt in die Rechnung einzuführen.

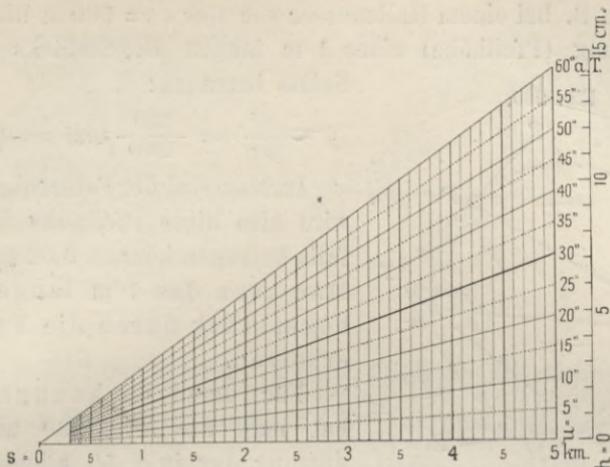
Diesen Gedanken wollen wir in § 66 weiter verfolgen.

Für den Augenblick möge nach Gleichungen (1) und (2) der wahrscheinliche Punkt P in der Fehlerfigur gezeichnet sein. Wir können daher aus seinen abzugreifenden Abständen h von den Bestimmungsstrahlen und den Längen s der letzteren die Ausgleichungsbeträge

$$(3) \quad u'' = \frac{h}{s} \varrho'',$$

um welche die Richtungswinkel der Neustrahlen wiederholt zu verbessern sind, mittels des Rechenschiebers oder eines Diagramms (s. Fig. 279), dessen Strecken $\frac{s}{h}$ im Massstab des Übersichtsplans der Fehlerfigur gezeichnet sind, ermitteln. Sie werden mit den aus der Fehlerfigur ersichtlichen Vorzeichen den „verbesserten“ Richtungs- (oder Dreiecks)winkeln zugeschlagen, um deren „ausgeglichene“ Werte

Fig. 279.



zu erhalten. Aus letzteren, in Verbindung mit den als fehlerfrei durchweg beibehaltenen nAB ergeben sich rückwärts die „ausgeglichenen“ Dreieckswinkel, und in der „zweiten Berechnung“ die mehrfach auftretenden Dreiecksseiten nach dem Neupunkt und seine Koordinaten in allen Dreiecken übereinstimmend.

§ 66. Rückwärtseinschnitt mit graphischer Koordinatenausgleichung. Auswahl des wahrscheinlichsten Punktes P in der fehlerzeigenden Figur unter direkter Benützung der Bestimmungslinien.

Berechnet man die Koordinaten des Neupunktes zunächst aus drei günstig gelegenen Strahlen nach § 59, so können die dabei erhaltenen Werte wenigstens als Koordinaten χ und η eines in der Nähe des Neupunktes P gelegenen „vorläufigen Punktes“ \mathfrak{P} dienen, denen zur Erlangung der endgültigen Koordinatenwerte x und y nur die noch zu ermittelnden Zuschläge dx und dy zuzufügen sind, so dass:

$$(1) \quad x = \chi + dx \quad y = \eta + dy.$$

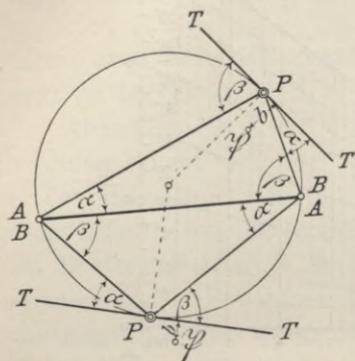
Zur Bestimmung der letzteren wollen wir die Lagebeziehungen zwischen dem vorläufigen Punkt \mathfrak{P} und den verschiedenen Kreisen ermitteln, welche, als geometrische Örter für P, über den Grundlinien als Sehnen die im Neupunkt gemessenen Winkel fassen.

Zeichnung
der Kreise
(geometrischen Örter
für P).

Wenn wir alsdann kurze Strecken dieser Kreise in der Nähe des Neupunktes zeichnen, so schneiden sie sich entweder in einem Punkt, eben dem Neupunkt, oder, was wahrscheinlicher ist, sie bilden eine fehlerzeigende Figur, innerhalb welcher der endgültige Punkt P auszuwählen ist.

Was die zu zeichnende Form dieser Kreisbogenstücke betrifft, so wird z. B. bei einem Halbmesser von nur $r = 500$ m die grösste Ausweichung (Pfeilhöhe) eines 1 m langen Bogenstücks von der Sehne betragen:

Fig. 280.



$$y \sim \frac{x^2}{2r} = \frac{250}{1000} \text{ mm} = 0,25 \text{ mm.}$$

Im Massstab der Fehlerfigur (1:10) wird also diese Pfeilhöhe höchstens betragen können 0,02 mm, d. h.: Man kann das 1 m lange Kreisbogenstück durch die Tangente ersetzen.

Für deren Richtungswinkel hat man aus Fig. 280 unter Benutzung der in § 58 allgemein eingeführten Dreieckswinkelbezeichnungen allgemein gültig:

$$(2) \quad nTT = nPA + \beta = nPB - \alpha.$$

Nun ist allerdings keiner der in (2) auftretenden Richtungs- oder Dreieckswinkel bekannt. Sie lassen sich aber genügend genau aus den Koordinaten der Festpunkte und denjenigen des vorläufigen Neupunktes \mathfrak{B} ableiten.

Wären die Näherungskordinaten auch um 1 m unsicher, so würde das bei 1000 m langer Dreiecksseite eine Verschwenkung der letzteren und damit der zu zeichnenden Tangente um höchstens $\frac{1}{1000}$ der Länge, also bei einer im Massstab 1:10 zu zeichnenden Tangente von 1 m Länge um $\frac{1}{10}$ mm bedingen, was ohne Bedeutung ist.

Wäre nun noch der senkrechte Abstand b der Tangente TT vom vorläufigen Punkt \mathfrak{B} bekannt, so könnte man letztere zeichnen.

Dazu liefert Fig. 281 a unter kleinen Vernachlässigungen (wenn z. B. $AP = A\mathfrak{B}$ und $BP = B\mathfrak{B}$ gesetzt wird):

$$(3) \quad \begin{aligned} b &= b_A + b_B = \frac{\delta_A}{e} s_A \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + \frac{\delta_B}{e} s_B \frac{\sin (\beta - \delta_A)}{\sin (\gamma + \delta_A)} \\ &\sim \frac{\delta_A}{e} s_A \frac{s_B}{AB} + \frac{\delta_B}{e} s_B \frac{s_A}{AB} \\ &\sim \frac{s_A \cdot s_B}{AB} \cdot \frac{(\delta_A + \delta_B)}{e} \sim \frac{s_A s_B}{AB} \cdot \frac{(\gamma) - \gamma}{e}. \end{aligned}$$

Ebenso liefert Fig. 281 b:

$$(3) \quad \begin{aligned} b &= b_B - b_A \sim \frac{\delta_B}{e} s_B \frac{\sin (\beta - \delta_A)}{\sin (\gamma)} - \frac{\delta_A}{e} s_A \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \\ &\sim \frac{\delta_B}{e} s_B \frac{s_A}{AB} - \frac{\delta_A}{e} s_A \frac{s_B}{AB} \\ &\sim \frac{s_A \cdot s_B}{AB} \cdot \frac{\delta_B - \delta_A}{e} \sim \frac{s_A s_B}{AB} \cdot \frac{\gamma - (\gamma)}{e} \\ &\sim - \frac{s_A s_B}{AB} \cdot \frac{(\gamma) - \gamma}{e}. \end{aligned}$$

Fig. 281 a.

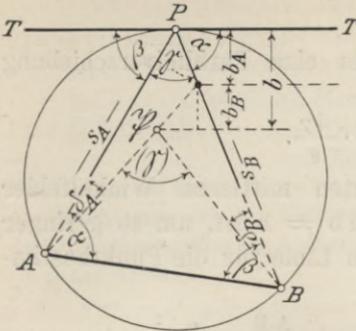
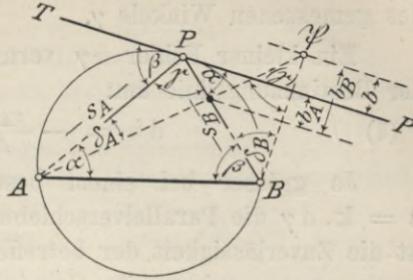


Fig. 281 b.



Da im Fall der Figur 281 a bzw. 281 b die zu zeichnende Tangente TT von \mathfrak{P} aus der Grundlinie AB ab-zu-zurück ist, so zeigen sich beide Gleichungen (3) identisch, also allgemein gültig. Über die Richtung, in welcher b vom vorläufigen Punkt \mathfrak{P} aus abzutragen ist, zeigt die Ableitung:

Der Abstand b liegt \perp zur Kreistangente und ist von \mathfrak{P} aus nach aussen (konvexe Seite) zu tragen, wenn $(\gamma) - \gamma$ positiv ist.
negativ ist.

Auswahl des wahrscheinlichsten Punktes P in der fehlerzeigenden Figur unter direkter Benützung der Bestimmungslinien.

Sind unter Benützung eines vorgezeichneten Achsenkreuzes mit Winkelteilung und unter Annahme des vorläufigen Punktes \mathfrak{P} als Ursprung mit den nach (2) berechneten Richtungswinkeln und den (etwa im Massstab 1:10 aufzutragenden) nach Gleichung (3) gefundenen Abständen b von \mathfrak{P} die bestimmenden Kreistangenten gezeichnet, so gilt es, in der durch sie gebildeten „fehlerzeigenden Figur“ den wahrscheinlichsten Punkt herauszufinden. Hiefür sind aber jetzt im Gegensatz zu § 65 keine Einzelpunkte mehr, sondern lediglich Bestimmungslinien bekannt. Zwar stünde nichts im Wege, die einzelnen Schnittpunkte der Bestimmungslinien aufzusuchen und wie in § 65 zu benützen, wir wollen aber aus den dort entwickelten Gründen versuchen, ohne sie auszukommen.

Auswahl von P in der Fehlerfigur.

Die einzelnen Bestimmungslinien haben nun nicht gleiche Bedeutung für die Lage des endgültigen Punktes P. Ihre Entfernung vom vorläufigen Punkt \mathfrak{P}

$$b = \frac{s_A \cdot s_B}{AB} \cdot \frac{(\gamma) - \gamma}{\rho}$$

d. h. ihre Lage in der Fehlerfigur hängt ab von der Genauigkeit des gemessenen Winkels γ .

Ein kleiner Fehler $d\gamma$ verursacht eine Parallelverschiebung der Bestimmungslinie um:

$$(4) \quad db = -\frac{s_A \cdot s_B}{AB} \cdot \frac{d\gamma}{\rho}.$$

Je grösser bei einem bestimmten mittleren Winkelfehler $\mu = k \cdot d\gamma$ die Parallelverschiebung $db = h$ ist, um so geringer ist die Zuverlässigkeit der betreffenden Linie für die Punktbestimmung, um so geringer ihr Gewicht.

Wir können daher das letztere zu $\left(\frac{AB}{s_A \cdot s_B} \cdot \frac{\rho}{\mu}\right)^2$, oder unter Veränderung der Gewichtseinheit festsetzen zu:

$$(5) \quad P_{\text{des Bestimmungskreises}} = \left(\frac{AB}{s_A \cdot s_B}\right)^2.$$

Das Gewicht einer Bestimmungslinie wird also um so grösser, je kleiner $s_A \cdot s_B$ wird, d. h. je näher der Neupunkt bei einem der Festpunkte liegt. Dies stimmt mit dem Erfund (1) des § 59 überein.

Am raschesten ergäbe sich nun der vermittelnde, endgültige Punkt P in der Fehlerfigur durch Auswahl nach Gutdünken, wobei die Verschiedenwertigkeit der Bestimmungslinien etwa dadurch berücksichtigt werden könnte, dass man ihn in das von den höchstgewichtigen Bestimmungslinien gebildete Dreieck legen würde.

Dieses Verfahren ist bei kleiner Fehlerfigur, d. h. bei guter Übereinstimmung der Messungsergebnisse in der Tat genügend. Bei grösserer Fehlerfigur würde man damit aber zu ebensoviele Punkten P kommen, als Personen sich bei der Auswahl etwa beteiligen! Hier muss ein schärferes Verfahren Platz greifen (ohne dass dieses übrigens, wie selbstverständlich, vermöchte, aus schlechten Beobachtungen eine gute Punktbestimmung zu schaffen).

Wie auch immer der endgültige Punkt P in der Fehlerfigur gewählt werden möge: sobald er von irgendeiner der Bestimmungslinien einen Abstand h zeigt, so wird dadurch der für diese Linie massgebende gemessene Winkel γ verändert (vielleicht verbessert) (s. Gleichung 4) um:

$$(4a) \quad v_{\text{analyt.}} = h \cdot \frac{AB}{s_A \cdot s_B}.$$

Zur weiteren Behandlung führen wir jetzt den Begriff des „Trägheitsmoments“ aus der Statik ein.

Unter ^{polarem} ~~axialem~~ Trägheitsmoment eines Systems von Massenpunkten verstehen wir eine Summe von Produkten, je bestehend aus dem Gewicht p jedes Massenpunktes mal dem Quadrat seiner Entfernung von ^{einem festen Punkt (dem Pol)} ~~einer festen Geraden (der Achse)~~.

Es gilt dann der Satz:

Für den Schwerpunkt P als Pol, oder eine durch den Schwerpunkt gehende Gerade als Achse wird das Trägheitsmoment eines Systems von Massenpunkten zum Minimum.

Beweis Seien die Massenpunkte bezeichnet mit: $S_1 S_2 \dots S_n$
 (für das polare Trägheitsmoment), ihre Gewichte " : $P_1 P_2 \dots P_n$
 ihre Entfernungen vom Schwerpunkt P: $l_1 l_2 \dots l_n$

und ist A ein beliebiger weiterer Punkt in der Entfernung e vom Schwerpunkt P, so erhält man für die Entfernung A S jedes Massenpunktes von A eine Gleichung von der Form:

$$AS^2 = e^2 + l^2 - 2el \cos \varphi,$$

wenn φ die Richtungswinkel der Strahlen PS in bezug auf PA als x-Achse vorstellt, also

$$p \cdot AS^2 = p \cdot e^2 + pl^2 - 2p \cdot el \cos \varphi.$$

Durch Addition sämtlicher Gleichungen kommt:

$$[p \cdot AS^2] = e^2 [p] + [pl^2] - 2e [pl \cos \varphi].$$

Nun stellt $l \cos \varphi$ in jedem einzelnen Fall die Abszisse, d. h. den Abstand des betreffenden Massenpunktes S von der Ordinatenachse in bezug auf P als Ursprung und PA als Abszissenachse vor. Also ist $[p \cdot l \cos \varphi]$ die Summe der je mit dem Punktgewicht multiplizierten Punktabstände und nach der in § 65 bewiesenen Schwerpunkteigenschaft gleich Null. Hieraus folgt

$$[p \cdot AS^2] = e^2 [p] + [p \cdot l^2]$$

und, da alle drei Summanden quadratisch, also positiv sind:

$$[p \cdot AS^2] > [p \cdot l^2],$$

solange nicht $e = 0$, d. h. A mit P zusammenfällt. Das polare Trägheitsmoment mit dem Schwerpunkt als Pol ist also ein Minimum.

Zum Beweis, dass für die Schwerachse y auch das axiale Trägheitsmoment zum Minimum wird, setzen wir dieses = T, das Trägheitsmoment in bezug auf eine beliebige Parallele η im Abstand e' von der Schwerachse aber = T'.

Die Abstände der Massenpunkte von der Schwerachse sind dann $x_1 \dots x_n$,
 " " " " " " Parallelen sind $(x_1 \pm e') \dots (x_n \pm e')$,
 das Trägheitsmoment in bezug auf die Parallele η also

$$T' = [p(x \pm e')^2] = [p(x^2 \pm 2e'x + e'^2)] = [px^2] \pm 2e'[px] + e'^2[p].$$

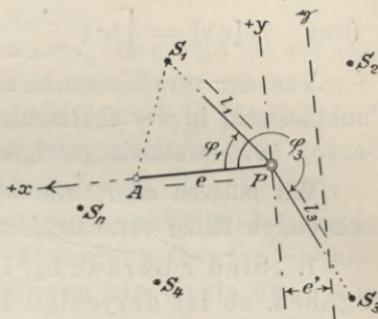
Da aber wegen der oben benützten Schwerpunkteigenschaft $[px] = 0$, und die übrigen Summanden rechts quadratisch, also positiv sind, so wird auch hier

$$T' = [px^2] + e'^2[p] > [px^2] > T,$$

solange nicht $e' = 0$, d. h. die Parallele mit der Schwerachse zusammenfällt.

Bezeichnen wir also die Entfernungen der Massenpunkte S deren Lage für unsere Zwecke durch die graphisch dargestellten Beobachtungsergebnisse bestimmt sein möge, von ihrem Schwerpunkt P, oder von einer beliebigen, durch ihn gehenden Achse (d. h. die Verbesserung an den Beobachtungsergebnissen), mit v, so hat

Fig. 282.



dieser **Schwerpunkt** zu (1a) von § 65 noch die weitere Eigenschaft, dass (6) $[p v v] = \text{Min.}$ als Grundprinzip der Methode oder für $p_1 = p_2 = \dots p_n$: $[v v] = \text{Min.}$ der kleinsten Quadrate.

Setzen wir die durch Annahme eines nicht auf den Bestimmungskreisen liegenden Punktes P an den zugehörigen gemessenen Winkeln γ verursachten Änderungen v aus Gleichung (4a) in (6) ein, so finden wir, dass die Grundbedingung der Methode der kleinsten Quadrate für gleiche Genauigkeit der im Neupunkt gemessenen Winkel γ verlangt:

$$(6a) \quad [v v] = \left[h^2 \left(\frac{A B}{s_A \cdot s_B} \right)^2 \right] = [p h h] = \text{Min.}$$

Von den verschiedenen, auf (6) sich stützenden Verfahren der Punktauswahl in der fehlerzeigenden Figur benutzen wir das von Bertot 1876 erstmals gezeigte.

Wir müssen aber, ehe wir auf die Lösung selbst eingehen, noch einige Sätze vorausschicken, nämlich:

1. „Sind r Gerade $L_A, L_B \dots L_R$ vom Gewicht $p_A, p_B \dots p_R$ gegeben, so ist derjenige Punkt P, für welchen die Summe der Quadrate seiner Abstände h je multipliziert mit dem Strahlengewicht p ein Minimum ist, zugleich der Schwerpunkt des aus seinen eigenen Lotfußpunkten F gebildeten Systems von Massenpunkten, wenn jedem von ihnen das Gewicht des Strahles beigelegt wird.“

Beweis (indirekt). Hätten die Fußpunkte F einen vom Minimumpunkt P ($[p \cdot P F^2] = \text{Min.}$) um die Strecke e entfernten Schwerpunkt A, so müsste

nach dem soeben abgeleiteten Satz auch sein: $[p \cdot A F^2] = \text{Min.}$

Nun ist für jeden Fußpunkt gültig:

$$P F^2 \equiv h^2 = e^2 + A F^2 - 2e \cdot A F \cos \varphi,$$

wobei φ den Richtungswinkel der Strecken A F in bezug auf A P als x-Achse vorstellt, somit

$$p \cdot h^2 = p \cdot e^2 + p \cdot A F^2 - 2p \cdot e A F \cdot \cos \varphi$$

und

$$[p \cdot h^2] = e^2 [p] + [p \cdot A F^2] - 2e [p \cdot A F \cdot \cos \varphi].$$

Da aber nach der Voraussetzung A der Schwerpunkt des Punktsystems F sein soll, so muss sein:

$$[p \cdot A F \cdot \cos \varphi] = 0$$

als Summe der je mit den zugehörigen Gewichten multiplizierten Punktabstände von der durch A gehenden Schwerachse y.

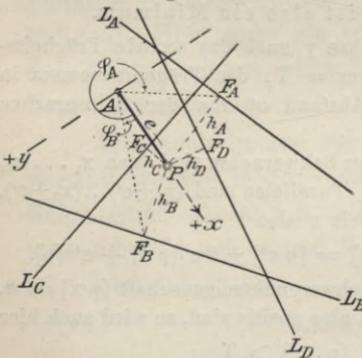
Es müsste also sein:

$$[p \cdot h^2] = e^2 [p] + [p \cdot A F^2]$$

oder

$$[p \cdot h^2] > [p \cdot A F^2],$$

Fig. 283.



der Projektionslote mit ihm. Dagegen können wir einen beliebigen, den gesuchten Kreis M schneidenden zweiten Kreis \mathfrak{M} durch A mit dem beliebigen Halbmesser r zeichnen, der dem ersten (wie alle Kreise unter einander) jedenfalls ähnlich ist. Erklären wir, was bei sich schneidenden Kreisen zulässig ist, den Schnittpunkt A als inneren Ähnlichkeitspunkt beider, so schneidet jede durch A gehende Gerade die letzteren nach einem homologen Punktpaar, folglich sind die Schnittpunkte Ω des Kreises \mathfrak{M} mit den Projektionsloten homolog den Schnittpunkten Q der letzteren mit dem gesuchten Kreis M . Dann ist aber auch ihr Schwerpunkt \mathfrak{S} homolog dem Schwerpunkt S der Q und \mathfrak{F} . Die Kreismittelpunkte \mathfrak{M} und M sind einander selbstverständlich homolog, während der auf dem Kreise \mathfrak{M} liegende, zu A auf Kreis M homologe Punkt \mathfrak{A} der Schnittpunkt der Tangente in A an Kreis M mit dem Kreis \mathfrak{M} ist.

Bestimmen wir demnach in der fehlerzeigenden Figur nach Gleichung 1 des § 65 jetzt den Schwerpunkt \mathfrak{S} der Ω

$$x_{\mathfrak{S}} = \frac{[p \cdot x_{\Omega}]}{[p]}, \quad y_{\mathfrak{S}} = \frac{[p \cdot y_{\Omega}]}{[p]}$$

und den Schwerpunkt S der (Q und) \mathfrak{F}

$$x_S = \frac{[p \cdot x_{\mathfrak{F}}]}{[p]}, \quad y_S = \frac{[p \cdot y_{\mathfrak{F}}]}{[p]},$$

so haben wir in ihnen ein Paar homologer Punkte beider Punktsysteme gefunden. Auch ohne den Schnittpunkt H des Ähnlichkeitsstrahls AS mit dem Kreis M zu kennen, finden wir ferner seinen homologen Punkt \mathfrak{H} auf dem Kreis \mathfrak{M} als Schnitt dieses Ähnlichkeitsstrahls mit ihm. Da die Verbindungslinien homologer Punkte in ähnlichen Figuren homolog sind und andere homologe Linien in homologen Punkten schneiden, so ist die Gerade HS homolog der Geraden $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$ und der dadurch zu findende Kreispunkt \mathfrak{A} homolog A . Dann ist aber $A\mathfrak{A}$ Tangente in A an den gesuchten Kreis M . Des letzteren Durchmesser AP steht somit $\perp \mathfrak{A}A$ und geht durch den Gegenpunkt \mathfrak{B} von \mathfrak{A} im Kreis \mathfrak{M} . Für die Strecke $AP = 2r$ folgt aus der Ähnlichkeit der Kreise M und \mathfrak{M} die Proportion:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (AP \equiv 2r) : 2r = AS : \mathfrak{A}\mathfrak{S}, \quad \text{d. h.} \\ AP \equiv 2r = \frac{AS}{\mathfrak{A}\mathfrak{S}} \cdot 2r. \end{array} \right.$$

Ist mittels des berechneten Masses AP der endgültige Punkt P in die fehlerzeigende Figur auf der Geraden $A\mathfrak{B}$ eingetragen, so bilden seine der graphischen Darstellung zu entnehmenden Koordinaten die gesuchten Zuschläge dx und dy , womit man mittels Gleichung (1) die gesuchten Koordinaten x_P und y_P gewinnt.

Zusammenfassung der Punktauswahl.

Also Lösung: Nach Aufzeichnung der Fehlerfigur aus b, und n T T folgt die Zeichnung eines beliebigen Kreises \mathfrak{M} und Annahme eines beliebigen Punktes A auf seinem Umfang.

Zum Zweck bequemer Berechnung von AP wählen wir als Halbmesser dieses beliebigen Kreises $r = 50$ cm.

Die Kreisschnittpunkte \mathfrak{Q} ergeben sich um so schärfer, je mehr der Schnittwinkel zwischen Kreis und Lot sich einem Rechten nähert. Um dies zu erreichen, wählen wir den Punkt A auf dem gezeichneten Kreis so, dass die von ihm ausgehenden Lote nach den Bestimmungsstrahlen möglichst durch \mathfrak{M} gehen, also etwa im Schnittpunkt eines von den übrigen Strahlenrichtungen besonders stark abweichenden Bestimmungsstrahls mit dem Kreis.

Nun: Bestimmung der Schwerpunkte S (der \mathfrak{F}) und \mathfrak{S} (der \mathfrak{Q}). Zeichnung des Linienzuges $AS\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}\mathfrak{S}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ und zur Probe $A\mathfrak{B} \perp A\mathfrak{M}$. Abtragen der Strecke $AP = \frac{AS}{\mathfrak{M}\mathfrak{S}} \cdot 2r$ im gewählten Massstab, Abgreifen von dx und dy .

Will man sich über die bei der Winkelbeobachtung erreichte Genauigkeit Aufschluss verschaffen, so entnimmt man die Abstände h des gefundenen Punktes P von den Bestimmungslinien aus der fehlerzeigenden Figur, berechnet aus ihnen nach Gleichung 4a die zugehörigen Winkelverbesserungen

Genauigkeitsuntersuchung.

$$(8) \quad \begin{cases} v_{\text{analyt.}} = h \cdot \frac{AB}{s_A \cdot s_B} = h \cdot \sqrt{p} \text{ oder} \\ v'' = h q'' \sqrt{p} \end{cases}$$

und erhält schliesslich unter Beachtung, dass zwei Winkel nötig, also $n_r - 2$ überschüssig sind:

$$(9) \quad \frac{\text{den mittleren Winkelfehler}}{m''_\gamma} = \pm q'' \sqrt{\frac{[vv]}{n_r - 2}} = \pm q'' \sqrt{\frac{[p h h]}{n_r - 2}}$$

Beispiel.

Gegeben die Koordinaten von		x	y
Rotenberg (R)	+	29188,02	+ 16014,70
Gablenberg (G)	+	28644,80	+ 11368,34
Berg (B)	+	30796,55	+ 11731,96
Cannstatt (C)	+	31781,93	+ 12010,25.

Gemessen im Neupunkt 1 die Winkel:

- R — P — G = $91^\circ 33' 12'' = \gamma_1$
- R — P — B = $154^\circ 13' 06'' = \gamma_2$
- G — P — B = $62^\circ 40' 00'' = \gamma_3$
- G — P — C = $131^\circ 04' 30'' = \gamma_4$
- C — P — R = $137^\circ 22' 10'' = \gamma_5$.

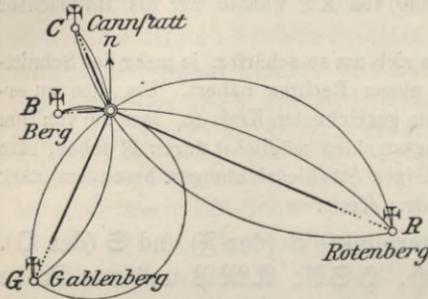
Gesucht die Koordinaten von Neupunkt P (vergl. Fig. 285a).

Lösung. Die vorläufige Berechnung aus den Festpunkten G, B und C mit Hilfe der Winkel γ_3 und $(\gamma_4 - \gamma_3)$ nach § 59 liefert für einen dem Neupunkt P benachbarten Punkt \mathfrak{P} die Koordinaten:

$$\xi_1 = + 30813,8 \quad \eta_1 = + 12421,6.$$

Daraus ergeben sich nach Gleichung (2) des § 56 die genäherten Richtungswinkel (φ) und Längen (s) der Neustrahlen:

Fig. 285a.



$$(\varphi_R) \equiv (n - P - R) = 114^\circ 20' 44''$$

und $\sim (s_R) \sim 3940$ m

$$(\varphi_G) \equiv (n - P - G) = 205^\circ 54' 04''$$

$\sim (s_G) \sim 2410$ m

$$(\varphi_B) \equiv (n - P - B) = 268^\circ 34' 02''$$

$\sim (s_B) \sim 690$ m

$$(\varphi_C) \equiv (n - P - C) = 336^\circ 58' 47''$$

$\sim (s_C) \sim 1050$ m,

sowie die zur Bildung von n T T nach Gleichung (2) nur angenähert nötigen Werte der Richtungswinkel der Grundlinien:

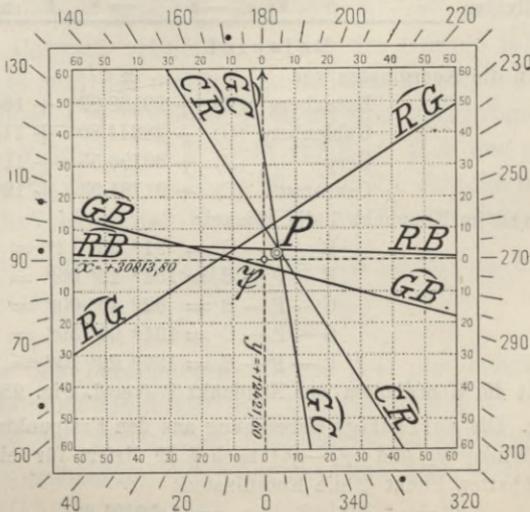
$n - R - G \sim 263^\circ 20'$	$R G \sim 4680$ m
$n - R - B \sim 290^\circ 35'$	$R B \sim 4570$ m
$n - G - B \sim 9^\circ 35'$	$G B \sim 2180$ m
$n - G - C \sim 11^\circ 34'$	$G C \sim 3200$ m
$n - C - R \sim 122^\circ 56'$	$C R \sim 4770$ m.

Für die Richtungswinkel der zu zeichnenden Tangenten erhält man daraus nach Gleichung (2)

$$n T T = n P A + \beta = n P B - \alpha$$

für Bogen RG	$\sim 114^\circ 20' + (205^\circ 54' - 263^\circ 20') \sim 56^\circ 54'$
„ RB	$\sim 114^\circ 20' + (268^\circ 34' - 290^\circ 35') \sim 92^\circ 19'$
„ GB	$\sim 205^\circ 54' + (268^\circ 34' - 9^\circ 35') \sim 104^\circ 53'$
„ GC	$\sim 205^\circ 54' + (336^\circ 59' - 11^\circ 34') \sim 171^\circ 19'$
„ CR	$\sim 336^\circ 59' + (114^\circ 21' - 122^\circ 56') \sim 328^\circ 24'$

Fig. 285b.



Der Abstand b der den Kreisbogen ersetzenden Tangente TT vom vorläufigen Punkt \mathfrak{P} und ihr Gewicht p berechnet sich mittels der Gleichungen

$$(3) - \therefore \quad b = \frac{s_a s_b}{AB} \cdot \frac{(\gamma) - \gamma}{\rho} \quad \text{und} \quad (5) \quad p = \left(\frac{AB}{s_a s_b} \right)^2$$

für den Bogen RG aus

$$(\gamma_1) - \gamma_1 = (205^\circ 54' 04'' - 114^\circ 20' 44'') - 91^\circ 33' 12'' = + 8'' \quad \text{zu} \quad + 0,079 \quad 0,2$$

für den Bogen RB aus

$$(\gamma_2) - \gamma_2 = (268^\circ 34' 02'' - 114^\circ 20' 44'') - 154^\circ 13' 06'' = + 12'' \quad \text{„} \quad + 0,035 \quad 2,8$$

für den Bogen GB aus

$$(\gamma_3) - \gamma_3 = (268^\circ 34' 02'' - 205^\circ 54' 04'') - 62^\circ 40' 00'' = - 2'' \quad \text{„} \quad - 0,007 \quad 1,7$$

für den Bogen GC aus

$$(\gamma_4) - \gamma_4 = (336^\circ 58' 47'' - 205^\circ 54' 04'') - 131^\circ 04' 30'' = + 13'' \quad \text{„} \quad + 0,050 \quad 1,6$$

für den Bogen CR aus

$$(\gamma_5) - \gamma_5 = (114^\circ 20' 44'' - 336^\circ 58' 47'') - 137^\circ 22' 10'' = - 13'' \quad \text{„} \quad - 0,055 \quad 1,3.$$

Die fehlerzeigende Figur (s. Fig. 285 b) ist klein. Es ist daher Aussicht vorhanden, den Minimumpunkt P durch Schätzung richtig zu finden, in welchem Fall mit Durchführung der Probe nach Satz (1) die Aufgabe erledigt wäre.

Wir wählen $dx = + 0,02$, $dy = + 0,04$, und vervollständigen diese Wahl durch:

Bestimmung des Schwerpunkts der Lotfusspunkte F von P zur Probe für die richtige Punktauswahl:

Bezeichnung des Kreisbogens	x_F cm	y_F cm	p	$p \cdot x_F$	$p \cdot y_F$	h cm	$v'' = h \rho'' \sqrt{p^1}$	$v^2 = p h h$
RG	+ 9,1	- 0,5	0,2	+ 1,8	- 0,1	+ 8,4	+ 8	64
RB	+ 3,2	+ 4,2	2,8	+ 9,0	+ 11,8	+ 1,4	+ 5	25
GB	- 2,6	+ 2,8	1,7	- 4,4	+ 4,8	- 4,5	- 12	144
GC	+ 2,1	+ 4,9	1,6	+ 3,4	+ 7,8	+ 0,6	+ 2	4
CR	+ 2,5	+ 5,2	1,3	+ 3,2	+ 6,8	- 1,2	- 3	9
			7,6	$\frac{[p \cdot x_F]}{[p]}$ = + $\frac{13,0}{7,6}$ = + 1,7 cm	$\frac{[p \cdot y_F]}{[p]}$ = + $\frac{31,1}{7,6}$ = + 4,1 cm			246

Der Schwerpunkt S der Lotfusspunkte stimmt mit dem gewählten Punkt P genügend genau überein. Die Punktauswahl war also richtig und die endgültigen Koordinaten des Neupunkts sind:

$$x = + 30813,80 + 0,02 = + 30813,82;$$

$$y = + 12421,60 + 0,04 = + 12421,64.$$

Gleichzeitig mit den Koordinaten der Fusspunkte F entnehmen wir der Figur ihre Abstände h vom endgültigen Punkt P . Daraus berechneten wir nach Gleichung (8) die Verbesserungen v , welche den gemessenen Winkeln γ zuzuschlagen sind, um deren endgültige Werte zu finden. Die Vergleichung der Werte (γ gemessen + abgeb. v)

¹⁾ h und $(\sqrt{p} = \frac{1}{s})$ in derselben Masseinheit eingeführt!

mit den aus den endgültigen Koordinaten des Neupunkts errechneten Richtungswinkelunterschieden γ liefert schliesslich eine durchgreifende Probe für die Rechnung und Zeichnung:

$$\begin{aligned} \gamma_1 + v_1 &= 91^\circ 33' 12'' + 8'' = 91^\circ 33' 20'' \text{ statt } 91^\circ 33' 21'' \\ \gamma_2 + v_2 &= 154^\circ 13' 06'' + 5'' = 154^\circ 13' 11'' \quad \text{„} \quad 154^\circ 13' 11'' \\ \gamma_3 + v_3 &= 62^\circ 40' 00'' - 12'' = 62^\circ 39' 48'' \quad \text{„} \quad 62^\circ 39' 50''^1) \\ \gamma_4 + v_4 &= 131^\circ 04' 30'' + 2'' = 131^\circ 04' 32'' \quad \text{„} \quad 131^\circ 04' 32'' \\ \gamma_5 + v_5 &= 137^\circ 22' 10'' - 3'' = 137^\circ 22' 07'' \quad \text{„} \quad 137^\circ 22' 07''. \end{aligned}$$

Als mittlerer Fehler eines gemessenen Winkels γ ergibt sich nach Gleichung (9)

$$m_\gamma = \pm \sqrt{\frac{246}{3}} = \pm 9''.$$

§ 67. Rückwärtseinschnitt mit rechnerischer Ausgleichung der Beobachtungswidersprüche.

Die der graphischen gegenüber der rein rechnerischen Behandlung von Ausgleichungsaufgaben im allgemeinen eigene erhöhte Übersichtlichkeit geht beim Rückwärtseinschnitt teilweise verloren, sowohl weil die zu zeichnenden Bestimmungslinien Kreisbögen sind, die auf dem Gelände keine Bedeutung haben, als auch weil ihre Lage nur durch Zuhilfenahme eines Übersichtsplans erschlossen werden kann.

Auch ist die Berechnung der Abstände b , der Richtungswinkel nPT und der Gewichte p schwerfällig. Trotz des Vorteils, etwaige grobe Fehler durch abnorme Lage des zu zeichnenden Kreisbogens in der Fehlerfigur sofort anzuzeigen, ehe ein grösserer Zeitaufwand nutzlos gemacht wurde, wird man daher gerade beim Rückwärtseinschnitt von der graphischen Behandlung meist absehen und rein rechnerischer Lösung den Vorzug geben.

Zur Bestimmung der den Näherungskordinaten x und y für den Neupunkt beizufügenden Zuschläge dx und dy (s. Gleichung 1 des § 66) wollen wir vorbereitend die Beziehung feststellen, welche zwischen kleinen Koordinatenänderungen dx und dy des Endpunktes B einer Strecke AB und der dadurch hervorgerufenen Änderung $d\varphi$ ihres Richtungs- (Neigungs-)winkels $\varphi = nAB$ besteht.

Für den Richtungswinkel nAB einer durch ihre Endpunktskordinaten festgelegten Strecke AB haben wir in § 56 (Gleichung 2) erhalten:

¹⁾ Kleine Abweichungen rühren von der Abrundung der gewählten Neupunktskordinaten auf ganze cm her. (Vergl. auch rechnerische Behandlung S. 505 u. 506.)

Beziehung zwischen kleinen Änderungen der Endpunktskordinaten und des Richtungswinkels einer Strecke.

$$\operatorname{tg} n A B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{also } n A B = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Daraus folgt durch Differentiation, wenn man $n A B = s$ und $n A B = \varphi$ setzt:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} d(n A B) \equiv d\varphi_{\text{analyt.}} = \frac{\Delta x}{s^2} dy - \frac{\Delta y}{s^2} dx, \text{ oder} \\ d\varphi'' = \frac{\Delta x}{s^2} \varphi'' dy - \frac{\Delta y}{s^2} \varphi'' dx \\ = \frac{\cos \varphi}{s} \varphi'' dy - \frac{\sin \varphi}{s} \varphi'' dx \\ = \frac{\cos^2 \varphi}{\Delta x} \varphi'' dy - \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta y} \varphi'' dx. \end{array} \right.$$

Setzen wir

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta x}{s^2} \varphi'' = \frac{\cos \varphi}{s} \varphi'' = \frac{\cos^2 \varphi}{\Delta x} \varphi'' = b \\ -\frac{\Delta y}{s^2} \varphi'' = -\frac{\sin \varphi}{s} \varphi'' = -\frac{\sin^2 \varphi}{\Delta y} \varphi'' = a, \end{array} \right.$$

wobei also b das Vorzeichen von $\cos n A B$ bzw. Δx , a das entgegengesetzte Vorzeichen von $\sin n A B$ bzw. Δy zukommt, so erhalten wir die Veränderung $d\varphi''$, welche der Richtungswinkel $n A B = \varphi$ dadurch erleidet, dass man den Endpunkt B der Strecke AB um die kleinen Beträge dx und dy parallel den Koordinatenachsen verschiebt zu

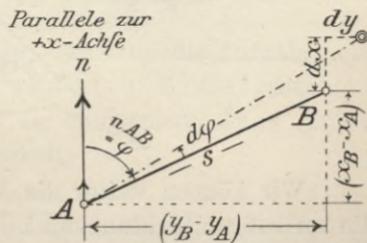
$$(3a) \quad \underline{d\varphi'' = a dx + b dy.}$$

Die Koeffizienten a und b heisst man „Richtungskoeffizienten“.

Verschiebt man statt des Endpunktes B den Anfangspunkt A der Strecke um dieselben Beträge, so ändert sich (wie auch geometrisch klar) der Richtungswinkel φ um denselben Betrag $d\varphi$, aber in entgegengesetztem Sinn. Es wird:

$$(3b) \quad \begin{array}{l} d\varphi'' = -a dx - b dy, \text{ oder} \\ d\varphi'' = a dx + b dy, \\ \text{wenn } a = -a \\ b = -b \text{ ist.} \end{array}$$

Fig. 286.



Wir können nun zur eigentlichen Aufgabe der Punkteinschaltung übergehen. Wären die gesuchten Koordinaten des Neupunktes P Ausgleichung der Beobachtungswidersprüche.

schon gefunden, so könnten wir die endgültigen Richtungswinkel $[n P A]^1$, $[n P B]$... der Verbindungslinien vom Neupunkt nach den benützten Festpunkten und aus ihnen durch Subtraktion die endgültigen Werte

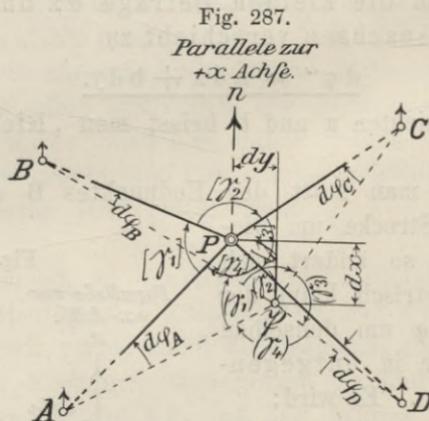
$$(a) \left\{ \begin{array}{l} [\gamma_1] = [A P B] = [n P B] - [n P A] \\ [\gamma_2] = [B P C] = [n P C] - [n P B] \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} (n_r \text{ Gleichungen bei } n_r \\ \text{gemessenen Winkeln}) \end{array}$$

der gemessenen Winkel ableiten. Dann könnten wir auch die den Messungsergebnissen $\gamma_1 = A P B$, $\gamma_2 = B P C$ usw. zum Zweck ihrer Ergänzung zu den wahrscheinlichsten Werten zuzufügenden Verbesserungszuschläge $v_1, v_2 \dots$ ermitteln:

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} v_1 = [\gamma_1] - \gamma_1 = [A P B] - \gamma_1 = [n P B] - [n P A] - \gamma_1 \\ v_2 = [\gamma_2] - \gamma_2 = [B P C] - \gamma_2 = [n P C] - [n P B] - \gamma_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

Soweit sind wir nun noch nicht. Immerhin können wir aus den Koordinaten des Näherungspunktes \mathfrak{P} für P die vorläufigen Richtungswinkel $(n P A)$, $(n P B) \dots$ (Scheitel in \mathfrak{P}), und aus ihnen durch Subtraktion Näherungswerte (γ_1) , $(\gamma_2) \dots$ für die beobachteten Winkel ableiten:

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} (\gamma_1) \equiv A \mathfrak{P} B \equiv (A P B) = (n P B) - (n P A) \\ (\gamma_2) \equiv B \mathfrak{P} C \equiv (B P C) = (n P C) - (n P B) \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$



Wir können weiter die Veränderungen $d\varphi_A, d\varphi_B \dots$, welche die vorläufigen Richtungswinkel $(n P A)$, $(n P B) \dots$ dadurch erleiden,

¹⁾ [] hat hier und im folgenden jeweils nicht die dem Zeichen bisher allein zugeschriebene Summenbedeutung, sondern auch noch die Aufgabe, endgültige Winkel- oder Richtungswerte als solche zu kennzeichnen! Ob die eine oder andere Bedeutung in Frage kommt, ergibt sich aus dem Sinne der Ableitung.

Durch deren Addition kommt

$$(i) [v v] = [A A] dx^2 + 2 [A B] dx \cdot dy + 2 [A 1] dx + [B B] dy^2 + 2 [B 1] dy + [1 1].$$

Diese Funktion von dx und dy wird zum Minimum für:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [v v]}{\partial x} = [A A] dx + [A B] dy + [A 1] = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [v v]}{\partial y} = [A B] dx + [B B] dy + [B 1] = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Normalgleichungen} \\ \text{zur Berechnung der} \\ \text{beiden Unbekannten} \\ dx \text{ und } dy. \end{array}$$

Die Gleichungen (4) liefern in Verbindung mit (g) eine wichtige Eigenschaft der nach der Bedingung $[v v] = \text{Min.}$ abgeleiteten Werte für die Unbekannten, analog der Grundgleichung $[v] = 0$ für direkte, gleichgenaue Beobachtungen.

Multipliziert man nämlich die Fehlergleichungen (g) der Reihe nach mit $A_1, A_2 \dots$ und addiert vertikal, so kommt:

$$(4a) \left\{ \begin{array}{l} [A v] = [A A] dx + [A B] dy + [A 1] = \underline{0} \\ \text{ebenso durch Multiplikation mit } B \\ [B v] = [A B] dx + [B B] dy + [B 1] = \underline{0} \end{array} \right\}$$

Um die Zahl der Unbekannten in Gleichungen (4) um eine zu reduzieren, wodurch sich der Wert der anderen ergäbe, könnte man irgendeine der bekannten algebraischen Methoden anwenden. In Rücksicht auf möglichst bequeme, schematische Durchführung der Rechnung und unter Berücksichtigung der symmetrischen Anordnung der Koeffizienten von x und y (in der einen Diagonalen, von links oben nach rechts unten, stehen nur Quadratsummen, in der anderen identische Produktensummen) hat jedoch der Schöpfer der Methode der kleinsten Quadrate, Gauss, im Jahre 1810 einen, vom sonst üblichen etwas abweichenden Rechnungsweg gewiesen, dem wir folgen wollen. Hienach wird grundsätzlich zuerst die links stehende Unbekannte eliminiert und zu diesem Zweck die mit $\left(\frac{2 \text{ Koeffiz. der I. Reihe}}{1 \text{ Koeffiz. der I. Reihe}} \right)$ multiplizierte erste Gleichung zur unveränderten zweiten Gleichung addiert. Dabei ergibt sich aus (4):

$$(k) ([B B] - \frac{[A B]}{[A A]} [A B]) dy + ([B 1] - \frac{[A B]}{[A A]} [A 1]) = 0, \text{ oder} \\ [B B \cdot 1]^{\nu} dy + [B 1 \cdot 1]^{\nu} = 0; \text{ woraus:}$$

$$(5) \quad dy = - \frac{[B 1] - \frac{[A B]}{[A A]} [A 1]}{[B B] - \frac{[A B]}{[A A]} [A B]} = - \frac{[B 1 \cdot 1]^{\nu}}{[B B \cdot 1]^{\nu}}.$$

¹⁾ Von Gauss eingeführte Symbole für die bei dem Koeffizienten von dy und dem Absolutglied auftretenden schwerfälligen Ausdrücke.

Um den Wert der links stehenden Unbekannten x zu berechnen, könnte man jetzt entweder den berechneten Wert der anderen (dy) in eine der Normalgleichungen einsetzen, oder statt der links stehenden jetzt die rechts stehende Unbekannte eliminieren. Damit würde aber der Schematismus in der Berechnung gestört, auf den man Wert zu legen hat, wenn es sich um häufig auftretende Rechenarbeiten handelt, deren mechanische Ausführung man untergeordneten Hilfskräften übertragen will. Der erstgenannte Weg der Einsetzung verhindert überdies die Berechnung des Gewichtes und mittleren Fehlers der zuletzt bestimmten Unbekannten, wie wir später sehen werden.

Man zieht es daher vor, die Normalgleichungen so umzustellen, dass die Diagonale der Quadratsummen dieselbe Richtung hat wie zuerst, aber die bisher links stehende Unbekannte x nun rechts erscheint, nämlich:

$$[\mathfrak{B} \mathfrak{B}] dy + [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] dx + [\mathfrak{B} 1] = 0$$

$$[\mathfrak{A} \mathfrak{B}] dy + [\mathfrak{A} \mathfrak{A}] dx + [\mathfrak{A} 1] = 0.$$

Jetzt ergibt sich der Wert von x genau auf demselben Wege, wie vorher y .

Über die Genauigkeit der Winkelbeobachtung und der berechneten Koordinatenzuschläge dx und dy , also der Koordinaten x und y selbst, erhält man Aufschluss durch Berechnung der nötigen Verbesserungen v , welche an den gemessenen Winkeln γ anzubringen sind, damit Übereinstimmung mit den Unterschieden der endgültigen Richtungswinkel je der beiden in Frage kommenden Schenkel vom Neupunkt nach den Festpunkten erzielt wird.

Genauigkeitsberechnung.

Diese einzelnen Winkelverbesserungen v lassen sich durch obige Vergleichung, wie auch durch Einsetzung der Koordinatenzuschläge dx und dy in die Fehlergleichungen (g) ermitteln. Da es sich zur Ermittlung des mittleren Winkelfehlers nach Gleichung (9) des § 66 übrigens nur um die Summe ihrer Quadrate handelt, so suchen wir diese einfacher als Nebenprodukt der Reduktion der Normalgleichungen zu erhalten.

Subtrahiert man zu diesem Zweck von Gleichung (i):

$$[v v] = [\mathfrak{A} \mathfrak{A}] dx^2 + 2 [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] dx \cdot dy + 2 [\mathfrak{A} 1] dx + [\mathfrak{B} \mathfrak{B}] dy^2 + 2 [\mathfrak{B} 1] dy + [1 1]$$

die quadrierte und mit $[\mathfrak{A} \mathfrak{A}]$ durchdividierte erste Normalgleichung (4)

$$0 = [\mathfrak{A} \mathfrak{A}] dx^2 + 2 [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] dx \cdot dy + 2 [\mathfrak{A} 1] dx + \frac{[\mathfrak{A} \mathfrak{B}]^2}{[\mathfrak{A} \mathfrak{A}]} dy^2 + 2 \frac{[\mathfrak{A} \mathfrak{B}] [\mathfrak{A} 1]}{[\mathfrak{A} \mathfrak{A}]} dy + \frac{[\mathfrak{A} 1]^2}{[\mathfrak{A} \mathfrak{A}]},$$

so erhält man unter Anwendung der in Gleichung (5) eingeführten Symbole

$$[v v] = [\mathfrak{B} \mathfrak{B} . 1] dy^2 + 2 [\mathfrak{B} 1 . 1] dy + [11 . 1].$$

Durch abermalige Subtraktion der quadrierten und mit $[\mathfrak{B} \mathfrak{B} . 1]$ durchdividierten Gleichung (k)

$$0 = [\mathfrak{B} \mathfrak{B} . 1] dy^2 + 2 [\mathfrak{B} 1 . 1] dy + \frac{[\mathfrak{B} 1 . 1]^2}{[\mathfrak{B} \mathfrak{B} . 1]}$$

kommt schliesslich

$$(6) \quad [v v] = [11 . 1] - \frac{[\mathfrak{B} 1 . 1]}{[\mathfrak{B} \mathfrak{B} . 1]} [\mathfrak{B} 1 . 1] \equiv [11 . 2]^1).$$

Den Wert des Ausdrucks $[11 . 2]^1$ erhält man anlässlich der zur Bestimmung der rechtsstehenden Unbekannten durchzuführenden Reduktion der Normalgleichungen (4), wenn man deren dabei allein in Mitleidenschaft gezogene Koeffizienten noch um eine weitere, (durch zur quadratischen Diagonale symmetrische Ergänzung gewonnene) Zeile $[\mathfrak{A} 1] [\mathfrak{B} 1] [11]$ fortsetzt, und auf die jetzt vorhandenen drei Zeilen (4') die Reduktionsmethode (k) anwendet. Die Koeffizientenglieder lauten jetzt:

$$(4') \quad \begin{cases} [\mathfrak{A} \mathfrak{A}] & [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] & [\mathfrak{A} 1] \\ [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] & [\mathfrak{B} \mathfrak{B}] & [\mathfrak{B} 1] \\ [\mathfrak{A} 1] & [\mathfrak{B} 1] & [11] \end{cases} \text{ oder, weil alle zur Diagonale} \\ \text{der quadratischen Glieder} \\ \text{symmetrischen Koeffizienten} \\ \text{identisch sind, ihr doppelter} \\ \text{Anschrieb also entbehrlich} \\ \text{ist, abgekürzt geschrieben:}$$

$$\begin{matrix} \frac{[\mathfrak{A} \mathfrak{A}]}{\cdot} & \frac{[\mathfrak{A} \mathfrak{B}]}{\cdot} & \frac{[\mathfrak{A} 1]}{\cdot} \\ \cdot & \frac{[\mathfrak{B} \mathfrak{B}]}{\cdot} & \frac{[\mathfrak{B} 1]}{\cdot} \\ \cdot & \cdot & \frac{[11]}{\cdot} \end{matrix}$$

Die für die zweite Zeile wie oben bei (k), für jeden Koeffizienten c_r der dritten Zeile aber analog: $(c_r - \frac{\mathfrak{B} \text{ Koeff.}}{1 \text{ Koeff.}} \text{ von Zeile I} \times r^{\text{ter}} \text{ Koeff. von Zeile I})$ mechanisch durchzuführende Rechnung liefert

$$(k') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{als Koeffizienten der} \\ \text{I. Reduktionsstufe} \end{array} \right. \frac{[\mathfrak{B} \mathfrak{B} . 1]}{\cdot} \frac{[\mathfrak{B} 1 . 1]}{\cdot} \text{ oder} \\ \left(\begin{array}{l} \text{erste Zeile in Über-} \\ \text{einstimmung mit (k)} \end{array} \right) \frac{[\mathfrak{B} 1 . 1]}{\cdot} \frac{[11 . 1]}{\cdot} \text{ abgekürzt} \\ \text{geschrieben:} \quad \frac{[\mathfrak{B} \mathfrak{B} . 1]}{\cdot} \frac{[\mathfrak{B} 1 . 1]}{\cdot} \\ \cdot \quad \frac{[11 . 1]}{\cdot}$$

Nochmalige Reduktion nach dem Verfahren, das zu (k) führte, liefert:

$$(6) \quad [11 . 1] - \frac{[\mathfrak{B} 1 . 1]}{[\mathfrak{B} \mathfrak{B} . 1]} \cdot [\mathfrak{B} 1 . 1] \equiv [11 . 2] = [v v].$$

Hat man $[v v]$ auf die eine, oder andere Weise berechnet, so erhält man den mittleren Winkelbeobachtungsfehler nach Gleichung (9) des § 66

$$m_v'' = \sqrt{\frac{[v v]}{n_r - 2}}.$$

Das Gewicht der jeweils errechneten Unbekannten ist schliesslich (analog dem bei der Wertsbestimmung einer durch n Beobach-

¹⁾ Von Gauss eingeführtes Symbol für den schwerfälligen Ausdruck links der zweiten Reduktionsstufe.

tungen 1 direkt gefundenen Grösse \mathfrak{B} gleich dem Nenner der Gleichung (5), also

$$P_{dy} \equiv P_y = [b b . 1]$$

(7) } und ihr mittlerer Fehler $M_{dy} \equiv M_y = \pm \sqrt{\frac{[11.1]}{(n_r - 2) [b b . 1]}}$
 (vergl. Weitbrecht, „Ausgleichsrechnung“, § 18).

Die Umstellung der vollständig oder abgekürzt geschriebenen Koeffizienten der Normalgleichungen erfolgt mechanisch, letzterenfalls wie in (4') durch einen Pfeil angedeutet, so dass (4') übergeht in:

Berechnung der zweiten Unbekannten.

$$(4'') \left\{ \begin{array}{ccc} [\mathfrak{B} \mathfrak{B}] & [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] & [\mathfrak{B} 1] \\ [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] & [\mathfrak{A} \mathfrak{A}] & [\mathfrak{A} 1] \\ [\mathfrak{B} 1] & [\mathfrak{A} 1] & [11] \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{oder} \\ \text{abgekürzt} \\ \text{geschrieben:} \end{array} \left\{ \begin{array}{ccc} [\underline{\mathfrak{B} \mathfrak{B}}] & [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] & [\mathfrak{B} 1] \\ \cdot & [\underline{\mathfrak{A} \mathfrak{A}}] & [\mathfrak{A} 1] \\ \cdot & \cdot & [\underline{11}]. \end{array} \right.$$

(4'') dient schliesslich, wie vorhin (4'), zur Berechnung der bisher links stehenden Unbekannten dx.

Berechnung der Richtungskoeffizienten a und b und der Koeffizienten der Normalgleichungen. Auswahl der Masseneinheit. Rechnungsproben.

Gleichzeitig mit der Berechnung der Richtungswinkel $(nPA) = (\varphi_A)$ Gewinnung der Richtungskoeffizienten.
 $(nPB) = (\varphi_B)$
 \vdots

der Verbindungsstrecken vom vorläufigen Neupunkt \mathfrak{B} nach den zu seiner endgültigen Bestimmung zu benützenden Festpunkten oder umgekehrt werden die Strecken selbst

$$s = \frac{\Delta y}{\sin \varphi} = \frac{\Delta x}{\cos \varphi}$$

und die Richtungskoeffizienten

$$a = \frac{\sin \varphi}{s} \varrho = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta x} \varrho = \frac{1}{2} \sin 2 \varphi \frac{\varrho}{\Delta x}$$

$$b = -\frac{\cos \varphi}{s} \varrho = -\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta y} \varrho = -\frac{1}{2} \sin 2 \varphi \frac{\varrho}{\Delta y}$$

(φ für die Strahlenrichtung vom Neupunkt zum Festpunkt) gewonnen.

(Merkregel: a hat gleiches Vorzeichen mit $\sin \varphi$
 b hat entgegengesetztes Vorzeichen mit $\cos \varphi$.)

Das häufig auftretende Bedürfnis ihrer Berechnung hat eine Reihe von Hilfsmitteln dafür erzeugt:

Für logarithmische Berechnung genügen 3-, oder 4 stellige Tafeln. Zahlentafeln für den Richtungswinkel φ als Argument sind u. a. entworfen und in den Buchhandel gebracht worden von Jordan und O. Seiffert. Die der Jordanschen Tafel entnommenen Funktionswerte $\frac{\varrho}{10000} \sin \varphi$ und $\frac{\varrho}{10000} \cos \varphi$ geben, mittels Rechenschiebers

durch s_{km} dividiert, 0,1 a bzw. 0,1 b. Die Seiffertsche Tafel gibt Werte für $\log \varrho \cdot \sin \varphi \cos \varphi$, welche, um $\log \Delta x$ bzw. Δy vermindert, $\log a$ bzw. $\log b$ liefern. (Zeitschr. f. Verm. 1893 S. 221). Aus Zahlentafeln mit den zwei Argumenten 2φ und Δx (bzw. Δy) lassen sich direkt Werte für a und b entnehmen.

Graphische Tafeln für den gegenwärtigen Zweck haben herausgegeben: Seyfert (s. Zeitschr. f. Verm. 1893 S. 219 ff.), Franke (Ausgleichung, München 1884, S. 133/135) und Dr. Eggert (Berlin, bei Parey).

Rechenschieber, nach Angaben von Voigt mit entsprechender Einrichtung auf der Rückseite des Schiebers ausgestattet, werden von Dennert & Pape ausgeführt (Zeitschr. f. Verm. 1894 S. 183/188).

Die Koeffizienten der Normalgleichungen sind teils Gewinnung der Koeffizienten der Normalgleichungen. Q adratsummen [a a], [b b] . . . [l l], teils Produktensummen [a b], [a c] . . . [b c] Für die Bildung der einzelnen Quadrate und Produkte, wie für die Reduktion der Normalgleichungen, verwendet man, soweit die Rechengenauigkeit von drei Stellen ausreicht, den gewöhnlichen logarithmischen Rechenstab, für grössere Genauigkeit Q adrat- $\left\{ (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab \text{ oder } (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab \right\}$ bzw. Produktentafeln, oder grössere Rechenschieber, bzw. Rechenwalzen, und, falls auch deren Stellenzahl nicht ausreicht, Logarithmentafeln bzw. Rechenmaschinen.

Auswahl der Mass-einheiten für die Un-bekanntes. Sind die einzelnen Koeffizienten und Absolutglieder a, b, . . . l sehr ungleich, so nötigt das Vorhandensein besonders kleiner Werte (< 1), wenn sie neben den grossen überhaupt noch zum Ausdruck kommen sollen, zum Mitschleppen vieler Stellen, zumal in den quadratischen Summen. Dadurch wird die praktische Rechnung erheblich erschwert. Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn es gelingt, den Koeffizienten und Absolutgliedern ungefähr gleiche Stellenzahl zu verschaffen. Hiefür haben wir allgemein zwei Wege. Bei dem einen führen wir statt der Unbekannten mit den abnorm kleinen oder grossen Koeffizienten in den Fehlergleichungen ihren 10-ten, 100-ten . . . Teil oder ihr 10-faches, 100-faches . . . als neue Unbekannte ein, wodurch die zugehörigen Koeffizienten auf den 10-fachen, 100-fachen . . . Betrag steigen bzw. auf den 10-ten, 100-ten Teil ermässigt werden. Bei Begehung des andern wählen wir die Masseinheiten für die Unbekannten und die Beobachtungsgrössen in Abweichung von den bisher eingeführten. (Längen nach Bedarf in m oder dm oder cm usw.,

Winkel in Minuten oder Sekunden oder in analytischem Mass, Gewichte in kg oder g usw., jedoch konsequent in einer und derselben Aufgabe immer gleich.)

Bei Triangulierungen niederer Ordnung benützen wir zweckmässigerweise beide Auskunftsmitel. Wir drücken zum mindesten bei Anwendung der Zentesimalteilung die sämtlichen Winkelgrössen in den Fehlergleichungen (z. B. das Absolutglied l) in Einheiten von $10''$ (Dekasekunden) und sämtliche Strecken (z. B. die Koordinatenzuschläge dx und dy) in Dezimetern aus. An Stelle von a und b in Gleichungen (d), (e) und (f) tritt dann $0,1 a$ und $0,1 b$ (s. oben, Jordansche Tafel).

Ein wichtiges Erfordernis für die stufenweise Ausführung längerer Rechnungen, von denen sich eine auf der anderen aufbaut, ist die Gewinnung von

Rechen-
proben.

Rechenproben.

Die blosse Wiederholung der Rechnung genügt hiefür nicht.

Eine durchgreifende Probe für die Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen, wie auch für deren Reduktion erhält man durch Einführung der Summe s der Zahlenwerte der Koeffizienten und Absolutglieder jeder Fehlergleichung (g)

$$(8) \quad \begin{cases} s_1 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 + l_1 \\ s_2 = \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 + l_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Multipliziert man nämlich die erste Zeile dieser Summengleichung (8) mit \mathfrak{A}_1 , die zweite mit \mathfrak{A}_2 usw. und addiert vertikal, so erhält man als Kontrollgleichung für die erste Zeile von (4'):

$$(9) \quad [\mathfrak{A} s] = [\mathfrak{A} \mathfrak{A}] + [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{A} l].$$

Führt man dieselbe Multiplikation mit

$$\begin{aligned} &\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \dots, \text{ dann mit} \\ &l_1, l_2 \dots, \text{ und schliesslich mit} \\ &s_1, s_2 \dots \end{aligned}$$

durch und addiert, so erhält man nacheinander

$$(9) \quad \begin{cases} [\mathfrak{B} s] = [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{B} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{B} l] & \text{als Probe für die richtige} \\ & \text{Bildung der 2. Zeile von (4')} \\ [l s] = [\mathfrak{A} l] + [l \mathfrak{B}] + [l l] & \text{als Probe für die richtige} \\ & \text{Bildung der 3. Zeile von (4')} \\ [s s] = [\mathfrak{A} s] + [s \mathfrak{B}] + [s l] & \text{als Summe sämtlicher Koeffizienten in} \\ & \text{(4') und durchgreifende Schlussprobe.} \end{cases}$$

Rechnet man also ausser den zur Gewinnung der Unbekannten jedenfalls erforderlichen Produktsummen

$$[A A], [A B], [A 1], [B B], [B 1], [1 1]$$

noch die Produktsummen $[A s]$ $[B s]$ $[1 s]$, so ist nach Gleichung (9) durch jede von ihnen eine Zeile der Normalgleichungskoeffizienten (4') summarisch geprüft. Sämtliche Koeffizienten einschliesslich der Kontrollproduktensummen $[A s]$ $[B s]$ $[1 s]$ werden durch $[s s]$ geprüft.

Will man daher auf die zeilenweise Kontrolle verzichten, so genügt nach (9 letzte Gleichung), als einzige summarisch durchgreifende Probe die Berechnung von $[s s]$ (s. schematische Darstellung unten, in welcher jede Zeile rechts und links des Vertikalstrichs und die beiden durch fetten Druck hervorgehobenen Flächen je gleiche Wertsommen beherbergen).

Koeffiz. der Normalgleichungen	Probe				Probe
$[A A]$ $[A B]$ $[A 1]$	$[A s]$		$[A A]$ $[A B]$ $[A 1]$		$[A s]$
$[A B]$ $[B B]$ $[B 1]$	$[B s]$	oder	$[B B]$ $[B 1]$		$[B s]$
\vdots		abgekürzt	\vdots		
$[A 1]$ $[B 1]$ $[1 1]$	$[1 s]$	geschrieben:*)	$[1 1]$		$[1 s]$
$[A s]$ $[B s]$ $[1 s]$	$[s s]$				$[s s]$

Bei der Reduktion der Normalgleichungen zum Zwecke der Gewinnung von dx und dy aus Gleichung (4) spielen diese Unbekannten nur die passive Rolle, dass in jeder neuen Reduktionsstufe eine von ihnen, nämlich die in der vorhergehenden Stufe links aufgeführte, verschwindet. Geändert werden durch die Reduktion nur die Koeffizienten $[A A]$, $[A B]$ usw. Man kann daher den Anschrieb der Unbekannten selbst füglich unterlassen. Dehnt man die (ganz mechanisch durchzuführende) Reduktionsarbeit auch auf die Summenglieder $[A s]$, $[B s]$. . . der Kontrollgleichungen (9) aus, so ändert sich dadurch an den zur Berechnung der Unbekannten dienenden Koeffizienten der verschiedenen Reduktionsstufen natürlich nicht das geringste.

