1089

1023

REPERTORYUM MATEMATYKI WYŻSZEJ.

ERNESTO PASCAL.

REPERTORYUM

MATEMATYKI WYŻSZEJ

PRZEŁOŻYŁ

za upoważnieniem Autora

S. DICKSTEIN.

TOM II.

GEOMETRYA.

WARSZAWA.

Wydawnictwo Redakcyi „Wiadomości matematycznych".

W drukarni J. Sikorskiego, Warszawa, Warecka 14.

1901.

Дозволено Цензурою
Варшава, 17 Мая 1901 года.

TREŚĆ.

ROZDZIAŁ I.

Geometrya form ciągłych zasadniczych.

ROZDZIAŁ II.

Geometrya form nieciągłych.

ROZDZIAŁ III.

Teorya niezmiennicza form algebraicznych. Koneksy.

ROZDZIAŁ IV.

Stożkowe.

ROZDZIAŁ V.

Kwadryki.

ROZDZIAŁ VI.

Teorya ogólna krzywych płaskich algebraicznych.

ROZDZIAŁ VII.

Krzywe sześcienne płaskie.

ROZDZIAŁ VIII.

Krzywe płaskie rzędu czwartego.

ROZDZIAŁ IX.

Teorya ogólna powierzchni i krzywych skośnych algebraicznych.

ROZDZIAŁ X.

Krzywe skośne różnych rzędów.

ROZDZIAŁ XI.

Powierzchnie rzędu 3-go.

ROZDZIAŁ XII.

Powierzchnie rzędu 4-go.

ROZDZIAŁ XIII.

Powierzchnie rzędu wyższego niż czwarty. Powierzchnie prostoliniowe.

ROZDZIAŁ XIV.

Geometrya prostej w przestrzeni. Geometrya kuli.

ROZDZIAŁ XV.

Geometrya licząca.

ROZDZIAŁ XVI.

Teorya nieskończonostkowa krzywych i powierzchni.

ROZDZIAŁ XVII.

Główne sposoby tworzenia i przekształcania krzywych, wyspecyalizowane metrycznie. Geometrya krzywych specyalnych.

ROZDZIAŁ XVIII.

Analysis situs czyli topologia. Teorya wielościanów. Spójność powierzchni Riemanna.

ROZDZIAŁ XIX.

Geometrya rzutowa nadprzestrzeni.

ROZDZIAŁ XX.

Geometrya nieskończonostkowa i wewnętrzna w nadprzestrzeniach liniowych i w przestrzeniach o krzywiznie stałej.

ROZDZIAŁ XXI.

Geometrya bezwzględna i specyalnie Geometrya nieeuklidesowa na płaszczyznie i w przestrzeni.

ROZDZIAŁ XXII.

Nowa geometrya trójkąta.

ROZDZIAŁ I.

GEOMETRYA FORM CIĄGŁYCH ZASADNICZYCH.

---

§ 1.

Określenia i pojęcia wstępne.

Nazywamy formami geometrycznemi zasadniczemi gatunku 1-go następujące trzy figury geometryczne:

1) szereg punktów na prostej (prosta punktowa), t. j. ogół wszystkich punktów (elementów formy), położonych na prostej, którą nazywamy podkładem szeregu;

2) pęk prostych, t. j. ogół wszystkich prostych płaszczyzny, przechodzących przez jeden punkt (podkład lub środek pęku);

3) pęk płaszczyzn, t. j. ogół wszystkich płaszczyzn przestrzeni, przechodzących przez jednę prostą (podkład lub oś pęku).

Oznaczamy nazwą: formy geometryczne gatunku 2-go następujące cztery figury geometryczne:

1) płaszczyznę punktową, t j. ogół wszystkich punktów płaszczyzny;

2) płaszczyznę liniową, t. j. ogół wszystkich prostych płaszczyzny;

3) wiązkę prostych, t. j. ogół prostych przestrzeni, przechodzących przez jeden punkt;

4) wiązkę płaszczyzn, t. j. ogół wszystkich płaszczyzn przestrzeni, przechodzących przez jeden punkt.

Nazywamy wreszcie formami geometrycznemi gatunku 3-go figury następujące:

1) przestrzeń punktową, t. j. ogół wszystkich punktów przestrzeni;

2) przestrzeń płaszczyznową, t. j. ogół wszystkich płaszczyzn przestrzeni.

Dla krótkości nazywamy zwykle układem płaskim układ płaszczyzny punktowej i płaszczyzny liniowej, wiązką układ dwóch wiązek, a mianowicie wiązki prostych i wiązki płaszczyzn; przestrzenią układ dwu form gatunku 3-go.

Jeżeli jest dana forma geometryczna gatunku 1-go, to można ustanowić odpowiedniość pomiędzy jej elementami a liczbami szeregu naturalnego w ten sposób, że każdemu elementowi odpowiadać będzie jedna liczba, i każdej liczbie jeden i tylko jeden element; i nadto tak, że jeżeli ustalimy liczbę N i odpowiadający jej element a, to dawszy sobie ilość σ dowolnie małą, można zawsze znaleść inną ilość τ taką że dla wszystkich liczb, zawartych pomiędzy N i $N+\tau$, odpowiadające im elementy mają odległość od elementu a mniejszą od σ (jeżeli mowa o prostej punktowej) lub tworzą kąt z elementu a (jeżeli mowa o pękach), mniejszy od σ. Przy tych dwóch własnościach odpowiedniość nazywa się dwujednoznaczną i ciągłą.

Jeżeli jest dana forma geometryczna gatunku 2-go lub 3-go, to można podobnie ustanowić odpowiedniość dwujednoznaczną i ciągłą pomiędzy jej elementami a parami lub odpowiednio trójkami liczb naturalnych. „Odpowiedniość ciągła“ ma tu definicyę analogiczną do tej, jaką podaliśmy dla form gatunku 1-go.

Liczby, odpowiadające w ten sposób elementom formy danej, nazywają się spółrzędnemi elementów formy.

Formy 1-go, 2-go, 3-go gatunku są odpowiednio formami o jednej, dwóch, trzech spółrzędnych.

Mówi się też zwykle, że formy 1, 2, 3-go gatunku są odpowiednio jednego, dwu, trzech wymiarów, lub że mają $\infty^1, \infty^2, \infty^3$ elementów.

Wykonać ze środka stałego (środka rzutu) rzut figury, złożonej z punktów i prostych, znaczy wykreślić proste, przechodzące przez ten środek i przez punkty figury, oraz płaszczyzny, przechodzące przez środek stały i przez proste figury danej.

Wykonać z prostej stałej (osi rzutu) rzut figury złożonej z punktów, znaczy wykreślić płaszczyzny, przechodzące przez prostą stałą, i przez każdy z punktów danych.

Przeciąć płaszczyzną figurę, złożoną z płaszczyzn i prostych, znaczy wykreślić przecięcia tej płaszczyzny z płaszczyznami i prostemi danemi.

Przeciąć prostą figurę, złożoną z płaszczyzn, znaczy wykreślić przecięcia prostej ze wszystkiemi płaszczyznami figury.

Formy geometryczne jednego i tego samego gatunku otrzymują się jedna z drugiej za pomocą rzutów i przecięć.

W geometryi nowoczesnej wielkie znaczenie ma badanie odpowiedniości pomiędzy figurami lub formami geometrycznemi w celu wyprowadzania własności jednej figury z własności figury, jej odpowiadającej.

Odpowiedniość może być dwujednoznaczna lub nie. Jest dwujednoznaczną wtedy, gdy elementowi jednej formy odpowiada jeden i tylko jeden element drugiej, i odwrotnie.

Dwie formy, będące w odpowiedniości, mogą być nałożonemi jedna na drugą t. j. mieć ten sam podkład. W tym przypadku odpowiedniość może być tego rodzaju, że pewnemu elementowi odpowiada zawsze jeden i ten sam element, bez względu na to, czy element dany uważa się jako należący do jednej formy, lub jako należący do drugiej. Taka odpowiedniość nazywa się inwolucyjną; mówimy także, że wtedy elementy odpowiadają sobie sposobem podwójnym.

Do najprostszych odpowiedniości należą: rzutowość, zwaną także kolinearnością lub homografią (jednokreślnością) (której przypadkami szczególnemi są: homologia i perspektywiczność) oraz dwoistość (dualność), zwana też wzajemnością (korelacyą).

Mówimy o dwóch formach geometrycznych zasadniczych, że pozostają do siebie w związku rzutowym, lub że są w odpowiedniości rzutowej albo wprost rzutowemi, jeżeli pomiędzy ich elementami można ustanowić odpowiedniość taką, że jedna daje się otrzymać z drugiej za pomocą skończonej liczby rzutów lub przecięć. Zamiast nazwy „formy rzutowe“ można mówić „formy homograficzne“ lub „kolinearne“. Określenie to nie stosuje się do form gatunku 3-go, do których należy stosować definicyę następującą:

Dwie formy gatunku 2-go lub 3-go nazywają się rzutowemi, jeżeli elementy ich tego samego gatunku odpowiadają sobie dwujednoznacznie i w ten sposób, że elementom, należącym do siebie, odpowiadają również elementy, do siebie należące.

Dwie formy rzutowe względem trzeciej są rzutowemi względem siebie.

Dwie formy zasadnicze są perspektywicznemi w przypadkach następujących:

a) Dwa szeregi prostoliniowe punktowe, gdy są przecięciami jednego pęku promieni.

b) Dwa pęki płaszczyzn, jeżeli rzucają z dwu środków różnych ten sam pęk promieni.

c) Dwa pęki promieni, jeżeli z dwu środków różnych rzucają ten sam szereg prostoliniowy punktów lub są przecięciami tego samego pęku płaszczyzn.

d) Szereg punktowy i pęk promieni (lub płaszczyzn) lub pęk promieni i pęk płaszczyzn, jeżeli pierwsza forma jest przecięciem drugiej.

e) Dwie płaszczyzny punktowe lub liniowe, jeżeli są przecięciami tej samej wiązki.

f) Dwie wiązki, jeżeli rzucają z dwu środków rożnych tę samą płaszczyznę punktową lub liniową.

g) Płaszczyzna punktowa lub liniowa i wiązka, jeżeli pierwsza forma jest przecięciem drugiej.

Dwa układy płaskie, nałożone na siebie, nazywają się homologicznemi, jeżeli są przecięciami dwu wiązek perspektywicznych: dwie wiązki o tym samym środku nazywają się homologicznemi, jeżeli rzucają z jednego środka dwa układy płaskie homologiczne.

Dwa układy płaskie nazywają się wzajemnemi lub dwoistemi, jeżeli punktom jednego odpowiadają dwujednoznacznie proste drugiego, i odwrotnie w ten sposób, że należącym do siebie elementom pierwszego odpowiadają należące do siebie elementy drugiego.

Dwie przestrzenie nazywają się wzajemnemi lub dwoistemi, jeżeli punkty, proste i płaszczyzny jednej odpowiadają dwujednoznacznie płaszczyznom, prostym i punktom drugiego, w ten sposób, że elementom, do siebie należącym w jednej odpowiadają elementy, do siebie należące w drugiej.

Własnością rzutową figury nazywa się własność, która utrzymuje się, jeżeli zamiast tej figury weźmiemy inną, względem niej rzutową. Własność, zależąca istotnie od miary odległości, kątów, pól i t. p., nazywa się własnością miarową lub metryczną.

Niektóre własności miarowe mogą też być i rzutowemi.

Własność nazywa się graficzną lub opisową lub „własnością położenia“, gdy odnosi się wyłącznie do położenia elementów figury (np. jak przechodzenie linij lub powierzchni przez pewne punkty, wspólność pewnych punktów lub linij dla pewnych linij lub powierzchni), z zupełnem wyeliminowaniem pojęcia wielkości.

Każda własność graficzna jest zawsze rzutową.

Własności graficzne figury są podległe prawu, które nazywamy zasadą dwoistości lub zasadą wzajemności na płaszczyźnie i w przestrzeni

Każde twierdzenie, wyrażające własność graficzną figury płaskiej, utrzymuje się, jeżeli elementy „prosta“, „punkt“ przemienimy na elementy „punkt“, „prosta“, i za elementy, do siebie należące, podstawimy również należące do siebie elementy.

Każde twierdzenie, wyrażające własność graficzną bryły utrzymuje się, jeżeli przemienimy przedewszystkiem elementy „punkt“ i „płaszczyzna“ na elementy „płaszczyzna“, „punkt“, pozostawimy bez zmiany element „prosta“, a następnie za elementy, należące do siebie, podstawimy również elementy, należące do siebie.

Dwa działania: rzut ze środka (lub z osi) i przecięcie płaszczyzną (lub prostą) są dwoma działaniami dwoistemi w przestrzeni; rzut ze środka na płaszczyźnie i przecięcie prostą na płaszczyźnie są dwoma działaniami dwoistemi na płaszczyźnie.

Dwie formy geometryczne, wzajemne z trzecią, są rzutowemi względem siebie.

Dwoistość form nałożonych (mających wspólny podkład) może być także inwolucyjną i nazywa się wtedy biegunowością.

Zasada biegunowości jest więc tylko przypadkiem szczególnym dwoistości.

Według zasady dwoistości, krzywej płaskiej, uważanej za miejsce punktów, odpowiada krzywa, uważana jako obwiednia stycznych, t.j. punktom jednej krzywej odpowiadają styczne drugiej.

W geometryi zasadniczem jest pojęcie elementu w nieskończoności.

Mówimy, że:

Wszystkie proste równoległe na płaszczyźnie spotykają się w punkcie, znajdującym się w odległości nieskończonej;

na płaszczyźnie tyle jest punktów w odległości nieskończonej, ile jest możliwych kierunków prostej na tej płaszczyźnie;

wszystkie te punkty znajdują się na jednej prostej, która nazywa się prostą w nieskończoności na płaszczyźnie;

wszystkie płaszczyzny równoległe przestrzeni przecinają się według jednej prostej w odległości nieskończonej;

wszystkie proste w odległości nieskończonej w przestrzeni oraz wszystkie punkty w odległości nieskończonej znajdują się na jednej płaszczyźnie, którą nazywamy płaszczyzną w nieskończoności w przestrzeni.

W rozdziale następnym mówić będziemy o formach nieciągłych. Dla ułatwienia wszakże zrozumienia poniższego wykładu, musimy tu podać definicyę czworokąta i czworoboku zupełnego.

Czworokątem płaskim zupełnym nazywamy figurę, utworzoną z czterech punktów (wierzchołków) na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, i z sześciu prostych (boków), łączących każde dwa punkty. Trzy punkty spotkania boków przeciwległych (t. j. boków, nie przecinających się w jednym z danych wierzchołków) tworzą trójkąt, który nazywa się trójkątem przekątnym.

Czworobokiem płaskim zupełnym nazywamy figurę, złożoną z czterech prostych (boków) na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, t. j. z sześciu punktów (wierzchołków), w których te boki po dwa się spotykają. Trzy proste, łączące wierzchołki przeciwległe (t. j. nie leżące na jednym boku) tworzą tak nazwany trójbok przekątny.

§ 2.

Geometrya form 1-go gatunku.

1. Szereg punktów (prosta punktowa). Prostą przebiegać może punkt jej w dwu kierunkach, z których jeden nazywamy dodatnim, drugi ujemnym. Każdy odcinek prostej ma znak + lub —, stosownie do tego, czy jest przebiegany w kierunku dodatnim czy ujemnym.

Za pomocą symbolu AB oznaczać będziemy liczbę, mierzącą odcinek, idący od A aż do B. Jest $AB = - BA$.

Pomiędzy odcinkami, określonemi przez trzy punkty na prostej, zachodzi związek:

$$AB + BC + CA = 0 .$$

Pomiędzy odcinkami, określonemi przez cztery punkty A, B, C, D na prostej, zachodzi związek:

$$AB . CD + AC . DB + AD . BC = 0 .$$

Jeżeli przez $\delta_{12}, \delta_{13}, \ldots$ oznaczymy odległości punktów 1, 2 ; 1, 3 ;..., to pomiędzy odległościami trzech punktów na prostej zachodzi następujący związek (w postaci wyznacznika):

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & \delta_{12}^2, & \delta_{13}^2 \\ 1, & \delta_{21}^2, & 0, & \delta_{23}^2 \\ 1, & \delta_{31}^2, & \delta_{32}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Powiadamy, że cztery punkty A, B, C, D na prostej są harmonicznemi, jeżeli pomiędzy odcinkami, określonemi przez nie, zachodzi związek:

$$\frac{1}{AC}-\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}-\frac{1}{AD},$$

lub

$$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD},$$

lub wreszcie:

$$\frac{AC}{CB}=-\frac{AD}{DB}.$$

Jeżeli przez M oznaczymy środek odcinka AB, będzie:

$$MC\,.\,MD=\overline{MA}^2\,.$$

Punkty A i B nazywają się harmonicznie sprzężonemi; toż samo stosuje się do punktów C i D.

Geometrycznie można to tak wyrazić: cztery punkty A, B, C, D nazywają się harmonicznemi, jeżeli można wykreślić czworokąt zupełny taki, że dwa jego boki przeciwległe spotkają się w punkcie A, dwa drugie przeciwległe w punkcie B, piąty bok przejdzie przez punkt C, a bok szósty przeciwległy przez punkt D. Jeżeli można zbudować jeden taki czworokąt, to można ich zbudować nieskończenie wiele.

Jeżeli cztery punkty harmoniczne rzucimy ze środka na inną prostą, otrzymamy znowu cztery punkty harmoniczne.

Jeżeli mamy trzy punkty A, B, C oraz daną kolej, w jakiej je rozważać należy, to punkt czwarty D jest określony jednoznacznie przez to, że ma być do nich harmonicznym, t. j. ma być harmonicznie sprzężony z punktem C względem pary punktów A, B.

Jeżeli $ABCD$ jest formą harmoniczną, to będą również harmonicznemi formy $BACD$, $ABDC$, $BADC$.

W formie harmonicznej $ABCD$ punkty sprzężone A, B są koniecznie rozdzielone przez punkty C, D.

W czworoboku zupełnym każda przekątna jest podzielona harmonicznie przez dwie pozostałe.

Jeżeli mamy cztery punkty A, B, C, D na prostej, to stosunek odległości

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

nazywa się stosunkiem anharmonicznym albo dwustosunkiem (stosunkiem podwójnego podziału) czterech punktów i wyraża się symbolem $(ABCD)$.

Dwustosunek nie zmienia się skutkiem przemiany wzajemnej dwu punktów jednej pary i równoczesnej przemiany dwu drugich.

Jeżeli wykonamy wszystkie 24 przemiany pomiędzy czterema punktami, to dwustosunek przyjmuje tylko sześć różnych wartości, które wyrazić można łatwo za pomocą jednej z nich.

Jeżeli λ jest wartością dwustosunku $(ABCD)$, to wartościami temi są:

$$(ABCD) = \lambda \quad , \quad (ABDC) = \frac{1}{\lambda} \; ;$$

$$(ACBD) = 1 - \lambda \quad , \quad (ACDB) = \frac{1}{1-\lambda} \; ;$$

$$(ADBC) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \quad , \quad (ABDC) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \; .$$

Jeżeli dwa z pomiędzy czterech punktów zlewają się, to dwustosunek ma jednę z trzech wartości $0, 1, \infty$. Jeżeli cztery punkty są harmonicznemi, to dwustosunek przyjmuje jednę z wartości $-1, \frac{1}{2}, 2$.

Sześć stosunków anharmonicznych czterech punktów rzeczywistych są w ogóle nierówne, o ile nie zachodzi jeden z dwu przypadków poprzednich, w których są tylko trzy pary różnych wartości

Jeżeli jeden z punktów przechodzi do nieskończoności, to dwustosunek ma wartość

$$(ABC\infty) = \frac{AC}{BC}.$$

Jeżeli dwustosunek $(ABCD)$ równa się r, wtedy:

$$\frac{r-1}{AB} = \frac{r}{BC} - \frac{r}{AD}. \qquad \text{(Möbius)}$$

Ustaliwszy na prostej punkt O (początek), ustalmy kierunek dodatni i jednostkę miary. Każdy punkt prostej A można wtedy wyznaczyć za pomocą miary odległości jego od początku, biorąc tę liczbę ze znakiem $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy OA jest dodatnie lub ujemne.

Liczba dodatnia lub ujemna, odpowiadająca w ten sposób punktowi A, nazywa się spółrzędną zwyczajną (odciętą) tego punktu.

Niechaj teraz będą dwa punkty stałe A, B; dajmy, że mamy punkt trzeci C; stosunek

$$\frac{AC}{CB} = r$$

nazywa się spółrzędną barycentryczną punktu C.

Spółrzędna barycentryczna punktu w nieskończoności na prostej jest równa -1.

Jeżeli ustalimy trzy punkty A, B, C na prostej, to za spółrzędnę punktu jakiegokolwiek D tej prostej można przyjąć dwustosunek $(ABCD)$. Tę spółrzędnę można nazwać rzutową. Punkty A i B, mające za spółrzędne ∞ i 0, nazywają się zasadniczemi; punkt C mający za spółrzędnę 1, nazywa się punktem-jednością.

Przypadkiem szczególnym tych spółrzędnych są spółrzędne zwyczajne; dość przyjąć, że A

znajduje się w nieskończoności, B w początku spółrzędnych, C zaś w odległości $+1$ od B.

Tak więc: odległość dwu punktów równa się stosunkowi anharmonicznemu czwórki, utworzonej z dwu punktów danych, z punktu w nieskończoności i z punktu-jedności.

Jeżeli C jest punktem środkowym pomiędzy A i B, wtedy spółrzędne rzutowe stają się spółrzędnemi barycentrycznemi.

Powiemy teraz słów kilka o spółrzędnych jednorodnych punktów na prostej.

Dajmy, że ustaliliśmy na prostej pewien układ spółrzędnych; niechaj x będzie spółrzędna punktu P; nadajmy jej postać $x = \frac{x_1}{x_2}$. Ilości x_1, x_2, których stosunek określa spółrzędnę punktu P, nazywamy spółrzędnemi jednorodnemi.

Pomiędzy układami spółrzędnych jednorodnych zasługuje na uwagę następujący:

Niechaj A, B będą dwa punkty (podstawowe), p i q odległości punktu P od tych dwu punktów, tak że $p + q = AB$; wybrawszy dwie stałe a i b, położmy:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{bp}{aq},$$

wtedy każdemu punktowi P odpowiadać będzie para wartości x_1, x_2 których stosunek jest stały, i każdej parze takich wartości odpowiadać będzie jedyny punkt P. Ilości x_1, x_2 można uważać za spółrzędne jednorodne punktu na prostej; wartości $x_1 = 0$ odpowiada punkt A, wartości $x_2 = 0$ punkt B; punkt w nieskończoności ma spółrzędne $x_1 = -b, x_2 = a$. Punkt U, dla którego $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$, nazywa się punktem-jednością.

Ten układ spółrzędnych jednorodnych zawiera w sobie jako przypadek szczególny układ spółrzędnych zwyczajnych (odciętych) nie-

jednorodnych; dość w tym celu założyć, że B oddala się do nieskończoności. Lecz wtedy nie ma potrzeby rozważania spółrzędnej x_2, gdyż q jest zawsze nieskończone, a położenie punktu wyznacza się przez samo x_1, t. j. przez odległość punktu od punktu A.

Łatwo zresztą widzieć, że ponieważ stosunek $\frac{x_1}{x_2}$ można napisać w postaci $\frac{b}{a} : \frac{q}{p}$ (gdzie $\frac{b}{a}$ jest stosunkiem odległości punktu-jedności U od punktów B i A), więc wyraża on dwustosunek czterech punktów $BAUP$. Stąd, w istocie rzeczy, rozważany układ spółrzędnych nie różni się od tego, który otrzymujemy, biorąc w postaci jednorodnej sposobem zwykłym *spółrzędnę rzutową*; układ ten przeto jest *układem spółrzędnych jednorodnych rzutowych*.

Jeżeli spółrzędnej punktu prostej nadamy wartości urojone, to możemy wprowadzić też utwory, które nazwiemy *punktami urojonemi prostej*.

W spółrzędnych zwyczajnych dwustosunek czterech punktów wyraża się za pomocą wzoru:

$$\frac{x - x''}{x' - x''} : \frac{x - x'''}{x' - x'''},$$

gdzie x, x', x'', x''' *są odciętemi czterech punktów danych*. Za pomocą tego wzoru można też obliczyć dwustosunek punktów urojonych prostej.

Rozszerzywszy tym sposobem pojęcie dwustosunku, znajdujemy jeszcze jeden przypadek, prócz wyżej podanych, w którym *sześć wartości dwustosunku nie są wszystkie różne*. Ten przypadek zachodzi wtedy, *jeżeli wartość jednego z dwustosunków jest pierwiastkiem sześciennym zespolonym z jedności ujemnej*. Wtedy cztery punkty nazywają się *równoanharmonicznemi*, a *sześć dwustosunków redukuje się do dwu różnych*.

Mówimy, że równanie algebraiczne względem x stopnia n-tego *przedstawia grupę n punktów na prostej*;

rozumieć to należy w ten sposób, że jeżeli pomyślimy równanie jako rozwiązane, to pierwiastki jego należy uważać jako spółrzędne n punktów (rzeczywistych lub zespolonych) na prostej.

Dwa szeregi punktów na prostej są rzutowemi (homograficznemi lub kolinearnemi, patrz § 1), jeżeli każdemu punktowi jednego odpowiada jeden i tylko jeden punkt drugiego, a dwustosunek czterech punktów na jednym równa się dwustosunkowi odpowiednich czterech punktów na drugim.

Ta własność może też służyć za podstawę definicyi rzutowych szeregów punktów.

Inne określenie (v. Staudta) jest następujące:

Dwa szeregi punktów na prostej nazywamy odniesionemi do siebie rzutowo lub wzajemnie, jeżeli są w takim związku, że grupom harmonicznym jednego odpowiadają grupy harmoniczne drugiego.

Punkt prostej punktowej, odpowiadający punktowi w nieskończoności na drugiej prostej punktowej, nazywa się punktem zbiegu lub punktem granicznym.

Jeżeli oba punkty zbiegu są w nieskończoności, proste punktowe nazywają się podobnemi.

Można określić rzutowość jeszcze następującym sposobem:

Dwie proste punktowe nazywają się rzutowemi wzajemnie, jeżeli odpowiadają sobie w ten sposób, iż od punktów jednej przechodzi się do punktów drugiej za pomocą skończonej liczby rzutów i przecięć.

Odpowiedniość jest określona, jeżeli są ustalone dowolnie trzy pary punktów odpowiednich.

Jeżeli x i y są spółrzędne zwyczajne punktów dwu prostych punktowych, to związek dwuliniowy typu

$$axy + bx + cy + d = 0$$

jest związkiem, jaki powinien zachodzić między spółrzędnemi, aby obie proste były rzutowemi (równanie rzutowości).

Jeżeli I' i J są punktami zbiegu dwu prostych punktowych, wzajemnie rzutowych, A, A zaś dwoma punktami odpowiedniemi, wtedy iloczyn $JA . I'A'$ jest stały, niezależnie od wyboru pary A, A'. W dwu prostych punktowych podobnych, stosunek dwu odcinków odpowiednich (stosunek podobieństwa) jest stały.

Jeżeli ten stosunek jest ± 1, wtedy obie proste punktowe nazywają się przystającemi (równemi).

Jeżeli dwie proste punktowe wzajemnie rzutowe o podkładach różnych mają jeden punkt zjednoczony (t. j. punkt odpowiadający samemu sobie), to są perspektywicznemi.

Jeżeli dane są trzy pary AA', BB', CC' elementów, odpowiadających sobie w dwóch prostych punktowych, to dla wykreślenia innych par punktów, t. j., jak się mówi, dla wykreślenia rzutowości, postępujemy tak: Na prostej, łączącej punkty odpowiednie, np. A i A', bierzemy dwa środki S, S'; prowadzimy proste SB i $S'B'$, które przecinają się w B''; prowadzimy dalej proste SC i $S'C'$, które przecinają się w C''; łączymy B'' i C''; z punktu D pierwszej prostej punktowej przy pomocy rzutu z punktu S otrzymujemy punkt D'' na $B''C''$; rzucamy z punktu S' punkt D'' i w punkcie spotkania z drugą prostą znajdujemy punkt D', odpowiadający punktowi D.

Jeżeli obie proste punktowe są nałożone jedna na drugą, wtedy rzucamy jednę z nich ze środka, znajdującego się na drugiej, i postępujemy, jak poprzednio.

Jeżeli wybierzemy punkty S i S' w punktach A' i A, wtedy prosta $B''C''$ nazywa się osią rzutowości albo osią (homografii) jednokreślności. Przecina ona dwie proste punktowe w punktach, odpowiadających ich punktowi wspólnemu. Własność tej osi podajemy niżej.

Jeżeli podkładem dwóch prostych homograficznych jest jedna i ta sama prosta, wtedy te proste nazywamy nałożonemi.

Dwie proste punktowe homograficzne nałożone, jeżeli nie zlewają się zupełnie (to jest gdy ich elementy nie są wszystkie zjednoczone) mogą mieć co najwyżej dwa punkty rzeczywiste zjednoczone. Spółrzędne tych punktów są pierwiastkami równania:

$$ax^2 + (b + c)x + d = 0.$$

Punkty zjednoczone nazywają się inaczej punktami podwójnemi lub ogniskami.

Jeżeli pierwiastki tego równania są urojone, to mówimy, że istnieją dwa punkty zjednoczone urojone.

Środek odcinka, ograniczonego dwoma punktami zjednoczonemi, zlewa się ze środkiem odcinka, ograniczonego dwoma punktami zbiegu.

W dwu prostych homograficznych nałożonych dwustosunek jakichkolwiek dwu punktów względem punktów zjednoczonych jest stały.

Odpowiedniość takich dwóch prostych punktowych jest inwolucyjna (t. j. punktowi odpowiada zawsze drugi ten sam), wtedy tylko, gdy ten dwustosunek ma wartość $+1$ lub -1.

W pierwszym przypadku obie proste punktowe są identyczne, w drugim tworzą homografię inwolucyjną lub wprost inwolucyę (Desargues).

Analitycznie inwolucya określa się równaniem typu:

$$axy + b(x + y) + d = 0.$$

Punkty zjednoczone inwolucyi dane są przez równanie:

$$ax^2 + 2bx + d = 0.$$

Jeżeli spółczynniki a, b, d są rzeczywiste, inwolucya będzie hyperboliczną, gdy punkty zjednoczone są rzeczywiste;

eliptyczną, gdy są urojone; paraboliczną, gdy punkty zjednoczone zlewają się.

W przypadku inwolucyi dwa punkty graniczne zlewają się w jeden punkt, zwany środkiem inwolucyi, który jest punktem środkowym odcinka, określonego przez dwa punkty zjednoczone.

Jeżeli w dwóch prostych punktowych homograficznych nałożonych istnieją dwa punkty różne, odpowiadające sobie w sposób podwójny (patrz § 1), to też samo zachodzić będzie dla dwu punktów odpowiednich jakichkolwiek, i będziemy mieli inwolucyę.

Jeżeli O jest środkiem inwolucyi, zaś A i A' są dwoma punktami odpowiadającemi sobie, będzie zawsze:

$$OA \,.\, OA' = \text{const.}$$

Inwolucya jest określoną przez dwie pary punktów sobie odpowiadających A, A'; B, B'.

Jeżeli mamy dwie pary odpowiadających sobie punktów, to dla wykreślenia inwolucyi postępujemy tak: przyjmujemy punkt dowolny G zewnątrz prostej i opisujemy koła GAA', GBB' które niechaj przecinają się nadto w punkcie H. Punkt O, w którym prosta dana spotyka prostą, GH jest środkiem inwolucyi, a każde koło, opisane na GH, spotyka prostą daną w dwu odpowiadających sobie punktach inwolucyi.

Jeżeli AA', BB', CC' są trzema parami punktów w inwolucyi, wtedy pomiędzy odcinkami, jakie te punkty określają na prostej, zachodzi związek:

$$AB' \,.\, BC' \,.\, CA' + A'B \,.\, B'C \,.\, C'A = 0\,.$$

Jeżeli $x_1, y_1; x_2, y_2$ są spółrzędnemi punktów A, A'; B, B', wtedy:

$$\begin{vmatrix} xy \,, & x+y \,, & 1 \\ x_1y_1 \,, & x_1+y_1 \,, & 1 \\ x_2y_2 \,, & x_2+y_2 \,, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

jest równaniem inwolucyi.

Jeżeli $f_1(x) = 0$ jest równaniem stopnia 2-go, którego pierwiastkami są x_1, y_1; $f_2(x) = 0$ równaniem stopnia 2-go, którego pierwiastkami są x_2, y_2, to równanie inwolucyi jest postaci:

$$f_1(x) + \lambda f_2(x) = 0 .$$

Jeżeli kąt prosty obraca się około swego wierzchołka na własnej płaszczyźnie, wtedy ramiona jego opisują na jednej prostej dwa szeregi punktów, będące w inwolucyi.

Przecinając trzy pary boków przeciwległych czworokąta zupełnego dowolną poprzeczną, otrzymujemy trzy pary punktów, będących w inwolucyi.

Sześć punktów, które otrzymujemy, rzucając z dowolnego środka na prostą trzy pary przeciwległych wierzchołków czworoboku zupełnego, tworzą parami inwolucyę.

Jeżeli w dwóch prostych homograficznych nałożonych AA', BB' są parami elementów odpowiadających sobie, zaś E i F są dwoma punktami zjednoczonemi (różnemi lub nie), wtedy EF; AB'; BA' będą trzema parami punktów w inwolucyi.

Rzutowość nałożonych szeregów punktów na prostej może być kołową (cykliczną) rzędu n-tego, t. j. taką, że gdy mając punkt A, szukamy odpowiadającego mu punktu A', następnie uważając ten punkt A' za należący do szeregu pierwszego, szukamy odpowiadającego mu w szeregu drugim punktu A'' i tak dalej, to po n takich działaniach dochodzimy do punktu początkowego A.

Inwolucya jest rzutowością kołową rzędu 2-go.

Jeżeli punkty zjednoczone przyjmiemy za punkty podstawowe spółrzędnych rzutowych (niejednorodnych), wtedy równanie rzutowości kołowej rzędu n-tego można będzie napisać w postaci $y - \varepsilon x = 0$, gdzie ε jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia n-tego z jedności.

Rzutowość kołową nazwał tak Clebsch (Crelle t XVIII); zajmowali się nią pierwsi Möbius (Werke II); Battaglini (Acc. Napoli 1863), który nazywał ją inwolucyą rzędu wyższego.

Do odpowiedniości ogólnych pomiędzy dwiema nałożonemi prostemi punktowemi (i w ogóle pomiędzy nałożonemi dwiema formami zasadniczemi gatunku 1-go, stosuje się następujące ważne twierdzenie, zwane zasadą odpowiedniości Chasles'a:

Jeżeli pomiędzy dwoma nałożonemi szeregami prostoliniowemi punktów ustanowimy odpowiedniość taką, że każdemu punktowi jednego odpowiada m punktów drugiego, a każdemu punktowi drugiego n punktów pierwszego, to w tych szeregach będzie $m + n$ punktów, odpowiadających samym sobie (Chasles, Compt. Rend 1864, 1866).

2. Pęk prostych. Wybierzmy w pęku pewną prostą za prostą początkową; obracając tę prostą około środka, otrzymamy sam pęk. Obrót ten dokonywać się może w dwóch zwrotach; zgódźmy się nazywać obrotem dodatnim ten, który dokonywa się w pewnym zwrocie oznaczonym; ujemnym ten, który dokonywa się w zwrocie przeciwnym. Jeżeli a i b są dwie proste pęku, to przez kąt (a, b) rozumieć będziemy kąt najmniejszy, jaki winien opisać promień a w zwrocie dodatnim, aby zlał się z promieniem b. Liczba mierząca kąt, który prosta początkowa tworzy z każdą z prostych pęku, może być nazwaną spółrzędną zwyczajną albo anomalią tej drugiej prostej. Jest $(ba) + (ab) = \pi$.