Man erhält aber auch für sie Kontrollgleichungen, nämlich für die I. Reduktionsstufe [vergl. (k')]:

$$(10) \left\{ \begin{array}{l|l} [B B \cdot 1] + [B 1 \cdot 1] - [B s \cdot 1] = 0 & \text{oder} \\ \vdots & \text{abge-} \\ [B 1 \cdot 1] + [1 1 \cdot 1] - [1 s \cdot 1] = 0 & \text{kürzt} \\ - [B s \cdot 1] - [1 s \cdot 1] + [s s \cdot 1] = 0 & \text{ge-} \\ & \text{schrie-} \\ & \text{ben:} \end{array} \right. \begin{array}{l} [B B \cdot 1] \quad [B 1 \cdot 1] \\ \cdot \quad [1 1 \cdot 1] \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \end{array} \begin{array}{l} \text{Probe} \\ [B s \cdot 1] \\ [1 s \cdot 1] \\ [s s \cdot 1] \end{array}$$

*) Im Fall der abgekürzten Schreibweise erfolgt die Kontrolladdition (wie durch Pfeile angedeutet) jeweils vertikal abwärts bis zur Quadratsummen-Diagonalen und von ihr aus horizontal weiter nach rechts bis zum Vertikalstrich.

Die zeilenweise und Gesamtprobe der Koeffizienten dieser Reduktionsstufe ist also dieselbe, wie in Gleichung (9) für die Koeffizienten der Normalgleichungen selbst.

Die Fortsetzung der Reduktion liefert die Koeffizienten der zweiten Reduktionsstufe [vergl. Gleichung (6)], welche den Kontrollgleichungen genügen müssen:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{[11.2]}{[1s.2]} - [1s.2] = 0 \\ -[1s.2] + \frac{[ss.2]}{[1s.2]} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{abgekürzt} \\ \text{geschrie-} \\ \text{ben:} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{[11.2]}{[1s.2]} \\ \cdot \\ [ss.2] \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Probe} \\ [1s.2] \\ [ss.2] \end{array}$$

Die bei der ganz mechanisch durchführbaren Reduktion zuletzt erhaltenen drei Werte müssen, eine Schlussprobe, einander gleich sein und stellen nach Gleichung (6) die Quadratsumme der an den Beobachtungswerten anzubringenden Verbesserungen, also $[v v]$ vor.

Als

Beispiel

nehmen wir dasjenige des § 66 nochmals vor:

Gleichzeitig mit der Berechnung der Richtungswinkel (φ_R) , (φ_G) , (φ_B) und (φ_C) , deren Werte S. 492 aufgeführt sind, wurden gebildet die Richtungskoeffizienten a und b (vergl. Spalten 3—6 der nachstehenden Tafel für Längen in dm):

im Neupunkt gemessene Winkel γ a. T. 1.	$(\gamma) =$ $(\varphi_{\text{rechts}}) - (\varphi_{\text{links}})$ a. T. 2.	a_{rechts} 3.	a_{links} 4.	b_{rechts} 5.	b_{links} 6.
$\gamma_1 = \text{R P G} = 91^\circ 33' 12''$	$91^\circ 33' 20''$	- 0,37	+ 0,48	+ 0,77	+ 0,22
$\gamma_2 = \text{R P B} = 154^\circ 13' 06''$	$154^\circ 13' 18''$	- 2,99	+ 0,48	+ 0,08	+ 0,22
$\gamma_3 = \text{G P B} = 62^\circ 40' 00''$	$62^\circ 39' 58''$	- 2,99	- 0,37	+ 0,08	+ 0,77
$\gamma_4 = \text{G P C} = 131^\circ 04' 30''$	$131^\circ 04' 43''$	- 0,77	- 0,37	- 1,81	+ 0,77
$\gamma_5 = \text{C P R} = 137^\circ 22' 10''$	$137^\circ 21' 57''$	+ 0,48	- 0,77	+ 0,22	- 1,81
$52' 58''$		$53' 16''$		$52' 58''$	
		+ 18''		- 6,09	
				- 0,83	

Hieraus ergeben sich:

Koeffizienten der Fehlergleichungen				Koeffizienten der Normalgleichungen (mittels Rechenschiebers):						
\mathfrak{A}	\mathfrak{B}	$(\gamma) - \gamma$ $\equiv 1$ in Dekasekunden	s	$\mathfrak{A}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}1$	$\mathfrak{B}\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}1$	11	ss
7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
- 0,85	+ 0,55	+ 0,8	+ 0,50	0,72	- 0,47	- 0,68	0,30	+ 0,44	0,64	0,25
- 3,47	- 0,14	+ 1,2	- 2,41	12,05	+ 0,48	- 4,16	0,02	- 0,17	1,44	5,83
- 2,62	- 0,69	- 0,2	- 3,51	6,86	+ 1,81	+ 0,52	0,48	+ 0,14	0,04	12,30
- 0,40	- 2,58	+ 1,3	- 1,68	0,16	+ 1,03	- 0,52	6,66	- 3,35	1,69	2,83
+ 1,25	+ 2,03	- 1,3	+ 1,98	1,56	+ 2,54	- 1,62	4,13	- 2,64	1,69	3,97
- 6,09	- 0,83	+ 1,8	- 5,12	21,35	+ 5,41	- 6,46	11,59	- 5,58	5,50	25,18

Koeffizienten der Normalgleichungen und Reduktion:

$+ \underline{21,35}$	$+ 5,41$	$- 6,46$	$+ 20,30$	$+ \underline{10,21}$	$- 3,94$	$+ 6,27$	$+ 6,26$	$+ \underline{2,03}$	$+ 2,03$
$(- 1,38)$	$(+ 1,64)$	$(- 5,16)$	$(- 1,52)$	$(+ 2,42)$	$(+ 2,42)$	$(+ 2,42)$	$(+ 2,42)$	$(+ 2,42)$	$(+ 2,42)$
$+ \underline{11,59}$	$- 5,58$	$+ 11,42$	$+ \underline{3,55}$	$- 0,39$	$- 0,39$	$- 0,39$	$- 0,39$	$- 0,39$	$+ 2,04$
	$(- 1,95)$	$(+ 6,15)$		$(- 3,84)$	$(- 3,84)$	$(- 3,84)$	$(- 3,84)$	$(- 3,84)$	$(- 3,84)$
	$+ \underline{5,50}$	$- 6,54$		$+ \underline{5,88}$	$+ 5,88$	$+ 5,88$	$+ 5,88$	$+ 5,88$	$+ 5,88$
		$(- 19,30)$							
		$+ \underline{25,18}$							
			soll 25,18						

also $dy = -\frac{-3,94}{10,21} = +0,39 \text{ dm} = +0,04 \text{ m}$ $[v] = 2,03$

$P_{dy} = P_y = 10,21$ $m_y = \pm \sqrt{\frac{2,03}{3}} = \pm 0,82 \text{ decasec.}$

$= \pm 8,2''$

$M_{dy} = M_y = \pm \sqrt{\frac{2,03}{3 \cdot 10,21}} = \pm 0,26 \text{ dm}$

$= \pm 0,03 \text{ m}$

Zur Berechnung von dx: Umstellung entsprechend dem Pfeil *.

$+ \underline{11,59}$	$+ 5,41$	$- 5,58$	$+ 11,42$	$+ \underline{18,85}$	$- 3,85$	$+ 15,00$	$+ 14,97$	$+ \underline{2,02}$	$+ 2,03$
$(- 2,53)$	$(+ 2,61)$	$(- 5,33)$	$(- 0,79)$	$(+ 3,07)$	$(+ 3,07)$	$(+ 3,07)$	$(+ 3,07)$	$(+ 3,07)$	$(+ 3,07)$
$+ \underline{21,35}$	$- 6,46$	$+ 20,30$	$+ \underline{2,81}$	$- 1,04$	$- 1,02$	$- 1,02$	$- 1,02$	$- 1,02$	$+ 2,00$
	$(- 2,69)$	$(+ 5,52)$		$(- 11,92)$	$(- 11,92)$	$(- 11,92)$	$(- 11,92)$	$(- 11,92)$	$(- 11,92)$
	$+ \underline{5,50}$	$- 6,54$		$+ \underline{13,92}$	$+ 13,96$	$+ 13,96$	$+ 13,96$	$+ 13,96$	$+ 13,96$
		$(- 11,26)$							
		$+ \underline{25,18}$							

also $dx = -\frac{-3,85}{18,85} = +0,20 \text{ dm} = +0,02 \text{ m}$ $[v] = 2,03$

$P_{dx} = P_x = 18,85$ $M_{dx} = M_x = \pm \sqrt{\frac{2,03}{3 \cdot 18,85}} = \pm 0,19 \text{ dm}$

$= \pm 0,02 \text{ m}$

Der Zuschlag von dx und dy zu ξ_1 bzw. η_1 (s. S. 491) liefert die Koordinaten des Neupunktes 1:

$$\underline{x = + 30813,82 \pm 0,02, \quad y = + 12421,64 \pm 0,03}$$

in Übereinstimmung mit der graphischen Lösung S. 493.

§ 68. Vorwärtseinschnitt mit rechnerischer Ausgleichung der Beobachtungswidersprüche.

Die bisher vorgeführten Lösungen der trigonometrischen Punktbestimmung (abgesehen von § 67) hielten an der Bildung von Dreiecken als Grundlage fest.

Diese Bindung verbietet oder erschwert aber die Verwendung solcher beobachteter Strahlen, welche sich, auch wenn sie vorzügliche Schnitte ergeben würden, nicht in ein Dreieck einordnen lassen, und verlangt andererseits, wenn alle gemessenen Winkel ausgenutzt werden sollen, die Häufung von Dreiecken an Stellen, wo sie für die Güte des Resultats vielleicht belanglos ist.

In Fig. 288 sind aus den fünf Bestimmungsstrahlen für den Neupunkt P z. B. nur zwei brauchbare Dreiecke zu gewinnen! Wir werden daher jetzt suchen, jeden beobachteten Neustrahl als Bestimmungsstück für sich, ohne Einfügung in ein Dreieck einzuführen, was zunächst am einfachsten beim reinen Vorwärtseinschnitt erscheint.

Die n_r Bestimmungsstrahlen von jedem der benutzten Festpunkte A, B ... nach dem Neupunkt („äussere“ oder „Vorwärts“-Richtungen) seien auf Grund von n_f in den Festpunkten beobachteten Winkeln α je mit n_f Feststrahlen verbunden und mittels der zu letzteren gehörigen, aus den Koordinaten ihrer Endpunkte berechneten Richtungs- (Neigungs-)winkel φ orientiert, wobei allgemein wird:

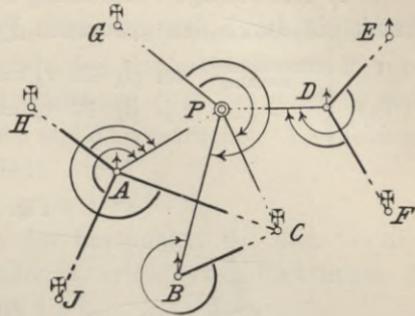
$$n \text{ A P} \equiv \beta_A = n \text{ A R} + \text{R A P} = n \text{ A R} + \alpha_A^R. \quad (1)$$

Die orientierten Richtungswerte β erhalten dabei das Gewicht 1, 2 ... n_f , wenn zu ihrer Gewinnung 1, 2 ... n_f gemessene Winkel zwischen dem Neustrahl und 1, 2 ... n_f Feststrahlen verwendet worden sind.

Wir haben dann dreierlei von jedem der Festpunkte A, B, ... ausgehende, gegen den Neupunkt P gerichtete Strahlen zu unterscheiden, nämlich (vergl. Fig. 289):

1. Die aus der Winkelmessung nach Gleichung (1) gewonnenen, zur Bestimmung des Neupunktes dienenden orientierten Richtungen β , welche sich infolge von Ungenauigkeiten (in der Messung, den Festpunktskoordinaten usw.) nicht, wie es sein sollte, in einem Punkte schneiden werden und die wir mit $n \text{ A P}$, $n \text{ B P}$... bezeichnen wollen,
2. Die Verbindungslinien der benutzten Festpunkte mit dem vorläufigen Neupunkt \mathfrak{P} , deren aus den Koordinaten zu berechnende Richtungs- (Neigungs-)winkel mit $(n \text{ A P})$, $(n \text{ B P})$... bezeichnet sein mögen, und
3. Die Verbindungslinien der Festpunkte mit dem endgültigen, seiner Lage nach zunächst noch unbekanntem Neupunkt P, deren zunächst unbekannter Richtungswinkel wir mit $[n \text{ A P}]$, $[n \text{ B P}]$... bezeichnen wollen.

Fig. 288.



Folgen wir dem in § 67 eingeschlagenen Weg der Reduktion, so erhalten wir aus (4) analog der dortigen Gleichung (k) die Gleichung der ersten Reduktionsstufe:

$$\left([p b b] - \frac{[p a b]}{[p a a]} [p a b] \right) dy + \left([p b l] - \frac{[p a b]}{[p a a]} [p a l] \right) = 0,$$

woraus unter Fortsetzung der früher eingeführten Symbolik wird:

$$[p b b . 1] dy + [p b l . 1] = 0,$$

und analog (5) von § 67

$$dy = - \frac{[p b l . 1]}{[p b b . 1]}. \quad (5)$$

Analog (7) von § 67 wird ferner $P_{dy} \equiv P_y = [p b b . 1]$ (5 a)

$$" \quad (6) \quad " \quad " \quad " \quad " \quad [p v v] = [p l l . 2], \quad (5 b)$$

und, da zur Punktbestimmung zwei Strahlen nötig, also $(n_v - 2)$ davon überschüssig sind,

$$(5 c) \quad M_{dy} = M_y = \pm \sqrt{\frac{[p l l . 2]}{(n_v - 2) P_y}} = \pm \sqrt{\frac{[p l l . 2]}{(n_v - 2) [p b b . 1]}}.$$

Genau wie in § 67 gezeigt, erhalten wir schliesslich durch Umstellung die Normalgleichungen zur Bestimmung der in (4) links stehenden Unbekannten dx.

Rechenproben. Zur Sicherung der Ausrechnung benützen wir die schon im § 67 eingeführten Rechenproben für die Bildung der jetzt nur durch die Gewichtsfaktoren erweiterten Koeffizienten der Normal- und Reduktionsstufengleichungen:

$$(6) \quad \text{analog (9) von § 67} \quad \left\{ \begin{array}{l} [p a a] + [p a b] + [p a l] = [p a s] \\ [p a b] + [p b b] + [p b l] = [p b s] \\ [p a l] + [p b l] + [p l l] = [p l s] \\ [p a s] + [p b s] + [p l s] = \underline{[p s s]} \end{array} \right.$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$\left\{ \begin{array}{l} [p a a] \quad [p a b] \quad [p a l] \quad [p a s] \\ \cdot \quad [p b b] \quad [p b l] \quad [p b s] \\ \cdot \quad \cdot \quad [p l l] \quad [p l s] \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \underline{[p s s]} \end{array} \right.$$

$$(7) \quad \text{analog (10) von § 67} \quad \left\{ \begin{array}{l} [p b b . 1] + [p b l . 1] = [p b s . 1] \\ [p b l . 1] + [p l l . 1] = [p l s . 1] \\ [p b s . 1] + [p l s . 1] = [p s s . 1] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{abge-} \\ \text{kürzt} \\ \text{ge-} \\ \text{schrie-} \\ \text{ben:} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} [p b b . 1] \quad [p b l . 1] \quad [p b s . 1] \\ \cdot \quad \underline{[p l l . 1]} \quad [p l s . 1] \\ \cdot \quad \cdot \quad \underline{[p s s . 1]} \end{array} \right.$$

$$(8) \quad \text{analog (11) von § 67} \quad \left\{ \begin{array}{l} [p l l . 2] = [p l s . 2] \\ [p l s . 2] = [p s s . 2] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{abgekürzt} \\ \text{geschrie-} \\ \text{ben:} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} [p l l . 2] \quad [p l s . 2] \\ \cdot \quad \underline{[p s s . 2]} \end{array} \right.$$

§ 69. Vereinigtes Vor- und Rückwärtseinschneiden mit rechnerischer Ausgleichung der Beobachtungswidersprüche.

Sind zur Bestimmung der Koordinaten x_P und y_P eines Neupunktes P sowohl Winkel α in den Festpunkten A, B... zwischen Feststrahlen und den Strahlen nach dem Neupunkt (äussere oder Vorwärtsrichtungen), als auch Winkel γ im Neupunkt nach den Festpunkten beobachtet (innere oder Rückwärtsrichtungen), so kann man für die ersteren die Fehlergleichungen des § 68, für die letzteren diejenigen des § 67 gleichzeitig zur Anwendung bringen.

Man hat also dann statt n_v , wie im Falle des Vor-, oder n_r , wie im Falle des Rückwärtseinschnittes, jetzt $(n_v + n_r)$ Fehlergleichungen, wenn von den Festpunkten zum Neupunkt herein n_v , vom Neupunkt nach den Festpunkten hinaus n_r Strahlen beobachtet wurden: Die Koeffizienten der Unbekannten in den Normalgleichungen setzen sich jetzt aus $(n_v + n_r)$ Summanden zusammen. Wir erkennen ferner, dass die Richtungskoeffizienten a und a , bzw. b und b der Fehlergleichungen nach Richtung und Grösse einander gleich sind, wenn sie sich auf denselben Bestimmungsstrahl beziehen, d. h. wenn dieser zweiseitig, sowohl von aussen nach innen, als von innen nach aussen beobachtet wurde. Für den Strahl AP ist z. B.:

$$\left. \begin{aligned} a_A &= -\frac{\sin n_{AP}}{AP} \varrho'' = +\frac{\sin n_{PA}}{AP} \varrho'' = a_A \\ b_A &= +\frac{\cos n_{AP}}{AP} \varrho'' = -\frac{\cos n_{PA}}{AP} \varrho'' = b_A, \end{aligned} \right\} (1)$$

ebenso für den Strahl BP bzw. PB usw.

Als Gewicht p einer äusseren Richtung β oder des zu ihr gehörigen Absolutglieds l_A, l_B, \dots haben wir in § 68 für den Fall des Vorwärtseinschnittes festgestellt:

$$p_1 = 1, 2 \dots n_r,$$

wenn der Neustrahl durch 1, 2... n_r gemessene Winkel mit 1, 2... n_r Feststrahlen verbunden ist.

Die Gewichte p der innen gemessenen Winkel γ , bzw. der aus ihnen gewonnenen Absolutglieder $l = (\gamma) - \gamma$ sind, wenn die Messung der γ mit derselben Genauigkeit erfolgte, wie diejenige der α (bzw. β) durchweg = 1.

Wir haben also bei vereinigttem Vor- und Rückwärtseinschneiden:

n_v Gleichungen für	}	Fehlergleichungen	$v_A = a_A dx + b_A dy + l_A$	Gewicht p der l
n_v Zielungen		$v_B = a_B dx + b_B dy + l_B$	$n_{r,A}$	
vorwärts		\vdots	$n_{r,B}$	
		\vdots	\vdots und	

$$\begin{array}{l}
 n_r \text{ Gleichungen für} \\
 n_r \text{ Zielungen} \\
 \text{rückwärts}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 v_1 = \mathfrak{A}_1 dx + \mathfrak{B}_1 dy + l_1 \\
 v_2 = \mathfrak{A}_2 dx + \mathfrak{B}_2 dy + l_2 \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array}
 \right.
 \begin{array}{l}
 \text{Fehlergleichungen} \\
 \text{Gewicht } p \text{ der 1} \\
 \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.
 \end{array}$$

woraus sich, wie in §§ 67 und 68 mittels der Bedingung $[p v v] = \text{Min.}$, die zwei Normalgleichungen ergeben:

$$(2) \begin{cases} ([p a a] + [\mathfrak{A} \mathfrak{A}]) dx + ([p a b] + [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]) dy + ([p a l] + [\mathfrak{A} l]) = 0, \\ ([p a b] + [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]) dx + ([p b b] + [\mathfrak{B} \mathfrak{B}]) dy + ([p b l] + [\mathfrak{B} l]) = 0. \end{cases}$$

Führt man für die Koeffizienten von dx und dy in obigen Normalgleichungen der Einfachheit halber die Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
 ([p a a] + [\mathfrak{A} \mathfrak{A}]) &= [p a a]; & [p a b] + [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] &= [p a b]; \\
 [p b b] + [\mathfrak{B} \mathfrak{B}] &= [p b b]; & [p a l] + [\mathfrak{A} l] &= [p a l], \\
 & & \text{und } [p b l] + [\mathfrak{B} l] &= [p b l],
 \end{aligned}$$

so erhält man wie in den §§ 67 und 68:

$$\begin{aligned}
 dy &= - \frac{[p b l \cdot 1]}{[p b b \cdot 1]} \\
 P_{d_y} &\equiv P_y = [p b b \cdot 1] & [p v v] &= [p l l \cdot 2] \\
 M_{d_y} &\equiv M_y = \pm \sqrt{\frac{[p l l \cdot 2]}{[p b b \cdot 1] (n_v + n_r - 2)}},
 \end{aligned}$$

und durch Umstellung der Normalgleichungen die links stehende Unbekannte dx .

b) Punkteinschaltung aus Richtungsbeobachtungen.

§ 70. Vorwärtseinschnitt mit graphischer Ausgleichung der Zielstrahlen.

Wir gehen, wie in den §§ 66 bis 69 wieder aus von einem in möglichster Nähe des Neupunktes P liegenden vorläufigen Punkt \mathfrak{P} , dessen auf irgendwelche Weise, z. B. nach §§ 58 bis 61 gewonnene Koordinaten x und y durch die zunächst unbekanntes Zuschläge dx und dy ergänzt werden sollen zu den gesuchten Werten:

$$(\S 66 \text{ Gl. 1}) \quad x = x + dx \quad y = y + dy.$$

Um diese Zuschläge zu finden, wollen wir wieder wie in § 66 die gegenseitige Lage der Bestimmungsstrahlen unter sich und gegenüber dem vorläufigen Punkt \mathfrak{P} in der Nähe des letzteren derart aufzeichnen, dass die Strahlenrichtung derjenigen im Gelände genau entspricht und die durch ihren Schnitt gebildeten linearen Grössen (die Abstände der Strahlen von \mathfrak{P} , sowie die auf ihnen und durch sie gebildeten Abschnitte) in grossem Massstab (etwa 1:10) erscheinen.

Die Strahlenrichtung gewinnen wir durch Erweiterung des in § 63 lediglich zur Untersuchung der Festpunkte benützten „Ab-risses“: Das in jedem der Festpunkte beobachtete Richtungs-

büschel α , welches wir dort scheinbar gleich auf die von demselben Festpunkt ausgehenden Verbindungsstrecken nach den beobachteten anderen Festpunkten derart legten, dass möglichste Deckung je der zusammengehörigen Strahlen erfolgte,

$$[\text{Richtungswinkel } nAB \equiv \varphi \text{ aus } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ (s. Gl. 2 des § 56),}$$

Drehung des beobachteten Richtungsbüschels α um den Winkel

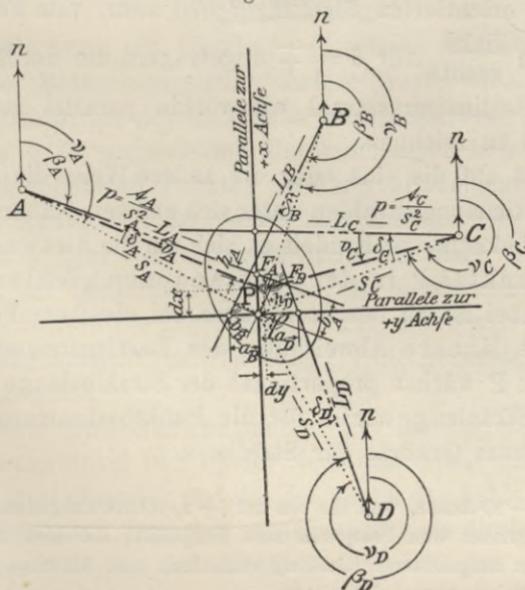
$$\omega_{\text{Mittel}} = \frac{[\varphi] - [\alpha]}{n_f} \text{ (Gl. 1 von § 63), so dass die orientierte Richtung}$$

sich ergibt gleich $\beta = \alpha + \omega_{\text{Mittel}}$

enthält auch Neustrahlen, die durch Addition des Verdrehungswinkels ω zum zugehörigen beobachteten Richtungswert α ebenso gut orientiert werden wie die Feststrahlen im Beispiel des § 63. Auch ihre Orientierung erfolgt daher — wie diejenige der Richtungen nach den Festpunkten — in Spalte 8 des Abrisses (jedoch mit roter Tinte). Zur Zeichnung der Strahlenlage und -Richtung in der Gegend des Neupunktes haben wir zwei Wege:

Entweder (s. Fig. 290) wir berechnen aus ihren orientierten Richtungswerten β die Entfernungen a derjenigen Punkte vom vor-

Fig. 290.



läufigen Punkt \mathfrak{P} , in denen die Bestimmungsstrahlen die eine, oder die andere der durch \mathfrak{P} (x, y) gezogenen Parallelen zu den beiden Koordinatenachsen (die Achsen der zu entwerfenden graphischen Darstellung) schneiden.

Diese Entfernungen ergeben sich allgemein nach Vorzeichen und Wert:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{für Abtragung auf der } y\text{-Achse zu: } a = y_F + (x - x_F) \operatorname{tg} \beta - y \\ \text{„ „ „ „ } x\text{-Achse zu: } a = x_F + (y - y_F) \operatorname{ctg} \beta - x. \end{array} \right.$$

Aufzeichnung
der
Fehlerfigur.

Tragen wir die berechneten Entfernungen a im gewählten Massstab (1 : 10) von \mathfrak{P} aus auf den genannten Achsen in der durch ihr Vorzeichen bestimmten Richtung ab, so erhalten wir je einen Punkt des zugehörigen, zu zeichnenden Neustrahls. Durch ihn ziehen wir letzteren selbst, als Parallele zum rechten Schenkel des mit der $(-x)$ -Achse als linkem Schenkel und mit \mathfrak{P} als Scheitel (mittels eines Transporteurs, oder unter Verwendung einer Sehnen-, oder Tangenstafel) aufgezeichneten Richtungswertes β .

Oder wir berechnen ausser den orientierten Richtungen β noch die entsprechenden Richtungs- (Neigungs-)winkel ν von den Festpunkten nach dem vorläufigen Punkt \mathfrak{P} und aus der Differenz $\delta = \beta - \nu$ und der Strahlenlänge s die senkrechte Querabweichung

$$(2) \quad b = \frac{\delta''}{\rho''} s$$

des Bestimmungsstrahls vom vorläufigen Punkt \mathfrak{P} . Sie wird von ihm aus im gewählten Massstabe senkrecht zu der wie oben aufgezeichneten orientierten Richtung β und zwar, vom Festpunkt aus gesehen nach $\begin{matrix} \text{links} \\ \text{rechts} \end{matrix}$ für $\delta = \mp$ abgetragen, um durch ihren Endpunkt den Bestimmungsstrahl wie vorhin parallel zu ebendieser Richtung β^2) zu zeichnen.

Auswahl
des end-
gültigen
Punktes.

Ist jetzt auf die eine oder die andere Weise die gegenseitige Lage der Bestimmungsstrahlen unter sich und zum Näherungspunkt \mathfrak{P} zeichnerisch bekannt, so handelt es sich um die Auswahl des endgültigen Punktes P in der entstandenen „fehlerzeigenden Figur“. Dabei ist zu beachten, dass bei gleichem Fehler in der Richtung die lineare Abweichung des Bestimmungsstrahles vom wahren Punkt P wächst proportional der Strahlenlänge s und demgemäss das Strahlengewicht für die Punktbestimmung umgekehrt proportional zum Quadrat der Strecke s .

¹⁾ Zur $(-x)$ -Achse, weil die von der $(+x)$ -Achse ausgehenden Richtungswerte β des Abrisses vom Festpunkt zum Neupunkt, die hier zu zeichnenden Strahlen aber in umgekehrter Richtung verlaufen, also sämtlich einen um $2R$ abweichenden Richtungswinkel besitzen.

²⁾ Ob hierbei der Richtungswert β oder ν verwendet wird, ist gleichgültig. Würde z. B. die Divergenz beider, von dem zugehörigen ca. 1 km entfernten Festpunkt ausgehenden Strahlen bei \mathfrak{P} die Querabweichung 0,5 m hervorrufen, so würde sie auf die Ausdehnung der graphischen Darstellung von ca. 1 m eine Verschwenkung von nur $\frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$ mm, oder im Massstab 1 : 10 von $\frac{1}{20}$ mm bewirken, welcher Betrag zu vernachlässigen ist.

Folglich wird das Bestimmungsgewicht sein:

$$(3) \quad p_s = \frac{1}{s^2}.$$

Wo ferner auch immer der endgültige Punkt von P innerhalb der Fehlerfigur gewählt werden möge: seine Abstände h von den Bestimmungsstrahlen stellen deren Querverfehlung dar, aus welcher sich rückwärts die an den beobachteten orientierten Richtungen β anzubringenden Verbesserungszuschläge v nach Richtung und Grösse berechnen lassen:

$$(4) \quad v'' = \frac{h}{s} \varrho''.$$

Gleiche Genauigkeit der Richtungsbeobachtung vorausgesetzt, müssen wir daher nach bisherigem verlangen:

$$(5) \quad [v v] = \left[\frac{h^2}{s^2} \right] \varrho^2 = \varrho^2 \left(\frac{h_1^2}{s_1^2} + \frac{h_2^2}{s_2^2} + \dots \right) = \text{Min.}$$

oder unter Beachtung von (3)

$$(5a) \quad [v v] = \varrho^2 (p_1 h_1^2 + p_2 h_2^2 + \dots) = \varrho^2 [p h h] = \text{Min.},$$

d. h. wir haben in der Fehlerfigur den endgültigen Punkt P so auszuwählen, dass

$$(6) \quad \underline{[p h h]} = \text{Min.}$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (6) des § 66, wo nur die Gewichte p der Bestimmungslinien andere Werte annahmen, als die Strahlengewichte des gegenwärtigen Paragrafen.

Die in § 66 angestellten Untersuchungen betr. die Auswahl des wahrscheinlichsten Punktes in der fehlerzeigenden Figur und die Art der Auswahl selbst gelten also uneingeschränkt auch hier.

Ist nach dem dort aufgestellten Verfahren der endgültige Punkt P in der Fehlerfigur gefunden, so bilden seine ihr entnommenen Koordinaten die Zuschläge dx und dy, womit man nach der einleitend angeschriebenen Gleichung (1) die gesuchten Koordinaten x_p und y_p gewinnt.

Zeichen- und Rechenprobe: Für die Bildung der endgültigen Richtungswinkel [n F P] der Neustrahlen hat man nun (wie in § 66 bei γ) zwei einander und die Zeichnung der Fehlerfigur kontrollierende Verfahren. Zunächst berechnet man sie direkt mittels Gleichung (2) des § 56 aus den endgültigen Koordinaten von P, sodann aber auch durch Berechnung des Zuschlags v, der den orientierten Richtungen β zuzufügen ist, und den man nach Vorzeichen und Grösse erhält aus der Ordinate h (senkrechter Abstand wie in § 66) des Punktes P in bezug auf den gezeichneten Strahl und der Strahlenlänge s.

Es ist

$$(7) \quad [n F P] \equiv \varphi_F = \beta_F + v = \beta_F + \frac{h_F}{s_F} \varrho''$$

Zeichen-
und Rechen-
probe.

Sind 'derart die Richtungswinkel sämtlicher Neustrahlen mit Probe berechnet, so trägt man sie (mit roter Tinte) in Spalte (6) des Abrisses ein. Die (für die Neustrahlen rot einzutragende) Differenz $v = (\varphi - \beta)$ vervollständigt den Abriss zu einer übersichtlichen Zahlendarstellung der ganzen Triangulierungsarbeit.

Erreichte Beobachtungs- und Bestimmungsgenauigkeit. Man erhält unter Beachtung, dass zwei von den n_v beobachteten Strahlen zur Bestimmung nötig waren, die Zahl der überschüssigen also $n_v - 2$ beträgt, die mittlere lineare Querverfehlung eines Strahls vom Gewicht 1:

$$(8) \quad \mu_q = \pm \sqrt{\frac{[p h h]}{n_v - 2}},$$

die mittlere Querverfehlung eines Strahls vom Gewicht p :

$$(9) \quad m_q = \pm \sqrt{\frac{[p h h]}{(n_v - 2)p}},$$

den mittleren linearen Fehler in der Bestimmung des Punktes P:

$$(10) \quad M = \pm \sqrt{\frac{[p h h]}{(n_v - 2)[p]}},$$

den mittleren Beobachtungsfehler einer Richtung

$$(11) \quad m''_{\beta} = \pm \varrho'' \sqrt{\frac{[v v]}{n_v - 2}} = \pm \varrho'' \sqrt{\frac{[h^2]}{n_v - 2}}.$$

Beispiel s. am Schluss von § 71.

§ 71. Vereinigtes Vor- und Rückwärtseinschneiden mit graphischer Ausgleichung der Zielstrahlen.

Sind ausser den Richtungen in den Festpunkten auch solche im Neupunkt beobachtet, so sind zwei Fälle möglich, nämlich:

- a) sämtliche Strahlen sind 2seitig beobachtet,
- b) ein Teil der Strahlen ist nur von den Festpunkten aus „äussere Richtungen“, ein Teil nur vom Neupunkt aus „innere Richtungen“ und ein Teil 2seitig beobachtet.

Wir betrachten zunächst den Fall a):

Bilden wir, wie in § 70 gezeigt, die „orientierte Richtung“ β (den aus der Messung reduzierten Richtungswinkel) für jeden Neustrahl vom betreffenden Festpunkt aus, so haben wir damit auch denjenigen vom Neupunkt zum Festpunkt gewonnen. Denn er unterscheidet sich vom ersteren nur um $2R$. Man kann also das im Neupunkt beobachtete (innere) Richtungsbündel nach den für die Neustrahlen von aussen herein erhaltenen orientierten Richtungswerten β nun von innen nach aussen ($\beta \pm 2R$) genau ebenso orien-

tieren, wie es in § 63 mit den in den Festpunkten beobachteten Richtungen geschah, mit dem einzigen Unterschied, dass es sich bei den Grundlagen φ dort um feststehende Werte handelte, während die hier aus der Messung erschlossenen Werte β verbesserungsfähig und -bedürftig sind.

Geschieht die Orientierung der inneren Richtungen statt nach den Werten $\beta + 2R$ nach den Werten β direkt, so erhält man dadurch je einen neuen Wert γ für jede orientierte Richtung nach dem Neupunkt, der innerhalb kleiner Messungsdifferenzen mit dem zugehörigen Wert β übereinstimmen muss. Das arithmetische Mittel $\mu = \frac{\beta + \gamma}{2}$ beider Werte spielt also dieselbe Rolle, wie in § 70 der Wert β allein. Es ist nur $\sqrt{2}$ mal genauer. Der ganze Unterschied gegen den Fall des § 70 besteht also darin, dass die dortigen Bestimmungsgewichte $p = \frac{1}{s^2}$ (s. Gleichung (3) von § 70) jetzt übergehen in $p = \frac{2}{s^2}$.

Ist b) nur ein Teil der Neustrahlen beiderseitig beobachtet, so lässt sich der Verdrehungswinkel ω_i für die Orientierung des inneren Richtungsbüschels nur aus den von den Festpunkten (d. h. von aussen) herein orientierten Richtungswerten der 2seitig beobachteten Strahlen berechnen. Um $2R$ vergrößert (bzw. verkleinert) treten letztere zunächst an Stelle der in § 63 zur Orientierung der Richtungen α benützten festen Richtungswinkel φ , dienen aber nicht wie jene bloss zur Orientierung der ihnen entsprechenden, sondern wie in § 70 auch der übrigen, im selben Punkt (hier also der einseitig von innen heraus) beobachteten Richtungen. Ja es ist nicht einmal nötig, die orientierten Richtungen β (von den Festpunkten nach dem Neupunkt) um $2R$ zu verändern, um nach ihnen das innere Büschel zu orientieren. Lassen wir die Werte β vielmehr, wie im Fall (a) unverändert, so liefert die Orientierung der letzteren wie dort lauter Werte, die innerhalb der Messungsgenauigkeit mit den von aussen herein orientierten Richtungswerten übereinstimmen müssen. Wir erhalten derart dreierlei Gruppen von ihrem Wert nach sämtlich von aussen herein orientierten Richtungen, nämlich:

1. Die orientierten Richtungen β für Beobachtungen nur in den Festpunkten. Ihnen kommt das Bestimmungsgewicht $p_a = \frac{1}{s^2}$ zu.
2. Die orientierten Richtungen γ für Beobachtungen nur im Neupunkt. Ihnen kommt das Bestimmungsgewicht $p_i = \frac{1}{s^2}$ zu.
3. Die orientierten Richtungen $\mu = \frac{\beta + \gamma}{2}$ für 2seitige Beobachtung. Ihnen kommt das Bestimmungsgewicht $p_z = \frac{2}{s^2}$ zu.

Für das Gewicht einer der orientierten Richtungen haben wir also jetzt allgemein:

$$(1) \quad p = \frac{t}{s^2},$$

wo $t = \frac{1}{2}$, je nachdem die Beobachtung 1_2 -seitig erfolgte.

Der Verdrehungswinkel ω_{Mittel} für die inneren Richtungen ist bei gleicher Punkt- und Beobachtungsgenauigkeit natürlich um so sicherer, je grösser die Zahl der 2seitig beobachteten Richtungen, also der Einzelwerte ω_1 ist. Jede Ungenauigkeit in ω_1 würde sämtliche inneren und damit indirekt auch die 2seitig beobachteten Richtungen (letztere um die Hälfte) in konstantem Sinn verdrehen. Die Fehlerfigur würde dadurch nicht nur grösser, sondern sie erhielte auch eine andere geographische Lage. Letzteres um so mehr, je verschiedener in der Länge und je unsymmetrischer über den Horizont verteilt die Neustrahlen sind.

Die technische Anweisung vom 19. Januar 1895 lässt aus diesem Grund für Katastermessungen in Württemberg die graphische Behandlung allgemein nur für Vorwärtseinschnitte zu. Für vereinigt Vor- und Rückwärtseinschneiden dagegen nur dann, wenn die Zahl der 2seitig beobachteten Richtungen mindestens halb so gross ist, als die Gesamtzahl der Rückwärtsrichtungen. Für Rückwärtseinschnitte überhaupt nicht. (Letzteres Verbot hängt wohl damit zusammen, dass der Verdrehungswinkel ω für die inneren Richtungen auf dem hier angegebenen Weg überhaupt nicht bestimmbar ist, wenn kein Strahl 2seitig beobachtet wurde. Das Verfahren des § 66 wird jedoch davon nicht berührt.)

Aus den orientierten Richtungswerten μ , denen wir von jetzt ab auch die aus 1seitiger Beobachtung gewonnenen Werte β und γ zurechnen, bestimmen wir nach Gleichungen (1) oder (2) des § 70 die Elemente für die Aufzeichnung der Fehlerfigur. Die endgültige Lage des Neupunktes P in der Fehlerfigur aber finden wir wie in § 70 nach dem in § 66 ermittelten und angewandten Verfahren. Die Einführung des Strahlengewichts t ändert dabei an den Formeln selbst nichts, sondern nur an den Werten der Gewichte p . Zwar sind auch die Werte der orientierten Richtungen μ , also der Absolutglieder $l = \mu - \nu$ und der Verbesserungen ν jetzt nicht mehr gleich genau. Ihnen kommt vielmehr das veränderliche Gewicht t zu (s. oben) und wir verlangen für die Auswahl des Punktes P jetzt:

$$(2) \quad [t \nu \nu] = \varrho^2 \left(t_1 \frac{h_1^2}{s_1^2} + t_2 \frac{h_2^2}{s_2^2} + \dots \right) = \text{Min.}$$

Aber für $p = \frac{t}{s^2}$ wird auch

$$(2) \quad [t \nu \nu] = \varrho^2 (p_1 h_1^2 + p_2 h_2^2 + \dots) = \varrho^2 [p h h] = \text{Min.},$$

wie in § 70.

Ist der endgültige Punkt P ausgewählt und dx und dy der Fehlerfigur entnommen, so wird wieder

$$x_P = x + dx \quad y_P = y + dy$$

und es erfolgt die Ergänzung des Abrisses samt Probe für die

Zeichnung und Richtungswinkelberechnung nach (7) des § 70 wie dort gezeigt.

Beispiel.

Zur Bestimmung der Koordinaten des Neupunktes 6. Sonnenbühl wurden in 3 Festpunkten und im Neupunkt folgende Richtungen (in je 3 Sätzen) beobachtet¹⁾:

1. in Endberg ($x = + 31895,47$ $y = + 14805,97$) n. T.	2. in Reute ($x = + 30848,79$ $+ 16061,28$) n. T.
nach Bergweg . . . $0^{\circ} 00' 31''$	nach Endberg . . . $142^{\circ} 51' 27''$
„ Sonnenbühl . . . $91^{\circ} 09' 66''$	„ Sonnenbühl . . . $156^{\circ} 99' 14''$
„ Württemberg . . . $171^{\circ} 99' 20''$	„ Bergweg . . . $172^{\circ} 36' 79''$
<u>09' 17''</u>	<u>87' 20''</u>
3. in Mittlerweg ($x = + 31887,16$ $+ 15974,96$)	6. im Neupunkt Sonnenbühl
nach Reute . . . $123^{\circ} 04' 97''$	nach Reute . . . $149^{\circ} 56' 57''$
„ Württemberg . . . $127^{\circ} 39' 82''$	„ Bergweg . . . $376^{\circ} 80' 40''$
„ Sonnenbühl . . . $233^{\circ} 39' 57''$	„ Württemberg . . . $173^{\circ} 18' 27''$
„ Bergweg . . . $292^{\circ} 44' 72''$	<u>55' 24''</u>
<u>29' 08''</u>	

Gegeben sind ferner die Koordinaten von:

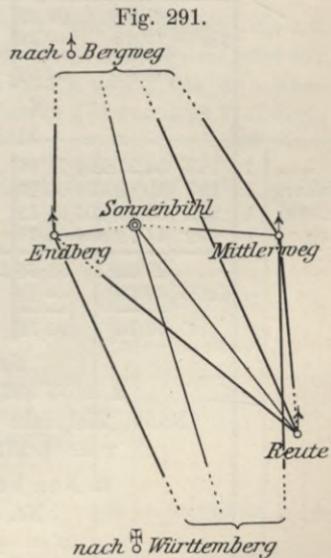
4. Bergweg $x = + 33678,59$ $+ 14841,93$,

5. Württemberg $x = + 29188,02$ $+ 16014,70$.

Welches sind die Koordinaten von Sonnenbühl, und wie berechnet sich daraus der mittlere Fehler einer in 3 Sätzen beobachteten Richtung, wenn die Koordinaten der Festpunkte als fehlerfrei angenommen werden?

Auflösung. Da sich zur Berechnung vorläufiger Koordinaten für den Neupunkt direkt aus den Beobachtungen heraus kein passendes Dreieck findet (s. Fig. 291), und um vor der Neueinschaltung die Lage der Festpunkte auf ihre Übereinstimmung mit ihren Koordinaten zu prüfen, stellen wir zunächst den

a) Abriss für die Festpunkte auf. Wir verbinden damit die Orientierung der in diesen Festpunkten beobachteten Neustrahlen, um hernach aus zwei passenden orientierten Werten vorläufige Koordinaten für den Neupunkt in der durch Fig. 269 angedeuteten Weise zu berechnen.



¹⁾ Um eine eingehende Ausgleichung zu rechtfertigen, wurden absichtlich starke Abweichungen in die Messung hineingelegt. Auch wurden die inneren Richtungen nur an einen einzigen 2seitig beobachteten Strahl angeschlossen, um den Einfluss mangelhafter Orientierung auf die Koordinatenzuschläge dx und dy bei graphischer gegenüber rechnerischer Ausgleichung (s. § 74) zu zeigen.

A b r i s s .

Zielpunkte	Ob 1-od. 2seitig beobacht.	Beobachtete Richtungen	Endgültige Richtungswinkel	Unterschiede $\varphi - \alpha$ Orientierungswinkel	Orientierte Richtungen	Verbesserung $v = \varphi - \beta$	Strecklänge	Höchstzulässiger wert von v	
		α [α] + n . ω = [β]	φ	$\omega = \frac{[\varphi - \alpha]}{n}$	$\beta = \alpha + \omega$ [β]	[v]	s	= v_{max} .	
		o ' "	o ' "	o ' "	o ' "	" "	m	' "	
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A. Gegebene Punkte (Festpunkte).									
No. 1. Standpunkt Endberg									
$x = + 31895,47 \quad y = + 14805,97 \quad (\Delta \text{ westl.})$									
4. Bergweg . . .	1	0 00 31	1 28 37	1 28 06	1 28 17	20	1783	82	
6. Sonnenbühl .	1	91 09 66	92 37 56		92 37 52	4	427	54	1
5. Württemberg .	1	171 99 20	173 26 86	1 27 66	173 27 06		2965	74	
		09 17	92 79	1 27 86	92 75	20 20			
		3 $\omega =$ 83 58	— 4			24 20			
		[β] = 92 75	92 75			4			
No. 2. Standpunkt Reute									
$x = + 30848,79 \quad y = + 16061,28 \quad (\Delta \text{ mitten})$									
1. Endberg . . .	1	142 51 27	344 24 60	201 73 33	344 24 48	12	1634	84	
6. Sonnenbühl .	2	156 99 14	358 72 84		358 72 35	49	1377	89	
4. Bergweg . . .	1	172 36 79	374 09 88	73 09	374 10 00		3081	73	
		87 20	07 32	201 73 21	06 83	12 12			
		3 $\omega =$ 19 63	— 49			61 12			
		06 83	06 83			49			
No. 3. Standpunkt Mittlerweg									
$x = + 31887,16 \quad y = + 15974,96 \quad (\Delta \text{ nördl.})$									
2. Reute . . .	1	123 04 97	194 71 99	71 67 02	194 71 14	85*	1042	98	
5. Württemberg .	1	127 39 82	199 06 28	71 66 46	199 05 99	29	2699	75	
6. Sonnenbühl .	1	233 39 57	305 05 62		305 05 74		748	14	1
4. Bergweg . . .	1	292 44 72	364 09 75	71 65 03	364 10 89		2120	79	
		29 08	93 64	3 $\omega =$ 18 51	93 76	114 114			
		64 68	+ 12	71 66 17		114 126			
		93 76	93 76			12			
No. 4. Zielpunkt Bergweg									
$x = + 33678,59 \quad y = + 14841,93 \quad (\Delta \text{ östl.})$									
No. 5. Zielpunkt Württemberg (Kuppel des Mausoleums)									
$x = + 29188,02 \quad y = + 16014,70 \quad (\text{Kreuz})$									
B. Neu bestimmte Punkte (Neupunkte).									
No. 6. Neupunkt Sonnenbühl									
$x = + 31946,47 \quad y = + 15229,77$									
2. Reute . . .	2	149 56 57	158 72 84	9 16 27	158 73 37		1377	89	
4. Bergweg . . .	1	376 80 40	385 97 67	9 17 27	385 97 20	47	1775	83	
5. Württemberg .	1	173 18 27	182 35 12	9 16 85	182 35 07	5	2868	74	
		55 24	05 63	3 $\omega =$ 50 39	05 64	52 53			
		50 40	+ 1	$\omega =$ 9 16 80		1			
		05 64	05 64						

* Wegen der grossen Differenzen vergl. Fussnote S. 519.

Die mit schrägen Lettern gedruckten Einträge werden in Wirklichkeit rot geschrieben.

Erklärung zum „Abriss“.

Zuerst erfolgt der Eintrag der in den Festpunkten beobachteten Richtungen α aus dem Feldbuch, oder (bei exzentrischen Beobachtungen) aus der Zentrierungsberechnung in den Spalten 1, 2 und 3 mit schwarzer, (bezüglich der Nummern der Neupunkte mit roter) Tinte.

Die Berechnung nach § 56 Formel 2, (welche hier nicht abgedruckt ist), ergab aus den Festpunktkoordinaten für die Richtungswinkel φ und Längen s der beobachteten Feststrahlen folgende Werte:

	φ	s
von Endberg nach Bergweg	1° 28' 37"	1783 m
„ Württemberg	173° 26' 86"	2965 m
„ Reute „ Endberg	344° 24' 60"	1634 m
„ „ Bergweg	374° 09' 88"	3081 m
„ Mittlerweg „ Reute	194° 71' 99"	1042 m
„ „ Württemberg	199° 06' 28"	2699 m
„ „ Bergweg	364° 09' 75"	2120 m.

Sie werden in die Spalten 4 und 8 des Abrisses mit schwarzer Tinte eingesetzt.

Nun werden die beobachteten Richtungen α , wie in § 63 gezeigt, durch Addition des in Spalte 5 berechneten Verdrehungswinkels $\omega_{\text{Mittel}} = \frac{[\varphi - \alpha]}{n}$ orientiert ($\beta = \alpha + \omega_{\text{Mittel}}$) und (bezüglich der Feststrahlen schwarz, der Neustrahlen rot) in Spalte 6 eingetragen.

Für die richtige Bildung von ω_{Mittel} erhalten wir dabei die Rechenprobe:

$$[v] = [\varphi - \beta] = 0,$$

und für die richtige Addition von ω_{Mittel} dagegen die Rechenprobe:

$$[\beta] = [\alpha] + n \cdot \omega_{\text{Mittel}}.$$

Zwei der im Abriss orientierten Richtungen β , welche möglichst um 1 R voneinander abweichen (hier von Endberg und von Reute her) dienen jetzt zur

b) Berechnung vorläufiger Koordinaten ξ und η für den Neupunkt aus der Grundlinie Endberg—Reute nach dem in § 58 gezeigten Verfahren.

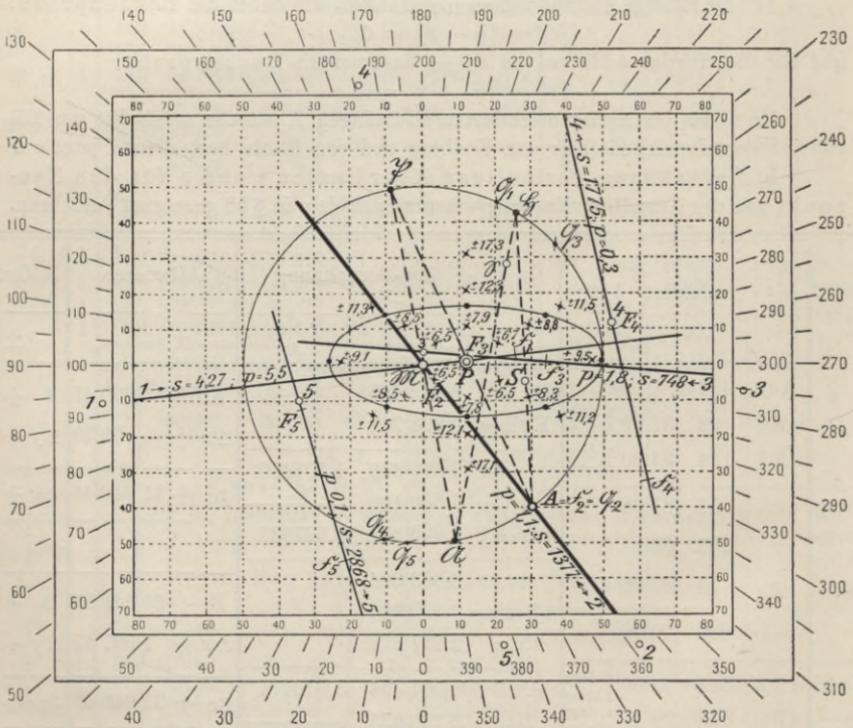
Bezeichnung der Punkte	Winkel				log-Berechnung	Abszissen		Ordinaten			
	reduziert		gemess.			Δx Δy	±	,	±	,	
	o	'	''	'	''						
Δ No. 1	AC	427 m									
	n AC	92	37	52	a. dem Abriss	AB	3 213 365		A	+	14 805 97
	n AB	144	24	60	a. dem Abriss	E sin γ	0 063 731		Δx	+	50 99
A: 1 Endberg	α	51	87	08		cos n AC	9 077 310	1.707470	Δy	+	423 68
	γ	133	65	17		A C	2 630 160		ξc	+	31 946 46
C: 6 ^{te} Sonnenbühl	β	14	47	75	47 87	sin n AC	9 996 877	2.627037			
						sin β	9 353 064		ηc	+	15 229 65
B: 2 Reute						AB: sin γ	3 277 096		B	+	30 848 79
	Summe	200	70	00		sin α	9 861 879		Δx	+	1 097 67
A B nach § 56 Gleichung 2 berechnet	n BA	344	24	60	a. dem Abriss	cos n BC	9 901 496	3.040471	Δy	—	831 63
	n BC	358	72	35	a. dem Abriss	BC	3 138 975		ξc	+	31 946 46
	BC	1377 m				sin n BC	9 780 956 n	2.919931 n	ηc	+	15 229 65

c) Diese vorläufigen Koordinaten für den Neupunkt C „Sonnenbühl“ liefern nach § 56, Formel 2, die in Spalte 7 und 9 der Tafel zu Fig. 292 eingetragenen Aufzeichnung der Fehlerfigur.

1.	2.			3.			4.			5.			6.			7.			8.		9.		10.		11.			
Bezeichnung der Festpunkte	Beobachtete Richtungen rückwärts			Orientierte Richtungen vorwärts			Unterschiede $\beta - \alpha$ Orient. Winkel $\omega = \frac{[\beta - \alpha]}{n}$			Orientierte Richtungen rückwärts $\gamma = \alpha + \omega$			Mittel $\mu = \frac{\beta + \gamma}{2}$			Aus Näherung berechnete Richtungswinkel ν			Widerspruch $\delta = \mu - \nu$		Strahlenlänge s		Quer-verschiebung $b = \frac{\delta}{\rho} \cdot s$		Gewicht $P = \frac{t}{s^2}$ (wobei s in km)			
	α			β			ω			γ			μ			ν			δ		s		b		P			
	0	'	''	0	'	''	0	'	''	0	'	''	0	'	''	0	'	''	0	'	''	+	''	m	cm	+	cm	t
1. Endberg .				92	37	52							92	37	52	92	37	52	—	0	427	—	0	1	5,5			
2. Reute . .	149	56	57	358	72	35	209	15	78	358	72	35	358	72	35	358	72	35	—	0	1377	—	0	2	1,1			
3. Mittlerweg						74							305	05	74	305	05	46	+	28	748	+	3,3	1	1,8			
4. Bergweg	376	80	40	305	05					185	96	18	185	96	18	185	96	10	—	192	1775	—	53,5	1	0,3			
5. Württemberg . .	173	18	27							382	34	05	382	34	05	382	34	85	—	80	2868	—	36,0	1	0,1			
		55	24				209	15	78	02	58		45	84		48	28	—	244									
	(s. Winkelheft)															—	2	44										
$3 \omega =$		47	34														45	84										
		02	58																									

Fig. 292.

Aufzeichnung der Zielstrahlen.



Die Punkte F stellen die Fusspunkte der Lote von P, \mathfrak{F} die Fusspunkte der Lote von A aus vor.

Die eingeschriebenen Fehlerbeträge sind in cm ausgedrückt.

vorläufigen Werte ν für die Richtungswinkel und s für die Verbindungsstrecken vom vorläufigen Neupunkt nach den Festpunkten.¹⁾ Die inneren Richtungen α in Spalte 2 sind direkt der Messung (bezw., bei exzentrischer Beobachtung, der Zentrierungsberechnung), die Richtungen β in Spalte 3 der Spalte 6 des Abrisses entnommen. Erstere liefern durch Orientierung je nach dem zugehörigen Wert β (im vorliegenden Beispiel nur nach einem einzigen) die orientierten inneren Richtungen γ .

Die Spalte 6 nimmt die Mittelwerte μ aus den orientierten inneren (γ) und äusseren (β) Richtungen auf, soweit überhaupt 2seitige Beobachtungen, also Mittelwerte, vorhanden sind, im übrigen die Werte β oder γ direkt. In Spalte 10 und 11 sind die nach Gleichungen 2 und 3 des § 70 unter Benützung des Rechenschiebers berechneten Querverschiebungen b , mittels welcher die Fehlerfigur nach dem in § 70 gezeigten Verfahren entworfen wird, und die Bestimmungsgewichte p eingetragen.

d) Wählt man als Mittelpunkt \mathfrak{M} eines beliebigen Kreises (Fig. 292) den Koordinatenursprung, als Halbmesser die Strecke $r = 50$ cm und gibt man dem Kreisschnittpunkt des Strahls 2 die Bedeutung von A (s. § 66), so erhält man den Schwerpunkt \mathfrak{S} der Kreisschnittpunkte \mathfrak{D} und den Schwerpunkt \mathfrak{S} der Lotfusspunkte \mathfrak{F} nach der Ableitung S. 490 wie nachstehend berechnet:

Auswahl des wahrscheinlichsten Punktes in der Fehlerfigur.

Strahl No.	für A (— 0,40, + 0,30 m)									
	Schwerpunkt \mathfrak{S} der Kreisschnittpunkte \mathfrak{D}				p	Schwerpunkt \mathfrak{S} der Lotfusspunkte \mathfrak{F}				
	$x_{\mathfrak{D}}$ cm	$y_{\mathfrak{D}}$ cm	$P \cdot x_{\mathfrak{D}}$ cm	$P \cdot y_{\mathfrak{D}}$ cm		$x_{\mathfrak{F}}$ cm	$y_{\mathfrak{F}}$ cm	$P \cdot x_{\mathfrak{F}}$ cm	$P \cdot y_{\mathfrak{F}}$ cm	
1	+ 45,5	+ 20,0	+ 250,3	+ 110,0	5,5	+ 2,9	+ 25,0	+ 15,9	+ 137,5	
2	— 40,0	+ 30,0	— 44,0	+ 33,0	1,1	— 40,0	+ 30,0	— 44,0	+ 33,0	
3	+ 34,3	+ 36,2	+ 61,7	+ 68,2	1,8	+ 0,5	+ 33,5	+ 0,9	+ 60,3	
4	— 49,0	— 10,4	— 14,7	— 3,1	0,3	— 32,2	+ 62,0	— 9,7	+ 18,6	
5	— 49,8	— 4,5	— 5,0	— 0,5	0,1	— 54,8	— 21,3	— 5,5	— 2,1	
			+ 312,0	+ 208,2	8,8			+ 16,8	+ 249,4	
			— 63,7	— 3,6				— 59,2	— 2,1	
		$x_{\mathfrak{S}} =$	+ 248,3	+ 204,6				— 42,4	+ 248,3	
			8,8	8,8			$x_{\mathfrak{S}} =$	8,8	8,8	
			= + 28,2	= + 23,2				= — 4,8	= + 28,2	

Nun zeichnet man den Linienzug A S bis \mathfrak{S} , \mathfrak{S} bis \mathfrak{M} , \mathfrak{M} bis \mathfrak{P} und A P. Auf letzterer Richtung trägt man ab:

$$A P = \frac{A S}{\mathfrak{M} \mathfrak{S}} 2 r = \frac{35,2}{78,7} \cdot 100 = 44,6 \text{ cm.}$$

Der Endpunkt dieser Strecke zeigt die Lage des Neupunktes P und liefert die gesuchten Koordinatenzuschläge:

$$d x = + 0,01 \text{ m}$$

$$d y = + 0,12 \text{ m,}$$

woraus

$$x_{\text{Sonnenbühl}} = + 31946,46 + 0,01 = + 31946,47;$$

$$y_{\text{Sonnenbühl}} = + 15229,65 + 0,12 = + 15229,77.$$

¹⁾ Berechnung s. S. 540.

tragen. Deren in Spalte 7 zu bildenden Abweichungen v gegenüber den orientierten Richtungen β dürfen die Fehlergrenze v_{Max}

(in Württemberg $60 + \frac{40000}{s}$ n. T. wie in Spalte 9 eingetragen)

in keinem Fall überschreiten. Um übersehen zu können, ob die Neubestimmung dieser Bedingung genügt, wird in Spalte 11 der Wert v_{Max} wenigstens in denjenigen Fällen eingeschrieben, in welchen die Abweichung v den Betrag von $60''$ n. T. übersteigt.

Als Rechenprobe haben wir: $[\varphi] - [v] = [\beta] = [\alpha] + n \cdot \omega$.

g) Will man sich über die bei der Punktbestimmung erreichte Genauigkeit Aufschluss verschaffen, so berechnet man unter Beachtung, dass 2 der n Bestimmungsstrahlen zur Bestimmung nötig, also $(n - 2)$ überschüssig waren, die mittlere lineare Querverfehlung eines Strahls vom Gewicht 1

$$m_h = \pm \sqrt{\frac{[p h h]}{n - 2}}, \text{ oder}$$

den mittleren Fehler einer einseitig beobachteten Richtung

$$m''_{\mu} = \pm \sqrt{\frac{[t v v]}{n - 2}}$$

und den mittleren linearen Fehler in der Bestimmung des Punktes P

$$M = \pm \sqrt{\frac{[p h h]}{(n - 2)[p]}}$$

Oder man konstruiert nach § 58 Fehlerellipsen, indem man für eine Anzahl etwa in profilartigen Reihen angeordneter Punkte der Fehlerfigur je die mittleren Fehler M , oder m_{μ} berechnet und — nachdem diese Werte als Ordinaten zur Punktreihe aufgetragen sind — Punkte bestimmter runder M oder m_{μ} interpoliert. Die Verbindungslinien gleichartiger solcher Punkte, die „Fehlerellipsen“ zeigen mit ihrer Längsachse die Lage der grössten Bestimmungsunsicherheit an. Das oben behandelte Beispiel liefert in Fig. 292 für den gewählten Punkt P den mittleren linearen Bestimmungsfehler $M = \pm 5,7$ cm. Wäre dagegen statt P irgend einer der mit \times und Zahlen versehenen Punkte in Fig. 292 als Neupunkt gewählt worden, so hätte der mittlere lineare Fehler der Punktbestimmung die angeschriebene Zahl von cm erreicht. Die Auswahl von P auf dem Umfang der eingezeichneten Ellipse, statt in ihrem Mittelpunkt, hätte z. B. einen linearen Bestimmungsfehler von 10 cm geliefert. Lage und Form der Kurve lässt für vorliegendes Beispiel erkennen: die grosse Achse verläuft von Ost nach West. In dieser Richtung ist die schlechteste Bestimmung vorhanden. Die Unsicherheit in der Abszisse ist ca. $2\frac{1}{2}$ mal kleiner, als die der Ordinate. (Vergl. hiemit deren mittleren Fehler $m_x = \pm 0,03$, $m_y = \pm 0,07$, S. 542/543). Abzuhelfen wäre durch Beobachtung weiterer, etwa nördlich gerichteter Bestimmungsstrahlen.

§ 72. Vorwärtseinschnitt mit rechnerischer Ausgleichung der Beobachtungswidersprüche.

Der Vorwärtseinschnitt auf Grund von Richtungsbeobachtungen unterscheidet sich von dem Verfahren des § 68, in welchem Winkelbeobachtung vorausgesetzt war, nur durch die Verschiedenheit der Gewichte p für die Bestimmungsstrahlen. Während dort jeder von einem Festpunkt ausgehende Neustrahl durch 1, 2... n_f unabhängige Winkel auf 1, 2... n_f Feststrahlen sich gründete,

Genauigkeitsuntersuchung.

also 1, 2... n_r mal öfter beobachtet war, als jeder Feststrahl, und daher das Gewicht $p = 1, 2 \dots n_r$ erhielt, ist bei Benützung von Richtungsbeobachtungen jeder von einem Festpunkt ausgehende Neu- und Feststrahl gleich oft beobachtet, also gleichgewichtig. Sind in die beobachteten Sätze ausser dem Neustrahl wieder n_r Richtungen $\alpha_1 \dots \alpha_{n_r}$ nach Festpunkten („Feststrahlen“) aufgenommen worden, deren aus Koordinaten berechnete Richtungswinkel wieder φ heissen mögen, so ist, wie in § 63, das beobachtete Richtungsbüschel α zur Orientierung um den Winkel ω_{Mittel} zu verdrehen, der sich ergibt als arithmetisches Mittel aus allen möglichen Unterschieden $\varphi - \alpha$:

$$\omega_{\text{Mittel}} = \frac{[\varphi - \alpha]}{n_r}.$$

Damit wird die orientierte Richtung nach dem Neupunkt

$$\beta_P = \alpha_P + \frac{[\varphi - \alpha]}{n_r} = \alpha_P + \omega_{\text{Mittel}} \quad (1)$$

und ihr mittlerer Fehler

$$m_\beta = \pm \sqrt{m_\alpha^2 + m_{\omega_{\text{Mittel}}}^2} \quad (2)$$

Setzt man die Richtungswinkel φ der Feststrahlen als fehlerfrei voraus, so ist der mittlere Fehler von $(\varphi - \alpha)$ gleich demjenigen von α , somit, da zur Bildung von $\omega \div n_r$ gleichgenaue Werte $\varphi - \alpha$ verwendet wurden, $m_\omega = \frac{m_\alpha}{\sqrt{n_r}}$. Damit wird

$$m_\beta = \pm \sqrt{m_\alpha^2 + \frac{m_\alpha^2}{n_r}} = m_\alpha \sqrt{\frac{n_r + 1}{n_r}} \quad (2^a)$$

und wir erhalten aus der Proportion $p_\beta : p_\alpha = m_\alpha^2 : m_\beta^2$ das Gewicht der in den Festpunkten satzweise beobachteten „äusseren“ oder „Vorwärts“-Richtungen β nach dem Neupunkte:

$$p_\beta = p_\alpha \frac{m_\alpha^2}{m_\beta^2} = p_\alpha \cdot \frac{n_r}{n_r + 1} \quad (3)$$

Für $p_\alpha = 1$ wird also $p_\beta = \frac{n_r}{n_r + 1}$.

Mit diesen neuen Strahlengewichten p wird die Lösung genau wie in § 68 durchgeführt.

§ 73. Rückwärtseinschnitt mit rechnerischer Ausgleichung der Beobachtungswidersprüche.

Das in § 67 vorgeführte Verfahren liesse sich ohne weiteres auch auf Richtungsbeobachtungen anwenden, wenn man die dort als gemessen vorausgesetzten Winkel durch Subtraktion je zweier Richtungswerte α gewinnen wollte. Die Zahl der zu verwendenden Winkel und Fehlergleichungen wäre aber dann beim Vorhandensein von n_r beobachteten und gleichmässig zu berücksichtigenden inneren Richtungen $= \binom{n_r}{2}$, also sehr gross. Wir suchen daher

ein einfacheres Verfahren. Wie bisher berechnen wir zunächst die Koordinaten x, y eines in möglichster Nähe des Neupunktes P gelegenen vorläufigen Punktes \mathfrak{P} und betrachten dann die ihnen zuzufügenden Zuschläge dx und dy , aus denen wir die gesuchten Koordinaten mittels $x_P = x + dx, y_P = y + dy$ erhalten, als eigentliche Unbekannte.

Das im Neupunkt P gemessene Richtungsbüschel α kann man nun, ohne an der gegenseitigen Lage der Strahlen, also an der Eigenschaft der Richtungen als Messungsergebnissen etwas zu ändern, um den zunächst unbekanntem Betrag Z derart verdrehen, dass die Individuen dieses mit dem Scheitel nach dem zunächst unbekanntem endgültigen Punkte P gelegten beobachteten Strahlenbüschels von den Verbindungslinien des endgültigen Neupunktes mit den Festpunkten möglichst wenig abweichen. Wären Messung der Richtungen und Lage der Festpunkte fehlerfrei und Projektionsverzerrungen nicht vorhanden, so müssten dann sogar sämtliche zusammengehörigen Strahlen einander decken; der Unterschied: endgültiger Richtungswinkel $[n P A] \dots$ — endgültig orientierter Richtungswert $[\alpha_A] \dots$ wäre = 0. Träfe dies dagegen — wie es in Wirklichkeit der Fall sein wird — nicht zu, so würden die Unterschiede direkt die an den endgültig orientierten, gemessenen Richtungswerten $[\alpha_A] \dots$ anzubringende Verbesserungen $v_A \dots$ darstellen. Um den unbekanntem Verdrehungswinkel Z zu finden, zerlegen wir ihn, wie in ähnlichen Fällen gewohnt, in einen Näherungswert ω und den unbekanntem Zuschlag z, so dass:

$$Z = \omega + z. \tag{1}$$

Damit wird aus den im Neupunkt P endgültig orientierten, nach den Festpunkten A, B, ... gemessenen Richtungen α :

$$\begin{aligned} [\alpha_A] &= \alpha_A + \omega + z. \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2}$$

Einen Näherungsbetrag ω für den Verdrehungswinkel Z gewinnen wir, wenn wir das gemessene Strahlenbüschel mit dem Scheitel — statt auf den endgültigen, aber zunächst unbekanntem Punkt P — vorerst auf den vorläufigen Punkt \mathfrak{P} so legen, dass die beobachteten Richtungen die Verbindungslinien von \mathfrak{P} nach den Festpunkten möglichst decken. Dies ist der Fall, wenn die Summe der Abweichungen l' der vorläufig orientierten Richtungswerte $\alpha_A + \omega, \alpha_B + \omega \dots$ von den zugehörigen vorläufigen Richtungswinkeln $v_A, v_B, \dots = (n P A), (n P B) \dots = 0$ wird, d. h. wenn

$$(n P A) - (\alpha_A + \omega) + (n P B) - (\alpha_B + \omega) + \dots = 0.$$

Setzen wir die (durch Addition von ω zu den gemessenen Richtungswerten α) vorläufig orientierten, aber in ihrer gegenseitigen

Lage dadurch nicht veränderten Richtungen $\alpha + \omega = \alpha^0$, und die Unterschiede

$$\begin{aligned} \{(n P A) = \nu_A\} - \alpha_A^0 &= l'_A \\ \{(n P B) = \nu_B\} - \alpha_B^0 &= l'_B, \\ &\vdots \end{aligned}$$

so wird hieraus: $[l'] = 0$, und wir erhalten für den vorläufigen Verdrehungswinkel:

$$(3) \quad \begin{aligned} \omega &= \frac{(n P A) - \alpha_A + (n P B) - \alpha_B + \dots + (n P R) - \alpha_R}{n_r} = \frac{[\nu - \alpha]}{n_r} \\ &= \frac{\Sigma \text{ der vorl. Richt.-Winkel} - \Sigma \text{ der gem. Richtungen}}{n_r} = \frac{[\nu] - [\alpha]}{n_r}. \end{aligned}$$

Wir haben für jeden Bestimmungsstrahl jetzt vier Richtungs-
werte zu unterscheiden, nämlich

- a) die im Punkt \mathfrak{P} vorläufig orientierte, gemessene Richtung α^0 ,
- b) den Richtungswinkel $\nu_A, \nu_B \dots$, oder $(n P A), (n P B) \dots$ der Verbindungsstrecke vom vorläufigen Punkt \mathfrak{P} zum Festpunkt A, B \dots ,
- c) die im Neupunkt P endgültig orientierte, gemessene Richtung $[\alpha] = \alpha + \omega + z = \alpha^0 + z$,
- d) den Richtungswinkel $[n P A], [n P B] \dots$ der Verbindungsstrecke vom endgültigen Neupunkt P zum Festpunkt A, B \dots .

Die zusammengehörigen Werte (b) und (d) unterscheiden sich voneinander um die Änderung $d\varphi''$, welche der Richtungswinkel $\nu_A = (n P A), \nu_B = (n P B) \dots$, erleidet, wenn man den Anfangspunkt \mathfrak{P} der Strecken $\mathfrak{P}A, \mathfrak{P}B \dots$ um die Koordinatenzuschläge dx und dy nach P verschiebt. Nach Gleichung (d) von § 67 ist also

$$\begin{aligned} [n P A] &= (n P A) + a_A dx + b_A dy \\ [n P B] &= (n P B) + a_B dx + b_B dy \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bezeichnen wir endlich, wie gewohnt, die zur Erzielung völliger Übereinstimmung der Beobachtungs- mit den endgültigen Werten nötige Verbesserung des endgültig orientierten Richtungswertes $[\alpha]$ mit v , so erhalten wir die Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} v_A &= [n P A] - [\alpha_A] = (n P A) + a_A dx + b_A dy - \alpha_A^0 - z \\ &= a_A dx + b_A dy - z + l'_A \\ v_B &= [n P B] - [\alpha_B] = (n P B) + a_B dx + b_B dy - \alpha_B^0 - z \\ &= a_B dx + b_B dy - z + l'_B \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ihre Zahl ist gleich derjenigen der beobachteten inneren Richtungen, also gleich n_r . Setzen wir, um den Koeffizienten der dritten

büschels α nach den vorläufigen Richtungswinkeln ν wird $[l'] = 0$, also auch der Subtrahent in (6) $\frac{[l']}{n_r} = 0$.

Aus den Fehlergleichungen (7) erhält man jetzt durch die Bedingung $[vv] = \text{Min.}$ wie in § 67 zwei Normalgleichungen für die Berechnung der unbekanntenen Koordinatenzuschläge, nämlich

$$(8) \quad \begin{cases} [A\mathcal{A}] dx + [A\mathcal{B}] dy + [A\mathcal{L}] = 0 \\ [B\mathcal{A}] dx + [B\mathcal{B}] dy + [B\mathcal{L}] = 0. \end{cases}$$

Die Reduktion (Eliminierung der linksstehenden Unbekannten) liefert:

$$(9) \quad \begin{cases} dy = -\frac{[B\mathcal{L} \cdot 1]}{[B\mathcal{B} \cdot 1]} \\ P_{dy} = P_y = [B\mathcal{B} \cdot 1] \end{cases}$$

und da die Zahl der nötigen Richtungen = 3, die der überschüssigen also = $n_r - 3$ ist, als mittleren Fehler

$$(10) \quad \begin{cases} \text{einer Richtung:} \\ m_\alpha = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n_r - 3}} \\ \text{der Ordinate } y: \\ M_y = \pm \sqrt{\frac{[\mathcal{L}\mathcal{L} \cdot 2]}{(n_r - 3)[B\mathcal{B} \cdot 1]}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{(n_r - 3)P_y}}. \end{cases}$$

Wollen wir schliesslich noch den Zuschlag $z = -d\omega$ zum vorläufigen Verdrehungswinkel ω berechnen, so liefert Gleichung (5)

$$(11) \quad z \equiv -d\omega = \frac{[a]}{n_r} dx + \frac{[b]}{n_r} dy + \frac{[l']}{n_r}$$

und da $[l'] = 0$,

$$(12) \quad z \equiv -d\omega = \frac{[a]}{n_r} dx + \frac{[b]}{n_r} dy,$$

womit im Abriss die Probe sich ergibt, dass der bei der Richtungsorientierung im endgültigen Neupunkt P auftretende Verdrehungswinkel Z sein muss

$$(1) \quad Z = \underline{\omega + z} = \underline{\omega - d\omega}.$$

Umstellung der Koeffizienten der Normalgleichungen nach der bekannten Regel liefert auf gleiche Weise die zweite Unbekannte dx , ihr Gewicht P_x und ihren mittleren Fehler M_x .

Beispiel.

Auf Neupunkt 1 wurden beobachtet		Gegeben sind die Koordinaten von:	
die Richtungen nach:		x	y
1. Kleineislingen, Kirchturm	0° 00' 43"	1. Kleineislingen	+ 19542,58 + 48303,08
2. Haag	118° 07' 53"	2. Haag	+ 19514,61 + 49337,57
3. Gross-Süssen, Kirchturm	222° 17' 82"	3. Gross-Süssen	+ 17951,44 + 51939,72
4. Steinigtenrain	258° 84' 82"	4. Steinigtenrain	+ 18336,92 + 49856,57
5. Berg I	325° 82' 74"	5. Berg I	+ 18962,09 + 49013,80

Gesucht die Koordinaten von 6. Neupunkt 1.

Beispiel zu Seite 532.

Bezeichnung der Punkte	Winkel			log-Berechnung			Abszissen x			Ordinaten y										
	reduziert			gemess.			n			±										
	0	'	"	0	'	"	Δx	Δy	n	±	±	±								
△ No. 1	A C	1204					3	109	572	A	+	18	336	92	A	+	49	856	57	
	n A C	368	35	18			0	095	923	△x	+	1	058	81	△y	-		574	22	
	n A B	373	57	47			9	943	967		+									
	α	5	22	29			3	080	646	3.024613		+								
	γ	140	77	29	77		9	678	430	2.759076 n	x _C	+	19	395	23	y _C	+	49	282	35
	β	54	00	42			9	875	151											
	Summe	200	00	00			9	875	151											
	n B A	173	57	47			3	205	495		B	+	19	514	61	B	+	49	337	57
	n B C	227	57	89			8	913	545		△x	-				△y	-		55	22
	B C	132					9	957	905	2.076943 n	x _C	+	19	395	23	y _C	+	49	282	35
△ No. 2	A C	132					3	014	885											
	n A C	227	57	89			0	017	737											
	n A B	301	72	08			2	119	038											
	α	74	14	10			9	086	413											
	γ	118	07	10	07	10	3	032	622		B	+	19	542	58	B	+	48	303	08
	β	7	78	71			9	963	145		△x	-				△y	+		979	28
	Summe	200	00	00			9	172	588	2.168355 n	x _C	+	19	395	23	y _C	+	49	282	36
	n B A	101	72	08			2	995	767	2.990905										
	n B C	109	50	79			9	995	138											
	B C	990					9	995	138											

Zu △ No. 1.

$$\Delta y = - 519,00$$

$$\Delta x = + 1177,69$$

$$n A B = 373^{\circ} 57' 47''$$

Zu △ No. 2.

$$\Delta y = - 1034,49$$

$$\Delta x = + 27,97$$

$$n A B = 301^{\circ} 72' 08''$$

Nebenrechnung I.
Richtungswinkel und Länge der Grundlinien.

Nebenrechnung II.
Winkel α_1 und β_2 nach Gl. (1) bis (6) des § 59.

	0	'	"	n
$\gamma_1 + \gamma_2 =$	258	84	39	3
$\beta_1 + \alpha_2 =$	128	14	61	3
$\alpha_1 + \beta_2 =$	13	01	00	0
$\lambda =$	62	34	86	0
$R - \lambda =$	12	34	86	9
$\frac{\alpha_1 + \beta_2}{2} =$	6	50	50	9
$\frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} =$	1	28	21	8
$\alpha_1 =$	5	22	29	3
$\beta_2 =$	7	78	71	3

Lösung.

a) Berechnung vorläufiger Koordinaten für den Neupunkt durch Rückwärtseinschnitt aus den Festpunkten 1, 2, 4 nach § 59.

Ausrechnung hiezu siehe Seite 531.

b) Berechnung der Richtungswinkel $\nu = (nPA)$ etc. vom vorläufigen Punkt \mathfrak{P} nach den Festpunkten (soweit sie nicht soeben bei der Koordinatenberechnung (S. 531) ermittelt wurden) und der zugehörigen Richtungskoeffizienten a und b , wie folgt:

\mathfrak{P} x und y	6. Neupunkt (\mathfrak{P})									
	$x = +19395,23$ $y = +49282,35$									
B	3. Grosssüssen		5. Berg		4. Steingrain		2. Haag		1. Kleinsingen	
x_B	+	17951,44	+	18962,09	—		—		—	
y_B	+	51939,72	+	49013,80	—		—		—	
$x_B - x$	—	1443,79	—	433,14	—		—		—	
$y_B - y$	+	2657,37	—	268,55	—		—		—	
Berechnung s. S. 531										
$\log(x_B - x)$	3	159504 n	2	636628 n						
$\log \cos n \mathfrak{P} B$	9	6788	9	9294 n	9	9440 n	9	9579	9	1726
$\log \sin n \mathfrak{P} B$	9	9438	9	7217 n	9	6784	9	6230	9	9951 n
$\log(y_B - y)$	3	424452	2	429025 n						
$\log \cotg n \mathfrak{P} B$	9	735052 n	0	207603						
$\log \mathfrak{P} B$	3	4807	2	7072	3	0806	2	1190	2	9958
$n \mathfrak{P} B$		0 / "		0 / "						
$\mathfrak{P} B$		131 68 44		235 33 25						
		3025		510						
$\log b$	2	0020	3	0261	2	6672	3	6428 n	1	9807 n
$\log a$	2	2670	2	8184 n	2	4017	3	3079	2	8033 n
b	+	100	+	1062	+	465	—	4393	—	96
a	+	185	—	658	+	252	+	2032	—	636

(c Bildung der der Ausgleichung zu Grund zu legenden Koeffizienten a und b und der Absolutglieder l' der Fehlergleichungen. (Ausrechnung s. S. 533 oben).

Bequemerer Rechnung wegen führen wir hier statt der Zuschläge dx und dy in Gleichung (7) ihre 10fachen Beträge ein, (drücken sie also in dm aus). Damit werden die Koeffizienten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} dieser Fehlergleichungen, also auch die Richtungskoeffizienten a und b auf $\frac{1}{10}$ der oben berechneten Werte reduziert. (Um dadurch die Schreibweise nicht zu erschweren, sind auch diese reduzierten Werte unter der Bezeichnung a bzw. b eingeführt. Eine weitere Vereinfachung wäre zu erreichen, wenn, wie in § 67, als Winkeleinheit die Dekasekunde gewählt würde, was hier zur Abwechslung aber unterbleibt.)

Laufende No.	Bezeichnung der Festpunkte	Beobachtete Richtungen rückwärts = α			Aus Näherung berechnete Richtungswinkel ν			Unterschied $\nu - \alpha$ $\omega = \frac{\nu - \alpha}{n_r}$		$l' = \nu - \alpha^0 = \nu - (\alpha + \omega) = (\nu - \alpha) - \omega$		Koeffizienten der Unbekannten $dx \quad dy$		$\frac{[a]}{n_r}$	$\frac{[b]}{n_r}$	$\mathfrak{A} = \alpha - \frac{[a]}{n_r}$	$\mathfrak{B} = \nu - \frac{[b]}{n_r}$	$\mathfrak{C} = l'$	$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = s$						
		0	'	''	0	'	''	0	'	''	±	Sek.	±	±	±	±	±	±	±	±					
												±	±	±	±	±	±	±	±						
1	Klein-eislingen	0	00	43	309	50	79	309	50	36	—	8	—	64	—	10	—	87	+	47	—	8	—	48	
2	Haag . .	118	07	53	27	57	89	309	50	36	—	8	+	203	—	439	+	180	—	382	—	8	—	210	
3	Gross-süssen .	222	17	82	131	68	44	309	50	62	+	18	+	19	+	10	—	4	+	67	+	18	+	81	
4	Steingartenrain .	258	84	82	168	35	18	309	50	36	—	8	+	25	+	47	+	2	+	104	—	8	+	98	
5	Berg I . .	325	82	74	235	33	25	309	50	51	+	7	—	66	+	106	—	89	+	163	+	7	+	81	
		93	34		45	55		221	+	25	+	24	+	247	+	163	+	182	+	381	+	1	+	260	
		2	21					5	—	24	—		—	130	—	449	—	180	—	382				— 258	
		5	55						+	1	+		+	117	—	286	+	2	—	1				+	2
	Vorläuf. Verdreh.-Wink. $\omega =$				309 50 44				(soll 0)				$\frac{[a]}{n_r}$	$\frac{[b]}{n_r}$	(soll 0)	(soll 0)	(soll 0)	(soll 0)	(soll 0)	(soll 0)	(soll 0)	(soll 0)	(soll 0)	(soll 0)	
													= +23	= -57											

d) Bildung der Koeffizienten für die Normalgleichungen.

	$\mathfrak{A}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}\mathfrak{B}$	$l'l'$	$s s$	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}l'$	$\mathfrak{B}l'$
	+	+	+	+			
1	7569	2209	64	2304	$\times 5911$	696	$\times 624$
2	32400	145924	64	44100	$\times 31240$	$\times 8560$	3056
3	16	4489	324	6561	$\times 732$	$\times 28$	1206
4	4	10816	64	9604	208	$\times 84$	$\times 168$
5	7921	26569	49	6561	$\times 85493$	$\times 377$	1141
	47910	190007	565	69130	$\times 12584$	$\times 8545$	4195
					— 87416	— 1455	

e) Anschrieb und Reduktion der Koeffizienten der Normalgleichungen bis zur zweiten Reduktionsstufe. Bildung von dy .

	\mathfrak{A}	\mathfrak{B}	l'	s	Probe
$\frac{[\mathfrak{A}]}{[\mathfrak{B}]}$	+	47910	— 87416	— 1455	— 40961
$\frac{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]}{[\mathfrak{A}l']}$			+	4195	+
$\frac{[\mathfrak{A}l']}{[\mathfrak{A}\mathfrak{A}]}$			(— 159496)	(— 2655)	(— 74737)
$\frac{[\mathfrak{A}l']}{[\mathfrak{A}\mathfrak{A}]}$				+	565
$\frac{[\mathfrak{A}l']}{[\mathfrak{A}\mathfrak{A}]}$				(— 44)	(— 1244)
					$[\] = 69130$
					soll 69130
$dy = -\frac{[\mathfrak{B}l']}{[\mathfrak{B}\mathfrak{B}]}$			$\mathfrak{B}.1]$	$l'.1]$	$s.1]$
			+	30511	+
				1540	+
				521	+
				(— 78)	(— 1620)
$= -\frac{1540}{30511} \text{ dm}$					
$= -0,05 \text{ dm}$					
			$l'.2]$	$s.2]$	
			+	443*	+
				441*	

* Die zwei Schlusswerte stellen die Quadratsumme [vv] der Beobachtungsfehler v vor und sollten daher einander und denjenigen auf S. 534 mitten gleich sein. Die Differenz rührt von Abrundungsfehlern in der Rechnung her und kann vernachlässigt werden, sobald sie, (was hier zutrifft) den Wert m_a'' für den mittleren Beobachtungsfehler einer Richtung (s. f. S. 534) nicht merklich beeinflusst.

Fortsetzung.

e) Nach erfolgter Bildung von dy , Umstellung der Koeffizienten und Berechnung der nunmehr rechts stehenden Unbekannten dx .

		B]		A]		l']		s]	Probe
[B	+	190007	—	87416	+	4195	+	106786	[] = 69130 soll 69130
[A			+	47910	—	1455	—	40961	
— $\frac{[B A]}{[B B]}$ [B			(—	40200)	(+)	1928)	(+)	49100)	
[l'					+	565	+	3305	
— $\frac{[B l']}{[B B]}$ [B					(—	92)	(—	2360)	
<hr/>									
				A . 1]		l' . 1]		s . 1]	
$dx = -\frac{[A l' . 1]}{[A A . 1]}$		[A	+	7710	+	473	+	8139	8183
		[l'			+	473	+	945	+ 946
$= -\frac{473}{7710} dm$		— $\frac{[A l' . 1]}{[A A . 1]}$ [A			(—	29)	(—	498)	
$= -0,06 dm$						l' . 2]		s . 2]	
				[l'	+	444*	+	447*	

* Die zwei Schlusswerte sollten einander und denjenigen von S. 533 gleich sein. (Vergl. Fussnote S. 533.)

f) Berechnung der mittleren Fehler M_x und M_y für die Neupunktskoordinaten x und y und ihrer Gewichte P , sowie des Zuschlags $z = -d\omega$ zum vorläufigen Verdrehungswinkel ω und des mittleren Beobachtungsfehlers m_a einer Richtung.

$d\omega = -\frac{[a]}{n_r} dx - \frac{[b]}{n_r} dy$ $= -23(-0,06) - (-57)(-0,05) = 1,38 - 2,85$ $= +1,47''$	<table style="width:100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$[v v] = [l' l' . 2]$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">+</td> <td>444</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$n_r - 3$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">+</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$m^2 = \frac{[l' l' . 2]}{n_r - 3}$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">+</td> <td>222</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">m_a</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">±</td> <td>14,8''</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\sqrt{P_x} = \sqrt{[A A . 1]}$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"></td> <td>88</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\sqrt{P_y} = \sqrt{[B B . 1]}$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"></td> <td>175</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$m_x = \frac{m}{\sqrt{P_x}}$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">±</td> <td>0,17 dm</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$m_y = \frac{m}{\sqrt{P_y}}$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">±</td> <td>0,085 dm</td> </tr> </table>	$[v v] = [l' l' . 2]$	+	444	$n_r - 3$	+	2	$m^2 = \frac{[l' l' . 2]}{n_r - 3}$	+	222	m_a	±	14,8''	$\sqrt{P_x} = \sqrt{[A A . 1]}$		88	$\sqrt{P_y} = \sqrt{[B B . 1]}$		175	$m_x = \frac{m}{\sqrt{P_x}}$	±	0,17 dm	$m_y = \frac{m}{\sqrt{P_y}}$	±	0,085 dm
$[v v] = [l' l' . 2]$	+	444																							
$n_r - 3$	+	2																							
$m^2 = \frac{[l' l' . 2]}{n_r - 3}$	+	222																							
m_a	±	14,8''																							
$\sqrt{P_x} = \sqrt{[A A . 1]}$		88																							
$\sqrt{P_y} = \sqrt{[B B . 1]}$		175																							
$m_x = \frac{m}{\sqrt{P_x}}$	±	0,17 dm																							
$m_y = \frac{m}{\sqrt{P_y}}$	±	0,085 dm																							

Somit ist $x_P = +19395,23 - 0,006 \pm 0,017 = +19395,22 \pm 0,02$

$y_P = +49282,35 - 0,005 \pm 0,009 = +49282,34 \pm 0,01.$

g) Berechnung der endgültigen Richtungswinkel $\varphi = [nPA]$ etc. vom Neupunkt P nach den benützten Festpunkten und zur Probe von $[nPA] - (nPA) \equiv \varphi - \nu = a dx + b dy$.

x _P und y _P	6. Neupunkt 1. + 19395,22 + 49282,34				
	1. Kleinslingen	2. Haag	3. Grosssüssen	4. Steinigtenrain	5. Berg I
x _B	+ 19542,58	+ 19514,61	+ 17951,44	+ 18336,92	+ 18962,09
y _B	+ 48303,08	+ 49337,57	+ 51939,72	+ 49856,57	+ 49013,80
x _B - x _P	+ 147,36	- 119,39	- 1443,78	- 1058,30	- 433,13
y _B - y _P	- 979,26	+ 55,23	+ 2657,38	+ 574,23	- 268,54
log (x _B - x _P)	2 168380	2 076968	3 159501 n	3 024609 n	2 636618 n
log (y _B - y _P)	2 990898 n	1 742175	3 424454	2 759086	2 429009 n
log ctg n P B	9 177482 n	0 334793	9 735047 n	0 265523 n	0 207609
$\varphi \equiv n P B$	309° 50' 86"	27° 58' 37"	131° 68' 40"	168° 35' 10"	235° 33' 21"
$\nu \equiv n \text{ } \text{B}$	309° 50' 79"	27° 57' 89"	131° 68' 44"	168° 35' 18"	235° 33' 25"
$\varphi - \nu$	+ 7"	+ 48"	- 4"	- 8"	- 4"
a dx	+ 6,4"	- 20,3"	- 1,9"	- 2,5"	+ 6,6"
b dy	+ 1,0"	+ 43,9"	- 1,0"	- 4,7"	- 10,6"
a dx + b dy	+ 7"	+ 24"*	- 3"	- 7"	- 4"

* NB. Die Strecke misst nur 132 m, also kann eine Punktverschiebung um 1/2 cm eine Winkeländerung von $\frac{0,005}{132} \cdot \varphi'' = 24''$ verursachen!

h) Den Abschluss der Punkteinschaltung bildet der Abriss.

Ziel- punkte	Beobachtete Richtungen α		Endgültige Richtungswinkel φ		Unterschiede $\varphi - \alpha$ Orientierungswinkel $Z = \frac{[\varphi - \alpha]}{n}$		Orientierte Richtungen $\beta = \alpha + \omega$		Ver- besse- rung $\nu = \varphi - \beta$		Stre- cken- länge s m	Höchst- zu- lässiger Wert von ν = ν_{\max}	Bemerkungen. (n = Anzahl der Richtungen). (Probe: $[\beta] =$ [α] + n ω)					
	0	'	''	0	'	''	0	'	''	+				-				
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.										
6. Neupunkt 1. $x = +19395,22$ $y = +49282,34$ (Stein 0,3 m versenkt. \triangle oben) ¹⁾																		
1. Klein- eisingen	0	00	43	309	50	86	309	50	43	309	50	95	9	990	1	00	81	
2. Haag	118	07	53	27	58	37	309	50	84	27	58	05	32	132	3	62	1024	
3. Gross- süssen	222	17	82	131	68	40	309	50	58	131	68	34	6	3025	72		36	
4. Steinig- tenrain	258	84	82	168	35	10	309	50	28	168	35	34	24	1204	93		576	
5. Berg I.	325	82	74	235	33	21	309	50	47	235	33	26	5	510	1	38	25	
		93	34		45	94			260		45	94	38	38				[v v] = 742
		5 ω =	52	60			Z =	309	50	52*			0					soll überein- stimmen mit
			45	94	nach (c) ist	ω =	309	50	44									[v v, 2] = 442
					nach (f) ist	- d ω =			1,5									s. (e) S. 533 und 534*.
					nach Gl. (1) soll	Z = $\omega - d \omega$ =	309	50	42,5'									

* Die starken Differenzen in Z und [v v] rühren her von der Abrundung der Koordinaten x_P und y_P auf ganze cm und von den kurzen Strahlenlängen.

¹⁾ Die mit schrägen Lettern gedruckten Ziffern werden in roter Tinte eingesetzt.

§ 74. Vereinigtes Vor- und Rückwärtseinschneiden mit rechnerischer Ausgleichung der Beobachtungswidersprüche.

Sind zur Bestimmung der Neupunktskoordinaten x_p und y_p Richtungen sowohl in Festpunkten (Vorwärts-, oder äussere Richtungen), als auch im Neupunkt selbst beobachtet (innere, oder Rückwärtsrichtungen), so kommen für erstere die Fehlergleichungen des § 72, für letztere diejenigen des § 73 gleichzeitig zur Anwendung. Man hat deren also jetzt, wie in § 69 ($n_v + n_r$), wenn von aussen herein zum Neupunkt n_v , vom Neupunkt hinaus zu Festpunkten n_r Neustrahlen beobachtet wurden. Die Koeffizienten der zu den vorläufigen Koordinaten x und y zu addierenden unbekanntem Zuschläge dx und dy in den Normalgleichungen setzen sich also aus $n_v + n_r$ Summanden zusammen. Dass die ihnen zu grund liegenden Richtungskoeffizienten a bzw. a und b bzw. b für jeden Neustrahl identisch sind, gleichgültig, in welcher Richtung derselbe beobachtet wurde, haben wir in § 69 erkannt.

Nur die Gewichte p der Absolutglieder $l_A, l_B \dots$ und l'_A, l'_B bzw. $Q_A, Q_B \dots$ verlangen jetzt, da gleichzeitig innere und äussere Richtungen zur Bestimmung der Unbekannten verwendet werden, noch eine vergleichende Untersuchung.

Als Gewicht p einer äusseren Richtung oder der Absolutglieder $l_A, l_B \dots$ haben wir in § 72 für den Fall des Vorwärtseinschnittes festgestellt:

im Falle der Richtungsbeobachtung: $p_v = p_\beta = \frac{n_r}{n_r + 1}$,
wenn ausser dem Neustrahl noch n_r Feststrahlen dem im Festpunkt beobachteten Richtungsbüschel angehören.

Die Gewichte p_r der inneren Richtungen, oder der betreffenden Absolutglieder $l'_A, l'_B \dots$ bzw. $Q_A, Q_B \dots$ waren in § 73, d. h. für den Fall des Rückwärtseinschnittes je unter sich gleich, also nicht weiter zu berücksichtigen. Sollen sie aber jetzt mit äusseren Richtungen in Verbindung gebracht werden, so müssen wir das Verhältnis der beiderseitigen Gewichte p_v und p_r feststellen.

Dies war bei vorhandener Winkelmessung (s. § 69) sehr einfach, da bei gleich genauer Beobachtung jedem Winkel — gleichviel, ob sein Scheitel im Festpunkt oder im Neupunkt liegt — gleiches Gewicht zukam.

Etwas anders ist es bei der Richtungsbeobachtung. Denken wir uns das innere Richtungsbüschel mit dem Scheitel im endgültigen Neupunkt P nach den benützten fehlerfreien Festpunkten $A, B \dots$ orientiert, d. h. sämtliche inneren Richtungswerte um den Wert Z des Verdrehungswinkels vergrössert, so wird jede beobach-

Wir haben also bei vereinigttem Vor- und Rückwärtsein-schneiden und vorgängiger Eliminierung der Verdrehungsunbe-kannten $d\omega$ für das innere Richtungsbüschel:

	Fehlergleichungen	Gewicht p der Beobachtung oder des Absolut- gledes
Zahl	r ü c k w ä r t s	
n_v Glei- chungen für n_v Zie- lungen vorwärts	$\begin{cases} v_A = a_A dx + b_A dy + l_A \\ v_B = a_B dx + b_B dy + l_B \\ \vdots \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{n_{fA}}{n_{fA} + 1} \\ \frac{n_{fB}}{n_{fB} + 1} \\ \vdots \end{cases}$
		wobei a und b die in § 67, Gleichung (2) und 1 die auf S. 509 oben gegebene Bedeutung haben,
und	r ü c k w ä r t s	
n_r Glei- chungen für n_r Zie- lungen rückwärts	$\begin{cases} v_A = \mathfrak{A}_A dx + \mathfrak{B}_A dy + \mathfrak{L}_A \\ v_B = \mathfrak{A}_B dx + \mathfrak{B}_B dy + \mathfrak{L}_B \\ \vdots \end{cases}$	$\begin{cases} \left(\frac{n_r}{n_r + 1}\right)^2 \\ \left(\frac{n_r}{n_r + 1}\right)^2 \\ \vdots \end{cases}$
		oder ge- nähert 1
		wobei \mathfrak{A} , \mathfrak{B} und \mathfrak{L} die in § 73, Gleich- ung (6), gegebene Bedeutung haben.

Die Minimumsbedingung für $[p v v]$ liefert daraus, wie in § 68, zur Berechnung der unbekanntenen Koordinatenzuschläge dx und dy , die

2 Normalgleichungen

$$\begin{aligned} ([p_v a a] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{A}]) dx + ([p_v a b] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{B}]) dy + ([p_v a l] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{L}]) &= 0. \\ ([p_v a b] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{B}]) dx + ([p_v b b] + [p_r \mathfrak{B} \mathfrak{B}]) dy + ([p_v b l] + [p_r \mathfrak{B} \mathfrak{L}]) &= 0. \end{aligned}$$

Führt man für die Koeffizienten $[p_v a a] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{A}]$ etc. der Unbekannten in vorstehenden Normalgleichungen die einfacheren früheren Bezeichnungen $[p a a]$ etc. wieder ein, so gehen diese Gleichungen über in die gewöhnliche Form:

$$\begin{cases} [p a a] dx + [p a b] dy + [p a l] = 0 \\ [p a b] dx + [p b b] dy + [p b l] = 0 \end{cases}$$

woraus wir wieder wie bisher erhalten:

$$dy = - \frac{[p b l \cdot 1]}{[p b b \cdot 1]}$$

$$P_y = [p b b \cdot 1]$$

$$\text{mittl. Fehler einer Beob-} \quad m = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{n_v + n_r - 3}} = \pm \sqrt{\frac{[p 11 \cdot 2]}{n_v + n_r - 3}}$$

$$M_y = \frac{m}{\sqrt{P_y}} = \pm \sqrt{\frac{[p 11 \cdot 2]}{[p b b \cdot 1] (n_v + n_r - 3)}}$$

Als

Beispiel

möge dasjenige des § 71 (s. S. 519) wiederholt dienen. Die dort angewandten Richtungswinkel φ für die Feststrahlen wollen wir auch jetzt wieder verwenden. Wir könnten auch die orientierten äusseren Richtungen β der Bestimmungsstrahlen dem S. 520 aufgestellten Ab-riss entnehmen, also die Anlegung eines solchen vorerst sparen.

A b r i s s .

Zielpunkte	Ob 1-od. 2seitig beobacht.	Beobachtete Richtungen		Endgültige Richtungswinkel φ		Unterschiede $\varphi - \alpha$ Orientierungswinkel		Orientierte Richtungen		Verbesserung $v = \varphi - \beta$		Streckenlänge		Höchstzulässiger Wert von v		p v v [p v v]
		α	ω	$[\varphi]$	$[\varphi]$	$\omega = \frac{[\varphi - \alpha]}{n}$	$\omega = \frac{[\varphi - \alpha]}{n}$	$\beta = \alpha + \omega$	$[\beta]$	v	v	s	s	$V_{max.}$	$V_{max.}$	
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	
A. Gegebene Punkte (Festpunkte).																
No. 1. Standpunkt Endberg																
$x = + 31895,47 \quad y = + 14805,97 \quad (\Delta \text{ westl.})$																
4. Bergweg .	1	0	00 31	1 28 37	1	28 06	1 28 17	20	1783				82			
6. Sonnenbühl	1	91	09 66	92 37 52			92 37 52		427	0		1	54		0	
5. Württemberg	1	171	99 20	173 26 86	1	27 66	173 27 06		2965	20			74			
			09 17	92 75	1	27 86	92 75	20	20							
		$3\omega =$	83 58						0							
			92 75													
No. 2. Standpunkt Reute																
$x = + 30848,79 \quad y = + 16061,28 \quad (\Delta \text{ mitten})$																
1. Endberg .	1	142	51 27	344 24 60	201	73 33	344 24 48	12	1634				84			
6. Sonnenbühl	2	156	99 14	358 73 09			358 72 35	74	1377				89		3660	
4. Bergweg .	1	172	36 79	374 09 88	201	73 09	374 10 00		3081	12			73			
			87 20	07 57	201	73 21	06 83	12	12							
		$3\omega =$	19 63	- 74				86	12							
			06 83	6 83				74								
No. 3. Standpunkt Mittlerweg																
$x = + 31887,16 \quad y = + 15974,96 \quad (\Delta \text{ nördl.})$																
2. Reute .	1	123	04 97	194 71 99	71	67 02	194 71 14	85*	1042				98			
5. Württemberg	1	127	39 82	199 06 28	71	66 46	199 05 99	29	2699				75			
6. Sonnenbühl	1	233	39 57	305 05 75			305 05 74	1	743			1	14			
4. Bergweg .	1	292	44 72	364 09 75	71	65 03	364 10 89		2120	114*			79		1	
			29 08	93 77		18 51	93 76	114	114							
		$4\omega =$	64 68	- 1	$\omega = 71$	66 17		115								
			93 76	93 76				1								
No. 4. Zielpunkt Bergweg																
$x = + 33678,59 \quad y = + 14841,93 \quad (\Delta \text{ östl.})$																
No. 5. Zielpunkt Württemberg (Kuppel des Mausoleums)																
$x = + 29188,02 \quad y = + 16014,70 \quad (\text{Kreuz})$																
B. Neu bestimmte Punkte (Neupunkte).																
No. 6. Standpunkt Sonnenbühl																
$x = + 31946,48 \quad y = + 15229,83 \quad (\Delta \text{ mitten})$																
2. Reute .	2	149	56 57	158 73 09	9	16 52	158 73 42		33	1377			89		1089	
4. Bergweg .	1	376	80 40	385 97 45	9	17 05	385 97 25	20	1775				83		400	
5. Württemberg	1	173	18 27	182 35 25	9	16 98	182 35 12	13	2868				74		169	
			55 24	05 79		50 55	05 79	33	33						5319	
		$3\omega =$	50 55		$\omega = 9$	16 85									soll 5200	
			05 79												(s. S. 543)	

Die mit schrägen Lettern gedruckten Einträge werden in Wirklichkeit rot geschrieben.

Es ist jedoch in Aussicht zu nehmen, dass die dort nur mangelhaft möglich gewesene Orientierung der inneren Richtungen zu weniger genauen Koordinatenwerten x_p und y_p für den Neupunkt geführt hat und dass daher die jetzt voraussichtlich etwas anders sich ergebenden Neupunktskoordinaten andere endgültige Richtungswinkel φ für die Neustrahlen, also auch andere Verbesserungen $v = \varphi - \beta$ liefern werden. Wir im Verlauf der Rechnung also doch zur Aufstellung eines neuen Abrisses genötigt sein, (wenn derjenige des Beispiels in § 71 auch für die Feststrahlen ganz, und für die Neustrahlen wenigstens bezüglich der Spalten 1, 2, 3, 6, 8 und 9 genügen würde) und legen ihn daher sofort an (s. S. 539).

Nachdem sodann die vorläufigen Koordinaten $x = +31946,46$ und $y = +15229,65$ eines in der Nähe des Neupunktes gelegenen Punktes \mathfrak{P} (vergl. S. 521) aus den orientierten Richtungen β von zwei Festpunkten aus gewonnen sind, können wir die Richtungswinkel ν seiner Verbindungsstrecken nach den übrigen zu seiner endgültigen Bestimmung zu benützendem Festpunkten und diese Strecken s selbst samt ihren Richtungskoeffizienten

$$a = \frac{\sin \nu}{s} \varrho, \quad b = -\frac{\cos \nu}{s} \varrho$$

(ν vom Neupunkt zum Festpunkt) logarithmisch oder mittels eines speziellen Hilfsmittels (Tabelle, Rechenschieber, Diagramm) berechnen, wie folgt:

\mathfrak{P}	6. Sonnenbühl \mathfrak{P} .									
	1. Endberg		2. Reute		3. Mittlerweg		4. Bergweg		5. Württemberg	
	x_F		y_F		$x_F - x$		$y_F - y$			
	+	31895,47	+	30848,79	+	31887,16	+	33678,59	+	29188,02
	+	14805,97	+	16061,28	+	15974,96	+	14841,93	+	16014,70
	* s. Dreiecksberechnung S. 521				—	59,30	+	1732,13	—	2758,44
					+	745,31	—	387,72	+	785,05
$\log(x_F - x)$		*		*	1	773055 n	3	238581	3	440663 n
$\log \cos n \mathfrak{P} F$	9	0773 n	9	9015 n	8	8993 n	9	9894	9	9831 n
$\log \sin n \mathfrak{P} F$	9	9969 n	9	7810	9	9986	9	3393 n	9	4373
$\log(y_F - y)$		*		*	2	872337	2	588518 n	2	894897
$\log \operatorname{ctg} \nu$		*		*	8	900718 n	0	650063 n	0	545766 n
$\log s$	2	6302*	3	1390*	2	8737	3	2491	3	4576
ν	0	292 37 52*	0	158 72 35*	0	105 05 46	0	385 98 10	0	182 34 85
$\log b$	2	2510	2	5664	1	8295	2	5442 n	2	3294
$\log a$	3	1706 n	2	4459	2	9288	1	8941 n	1	7836
b	+	178	+	368	+	68	—	350	+	214
a	—	1481	+	279	+	849	—	78	+	61

Die orientierten Richtungen β werden jetzt aus dem Abriss als „Richtungen vorwärts“, die im Neupunkt beobachteten Richtungen α direkt aus dem Feldbuch (oder

bei exzentrischer Beobachtung aus der Zentrierungsberechnung) als „Richtungen rückwärts“ in Abteilung 1, Spalte 2 und 3 des nachfolgenden Ausgleichungsformulars übertragen (s. S. 542). Gleichzeitig erfolgt der Eintrag der im Abriss zur Orientierung der Vorwärtsrichtungen benutzten Zahl von Feststrahlen n_f in Spalte 5 und die Berechnung der zugehörigen Richtungsgewichte $p = \frac{n_f}{n_f + 1}$ in Spalten 6 und 10. (Den Richtungen rückwärts möge durchweg das Gewicht 1 zugeschrieben werden). Hieraus ergeben sich die Gewichsfaktoren \sqrt{p} in Spalte 11. Durch die Orientierung der Vorwärtsrichtungen (Verdrehung des ganzen Büschels der in den Festpunkten beobachteten Richtungen um den Winkel ω) im Abriss ist an deren gegenseitiger Lage, also an ihrer Eigenschaft als Beobachtungswerten, materiell nichts geändert. Mit ihnen werden nun die aus den Näherungskoodinaten für den Neupunkt abgeleiteten Richtungswinkel $\nu = (n AP), (n BP) \dots$ (s. Spalte 4 der Abteilung 1) verglichen, wobei sich in Spalte 7 die Absolutglieder $l_A \dots$ der Fehlergleichungen für die Vorwärtsrichtungen ergeben.

Auch die Rückwärtsrichtungen α sollten, und zwar zunächst nach den vorläufigen Richtungswinkeln ν (s. Spalte 4 der Abteilung 1), vorläufig orientiert werden:

$$\alpha^0 = \alpha + \omega,$$

wodurch sich dann die Absolutglieder $l'_A \dots$ ergeben würden aus:

$$\begin{array}{l} l'_A = \nu_A - \alpha^0_A = \nu_A - (\alpha_A + \omega) = (\nu_A - \alpha_A) - \omega \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

Die letztere Gleichung zeigt aber, dass (wie schon in § 73 angewandt) zur Bildung dieser Absolutglieder l' die Durchführung der vorläufigen Orientierung entbehrlich ist: wir finden erstere kürzer als Überschuss der Einzelwerte $(\nu - \alpha)$ für den Verdrehungswinkel über dessen Mittelwert ω . Diese Überschüsse werden für „Richtungen rückwärts“ in Spalte 7 des Formulars eingetragen. —

Zur Erzielung bequemer Rechnung sind möglichst gleiche Zahlenwerte für die Absolutglieder l bzw. l' und für die Richtungskoeffizienten a und b bzw. a und b (Koeffizienten der Fehlergleichungen) erwünscht. Dies wird, wie schon mehrfach gezeigt, erreicht durch Wahl solcher Masseinheiten, welche der normalen Beobachtungsgenauigkeit und der mittleren Strahlenlänge angepasst sind. Im vorliegenden Beispiel wäre zweckmässigerweise, (vergl. Erklärung S. 502 und Beispiel S. 532), als Winkeleinheit (für l, l', ρ) die Dekasekunde, als neue Unbekannte statt dx und dy je das 10fache, (d. h. dx und dy in Dezimeter) zu wählen. Wir beschränken uns (in Anpassung an die bezüglichen württembergischen Vermessungsvorschriften) auf letztere Vereinfachung, wodurch die Werte a und b , bzw. a und b auf ihren 10ten Teil zurückgehen, die wir aber der Kürze halber im folgenden unverändert mit a, b bzw. a, b bezeichnen und in den Spalten 8 und 9 S. 542 einführen werden.

In den Spalten 12—14 der Abteilung 1 bilden wir durch Multiplikation der Koeffizienten a und b und der Absolutglieder l je mit \sqrt{p} die Koeffizienten $a\sqrt{p}, b\sqrt{p}, l\sqrt{p}$ der Fehlergleichungen für die Vorwärtsrichtungen. Schreiben wir den Rückwärtsrichtungen durchweg das Gewicht 1 zu, so fällt für sie die Multiplikation mit \sqrt{p} weg. Dagegen erfordert die vorgängige Eliminierung der Verdrehungsunbekannten z oder $d\omega$ für sie die Subtraktion der Durchschnittswerte $\frac{[a]}{n_f}, \frac{[b]}{n_f}$ (und $\frac{[l']}{n_f}$) für a, b (und l') von diesen Richtungskoeffizienten und

Abt. 2. Bildung der Koeffizienten für die Normalgleichungen.

	$(a\sqrt{p})^2$ bzw. \mathcal{A}^2	$(b\sqrt{p})^2$ bzw. \mathcal{B}^2	$(l\sqrt{p})^2$ bzw. \mathcal{L}^2	s^2	pab bzw. $\mathcal{P}\mathcal{B}$	pal bzw. $\mathcal{P}\mathcal{L}$	pbl bzw. $\mathcal{P}\mathcal{L}$
1	13924	196	0	10816	1652	0	0
2	484	900	0	2704	660	0	0
3	5929	36	625	3364	462	1925	150
1	361	841	8281	1849	551	1729	2639
2	289	1849	10201	1681	731	1717	4343
3	9	169	121	1	39	33	143
	20996	3991	19228	20415	2404	33	7275
					1691	5371	
					713	5338	

Abt. 4. Berechnung der Verbesserungen und mittleren Fehler.

$dx = +0,02$	$m_{dx} = \pm 0,03$	$[p_{vv}] = [p_{11.2}]$	$n = n_v + n_r - 3$	\pm	5200
$dy = +0,18$	$m_{dy} = \pm 0,07$	$m^2 = \frac{[p_{11.2}]}{n}$	m	\pm	3
		$\sqrt{Px} = \sqrt{[p_{aa.1}]}$	$\sqrt{Py} = \sqrt{[p_{bb.1}]}$	\pm	1730
		$m_x = \frac{m}{\sqrt{Px}}$	$m_y = \frac{m}{\sqrt{Py}}$	\pm	41,7''
		$d\omega = -\frac{[a]}{n_r} dx - \frac{[b]}{n_r} dy$		\pm	144
		$= +9,0,19 + 8,1,8$		\pm	63
		$= +16''$		\pm	0,29 dm
				\pm	0,66 dm

Abt. 3. Auflösung der Normalgleichungen.

	$a\sqrt{p}$	$b\sqrt{p}$	$l\sqrt{p}$	$s\sqrt{p}$	Probe
$[a\sqrt{p}]$	+ 20996	+ 713	- 5338	+ 16371	$[\] =$
$[b\sqrt{p}]$	+ 3991	+ 3991	- 7275	- 2571	+ 20415
$[p_{aa}]$	-	- 24	+ 182	- 555	soll
$[l\sqrt{p}]$		+ 19228	+ 6615		20415
$[p_{aa}]$		- 1360	+ 4160		
$dy =$	$[p_{bl.1}]$	$b\sqrt{p.1}$	$l\sqrt{p.1}$	$s\sqrt{p.1}$	
	$[p_{bb.1}]$	+ 3967	- 7093	- 3126	
$= - 7093$	$[1\sqrt{p}]$	+ 17868	+ 10775		
$= + 1,8 \text{ dm}$	$[p_{bl.1}]$	- 12640	- 5580		
	$[p_{bb.1}]$	$[1\sqrt{p.2}]$	$s\sqrt{p.2}$		
		+ 5228	+ 5195		
$dx =$	$[a\sqrt{p}]$	$b\sqrt{p}$	$l\sqrt{p}$	$s\sqrt{p}$	Probe
	+ 3991	+ 713	- 5338	+ 16371	
	- 20996	+ 20996	- 5338	- 16371	
	- 128	+ 128	+ 1300	+ 460	
	$[1\sqrt{p}]$	- 19228	+ 6615		+ 20415
	$[p_{bl.1}]$	- 13250	- 4690		
$d\omega =$	$[p_{aa.1}]$	$a\sqrt{p.1}$	$l\sqrt{p.1}$	$s\sqrt{p.1}$	
	$[p_{bb.1}]$	+ 20868	- 4038	+ 16831	
$= - 4038$	$[1\sqrt{p}]$	+ 5978	+ 1925		
$= - 20868$	$[p_{al.1}]$	- 780	+ 3255		
$= + 0,19$	$[p_{aa.1}]$	$[a\sqrt{p.2}]$	$s\sqrt{p.2}$		
		+ 5200	+ 5180		

Absolutgliedern (wobei allerdings $\frac{[l']}{n_r} = 0$). Für die Rückwärtsrichtungen erhalten wir dann die Koeffizienten:

$$\mathfrak{A} = a - \frac{[a]}{n_r}; \mathfrak{B} = b - \frac{[b]}{n_r}; \mathfrak{Z} = l' - \frac{[l']}{n_r} = l'$$

und zur Probe unter Vernachlässigung kleiner Abrundungsfehler:

$$[\mathfrak{A}] = 0, [\mathfrak{B}] = 0, [\mathfrak{Z}] = 0.$$

Schliesslich erfolgt die Bildung der Summenglieder

$$s = a\sqrt{p} + b\sqrt{p} + l\sqrt{p} \text{ für die Vorwärts-},$$

$$\text{bezw.} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{Z} \text{ für die Rückwärtsrichtungen,}$$

wobei die weitere Rechenprobe sich ergibt:

$$\left[\begin{array}{c} a\sqrt{p} \\ + \mathfrak{A} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} b\sqrt{p} \\ + \mathfrak{B} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} l\sqrt{p} \\ + \mathfrak{Z} \end{array} \right] = [s].$$

Die Berechnung der Koeffizienten für die Normalgleichungen erfolgt in Abteilung 2 des Formulars S. 543. Nach Abteilung 3, mit dem Vordruck

$$[a\sqrt{p} \cdot a\sqrt{p}] \text{ für } [(a\sqrt{p})^2] + [\mathfrak{A}^2]$$

$$[a\sqrt{p} \cdot b\sqrt{p}] \text{ „ } [p \cdot ab] + [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \text{ etc.}$$

übertragen, dienen sie zur Reduktion der Gleichungen unter Beachtung der Rechenproben entsprechend den früheren Ableitungen. Abteilung 4 ist für die Berechnung der mittleren Fehler der Beobachtungswerte und der Unbekannten bestimmt.

Nach erfolgter Reduktionsarbeit, welche neben den gesuchten Koordinatenzuschlägen dx und dy durch Einführung des Summenglieds s eine Reihe von Rechenproben lieferte, erzielen wir eine weitere Probe für die Rechnung zunächst anlässlich der Berechnung der endgültigen Richtungswinkel $\varphi \equiv [nPF]$ vom Neupunkt nach den Festpunkten. Diese müssen sich (innerhalb der, durch Abrundung der Koordinatenwerte auf ganze cm gegebenen äussersten Abweichungsgrenzen $\frac{0,005}{s} \varphi''$) von den früher berechneten vorläufigen Richtungswinkeln $\nu \equiv (nPF)$ um den Betrag $d\varphi''$ unterscheiden, wobei (s. Gleichungen 3^a und 3^b von § 67) $d\varphi = a dx + b dy = a dx + b dy$.

6. Sonnenbühl P.					
x = + 31946,48 y = + 15229,83					
F	1. Endberg	2. Reute	3. Mittlerweg	4. Bergweg	5. Württemberg
x _F	+ 31895,47	+ 30848,79	+ 31887,16	+ 33678,59	+ 29188,02
y _F	+ 14805,97	+ 16061,28	+ 15974,96	+ 14841,93	+ 16014,70
x _F - x _P	- 51,01	- 1097,69	- 59,32	+ 1732,11	- 2758,46
y _F - y _P	- 423,86	+ 831,45	+ 745,13	- 387,90	+ 784,87
Die Ausrechnung nach § 56 bleibt zur Kürzung weg.					
	0 " "	0 " "	0 " "	0 " "	0 " "
n PF ≡ φ	292 37 52	158 73 09	105 05 75	385 97 45	182 35 25
n Ⓢ F ≡ ν	292 37 52	158 72 35	105 05 46	385 98 10	182 34 85
Ist dφ'' = φ - ν	0''	+ 74''	+ 29''	- 65''	+ 40''
a dx	- 28,2''	+ 5,3''	+ 16,1''	- 1,5''	+ 1,1''
b dy	+ 32,0''	+ 66,2''	+ 12,2''	- 63,0''	+ 38,5''
soll dφ'' = a dx + b dy	+ 3,8''	+ 71,5''	+ 28,3''	- 64,5''	+ 39,6''

Eine abschliessende Rechenprobe und gleichzeitig ein allgemeiner Überblick über die Anlage und Genauigkeit der Triangulierung im ganzen ergibt sich durch Aufstellung bezw. Abschluss des Abrisses auch für den Neupunkt P. Zu diesem Zweck werden die endgültigen Richtungswinkel φ der Neustrahlen nach Spalte 6 des Abrisses (s. S. 539) sowohl zu den Festpunkten, als zum Neupunkt (und zwar mit roter Tinte) übertragen (vergl. schräge Ziffern). Bei den ersteren darf keine der in Spalte 7 zu bildenden Verbesserung v die Fehlergrenze v_{MAX} übersteigen. Das auf dem Neupunkt beobachtete und bei dem ihm zugehörigen Abriss eingetragene Richtungsbüschel α wird zum Zwecke der Orientierung um den Winkel $\omega = \frac{[\varphi - \alpha]}{n_r}$ verdreht, wobei die orientierten Richtungswerte β erscheinen. Auch sie dürfen von den Werten $[n \text{ PF}] = \varphi$ der endgültigen Richtungswinkel um nicht mehr als höchstens v_{MAX} abweichen. Der dabei gebildete Verdrehungswinkel $Z = \omega_{\text{endgültig}}$ muss von dem in Spalte 5 und 6 der Abteilung 1 des Ausgleichsformulars S. 542 benutzten $\omega_{\text{vorläufig}} = \frac{[\nu - \alpha]}{n_r}$ um den Betrag

$$\text{(Gleichung 12, § 73)} \quad -d\omega = z = \frac{[a]}{n_r} dx + \frac{[b]}{n_r} dy$$

abweichen, so dass

$$Z \equiv \omega_{\text{endgültig}} = \omega_{\text{vorläufig}} + z = \omega_{\text{vorläufig}} - d\omega$$

(vergl. Abt. 4 S. 543 links, Spalte 5 und 6 unten S. 542 und Spalte 5 unten S. 539).

Multipliziert man schliesslich jede Verbesserung $v = \varphi - \beta$ mit dem zugehörigen \sqrt{p} , so muss (innerhalb der durch die Abrundung der Koordinatenwerte auf ganze cm gegebenen Genauigkeitsgrenzen) sein:

$$[p \nu v] = [p 11 \cdot 2] \text{ (s. S. 539 Spalte 10 unten).}$$

c) Einschaltung eines Punktes als

§ 75. „Folgepunkt“ zu einem vorgängig bestimmten „Leitpunkte“.

Bei Vermessungen in überbautem Gebiet, sowie auf schmalen Geländerücken zwischen zwei Tälern kommt zuweilen der Fall vor, dass ein trigonometrischer Punkt (Kirchturm, Geländepunkt an der einen Berghalde) wohl für eine Seite des Aufnahmegebiets, nicht aber für die andere verwendbar ist. Für die letztere ist daher ein zweiter trigonometrischer (Neu) Punkt in geringer Entfernung vom ersteren zu bestimmen.

Würden beide Punkte unabhängig, oder nur in derjenigen Abhängigkeit voneinander trigonometrisch bestimmt, welche normalerweise zwischen den Neu- und Festpunkten überhaupt besteht, so würden ihrer (kurzen) Verbindungsstrecke voraussichtlich ebenso grosse Unsicherheiten innewohnen, als einer normalen, viel längeren Dreiecksseite. Für die Richtung der Strecke wäre eine um so grössere Verdrehung zu befürchten, je kürzer die Strecke selbst und je grösser der mittlere Koordinatenfehler im Netz wäre. Beides ist unzulässig.

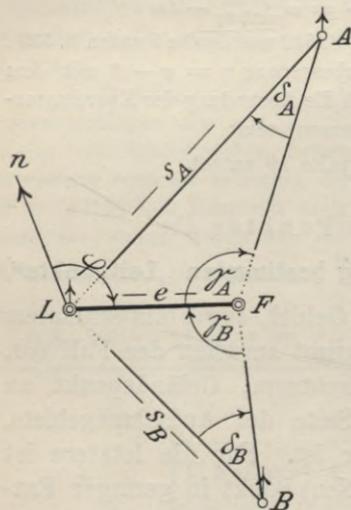
Wir haben vielmehr beide Punkte ohne Rücksicht auf die im trigonometrischen Gesamtnetz etwa vorhandenen Ungenauigkeiten so zu bestimmen, dass ihre gegenseitige Lage durch die zu errech-

nenden Koordinatenunterschiede mit der Wirklichkeit möglichst scharf übereinstimmend wiedergegeben ist.

Dies könnte durch gleichzeitige Einschaltung beider Punkte unter Festsetzung starr einzuhaltender Bedingungen („Netzeinschaltung“) geschehen. Einfacher ist die Lösung, wenn man die Koordinaten des einen der beiden Punkte, des „Leitpunktes“, falls auch er erst neu bestimmt werden muss, nach einem der in §§ 64 bis 74 vorgeführten Verfahren aus den umgebenden Festpunkten berechnet, und alsdann, auf ihn allein sich stützend, die Koordinaten des „Folgepunktes“ gewinnt.

Als Leitpunkt wählt man den nach seiner Lage im Netz, der Möglichkeit scharfer Einstellung im Fernrohr (Hintergrund) und der symmetrischen Verteilung der Bestimmungsstrahlen über den Horizont günstigsten Punkt L (s. Fig. 293) des Punktpaares aus.

Fig. 293.



Um über ihn den Folgepunkt F zu bestimmen, muss man auf irgendwelche Weise die Verbindungsstrecke $LF = e$ und ihren Richtungswinkel $nLF = \varphi$ beider Punkte möglichst scharf ermitteln. Letzteres geschieht am bequemsten, wenn man im Leitpunkt, oder im Folgepunkt oder in beiden, neben den Richtungen nach entfernten Festpunkten A, B... die Verbindungsstrecke LF, in jedem der (möglichst auf dem Mittellot über LF zu wählenden) Festpunkte A, B... aber nur den Parallaxwinkel δ und zwar diesen möglichst scharf (etwa repetitionsweise) beobachtet.

Der Richtungswinkel $nLF = \varphi$ ergibt sich im ersten Fall anlässlich der Aufstellung des Abrisses vom Leitpunkt L, im zweiten Fall durch Addition oder Subtraktion des Nebenwinkels von $(\gamma + \delta)$ zu, bzw. von dem Richtungswinkel des Feststrahls LA, LB...

Für die Strecke $e = LF$ erhält man ebensoviele Werte, als Parallaxwinkel in Festpunkten A, B... beobachtet wurden aus:

$$(1) \quad e = s \cdot \frac{\sin \delta}{\sin \gamma},$$

wobei die Winkel γ entweder direkt gemessen, oder als Supplemente zu den in A, B, ... einer- und L andererseits gemessenen, (bzw. aus den entsprechenden Richtungswinkeln mitbeobachteter Feststrahlen

Entnommen wurde ferner aus dem analog. § 71 entworfenen Abriss des Leitpunktes: Weinberghäuschen die orientierte Richtung β nach dem Folgepunkt mit: $369^\circ 91' 79''$.

Gesucht die Koordinaten von: Weinberghäuschen Folgepunkt.

Auflösung.

1. Berechnung der Richtungswinkel n RL für die Verbindungsstrahlen von den je als Standpunkt gewählten Festpunkten R nach dem Leitpunkt L (nach § 56). Die Ergebnisse sind eingetragen in Spalte 2 der nachfolgenden Tafel.
2. Berechnung der Richtungswinkel n RF der Verbindungsstrahlen von den Standpunkten R nach dem Folgepunkt mittels Gleichung (3): $\mu \equiv n RF = n RL + LRF$. (Spalte 4).
3. Berechnung von Näherungskordinaten ξ und η für den Folgepunkt aus zweien der in Spalte (4) gebildeten Richtungswinkel durch Vorwärtschnitt, wenn solche Näherungskordinaten nicht auf irgendwelchem anderen Weg erhältlich sind. (Ergebnis s. nachstehende Tafel.)
4. Berechnung der Richtungswinkel ν und Längen s der Verbindungsstrecken der benützten Festpunkte R mit dem vorläufigen Folgepunkt und Eintrag in Spalte 5 und 7 der nachfolgenden Tafel.

Weinberghäuschen Folgepunkt

Näherungskordinaten $\xi = + 34402,18$ $\eta = + 11342,35$
 Verbesserung $dx = - 0,06$ $dy = - 0,03$
 Endgültige Koordinaten $x = + 34402,12$ $y = + 11342,32$

1. Bezeichnung der Festpunkte R	2. Richtungswinkel n RL			3. Gemess. Parallax- winkel LR F			4. Orientierte Richtung $\mu \equiv$ n RF			5. Aus Nähe- rungskoord. berechnete Richtungs- winkel ν			6. $\delta =$ $\mu - \nu$		7. Strah- len- länge s m		8. Quer- verschie- bung $b = \frac{\delta}{\varrho} \cdot s$ cm		9. Gewicht $p = \frac{1}{s^2}$ (s in km)		
	0	'	''	0	'	''	0	'	''	0	'	''	'	''							
Freiberg	193	38	08	2	20	39	195	58	47	195	58	14	+	33	1006	+ 5,2	1,0				
Haldengreuth	310	17	41	3	64	51	313	81	92	313	82	14	-	22	1362	- 4,7	0,5				
Himmelreich	181	97	15	0	55	32	182	52	47	182	52	40	+	7	2090	+ 2,3	0,2				
Stüblen	261	28	23	8	69	20	269	97	43	269	97	89	-	46	703	- 5,1	2,0				
Weinberg- häuschen (Leitpunkt)	aus dem Ab- riss des Leit- punktes						369	91	79	369	95	31	- 3	52	96,7	- 5,3	10,7				
							82	08		85	88		+	40							
										-3	80		-	4	20						
										82	08		-	3	80						

5. Bildung der Widersprüche $\delta = \mu - \nu$, Eintrag der Strahlengewichte $p = \frac{1}{s^2}$ und Berechnung der Querverschiebungen $b = \frac{\delta}{\varrho} s$ in den Spalten 6, 8 und 9 der Tafel.
6. Aufzeichnung der fehlerzeigenden Figur mittels der Werte μ und b analog §§ 70 und 71.
7. Auswahl des wahrscheinlichsten Punktes in ihr und zwar, da sie jedenfalls¹⁾ klein ist, nach Gutdünken. Eintrag der aus der Figur ent-

¹⁾ Vergl. Genauigkeitsuntersuchung.

nommenen Koordinatenzuschläge dx und dy , und Bildung der endgültigen Koordinaten x und y für den Folgepunkt im Kopf der Tafel.

Genauigkeitsuntersuchung. Kleine Unsicherheiten in den benutzten Festpunkten A, B haben auf die Bestimmung eines Folgepunktes um so geringeren Einfluss, je kleiner seine Entfernung e vom Leitpunkt ist. Weicht z. B. der Standort eines der Festpunkte von der durch seine Koordinaten bestimmten Stelle um die kleine Strecke d ab, so wird dadurch der auf ihm gemessene Winkel δ ungünstigstenfalls (d. h. wenn δ durch die Verbindungslinie beider Orte halbiert wird) geändert um:

Genauigkeitsuntersuchung. Unsicherheit der Festpunkte.

$$(4) \quad f_{\delta} = \frac{2d}{s} \sin \frac{\delta}{2} e \text{ (vergl. § 44, Abs. 3).}$$

Dieser Winkelfehler verschiebt den Folgepunkt F auf der Verbindungsgeraden LF und ändert deren Länge e um den Betrag:

$$(4a) \quad f_e = \frac{f_{\delta} \cdot s}{e \sin \gamma} = \frac{2d \sin \frac{\delta}{2}}{\sin \gamma},$$

welcher (wie auch geometrisch klar) um so kleiner wird, je grösser $\sin \gamma$. Er erreicht sein Minimum für $\sin \gamma = 1$, d. h. für $\gamma = R$. Die zuverlässigste Punktbestimmung in der Richtung LF, d. h. die genauesten Werte für e liefern also Festpunkte, welche auf dem in F auf LF errichteten Lot liegen. Der Fehlerbetrag f_e wächst dagegen mit $\sin \frac{\delta}{2}$, bei bestimmter Festpunktsentfernung s also mit der Entfernung e zwischen Leit- und Folgepunkt.