Dwustosunkiem czterech promieni pęku jest dwustosunek czterech punktów, w których pęk ten przecina jakakolwiek poprzeczna. Dwustosunek ten przedstawiają też wyrażenia:

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)},$$

$$(abcd) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

gdzie CA, CB, DA, DB są odległościami dwu punktów C, D promieni c, d od promieni a, b.

Kładąc $(abcd) = r$, mamy:

$$\frac{r-1}{\operatorname{tg}(ab)} = \frac{r}{\operatorname{tg}(ac)} - \frac{r}{\operatorname{tg}(ad)}. \qquad \text{(Möbius)}$$

Jeżeli $(abcd) = -1$, to cztery proste nazywają się harmonicznemi.

Cztery promienie pęku są harmonicznemi, jeżeli można zbudować czworobok zupełny w ten sposób, by dwa jego wierzchołki przeciwległe znajdowały się na a, dwa przeciwległe na b, piąty na c, szósty na d.

Jeżeli można wykreślić jeden taki czworobok, to można wykreślić ich nieskończenie wiele.

Ustalmy w pęku dwa promienie a i b; za spółrzędne promienia a można wziąć stosnnek $\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)}$. Otrzymujemy tym sposobem układ spółrzędnych analogicznych do układu barycentrycznego dla szeregu punktów.

Jeżeli zaś ustalimy trzy promienie a, b, c, to można za spółrzędne promienia d wziąć stosunek anharmoniczny $(abcd)$; otrzymujemy tym sposobem układ spółrzędnych rzutowych.

Jeżeli spółrzędnym nadawać będziemy wartości urojone, otrzymamy proste urojone pęku (przez definicyę).

Dwa pęki prostych są homograficznemi, kolinearnemi albo rzutowemi, jeżeli odpowiadają sobie wzajemnie w ten sposób, iż stosunek anharmoniczny czterech promieni jednego z nich równa się zawsze stosunkowi anharmonicznemu czterech odpowiednich (sprzężonych) promieni drugiego.

Tu, podobnie jak dla prostych punktowych, można własność tę przyjąć za definicyę pęków rzutowych.

Inna definicya (v. *Staudta*) jest następująca: *Dwa pęki są rzutowemi, gdy odpowiadają sobie w ten sposób, iż grupom harmonicznym jednego odpowiadają grupy harmoniczne drugiego.*

Jeżeli oba pęki mają ten sam środek (podkład), *wtedy będą zawsze dwa promienie* (rzeczywiste lub urojone), *odpowiadające samym sobie* (*promienie zjednoczone lub podwójne*).

Jeżeli ta odpowiedniość jest *inwolucyjną* (nie będąc taką, że każdy promień odpowiada samemu sobie), wtedy mówimy, że pary promieni odpowiednich tworzą *inwolucyę*. *Dwie proste sprzężone* (*odpowiadające sobie*) *są wtedy harmonicznemi z dwiema prostemi podwójnemi.*

Podobnie, jak dla prostych punktowych, można tu określić *rzutowość kołową rzędu* n-tego.

Ramiona kąta prostego, obracającego się w swej płaszczyźnie około wierzchołka, opisują dwa pęki promieni w inwolucyi. Promienie podwójne są urojonemi i idą ku dwóm punktom kołowym (patrz § 3).

Rzucając z dowolnego środka trzy pary wierzchołków przeciwległych czworoboku zupełnego, otrzymujemy trzy pary promieni, będących w inwolucyi.

Jednokreślność (*homografia*) *dwóch pęków promieni jest określona przez trzy pary odpowiadających sobie elementów.*

Jeżeli dwa pęki homograficzne o różnych środkach mają promień wspólny, to są perspektywicznemi.

Dla wykreślenia homografii dwu pęków promieni, mając trzy pary aa', bb', cc' odpowiadających sobie promieni, postępujemy w sposób odpowiadający temu, jakiego użyliśmy w przypadku dwóch szeregów punktów. Przez punkt wspólny dwóm odpowiadającym sobie promieniom a, a' prowadzimy dwie proste s, s'; niechaj b'' będzie prosta, łącząca punkty $sb, s'b'$; c'' prosta, łącząca punkty $sc, s'c'$; punkt $b''c''$ jest środkiem pęku, który będzie perspektywicznym względem obu pęków danych. Jeżeli więc damy sobie promień d pierwszego pęku, to znajdziemy punkt jego spotkania z s; ten punkt łączymy z punktem $b''c''$, znajdujemy punkt spotkania tegoż promienia z s'; prosta, łącząca środek drugiego pęku z tym drugim punktem, będzie promieniem d', odpowiadającym promieniowi d.

Jeżeli za s, s' weźmiemy odpowiednio proste a', a, to proste, łączące punkty $ab'. ba'$; ac', ca'; bc', cb';... spotkają się w jednym punkcie, który nazywa się środkiem rzutowości lub homografii obu pęków.

Środek rzutowości ma tę własność, iż każda prosta, przezeń przechodząca, przecina pęki według dwóch prostych punktowych w inwolucyi; i odwrotnie, każda taka prosta przechodzi przez ten środek

Oś rzutowości dwóch prostych punktowych wzajemnie rzutowych ma własność odpowiednią, której tu wysławiać nie potrzebujemy.

Dwa pęki promieni nazywają się podobnemi (środki ich są w nieskończoności), gdy przecięcie jednego jest podobne do przecięcia drugiego.

Dwa pęki promieni nazywają się równemi, gdy jeden z nich rożni się od drugiego tylko położeniem.

Dwa pęki równe są rzutowemi.

3. Pęki płaszczyzn. Geometrya pęku płaszczyzn zasadniczo nie różni się niczem od geometryi prostej punktowej i pęku prostych. Można do niej wprowadzić wszystkie pojęcia wyżej podane, a mianowicie: spółrzędne, dwustosunek, harmonię, homografię, inwolucyę

§ 3.

Geometrya form gatunku 2-go. Płaszczyzna punktowa i liniowa.

Pomiędzy polami trójkątów, których wierzchołki znajdują się w pięciu punktach danych A, B, C, D, E, F płaszczyzny, zachodzi związek:

$$ABE \,.\, CDE + BCE \,.\, ADE + CAE \,.\, BDE = 0\,,$$

a dla sześciu punktów płaszczyzny związek:

$$ABC \,.\, DEF + ACD \,.\, BEF + ADB \,.\, CEF = BCD \,.\, AEF$$

(Monge, Möbius).

Jeżeli $\delta_{12}, \delta_{13}, \ldots$ oznaczają odległości każdych dwóch z pomiędzy czterech punktów A_1, A_2, A_3, A_4 płaszczyzny, to pomiędzy temi wielkościami zachodzi związek:

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & \delta_{14}^2, & \delta_{24}^2, & \delta_{34}^2 \\ 1, & \delta_{41}^2, & 0, & \delta_{21}^2, & \delta_{31}^2 \\ 1, & \delta_{42}^2, & \delta_{12}^2, & 0, & \delta_{32}^2 \\ 1, & \delta_{43}^2, & \delta_{13}^2, & \delta_{23}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Dajmy, że na płaszczyźnie nakreśliliśmy dwie proste — osi spółrzędnych, spotykające się w punkcie O — początku spółrzędnych. Na tych dwu prostych ustalmy w pewien sposób dwa układy spółrzędnych zwyczajnych, jak w § 2, biorąc w każdym z nich punkt O za początek. Przez każdy punkt P płaszczyzny przechodzić będzie prosta równoległa do pierwszej osi i prosta równoległa do drugiej; każdy punkt płaszczyzny rzucony będzie za pomocą rzutu równoległego do drugiej na jeden i tylko jeden punkt P' pierwszej, a za pomocą rzutu równoległego do pierwszej na jeden i tylko jeden punkt P'' drugiej. Spółrzędne punktów P' i P'' można przyjąć za spółrzędne punktu P; nazywają się one spółrzędnemi kartezyańskiemi (Descartes'a). Przypadek najprostszy otrzymujemy, zakładając, że proste dane są prostopadłe i równając jednostki miary, przy pomocy których na tych dwóch prostych mierzymy spółrzędne punktów P' i P''. Oznaczamy przez x, y spółrzędne punktów pierwszej i drugiej prostej; pierwszą z nich nazywamy osią x-ów, drugą osią y-ów.

Innym układem spółrzędnych punktów płaszczyzny jest tak nazwany układ spółrzędnych biegunowych. Ustalmy na płaszczyźnie punkt O — biegun — i prostą — oś biegunową — stałego kierunku przyjętego za dodatni, wychodzącą z tego punktu. Punkt P' płaszczyzny będzie wyznaczony przez jego odległość (zawsze dodatnią) od punktu O i przez rozwartość kąta (dodatniego lub ujemnego), który opisuje prosta kierunku dodatniego OA, obracająca się w zwrocie dodatnim lub ujemnym (patrz § 2) aż do zejścia się z prostą OP.

Istnieje i inny układ spółrzędnych zwany dwubiegunowym. Ustalamy na płaszczyźnie dwa punkty O i O', jako środki dwu pęków; przez każdy punkt P płaszczyzny przechodzi promień pierwszego pęku i promień drugiego; spółrzędne tych dwu promieni w każdym z pęków można przyjąć za spółrzędne punktu P.

Jeżeli spółrzędne x, y punktu na płaszczyźnie weźmiemy w postaci $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, wtedy ilości x_1, x_2, x_3 nazywają się spółrzędnemi jednorodnemi punktu płaszczyzny. Pomiędzy układami spółczesnych jednorodnych na szczególną uwagę zasługuje układ, zwany trójliniowym (trymetrycznym).

Niechaj będą trzy proste na płaszczyznie, nie przechodzące przez jeden punkt; oznaczmy przez p, q, r odległości punktu P płaszczyzny od trzech prostych, przez a, b, c trzy jakiekolwiek stałe, i weżmy trzy ilości x_1, x_2, x_3 proporcyonalne do stosunków $\frac{p}{a}, \frac{q}{b}, \frac{r}{c}$. Można okazać, że w ten sposób każdej trójce wartości $\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3$, gdzie ϱ jest czynnikiem proporcyonalności, odpowiada jedyny punkt płaszczyzny, i odwrotnie, tak że x_1, x_2, x_3 mogą przedstawiać układ spółrzędnych jednorodnych. Wierzchołki trójkąta ABC, utworzonego przez trzy proste, mają za spółrzędne odpowiednio $0, 0, x_3$; $0, x_2, 0$; $x_1, 0, 0$. Trójkąt ABC nazywa się trójkątem podstawowym spółrzędnych.

Istnieje na płaszczyźnie punkt U taki, że odległości jego od trzech prostych są proporcyonalne do a, b, c; jego spółrzędnemi jednorodnemi są $1, 1, 1$; i dla tego punkt ten nazywa się punktem — jednością.

Stosunek dwu ze spółrzędnych punktu P, np. stosunek $\frac{x_1}{x_2}$ lub $\frac{x_3}{x_3}$ można przedstawić jako dwustosunek pęku promieni, gdyż $\frac{x_1}{x_3} = \frac{c}{a} : \frac{r}{p}$, $\frac{x_2}{x_3} = \frac{c}{b} : \frac{r}{q}$, a strony drugie są równe dwustosunkom czterech promieni pęków $B(A, C, U, P)$ i $A(B, C, U, P)$. Stąd układ uważanych spółrzędnych jest układem spółrzędnych jednorodnych rzutowych.

Jeżeli U jest środkiem koła wpisanego w trójkąt podstawowy, to spółrzędne x_1, x_2, x_3 punktu P są proporcyonalne do odległości tego punktu od trzech boków trójkąta podstawowego.

Jeżeli jeden z boków trójkąta podstawowego staje się prostą w nieskończoności na płaszczyźnie, to układ spółrzędnych trójliniowych (jednorodnych) zamienia się na układ spółrzędnych Descartes'a (niejednorodnych).

Wzory ogólne na przekształcenie jednego układu spółrzędnych Descartes'a na inny taki układ są następujące: Jeżeli x, y są spółrzędne punktu w odniesieniu do dwu osi, przechodzących przez punkt O i tworzących ze sobą kąt ω; X, Y — spółrzędne tegoż punktu w odniesieniu do innych osi, przechodzących przez punkt O', którego spółrzędnemi względem osi dawnych są a, b, wtedy:

$$x = a + X\frac{\sin\beta}{\sin\omega} + Y\frac{\sin\beta'}{\sin\omega},$$

$$y = b + X\frac{\sin\alpha}{\sin\omega} + X\frac{\sin\alpha'}{\sin\omega},$$

gdzie α, β są kąty, które nowa oś X tworzy z dawnemi, α', β'—kąty, które z dawnemi osiami tworzy nowa oś Y. (Jest $\alpha+\beta=\alpha'+\beta'=\omega$; przez kąt pomiędzy osiami rozumie się kąt pomiędzy kierunkami dodatniemi osi).

Wyznacznik spółczynników przy X i Y w tych wzorach równa się $\frac{\sin\Omega}{\sin\omega}$, gdzie Ω jest kąt pomiędzy nowemi osiami.

Jeżeli oba układy spółrzędnych są prostokątne i jeżeli α jest kątem, który nowa oś X tworzy z dawną osią x, wtedy wzory na przekształcenie przybierają postać:

$$x = a + X\cos\alpha \pm Y\sin\alpha,$$

$$y = b + X\sin\alpha \mp Y\cos\alpha,$$

gdzie bierzemy znaki górne lub dolne, stosownie do tego, czy osi Y i y tworzą ze sobą kąt α lub $\pi - \alpha$.

Wzory na przekształcenie spółrzędnych prostokątnych Descartes'a na spółrzędne biegunowe są:

$$x = \varrho\cos\varphi \quad , \quad y = \varrho\sin\varphi \quad , \quad \varrho = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

gdzie ϱ, φ są spółrzędne biegunowe punktu o spółrzędnych kartezyańskich x, y, i gdzie zakłada się, iż biegun przypada w początku spółrzędnych, a oś biegunowa zlewa się z osią, na której liczymy spółrzędne x.

Jeżeli $x, y; x', y'$ są spółrzędne kartezyańskie dwu punktów, to odległość tych punktów wyraża się wzorem:

$$\varrho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + 2\,(x' - x)\,(y' - y) \cos \omega ,$$

gdzie ω jest kąt pomiędzy osiami.

Jeżeli α, β są kąty, które prosta na płaszczyźnie tworzy z osiami spółrzędnych, to zachodzi następujący związek zasadniczy:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \omega = \sin^2 \omega .$$

Jeżeli $\alpha, \beta; \alpha', \beta'$ są kąty, które dwie proste r, r' tworzą z osiami spółrzędnych, to kąt pomiędzy prostemi wyrażają wzory:

$$\cos (r, r') = - \frac{1}{\sin^2 \omega} \begin{vmatrix} 1 , & \cos \omega , & \cos \alpha \\ \cos \omega , & 1 , & \cos \beta \\ \cos \alpha' , & \cos \beta' , & 1 \end{vmatrix} ,$$

$$\sin (r, r') = - \frac{1}{\sin \omega} \begin{vmatrix} \cos \alpha , & \cos \beta \\ \cos \alpha' , & \cos \beta' \end{vmatrix} .$$

Warunek, aby dwie proste były wzajemnie prostopadłe, wyraża się tak:

$$\begin{vmatrix} 1 , & \cos \omega , & \cos \alpha \\ \cos \omega , & 1 , & \cos \beta \\ \cos \alpha' , & \cos \beta' , & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

a warunek, aby były równoległemi, jest:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha , & \cos \beta \\ \cos \alpha' , & \cos \beta' \end{vmatrix} = 0 .$$

Jeżeli układ jest prostokątny, to warunki te przybierają postać:

$$\cos(r\ r') = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta'$$

$$\sin(r, r') = \cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta\ .$$

Jeżeli x, y; $x'\ y'$; $x''\ y''$ są spółrzędne trzech wierzchołków trójkąta, to pole jego w wartości bezwzględnej wyraża wzór:

$$\frac{1}{2}\sin\omega \begin{vmatrix} x\ , & y\ , & 1 \\ x'\ , & y'\ , & 1 \\ x''\ , & y''\ , & 1 \end{vmatrix} .$$

Warunek, aby trzy punkty o spółrzędnych x, y; $x'\ y'$; $x''\ y''$ znajdowały się na jednej prostej, wyraża wzór:

$$\begin{vmatrix} x\ , & y\ , & 1 \\ x'\ , & y'\ , & 1 \\ x''\ , & y''\ , & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie pomiędzy spółrzędnemi punktu płaszczyzny przedstawia miejsce punktów.

Pomiędzy spółrzędnemi x, y punktu, należącego do prostej zachodzi związek stopnia 1-go (równanie prostej) typu:

$$ax + by + c = 0\ ,$$

gdzie a, b, c są spółczynniki stałe.

Równanie prostej, przechodzącej przez dwa punkty o spółrzędnych x', y'; x'', y'', można napisać w jednej z dwu następujących postaci:

$$\frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}\,;\quad \begin{vmatrix} x\,, & y\,, & 1 \\ x'\,, & y'\,, & 1 \\ x''\,, & y''\,, & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Spółrzędne punktu, znajdującego się na prostej, określonej przez dwa punkty (x', y'); (x'', y''), można wyrazić w ten sposób:

$$\left(\frac{x'+\lambda x''}{1+\lambda}\,,\ \frac{y'+\lambda y''}{1+\lambda}\right).$$

Punkty:

$$\left(\frac{x'+\lambda x''}{1+\lambda}\,,\ \frac{y'+\lambda y''}{1+\lambda}\right),\ \left(\frac{x'-\lambda x''}{1-\lambda}\,,\ \frac{y'-\lambda y''}{1-\lambda}\right),$$

dzielą harmonicznie odcinek, określony przez punkty $(x'\,y', x''\,y'')$.

Jeżeli przyjmiemy, że układ osi jest prostokątny i napiszemy równanie prostej w postaci $y = Ax + B$, to spółczynnik A nazywa się spółczynnikiem kątowym prostej i przedstawia styczną trygonometryczną kąta, który prosta tworzy z osią x.

Jeżeli przez α, β oznaczymy kąty, które prostopadła do prostej tworzy z osiami spółrzędnych, przez ϱ odległość początku spółrzędnych od prostej, to równanie jej można będzie napisać w postaci, t. zw. równania normalnego

$$x \cos\alpha + y\cos\beta - \varrho = 0\,.$$

Dla sprowadzenia równania $ax + by + c = 0$ do postaci normalnej dość spółczynnik jego pomnożyć przez

$$\frac{\sin\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2\,ab\cos\omega}}$$

gdzie pierwiastnik należy wziąć ze znakiem + lub —, stosownie do tego, czy iloczyn $c \sin\omega$ jest ujemny lub dodatni.

Jeżeli $ax + by + c = 0$ jest równaniem prostej, to kąty, jakie prosta tworzy z osiami spółrzędnych, wyrażają wzory:

$$\cos \alpha = \frac{a \sin \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega}}, \quad \cos \beta = \frac{b \sin \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega}},$$

ω jest kąt pomiędzy osiami; odległość zaś prostej od początku spółrzędnych daje wzór:

$$\varrho = - \frac{c \sin \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega}},$$

gdzie co do znaku należy stosować to samo prawidło, co wyżej.

Odległość punktu o spółrzędnych X, Y od prostej $ax + by + c = 0$ wyraża się wzorem:

$$- \frac{(aX + bY + c) . \sin \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega}}$$

gdzie co do znaku stosujemy uwagę powyższą: odległość ta będzie dodatnia lub ujemna, stosownie do tego, czy punkt względem prostej znajduje się po tej samej stronie, co początek spółrzędnych, czy po stronie przeciwległej.

Spółrzędne punktu przecięcia dwu prostych $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ wyznaczają się z wzorów:

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b},$$

kąt zaś pomiędzy dwiema prostemi z wzorów:

$$\sin \varphi = \frac{(ab' - a'b) \sin \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega} \, . \, \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos \omega}}$$

$$\cos \varphi = \frac{aa' + bb' - (ab' + a'b) \cos \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos \omega}}.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym równoległości dwu prostych jest $ab' - a'b = 0$; warunkiem koniecznym i dostatecznym prostopadłości dwu prostych jest $aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\omega = 0$.

Równaniem prostej, przechodzącej przez punkt $(x'y')$ i prostopadłej do prostej $ax + by + c = 0$, jest:

$$\frac{x - x'}{a - b\cos\omega} = \frac{y - y'}{b - a\cos\omega}.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby trzy proste $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, $a''x + b''y + c'' = 0$ przechodziły przez jeden punkt, jest:

$$\begin{vmatrix} a & , b & , c \\ a' & , b' & , c' \\ a'' & , b'' & , c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Pole trójkąta, ograniczonego temi trzema prostemi, jest:

$$\frac{\begin{vmatrix} a & , b & , c \\ a' & , b' & , c' \\ a'' & , b'' & , c'' \end{vmatrix}^2}{(ab' - a'b)(a'b'' - a''b')(a''b - ab'')} \sin\omega$$

Jeżeli położymy $\dfrac{a}{c} = u$, $\dfrac{b}{c} = v$, to równanie prostej przejdzie na następujące:

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Jeżeli w równaniu tem będziemy uważali za stałe u i v, za zmienne x i y, będziemy mieli związek pomiędzy spółrzędnemi każdego punktu prostej; jeżeli zaś będziemy uważali za zmienne

u i v, za stałe x i y, będziemy mieli związek, któremu czynią zadość ilości u, v należące do jakiejkolwiek prostej. przechodzącej przez punkt o spółrzędnych x, y. Dając u, v -- indywidualizujemy prostą, dlatego u, v nazywają się spółrzędnemi prostej.

Proste, których spółrzędne czynią zadość temu samemu równaniu liniowemu, przechodzą wszystkie przez jeden punkt.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby trzy proste o spółrzędnych (u, v), (u', v'), (u'', v'') przechodziły przez jeden punkt, jest:

$$\begin{vmatrix} u, & v, & 1 \\ u', & v', & 1 \\ u'', & v'', & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Spółrzędne prostej, przechodzącej przez punkt przecięcia się dwu prostych o spółrzędnych (u', v'), (u'', v''), są typu:

$$\frac{u' + \lambda u''}{1 + \lambda}, \quad \frac{v' + \lambda v''}{1 + \lambda}.$$

Proste o spółrzędnych:

$$\left(\frac{u' + \lambda u''}{1 + \lambda}, \frac{v' + \lambda v''}{1 + \lambda}\right), \left(\frac{u' - \lambda u''}{1 - \lambda}, \frac{v' - \lambda v''}{1 - \lambda}\right),$$

dzielą harmonicznie kąt pomiędzy prostemi (u', v'), (u'', v'').

Związek pomiędzy spółrzędnemi u, v prostej przedstawia w ogóle mnogość nieskończenie wielu prostych stycznych do krzywej; mówimy, że przedstawia obwiednią.

Kąt pomiędzy dwiema prostemi (u, v), (u', v') wyraża wzór (dla przypadku $\omega = \frac{\pi}{2}$):

$$\cos a = \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2 + v^2} \cdot \sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

Godnemi uwagi są dwa punkty urojone w nieskończoności na płaszczyźnie, przedstawione (w spółrzędnych prostej) przez równanie $u^2 + v^2 = 0$. Nazywają się one punktami kołowemi, albowiem przez nie przechodzą wszystkie koła płaszczyzny (patrz Rozdz. IV).

Zasługuje też na uwagę następujące określenie rzutowe kąta pomiędzy dwiema prostemi, oparte na wprowadzeniu punktów kołowych płaszczyzny (Laguerre, Nouv. Ann. XII, t. 64, patrz Rozdz. XXI, § 3).

Kąt dwu prostych równa się iloczynowi ilości $\frac{\sqrt{-1}}{2} = \frac{i}{2}$ przez logarytm stosunku anharmonicznego czwórki, utworzonej przez dwie proste dane i dwie inne proste, idące do dwu punktów kołowych (patrz np. Clebsch-Lindemann, Geometrie I).

Dwa układy płaskie (płaszczyzny punktowe i liniowe) nazywają się jednokreślnemi (homograficznemi), kolinearnemi lub rzutowemi, jeżeli pomiędzy ich punktami i ich prostemi (rzeczywistemi) istnieje odpowiedniość taka, iż każdemu punktowi P odpowiada punkt P' i każdej prostej p prosta p', przy warunku, że jeżeli P należy do p, to i P' należy do p'.

W przypadku ogólniejszym, w którym obejmujemy elementy rzeczywiste i urojone, określenie analityczne jednokreślności (homografii) dwóch układów płaskich jest następujące: jeżeli x, y są spółrzędne kartezyańskie punktu płaszczyzny, x', y' spółrzędne punktu odpowiadającego pierwszemu, dwa układy są jednokreślnemi, gdy zachodzą związki:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''},$$

dla których wyznacznik $(ab'c'')$ jest różny od zera.

Albo też: jeżeli u, v są spółrzędne prostej jednego, u', v' — spółrzędne prostej drugiego układu, dwa układy są jednokreślnemi, jeżeli zachodzą związki typu:

$$u' = \frac{au + bv + c}{a''u + b''v + c''} \quad , \quad v' = \frac{a'u + b'v + c'}{a''u + b''v + c''} .$$

D w i e o d p o w i a d a j ą c e s o b i e p r o s t e p u n k t o w e l u b d w a o d p o w i a d a j ą c e s o b i e p ę k i p r o s t y c h, z a w a r t e w d w u u k ł a d a c h p ł a s k i c h j e d n o k r e ś l n y c h, s ą z a w s z e r z u t o w e m i.

J e d n o k r e ś l n o ś ć d w u u k ł a d ó w p ł a s k i c h j e s t o z n a c z o n ą, gdy u s t a n o w i m y, ż e c z t e r e m w i e r z c h o ł k o m c z w o r o k ą t a w j e d n e j p ł a s z c z y ź n i e o d p o w i a d a j ą c z t e r y w i e r z c h o ł k i c z w o r o k ą t a w d r u g i e j, a l b o c z t e r e m b o k o m c z w o r o b o k u w j e d n e j p ł a s z c z y ź n i e o d p o w i a d a j ą c z t e r y b o k i c z w o r o b o k u w d r u g i e j.

Dwa układy płaskie jednokreślne nazywają się p o k r e w n e m i, gdy prostej w nieskończoności jednego układu odpowiada prosta w nieskończoności drugiego.

R ó w n a n i a p o k r e w i e ń s t w a s ą t y p u

$$x' = ax + by + c \quad , \quad y' = a'x + b'y + c' .$$

P o k r e w i e ń s t w o j e s t o z n a c z o n e, g d y u s t a n o w i m y o d p o w i e d n i o ś ć p o m i ę d z y t r z e m a p u n k t a m i (n i e l e ż ą c e m i n a j e d n e j p r o s t e j) j e d n e j p ł a s z c z y z n y a t r z e m a p u n k t a m i (n i e l e ż ą c e m i n a j e d n e j p r o s t e j) d r u g i e j p ł a s z c z y z n y; a l b o p o m i ę d z y t r z e m a p r o s t e m i (n i e n a l e ż ą c e m i d o j e d n e g o p ę k u) w j e d n e j a t r z e m a p r o s t e m i w d r u g i e j.

W p o k r e w i e ń s t w i e d w i e p r o s t e p u n k t o w e, o d p o w i a d a j ą c e s o b i e, s ą p o d o b n e, a s t o s u n e k p ó l o d p o w i a d a j ą c y c h s o b i e t r ó j k ą t ó w j e s t s t a ł y.

Przypadkiem szczególnym pokrewieństwa jest podobieństwo. Dwa układy płaskie nazywają się podobnemi, gdy ich kąty odpowiednie są równe.

W dwu układach podobnych stosunek podobieństwa dwu odpowiadających sobie szeregów punktów jest zawsze stały, a pęki odpowiadających sobie promieni są równe.

Jeżeli dwa układy płaskie jednokreślne są nałożone, to można szukać punktów (lub prostych), które odpowiadają samym sobie (punkty zjednoczone lub podwójne, proste zjednoczone lub podwójne).

Istnieją w ogóle trzy punkty zjednoczone i trzy proste zjednoczone, które są odpowiednio wierzchołkami i bokami tego samego trójkąta.

Trzy punkty zjednoczone otrzymujemy, szukając pierwiastków t równania:

$$\begin{vmatrix} a-t, & b, & c \\ a', & b'-t, & c' \\ a'', & b'', & c''-t \end{vmatrix} = 0$$

i następnie szukając jedynego punktu wspólnego trzem prostym o równaniach:

$$ax + by + c = tx \quad ; \quad a'x + b'y + c' = ty \quad ; \quad a''x + b''y + c'' = t\,.$$

Zamieniając x, y na u, v, pozyskalibyśmy sposób otrzymywania prostych zjednoczonych, gdy jednokreślność jest wyrażona w spółrzędnych linij prostych.

Dwa układy płaskie jednokreślne nazywają się homologicznemi, jeżeli proste, łączące odpowiadające sobie punkty, spotykają się w jednym punkcie, zwanym środkiem homologii lub perspektywy. W tym przypadku prosta, odpowiadające sobie, spotykają się w punktach jednej prostej, zwanej osią homologii.

Możnaby tę drugą własność przyjąć za podstawę definicyi, a wtedy pierwsza wynikłaby z definicyi jako wniosek.

Homologia jest homografią, w której istnieje prosta punktów zjednoczonych (oś homologii) i pęk prostych zjednoczonych (którego środek jest środkiem homologii).

Jeżeli w dwóch układach jednokreślnych trzy punkty prostej odpowiadają samym sobie, to te układy są homologicznemi.

Homologia zachodzi wtedy, gdy wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} a-t, & b, & c \\ a', & b'-t, & c' \\ a'', & b'', & c''-t \end{vmatrix}$$

ma dla pewnych wartości t wszystkie swoje podwyznaczniki równe zeru. Ta wartość t jest wtedy pierwiastkiem podwójnym lub potrójnym równania $D=0$; w tym ostatnim przypadku środek homologii znajduje się na osi homologii.

Dwa układy płaskie homograficzne (niepokrewne) można zawsze umieścić w ten sposób, aby były homologicznemi.

Dwa układy płaskie homologiczne określa środek, oś homologii oraz jedna para odpowiadających sobie punktów.

Dwa układy płaskie jednokreślne i nałożone wyprowadzają się jeden z drugiego za pomocą skończonej liczby homologij, albo też za pomocą skończonej liczby rzutów i przecięć.

Proste graniczne (lub zbiegu) dwóch układów płaskich homologicznych (t. j. proste jednej płaszczyzny, odpowiadające punktowi w nieskończoności drugiej) są równoległe do osi homologii.

Homologia dwóch układów płaskich nałożonych nazywa się harmoniczną lub inwolucyjną, jeżeli dwa punkty (i dwie proste) odpowiadają sobie w sposób podwójny, t. j.

punktowi P odpowiada zawsze ten sam punkt P', bez względu na to, czy uważamy punkt P za należący do jednej płaszczyzny, czy też do drugiej; toż samo dla dwóch prostych.

W homologii inwolucyjnej dwa odpowiadające sobie punkty są rozdzielone harmonicznie przez środek i przez oś homologii (stąd nazwa homologii harmonicznej); toż samo stosuje się i do dwóch odpowiadających sobie prostych.

Ważną jest uwaga: homografia (płaska), której odpowiedniość jest inwolucyjną (w znaczeniu powyżej wskazanem), jest koniecznie homologią.

Jeżeli przyjmiemy, że oś homologii znajduje się w nieskończoności, to dwa układy płaskie nazywają się homotetycznemi; jeżeli i środek jest w nieskończoności, nazywają się przystającemi.

W odpowiedniości homotetycznej proste graniczne zlewają się w nieskończoności.

W homotetyi stosunek dwu odpowiadających sobie odcinków prostoliniowych jest stały (stosunek homotetyi).

Układy homotetyczne są przypadkiem szczególnym układów podobnych.

Przypadkiem ogólniejszym homografii inwolucyjnej jest homografia kołowa rzędu n dwóch układów płaskich nałożonych. Jest ona taką, że szukając punktu A' odpowiadającego punktowi A, potem punktu odpowiadającego punktowi A', uważanego za punkt pierwszego układu płaskiego, i tak dalej postępując, dochodzimy po n działaniach do punktu początkowego A.

Jeżeli obierzemy spółrzędne jednorodne dla punktów płaszczyzny, a za trójkąt podstawowy weźmiemy taki, którego trzy wierzchołki są związane homografią kołową rzędu n, to równania homografii dadzą się zawsze sprowadzić do postaci:

$$x'_1 = \varepsilon_1 x_1 \quad , \quad x'_2 = \varepsilon_2 x_2 \quad , \quad x'_3 = \varepsilon_3 x_3 \; ,$$

gdzie ilości ε są pierwiastkami pierwotnemi stopnia n-tego z jedności.

Jeżeli elementy (rzeczywiste) dwóch układów płaskich, nałożonych lub nie, odpowiadają sobie w ten sposób, że punktom jednego odpowiadają proste drugiego, i odwrotnie, i jeżeli punktom na prostej p jednej płaszczyzny odpowiadają w drugim układzie proste, przechodzące przez punkt P, odpowiadający punktowi p, i odwrotnie, wtedy o dwu układach mówimy, że są w odpowiedniości dwoistej lub wzajemnej.

W przypadku ogólniejszym, w którym rozważamy elementy rzeczywiste i urojone, dwoistość określa się analitycznie za pomocą związków typu:

$$u' = \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \quad v' = \frac{a'x+b'y+c}{a''x+b''y+c''}$$

gdzie x, y są spółrzędne punktów, u', v' spółrzędne prostych, a wyznacznik $(ab'c'')$ jest różny od zera.

Dwoistość jest oznaczoną, jeżeli do czterech wierzchołków czworokąta dobierzemy odpowiadające im cztery boki czworoboku.

Dwa układy płaskie dwoiste względem trzeciego są homograficznemi względem siebie.

Wzajemność lub dwoistość dwóch układów płaskich nałożonych może być inwolucyjną, t. j. taką, że punktowi odpowiada zawsze ta sama prosta, bez względu na to, czy punkt uważamy za należący do pierwszego układu płaskiego, czy do drugiego; taka dwoistość inwolucyjna nazywa się biegunowością. Punkt i prosta, odpowiadające sobie, nazywają się biegunem i biegunową.

Jeżeli dwoistość jest taka, iż istnieje trójkąt, którego wierzchołkom, uważanym za punkty jednego z dwóch układów płaskich, odpowiadają w drugim układzie boki tym wierzchołkom przeciwległe (trójkąt biegunowy, samowzajemny, samosprzężony), wtedy dwoistość ta jest biegunowością

W biegunowości istnieje nieskończenie wiele trójkątów biegunowych.

Biegunowość jest oznaczoną, jeżeli wybrany jest trójkąt biegunowy (t. j. trójkąt, mający własność, wskazaną w twierdzeniu poprzedzającem) oraz biegunowa jakiegokolwiek punktu, nie leżącego na żadnym z boków trójkąta.

Dwa punkty w biegunowości nazywają się wzajemnemi, jeżeli jeden znajduje się na biegunowej drugiego. W sposób analogiczny określamy proste wzajemne.

Jeżeli biegunowa punktu przechodzi przez ten punkt, wtedy nazywa się on punktem zjednoczonym, a jego biegunowa prostą zjednoczoną biegunowości.

Analitycznie, biegunowość określa się za pomocą związków, podobnych do związków dla dwoistości, w których $a' = b$, $a'' = c$, $b'' = c'$.

Równaniami dwoistości w spółrzędnych jednorodnych punktów i prostych płaszczyzny są następujące:

$$u_i = \sum_k a_{ik} x_k \,; \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

równania biegunowości są te same, przyczem w nich $a_{ik} = a_{ki}$.

Punkty zjednoczone dane są przez związek

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0$$

(odpowiadający stożkowej).

Jeżeli trójkąt podstawowy spółrzędnych jest trójkątem biegunowym, to wyrażenie to zamienia się na następujące:

$$\sum a_{ik} x_i^2 = 0$$

Nie będziemy tu zajmowali się szczegółowo pozostałemi dwiema formami zasadniczemi gatunku drugiego, t. j. wiązką prostych i wiązką płaszczyzn; zwracamy tylko uwagę na to, że własności wiązki wyprowadzić można z własności układu płaskiego, jeżeli wyobrazimy sobie, że rzucamy go z punktu znajdującego się zewnątrz niego. Definicya wiązek homograficznych lub rzutowych, wzajemnych i t. d. i własności zasadnicze tych odpowiedniości są analogiczne do definicyj i własności układów płaskich.