Für beispielsweise $e = 100$ m, $s = 1000$ m, $d = 0,10$ m und $\gamma = R$ wird nach (4)

$$f_{\delta \text{Max}} = \frac{2 \cdot 0,10 \cdot e''}{1000 \cdot 20} = 2'' \text{ und}$$

$$\text{nach (4a)} \quad f_e = \frac{2 \cdot 0,10}{20} = 0,01 \text{ m.}$$

Der von Unsicherheiten der Festpunkte hervorgerufene Winkelfehler f_{δ} verursacht sodann eine lineare Veränderung der Lage von F quer zu LF um

$$(4b) \quad f_{\omega} = \frac{f_{\delta} \cdot s}{e \cos \gamma},$$

also eine Verdrehung des Strahls LF vom Leit- zum Folgepunkt um:

$$(4b) \quad f_{\varphi} = \frac{f_{\omega}}{e} \cdot e = \frac{f_{\delta} \cdot s}{e \cos \gamma} = \frac{2d \sin \frac{\delta}{2}}{e \cos \gamma} e.$$

Dieser Betrag wird (wie auch geometrisch klar) um so kleiner, je grösser $\cos \gamma$ und je kleiner $\sin \frac{\delta}{2}$. Er erreicht sein Minimum, nämlich 0, für $\sin \frac{\delta}{2} = 0$, oder für $\delta = 0$.

Die zuverlässigste Punktbestimmung in der Querrichtung zu LF liefern also Festpunkte, welche in der Richtung LF liegen.

Das oben benutzte Zahlenbeispiel liefert mittels (4b):

$$\text{Querverfehlung infolge unsicherer Festpunkte } f_{\omega} = \frac{2d \cdot \sin \frac{\delta}{2}}{\cos \gamma} \sim \frac{d \cdot e \cdot \text{tg } \gamma}{s} \\ \sim \frac{\text{tg } \gamma}{100} \text{ m.}$$

Für $\gamma \sim \frac{R}{2}$ oder $\frac{3}{2}R$ wird daraus: $f_{\omega} = 0,01$ m.

Beide Wirkungen einer Festpunktsunsicherheit von $d = 0,1$ m liegen weit innerhalb des bei Kleintriangulierungen unbedenklich in Kauf zu nehmenden Fehlers.

Von grösserer Bedeutung für die Genauigkeit der Folgepunktsbestimmung ist dagegen die scharfe Messung der Winkel δ . Kleine Beobachtungsfehler $d\delta$ in den Winkeln δ_A und δ_C (s. Fig. 294) würden den Folgepunkt F in der Richtung LF um den Betrag $\frac{d\delta''}{\rho''} \cdot s$ verschieben, wenn s die Entfernung zwischen Fest- und Folgepunkt bedeutet. Für $d\delta = 10''$ und $s = 1000$ m würde dieser Fehler z. B. 5 cm betragen.

Die am Schluss der Ausgleichung noch übrig bleibenden Verbesserungszuschläge v an den nach Gleich. (3) gebildeten Bestimmungsrichtungen $nRF \equiv \mu$, wie auch die Grösse der Fehlerfigur im Fall graphischer Ausgleichung sind also bei genügend kleiner Entfernung e des Punktpaars fast ausschliesslich abhängig von den Beobachtungsfehlern $d\delta$ der Parallaxwinkel δ .

B. Netzeinschaltung.

§ 76. Zweck der Netzeinschaltung.

Die gleichzeitige Einschaltung mehrerer Neupunkte — eines Netzes, oder einer Kette — bildet eine wegen der grossen Zahl der gegebenen Anschlusspunkte und der daraus sich ergebenden Schwierigkeit der Fehlerausgleichung in der Kleintriangulierung seltener auftretende Aufgabe. Zu Stromaufnahmen, bei welchen mehrere Dreieckspunkte in zum Wasserlauf paralleler Anordnung gewünscht sind (s. Fig. 299), sowie zu Stadtvermessungen, welche grössere Genauigkeit verlangen, als sie für die Aufnahme des platten Landes nötig ist, empfiehlt es sich jedoch zuweilen, ein Netz von mit gleicher Genauigkeit bestimmten Punkten (Teilnetz) in sich und mit wenigen, sicheren Punkten des Landesdreiecksnetzes zusammen auszugleichen und als Ganzes dem letzteren einzufügen. Ebenso kann das Verfahren der Netzeinschaltung niederer in ein Netz höherer Ordnung etwa nach Art der Fig. 298 angezeigt sein für untergeordnetere Aufnahmen, wenn zur Lagebestimmung mehrerer, nahe zusammenliegender Punkte polygonometrische Festlegung (s. Kap. XI) umgangen werden will.

Dies um so mehr, als man hierbei mit weniger Messungsarbeit auskommt, welche — z. B. in der Raumatmosphäre der Städte, oder im Nebel und dem Buschwerk der Flusstäler — oft schwierig auszuführen ist. Dieser Arbeitersparnis auf dem Feld steht allerdings entweder ein erheblich gesteigerter Aufwand an Ausgleichungsarbeit gegenüber, wenn das zu berechnende Teilnetz mit sämtlichen benachbarten Festpunkten in Verbindung gesetzt werden will, oder eine Genauigkeitseinbusse „Klaffung“ in der Aufnahme des dem neuen

Netz direkt benachbarten Geländestreifens, wenn es sich lediglich auf zwei oder wenige, gut kontrollierte Festpunkte des Landesdreiecksnetzes stützen soll (s. z. B. Fig. 295—297 und 299—300). Letzterenfalls ist daher eine Ausdehnung des Teilnetzes möglichst weit über dasjenige Gebiet hinaus, welches von der in der Nähe der Städte erfahrungsgemäss sich einstellenden Grundpreissteigerung mit betroffen wird, nötig.

§ 77. **Ausgleichung der Messungsergebnisse bei Netzeinschaltungen niederer Ordnung.**

Zum Zweck der Ausgleichung stellen wir die Bedingungs-
gleichungen auf, denen die in überschüssiger Zahl gemessenen Winkel entsprechen müssen, damit übereinstimmende Endwerte für die aus ihnen zu berechnenden Grössen (Koordinaten und Dreiecksseiten) erscheinen, gleichgültig, aus welcher Zusammenstellung dieser Winkel wir die letzteren ableiten. Wir unterscheiden dreierlei Arten von Bedingungs-
gleichungen, nämlich:

Art der
Bedingungs-
gleichungen.

1. **Punktgleichungen:** Die Summe der in ununterbrochener Folge um einen Punkt herumliegenden Winkel soll $4R$ betragen. Zur gegenseitigen Festlegung von s von einem Punkt ausgehenden Strahlen braucht man

$$w = (s - 1)$$

unabhängige Winkel. Jeder auf einem Punkt weiter gemessene Winkel liefert eine „Punktgleichung“.

2. **Winkelsummengleichungen:** Die Summe der drei Winkel jedes Dreiecks soll $2R$ betragen. Jedes Dreieck, in welchem drei, jedes Viereck, in welchem vier, jedes n Eck, in welchem n Winkel gemessen sind, liefert eine Winkelsummengleichung.

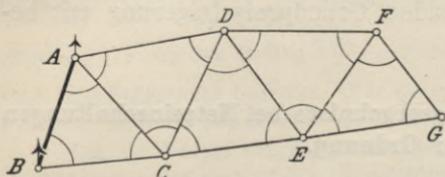
3. **Seitengleichungen:** Wenn in irgend welchem, durch Diagonalen in Dreiecke zerlegten Vieleck die gemessenen Winkel den Punkt- und den Winkelsummengleichungen auch genügen, so sind damit die — uns überhaupt unzugänglichen — wahren Winkelwerte natürlich keineswegs erreicht. Schreibt man daher, mangels einer gegebenen Längendimension und unter vorläufiger Behandlung einer dem Dreiecksnetz ähnlichen Figur irgend einer Dreiecksseite ein beliebiges Längenmass zu (vergl. § 60) und rechnet, von ihr aus ein Dreieck ans andere reihend, unter Benützung der nach (1) und (2) verbesserten Winkel die Längen der übrigen Seiten, so gewinnt man, den Kreislauf schliessend und zur Ausgangsseite zurückkehrend, für sie ein vom ursprünglich angenommenen etwas abweichendes Mass. Soll dies vermieden werden, so müssen wir eben diese Dreiecksseitenberechnung zu „Seitengleichungen“ als

weiteren Bedingungsgleichungen zusammenfassen, nach denen die gemessenen Winkel zu verbessern sind.

Zahl und Aufstellung der Bedingungsgleichungen.

Die Frage nach der Zahl der im einzelnen Fall aufzustellenden Punkt-, Winkelsummen- und Seitengleichungen beantwortet sich durch folgende Überlegung:

Fig. 295.



a) im Fall von Winkelbeobachtungen.

Reiht sich im Netz Dreieck an Dreieck so an, dass man von einer gegebenen Dreiecksseite ausgehend die anderen nur in bestimmter Reihenfolge auf bestimmtem Weg ableiten kann, „Dreieckskette“ (s. Fig. 295), so können

in 2 Dreiecken	1 Seite	und höchstens	6 Winkel	=	7 Stücke
„ 3	„ 1	„ „	„ 9	=	10 „
„ 4	„ 1	„ „	„ 12	=	13 „ usw.

bekannt sein, mittels welcher die gegenseitige Lage von 4, 5, 6... Punkten bestimmt ist.

Notwendig zu dieser Bestimmung sind bei p Punkten allgemein $(1) (2p - 3)$ voneinander unabhängige Stücke (worunter sich etwa befinden können 1 Seite und $2p - 4$ Winkel), oder

bei 4 Punkten	oder 2 Dreiecken	5 unabhängige Bestimmungstücke,
„ 5	„ „ 3	„ 7 „
„ 6	„ „ 4	„ 9 „
⋮	⋮	⋮

Also sind im Falle der

aus 2 Dreiecken bestehenden Kette ABCD (s. Fig. 295) 2 Stücke,

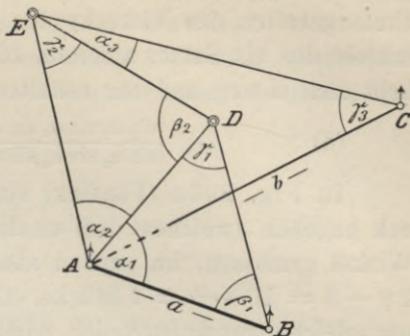
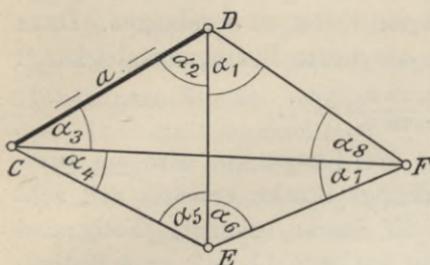
„ 3	„ „	„ „	ABCDE	3	„
„ 4	„ „	„ „	ABDDEF	4	„ und

allgemein ebenso viele Stücke überschüssig, als Dreiecke vorhanden sind. Jedes von den letzteren liefert aber 1 Winkelsummengleichung. Für Seitengleichungen bleibt daher in diesem Falle kein Raum.

Sind dagegen diagonale Strahlen beobachtet (s. Fig. 296), oder sind die Dreiecke so gruppiert, dass man zur Berechnung der Länge irgend einer ihrer Seiten von einer bekannten Seite ausgehend verschiedenerlei Winkel und Dreiecke wählen kann, „Dreiecksnetze“ (s. Fig. 297 und 298), so gewährleistet die Erfüllung der Punkt- und Winkelsummengleichungen noch nicht eine geschlossene Figur.

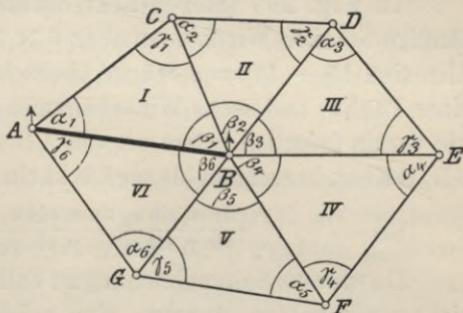
Fig. 296.

Fig. 296 a.¹⁾



Denkt man sich z. B. in Fig. 297 von der Grundlinie AB ausgehend unter Benützung der diese Gleichungen befriedigenden Winkel die Dreiecksseite BC, aus ihr BD und so fort, Dreieck an Dreieck reihend, schliesslich wieder AB abgeleitet, so wird sich dafür infolge noch vorhandener Winkelfehler ein anderer Wert als derjenige ergeben, von dem man ausging.

Fig. 297.



Sind in irgend einem p Punkte umfassenden Dreiecksnetz eine Dreiecksseite und w Winkel bekannt, so ist nach Gleichung (1) die Zahl der überschüssigen Stücke, also die Gesamtzahl der aufzustellenden Bedingungsgleichungen:

$$(2) \quad \beta = (w + 1) - (2p - 3) = w - 2p + 4.$$

In Fig. 296 der gegenseitigen Festlegung von vier Punkten aus acht gemessenen Winkeln sind z. B. demnach, wenn eine Seite bekannt ist, $8 - 8 + 4 = 4$ Stücke übrig: wir müssen also $\beta = 4$ voneinander unabhängige Bedingungsgleichungen aufstellen. Aus den drei unabhängigen Winkelsummengleichungen

- (a) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_8 = 2R$
- (b) $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_6 + \alpha_7$
- (c) $\alpha_4 + \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_8$

lassen sich alle in der Figur überhaupt möglichen Winkelsummengleichungen gewinnen. Die vierte Bedingung muss also eine Seitengleichung sein, welche den linearen Schluss der Figur gewährleistet. Wir erhalten sie, wenn wir von irgend einer Umfangsseite a

¹⁾ Die Seite AC = b in Fig. 296 a ist als Verbindungsstrecke zweier Festpunkte stark zu zeichnen.

(gleichgültig, ob ihre Länge bekannt ist oder nicht) ausgehend, die Umfangsseiten des Vierecks der Reihe nach eine aus der anderen mittels des sin Satzes ableiten, bis wir wieder zu a gelangen. Dann hebt sich a weg und wir erhalten als vierte Bedingungsgleichung:

$$(d) \quad \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \sin \alpha_5 \sin \alpha_7}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_6 \sin \alpha_8} = 1.$$

In Fig. 296a (Fünfeck) sind drei Festpunkte, also ein Dreieck gegeben (welches drei unabhängige Stücke ersetzt) und acht Winkel gemessen, im ganzen also elf Stücke bekannt. Nötig sind $2p - 3 = 10 - 3 = 7$ Stücke, also hat man $11 - 7 = 4$ Bedingungsgleichungen aufzustellen, nämlich drei Winkelsummengleichungen (deren eine den aus Richtungswinkeln zu berechnenden Winkel CAB benützt) und die Seitengleichung:

$$\frac{a \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin (\gamma_2 + \alpha_3)}{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_3} = b.$$

In Fig. 297 (Sieben-Eck) brauchen wir $2p - 3 = 11$ unabhängige Stücke. Wir kennen aber $6 \times 3 = 18$ Winkel und eine Seite. Also sind $19 - 11 = 8$ Stücke überschüssig und wir erhalten neben einer Punkt- und sechs Winkelsummengleichungen auf gleiche Weise wie vorhin (nämlich indem wir von AB ausgehend der Reihe nach BC, BD, BE etc. berechnen bis zur Rückkehr nach BA) die Seitengleichung:

$$(d) \quad \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_4 \sin \alpha_5 \sin \alpha_6}{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_3 \sin \gamma_4 \sin \gamma_5 \sin \gamma_6} = 1 \text{ usw.}$$

Da wir eine Seitengleichung im Falle der Dreieckskette (s. S. 552) nicht nötig hatten, dagegen eine solche (und eine weitere Winkelsummengleichung) bekamen, sobald wir in die Kette noch irgend einen zweiseitig beobachteten diagonalen Strahl einschalteten (Fig. 296) oder die erstere durch Rückkehr auf die Ausgangsbasis zum Netz ausgestalteten (Fig. 296a und 297), so erkennen wir: Ist nur eine Dreiecksseite bekannt, so ist die Zahl der Seitengleichungen gleich der Zahl der Dreiecksseiten, welche gestrichen werden müssen, um aus dem Dreiecksnetz eine Kette zu machen. Die Zahl der Winkelsummengleichungen ist im Falle bloss zweiseitig beobachteter Strahlen gleich der Zahl von Dreiecken der durch Strahlenausschaltung erzielten Kette + der Zahl der hierbei gestrichenen Seiten. (Ist ein Punkt im Netz durch reinen Vorwärts- oder Rückwärtseinschnitt festgelegt, so liefert seine Existenz und diejenige seiner Bestimmungsstrahlen keine weitere Gleichung, beide bleiben für die Feststellung der Zahl der Bedingungsgleichungen ausser Betracht.) Für jeden bloss einseitig beobachteten Strahl kommt aus der nach vorigem festgestellten Zahl von Winkelsummengleichungen eine in

Fortfall. Die übrigen Bedingungsgleichungen bis zur Gesamtzahl von $\beta = w - 2p + 4$ (s. Gleichung 2) sind Punktgleichungen.

In Fig. 298 sind in zehn Dreiecken 30 Winkel gemessen, eine Seite, z. B. BH, muss mindestens bekannt sein, gibt zusammen

31 bekannte Stücke. Nötig sind für die gegenseitige

Festlegung der zehn Punkte: $2p - 3 = 17$ unabhängige

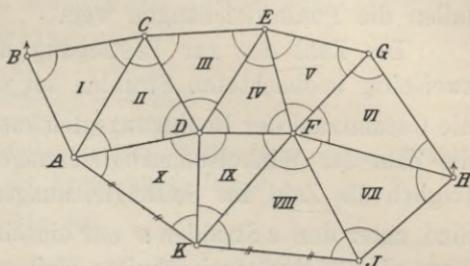
Stücke. Also haben wir im ganzen $31 - 17 = 14$ Be-

dingungsgleichungen, und zwar zwei Punktgleichungen

(bei D und F), zehn Winkel-

summengleichungen und zwei Seitengleichungen. (Zum Zwecke der Zurückführung auf die Kette seien z. B. die Seiten AK und KJ gestrichen).

Fig. 298.



Man kann unbeschadet vorhandener Winkelbeobachtung die Zahl der Bedingungsgleichungen statt in der Zahl der gemessenen Winkel

auch in der Zahl der beobachteten Strahlen ausdrücken. Sind in einem Punkte w unabhängige Winkel gemessen, so ersetzen sie $w + 1$ Richtungen. Folglich ersetzen $[w]$ in p Punkten gemessene unabhängige

Winkel $[w] + p$ Richtungen. Setzen wir jeden Strahl als zweiseitig beobachtet voraus, so haben wir also mit $[w]$ in p Punkten gemessenen unabhängigen Winkeln: $s = \frac{[w] + p}{2}$ je zweiseitig beobachtete

Strahlen. Daraus erkennen wir: Sind s je zweiseitig beobachtete Strahlen im Dreiecksnetz vorhanden, so ist — eine einzige Dreiecksseite als bekannt vorausgesetzt — die

Zahl der Bedingungsgleichungen im ganzen

(3) $\beta = [w] - 2p + 4 = 2s - 3p + 4$.

Daraus ergibt sich folgende

Zusammenstellung der obigen Untersuchungen.

Zahl der Netzpunkte (exkl. reine Vor- od. Rückwärts-einschnitte) $p =$	Zahl der zur Kettenverbindung nötigen Dreiecke	Zahl der zur Kette nötigen Strahlen	Von s zweiseitig beobachteten Netzstrahlen sind für die Dreiecksseite überschüssig	Zahl der Winkelsummengleichungen
3	1	3	$s - 3 = 0$	$0 + 1 = 1$
4	2	5	$s - 5$	$(s - 5) + 2 = s - 3$
5	3	7	$s - 7$	$(s - 7) + 3 = s - 4$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p	$p - 2$	$2p - 3$	$s - (2p - 3)$	$[s - (2p - 3)] + p - 2 = s - p + 1$

Sind von den s Strahlen s' nur einseitig beobachtet, so tritt an Stelle von s in obiger Tafel und in Gleich. (3) die Differenz $s - s'$. In diesem Fall ist also die Zahl der Winkelsummengleichungen

$$(4) \quad \underline{(s - s') - p + 1.}$$

b) im Fall von Richtungsbeobachtungen.

Treten Richtungs- an Stelle der Winkelbeobachtungen, so fallen die Punktgleichungen weg.

Die Zahl der zur Festlegung unserer p Dreieckspunkte je zweiseitig beobachteten Strahlen sei wieder s ,

die Gesamtzahl der Bedingungsgleichungen also $\beta = 2s - 3p + 4$,

die Zahl der Winkelsummengleichungen ist $s - p + 1$,

folglich die Zahl der Seitengleichungen $s - 2p + 3$.

Sind unter den s Strahlen s' nur einseitig beobachtete (etwaige reine Vor- oder Rückwärtseinschnitte bleiben für die Zählung der Punkte und der Richtungen auch hier ausser Betracht), so wird

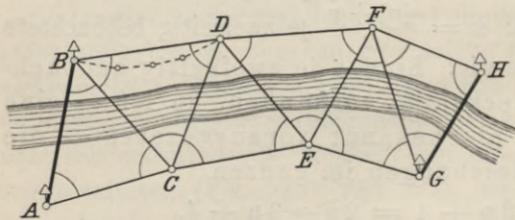
die Zahl der Winkelsummengleichungen $= (s - s') - p + 1$

die Zahl der Seitengleichungen $= s - 2p + 3$

die Gesamtzahl der Bedingungsgleichungen $\beta = 2s - s' - 3p + 4$.

Sind mehr als zwei Festpunkte durch ihre Koordinaten gegeben, so liefert der Anschlusszwang weitere Bedingungen. So sind in Fig. 299 in sechs Dreiecken 18 Winkel gemessen und überdies durch

Fig. 299.



die vier Festpunkte A, B, G und H fünf unabhängige Stücke unabhängig bekannt. Nötig sind für die Bestimmung der gegenseitigen Lage der acht Punkte 13 unabhängige Stücke, also brauchen

wir für die Ausgleichung $18 + 5 - 13 = 10$ Bedingungsgleichungen. Hierunter sind sechs Winkelsummen- und vier weitere Gleichungen, welche die Festhaltung der als fehlerfrei vorausgesetzten Bestimmungselemente für die gegenseitige Lage der vier Festpunkte verbürgen. Von den letzteren sichern zwei das fehlerfrei gegebene Verhältnis der Streckenlängen AB und GH, AG und BH, zwei deren gegebene Divergenz.

Sind die Bedingungsgleichungen aufgestellt, so berechnen wir die zu ihrer Befriedigung an den verbesserungsfähigen Elementen (zumeist Winkeln) anzubringenden Verbesserungszuschläge v entweder unter Verzicht auf bestmögliche und eindeutige Werte stufenweise empirisch, oder; unter Hinzufügung der Hauptbedingung

Berechnung der Winkelverbesserungen v aus den Bedingungsgleichungen.

[p v v] = Minimum (Methode der kleinsten Quadrate), nach einem der Verfahren für die Ausgleichung „vermittelnder“, oder „bedingter“ Beobachtungen (s. §§ 26 bis 28 von Weitbrecht, Ausgleichungsrechnung).

Für untergeordnetere Zwecke genügt das erstgenannte Verfahren einer stufenweisen, empirischen Ausgleichung:

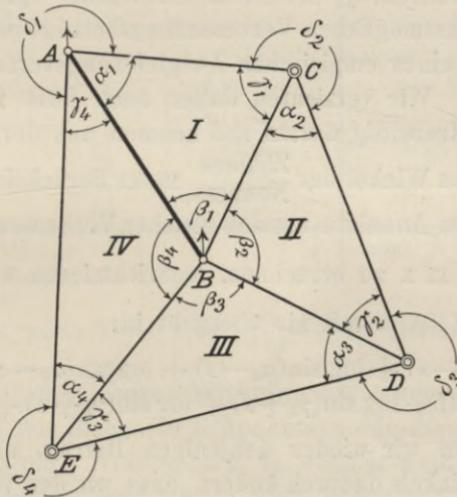
Beispiel.

Gegeben: $\begin{matrix} x & y \\ B + 47694,36 & - 12304,10 \\ A + 48938,76 & - 12650,14. \end{matrix}$

Gemessen: sind die in nachfolgender Tafel (S. 559) eingetragenen Winkel.

Gesucht: die Koordinaten der Neupunkte C, D und E.

Fig. 300.



Lösung. Gemessen: $4 \times 3 + 4 = 16$ Winkel }
 Gegeben: 1 Seite } 17 Stücke.
 Nötig: $2p - 3 = 10 - 3 = 7$ „

Überschüssig, also Zahl der Bedingungs-gleichungen —: 10, nämlich:

- | | | | | |
|------------------------|---|--|-------------------------------------|--|
| I) 5 Punktgleichungen: | { | $(1) \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 4R$ | } II) 4 Dreiecks-sommen-geichungen. | $(6) \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 2R$ |
| | | $(2) \alpha_1 + \gamma_4 + \delta_1 = 4R$ | | $(7) \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 2R$ |
| | | $(3) \alpha_2 + \gamma_1 + \delta_2 = 4R$ | | $(8) \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 2R$ |
| | | $(4) \alpha_3 + \gamma_2 + \delta_3 = 4R$ | | $(9) \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 = 2R$ |
| | | $(5) \alpha_4 + \gamma_3 + \delta_4 = 4R$ | | |

III) 1 Seitengleichung (10) $\frac{AB \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_4}{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_3 \sin \gamma_4} = AB.$

Die Verbesserungs-beträge für die von Gleichungen (1) bis (9) betroffenen Winkel kann man unter jeweiliger Berücksichtigung der vorgängig befriedigten und daher nicht wieder zu störenden Gleichungen durch einfache Addition stufenweise feststellen (s. Tafel S. 559).

Um Gleichung (10) zu befriedigen, wenden wir das in § 64 gezeigte Verfahren wieder an. Ergäbe sich etwa der Wert des Zählers (aus den bis einschliesslich Gleichung (9) verbesserten Winkeln berechnet) grösser als der des Nenners, so würden zweckmässigerweise sämtliche \sin des Zählers verkleinert, sämtliche \sin des Nenners vergrössert werden. Sind sämtliche Winkel spitz, so käme diese \sin Änderung einer in gleichem Sinn bewirkten Änderung der Winkel gleich. Ist aber der eine, oder andere von ihnen stumpf, so nimmt ihr \sin bei wachsendem Winkel ab und umgekehrt. Man müsste also eigentlich, wollte man die kleinstmöglichen Winkelverbesserungsbeträge v errechnen, diese ohne Rücksicht auf die Anordnung der Winkel im Zähler oder Nenner mit entgegengesetzten Vorzeichen einführen, je nachdem die Winkel spitz, oder stumpf sind. Die kleinstmöglichen Verbesserungsbeträge werden wir aber bei Benützung eines empirischen Ausgleichsverfahrens ohnedies nicht erhalten. Wir verzichten daher auch jetzt für Bedingungsgleichung (10) freiwillig darauf und nehmen uns der Bequemlichkeit halber vor, jeden Winkel des $\frac{\text{Zählers}}{\text{Nenners}}$, unter Berücksichtigung der eingangs gemachten Annahme um den gleichen Verbesserungsbetrag x zu verkleinern Um x zu errechnen, logarithmieren wir, wie in § 60, vergrössern. die Gleichung (10), womit sie übergeht in:

$$(10^a) \log \sin(\alpha_1 - x) + \log \sin(\alpha_2 - x) + \log \sin(\alpha_3 - x) + \log \sin(\alpha_4 - x) \\ = \log \sin(\gamma_1 + x) + \log \sin(\gamma_2 + x) + \log \sin(\gamma_3 + x) + \log \sin(\gamma_4 + x).$$

Bezeichnen wir wieder denjenigen Betrag, um welchen sich $\log \sin$ eines Winkels dadurch ändert, dass wir den Winkel selbst um $1''$ (oder bei Kleintriangulierungen, wie im vorliegenden Beispiel um $10''$) ändern, mit δ , (wobei δ_α $\begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix}$ wird, wenn der geänderte

Winkel α $\begin{matrix} \text{spitz} \\ \text{stumpf} \end{matrix}$ ist, d. h., wenn die \sin Änderung in $\begin{matrix} \text{gleicher} \\ \text{entgegengesetzter} \end{matrix}$ Richtung mit der Winkeländerung verläuft, so erhalten wir aus (10^a)

$$(10^b) \quad (\log \sin \alpha_1 + \log \sin \alpha_2 + \log \sin \alpha_3 + \log \sin \alpha_4) \\ - (\log \sin \gamma_1 + \log \sin \gamma_2 + \log \sin \gamma_3 + \log \sin \gamma_4) \\ = x'' (\delta_{\alpha_1} + \delta_{\alpha_2} + \delta_{\alpha_3} + \delta_{\alpha_4} + \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} + \delta_{\gamma_3} + \delta_{\gamma_4}),$$

oder unter Berücksichtigung der eingangs gemachten Annahme:

$$(11) \quad x'' = \frac{\log \text{Zähler} - \log \text{Nenner}}{[\text{algeb. } \delta]} = \frac{\log > - \log <}{[\text{algeb. } \delta]}.$$

Die Änderungen δ an den $\log \sin$ werden samt ihren Vorzeichen anlässlich der Berechnung von \log Zähler und \log Nenner aus der Log-Tafel erhoben.

Bezeichnung der Winkel	Gemessene Winkel			Verbesserungen wegen Gleichungen									log sin α	log-Diff. pro 10''	log sin γ	log-Diff. pro 10''	Verbess. wegen Gleich. (10)	Ausgegliche Winkel				
	0	'	''	1	2	3	4	5	6	7	8	9						0	'	''		
β_1	79	51	05	<u>-5</u>					<u>-6</u>											79	50	94
β_2	116	04	05	<u>-6</u>					(+2)	<u>-7</u>										116	03	94
β_3	119	30	00	<u>-5</u>					(+2)	(+3)	<u>+4</u>									119	30	04
β_4	85	15	12	<u>-6</u>					(+2)	(+4)	(-4)	<u>+0</u>								85	15	08
α_1	64	52	44		<u>+4</u>				<u>-6</u>				9.928760	<u>+4,3</u>					<u>-7</u>	64	52	35
γ_4	60	55	77		<u>+4</u>				(+3)						9.910704	<u>+4,9</u>			<u>+7</u>	60	55	99
δ_4	274	91	67		<u>+4</u>				(+3)						(-8)					274	91	66
α_2	43	86	30			<u>+3</u>			(+3)	<u>-7</u>			9.803295	<u>+8,3</u>					<u>-7</u>	43	86	22
γ_1	55	96	67			<u>+3</u>			<u>-6</u>							9.886590	<u>+5,7</u>		<u>+7</u>	55	96	71
δ_1	300	16	94			<u>+3</u>			(+3)	(+7)										300	17	07
α_3	38	11	94				<u>-4</u>			(+3)	<u>+3</u>		9.750999	<u>+10,0</u>					<u>-7</u>	38	11	89
γ_2	40	09	88				<u>-4</u>			<u>-7</u>						9.770134	<u>+9,4</u>		<u>+7</u>	40	09	84
δ_2	321	78	30				<u>-4</u>			(+4)	(-3)									321	78	27
α_4	54	28	95					<u>0</u>					9.876862	<u>+5,9</u>					<u>-7</u>	54	28	93
γ_3	42	57	96					<u>0</u>								9.792448	<u>+8,6</u>		<u>+7</u>	42	58	07
δ_3	303	13	09					<u>0</u>												303	13	00
	00	13		<u>-22</u>	<u>+12</u>	<u>+9</u>	<u>-12</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	9.359916	<u>+28,5</u>		9.359876	<u>+28,6</u>	<u>0</u>		2000	00	00

- 13

Verbess. wegen Gleich. (10) $\frac{40}{57,1} = 0,7$ Dekasekunden.

Mit den ausgeglichenen Winkelwerten ergeben sich die Dreiecksseiten, und aus ihnen die Eckpunktskoordinaten nach dem Verfahren des § 58 ohne Widerspruch, in welcher Reihenfolge wir auch die Rechnung durchführen mögen, zu (die Ausrechnung bleibt hier der Kürzung wegen weg):

$$\begin{aligned}
 x_C &= + 48489,88 & y_C &= - 11123,87 \\
 x_D &= + 46246,69 & y_D &= - 11790,14 \\
 x_E &= + 47641,35 & y_E &= - 13699,41.
 \end{aligned}$$

Solche empirische Verfahren sind, wenn es sich nicht um die Erlangung bestmöglicher Werte für die Neupunktskoordinaten handelt, namentlich in den Fällen der Figuren 298 und 299 zweckmässig.

Im Fall der Fig. 298 wird man dabei, nachdem die Winkel den Punkt- und Winkelsummengleichungen entsprechend ausgeglichen sind, mangels einer bekannten Dreiecksseite zunächst sämtliche Dreiecksseiten unter Einführung einer beliebig angenommenen Streckenlänge s für eine der Seiten in verschiedenartiger Aneinanderreihung der Dreiecke, also mehrfach berechnen und mitteln. Mit

den derart erhaltenen Strecken einer der der tatsächlichen Figur ähnlichen Figur $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots \mathcal{R}$ berechnen wir unter Annahme eines beliebigen Koordinatensystems ξ und eines beliebigen Ursprungs die Koordinaten ξ und η der Eckpunkte $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots \mathcal{R}$. Ermittelt man dann Länge und Richtungswinkel der Verbindungsstrecken BH der beiden gegebenen Festpunkte sowohl aus den berechneten Koordinaten ξ, η im willkürlichen, als aus den gegebenen x und y im richtigen Koordinatensystem, so bekommt man, wie in § 60 aus $n BH - \xi \mathcal{B} \mathcal{C} = \omega$, bezw. $\log BH - \log \mathcal{B} \mathcal{C} = \log q$, Verdrehungswinkel ω und \log des Reduktionsfaktors q , deren Addition zu den in bezug aufs willkürliche System abgeleiteten Richtungswinkeln und Streckenlogarithmen der Dreiecksseiten die tatsächlichen Werte $n AB, \dots$ und $A B, \dots$ liefert. Die endgültige Koordinatenberechnung erfolgt in den Fällen der Figuren 298 und 299 schliesslich am bequemsten durch Verbindung der so berechneten Dreiecksseiten und Richtungswinkel zu Polygonzügen nach Kapitel XII.

C. Anwendung der Kleintriangulierung auf die Wiederbestimmung von verloren gegangenen Dreieckspunkten, sowie auf die Bestimmung von Geländepunkten zu gegebenen Koordinaten. Schlussbetrachtungen.

§ 78. Die Wiederbestimmung von auf dem Gelände verloren gegangenen Dreieckspunkten

kann entweder auf geometrischem Wege unter Rückwärtsbenützung der auf die Triangulierung gegründeten früheren Stückvermessung, oder trigonometrisch erfolgen. Ist die bevorstehende Zerstörung eines Dreieckspunktes zum voraus bekannt (Umbau des den Punkt tragenden Gebäudes, Felssprengungen, Grabarbeiten etc. in der Nähe des Bodensignals), so kann man auch vor deren Eintritt der späteren Wiederherstellung vorarbeiten (s. unten).

Die nachträgliche, geometrische Wiederbestimmung kommt allein in Frage, wenn der trigonometrische Punkt neuerdings zur Wiederbestimmung verloren gegangener Markpunkte bezw. als Ausgangspunkt von Fortführungsvermessungen benützt werden soll und wenn die Möglichkeit besteht, dass der durch seine Koordinaten im Landeskoordinatensystem bestimmte Punkt von demjenigen abweicht, welcher zur ursprünglichen Stückvermessung diente. In diesem Fall konstruiert man aus festen, von der ursprünglichen Stückvermessung erfassten Punkten (Markpunkten etc.) rückwärts wieder die ursprüngliche Lage der Aufnahmelinien auf dem Gelände, welche sich auf den jetzt verloren gegangenen trigonometrischen Punkt stützten und

aus ihr mittels der früher erhobenen Aufnahme- und Probemasse die frühere Lage des trigonometrischen Punktes. Sie ergibt sich daraus im Fall noch unverletzt vorhandener, früher aufgenommenen Grenzmarken mit der der früheren Vermessung und Punktvermarkung innewohnenden Genauigkeit und Zuverlässigkeit. Genügt diese nicht, oder befinden sich keine sicheren Aufnahmeobjekte aus früherer Zeit in der Nähe des trigonometrischen Punktes (grosse Waldungen, Weiden etc.), so muss auf die trigonometrische Punktbestimmung zurückgegriffen werden, die ohnedies allein in Frage kommt, wenn Neuaufnahmen mit trigonometrischem Anschluss auf den Punkt sich gründen sollen.

Zu diesem Zwecke bestimmt man auf dem Gelände einen vorläufigen Punkt \mathfrak{P} möglichst nahe dem gesuchten auf irgend welche Weise, nötigenfalls als Schnitt zweier von Festpunkten ausgehenden Zielungen, deren mit anderen Feststrahlen eingeschlossene Winkel als Unterschiede der zugehörigen, aus Koordinaten berechneten Richtungswinkel abgeleitet wurden. Alsdann folgen die Messungen und Berechnungen, welche zu den endgültigen Koordinaten x und y dieses vorläufigen Punktes mit Hilfe eines der Verfahren der §§ 64 bis 75 führen. Aus ihnen und den gegebenen Koordinaten x und y des Sollpunktes berechnet man die Länge und den Richtungswinkel der Verbindungsstrecke von vorläufig auf dem Gelände gewählten, nach dem letzteren Punkt P mittels der Formel:

$$\operatorname{tg} n \mathfrak{P} P = \frac{y - \eta}{x - \xi}$$

$$\mathfrak{P} P = \frac{y - \eta}{\sin n \mathfrak{P} P} = \frac{x - \xi}{n \mathfrak{P} P}.$$

Ermittelt man weiter noch den Richtungswinkel $n \mathfrak{P} F$ des Verbindungsstrahls von \mathfrak{P} nach einem beliebigen, von ihm aus anzielbaren Festpunkt F , so erhält man den in \mathfrak{P} auf dem Feld abzusetzenden Winkel $F \mathfrak{P} P = n \mathfrak{P} P - n \mathfrak{P} F$, auf dessen freiem Schenkel man von \mathfrak{P} aus die Strecke $\mathfrak{P} P$ abmisst, um die Lage des gesuchten \mathfrak{P} unktes P zu erhalten.

Voraufnahme zum Zweck der späteren Wiederbestimmung eines Dreieckspunktes, dessen bevorstehender Verlust bekannt ist.

Ist die Wiedervermarkung auf der alten Stelle in Aussicht genommen, so genügt eine exzentrische Versicherung durch unter die Ackerkrume gesetzte Marksteine, oder Pflöcke etwa nach Fig. 301.

Ist eine Veränderung der künftigen Lage des Dreieckspunktes als notwendig zu erwarten (z. B. Erneuerung eines den Punkt tragenden Bauwerks), so misst man von den Endpunkten

Fig. 301.

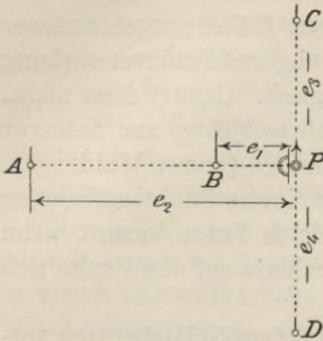
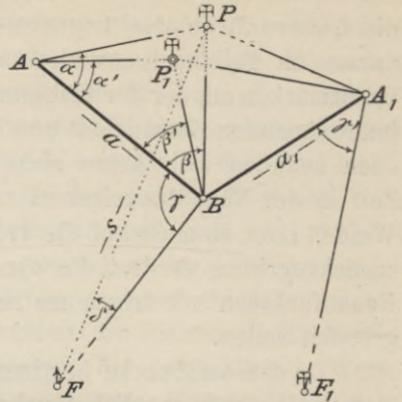


Fig. 302.



einer in der Nähe \bar{z} gelegten Grundlinie $AB = a$ aus, die Winkel α und β , welche sie mit den Verbindungslinien nach dem noch vorhandenen Festpunkt P einschliesst. Ergeben sich nach erfolgtem Umbau für diese Winkel veränderte Werte α' und β' , so ist die ursprüngliche Punktlage nach P_1 verschoben. Um dessen Koordinaten zu berechnen, misst man neben der Strecke a noch denjenigen Winkel γ in einem Endpunkt der Grundlinie AB , z. B. in B , welchen diese mit dem Strahl nach einem durch seine Koordinaten gegebenen Festpunkt F einschliesst. Man kann dann aus den Koordinaten des ursprünglichen Signals P entweder direkt, oder auf dem Umweg über den Standpunkt B („Herunterbringen“ von P s. § 84) diejenigen des veränderten Signalpunkts P_1 ableiten; letzterenfalls wie folgt:

$$(1) \quad PB = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$(2) \quad nPB = nPF + FPB, \text{ wobei } \sphericalangle FPB \text{ als Dreieckswinkel (oder sein Implement) sich ergibt aus dem Dreieck } PBF, \text{ sobald } \delta \equiv BFP = \arcsin \frac{PB}{s} \sin(\beta + \gamma) \text{ und der Richtungswinkel } nPF \text{ berechnet ist.}$$

Aus

$$(3) \quad \begin{cases} x_B = x_P + PB \cos nPB \\ y_B = y_P + PB \sin nPB \end{cases} \text{ erhält man zum Schluss}$$

$$(4) \quad \begin{cases} x_{P_1} = x_B + BP_1 \cdot \cos nBP_1 = x_B + \frac{a \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)} \cos(nBF + FBP_1) \\ \qquad \qquad \qquad = x_B + \frac{a \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)} \cos(nBF + \beta_1 + \gamma) \\ y_{P_1} = y_B + BP_1 \sin nBP_1 = y_B + \frac{a \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)} \sin(nBF + FBP_1) \\ \qquad \qquad \qquad = y_B + \frac{a \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)} \sin(nBF + \beta_1 + \gamma). \end{cases}$$

Zur Sicherung gegen Beobachtungsfehler wird man zweckmässigerweise mittels einer zweiten Grundlinie a_1 und einem Winkel γ' nach einem zweiten Festpunkt F_1 den Festpunkt P nach einem zweiten Basisendpunkt (etwa A_1) herunter-, und diesen hernach nach P_1 wieder hinauf, bringen“.

§ 79. Fehlergrenzen für trigonometrische Punktbestimmung III. und IV. Ordnung.

Da das Endresultat der Triangulierung in Koordinatenwerten besteht, läge es am nächsten, etwa für diese die äusserstenfalls zu dulddenden Fehler festzustellen. Allein die Genauigkeit der trigonometrischen Punktbestimmung, der Koordinaten, hängt nicht ausschliesslich vom Willen des Technikers ab. Die Zahl, Lage und Genauigkeit der zur Verfügung stehenden Festpunkte ist hiefür ebenfalls von Bedeutung. Aus diesem Grund begnügt man sich mit der Feststellung von Fehlergrenzen für die zur Punktbestimmung dienenden gemessenen Winkel und Richtungen.

Bei der Punktbestimmung III. Ordnung gilt in Preussen wie in Elsass-Lothringen als zulässige Höchstabweichung F_φ einer orientierten Richtung β oder γ gegen den endgültigen Richtungswinkel φ der Betrag von $15''$ a. T. (Tatsächlich wurde z. B. von der preussischen Landesaufnahme mit Theodoliten von 14 cm Teilkreisdurchmesser bei Beobachtung in drei vollen Sätzen ein mittlerer Richtungsfehler pro Einstellung von $\pm 4,2''$ erzielt).

Die bayerische Anweisung vom 25. Juni 1885 bestimmt hiefür $\frac{15''}{\sqrt{p}}$ a. T., wobei die Rückwärtsbeobachtung einer Richtung die Gewichtseinheit bildet und die orientierte äussere Richtung das Gewicht $p = \frac{n_t}{n_r + 1}$ erhält. Die höchstenfalls zulässige Abweichung einer zweiseitig beobachteten, aussen an zwei Feststrahlen angebundenen Richtung wird hieraus $F_\varphi = \frac{15''}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}}} = \pm 11,6''$ a. T.

Die badische Anweisung gestattet einen Fehler von $65''$ n. T., die hessische einen solchen von $100''$ n. T. im Dreiecksschluss.

Bei der Punktbestimmung IV. Ordnung sieht die preussische, wie die elsass-lothringische Anweisung für den zulässigen Richtungsfehler einen Höchstbetrag $F_\varphi = 25''$ a. T. für Seiten > 1 km vor. Die bayerische Fehlergrenze liegt bei $F_\varphi = \frac{25''}{\sqrt{p}}$ a. T., die württembergische bei $F_\varphi = 60 + \frac{40000''}{s}$ n. T. Daneben darf aber in Württemberg der Fehler im Dreiecksschluss $60''$ a. T. oder $185''$ n. T. (in Elsass-Lothringen $50''$ a. T.) und der mittlere Fehler des Mittels einer beobachteten Richtung $8''$ a. T. = $25''$ n. T. nicht überschreiten.

Die badische Anweisung gestattet einen Fehler im Dreiecksschluss von 100" n. T., die hessische Anweisung einen solchen von 133" n. T.

Kapitel XII.

Polygonometrische Punktbestimmung. („Polygonisierung“, „Stationierung“).

§ 80. Begriffsbestimmung und Zweck.

a) Begriffsbestimmung.

Während die gegenseitige Lage der aufgenommenen Punkte bei Benützung des Verfahrens der Triangulierung ausschliesslich mittels Winkelmessung, bei der Stückvermessung aber (abgesehen von einzelnen durch Strecken ersetzbaren Winkeln) ausschliesslich mittels Streckenmessung bestimmt wird, verwendet die Polygonisierung hiezu Winkel- und Streckenmessung als gleichwertige und in gleicher Zahl angewandte Bestimmungsgrössen. Sie reiht zu diesem Zweck eine (zunächst beliebige) Zahl von Strecken, deren Längen und gegenseitige Brechungswinkel gemessen werden, zu einem „polygonalen Zug“ oder „Polygonzug“ aneinander, der von einem seinen Koordinaten nach bereits festgelegten Punkt (Festpunkt) ausgeht und womöglich in einem solchen endigt. Erfolgt wohl der An-, nicht aber der Abschluss in einem Festpunkt, so heisst man den Polygonzug einen „fliegenden“, oder „Schnitzzug“, besteht der Zug aus einer einzigen „Polygonseite“, so heisst ihr (durch sie und den im Anschlusspunkt gemessenen „Anschlusswinkel“ nach einem fernen Festpunkt bestimmter) Endpunkt: „Schnittpunkt“.

Ein Polygonzug, der in sich selbst zurückkehrt (Anschluss- und Abschlusspunkt zusammenfallend) heisst „geschlossener Zug“.

b) Zweck.

In offenem, nicht allzu bergigem Gelände könnte man die Triangulierung so weit nach unten, das (bei Anwendung der Parallelmethode) (in sich selbst geometrisch bestimmte) Netz der Stückvermessung nach oben treiben, dass Verbindungslinien der Dreieckspunkte und andere in sie einbindende Gerade direkt als Aufnahmelinien für die Stückvermessung benutzbar wären. Eine so erhebliche Ausdehnung des geometrischen Netzes ist aber nur in dazu geeignetem Gelände und überdies nur unter grossem Arbeitsaufwand möglich. Eine sehr engmaschige Triangulierung würde eine zwar technisch gute, aber wegen des wachsenden Anschlusszwangs teure, und wirtschaftlich (abgesehen vielleicht von hochwertigem Gelände in Stadtgebieten)

unrationelle Punktbestimmung liefern. In Waldgebieten, ausgedehnten Baumgütern, ist eine engmaschige Triangulierung überhaupt undurchführbar.

In allen diesen Fällen stellt die polygonometrische Bestimmung die Verbindung zwischen Stückvermessung und Triangulierung her, indem sie die Stützpunkte für das geometrische Aufnahmenetz liefert (diesem den richtigen Platz im Dreiecksnetz anweist) und gleichzeitig für dessen Messungskontrolle sorgt. Vom Grossen zum Kleinen stuft sich demnach die Grundlage für die Horizontalaufnahme ausgedehnter Gebiete im allgemeinen wie folgt ab:

- I. Trigonometrische Punktbestimmung I., II., III. . . . Ordnung.
- II. Polygonometrisches Netz, eingeteilt in Haupt- und Nebenzüge und Schnittpunkte.
- III. Geometrisches Netz, sich stützend auf Kleinpunkte I., II. . . . Ordnung.

§ 81. Polygonometrische Koordinatenberechnung. Abschlussgleichungen und Sätze vom geschlossenen Vieleck.

Wir haben in § 56 für die Koordinaten des Endpunkts A_1 ¹⁾ einer Strecke s_1 ¹⁾, welche von einem Festpunkt A_0 unter dem Richtungswinkel φ_1 ¹⁾ ausgeht, allgemein gefunden:

a) Schnittpunkt.

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = x_0 + s_1 \cos \varphi_1 \\ y_1 = y_0 + s_1 \sin \varphi_1 \end{cases}$$

In der Regel ist der Richtungswinkel φ der Polygonseiten nicht gemessen, wohl aber der Anschlusswinkel $\beta_0 = \angle BA_0A_1$ vom Anschluss nach einem fernen Festpunkt B. Den Richtungswinkel n_{A_0B} berechnen wir aus den Koordinaten der Festpunkte A_0 und B nach Gleichung (1) von § 56 und erhalten dann:

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi_1 \equiv n_{A_0A_1} &\equiv n_{A_0B} + \angle BA_0A_1 \\ &= n_{A_0B} + \beta_0. \end{aligned}$$

Nach der Fussnote bei § 56 ist der Richtungswinkel einer Strecke in ihrem Endpunkt um $2R$ von dem im Anfangspunkt gemessenen verschieden, so dass wir auch schreiben können:

$$(2^a) \quad \underline{\varphi_1} = n_{BA_0} + \angle BA_0A_1 \pm 2R = \underline{\varphi_0} + \beta_0 \pm 2R.$$

¹⁾ Für die Streckenlängen s und die Richtungswinkel φ gilt in der Folge immer der Index des durch sie bestimmten Punktes, für die Brechungswinkel β (je von der vorhergehenden zur nachfolgenden Seite in positivem Sinn gezählt) der Index ihres Scheitels.

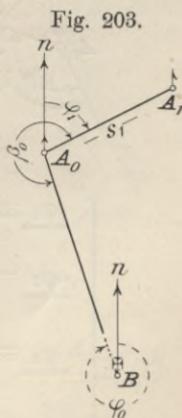
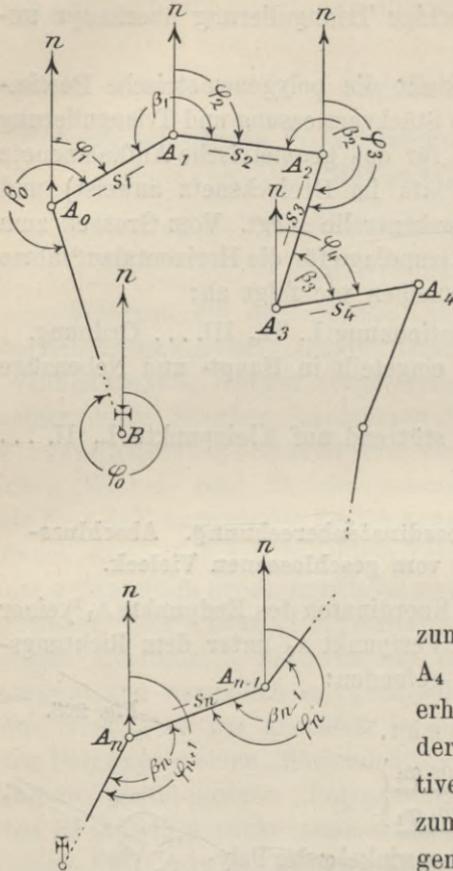


Fig. 203.

Schnittpunkt.

Fig. 304.



b) Schnittzug.

Sind die Koordinaten des Punktes A_1 nach Gleichungen (1) und (2) berechnet, so treten diese an Stelle von x_0 und y_0 in Gleichung (1). Sie dienen jetzt zur Bestimmung der Koordinaten des nächsten Polygonpunktes A_2 :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + s_2 \cos \varphi_2 \\ y_2 &= y_1 + s_2 \sin \varphi_2, \end{aligned}$$

wobei der Richtungswinkel φ_2 sich genau wie oben ergibt:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &\equiv n A_1 A_2 \equiv n A_1 A_0 \\ &+ A_0 A_1 A_2 \equiv n A_0 A_1 \\ &\pm 2 R + A_0 A_1 A_2 \\ &= \varphi_1 + \beta_1 \pm 2 R. \end{aligned}$$

Gehen wir in gleicher Weise zum Punkt A_3 , von diesem zu A_4 usw. über (s. Fig. 304), so erhalten wir unter Festhaltung der Definition von β („in positivem Sinn vom vorhergehenden zum nachfolgenden Punkt“) allgemein:

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \underline{\varphi_1} &\equiv n A_0 A_1 \equiv n A_0 B + B A_0 A_1 \\ &\equiv n B A_0 + B A_0 A_1 \pm 2 R \equiv \underline{\varphi_0 + \beta_0 \pm 2 R} \\ \underline{\varphi_2} &\equiv n A_1 A_2 \equiv n A_1 A_0 + A_0 A_1 A_2 \\ &\equiv n A_0 A_1 + A_0 A_1 A_2 \pm 2 R \equiv \underline{\varphi_1 + \beta_1 \pm 2 R} \\ \underline{\varphi_3} &\equiv n A_2 A_3 \equiv n A_2 A_1 + A_1 A_2 A_3 \\ &\equiv n A_1 A_2 + A_1 A_2 A_3 \pm 2 R \equiv \underline{\varphi_2 + \beta_2 \pm 2 R} \\ &\vdots \\ \underline{\varphi_n} &\equiv n A_{n-1} A_n \equiv n A_{n-1} A_{n-2} + A_{n-2} A_{n-1} A_n \\ &\equiv n A_{n-2} A_{n-1} + A_{n-2} A_{n-1} A_n \pm 2 R \equiv \underline{\varphi_{n-1} + \beta_{n-1} \pm 2 R} \\ \underline{\varphi_{n+1}} &\equiv n A_n A_{n+1} \equiv n A_n A_{n-1} + A_{n-1} A_n A_{n+1} \\ &\equiv n A_{n-1} A_n + A_{n-1} A_n A_{n+1} \pm 2 R \equiv \underline{\varphi_n + \beta_n \pm 2 R} \end{aligned} \right.$$

und

$$(4) \left\{ \begin{aligned} x_1 &= x_0 + s_1 \cos \varphi_1 \\ x_2 &= x_1 + s_2 \cos \varphi_2 \\ x_3 &= x_2 + s_3 \cos \varphi_3 \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + s_n \cos \varphi_n \end{aligned} \right. \quad (5) \left\{ \begin{aligned} y_1 &= y_0 + s_1 \sin \varphi_1 \\ y_2 &= y_1 + s_2 \sin \varphi_2 \\ y_3 &= y_2 + s_3 \sin \varphi_3 \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + s_n \sin \varphi_n \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (3) bis (5) ergeben mit Hilfe der gemessenen Brechungswinkel β des berechneten Richtungswinkels φ_0 und der Koordinaten für den Anschlusspunkt A_0 nacheinander die Koordinaten sämtlicher Polygonpunkte $A_1, A_2, \dots A_n$.

Sie liefern aber noch eine Additionsprobe. Streichen wir nämlich links und rechts vom Gleichheitszeichen die identischen Glieder und addieren vertikal, so liefert

Rechenprobe.

$$\text{Gleichung (3)} \quad \underline{\underline{-\therefore \varphi_{n+1} = \varphi_0 + [\beta]_0^n \pm (n+1) 2R}} \quad (3a)$$

$$\text{„ (4)} \quad \underline{\underline{-\therefore x_n = x_0 + [s \cdot \cos \varphi]_1^n}} \quad (4a)$$

$$\text{„ (5)} \quad \underline{\underline{-\therefore y_n = y_0 + [s \cdot \sin \varphi]_1^n}} \quad (5a),$$

wonach wir die Richtigkeit der in der Rechnung ausgeführten Einzeladditionen prüfen können.

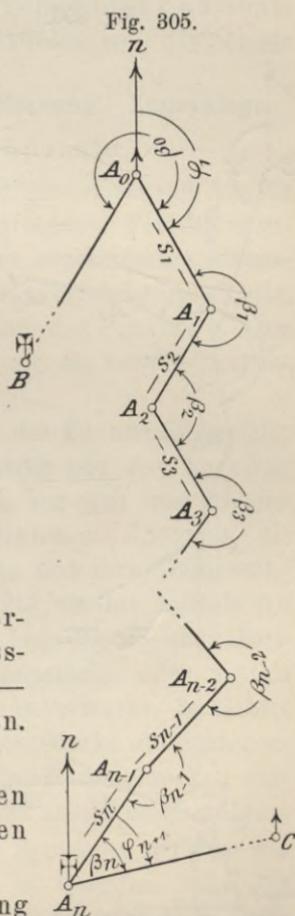
c) Polygonzug mit gegebenen, zugänglichen An- und Abschlusspunkten.

Der Messungsprobe wegen ist der An- und Abschluss der Polygonzüge an Festpunkten nach Fig. 305¹⁾ immer anzustreben.

In diesem Fall sind die nach Gleichungen (4a) und (5a) berechneten Werte für die Koordinaten des Endpunktes A_n zum voraus bekannt. Der nach (3a) berechnete Richtungswinkel φ_{n+1} ergibt sich auch aus den Koordinaten von A_n und C nach § 56.

Die drei Gleichungen (3a) bis (5a) stellen also die Bedingungen dar, welchen unter Voraussetzung fehlerfreier Koordinaten für die Anschlusspunkte die gemessenen Größen — Strecken und Winkel — genügen müssen. Sie liefern entweder:

1. ein Mittel zur ausgleichenden Verbesserung dieser gemessenen Elemente, oder:
2. ein Hilfsmittel zur Berechnung dreier etwa fehlender Stücke im Vieleck, oder endlich:



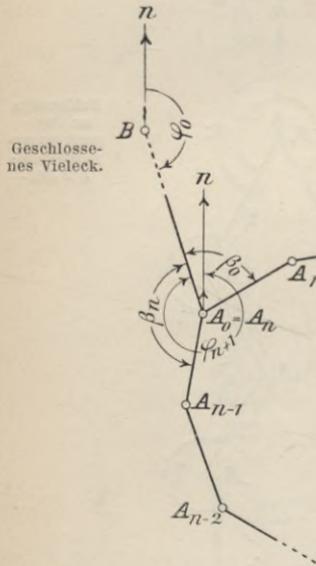
Beiderseits an Festpunkten angeschlossenener Zug.

¹⁾ In Fig. 305 ist der Punkt A_n als zugänglich und der Winkel φ_{n+1} von der Richtung $A_n n$ ausgehend zu zeichnen!

3. eine summarische Sicherung gegen grobe Messungsfehler und die Möglichkeit, einen etwaigen solchen nach Grösse und Lage aufzusuchen.

Dieses Ergebnis stimmt überein mit folgender Überlegung: Da $2n - 3$ unabhängige Stücke bekannt sein müssen, damit ein n -Eck seiner Form und Grösse nach überhaupt bestimmt ist (s. §§ 15 und 77), im vorliegenden Fall aber alle Brechungswinkel und Vielecksseiten — je n — gemessen sind, so sind drei Stücke übrig. (Die Winkelmessung in A_0 und A_n nach den Dreieckspunkten B und C (Fig. 305) lässt sich mit Hilfe der aus den Koordinaten dieser Punkte zu ermittelnden Richtungswinkel $n A_0 A_n$, $n A_0 B$ und $n A_n C$ auf die

Fig. 306.



gegenseitige Zielung $A_0 A_n$, d. h. auf die beiden Winkel bei A_0 und A_n des durch die Verbindungslinie $A_0 A_n$ zu schliessenden Polygons reduzieren).

d) Geschlossenes Polygon.

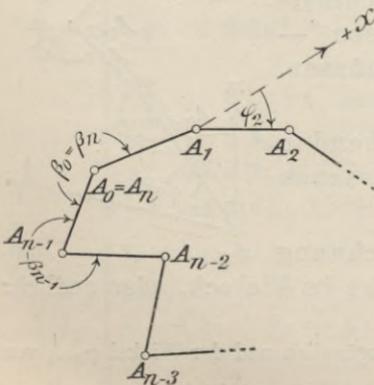
Schliesst der Polygonzug in demselben Festpunkt A_0 wieder ab, von welchem er ausgeht (A_0 und A_n identisch), und ist die zur Orientierung dienende Anschlussrichtung $A_0 B$ mit dem Richtungswinkel $\varphi_0 = n B A_0$ gleichzeitig Abschlussrichtung mit dem Richtungswinkel $\varphi_{n+1} = n A_0 B$, so dass $\varphi_0 = \varphi_{n+1} \pm 2R$, so gehen die Bedingungsgleichungen (3a) bis (5a) über in:

$$(3b) \quad [\beta]_0^n = k \cdot 2R$$

$$(4b) \quad 0 = [s \cos \varphi]_1^n$$

$$(5b) \quad 0 = [s \sin \varphi]_1^n$$

Fig. 307.



Fällt die zur Orientierung dienende, ausserhalb des Vielecks liegende Anschlussrichtung $A_0 B$ weg (d. h. werden die Polygonpunkte nur unter sich, nicht aber mit der Landesvermessungsachse in Beziehung gebracht) (s. Fig. 307), so nehmen die Bedingungsgleichungen (3a) bis (5a) die Form an:

$$\begin{aligned} (3c) \quad & [\beta]_1^n = 2kR \\ (4b) \quad & 0 = [s \cos \varphi]_1^n \\ (5b) \quad & 0 = [s \sin \varphi]_1^n, \end{aligned}$$

d. h.: Die Summe der Brechungswinkel eines geschlossenen Vielecks ist gleich einer geraden Anzahl von rechten Winkeln (die bestimmte Form $[\beta] = (2n - 4)R$ muss hier verlassen werden, weil als Vieleckswinkel β je nach dem Umgehen der Figur bald die äusseren, bald die inneren Winkel gelten und weil die Beschränkung auf nur ausspringende Ecken wegfallen muss), die Summe der Projektionen aller Seiten eines geschlossenen Vielecks auf eine beliebige Achse ist gleich 0.

Letzterer Satz findet ausgiebige Verwendung namentlich bei der Berechnung fehlender Stücke in Polygonen.

§ 82. Vermarkung der Polygonpunkte. Messung. Zugsanlage.

a) Vermarkung der Polygonpunkte.

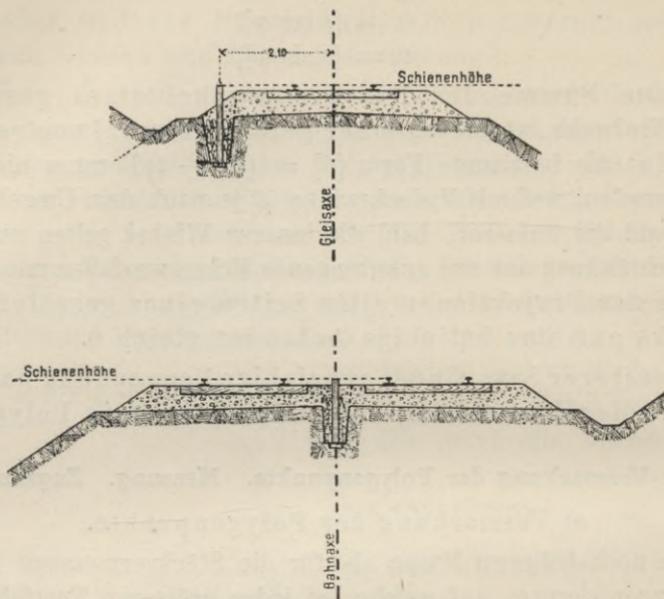
In noch höherem Masse als für die Stückvermessung ist für die Polygonisierung, auf welche bei jeder grösseren Fortführungsvermessung zurückgegriffen werden muss, eine zweckmässige, dauerhafte, der Messung vorausgehende örtliche Vermarkung wichtig. Diese muss, wenigstens über die Geltungsdauer des Punktes, dessen leichte Auffindbarkeit und Identifizierung sowie die Unveränderlichkeit seines Standorts gewährleisten.

So erfordert z. B. die Instandhaltung der Eisenbahngeleise nach Lage und Höhe, sowie die Durchführung und der Nachtrag von im Laufe der Zeit eintretenden baulichen und von Grenzänderungen innerhalb des Eisenbahngeländes dringend die Schaffung sicherer und dauernder Festpunkte und ihre Einmessung gegenüber der Bahnachse. Solche Festpunkte werden mittels 0,6 bis 1,5 m langer eiserner, im Bahnkörper befestigter, oben horizontal abgeglicherer und abgefaster Schienenstücke oder mittels eiserner Ständer mit kugelhappenförmigem Ende vermarkt. Im Gebiet der württembergischen Staatsbahnen wird diese Marke auf Schienenhöhe und wie folgt in Beton versetzt, oder durch Steinbrocken gespannt, deren Zwischenräume mit Zementmörtel ausgegossen werden:

auf einspurigen Bahnen von normaler Spurweite 2,10 m von der Gleisachse entfernt und zwar in Geraden links der Bahn, in Kurven auf der Seite des niederen Strangs (konkave Seite),

auf zweispurigen Bahnen von normaler Spurweite in der Bahnachse selbst (s. Fig. 308).

Fig. 308.



Die Marken werden angebracht:
 in Krümmungen ohne Übergangskurve am Bogenanfang und -ende,
 „ „ mit „ an deren Anfangs- und Endpunkt,
 ferner bei Gefällwechseln und ausserdem in ungefähr gleichen Ab-
 ständen so, dass zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten
 bequem gezielt werden kann und ihre grösste Entfernung beträgt:

in geraden Strecken	300—500 m
„ Bögen mit $r > 1000$ m	200—300 „
„ „ „ $r > 500$ „	150—250 „
„ „ „ $r < 1000$ „	100—200 „
„ „ „ $r < 500$ „	100—200 „

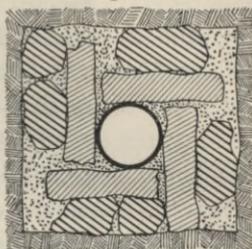
Ist die Bogenlänge kürzer als diese Masse, so wird die un-
 gefähre Bogenmitte versichert. Sämtliche Versicherungsmarken
 werden auf die Bahnnumerierung eingemessen.

Der genaue Punkt wird bei Verwendung von Schienenstücken
 durch ein Kreuz im Schienenkopf bezeichnet.

Die Vermarkung der Polygonpunkte in städtischen Strassen
 — soweit eine solche, angesichts der ständigen Durchwühlung für
 Kanalisations-, Gas- und Wasserleitungs-, Pflasterungs-, Strassen-
 bahn- etc. Arbeiten überhaupt durchgeführt und nicht durch Ein-
 messung nach benachbarten festen Gebäudepunkten ersetzt werden
 will — erfolgt zumeist durch genügend verspannte und in Beton-
 klötze eingebettete, senkrecht gestellte schmiedeiserne Röhren von

ca. 40 bis 80 cm Länge und 3 bis 4 cm äusserem Durchmesser. Für deren Entwässerung ist Sorge zu tragen. Die leichte Auffindbarkeit wird durch umschliessende gusseiserne Kästen gewährleistet, deren abnehmbarer Deckel mit der Strassen-, bezw. Gehwegfläche eben ist und eine entsprechende Bezeichnung (z. B. Polyg. P.) trägt. Wohlfeiler, und im Hinblick auf die Dauer des Punktes ebenso gut, ist die Versicherung mittels vertikal eingetriebener, nach Fig. 309 mit Steinbrocken und Betonguss verspannter Eisenröhren. Verwaltungsmassnahmen sorgen für den notwendigen Schutz gegen Beschädigungen durch städtische Arbeiter, Linieneinbindung an benachbarte Gebäude (eventl. mittels eingelassener Bolzen) etc. für leichte und sichere Wiederherstellungsmöglichkeit im Falle des Verlustes.

Fig. 309.



Ist die Geltungsdauer eines Polygonpunktes nur kurz, wie bei Vermessungen zu Bauzwecken, so genügt auch die in Fig. 83 dargestellte Vermarkung mittels Lattendreiecken.

Auf landwirtschaftlich benütztem Gelände ist keine der soeben vorgeführten Vermarkungsarten möglich. Hier lassen sich daher nicht alle drei in der Einleitung dafür aufgestellten Forderungen gleichzeitig erfüllen. Vielmehr kann es sich nur darum handeln, entweder den Polygon- mit einem Grenzpunkt zu verbinden, was dem ersteren neben der Möglichkeit leichten Auffindens den strafrechtlichen Schutz gegen böswillige Beschädigungen sichert, den das Markzeichen als solches genießt. Die Identifizierung erfolgt in diesem Fall durch ein bestimmtes Zeichen im Markpunkt (Ölfarbefleck, eingehauenes Kreuz, zylindrische Vertiefung etc.). Gegen unbeabsichtigte Beschädigungen und Ortsveränderungen durch den normalen Feldbau ist aber ein solcher Punkt ebensowenig geschützt, als gegen die Notwendigkeit seiner Entfernung auf Antrag des Grundeigentümers, wenn der Punkt seine Eigenschaft als Grenzzeichen verliert. Sicherer, wenn auch für das Aufsuchen unbequemer, ist daher die Versenkung unter die dem Feldbau normalerweise unterliegende Ackerkrume (ca. 30 cm unter der Oberfläche). Als Form der Versicherung kann in diesem Falle der Markstein beibehalten, es können aber auch eiserne oder dunkelbraun gebrannte ca. 30 cm lange Tonröhren von etwa 6 cm Durchmesser und 2 cm lichter Weite oder, im Falle sumpfigen Geländes, eichene Pflöcke von 1 bis $1\frac{1}{2}$ m Länge und 8 bis 10 cm Stärke verwendet werden. Auf die Tonröhren legt man zur Sicherung gegen mechanische Beschädigungen beim Aufgraben zweckmässigerweise ein Steinplättchen. Allgemein

ist zu beachten: Kostspieligere, aber bessere Vermarkung der Polygonpunkte macht sich durch Zeitersparnis bei der späteren Wiederbenützung um so rascher und sicherer bezahlt, je öfter auf die Punkte zurückgegriffen werden muss.

b) Messung.

Winkel-
messung.

Die *a*) Winkelmessung erfolgt, da wegen der häufigen Aufstellungsänderung (Maximalleistung bis zu 100 und 120 Winkel pro Tag!) nur kleine Nonientheodolite verwendet werden und schon bei der Messung genau bekannt ist, welche Winkel zur späteren Koordinatenberechnung nötig sind, am besten nach einem Repetitionsverfahren. Zumeist genügt je einmalige Messung in jeder Fernrohrlage. Die Messung des Horizontabschlusses ist als Messungskontrolle und zur Genauigkeitssteigerung zweckmässig.

Von ganz besonderer Wichtigkeit ist angesichts der kurzen Zielungen (bis zu 50 m und weiter herab), bei welchen eine kleine Exzentrizität des Ziel-, oder Standpunktes grosse, sich sehr ungünstig fortpflanzende Winkelfehler bedingt (s. § 83) möglichst scharfe Zentrierung des Instruments über dem Winkelscheitel und genaue Signalisierung bezw. Aufsteckung der Zielpunkte.

Bei normalen Vielecksseiten (150 bis 250 m) und Beschränkung auf die für gewöhnliche Arbeiten nötige Genauigkeit erfolgt die Zentrierung mittels eines am Theodolit angehängten Lots. Für besonders wichtige Arbeiten, im Falle kurzer Seiten (z. B. Arbeiten unter Tag), oder bei windigem Wetter können Verfeinerungen wünschenswert sein. Als solche dienen Zentrierfernröhrchen, welche, mit dem Instrument verbunden, eine (durch Einbauen eines Glasprismas nötigenfalls gebrochene) Zielung in der vertikalen Stehachsenrichtung nach dem Bodenpunkt durch eine zylindrische Bohrung dieser Achse ermöglichen, oder das Meisner'sche starre Lot, bei welchem ein ausziehbares, röhrenartiges, einem Fortsatz der Fussgestellbüchse angeschraubtes Gestänge als Teil des Stativs angeordnet ist. Das untere, spitze Ende dieses Gestänges kann bei letzterer Einrichtung mittels eines zangenförmigen Hebels mit einem Fuss auf dem Winkelscheitel festgehalten werden. Bei horizontiertem Instrument befinden sich dann Winkelscheitel und Stehachse des Instruments in einer Vertikalen (vergl. Zeitschr. f. Verm. 1890, S. 33 ff.)

Die bei der Stückvermessung gewöhnliche Art der Aufsteckung, vor oder hinter dem Punkt, gewährt keine Sicherheit für identische Benützung das einmal als Scheitel-, das anderemal als Zielpunkt und ist bei feineren Polygonisierungen daher unzulässig. Eine genaue zentrische Signalisierung wird erreicht, wenn man die Zielstäbe

durch Messgehilfen aufhalten lässt, sicherer aber durch Verwendung von leichten Stativchen, durch deren Platte der auf dem Winkelscheitel aufgestellte Stab gesteckt und in seiner Stellung erhalten wird. Um Signalisierung und Zentrierung gleichzeitig zu verfeinern (Ziel- und Standpunkte zu identifizieren), kann man statt eines einzigen Stativs gleichzeitig deren mehrere verwenden, deren nach Fig. 203 gebaute Metallplatten P sowohl das Fussgestell des Instruments, als auch das ihm genau gleich gebaute von Signalscheiben (s. Fig. 2) aufnehmen können und die genaue identische Lage der Stehachsen beider gewährleisten (Freiberger Aufstellung). Bei Verwendung dieser Einrichtung hat man neben dem durch die Polygonpunkte auf der Erde bestimmten, noch einen zweiten Polygonzug, dessen Brechungspunkte auf den Stativen liegen. Die mit dem Senkel hergestellte Übereinstimmung beider wird zwar hier ebensowenig, als beim gewöhnlichen Abloten vorhanden sein. Da aber die auf den Stativen liegenden Scheitel- und Zielpunkte je identische Punkte sind, so verursachen etwaig Abweichungen der Stativ- von den Bodenpunkten keinerlei Zugsverschwenkungen, — etwaig kleine Zentrierungsfehler pflanzen sich nur als gleich grosse Parallelverschiebungen fort.

β) Streckenmessung. Die Zahl der überschüssigen Bestimmungsstücke bei der Polygonisierung beträgt im Gegensatz zur Stückvermessung und zur trigonometrischen Punkteinschaltung normalerweise höchstens drei ($2n$ Stücke werden im n Eck gemessen und $2n - 3$ sind notwendig). Sie reicht gerade noch aus, um bei normal an- und abgeschlossenem Zug einen einzigen groben Fehler, welcher sich in die Messung etwa eingeschlichen hat, nach Art, Grösse und Ort feststellen zu lassen. Sollten deren mehrere vorgekommen sein, so weisen die Abschlusswidersprüche wohl auf das Vorhandensein solcher Fehler hin, ihre Ausmerzung ist aber nur auf Grund wiederholter durchgreifender Messung möglich.

Aus diesem Grund ist bei Polygonisierung besondere Vorsicht gegen grobe Fehler geboten. Es sind sichernde Vorkehrungen zu treffen, dass für Winkel- und Streckenmessung identische Punkte verwendet (deutliche, gegenüber anderen Punkten sich scharf abhebende Bezeichnung, oder gleichzeitige Messung von Winkeln und Strecken), und dass grobe Streckenfehler sofort entdeckt werden. Zu letzterem Zweck werden die Polygonseiten doppelt gemessen. Handelt es sich nur eben um die Vermeidung, bzw. Ausmerzung etwaiger grober Fehler, so wird zweckmässigerweise die zweite Streckenmessung nach einem anderen Verfahren ausgeführt (z. B. durch optische Entfernungsbestimmung) als die erste. Bei wichtigeren Arbeiten

Strecken-
messung.

ist man jedoch bestrebt, neben der groben gleichzeitig auch die zufälligen, unregelmässigen Streckenfehler möglichst wegzuschaffen, so dass nur noch die etwaigen regelmässigen Fehler (Folge ungenauer Massstäbe etc.) den vermittelten Streckenmassen anhaften. In diesem Fall sind für beide Messungen identische Geräte, Verfahren und womöglich auch Messgehilfen anzuwenden. Nur die Messungsrichtung und (namentlich im Fall der Entlohnung nach dem Quantum geleisteter Arbeit) die Person des leitenden Technikers, werden bei der zweiten Messung gegenüber der ersten wechseln.

Bei der

c) Zugsanlage

ist nach dem bisherigen, abgesehen von der Rücksichtnahme auf das Bedürfnis bequemer Eingliederung der Stückvermessung, anzustreben, dass:

1. die Seiten jedes Zugs möglichst gleichen Gelände-Verhältnissen angehören (regelmässiger Längenfehler in gleicher Stärke wirkend),

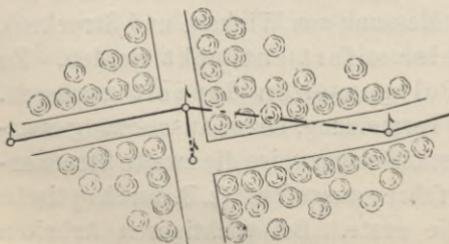
2. die Polygonpunkte so ausgewählt werden, dass das Anzielen am Fussende der Stäbe möglich ist, und dass die Winkel und Vielecksseiten sich scharf messen lassen (Moore und Schutthalden umgehen),

3. die Polygonseiten möglichst gleich lang sind (Vermeidung der Benutzung des Okularauszugs bei der Winkelbeobachtung; bequeme Ausgleichung der zurückbleibenden Messungswiderprüche s. § 83),

4. die Anzahl der Brechungspunkte zwischen An- und Abschluss nicht allzu gross ist. (Die verschwenkende Wirkung etwaiger Winkelfehler wächst mit dem Verhältnis: Zuglänge zu Seitenlänge, d. h. mit der Zahl der Polygonseiten.) Anzustrebende Mittelwerte: 4 — 5 Brechungspunkte im Zug, also bei 1000 m langen Dreiecksseiten normale Länge der Polygonseite ca. 200 m.

Seiten unter 50 m Länge sind zu vermeiden. Besonders schädlich sind kurze Polygonseiten an den Enden eines Zugs. Allzu kurze Seiten sind nötigenfalls mittels Degradierung eines Punktes zum Schnittpunkt und diagonaler Zugfortsetzung,

Fig. 310.

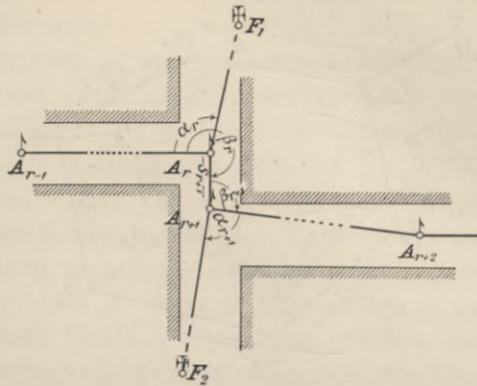


(Durchhau im Wald s. Fig. 310), oder mittels Anzielen ferner Festpunkte auszuschalten (s. Fig. 311).

(Im letzteren Fall werden die Polygonwinkel β_r und β_{r+1} an den Enden der kurzen Strecke nur zur Bestimmung vorläufiger, ungefährender Koordinaten von A_r und A_{r+1} mitverwendet. Aus ihnen gewinnt man die Richtungswinkel

der Zielungen $A_r F_1$ bzw. $A_{r+1} F_2$ nach Festpunkten F_1 und F_2 um so sicherer, je ferner die letzteren liegen. Rückwärts ergeben sich durch Subtraktion der Winkel α_r und α_{r+1} die Richtungswinkel der Polygonseiten $A_r A_{r-1}$ bzw. $A_{r+1} A_{r+2}$ ohne den verschwendenden Einfluss der kurzen Seite s_{r+1} . Mit ihnen und mit den auf sie ausgeglichenen Richtungswinkeln der übrigen Polygonseiten kann man den Zug in zweiter Näherung, bzw. — falls diese genügende Übereinstimmung mit den benützten vorläufigen Koordinaten von A_r und A_{r+1} ergibt — endgültig durchrechnen. Eine Vereinfachung und sofortige endgültige Rechnung ist zu erzielen, wenn die beiden Festpunkte F_1 und F_2 samt den Polygonpunkten A_r und A_{r+1} in einer Geraden liegen. Die Koordinaten der Festpunkte liefern in diesem Fall vorgängig und ohne weiteres die endgültigen Richtungswinkel $n A_r F_1$ und $n A_{r+1} F_2$, aus denen unter Benützung der gemessenen Winkel α die Richtungswinkel $n A_r A_{r-1}$ und $n A_{r+1} A_{r+2}$ gewonnen werden.)

Fig. 311.

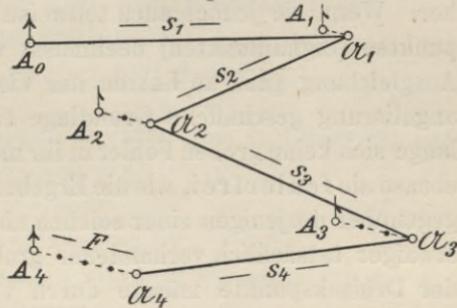


Wir streben weiter an:

5. Dass der Zug möglichst gestreckte Form hat.

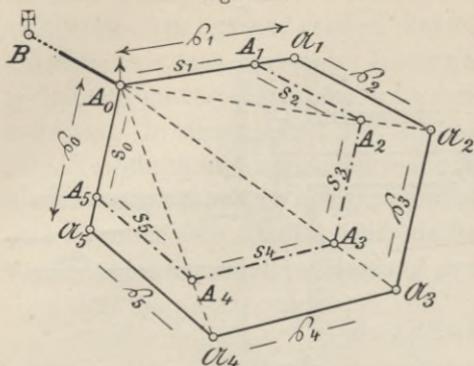
Würde z. B. in Fig. 312 die von A_0 ausgehende Zugsberechnung nach Gleichungen (4) und (5) des § 81 für den Abschlusspunkt die Lage \mathcal{A}_4 statt \mathcal{A}_4 ergeben und würde die Differenzeinteilung, wie naheliegend, derart erfolgen, dass auf den durch die unausgeglichenen Punkte $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \dots$ gezogenen Parallelen zu $\mathcal{A}_4 A_4$, bzw. die Strecken $\frac{F}{4}, \frac{2F}{4}, \frac{3F}{4}, \frac{4F}{4}$ bis zu den endgültigen Punkten A abgetragen würden, so würden dadurch die Seiten s_1 und s_3 verkleinert, die Seiten s_2 und s_4 vergrößert, ganz im Widerspruch zu der durch gleichartige Doppelmessung erzielten Eigenschaft der Streckenfehler, als regelmässiger Fehler. Die Ausgleichungsverbesserungen würden zweifellos an der unrichtigen Stelle und in unrichtiger Grösse angebracht. Wäre der Zug gestreckt angelegt worden, so hätten sich durch dasselbe Ausgleichungsverfahren sämtliche Strecken entsprechend ihrer Fehlereigenschaft in gleichem Sinn und gleichem Verhältnis geändert. Wäre umgekehrt die Zugsform wie in Fig. 306 und 313 eine geschlossene und wären (etwa infolge erheblich unrichtiger Massstäbe) sämtliche Vielecksseiten z. B. zu $\frac{3}{4}$ statt s , also in gleichem Verhältnis erheblich zu gross oder zu klein erhalten worden, wären sonst aber keine Messungsungenauigkeiten vorhanden, so würden die Bedingungengleichungen (3a) bis (5a) des § 81 keinerlei Widerspruch anzeigen, trotzdem die Koordinaten der Neupunkte \mathcal{A} diese in ganz erheblicher Entfernung von der richtigen Lage A ergeben würden. (Erst die Verbindung irgend eines der Punkte \mathcal{A}

Fig. 312.



erzielten Eigenschaft der Streckenfehler, als regelmässiger Fehler. Die Ausgleichungsverbesserungen würden zweifellos an der unrichtigen Stelle und in unrichtiger Grösse angebracht. Wäre der Zug gestreckt angelegt worden, so hätten sich durch dasselbe Ausgleichungsverfahren sämtliche Strecken entsprechend ihrer Fehlereigenschaft in gleichem Sinn und gleichem Verhältnis geändert. Wäre umgekehrt die Zugsform wie in Fig. 306 und 313 eine geschlossene und wären (etwa infolge erheblich unrichtiger Massstäbe) sämtliche Vielecksseiten z. B. zu $\frac{3}{4}$ statt s , also in gleichem Verhältnis erheblich zu gross oder zu klein erhalten worden, wären sonst aber keine Messungsungenauigkeiten vorhanden, so würden die Bedingungengleichungen (3a) bis (5a) des § 81 keinerlei Widerspruch anzeigen, trotzdem die Koordinaten der Neupunkte \mathcal{A} diese in ganz erheblicher Entfernung von der richtigen Lage A ergeben würden. (Erst die Verbindung irgend eines der Punkte \mathcal{A}

Fig. 313.



mit einem in der Richtung $A_0 \alpha$ liegenden zweiten Festpunkt würde den Schaden ans Licht bringen). Bei gestreckter Lage des Polygonzugs zwischen zwei Festpunkten würden im Gegensatz zu Fig. 313 die regelmässigen Streckenfehler nicht nur deutlich in die Erscheinung treten, sondern ihre Ausgleichung nach dem Verfahren der Fig. 312 ergäbe auch die richtige Lage der Polygonpunkte.

Unter welchem Winkel endlich der angeschlossene Polygonzug von der Anschlussseite (Dreiecksseite) abzweigt, ist gleichgültig. Wichtig ist, wegen etwa vorhandener Fehler in den Anschlusspunkten nur, dass die Anschlussseite genügend lang (etwa gleich der Zugslänge) ist.

§ 83. Ausgleichung der bei der Koordinatenberechnung eines beiderseits an Festpunkten angeschlossenen Polygonzugs auftretenden Messungswidersprüche.

Die Widersprüche, welche sich bei der Koordinatenberechnung gegenüber den Bedingungsgleichungen (3a) bis (5a) des § 81 einstellen, rühren zum grössten Teil von Winkel- und Streckenfehlern her. Wenn sie jedoch auch teilweise von Fehlern in den Anschlusspunkten (Signalpunkten) beeinflusst würden, so geht trotzdem die Ausgleichung ganz zu Lasten der Vielecksmessung. Die durch Triangulierung geschaffene Grundlage für die Polygonisierung gilt (so lange sich keine groben Fehler in ihr nachweisen lassen) ihr gegenüber ebenso als fehlerfrei, wie die Ergebnisse der Triangulierung höherer, gegenüber derjenigen einer solchen niederer Ordnung. Die Behebung etwaiger tatsächlich vorhandener grober Fehler in den Koordinaten der Dreieckspunkte müsste durch trigonometrische Messungen und Berechnungen erfolgen. Eine Abänderung der Koordinaten von Dreieckspunkten auf Grund polygonometrischer Feststellungen ist ausgeschlossen.

Zum Zwecke der Ausgleichung der Widersprüche gegen die Bedingungsgleichungen müssen nun die $2n$ gemessenen Elemente (Strecken und Winkel) mit Verbesserungszuschlägen v versehen werden, zu deren algebraischer Ausmittelung $2n$ Gleichungen nötig wären. Wir besitzen deren jedoch nur drei. Die Aufgabe wird trotzdem zu einer bestimmten, sobald wir den Bedingungsgleichungen (3a) bis (5a) des § 81 noch die Minimumsbedingung hinzufügen: $[p v v] = \text{Min.}$

Wir haben dann die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate mit bedingten Beobachtungen.

Statt der hieraus folgenden strengen aber schwerfälligen, zieht man eine stufenweise, empirische Ausgleichung vor, und beginnt mit der Wegschaffung des Widerspruchs gegen die Bedingungsgleichung (3a) des § 81:

$$0 = \varphi_{n+1} - (\varphi_0 + [\beta]_0^n \pm (n+1) 2R).$$

Ergeben die gemessenen Winkel β statt des Wertes 0 für die linke Seite der Gleichung einen nach § 90 einteilbaren Betrag ω , so sind zu den Brechungswinkeln β Verbesserungsbeträge v zu addieren, deren Summe $[v]$ nach Richtung und Grösse gleich ω ist. Die tatsächlichen Winkelfehler setzen sich aus Ablese-, sowie Ziel- und Zentrierungsfehlern zusammen. Die ersteren können, wenn die Beobachtung unter gleichen Witterungs- und Geländeverhältnissen erfolgte, als im wesentlichen einander gleich angenommen werden, die letzteren hängen von den Schenkellängen s und dem Brechungswinkel β ab und folgen (s. § 44) der Bedingung:

Winkel-
aus-
gleichung.

Grösster Einfluss des mittleren linearen Zentrierungsfehlers d

$$= \frac{d(s_1 + s_2) \sin \frac{\beta}{2} \cdot \varrho''}{s_1 s_2}.$$

Grösster Einfluss des mittleren linearen Ziel- oder Signalisierfehlers d

$$= \frac{d}{s_1} \varrho'' + \frac{d}{s_2} \varrho'',$$

also grösster Gesamteinfluss gleichzeitigen Zentrierungs- und Ziel- (bezw. Signalisierungs)fehlers d

$$= f''_{\beta} = d \cdot \varrho'' \frac{(s_1 + s_2) (1 + \sin \frac{\beta}{2})}{s_1 s_2}. \quad (1)$$

Für die Winkelverbesserungen v wären also in Rücksicht auf letzteren Fehlerteil streng genommen Gewichte

$$p = \frac{s_1^2 s_2^2 \cdot K}{(s_1 + s_2)^2 (1 + \sin \frac{\beta}{2})^2} \quad (1a)$$

einzuführen. Sorgt man jedoch nach der in § 82 unter (3) für die erstrebenswerte Zugsanlage aufgestellten Forderung für möglichst gleich lange Seiten s (oder im Falle unvermeidlicher Streckenunterschiede für besonders genaue Zentrierung und Anzielung bei kurzen Seiten), so kann man diese Schwerfälligkeit umgehen und gleich grosse Verbesserungszuschläge

$$v = \frac{\omega}{n+1} \quad (2)$$

für sämtliche Brechungswinkel β eines Zugs einführen.

Mit den derart verbesserten Brechungswinkeln ($\beta + v$) rechnet man jetzt die Richtungswinkel sämtlicher Polygonseiten nach Gleichungen (3) des § 81. Zum Schluss muss (als Rechenprobe) der durch

Strecken-
und Winkel-
fehler als
Ursache
linearer Ab-
schluss-
differenz.

sukzessive Addition erhaltene Richtungswinkel φ_{n+1} der Abschlussseite sich gleich seinem aus Festpunktkoordinaten abgeleiteten Sollwert ergeben.

Berechnet man mit den erhaltenen Richtungswinkeln φ die zu jeder Polygonseite s gehörigen Koordinatenunterschiede

$$\Delta x = s \cos \varphi \quad \text{und} \quad \Delta y = s \cdot \sin \varphi$$

und addiert ihre Summe zu den entsprechenden Koordinaten des Anschlusspunkts, so werden sich Widersprüche, „Abschlussdifferenzen“ f_x und f_y auch gegen Gleichungen (4a) und (5a) des § 81 ergeben, diese werden übergehen in:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_x = x_n - (x_0 + [s \cos \varphi]_n) = x_n - x_n \\ f_y = y_n - (y_0 + [s \sin \varphi]_n) = y_n - y_n \end{array} \right\}$$

Diese Abschlussdifferenzen können ebensowohl von etwaigen, trotz Ausgleichung nach Gleichung (2) noch vorhandenen Brechungswinkelfehlern, als von Streckenfehlern herrühren. Da wir bei jeder Ausgleichung anstreben müssen, Verbesserungszuschläge v nach Möglichkeit in denjenigen Beträgen und an denjenigen Messungsgrößen anzubringen, in und bei welchen Beobachtungsfehler tatsächlich begangen wurden, so müssen wir die Widersprüche auf ihre Herkunft untersuchen.

Wir fragen uns zu diesem Zweck zunächst umgekehrt:

a) Welche Wirkung auf die Gleichungen (4a) und (5a) des § 81 haben regelmässige Streckenfehler? (Die unregelmässigen nehmen wir als durch gleichartige doppelte Messung in der Hauptsache ausgemerzt an.)

Ist das Verhältnis der bei der Messung erhaltenen Streckenlänge \tilde{s} zur Solllänge s

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{\tilde{s}} = q, \text{ also} \\ \frac{s - \tilde{s}}{\tilde{s}} = \frac{q - 1}{1} \end{array} \right\},$$

so dass letztere sich ergibt durch Multiplikation der gemessenen Länge \tilde{s} mit dem Reduktionsfaktor q , oder durch Addition eines Zuschlags $(q - 1) \cdot \tilde{s}$

$$(4a) \quad s = q \cdot \tilde{s}; \quad s = \tilde{s} + (q - 1) \tilde{s},$$

so folgt, wenn wir die Brechungswinkel als fehlerfrei, die entsprechenden Vielecksstrecken also als parallel voraussetzen, aus Fig. 314 die Proportionalität folgender Strecken:

(5) $\left\{ \begin{array}{l} (s_1 \equiv A_0 A_1) : (\tilde{s}_1 \equiv A_0 \mathfrak{A}_1) = q : 1 \\ (s_2 \equiv A_1 A_2) : (\tilde{s}_2 \equiv \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) = q : 1 \end{array} \right\}$ also $A_0 A_2 : A_0 \mathfrak{A}_2 = q : 1$ und $A_0 A_2 \mathfrak{A}_2 = \text{Gerade}$, ebenso

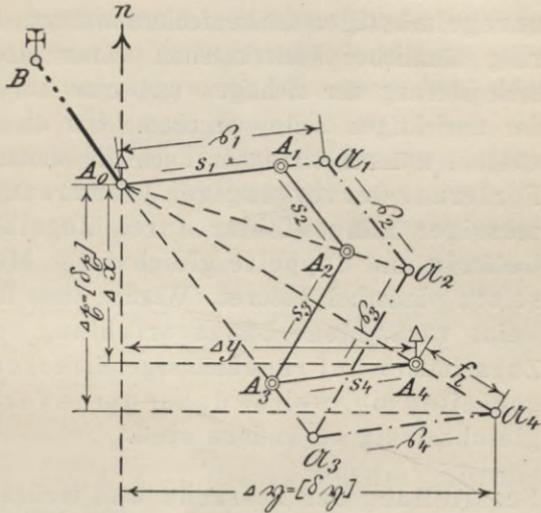
Ursache
reiner Längs-
verfehlung.

(5) $\left\{ \begin{array}{l} A_0 A_2 : A_0 \mathcal{A}_2 = q : 1 \\ (s_3 \equiv A_2 A_3) : (s_3 \equiv \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3) = q : 1 \end{array} \right\}$ also $A_0 A_3 : A_0 \mathcal{A}_3 = q : 1$
 und $A_0 A_3 \mathcal{A}_3 = \text{Gerade}$,

ferner
 (5) $\left\{ \begin{array}{l} A_0 A_3 : A_0 \mathcal{A}_3 = q : 1 \\ (s_4 \equiv A_3 A_4) : (s_4 \equiv \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_4) = q : 1 \end{array} \right\}$ also $A_0 A_4 : A_0 \mathcal{A}_4 = q : 1$
 und $A_0 A_4 \mathcal{A}_4 = \text{Gerade}$
 \vdots \vdots u. s. f.

Welche Form also auch der Zug annehmen möge, der regelmässige Längenfehler verschiebt jeden Polygon-, also auch den Abschlusspunkt in der Richtung des vom Anschlusspunkt A_0 ausgehenden Fahrstrahls. Die Grösse der Verschiebung $\mathcal{A}_n A_n = f_1$ des Abschlusspunktes heisst man die „Längsverfehlung“ des Zugs.

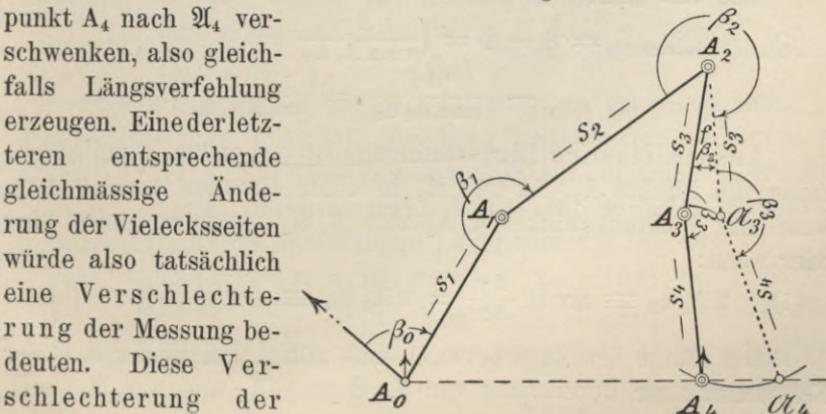
Fig. 314.



Umgekehrt darf man nun allerdings nicht unter allen Umständen aus der Tatsache vorhandener Längsverfehlung auf einen regelmässigen Längenfehler schliessen und die Vielecksseiten dementsprechend verbessern. Ein bei der Messung des Brechungswinkels β_2 unterlaufener Fehler würde z. B. bei der in Fig. 315 dargestellten Zugform den fernerer Zugteil in die punktierte Lage und den Abschlusspunkt A_4 nach \mathcal{A}_4 verschwenken, also gleichfalls Längsverfehlung erzeugen. Einer der letzteren entsprechende gleichmässige Änderung der Vielecksseiten würde also tatsächlich eine Verschlechterung der Messung bedeuten. Diese Verschlechterung der

Rückschluss auf zu erstrebende Zugform etc.

Fig. 315.



Verschlechterung der

Messung infolge Verschleierung der schuldigen Fehlerursache entspränge aber lediglich der stark ausbauchenden Zugform und veranlasst uns, der in § 82 aufgestellten Forderung gestreckter Züge erhöhten Nachdruck zu geben.

Allerdings braucht auch bei gestreckter Zugform vorhandene Längsverfehlung nicht notwendig von regelmässigen Längenfehlern herzurühren. Eine solche wird in diesem Fall auch von groben, oder unregelmässigen Längenfehlern erzeugt. Die gleichmässige Änderung sämtlicher Vielecksseiten würde also auch hier eine Verschlechterung der richtigen und eine nur teilweise Verbesserung der unrichtigen Seiten ergeben. Um diese Unsicherheit zu vermeiden, müssen wir daher auch die weitere in § 82 aufgestellte Forderung der vorgängigen Ausmerzung grober und unregelmässiger Längenfehler durch Zugslage in gleichartigem Gelände und doppelte gleichartige Messung der Polygonseiten wiederholt betonen. Werden diese Rücksichten beachtet, so weist vorhandene Längsverfehlung beim Abschluss eines Zugs immer auf regelmässige Streckenfehler in den Polygonseiten hin, welche daher durch Verbesserungszuschläge gleichmässig zu ändern sind.

Feststellung
reiner Längs-
verfehlung.

Feststellung der Tatsache und Grösse etwa vorhandener Längsverfehlung.

Längsverfehlung ist in einem Polygonzug vorhanden, wenn die aus den gegebenen Koordinaten berechnete Länge der Verbindungsstrecke $A_0 A_n = S$ des An- und Abschlusspunktes abweicht von dem Mass $A_0 \mathfrak{A}_n = \mathfrak{S}$, das sich für sie ergibt aus der Summe der den gemessenen Polygonseiten \mathfrak{s} entspringenden Einzelkoordinatenunterschiede $\Delta x = \mathfrak{s} \cdot \cos \varphi$ und $\Delta y = \mathfrak{s} \cdot \sin \varphi$.

Man hat dann

$$(6) \quad \begin{array}{l} \text{Längs-} \\ \text{verfehlung} \end{array} f_1 = S - \mathfrak{S} = \left(\frac{\Delta y}{\sin n A_0 A_n} - \frac{\Delta x}{\cos n A_0 A_n} \right) \\ - \left(\frac{[\Delta y]}{\sin n A_0 \mathfrak{A}_n} - \frac{[\Delta x]}{\cos n A_0 \mathfrak{A}_n} \right).$$

Ausschliesslich Längsverfehlung ist vorhanden, wenn gleichzeitig die Punkte A_0 , A_n und \mathfrak{A}_n in einer Geraden liegen, d. h. wenn die Richtungswinkel $A_0 A_n$ und $A_0 \mathfrak{A}_n$ einander gleich sind oder wenn:

$$(7) \quad n A_0 A_n \equiv \arctg \frac{\Delta y}{\Delta x} = n A_0 \mathfrak{A}_n \equiv \arctg \frac{[\Delta y]}{[\Delta x]}.$$

Die Länge des Zugs (etwa 1 km) nötigt bei dieser Art der Feststellung zur Berechnung von S , \mathfrak{S} , $n A_0 A_n$ und $n A_0 \mathfrak{A}_n$ nach

Gleichungen (6) und (7) mit 6-stelligen Log.-Tafeln, sobald cm-Abweichungen noch erkannt werden wollen.

Die nötige Rechengenauigkeit lässt sich aber ohne Einschränkung der Genauigkeitsansprüche verringern, wenn man den Richtungswinkel $n A_0 A_n$ statt mit $n A_0 \mathfrak{A}_n$ mit $n \mathfrak{A}_n A_n$ vergleicht und den linearen Schlussfehler $F = \mathfrak{A}_n A_n$ direkt aus den Abweichungen f_x und f_y [s. Gleichungen (3)] berechnet. Denn die Strecken $A_0 A_n$ und $\mathfrak{A}_n A_n$ haben im Fall vorhandener reiner Längsverföhlung entweder gleiche, oder um $2R$ verschiedene Richtungswinkel; gleiche, wenn sämtliche Polygonseiten zu vergrössern, um $2R$ verschiedene, wenn sämtliche Polygonseiten zu verkleinern sind.

Um F ($\equiv \mathfrak{A}_n A_n =$ höchstensfalls 1 m) auf cm genau zu berechnen, genügen 3-stellige Tafeln, Rechenschieber etc. Auch der Richtungswinkel $n \mathfrak{A}_n A_n$ und damit der mit ihm zu vergleichende Richtungswinkel $n A_0 A_n$ braucht dann nur auf $\frac{0,01}{1} \varrho' \sim 34'$ genau, kann also ebenfalls 3-stellig berechnet werden, wenn bei $F = 1\text{ m}$ etwaige Querausweichungen von 1 cm noch konstatiert werden wollen. Wir haben dann allgemein gültig:

$$\operatorname{tg} n \mathfrak{A}_n A_n = \frac{y_{A_n} - y_{\mathfrak{A}_n}}{x_{A_n} - x_{\mathfrak{A}_n}} = \frac{f_y}{f_x}$$

und falls sich aus $n \mathfrak{A}_n A_n = n A_0 A_n + (0$ bzw. $2R)$ das Vorhandensein reiner Längsverföhlung zeigt:

$$(8) \quad F \equiv f_1 \equiv \mathfrak{A}_n A_n = \frac{f_y}{\sin n \mathfrak{A}_n A_n} = \frac{f_x}{\cos n \mathfrak{A}_n A_n}.$$

Die Feststellung lässt sich aber mit der nötigen Genauigkeit von 2 bis 3 Stellen noch bequemer auf graphischem Weg bewirken. Bezeichnen wir die Koordinaten des fehlerhaften Abschlusspunktes \mathfrak{A}_n ($x_n = x_0 + [\xi \cdot \cos \varphi]$, $y_n = y_0 + [\xi \cdot \sin \varphi]$) in bezug auf ein neues, zum bisherigen paralleles Koordinatensystem mit dem Ursprung A_n mit ξ und η , so wird allgemein:

$$(3a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = x_n - x_n = -f_x \\ \eta = y_n - y_n = -f_y \end{array} \right\} \text{ [vergl. Gleichung (3)].}$$

Trägt man daher die nach Gleichungen (3) berechneten Abschlussdifferenzen f_x und f_y als Koordinatenwerte mit entgegengesetzten Vorzeichen vom Zugsendpunkt aus in einen Übersichtsplan in grossem Massstab (etwa $1:10$) ein, so zeigt der daraus erhaltene Punkt die tatsächliche Lagebeziehung des aus

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_n = x_0 + [\xi \cdot \cos \varphi] = x_0 + [\Delta x] \\ y_n = y_0 + [\xi \cdot \sin \varphi] = y_0 + [\Delta y] \end{array} \right.$$

sich ergebenden Punktes \mathfrak{A}_n zum Abschlusspunkt A_n bzw. zur Verbindungsstrecke $A_0 A_n$. Fällt \mathfrak{A}_n über A_n hinaus herein, so sind sämtliche

Vielecksseiten im selben Verhältnis zu ^{verkleinern} _{vergrössern}. Es lässt sich also dem im übrigen in kleinem Massstab entworfenen Übersichtsplan Tatsache und Grösse etwaiger Längsverfehlung mit weitaus genügender (sogar mm-)Genauigkeit entnehmen.

Ausgleichung
von Längs-
verfehlung.

Ermittelung der an den gemessenen Werten \mathfrak{s} der Polygonseiten anzubringenden Verbesserungen und Einteilung der festgestellten reinen Längsverfehlung.

Die Gleichungen (5) liefern die Beziehung:

$$(5a) \quad A_0 A_n : A_0 \mathfrak{A}_n = s : \mathfrak{s} = q : 1, \text{ also}$$

$$(10) \quad \begin{cases} q = \frac{A_0 A_n}{A_0 \mathfrak{A}_n} = \frac{S}{\mathfrak{S}} = \frac{\Delta y}{[\Delta \eta]} = \frac{\Delta x}{[\Delta \xi]} \text{ und} \\ s = q \mathfrak{s} = \frac{A_0 A_n}{A_0 \mathfrak{A}_n} \cdot \mathfrak{s}. \end{cases}$$

Damit lässt sich der ausgeglichene Wert s jeder Polygonseite ebenso, wie der ausgeglichene Wert der zu ihr gehörigen Koordinatendifferenzen

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta x = s \cdot \cos \varphi = q \cdot \mathfrak{s} \cdot \cos \varphi = q (\mathfrak{s} \cdot \cos \varphi) = q \cdot \Delta \xi \\ \Delta y = s \cdot \sin \varphi = q \cdot \mathfrak{s} \cdot \sin \varphi = q (\mathfrak{s} \cdot \sin \varphi) = q \cdot \Delta \eta \end{cases}$$

berechnen. Die Berechnung nach (10) und (11) müsste aber 5 stellig durchgeführt werden, wenn cm-Genauigkeit verlangt wird.

Diese Rechengenauigkeit lässt sich ohne Verschlechterung der Ergebnisse vermeiden durch Umformung der Gleichungen (4a), (5a) und (11) in

$$(12) \quad (A_0 \mathfrak{A}_n \equiv \mathfrak{S}) : (A_0 A_n - A_0 \mathfrak{A}_n = S - \mathfrak{S} = f_1) = \mathfrak{s} : (s - \mathfrak{s}) = 1 : (q - 1),$$

$$\text{und} \quad a) \quad \begin{cases} q - 1 = \frac{\text{Verbesserung pro Längeneinheit}}{S} = \frac{f_1}{S} \sim \frac{f_1}{\mathfrak{S}} = \left(\frac{\Delta y - [\eta]}{[\Delta \eta]} = \frac{f_y}{[\Delta \eta]} \right) \\ = \left(\frac{\Delta x - [\xi]}{[\Delta \xi]} = \frac{f_x}{[\Delta \xi]} \right) \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} b) \quad s = \mathfrak{s} + (q - 1) \mathfrak{s} \\ c) \quad \Delta x = s \cdot \cos \varphi = \Delta \xi + (q - 1) \Delta \xi \\ d) \quad \Delta y = s \cdot \sin \varphi = \Delta \eta + (q - 1) \Delta \eta, \end{cases}$$

d. h. Satz: Die durch regelmässige Längenfehler erzeugte Längsverfehlung f_1 eines Zugs wird weggebracht durch Anbringung proportionaler Zuschläge $(q - 1)\mathfrak{s}$ an den gemessenen Vielecksseiten \mathfrak{s} und wiederholte Durchrechnung, oder durch proportionale Zuschläge an sämtlichen Einzelkoordinatenunterschieden $\Delta \xi$ und $\Delta \eta$, d. h. durch Differenzeinteilung proportional den Koordinatenunterschieden. Diese Zuschläge erhalten durch den ganzen Zug hindurch ^{gleiches} _{entgegengesetztes} Vorzeichen, wie die Einzelkoordinatenunterschiede, je nachdem $q - 1$ + ist.

Ausführung der Rechnung.

Die Ausrechnung der Koordinatenunterschiede kann, je nach der verlangten Rechengenauigkeit mit Diagrammen; Rechenschiebern, (50 cm Ausgabe); Koordinatentafeln (Ulffers, Defert, Clouth u. a.); den Seiffertschen Tafeln, {enthaltend für den Einlauf φ die Funktionen $\sin\left(\frac{R}{2} + \varphi\right)\sqrt{2}$ bzw. $\cos\left(\frac{R}{2} + \varphi\right)\sqrt{2}$, woraus

Praktische
Ausrechnung.

$$\Delta y = \frac{s}{2} \sin\left(\frac{R}{2} + \varphi\right)\sqrt{2} - \frac{s}{2} \cos\left(\frac{R}{2} + \varphi\right)\sqrt{2} \text{ und}$$

$$\Delta x = \frac{s}{2} \sin\left(\frac{R}{2} + \varphi\right)\sqrt{2} + \frac{s}{2} \cos\left(\frac{R}{2} + \varphi\right)\sqrt{2}$$

mittels Maschine sich ergibt}; 5 stelligen Log.-Tafeln; oder mittels der Rechenmaschine erfolgen. Zur Sicherung gegen Rechen- und Tafelfehler empfiehlt sich in wichtigen Fällen doppelte Durchführung unter Anwendung verschiedenartiger Hilfsmittel.

Beispiel s. S. 584/85.

Der festgestellte Betrag des regelmässigen Messungsfehlers $q - 1$ pro Längeneinheit dient nicht bloss zur Wegschaffung vorhandener Längsverfehlung durch Anbringung von Verbesserungen an den Koordinatenunterschieden (wie im nachstehenden Beispiel gezeigt werden wird), sondern er liefert mit derselben Rechenschiebereinstellung die an den Polygonseiten selbst anzubringenden Verbesserungen $d\bar{s} = (q - 1)\bar{s}$ [womit $s = \bar{s} + (q - 1)\bar{s}$] und die nötige Stangenkorrektur $(q - 1)l$ pro Stangenlänge l zum Zweck ihrer Berücksichtigung bei der Stückvermessung.

Wegen der den einzelnen Anschlusspunkten anhaftenden Punkt- und Projektionsfehler, der nicht vollständig ausgemerzten unregelmässigen Längenfehler und dem Einfluss etwaiger Winkelfehler wird man sich bei der Feststellung des Längeneinheitsfehlers $q - 1$ nicht mit dem Ergebnis eines einzigen Zugs begnügen. Man wird vielmehr einen Mittelwert für $q - 1$ um so sicherer erhalten, je mehr die verschiedenartigen übrigen Fehlerquellen ausgeschaltet, d. h. je mehr Züge zur Bestimmung verwendet sind. Zu diesem Zweck kann man sich die geradlinigen Entfernungen der Abschlusspunkte sämtlicher berechneter Züge, und zwar einerseits (als \mathfrak{S}) aus der Messung, andererseits (als S) aus den Sollkoordinaten ermittelt, in zwei Gruppen aneinandergereiht denken. Die Differenz beider Streckensummen $[S] - [\mathfrak{S}] = [\text{algeb. } f_1]$ liefert die auf letztere nötige Gesamtstreckung und man erhält die nötige mittlere Streckung (den regelmässigen Längenfehler) auf 1 m aus:

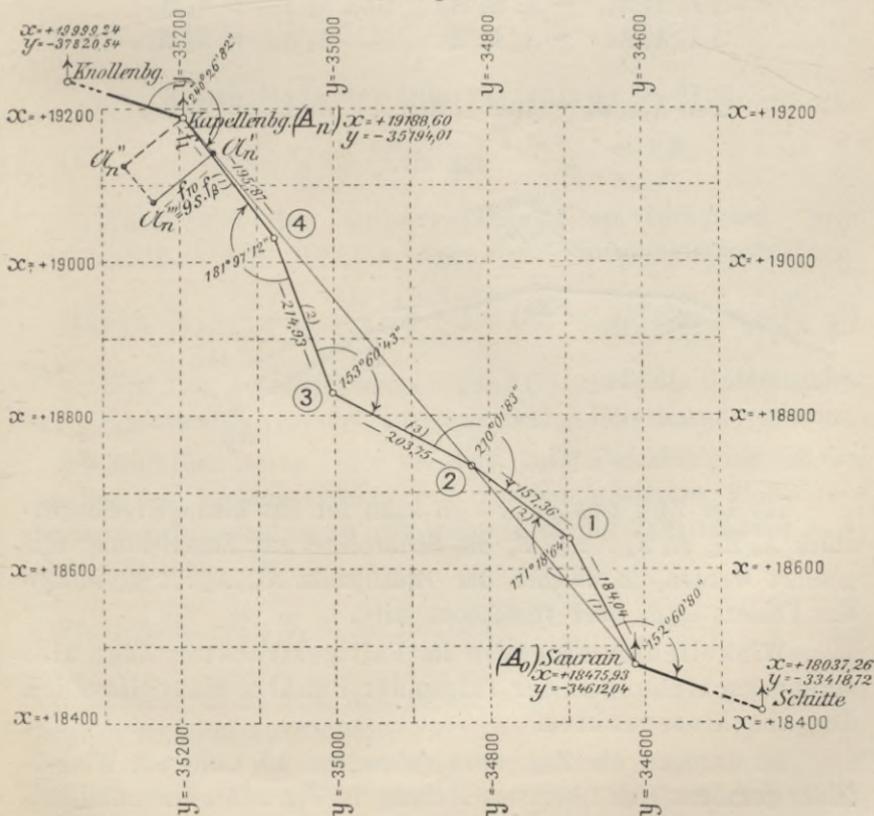
Feststellung
mittlerer
Stangen-
korrektur.

$$(14) \quad q - 1_{\text{Mittel}} = \frac{[\text{algeb. } f_1]}{[\mathfrak{S}] \text{ oder } [S]}$$

Punkt No.	x			y			log	n			
	+			+							
A: Schütte . . .	+	18 037	26	-	33 418	72	$Y_B - Y_A$	3	07	676	n
B: Saurain . . .	+	18 475	93	-	34 612	04	$E \sin n \Delta B$				
							$E \cos n \Delta B$				
△	+	438	67	-	1 193	32	$X_B - X_A$	2	64	214	
		n A B			322°	42' 62"	tg n A B	0	43	462	n
A: Kapellenberg	+	19 188	60	-	35 194	01	$Y_B - Y_A$	3	41	938	n
B: Knollenberg .	+	19 999	24	-	37 820	54	$E \sin n \Delta B$				
							$E \cos n \Delta B$				
△	+	810	64	-	2 626	53	$X_B - X_A$	2	90	883	
		n A B			319°	05' 80"	tg n A B	0	51	055	n

Tragen wir die auf S. 584 erhaltenen Abschlussdifferenzen f_x und f_y vom Zugsendpunkt aus je mit entgegengesetztem Vorzeichen in den Übersichtsplan unter Benützung der Richtung der Koordinatenachsen ein, so kommen wir auf den Punkt A'_n . Dadurch zeigt sich das Vorhandensein reiner Längsverfälschung und zwar ist $A'_n A_n = F = f_1 = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = +0,60$ m und $q - 1 = \frac{f_1}{E} = \frac{f_x}{\Delta x = [\Delta x]}$
 $= \frac{f_y}{\Delta y = [\Delta y]} = \frac{+0,60}{920} = \frac{+0,47}{+712,2} = \frac{-0,38}{-581,6} = +0,00065$, d.h. sämtliche der Messung entsprungene Strecken sind im Verhältnis $\frac{0,60}{920}$ zu vergrößern, die Länge der verwendeten Messgeräte ist pro m um 0,65 mm zu verkleinern.

Fig. 316.



Ursache
reiner Quer-
verfehlung.

Nachdem die Wirkung und daraus die Art der Ausglei-
chung regelmässiger Längenfehler ermittelt ist, gehen wir über zur

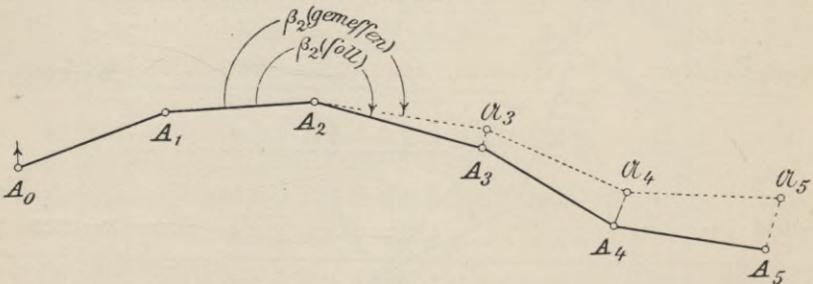
b) Wirkung etwaiger Fehler in den Brechungswinkeln.

Durch die Ausglei-
chung der Brechungswinkel β nach Gleichung (2) sind dieselben keineswegs fehlerfrei geworden. Wir dürfen vielmehr, wenn ω einteilbar und eingeteilt ist, nur erwarten, dass keinerlei grobe Winkelfehler vorhanden sind. Die bei der Ausglei-
chung nach (2) zurückgebliebenen (teilweise vielleicht sogar vergrösserten) unvermeidlichen Winkelfehler sind teils positiv, teils negativ, heben sich also in ihrer Wirkung teilweise auf. Jeder von ihnen, gleichgültig, ob grösser oder kleiner, verschwenkt den ganzen darauf folgenden Zugteil, d. h. jeden folgenden Brechungspunkt in konzentrischen Kreisen um den Ort des Fehlers.

Ist z. B. in der Messung von β_2 (s. Fig. 317) ein kleiner Fehler unterlaufen, die übrige Winkel- und Streckenmessung aber fehlerfrei, so ist:

$$\begin{aligned} \Delta A_2 A_3 A_4 &\simeq \Delta A_2 \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_4, & \text{also } A_2 A_4 &= A_2 \mathcal{U}_4 \\ \Delta A_2 A_4 A_5 &\simeq \Delta A_2 \mathcal{U}_4 \mathcal{U}_5, & \text{„ } A_2 A_5 &= A_2 \mathcal{U}_5 \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta A_2 A_{n-1} A_n &\simeq \Delta A_2 \mathcal{U}_{n-1} \mathcal{U}_n, & \text{„ } A_2 A_n &= A_2 \mathcal{U}_n. \end{aligned}$$

Fig. 317.



Ist der Zug gestreckt, so kann für das kleine Kreisbogenstück $A_3 \mathcal{U}_3, A_4 \mathcal{U}_4 \dots A_n \mathcal{U}_n$ die Senkrechte zur Zugsrichtung eingeführt werden, in welcher der Bruchpunkt $A_3, A_4 \dots A_n$ infolge des Fehlers in β_2 quer verschoben wird.

Winkelfehler erzeugen im Fall gestreckten Zugs also Querverschiebungen der folgenden Punkte, einschliesslich des Abschlusspunktes.

Ist dagegen der Zug stark gebrochen, so kann ein Winkel-
fehler geradezu eine Längsverschiebung (s. Fig. 315), ein zufälliger,

Rückschluss
auf zu er-
strebende
Zugsform.

oder grober Streckenfehler f_s eine Querverschiebung (s. Fig. 318) verursachen. Aus etwa festgestellter Querverfehlung f_w auf vorhandene Winkelfehler zu schliessen und demgemäss Verbesserungen an den Brechungswinkeln anzubringen, sind wir also nur im Falle gestreckten Zugs berechtigt, eine weitere Unterstützung unseres in § 82 aufgestellten Verlangens nach gestreckter Zugsform.

Fig. 318.

Feststellung der Tatsache und Grösse etwa vorhandener „Querverfehlung.“

Querverfehlung ist in einem Polygonzug vorhanden, wenn der aus den gegebenen Koordinaten der Zugsendpunkte berechnete Richtungswinkel $n A_0 A_n$ ihrer Verbindungsstrecke abweicht von dem Richtungswinkel

$$n A_0 A_n = \text{arctg} \frac{[\Delta y] = [\bar{s} \sin \varphi]}{[\Delta x] = [\bar{s} \cos \varphi]}.$$

Das lineare Mass der Querverfehlung ist dann:

$$(15) \quad f_w = A_0 A_n \cdot \frac{n A_0 A_n - n A_0 A_n}{e} = S \cdot \frac{d \varphi}{e}.$$

Ausschliesslich Querverfehlung ist vorhanden, wenn gleichzeitig (s. Fig. 319) die Länge der Verbindungsstrecke:

$$(16) \quad \left(S_0 = \frac{\Delta x}{\cos n A_0 A_n} = \frac{\Delta y}{\sin n A_0 A_n} \right) = \left(\mathfrak{S}_0 = \frac{[\Delta x]}{\cos n A_0 A_n} = \frac{[\Delta y]}{\sin n A_0 A_n} \right).$$

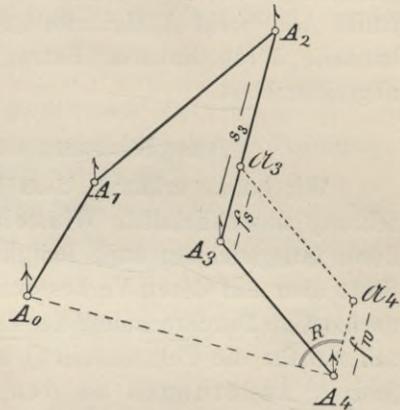
Wie vorn bei Gleichungen (6) und (7) würde die Untersuchung nach Gleichungen (15) und (16) sechsstellige Berechnung verlangen.

Einfacher ist es daher wie dort, unter Beschränkung auf drei Stellen den Richtungswinkel der Verbindungsstrecke $A_n A_0$ (des linearen Schlussfehlers F) mit demjenigen der Zugsrichtung $A_0 A_n$ zu vergleichen. Ist

$$(17) \quad n A_0 A_n - \left\{ n A_n A_0 = \text{arctg} \frac{y_{A_n} - y_{A_0}}{x_{A_n} - x_{A_0}} = \text{arctg} \frac{f_y}{f_x} \right\} = \mathfrak{R}$$

(d. h. steht $A_n A_0 \perp A_0 A_n$), so ist reine Querverfehlung vorhanden im linearen Betrag:

$$(18) \quad F = A_n A_0 = f_w = \frac{f_x}{\cos n A_n A_0} = \frac{f_y}{\sin n A_n A_0} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$



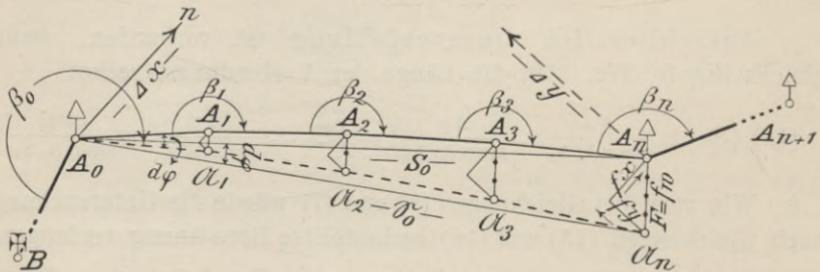
Feststellung reiner Querverfehlung.

Am einfachsten ist jedoch im Falle des Vorhandenseins eines Übersichtsplans wie bei der Längsverfehlung auch hier die graphische Behandlung. Trägt man die nach Gleichung (3) gebildeten Abschlussdifferenzen f_x und f_y als Koordinaten mit entgegengesetzten Vorzeichen vom Zugsendpunkt A_n als Ursprung in grossem Massstab (etwa 1 : 10) in einen Übersichtsplan ein, so zeigt der dabei erhaltene Punkt \mathfrak{A}_n die tatsächliche Lage des aus Gleichungen (9) sich ergebenden verschobenen Punktes \mathfrak{A}_n zum Soll-Endpunkt A_n . Steht $A_n \mathfrak{A}_n \perp A_0 A_n$, so ist reine Querverfehlung vorhanden, deren linearer Betrag sich genügend (auf mm) genau abgreifen lässt.

Ausgleichung der Querverfehlung.

Wir haben erkannt, dass beim gestreckten Zug die Querverfehlung ausschliesslich Winkelfehlern entspringt. Folglich darf deren Ausgleichung auch lediglich die Brechungswinkel β ändern. Statt aber auf deren Verbesserung direkt abzuheben, wodurch eine nochmalige Durchrechnung des Zugs (Bildung der Koordinatenunterschiede für die Polygonseiten) nötig würde, wollen wir lieber diejenigen Änderungen an den einzelnen Koordinatenunterschieden $s \cdot \cos \varphi$ und $s \cdot \sin \varphi$ zu bestimmen suchen, welche den vorzunehmenden Knickungen entsprechen.

Fig. 319.



Durch Verschwenkung des ganzen Zugs.

Das nächstliegende wäre, jeden der fehlerhaften Polygonpunkte $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_n$ parallel zur Richtung f_w (also senkrecht zur Zugrichtung) um (zu den je vom Anfangspunkt A_0 aus gemessenen Längen der Zugsteile) proportionale Teilbeträge von f_w zu verschieben. Die dazu nötigen Koordinatenzuschläge ständen wegen der Ähnlichkeit der Fehlerdreiecke in gleichem Verhältnis, wären also leicht zu berechnen. Die Vergleichung am geradlinigen Zug zeigt aber sofort, dass diese, der Beseitigung der Längsverfehlung entsprechende Einteilung proportional den Koordinatenunterschieden nur eine Änderung des Anschlusswinkels β_0 und des Abschlusswinkels β_n je um gleiche,

entgegengesetzt gerichtete Beträge $d\varphi$, nicht aber eine solche der eigentlichen Polygonwinkel verursachen würde. Dies wäre nur gerechtfertigt, wenn β_0 und β_n nicht, oder besonders ungenau gemessen wären, nicht aber im vorliegenden Fall.

Wollen wir statt dessen sämtliche Brechungswinkel $\beta_0, \beta_1 \dots \beta_{n-1}$ um einen zunächst noch unbekanntem Betrag f_β (im Fall der Fig. 319 nach links) knicken, was aber den Abschlusswinkel β_n wegen Gleichung (3) des § 81 um $n\beta$ in der entgegengesetzten Richtung ändern, also nur anwendbar sein würde, wenn dieser

Durch gleichgerichtete Knickung sämtlicher Brechungswinkel mit Ausnahme des letzten (β_n).

Abschlusswinkel β_n nicht gemessen wäre (s. § 84) und bezeichnen wir die (etwa einem Übersichtsplan entnommenen) Verbindungsstrecken jedes Polygonpunkts mit dem Endpunkt A_n mit S,

- also mit S_0 die Strecken $A_0 A_n$
- " S_1 " " " $A_1 A_n$
- " S_2 " " " $A_2 A_n$ etc.,

so wirkt eine Änderung des

Winkels β_0 um f_β auf die Lage des Abschlusspunkts im linearen Betrag $\frac{f_\beta}{\varrho} \cdot S_0$

" β_1 " " " " " " " " " " " $\frac{f_\beta}{\varrho} \cdot S_1$

" \vdots " " " " " " " " " " " "

" β_{n-1} " " " " " " " " " " " $\frac{f_\beta}{\varrho} \cdot S_{n-1}$,

also ist $f_w = \frac{f_\beta}{\varrho} (S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1})$ und die gesuchte Winkeländerung

$$(19) \quad f''_\beta = \frac{\varrho'' \cdot f_w}{[S]_0^{n-1}}$$

Ist der Zug gestreckt und sind die Polygonseiten ungefähr gleich lang, so kann man — eine weitere Begründung für unsere Forderung gestreckter Züge und ungefähr gleich langer Vielecksseiten (s. § 82) — bequemer statt

- S_0 setzen $n \cdot s$
- S_1 " " $(n-1) \cdot s$
- \vdots " " \vdots
- S_{n-1} " " $[n - (n-1)] s = s$,

so dass wir für die Abknickung jedes Brechungswinkels erhalten:

$$(19a) \quad f''_\beta = \frac{\varrho'' \cdot f_w}{s + 2s + \dots + ns} = \frac{\varrho'' \cdot f_w}{\left(\frac{n+1}{2}\right) s}$$

Statt jeden Brechungswinkel um f_β zu ändern und den Zug mit den derart um $f_\beta, 2f_\beta \dots (n-1)f_\beta, nf_\beta$ veränderten Richtungswinkeln wiederholt durchzurechnen, kann man auch dessen einzelne aus der ersten Rechnung zu erschliessende Koordinaten der Brechungspunkte um den aus der Knickung hervorgehenden Betrag verbessern, d. h.

	\mathcal{A}_1 senkrecht zur Zugrichtung verschieben um die Strecke	$\delta w_1 = \frac{f_\beta s}{\varrho} = \frac{1}{\binom{n+1}{2}} f_w$
	\mathcal{A}_2 " "	$\delta w_2 = 3 \cdot \frac{f_\beta s}{\varrho} = \frac{3}{\binom{n+1}{2}} f_w$
	\mathcal{A}_3 " "	$\delta w_3 = 6 \cdot \frac{f_\beta s}{\varrho} = \frac{6}{\binom{n+1}{2}} f_w,$
	\vdots	\vdots
(20) allgemein	\mathcal{A}_r " "	$\delta w_r = \binom{r+1}{2} \frac{f_\beta s}{\varrho} = \frac{\binom{r+1}{2}}{\binom{n+1}{2}} f_w,$
(20a) den Endpunkt	\mathcal{A}_n " "	$\delta w_n = \binom{n+1}{2} \frac{f_\beta s}{\varrho} = f_w.$

Die in einem beliebigen Punkt P_r in konstanter Richtung zu bewirkende Querverschiebung δw_r können wir also mittels Rechenschiebers gewinnen aus der Proportion:

$$\delta w_r : f_w = \binom{r+1}{2} \frac{f_\beta s}{\varrho} : \binom{n+1}{2} \frac{f_\beta s}{\varrho} = \binom{r+1}{2} : \binom{n+1}{2} \quad \text{zu}$$

$$(21) \quad \delta w_r = f_w \frac{\binom{r+1}{2}}{\binom{n+1}{2}} = f_w \cdot \frac{(r+1)r}{(n+1)n}.$$

Die zugehörigen Koordinatenverbesserungen sind wegen der Ähnlichkeit der Fehlerdreiecke

$$(21a) \quad \begin{cases} \delta x_r = f_x \cdot \frac{\delta w_r}{f_w} = f_x \frac{(r+1)r}{(n+1)n} \\ \delta y_r = f_y \cdot \frac{\delta w_r}{f_w} = f_y \frac{(r+1)r}{(n+1)n}. \end{cases}$$

Beispiel.