---

§ 4.

Geometrya form zasadniczych gatunku 3-go. Przestrzeń punktowa i płaszczyznowa.

Pomiędzy czworościanami, mającemi za wierzchołki cztery z sześciu punktów danych A, B, C, D, E, F, przestrzeni zachodzi związek:

$$ABEF \,.\, CDEF + BCEF \,.\, ADEF + CAEF \,.\, BDEF = 0\,.$$

Dla siedmiu punktów istnieje związek:

$$ABCG \,.\, DEFG + ACDG \,.\, BEFG + ADBG \,.\, CEFG$$
$$= BCDG \,.\, AEFG\,.$$

Dla ośmiu punktów mamy:

$$BCDE \,.\, AFGH + ACED \,.\, BFGH + ADEB \,.\, CFGH$$
$$+ ABEC \,.\, DFGH + ABCD \,.\, EFGH = 0$$ (Monge, Möbius).

Jeżeli przez δ_{12}, δ_{13}, ... oznaczymy odległości wzajemne pomiędzy pięcioma punktami w przestrzeni, będzie:

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & \delta_{51}^2, & \delta_{52}^2, & \delta_{53}^2, & \delta_{54}^2 \\ 1, & \delta_{15}^2, & 0, & \delta_{12}^2, & \delta_{13}^2, & \delta_{14}^2 \\ 1, & \delta_{25}^2, & \delta_{21}^2, & 0, & \delta_{23}^2, & \delta_{24}^2 \\ 1, & \delta_{35}^2, & \delta_{31}^2, & \delta_{32}^2, & 0, & \delta_{34}^2 \\ 1, & \delta_{45}^2, & \delta_{41}^2, & \delta_{42}^2, & \delta_{43}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Związek ten podał Lagrange (Mém. de Berlin 1773) pod inną postacią; później zajmowali się tym związkiem Carnot w pracy specyalnej (Paryż 1866) i Cayley, który nadał mu postać wyznacznikową (Camb. mat. J. II).

Powyższemi związkami oraz związkami analogicznemi dla prostej i płaszczyzny zajmowali się także Schering (Götting. Nachr. 1870), D'Ovidio (Geom. di Batt. XI), a w najnowszych czasach De Tilly (Mém. de Belg. 1893) i Mansion (Société scient. de Bruxelles 1895).

Uważajmy w przestrzeni trzy proste — osi spółrzędnych—wychodzące z jednego punktu O — początku spółrzędnych. Proste te wyznaczają trzy płaszczyzny — płaszczyzny spółrzędnych — a przez każdy punkt P przestrzeni wyobrazić sobie można trzy płaszczyzny, do płaszczyzn spółrzędnych odpowiednio równoległe. Na przecięciach tych płaszczyzn z osiami spółrzędnych będziemy mieli trzy punkty, które można uważać za rzut punktu danego w przestrzeni. Każdemu punktowi w przestrzeni odpowiadają tedy jego rzuty, każdy na jednej z osi; jeżeli więc na każdej z osi ustanowimy układ spółrzędnych dla jej własnych punktów, to trzy spółrzędne trzech rzutów punktu P będzie można przyjąć za spółrzędne punktu P. Tym sposobem otrzymujemy układ spółrzędnych, który nazywa się układem Descartes'a. Najpospolitszym przypadkiem jest ten, w którym spółrzędne na trzech prostych punktowych są spółrzędnemi kartezyańskiemi z początkiem wspólnym O i są liczone w jednej jednostce miary. — Jeżeli każde dwie z trzech osi są do siebie prostopadłe, otrzymujemy układ spółrzędnych, który nazywa się prostokątnym.

Niechaj będzie punkt dany O — biegun, prosta przezeń przechodząca—oś biegunowa—i płaszczyzna przezeń przechodząca — płaszczyzna biegunowa. Każdy punkt P przestrzeni będzie wyznaczony, jeżeli danemi są: jego odległość ϱ od punktu O; kąt θ, jaki prosta OP tworzy z osią biegunową; kąt φ, będący miarą kąta dwuściennego pomiędzy płaszczyzną biegunową a płaszczyzną, przechodzącą przez punkt P

i przez oś biegunową. Trzy liczby ϱ, θ, φ można przyjąć za spółrzędne punktu P i tym sposobem otrzymujemy układ spółrzędnych biegunowych. Można przyjąć, że ϱ jest liczbą zawsze dodatnią, θ zawiera się zawsze pomiędzy 0 i π, φ zaś pomiędzy 0 i 2π.

Jeżeli trzy spółrzędne punktu przestrzeni napiszemy w postaci:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

wtedy x_1, x_2, x_3, x_4 będą spółrzędnemi jednorodnemi.

Pomiędzy układami spółrzędnych biegunowych zasługuje na uwagę układ czworościenny lub tetrametryczny. Cztery płaszczyzny w przestrzeni tworzą czworościan podstawowy. Niechaj p, q, r, s będą odległości punktu P od tych czterech płaszczyzn; a, b, c, d — cztery stałe; przyjmijmy, że x_1, x_2, x_3, x_4 są proporcyonalne do $\frac{p}{a}, \frac{q}{b}, \frac{r}{c}, \frac{s}{d}$. Cztery wierzchołki czworościanu nazywają się punktami podstawowemi, a cztery ściany — płaszczyznami podstawowemi. Punkt U, którego spółrzędne są równe 1, t. j. którego odległości od czterech ścian są proporcyonalne do a, b, c, d nazywa się punktem — jednością.

Podobnie jak w § 3 łatwo widzieć, że stosunek dwóch jakichkolwiek z tych spółrzędnych równa się dwustosunkowi czterech płaszczyzn pęku, którego osią jest jedna z krawędzi czworościanu, a którego czterema płaszczyznami są: dwie ściany czworościanu, przez tę krawędź przechodzące, płaszczyzna, przechodząca przez punkt U, i płaszczyzna, przechodząca przez punkt P.

Tak określone spółrzędne są tedy spółrzędnemi rzutowemi.

Jeżeli jedna z płaszczyzn czworościanu znajduje się w nieskończoności, wtedy układ czworościenny staje się układem kartezyańskim.

Podobnie, jak dla płaszczyzny, pierwszem zagadnieniem jest tu zagadnienie o przekształceniu spółrzędnych, t. j. znalezienie wzorów, przy pomocy których spółrzędne w jednym układzie wyrażają się przez spółrzędne w drugim.

Jeżeli obydwa układy są kartezyańskiemi mamy związki następujące:

$$x = \frac{X\cos(Xx') + Y\cos(Yx') + Z\cos(Zx')}{\cos(xx')} + a\,,$$

$$y = \frac{X\cos(Xy') + Y\cos(Yy') + Z\cos(Zy')}{\cos(yy')} + b\,,$$

$$z = \frac{X\cos(Xz') + Y\cos(Yz') + Z\cos(Zz')}{\cos(zz')} + c\,;$$

gdzie x, y, z; X, Y, Z są spółrzędnemi danego punktu w układzie pierwszym i w układzie drugim; a, b, c są spółrzędnemi początku drugiego układu w układzie pierwszym; x', y', z' — oznaczają proste prostopadłe do płaszczyzn yz, zx, xy; $\cos(xx') \ldots \cos(Xx') \ldots$ są dostawami kątów pomiędzy prostemi x i x', ... X i x' ...

Dla układów prostokątnych wzory te przybierają postać prostszą:

$$x = a + X\cos(Xx) + Y\cos(Yx) + Z\cos(Zx)\,,$$

$$y = b + X\cos(Xy) + Y\cos(Yy) + Z\cos(Zy)\,,$$

$$z = c + X\cos(Xz) + Y\cos(Yz) + Z\cos(Zz)\,.$$

W tym przypadku pomiędzy dostawami $\cos(Xx) \ldots$ zachodzą różne związki, jako to:

$$\cos^2(Xx) + \cos^2(Xy) + \cos^2(Xz) = 1\,.$$

i pięć innych, które otrzymujemy z pierwszego, zamieniając X na Y lub Z, oraz zastępując w trzech tak napisanych wzorach x, y, z przez X, Y, Z; dalej:

$$\cos(Yx)\cos(Zx) + \cos(Yy)\cos(Zy) + \cos(Yz)\cos(Zz) = 0 ;$$

i dwa inne, które otrzymujemy, przemieniając kołowo X, Y, Z; z tych zaś trzy inne, zmieniając x, y, z na X, Y, Z. Razem będzie związków trzynaście, z których tylko sześć niezależnych.

Wzory na przekształcenie spółrzędnych biegunowych na prostokątne będą następujące: Niechaj początek spółrzędnych prostokątnych będzie w biegunie układu biegunowego, oś biegunowa zaś niechaj zlewa się z osią z, a płaszczyzna biegunowa z płaszczyzną xz. Wtedy:

$$x = \varrho \sin\theta \cos\varphi \quad , \quad y = \varrho \sin\theta \sin\varphi \quad , \quad z = \varrho \cos\theta ;$$

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad , \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} .$$

Jeżeli $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ są spółrzędnemi trzech punktów w układzie Descartes'a, wtedy warunki na to, aby te trzy punkty leżały na jednej prostej, wyrażają się tak:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} .$$

Warunki te można też wyrazić w ten sposób, że mają znikać wyznaczniki macierzy:

$$\left\| \begin{matrix} x_1 , & y_1 , & z_1 , & 1 \\ x_2 , & y_2 , & z_2 , & 1 \\ x_3 , & y_3 , & z_3 , & 1 \end{matrix} \right\| ;$$

wystarcza, aby znikały dwa wyznaczniki.

Odległość punktu o spółrzędnych x, y, z od początku spółrzędnych wyraża się wzorem:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,xy\cos(xy) + 2\,yz\cos(yz) + 2\,zx\cos(zx) .$$

Pomiędzy dostawami kątów, które prosta r tworzy z trzema osiami, zachodzi związek:

$$\begin{vmatrix} 1 & , \cos(rx) & , \cos(ry) & , \cos(rz) \\ \cos(xr) & , 1 & , \cos(xy) & , \cos(xz) \\ \cos(yr) & , \cos(yx) & , 1 & , \cos(yz) \\ \cos(zr) & , \cos(zx) & , \cos(zy) & , 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Dla osi prostokątnych mamy wprost:

$$\cos^2(rx) + \cos^2(ry) + \cos^2(rz) = 1 .$$

Kąt pomiędzy dwiema prostemi w układzie prostokątnym wyrażają wzory:

$$\cos(rr') = \cos(xr)\cos(xr') + \cos(yr)\cos(yr') + \cos(zr)\cos(zr') ,$$

$$\sin^2(rr') = \left\| \begin{matrix} \cos(xr) & , \cos(yr) & , \cos(zr) \\ \cos(xr') & , \cos(yr') & , \cos(zr') \end{matrix} \right\|^2 .$$

Pole A trójkąta o trzech wierzchołkach, których spółrzędnemi w układzie prostokątnym są x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, wyraża wzór:

$$4A^2 = \begin{vmatrix} y_1 , & z_1 , & 1 \\ y_2 , & z_2 , & 1 \\ y_3 , & z_3 , & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 , & x_1 , & 1 \\ z_2 , & x_2 , & 1 \\ z_3 , & x_3 , & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 , & y_1 , & 1 \\ x_2 , & y_2 , & 1 \\ x_3 , & y_3 , & 1 \end{vmatrix}^2 .$$

Objętość V czworościanu o wierzchołkach, których spółrzędnemi (w jakimkolwiek układzie kartezyańskim) są: x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 wyraża wzór:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & , \cos(xy) & , \cos(xz) \\ \cos(yx) & , 1 & , \cos(yz) \\ \cos(zx) & , \cos(zy) & , 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 , y_1 , z_1 , 1 \\ x_2 , y_2 , z_2 , 1 \\ x_3 , y_3 , z_3 , 1 \\ x_4 , y_4 , z_4 , 1 \end{vmatrix} .$$

Dla układu prostokątnego pierwszy z wyznaczników staje się równym jedności.

Spółrzędne kartezyańskie x, y, z punktów płaszczyzny czynią zadość równaniu stopnia 1-go, typu:

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ (równanie płaszczyzny);}$$

każde takie równanie przedstawia płaszczyznę.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby cztery punkty (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) znajdowały się na jednej płaszczyźnie, jest:

$$\begin{vmatrix} x & , y & , z & , 1 \\ x_1 & , y_1 & , z_1 & , 1 \\ x_2 & , y_2 & , z_2 & , 1 \\ x_3 & , y_3 & , z_3 & , 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Równanie poprzedzające określa płaszczyznę przez trzy punkty o spółrzędnych x, y, z; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; w równaniu tem x, y, z są spółrzędnemi punktu bieżącego płaszczyzny.

Równanie $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ jest równaniem płaszczyzny, która na osiach wyznacza odcinki długości p, q, r (licząc od początku spółrzędnych).

Dwie płaszczyzny

$$ax + by + cz + d = 0 \quad , \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

są równoległemi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \, .$$

Prosta w przestrzeni jest określona przez dwa równania, które są równaniami dwu płaszczyzn, przez nią przechodzących

Trzy płaszczyzny należą do pęku, t. j. mają jednę prostą wspólną, gdy znikają wyznaczniki rzędu 3-go macierzy:

$$\left\| \begin{matrix} a & , & b & , & c & , & d \\ a' & , & b' & , & c' & , & d' \\ a'' & , & b'' & , & c'' & , & d'' \end{matrix} \right\| ;$$

wystarcza, aby znikały dwa wyznaczniki.

Cztery płaszczyzny przechodzą przez jeden punkt wtedy, gdy znika wyznacznik rzędu 4-go szesnastu spółczynników równań tych płaszczyzn.

Jeżeli α, β, γ są kątami, które prosta prostopadła do płaszczyzny tworzy z osiami, ϱ — odległością płaszczyzny od początku spółrzędnych, to równanie płaszczyzny możemy napisać w postaci, zwanej normalną:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \varrho = 0 \, .$$

W układzie prostokątnym równanie ogólne płaszczyzny sprowadzamy do postaci normalnej, mnożąc je przez $\dfrac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ gdzie pierwiastnik należy wziąć ze znakiem, przeciwnym znakowi wyrazu wiadomego w równaniu.

Odległość punktu X, Y, Z od płaszczyzny obliczamy, kładąc po stronie pierwszej (ze zmienionym znakiem) równania normalnego płaszczyzny zamiast spółrzędnych, bieżące spółrzędne punktu.

Kąt α pomiędzy dwiema płaszczyznami w układzie prostokątnym wyraża się wzorem:

$$\cos\alpha = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}},$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\left\| \begin{matrix} a\,, & b\,, & c \\ a'\,, & b'\,, & c' \end{matrix} \right\|^2}{(a^2 + b^2 + c^2)\,(a'^2 + b'^2 + c'^2)}.$$

Warunkiem prostopadłości dwu płaszczyzn w układzie prostokątnym jest:

$$aa' + bb' + c' = 0.$$

Jeżeli równanie płaszczyzny napiszemy w postaci.

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

to spółczynniki u, v, w można uważać za spółrzędne płaszczyzny. Rozważania nad temi spółrzędnemi, analogiczne do rozważań nad spółrzędnemi prostej pomijamy.

Dwie przestrzenie (trójwymiarowe) są homograficznemi (jednokreślnemi), kolinearnemi lub rzutowemi, gdy odpowiadają sobie w ten sposób, iż każdemu punktowi i płaszczyźnie (rzeczywistym) w jednej odpowiada punkt i płaszczyzna w drugiej, przy warunku, że gdy punkt w przestrzeni pierwszej należy do płaszczyzny, to punkt w przestrzeni drugiej należy do płaszczyzny, odpowiadającej tamtej. Innemi słowy, jeżeli w przestrzeni pierwszej punkt porusza się po płaszczyźnie, to punkt, odpowiadający mu, porusza się po płaszczyźnie, odpowiadającej pierwszej.

Definicye analityczne dla przestrzeni homograficznych, (obejmujące poprzednie i rozciągające się na przypadek elementów urojonych) są następujące: jeżeli x, y, z i x', y', z' są spółrzędne odpowiadających sobie punktów w dwu przestrzeniach, przestrzenie te nazywają się homograficznemi, gdy zachodzą związki:

$$x' = \frac{ax + by + cz + d}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''}\ , \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'z + d'}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''}$$

$$z' = \frac{a''x + b''z + c''z + d''}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''}\ ,$$

gdzie wyznacznik $(ab'c''d''')$ jest różny od zera. Albo: jeżeli u, v, w; u', v', w' są spółrzędnemi dwóch płaszczyzn odpowiadających sobie w dwu przestrzeniach, to pomiędzy temi spółrzędnemi zachodzą związki liniowe analogiczne do powyższych.

W wyrażonej tu homografii istnieją w ogóle cztery płaszczyzny zjednoczone (t. j. punkty i płaszczyzny, odpowiadające samym sobie).

Jednokreślność pomiędzy dwiema przestrzeniami jest oznaczoną, jeżeli ustalimy odpowiedniość pomiędzy czterema wierzchołkami (lub czterema ścianami) czworościanu w jednej przestrzeni a wierzchołkami (lub ścianami) czworościanu w drugiej, oraz pomiędzy płaszczyzną w jednej przestrzeni, nie przechodzącą przez żaden z czterech punktów (albo punktem, nie leżącym na żadnej z czterech ścian), a płaszczyzną w drugiej, nie przechodzącą przez żaden z czterech punktów, odpowiadających tamtym (albo punktem, nie położonym na żadnej z czterech ścian, odpowiadających sobie).

Jeżeli w obu przestrzeniach odpowiadają sobie płaszczyzny położone w nieskończoności, wtedy jednokreślność staje się pokrewieństwem.

Pokrewieństwo dwu przestrzeni jest oznaczone, gdy damy odpowiedniość pomiędzy czterema ścianami (lub wierzchołkami) czworościanu w jednej a czterema ścianami (lub wierzchołkami) w drugiej.

W dwu przestrzeniach pokrewnych dwie odpowiadające sobie proste punktowe są pokrewnemi.

W dwu przestrzeniach pokrewnych odległości dwóch odpowiadających sobie punktów od dwóch płaszczyzn stałych są w stosunku stałym.

W dwu przestrzeniach pokrewnych objętości dwóch odpowiadających sobie ciał są w stosunku stałym.

Przypadkiem szczególnym pokrewieństwa jest *podobieństwo*. Dwie przestrzenie nazywają się podobnemi, gdy ich kąty, odpowiadające sobie, są równemi. *W dwu przestrzeniach podobnych odpowiadające sobie układy płaskie są też podobnemi.*

Dwie przestrzenie jednokreślne, zawierające wiązkę elementów zjednoczonych, albo też układ płaski elementów zjednoczonych (jedno jest wynikiem drugiego), nazywają się *homologicznemi*; środek wiązki nazywa się środkiem homologii, a płaszczyzna — płaszczyzną homologii. Jeżeli odpowiedniość pomiędzy dwiema przestrzeniami jest inwolucyjną, wtedy homologia nazywa się zwykle *inwolucyjną* lub *harmoniczną*.

Dwie przestrzenie homologiczne określa środek, płaszczyzna homologii i odpowiedniość pomiędzy dwoma punktami (które koniecznie znajdować się muszą na jednej prostej ze środkiem homologii, nie schodząc się atoli z tym punktem).

Jeżeli środek znajduje się w nieskończoności, mamy *homologię pokrewną*; jeżeli zaś płaszczyzna homologii znajduje się w nieskończoności, mamy *homotetyę*. *Homotetya jest przypadkiem szczególnym podobieństwa. Dwie przestrzenie podobne mogą być przeniesione w położenie homotetyczne.*

Należy wspomnieć też o jednokreślności osiowej, której punktami zjednoczonemi są wszystkie punkty dwu prostych skośnych (będących zarazem obwiedniemi dwu płaszczyzn zjednoczonych). W jednokreślności osiowej dwa odpowiadające sobie punkty znajdują się zawsze na jednej prostej, spotykającej obiedwie proste punktów zjednoczonych w dwu punktach, pozostających z dwoma pierwszemi w stałym stosunku anharmonicznym.

Taka jednokreślność jest inwolucyjna, jeżeli czwórka tych punktów jest harmoniczną.

Jednokreślność przestrzenna inwolucyjna może być albo homologią inwolucyjną, albo jednokreślnoscią osiową inwolucyjną.

Przypadkiem ogólniejszym jednokreślności inwolucyjnej jest jednokreślność kołowa rzędu n, której definicya jest analogiczną do definicyi, podanej w § poprzedzającym.

Pomiędzy punktami i płaszczyznami jednej przestrzeni a punktami i płaszczyznami drugiej można pomyśleć odpowiedniość dwujednoznaczną, podobną do tej, o jakiej była mowa w § 3, a która nazywa się dwoistością albo wzajemnością.

Równaniami dwoistości przestrzennej w spółrzędnych jednorodnych są:

$$u'_i = \sum_k a_{ik} x_k . \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

Dwoistość jest inwolucyjną w dwu przypadkach, t. j. gdy $a_{ik} = a_{ki}$ lub gdy $a_{ik} = -a_{ki}$ (wtedy $a_{ii} = 0$); w pierwszym razie mamy biegunowość zwykłą, w drugim biegunowość zerową lub układ zerowy.

W biegunowości zwykłej miejscem punktów zjednoczonych jest powierzchnia stopnia drugiego (patrz Rozdz. V).

W biegunowości zerowej każdy punkt leży na odpowiadającej mu płaszczyźnie, każda płaszczyzna przechodzi przez swój własny biegun; ogół prostych zjednoczonych jest kompleksem liniowym (patrz Rozdz XIV, § 3).

Biegunowościami zerowemi lub układami zerowemi zajmowali się: *Giorini* (Mem. della Soc. Ital delle scienze. XX. 1827), *Möbius*, *Chasles*, v. *Staudt* i inni (patrz Rozdz. X § 2).

Powiemy jeszcze słów kilka o tak nazwanych *przeciwrzutowościach Segrego*.

Niechaj x_i będą spółrzędne jednorodne punktów (rzeczywistych lub zespolonych) przestrzeni (dwu lub trójwymiarowej), u_i — spółrzędne jednorodne elementu, związanego dwoistością z punktem w tej przestrzeni (t. j. prostej lub płaszczyzny, stosownie do tego, czy przestrzeń jest dwu czy trójwymiarową); niechaj $\bar{x}_i, \bar{u}_i$ będą ilości zespolone sprzężone względem x_i, u_i. Zamiast zwykłych równań jednokreślności i dwoistości, połóżmy następujące:

$$x'_i = \sum_k a_{ki}\bar{x}_k \quad , \quad u'_i = \sum_k a_{ik}\bar{x}_k \, .$$

Wzory te ustanawiają dwie odpowiedniości dwujednoznaczne pomiędzy elementami x, x' *lub* x, u' *dwóch przestrzeni. W pierwszej odpowiedniości punktom prostej lub płaszczyzny odpowiadają (jak w jednokreślności) punkty prostej lub płaszczyzny; w drugiej punktom prostej lub płaszczyzny odpowiadają proste lub płaszczyzny pęku albo też płaszczyzny wiązki (jak w dwoistości).*

Odpowiedniości te nazywają się odpowiednio *przeciwkolineacyą* (antikolineacyą) lub *przeciwrzutowością* i *przeciwdwoistością*. Zachowują one tę własność, że elementom harmonicznym odpowiadają elementy harmoniczne.

Jeżeli te odpowiedniości są inwolucyjnemi, to nazywają się *przeciwinwolucyami* (antiinwolucya) i *przeciwbiegunowościami* (antipolarność).

Rozważanie elementów zjednoczonych przeciwbieguno-wości prowadzi do tak nazwanych „nadstożkowych“ (iperconiche) i do „nadpowierzchni“ rzędu 2-go (iperquadriche) przedstawionych przez równanie typu

$$\sum a_{ik}\, x_i \bar{x}_k = 0$$

gdzie $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$.

O tych odpowiedniościach patrz cztery noty Segrego (Un nuovo campo di recerche geometriche, Atti di Torino 1890, Math. Ann. XL).

Za pierwszą geometryę analityczną uważać można „Geometryę“ Descartes'a, wydaną poraz pierwszy w r. 1637; inne wydania tejże z notami ogłosili Debeaune i Schooten. W dziele tem poraz pierwszy wprowadzonem jest systematycznie pojęcie spółrzędnych na płaszczyźnie; pojęcie zaś spółrzędnych na prostej wprowadził był już wcześniej Viète (1540—1603). Spółrzędne barycentryczne zawdzięczamy Möbiusowi („Der barycentrische Calcul“ 1827), rzutowe v. Staudowi („Beiträge etc.“ 1858) i Fiedlerowi („Darstellende Geometrie“); spółrzędne jednorodne badali Möbius, Plücker i Hesse.

Pojęcie dwustosunku (stosunku podwójnego albo inaczej stosunku podwójnego podziału) znajdujemy u Möbiusa i u Chasles'a; ten ostatni nazywa ten stosunek anharmonicznym. Badania nad tym stosunkiem przeprowadzili Steiner i v. Staudt, który określił go niezależnie od pojęć wielkościowych.

Zasadę homologii stosował Poncelet, jednokreślności (homografii) Mobius, Steiner i Chasles, dwoistości Gergonne (Ann. de math. 1827), Chasles i Plücker.

Inwolucyę badał poraz pierwszy — jeżeli pominiemy geometrów greckich — Desargues (1593 — 1632), któremu zawdzięczamy i samą nazwę.

Geometrya rzutowa, badająca własności rzutowe figur, powstała jako nauka w pierwszej połowie wieku XIX-go. Najważniejszemi traktatami tej geometryi są: Poncelet „Traité des propriétés projectives des figures“ (Paryż 1822), Steiner „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" (Berlin 1832), v. Staudt „Geometrie der Lage" (Norymberga 1847), Chasles „Géométrie supérieure" (Paris 1852), „Sections coniques" (Paryż 1865). Pomiędzy nowszemi traktatami wymieniamy: Cremona „Elementi di Geometria proiettiva" (1873, istnieje w przekładzie na różne języki), Reye „Die Geometrie der Lage" 1877—1880, obecnie wydanie drugie), Pasch „Neuere Geometrie" (Lipsk 1882), Weyer „Projective Geometrie" (Wiedeń 1883—1887), oraz najnowsze dzieła: Sannia'y (Neapol 1891, 1894) i Enriques'a (Bolonia 1898).

Do dzieł tych należy dołączyć książki, poświęcone geometryi wykreślnej, w których traktowana jest także geometrya rzutowa, jak np. znane traktaty Fiedlera („Darstellende Geometrie". Lipsk 1833—1888) i Wienera („Lehrbuch der darstellenden Geometrie". Lipsk 1884).

Dodajemy, że geometrya rzutowa ma różne nazwy u różnych autorów i tak: Chasles nazywa ją geometryą nową lub wyższą; Carnot, Cayley, v. Staudt, Gergonne — geometryą położenia; Cremona, Klein i inni rzutową.

Pokrewną z geometryą rzutową jest geometrya wykreślna (opisująca), której zadaniem jest przedstawienie brył na płaszczyźnie przy pomocy rzutów centralnych lub równoległych ortogonalnych, oraz badanie własności takiego przedstawienia.

Pierwszy traktat geometryi wykreślnej zawdzięczamy Monge'owi; nauka ta rozwinęła się w początkach XIX stulecia, dzięki pracom Monge'a, Lacroix'a, Oliviera, Hachette'a i Dupina. Historyę szczegółową jej rozwoju czytać można w pierwszym rozdziale cytowanej książki Wienera, oraz w dziele Obenraucha „Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie" (Berno 1897). Pierwszy traktat w języku polskim, poświęcony geometryi wykreślnej, ogłosił F. Sapalski Warszawa 1822. Z tejże epoki są rozprawy z geometryi wykreślnej K. Garbińskiego (patrz „Geometrya analityczna" W. Zajączkowskiego. Warszawa 1884. Wstęp historyczny).

Do pojęć, które nadały większą jedność, prostotę i ogólność twierdzeniom geometrycznym i pozwalają unikać przypadków wyjątkowych, należy pojęcie elementów w nieskończoności oraz pojęcie elementów urojonych. Pierwsze z nich pochodzi jeszcze od Desargues'a; drugie wprowadzone zostało, dzięki zastosowaniom analizy do geometryi.

Niektórzy autorowie starali się to ostatnie pojęcie wprowadzić przy pomocy geometryi czystej, niezależnie od pojęć analitycznych. W tym celu posługiwać się można inwolucyami eliptycznemi, których punkty zjednoczone są, jak wiemy, urojonemi, a których pary punktów rzeczywistych mogą służyć do definicyi pary punktów urojonych. Rozważania tego rodzaju przeprowadził głównie v. Staudt, a traktaty nowoczesne geometryi rzutowej (jak np. cytowany wyżej traktat Sannia'y) rozwijają szczegółowo te pojęcia.

Pomiędzy traktatami geometryi analitycznej, wymieniamy najbardziej znany Salmona (kilka wydań i przekładów), dalej Baltzera (Lipsk 1882), Hessego (Lipsk 1866—1876), d'Ovidio (Turyn 1885, 1891), Zajączkowskiego (Warszawa 1884).

ROZDZIAŁ II.

GEOMETRYA FORM NIECIĄGŁYCH.

---

§ 1.

Wiadomości ogólne.

W rozdziale niniejszym rozpatrywać będziemy figury, złożone z punktów, prostych i płaszczyzn w liczbie skończonej; nazywają się one zwykle f o r m a m i n i e c i ą g ł e m i w przeciwstawieniu do form, rozważanych w rozdziale I-ym; albowiem nie można oczywiście przejść w nich sposobem ciągłym od jednego elementu do drugiego, przechodząc tylko przez elementy tego samego gatunku, w formie zawarte.

Formami nieciągłemi są: grupa skończonej liczby punktów na prostej punktowej, na płaszczyźnie punktowej lub w przestrzeni, grupa skończonej liczby prostych lub płaszczyzn pęku i t. p.

Nazywamy n-k ą t e m p ł a s k i m z u p e ł n y m układ n punktów (w i e r z c h o ł k ó w) na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, wraz z $\frac{n(n-1)}{2}$ prostemi (b o k a m i), łączącemi każde dwa punkty. Przecięcie dwu boków, nie przechodzących przez jeden i ten sam z powyższych n punktów, nazywa się p u n k t e m p r z e k ą t n y m. L i c z b a p u n k t ó w p r z e k ą t n y c h w y n o s i $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$

Nazywamy n-**bokiem płaskim zupełnym** układ n prostych (**boków**), z których żadne trzy nie spotykają się w jednym punkcie, wraz z $\frac{n(n-1)}{2}$ punktami (**wierzchołkami**), w których przecinają się każde dwa boki. Prosta, łącząca dwa wierzchołki, nie położone na jednym boku, nazywa się **prostą przekątną**. **Liczba prostych przekątnych wynosi** $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

Nazywamy n-**kątem** lub n-**bokiem prostym** zwyczajnym układ n punktów płaszczyzny, rozważanych w danym porządku kołowym, wraz z n prostemi, które każdy z tych punktów łączą z punktem następnym.

Jeżeli wykonamy rzut n-kąta płaskiego zupełnego z punktu, znajdującego się zewnątrz jego płaszczyzny, otrzymamy kąt n-**krawędziowy zupełny**, a rzucając n-bok płaski zupełny z punktu zewnątrz jego płaszczyzny, otrzymamy kąt n-**ścienny zupełny**.

Nazywamy n-**kątem skośnym zupełnym** układ n punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie, wraz z $\frac{n(n-1)}{2}$ prostemi, łączącemi każde dwa punkty oraz też z $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ płaszczyznami (ścianami), łączącemi każde trzy punkty.

Wzajemnym do poprzedniej figurą jest n-**ścian zupełny**, t. j. układ n płaszczyzn, z których żadne cztery nie spotykają się w jednym punkcie, wraz ze wszystkiemi prostemi i punktami ich przecięcia.

Dwa odniesione do siebie n-kąty płaskie zupełne nazywają się **perspektywicznemi**, jeżeli proste, łączące odpowiadające sobie wierzchołki, spotykają się w jednym punkcie; nazywają się **homologicznemi**, jeżeli nadto odpowiadające sobie ich boki przecinają się w punktach, leżących na jednej prostej (**osi homologii**).

Dwa odniesione do siebie n-boki płaskie nazywają się **perspektywicznemi**, jeżeli ich odpowiadające sobie boki spotykają się w punktach jednej i tej samej prostej; nazywają się **homologicznemi**, jeżeli nadto proste, łączące odpowiednie wierzchołki, spotykają się w jednym punkcie (**środku homologii**).

Definicye analogiczne stosują się do dwóch kątów n-ściennych i do dwóch kątów n-krawędziowych.

Dwa n-kąty skośne zupełne, odniesione do siebie, nazywają się **perspektywicznemi**, jeżeli proste, łączące odpowiadające sobie wierzchołki, schodzą się w jednym punkcie; nazywają się **homologicznemi**, jeżeli nadto ściany odpowiadające sobie przecinają się według prostych, leżących na tej samej płaszczyźnie (**płaszczyzna homologii**).

Dwa n-kąty nazywają się **rzutowemi**, jeżeli jeden z nich można otrzymać z drugiego przy pomocy skończonej liczby rzutów i przecięć.

Dwa n-kąty perspektywiczne położone na różnych płaszczyznach, są koniecznie homologicznemi. Twierdzenie analogiczne zachodzi dla n-ścianów perspektywicznych o różnych środkach.

Dwa trójkąty, dwa trójboki, dwa trójściany lub dwie trójkrawędzie perspektywiczne są homologicznemi.

Dwa czworokąty płaskie są zawsze rzutowemi.

Dwa perspektywiczne czworokąty skośne zupełne są homologicznemi.

Jeżeli w dwóch n-kątach zupełnych $A_1 A_2 \ldots A_n$, $A_1' A_2' \ldots A'_n$, odniesionych do siebie i położonych na jednej płaszczyźnie lub na płaszczyznach różnych, bok $A_1 A_2$ pierwszego i wszystkie inne boki w liczbie $2n-4$, przechodzące przez punkt A_1 lub A_2, spotykają się z odpowiadającemi im bokami drugiego n-kąta w tyluż punktach, położonych na prostej s, wtedy te dwa n-kąty są homologicznemi. Jeżeli przez S oznaczymy środek homologii, wtedy dwa jakiekolwiek odpowiadające sobie punkty

przekątne P, P' znajdować się będą na jednej prostej z punktem S.

Twierdzenie analogiczne ma miejsce dla dwóch n-boków płaskich zupełnych, dla dwóch kątów n-ściennych zupełnych, wreszcie dla dwóch kątów n-krawędziowych zupełnych.

Definicye podane w tym paragrafie zawdzięczamy przeważnie Steinerowi (Werke. I 288—396).

---

§ 2.

Własności rzutowe dwójek, trójek, czwórek punktów na prostej. Środki harmoniczne. Apolarność. Inwolucye.

Grupę n punktów na prostej można przedstawić analitycznie przez pierwiastki równania formy dwójkowej rzędu n-tego. Badanie niezmienników i spółzmienników takiej formy prowadzi do szukania własności niezmienniczych, albo — inaczej mówiąc— rzutowych grupy punktów.

W Rozdziale XII tomu I-go podaliśmy dla przypadków $n = 2, 3, 4, \ldots$ rezultaty, które otrzymujemy z punktu widzenia teoryi analitycznej form; obecnie podamy rezultaty geometryczne, odpowiadające wzmiankowanym rezultatom analitycznym, zachowując użyte tamże znakowania i nazwy.

Biegunowość. Niechaj będzie forma a_x^n; utwórzmy jej biegunowe $a_x^{n-1} a_y$, $a_x^{n-2} a_y^2$, ... i rozważajmy pierwiastki tych form, przyrównanych do zera, zakładając, że y jest punktem z góry danym. Te grupy punktów nazywają się odpowiednio grupą biegunową (polarną) dla y pierwszą, drugą, trzecią i t. d. Niektórzy nazywają je grupami harmonicznemi dla y, albo też środkami harmonicznemi stopnia $n-1, n-2, \ldots$ (Jonquières. Journ. de Liouville. 1851). Ostatnią grupę biegunową stanowi jeden tylko punkt, który Poncelet nazywa środkiem średnich harmonicznych (Crelle III).