In einem Zug $A_0 \dots A_7$ zeigt sich aus den Abschlussdifferenzen $f_x = +35$ cm und $f_y = -49$ cm eine reine Querverfehlung $f_w = 60$ cm. Wie gross sind die auf die einzelnen Bruchpunkte entfallenden Koordinatenverbesserungen und Querverschiebungen?

L ö s u n g :

Die Gleichungen (20) und (21) liefern für:

Punkt	$\frac{\binom{r+1}{2}}{\binom{n+1}{2}}$	δw cm	also	
			δx cm +	δy cm —
A_0	0	0	0	0
A_1	$\frac{1}{28}$	2,1	1,2	1,7
A_2	$\frac{3}{28}$	6,4	3,7	5,2
A_3	$\frac{6}{28}$	12,8	7,5	10,5
A_4	$\frac{10}{28}$	21,4	12,5	17,5
A_5	$\frac{15}{28}$	32,2	18,8	26,3
A_6	$\frac{21}{28}$	45	26,2	36,8
A_7	$\frac{28}{28}$	60	35	49

Da man die unausgeglichene Koordinaten der Punkte \mathcal{A} aus den unverbesserten Koordinatenunterschieden nicht zu bilden pflegt, so ist es zweckmässiger, die auf jede Polygonseite entfallenden, ihren Koordinatenunterschieden $s \cos \varphi$ und $s \sin \varphi$ zuzuschlagenden Verbesserungen dx und dy zu

ermitteln, als Differenz je zweier aufeinander folgender Koordinatenverbesserungen δx und δy .

Wegen der Ähnlichkeit der Fehlerdreiecke betragen die auf irgend eine Polygoneite s_r entfallenden Querverschiebungen δw_r bzw. Zuschläge zu den Koordinatenunterschieden Δx_r und Δy_r im Fall reiner Querverfehlung allgemein:

$$(22) \quad \begin{cases} d w_r \equiv \delta w_r - \delta w_{r-1} = \frac{f_w}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \left\{ \left(\frac{r+1}{2}\right) - \left(\frac{r}{2}\right) \right\}^r = \frac{f_w}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} r \\ d x_r \equiv \delta x_r - \delta x_{r-1} = \frac{f_x}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} r \\ d y_r \equiv \delta y_r - \delta y_{r-1} = \frac{f_y}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} r. \end{cases}$$

Daraus berechnen sich die auf die einzelnen Polygoneiten einzuteilenden Verschiebungsbeträge des vorigen Beispiels übereinstimmend mit den Differenzen der dort gebildeten Werte:

Punkt No.	r	$d w_r$	$d x_r$ cm	$d y_r$ cm
	$\left(\frac{n+1}{2}\right)$	cm	+	-
A ₀	0	0	0	0
A ₁	$\frac{1}{2} 8$	2,1	1,2	1,7
A ₂	$\frac{2}{2} 8$	4,3	2,5	3,5
A ₃	$\frac{3}{2} 8$	6,4	3,8	5,3
A ₄	$\frac{4}{2} 8$	8,6	5,0	7,0
A ₅	$\frac{5}{2} 8$	10,8	6,3	8,8
A ₆	$\frac{6}{2} 8$	12,8	7,4	10,5
A ₇	$\frac{7}{2} 8$	15	8,8	12,2
[] =	$\frac{2}{2} 8$	60	35	49

Das vorstehend gefundene Material wird uns in § 84 zu statten kommen. Zunächst kehren wir aber wieder zurück zur Voraussetzung des gegenwärtigen §:

Sind sämtliche Brechungs-, einschliesslich des An- und Abschlusswinkels gemessen, können wir also keinem von ihnen einen grösseren Verbesserungszuschlag erteilen, als dem andern, so sind wir genötigt, diese Zuschläge mit wechselnden Vorzeichen, also teils in der Sollrichtung der nötigen Abknickung, teils entgegengesetzt, einzuführen, diese Vorzeichen aber derart zu wählen, dass die Wegschaffung der Querverfehlung mit möglichst geringer Winkeländerung f_β erfolgt. Dies wird erreicht, wenn die in der Sollrichtung wirkende Knickung am Anfang, die entgegengesetzt wirkende am Ende des Zugs angeordnet wird. Bei ungerader Zahl der Brechungspunkte (An- und Abschlusspunkt mitgerechnet), muss dann wegen Gleichung (3) des § 81 ein Brechungswinkel ohne Änderung bleiben, wenn man an der Gleichheit der

Durch verschieden gerichtete Knickung sämtlicher Brechungswinkel.

übrigen Änderungen festhalten will. Dies ist aus dem soeben angegebenen Grund der in der Mitte des Zugs gelegene.

Für die Weiterbehandlung setzen wir wieder gestreckten Zug und gleichlange Seiten voraus. Kleine Abweichungen von diesen Forderungen sind unschädlich. Sie haben, wenn man mit der Grösse der Querverschiebung darauf keine Rücksicht nimmt, lediglich eine etwas stärkere Abknickung der Winkel mit kurzen Schenkeln zur Folge. Dies entspricht aber gerade den tatsächlichen Winkelfehlern, sobald anzunehmen ist, dass ein erheblicher Teil derselben aus Zentrierungs- und Signalisierungsungenauigkeiten hervorgeht. Starke Abweichungen von den genannten Forderungen kommen bei Hauptzügen kaum vor. Für Nebenzüge greift dagegen zweckmässigerweise ohnedies eine andere, abgekürzte Ausgleichung Platz.

Die Querverfehlung f_w beim Zugsabschluss nötigt uns, die Brechungswinkel β (wie in den Fig. 320 u. 321 eingetragen) im vorderen Zugsteil um den zunächst unbekanntem Winkelwert f_β zu verkleinern bzw. zu vergrössern und im hinteren Zugsteil umgekehrt zu vergrössern bzw. zu verkleinern.

Fig. 320.

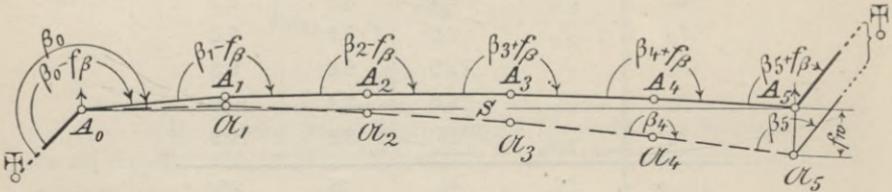
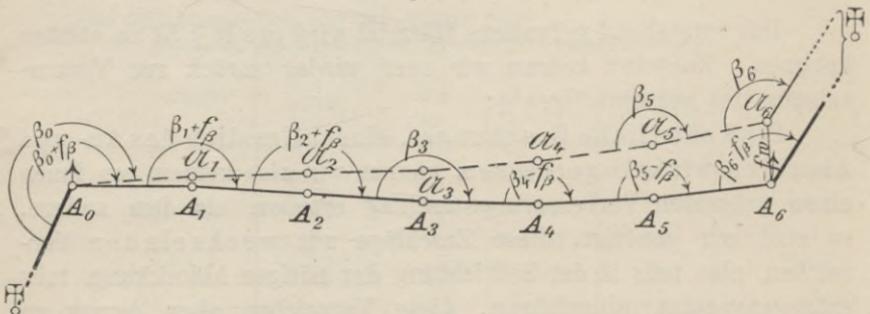


Fig. 321.



Die Wirkung dieser Knickungen folgt vom Zugsanfang bis zu demjenigen Brechungspunkt, in welchem letztere das Vorzeichen ändern (bzw., bei ungerader Punktzahl, in welchem eine Knickung unterbleibt), dem in Gleichungen (21) und (22) aufgestellten Gesetz, verschiebt also die Punkte $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ um δw gleich bzw. 0, 1 s. f_β , 3 s. f_β , 6 s. f_β je in der Sollrichtung (d. h. in Fig. 320 nach links, in Fig. 321 nach rechts). Vom Punkt \mathcal{A}_4 ab treten aber der fortwirkenden

Verschwenkung der vorderen, die in entgegengesetztem Sinn gerichteten Winkelabknickungen der hinteren Seiten und zwar demselben Gesetz, Gleichungen (21) und (22) folgend, entgegen, so dass z. B. in Fig. 320

der Punkt \mathfrak{A}_4 \mathfrak{A}_5
 um δ_w : $(4 + 3 + 2 - 1) s \cdot f_\beta$, $(5 + 4 + 3 - 2 - 1) \cdot s \cdot f_\beta$
 $= 8 s \cdot f_\beta$ $= 9 s \cdot f_\beta = f_w$ nach links,

in Fig. 321

der Punkt \mathfrak{A}_4 \mathfrak{A}_5 \mathfrak{A}_6
 um δ_w : $(4 + 3 + 2) s \cdot f_\beta$, $(5 + 4 + 3 - 1) s \cdot f_\beta$, $(6 + 5 + 4 - 2 - 1) s \cdot f_\beta$
 $= 9 s \cdot f_\beta$ $= 11 s \cdot f_\beta$ $= 12 s \cdot f_\beta = f_w$

nach rechts verschoben wird. Bildet man statt der Gesamtverschiebungen δ_w der Punkte \mathfrak{A} wieder die auf eine Polygonseite entfallenden Teilverschwenkungen d_w , als Differenz je zweier aufeinander folgender δ_w , so entfällt:

auf die Vielecksseite	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	s ₅	s ₆
in Fig. 320	$1 \cdot s \cdot f_\beta = 1 \cdot \frac{f_w}{9}$	$2 \cdot s \cdot f_\beta = 2 \cdot \frac{f_w}{9}$	$3 \cdot s \cdot f_\beta = 3 \cdot \frac{f_w}{9}$	$2 \cdot s \cdot f_\beta = 2 \cdot \frac{f_w}{9}$	$1 \cdot s \cdot f_\beta = 1 \cdot \frac{f_w}{9}$	
dx =	$1 \cdot \frac{f_x}{9}$	$2 \cdot \frac{f_x}{9}$	$3 \cdot \frac{f_x}{9}$	$2 \cdot \frac{f_x}{9}$	$1 \cdot \frac{f_x}{9}$	
dy =	$1 \cdot \frac{f_y}{9}$	$2 \cdot \frac{f_y}{9}$	$3 \cdot \frac{f_y}{9}$	$2 \cdot \frac{f_y}{9}$	$1 \cdot \frac{f_y}{9}$	
in Fig. 321	$1 \cdot s \cdot f_\beta = 1 \cdot \frac{f_w}{12}$	$2 \cdot s \cdot f_\beta = 2 \cdot \frac{f_w}{12}$	$3 \cdot s \cdot f_\beta = 3 \cdot \frac{f_w}{12}$	$3 \cdot s \cdot f_\beta = 3 \cdot \frac{f_w}{12}$	$2 \cdot s \cdot f_\beta = 2 \cdot \frac{f_w}{12}$	$1 \cdot s \cdot f_\beta = 1 \cdot \frac{f_w}{12}$
dx =	$1 \cdot \frac{f_x}{12}$	$2 \cdot \frac{f_x}{12}$	$3 \cdot \frac{f_x}{12}$	$3 \cdot \frac{f_x}{12}$	$2 \cdot \frac{f_x}{12}$	$1 \cdot \frac{f_x}{12}$
dy =	$1 \cdot \frac{f_y}{12}$	$2 \cdot \frac{f_y}{12}$	$3 \cdot \frac{f_y}{12}$	$3 \cdot \frac{f_y}{12}$	$2 \cdot \frac{f_y}{12}$	$1 \cdot \frac{f_y}{12}$

und man erkennt daraus das allgemein gültige, für die praktische Anwendung sehr bequeme Gesetz: Die auf die einzelnen Polygonseiten entfallenden, zur Wegschaffung der Querverfehlung f_w dienenden Querverschiebungen d_w , dx , dy wachsen, mit $1 \cdot (s \cdot f_\beta)$, bzw. $1 \cdot \left(\frac{f_x}{[k]}\right)$ und $1 \cdot \left(\frac{f_y}{[k]}\right)$ beginnend, in arithmetischer Reihe von beiden Enden des Zugs herein symmetrisch bis zu dessen Mitte. Dort erreichen sie den Höchstbetrag:

$$\frac{n+1}{2} \cdot (s \cdot f_\beta), \text{ bzw. } \frac{n+1}{2} \left(\frac{f_x}{[k]}\right) \text{ und } \frac{n+1}{2} \left(\frac{f_y}{[k]}\right) \text{ (für } n = \text{ungerade),}$$

welcher einfach, oder

$$\frac{n}{2} (s \cdot f_{\beta}), \text{ bzw. } \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{2} \left(\frac{f_x}{[k]} \right) \\ \frac{n}{2} \left(\frac{f_y}{[k]} \right) \end{array} \right\} \text{ (für } n = \text{gerade),}$$

welcher doppelt auftritt. Der gemeinsame Nenner [k] für die Bildung der Verschiebungen ist die Summe der auftretenden Glieder der auf- und absteigenden natürlichen Zahlenreihe.

Beispiele:

für $n = 4$ Nummern der Polygonpunkte 0 — 1 — 2 — 3 — 4 { [k] = 6
 Koeff. k der Verschiebungen k s. f_{β} = 1 2 2 1 { $fw = 1 + 2 + 2 + 1 = 6 \cdot s \cdot f_{\beta}$

für $n = 7$ Nummern der Polygonpunkte 0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 { [k] = 16
 Koeff. k der Verschiebungen k s. f_{β} = 1 2 3 4 3 2 1 { $fw = 16 \cdot s \cdot f_{\beta}$

für $n = 8$ Nummern der Polygonpunkte 0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 — 8 { [k] = 20
 Koeff. k der Verschiebungen k s. f_{β} = 1 2 3 4 4 3 2 1 { $fw = 20 \cdot s \cdot f_{\beta}$.

Das Verfahren der Ausgleichung der Querverfehlung unterscheidet sich also wesentlich von demjenigen der Längsverfehlung.

Letzteres erfordert Verbesserungszuschläge, welche proportional zu den Koordinatenunterschieden wachsen und sich auch im Vorzeichen nach ihnen richten (mit den Koordinatenunterschieden je gleiches Vorzeichen für positives entgegengesetztes $q - 1$).
 negatives

Die Ausgleichung der Querverfehlung dagegen erfordert Verbesserungszuschläge, welche der Grösse nach nur von der Ordnungszahl der Vielecksseite abhängen und im Vorzeichen, unabhängig von denjenigen der Koordinatenunterschiede, mit der zugehörigen Abschlussdifferenz f_x bzw. f_y übereinstimmen.

Ausrechnung zum Beispiel S. 596.

Punkt No.	x	y	log	n
A: Schütte . .	+ 18 037 26	— 33 418 72	$y_B - y_A$	3 07 676 n
B: Saurain . .	+ 18 475 93	— 34 612 04	$E \sin n \Delta B$ $E \cos n \Delta B$	
Δ	438 67	1 193 32	$x_B - x_A$	2 64 214
	n ΔB	322° 42' 62"	tg n ΔB	0 43 462 n
A: Kapellenberg	+ 19 188 77	— 35 192 86	$y_B - y_A$	3 41 938 n
B: Knollenberg .	+ 19 999 41	— 37 819 39	$E \sin n \Delta B$ $E \cos n \Delta B$	
Δ	810 64	2 626 53	$x_B - x_A$	2 90 883
	n ΔB	319° 05' 80"	tg n ΔB	0 51 055 n

1. Punkt No.	2. Gemessene Seite s	3. Richtungs- winkel φ Brechungs- winkel β " " "	4. $\log \cos \varphi$ $\log s$ $\log \sin \varphi$		5. $\log (s \cos \varphi)$ $\log (s \sin \varphi)$		6. Koordinatenunterschiede $\Delta x = s \cos \varphi$ Verbesserung		7. $\Delta y = s \sin \varphi$ Verbesserung		8. Koordinaten Δx verbessert x		9. Koordinaten Δy verbessert y	
			+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
Schütte		322 42 247 39 — 45												
Saurain														
1	184 04	369 81 171 18 — 45	94 923 26 491 65 953 n	2 21 414 1 92 444 n	163 74 — 7 ¹	18 475 93 163 81 18 639 74	— — —	34 612 04 83 94 34 695 98						
2	157 36	340 99 189 98 — 45	77 842 19 689 90 294 n	1 97 531 2 09 983 n	94 47 — 14	125 84 17 35	— —	125 67 34 821 65						
3	203 75	330 97 246 39 — 45	66 983 30 910 94 644 n	1 97 893 2 25 554 n	95 26 — 22	180 11 — 26	— —	179 85 34 001 50						
4	214 93	377 36 181 97 — 45	9 97 195 2 33 230 54 173 n	2 30 425 1 87 403 n	201 49 — 14	74 82 — 17	— —	74 65 35 076 15						
Kapellenberg	195 87	359 33 159 73 — 45	90 460 2 29 196 77 543 n	2 19 656 2 06 739	157 24 — 7 ¹	116 79 — 8 ¹	— —	116 71 35 192 86						
Knollenberg	[956]	319 05 319 08 — 70	== soll == ist == Widerspruch	$[\Delta x] =$ hiezux Saurain +	712 20 18475 93	$[\Delta y] =$ y Saurain —								
		6 86	== zul. Widerspr.	gibt x Kapellenbg. + anstatt soll +	19188 13 19188 77	y Kapellenberg — 35192 86								
				sonit $f_x =$	+ 0 64	$f_y =$	+ 0 77							

1) Siehe S. 596.

und $F = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = 1,00$ m.
Zulässig F_{Max} (Geländeklasse III) —: 1,29 + 0,22 = 1,51.

Als Beispiel

benützen wir dasjenige von Fig. 316 mit dem Unterschied, dass wir, um an Stelle der dortigen Längs- jetzt Querverfehlung zu haben, die Sollkoordinaten von Kapellenberg auf + 19188,77 — 35192,86
 „ Knollenberg „ + 19999,41 — 37819,39 abändern.

Berechnung hiezu s. S. 594/95.

Die Aufzeichnung in grossem Massstab (etwa 1 : 10) mit entgegengesetzten Vorzeichen der in Spalte 6 und 7 S. 595 gebildeten Abschlussdifferenzen f_x und f_y gegen die Sollkoordinaten des Abschlusspunktes mit letzterem als Ursprung und in bezug auf das gegebene Koordinatensystem zeigt, den Punkt \mathfrak{N}_n^a der Fig. 316 liefernd, das Vorhandensein reiner Querverfehlung, nämlich $f_l = 0$, $f_w = 1,00$, woraus, gleichlange Seiten vorausgesetzt, die nötige Winkelverbesserung sich berechnen würde zu:

$$f_\beta = \frac{f_w}{9 \cdot s} \cdot \rho' = 3,49'.$$

Statt mit den um f_β verbesserten Brechungswinkeln den Zug frisch durchzurechnen, ermitteln wir, wie oben gezeigt, die auf die einzelnen Koordinatenunterschiede entfallenden Verbesserungsbeträge dx und dy .

Die Koeffizienten k für die Differenzeinteilung ergeben sich dabei aus der schematischen Darstellung:

	Saurain	— 1	— 2	— 3	— 4	—	Kapellenberg	
	$k =$	1	2	3	2	1	[k] = 9	

woraus die den verbesserten Koordinatenunterschieden zuzufügenden Zuschläge¹⁾ (s. Sp. 6 und 7 S. 595):

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = \frac{k}{[k]} f_x = +7 + 14 + 22 + 14 + 7 \text{ cm, } [dx] = f_x = +64 \text{ cm} \\ dy = \frac{k}{[k]} f_y = +9 + 17 + 26 + 17 + 8 \text{ cm, } [dy] = f_y = +77 \text{ cm.} \end{array} \right.$$

Die durch vorstehende Ausgleichung indirekt an den [nach Gleichung (3a) des § 81 in Spalte 3 S. 595 bereits verbesserten] Brechungswinkeln und (falls der Zug nicht gestreckt ist) an den Streckenlängen s erfolgten Änderungen kann man rückwärts durch Berechnung der Richtungswinkel und Streckenlängen aus den endgültigen Koordinatenunterschieden ableiten, wobei sich für vorstehendes Beispiel ergibt:

	φ endgültig	β endgültig	φ nach (3a)	β verbessert nach (3a)	s endgültig	s gemessen
Schütte—Saurain	322 42 62,	247 42 73	369 81 37	247 38 75	184,06	184,04
Saurain—1	369 85 35,	171 22 87	340 99 56	171 18 19	157,30	157,36
1 — 2	341 08 22,	189 98 78	330 97 28	189 97 72	203,62	203,75
2 — 3	331 07 00,	246 35 67	377 36 40	249 39 12	215,01	214,93
3 — 4	377 42 67,	181 93 76	359 33 07	181 96 67	195,88	195,87
4 — Kapellenberg	359 36 43,	159 69 37		159 72 73		
Kapellenb.—Knollenbg.	319 05 80,					

Die berechneten Werte zeigen ungleiche Winkeländerungen als Folge namentlich der Verschiedenheit der Seitenlängen und Änderungen der letzteren als Folge nicht genügend gestreckter Zugform.

¹⁾ Wenn ausnahmsweise (natürlich übereinstimmend mit der Messungsgenauigkeit) die Koordinaten in mm angegeben oder bis auf 1 cm gewährleistet werden sollen (Hauptzüge bei Stadtvermessungen), so erfolgt die Berechnung von Δx , Δy , dx , dy ebenfalls nach mm.

Ausgleich
gleichzeitig
auftretender
Längs und
Quer-
verfehlung.

Die Wegschaffung gleichzeitig auftretender Längs- und Quer-
verfehlung erfolgt in zwei Stufen, nämlich durch:

1. Einschwenken des Zugs, so dass dessen Endpunkt \mathcal{A}_n in
die Gerade $A_0 A_n$ fällt nach Verfahren b und

2. Verstreckung des Zugs, so dass dessen Endpunkt \mathcal{A}_n auf A_n
fällt nach Verfahren a.

Man erhält dabei für jeden Koordinatenunterschied zwei Zu-
schläge, die sich möglicherweise gegenseitig ganz oder teilweise
aufheben. Als

Beispiel

benützen wir wieder dasjenige der Fig. 316 mit dem Unterschied, dass wir, um
Längs- und Querverfehlung gleichzeitig zu haben, die Koordinaten

von Kapellenberg auf + 19189,24 — 35193,24
„ Knollenberg „ + 19999,88 — 37819,77 abändern.

Punkt No.	x			y			log	n					
A: Schütte . .	+	18	037	26	—	33	418	72	$Y_B - Y_A$	3	07	676	n
B: Saurain . .	+	18	475	93	—	34	612	04	$E \sin n A B$ $E \cos n A B$				
Δ	+		438	67	—	1	193	32	$X_B - X_A$	2	64	214	
			n A B			322°	42'	62"	$\text{tg } n A B$	0	43	462	n
A: Kapellenberg	+	19	189	24	—	35	193	24	$Y_B - Y_A$	3	41	938	n
B: Knollenberg .	+	19	999	88	—	37	819	77	$E \sin n A B$ $E \cos n A B$				
Δ	+		810	64	—	2	626	53	$X_B - X_A$	2	90	883	
			n A B			319°	05'	80"	$\text{tg } n A B$	0	51	055	n

Weitere Berechnung s. S. 599.

Die Aufzeichnung der in Spalte 6 und 7 S. 599 gebildeten Widersprüche
 f_x und f_y der berechneten, gegen die Sollkoordinaten des Abschlusspunktes als
Koordinaten mit letzterem Punkt als Ursprung und mit verkehrten Vorzeichen
liefert in Fig. 316 den Punkt \mathcal{A}_n'' und zeigt das gleichzeitige Vorhandensein von
Längs- und Querverfehlung im Betrag von $f_l = +0,60$, $f_w = +1,00$, so dass

$$F = \sqrt{0,60^2 + 1,00^2} = \sqrt{1,11^2 + 0,39^2} = 1,17 \text{ m}^1).$$

Aus ersterer ergibt sich ein regelmässiger Fehler pro Längeneinheit
 $q - 1 = +0,00065$, welcher Zuschläge zu sämtlichen Koordinatenunterschieden
(und Vielecksseiten) in diesem Verhältnis und im vorliegenden Fall mit dem Vor-
zeichen des Unterschieds selbst fordert (s. S. 585). Die Summe dieser Zuschläge
muss der $x_{\text{Komponenten}}$ (+ 0,47), bzw. der $y_{\text{Komponenten}}$ (— 0,38) der Längsverfeh-
lung gleich sein, welche aus der Figur abgegriffen werden kann.

Die Zuschläge wegen der Querverfehlung folgen der Aufstellung S. 596.
Ihre Summe muss der $x_{\text{Komponenten}}$ (+ 0,64), bzw. der $y_{\text{Komponenten}}$ (+ 0,77) der
Querverfehlung gleich sein.

Hat man keinen Übersichtsplan zur Verfügung, kann man also
diese Komponenten nicht abgreifen, so berechnet man zuerst [mittels
Rechenschiebers nach Gleichung (23)] die zur Längsverfehlung ge-
hörigen Verbesserungen und ihre Summe:

¹⁾ Das Beispiel wurde derart gewählt, dass die auftretende Längsverfeh-
lung derjenigen S. 584, die Querverfehlung derjenigen S. 595 gleich ist.

1. Punkt No.	2. Gemessene Seite s	3. Richtungs- winkel φ Berechnungs- Verbesserung v 0 1 2 3 4	4. $\log \cos \varphi$ $\log s$ $\log \sin \varphi$		5. $\log (s \cos \varphi)$ $[\log (s \sin \varphi)]$		6. Koordinatenunterschiede $\Delta x = s \cos \varphi$ Verbesserung		7. $\Delta y = s \sin \varphi$ Verbesserung		8. Koordinaten Δx verbessert x		9. Koordinaten Δy verbessert y	
			+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
Zug No. III.														
Schütte														
Saurain		322 42 62 247 39 20 — 45												
1	184 04	369 81 37 171 18 64 — 45	94 923 26 491 65 953	2 21 414 1 92 444	n	163 74 + 7 + 11	84 03 + 9 + 5	+ 18 475 93 + 163 92 + 18 639 85	- 34 612 04 - 83 99 - 34 696 03					
2	157 36	340 99 56 189 98 17 — 45	77 842 19 689 90 294	1 97 531 2 09 983	n	94 47 + 14 + 6	125 84 + 17 + 8	+ 18 734 52 + 94 67 + 18 830 07	- 34 821 78 - 125 75 - 35 001 75					
3	203 75	330 97 28 246 39 57 — 45	66 983 2 30 910 94 644	1 97 893 2 25 554	n	95 26 + 22 + 7	180 11 + 26 + 12	+ 18 830 07 + 201 76 + 19 031 83	- 35 001 75 - 74 70 - 35 076 45					
4	214 93	377 36 40 181 97 12 — 45	97 195 2 33 230 54 173	2 30 425 1 87 403	n	201 49 + 14 + 13	74 82 + 17 + 5	+ 19 031 83 + 116 79 + 8	- 35 076 45 - 116 79 - 35 193 24					
Kapellenberg	195 87	359 33 07 159 73 18 — 45	90 460 2 29 196 77 543	2 19 656 2 06 739	n	157 24 + 7 + 10	116 79 + 8 + 8	+ 19 189 24 + 157 41 + 19 189 24	- 35 193 24 - 116 79 - 35 193 24					
Knollenberg	[956]	319 05 80 319 08 50 — 70	= soll = ist = Widerspruch	$[\Delta x] =$ hiera $x_{\text{saur.}} = +$		712 20 18475 93	$[\Delta y] =$ $y_{\text{saurain}} =$	+ 18 475 93 + 581 59 + 34612 04	- 34 612 04					
		6 86	= zul. Widerspr.	gibt $x_{\text{kapellbg.}}$ anstatt soll +		19188 13 19189 24	$y_{\text{kapellbg.}} =$	+ 35193 63 + 35193 24	- 35193 24					
				sonit $f_x =$		+ 1 11	$f_y =$	+ 0 39	- F = 1,17					

Zulässig (F_{max}) (Geländeklasse III) = 1,51 m.

$$[\text{algeb. } \Delta x] \cdot \frac{f_1}{S} = [\text{algeb. } \Delta x] (q - 1),$$

$$\text{bezw. } [\text{algeb. } \Delta y] \cdot \frac{f_1}{S} = [\text{algeb. } \Delta y] (q - 1).$$

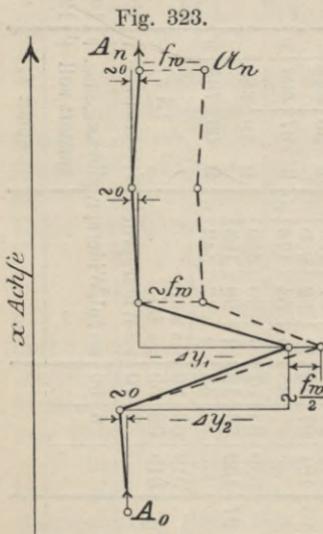
Der Rest $\{f_x - [\text{algeb. } \Delta x] (q - 1)\}$ stellt die $x_{\text{Komponente}}$, der Rest $\{f_y - [\text{algeb. } \Delta y] (q - 1)\}$ die $y_{\text{Komponente}}$ der Querverfehlung vor.

Wegschaffung der Abschlussdifferenzen proportional zu den Seitenlängen.

d) Vereinfachte Ausgleich der Polygonisierungs-widersprüche.

Die nach Längs- und Querverfehlung getrennte Ausgleich ist für untergeordnete Arbeiten zu schwerfällig und im Falle geringer Abschlussdifferenzen ohne merkbaren Einfluss auf das Endergebnis. Eine Zusammenfassung ist hiebei, wenn auch vielleicht unter Drangabe einiger Genauigkeit, erwünscht. Überwiegt der Betrag der Längs- stark denjenigen der Querverfehlung, so kann die volle Abschlussdifferenz ohne allzu grossen Schaden nach dem für die erstere aufgestellten Verfahren: „proportional den Koordinatenunterschieden“ weggebracht werden.

Erreicht jedoch die Querverfehlung erheblichere Beträge, so ist dies nicht angängig. Dies zeigt sich am klarsten an einem ungefähr parallel zu einer der Koordinatenachsen verlaufenden, gestreckten Zug, bei welchem kleine Abweichungen der Brechungswinkel voneinander die senkrecht zur Zugsrichtung liegenden Koordinatenunterschiede und damit die auf die betreffenden Vielecksseiten entfallenden Ausgleichsbeträge unverhältnismässig stark verschieden gestalten würden.



Wäre vollends auch nur eine einzige Ausbauchung des Zugs vorhanden (wie sie bei scharfen Tal- und Klingenbildungen oft nicht zu vermeiden ist), so würde (s. Fig. 323) bei Einteilung proportional den Koordinatendifferenzen die Querverfehlung zum weitaus grössten Teil auf die beiden ausbeugenden, nicht weniger

genau als die übrigen gemessenen Seiten geworfen, von denen die eine dadurch ungefähr die Verbesserung $+\frac{f_w}{2}$, die andere nahezu die Verbesserung $-\frac{f_w}{2}$ erhielte.

In beiden Fällen würde dagegen die Einteilung der vollen Abschlussdifferenz „proportional den Vielecksseiten“, (trotz-

dem sie weder die Längs-, noch die Querverfehlung an den sie verschuldenden Elementen verbessert, sondern dem zu Fig. 319 zuerst gefassten, und sofort als irrtümlich erkannten Gedanken entspricht), zu brauchbarerem Ergebnis führen.

Einzelne amtliche Vermessungsanweisungen (z. B. die württembergische) schreiben deshalb die Ausgleichung der Abschlussdifferenzen proportional den Vielecksseiten kurzerhand vor. Das vorstehend behandelte Beispiel hätte damit folgende Einteilungsbeträge und Koordinaten ergeben:

	Saurain	— 1	— 2	— 3	— 4	— Kapellbg.
$dx = \frac{s}{[\bar{s}]} fx$	= + 21	+ 18	+ 24	+ 25	+ 23	cm
$\Delta x = \Delta \bar{x} + dx$	= + 163,95	+ 94,65	+ 95,50	+ 201,74	+ 157,47	
x	= + 18475,93	+ 18639,88	+ 18734,53	+ 18830,03	+ 19031,77	+ 19189,24
$dy = \frac{s}{[\bar{s}]} fy$	= + 8	+ 6	+ 8	+ 9	+ 8	
$\Delta y = \Delta \bar{y} + dy$	= - 83,95	- 125,78	- 180,03	- 74,73	- 116,71	
y	= - 34612,04	- 34695,99	- 34821,77	- 35001,80	- 35076,53	- 35193,24

Die Unterschiede der hierbei gegenüber den nach Verfahren (c) erhaltenen Koordinaten betragen

in x	0	- 3	- 1	+ 4	+ 6	0 cm
„ y	0	- 4	- 1	+ 5	+ 8	0 „

§ 84. Zugsanschluss an einen unzugänglichen Punkt.

Ist einer der Zugsendpunkte unzugänglich (Kirchturm, Blitzableiter etc.), so ist zur Bestimmung der in ihm endigenden Vielecksseite $A_{n-1} A_n$ eine Dreiecks-, oder Vielecksmessung nach Fig. 324 nötig. Daraus ergibt sich die fehlende Seite mittels des sin Satzes oder nach § 87. Für die Weiterbehandlung stehen dreierlei Wege zu Gebot.

Verzicht auf Abschlusswinkel. Abknickung sämtlicher Brechungswinkel im selben Sinn.

Wird: a) auf die Abschlussrichtung $A_n A_{n+1}$ verzichtet, so fällt lediglich die Bedingungsgleichung 3 des § 81 (Winkelsummengleichung) weg. Trotzdem ergibt bei gestreckter Zugsanlage die Ausscheidung von Quer- und Längsverfehlung sowohl eine Winkel-, als eine Seitenkontrolle. Für die Einteilung der Querverfehlung gilt das durch die Gleichungen (19) bis (22) des § 83 gegebene Verfahren.

Wünschenswert ist es aber immerhin, durch Gewinnung einer Abschlussrichtung auch die Winkelsummengleichung als Probe zu benutzen. Zu diesem Zwecke könnte man

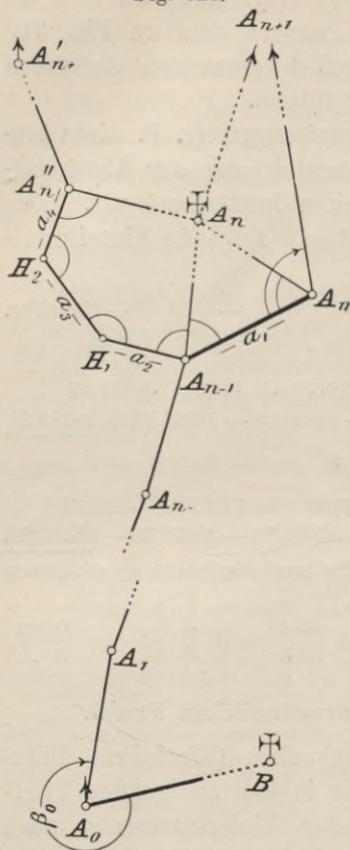
b) aus dem im Hilfspunkt A'_n nach einem entfernten Festpunkt A_{n+1} gemessenen Winkel $A_{n-1} A'_n A_{n+1}$ durch Zentrierung (s. § 45) den Abschlusswinkel $A_{n-1} A_n A_{n+1}$ ableiten.

Gewinnung des Abschlusswinkels durch Zentrierung.

Die hiezu nötige Exzentrizität $e = A'_n A_n$ lässt sich jedoch auf indirektem Weg (Hilfsdreieck, oder -Vieleck) kaum mit der in

Fig. 324.

„Herunterbringen
(-holen) des
Abschluss-
punktes.“



Messungs-
probe.

§ 45 hierfür verlangten Genauigkeit ermitteln. Wir verzichten daher besser auf die Zentrierung überhaupt und benützen

c) das Verfahren des „Herunterbringens“ (Herunterholens) des unzugänglichen Abschlusspunktes A_n nach A'_n .

Hiebei suchen wir aus den Koordinaten des unzugänglichen Festpunktes A_n mittels eines gemessenen Hilfsdreiecks, oder -Polygons diejenigen eines Bodenpunktes A'_n (oder A''_n) [s. § 78, Gleichungen (1) bis (4) und § 87] abzuleiten. Sie treten dann als Festpunktkoordinaten an Stelle derer von A_n und der Zug endet in A'_n (bezw. A''_n) statt in A_n .

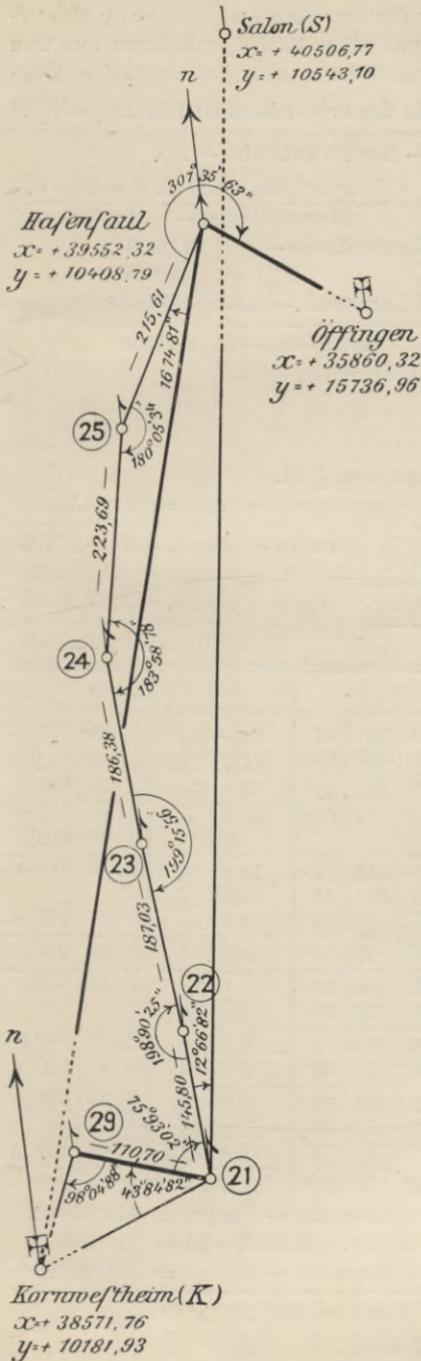
Weisen auch, infolge kleiner Ungenauigkeiten in der Bestimmung der Strecke $A_n A'_n$ und ihres Richtungswinkels die berechneten Koordinaten des Hilfspunktes kleine Fehler auf, so bewirken diese bei genügend langer Anschlussrichtung $A'_n A_{n+1}$ wenigstens keine Verschwenkung des in A'_n ab-

schliessenden Zugs, wie es bei ungenauem, durch Zentrierung gewonnenen Abschlusswinkel $A_{n-1} A_n A_{n+1}$ und Abschluss in A_n der Fall wäre. Sie erzeugen höchstens eine nach rückwärts sich allmählich verringende kleine Verschiebung der benachbarten Polygonpunkte.

Der Probe wegen ist es wünschenswert, die Koordinaten des heruntergebrachten Abschlusspunktes unabhängig doppelt zu bestimmen. Dies geht am einfachsten, wenn man die zum Herunterbringen des unzugänglichen Punktes dienende Strecke zwei Hilfsnetzen gleichzeitig angehören lässt und von ihrem auf dem Gelände liegenden Endpunkt aus die Richtungen nach zwei entfernten Festpunkten beobachtet. Daher würde sich z. B. in Fig. 324 der Polygonpunkt A_{n-1} hierfür besser eignen, als A'_n , sobald man von ihm aus zwei ferne Festpunkte anzielen könnte.

Lässt sich von dem den beiden Hilfsnetzen angehörigen Viereckspunkt A_{n-1} keine Zielung nach fernen Festpunkten gewinnen, wohl aber von den Hilfspunkten A'_n und A''_n aus, so bringt man den

Fig. 324 a.



unzugänglichen Punkt zunächst nach ihnen, je unter Benützung der einfach bestimmten Strecke $A'_n A_n$, bzw. $A''_n A_n$ vorläufig herunter, berechnet aus den gewonnenen Koordinaten die Richtungswinkel $n A'_n A_{n+1}$ und $n A''_n A'_{n+1}$ und daraus nach Gleichung (3) des § 81 mit Hilfe der gemessenen Winkel in den Hilfsnetzen die Richtungswinkel $n A_{n-1} A_{n-2}$ oder $n A_{n-1} A_n$ je unabhängig doppelt. Alsdann benützt man einen Mittelwert des letzteren und die aus beiden Hilfsnetzen gemittelte Strecke $A_{n-1} A_n$ zum Herunterbringen des unzugänglichen Punktes nach A_{n-1} . In letzterem Punkt endigt der Zug mit dem gemittelten Richtungswinkel $n A_{n-1} A_{n-2} \pm 2 R = n A_{n-2} A_{n-1}$.

Beispiel.

Der unzugängliche Punkt Kornwestheim soll mittels der in Fig. 324 a eingetragenen Strecken und Winkel nach 21 heruntergebracht und es soll der Polygonzug Hasensaul — 25 — ... in 21 abgeschlossen werden.

a) Strecke Kornwestheim — 21 Berechnung.

$$= \frac{110,70 \sin 98^{\circ} 04' 88''}{\sin (43^{\circ} 84' 82'' + 98^{\circ} 04' 88'')} = \frac{110,70}{\sin 141^{\circ} 89' 70''} = \frac{2,04415}{0,10175} = 9,99980$$

139,86 = Kornwesth. — 21 2,14570

(Eine zweite, — Probe — Berechnung dieser Strecke wird ermöglicht durch das Vieleck Kornwestheim — 21 — 22 — 23 — 24 — 25 — Hasensaul — Kornwestheim nach dem in § 87 Fall 3) zu zeigenden Verfahren. Um diesem Paragraphen nicht vorzugreifen, in Rücksicht ferner auf die durch die grosse Zuglänge erzeugte Unsicherheit und das

geringe Gewicht dieser Bestimmung wird das sich aus dieser Berechnung ergebende Streckenmass — 140,04 hier nicht verwendet. Aus erstgenanntem Grund unterbleibt hier auch eine Vergleichung der aus der Zugsmessung sich ergebenden Strecke Kornwestheim — Hasensaul ($\cong = 1006,56$) mit ihrem aus den Festpunktskoordinaten bestimmbareren Wert S und die vorgängige Wegschaffung etwaiger Längsverfehlung mittels des Proportionalitätsfaktors $q = \frac{S}{\cong}$.)

b) Richtungswinkel (n — Kornwestheim — 21).

$$\sin(\sphericalangle 21 \text{ -- Salon -- Kornwestheim}) = \frac{(\text{Kornwestheim -- 21}) \sin K. \text{ -- 21 -- S.}}{(\text{Kornwestheim -- Salon})^1}$$

Kornwestheim — δ 21	2.14570 ²⁾
sin	9.94096
E Kornwesth. — Salon	6.70588 ¹⁾
21 — S. — K. = 3° 95' 09"	sin 21 — S. — K. 8.79254
S. — K. — 21 = 63° 60' 25"	durch Ergänzung zu 2 R.
<u>n — Kornw. — Salon = 11° 74' 74"</u>	
<u>n — Kornw. — 21 = 75° 34' 99"</u>	

c) Koordinaten von δ 21.

	x	y					
Kornwestheim	+ 38571,76	+ 10181,93	+ 52,81 = Δx	1.72273			
$\Delta x = + 52,81$		$\Delta y = + 129,51$	cos (n — Kornw. — 21)	9.57703			
δ 21	+ 38624,57	+ 10311,44	139,86 = Kornw. — 21	2.14570 ²⁾			
			sin (n — Kornw. — 21)	9.96660			
			+ 129,51 = Δy	2.11230			

Punkt No.	x ,			y ,			log	n			
A: Kornwestheim	+	38	571 76	+	10	181 93	$Y_B - Y_A$	2	55	771	
B: Salon . . .	+	40	506 77	+	10	543 10	$E \sin n \text{ A B}$	0	00	744	
Δ	+	1	935 01	+		361 17	$E \cos n \text{ A B}$	3	28	668	
			n A B		11°	74' 74" ¹⁾	$X_B - X_A$	9	27	103	
							tg n A B	3	29	412 ¹⁾	
							A B				
A: Salon . . .	+	40	506 77	+	10	543 10	$Y_B - Y_A$	2	36	485	n
B: δ 21 . . .	+	38	624 57	+	10	311 44	$E \sin n \text{ A B}$				
Δ	-	1	882 20	-		231 66	$E \cos n \text{ A B}$	3	27	467	n
			n A B		207°	79' 61"	$X_B - X_A$	9	09	018	
							tg n A B				
A: Hasensaul .	+	39	552 32	+	10	408 79	$Y_B - Y_A$	3	72	658	
B: Öffingen . .	+	35	860 32	+	15	736 96	$E \sin n \text{ A B}$				
Δ	-	3	692 00	+	5	328 17	$E \cos n \text{ A B}$	3	56	726	n
			n A B		138°	57' 64"	$X_B - X_A$	0	15	932	n
							tg n A B				
A: Hasensaul .	+	39	552 32	+	10	408 79	$Y_B - Y_A$	2	35	576	n
B: Kornwestheim	+	38	571 76	+	10	181 93	$E \sin n \text{ A B}$				
Δ	-		980 56	-		226 86	$E \cos n \text{ A B}$	2	99	147	n
			n A B		214°	47' 42"	$X_B - X_A$	9	36	429	
							tg n A B				
n Hasensaul — Öffing.			= 138° 57' 64"				n Hasensaul — Kornw. = 214° 47' 42"				
Öff. — Hasens. — 25			= 92° 64' 37"				Kornw. — Hasens. — 25 = 16° 74' 81"				
n Hasensaul — 25			= 231° 22' 01"				n Hasensaul — 25 = 231° 22' 23"				

Mittel = 231° 22' 12"^{**}.

¹⁾ Berechnung s. Formular S. 604 unten.

²⁾ " " S. 603.

1. Punkt No.	2. Gemessene Seite s	3. Richtungs- winkel φ Brechungs- winkel β " "	4. $\log \cos \varphi$ $\log s$ $\log \sin \varphi$		5. $\log (s \cos \varphi)$ $\log (s \sin \varphi)$		6. Koordinatenunterschiede $\Delta x = s \cos \varphi$ Verbesserung		7. $\Delta y = s \sin \varphi$ Verbesserung		8. Koordinaten Δx verbessert x		9. Koordinaten Δy verbessert y	
			+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
Salon														
21		207 387 61 18 24												
22	145 80	395 198 — 55 25 8	99 16 88	873 376 363	2 16 1 04 249 739 n	145 38	11 15	38 57	10 311 44					
23	187 03	394 200 — 84 44 25 8	99 27 99	809 191 178	2 27 1 24 000 369 n	186 21	17 53	186 21	17 52					
24	186 38	394 216 — 86 41 25 8	99 27 90	859 040 599	2 26 1 17 899 639 n	185 78	15 01	185 77	14 99					
25	223 69	11 219 — 94 66 25 9	99 34 965	315 965 604	2 34 1 59 280 569 n	220 19	39 42	220 19	39 44					
Hasensaul	215 61	31 —	99 94	554 367 302	2 27 2 00 921 669 n	190 20	101 55	190 20	101 56					
	[958]	**31 31 —	22 23 1	12 36 24 = soll (Mittel) = ist = Widerspruch		927 76	140 97 43 69							
					liezu $x_{21} =$ gibt $x_{\text{Hasens.}} =$ anstatt soll $+$ somit $f_x =$									
					f_y 8,845 f_x 8,000 n									
					$\text{tg n } \varphi_n \Delta_n 0,845 \text{ n}$									
					$\sphericalangle A_0 \Delta_n \varphi_n = 294^\circ 56' \sim 3 \text{ R.}$ Die Abschlussdifferenz stellt also weit überwiegend Querverfehlung dar und wird nach									

Zulässig F_{Max} (Geländeklasse II) (1,04 + 0,22) = 1,26.

$f_y = 0,07$

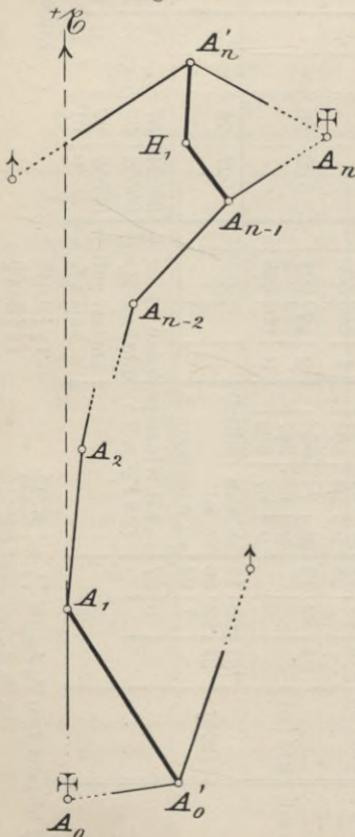
1) hieraus $\text{tg n } \varphi_n \Delta_n = \frac{f_y}{f_x} = \pm \frac{0,07}{0,01} = 109^\circ 03'$
 $\text{tg n } \varphi_n \Delta_n = 214^\circ 47'$
 $\sphericalangle A_0 \Delta_n \varphi_n = 294^\circ 56' \sim 3 \text{ R.}$ Die Abschlussdifferenz stellt also weit überwiegend Querverfehlung dar und wird nach den hierfür aufgestellten Regeln eingeteilt.
 **) Siehe S. 604 unten.

Der Zugsabschluss im heruntergebrachten Punkt ist besonders dann zweckmässig, wenn die zum Herunterbringen verwendete, für die Zugsberechnung selbst ausgeschaltete Vielecksseite kurz ist, also eine nennenswerte Ungenauigkeit in der Bestimmung der Koordinaten des Hilfspunkts weniger leicht eintritt, als eine Zugsverschwenkung im Fall der Mitbenützung als letzte Polygonseite.

§ 85. Zugsanschluss an zwei unzugänglichen Endpunkten:
„Zugseinhängung“.

Die Längen der beiden äusseren Vielecksseiten $A_0 A_1$ und $A_{n-1} A_n$ sind, wenn die Lage der Zwischenpunkte überhaupt bestimmt sein soll, unter allen Umständen durch Hilfsdreiecke, oder -Vielecke zu bestimmen. Ist dies geschehen, so sind dreierlei Lösungen der Aufgabe möglich. Die beste liefert

Fig. 325.



1. das Herunterbringen der beiden unzugänglichen Punkte A_0 und A_n nach A'_0 und A'_n entsprechend dem Verfahren (c) des vorigen Paragraphen.

Im Polygonzug $A'_0 A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} H_1 A'_n$, auf dessen beiden, nun nach ihren Koordinaten gegebenen Endpunkten A'_0 und A'_n die Abschlusswinkel nach entfernten Festpunkten gemessen sind, hat man dann den gewöhnlichen Fall des § 83.

Kann man aber

2. nur an einem der beiden Zugsenden einen Hilfspunkt finden, von dem aus ein ferner Festpunkt sichtbar ist, so kommt die Lösung (a) des § 84 zur Anwendung.

Ist es endlich

3. bei keinem der beiden Zugsendpunkte möglich, einen Hilfspunkt zu finden, von dem aus gleichzeitig der unzugängliche und ein ferner Festpunkt gesichtet werden kann (eigentlicher

Fall der „Zugseinhängung“), so berechnet man den Zug $A_0 A_1 \dots A_{n-1} A_n$ als Schnitzzug (s. § 81) zunächst auf irgendeine seiner Polygon-

seiten (z. B. $A_0 A_1$) als ζ Achse und einen ihrer Endpunkte (z. B. A_0) als Ursprung (Hilfsberechnung).

Aus den derart gewonnenen, bezw. angenommenen Koordinaten ζ und η der beiden Abschlusspunkte A_0 und A_n in bezug auf das gewählte System einer-, und aus ihren gegebenen Koordinaten $x_0 y_0, x_n y_n$ andererseits erhält man nach § 56 je zwei Werte für die Strecke $A_0 A_n$ und ihren Richtungswinkel, nämlich:

$$\begin{array}{l} \text{im Landes-} \\ \text{vermessungs-} \\ \text{system.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{tg } \alpha \ A_0 A_n = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} \\ A_0 A_n = \frac{y_n - y_0}{\sin \alpha \ A_0 A_n} = \frac{x_n - x_0}{\cos \alpha \ A_0 A_n} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{im an-} \\ \text{genommenen} \\ \text{Hilfssystem.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{tg } \zeta \ \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_n = \frac{\eta_n - \eta_0}{\xi_n - \xi_0} \\ \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_n = \frac{\eta_n - \eta_0}{\sin \zeta \ \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_n} = \frac{\xi_n - \xi_0}{\cos \zeta \ \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_n} \end{array} \right\}$$

Die Werte $A_0 A_n$ und $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_n$ für die Länge der Verbindungsstrecke beider Abschlusspunkte sollten einander gleich sein. Trifft dies nicht genau zu, so erhält man aus ihnen analog der Bestimmung der Längsverfehlung in § 83 den Koeffizienten

$$q = \frac{A_0 A_n}{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_n}, \quad (\log q = \log A_0 A_n - \log \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_n),$$

mit welchem, wie dort, sämtliche gemessenen Vielecksseiten \hat{s} zu multiplizieren sind:

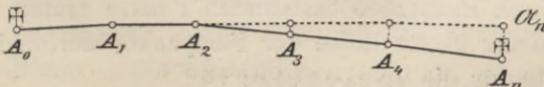
$$s = q \cdot \hat{s} = \hat{s} + (q - 1) \hat{s}; \quad \log s = \log \hat{s} + \log q.$$

Führt man diese reduzierten Streckenwerte s und die um den konstanten Wert $\Delta \varphi \equiv n \ A_0 A_n - \zeta \ \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_n$ vergrößerten Richtungswinkel der Hilfsberechnung in die nun folgende endgültige Zugsberechnung ein, so schliesst diese ohne Differenzen (f_x und f_y) ab, die endgültigen Koordinaten der Polygonpunkte liefernd.

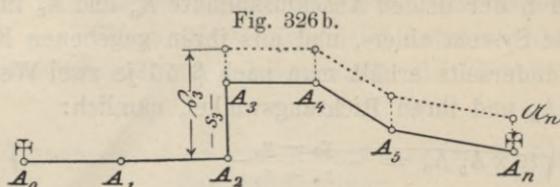
Auch im Fall 3 fehlt nach dem vorhergehend Ausgeführten die Messungsprobe nicht vollständig. Ein grober Streckenfehler beim gestreckten, ein grober Winkelfehler beim stark ausbeugenden Zug würden die Länge der Verbindungsstrecke $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_n$ stark verändern und einen Widerspruch zwischen ihren aus den Koordinaten ζ, η einerseits und den gegebenen Koordinaten x, y andererseits errechneten Werten erzeugen, der zur Nachmessung zwingen würde.

Bei gestreckter Zugsform würden dagegen etwaige Fehler in den Brechungswinkeln (s. Fig. 326a), bei stark ausbauendem Zug Fehler in — zufälligerweise senkrecht zur Zugs-

Fig. 326a.



richtung verlaufenden — Vielecksseiten (s. Fig. 326b) die Verbindungsstrecke $\mathcal{A}_0 \mathcal{A}_n$ der beiden Abschlusspunkte kaum verändern, also beim Vergleich mit $A_0 A_n$ nicht als grobe Fehler zum Ausdruck



kommen. Die „Einhängung“ eines solchen fehlerhaft gemessenen Zugs würde demzufolge, ohne dass auffallende Abschlussdifferenzen darauf hinweisen würden, eine unter Umständen beträchtliche (nur etwa durch Anschluss an einen zweiten quer verlaufenden Zug feststellbare) Querverschiebung sämtlicher Polygonpunkte aus ihrer Soll-lage zulassen. Sie ist daher für Zwecke von einiger Bedeutung ungenügend.

§ 86. Zugsnetze.

Dehnt sich das von der Stückvermessung zu erfassende Gebiet nach Länge und Breite weit aus, so genügt als Grundlage für die Aufnahme ein einziger Polygonzug nicht. An seine Stelle tritt eine Anzahl von Zügen, ein „Zugsnetz“.

Man kann deren Zusammenschluss auf zweierlei Arten bewirken, nämlich: 1. Durch Abstufung nach Haupt- und Nebenzügen.

2. Durch zusammenhängende Berechnung, „Verknotung“.

Am einfachsten ist die

1. Die Abstufung nach Haupt- und Nebenzügen.

Die „Hauptzüge“ verbinden gegebene Festpunkte ohne allzu weit gehende Rücksichtnahme auf die speziellen Bedürfnisse der Stückvermessung möglichst gestreckt, gleichseitig und leicht messbar. Ungefähr paralleler Verlauf mehrerer Züge in geringer Entfernung voneinander, sowie Überschneidungen (Kreuzung) ohne gemeinsamen Brechpunkt ist bei ihnen wegen der verzerrenden Wirkung etwa zurückgebliebener Reste von Längs- oder Querverfehlung auf die Verbindungsstrecken benachbarter Punkte verschiedener Züge zu vermeiden. Die Seiten- und Winkelmessung für die Hauptzüge erfolgt mit gesteigerter Sorgfalt, die Koordinatenberechnung nach den in § 83c vorgeführten Verfahren.

Die durch Hauptzüge bestimmten Punkte treten sofort nach ihrer Festlegung in die Reihe der Festpunkte ein und bilden Abschlusspunkte für die „Nebenzüge“.

Bei Anlage der letzteren überwiegt die Rücksicht auf die Bedürfnisse der Stückvermessung. Bei ihrer Abzweigung von Hauptzügen dient als Anschlussrichtung die längste dem Zweigpunkt anliegende Hauptzugsseite, deren Richtungswinkel im Fall eingeteilter grösserer Querverfehlung aus den zugehörigen, endgültigen Koordinatenunterschieden neu ermittelt wird. Für untergeordnete Zwecke, oder kurze Nebenzüge, sowie im Fall geringer Querverfehlung des Hauptzugs kann dagegen direkt derjenige Richtungswinkel der Anschlussrichtung übertragen werden, welcher nach erfolgter Ausgleichung nach Gleichung (3a) des § 81 bei der Berechnung des Hauptzugs selbst verwendet wurde.

Besser ist, zumal wenn die Abzweigung in der Mitte des Hauptzugs erfolgt, die Beobachtung der Abschlussrichtung nach einem fernen Festpunkt.

Schnittpunkte werden der Probe wegen womöglich von zwei Polygonpunkten her eingeschnitten. Die Mittelung der hiebei sich ergebenden widersprechenden Koordinatenwerte erfolgt wie die hernach zu zeigende Koordinatenausgleichung von Knotenpunkten.

Schnitzzüge sind nur für ganz untergeordnete Zwecke (Kulturgrenzaufnahmen etc.) zulässig.

2. Zugsverknötung.

Müssten (z. B. in Waldgebieten etc.) einzelne Hauptpolygonzüge sehr lang werden, so dass die zu befürchtende, durch Längs- und Querschwankungen erzeugte Unsicherheit in der durch die berechneten Koordinaten bestimmten Lage der Polygonpunkte das erträgliche Mass übersteigen könnte, oder sind einzelne, von den Hauptzügen abzweigende Nebenzüge nach Anlage und Messung den ersteren gleichwertig, so würde die Durchrechnung dieser weder genügend genaue, noch den genannten Verhältnissen gerecht werdende Ergebnisse zeitigen. Unter solchen Umständen ist es zweckmässig, einen Polygonpunkt, der mehreren Zügen gleichzeitig angehört, aus ihnen gemeinsam als „Knotenpunkt“ abzuleiten.

Dies könnte etwa in der Weise erfolgen, dass man jeden auf den Knotenpunkt zulaufenden Zug als Schnitzzug von dem entgegengesetzten Ende, dem Festpunkt aus, durchrechnen würde. Man würde damit für ersteren ebensoviele Koordinatenpaare erhalten, als Schnitzzüge verwendet wurden. Aus ihnen wären schliesslich durch Mittelung die endgültigen Koordinaten des Knotenpunktes erhältlich.

Dieses Verfahren liesse aber die im Knotenpunkt selbst gemessenen Winkel unberücksichtigt.

Rechnet man damit nun in allen z Zügen

b) die Koordinatenunterschiede

$$\Delta x = \bar{s} \cdot \cos \varphi; \Delta y = \bar{s} \cdot \sin \varphi,$$

so erhält man z verschiedene Wertpaare für die Koordinaten des Knotenpunkts:

$$x = x_0 + [\bar{s} \cos \varphi] \text{ und } y = y_0 + [\bar{s} \sin \varphi].$$

Als endgültigen Wert wird man auch hier analog Gleichungen (1) und (4) das arithmetische Mittel:

$$(5) \quad x_{\text{Mittel}} = \frac{[p x]}{[p]} = N_x + \frac{[p dx]}{[p]}; \quad y_{\text{Mittel}} = \frac{[p y]}{[p]} = N_y + \frac{[p dy]}{[p]}$$

annehmen, wobei N_x und N_y wieder Näherungswerte für x_{Mittel} bzw. y_{Mittel} , und dx bzw. dy die nach Gleichung (6) zur Erzielung der aus den Einzelzügen erhaltenen Koordinatenwerte nötigen Zuschläge vorstellen:

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = N_x + dx_1; & y_1 = N_y + dy_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_z = N_x + dx_z; & y_z = N_y + dy_z. \end{cases}$$

Einige Schwierigkeit bereitet nur die Bestimmung der den einzelnen Koordinatenwerten $x_1, x_2 \dots x_z; y_1, y_2 \dots y_z$ zukommenden Gewichte $p_1, p_2 \dots p_z$.

Wären die den betreffenden Polygonzügen anhaftenden Fehler F bekannt, so wären nach den Grundsätzen für die Ausgleichung direkter Beobachtungen die Zugsgewichte p den Fehlerquadraten F^2 umgekehrt proportional:

$$p_1 = \frac{k}{F_1^2}, \quad p_2 = \frac{k}{F_2^2}, \dots$$

Dabei könnte k eine beliebige Zahl sein, weil proportionale Änderung der Gewichte nur die Gewichtseinheit, nicht aber den Wert der damit errechneten Unbekannten ändert. Nun sind die tatsächlichen Zugfehler F nicht bekannt, wohl aber auf Grund amtlicher Bestimmungen die in jedem Zug äusserstenfalls zulässigen Fehler F_{Max} (s. § 90), bei deren Festsetzung die Anwendung derselben Hilfsmittel und Methoden vorausgesetzt wurde, die der Messung tatsächlich zugrunde lagen. Diese F_{Max} sind daher voraussichtlich proportional den zur Zeit noch unbekanntem Abschlussfehlern F und können zur Gewichtsbestimmung an deren Stelle treten.

Wir sind also berechtigt zu setzen:

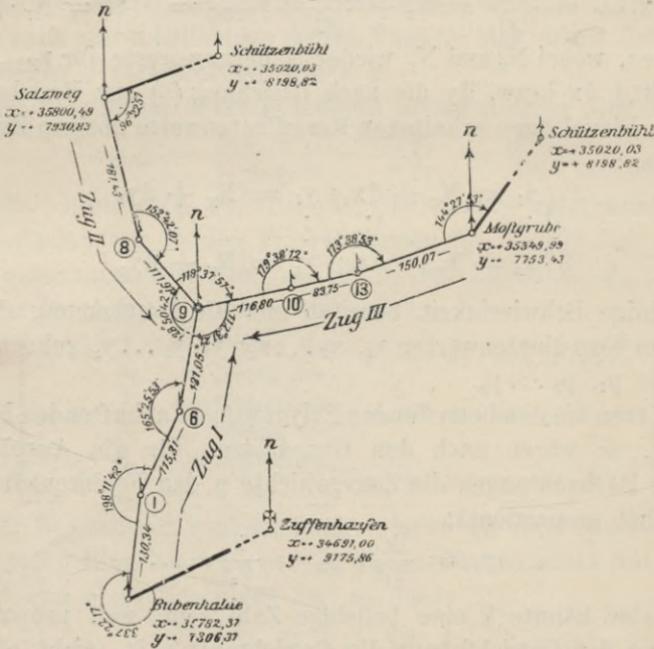
$$(7) \quad \left. \begin{array}{l} p_1 = \frac{k}{(F_{1\text{Max}})^2} \\ \vdots \\ p_z = \frac{k}{(F_{z\text{Max}})^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wobei zum Zweck der Erzielung bequemer Ge-} \\ \text{wichtswerte } p \text{ die Konstante } k \text{ nach Bedarf, jedoch} \\ \text{für eine und dieselbe Verknotung unveränder-} \\ \text{lich, etwa gleich 1,10 etc., gesetzt werden kann.} \end{array}$$

Sind schliesslich nach Gleichungen (5) für die Koordinaten des Knotenpunkts Mittelwerte gewonnen, so werden diese in jedem der z Züge zur Bildung der Widersprüche f_x, f_y, F, f_b, f_w und zu deren Ausgleich genau ebenso verwendet, wie die Koordinaten des zum Zugsabschluss dienenden Festpunktes in § 83.

Beispiel:

Gegeben die Koordinaten der Anschlusspunkte
Gemessen die Vielecksseiten und Brechungswinkel } in Fig. 327.
Gesucht die Koordinaten der Polygonpunkte

Fig. 327.



Punkt No.	x	y	log	n
A: Zuffenhausen	+ 34 691 00	+ 9 175 86	$Y_B - Y_A$	3 27 172 n
B: Bubenhalde	+ 35 782 37	+ 7 306 37	$E \sin n \ A B$ $E \cos n \ A B$	
\triangle	+ 1 091 37	- 1 869 49	$X_B - X_A$	3 08 797
	n A B	300° 16' 32"	$\text{tg } n \ A B$	0 23 375 n
A: Schützenbühl	+ 35 020 03	+ 8 198 82	$Y_B - Y_A$	2 42 811 n
B: Salzweg	+ 35 800 49	+ 7 930 83	$E \sin n \ A B$ $E \cos n \ A B$	
\triangle	+ 780 46	- 267 99	$X_B - X_A$	2 89 235
	n A B	341° 02' 57"	$\text{tg } n \ A B$	9 53 576 n
A: Schützenbühl	+ 35 020 03	+ 8 198 82	$Y_B - Y_A$	2 64 874 n
B: Mostgrube	+ 35 349 99	+ 7 753 43	$E \sin n \ A B$ $E \cos n \ A B$	
\triangle	+ 329 96	- 445 39	$X_B - X_A$	2 51 846
	n A B	306° 31' 56"	$\text{tg } n \ A B$	0 13 028 n

1. Punkt No.	3. Gemessene Seite s	3. Richtungswinkel φ Brechungs- Verbesserung v	4. $\log \cos \varphi$ $\log s$		5. $\log (s \cos \varphi)$ $\log (s \sin \varphi)$		6. Koordinatenunterschiede		7. $\Delta y = s \sin \varphi$ Verbesserung		8. Koordinaten		9. Δy verbessert Δy
			$\log \cos \varphi$	$\log s$	$\log (s \cos \varphi)$	$\log (s \sin \varphi)$	$\Delta x = s \cos \varphi$ Verbesserung	$\Delta y = s \sin \varphi$ Verbesserung	Δx verbessert	Δy verbessert			
Zuffenhausen		300 337	16 32 17										
Bubenhalde		97 198	89 11 42 17	9 2 11 17	12 11 99 99	434 508 612	n	1 2	23 11	942 120	n	17 35	0 ¹ 2 ²
1	130 34	115 165	51 25 17	05 53 17	9 2 9 95	63 187 420	n	1 2	70 01	139 607	n	50 28	1 ¹ 5 ²
6	115 31	101 17	15	9	29 11 99	166 744 151	n	1 2	40 10	910 895	n	25 65	1 ¹ 2 ²
9	131 05	101 101	17 16 51	15 24 51	9 2 9	15 744 151						98 782	28 ¹ 37 ¹
[377]		2 36											

Zug No. I.

Aus Zug No. I $\therefore F = \sqrt{0,11^2 + 0,04^2} = 0,12$ m, $f_1 = \pm 0,11 \times (-0,63) / \sqrt{0,63^2 + 0,04^2} = -0,07$ m, $f_w = -0,11 \times 0,361 + (-0,04) / (-0,63) = -0,10$ m.

Aus Zug No. II $\therefore F = \sqrt{0,04^2 + 0,02^2} = 0,04$ m, $f_1 = (-0,04) / (-0,11) + (-0,02) / (-0,263) = +0,03$ m, $f_w = -(-0,04) / (-0,263) + (-0,02) / (-0,11) = -0,03$ m.

Aus Zug No. III $\therefore F = \sqrt{0,16^2 + 0,15^2} = 0,22$ m, $f_1 = (-0,16) / 0,339 + 0,15 / (-0,86) = -0,19$ m, $f_w = -(-0,16) / (-0,86) + 0,15 \times 0,339 / \sqrt{0,339^2 + 0,86^2} = +0,11$ m.

¹⁾ Anteil der Längsverfehlung. ²⁾ Anteil der Querverfehlung. ³⁾ Differenzanteil proportional der Seitenlänge (Zug II). ⁴⁾ s. S. 615.

Zulässig F_{Max} (Gelandeklasse I) = $0,39 + 0,1 \sqrt{2} = 0,53$ m.

Zulässig F_{Max} (Gelandeklasse II) = $0,43 + 0,1 \sqrt{2} = 0,57$ m.

Zulässig F_{Max} (Gelandeklasse III) = $0,62 + 0,1 \sqrt{3} = 0,79$ m.

Knotenpunkt No. 9.

Ausgleichung des Richtungswinkels φ der gemeinsamen Seite.⁴⁾

Aus Zug No.	N_φ $+ d\varphi$ $281^0 16'$	Anzahl der Brechungs- winkel n_r	Gewicht $p = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}{n_r}$	$p \cdot d\varphi$
I	+ 24"	3	12	+ 288
II	+ 79"	3	12	+ 948
III	+ 139"	4	9	+ 1251
			[] = 33	[] = 2487
				$\frac{[p d \varphi]}{p} = + 75''$

ausgeglichen $\varphi_6 = \underline{281^0 17' 15''}$.

Knotenpunkt No. 9.

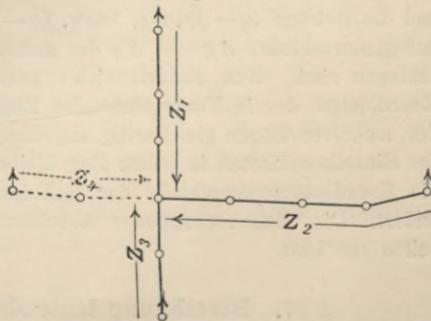
Ausgleichung der Koordinaten.⁴⁾

Aus Zug No.	N_x $+ dx$ cm $+ 35689,00$	N_y $+ dy$ cm $+ 7668,00$	F_{Max}	$p = \frac{1}{F_M^2}$	$p dx$ cm	$p dy$ cm
I	+ 9	- 17	0,53	3,6	+ 32,3	- 61,1
II	+ 24	- 19	0,57	3,1	+ 74,2	- 58,9
III	+ 36	- 36	0,79	1,6	+ 57,5	- 57,5
				[p] = 8,3	+ 164,0	- 177,5
	$\frac{[p dx]}{[p]} = + 0,20$ m	$\frac{[p dy]}{[p]} = - 0,21$ m				

ausgeglichen $x_9 = + 35689,20$ $y_9 = + 7667,79$.

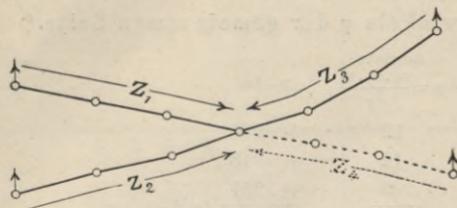
Eine Verknotung der Polygonzüge ist nicht zweckmässig, wenn bei ihr etwaige regelmässige Längenmessfehler einseitig wirken können. (Kleine Winkelfehler sind zufälliger Natur, bald +, bald -, und daher hier weniger gefährlich). So würde z. B. in Fig. 328 a beim Vorhandensein regelmässiger Längenfehler der Zug Z_2 unter allen Umständen auf eine Verschiebung des Knotenpunkts im Sinn oder entgegengesetzt seiner Pfeilrichtung hinwirken, welche (nach dem Parallelogramm der Kräfte) durch den Widerstand der Züge Z_1 und Z_3 gegen die ihnen dadurch angesonnene Querverdrängung nur zum Teil aufgehoben würde. Die Fortsetzung von Z_2 über den Knotenpunkt hinaus (Z_4) würde den Mangel beseitigen.

Fig. 328 a.



Ebenso würden die beiden Züge Z_1 und Z_2 (s. Fig. 328 b) im Fall des Vorhandenseins regelmässiger Längenmessfehler im Sinne

Fig. 328 b.



einer Längsverfehlung zusammen stärker wirken, als der allein nach der entgegengesetzten Seite drängende Zug Z_3 . Der Knotenpunkt würde in oder entgegengesetzt ihrer Pfeilrichtung verschoben, wenn nicht etwa

durch Fortsetzung des Zugs Z_1 über ihn hinaus (Z_4) ein Gegengewicht geschaffen würde.

Die bei einer Verknotung zusammenwirkenden Züge sollen daher entweder gleichmässig über den Horizont verteilt, oder symmetrisch zu einer beliebigen, durch den Knotenpunkt gehenden Achse angeordnet sein.

Es kommt zuweilen vor, dass einzelne Züge eines Hauptnetzes nicht bloss einen Punkt, sondern eine Seite, oder einen Zugsteil gemeinsam haben, oder dass zeitweilig nicht zu vermeidende, parallel verlaufende Züge durch Querszüge die nötige Versteifung gegen Längs- und Querschwankungen erhalten müssen.

Die Ausgleichung erfolgt dann analog der soeben vorgeführten, unter Beachtung, dass den mehrfach auftretenden identischen Zugsteilen in allen beteiligten Zügen gleiche Winkel- und gleiche Koordinatenverbesserungen zukommen müssen.

Um dies zu erreichen, berechnen wir zuerst die Richtungswinkel der in mehreren Zügen gemeinschaftlich auftretenden Polygonseiten aus den dafür tauglichen Zügen mittels $\varphi_{r+1} = \varphi_0 + [\beta]_0^r \pm (r+1) \varrho R$. Aus den voneinander abweichenden Werten wählen wir sodann, wie im vorigen Beispiel gezeigt, je ein Mittel, von dem aus rückwärts wir die an den Brechungswinkeln der einzelnen Zugsteile anzubringenden Verbesserungsbeträge feststellen. Damit ist für übereinstimmende Richtung der mehrfach auftretenden Zugsteile gesorgt. Um deren unter sich und mit dem Dreiecksnetz übereinstimmende Ausdehnung zu finden, bestimmen wir jetzt die in den einzelnen beteiligten Zügen auftretenden Längsverfehlungen f_1 , woraus wir die auf die Längeneinheit entfallende regelmässige Längenverbesserung $(q-1)_{\text{Mittel}} = \frac{[f_1]}{[S]}$ und die Beträge $(q-1) \cdot \Delta x$, bezw. $(q-1) \cdot \Delta y$ erhalten, welche den Koordinatenunterschieden Δx und Δy der mehrfach auftretenden Polygonseiten zuzuschlagen sind. Nun handelt sich's noch um übereinstimmende Lage (d. h. Koordinaten) der in Frage stehenden Zugsteile, welche wir durch Verknotung der mehreren Zügen gleichzeitig angehörigen Punkte erhalten. Bei Berechnung der Einzelkoordinaten in jedem Zug bleiben diejenigen dieser Knotenpunkte und die Koordinatenunterschiede der mehrfach auftretenden Polygonseiten unverändert. Die noch vorhandenen Abschlussdifferenzen fallen den übrigen Zugseiten zur Last.

§ 87. Berechnung fehlender Stücke in Vielecken.

Wir haben die Bedingungsgleichungen (3a) bis (5a) des § 81 bisher als summarische Probe gegen grobe Fehler und zur Ausgleichung

der unvermeidlichen Fehler in den gemessenen Strecken und Winkeln benützt. Wir können daraus aber auch etwa nicht gemessene, oder nicht direkt messbare Polygonseiten und Brechungswinkel berechnen.

Aus der Tatsache, dass zur Bestimmung eines n Ecks $2n - 3$ unabhängige Stücke bekannt sein müssen, von den n Winkeln aber nur $(n - 1)$ unabhängig sind, wie auch aus der Form der Bedingungsgleichungen, von denen nur (4a) und (5a) sich gleichzeitig mit Strecken und Winkeln beschäftigen, geht hervor, dass wir aus einem geschlossenen Vieleck, oder einem beiderseits an Festpunkten normal angeschlossenen Zug berechnen können:

- entweder 1) 3 fehlende Winkel, oder
 2) 2 „ „ und 1 fehlende Seite, oder
 3) 1 fehlenden Winkel und 2 fehlende Seiten, keinesfalls aber 3 fehlende Seiten.

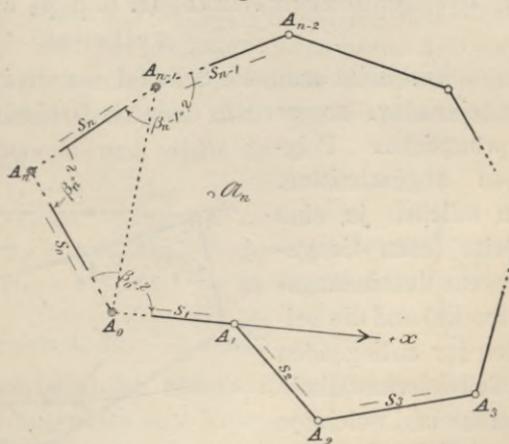
Fall 1: Rechnerische Bestimmung 3er Brechungswinkel.

a) Die gesuchten Winkel folgen aufeinander ($\beta_0, \beta_{n-1}, \beta_n$ in Fig. 329).

Wählen wir für einen der beiden äusseren der nicht als Standpunkt benützten Brechungspunkte (z. B. A_0 in Fig. 329) beliebige

Koordinaten (z. B. 0, womit A_0 zum Ursprung des Koordinatensystems wird) und für die von ihm ausgehende beobachtete Seite $A_0 A_1$ einen beliebigen Richtungswinkel (z. B. 0, also $A_0 A_1$ als Abszissenachse), so sind wir imstande, nach Art eines Schnitzzugs die Koordinaten der Punkte A_1, A_2, \dots, A_{n-1} in bezug auf das gewählte System zu berechnen. Aus letz-

Fig. 329.



teren gewinnen wir die Strecke $A_0 A_{n-1}$ samt ihrem Richtungswinkel auf die gewohnte Weise:

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} x_{A_0 A_{n-1}} &= \frac{y_{n-1} - y_0}{x_{n-1} - x_0} = \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} \\ A_0 A_{n-1} &= \frac{Z}{\sin} = \frac{N}{\cos} = \frac{y_{n-1}}{\sin x_{A_0 A_{n-1}}} = \frac{x_{n-1}}{\cos x_{A_0 A_{n-1}}} \end{aligned} \right.$$

Jetzt sind im Dreieck $A_0 A_{n-1} A_n$ alle drei Seiten bekannt, aus welchen wir die Dreieckswinkel

$$\begin{aligned} \left(\text{etwa nach der Formel } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \right. \\ &= \frac{1}{s-a} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \frac{e}{s-a}, \text{ wobei } s = \frac{\text{Umfang}}{2} \end{aligned}$$

berechnen können. Der der Strecke $A_0 A_{n-1}$ gegenüber liegende Dreiecks- ist der gesuchte Vieleckswinkel β_n direkt, oder sein Implement. Die beiden anderen sind zum Unterschied der Richtungswinkel $x_{A_0 A_1} - x_{A_0 A_{n-1}}$, bzw. $x_{A_{n-1} A_0} - x_{A_{n-1} A_{n-2}}$ in positivem, oder negativem Sinn hinzuzufügen, je nachdem der Vieleckspunkt A_n ausserhalb, oder innerhalb (\mathcal{Q}_n) der Figur liegt.

Bei der Messung der Strecken s_n und s_0 wäre daher, um Zweideutigkeiten zu vermeiden, zum mindesten noch zu erheben, ob der Winkel $\beta_n \lesssim 2R$.

Wegen der Ungenauigkeiten in den gemessenen Strecken s_0 und s_n , namentlich aber in der indirekt gewonnenen Verbindungsstrecke $A_0 A_{n-1}$ sind die hieraus berechneten Winkelgrössen praktisch nur für ganz untergeordnete Zwecke, und auch dafür um so weniger brauchbar, je näher der Winkel β_n dem Wert $2R$ kommt. Für $\beta_n \sim 2R$ ist die Aufgabe unbestimmt.

b) Die gesuchten Winkel (z. B. β_0, β_3 und β_6 in Fig. 330) liegen getrennt.

Verbindet man die Scheitel der drei nicht gemessenen Winkel miteinander, so werden dadurch Dreiecke oder Vielecke vom ursprünglichen Polygon abgeschnitten,

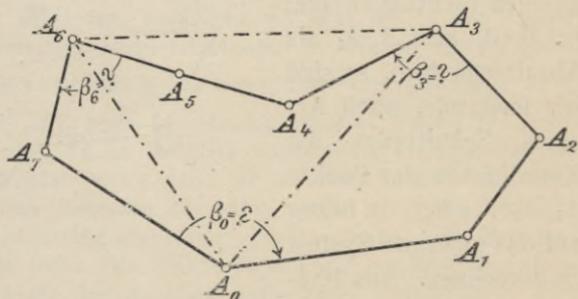
in welchen je eine Seite (eben die gezogene Verbindungsstrecke) und die beiden ihr anliegenden

Teilvieleckswinkel fehlen und welche je nach Fall 2 S. 619 zu berechnensind. Sind

dann auch noch die drei Winkel des Kerndreiecks aus den drei berechneten Verbindungsstrecken abgeleitet, so ergeben sich die gesuchten Vieleckswinkel je durch passende Zusammensetzung ihrer drei Teile.

Der letztere Aufgabenfall ist praktisch bedeutungslos.

Fig. 330.

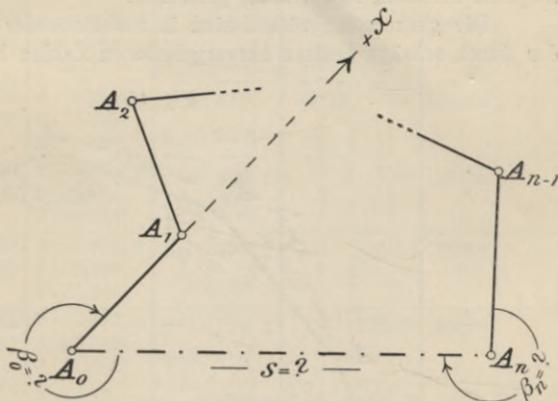


Fall 2: Rechnerische Bestimmung zweier Brechungswinkel und einer Seite eines Polygons.

a) Die fehlenden Winkel liegen der gesuchten Seite an.
(Siehe β_0 , β_n und s in Fig. 331a.)

Diese Aufgabe tritt in der Vermessungspraxis nicht selten (z. B. beim Durchhieb gerader Schlag-, Abteilungs- oder Eigentums-grenzen als Verbindungslinie gegebener Endpunkte in Wäldern, bei der Absteckung von Tunneln, bei der rechnerischen Ausschaltung ausbauender Teile von Polygonzügen, bei der Verbindung zweier Tangentenpunkte zum Zweck der Berechnung von Absteckungselementen für berührende Kreisbögen etc.) auf.

Fig. 331 a.



Man wählt einen Endpunkt (etwa A_0) der fehlenden Strecke als Ursprung und die von ihm ausgehende gemessene Polygonseite als x Achse eines Koordinatensystems. Auf letztere projiziert man nach Art der Schnitzzugsberechnung, über diejenigen Brechpunkte fortschreitend, in welchen die Polygonwinkel gemessen sind, den anderen Endpunkt A_n der fehlenden Strecke und erhält daraus:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} x A_0 A_n &= \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = \frac{y_n}{x_n} \\ \beta_n = A_{n-1} A_n A_0 &= x A_n A_0 - x A_n A_{n-1} = \varphi_0 - \varphi_{n-1} \pm 2R \\ \beta_0 = A_n A_0 A_1 &= x A_0 A_1 - x A_0 A_n = \varphi_1 - \varphi_0 \pm 2R \\ A_0 A_n &= \frac{y_n}{\sin x A_0 A_n} = \frac{x_n}{\cos x A_0 A_n} \end{aligned} \right\} (1)$$

Zur Ausrechnung der fehlenden Stücke nach Gleichungen (1) braucht man nicht notwendigerweise eine Nebenrechnung. Vielmehr lässt sie sich im gewohnten Formular selbst, wie folgt, ausführen:

Nach Eintrag der gemessenen Strecken und Brechungswinkel und des angenommenen Richtungswinkels $x A_0 A_1 (= 0)$ werden die Richtungswinkel (zur Additionsprobe der letzte $\varphi_n = \varphi_0 + [\beta]_1^{n-1} \pm (n-1) 2R$ zuerst) und die Koordinatenunterschiede bis einschliesslich der vorletzten Seite, wie gewohnt, abgeleitet. Die zur letzten, gesuchten Vielecksseite gehörigen Abszissen- und Ordinaten-

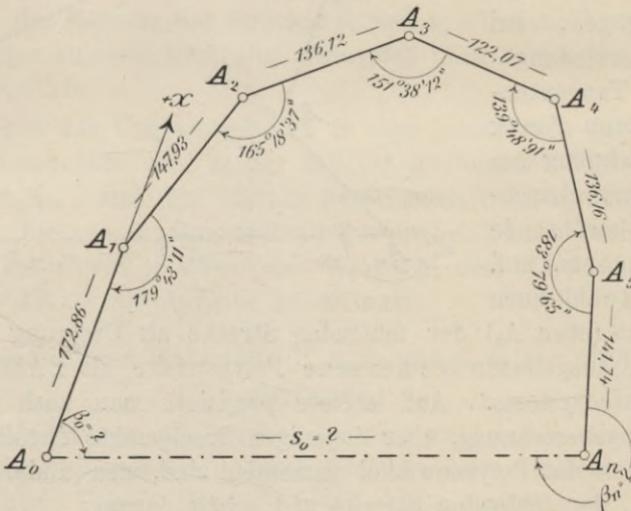
unterschiede ergänzen nach dem Satz vom geschlossenen Vieleck (s. S. 569) je die übrigen zu 0, werden daher je durch ergänzende Addition zu 0 gewonnen. Sie dienen zur Berechnung der Streckenlänge $A_n A_0$ und ihres Richtungswinkels, aus welchem letzterem die gesuchten Vieleckswinkel durch ergänzende Addition gefunden werden.

Beispiel.

Zur Berechnung der Strecke $A_0 A_n$ und zur Absteckung ihrer nicht direkt zielbaren Richtung (Durchrieb im Wald etc.) wurden die in Fig. 331 b eingezeichneten Strecken und Winkel gemessen:

Die gesuchten Grössen sind in nachstehender Tafel S. 621 oben mittels der durch schräge Lettern hervorgehobenen Zahlen berechnet.

Fig. 331 b.



Für wichtige Arbeiten wird man die beiden gegebenen Endpunkte der gesuchten Strecke noch durch einen zweiten Zug verbinden, aus dem sie und die Winkel β_0 und β_n sich wiederholt und unabhängig ergeben.

Die Annahme b) getrennter Lage der fehlenden Stücke ist praktisch bedeutungslos und daher hier zu übergehen.

Fall 3: Rechnerische Bestimmung eines Brechungswinkels und zweier Vielecksseiten.

a) Die fehlenden Seiten schliessen den fehlenden Winkel ein. (Siehe s_0, s_n und β_n in Fig. 332.)

Diese Aufgabe tritt beim „Herunterbringen unzugänglicher Festpunkte“ (s. §§ 84 und 85), sowie bei der Berechnung der Elemente zur Absteckung von Kreisbögen, deren Tangentenschnitt unzugänglich ist, häufig auf.

Ausrechnung zu Beispiel S. 620.

1. Punkt No.	2. Gemessene Seite s	3. Richtungswinkel φ Brechungswinkel β Verbesserung v			4. $\log \cos \varphi$ $\log s$ $\log \sin \varphi$			5. $\log (s \cos \varphi)$ $\log (s \sin \varphi)$			6. 7. Koordinatenunterschiede							
		0	'	"						$\Delta x = s \cos \varphi$		$\Delta y = s \sin \varphi$						
		+	-	+	-													
A ₀																		
A ₁	172 86	220	56	89	(angenommen)						172	86						
A ₂	147 93	234	56	89	9 97 692	2 14 698	2 17 006	1 67 181	140	27			46	97				
A ₃	136 12	248	55	88	9 80 945	1 94 337	2 13 392	2 01 720	87	77			104	04				
A ₄	122 07	260	104	00	8 79 833	n 0 88 494	2 08 661	2 08 575			7	67	121	83				
A ₅	136 16	216	164	51	9 92 872	n 2 06 277	2 13 405	1 85 749			115	55	72	03				
A _n	141 74	296	180	71	9 97 977	n 2 13 126	2 15 149	1 62 610			135	29	42	28				
A ₀	412 51	322	277	56	9 53 805	n 2 15 348	2 61 543	n 2 58 788			142	39			387	15		
A ₁		00	00	00	$\log tg =$			0 43 440			400	90	400	90	387	15	387	15
											0				0			

Wir wählen eine der fehlenden Seiten (in Fig. 332 z. B. A₀ A_n) als x Achse und denjenigen ihrer Endpunkte (hier A₀), in welchem der Vieleckswinkel gemessen ist, als Ursprung eines Koordinatensystems. Nach Gleichung (3) des § 81 finden wir dann, über die Brechungspunkte, in denen die Winkel gemessen sind, der Reihe nach fortschreitend, die Richtungswinkel sämtlicher Vielecksseiten mit Additionsprobe und aus ihnen den fehlenden Vieleckswinkel:

$$\beta_n \equiv A_{n-1} A_n A_0 = x A_n A_0 - x A_n A_{n-1} = \varphi_0 - \varphi_n \pm 2R. \quad (2)$$

Unter Benützung der Richtungswinkel φ berechnen wir jetzt die Koordinatenunterschiede zu sämtlichen gemessenen Vielecksseiten:

$$\Delta x = s \cdot \cos \varphi, \quad \Delta y = s \cdot \sin \varphi.$$

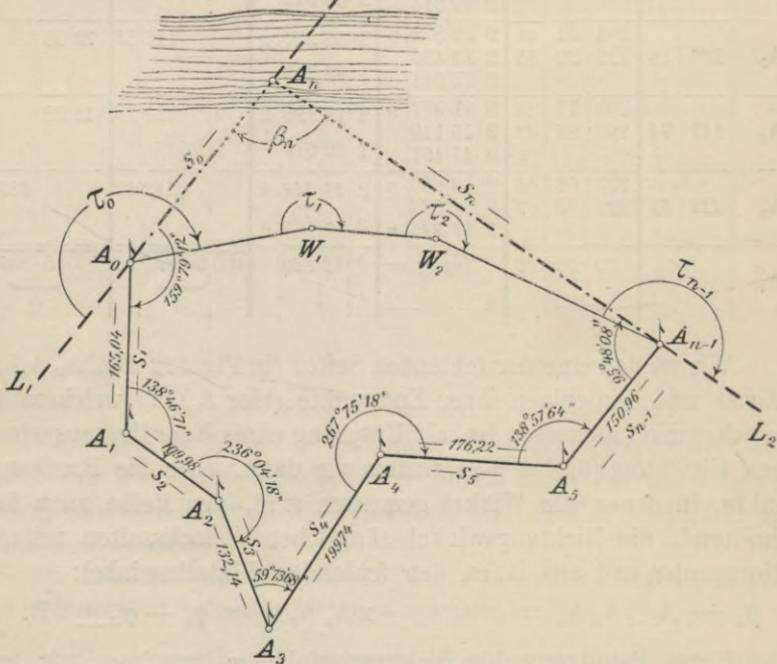
Von den beiden nicht gemessenen Seiten s_n und s_0 hat nun die eine, mit der x Achse zusammenfallende, (hier s_0) den Ordinatenunterschied 0, folglich muss der zur anderen gehörige Ordinatenunterschied y_n die sämtlichen übrigen zu 0 ergänzen (Satz vom geschlossenen Vieleck, s. § 81). Er kann daher rückwärts berechnet

werden. Da der zugehörige Richtungswinkel φ_n bekannt, und von ihm $\log \cos$ und $\log \sin$ bereits aufgeschlagen ist, so ergibt sich weiter rückwärts aus $\log \Delta y_n$ der \log der Vielecksseite s_n , sowie die letztere selbst. Wieder vorwärts schreitend finden wir jetzt $\Delta x_n = s_n \cos \varphi_n$. Nun fehlt nur noch die zur Seite s_0 gehörige Abszissendifferenz, welche gleich der Seite selbst ist und wieder die Summe sämtlicher Abszissendifferenzen einschliesslich x_n zu 0 ergänzt.

Beispiel.

Zur Bestimmung der beiden Strecken s_0 und s_n und des von ihnen eingeschlossenen Winkels wurden die in Fig. 332 eingetragenen Strecken und Winkel gemessen. Die Berechnung erfolgt in nachstehender Tafel mittels der durch schräge bzw. aufrechte breite Ziffern hervorgehobenen Zahlen.

Fig. 332.



Genauigkeitsuntersuchung.

Der gesuchte Winkel β_n ergibt sich um so schärfer, je weniger Brechungswinkel zu seiner Bildung verwendet werden mussten. Handelt es sich daher um dessen möglichst genaue Bestimmung, z. B. für Kreisbogenabsteckung im Fall der Unzugänglichkeit des Schnitts A_n der beiden Kreistangenten L_1 und L_2 , so kann man hiefür ein von dem zur Streckenbestimmung dienenden getrenntes Vieleck $A_0 W_1 \dots A_{n-1}$ mit möglichst wenig Bruchpunkten W , und den Bre-

Ausrechnung zu Beispiel S. 622.

1. Punkt No.	2. Ge- messene Seite s	3. Richtungs- winkel φ Brechungs- winkel β			4. $\log \cos \varphi$ $\log s$ $\log \sin \varphi$			5. $\log (s \cos \varphi)$ $\log (s \sin \varphi)$			6. 7. Koordinatenunterschiede							
		0	'	"						$\Delta x = s \cos \varphi$			$\Delta y = s \sin \varphi$					
		+	-	-						+	-	+	-	+	-			
A_n																		
A_0		200 159	00 79	00 12	(angenommen)													
A_1	165 04	159 138	79 46	12 71	9 90 2 21 9 77	692 759 117	n	2 12 1 98	451 876	n		133 20		97 45				
A_2	109 98	98 236	25 04	83 18	8 43 2 04 9 99	703 131 984		0 47 2 04	834 115		3 01			109 94				
A_3	132 14	134 59	30 73	01 68	9 71 2 12 9 93	020 103 020	n	1 83 2 05	123 469	n		67 80		113 42				
A_4	199 74	394 267	03 75	69 18	9 99 2 30 8 97	809 047 096		2 29 1 27	856 143		198 87						18 68	
A_5	176 22	61 138	78 57	87 64	8 75 2 24 9 91	192 606 656		1 99 2 16	798 262		99 54			145 42				
A_{n-1}	150 96	00 95	36 48	51 08	9 99 2 17 7 75	999 886 853		2 17 9 93	885 739		150 96			0 87				
A_n	449 38	295 104	84 15	59 41	8 81 2 65 9 99	429 261 908	n	1 46 2 65	690 169	n		29 30				448 42		
A_0	222 08	200	00	00	(s. oben)							222 08		0 0		0 0		
												452 38	452 38	467 10	467 10			
												0		0				

chungswinkel τ verwenden, dessen Seiten nicht gemessen zu werden brauchen. Man erhält dann:

$$\beta_n \equiv A_{n-1} A_n A_0 = x A_n A_0 - x A_n A_{n-1} = x A_0 A_n - x A_{n-1} A_n = -([\tau] \pm n \cdot 2R) \quad (3)$$

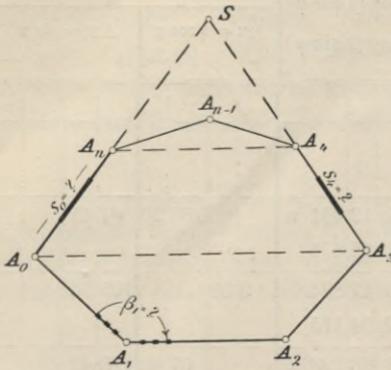
Die gesuchten Strecken erhalten wir, wie auch geometrisch klar, um so schärfer, je näher ihr Schnittwinkel β_n einem Rechten kommt. Für $\beta_n \sim 2R$ wird die Aufgabe unbestimmt. Denn es ist:

$$s_n = - \frac{[s \sin \varphi]_1^{n-1}}{\sin \varphi_n} = + \frac{[s \cdot \sin \varphi]_1^{n-1}}{\sin (\varphi_n \pm 2R)} = \frac{[s \sin \varphi]_1^{n-1}}{\sin \beta_n}$$

Für $\beta_n \sim \frac{0}{2}R$ wird $\sin \beta_n$ sehr klein und ändert sich mit änderndem Winkel rasch. Jeder in β_n und im Zähler liegende Fehler wird daher stark vergrößert. Für $\beta_n = \frac{0}{2}R$ wird $\sin \beta = 0$, also $s_n = \frac{0}{0}$.

Liegen b) die fehlenden Stücke getrennt (fehlen z. B. in Fig. 333 die Strecken s_0 , s_4 und der Winkel β_1), was allerdings

Fig. 333.



praktisch kaum vorkommt, so wird der fehlende Winkel wie bisher ergänzt. Alsdann rechnen wir (aus dem Vieleck $A_0 A_1 A_2 A_3$) die Verbindungsstrecke ($A_0 A_3$) der beiden Anfangspunkte der gesuchten Seiten samt den von ihr und der jeweils anliegenden gemessenen Vielecksseiten eingeschlossenen Winkeln nach Fall 2. Mittels des sinus Satzes erhalten wir jetzt im Dreieck $A_0 S A_3$ die Strecken $A_0 S$ und $A_3 S$.

Auf die gleiche Weise erhalten wir die Verbindungsstrecke ($A_n A_4$) der Endpunkte der gesuchten Seiten samt den ihr anliegenden Winkeln des von ihr abgeschnittenen Vielecks und daraus im Dreieck $A_n S A_4$ die Strecken $A_n S$ und $A_4 S$.

Zum Schluss ergeben sich die beiden fehlenden Vielecksseiten als Unterschied je zweier derart ermittelter Dreiecksseiten $A_0 S$ und $A_n S$, bzw. $A_3 S$ und $A_4 S$. Vorstehende Lösung zeigt übereinstimmend mit der Form a, dass die Genauigkeit der berechneten Strecken von ihrem Schnittwinkel bei S abhängt. Ist dieser $= 0$ (s_0 parallel s_4), so kann man den Zugsteil $A_4 A_{n-1} A_n$ nach Belieben parallel mit sich selbst verschieben; s_0 und s_4 sind unbestimmt.

§ 88. Aufsuchen grober Messungsfehler.

Eine dritte Verwendungsmöglichkeit der Bedingungsgleichungen (3a) bis (5a) des § 81 bildet das Aufsuchen etwaiger, bei der Messung der Vielecksseiten und Brechungswinkel vorgekommener grober Fehler. Wenn es aber in § 87 möglich war, drei ihrer Lage nach bekannte fehlende Stücke in einem geschlossenen Polygon (oder einem normal an- und abgeschlossenen Polygonzug) zu berechnen, so gelingt es jetzt nur, die Grösse und Lage eines einzigen groben Messungsfehlers zu ermitteln.

Und sogar diese reduzierte Möglichkeit müssen wir noch weiter einschränken, weil die Gesamtwirkung zweier, oder mehrerer grober Fehler möglicherweise gleich kommt der, und daher irrtümlich aufgefasst werden kann als die Wirkung eines einzigen groben Fehlers von anderem Betrag und an anderer Stelle.

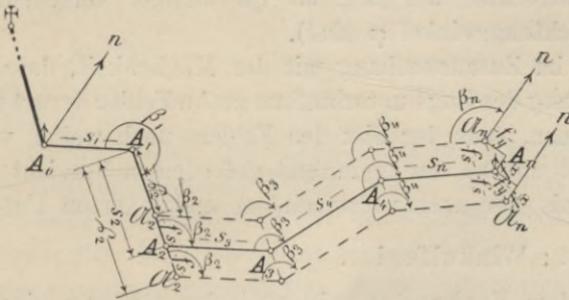
Die rechnerische Fehleraufsuchung dient daher hauptsächlich nur dem Zweck vorausgehender Feststellung der auf dem

Gelände nachzumessenden Strecken und Winkel, oder ausnahmsweise der vorübergehenden Befriedigung eines augenblicklichen Bedürfnisses, wenn die Nachmessung zeitlich verschoben werden muss und das Risiko einer etwaigen späteren Annullierung der auf die rechnerische, sich bei der Nachmessung als irrig erweisende Annahme sich gründenden weiteren Arbeiten in Kauf genommen werden will.

Fall 1: Streckenfehler.

Ein bei der Messung irgend einer Polygonseite (z. B. von s_2 in Fig. 334) unterlaufener grober Fehler f_s (Zählfehler, Schreibfehler etc.) hat eine Verschiebung des Punktes A_2 nach \mathfrak{A}_2 und sämtlicher

Fig. 334.



folgender Vieleckspunkte $A_3, A_4 \dots$ parallel zur fehlerhaften Strecke s_2 um den Fehlerbetrag f_s zur Folge. Wären ausserdem keine weiteren Fehler (weder in den Strecken und Winkeln), noch in den gegebenen Koordinaten der Abschlusspunkte vorhanden, so würde daher der Zug statt im Sollpunkt A_n in einem um den Fehlerbetrag

$$f_s = \frac{f_x}{\cos n \mathfrak{A}_n A_n} = \frac{f_y}{\sin n \mathfrak{A}_n A_n} \tag{1a}$$

davon entfernten Punkt \mathfrak{A}_n ($x_n = x_0 + [s \cdot \cos \varphi]$; $y_n = x_0 + [s \cdot \sin \varphi]$) abschliessen. Der Richtungswinkel

$$n \mathfrak{A}_n A_n = \arctg \frac{y_n - y_n}{x_n - x_n} = \arctg \frac{f_y}{f_x} \tag{1b}$$

der Verbindungsstrecke $\mathfrak{A}_n A_n$ würde, da diese parallel der fehlerhaften Vielecksseite verläuft, mit demjenigen der letzteren übereinstimmen, oder um $2R$ von ihm abweichen müssen. Um den Sitz des Fehlers zu finden, hätte man also unter den verschiedenen Richtungswinkeln φ der Polygonseiten s lediglich denjenigen herauszusuchen, welcher mit $n \mathfrak{A}_n A_n$ übereinstimmt, oder um $2R$ davon abweicht.

Um die nach (1a) festgestellte Fehlergrösse f_s wäre alsdann

die zugehörige Seite im ersten Fall zu verlängern, im zweiten zu verkürzen.

Nun wirken aber auf den Richtungswinkel $n \mathcal{A}_n A_n$ und die Strecke $\mathcal{A}_n A_n = f_s$ ausser dem aufzusuchenden groben, auch noch die einteilbaren kleinen Messungsfehler ein, deren Ausgleichung im normalen Zug Aufgabe des § 83 war. Aus diesem Grund wird weder die Entfernung $\mathcal{A}_n A_n$ genau die (aus andern Überlegungen — Stangenverzählung, Stellenverwechslung etc. — mit zu erschliessende) Fehlergrösse f_s , noch ihr Richtungswinkel $n \mathcal{A}_n A_n$ genau den Richtungswinkel φ der fehlerhaften Seite wiedergeben. Die übrigen, unvermeidlichen Fehler werden vielmehr den Richtungswinkel, d. h. die Lage der fehlerhaften Seite um so unsicherer anzeigen, je kleiner der grobe Fehler f_s im Verhältnis zu den einteilbaren Widersprüchen und je gestreckter der Zug ist (je weniger verschieden dessen einzelne Richtungswinkel φ sind).

Dies, im Zusammenhang mit der Möglichkeit, dass mehrere in der Messung des Zugs unterlaufene grobe Fehler derart zusammenwirken können, dass der Sitz des Fehlers noch weiter verschleiert wird, zwingt uns zu der einleitend geforderten Vorsicht gegenüber dem Ergebnis der nach vorstehendem ausgeführten Untersuchung.

Fall 2: Winkelfehler.

Von dem Vorhandensein und der Grösse eines Winkelfehlers f_β erhält man durch Bedingungsgleichung (3a) des § 81 schon beim Beginn der Rechnung Kenntnis. Es erübrigt nur, den Brechungspunkt festzustellen, in welchem der Fehler begangen wurde. Handelt es sich bei letzterem um einen runden Betrag (Schreib- oder Ablesefehler), was zumeist aus dem Widerspruch gegen Gleichung (3a) leicht zu erschliessen ist, so kann man unbeschadet der späteren endgültigen Verbesserung auch des mit dem groben Fehler behafteten Brechungswinkels zunächst den einteilbaren Fehlerteil durch Umlegung auf sämtliche Winkel wegschaffen.

Die damit nach Gleichung (3) des § 81 abgeleiteten Richtungswinkel sind dann endgültige von φ_1 ab bis einschliesslich φ_r , wenn der Fehler im Brechungswinkel β_r unterlief, von φ_{r+1} ab dagegen je um den groben Fehlerbetrag f_β unrichtig. Auch die unter Benützung der soeben gewonnenen Richtungswinkel φ berechneten Koordinaten der Punkte A_1 bis A_r sind daher von dem groben Winkelfehler nicht beeinflusst. Der ganze fernere Zugsteil von A_r bis zum Endpunkt A_n dagegen ist (vergl. die Untersuchung der Querverfehlung in § 83) um den Winkel f_β verschwenkt und liefert einen Abschlusspunkt \mathcal{A}_n , der mit dem Soll-

abschlusspunkt A_n auf einem Kreisbogen um A_r und von A_n um die Strecke

$$F = f_w = \frac{f_\beta}{e} S_r \quad (2)$$

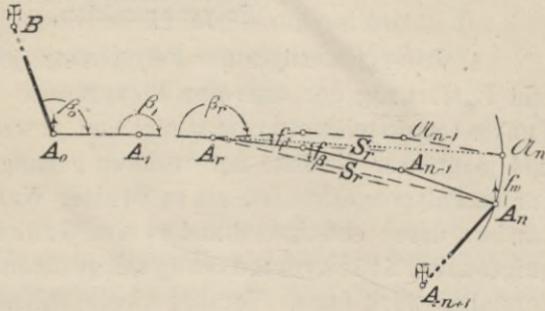
entfernt liegt.

Berechnet man daher wieder aus f_x und f_y nach (1a) den linearen Abschlussfehler und aus ihm mittels

$$S_r = F \cdot \frac{e}{f_\beta} \quad (2a)$$

die Strecke vom Abschluss- bis zu demjenigen Bruchpunkt A_r , in welchem der Fehler unterlief, so lässt sich der letztere — etwa durch Abtragen von S_r auf einem Übersichtsplan — finden.

Fig. 335.



Sind f_β und daher f_w nur klein, so können die nebenher laufenden einteilbaren Messungsungenauigkeiten die Abschlussdifferenz F und damit die Strecke S derart ungünstig beeinflussen, dass der Ort des Fehlers durch letztere nur unsicher erkennbar ist.

Für einen groben Fehler $f_\beta = 1^\circ$ bewirkt z. B. die von unvermeidlichen Fehlern stammende normale Abschlussdifferenz von 5 dm schon eine Veränderung der Strecke S um

$$dS = \frac{e}{f_\beta} \cdot dF = \text{ca. } 28,6 \text{ m.} \quad (2b)$$

Bei Vielecksseiten von 50 bis 60 m würde unter diesen Umständen also die durch unvermeidliche Ungenauigkeiten verdunkelte Strecke S den mutmasslichen Fehlerort mitten zwischen zwei Bruchpunkte hereintragen. In diesem Fall, oder wenn kein Übersichtsplan vorhanden ist, rechnet man den Zug doppelt, das eine Mal von A_0 , das andere Mal von A_n ausgehend, durch. Die dabei sich ergebenden Doppelwerte für die Koordinaten der Polygonpunkte werden wegen der oben erklärten Verschwenkung um so grössere Abweichungen voneinander zeigen, je weiter der betreffende Punkt von demjenigen entfernt ist, in welchem der Winkelfehler auftrat. Nur die beiden Koordinatenwerte für letzteren selbst werden innerhalb der durch einteilbare Fehler erzeugten Widerspruchsgrenzen miteinander übereinstimmen. Es erübrigt dann nur, aus ihnen analog der Knotenpunktsbestimmung Mittelwerte zu wählen, sodann die gegen letztere auftretenden Widersprüche je auf den vorderen, verwertbaren Teil jedes der beiden Züge auszugleichen und deren hinteren Teil (je von A_r an) zu streichen.

Statt beide Koordinaten (x und y) von vornherein auszurechnen, kann man sich zum Zweck des Fehleraufsuchens auch auf diejenige von ihnen in beiden Zügen beschränken, bei welchen die durch den Winkelfehler erzeugte Querverfehlung am stärksten zum Ausdruck kommt (bei Zügen parallel zur x Achse also auf die Ordinaten, bei Zügen parallel zur y Achse auf die Abszissen).

§ 89. Wiederbestimmung von auf dem Gelände verloren gegangenen Polygonpunkten.

1. Je engmaschiger das Polygonnetz, je geringer also die Zahl und Entfernung der auf eine Polygonseite aufgenommenen festen Punkte (Marksteine etc.), je steiler und je weniger offen das Gelände und je grösser die Zahl der verloren gegangenen, einander benachbarten Polygonpunkte ist, um so weniger Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, deren einstigen Standort auf Grund der aufs Polygonnetz aufgebauten Stückvermessung mit genügender Genauigkeit wiederherstellen zu können. Versagt dieses Hilfsmittel, so kann man

2. bei enger Folge der fehlenden Polygonpunkte und nicht allzu schwierigen Geländebeziehungen versuchen, irgend eine Parallele zu einer der Koordinatenachsen aus den noch vorhandenen Polygonpunkten und ihren Koordinaten auf dem Gelände abzustecken und auf deren Grund mit Messstangen und Kreuzscheibe die Wiederbestimmung der fehlenden nach ihren Koordinatenwerten vorzunehmen. Nur in seltenen Fällen und unter günstigen äusseren Umständen wird sich allerdings die Absteckung einer Parallelen zur Koordinatenachse und die Wiederbestimmung der Polygonpunkte ohne allzu lange Ordinaten ermöglichen lassen. Meist wird es zweckmässiger sein,

3. die Koordinaten der fehlenden Punkte durch Umformung (s. Kap. 13) auf eine bequem absteckbare, in der ungefähren Zugsrichtung verlaufende Gerade (etwa die Verbindungslinie zweier noch vorhandener Polygonpunkte) zu beziehen und durch diese aufs Gelände zu übertragen.

Erlauben Geländeform, Kulturzustand oder grosse Entfernung der fehlenden Punkte die Anwendung dieses Verfahrens nicht, so schlagen wir folgenden Weg der Wiederbestimmung ein:

4. Fehlt nur ein einziger Polygonpunkt und steht ein Theodolit zur Verfügung, so setzen wir von den beiden nächstgelegenen Festpunkten als Scheitel ausgehend, die aus der Urmessung bekannten Winkelwerte und Streckenlängen ab (s. § 44). Messen wir dann noch den Brechungswinkel in der Nachbarschaft des zu bestimmenden Punktes und berechnen aus ihm nach § 44 S. 374 den

Rückungsbetrag e , so erhalten wir im ganzen drei Örter für den Polygonpunkt, die wir auf dem Gelände mitteln.

Fehlen mehrere Polygonpunkte A in ununterbrochener Folge, so bestimmen wir 5. auf irgend welche, z. B. geometrische, Weise deren ungefähre Standorte \mathfrak{A} . Mittels eines über sie geführten, an noch vorhandenen Polygonpunkten A an- und abgeschlossenen Zuges berechnen wir dann nach §§ 81 bis 83 die Koordinaten dieser vorläufigen Punkte \mathfrak{A} und gewinnen schliesslich durch Vergleichung mit den Sollwerten die Absteckungselemente für den Übergang von den vorläufigen zu den endgültigen Punkten:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \text{Winkel } \mathfrak{A}_F \mathfrak{A}_R \mathfrak{A}_R &= n \mathfrak{A}_R \mathfrak{A}_R - n \mathfrak{A}_R \mathfrak{A}_F \\ &= \text{arc tg } \frac{y_{\mathfrak{A}_R} - y_{\mathfrak{A}_F}}{x_{\mathfrak{A}_R} - x_{\mathfrak{A}_F}} - \text{arc tg } \frac{y_{\mathfrak{A}_F} - y_{\mathfrak{A}_R}}{x_{\mathfrak{A}_F} - x_{\mathfrak{A}_R}} \\ \text{Strecke } \mathfrak{A}_R \mathfrak{A}_R &= \frac{y_{\mathfrak{A}_R} - y_{\mathfrak{A}_F}}{\sin n \mathfrak{A}_R \mathfrak{A}_R} = \frac{x_{\mathfrak{A}_R} - x_{\mathfrak{A}_F}}{\cos n \mathfrak{A}_R \mathfrak{A}_R}. \end{aligned} \right.$$

Ist, etwa wegen Mangels an Mark- und anderen benachbarten festen Punkten, die vorgängige ungefähre Absteckung auf geometrischem Wege unmöglich, so kann

6. man die ursprünglichen Polygonseiten und Brechungswinkel und zwar von einem noch vorhandenen Polygonpunkt ausgehend und an einem ebensolchen abschliessend, direkt aufs Gelände übertragen. Die Verteilung der Abschlussdifferenz geschieht dann auf dem Gelände rückwärts, wie in § 83 für die Koordinatenrechnung gezeigt.

§ 90. Fehlerquellen. Fehlerfortpflanzung. Fehlergrenzen.

Die Abschlussdifferenzen bei Polygonisierungen werden durch dreierlei Fehler hervorgerufen, nämlich durch etwaige Unsicherheiten in den Koordinaten, bezw. dem Standort der Anschlusspunkte und durch Ungenauigkeiten in der Strecken-, bezw. Winkelmessung.

Fehlerquellen.

Die ersteren wirken nur als Verschiebungen, d. h. um so weniger schädlich, je mehr wir durch Wahl langer Anschlussseiten Verschwenkungen der angeschlossenen Polygonzüge hintanhaltten. Die regelmässigen Streckenfehler werden bei gestreckten, normal an- und abgeschlossenen Zügen durch Ausgleichung nach § 83 entfernt, die unregelmässigen können durch doppelte, gleichartige Messung und Anwendung feiner Messgeräte und -Methoden, wo nötig (Städtepolygonisierung, Aufnahme wertvollen Geländes!), bis auf \sqrt{s} mm und weiter herabgedrückt werden, wobei s die Streckenlänge in m angibt.

Fehlerfortpflanzung.

Am ungünstigsten, nämlich als Verschwenkung des ganzen auf die fehlerhafte Stelle folgenden Zugsteils, pflanzen sich Winkelfehler fort.

Die mittleren Fehler in den Richtungswinkeln der Vielecksseiten, welche sich durch schrittweise Addition ($\varphi_r = \varphi_{r-1} + \beta_{r-1} \pm 2R$) der in der Hauptsache mit unregelmässigen Fehlern behafteten Brechungswinkel β ergeben, werden daher im Schnittzug mit der Wurzel aus der Anzahl der benützten Brechungswinkel, d. h. parabolisch wachsen:

$$(1) \quad \begin{cases} M\varphi_r = \pm \sqrt{m_{\beta_0}^2 + \dots + m_{\beta_{r-1}}^2} = \pm m_{\beta} \sqrt{r}, \text{ ihr Ge-} \\ \text{wicht umgekehrt proportional zu dieser Zahl} \\ P\varphi_r = \frac{1}{r}. \end{cases}$$

Ist der Zug beiderseitig an Festpunkten je mit beobachteter Abschlussrichtung angeschlossen, so tritt eine Verbesserung der gemessenen Brechungswinkel β je um den konstanten und gleich gerichteten Betrag $v = \frac{\omega}{n+1}$ [s. Gl. (2) S. 577] ein, wenn

$$\omega = \varphi_{n+1} - \{ \varphi_0 + [\beta]_0 \pm (n+1) 2R \}.$$

Aus der Winkelverbesserung v lässt sich der mittlere Winkelfehler m_{β} nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz wie folgt berechnen:

$$\omega = \pm \sqrt{m_{\beta_0}^2 + \dots + m_{\beta_n}^2} = \pm \sqrt{(n+1) \cdot m_{\beta}^2},$$

also $m_{\beta} = \pm \frac{\omega}{\sqrt{n+1}}$, wenn $n+1$ die Zahl der Brechungswinkel einschliesslich An- und Abschlusswinkel bedeutet. Für Stadtmessungen wird angestrebt, m_{β} zwischen 5" bis 10" a. T. zu halten, für gewöhnliche Feldmessungen sind mittlere Fehler von 30", also Maximalwinkelfehler von 1,5' a. T. noch erträglich.

Mit dem Zuschlag $v = \frac{\omega}{n+1}$ zu jedem der gemessenen Winkelwerte sind nun aber keineswegs deren wahre Werte gewonnen. Denn die Messungsungenauigkeiten, welche die Abschlussdifferenz ω erzeugten, sind in Wirklichkeit zufälliger Natur, bald positiv, bald negativ. Die angebrachte „Verbesserung“ v wird daher in einzelnen Fällen faktisch geradezu einer Verschlechterung gleichkommen, jedenfalls aber an der Eigenschaft der zurückgebliebenen Ungenauigkeiten als zufälligen Fehlern nichts ändern. Nur die Art ihrer Fortpflanzung ist geändert. Jeder Richtungswinkel φ_r einer Polygoneite s_r wird sich nämlich durch diese Differenzeinteilung jetzt gerade so ergeben, wie wenn er von beiden Anschlusspunkten herein nach Art der Verknotung, je unter Zubilligung des reziproken Werts der Zahl verwendeter Brechungswinkel als Gewicht gemittelt worden wäre, so z. B.:

		Gewicht p der Einzelbestimmung	Gewicht P des Endwertes
φ_1 als Mittel aus	$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 + \beta_0 \\ \varphi_{n+1} - \beta_n - \beta_{n-1} - \dots - \beta_1 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{n} \end{array} \right\}$	$1 + \frac{1}{n}$
\vdots			
φ_r " " "	$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 + \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{r-1} \\ \varphi_{n+1} - \beta_n - \beta_{n-1} - \dots - \beta_r \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \\ \frac{1}{n+1-r} \end{array} \right\}$	$\frac{1}{r} + \frac{1}{n+1-r}$
\vdots			
φ_{n-1} " " "	$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 + \beta_0 + \dots + \beta_{n-2} \\ \varphi_{n+1} - \beta_n - \beta_{n-1} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\}$	$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}$
φ_n " " "	$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 + \beta_0 + \dots + \beta_{n-1} \\ \varphi_{n+1} - \beta_n \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n} \\ 1 \end{array} \right\}$	$\frac{1}{n} + 1$

Die Gewichte P, somit auch die mittleren Fehler der Richtungswinkel φ sind für je zwei zu den Abschlusspunkten symmetrisch liegende Polygonseiten einander gleich, erstere nehmen nach innen ab, letztere zu.

Um zu erfahren, welcher Richtungswinkel φ_r das kleinste Gewicht, also den grössten Fehler hat, setzen wir

$$P_r = \frac{1}{r} + \frac{1}{n+1-r} = \text{Min.},$$

welcher Fall eintritt für

$$\frac{dP_r}{dr} \equiv \frac{d\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n+1-r}\right)}{dr} = 0.$$

Wir erhalten daraus

$$r^2 = (n+1)^2 - 2(n+1)r + r^2, \text{ oder } \frac{n+1}{2} = r,$$

d. h. die mittlere Seite jedes Zugs hat das kleinste Richtungswinkelgewicht und den ungenauesten Richtungswinkel.

Der mittlere Fehler m in der Bestimmung eines beliebigen endgültigen Richtungswinkels φ_r ergibt sich aus den zu seiner Bildung verwendeten Verbesserungszuschlägen nach der Formel:

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}, \text{ wobei der Gewichtseinheitsfehler } \mu = \pm \sqrt{\frac{[p \ v \ v]}{n-1}}.$$

Hiebei zeigt die obere dargestellte Ableitung:

Der eine von den beiden, durch schrittweise Addition beobachteter Brechungswinkel erzielten Werte erhielt r Verbesserungsbeträge v, also die Gesamtverbesserung $r \cdot \frac{\omega}{n+1}$ und das Gewicht $\frac{1}{r}$, der andere dagegen (n+1-r) Verbesserungsbeträge \hat{v} , also die Gesamtverbesserung (n+1-r) $\frac{\omega}{n+1}$ und das Gewicht $\frac{1}{n+1-r}$,

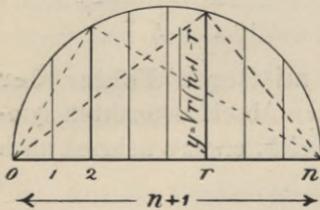
somit ist der mittlere Fehler der Gewichtseinheit

$$\begin{aligned} \mu &= \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{r} \cdot \left(r \cdot \frac{\omega}{n+1}\right)^2 + \frac{1}{n+1-r} \cdot \left\{(n+1-r) \frac{\omega}{n+1}\right\}^2}{2-1}} \\ &= \pm \frac{\omega}{n+1} \sqrt{r+n+1-r} = \pm \frac{\omega}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

und der mittlere Fehler des Mittelwerts φ_r

$$\begin{aligned} \underline{m\varphi_r} &= \pm \frac{\mu}{\sqrt{P_r}} = \pm \frac{\omega}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} + \frac{1}{n+1-r}}} \\ &= \pm \frac{\omega}{n+1} \sqrt{r(n+1-r)}. \end{aligned}$$

Fig. 336.



Der Fehler in den Richtungswinkeln φ_r der Seiten eines beiderseits normal abgeschlossenen Polygonzugs wächst also gegen die Zugsmitte hin proportional den Ordinaten $y = \sqrt{r(n+1-r)}$ eines über der Zahl $n+1$ der Brechungspunkte als linearem Durchmesser gezeichneten Halbkreises. Er ist gleich den Ordinaten einer Halbellipse vom Achsverhältnis $\frac{\omega}{n+1}$ und erreicht für $r = \frac{n+1}{2}$ d. h. in der Zugsmitte seinen Maximalbetrag

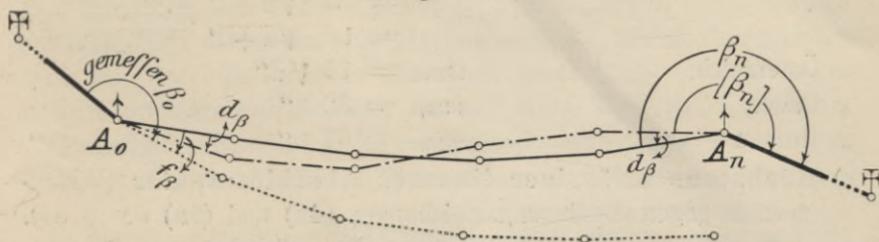
$$\underline{m\varphi_{\text{Max}}} = \frac{\omega}{n+1} \sqrt{\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{2}} = \frac{\omega}{2}.$$

Dieser, trotz Verbesserung nach Gleichung (2) des § 83 noch zurückbleibende Winkelfehler erzeugt namentlich Querausweichungen des Zugs und kommt weiterhin zur Wirkung, wenn Nebenzüge von Hauptzügen abzweigen und der Anschlusswinkel nicht nach einem fernen Festpunkt gemessen wurde.

Zur Beurteilung der linearen Wirkung von Brechungswinkel Fehlern wollen wir (s. Fig. 337) einmal annehmen, der Anschlusswinkel β_0 sei allein um den Betrag f_β zu gross gemessen worden, welcher durch die Differenzeinteilung entsprechend der Winkelsummengleichung an ihm selbst nur zum $(n+1)$ ten Teil, im übrigen aber an den (zuvor fehlerfreien) anderen Brechungswinkeln ausgemerzt wurde. Der Fehler verschwenkt deshalb trotz Ausgleichung die erste und die ihr zunächst folgenden Polygonseiten entsprechend dem strichpunktiert gezeichneten Zug nach rechts (in umgekehrter Richtung, wenn der Fehler negativ ist). Die Differenzeinteilung ihrerseits dagegen verschwenkt den hinteren Zugteil, dessen sämtliche verwendeten

Brechungswinkel zu Unrecht einen Abzug (ihre Implemente also einen Zuschlag) erhalten, in entgegengesetztem Sinn: Sie ändert z. B. den fehlerfreien Abschlusswinkel β_n in $[\beta_n]$. Der Fehler f_β im Anschlusswinkel β_0 hat also eine Doppelschwingung des Zugs in der Quere zur Folge. (In Fig. 337 ist der unausgeglichene,

Fig. 337.



von A_0 ausgehende Zug punktiert, der durch gleichmässige Einteilung des Winkelfehlers f_β auf die Brechungswinkel ausgeglichene Zug strichpunktiert, und der von einem solchen Winkelfehler freie Zug ganz ausgezogen.)

Nehmen wir an, irgend einer der übrigen Brechungswinkel sei zu gross, die anderen aber fehlerfrei gemessen worden, so erzeugt wieder die gleichmässige Verbesserung wegen der Winkelsummengleichung zwar eine kleine Reduktion des tatsächlichen Fehlers um seinen $(n + 1)$ ten Teil. Sie macht aber jeden anderen, vorher fehlerfreien, Brechungswinkel um eben so viel zu klein (sein Implement zu gross), erzeugt also eine einfache Schwingung nach links.

Da nun voraussichtlich kein einziger Winkel völlig fehlerfrei ist, so sind Querschwan­kungen des Zugs um so eher zu befürchten und von um so erheblicherer linearer Wirkung, je länger er ist.

Neben den durch Winkelfehler erzeugten Querschwan­kungen treten auch Längsschwankungen in Polygonzügen auf, als Folge von unregelmässigen oder solchen groben Längenfehlern, welche an, oder innerhalb der Grenze für einteilbare Fehler liegen. Sie sind, da ihnen die verschwenkende Wirkung mangelt, von geringerem Betrag, als die Querschwan­kungen und selbstverständlich um so eher zu vernachlässigen, in je engeren Grenzen sie selbst gehalten werden.

Fehlergrenzen.

Für die bei Polygonisierungen höchstenfalls zulässigen Fehler sind, sofern es sich um Arbeiten handelt, welche öffentliche Glaubwürdigkeit beanspruchen, seitens der staatlichen Vermessungsbehörden Grenzwerte festgesetzt worden. Als:

Fehlergrenzen.

a) Höchstens zulässiger Widerspruch ω_{Max} gegen die Winkelsummengleichung gilt z. B.

in Preussen und Württemberg $\omega_{\text{Max}} = 1,5 \sqrt{n'}$ a. T., wenn n die Anzahl der Brechungswinkel (einschliesslich An- und Abschlusswinkels) bedeutet,

„	Elsass-Lothringen u. Bayern	$\omega_{\text{Max}} = 1,0 \sqrt{n+1}$	je nachdem die Theodolitaufstellung mehr oder weniger sicher, und das Anzielen am Fussende des Stabs möglich ist, oder nicht
		$= 1,25 \sqrt{n+1}$	
		$= 1,5 \sqrt{n+1}$	
„	Österreich	$\omega_{\text{Max}} = 75 \sqrt{n''}$	
„	Baden	$\omega_{\text{Max}} = 32 n''$	
„	Hessen	$\omega_{\text{Max}} = 67 n''$	

b) Höchstens zulässiger linearer Abschlussfehler (Widerspruch gegen Bedingungsgleichungen (4a) und (5a) des § 81).

In einzelnen Staaten ist nur eine Höchstgrenze für den zulässigen linearen Abschlussfehler $F = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ im Ganzen, in anderen dagegen sind solche je für Längs- und Querverfehlung getrennt gegeben. Zu den ersteren gehört:

Preussen, wo: $F_{\text{Max}} = 0,01 \sqrt{4 [s] + 0,0050 [s]^2}$ (Gel.-Kl. I),
 $= 0,01 \sqrt{6 [s] + 0,0075 [s]^2}$ („ „ II)
 $= 0,01 \sqrt{8 [s] + 0,0010 [s]^2}$ („ „ III),

Württemberg, wo: $F_{\text{Max}} = d + 0,1 \sqrt{n-1}$ festgesetzt ist. Hierbei bedeutet [s] die Zugslänge, d den für eine der Zugslänge gleiche Strecke zulässigen Fehler und n die Anzahl der Brechungswinkel (An- und Abschluss mitgerechnet),

und Baden, wo: $f_{x\text{Max}} = \frac{[\Delta x]}{1000}$, $f_{y\text{Max}} = \frac{[\Delta y]}{1000}$.

Zu den letzteren dagegen:

Elsass-Lothringen, wo α) als grösste zulässige Längsverfehlung: $0,004 \sqrt{[s] + 0,00036 [s] + 0,05 \text{ m}}$ (Gel. Kl. I)
 $0,006 \sqrt{[s] + 0,00037 [s] + 0,05 \text{ m}}$ („ „ II)
 $0,008 \sqrt{[s] + 0,00038 [s] + 0,05 \text{ m}}$ („ „ III).

β) als grösste zulässige Querverfehlung:

$0,00020 [s] + 0,05 \text{ m}$ (Gel. Kl. I)
 $0,00025 [s] + 0,05 \text{ m}$ („ „ II)
 $0,00030 [s] + 0,05 \text{ m}$ („ „ III).

Bayern, wo α) als grösste zulässige Längsverfehlung:

$0,006 \sqrt{[s] + 0,00044 [s] + 0,05 \text{ m}}$ (Gel. Kl. I)
 $0,009 \sqrt{[s] + 0,00045 [s] + 0,05 \text{ m}}$ („ „ II)
 $0,012 \sqrt{[s] + 0,00046 [s] + 0,05 \text{ m}}$ („ „ III),

β) die grösste zulässige Querverfehlung dagegen

wie in Elsass-Lothringen,

und Österreich, wo α) als grösste zulässige Längsverfehlung
 $(0,006 [s] + 0,02 \sqrt{[s]}) \pm 20 \%$, je nachdem un-
 günstige oder günstige Verhältnisse vorliegen,

und β) als grösste zulässige Querverfehlung

$$n A_0 A_n - n A_0 \mathcal{M}_n = \frac{f_w}{S} \varrho' = \left(\frac{2[s] + 100}{S} \right)' \text{ festgesetzt ist.}$$

Ausser diesen Fehlergrenzen sind in einzelnen Staaten noch Bestimmungen vorhanden über Maximalzuglänge, höchstens zulässige Zahl von Brechungspunkten innerhalb eines Zugs, grösste bezw. kleinste zulässige Polygonseite, Art und Weise der Fehlerverteilung, höchstensfalls zulässige Länge von Schnittstrahlen usw.