Jeżeli biegun usuwa się w nieskończoność, wtedy środek średnich harmonicznych staje się środkiem odległości średnich i ma własność taką, że suma algebraiczna jego odległości od n punktów jest zerem.

Wymienimy niektóre własności zasadnicze środków harmonicznych — albo inaczej mówiąc — układów biegunowych.

Jeżeli M jest środkiem harmonicznym stopnia r danego układu n punktów względem bieguna O, wtedy odwrotnie O jest środkiem harmonicznym stopnia $n-r$ tegoż samego układu względem bieguna M.

Jeżeli $M_1, M_2, \ldots, M_r$ są środkami harmonicznemi stopnia r układu n punktów względem bieguna O, wtedy środki harmoniczne stopnia $s(<r)$ układu $M_1, M_2, \ldots, M_r$ względem bieguna O są także środkami harmonicznemi stopnia s danego układu względem tegoż bieguna O.

Jeżeli $M_1, \ldots, M_r$ są środkami harmonicznemi stopnia r względem bieguna O_r; $N_1, \ldots, N_s$ środkami harmonicznemi stopnia s względem bieguna O_s, wtedy środki harmoniczne stopnia $r+s$ układu $M_1, \ldots, M_r$ względem bieguna O_s są identycznemi ze środkami harmonicznemi stopnia $r+s-n$ układu $N_1, \ldots, N_s$ względem bieguna O_r.

Jeżeli A_1 jest środkiem harmonicznym 1-go stopnia układu $A_2, A_3, \ldots, A_n$ względem bieguna O, to jest zarazem środkiem harmonicznym 1-go stopnia układu $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ względem tegoż bieguna.

Jeżeli w układzie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ r punktów zlewa się w jeden, to w tymże punkcie schodzi się $r-p$ środków harmonicznych stopnia $n-p$ względem jakiegokolwiek bieguna.

Środkami harmonicznemi stopnia r względem bieguna, będącego s-krotnym punktem układu danego, są: tenże punkt liczony s razy oraz środki harmoniczne stopnia $r-s$ pozostałych $n-s$ punktów układu danego względem tegoż bieguna.

Jeżeli w układzie danym s punktów zlewa się w jeden, wtedy środki harmoniczne stopnia $r < s$ względem tegoż punktu jako bieguna, są nieoznaczonemi.

Własności środków harmonicznych są rzutowemi.

Jeżeli a_x^n jest formą dwójkową, która przyrównana do zera daje grupę n punktów, wtedy forma $H = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}$ (gdzie a i b są spółczynniki symboliczne równoważne) przedstawia t. zw. hesyan grupy danej. Do tej formy stosuje się twierdzenie:

Istnieje forma stopnia $2n-4$, której punkty zerowe (grupa Steinera) są punktami, dla których grupy środków harmonicznych rzędu $(n-1)$-go zawierają punkty podwójne, dane przez punkty zerowe hesyanu $H=0$. Tę formę stopnia $2n-4$, otrzymujemy, rugując z równań:

$$a_x a_z^{n-2} a_1 = 0 \quad . \quad b_x b_z^{n-2} b_2 = 0$$

ilość z.

Jest $3n-6$ biegunów, których grupy środków harmonicznych rzędu $(n-1)$-go względem formy danej, rzędu zaś $(2n-s)$-go względem hesyanu, mają punkt wspólny. Punkty te wspólne przedstawia w znakowaniu symbolicznem wyrażenie:

$$T = (ab)(bc)^2 a_x^{n-1} b_x^{n-2} c_x^{n-3} .$$

Znikanie tożsamościowe hesyanu jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby n punktów grupy danej zlewało się w jeden punkt.

Podajemy jeszcze następujące twierdzenie o hesyanie formy dwójkowej: jeżeli skaźniki formy danej są wszystkie różne i rzeczywiste, wtedy skaźniki hesyanu są wszystkie urojone. patrz Gerbaldi, Schoute (Rend. Palermo 1889).

Niebiegunowość (apolarność). Ciekawą jest teorya niebiegunowości. Powiadamy, że forma dwójkowa a_x^n rzędu n lub grupa n punktów jest niebiegunową (apolarną) względem do grupy n punktów $y, z, t, \ldots$ jeżeli biegunowa $a_y\, a_z\, a_t \ldots$ jest zerem. Dwiema formami niebiegunowemi są wtedy a_x^n i $(xy)\,(xz)\,(xt) \ldots$

Pojęcie to znajdujemy poraz pierwszy u Battaglini'ego (Acc. Napol. 1864—1868), który rozciągnął je także na formy trójkowe; później rozwinęli i z powodzeniem stosowali to pojęcie Rosanes (Crelle LXXV, LXXVI. Math. Ann. VI) i Reye (Crelle LXXVIII, LXXIX). Ten ostatni wprowadził używaną dziś nazwę: Battaglini nazywał dwie formy względnie niebiegunowe sprzężonemi harmonicznemi, gdyż uważał niebiegunowość jako uogólnienie harmonii zwyczajnej, do której sprowadza się istotnie niebiegunowość w przypadku $n = 2$.

Warunkiem niebiegunowości dwu form a_x^n, b_x^n jest $(ab)^n = 0$.

Każda forma dwójkowa rzędu nieparzystego jest niebiegunową względem samej siebie; każda forma dwójkowa rzędu parzystego jest taką w przypadku, gdy niezmiennik dwuliniowy $(aa')^n$ jest zerem. Niezmiennik ten Battaglini nazywał harmonizantem.

Najważniejszem w teoryi niebiegunowości jest następujące twierdzenie Rosanesa:

Niebiegunowość dwu form dwójkowych rzędu n-tego jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby jedna z tych form dała się wyrazić liniowo przez potęgi n-te czynników liniowych formy drugiej (przedstawienie kanoniczne).

Dane w liczbie n formy dwójkowe rzędu n-tego można przedstawić jako kombinacye liniowe n-tych potęg n form liniowych, których iloczyn jest formą niebiegunową względem wszystkich n form danych.

Te badania nad niebiegunowością można rozciągnąć na formy jakiekolwiek i otrzymać ważne wyniki, dotyczące przedstawienia form trójkowych, czwórkowych i t. d. przez potęgi form liniowych.

Pokrewnemi z temi badaniami są dawniejsze badania Sylvestera, w których szło o to, aby liczba form liniowych, których potęgi n-te miały służyć do przedstawienia formy danej, była mniejsza od n, a mianowicie $\frac{n}{2}$ dla n parzystego, $\frac{n+1}{2}$ dla n nieparzystego.

Okazuje się, że w przypadku n parzystego spełniać się winien pewien związek pomiędzy spółczynnikami formy; pierwsza strona tego związku niezmienniczego nazywa się katalektykantem (patrz „Repertoryum", t I, str. 259—249). W przypadku n nieparzystego przedstawienie tego rodzaju jest niemożliwem.

§ 3.

Układy liniowe grup punktów. Inwolucye ogólne.

Niechaj będzie $k+1$ form dwójkowych stopnia n ($k \leqslant n$), liniowo niezależnych $a_x^n, b_x^n, \ldots$ Nazywamy formy liniowo-niezależnemi, jeżeli nie zachodzi pomiędzy niemi tożsamościowo żaden związek liniowy jednorodny, t. j. gdy nie dają się wyznaczyć parametry stałe $r_1, r_2, \ldots$ aby pomnożywszy je odpowiednio przez formy dane, otrzymać sumę iloczynów równą tożsamościowo zeru. Utwórzmy przy pomocy $k+1$ parametrów jednorodnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ formę $\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \lambda_3 c_x^n + \ldots$ Forma ta stopnia n-tego, przyrównana do zera, da po wyborze wartości na stałe λ, grupę n punktów. Formy tedy dane określają układ liniowy k-krotnie nieskończony, albo—jak się zwykle mówi—∞^k grup n punktów. Mówimy, że ten układ jest inwolucyą stopnia n i gatunku k; równanie

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \ldots = 0$$

nazywa się równaniem inwolucyi.

W przypadku $n = 2$, $k = 1$ otrzymujemy inwolucyę zwyczajną, t. j. w przypadku tym nieskończoność dwóch punktów składa się z dwójek punktów sprzężonych inwolucyi zwyczajnej, określonej przez dwie dwójki punktów, którą przedstawiają dwie dane formy kwadratowe.

Inwolucyę stopnia n i rzędu k określa $k+1$ grup n punktów, nie należących do inwolucyi rzędu niższego.

Jeżeli r punktów grupy inwolucyi schodzi się w jednym punkcie, mówimy wtedy, że punkt ten jest r-krotnym punktem inwolucyi.

Inwolucya stopnia n i gatunku k ma skończoną liczbę punktów $(k+1)$-krotnych; liczba ich wynosi $(k+1)(n-k)$ (Cremona. Preliminari. Bolonia 1866–1867).

Inwolucya stopnia n i gatunku k zawiera:

$$\frac{2^k (n-k)(n-k-1)\ldots(n-2k+1)}{k!}$$

grup, z których każda posiada dwa punkty podwójne.

Interesującemi są szczególnie inwolucye stopnia n i gatunku pierwszego. Mają one $2n-2$ punktów podwójnych lub zjednoczonych, które określa przyrównany do zera jakobian $(ab)\, a_x^{n-1}, b_x^{n-1} = 0$.

Ogół pierwszych biegunowych grupy n punktów tworzy inwolucyę stopnia $n-1$ i gatunku pierwszego.

Można ustanowić odpowiedniość rzutową pomiędzy inwolucyami, zakładając związki dwuliniowe pomiędzy ich parametrami.

Dla dwu inwolucyj gatunku pierwszego i stopnia m i n, nałożonych na sobie i będących w odpowiedniości rzutowej, przytrafia się $m+n$ razy, że punkt jednej zlewa się z jednym z odpowiadających mu punktów drugiej. Twierdzenie to jest przypadkiem szczególnym t. zw. zasady odpowiedniości Chasles'a (p. Rozdz. I § 2).

Inwolucyami gatunku 1-go i stopnia 3-go zajmowali się Battaglini (Rend. Acc. Nap. 1866), Weyer (Rozprawy Tow. król. czesk. VII. 1874), R. Sturm (Crelle LXXXVI), D'Ovidio (Memorie. Acc. di Torino 1879), Caporali (Rend. Acc. Nap. 1881—1883).

Formy kwadratowe. Jeżeli dla punktu danego weźmiemy punkt biegunowy względem formy kwadratowej (środek harmoniczny stopnia pierwszego), wtedy dwa jej elementy, punkt dany i punkt biegunowy będą w związku harmonicznym.

Znikanie niezmiennika $A_{f\varphi}$ dwu form kwadratowych f i φ (patrz „Repertoryum" t. I, str. 261) wyraża, że punkty zerowe pierwszej formy leżą harmonicznie względem punktów zerowych drugiej.

Punkty, przedstawione przez spółzmiennik $\vartheta=0$ (jakobian) są punktami zjednoczonemi inwolucyi, której dwoma punktami sprzężonemi są odpowiednio punkty form $f=0$ i $\varphi=0$. Inaczej: istnieją dwa punkty, z których jeden jest biegunem drugiego (a stąd harmonicznie sprzężonym) względem każdej z dwu danych form kwadratowych; temi punktami są punkty spółzmiennika $\vartheta=0$.

Znikanie niezmiennika R trzech form kwadratowych wyraża, że trzy pary punktów należą do tej samej inwolucyi.

Forma kwadratowa daje się za pomocą przekształcenia liniowego sprowadzić do postaci kanonicznej $X_1^2+X_2^2$ t.j. do formy, zawierającej tylko kwadraty zmiennych. Aby tę redukcyę uskutecznić, dość wziąć za nowe punkty podstawowe spółrzędne jednorodne dwu sprzężonych harmonicznie punktów formy kwadratowej, t. j. punkt y (dowolny) i punkt x, który jest pierwiastkiem równania $a_x a_y = 0$ i wybrać nadto odpowiednio punkt-jedność.

Jeżeli jako punkty podstawowe spółrzędnych jednorodnych obierzemy dwa punkty, będące pierwiastkami równania $\vartheta = 0$, wtedy każda z dwu form kwadratowych sprowadzi się do formy kanonicznej.

Twierdzenia te są ciekawe i z tego względu, że analogiczne do nich zachodzą w teoryi krzywych stożkowych i powierzchni rzędu 2-go (patrz Clebsch „Binäre Formen" § 33—37); są one zresztą przypadkami szczególnemi twierdzeń powyższych, odnoszących się do niebiegunowości.

Formy sześcienne. Punktami formy sześciennej $f = 0$ niechaj będą a, b, c. O niebiegunowości formy sześciennej względem samej siebie mamy twierdzenie:

Jeżeli dla punktu a formy sześciennej utworzymy grupę biegunową rzędu pierwszego (t. j. składającą się z dwu punktów), to jeden z tych punktów zejdzie się z a, drugi zaś będzie harmonicznie sprzężonym względem pary b, c. Mamy tym sposobem trzy inne punkty a', b', c', które są pierwiastkami spółzmiennika $Q = 0$.

Punkt biegunowy każdego z elementów spółzmiennika Q ma swój punkt biegunowy (grupę rzędu 2-go) względem formy sześciennej, przypadający w punkcie formy danej sześciennej f.

Punkty formy f wraz z punktami spółzmiennika Q tworzą trzy pary punktów sprzężonych w inwolucyi, której punkty podwójne są punktami hesyanu $\Delta = 0$.

Każdy z punktów hesyanu $\Delta = 0$ ma grupę biegunową rzędu 1-go względem formy sześciennej, złożoną z dwóch elementów zlewających się; z tym elementem zlewa się także punkt biegunowy rzędu 2-go tegoż elementu hesyanu $\Delta = 0$ względem formy sześciennej.

Jeżeli dla elementu dowolnego weźmiemy pary elementów biegunowych rzędu 1-go względem formy sześciennej i jej jakobianu, wtedy te pary będą harmonicznie sprzężonemi, a przy zmianie elementu dowolnego utworzą inwolucyę, której punktami podwójnemi są pierwiastki równania $\Delta = 0$.

Jeżeli dwa elementy biegunowe rzędu 1-go punktu względem formy sześciennej zlewają się, wtedy punkt ten wraz z trzema elementami formy sześciennej tworzy czwórkę równo-anharmoniczną (patrz Rozdz. I § 2); stąd każdy punkt hesyanu wraz z trzema punktami formy sześciennej tworzy czwórkę równo-anharmoniczną.

Jeżeli za punkty podstawowe spółrzędnych jednorodnych przyjmiemy punkty hesyanu $\Delta = 0$, wtedy forma sześcienna sprowadza się do postaci kanonicznej, zawierającej tylko sześciany dwóch zmiennych, i nadto Q sprowadza się także do postaci kanonicznej (patrz Clebsch „Binäre Formen“ § 38).

Trzy elementy formy f (tak jak i elementy formy Q) są w odpowiedniości rzutowej kołowej, której elementami podwójnemi są pierwiastki równania $\Delta = 0$.

W dwóch wzajemnie niebiegunowych trójkach elementów a, b, c; α, β, γ dwa którekolwiek punkty grupy pierwszej np. a, b są sprzężone harmonicznie z pierwszą grupą biegunową elementu c względem trójki α, β, γ.

Dwie formy sześcienne są wzajemnie niebiegunowemi, jeżeli niezmiennik $J = (f, \varphi)^3$ jest zerem (co do użytego tu i niżej znakowania patrz „Repertoryum“ t. I, str. 265 i nast.).

Jeżeli do każdego elementu formy sześciennej dobierzemy sprzężony z nią harmonicznie względem dwóch pozostałych, będziemy mieli trzy punkty; warunkiem niebiegunowości tej trójki punktów względem innej formy sześciennej jest znikanie niezmiennika $A_{\Delta\theta}$ lub $A_{\nabla\theta}$ stopnia trzeciego co do spółczynników jednej i stopnia pierwszego co do spółczynników drugiej formy sześciennej.

Warunkiem niebiegunowości dwóch trójek punktów, które otrzymujemy powyżej wskazanym sposobem dla każdej z form sześciennych, jest $\Omega = 0$.

Znikanie niezmiennika $A_{\Delta\nabla}$ wyraża, że para punktów, z których każdy tworzy czwórkę równoanharmoniczną z elementami pierwszej formy sześciennej, jest harmoniczna z każdą parą analogiczną względem drugiej formy sześciennej..

Formy dwukwadratowe. Jeżeli niezmiennik j jest zerem, wtedy cztery punkty, przedstawione przez formę dwójkową dwukwadratową, są harmonicznemi; jeżeli zerem jest niezmiennik i, wtedy te cztery punkty są równoanharmonicznemi. W tym ostatnim przypadku forma f jest niebiegunową względem samej siebie.

Hesyan formy dwukwadratowej przedstawia cztery elementy; każdy z nich ma grupę biegunową rzędu 3-go względem formy, zlewającej się z grupą biegunową rzędu 2-go (utworzoną z elementów zlewających się). Każdy punkt formy H tworzy z trzema punktami pierwszej grupy biegunowej czwórkę równoanharmoniczną.

Forma $T = 0$ przedstawia sześć elementów; grupa biegunowa każdego z nich (względem formy f) zlewa się z jednym z trzech punktów pierwszej grupy biegunowej i tworzy z niemi czwórkę harmoniczną.

Elementami podwójnemi trzech inwolucyj, określonych przez dwójki elementów formy dwukwadratowej lub jej hesyanu, są elementy spółzmiennika T; każda z tych trzech par elementów podwójnych przedstawia także elementy podwójne inwolucyi, określonej przez dwie pary pozostałe.

Jeżeli $j = 0$, wtedy forma f może być sprowadzona do postaci kanonicznej, zawierającej tylko potęgi czwarte dwu form liniowych, które są formami jednej z par formy T. W tym przypadku elementy formy f tworzą rzutowość kołową, której elementy podwójne są dwoma elementami formy T.

Te rozważania o przedstawieniu geometrycznem form dwójkowych znajdujemy w dziełach autorów niemieckich i w dawnych, niesłusznie zapomnianych, rozprawach Battaglini'ego (Accad. Napol. 1864 i nast.).

---

§ 4.

Własności rzutowe trójkątów, czworokątów, sześciokątów i t. d.

Jeżeli w dwóch czworokątach płaskich zupełnych, do siebie odniesionych, pięć boków jednego przecina pięć odpowiednich boków drugiego w pięciu punktach, położonych na jednej prostej, wtedy i szóste boki spotykają się w punkcie tejże prostej, a proste, łączące odpowiadające sobie wierzchołki, zbiegają się w jednym punkcie; nadto trójkąty przekątne są homologicznemi.

Stąd wypływa: Jeżeli czworokąt zupełny przekształcamy w ten sposób, aby pięć jego boków przechodziło przez punkty stałe pewnej prostej, wtedy bok szósty obraca się około punktu stałego tejże prostej, stanowiącego razem z poprzedniemi pięcioma punktami inwolucyę sześciu punktów.

P o p r z e c z n a d o w o l n a p r z e c i n a t r z y p a r y b o k ó w p r z e c i w l e g ł y c h c z w o r o k ą t a z u p e ł n e g o w p u n k t a c h, s t a n o w i ą c y c h t r z y p a r y p u n k t ó w w i n w o l u c y i.

Stąd: J e ż e l i p o p r z e c z n a p r z e c i n a t r z y p a r y b o k ó w p r z e c i w l e g ł y c h c z w o r o k ą t a z u p e ł n e g o w p u n k t a c h A i A', B i B', C i C', w t e d y p o m i ę d z y o d c i n k a m i p o p r z e c z n e j z a c h o d z i z w i ą z e k:

$$AB' \,.\, BC' \,.\, CA' + A'B \,.\, B'C \,.\, C'A = 0 .$$

Do czworoboku stosują się twierdzenia, dwoiście wzajemne do poprzedzających.

Trzy koła, których średnicami są przekątne czworoboku zupełnego, przechodzą przez te same punkty.

Trzy punkty środkowe trzech przekątnych czworoboku zupełnego leżą na jednej prostej.

W czworokącie zupełnym dwa boki, spotykające się w punkcie przekątnym, są rozdzielone harmonicznie przez dwa pozostałe.

W czworoboku zupełnym każda przekątna jest rozdzielona harmonicznie przez dwie pozostałe.

Jeżeli przez L, L'; M, M'; N, N' oznaczymy punkty, które wraz z przekątną s dzielą harmonicznie boki AB, CD, AC, BD, AD, BC czworokąta zupełnego, wtedy proste LL', MM', NN' spotykają się w jednym punkcie, który wraz z niemi dzieli harmonicznie proste LL', MM', NN'.

Jeżeli poprzeczna przecina boki trójkąta RSQ w trzech punktach A', B', C', które są odpowiednio parami w inwolucyi z punktami A, B, C tejże poprzecznej, wtedy proste RA, SB, QC spotykają się w jednym punkcie (t j. w biegunie harmonicznym poprzecznej względem trójkąta).

Jeżeli z punktu S rzucimy wierzchołki trójboku rsq przy pomocy trzech promieni a', b', c', będących parami w inwolucyi z trzema innemi promieniami a, b, c, wychodzącemi z punktu S, wtedy punkty ra, sb, qc znajdować się będą na jednej prostej.

Jeżeli poprzeczna dowolna przecina trzy boki trójkąta i jeżeli wierzchołki jego rzucimy z dowolnego punktu na boki odpowiednio im przeciwległe, wtedy iloczyn trzech stosunków anharmonicznych grup czterech punktów na trzech bokach jest równy jedności ujemnej.

Jeżeli trzy proste, wychodzące z jednego punktu i przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC, przecinają boki przeciwległe w punktach A', B', C', wtedy pomiędzy odcinkami boków zachodzi związek:

$$AB' \,.\, BC' \,.\, CA' + AC' \,.\, CB' \,.\, BA' = 0$$

lub

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = -1 . \qquad \text{(Ceva. 1678)}$$

Odwrotnie: Jeżeli dla trzech punktów A'. B', C' na bokach trójkąta zachodzi związek poprzedzający, wtedy proste AA', BB', CC' spotykają się w jednym punkcie.

Jeżeli poprzeczna przecina boki trójkąta ABC w trzech punktach A', B', C', wtedy pomiędzy odcinkami boków zachodzi związek:

$$AB' \,.\, BC' \,.\, CA' - AC' \,.\, CB' \,.\, BA' = 0$$

lub

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = 1 \quad \text{(Tw. Menelausa)}$$

i odwrotnie.

Jeżeli boki trójkąta ABC podzielimy harmonicznie w punktach A', B', C', A'' B'' C'' w ten sposób, aby było:

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = \frac{AB''}{B''C} \cdot \frac{BC''}{C''A} \cdot \frac{CA''}{A''B} = 1$$

wtedy koła o średnicach AA', BB', CC' przechodzą przez te same dwa punkty P, P', tak, że

$$AP : BP : CP = AP' : BP' : CP' ,$$

a koło przechodzące przez trzy punkty A, B, C dzieli cięciwę PP' harmonicznie i normalnie.

Jeżeli sześciokąt płaski zupełny ma wierzchołki rzędu nieparzystego na jednej prostej, a wierzchołki rzędu parzystego na drugiej, wtedy trzy pary boków przeciwległych przecinają się w punktach, leżących na jednej prostej.

Jeżeli sześciobok płaski zupełny ma boki rzędu nieparzystego, spotykające się w jednym punkcie, a boki rzędu parzystego spotykają się w innym punkcie, wtedy proste, łączące trzy pary wierzchołków przeciwległych, spotykają się w jednym i tym samym punkcie.

Te dwa twierdzenia są przypadkami szczególnemi dwóch twierdzeń Pascala i Brianchona (patrz niżej), dotyczących krzywych stożkowych; te przypadki szczególne wynikają z twierdzenia ogólnego w założeniu, że stożkowa podstawowa rozpada się na dwie proste lub na dwa punkty.

---

§ 5.

Geometrya miarowa trójkąta płaskiego. Wzory trygonometryi płaskiej.

Niechaj a, b, c będą boki, A, B, C kąty odpowiednio przeciwległe trójkąta prostokreślnego.

Zachodzą związki:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A ,$$

a trzy inne otrzymują się z drugiego przez przemianę liter a, b, c; A, B, C.

Dalej mamy wzory; s oznacza w nich połowę trzech boków.

$$a = \frac{b}{\cos C + \sin C \operatorname{cotg} A} = b \cos C + b \sin C \operatorname{cotg} B ,$$

$$a = b \cos C \pm \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C} = b \cos c + c \cos B ,$$

$$a=\frac{2s\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{s\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C},$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{1-\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}\right)^2},$$

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \operatorname{tg}A=\frac{a\sin C}{b-a\cos C},$$

$$(a-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)=(a+b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)\quad \text{(analogia Nepera)}$$

$$(s-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=(s-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}B=(s-c)\operatorname{tg}\frac{1}{2}C,$$

$$s=(s-a)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C,$$

$$c\sin(A-B)=a\sin A-b\sin B,$$

$$\left.\begin{aligned}a\cos\frac{1}{2}(B-C)&=(b+c)\cos\frac{1}{2}(B+C)\\ a\sin\frac{1}{2}(B-C)&=(b-c)\sin\frac{1}{2}(B+C)\end{aligned}\right\}\ \text{(wzory Gaussa)}$$

$$a^2\sin(B-C)=(b^2-c^2)\sin(B+C),$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C,$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C-1,$$

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1,$$

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C,$$

$$\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C=\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C$$
$$+\operatorname{cosec}A+\operatorname{cosec}B+\operatorname{cosec}C,$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C ,$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \cos B \cos C ,$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C ,$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C .$$

Pole trójkąta wyraża się za pomocą wzorów następujących:

$$\text{Pole} = \frac{1}{2} \frac{c^2 \sin A \sin B}{\sin C} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} .$$

---

§ 6.

Geometrya miarowa trójścianu i trójkąta kulistego. Wzory trygonometryi kulistej.

Rozważajmy trzy płaszczyzny wiązki (nie pęku, a więc płaszczyzny, nie przechodzące przez jednę prostą); płaszczyzny te wyobraźmy sobie przesunięte aż do przecięcia się wzajemnego według prostych, wychodzących z punktu wspólnego wszystkim trzem; otrzymujemy wtedy t r ó j ś c i a n. Przetnijmy ten trójścian kulą, której środek znajduje się w środku wiązki, promień zaś równa się 1; otrzymamy tym sposobem na kuli t r ó j k ą t k u l i s t y (sferyczny), którego boki są łukami kół wielkich; łuki te można mierzyć przez kąty w środku kuli, t. j. kąty płaskie na ścianach trójścianu. Kątami zaś trójkąta kulistego są kąty pomiędzy stycznemi do boków trójkąta w jego wierzchołkach; są to kąty, które tworzą ze sobą wzajemnie ściany trójścianu, czyli kąty dwuścienne trójścianu. Geometrya metryczna trójścianu czyli t r i e d r o m e t r y a zlewa się tym sposobem z geometryą trójkąta kulistego, t. j. z trygonometryą kulistą.

Pomiędzy trójkątami kulistemi, wyróżniają się trójkąty prostokątne, dwuprostokątne i trójprostokątne. Te ostatnie są utworzone przez trzy łuki kół wielkich, z których każde dwa są do siebie prostopadłe; wszystkie ich boki i wszystkie ich kąty mają po 90 stopni.

W każdym trójkącie kulistym prostokątnym, albo każdy z trzech, albo jeden tylko z boków jest mniejszy od 90^0.

W każdym trójkącie kulistym prostokątnym kąt nieprosty i bok temuż przeciwległy są albo oba większe albo oba mniejsze od 90^0.

Jeżeli w trójkącie kulistym każdy bok i każdy kąt jest mniejszy od 180^0, to suma kątów jest większa od 180^0; różnica pomiędzy tą sumą a 180^0 nazywa się przepełnieniem trójkąta kulistego.

Trójkąt kulisty jest równoważny innemu trójkątowi kulistemu dwuprostokątnemu, którego kąt trzeci jest równy przepełnieniu trójkąta danego. (Twierdzenie Girarda 1629, dowiedzione sposobem prostym przez Cavalieri'ego w r. 1632).

Za jednostkę pól kulistych przyjmuje się trójkąt dwuprostokątny, którego kąt trzeci jest wtedy jednostką kątową. Wtedy mamy: Pole trójkąta kulistego równa się jego przepełnieniu.

Końce średnicy kuli prostopadłej do płaszczyzny koła wielkiego nazywają się biegunami tego koła. Jeżeli wyobrazimy sobie, że goniec, oparty stopami na kuli, przebiega okrąg koła wielkiego w pewnym zwrocie, który przyjmijmy jako dodatni, to biegunem koła będzie mianowicie ten z dwóch wyżej określonych punktów, który pozostaje po stronie lewej gońca; tym sposobem dawszy sobie biegun, wyznaczany zwrot dodatni drogi. Strona płaszczyzny koła wielkiego, zwrócona ku biegunowi, nazywa się stroną dodatnią. Jeżeli płaszczyznę koła wielkiego obrócimy na pewien kąt, to na takiż kąt obróci się biegun tego koła.

Niechaj będzie trójkąt kulisty ABC; szukajmy biegunów jego boków BC, CA, AB (gdzie za zwrot dodatni na bokach przyjmujemy zwroty od B do C, od C do A i t. d.). Oznaczmy te bieguny przez A', B', C' i utwórzmy trójkąt kulisty $A'B'C'$, zwany trójkątem biegunowym lub wzajemnym względu trójkąta danego.

Trójkątem biegunowym dla trójkąta $A'B'C'$ jest nawzajem trójkąt ABC. Kąty trójkąta są odpowiednio spełnieniami boków trójkąta biegunowego.

Pole trójkąta danego i obwód trójkąta biegunowego, dodane do siebie, dają sumę równą 2π.

Dajmy na to, że przebiegamy obwód trójkąta kulistego w pewnym zwrocie, np w zwrocie ABC i że zwrot ten jest zwrotem dodatnim odpowiednio na każdym łuku kół wielkich AB, BC, CA; niechaj wielkościami tych boków trójkąta, przebieganych w pewnym, zwrocie będą odpowiednio c, a, b. Przez kąt BAC rozumiemy kąt pomiędzy dwoma kierunkami AB, AC, z których pierwszy jest tedy dodatni, drugi ujemny; podobnież rzecz się ma z kątami ACB, CBA. Te to kąty oznaczamy odpowiednio przez A, C, B. Jeżeli przez kąt pomiędzy dwiema ścianami trójścianu, odpowiadającego trójkątowi kulistemu, rozumieć będziemy kąt pomiędzy stroną dodatnią jednej i stroną ujemną drugiej ściany, to będzie można powiedzieć: kąty trójkąta kulistego są spełnieniami kątów utworzonych przez ściany trójścianu, odpowiadającego trójkątowi danemu. Jeżeli zaś przez kąt pomiędzy dwiema ścianami trójścianu rozumieć będziemy kąt pomiędzy stronami dodatniemi jego ścian, wtedy kąty, utworzone przez ściany trójścianu, równają się odpowiednio kątom, które oznaczyliśmy wyżej przez A, B, C, a które nie są kątami utworzonemi przez zwroty dodatnie na kołach wielkich.

Dla trójkątów kulistych prostokątnych ($B = 90^0$) mamy następujące wzory główne:

$$\cos a = \cos b \cos c \;;\; \sin b = \sin a \sin B \;;\; \sin c = \sin a \sin C\,,$$

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C = \sin c \operatorname{tg} B \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B = \sin b \operatorname{tg} C \end{array}\right.$$

$$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C \;;\; \cos B = \cos b \sin C \;;\; \cos C = \cos c \sin B\,.$$

Wzory zasadnicze dla trójkątów kulistych jakichkolwiek są następujące:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C};$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a;$$

inne otrzymują się z tych przez przemianę liter.

Pierwszy z tych wzorów znajdujemy już w dziełach geometrów starożytnych (Menelaos, Sphaerica III); pozostałe nazywają się wzorami Eulera (Mém. de Berlin. 1758). Z tych wzorów można otrzymać wszystkie wzory trygonometryi kulistej, co pokazali pierwsi Lagrange (Journal de l'Ecole polyt. 1799) i Gauss (Dodatki do „Geometryi położenia" Carnota w tłómaczeniu Schumachera).

W poniższych wzorach jest $2s=a+b+c$, $2S=A+B+C$.

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{tg} A,$$

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}{\sin b \sin c},$$

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}},$$

$$\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C}}, \quad \cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B \sin C}};$$

stąd przez dzielenie łatwo otrzymać wzory na $\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A$; $\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}a$.

Wzory te służą głównie do obliczania kąta z danych trzech boków lub boku z danych trzech kątów.

Jeżeli wszystkie kąty i boki trójkąta kulistego są mniejsze od 180°, to wtedy możemy stosować następujące wzory, zwane wzorami Gaussa lub Delambre'a:

$$\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C,$$

$$\sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C.$$

Wzory te ogłosili prawie równocześnie Gauss (Theoria motus etc.), Delambre (Connaissance des temps 1808) i Mollweide (Zach's Monatliche Correspond 1808. Vol XVIII).

Przez dzielenie otrzymujemy stąd bezpośrednio wzory na $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)$, zwane analogiami Nepera (1614).

Gauss podał jeszcze wzory następujące:

$$(\sin A-\sin B)\sin c=(\sin a-\sin b)\sin C\,,$$

$$(\sin A+\sin B)\sin c=(\sin a+\sin b)\sin C\,,$$

$$(\cos A+\cos B)\sin c=\sin(a+b)(1-\cos C)\,,$$

$$\sin(A+B)(1+\cos c)=(\cos a+\cos b)\sin C\,.$$

Z każdego wierzchołka trójkąta kulistego poprowadźmy koło wielkie prostopadłe do boku przeciwległego; prostopadła ta podzieli kąt i bok przeciwległy na dwie części M, N; m, n, tak, że $M+N=A$, $m+n=a$ (dla prostopadłej przechodzącej przez wierzchołek A). Mamy wtedy związki:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(M+N)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(M-N=\frac{\sin(b-c)}{\sin(b+c)}\,,$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(m+n)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(m-n)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-c)\,,$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(M-N)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(M+N)}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)\,,$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(m-n)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(m+n)}=\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}$$

$$\frac{\operatorname{tg}M}{\operatorname{tg}N}=\frac{\operatorname{tg}m}{\operatorname{tg}n}\,;\quad \frac{\sin(M+N)}{\sin(M-N)}=\frac{\sin(m+n)}{\sin(m-n)}\,.$$

Dalej mamy następujące wzory na $S=\frac{1}{2}(A+B+C)$,

$$\sin S=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\operatorname{tg}S=-\frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a\operatorname{cotg}\frac{1}{2}b+\cos C}{\sin C}\,;$$

$$\operatorname{cotg}S=-\frac{\sin a\sin b\sin C}{1+\cos a+\cos b+\cos c}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(S-90^0)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}s\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-c)\,.$$

Tym wzorom odpowiadają analogiczne na obliczanie obwodu $2s$ trójkąta kulistego; otrzymać je można łatwo, stosując poprzednie do trójkąta biegunowego względem danego.

Jeżeli w trójkącie kulistym pozostają stałemi jeden kąt i stosunek stycznych połów boków ten kąt obejmujących, wtedy pozostaje stałem i pole trójkąta.

Jeżeli w trójkącie kulistym pozostają stałemi jeden bok i iloczyn stycznych połów kątów przyległych temu bokowi, wtedy pozostaje stałym i obwód trójkąta.

Jeżeli stosunki boków trójkąta kulistego do promienia mają niewielkie wartości, wtedy kąty trójkąta są przybliżenie o trzecią część przepełnienia większe od odpowiednich kątów trójkąta płaskiego, które boki są tejże długości co odpowiednie boki trójkąta kulistego. (Twierdzenie Legendre'a. Mém. de Paris. 1787).

Studya nad trygonometryą kulistą, niezbędne dla astronomii rozpoczęli już astronomowie greccy. Z nowszych badaczy, którzy wzbogacili trygonometryę kulistą ważnemi zdobyczami, wymieniamy Eulera (Mém. de Berlin 1753, Acta Petrop. 1779), Legendre'a (Trigonométrie), Lexella (Acta Petrop. 1782), Lagrange'a (Journ. de l'Ecole polyt. Cah. VI) i Gaussa. Ważnemi są dzieła Möbiusa (Analytische Sphärik 1846) i Gudermanna (Nied. Sphärik 1835). Z dzieł najnowszych autorów podajemy E. Study: „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen. Eine Analyt. geom. Untersuchung“ (Lipsk 1893); z podręczników: Serreta, Baltzera, dawniejsze Śniadeckiego (1817, 1820) i nowsze Niewęgłowskiego (1876) i Czajewicza (1891).

ROZDZIAŁ III.

TEORYA NIEZMIENNICZA FORM ALGEBRAICZNYCH. KONEKSY.

---

§ 1.

Formy algebraiczne jakiekolwiek. Rzeczy ogólne

Przez formę algebraiczną gatunku r tego rozumiemy funkcyę jednorodną całkowitą r zmiennych $x_1\, x_2 \ldots x_r$; stopień tych zmiennych nazywa się rzędem formy. Spółczynniki tej formy mogą być znów funkcyami jednorodnemi całkowitemi, wymiernemi innych zmiennych, których liczba może być też różna od r. Formy zawierają w tym przypadku pewną liczbę szeregów ilości zmiennych. W przypadku $r = 3$ mamy formy trójkowe, w przypadku $r = 4$ czwórkowe i t. d.

Jeżeli formę trójkową z jednym szeregiem zmiennych przyrównamy do zera, otrzymamy równanie krzywej płaskiej, gdy zmienne x uważać będziemy za spółrzędne jednorodne punktów płaszczyzny; forma czwórkowa z jednym szeregiem zmiennych przyrównana do zera, daje równanie płaszczyzny, gdy zmienne x uważamy za spółrzędne punktu przestrzeni.

Formom gatunku r-tego i rzędu n-tego o jednym szeregu zmiennych nadajemy postać symboliczną

$$f = a_x^n = b_x^n = \ldots$$

i podobneż przedstawienie symboliczne możemy stosować do form o większej liczbie szeregów ilości zmiennych.

Niechaj zmienne x ulegają przekształceniom liniowym typu

$$x_i = A_{i1}\,x_1' + A_{i2}\,x_2' + \ldots + A_{ir}\,x_r'$$

i niechaj wyznacznik

$$\Delta = |\,A_{ij}\,|,$$

który nazywamy modułem przekształcenia, będzie różny od zera. Jeżeli przez A_{ij}' oznaczymy wyznaczniki dołączone elementów A_{ij} wyznacznika Δ, podzielone przez Δ, to społczynniki symboliczne $a_1, a_2, \ldots, a_r$ formy a_x^n przekształcają się za pomocą wzorów:

$$a_i = A_{i1}'\,a_1' + A_{i2}'\,a_2' + \ldots + A_{ir}'\,a_r'.$$

Funkcyami odwrotnemi do powyższych są:

$$x_i' = A_{1i}'\,x_i + A_{2i}'\,x_2 + \ldots + A_{ri}'\,x_r\,;\; a_i' = A_{1i}\,a_1 + A_{2i}\,a_2 + \ldots A_{ri}\,a_r.$$

Wzory na przekształcenie ilości a otrzymujemy z wzorów na przekształcenie zmiennych x, jeżeli zamiast każdego spółczynnika A_{ij} podstawimy odpowiadający mu wyznacznik dołączony w Δ, podzielony przez Δ. Dwa przekształcenia, pozostające w takim związku, nazywamy wzajemnemi.

Teorya niezmienników form bada funkcye jednorodne całkowite wymierne spółczynników formy pierwotnej i zmiennych, pozostające niezmiennemi przy przekształceniach liniowych ilości zmiennych, przy pominięciu czynnika, będącego potęgą modułu. Te funkcye nazywają się w ogóle utworami niezmienniczemi.

Łatwo przekonać się, że dla zbadania ogółu tych utworów, należy, prócz zmiennych x, uważać jeszcze inne zmienne.

Niechaj będzie r szeregów ilości zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_r$; $y_1, y_2, \ldots, y_r$; $z_1, z_2, \ldots, z_r \ldots$; wyznacznik, którego te wszystkie zmienne są elementami, oznaczamy zwykle za pomocą symbolu $(xyz\ldots)$.

Z wzorów na przekształcenie wynika bezpośrednio, że gdy uważamy np. dwa szeregi zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_r$; $y_1, y_2, \ldots, y_r$

i poddajemy je tym samym przekształceniom liniowym, to wyznaczniki dwójkowe, zawarte w macierzy tych $2r$ elementów, przechodzą skutkiem przekształcenia liniowego na wyznaczniki dwójkowe macierzy elementów przekształconych $x_1', x_2', \ldots, x_r'$; $y_1', y_2', \ldots, y_r'$.

Wynika stąd, że gdy jeden utwór zawiera zmienne x, drugi zmienne y, ale tylko w kombinacyach

$$\begin{vmatrix} x_i, & x_j \\ y_i, & y_j \end{vmatrix} = u_{ij},$$

to wystarcza uważać utwór ten nie za funkcyę zmiennych x i y (dwu szeregów ilości zmiennych) lecz za funkcyę pojedyńczego szeregu zmiennych u; jest przeto koniecznem wprowadzenie ilości u, jako zmiennych. Lecz wtedy, podobnie jak i zmienne u, wprowadzamy zmienne v, które przedstawiają wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} x_i, & x_j, & x_k \\ y_i, & y_j, & y_k \\ z_i, & z_j, & z_k \end{vmatrix} = v_{ijk}$$

i t. d. A zatem oprócz zmiennych x mamy jeszcze do rozważania $r - 2$ szeregów zmiennych, z których każdy jest specyalnej natury. Ostatni z tych szeregów składa się z r zmiennych, a więc z tylu zmiennych, ile jest zmiennych x.

Interpretacya geometryczna łatwo tu przewidzieć się daje. Jeżeli zmienne x uważamy za spółrzędne jednorodne punktu w przestrzeni o r wymiarach, to zmienne $u, v, \ldots$ są spółrzędnemi kolejnych rozmaitości liniowych, zawartych w tej przestrzeni: prostej, płaszczyzny i t. d. Dla $r = 3$ ilości u są spółrzędnemi prostej na płaszczyźnie; i dla tego w dziedzinie trójkowej nazywamy ilości u spółrzędnemi prostej.

Szeregi zmiennych nazywają się spółpodstawieniowemi, gdy ulegają tym samym przekształceniom; przeciwpodstawieniowemi, gdy poddane są przekształceniom liniowym wzajemnym; różnopodstawieniowemi (digredient), gdy nie są poddane ani równym, ani wzajemnym.

Przeciwpodstawieniowemi zmiennemi są zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_r$ i zmienne ostatnich $r-2$ szeregów, o których mówiliśmy wyżej. Łatwo przekonać się można, że symbole operacyjne

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r},$$

przekształcają się za pomocą wzorów wzajemnych względem wzorów, służących do przekształcenia zmiennych x.

Aby więc objąć ogół utworów niezmienniczych, należy wyobrazić sobie, że zawierają one w ogólności pewną liczbę szeregów ilości zmiennych spółpodstawieniowych, jakiemi są zmienne x, pewną liczbę szeregów ilości zmiennych, jakiemi są u, pewną liczbę szeregów zmiennych v i t. d.

Twierdzenie Clebscha (Gött. Abh. 1872), które można uważać za rozszerzenie wzoru Clebscha — Gordana, redukuje wszakże liczbę tych utworów i orzeka, że wystarcza rozważanie co najwyżej jednego pojedyńczego szeregu zmiennych x, jednego pojedyńczego szeregu zmiennych u, jednego szeregu zmiennych v i t. d.

Przy tej sposobności zwracamy uwagę na to, że Capelli (Giorn. di Batt. XVIII. Mem.-Lincei XVII 1882. Rend.-Lincei 1891) z innego punktu widzenia uogólnił twierdzenie Clebscha — Gordana, bez uważania zmiennych $u, v \ldots$, a rozważając tylko zmienne spółpodstawieniowe ze zmiennemi x.

Różnica pomiędzy dziedziną dwójkową a przypadkiem ogólnym polega na tem, że w dziedzinie dwójkowej możemy zawsze ograniczyć się do form o jednym tylko szeregu zmiennych, gdy tymczasem w przypadku ogólnym nie możemy zejść niżej $r-1$ szeregów, które mogą wtedy składać się ze zmiennych spółpodstawieniowych (Capelli) lub różnopodstawieniowych (Clebsch).

Po ograniczeniu utworów niezmienniczych, zgodnie z twierdzeniem Clebscha, możemy przeprowadzić dalszą redukcyę. Dowiedziono, że nietylko dla form dwójkowych, ale i dla form gatunków wyższych istnieją zawsze układy zupełne t. j., że istnieje zawsze liczba skończona utworów niezmienniczych, których każdy inny utwór jest funkcyą całkowitą wymierną.

Twierdzenia tego dowiódł najprzód Gordan dla przypadków specyalnych dziedziny trójkowej; dla formy trójkowej sześciennej Math. Ann. I, dla dwu form kwadratowych trójkowych Math. Ann. XIX; potem ogólnie i dla form nietrójkowych. Hilbert, Math. Ann. XXXVI; patrz Gordan, Math. Ann. XLII; Capelli, Rend. Acc. Napol. 1896; White, Amer. J. XIV, 1892.

W formach trójkowych rozróżniać będziemy następujące utwory niezmiennicze: 1-o Niezmienniki — zależne tylko od spółczynników formy pierwotnej lub form pierwotnych. 2-o Spółzmienniki — zależne, prócz od spółczynników, jeszcze od zmiennych x; stopień względem zmiennych nazywa się ich rzędem, stopień względem spółczynników ich stopniem. 3-o Przeciwzmienniki lub formy przyporządkowane — zależne od społczynników i od zmiennych przeciwpodstawieniowych u; stopień względem tych ostatnich stanowi ich klasę. 4-o Formy pośrednie — zależące od spółczynników zmiennych x i zmiennych u.

Jeżeli przez u_1, u_2, u_3 oznaczymy zmienne trójkowe przeciwpodstawieniowe względem zmiennych x_1, x_2, x_3, to wyrażenie u_x za pomocą przekształcenia liniowego przekształca się — jeżeli pominiemy czynnik Δ — na formę u_x'; to ostatnie wyrażenie nazywa się spółzmiennikiem tożsamościowym; należy ono do układu zupełnego każdej dowolnej formy trójkowej, albo każdego układu takich form. Podobnie rzecz się ma i dla form gatunku r — tego.

Zachodzi twierdzenie:

Jeżeli forma niezmiennicza układu danych form nie zawiera spółczynników tych form, lecz tylko szereg zmiennych x oraz szereg zmiennych u, to jest ona koniecznie — jeżeli odwrócimy uwagę od czynnika liczbowego — potęgą spółzmiennika tożsamościowego.

Rozważania o działaniach niezmienniczych (patrz „Repertoryum“ t. I. Rozdział XII) dają się łatwo przenieść na formy gatunku dowolnego.

Działanie:

$$\frac{1}{m}\Sigma y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

gdzie m jest rzędem formy lub spółzmiennika, na którym wykonywamy działanie, zmienne zaś y są spółpodstawieniowemi ze zmiennemi x, nazywa się działaniem biegunowem lub biegunowaniem Działanie to, wykonane na spółzmienniku, nie zmienia jego własności niezmienniczej.

Jeżeli J jest funkcyą r szeregów ilości zmiennych spółpodstawieniowych $x_1, x_2, \ldots, x_r$; $y_1, y_2, \ldots, y_r$; $z_1, z_2, \ldots, z_r \ldots$; odpowiednio rzędów $m, m', m'' \ldots$, to działanie (Cayley'owskie), wyrażone symbolicznie przez

$$\Omega = \frac{1}{m\,m'\,m'' \ldots} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\partial}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial x_r} \\ \frac{\partial}{\partial y_1}, & \frac{\partial}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial y_r} \\ \frac{\partial}{\partial z_1}, & \frac{\partial}{\partial z_1}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial z_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

(gdzie przy rozwinięciu wyznacznika należy zamiast iloczynu r pochodnych podstawić odpowiednią pochodną r — tą) wykonane na funkcyi J, nie zmienia jej własności niezmienniczej.

Jeżeli funkcyi J nadamy postać symboliczną

$$J = a_x^m \, a'^{m'}_y \, a''^{m''}_z \ldots,$$

to:

$$\Omega J = (a a' a'' \ldots)\, a_x^{m-1}\, a'^{m'-1}_y\, a''^{m''-1}_z \ldots$$

Podobnie można uogólnić pojęcie działania Aronholda.

Jeżeli $a_{ij}\ldots$ są istotnemi spółczynnikami formy, $b_{ij}\ldots$ spółczynnikami innej formy tegoż rzędu, to działanie:

$$\sum_{ij\ldots} b_{ij}\ldots \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\ldots$$

nazywa się działaniem Aronholda. Jeżeli wykonamy to działanie na utworze niezmienniczym formy danej (formy ze spółczynnikami a), to przekształca się on na utwór niezmienniczy obu form (formy ze spółczynnikami a i formy ze spółczynnikami b).

O procesach niezmienniczych w teoryi form algebraicznych ogłosił Capelli liczne prace: Mem. Acc. Napoli (2), 1888; Rend. Acc. Napoli 1886, 1887, 1888, 1893; Giorn-di Batt. (1), XXI; (2), I; Math. Ann. XXIX, XXXVII.

Wprowadzenie rachunku symbolicznego ma ten skutek, że każdy utwór niezmienniczy układu form dowolnych może być przedstawiony symbolicznie jako utwór niezmienniczy układu form liniowych.

Pozostając w przypadku form trójkowych, możemy wypowiedzieć twierdzenie:

Każdy utwór niezmienniczy układu form trójkowych daje się przedstawić symbolicznie jako ogół iloczynów symbolicznych, których czynniki są typów:

$$u_x, a_x, u_\alpha, a_\alpha, (abc), (abu), (auv), (uvw), (\alpha\beta\gamma), (\alpha\beta x), (\alpha xy), (xyz),$$

gdzie $a, b, c\ldots$ są spółczynniki form liniowych w spółrzędnych punktowych, $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ spółczynniki form liniowych w spółrzędnych prostej, $x, y, z\ldots$ spółrzędnemi punktowemi, $u, v, w\ldots$ spółrzędnemi prostej.

W rachunku symbolicznym form trójkowych i wyższych zasadniczemi są pewne tożsamości analogiczne do tych, które znajdują zastosowanie w teoryi form dwójkowych. Dla dziedziny trójkowej mamy tożsamości:

$$(abc)(def) - (bcd)(aef) + (cda)(bef) - (dab)(cef) = 0$$

$$(abc)d_x - (bcd)a_x + (cda)b_x - (dab)c_x = 0$$

$$(abc)(xyz) - \begin{vmatrix} a_x, & a_y, & a_z \\ b_x, & b_y, & b_z \\ c_x, & c_y, & c_z \end{vmatrix} = 0$$

$$(xyz)a_t - (yzt)a_x + (ztx)a_y - (txy)a_z = 0$$

$$(xyz)(trs) - (yzt)(xrs) + (ztx)(yrs) - (txy)(zrs) = 0,$$

gdzie a, b, c, d, e, f są spółczynniki form liniowych w spółrzędnych punktowych lub w spółrzędnych prostej, x, y, z, t, r, s zaś przedstawiają spółrzędne punktowe lub spółczynniki form liniowych w spółrzędnych prostej.

Dla form gatunku wyższego otrzymujemy pięć typów tożsamości, analogicznych do poprzednich.

Tożsamości te są jedynemi tożsamościami pierwotnemi, które mogą zachodzić pomiędzy utworami symbolicznemi typu niezmienniczego, w tem znaczeniu, że każda inna pozornie różna od nich tożsamość może być ostatecznie tylko kombinacyą powyższych.

Twierdzenia tego dowiedli dla form dwójkowych i trójkowych Gordan i Study, Math. Ann. XXX, str. 120, dla przypadku ogólnego dowiódł go Pascal, Lincei Rend. 1888, Memorie V, 1888.

Interpretacya geometryczna utworów niezmienniczych form trójkowych, czwórkowych i t. d. jest wielkiego znaczenia w geometryi. Forma trójkowa z szeregiem zmiennych x, uważanych za spółrzędne punktowe, przyrównana do zera, przedstawia geometrycznie, jak już wyżej powiedziano, krzywą płaską, i podobnie forma czwórkowa z jednym szeregiem zmiennych, przyrównana do zera, przedstawia powierzchnię w zwykłej przestrzeni.

Znikanie tożsamościowe niezmienników i spółzmienników odpowiada tym własnościom i związkom pomiędzy elementami krzywej lub powierzchni, które przy przekształceniu liniowem ogólnem, t. j. mówiąc geometrycznie, przy przekształceniu homograficznem, pozostają niezmienionemi (własności rzutowe). Albo w szczególności: Jeżeli przyjmiemy, że dla danej formy specyalnej pewien niezmiennik jest zerem, to odpowiada to takiej własności krzywej lub powierzchni, która nie zmienia się, gdy tę krzywą lub powierzchnią przekształcimy homograficznie. Dalej spółzmiennik z jednym szeregiem zmiennych, przyrównany do zera, przedstawia inną krzywą lub powierzchnię, która względem krzywej lub powierzchni pierwotnej posiada własności niezmiennicze i t. d.

Możemy jeszcze dodać, iż możnaby przyjąć, że formy pierwotne mają nie jeden szereg, lecz więcej szeregów ilości zmiennych, np. dwa szeregi przeciwpodstawieniowe lub różnopodstawieniowe. O tych formach mówimy poniżej krótko, ze stanowiska teoryi form.

Interpretacya geometryczna tych form z dwoma szeregami zmiennych przeciwpodstawieniowych jest łatwa, jeżeli przyjmiemy, że idzie o formy trójkowe, i jeżeli założymy, że taka forma z dwoma szeregami zmiennych przeciwpodstawieniowych jest zerem. Geometrycznie określa to na płaszczyźnie przyporządkowanie punktów i pewnych krzywych oznaczonej klasy albo też prostych i pewnych krzywych oznaczonego rzędu, t. j. otrzymujemy to, co nazywamy konneksem płaskim. O tych formach mówimy niżej.

Podamy niektóre wskazówki historyczne i bibliograficzne o rozszerzeniu, jakiego doznały niektóre ważne twierdzenia i rozważania, odnoszące się do form dwójkowych, przy stosowaniu ich do form wyższych: trójkowych, czwórkowych i t. d.

Niezmienniki i spółzmienniki form wyższych czynią zadość podobnie, jak dla form dwójkowych, pewnym równaniom różniczkowym; temi równaniami dla dziedziny trójkowej w ogólności zajmował się Forsyth, Proc. Lond. math. Soc. XIX, 1888. Twierdzenie Hermite'a o odwróceniu rozwinął Deruyts, Brux. Bull. (3), XXII, 1881; patrz też Gordan, Gött. Nachr. 1897. Inne ważne uogólnienie odnosi się do przedstawienia typowego. Najprzód Brioschi (Annali di mat. (1), I, 1858), rozwinął postępowanie, które stosował był Hermite dla form dwójkowych; później w inny sposób uczynili to Grassmann, Math. Ann. VII i Christoffel tamże XIX.

Badanie przedstawienia typowego i odpowiednich układów zupełnych form stowarzyszonych przeprowadzili: Clebsch — Gordan, Math. Ann. I, dla formy sześciennej trójkowej Gordan, Math. Ann. XVII, XX dla specyalnej formy dwukwadratowej trójkowej Forsyth, Amer. J. XII dla wielu innych przypadków dziedziny trójkowej oraz dla dziedziny czwórkowej Cambr. Phil. Trans. XIV, 1889.

W związku z przedstawieniem typowem form trójkowych jest twierdzenie Hermite'a (Crelle LVII). Hermite okazał, że trzy formy trójkowe kwadratowe można zawsze uważać za pochodne pierwsze jednej i tej samej formy sześciennej trójkowej, której spółczynnikami są niezmienniki równoczesne form danych. Patrz co do tego Gundelfinger, Crelle LXXX.

Pierwszą pracę o niezmiennikach trójkowych ogłosił Aronhold, Crelle XXIX, który badał niezmienniki form sześciennych trójkowych. Podręczników zupełnych o formach trójkowych, czwórkowych i t. d. niema; teorya tych form nie jest tak rozwinięta, jak teorya form dwójkowych. Z dzieł, które się temi formami wyższemi zajmują, cytujemy Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transform. Lipsk 1877; Clebsch—Lindemann, Geometrie I. Lipsk 1875. II, 1, 1891; Study, Methoden zur Theorie der ternären Formen. Lipsk 1889. Wskazówki historyczne i bibliograficzne w cytowanej pracy Fr. Meyera (po niemiecku oraz przekład polski. Warszawa 1899). Wreszcie wymieniamy jeszcze prace nowsze: Deruyts, Essai d'une théorie des formes algebr. Bruksele 1891; Elliot, Algebra of Quantics. Oxford 1895; Andoyer, Théorie des formes Paryż 1898.

§ 2.

Zasada przeniesienia.

Ważną w teoryi form trójkowych jest t. zw. zasada przeniesienia (Uebertragungsprincip) Clebscha, służąca do otrzymywania pewnych szczególnych niezmienniczych form trójkowych ze znanych niezmienników lub spółzmienników dwójkowych

Rozpatrzmy przypadek, w którym mamy daną formę zasadniczą trójkową $a_x^n = b_x^n = \ldots$ Niechaj y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3 będą dwa szeregi zmiennych spółpodstawieniowych, które można zatem przedstawić jako spółrzędne dwu punktów prostej; spółrzędne punktu prostej, łączącej te dwa punkty, niechaj będą:

$$x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1 \quad , \quad x_2 = \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2 \quad , \quad x_3 = \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3 \, .$$

Spółrzędne przeciwpodstawieniowe u_1, u_2, u_3, t. j.

$$\begin{vmatrix} y_2 \, , & y_3 \\ z_2 \, , & z_3 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} y_3 \, , & y_1 \\ z_3 \, , & z_1 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} y_1 \, , & y_2 \\ z_1 \, , & z_2 \end{vmatrix} ,$$

można interpretować jako spółrzędne prostej. Podstawiwszy te wartości w a_x i kładąc symbolicznie $a_y = a_1$, $a_z = a_2$, otrzymamy formę dwójkową a_λ^n względem λ. Interpretując geometrycznie równanie $a_\lambda^n = 0$ powiemy, że jego pierwiastki λ odpowiadają punktom spotkania prostej (yz) z krzywą $a_x^n = 0$.

Niechaj Π będzie niezmiennikiem lub spółzmiennikiem formy dwójkowej a_λ^n; będzie on utworzony z wyrazów, których czynnikami są wyznaczniki dwójkowe typu $(\alpha\beta)$ oraz czynniki liniowe typu $a_\lambda \, \beta_\lambda \, , \ldots ,$ gdzie przez β należy rozumieć symbole równoważne symbolom a. Jeżeli przekształcimy Π tak, aby wystąpiły spółczynniki formy trójkowej i spółrzędne u, otrzymamy utwór niezmienniczy względem formy trójkowej.

Jeżeli przyrównamy Π do zera, będziemy mieli warunek, aby grupa n punktów, w których prosta przecina krzywą, miała specyalne własności rzutowe; po przekształceniu powyższem $\Pi = 0$ przedstawia ogół wszystkich prostych, które przecinają krzywą danę w grupach punktów, mających powyższe własności.

Łatwo sprawdzić, że każdy wyznacznik $(\alpha\beta)$ jest równoważny z wyznacznikiem (abu), a każdy czynnik a_λ z czynnikiem a_x, gdzie zmienne x i u nie są już niezależne, lecz związane warunkiem $u_x = 0$; jeżeli więc v_1, v_2, v_3 są spółrzędnemi innej prostej, przechodzącej przez punkt x, możemy zamiast a_x podstawić wyznacznik (auv). Jest widocznem, że powyższe rachunki i rozumowanie pozostają bez zmiany, jeżeli mamy nie jednę lecz więcej form pierwotnych.

Stąd wypływa następujące proste prawidło przeniesienia form niezmienniczych z dziedziny dwójkowej do dziedziny trójkowej: *zamiast każdego wyznacznika dwójkowego* $(\alpha\beta)$ *należy wziąć wyznacznik trójkowy* (abu), *gdzie* $a, b \ldots$ *są symbolami form trójkowych, które podług wzorów powyższych odpowiadają symbolom* $\alpha, \beta, \ldots$; *zamiast zaś każdego czynnika liniowego* a_λ *należy podstawić wyznacznik* (auv), *gdzie ilości* v *uważają się za ilości dowolne.*

Taki utwór, przyrównany do zera, przedstawiać będzie w spółrzędnych u krzywą (lub układ krzywych, jeżeli wchodzą weń i ilości v), której styczne przecinają krzywą (lub krzywe dane) w punktach, mających specyalne własności niezmiennicze.

Najrozmaitsze są zastosowania tej zasady; najważniejszem z nich jest następujące:

Jeżeli chcemy mieć równanie stycznościowe krzywej, danej w spółrzędnych punktowych przez równanie $f = a_x^n = 0$, *dość w wyrażeniu symbolicznem wyróżnika formy dwójkowej* α_λ^n *rzędu* n-*tego zmienić każdy wyznacznik* $(\alpha\beta)$ *na wyznacznik* (abu).

Podobną do powyższej zasadę przeniesienia można stosować w przypadku, w którym forma pierwotna zasadnicza jest formą trójkową, zawierającą szeregi zmiennych x i szeregi zmiennych u, t. j. jedną z form, która przyrównana do zera daje to, co geometrycznie nazywamy ogólnie k o n e k s e m

Niechaj będzie forma $a_x^n u_\alpha^m = 0$. Rozważmy prostę punktów y i z oraz punkt prostych v i w i połóżmy warunek, że ta prosta i ten punkt należą do koneksu. Kładąc jak wyżej:

$$a_y = A_1 \quad , \quad a_z = A_2 \quad ; \quad v_\alpha = \mathrm{A}_1 \quad , \quad v_\alpha = \mathrm{A}_2$$

będziemy mieli $A_\lambda^n \cdot \mathrm{A}_\mu^m = 0$, gdzie λ i μ są zmienne dwójkowe. Związek ten wyraża, że każdej prostej u odpowiada m punktów prostej, a każdemu punktowi x odpowiada n promieni pęku.

Niechaj Π będzie niezmiennikiem tej formy dwójkowej o dwu szeregach ilości zmiennych, nie zawierającym żadnego wyznacznika typu $(A\mathrm{A})$. Zmieńmy w nim, jak wyżej, każdy wyznacznik (AB) na wyznacznik (abu), a każdy wyznacznik (AB) na wyznacznik $(\alpha\beta x)$; otrzymamy wyrażenie złożone z czynników symbolicznych (abu) i $(\alpha\beta x)$, które będzie formą niezmienniczą dla danego koneksu, a które przyrównane do zera, przedstawia: w każdym punkcie x krzywą, której styczne przecinają odpowiednią krzywą koneksu danego w n punktach, mających specyalne własności rzutowe; dla każdej prostej u—krzywą, której m stycznych, wyprowadzonych z jej punktów do krzywej koneksu danego, przedstawiają pęk prostych, mających specyalne własności rzutowe.

Zasadę przeniesienia wypowiedział C l e b s c h (Crelle LIX); patrz G u n d e l f i n g e r (Math. Ann. VI), S t u d y (Methoden i t. d. Lipsk 1889), C l e b s c h — L i n d e m a n n, Geometrie.

---

§ 3.

Wyznaczniki funkcyjne, hesyany, kombinanty, wypadkowe i wyróżniki dowolnych form algebraicznych.

Niechaj będzie r form stopnia dowolnego o r zmiennych (formy gatunku r), których symbolami są $a_x^n, b_x^n, c_x^n \ldots$ Pomiędzy najprostszemi utworami niezmienniczemi tych form mamy jakobian czyli wyznacznik funkcyjny r form, który symbolicznie wyraża się przez

$$(abc\ldots)\, a_x^{n-1}\, b_x^{n'-1}\, c_x^{n''-1}\ldots$$

oraz hesyan każdej formy, którego wyrażeniem jest:

$$(aa'a''\ldots)^2\, a_x^{n-2}\, a'^{n-2}_x\ldots,$$

gdzie $a'\, a''\ldots$ są symbole równoważne z symbolem a.

Te utwory można łatwo wyrazić przez pochodne form danych (patrz „Repertoryum“ t. I, str. 62, 64). O jakobianach mamy następujące twierdzenie Clebscha:

Wyznaczniki funkcyjne, utworzone z r wyznaczników funkcyjnych $r+1$ form o r zmiennych, są proporcyonalne do form pierwotnych (Clebsch, Crelle LXIX, LXX, Rosanes, tamże LXXV, Pasch, tamże LXXX).

Ciekawa jest własność hesyanów, odnosząca się do ich znikania. Dla form dwójkowych, trójkowych i czwórkowych jedynie zachodzi twierdzenie:

Znikanie hesyanu jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby forma dana dała się przez przekształcenie liniowe zamienić na formę, zawierającą o jednę zmienną mniej. Hesse (Crelle XLII, LVI), Baltzer (1-e wydanie jego traktatu o wyznacznikach), Salmon — Fiedler (Algebra der linearen Transf. 1863) mniemali, że to twierdzenie jest ogólnem; dopiero Gordan — Noether (Math. Ann. X) wykazali, że jest prawdziwem tylko dla $n = 2, 3, 4$.

Inna własność hesyanów jest następująca:

Hesyan hesyanu formy sześciennej o ilukolwiek zmiennych jest kombinacyą formy danej i jej hesyanu.

Twierdzenia tego dla dziedziny trójkowej dowiódł Bauer (Münch. Akad. XIV, 1883), dla czwórkowej Rohn (Math. Ann. XXIII), dla przypadku ogólnego Voss (Math. Ann. XXVII).

Hesyan jakiejkolwiek formy kwadratowej $f = \sum_{ij}^{1 \ldots n} a_{ij} x_i x_j$ jest jej wyróżnikiem, który przez spółczynniki istotne formy wyraża się tak:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \ldots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \ldots \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, \ldots \end{vmatrix}.$$

Układ zupełny jednej formy kwadratowej jakiegokolwiek gatunku składa się, prócz z formy Δ, jeszcze z przeciwzmiennika

$$F = \begin{vmatrix} 0, & u_1, & u_2, & u_3, \ldots \\ u_1, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \ldots \\ u_2, & a_{21}, & a_{22}, & a_{2}, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

gdzie u są zmienne przeciwpodstawieniowe względem zmiennych x, t. j. w przekształceniu liniowem zachowują się jak minory macierzy, utworzonej z $r-1$ różnych szeregów zmiennych gatunku r.

Jeżeli $f = 0$ interpretujemy jako równanie rozmaitości rzędu 2-go w przestrzeni $r-1$ wymiarowej, wtedy przeciwzmiennik $F = 0$ da nam równanie tejże rozmaitości, wyrażone przez element dwoiście wzajemny względem punktu w tej przestrzeni.

Wyznacznik funkcyjny jest specyalnym przypadkiem utworów, które nazywają się kombinantami. Jeżeli dany jest układ p form $f_1, f_2, \ldots, f_p$ gatunku r-tego i jednego rzędu, i jeżeli utworzymy kombinacyę liniową $v_1 f_1 + v_2 f_2 + \ldots + v_p f_p$, to kombinantem p danych form nazywamy taki utwór, całkowity wymierny względem spółczynników funkcyj f i względem zmiennych, który ilości v nie zawiera i zachowuje się niezmienniczo przy przekształceniu liniowem ilości x i liniowem przekształceniu zmiennych v. Kombinant, prócz zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_r$, może zawierać jeszcze inne układy zmiennych $y_1, y_2, \ldots, y_r$; $z_1, z_2, \ldots, z_r$ spółpodstawieniowe ze zmiennemi x.

Wszystkie kombinanty funkcyj f dają się przedstawić jako utwory niezmiennicze jednego z nich, nazwanego kombinantem zasadniczym (Gordan), a który otrzymujemy tworząc wyznacznik, zawierający w pierwszym wierszu wszystkie funkcye f ze zmiennemi x, w drugim wszystkie funkcye f ze zmiennemi y i t. d.; wprowadzone w liczbie p szeregi zmiennych x i y... należy uważać wszystkie za spółpodstawieniowe.

Kombinantami zajmowali się: Gordan, Math. Ann. V, Voss, Münch. Ber. 1888.

Niechaj będzie r równań typu $a_x^n = 0$, $b_x^{n'} = 0, \ldots$ gdzie a_x^n, $b_x^{n'} \ldots$ oznaczają symbolicznie formy r-tego gatunku zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_r$; wyrugujmy r zmiennych jednorodnych x i nadajmy wynikowi postać $R = 0$, gdzie R jest funkcyą całkowitą wymierną spółczynników form danych.

Utwór R jest niezmiennikiem form i nazywa się wypadkową (rugownikiem).

Wypadkowa jest co do spółczynników każdej formy jednego stopnia, równego iloczynowi rzędu wszystkich form.

Wypadkowa pierwszych r pochodnych cząstkowych formy względem r zmiennych nazywa się wyróżnikiem.

Stopień wyróżnika co do spółczynników formy danej jest $r(n-1)^{r-1}$, gdzie n oznacza stopień formy, r jej gatunek.

Gordan zajmował się wyróżnikiem formy trójkowej n-tego rzędu w (Münch. Ber. 17 1887), a niedawno w (Math. Ann. 50. 1897, Züricher Kongr.-Verh. 1898, str. 143) wyróżnikiem trzech form trójkowych.

O warunkach niezmienniczych, pod któremi forma trójkowa daje się rozłożyć na czynniki, patrz B r i l l, Gött. Nachr. 1893, Deutsche Math. Ver. 5, 1897, Math. Ann. 50, J u n k e r, Math. Ann. 43, G o r d a n, Math. Ann. 45.

---

§ 4.

Formy kwadratowe w ogólności i teorya form dwuliniowych. Prawo bezwładności. Teorya dzielników elementarnych Weierstrassa.

Niechaj będzie forma kwadratowa o r zmiennych

$$f = \sum_{ij}^{1\ldots r} a_{ij}\, x_i\, x_j = a_x^2 = b_x^2 = c_x = \ldots\,; \; (a_{ij} = a_{ji}).$$

Jej j e d y n y m niezmiennikiem jest w y r ó ż n i k

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \ldots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \ldots \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = (abc\ldots)^2.$$

Jeżeli Δ jest różne od zera, f nazywa się formą z w y c z a j n ą, jeżeli $\Delta = 0$ — o s o b l i w ą.

Jeżeli $w_1, w_2, \ldots, w_r$ są zmienne przeciwpodstawieniowe ze zmiennemi x, to możemy utworzyć p r z e c i w z m i e n n i k

$$F = \begin{vmatrix} 0, & w_1, & w_2, \ldots \\ w_1, & a_{11}, & a_{12}, \ldots \\ w_2, & a_{21}, & a_{22}, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = (wab\ldots)^2.$$

Jeżeli wprowadzimy zmienne r ó ż n o p o d s t a w i e n i o w e $u, v\ldots$ (porówn. § 1), to można będzie utworzyć inne utwory niezmiennicze; dla $r = 3$ (przypadek trójkowy) istnieją tylko obie powyższe; dla $r=4$ (przypadek czwórkowy) można utworzyć jeszcze wiele innych, przy wprowadzeniu dalszych szeregów zmiennych.

Co do niezmienników równoczesnych dwu form kwadratowych o r zmiennych, patrz Segre, Math. Ann. XXIV.