In Württemberg sollen z. B. Züge von über 1000 m Länge verknötet werden, Polygonseiten sollen nicht $\begin{matrix} < 50 \text{ m} \\ > 500 \text{ m} \end{matrix}$ sein, Schnittstrahlen sind nur bis zur Maximallänge von 100 m zulässig, die Anwendung von Schnittzügen ist verboten.

Kapitel XIII.

Koordinatenumformung (Transformation).

§ 91. Formelableitung.

Bei der Wiederbestimmung verloren gegangener Polygon- und Grenzpunkte auf Grund direkt abzusetzender Koordinaten, bei Grenz- ausgleichungen und Flächenteilungen, wie auch bei Fortführungs- vermessungen, wenn die ursprünglich benützte Aufnahmelinie nicht mehr absteckbar ist, oder unzuweckmässige Lage hat, tritt zuweilen die Notwendigkeit ein, die rechtwinkligen Koordinaten aufgenommenener Punkte auf eine veränderte Abszissenachse umzurechnen, zu „trans- formieren“. Zur Ableitung der hiefür dienenden Formeln und zur Durchführung der Rechnung wollen wir grundsätzlich dasjenige rechtwinklige Koordinatensystem, in welchem die Koordinaten von Punkten A, B... gesucht sind, als „Hauptsystem“, dasjenige, in welchem sie gegeben sind, als „Nebensystem“ bezeichnen. Ferner wollen wir zunächst die Koordinaten a und b des Ursprungs O' vom Nebensystem, sowie den Richtungswinkel φ seines posi- tiven x-Achsenzweigs in bezug aufs Hauptsystem als bekannt vor- aussetzen. Den gegebenen Koordinaten x, y, wie den gesuchten X, Y der aufs neue System zu beziehenden Punkte A, B, legen wir, wie gewohnt, die Vorzeichen \pm bei, je nachdem sie in der Richtung der positiven x Achse, oder von ihr nach rechts entgegengesetzt der „ „ „ „ „ „ links verlaufen. Dann liefert

Zweck der Umformung.

Formel- ableitung.

Beispiel.

	Gegebene Koordinaten:		Reduzierte Koordinaten mit $\delta 7$ als neuem Ursprung:	
	x	y	x	y
$\delta 12$	— 19,90	+ 92,42	— 111,58	+ 22,42
$\delta 7$	+ 91,68	+ 70,00	0	0
$\delta 3$	+ 39,54	— 18,05	— 52,14	— 88,05.

Den Verdrehungswinkel φ (Richtungswinkel der Abszissenachse des Neben- in bezug aufs Hauptssystem) erhalten wir aus den in beiden Koordinatensystemen berechneten Richtungswinkeln der Verbindungsstrecke zweier beliebiger, doppelt aufgenommener Punkte, z. B. F_1 und F_2 . Denken wir uns durch einen derselben, z. B. F_1 , Parallelen X und x zu jeder der beiden Aufnahmelinien gezogen, so wird allgemein gültig:

$$(2) \quad \varphi \equiv X F_1 x = X F_1 F_2 - x F_1 F_2 = \begin{array}{c} \text{Hauptrich-} \\ \text{tungswinkel} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Nebenrich-} \\ \text{tungswinkel.} \end{array}$$

Ausgleichung von Widersprüchen.

Gleichzeitig mit dem Richtungswinkel der Verbindungsstrecke $F_1 F_2$ der beiden doppelt aufgenommenen Punkte ergab sich nach § 56 auch für die Streckenlänge $F_1 F_2$ selbst je ein Wert aus jeder der beiden Aufnahmen. Diese beiden zusammengehörigen Werte werden im allgemeinen nicht genau miteinander übereinstimmen. Ob der Widerspruch aber in Ungenauigkeiten der einen, oder der anderen, oder beider Messungen, ob er in ungleicher Länge der verwendeten Massstäbe, oder in Punktveränderungen begründet ist, welche in der zwischen beiden Messungen liegenden Zeit vor sich gingen, ist uns zunächst nicht bekannt. Einen Einblick hierin können wir uns aber verschaffen, wenn mehr als zwei Punkte doppelt aufgenommen sind. An Stelle der einzigen Verbindungsstrecke solcher Punkte treten dann deren mehrere, welche wir ebenso behandeln können, wie vorhin $F_1 F_2$. Wir werden dabei nicht nur ebenso viele Werte für den gesuchten Verdrehungswinkel φ und Wertpaare für die zugehörigen Verbindungsstrecken s , sondern auch die Möglichkeit bekommen, aus einer (etwa immer dann, wenn ein bestimmter der doppelt aufgenommenen Punkte zur Berechnung verwendet wird) sich zeigenden grösseren Differenz zwischen den Werten φ bzw. den Wertpaaren s auf einen Aufnahmefehler, oder eine eingetretene Ortsveränderung (eben dieses Punktes) zu schliessen. Auch werden wir erkennen können, ob die Widersprüche in den Wertpaaren für identische Strecken s , welche sich je aus beiden Aufnahmesystemen ergeben, unregelmässiger Natur, bald positiv, bald negativ, d. h. Folgen von zufälligen Messungs- und Punktungenauigkeiten sind, oder ob sie sich aus der einen Aufnahme

Ausgleichung von Widersprüchen.

immer grösser ergeben, als aus der anderen. In letzterem Fall würde es sich um eine Messstangen-, oder sonstige regelmässige, an allen Strecken der Nebenaufnahme in gleichem Verhältnis q anzubringende Korrektur handeln.

Diese Untersuchung auf alle ($\frac{2}{3}$) möglichen Verbindungsstrecken der n doppelt aufgenommenen Punkte auszudehnen, wäre zu zeitraubend. Ihr wäre die Ausmittelung von a, b, φ und q nach der Methode der kleinsten Quadrate auch hinsichtlich der Bequemlichkeit vorzuziehen. Dies ist aber auch gar nicht nötig. Ob einzelne der doppelt aufgenommenen Punkte grobe Unterschiede zeigen, ersehen wir schon aus wenigen, aus beiden Aufnahmen berechneten Strecken- und Richtungswinkelpaaren. Diese Punkte kommen dann für die Bestimmung von a, b, φ und q nicht weiter in Betracht, gleichgültig, ob die Unterschiede von Aufnahme-, oder von Punktfehlern herrühren. Auch unter den alsdann noch übrig bleibenden Verbindungsstrecken können wir noch Auslese halten. Die bei beiden Aufnahmen der Punktpaare unter allen Umständen wirkenden unvermeidlichen und zufälligen Fehler werden den gesuchten Verdrehungswinkel φ um so stärker beeinflussen, je kürzer deren Verbindungsstrecke s ist: der Fehlereinfluss auf φ wird umgekehrt proportional zur Streckenlänge wachsen. Bei Bildung des Mittelwerts für φ müssen wir daher den Einzelbestimmungen je das Gewicht s^2 beilegen und erhalten damit:

$$(3) \quad \varphi_{\text{Mittel}} = \frac{[s^2 \varphi]}{[s^2]}.$$

Dadurch kommen aber die aus kurzen Strecken s berechneten Verdrehungswinkelwerte φ fast ausser Wirkung und können überhaupt vernachlässigt werden.

Ähnlich ist es mit dem Proportionalitätsfaktor q zur Wegschaffung etwaiger regelmässiger Längenfehler in der Nebenaufnahme. Möge letztere die Streckenwerte \bar{s} , die Hauptaufnahme dagegen die Werte s ergeben, so ist:

$$(4) \quad q = \frac{s}{\bar{s}} \text{ und } \log q = \log s - \log \bar{s} \text{ (wie in § 83).}$$

Auch diese aus jedem der n ermittelten Streckenpaare abgeleiteten Einzelwerte für den regelmässigen Fehler q pro Längeneinheit erscheinen durch die unregelmässigen Punktfehler um so mehr verschleiert, je grösser letztere im Verhältnis zum Gesamtfehler, d. h. je kürzer die Strecken s sind. Wir werden daher auch hier nicht kurzerhand setzen dürfen: $q_{\text{Mittel}} = \frac{[q]}{n}$, sondern werden zum Streckenvergleich wie in § 83, alle je einer und derselben Aufnahme entspringenden Individuen s bezw. \bar{s} von berech-

neten, möglichst langen Streckenpaaren in zwei Gruppen zu zwei Gesamtstrecken $[s]$ bzw. $[\bar{s}]$ aneinanderreihen. Wir erhalten dann unter Ausschaltung eines grossen Teils der zufälligen, sich gegenseitig vielfach aufhebenden Fehler:

$$(5) \quad q_{\text{Mittel}} = \frac{[s]}{[\bar{s}]} \text{ und}$$

$$(5a) \quad q - 1_{\text{Mittel}} = \frac{[s] - [\bar{s}]}{[s] \text{ oder } [\bar{s}]} = \frac{[f_1]}{[s] \text{ oder } [\bar{s}]}$$

Braucht man für die nachherige Weiterverwendung nicht den Wert von q selbst, sondern dessen \log , so ergibt sich dieser, falls zur Berechnung von $q - 1$ mittels Gleichung (5a) der Rechenschieber benützt wurde, als B der Additionslogarithmen zu $(q - 1)$ als A .

Mit Berücksichtigung des regelmässigen Längenfehlers der Nebenaufnahme gehen die Gleichungen (1) des § 91 jetzt über in:

$$(6) \quad \begin{cases} X = a + q x \cos \varphi - q y \sin \varphi \\ Y = b + q x \sin \varphi + q y \cos \varphi. \end{cases}$$

Schliesslich handelt es sich noch um die Gewinnung von Mittelwerten für die Anfangskoordinaten a und b . Jeder nicht mit groben Fehlern behaftete doppelt aufgenommene Punkt $F_1, F_2 \dots$ hat das gleiche Recht, als Ursprung des parallel zu sich selbst zu verschiebenden Systems von Nebenkoordinaten zu dienen und die Zusatzglieder a und b in Gleichungen (6) zu liefern. Die Koordinatenumformung wird aber keineswegs genau identische Werte X und Y für die berechneten Koordinaten im Hauptsystem ergeben, gleichgültig, in welchen der erstgenannten Punkte man den Ursprung des Nebensystems verschiebt. Könnten wir sogar die Nebenaufnahme als völlig fehlerfrei voraussetzen, so würden trotzdem etwaige kleine Ungenauigkeitbeträge in der Messung der Hauptkoordinaten a und b des zufällig gewählten Nebenursprungs sämtliche daraus berechneten Hauptkoordinaten X und Y um eben jene Beträge verändern. Wir würden dies an den Unterschieden dx und dy zwischen den berechneten und den gemessenen Hauptkoordinaten der übrigen doppelt aufgenommenen Punkte bemerken, welche für den gewählten Ursprung den Wert 0 annehmen würden.

Ganz ebenso, nämlich als konstante Änderung sämtlicher Hauptkoordinaten, wirken natürlich auch kleine Ungenauigkeiten in der Messung der Nebenkoordinaten des gewählten Ursprungs. Bequemeren Verständnisses wegen wollen wir deshalb die aus letztgenannten Fehlern entspringenden Abweichungen auf Rechnung kleiner Aufnahmefehler im Hauptsystem setzen (indem wir lediglich substituieren, der Standpunkt der in bezug auf letzteres

aufgenommenen Punkte habe ursprünglich genau der durch die Nebenkoordinaten bestimmten Stelle entsprochen).

Genau dasselbe, nur je mit veränderten Abweichungen dx und dy würde eintreten, wenn wir statt des bisher angenommenen der Reihe nach jeden der doppelt aufgenommenen Punkte als Ursprung des Nebensystems wählen würden. Wir gewinnen daraus folgenden Weg der Ausgleichung der Additionalkonstanten a und b : Man wählt zunächst irgend einen der doppelt aufgenommenen Punkte als vorläufigen Anfangspunkt vom Nebensystem und führt mit seinen gemessenen Hauptkoordinaten a und b die Transformation nach Gleichungen (6) durch. Alsdann bildet man die Abweichungen dx und dy zwischen den durch Messung einer- und durch Rechnung andererseits gewonnenen Koordinatenwerten X und Y der doppelt aufgenommenen Punkte im Hauptsystem und verschiebt schliesslich das letztere parallel mit sich selbst um dx_{Mittel} bzw. dy_{Mittel} so, dass die Summen der Abweichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} [dx] = [X_{\text{gemessen}} - X_{\text{transformiert}}] = 0 \\ [dy] = [Y_{\text{gemessen}} - Y_{\text{transformiert}}] = 0 \end{cases}$$

werden.

Rechenproben.

Würden wir, wie bisher angenommen, die Nebenkoordinaten x und y von einem und demselben Anfangspunkt ausgehend in die Rechnung einführen, und demgemäss die transformierten Koordinatenwerte nach Gleichungen (6) durch Addition der jeweils berechneten Summanden zu dem konstanten Werte a bzw. b ermitteln, so würden etwaige Fehler in jenen Summanden, oder in der Addition unentdeckt bleiben. Es hindert uns aber gar nichts, die Berechnung staffelweise in der Art durchzuführen, dass die Hauptkoordinaten X und Y irgend eines Punktes von dem Augenblick ihrer rechnerischen Gewinnung an für die Transformation des nächsten sofort die Rolle von a und b spielen. Fährt man so von einem Punkt zum anderen fort, indem man den Ursprung des Nebensystems je nur für den folgenden von ihnen in den soeben transformierten Punkt verschiebt und schliesst endlich an dem Ausgangspunkt wieder ab, so müssen als Rechenprobe dessen Hauptkoordinaten a und b , von denen man ausging, unverändert wieder erscheinen und man hat überdies kleinere Zahlenwerte für die logarithmische Berechnung. Die Reihenfolge der Punkte ist dabei ganz beliebig.

Zur Additionsprobe und vorgängigen Wegschaffung kleiner Abrundungsdifferenzen wird man bei Beschreitung des soeben gewiesenen Wegs vor Bildung der Einzelkoordinaten die Summe sämtlicher berechneter Koordinatenunterschiede bilden, welche bei identischem An- und Abschlusspunkt gleich 0 sein muss. Eine

erhebliche Vereinfachung der Rechnung ergibt sich hiebei, wie hernach bei Bildung der Einzelkoordinaten, durch Benützung dekadischer Ergänzungen für negative Summanden.

Auch für die Bildung der durch Verschiebung des Ursprungs reduzierten Nebenkoordinaten $x_{\text{red.}}$ und $y_{\text{red.}}$ erhalten wir auf diese Weise eine summarische Probe. Umfasst die Transformation z. B. die Punkte $F_1, A, B, F_2, C, F_3, D$, wobei F_1, F_2 und F_3 die doppelt aufgenommenen Punkte sein mögen, so wird der Reihe nach:

$$X_A \text{ reduziert auf } F_1 \text{ als Ursprung} = X_A - X_{F_1},$$

$$X_B \text{ reduziert auf A als Ursprung} = X_B - X_A,$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$X_D \text{ reduziert auf } F_3 \text{ als Ursprung} = X_D - X_{F_3},$$

$$X_{F_1} \text{ reduziert auf D als Ursprung} = X_{F_1} - X_D$$

schliesslich

und

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} [x_{\text{reduziert}}] = 0 \\ \text{ebenso } [y_{\text{reduziert}}] = 0. \end{array} \right.$$

Beispiel.

Gegeben sind die Koordinaten der Punkte:

	X	Y
♁ 7	+ 22606,29	+ 6401,88
♁ 10	+ 22514,73	+ 6236,80
♁ 11	+ 22514,64	+ 6401,77
♁ 12	+ 22494,72	+ 6424,22
♁ 13	+ 22457,95	+ 6242,13
♁ 14	+ 22618,98	+ 6244,18
♁ 15	+ 22630,10	+ 6376,66.

Gemessen in bezug auf eine beliebige andere Achse sind die Koordinaten von:

	x	y
Rohrerweg	0	0
♁ 3	+ 91,68	0
♁ 7	+ 91,68	+ 70,00
♁ 10	0	- 95,00
♁ 11	0	+ 70,00
♁ 12	- 19,90	+ 92,42
♁ 13	- 56,73	- 89,55
♁ 14	+ 104,22	- 87,74
♁ 15	+ 115,32	+ 44,69.

Gesucht die Koordinaten der Punkte 3 und Rohrerweg in bezug auf das zuerst eingeführte System und der mittlere lineare Fehler beider Aufnahmen.

Berechnung hiezu s. S. 642/643.

Berechnung von φ und s .

A. Hauptsystem				Bestimmung von φ				B. Nebensystem			
Punkt No.	X	Y	log	φ_H - φ_N = φ 0' " "	p = $(s \sin \varphi)^2$ + -	$\frac{p \, d \, \varphi}{d \, \varphi}$ (wobei $d \, \varphi = \varphi - \varphi$) + -	Punkt No.	x	y	log	
A 12 B 14	+22494,72 +22618,98	+6424,22 +6244,18	$E \frac{\Delta Y}{\cos \varphi}$ ΔX	2 25537 n 0 08460 n			\mathfrak{A} 12 \mathfrak{B} 14	-19,90 +104,22	+92,42 -87,74	$E \frac{\Delta y}{\cos \varphi}$ Δx	2 25565 n 0 08434 n
$\Delta X \Delta Y$ φ_H s	+ 124,26 304° 36' 44"	- 180,04 218,76	ΔX tg φ_H s	2 09433 0 16104 n 2 33997	0 02 51	4,8 245	$\Delta x \Delta y$ φ_N s	+124,12 304° 33' 53"	-180,16 218,77	Δx tg φ_N s	2 09384 0 16181 n 2 33999
A 11 B 10	+22514,64 +22514,73	+6401,77 +6236,80	$E \frac{\Delta Y}{\cos \varphi}$ ΔX	2 21740 n 0 00000 n			\mathfrak{A} 11 \mathfrak{B} 10	0 0	+70,00 -95,00	$E \frac{\Delta y}{\cos \varphi}$ Δx	
$\Delta X \Delta Y$ φ_H s	+ 0,09 270° 01' 53"	- 164,97 164,97	ΔX tg φ_H s	2 21740 n 0 00000 n 8 95424	0 01 53	2,7 19	$\Delta x \Delta y$ φ_N s	0 270° 00' 00"	-165,00 165,00	Δx tg φ_N s	2 21748
A 13 B 15	+22457,95 +22630,10	+6242,13 +6376,66	$E \frac{\Delta Y}{\cos \varphi}$ ΔX	2 12882 0 10351 2 23591			\mathfrak{A} 13 \mathfrak{B} 15	-56,73 +115,32	-89,55 +44,69	$E \frac{\Delta y}{\cos \varphi}$ Δx	2 12788 0 10324 2 23566
$\Delta X \Delta Y$ φ_H s	+ 172,15 38° 00' 23"	+ 134,53 218,48	ΔX tg φ_H s	2 12882 0 10351 2 23591	0 02 39	4,8 187	$\Delta x \Delta y$ φ_N s	+172,05 37° 57' 44"	+134,24 218,22	Δx tg φ_N s	2 98922 9 89222 2 33890
A 7 B 13	+22606,29 +22457,95	+6401,88 +6242,13	$E \frac{\Delta Y}{\cos \varphi}$ ΔX	2 20344 n 0 13502 n			\mathfrak{A} 7 \mathfrak{B} 13	+91,68 -56,73	+70,00 -89,55	$E \frac{\Delta y}{\cos \varphi}$ Δx	2 20290 n 0 13536 n
$\Delta X \Delta Y$ φ_H s	- 148,34 227° 07' 14"	- 159,75 218,00	ΔX tg φ_H s	2 17126 n 0 03218 2 33846	0 02 55	4,8 264	$\Delta x \Delta y$ φ_N s	-148,41 227° 04' 19"	-159,55 217,90	Δx tg φ_N s	2 17146 n 0 03144 2 33826
A 15 B 10	+22630,10 +22514,73	+6376,66 +6236,80	$E \frac{\Delta Y}{\cos \varphi}$ ΔX	2 14570 n 0 11271 n			\mathfrak{A} 15 \mathfrak{B} 10	+115,32 0	+44,69 -95,00	$E \frac{\Delta y}{\cos \varphi}$ Δx	2 14517 n 0 11285 n
$\Delta X \Delta Y$ φ_H s	- 115,37 230° 28' 51"	- 139,86 181,30	ΔX tg φ_H s	2 06210 n 0 08360 2 25841	0 01 19	3,3 135	$\Delta x \Delta y$ φ_N s	-115,32 230° 27' 32"	-139,69 181,14	Δx tg φ_N s	2 06191 n 0 08326 2 25802
	[s] = 1001,51					20,4 696 154 542		[s] = 1001,03			

$$(q - 1) = \frac{1001,51 - 1001,03}{1001} = + \frac{0,48}{1001}$$

$$= 0,00048$$

$$\log q = B = 0.00021.$$

Näherung $\nu = 0^{\circ} 02' 00''$

$$\frac{[p \, d \, \varphi]}{[p]} = + 27''$$

$$\varphi = \nu + \frac{[p \, d \, \varphi]}{[p]} = 0^{\circ} 02' 27''$$

*) Die aufrechten Ziffern in den Spalten v_x und v_y bedeuten die Unterschiede dx und dy vor, die schrägen diejenigen nach der Parallelverschiebung. Um den Betrag der letzten selbst sind sämtliche berechneten Koordinatenwerte x und y noch zu verbessern.

Abschnitt IV. Linienabsteckung.

Kapitel XIV.

A. Absteckung von Geraden.

Die Aufgabe der Absteckung gerader Linien tritt bei jeder Vermessung als Mittel zum Zweck auf (Aufnahmelinien etc.). Sie

Koordinatenberechnung.

Formeln: $X = a + x \cdot q \cdot \cos \varphi - y \cdot q \cdot \sin \varphi$; $\log \cos \varphi = 0.00000$ $\log q \cdot \cos \varphi = 0.00021$
 $Y = b + x \cdot q \cdot \sin \varphi + y \cdot q \cdot \cos \varphi$; $\log \sin \varphi = 6.85289$ $\log q \cdot \sin \varphi = 6.85310$

Punkt No.	gemessen		Xreduziert		Yreduziert		log		x · q · cos φ - y · q · sin φ X berechnet X gegeben	V _x ²⁾ V _x verb.	V _x ²⁾	x · q · sin φ y · q · cos φ Y berech. Y gegeben	V _y ²⁾ V _y verb.	V _y ²⁾	
	x	y	+	-	+	-	x · q · cos φ X _{red.}	y · q · cos φ Y _{red.}							
12	- 19 90	+ 92 42							+ 22494 72			+ 6424 22			
11	± 0 00	+ 70 00	19 90			22 42	1 29906 1 29885 8 15195	1 35085 n 1 35064 n 8 20374 n	+ 19 91 + 0 02 + 22514 65 + 22514 64	+ 1 - 1	1	+ 0 01 - 22 43 + 6401 80 + 6401 77	- 7 - 3	49	
7	+ 91 68	+ 70 00	91 68			0 00	1 96248 1 96227 8 81537	- - -	+ 91 72 0 + 22606 37 + 22606 29	(+) - 6 - 8	36	+ 0 06 0 + 6401 86 + 6401 88	(+) - 2 + 2	4	
Rohrerweg	± 0 00	± 0 00		91 68		70 00	1 96248 n 1 96227 n 8 81537 n	1 84531 n 1 84510 n 8 69820 n	- 91 72 + 0 05 + 22514 70	(+)		- 0 07 - 70 04 + 6331 75	(-) (-)		
3	+ 91 68	+ 0 00	91 68			0 00	1 96248 1 96227 8 81537	- - -	+ 91 72 0 + 22606 42			+ 0 07 0 + 6331 82	(-)		
15	+ 115 32	+ 44 69	23 64			44 69	1 37386 1 37365 8 22675	1 65042 1 65021 8 50331	+ 23 65 + 0 03 + 22630 04 + 22630 10	+ 8 + 6	64	+ 0 02 + 44 71 + 6376 55 + 6376 66	(-) + 7 + 11	49	
14	+ 104 22	- 87 74		11 10		132 43	1 04553 n 1 04532 n 7 89842 n	2 12220 n 2 12199 n 8 97509 n	+ 11 10 + 0 09 + 22619 03 + 22618 98	(+) (+) - 3 - 5	9	- 0 01 - 132 49 + 6244 05 + 6244 18	+ 9 + 13	81	
13	- 56 73	- 89 55		160 95		1 81	2 20691 n 2 20670 n 9 05980 n	0 25789 n 0 25768 n 7 11078 n	- 161 03 + 0 00 + 22458 00 + 22457 95	- 3 - 5	9	- 0 11 + 1 81 + 6242 13 + 6242 13	- 4 0	16	
10	± 0 00	- 95 00	56 73			5 45	1 75402 1 75381 8 60691	0 73661 n 0 73640 n 7 58950 n	+ 56 76 + 0 00 + 22514 76 + 22514 73	- 1 - 3	1	+ 0 04 5 45 + 6236 72 + 6236 80	+ 4 + 8	16	
12	- 19 90	+ 92 42		19 90		187 42	1 29906 n 1 29885 n 8 15195 n	2 27303 2 27282 9 12592	- 19 91 - 0 13 + 22494 72 + 22494 72	+ 2 0	4	- 0 01 + 187 51 + 6424 22 + 6424 22	- 4 0	16	
			283 63	283 63	232 11	232 11						- 16 (- 2)	124	+ 31 (+ 3)	231

Parallelverschiebung der Achsen zur Mittelung von a und b:

$$d_{xMittel} = \frac{-16}{7} = -2 \text{ cm}$$

$$d_{yMittel} = \frac{+31}{7} = +4 \text{ cm.}$$

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{124}{6}} = \pm 4,5 \text{ cm}$$

$$m_y = \pm \sqrt{\frac{231}{6}} = \pm 6,2 \text{ cm}$$

$$\text{mittlerer Punktfehler } M = \pm \sqrt{\frac{335}{6}} = 7,7 \text{ cm.}$$

bildet jedoch zuweilen auch das Endziel der geodätischen —, und die Grundlage, oder den Abschluss von Rechtsgeschäften, Verwaltungsmassnahmen und Bauarbeiten.

§ 93. **Absteckungen von Geraden mit vorgeschriebener Richtung und Lage (Parallelen und Senkrechte zu Koordinatenachsen etc.)** werden notwendig z. B. da, wo durch Verträge bestimmte Meridiane, Parallelkreise, oder Parallelen und Senkrechte zu einer Richtlinie (die man dann zweckmässigerweise als Koordinatenachse wählen wird) als Grenzlinien festgesetzt wurden. In grossem Massstab ist diese Aufgabe zu lösen bei der Abgrenzung kolonialer Erwerbungen, und bei der erstmaligen Begrenzung noch wenig erschlossener Gebiete (nordamerikanische Unionsstaaten, Australien, Südafrika etc.), sodann in solchen Ländern aber auch bei der Abgrenzung von ins Privateigentum übergehenden Flächen. In Ländern mit alter Kultur tritt sie zuweilen auf bei der örtlichen Absteckung der Randlinien künstlich begrenzter Kartenblätter (Katasterpläne, oder -Karten in Württemberg, Bayern, Österreich etc., s. S. 111).

Die Lösung der Aufgabe erfolgt je nach der Ausdehnung der Linien und den vorhandenen Grundlagen und Bedingungen auf astronomisch-geodätischem, oder auf rein geodätischem Weg, letzterenfalls entweder unter Benützung einer Triangulierung oder auf geometrischer Grundlage.

In Rücksicht auf die Hilfsmittel zur Absteckung ist zu unterscheiden zwischen:

1. Der Wiederherstellung einer früher als Grenz-, oder Aufnahmelinie benützten, auf dem Gelände seither verloren gegangenen Linie und

2. Der Neuabsteckung der Linie auf Grund gegebener Bedingungen für Richtung und Lage zu den Koordinatenachsen.

Der erstgenannte Fall tritt namentlich bei Grenzbestimmungen und Fortführungsvermessungen auf. Hier handelt es sich um die Herstellung nicht sowohl der durch Koordinaten, Abstands- und Richtungsbedingungen bestimmten genauen geographischen, sondern vielmehr der früher festgesetzten und rechtskräftig gewordenen Lage, auch wenn diese infolge früherer Konstruktionsfehler mit der ersteren nicht genau übereinstimmen sollte. Die Wiederherstellung erfolgt daher hier auf geometrischem Wege, rückwärts aus den bei der Stückvermessung seiner Zeit erhobenen Masszahlen für feste, noch unverändert vorhandene Aufnahmepunkte und ist hier nicht weiter zu betrachten. Stehen solche Masse oder andere Merkmale für die ursprüngliche Linienlage nicht zur Verfügung, oder handelt es sich überhaupt um

Neuabsteckung,

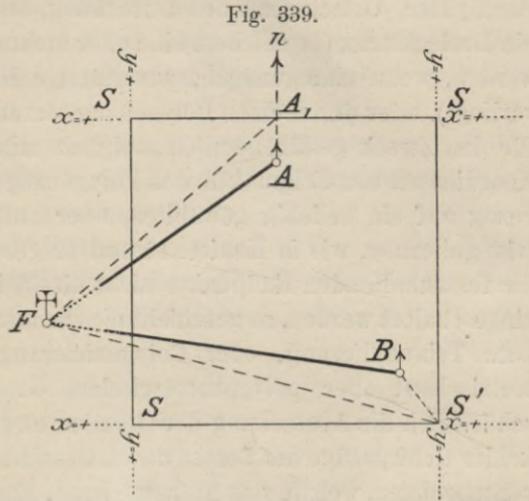
so sind dafür wieder zwei Wege gangbar:

Beim ersten wird die Richtung der abzusteckenden Linien auf dem Gelände mittels astronomisch-geodätischer Beobachtungen,

oder mittels der Magnetonadel (s. Bussolinstrumente), ihre Lage entweder ebenso, oder durch direkte (Band-, oder Stangen-)Messung gefunden. Dieser Weg wurde und wird z. B. bei den Landabtretungen in den Vereinigten Staaten von Nordamerika beschritten (s. u. a. Zeitschr. f. Verm. 1905, S. 705 ff.), soll aber hier nicht weiter verfolgt werden.

Ist eine trigonometrische, oder polygonometrische Punktbestimmung vorgängig über das Gelände gelegt worden, so ergibt sich aus den Koordinaten der Festpunkte die örtliche Lage abzusteckender Parallelen und Senkrechter zu den Achsen bequemer und genauer wie folgt (siehe Fig. 339):

Befindet sich ein Festpunkt A in der Nähe einer Netzlinie, so findet man den Fusspunkt A₁ des auf ihr errichteten Lots nach A durch Absteckung der Richtung



$F A A_1 = 4 R - n A F$ (wobei $\operatorname{tg} n A F = \frac{y_F - y_A}{x_F - x_A}$) von einem Feststrahl $A F$ aus und Abmessung der Strecke $A A_1 = x - x_A$.

Der Winkel, mittels dessen die Richtung $A_1 S$ von A_1 aus abgesteckt wird, ist $F A_1 S = \frac{3}{4} R - n A_1 F$ (wobei $\operatorname{tg} n A_1 F = \frac{y_F - y_{A_1}}{x_F - x_{A_1}}$).

Befindet sich ein durch seine Koordinaten gegebener Festpunkt B in der Nähe einer Ecke S' (Sektionspunkt) des Quadratnetzes, deren Koordinaten wie diejenigen des Festpunktes bekannt sind, so erhält man die Lage von S' auf dem Gelände durch Anschlag des Winkels $F B S' = n B S' - n B F$ (wobei $\operatorname{tg} n B S' = \frac{y_{S'} - y_B}{x_{S'} - x_B}$ und $\operatorname{tg} n B F = \frac{y_F - y_B}{x_F - x_B}$) und Abmessen der Strecke

$$B S' = \frac{y_{S'} - y_B}{\sin n B S'} = \frac{x_{S'} - x_B}{\cos n B S'}$$

Die Richtungen der von S' ausgehenden Netzlinien findet man auf dem Gelände durch Anschlag der Winkel:

$$F S' S = \frac{3}{4} R - n S' F$$

Ist kein seinen Koordinaten nach gegebener Punkt in der Nähe der abzusteckenden Randlinien auf dem Gelände vorhanden, so bestimmt man einen solchen nach irgend einem der in Kapitel 11

und 12 gezeigten Verfahren und benützt ihn dann weiter, wie soeben den Punkt A oder B.

§ 94. **Absteckung im Fall unmöglicher direkter Zielung (Tunnelachsen, Waldabteilungsgrenzen etc.).**

Ist die Entfernung zweier durch eine Gerade zu verbindender Punkte zu gross, als dass letztere direkt abgesteckt werden könnte (einige Kilometer übersteigend), oder verhindern Geländeerhebungen, Wälder, Baumgüter, Ortschaften den Durchblick, so verbindet man sie durch ein Dreiecksnetz (in welchem eine oder mehrere Grundlinien gemessen werden, wenn eine genügend zuverlässige Haupttriangulierung nicht vorliegt), oder durch einen Polygonzug, deren Elemente man mit einer für den Zweck genügenden Genauigkeit misst. Alsdann werden die Koordinaten der Eckpunkte des Polygonzugs, oder Dreiecksnetzes in bezug auf ein beliebig gewähltes, oder auf das System der Haupttriangulierung, wie in Kapitel 11 und 12 gezeigt, berechnet. (Können die festzuhaltenden Endpunkte nicht direkt in das grundlegende Netz eingeschaltet werden, so geschieht dies nachträglich durch untergeordnete Triangulierung, oder Polygonisierung.) Von dieser trigonometrischen, oder polygonometrischen Grundlage ausgehend wird schliesslich die Absteckung der Geraden und zwar bei Überschreitung kahler Gebirgszüge am besten durch Bestimmung von „Richtpunkten“ vorgenommen, welche vom Anfangs- bzw. Endpunkt der anzugebenden Geraden aus sichtbar sind und auf weithin sichtbaren Stellen der Geraden selbst, oder ihrer Rückverlängerung liegen. Die Bestimmung der Lage dieser Richtpunkte auf dem Gelände erfolgt durch Anschlagen des Winkels (Differenz der beiden zugehörigen berechneten Richtungswinkel) zwischen der abzusteckenden Geraden und einer von ihrem Anfangs- bzw. Endpunkt ausgehenden Dreiecksseite.

Sie dienen als Instrumentenstände im Falle der Fortsetzung der Geraden über den Berg hinweg. Auf sie wird das Theodolitfernrohr bei Angabe von Zwischenpunkten und bei Kontrollierung langwieriger Bauarbeiten (z. B. von Tunnelbauten) eingestellt. Für letzteren Zweck sind sie daher zu vermarken.

Je nachdem mit der Absteckung nur von einer, oder von beiden Seiten her vorgegangen wird, muss die, nötigenfalls durch wiederholte Verlängerung des von den Endpunkten aus gewonnenen ersten Linienstücks fortgesetzte Gerade innerhalb der von der Messungsgenauigkeit abhängigen Fehlergrenzen auf den jenseitigen Endpunkt, oder auf den von dorthier kommenden Linienzweig treffen.

Will man gleichzeitig von mehr als zwei Seiten her arbeiten, so kann man Zwischenpunkte der gesuchten Geraden von den auf

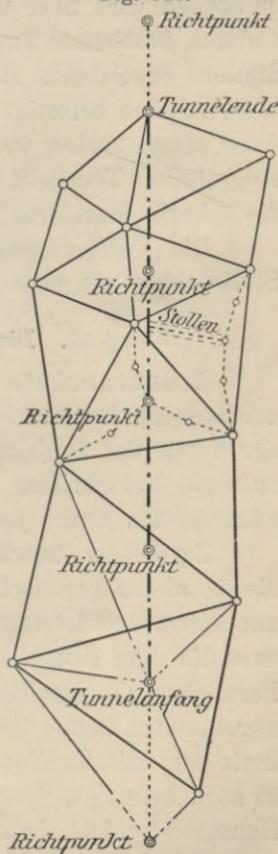
trigonometrischem, oder polygonometrischem Weg geschaffenen Festpunkten aus abstecken. Die hiezu nötigen Längen und Richtungswinkel ergeben sich durch rechnerische Transformation benachbarter Festpunkte auf die abzusteckende Gerade, durch Einrechnung ihrer Schnittpunkte mit passenden Polygon- oder Dreiecksseiten, oder, bei beliebiger Lage der abzusteckenden Zwischenpunkte, durch Bestimmung der Koordinaten der letzteren nach Art der Kleinpunktsberechnung (s. § 56) und darauffolgende Richtungswinkel- und Streckenangabe analog BS' in Fig. 339.

Handelt es sich um Arbeiten unter Tag, so kann die Absteckung der Stollenrichtung entweder vom Mundloch, oder von Schächten aus erfolgen.

Statt der Stäbe werden in diesem Fall mit fortschreitender Bohrarbeit Lichtsignale eingewiesen, nämlich gewöhnliche Gruben-, Magnesium-, oder elektrische Lampen, deren Lichtwirkung nötigenfalls durch Hohlspiegel verstärkt wird. Ist Beleuchtung des Fadenkreuzes vom Theodolitfernrohr nötig, so wird sie entweder vom Objektiv aus, oder durch die Kippachse bewirkt. Im ersteren Fall wird auf das Objektiv eine kurze Röhre aufgesetzt, welche an ihrem vorderen Ende eine unter $\frac{R}{2}$ geneigte, zur Ermöglichung der Zielung elliptisch durchbrochene, von unten beleuchtete Spiegelfläche trägt. Im zweiten Fall ist die Kippachse durchbrochen. Der durch sie eingeführte Lichtstrahl wird durch einen Spiegel, oder ein Prisma in der Röhre gegen das Fadenkreuz geworfen.

Die Punktbezeichnung erfolgt durch eiserne Klammern, welche in die Kappenhölzer geschlagen werden und eine Rinne in der Achsrichtung eingefeilt erhalten, oder durch eingeschlagene Nägel. Da diese Bezeichnung aber leicht Beschädigungen durch Gebirgsdruck oder Mutwillen von Personen ausgesetzt ist, ist es zweckmässig, noch Achspflöcke unter die Sohle des Stollens einzutreiben, welche durch Holzrahmen mit Deckel geschützt werden. Im Felsen treibt man Holzdübel in die Decke ein und bezeichnet die Achse durch eine darin befestigte Schraube mit Öse zum Aufhängen der Senkel.

Fig. 340.



Bei langen Tunneln und länger dauernden Bauarbeiten müssen von Zeit zu Zeit sämtliche Zwischenabsteckungen geprüft werden.

Bei der Absteckung von Schächten aus legt man den Schacht rechteckig, mit der je nach der Tiefe 5 — 8 m grossen Langseite in der Achsrichtung, an und schlägt an beiden Enden des Schachtmundlochs starke Pflöcke, auf welchen die Achsrichtung mit möglichster Genauigkeit angegeben wird. Über sie legt man ein genaues Richtscheit und hängt daran zwei (oder drei) Senkel, die man unten in Wassergefässe tauchen lässt, um sie rascher zur Ruhe zu bringen. (Um das Drehen der Senkelschnüre zu verhindern, spannt man sie vor der Verwendung an und zieht sie durch ein glattes Holz mit ausgebranntem Loch. Bei feuchten Schächten hängt man die Schnüre einige Tage vorher schon auf, damit die unvermeidliche Verkürzung vor Beginn der Arbeit eintritt.) Besser als Hanfschnüre eignen sich 0,5 mm starke Messingdrähte. Unten im Stollen wird über die Schnüre, bezw. Drähte weggezielt und die dadurch bestimmte Tunnelrichtung am First oder auf der Sohle des Stollens bezeichnet. Besser ist es, Pflöcke einzutreiben, auf denen Massstäbchen befestigt werden. Die Projektionen des Drahts auf diese Massstäbchen werden dann durch ein in der Stollenrichtung aufgestelltes Theodolit beobachtet und gemittelt. Schliesslich erfolgt die scharfe Markierung der mittleren Richtung auf den Pflöcken.

Die Verlängerung der so erhaltenen Richtlinie ergibt die Stollenachse mit einer Genauigkeit bis zu etwa 1 dm pro km.

§ 95. Einschneiden von Schnurgerüsten.

Schnurgerüste haben den Zweck, die Erstellung eines auszuführenden Bauwerks (Fundament, Sockel, Hausgrund) genau in der durch das Projekt, etwaige Eigentumsverhältnisse und einzuhaltenen Vorschriften bestimmten Lage zu sichern und daraufhin während des Baues jederzeit bequem nachprüfen zu lassen.

Zu diesem Zweck bestehen sie aus einer Anzahl von Pfosten, die in einem gegenseitigen Abstand von ca. 4,60 m (Dielenlänge) ungespitzt und lotrecht derart in den Boden eingegraben werden, dass die dem Bau abgewandten Flächen, 1—2 m von ihm entfernt, Parallelen zur künftigen Hausgrenze bilden. An den dem Bau abgewandten Seiten dieser Pfosten werden Dielen oder Hölzer genau horizontal mittels Klammern, Schrauben oder Drahtstiften solid und so hoch befestigt, dass deren Oberkanten ca. 30 cm über der ersten Hausgrundschicht liegen.

Wird dadurch die Entfernung von der derzeitigen Bodenoberfläche zu gross für die bequeme Erreichung der Diele, so konstruiert man an den Pfosten in entsprechender Höhe mit einigen Brettern und Latten einen Laufsteg.

Begriffs-
bestimmung
und Zweck.

Konstruk-
tion.

Dabei müssen je zwei gegenüberliegende Dielen unter sich gleiche, gegen die senkrecht anstossenden aber veränderte Höhe haben, um das „Reiten“ der später einzuhängenden Schnüre zu vermeiden. Die einzelnen Pfosten werden meist mit der Diele oben bündig schief nach abwärts abgeschnitten.

Das „Einschneiden des Schnurgerüsts“ bildet einen Teil der behördlichen Baukontrolle, insofern es das Mittel an die Hand gibt, die genaue Einhaltung der Bauflucht und der vorgeschriebenen oder vereinbarten Abstände von den Nachbargrenzen zu kontrollieren.

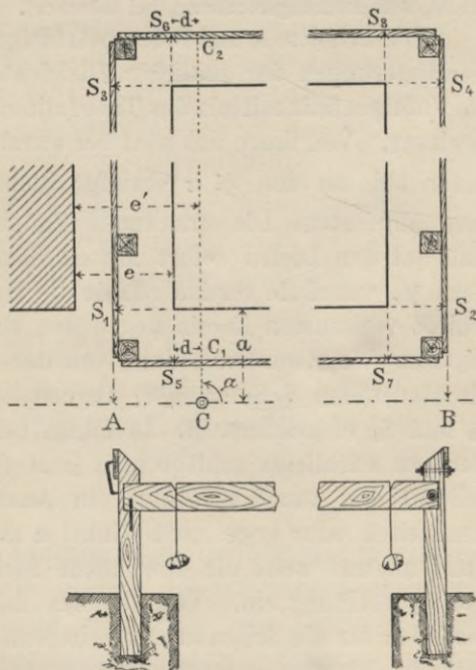
Ehe unbedingte Stabilität nach Lage und Höhe, das wichtigste Erfordernis für ein Schnurgerüst, erreicht ist, darf daher mit dem „Einschneiden“ nicht begonnen werden. Unter letzterem versteht man

die Bezeichnung der Verlängerungen der Aussenwandflächen und der Zwischenwände auf den Verbindungsdielen durch Sägeinschnitte S (s. Fig. 341 a) derart, dass die nach innen gerichtete Seite einer in zwei korrespondierende Einschnitte eingehängten Schnur in die genannte Flucht fällt. Meistens genügt zu diesem Zweck ein einziges Gerüst rings um die Baugrube. Bei sehr grossen Bauwesen würden indessen infolge der zu langen Schnüre leicht Unsicherheiten infolge von Wind und anderen Einflüssen entstehen. Man zieht es daher hier vor, auch im Innern der Baugrube noch Schnurgerüste aufzubauen und auf ihnen die in Betracht kommenden Fluchten gleichfalls anzugeben.

Als Grundlage für die innere Einteilung sind zuerst die Umfangsflächen des Baues einzuschneiden. Man beginnt mit der „Baulinie“. Da sie selbst in den wenigsten Fällen direkt zugänglich ist, steckt man, falls sie gerade sein soll, zunächst eine für

Einschneiden
des Schnur-
gerüsts

Fig. 341 a.



die Durchsicht bequem liegende Parallele zu ihr ab, die entweder von versicherten Strassenachspunkten aus, oder, wo diese fehlen, von bereits an der fraglichen Strasse erstellten Gebäuden durch Herauslegen eines beliebigen konstanten Masses a (s. Fig. 341a) von der in die Baulinie gerückten Gebäudefläche (in Württemberg der Hausgrund) hergestellt wird.

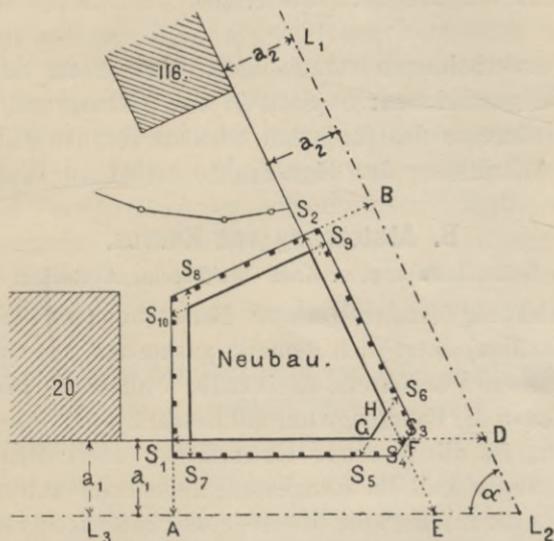
Sind bei der früheren Absteckung jener Gebäude Fehler unterlaufen, oder haben sich die Gebäude nachträglich und einseitig gesenkt (was bei schlechtem Untergrund Lageänderungen von mehreren dm zur Folge haben kann), so werden die aus ihnen rückwärts konstruierten Punkte der verlangten Parallelen nicht genau in einer Geraden liegen. Sie sind daher auszugleichen. Die Ausglei- chung erfolgt entweder auf dem Gelände direkt mit freiem Auge, oder in wichtigen Fällen im Zimmer nach den Grundsätzen der Methode der kleinsten Quadrate, nachdem die für die Baulinie massgebenden Punkte möglichst genau auf eine zu ersterer ungefähr parallele Abszisse aufgenommen worden sind. (Vergl. § 13 von Weitbrecht, Ausgleichsrechnung, bei Göschen).

Die Schnitte A und B der endgültig angenommenen Linie mit den Verlängerungen der seitlichen Dielrichtungen (s. Fig. 341a) werden nun (nötigenfalls mittels des Theodoliten) genau in die Parallele eingewiesen. Von ihnen aus wird der Parallelabstand $a = AS_1 = BS_2$ (oder bei um den $\neq \alpha$ schiefer Richtung $\frac{a}{\sin \alpha}$) in der Dielrichtung abgesetzt. Die erhaltenen Endpunkte S_1 und S_2 bezeichnet man auf den Dielen sofort mittels Sägeschnitts und zwar in der Form \surd , wobei die vertikale Linie die Hausflucht bezeichnet und die schiefe von aussen herein gegen den Bau verläuft. Auf der horizontalen Diele werden sodann von den genannten Einschnitten aus die Haustiefen $S_1S_3 = S_2S_4$ abgemessen und auch die Endpunkte S_3 und S_4 eingeschnitten. In einem beliebigen Punkt C der abgesteckten Parallelen schlägt man jetzt (nötigenfalls mit dem Theodoliten) den zumeist rechten, in Ausnahmefällen aber irgendwie ermittelten oder gegebenen Winkel α zwischen Baulinie und Seitenflucht an und weist die gewonnene Richtung auf den Dielen in C_1 und C_2 vorläufig ein. Von ihr aus misst man die Entfernung e' nach den für die Seitenwand bestimmenden Gegenständen (Nachbargebäude, Eigentumsgrenze etc.) und vergleicht sie mit der Sollentfernung e . Die vorläufigen Zeichen C_1 und C_2 (s. Fig. 341a) werden alsdann um die Differenz $d = e - e'$ (oder bei schiefer Richtung um $\frac{e - e'}{\sin \alpha}$) verschoben und die derart gewonnene endgültige Richtung in S_5 und S_6 eingeschnitten.

Die Schnitte S_7 und S_8 ergeben sich durch Abmessung der projektierten Frontlänge auf den Dielen von S_5 bzw. S_6 aus, wenn nicht auch deren Richtung durch Baulinien oder Verträge bestimmt ist und nach vorigem abgesteckt werden muss.

Verläuft die Baulinie im Bogen, so muss in der Regel die Hausfront als Tangente oder als Sehne zu ersterem abgesteckt werden und zwar so, dass kein Punkt des Hauses über sie vortritt. Je nachdem die Krümmung konvex oder konkav ist, liegen dann die beiden Eckpunkte, oder der Mittelpunkt der Hausfront auf der Baulinie. Zum Zweck ihrer Angabe auf dem Gelände berechnet man die Koordinaten dieser Punkte in Beziehung auf diejenige absteckbare Aufnahmelinie, auf welche die Bogenlinie und die in Frage kommenden Grenz- etc. Punkte bezogen sind (vergl. z. B. § 32). Sind sie mittels dieser Masse abgesteckt, so ergeben die Rückwärtsverlängerungen ihrer Verbindungslinien den Ort der anzubringenden Sägeschnitte.

Fig. 341 b.



An Strassenkreuzungen kommen häufig Grundrisse von unregelmässiger Form vor. Liegt die Aufgabe des Schnurgerüsteinschneidens wie in Fig. 341 b, so sind zuerst die zwei Baulinien bezw. Parallelen $L_1 L_2$ und $L_2 L_3$ herzustellen durch Abmessung der Abstände $AS_1 = a_1$ und $BS_2 = a_2$ wie in voriger Aufgabe. Alsdann wird

$$L_2 D = \frac{a_1}{\sin \alpha} \text{ und } L_2 E = \frac{a_2}{\sin \alpha}$$

vom Schnittpunkt L_2 der Parallelen aus abgesetzt und von den erhaltenen Punkten aus (nötigenfalls mittels des Theodoliten) die Gerade $ES_4 S_2$ sowie $DS_3 S_1$ angegeben und eingeschnitten. Durch Einhängen der Schnüre in S_1 und S_3 bezw. S_2 und S_4 erhält man den Baulinienschnitt F , der von den inneren Seiten der Schnüre auf den Boden mittels Senkels herunterprojiziert wird. Auf dem

Boden werden die meist durch Baubestimmungen gegebenen Abschrägungen FG und FH, soweit solche noch beibehalten werden, abgemessen und alsdann die gewonnenen Punkte G und H mittels zweier den Schnüren $S_1 S_3$ und $S_2 S_4$ angehängter Senkel heraufprojiziert. Die jetzt bequem mit blossem Auge zu nehmende Verlängerung der Linie GH wird in S_5 und S_6 eingeschnitten.

Das Einschneiden von S_7 bis S_{10} geschieht in der in voriger Figur gezeigten Weise, nur ist die etwaige Verschiebung der vorläufigen Punkte auf der Diele für S_8 und S_{10} nicht gleich d , sondern gleich $\frac{d}{\sin \alpha}$.

Der Einschnitt für Zwischenmauern erfolgt schliesslich durch Abmessung der dafür projektierten Masse auf den Dielen des Schnurgerüstes von den nach bisherigem gewonnenen Umfassungslinien aus.

Um Verwechslungen vorzubeugen, wird jedem Schnitt seine Bedeutung beigeschrieben: S (Sockel), H-G (Hausgrund) etc., auch liegt es im Interesse des für seine Angaben verantwortlichen Technikers, die Anbringung der Sägeschnitte selbst zu beaufsichtigen.

B. Absteckung von Kurven.

(Eingehendere Behandlung s. u. a. Knoll-Weitbrecht, Abstecken der Kurven.)

Einleitung.

Die Richtung langgestreckter Bauwerke (von Eisenbahnen, Strassen, Kanälen) setzt sich zumeist zusammen aus Geraden und Kurven, welche sich berührend aneinander schliessen. Bei Verkehrswegen, auf denen die Fahrzeuge nur mit beschränkter Geschwindigkeit sich bewegen, ist die Art der Krümmung unter Beachtung der durch die Beweglichkeit der Radgestelle gegebenen unteren Grenzen für die Krümmungsradien eine beliebige und in horizontalem Gelände oft nur durch die Rücksicht auf Planschönheit beeinflusste. In bergigem Gelände dagegen sind die Krümmungen durch die Geländeform bedingt. Beim Eisenbahnbau erfordern die Massregeln zur Unschädlichmachung der Wirkung der bei schnell bewegten Fahrzeugen mit starren Radgestellen auftretenden Zentrifugalkraft und Spurkranzklemmung eine von Strecke zu Strecke gleichmässige, in ihren Radien nicht unter ein gewisses Mass heruntersinkende Krümmung. Hier setzt sich die Trace daher aus (horizontalen oder geneigten) Strecken zusammen, die sich horizontal als Gerade oder Kreisbögen projizieren, d. h. aus Schraubenlinien, welche sich um vertikale Zylinder vom jeweils zulässigen Minimalradius bis zum Radius $r = \infty$ winden.

Die Projektierung der Linie (die Tracierung) ist Aufgabe des Bauingenieurs. Sie erfolgt bei untergeordneten Bauwesen unter

Umständen auf dem Gelände, zumeist aber auf Plänen, welche sowohl die Geländeeinteilung und -kultur, als auch, am besten mittels eingezeichneter Horizontalkurven, die Geländeform angeben. Hiebei sind neben volkswirtschaftlichen und betriebstechnischen Rücksichten (Krümmungs- und Längenverhältnisse, Minimalradius, Maximalsteigung etc.), namentlich Rücksichten auf die Baukosten (Brücken, Tunnels, Vermeidung des Anschneidens von Rutschhalden, Grunderwerb etc.) entscheidend. Durch Abwägung der den einzelnen möglichen Varianten für die Linienführung anhaftenden Vorzüge und Nachteile gelangt man schliesslich zur vorteilhaftesten Trace, deren Übertragung vom Plan auf das Gelände nun Sache des Vermessungstechnikers ist.

Zu diesem Zweck werden zunächst Punkte der geraden Projektstrecken $L_1, L_2, L_3 \dots$ je in überschüssiger Zahl durch Abmessung von aus dem Plan abgegriffenen Entfernungsmassen nach benachbarten, im Plan und Feld vorhandenen Festpunkten oder auf sonstige Weise an Ort und Stelle bestimmt. Unter Ausgleichung etwaiger kleiner Widersprüche der abgesteckten Punkte gegen die gerade Sollrichtung erfolgt sodann so weit möglich die Bestimmung und örtliche Versicherung der Schnittpunkte S dieser Geraden der „Tangentenschnitte“ oder „Winkelpunkte“.

Nach Erledigung dieser vorbereitenden Arbeiten wird die eigentliche Kurvenabsteckung eingeleitet mit der:

§ 96. Berechnung der Elemente zur Absteckung der Bogenhauptpunkte.

Sie stützt sich zumeist auf den irgendwie zu messenden Schnittwinkel 2α der beiden auf dem Gelände abgesteckten geraden Strecken, (Tangenten), an welche der Bogen sich berührend anschliessen soll. Der dem letzteren zugehörige Zentriwinkel 2ω ergänzt den Tangentenschnittwinkel 2α zu $2R$.

Ist der Tangentenschnittpunkt S unzugänglich, oder sind bei spitzem Tangentenwinkel und grossem Radius die Verlängerungen bis zu ihm sehr lang, so können zum Zweck der Winkelbestimmung Hilfspunkte H_1 und H_2 auf den Tangenten benützt werden, deren Verbindungsstrecke direkt, oder mittels eines eingeschalteten Polygonzugs (s. Fig. 343) bestimmt und durch Ermittlung der Winkel φ und ψ zwischen ihr und den Tangenten zu letzteren in Beziehung gesetzt wird. Daraus lassen sich dann die Strecken $H_1 S, H_2 S$ und der Winkel 2α berechnen.

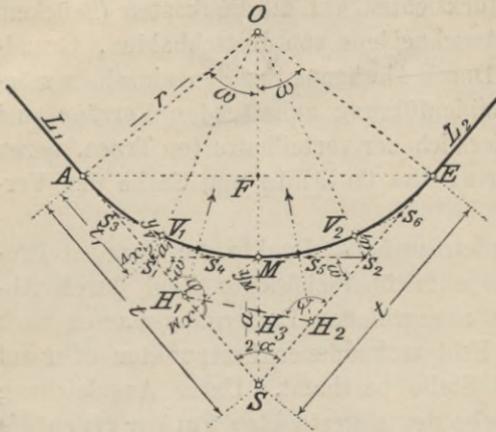
Wir gehen nun über zur Gewinnung der Masse für die Absteckung der Kreispunkte selbst. Der zugehörige Halbmesser r möge, wie das in der Regel der Fall ist, aus der Projektbearbeitung bekannt sein.

Der Bogenmittelpunkt O ist weder gesucht, noch wird es in vielen Fällen möglich, oder auch nur zweckmässig sein, ihn auf dem

Feld zu bezeichnen, da die Bogenabsteckung von ihm aus wegen der zumeist sehr grossen Radien doch nicht zugänglich ist. (Nur an Wendepunkten bei Strassen kann es sich empfehlen, die Bogenabsteckung vom Mittelpunkt aus zu bewirken.)

Absteckungs-
grundlinien.

Fig. 342.



Am zweckmässigsten geht man von passenden Geraden aus, die in möglicher Nähe des abzusteckenden Bogens verlaufen und die auf dem Feld leicht herzustellen sind (Tangenten, Sehnen zum Kreis etc.). In bezug auf sie berechnet man sodann rechtwinklige, oder Polarkoordinaten für die auf dem Feld gewünschten Bogenpunkte.

Bogen-
hauptpunkte.

Bei der Absteckung der letzteren an Ort und Stelle beginnt man mit den **Bogenhauptpunkten**. Als solche gelten: die beiden Berührungspunkte A und E, die Bogenmitte M und eventuell noch die Bogenviertel V_1 und V_2 , unter Umständen aber auch irgendwelche, in grosser gegenseitiger Entfernung voneinander liegende Bogenpunkte.

Zur Absteckung der Berührungspunkte A und E braucht man die Strecken $SA = SE$ (bezw. wenn S unzugänglich oder SA unverhältnismässig lang ist, $H_1 A = SA - SH_1$ und analog $H_2 E = SE - SH_2$).

Aus $\triangle OSA$ kommt

$$(1) \quad t \equiv SE = SA = r \cdot \operatorname{tg} \omega$$

und zur Berechnung von $H_1 A$ und $H_2 E$ aus $\triangle H_1 H_2 S$

$$SH_1 = \frac{H_1 H_2}{\sin 2\alpha} \sin \psi$$

$$SH_2 = \frac{H_1 H_2}{\sin 2\alpha} \sin \varphi.$$

Zur Bestimmung der Bogenmitte M hat man unter gleichzeitiger Rechenprobe für SE und SM

$$(2) \quad a \equiv SM = SO - r = \frac{r}{\cos \omega} - r = t \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}.$$

Will die Absteckung der Winkelhalbierenden SMO umgangen werden, so erhält man die rechtwinkligen Koordinaten x_M und y_M der Bogenmitte in bezug auf jede der Tangenten als Achse und den Berührungspunkt als Ursprung:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Abszisse } x_M = \frac{\text{halbe Sehne}}{\text{Pfeilhöhe}} AF = r \cdot \sin \omega \\ \text{Ordinate } y_M = r - r \cos \omega = 2r \sin^2 \frac{\omega}{2} = x_M \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}. \end{array} \right.$$

Die letzte Gleichung bietet wieder eine Rechenprobe für x_M und y_M . Die Bogenmitte M lässt sich bei grosser Entfernung von den Tangenten weder durch die Winkelhalbierende SM, noch von der Tangente aus durch die Koordinaten x_M und y_M mit genügender Genauigkeit aufs Feld übertragen. In diesem Fall ist es zweckmässiger, die Schnittpunkte S_1 und S_2 der in M an den Kreis gezogenen Tangente mit den Haupttangente und damit die erstere selbst zu bestimmen. Die Absteckung von S_1 und S_2 geht bequem anlässlich derjenigen von A und E, sobald man aus dem $\triangle OAS_1$ kennt:

$$(4) \quad t_1 \equiv AS_1 = ES_2 = S_2M = S_1M = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}.$$

Die Gleichung (4) gibt für die Länge der Tangente S_1M dieselbe Formel wie Gleichung (1) für die Länge der Tangente SA. Nur tritt an Stelle des halben Zentriwinkels zu $t = \omega$ für S_1M der halbe Zentriwinkel zu t_1 , nämlich $\frac{\omega}{2}$.

Diese Übereinstimmung trifft für jeden weiteren Teilpunkt, das Bogenviereck, Bogenachtel etc., zu. Für diese bleiben die Formeln (2) bis (4) ganz identisch, nur tritt an Stelle des Zentriwinkels ω jeweils der Wert $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{4}$ etc.

Demnach wird der Scheitelabstand $a_1 = S_1V_1 = S_2V_2 = t_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{4}$ (2)

$$\left. \begin{array}{l} \text{die Abszisse } x_V = r \cdot \sin \frac{\omega}{2} \\ \text{die Ordinate } y_V = r - r \cos \frac{\omega}{2}. \end{array} \right\} (3)$$

Hat man zur Gewinnung der Berührungspunkte A und E die Hilfspunkte H_1 und H_2 benützen und ihre Verbindungsstrecke abstecken und durchmessen müssen, so wird man sie zweckmässigerweise auch zur Absteckung des Bogenmittels M und der in diesem Fall als Hauptpunkte geltenden, auf den Strahlen H_1O und H_2O liegenden Bogenpunkte verwenden. Für die Absteckung des ersteren erhält man z. B. den Schnittpunkt H_3 der Zentralen OS mit der Hilfsstrecke aus den in den Dreiecken SH_1H_3 und SH_2H_3 berechneten Strecken:

$$(5a) \quad H_1H_3 = \frac{SH_1 \sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} \quad \text{und} \quad H_2H_3 = \frac{SH_2 \sin \alpha}{\sin(\psi - \alpha)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{wobei beide Nenner als sin} \\ \text{von Nebenwinkeln einander} \\ \text{gleich sind,} \end{array} \right\}$$

oder unter Beachtung, dass H_3 der Schnittpunkt der winkelhalbierenden Transversale mit der Gegenseite ist:

$$H_1H_3 : H_3H_2 = SH_1 : SH_2, \text{ also}$$

$$(5b) \quad H_1H_3 = \frac{H_1H_2}{SH_1 + SH_2} SH_1 \quad \text{und} \quad H_3H_2 = \frac{H_1H_2}{SH_1 + SH_2} SH_2.$$

Die Strecke $H_3 M$ ist bekannt, sobald man aus denselben Dreiecken mit Probe zugleich für $S H_1$ und $S H_2$ berechnet hat:

$$(5c) \quad S H_3 = \frac{S H_1 \sin \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)} = \frac{S H_2 \sin \psi}{\sin(\psi - \alpha)}$$

Endlich erhält man den Winkel, unter dem $H_3 M$ von $H_1 H_2$ abgeht, aus

$$\sphericalangle H_1 H_3 M = \psi - \alpha$$

$$\sphericalangle M H_3 H_2 = \varphi - \alpha$$

Beispiel: Gesucht die Masse zur Absteckung der Hauptpunkte eines Kreises vom Radius $r = 500$ m mit dem Tangentenschnittwinkel $2\alpha = 104^\circ 18' 24''$.

$t \equiv SA = SE = 388,49$	$r \cdot \operatorname{tg} \omega$	2.58938
$\alpha = 52^\circ 09' 12''$	$\operatorname{tg} \omega$	9.89041
$\omega = 37^\circ 50' 48''$	r	2.69897
$r = 500$ m	$\cos \omega$	9.89744
$OF = r - y_M = r \cdot \cos \omega = 394,83$	$r \cdot \cos \omega$	2.59641
$AF = x_M = r \cdot \sin \omega = 306,77$	$r \cdot \sin \omega$	2.48682
$SO = \frac{r}{\cos \omega} = 633,19$	$\frac{r}{\cos \omega}$	2.80153
Scheitelabstand $a = SM = 133,19$		
Halbe Sehne $AF = x_M = 306,77$		
Pfeilhöhe $p = FM = y_M = 105,17$		
$\frac{\omega}{2} = 18^\circ 55' 24''$	$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$	9.53568
$t_1 \equiv S_1 M = S_1 A = 171,42$	$r \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$	2.50000
$SS_1 = 217,07$		

Statt diese Berechnung für jeden speziellen Fall auszuführen, kann man auch unter Beachtung, dass alle Kreise ähnliche Figuren, und daher homologe Strecken daran proportional sind, die nötigen Grössen ein für allemal für einen bestimmten Halbmesser (z. B. $r = 100$) und verschiedene Zentriwinkel berechnen und sich dann darauf beschränken, diese Masse je mit dem betreffenden in hm ausgedrückten Halbmesser zu multiplizieren. Auf diesen Gedanken gründen sich die verschiedenen, von Gysin, Jordan, Knoll-Weitbrecht Kröhnke, Sarrazin, Winkel u. a. herausgegebenen Kreistafeln.

Benützung eines zur Voraufnahme verwendeten Polygons zur Absteckung von Bogenpunkten.

Im bisherigen war vorausgesetzt, der Schnittpunkt S der beiden Tangenten selbst, oder die Verbindungsstrecke zweier ihrer Punkte H_1 und H_2 sei zugänglich und bequem absteckbar. Auch stehe der genauen Bestimmung von Bogenanfang und -ende durch Abmessen der berechneten Tangentenlänge $SA = SE$ bzw. $H_1 A$ und $H_2 E$ kein Hindernis im Wege.

S - 98



561