W teoryi form kwadratowych zasługuje, ze względu na zastosowanie do mechaniki i geometryi, na szczególną uwagę wielokrotnie traktowane zagadnienie o sprowadzaniu form do ich postaci kanonicznej, t. j. do kombinacyi liniowej kwadratów. Redukcya ta daje się uskutecznić w ogóle nieskończenie wielu sposobami; lecz jeżeli forma dana ma spółczynniki rzeczywiste i jeżeli przekształcenia, którym poddajemy zmienne, mają być także rzeczywistemi, wtedy owa nieskończoność form zredukowanych lub kanonicznych ulega t. zw. prawu bezwładności form kwadratowych, które brzmi:

Jeżeli forma kwadratowa o r zmiennych i o spółczynnikach rzeczywistych przekształca się za pomocą podstawień liniowych rzeczywistych dwoma różnemi sposobami na wyrażenia, zawierające tylko kwadraty zmiennych, to liczba k wyrazów ze znakiem dodatnim jest zawsze ta sama.

To twierdzenie podał Sylvester, Phil. Mag. 1852. II, str. 138, Phil. Trans. 1853, str. 407; później Borchardt (Crelle LIII, str. 275) ogłosił, że podobne prawo znane już było Jacobi'emu w r. 1847. O twierdzeniu tem patrz: Hermite (Crelle LIII. str. 271), Gundelfinger (tamże CXI), de Presle, Bull. de la Soc. math. XV, str. 179, Frobenius (Berl. Sitzungsber, 1894). Badania, najściślej związane z prawem bezwładności form kwadratowych rzeczywistych, ogłosił Loewy (Math. Ann. L § 9, tamże LII i Nova Acta Leop. 1898).

Jeżeli liczba k w poprzedniem twierdzeniu jest zerem lub r, to forma kwadratowa nazywa się określoną (definita) (Gauss), w innych razach nieokreśloną.

Każda forma określona zachowuje znak

stały, bez względu na sposób zmieniania wartości zmiennych rzeczywistych.

Forma kwadratowa o r zmiennych daje się przekształcić na wyżej omówioną formę kanoniczną i wtedy, gdy stawiamy warunek, aby przekształcenie, które mamy stosować, było ortogonalne, t. j. aby forma

$$f' = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$$

pozostała przez nie niezmienioną. Jeżeli w tym przypadku forma zredukowana przyjmuje postać

$$f = \sum_{ij}^{1\ldots r} a_{ij} x_i x_j = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_r x_r^2$$

to spółczynniki A, wzięte ze znakami przeciwnemi, są pierwiastkami równania t. zw. charakterystycznego

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda\,, & a_{12}\,, & a_{13}\,, \ldots & . \\ a_{21}\,, & a_{22}+\lambda\,, & a_{23}\,, \ldots & \\ a_{31}\,, & a_{32}\,, & a_{33}+\lambda\,, \ldots & \end{vmatrix} = 0$$

którego strona lewa jest wyróżnikiem formy kwadratowej $f + \lambda f'$.

Jeżeli spółczynniki a_{ij} formy f są wszystkie rzeczywistemi, to wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste.

Jest to przypadek szczególny zagadnienia o równoczesnej redukcyi dwu form kwadratowych

$$f = \sum a_{ij} x_i x_j \quad , \quad F = \sum b_{ij} x_i x_j$$

do postaci kanonicznej. Oczywiście, możemy tu też zawsze dołączyć warunek, aby druga forma dała się sprowadzić do takiej postaci, jak wyżej f', t. j. do sumy kwadratów nowych zmiennych. Ponieważ formami zredukowanemi są:

$$f = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_r x_r^2 \,;\; F = B_1 x_1^2 + B_2 x_2^2 + \ldots + B_r x_r^2,$$

to dość położyć:

$$y_1 = \sqrt{B_1}x_1 \quad , \quad y_2 = \sqrt{B_2}x_2 \, , \ldots$$

aby otrzymać:

$$f = \frac{A_1}{B_1} y_1{}^2 + \frac{A_2}{B_2} y_2{}^2 + \ldots + \frac{A_r}{B_r} y_r{}^2 \quad ; \quad F = y_1{}^2 + y_2{}^2 + \ldots + y_r{}^2 \, .$$

Stosunki $\frac{A_i}{B_i}$, wzięte ze znakami przeciwnemi, są pierwiastkami równania (charakterystycznego):

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & , & a_{12} + \lambda b_{12} \, , \ldots \\ a_{21} + \lambda b_{21} & , & a_{22} + \lambda b_{22} \, , \ldots \\ \cdot \; \cdot \; \cdot & & \cdot \; \cdot \; \cdot \end{vmatrix} = 0$$

którego strona druga jest wyróżnikiem formy kwadratowej $f + \lambda F$.

Cauchy (Exerc. de math. IV. 1829) i Jacobi (Crelle XII) pierwsi zajmowali się tem zagadnieniem.

Rozwiązanie zagadnienia przedstawia się tak jak wyżej tylko wtedy, gdy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego są różne; jeżeli niektóre z pierwiastków są równe, wtedy występują inne rozważania.

W przypadku $r = 2$ i $r = 3$ rzecz jest prosta i dawno w książkach o geometryi analitycznej załatwiona; dla $r = 4$ mamy badania Sylvestera (Mag. Phil. (4). I. 1851, str. 119), dla r dowolnego badania Weierstrassa (Berl. Monatsber. 1858, 1868), który badał to zagadnienie nie tylko dla dwu form kwadratowych ale i dla form dwuliniowych o dwu szeregach ilości zmiennych. Przy tej sposobności utworzył Weierstrass teoryę t. zw. dzielników elementarnych.

Rozpatrzmy wyznacznik rzędu r-tego:

$$D = | \, a_{ij} + \lambda b_{ij} \, | = | \, a_{ij} \, |$$

i przyjmijmy w ogólności, że jego charakterystyką (Rang, Frobenius, Crelle LXXXVI) jest σ, co znaczy, że wszystkie podwyznaczniki rzędu $\sigma+1$, ale nie wszystkie rzędu σ są tożsamościowo zerem. Niechaj będzie $a+\lambda b=p$, l_ϱ — wykładnikiem najwyższej potęgi, w której ilość p jest zawarta jako czynnik we wszystkich podwyznacznikach rzędu ϱ-tego ($\varrho \leqslant \sigma$) wyznacznika D; innemi słowy, p^{l_ϱ} jest czynnikiem wszystkich podwyznaczników rzędu ϱ, z których niektóre mogą zawierać p i w potędze wyższej, ale jeden przynajmniej zawiera p dokładnie w potędze l_ϱ; niechaj dalej D_ϱ będzie największym wspólnym dzielnikiem wszystkich podwyznaczników rzędu ϱ-tego; D_ϱ zatem zawiera jako czynnik p w potędze l_ϱ-ej. Liczby l_ϱ są liczbami całkowitemi dodatniemi lub zerem.

Jest $l_{\varrho+1} \geqslant l_\varrho$, a gdy $l_\varrho=0$, to $l_{\varrho-1}=l_{\varrho-2}=\ldots=0$.

Połóżmy:

$$e_\sigma=l_\sigma-l_{\sigma-1}\quad,\quad e_{\sigma-1}=l_{\sigma-1}-l_{\sigma-2},\ldots,e_1=l_1,$$

skąd:

$$l_\sigma=e_1+e_2+e_3+\ldots+e_\sigma,$$

to D_σ zawierać będzie czynnik:

$$p^{l_\sigma}=p^{e_1}.p^{e_2}.p^{e_3}\ldots p^{e_\sigma}.$$

Liczby e czynią zadość własności zasadniczej:

$$e_\sigma \geqslant e_{\sigma-1} \geqslant e_{\sigma-2} \geqslant \ldots \geqslant e_1.$$

Każdy czynnik p^{e_i}, gdy e_i jest różne od zera, nazywa się dzielnikiem elementarnym układu ilości a_{ij}, a gdy $\sigma=r$ dzieln. element. wyznacznika D (Weierstrass), p zaś nazywa się podstawą dzielników elementarnych.

Pojęcie dzielników elementarnych można rozszerzyć na wyznacznik dowolny, którego elementy a nie są, jak elementy wyznacznika D, funkcyami liniowemi ilości λ, lecz albo liczbami całkowitemi albo funkcyami całkowitemi jednej lub wielu zmiennych. W pierwszym razie przez p należy rozumieć liczbę pierwszą, w drugim funkcyę liniową lub w ogólności funkcyę całkowitą nieprzywiedlną uważanych zmiennych.

Dzielnik elementarny stopnia pierwszego nazywa się według Frobeniusa (Crelle LXXXVI) dzielnikiem elementarnym liniowym; Kronecker (Berl. Monatsber. 1874, str. 226, Werke, tamże str. 405) nazywa go dzielnikiem elementarnym pojedyńczym. Idąc za Frobeniusem, używać będziemy tego drugiego terminu w innem znaczeniu; jeżeli mianowicie utworzymy stosunki:

$$\frac{D_\sigma}{D_{\sigma-1}} = E_\sigma\,,\ \frac{D_{\sigma-1}}{D_{\sigma-2}} = E_{\sigma-1}\,,\ldots, D_1 = E_1$$

i położymy

$$E_{\sigma+1} = E_{\sigma+2} = \ldots = E_r = 0\,,$$

to wyrażenia E są albo liczbami całkowitemi, albo funkcyami całkowitemi i nazywają się pierwszym drugim . . ., r-tym dzielnikiem elementarnym układu a'_j albo też, gdy $\sigma = r$ — wyznacznika. Nazywają się one dzielnikami elementarnemi złożonemi, wyrażenie zaś p^{e_i} dzielnikami elementarnemi pojedyńczemi. Zważmy wszakże, że wyrażenia „dzielniki elementarne złożone" używa Frobenius (Crelle LXXXVI, str. 162) w innem znaczeniu. Wyrażenie to w znaczeniu, przez nas użytem, znajduje się u Mutha (patrz pracę cytowaną poniżej) i jest uzasadnione przez to, że przez rozkład dzielników elementarnych złożonych na czynniki otrzymujemy wszystkie dzielniki elementarne układu.

Głównemi pracami o dzielnikach elementarnych, prócz wyżej cytowanych są: Stickelberger, Diss. inaug. Berlin 1874, Crelle LXXXVI, Darboux (Journ. de Liouv. (2). XXX), Kronecker (Berl. Monatsber. 1874, 1890, 1891, Crelle CVII), Frobenius

(Crelle LXXXVI, LXXXVII, Berl. Sitzungsber. 1890. 1894, 1896), H e n s e l (Crelle CXIV etc.). Bliższe szczegóły w nowem dziele M u t h a „Theorie und Anwendung der Elementartheiler". Lipsk 1899.

Podamy rezultaty, do których, na podstawie teoryi dzielników elementarnych, dochodzimy w zagadnieniu o redukcyi form kwadratowych do postaci kanonicznej, oraz w innem tej samej natury zagadnieniu o równoważności form kwadratowych i p a s m takich form.

A b y d w i e f o r m y k w a d r a t o w e o r z m i e n n y c h d a ł y s i ę r ó w n o c z e ś n i e z a p o m o c ą t y c h s a m y c h p r z e k s z t a ł c e ń l i n i o w y c h s p r o w a d z i ć d o p o s t a c i:

$$A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + \ldots + A_rx_r^2 \; ; \; B_1x_1^2 + B_2x_2^2 + \ldots + B_rx_r^2$$

g d z i e s p ó ł c z y n n i k i A_i i B_i n i e s ą r ó w n o c z e ś n i e o b a z e r a m i, j e s t k o n i e c z n e m i d o s t a t e c z n e m, b y w y z n a c z n i k

$$D = | a_{ij} + \lambda b_{ij} |$$

u t w o r z o n y s p o s o b e m z w y k ł y m z e s p ó ł c z y n n i k ó w t y c h f o r m n i e z n i k a ł i m i a ł t y l k o d z i e l n i k i e l e m e n t a r n e l i n i o w e (W e i e r s t r a s s, Werke II. str. 41—42).

Jeżeli D jest różnem od zera, lecz dzielniki elementarne wyznacznika są jakiekolwiek, to można przeprowadzić redukcyę do postaci k a n o n i c z n e j lub n o r m a l n e j, której natura zależy od dzielników elementarnych. Na tem opiera się k l a s y f i k a c y a f o r m k w a d r a t o w y c h, którą tu bliżej zajmować się nie będziemy.

Zadanie ogólniejsze polega na wyznaczeniu, czy dwa pasma form kwadratowych $A + \lambda B$, $A' + \lambda B'$ są r ó w n o w a ż n e, t. j. czy jedno da się przekształcić na drugie za pomocą przekształceń liniowych, których spółczynniki od λ nie zależą.

D w a p a s m a z w y c z a j n e f o r m k w a d r a t o w y c h o r z m i e n n y c h (t. j. t a k i e, ż e i c h w y r ó ż n i k nie znika tożsamościowo), są równoważnemi wtedy i tylko wtedy, gdy dzielniki elementarne ich wyznaczników są te same (Weierstrass).

Oczywiście, w twierdzeniu tem zawiera się poprzedzające jako przypadek szczególny.

Teorya Weierstrassa ma wielką doniosłość; odpowiednio zmodyfikowana, daje się zastosować do wielu innych zagadnień, dotyczących równoważności. Pomyślmy np., że mamy formy kwadratowe o spółczynnikach całkowitych, i pragniemy zbadać, kiedy jedna z dwu form tego rodzaju daje się zamienić na drugą przy pomocy przekształcenia o spółczynnikach całkowitych i o module 1 (unimodularnego), albo też specyalnie, kiedy jedna z tych form za pomocą przekształcenia unimodularnego daje się sprowadzić do postaci kanonicznej. Badanie wyznaczników obu form i ich dzielników elementarnych w znaczeniu wyżej podanem prowadzi do rezultatów analogicznych z powyższemi.

Tąż samą teoryę można stosować do form dwuliniowych.

Formą dwuliniową dwu szeregów zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_r$; $y_1, y_2, \ldots, y_r$ nazywamy wyrażenie typu $\sum\limits_{ij} a_{ij} x_i y_j$. Jeżeli spółczynniki a_{ij} są funkcyami liniowemi parametru λ, to wyrażenie to przedstawia pasmo form dwuliniowych. Jeżeli wyznacznik spółczynników a_{ij} jest różny od zera, otrzymujemy formę dwuliniową zwyczajną, jeżeli zaś jest zerem, formę dwuliniową osobliwą.

O teoryi tych form patrz Weierstrass l. c., zwłaszcza Frobenius, Crelle LXXXVI, porówn. też Muth l. c. § 2 i nast.

W teoryi tej mamy zagadnienie podobne do zagadnień w teoryi form kwadratowych.

1. W założeniu, że spółczynniki są liczbami całkowitemi, zbadać równoważność dwu takich form, t. j. możliwość przekształcenia jednej na drugą za pomocą przekształcenia unimodularnego, i specyalnie, redukcyę jednej z nich przy pomocy takiego przekształcenia o spółczynnikach całkowitych i module

1 do postaci $\Sigma A_i x_i y_i$, która nazywa się normalną lub kanoniczną,

2. w założeniu, że spółczynniki są funkcyami liniowemi parametru λ zbadać równoważność dwu pasm takich form, t. j. możliwość zamiany jednego na drugie za pomocą przekształceń liniowych, których spółczynniki od λ nie zależą, a w szczególności równoczesną redukcyę obu form dwuliniowych ze spółczynnikami stałemi do postaci kanonicznej.

Mamy tu twierdzenie następujące:

Dwie formy dwuliniowe o spółczynnikach całkowitych liczbowych są równoważnemi wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie dzielniki elementarne, złożone z układu spółczynników obu form, są jednakowe.

Dana forma dwuliniowa, której układ spółczynników całkowito-liczbowych posiada dzielniki elementarne złożone $E_1, E_2, \dots E_r$, daje się za pomocą podstawień unimodularnych dla x_i i y_i sprowadzić do postaci:

$$E_1 x_1 y_1 + E_2 x_2 y_2 + \dots + E_r x_r y_r .$$

Dwie formy dwuliniowe (dwa pasma form) o spółczynnikach, które są funkcyami liniowemi parametru λ i o wyznacznikach różnych od zera, są równoważnemi wtedy i tylko wtedy (t. j. dają się przekształcić jedna na drugą za pomocą przekształceń od λ niezależnych), gdy wyznaczniki obu pasm mają te same dzielniki elementarne.

Aby dwie formy dwuliniowe dały się równocześnie za pomocą przekształceń liniowych sprowadzić do postaci:

$$A_1 x_1 y_1 + A_2 x_2 y_2 + \dots + A_r x_r y_r$$

$$B_1 x_1 y_1 + B_2 x_2 y_2 + \dots + B_r x_r y_r ,$$

gdzie spółczynniki A_i, B_i nie są oba zerami, jest koniecznem i dostatecznem, by wyznacznik

$$D = | a_{ij} + \lambda b_{ij} |$$

nie znikał tożsamościowo i zawierał tylko same dzielniki elementarne liniowe.

Przekształcenie ortogonalne (t. j. przekształcenie liniowe, przy którem wyznacznik spółczynników jest ortogonalny) przekształca formę kwadratową specyalną $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ na samą siebie. Z n^2 spółczynników tego przekształcenia jest tylko $\frac{n(n-1)}{2}$ niezależnych, powstaje przeto zagadnienie: w jaki sposób dają się wyrazić spółczynniki podstawienia liniowego przez $\frac{1}{2} n(n-1)$ wielkości niezależnych, aby forma kwadratowa Σx_2^2 pozostała niezmienną?

Badaniami temi zajmowali się: Euler, Novi Comm. Petrop. XV, XX, Cauchy, Exerc. de math. IV i ogólniej Cayley, Crelle XXXII (patrz Pascal, Determinanti str. 47).

Badania te dają się uogólnić, jeżeli zamiast powyższej specyalnej formy kwadratowej weźmiemy formę kwadratową ogólną. W tym kierunku mamy badania Hermite'a dla $r=3$ (Crelle LIV) i $r=4$ (Cambr. Dubl. math. J. IX). Z obfitej literatury wymieniamy: G. Cantor, Habilitationsschrift Halla 1869, Bachmann, Crelle LXXVI, Tannery, Bull. Soc. math. XI. 1876, Prym, Gött. Abh. XXXVIII. 1892, Frobenius, Crelle LXXXIV. Przekształcenie spółpodstawieniowe formy dwuliniowej na samą siebie badał A. Voss (Abh. der kgl. Bayr. Akad. 1870). Nowsze prace Loewy'ego (Compt. Rend. 1876, Nova Acta Leop. 1898) zajmują się przekształceniem formy dwuliniowej na samą siebie, na podstawie teoryi dzielników elementarnych, przyczem y i x są zmiennemi zespolonemi sprzężonemi; jako przypadek szczególny wynika stąd przekształcenie rzeczywiste formy kwadratowej rzeczywistej na samą siebie.

§ 5.

Układy zupełne dla form o większej liczbie szeregów ilości zmiennych.

Powiemy kilka słów o zagadnieniu, dotyczącem szukania utworów niezmienniczych, stanowiących układ zupełny. Poszukiwanie to może być uskutecznione całkowicie tylko w niewielu prostych przypadkach; w poprzednich paragrafach daliśmy już pewne wskazówki o rezultatach dotąd znanych. Lecz naturalnem jest rozszerzenie takiego poszukiwania przez przyjęcie, że forma zasadnicza zawiera pewną liczbę szeregów ilości zmiennych i szukanie w tym przypadku układu zupełnego. To nowe poszukiwanie jest oczywiście jeszcze bardziej skomplikowanem; uskuteczniono je dotąd dla niewielu tylko przypadków.

Można przyjąć, że forma dana jest trójkową i że zawiera dwa szeregi ilości zmiennych; zmienne te mogą być albo spółpodstawieniowemi albo przeciwpodstawieniowemi jak x i u (patrz § 11), lub, ogólniej jeszcze, zmienne mogą być poddane przekształceniom zupełnie niezależnym. W obszarze form dwójkowych to rozróżnienie nie istnieje, gdyż pierwszy i drugi z powyższych przypadków (na zasadzie wzoru Clebscha — Gordana) sprowadzają się do przypadku, w którym formy zasadnicze mają tylko jeden szereg ilości zmiennych.

Szereg zasadniczy, zawierający jeden szereg zmiennych x i jeden szereg zmiennych przeciwpodstawieniowych u, przyrównany do zera, przedstawia geometrycznie odpowiedniość pomiędzy punktami i obwiedniemi na płaszczyźnie, albo pomiędzy prostemi i krzywemi płaszczyzny, to jest przedstawia to, co nazywamy koneksem.

Rozpatrywano zwłaszcza pewne utwory specyalne, które otrzymujemy przy pomocy zasady przeniesienia; mówimy o nich niżej. Co się zaś tyczy układów zupełnych, to rozpatrywano tylko układ formy $a_x u_a$ (liniowy względem ilości x i ilości u); układ zupełny składa się z 7 utworów (Clebsch — Gordan, Math. Ann. I). Badanie analogiczne dla przypadku czwórkowego rozpoczął Mertens (Wiener Berichte XCVIII. 1890); tenże autor badał przypadek formy czwórkowej dwuiiniowej o dwóch szeregach zmiennych spółpodstawieniowych (tak zwane układy zerowe) (tamże, XCVII. 1888).

---

§ 6.

Koneksy, koíncydencye.

Wyżej już powiedziano, że figura, którą symbolicznie przedstawia wyrażenie $a_x^n u_m^a = 0$, nazywa się koneksem rzędu n-tego i klasy m-tej. Koneks taki oznacza się zwykle symbolem (n, m).

Każdemu punktowi x odpowiada krzywa m-tej klasy w spółrzędnych stycznościowych, każdej prostej krzywa n-tego rzędu w spółrzędnych punktowych. Pomiędzy koneksami godnym jest uwagi koneks, którego równaniem jest $v_x = 0$; nazywa się on koneksem tożsamościowym. Nazywamy elementem koneksu układ punktu i prostej, punktowi temu w koneksie odpowiadającej.

Punkt, któremu odpowiadają wszystkie proste płaszczyzny, nazywa się punktem podstawowym koneksu; prosta, której odpowiadają wszystkie punkty płaszczyzny, nazywa się prostą podstawową koneksu.

Ogół ∞^2 elementów wspólnych dwóm koneksom nazywa się koincydencyą.

W koincydencyi każdej prostej odpowiada skończona liczba ν punktów, każdemu punktowi skończona liczba μ prostych; liczby ν i μ nazywają się odpowiednio rzędem i klasą koincydencyi.

Koincydencya, wspólna koneksowi danemu i koneksowi tożsamościowemu $u_x = 0$, nazywa się koincydencyą główną koneksu.

Jeżeli mamy dane dwa koneksy (n, m) i (n', m), to rząd i klasa odpowiedniej koincydencyi wyrażają się wzorami:

$$\nu = nn' \quad , \quad \mu = mm' .$$

Jeżeli danym jest punkt x, to μ prostych koincydencyi znajdziemy, szukając stycznych wspólnych krzywym, które w dwóch koneksach odpowiadają temu punktowi, podobnież rzecz się ma z ν punktami, odpowiadającemi prostej danej.

Ogół elementów spólnych trzem koneksom stanowi dwójkę krzywych. Jeżeli z równań trzech koneksów wyrugujemy ilości x, otrzymamy równanie krzywej w spółrzędnych prostej; jeżeli zaś wyrugujemy ilości u, otrzymamy równanie krzywej w spółrzędnych punktowych. Klasę pierwszej krzywej przedstawia wyrażenie:

$$mn'n'' + m'n''n + m''nn' ;$$

rząd drugiej wyrażenie:

$$nm'm'' + n'm''m + n''mm' ,$$

jeżeli (nm), $(n'm')$, $(n''m'')$ są trzema danemi koneksami.

Liczba elementów (punktów z odpowiadającemi im prostemi) wspólnych czterem koneksom (nm), $(n'm')$, $(n''m'')$, $(n'''m''')$ jest:

$$mm'n''n''' + m'm''n'''n + m''m'''nn' + mm''n'n'''$$
$$+ m'm'''n''n + mm'''n''n' .$$

Nazywamy koneksem sprzężonym z koneksem danym koneks, który względem koneksu danego na następującą własność niezmienniczą: każdy jego element (y, v) jest taki, że każdemu punktowi y odpowiada w koneksie danym przynajmniej jedna prosta podwójna, a prostej v odpowiada w tymże koneksie przynajmniej jeden punkt podwójny.

Równanie koneksu sprzężonego możemy utworzyć, stosując wyłożoną w § 2 zasadę przeniesienia. Dość w tym celu utworzyć wyróżnik równania podwójnie dwójkowego $\varphi = A_\lambda^n A_\mu^m$ $(n, m > 1)$, t. j. niezmiennika, który przyrównany do zera, daje warunek, aby forma miała równocześnie pierwiastek podwójny λ i pierwiastek podwójny μ (t. j. aby istniały wartości λ_1, μ_1 ilości λ i μ takie, że λ_1 jest pierwiastkiem podwójnym równania $\varphi(\lambda, \mu_1) = 0$, μ_1 zaś pierwiastkiem podwójnym równania $\varphi(\lambda_1, \mu) = 0$); następnie według zasady przeniesienia należy każdy wyznacznik dwójkowy zamienić na trójkowy. Niezmiennik taki otrzymujemy, rugując $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ pomiędzy równaniami

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2} = 0.$$

Stopień tego niezmiennika wynosi:

$$2\,[mn + 2(m-1)(n-1)].$$

Jeżeli jedna z liczb n, m, naprzykład liczba m, jest jednością, wtedy:

$$\varphi = A_\lambda^n A_\mu = P_{1\mu_1} + P_{2\mu_2},$$

a szukany niezmiennik jest wypadkową form P_1 i P_2.

Koneksem sprzężonym z koneksem (1, 1), czyli $a_x u_\alpha = 0$ jest $(abu)(\alpha\beta x) = 0$; koneksem sprzężonym z koneksem (2, 1) czyli $a_x^2 u_\alpha = 0$ jest $(abu)^2 (cdu)^2 (\beta\gamma x)(\alpha\delta x) = 0$; koneksem sprzężonym z koneksem (2, 2) czyli $a_x^2 u_\alpha^2 = 0$ jest $(W + 3U^2)^3 - 27(UW - U^3 - V^2)^2 = 0$, gdzie

$$U = -\frac{1}{12}(abu)^2(\alpha\beta x)^2,$$

$$V = -\frac{1}{12}(abu)(bcu)(cau)(\alpha\beta x)(\beta\gamma x)(\gamma\alpha x)$$

$$W = \frac{1}{8}(abu)^2(cdu)^2(\alpha\gamma x)^2(\beta\delta x) - 9U^2.$$

Możnaby powiedzieć, że koneks sprzężony tak się ma do koneksu danego jak ogół stycznych linii krzywej do ogółu punktów tej krzywej.

Koneks sprzężony względem koneksu sprzężonego jest koneksem pierwotnym.

Elementy dwu wzajemnie sprzężonych koneksów odpowiadają sobie dwujednoznacznie. Liczba

$$p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

jest charakterystyczną dla koneksu ogólnego i nazywa się jego rodzajem.

W koneksie (1, 2) t. j. $a_x u_a{}^2=0$ punkty, którym odpowiadające stożkowe rozpadają się na dwa punkty, tworzą krzywą rzędu 3-go: $a_x b_x c_x (\alpha\beta\gamma)^2=0$; proste zaś, łączące dwa punkty, na które każda stożkowa się rozpada, są stycznemi do krzywej klasy 3-ej: $(abc)(\alpha\beta\gamma)a_\alpha u_\beta u_\gamma=0$. Też same pary punktów znajdują się także na krzywej rzędu 3-go: $(abc)(\alpha\beta x)(\beta\gamma x)(\gamma\alpha x)=0$.

W koincydencyi głównej koneksu (1, 2) każdemu punktowi x odpowiadają dwie proste, przezeń przechodzące, a każdej prostej punkt, na niej położony. Punkty, które w takiej koincydencyi głównej odpowiadają dwóm prostym zlewającym się, leżą na krzywej rzędu 4-go, której równaniem jest $a_\alpha b_x (\alpha\beta x)^2=0$.

Teoryę koneksów utworzył Clebsch (patrz Clebsch — Lindemann, Geometrie). Koneks (1, 1) badali Clebsch i Gordan (Math. Ann. I), koneks (1, 2) Godt (Diss. Getynga 1873); rezultaty, otrzymane przez tego ostatniego, rozszerzono na koneksy (1, n) w cytowanem dziele Clebscha — Lindemanna. Co do koneksu (1, 2) patrz Peano (Acc. Torino 1881), a co do koneksu (2, 2) Armenante (Lincei 1876) i Peano (Acc. Torino. 1881).

§ 7.

Formy trójkowe, czwórkowe i t. d. automorficzne.

Rozszerzono na formy gatunku $r > 2$ rozważania, podane wyżej dla form dwójkowych. Forma nazywa się w ogóle a u t o m o r f i c z n ą, jeżeli ma s k o ń c z o n ą grupę przekształceń liniowych na samą siebie.

Ograniczymy się tu tylko na niektórych wskazówkach bibliograficznych.

Poszukiwania te rozpoczął J o r d a n (Compt. rend. 1877, Crelle LXXXIV, Acc. Napol. Abt. VIII. 1888), który rozwinął je następnie dla form trójkowych i znalazł 11 typów. Dwa inne typy otrzymali: K l e i n (Math. Ann. XIV, XVII, patrz K l e i n — F r i c k e, Modulfunct. Lipsk 1870. I) i V a l e n t i n e r (Kjöb. Skrift. (6). V. 1889). Typ K l e i n a ma grupę złożoną z 168 przekształceń i do niej należy forma trójkowa $x_1{}^3x_2+x_2{}^3x_3+x_3{}^3x_1$; typ V a l e n t i n e r a ma 360 przekształceń i był badany głębiej przez W i m a n a (Math. Ann. XLVII), G e r b a l d i (Rend. Palermo 1898—1899, Math. Ann. 50); F r i c k e (Gött. Nachr. 1896, Deutsche Math. Vereinig. V. 1896) jest ona holoedrycznie izomorficzną (patrz Rozdz. II § 4) z grupą symetryczną sześciu elementów.

Dla form czwórkowych znamy tylko niektóre grupy skończone przekształceń liniowych; wymieniamy prace K l e i n a (Math. Ann. XXVIII, XXIX) i M a s c h k e g o (tamże XXX, XXXIII, XXXVI).

Z innych prac cytujemy; F u c h s (Berl. Ber. 1896, Comptes rendus 1896), L o e w y (tamże 1896, Nova Acta Leopold 1898), M o o r e (Math. Ann. VI), M a s c h k e (tamże l. c.).

O rozszerzeniu na przypadek przekształceń nieliniowych wymiernych patrz M a u r e r (Crelle CVII).

Interesującem jest zagadnienie następujące: wyznaczyć formy dwójkowe, które przekształcają się na same siebie przy grupie skończonej przekształceń liniowych, stosowanych do zmiennych x_1, x_2. Takie formy nazywają się automorficznemi.

Pierwiastki zespolone formy interpretujemy geometrycznie na płaszczyźnie; pomyślmy sobie kulę, dotykającą tej płaszczyzny w początku spółrzędnych O, i przyjmijmy, że wszystkie punkty płaszczyzny rzuciliśmy na kulę z punktu średnicowo-przeciwległego punktowi O. Tym sposobem pierwiastki formy dwójkowej będą przedstawione przez punkty na kuli.

Przekształcenia liniowe, przez które forma dwójkowa przechodzić będzie na samą siebie, odpowiadają w tem przedstawieniu obrotom kuli około jednej z jej średnic. Grupy obrotów kuli, przy których pewien ogół jej punktów pozostaje niezmieniony, są:

1) Grupa cykliczna, t. j. grupa obrotów około jednej średnicy, których kąt wynosi $\frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

2) Grupa diedryczna (dwuścianowa) t. j. grupa obrotów około średnicy o kącie $\frac{2k\pi}{n}$, połączone lub nie z obrotem o 180^0 około średnicy do tamtej prostopadłej.

3) Grupy obrotów, przez które jeden z pięciu wielościanów foremnych przekształca się sam na siebie.

Najogólniejsza forma (automorficzna), należąca do grupy cyklicznej, daje się zawsze za pomocą odpowiedniego przekształcenia sprowadzić do postaci:

$$x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \prod_i (\lambda_1^{(i)} x_1^n + \lambda_2^{(i)} x_2^n),$$

gdzie α i β są liczby całkowite dodatnie, $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}$ — parametry dowolne.

Najogólniejsza forma, należąca do grupy dwuścianowej jest typu:

$$F_1^{\alpha} F_2^{\beta} F_3^{\gamma} \prod_i (\lambda_1^{(i)} F_1^2 + \lambda_2^{(i)} F_2^2),$$

gdzie:

$$F_1 = \frac{x_1{}^n + x_2{}^n}{2}, \quad F_2 = \frac{x_1{}^n - x_2{}^n}{2}, \quad F_3 = x_1 x_2 .$$

Prócz tych specyalnych i pospolitych typów form dwójkowych automorficznych pozostają jeszcze do zbadania formy, odpowiadające pięciu wielościanom foremnym: czworościanowi, sześcianowi, ośmiościanowi, dwunastościanowi i dwudziestościanowi.

Istnieje nie więcej nad t r z y grupy, dla których te wielościany pozostają bez zmiany; mianowicie: grupa czworościanu o 12 przekształceniach, ośmiościanu o 24, dwunastościanu o 60 przekształceniach; grupy dwu pozostałych wielościanów są takie same jak poprzednich, t. j.: grupa sześcianu odpowiada grupie ośmiościanu, grupa dwudziestościanu — grupie dwunastościanu. Tym sposobem formy dwójkowe, odpowiadające pięciu wielościanom foremnym, t. j. automorficzne dają się sprowadzić do następujących form kanonicznych:

$$f_4 = x_1{}^4 \pm 2\sqrt{-3}\, x_1{}^2 x_2{}^2 + x_2{}^4 \quad \ldots\ldots \quad \text{(Czworościan)}$$

$$f_6 = x_1 x_2 (x_1{}^4 - x_2{}^4) \quad \ldots\ldots \quad \text{(Ośmiościan)}$$

$$f_8 = x_1{}^8 + 14\, x_1{}^4 x_2{}^4 + x_2{}^8 \quad \ldots\ldots \quad \text{(Sześcian)}$$

$$f_{12} = x_1 x_2 (x_1{}^{10} + 11\, x_1{}^5 x_2{}^5 - x_2{}^{10}) \quad \ldots \quad \text{(Dwudziestościan)}$$

$$f_{20} = -(x_1{}^{20} + x_2{}^{20}) + 228\,(x_1{}^{15} x_2{}^5 - x_1{}^5 x_2{}^{15}) - 494\, x_1{}^{10} x_2{}^{10}$$

(Dwunastościan).

Formy f_8 i f_{20} można uważać za spółzmienniki (wyznaczniki H e s s e g o) form odp. f_6 i f_{12}; mianowicie powiedzieć można:

J e ż e l i p o m i n i e m y d w i e p o s p o l i t e k a t e g o r y e f o r m w y ż e j p o d a n y c h, f o r m y f_4, f_6, f_{12} w r a z z e s w e m i w s z y s t k i e m i s p ó ł z m i e n n i k a m i s ą j e d y n e m i f o r m a m i a u t o m o r f i c z n e m i.

Jest godnem uwagi, że trzy formy f_4, f_6, f_{12} są jedynemi formami dwójkowemi bez czynników wielokrotnych, dla których istnieje własność $(f, f)^4=0$. Patrz Wedekind, Habilatationschr Karlsruhe 1876, Brioschi, Ann. di mat. (2), 8, Halphen, Sav.-étrang. (2), 28, 1881, Gordan, Invariantentorie § 19. Przy formach, które mają czynniki wielokrotne, może być $(f, f)^4 = 0$ tylko wtedy, gdy forma stopnia n-tego ma przynajmniej jeden czynnik $(n-1)$-krotny.

Inna własność trzech form f_4, f_6, f_{12} polega na tem, że ich układy zupełne składają się z trzech spółzmienników i posiadają niezmiennik. Trzema spółzmiennikami są: sama forma f, jej hesyan H i wyznacznik funkcyjny T form f i H.

Utwory H i T, odnoszące się do form f_4, f_6, f_{12}, oznaczać będziemy odpowiednio przez $H_4, H_6, H_{12}, T_4, T_6, T_{12}$. Istnieje ważna interpretacya geometryczna następująca:

Pierwiastkami utworów H są wartości, odpowiadające środkowi ścian bocznych uważanych wielościanów, a pierwiastkami utworów T są wartości, odpowiadające środkom ich krawędzi.

Pomiędzy odpowiedniemi potęgami utworów f, H, T zachodzi zawsze związek liniowy.

Jest:

$$H_4 = x_1^4 \mp 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4$$

$$T_4 = f_6$$

$$12\sqrt{-3}\, T_4^2 - f_4^3 + H_4^3 = 0$$

$$H_6 = f_8$$

$$T_6 = x_1^{12} - 33\, x_1^8 x_2^4 - 33\, x_1^4 x_2^8 + x_2^{12}$$

$$108 f_6^4 - H_6^3 + T_6^2 = 0$$

$$H_{12} = f_{20}$$

$$T_{12} = (x_1^{30} + x_2^{30}) + 522\,(x_1^{25} x_2^5 - x_1^5 x_2^{25})$$
$$- 10005\,(x_1^{20} x_2^{10} + x_1^{10} x_2^{20})$$

$$T_{12}^2 + H_{12}^3 - 1728 f_{12}^5 = 0 .$$

Niezmienniki, należące do rozważanych trzech form, oznaczmy przez C_4, C_6, C_{12} i rozpatrzmy stosunki:

$$\frac{C_4^\lambda f_4^3}{H_4^3}, \quad \frac{C_6^\mu f_6^4}{H_6^3}, \quad \frac{C_{12}^\nu f_{12}^5}{H_{12}^5},$$

gdzie liczby λ, μ, ν są tak dobrane, że każdy z tych stosunków, będący już rzędu zero względem zmiennych, jest także stopnia zero co do spółczynników formy pierwotnej.

Jeżeli te stosunki oznaczymy przez ϱ, to funkcya, którą przy ich pomocy wyrażamy $\frac{x_1}{x_2}$ przez ϱ, nazywa się niewymiernością czworościanu, ośmiościanu, dwudziestościanu (Klein).

Pierwiastki równania stopnia 5-go wyrażają się przez niewymierności dwudziestościanowe.

Rozważanie form automorficznych pośrednio rozpoczął H. A. Schwarz (Zürich. Naturf. Ges. 1871. Crelle LXXV) przy okoliczności badania całek algebraicznych równań różniczkowych hypergeometrycznych; później formy te badał bezpośrednio i ogólnie Klein (Erl. Sitzungsber. 1874, 1875. Math. Ann. IX).

Do form automorficznych dochodzi się i z innego stanowiska, mianowicie, wychodząc z badania całek algebraicznych równań różniczkowych liniowych; pokazał to Fuchs (Gött. Nachr. 1875, Crelle LXXI, LXXXV). Patrz też Klein, Math. Ann. XI, XII, Jordan (Crelle LXXXIV, Comptes rendus 1876).

Dochodzimy wreszcie do tych samych form automorficznych, szukając form dwójkowych, dla których znika czwarte nasunięcie tych form na same siebie. Patrz wyżej cytowane rozprawy Wedekinda, Brioschi'ego, Halphena, a także Gordana, Math. Ann. XII.

§ 8.

Formy niebiegunowe wyzsze.

Teoryę niebiegunowości (apolarności), wyłożoną wyżej w rozdziale II-gim dla form dwójkowych, można rozciągnąć na formy jakiekolwiek.

Niechaj będą dwie formy o r zmiennych, jedna a_x^n rzędu n-tego o spółrzędnych x, druga u_α^n klasy n-tej o spółrzędnych przeciwpodstawieniowych u Powiadamy, że te dwie formy są sprzężonemi (Rosanes, Crelle LXXV) lub wzajemnie niebiegunowemi (Reye, Math. Ann. IV), jeżeli niezmiennik dwuliniowy a_α^n jest zerem.

Mając formę daną, weźmy jej biegunową pierwszą względem bieguna y, następnie biegunową względem bieguna z i tak dalej, póki nie otrzymamy biegunowej mieszanej $a_x a_y a_t \ldots$, liniowej względem każdego szeregu zmiennych $x, z, t \ldots$ Jeżeli ta biegunowa mieszana jest zerem forma dana jest niebiegunową względem formy, która w spółrzędnych u przedstawia ogół n biegunów $y, z, t, \ldots$ Mamy tym sposobem niebiegunowość formy względem innej, rozłożonej na n czynników. Utworzony z n punktów $y, z, t, \ldots$ n-kąt nazywa się n-kątem biegunowym względem rozmaitości geometrycznej, którą przedstawia $a_x^n = 0$. Wierzchołki n-kąta biegunowego mogą się zmieniać nieograniczenie; jeżeli mamy danych $n - 1$ wierzchołków, to ostatni n-ty nie daje się wyznaczyć w sposób jedyny, gdyż znajduje się oczywiście na rozmaitości liniowej, której równaniem względem x jest $a_y a_z a_t \ldots a_x = 0$. Nie ma to wszakże miejsca dla form dwójkowych.

Można wyznaczyć grupy $n + 1$ punktów takie, że każda grupa n punktów, w nich zawarta, tworzy wierzchołki n-kąta biegunowego. Gdy $n = 2$, $r = 3$, twierdzenie to odpowiada twierdzeniu o trójkątach samosprzężonych względem stożkowej. (Patrz rozdz. IV)

Pozostając w dziedzinie trójkowej ($r = 3$), możemy wypowiedzieć twierdzenie:

Forma trójkowa rzędu n-tego daje się wyrazić przez potęgi n-te $\frac{n(n+1)}{1.2}$ form liniowych, odpowiadających tymże prostym, łączącym każde dwa z pomiędzy $n+1$ punktów.

Twierdzenie to znajduje interesujące zastosowanie w teoryi niebiegunowości formy względem innych form rozkładalnych na czynniki liczbowe.

Do dwu form kwadratowych a_x^2, u_α^2 o r zmiennych, nierozkładalnych na czynniki liczbowe stosuje się następujące godne uwagi twierdzenie Hessego (Crelle, XLV).

Niebiegunowość wzajemna dwu form a_x^2, u_α^2 jest warunkiem na to, aby przy pomocy przekształcenia liniowego jedna z form przybrała postać, w której zachodzą tylko kwadraty zmiennych, druga zaś—postać, w której zachodzą tylko iloczyny.

W literaturze niebiegunowości do dzieł cytowanych w rozdziale II dodać należy prace Fr. Meyera (Apolarität i t. d. Tybinga 1883 i „Bericht über Invariantentheorie" patrz wyd. polskie Warszawa 1899).

ROZDZIAŁ IV.

S T O Ż K O W E.

---

§ 1.

Tworzenie rzutowe stożkowych, własności bezpośrednio z niem związane.

Teoryę stożkowych można traktować metodą syntetyczną rzutową i metodą analityczną.

W metodzie rzutowej stożkowe określamy w sposób następujący:

Niechaj będą dwie płaszczyzny homologiczne (patrz Rozdział I) nałożone lub nie, o środku homologii S i osi s. Punktom koła, położonym na jednej płaszczyźnie, odpowiadają na drugiej punkty krzywej, która nazywa się s t o ż k o w ą i ma dwie następujące własności zasadnicze: 1) k a ż d a p r o s t a n a p ł a s z c z y ź n i e t e j k r z y w e j s p o t y k a k r z y w ą a l b o w d w u p u n k t a c h, a l b o w j e d n y m, a l b o w c a l e j e j n i e s p o t y k a, 2) z k a ż d e g o p u n k t u p ł a s z c z y z n y m o ż n a d o k r z y w e j p o p r o w a d z i ć a l b o d w i e s t y c z n e, a l b o j e d n ę, a l b o n i e m o ż n a p o p r o w a d z i ć ż a d n e j s t y c z n e j.

Z tego określenia wynika inne, które starożytni geometrowie greccy kładli za podstawę całej teoryi: stożkowa jest krzywą, powstającą z przecięcia stożka kołowego płaszczyzną; koło i stożkowa są więc tu umieszczone w położeniu perspektywicznem.

Styczne do koła odpowiadają stycznym do stożkowej.

Jeżeli w jednej z dwu płaszczyzn homologicznych prosta graniczna (t. j. prosta, odpowiadająca prostej w nieskończoności na płaszczyźnie drugiej) przecina koło w dwu punktach, wtedy odpowiednia stożkowa będzie miała dwa punkty rzeczywiste w nieskończoności i nazywa się **hyperbolą**; jeżeli prosta graniczna jest styczną do koła, krzywa ma tylko jeden punkt rzeczywisty w nieskończoności i nazywa się **parabolą**; jeżeli wreszcie prosta graniczna nie przecina wcale koła, krzywa nie posiada punktów rzeczywistych w nieskończoności i nazywa się **elipsą**.

Jeżeli określimy stożkowe, jako krzywe przecięcia stożka kołowego płaszczyzną, t. j. jako figury perspektywiczne koła, wtedy trzy powyższe przypadki odpowiadają trzem różnym położeniom płaszczyzny przecinającej, a mianowicie gdy ta płaszczyzna przecina wszystkie tworzące stożka (elipsa), gdy jest równoległa do jednej tworzącej (parabola), gdy jest równoległą do dwu tworzących (hyperbola).

Inne określenie rzutowe stożkowych jest następujące:

Niechaj będą na płaszczyźnie dwa pęki promieni rzutowych o różnych środkach O, O'. Przecięcia odpowiadających sobie promieni tworzą stożkową, przechodzącą przez oba środki, a której styczną w tych dwu punktach jest prosta, odpowiadająca prostej OO'. I wzajemnie:

Niechaj będą na płaszczyźnie dwie proste punktowe rzutowe o różnych podkładach. Proste, łączące odpowiadające sobie punkty, są stycznemi do stożkowej, która dotyka dwóch prostych danych w punktach, odpowiadających wspólnemu ich przecięciu.

Podajemy jeszcze definicye następujące: (p. Rozdz. I § 3).

Stożkowa jest miejscem punktów, zjednoczonych w dwoistości inwolucyjnej lub w biegunowości.

Stożkowa jest obwiednią stycznych zjednoczonych w dwoistości inwolucyjnej lub biegunowości.

Prosta w nieskończoności jest styczną do paraboli.

Istnieją dwie proste na płaszczyźnie, spotykające się w skończoności i styczne do hyperboli w dwu jej punktach w nieskończoności. Te proste nazywają się asymptotami hyperboli.

Jeżeli środek O' znajduje się w nieskończoności w danym kierunku, wtedy promień pęku O', odpowiadający promieniowi pęku O równoległego do danego kierunku, może być w skończoności lub w nieskończoności; w pierwszym przypadku mamy hyperbolę, w drugim parabolę.

Jeżeli oba środki O i O' są w nieskończoności w dwu różnych kierunkach, stożkowa jest hyperbolą.

Proste, łączące parami punkty, odpowiadające sobie w dwóch prostych punktowych podobnych, obwodzą parabolę.

Z tych określeń wynika bezpośrednio:

Stosunek anharmoniczny czterech prostych, idących od czterech punktów stożkowej do piątego punktu zmiennego, jest stały; stosunek ten nazywamy zwykle stosunkiem anharmonicznym czterech punktów na stożkowej.

Stosunek anharmoniczny czterech punktów, w których cztery styczne do stożkowej przecina piąta styczna zmienna, jest stały; ten stosunek nazywamy stosunkiem anharmonicznym czterech stycznych stożkowej.

Stosunek anharmoniczny czterech stycznych stożkowej równa się stosunkowi anharmonicznemu czterech punktów styczności. Styczne do paraboli przecinają dwie styczne stałe w punktach, należących do dwu prostych punktowych podobnych. Dwie styczne stałe do paraboli przecinają każde inne styczne na części proporcyonalne. Proste, łączące odpowiadające sobie punkty dwóch prostych punktowych, położonych na jednej płaszczyźnie, obwodzą parabolę styczną do dwóch prostych, będących podkładami prostych punktowych.

W stożkowej iloczyn odcinków, które styczna zmienna wyznacza na dwóch stycznych stałych, licząc od ich punktów styczności, jest stały.

---

§ 2.

Własności rzutowe zasadnicze stożkowych. Twierdzenia Pascala, Brianchona i Desargues'a.

W sześciokącie, wpisanym w stożkową, trzy pary boków przeciwległych przecinają się w trzech punktach, leżących na jednej prostej. (Twierdzenie Pascala, 1640).

W sześciokącie, opisanym na stożkowej, trzy proste, łączące pary przeciwległych wierzchołków, schodzą się w jednym punkcie. (Twierdzenie Brianchona, 1806).

W dwu trójkątach homologicznych punkty, w których boki jednego trójkąta przecinają nieodpowiadające im boki drugiego, należą do stożkowej; proste zaś, idące od wierzchołków jednego do nieodpowiadających im wierzchołków drugiego, dotykają stożkowej. (Twierdzenie Steinera).

Jeżeli trójkąt przekształca się w ten sposób, że boki jego obracają się około punktów stałych, dwa wierzchołki zaś przebiegają dwie proste stałe, to trzeci wierzchołek opisuje stożkową. (Twierdzenie Maclaurina, 1721).

Jeżeli trójkąt przekształca się w ten sposób, że jego wierzchołki przebiegają dwie proste stałe, dwa boki zaś obracają się około punktów stałych, wtedy bok trzeci obwodzi stożkową.

W pięciokącie, wpisanym w stożkową, punkt spotkania dwóch boków niekolejnych, punkt spotkania drugich dwóch boków niekolejnych oraz punkt spotkania boku piątego ze styczną do krzywej w wierzchołku mu przeciwległym, leżą na jednej prostej, i wzajemnie.

W czworokącie, wpisanym w stożkową, punkt wspólny stycznym w dwóch przeciwległych wierzchołkach leży na jednej prostej z dwoma punktami spotkania par boków przeciwległych.

Czworobok zupełny, utworzony z czterech stycznych do stożkowej, i czworokąt zupełny, utworzony z czterech punktów styczności, mają ten sam trójkąt przekątny (patrz Rozdz. II).

W czworoboku, opisanym na stożkowej, proste, łączące punkty styczności boków przeciwległych, przechodzą przez punkt wspólny ich przekątnym. Przez punkt ten przechodzą także przekątne czworoboku wpisanego, którego wierzchołkami są cztery punkty styczności boków pierwszego czworokąta; cztery zaś przekątne tworzą grupę harmoniczną. Wreszcie punkty spotkania par boków przeciwległych obu czworoboków znajdują się na jednej prostej i tworzą także grupę harmoniczną.

W trójkącie, wpisanym w stożkową, styczne w wierzchołkach przecinają boki przeciwległe w punktach, leżących na jednej prostej.

W trójkącie, opisanym na stożkowej, proste, idące od wierzchołków do punktów styczności boków przeciwległych, przecinają się w jednym punkcie

P o p r z e c z n a p r z e c i n a s t o ż k o w ą i b o k i p r z e c i w l e g ł e c z w o r o k ą t a w p i s a n e g o w t r z e c h p a r a c h p u n k t ó w, b ę d ą c y c h w i n w o l u c y i (twierdzenie D e s a r g u e s'a), i w z a j e m n i e.

Jeżeli czworokąt, pozostając wciąż wpisanym w stożkową, przekształca się w ten sposób, że trzy jego boki obracają się około trzech punktów stałych na prostej, to i czwarty bok obracać się będzie około pewnego punktu stałego na tejże prostej.

W trójkącie, opisanym na stożkowej, każdy bok jest podzielony harmonicznie przez punkt styczności i przez prostą, która łączy punkty styczności dwu boków pozostałych. Twierdzenie wzajemne ma miejsce dla trójkąta wpisanego.

Jeżeli cięciwa styczności dwu stycznych do stożkowej przechodzi przez punkt spotkania dwu innych stycznych, wtedy pierwsze są podzielone harmonicznie przez dwie drugie, i odwrotnie.

Jeżeli dwie styczne do stożkowej spotykają się w punkcie, należącym do cięciwy styczności dwu innych stycznych, wtedy i odwrotnie, punkt spotkania tych drugich stycznych znajduje się na cięciwie styczności dwu pierwszych.

Punkt spotkania S dwu stycznych i cięciwa s styczności nazywają się odpowiednio b i e g u n e m i b i e g u n o w ą, t. j. S jest biegunem dla prostej s, a prosta s biegunową dla punktu S.

B i e g u n i b i e g u n o w a w z g l ę d e m s t o ż k o w e j z l e w a j ą s i ę o d p o w i e d n i o z b i e g u n e m i b i e g u n o w ą w b i e g u n o w o ś c i, w k t ó r e j s t o ż k o w a j e s t m i e j s c e m p u n k t ó w z j e d n o c z o n y c h.

Biegunową s punktu S można też określić jako miejsce punktu spotkania się par boków przeciwległych czworokąta wpisanego, którego przekątne przechodzą przez S, albo jako miejsce punktu rozdzielonego harmonicznie przez S i przez stożkową.

Biegunową punktu na stożkowej jest styczna w tym punkcie.

Jeżeli punkt porusza się po prostej, to biegunowa jego obraca się około pewnego punktu.

Dwa punkty, z których każdy znajduje się na biegunowej drugiego, nazywają się s p r z ę ż o n e m i (wzajemnemi) względem stożkowej; dwie proste, z których każda przechodzi przez biegun drugiej, nazywają się także s p r z ę ż o n e m i (wzajemnemi).

Jeżeli dwa punkty są sprzężonemi, to i biegunowe ich są sprzężonemi.

Trójkąt, którego każdy wierzchołek jest biegunem boku przeciwległego, nazywają się t r ó j k ą t e m s a m o s p r z ę ż o n y m w z g l ę d e m s t o ż k o w e j.

Punkty przekątne czworokąta zupełnego, utworzonego z czterech punktów na stożkowej, tworzą trójkąt samosprzężony; wzajemnie, proste przekątne czworoboku zupełnego, utworzonego przez cztery styczne do stożkowej, tworzą trójkąt samosprzężony.

Jeżeli trójkąt jest wpisany w stożkową, wtedy prosta sprzężona z jego bokiem względem stożkowej przecina pozostałe dwa boki w punktach sprzężonych (v. Staudt).

Jeżeli pary wierzchołków przeciwległych czworoboku zupełnego składają się z punktów sprzężonych w biegunowości (patrz Rozdz I § 3), względem stożkowej rzeczywistej lub urojonej, wtedy i pozostałe dwa wierzchołki przeciwległe będą sprzężonemi w tejże biegunowości (Hesse).

Jeżeli dwa trójkąty są biegunowemi względem siebie w pewnej biegunowości, to są homologicznemi, i odwrotnie dwa trójkąty homologiczne są wzajemnie biegunowemi w pewnej biegunowości.

Dla dwóch trójkątów jedna z trzech poniższych własności pociąga za sobą dwie pozostałe: 1-o trójkąty są samosprzężonemi w jednej i tej samej biegunowości, 2-o są wpisane w jednę i tę samą stożkową, 3-o są opisane około jednej i tej samej stożkowej.

§ 3.

Wzory główne geometryi analitycznej stożkowych.

Definicya analityczna stożkowych jest następująca:

Niechaj x_1, x_2, x_3 będą spółrzędne jednorodne punktu płaszczyzny. Stożkowa jest miejscem geometrycznem, przedstawionem analitycznie przez równanie stopnia 2-go pomiędzy spółrzędnemi x, typu:

$$f(x) = \sum_1^3 a_{ij} x_i x_j = 0, \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

gdzie $a_{11}, a_{22} \ldots$ są spółczynniki stałe (równanie stożkowej). Z tego powodu stożkowe nazywają się także miejscami (krzywemi) rzędu 2-go.

Jeżeli trójkąt podstawowy spółrzędnych jest trójkątem samosprzężonym, równanie stożkowej sprowadza się do formy kanonicznej $\Sigma\, a_i\, x_i^2 = 0$.

Niechaj u_1, u_2, u_3 będą spółrzędnemi jednorodnemi prostej na płaszczyźnie; podobne do powyższego równanie stopnia 2-go pomiędzy spółrzędnemi u przedstawia obwiednią (powłóczącą), t. j. krzywą, której stycznemi są wszystkie proste o spółrzędnych, czyniących zadość temu równaniu. Ta krzywa jest także stożkową, i dlatego o stożkowej mówi się, iż jest obwiednią klasy 2-giej.

Równanie w spółrzędnych punktu nazywa się równaniem punktowem, w spółrzędnych prostej — równaniem stycznościowem (tangencyalnem)

Z równania stożkowej wynika, że wyznaczyć się ona daje, gdy znamy stosunki pięciu spółczynników równania do szóstego.

Stożkowa daje się wyznaczyć skończoną liczbą sposobów, gdy mamy danych r punktów, przez które ma przechodzić, i s prostych, do których ma być styczną, przyczem $r + s = 5$. W szczególności:

Przez pięć punktów przechodzi jedna tylko stożkowa.

Przez cztery punkty przechodzą dwie stożkowe, styczne do jednej prostej.

Przez trzy punkty przechodzą cztery stożkowe, styczne do dwu prostych danych.

Przez dwa punkty przechodzą cztery stożkowe, styczne do trzech prostych danych.

Przez jeden punkt przechodzą dwie stożkowe, styczne do czterech prostych danych.

Istnieje tylko jedna stożkowa, styczna do pięciu prostych danych.

W wyznaczniku (wyróżniku)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix},$$

niechaj A_{ij} będą dopełnienia algebraiczne jego elementów; dopełnienie A_{33} oznaczmy przez B. Z równania powyższego stożkowej otrzymujemy jej równanie w układzie Descartes'a, kładąc $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$. Niechaj ω będzie kąt pomiędzy osiami w tym układzie, połóżmy nadto:

$$C = a_{11} + a_{22} - 2\,a_{12} \cos \omega\,.$$

Mamy wtedy następujące ważne twierdzenie:

Przy wszelkich przekształceniach spółrzędnych kartezyańskich, wyrażenia

$$\frac{A}{\sin^2 \omega}, \frac{B}{\sin^2 \omega}, \frac{C}{\sin^2 \omega},$$

pozostają niezmienionemi (są niezmiennikami). Stąd wynika:

Przy wszelkich przekształceniach spółrzędnych kartezyańskich ilości A, B, C zachowują znak niezmienny.

W przypadku spółrzędnych prostokątnych ilość C staje się równą $a_{11} + a_{22}$; a zatem:

Przy przejściu od jednego układu prostokątnego do innego prostokątnego ilość $a_{11}+a_{22}$ nie ulega zmianie.

Stosownie do wartości spółczynników (które przyjmujemy za rzeczywiste) miejsce, przedstawione przez równanie stopnia 2-go, ma różne postaci. Utrzymując wyżej podane określenie elipsy, paraboli, hyperboli, mamy rezultaty następujące:

Przy założeniu, że A jest różne od zera, mamy dla $B > 0$ elipsę, dla $B < 0$ hyperbolę, dla $B = 0$ parabolę.

W przypadku $B > 0$ elipsa jest utworzona z punktów rzeczywistych wtedy tylko, gdy $Aa_{11} < 0$ i $Aa_{22} < 0$ (te dwie nierówności, gdy $B > 0$, są wynikiem jedna drugiej); w przypadku przeciwnym mamy elipsę, której punkty są urojone (elipsa urojona); w przypadku $B < 0$ mamy hyperbolę rzeczywistą w przypadku $B = 0$ parabolę rzeczywistą, o ile A jest różne od zera.

Gdy $A = 0$ mamy zawsze parę prostych, nie zaś stożkową właściwą; będzie to para prostych urojonych, spotykających się w punkcie rzeczywistym w odległości skończonej, jeżeli $B > 0$; para prostych rzeczywistych, spotykających się w punkcie rzeczywistym w odległości skończonej, jeżeli $B < 0$; wreszcie będą to dwie proste równoległe lub urojone lub dwie proste zlewające się w jednę, jeżeli $B = 0$.

Jeżeli stożkowa jest elipsą rzeczywistą, wtedy równanie jej (w spółrzędnych niejednorodnych) przez przemieszczenie osi spółrzędnych może być sprowadzone do postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

jeżeli jest elipsą urojoną — do postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Jeżeli stożkowa jest hyperbolą, wtedy równanie jej przez przemieszczenie osi da się sprowadzić do postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Jeżeli stożkowa jest parabolą, wtedy równanie jej da się sprowadzić do postaci:

$$y^2 = px.$$

Równanie ogólne stopnia 2-go (typu zwykłego), którego wyrazy stopnia 2-go tworzą kwadrat zupełny, przedstawia parabolę (jeżeli A jest różne od zera).

Równanie jednorodne, wymierne, całkowite stopnia 2-go pomiędzy x i y przedstawia parę prostych, przechodzących przez początek.

Aby równanie stopnia 2-go przedstawiało parę prostych, jest koniecznem i dostatecznem, aby jego strona pierwsza rozpadała się na dwa czynniki całkowite stopnia 1-go w zmiennych x i y.

Równanie ogólne stopnia 2-go przedstawia koło wtedy, gdy, przy A różnem od zera, jest $a_{12} = a_{11}$, $a_{12} = a_{11} \cos\omega$, gdzie ω jest kąt pomiędzy osiami spółrzędnych. Koło będzie rzeczywistem lub urojonem, stosownie do tego, czy $Aa_{11} < 0$ lub $Aa_{11} > 0$.

Równanie koła w układzie prostokątnym osi daje się przedstawić w postaci:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2,$$

gdzie α, β są spółrzędne środka, r — promień koła; w układzie ukośnokątnym równanie koła można przedstawić w postaci:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega = r^2,$$

gdzie ω jest kąt pomiędzy osiami.

Jeżeli równanie koła dane jest w postaci ogólnej

$$a_{11}(x^2 + xy\cos\omega + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

wtedy spółrzędnemi środka są:

$$\alpha = \frac{-a_{13} + a_{23}\cos\omega}{a_{11}\sin^2\omega}, \quad \beta = \frac{a_{13}\cos\omega - a_{23}}{a_{11}\sin^2\omega},$$

a promień jego ma wyrażenie:

$$r^2 = \frac{a_{13}{}^2 + a_{33}{}^2 - 2a_{13}a_{23}\cos\omega - a_{11}a_{33}\sin^2\omega}{a_{11}\sin^2\omega}.$$

Hyperbola, której asymptoty są do siebie prostopadłe, nazywa się hyperbolą równoboczną. Dla hyperboli takiej zachodzi związek:

$$a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega = 0.$$

Prosta w nieskończoności przecina wszystkie koła płaszczyzny w tych samych dwóch punktach urojonych, które nazywają się **punktami kołowemi** płaszczyzny.

Stożkowa jest kołem, jeżeli przechodzi przez dwa punkty kołowe.

Równaniem stycznościowem dwu punktów kołowych jest:

$$u^2 + v^2 = 0 .$$

Spółczynnikami kątowemi stycznych do koła w tych punktach są $\operatorname{tg} \alpha = \pm i = \pm \sqrt{-1}$, i dla tego styczne do wszystkich kół w punktach kołowych należy uważać za równoległe. Kąt α należy uważać za nieskończenie wielki.

Równaniem stycznej do stożkowej w punkcie o spółrzędnych x', y' (w układzie prostokątnym) jest:

$$(a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13}) x + (a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23}) y$$
$$+ (a_{31} x' + a_{32} y' + a_{33}) = 0 .$$

Równaniem normalnej, t j. prostopadłej do stycznej w punkcie styczności, jest

$$\frac{x - x'}{a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13}} = \frac{y - y'}{a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23}} ,$$

Niechaj $f(x, y)$ oznacza stronę pierwszą równania stożkowej; styczne, które z punktu danego x', y' można poprowadzić do stożkowej, są rzeczywiste i różne, rzeczywiste i zlewające się, wreszcie urojone, stosownie do tego, czy iloczyn $A f(x', y')$ jest ujemny, równy zeru albo dodatni.

Warunek na to, aby prosta, której równaniem jest $ux + vy + 1 = 0$, była styczna do stożkowej, przedstawionej przez równanie zwykłe, wyraża się w ten sposób:

$$A_{11} u^2 + 2 A_{12} uv + A_{22} v^2 + 2 A_{13} u + 2 A_{23} v + A_{33} = 0 ,$$

gdzie $A_{11}, A_{12}, \ldots$ są dopełnieniami algebraicznemi odpowiednich elementów wyznacznika A.

Jeżeli u i v interpretujemy jako spółrzędne prostej, to równanie poprzednie jest równaniem stycznościowem stożkowej.

Równanie:

$$(a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13}) x + (a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23}) y$$
$$+ (a_{31} x' + a_{32} y' + a_{33}) = 0 ,$$

w którem x', y' są spółrzędnemi już nie punktu krzywej, lecz w ogóle jakiegokolwiek punktu płaszczyzny, przedstawia biegunową (patrz § 2) punktu $x' y'$ (bieguna) względem krzywej.

Aby dwa punkty $(x' y')$, (x'', y'') były sprzężonemi, musi spełniać się warunek:

$$a_{11} x' x'' + a_{12} (x' y'' + x'' y') + a_{22} y' y'' + a_{13} (x' + x'')$$
$$+ a_{23} (y' + y'') + a_{33} = 0 .$$

Biegun prostej $\lambda x + \mu y + v = 0$ ma spółrzędne:

$$x' = \frac{A_{11} \lambda + A_{12} \mu + A_{13} \nu}{A_{13} \lambda + A_{23} \mu + A_{33} \nu} , \quad y' = \frac{A_{12} \lambda + A_{22} \mu + A_{32} \nu}{A_{13} \lambda + A_{23} \mu + A_{33} \nu} .$$

Warunek na to, aby dwie proste

$$\lambda' x + \mu' y + \nu' = 0 \quad , \quad \lambda'' x + \mu'' y + \nu'' = 0$$

były sprzężonemi, wyraża się w ten sposób:

$$\begin{vmatrix} 0 , & \lambda' , & \mu' , & \nu' \\ \lambda'' , & a_{11} , & a_{12} , & a_{13} \\ \mu'' , & a_{21} , & a_{22} , & a_{23} \\ \nu'' , & a_{31} , & a_{32} , & a_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

Miejscem punktów środkowych układu cięciw równoległych do danego kierunku jest prosta, którą nazywamy **średnicą** stożkowej.

Średnica jest biegunową punktu w nieskończoności w kierunku cięciw, dzielonych przez nią na dwie równe części.

Wszystkie średnice przechodzą przez jeden punkt, który nazywa się **środkiem** stożkowej. Każda prosta, przechodząca przez środek, jest średnicą. Środek jest biegunem prostej w nieskończoności na płaszczyźnie.

Styczne w punktach, w których średnica przecina krzywą, są równoległe do cięciw, dzielonych przez średnicę na dwie równe części.

Jeżeli początek spółrzędnych jest środkiem krzywej, wtedy równanie krzywej nie zawiera wyrazów stopnia pierwszego względem spółrzędnych.

Równaniem średnicy, dzielącej na dwie równe części cięciwy równoległe do prostej $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$, jest

$$(a_{11}\, m + a_{12}\, n)\, x + (a_{21}\, m + a_{22}\, n)\, y + (a_{31}\, m + a_{32}\, n) = 0 .$$

W szczególności, średnice, dzielące na dwie równe części cięciwy równoległe do osi, mają równania:

$$a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13} = 0 \quad ; \quad a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23} = 0 .$$

W paraboli środek jest w nieskończoności, a stąd wszystkie średnice są równoległe.

Spółrzędnemi środka stożkowej są

$$x_0 = \frac{a_{23}\, a_{21} - a_{22}\, a_{13}}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}{}^2} \quad , \quad y_0 = \frac{-a_{13}\, a_{11} + a_{12}\, a_{13}}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}{}^2} .$$

W elipsie i w hyperboli dwie średnice nazywają się sprzężonemi, jeżeli jedna dzieli na dwie równe części cięciwy równoległe do drugiej.

Pary średnic sprzężonych (w liczbie nieskończonej) tworzą inwolucyę, której promieniami podwójnemi są asymptoty (rzeczywiste w hyperboli, urojone w elipsie).

Pomiędzy spółczynnikami kątowemi [1]) $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$ dwu średnic sprzężonych, zachodzi związek:

$$a_{11}\, mm' + a_{12}\,(mn' + m'n) + a_{22}\, nn' = 0\,.$$

Spółczynnik kątowy średnic paraboli jest

$$-\frac{a_{12}}{a_{11}} \text{ albo } -\frac{a_{22}}{a_{12}}\,.$$

Spółczynniki kątowe $\frac{m}{n}$ dwu asymptot hyperboli daje równanie:

$$a_{11}\, m^2 + 2\, a_{12}\, mn + a_{22}\, n^2 = 0\,.$$

Równaniem wspólnem dla dwu prostych równoległych do asymptot, poprowadzonych przez początek, jest

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 = 0\,.$$

P o l e t r ó j k ą t a, u t w o r z o n e g o p r z e z s t y c z n e i p r z e z d w i e a s y m p t o t y h y p e r b o l i, j e s t s t a ł e.

W elipsie i w hyperboli pomiędzy nieskończenie wielu parami prostych jest jedna para średnic wzajemnie prostopadłych; te dwie średnice nazywają się o s i a m i, a punkty ich przecięcia z krzywą — w i e r z c h o ł k a m i.

W paraboli jest jedna tylko średnica prostopadła do cięciw, przez nie na dwie równe części podzielnych, i nazywa się o s i ą paraboli. Osi są zawsze rzeczywiste i są osiami symetryi krzywej.

W hyperboli osi są dwusiecznemi kątami pomiędzy asymptotami; jedna z nich przecina krzywą w dwóch punktach rzeczy-

---

[1]) Spółczynnikiem kątowym prostej nazywa się zwykle stosunek (wzięty ze znakiem przeciwnym) spółczynników przy x i y w równaniu prostej, wyrażonem przez spółrzędne kartezyańskie prostokątne: przyjmujemy tę samą nazwę i dla układu ukośnokątnego.

wistych i nazywa się osią rzeczywistą albo ogniskową; drugi nazywa się osią urojoną.

Równaniem wspólnem dla dwu osi krzywej stożkowej jest:

$$(a_{11}\cos\omega - a_{12})(x-x_0)^2 + (a_{11}-a_{22})(x-x_0)(y-y_0)$$
$$-(a_{22}\cos\omega - a_{12})(y-y_0)^2 = 0\,,$$

gdzie ω jest kątem pomiędzy osiami spółrzędnych, x_0 i y_0 zaś są spółrzędnemi środka.

Równaniem osi paraboli jest:

$$a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13} + \frac{(a_{12}\,a_{23} - a_{22}\,a_{23}) + (a_{13}\,a_{12} - a_{11}\,a_{23})\cos\omega}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega} = 0.$$

Jeżeli osi spółrzędnych są dwiema średnicami stożkowej (w szczególności zlewają się z osiami samej krzywej), wtedy jej równanie przybiera postać:

$$\frac{x^2}{a_1{}^2} \pm \frac{y^2}{b_1{}^2} = 1\,,$$

gdzie a_1 i b_1 są długościami półśrednic sprzężonych.

Jeżeli osi spółrzędnych są osiami krzywej, wtedy a_1, b_1 nazywają się wprost półosiami.

Jeżeli oś przecina stożkową, wtedy półosi są odległościami punktów spotkania od środka.

Długości półosi wyrażają się przez

$$\sqrt{-\frac{A}{B\varrho_1}}\,,\quad \sqrt{-\frac{A}{B\varrho_2}}\,,$$

gdzie ϱ_1, ϱ_2 są pierwiastkami równania

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho\ , & a_{12} - \varrho\cos\omega \\ a_{12} - \varrho\cos\omega\ , & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

lub równania:

$$\varrho^2 \sin^2 \omega - \varrho C + B = 0 .$$

Równanie hyperboli, odniesionej do asymptot, ma postać $xy + p = 0$.

Równanie elipsy lub hyperboli, odniesionej do średnicy (jako osi x) i do stycznej w jednym tejże końców (jako osi y), jest postaci:

$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 x = 0 ,$$

równanie zaś paraboli w tym przypadku jest:

$$y^2 = px .$$

Liczba p nazywa się parametrem, odpowiadającym wybranej średnicy; jeżeli tą średnicą jest oś, p nazywa się parametrem głównym.

Równaniem biegunowem elipsy lub hyperboli, przy przyjęciu środka za biegun, jest:

$$\varrho^2 = \frac{a_{22}{}^2}{\pm (1 - e^2 \cos^2 \theta)} ;$$

znak $+$ w przypadku elipsy, znak $-$ w przypadku hyperboli; e jest tak zwanym mimośrodem (patrz § 5).

§ 4.

Główne własności miarowe stożkowych.

Jeżeli stożkowa przecina boki BC, CA, AB trójkąta w punktach D, D'; E, E'; F, F', wtedy zachodzi związek:

$$\frac{BD \,.\, BD'}{CD \,.\, CD'} \cdot \frac{CE \,.\, CE'}{AE \,.\, AE'} \cdot \frac{AF \,.\, AF'}{BF \,.\, BF'} = 1 .$$

Jest to twierdzenie Carnota (Géom. de position str. 437); odwrotnie, jeżeli punkty D, D'; E, E'; F, F' na bokach trójkąta czynią zadość temu związkowi, wtedy leżą one na stożkowej.

W elipsie suma kwadratów dwóch półśrednic sprzężonych, w hyperboli zaś różnica kwadratów półśrednic sprzężonych jest stała.

W elipsie i hyperboli pole równoległoboku, wystawionego na dwu półśrednicach sprzężonych, jest stałe.

Prostokąt, wystawiony na dwóch odcinkach, które dwie średnice sprzężone wyznaczają na stycznej stałej, począwszy od punktu styczności, jest stale równy kwadratowi półśrednicy równoległej do stycznej stałej.

Jeżeli zbudujemy równoległobok na dwóch półśrednicach sprzężonych hyperboli, to jedna z jego przekątnych będzie asymptotą, druga zaś będzie równoległa do drugiej asymptoty.

Prostokąt, wystawiony na odcinkach, które styczna zmienna wyznacza na stycznych stałych równoległych, począwszy od punktu styczności, jest stale równy kwadratowi półśrednicy równoległej do stycznych stałych.

Prostokąt, wystawiony na dwóch odcinkach, które dwie styczne zmienne wyznaczają na stycznej stałej, równa się kwadratowi półśrednicy do niej równoległej.

Równoległobok, wystawiony na dwóch półśrednicach, jest równoważny równoległobokowi, wystawionemu na półśrednicach sprzężonych odpowiednio z pierwszemi.

Dwie styczne, poprowadzone z punktu na stożkowej (elipsie lub hyperboli), są proporcyonalne do półśrednic do nich równoległych.

Iloczyn dwóch odcinków siecznej, przechodzącej przez punkt stały, jest proporcyonalny do kwadratu półśrednicy równoległej do siecznej.

Kwadraty cięciw równoległych są proporcyonalne do iloczynów odcinków, wyznaczonych przez nie na średnicy sprzężonej z ich kierunkiem.

Iloczyny odcinków, które prosta równoległa do asymptoty w hyperboli lub średnica paraboli odcina na cięciwach równoległych, są proporcyonalne do odcinków, które też cięciwy odcinają na prostej.

Iloczyn odcinków, wyznaczonych na jakiejkolwiek stycznej do hyperboli przez dwie jej asymptoty, licząc od punktu ich przecięcia, ma wartość stałą.

Pole trójkąta, utworzonego przez styczną do hyperboli i przez asymptoty, jest stałe.

Odcinek stycznej do hyperboli, zawarty pomiędzy asymptotami, dzieli się w punkcie styczności na dwie części równe.

Dwa odcinki, które hyperbola i dwie jej asymptoty wyznaczają na jakiejkolwiek poprzecznej, mają ten sam punkt środkowy.

W czworokącie, wpisanym w stożkową, iloczyn odległości jakiegokolwiek punktu krzywej od dwóch boków przeciwległych jest w stosunku stałym do iloczynu odległości tegoż punktu od dwóch drugich boków przeciwległych. (Twierdzenie P a p p u s a).

W czworoboku, opisanym na stożkowej, iloczyn odległości jakiejkolwiek stycznej od dwóch wierzchołków przeciwległych jest w stosunku stałym do iloczynu odległości tejże stycznej od dwóch drugich wierzchołków przeciwległych.

Jeżeli około dwóch punktów stałych na hyperboli obracać będziemy dwa promienie, przecinające się stale na krzywej, wtedy odcinek, wyznaczony przez te promienie na asymptocie, jest długości stałej.

Każdy równoległobok, którego dwa wierzchołki przeciwległe znajdują się na hyperboli, boki zaś przeciwległe na asymptotach, ma przekątną, przechodzącą przez środek.

W paraboli podnormalna (odległość pomiędzy spodkiem prostopadłej, spuszczonej z punktu paraboli na oś, a punktem spotkania normalnej z osią) jest stale równa połowie parametru glównego.

Pole trójkąta, utworzonego przez trzy styczne do paraboli, jest połową pola trójkąta, utworzonego z ich punktów styczności.

W każdym trójkącie, wpisanym w hyperbolę równoboczną, punkt przecięcia wysokości znajduje się na krzywej.

W każdym trójkącie prostokątnym, wpisanym w hyperbolę równoboczną, styczna w wierzchołku kąta prostego jest prostopadła do przeciwprostokątnej.

Koło, wpisane w trójkąt sprzężony względem hyperboli równobocznej, przechodzi przez środek krzywej.

---

§ 5.

Własności ogniskowe stożkowych.

Istnieją w ogóle cztery punkty (rzeczywiste lub urojone) takie, że wszystkie pary prostych sprzężonych, przechodzących przez każdy z tych punktów, są parami prostych wzajemnie prostopadłych. Te punkty nazywają się **ogniskami**.

W elipsie i hyperboli istnieją w skończoności tylko dwa takie punkty rzeczywiste, położone na jednej z osi, symetrycznie względem środka i wewnątrz krzywej, t. j. takie punkty, że styczne, poprowadzone z tych punktów do krzywej, są urojonemi. W paraboli istnieje jedno tylko ognisko w odległości skończonej, położone na osi wewnątrz krzywej.

Oś, na której leżą ogniska, nazywa się osią ogniskową.

Niechaj α, β będą półosiami elipsy lub hyperboli; ogniska rzeczywiste elipsy znajdują się na jej osi wielkiej w odległości $\pm\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ od środka; ogniska hyperboli znajdują się na jej osi rzeczywistej w odległości $\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ od środka.

Kierownicą nazywa się biegunowa ogniska.

W elipsie i w hyperboli są dwie kierownice rzeczywiste prostopadłe do osi; w paraboli jest tylko jedna kierownica prostopadła do osi ogniskowej.

Równanie kierownicy otrzymujemy, podstawiając w równaniu biegunowej spółrzędne ogniska.

Stosunek odległości punktu na krzywej od ogniska i od odpowiedniej kierownicy jest stały; stosunek ten nazywa się **mimośrodem**. Mimośród wyraża się przez $\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}$ dla elipsy, przez $\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha}$ dla hyperboli.

W elipsie mimośród jest mniejszy od 1, w paraboli równy 1, w hyperboli większy od 1. Punkty paraboli są równooddalone od ogniska i od kierownicy.

W elipsie suma promieni, łączących punkt krzywej z dwoma ogniskami rzeczywistemi, jest stała; w hyperboli zaś różnica tych promieni jest stała.

Iloczyn odległości dwu ognisk od stycznej do krzywej jest stały.

Styczna i normalna w danym punkcie krzywej dzielą na dwie równe części kąty pomiędzy dwoma promieniami wodzącemi.

W paraboli styczna i normalna w danym punkcie dzielą na dwie równe części kąty pomiędzy promieniem wodzącym a średnicą, przechodzącą przez uważany punkt krzywej.

Dwa ogniska rzeczywiste elipsy znajdują się na jej osi wielkiej; a odległość ich od środka jest drugą przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątną jest półoś wielka, a pierwszą przeciwprostokątną półoś mała.

W hyperboli odległość ogniska od środka jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątnemi są półosi krzywej.

Jeżeli elipsa i parabola przechodzą przez jeden i ten sam punkt i mają te same ogniska, wtedy przecinają się pod kątem prostym.

Normalna do stożkowej dzieli odległość pomiędzy ogniskami na części proporcyonalne do promieni wodzących.

Kąt w ognisku oparty na cięciwie, dzieli się na dwie równe części przez prostą łączącą ognisko z biegunem cięciwy.

Prosta, łącząca ognisko z biegunem cięciwy przechodzącej przez ognisko, jest prostopadła do cięciwy.

Kąt w ognisku, oparty na kawałku stycznej zmiennej, zawartym pomiędzy dwiema stycznemi stałemi, jest stały.

Iloczyn dwu odcinków cięciwy, przechodzącej przez ognisko, zachowuje stosunek stały do całej cięciwy.

Suma dwu cięciw ogniskowych, równoległych do dwu średnic sprzężonych, jest stały.

Suma odwrotności dwóch cięciw ogniskowych do siebie prostopadłych jest stała.

Odległość punktu hyperboli od ogniska równa się odcinkowi prostej, przez ten punkt równolegle do asymptoty poprowadzonej, aż do kierownicy.

W paraboli punkt spotkania stycznej z osią ogniskową i punkt styczności są równooddalone od ogniska.

W paraboli kąt pomiędzy dwiema stycznemi równa się połowie kąta pomiędzy promieniami wodzącemi, przechodzącemi przez punkt styczności.

W paraboli koło, opisane na trójkącie, utworzonym przez trzy styczne, przechodzi przez ognisko.

W paraboli trzy wysokości trójkąta, utworzonego przez trzy styczne, spotykają się w punkcie położonym na kierownicy.

W paraboli dwie styczne, poprowadzone z punktu kierownicy do linii krzywej, są prostopadłe.

W paraboli parametr średnicy (patrz § 3) równa się cztery razy wziętej odległości jej końca od ogniska.

Jeżeli za biegun układu biegunowego przyjmiemy jedno z ognisk, to równanie biegunowe elipsy i hyperboli będzie miało postać:

$$\varrho = \frac{b^2}{a} \frac{1}{1 + e \cos \theta},$$

gdzie a, b są półosiami, e — mimośrodem.

Równanie biegunowe paraboli — przy przyjęciu jej ogniska za biegun — jest postaci:

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2} p}{1 - \cos \vartheta}$$

gdzie p jest parametrem głównym paraboli.

Jeżeli równaniem danej stożkowej (elipsy lub hyperboli) jest $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, to równaniem ogólnem stożkowej spółogniskowej (t. j. mającej też same ogniska rzeczywiste) z daną jest:

$$\frac{x^2}{a^2+\varrho} \pm \frac{y^2}{b^2+\varrho} = 1 .$$

Stożkowe uważane, jako przecięcia stożka kołowego płaszczyzną, badali starożytni geometrowie greccy Apollonius, Pappus i inni, którzy wykryli prawie wszystkie własności główne, dotyczące ognisk, asymptot, średnic sprzężonych i t. d.

Desargues, Pascal, Delahire, Newton, Maclaurin i inni matematycy wieku XVII i XVIII zajmowali się badaniami nad stożkowemi; pierwszemu i trzeciemu z nich zawdzięczamy wprowadzenie systematyczne teoryi biegunów i biegunowych, drugiemu zaś odkrycie sławnego twierdzenia (patrz § 2), mającego wielką doniosłość w geometryi rzutowej stożkowych.

Wprowadzenie metody spółrzędnych, którą zawdzięczamy Descartes'owi, pozwoliło badać te krzywe z nowego punktu widzenia i udowodnić analityczne własności, wyprowadzone drogą syntetyczną.

Do traktatów o stożkowych, prócz cytowanych na końcu rozdziału pierwszego, dołączamy jeszcze t. I „Geometryi“ Clebscha—Lindemanna, dalej wykłady Steinera (Vorl. über synth. Geometrie; Theorie der Kegelschnitte, ogłoszone przez Geisera, Część I i przez Schrötera, Część II). Co do szczegółów historycznych patrz Aperçu histor. Chasles'a.

§ 6.

Pęki stożkowych.

Dwie stożkowe przecinają się w czterech punktach (rzeczywistych lub urojonych) i mają cztery styczne wspólne.

Jeżeli $f=0, f'=0$ są równaniami dwu stożkowych w spółrzędnych punktowych (lub w spółrzędnych prostej) wtedy równanie $f+\lambda f'=0$, gdzie λ jest jakimkolwiek parametrem stałym, przedstawia stożkową, przechodzącą przez cztery punkty przecięcia stożkowych danych (lub stożkową styczną do czterech stycznych wspólnych dwóm danym stożkowym).

Mówimy, że wszystkie stożkowe, przedstawione przez równanie $f+\lambda f'=0$, tworzą pęk (jeżeli $f=0, f'=0$ są równaniami w spółrzędnych punktowych) albo pasmo (jeżeli $f=0, f'=0$ są równaniami w spółrzędnych stycznościowych).

Cztery punkty przecięcia dwóch stożkowych nazywają się punktami podstawowemi pęku.

Pomiędzy stożkowemi pęku są trzy, które rozpadają się na dwie proste; pomiędzy stożkowemi pasma są trzy, które redukują się do pary punktów.

Trójkąt przekątny czworokąta zupełnego, którego wierzchołkami są cztery punkty podstawowe pęku, jest trójkątem samosprzężonym względem wszystkich stożkowych pęku.

Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi stożkowa pęku, i do każdej prostej na płaszczyźnie jest styczną stożkowa pęku.

Każdej prostej na płaszczyźnie dotykają dwie stożkowe pęku i przez każdy punkt płaszczyzny przechodzą dwa stożkowe pasma.

Punkty spotkania stożkowych pęku z prostą tworzą na niej inwolucyę, której punktami podwójnemi są punkty styczności tych dwóch stożkowych pęku, które dotykają prostej. I wzajemnie.

Miejscem środków stożkowych pęku jest stożkowa, przechodząca przez sześć punktów środkowych, na bokach czworokąta, utworzonego z czterech punktów podstawowych i przez trzy punkty przekątne (stożkowa dziewięciu punktów). Jeżeli cztery punkty podstawowe należą do koła, to ta stożkowa jest hyperbolą równoboczną.

Jeżeli:

$$f = \Sigma\, a_{ik} x_i x_k \,, \quad f' = \Sigma\, b_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki},\ b_{ik} = b_{ki}),$$

to wyróżnikiem stożkowej pęku jest:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12}, & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21}, & a_{22} - \lambda b_{22}, & a_{23} - \lambda b_{13} \\ a_{31} - \lambda b_{31}, & a_{32} - \lambda b_{32}, & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix}.$$

Jeżeli równanie stopnia trzeciego $\Delta(\lambda) = 0$ ma pierwiastek podwójny, to dwa punkty podstawowe pęku zlewają się i otrzymujemy pęk stożkowych stycznych do siebie w jednym punkcie.

Jeżeli $\Delta(\lambda) = 0$ ma jeden pierwiastek podwójny i dla tej wartości λ wszystkie minory rzędu 2-go wyznacznika Δ znikają, wtedy wszystkie stożkowe pęku (a więc i stożkowe dane) dotykają się w dwu punktach; prosta, łącząca te punkty, nazywa się prostą podwójną pęku.

W tym przypadku istnieje nieskończenie wiele trójkątów samosprzężonych względem wszystkich stożkowych pęku; wszystkie te trójkąty mają bok, t. j. prostą podwójną wspólną.

Jeżeli wszystkie trzy pierwiastki równania są sobie równe, przyczem nie znikają minory rzędu 2-go, wtedy wszystkie stożkowe pęku mają punkt styczności rzędu 2-go (t. j. trzy punkty nieskończenie blizkie wspólne) i nadto mają jeszcze jeden punkt wspólny. W tym przypadku nie istnieje właściwie trójkąt samosprzężony wspólny.

Jeżeli wreszcie wszystkie pierwiastki równania $\Delta(\lambda) = 0$ są równe i równocześnie dla tej wartości λ znikają wszystkie minory rzędu 2-go wyznacznika Δ, wtedy wszystkie stożkowe pęku, a więc i dwie stożkowe dane mają wspólny punkt styczności rzędu 3-go, t. j. wszystkie cztery punkty przecięcia zlewają się w jeden.

§ 7.

Utwory niezmiennicze układu jednej lub dwóch form trójkowych kwadratowych.

Układ złożony z jednej stożkowej nie ma niezmienników bezwzględnych[1]; geometrycznie znaczy to, że każda stożkowa może być przekształcona na każdą inną.

Jeżeli a_x^2 jest formą trójkową kwadratową, wtedy układ zupełny (prócz spółzmiennika tożsamościowego) składa się z form:

$$f = a_x^2 \quad , \quad F = (abu^2) \quad , \quad A = (abc)^2$$

gdzie $F = 0$ jest równaniem stożkowej w spółrzędnych prostej, A zaś jest wyróżnikiem.

Układ zupełny dwu stożkowych, t. j. dwu form $a_x^2\, a_x'^2$, składa się (prócz z niezmiennika tożsamościowego) z 20 utworów.

---

[1] Nie ma sprzeczności pomiędzy tem twierdzeniem a twierdzeniem § 3, ponieważ rozważane w tym ostatnim niezmienniki zależą nietylko od spółczynników stożkowej ale i od osi spółrzędnych, które pozostają tam zawsze osiami kartezyańskiemi. Stąd przekształcenia zgodne z rozważaniami w § 3 nie są wszystkiemi możliwemi, lecz tylko takiemi, które pozostawiają bez zmiany prostą w nieskończoności na płaszczyźnie.

Połóżmy dla skrócenia:

$$a_1 = \begin{vmatrix} b_2 , & c_2 \\ b_3 , & c_3 \end{vmatrix} , \quad a_2 = \begin{vmatrix} b_3 , & c_3 \\ b_1 , & c_1 \end{vmatrix} , \quad a_3 = \begin{vmatrix} b_1 , & c_1 \\ b_2 , & c_2 \end{vmatrix} ,$$

$$a_1' = \begin{vmatrix} b_2' , & c_2' \\ b_3' , & c_3' \end{vmatrix} , \quad a_2' = \begin{vmatrix} b_3' , & c_3' \\ b_1' , & c_1' \end{vmatrix} , \quad a_3' = \begin{vmatrix} b_1' , & c_1' \\ b_2' , & c_2' \end{vmatrix} ,$$

to utwory te można napisać symbolicznie w sposób następujący:

1) Cztery niezmienniki:

$$A_{111} = (abc)^2 , \quad A_{112} = (aba')^2 , \quad A_{122} = (aa'b')^2 , \quad A_{222} = (a'b'c')^2 .$$

2) Cztery spółzmienniki:

$$f = a_x^2 , \quad f' = a'^2_x ,$$

$$\Delta = (aa'x)\, a_{\alpha'}\, a_\alpha'\, a_x\, a_x' \; ; \quad \Phi_{12} = (aa'x)^2 .$$

3) Cztery przeciwzmienniki:

$$F = (abu)^2 , \quad F' = (a'b'u)^2 ,$$

$$D = (aa'u)\,(ab'c')\,(a'bc)\,(ub'c')\,(ubc) ,$$

$$F_{12} = (aa'u)^2 .$$

4) Ośm form mieszanych:

$$B_1 = (a'bc)\, a_x'\, (ubc) \; ; \quad B_2 = (a'b'c')\, a_x\, (ub'c')$$

$$N = (aa'u)\, a_x\, a_x' \; ; \quad N' = (aa'x)\, u_\alpha\, u_{\alpha'}$$

$$C_1 = (aa'u)\, a_\alpha'\, a_x\, u_\alpha \; ; \quad \Gamma_1 = (aa'x)\, a_{\alpha'}\, u_\alpha\, a_x$$

$$C_2 = (aa'u)\, a_{\alpha'}\, a_x'\, u_{\alpha'} \; ; \quad \Gamma_2 = (aa'x)\, a_\alpha'\, u_\alpha\, a_x' .$$

Ten układ zupełny znalazł Gordan (patrz Math. Ann XIX).

Iloczyn czterech punktów przecięcia utworów f i f' dany jest przez równanie:

$$FF' - F_{12}{}^2 = 0 .$$

Wzajemnie: iloczyn czterech stycznych, wspólnych dwóm stożkowym dany jest przez równanie:

$$ff' - \Phi_{12}{}^2 = 0 .$$

Forma Φ_{12}, przyrównana do zera, przedstawia miejsce punktów, przez które przechodzą dwie pary stycznych do krzywych f i f', tworzące układ harmoniczny; i wzajemnie: $F_{12} = 0$ przedstawia obwiednią prostych, przecinających dwie stożkowe w czterech punktach harmonicznych.

Jeżeli $A_{112} = 0$, wtedy mamy ∞^1 trójkątów biegunowych (samosprzężonych) względem krzywej f, które są opisane około stożkowej f' i wpisane w stożkową f. Własność analogiczna zachodzi w przypadku $A_{112} = 0$.

Równanie $N = 0$, uważane w spółrzędnych u, przedstawia punkt przecięcia biegunowych punktu x względem dwu stożkowych.

Równanie $B_1 = 0$, uważane w spółrzędnych punktowych, jest równaniem prostej, będącej miejscem punktów, których biegunowe względem stożkowej f' są sprzężonemi harmonicznie z prostą u względem stożkowej f.

Równanie $D = 0$ przedstawia trzy boki trójkąta biegunowego, wspólnego stożkowym f i f'; równanie $\Delta = 0$ przedstawia trzy wierzchołki tegoż trójkąta.

Wszystkie stożkowe, spółzmienne ze stożkowemi f i f' (np. $\Phi_{12} = 0$) mają wspólny ten sam trójkąt biegunowy $D = 0$ lub $\Delta = 0$.

Jeżeli niezmienniki A_{112} i A_{122} są równocześnie zerami, wtedy stosunek anharmoniczny czterech punktów przecięcia dwu stożkowych jest równoanharmoniczny na każdej z nich.

Warunkiem na to, aby dwie stożkowe miały w punkcie styczność pojedyńczą, jest:

$$4(A_{111}A_{122}-A_{112}^2)(A_{112}A_{222}-A_{122}^2)-(A_{111}A_{222}-A_{112}A_{122})^2=0.$$

Warunkami na to, aby dwie stożkowe miały w punkcie styczność rzędu 2-go (trzy punkty przecięcia zjednoczone), są:

$$\frac{A_{111}}{A_{112}}=\frac{A_{112}}{A_{122}}=\frac{A_{122}}{A_{222}}.$$

Układ dwu stożkowych ma dwa niezmienniki bezwzględne. Jako takie niezmienniki najprostsze przyjąć można:

$$A_1=\frac{A_{112}^2}{A_{111}A_{122}}, \quad A_2=\frac{A_{122}^2}{A_{112}A_{222}}.$$

Ważnem jest twierdzenie:

Stosunek anharmoniczny α prostych, łączących punkt krzywej f z czterema punktami przecięcia krzywych f i f', otrzymujemy z wzoru:

$$\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}=\frac{(A_1-1)^3A_1A_2^2}{(3A_1A_2-2A_1^2A_2-1)^2};$$

z podobnego wzoru otrzymujemy stosunek anharmoniczny czterech promieni, łączących punkt krzywej f' z czterema punktami przecięcia.

Układ trzech stożkowych zawiera 127 utworów; niezmienników ma 11.

O układzie dwu stożkowych, oprócz cytowanych prac Gordana, wymieniamy jeszcze: Perrin (Société math. de France.

XVIII), Rosanes (Math. Ann. VI), Gerbaldi (Math. Ann. XVII). Dla układu trzech stożkowych mamy prace: Ciamberlini'ego (Giorn. di Batt. XXIV), Gundelfingera (Crelle LXXX), Mertensa (Wien. Ak. XCIII), Gerbaldi'ego (Acc. Torino XXV. 1890), Fischera i Mumeltera (Monatsh. f. Math. VIII. 1897).

ROZDZIAŁ V.

KWADRYKI.

---

§ 1.

Tworzenie rzutowe kwadryk. Biegunowość.

Wyobraźmy sobie dwie wiązki wzajemnie rzutowe o różnych podkładach S, S'; każdemu promieniowi w jednej z nich odpowiada płaszczyzna w drugiej, i wzajemnie; jeżeli promień w jednej porusza się po płaszczyźnie, to odpowiadająca mu płaszczyzna w drugiej obraca się około prostej. Punkty spotkania promieni jednej wiązki z odpowiedniemi płaszczyznami drugiej tworzą to samo miejsce; jest ono powierzchnią, którą nazywamy kwadryką.

Niechaj będą dwa układy płaskie wzajemne, nie nałożone. Płaszczyzny, przechodzące przez punkty jednego z nich i odpowiadające im proste drugiego, obwodzą powierzchnię, która jest także kwadryką.

To tworzenie rzutowe kwadryk znajdujemy u Seydewitza (Archiv Grunerta. IX. 1847) i Steinera (patrz Werke. I, str. 325). Porówn. Salmon-Fiedler (Anal. Geom. des Raumes. I, str. 333).

Inne definicye kwadryk są następujące:

Kwadryka jest miejscem punktów zjednoczonych w dwoistości przestrzennej inwolucyjnej, t. j. w biegunowości przestrzennej.

Kwadryka jest obwiednią płaszczyzn zjednoczonych w biegunowości przestrzennej.

Jakiekolwiek dwa punkty kwadryki są środkami dwóch wiązek wzajemnych, przy pomocy których można utworzyć samą kwadrykę; podobnież, dwie jakiekolwiek płaszczyzny styczne do kwadryki są podkładami dwóch układów płaskich wzajemnych, przy pomocy których możemy utworzyć kwadrykę daną.

Prosta dowolna w przestrzeni, o ile nie leży całkowicie na kwadryce, spotyka ją najwyżej w dwu punktach; przez prostą w przestrzeni, nie leżącą na powierzchni, przechodzą najwyżej dwie płaszczyzny do niej styczne. Dla tego mówimy, że kwadryka jest powierzchnią rzędu drugiego i klasy drugiej.

Jeżeli przez jeden punkt kwadryki przechodzą dwie proste na niej, różne lub zlewające się, albo jeżeli nie przechodzi żadna taka prosta, — to toż samo ma miejsce dla każdego innego punktu kwadryki.

Jeżeli na jednej płaszczyźnie stycznej do kwadryki są dwie proste, jedna prosta, albo niema żadnej prostej, leżącej na powierzchni, to toż samo ma miejsce dla każdej innej płaszczyzny stycznej.

Każda płaszczyzna przecina kwadrykę według stożkowej. Płaszczyzna, dotykająca kwadryki, przecina ją według dwóch prostych rzeczywistych różnych, albo zlewających się albo według prostych urojonych.

Stosownie do tego, czy przez każdy punkt stożkowej przechodzą dwie proste rzeczywiste, należące do niej, albo jedna prosta rzeczywista, albo wreszcie dwie proste urojone, kwadryka jest albo kwadryką prostoliniową (skośną lub o punktach hyperbolicznych), albo stożkiem kwadrykowym (kwadryką o punktach parabolicznych), albo wreszcie kwadryką o punktach eliptycznych.

Jeżeli kwadrykę prostoliniową przecina płaszczyzna w nieskończoności według układu dwu prostych (lub jeżeli dotyka jej płaszczyzna, w nieskończoności) mamy paraboloidę hyperboliczną; jeżeli ta płaszczyzna przecina ją według stożkowej, mamy hyperboloidę jednopowłokową.

Kwadryki prostoliniowe zawierają dwa układy prostych rzeczywistych; proste jednego układu przecinają proste drugiego według prostych punktowych rzutowych. Stąd wynika tworzenie kwadryk przy pomocy dwóch prostych punktowych, nie leżących na jednej płaszczyźnie.

Paraboloida hyperboliczna jest miejscem prostych, łączących pary punktów, odpowiadających sobie w dwu prostych punktowych podobnych, nie leżących na jednej płaszczyźnie.

Paraboloida hyperboliczna dwoma różnemi sposobami jest miejscem prostej, która poruszając się, opiera się na dwóch prostych stałych, nie leżących na jednej płaszczyźnie, i pozostaje wciąż równoległa do płaszczyzny stałej, którą nazywamy płaszczyzną kierowniczą.

Istnieją dwie płaszczyzny kierownicze.

Hyperboloida jednopowłokowa jest miejscem prostej, która poruszając się, opiera się na trzech prostych stałych, nie spotykających się i nie równoległych do jednej płaszczyzny.

Podobnież, kwadryki o punktach eliptycznych, dzielimy na kategorye, według tego, w jaki sposób przecina je płaszczyzna w nieskończoności w przestrzeni. Jeżeli ta płaszczyzna przecina je według stożkowej rzeczywistej, mamy hyperboloidę dwupowłokową: jeżeli według stożkowej urojonej, mamy elipsoidę; jeżeli wreszcie ta płaszczyzna w nieskończoności jest styczna, t. j. przecina powierzchnię według stożkowej zniekształconej na dwie proste, mamy paraboloidę eliptyczną.

Proste stożka kwadrykowego nazywają się jego tworzącemi; przechodzą one wszystkie przez punkt jeden, nazwany wierzchołkiem. Prócz tego punktu, przez który przechodzi nieskończenie wiele prostych na powierzchni, przez każdy inny punkt przechodzi zawsze jedna tylko prosta powierzchni. Jeżeli wierzchołek znajduje się w nieskończoności, otrzymujemy walec; przecięcie walca płaszczyzną prostopadłą do tworzących nazywa się podstawą walca.

Płaszczyzny styczne do kwadryki, poprowadzone przez punkt P, są płaszczyznami stycznemi do stożka kwadrykowego mającego wierzchołek w punkcie P, a którego tworzące są prostemi, łączącemi punkt P z punktami styczności płaszczyzn stycznych. Stożek ten nazywa się stożkiem stycznym do kwadryki; dotyka on kwadryki według krzywej płaskiej, a zatem według stożkowej. Płaszczyzna tej stożkowej nazywa się płaszczyzną biegunową punktu P, punkt P zaś nazywa się biegunem tej płaszczyzny.

Odpowiedniość pomiędzy biegunami a płaszczyznami biegunowemi względem kwadryki jest dwoistością inwolucyjną.

Płaszczyzna biegunowa zawiera proste biegunowe punktu P względem wszystkich stożkowych, według których przecinają kwadrykę płaszczyzny, przechodzące przez punkt P.

Każda prosta, przechodząca przez punkt P, przecina kwadrykę w dwóch punktach Q, Q', a płaszczyznę biegunową w punkcie P' w ten sposób, że grupa $PP'QQ'$ jest harmoniczną.

Jeżeli punkt P porusza się po prostej, to jego płaszczyzna biegunowa obraca się około innej prostej; a jeżeli punkt P porusza się po płaszczyźnie, to płaszczyzna biegunowa obraca się około punktu, który jest biegunem tamtej płaszczyzny.

Dwie proste nazywają się biegunowemi wzajemnemi, jeżeli płaszczyzny biegunowe wszystkich punktów na jednej z nich przechodzą przez drugą.

Jeżeli dwie proste biegunowe wzajemne przecinają się, wtedy ich punkt wspólny należy do powierzchni, a ich płaszczyzna jest płaszczyzną styczną do powierzchni.

Pary prostych biegunowych wzajemnych, leżących na płaszczyźnie stycznej, są prostemi sprzężonemi w inwolucyi; prostemi podwójnemi tej inwolucyi są proste, wzdłuż których płaszczyzna styczna przecina powierzchnię.

Jeżeli dwie proste przecinają się, to przecinają się i ich biegunowe wzajemne.

Dwa punkty nazywają się sprzężonemi, jeżeli jeden z nich znajduje się na płaszczyźnie biegunowej drugiego.

Punkt i prosta nazywają się sprzężonemi, jeżeli prosta leży na płaszczyźnie biegunowej punktu.

Dwie proste nazywają się sprzężonemi, jeżeli jedna z nich znajduje się na płaszczyźnie biegunowej punktu drugiej prostej.

Dwie płaszczyzny nazywają się sprzężonemi, jeżeli jedna z nich przechodzi przez biegun drugiej.

Trójkątem sprzężonym względem kwadryki jest trójkąt, którego każdy wierzchołek jest sprzężony z pozostałemi dwoma wierzchołkami, a więc z bokiem przeciwległym.

Czworościanem sprzężonym (lub także samosprzężonym, samowzajemnym) względem kwadryki jest czworościan, którego każdy wierzchołek jest sprzężony z trzema pozostałemi, a więc ze ścianą przeciwległą.

Każdy trójkąt czworościanu sprzężonego jest trójkątem sprzężonym.

Dwie krawędzie przeciwległe czworościanu sprzężonego są biegunowemi wzajemnemi względem kwadryki.

Jeżeli dwie proste są sprzężonemi, to biegunowa wzajemna jednej z nich przecina drugą prostą, i wzajemnie.

Jeżeli prosta jest sprzężona z dwiema prostemi, przecinającemi się, to jest sprzężona z ich płaszczyzną i z ich punktem wspólnym.

Biegun płaszczyzny w nieskończoności nazywa się środkiem kwadryki, każda prosta, przechodząca przez środek nazywa się *średnicą*, a każda płaszczyzna, przechodząca przez środek, nazywa się *płaszczyzną średnicową*.

Środek jest w odległości skończonej, jeżeli płaszczyzna w nieskończoności nie dotyka kwadryki, a więc w hyperboloidzie jednopowłokowej, w hyperboloidzie dwupowłokowej, w elipsoidzie i w stożku kwadrykowym; te powierzchnie nazywają się *kwadrykami ze środkiem*.

Paraboloida hyperboliczna i eliptyczna nie mają środka w odległości skończonej.

Płaszczyzna średnicowa przecina kwadrykę według stożkowej, której środek przypada w środku kwadryki.

Średnice dzielą się w środku wzajemnie na dwie równe części.

Jeżeli trzy cięciwy dzielą się na dwie równe części w pewnym punkcie i nie leżą na jednej płaszczyźnie, wtedy punkt ten jest środkiem powierzchni

Płaszczyzna średnicowa jest miejscem punktów środkowych wszystkich cięciw (równoległych) z nim sprzężonych.

Punkty styczności płaszczyzn stycznych, poprowadzonych ze środka do kwadryki, są w nieskończoności (rzeczywistemi lub urojonemi); stożek styczny, mający wierzchołek w środku, nazywa się *stożkiem asymptotycznym*.

Istnieją trzy średnice, z których każde dwie są do siebie prostopadłe i takie, że płaszczyzna przechodząca przez dwie z nich jest sprzężona z cięciwami równoległemi do trzeciej (i do nich prostopadłą); te średnice nazywają *głównemi*, a ich płaszczyzny — *płaszczyznami głównemi*.

Płaszczyzny główne są płaszczyznami symetryi dla kwadryk.

W elipsoidzie każda płaszczyzna średnicowa przecina powierzchnię według elipsy; w hyperboloidzie jednopowłokowej dwie płaszczyzny główne przecinają powierzchnię według dwóch hyperbol, mających oś urojoną wspólną, a trzecia płaszczyzna przecina ją według elipsy; w hyperboloidzie dwupowłokowej dwie płaszczyzny główne przecinają powierzchnię według dwóch hyperbol, mających oś rzeczywistą wspólną, a trzecia płaszczyzna przecina ją według elipsy urojonej.

W paraboloidzie nazywamy średnicą każdą prostą, przechodzącą przez punkt styczności powierzchni z płaszczyzną w nieskończoności.

Wszystkie średnice paraboloidy są do siebie równoległe.

Pomiędzy średnicami paraboloidy jest jedna taka, że płaszczyzna styczna w punkcie, w którym ona spotyka powierzchnię, jest do średnicy prostopadłą. Ta średnica nazywa się osią, a punkt, w którym przecina powierzchnię, nazywa się wierzchołkiem.

Przecięcia paraboloidy (eliptycznej lub hyperbolicznej) płaszczyznami równoległemi do osi, są parabolami.

Przecięcia paraboloidy płaszczyznami prostopadłemi do osi są hyperbolami w paraboloidzie hyperbolicznej (skośnej, lub prostoliniowej), elipsami w paraboloidzie eliptycznej.

Kula jest elipsoidą, w której każda płaszczyzna średnicowa jest prostopadła do średnicy, przechodzącej przez jej biegun.

Kule w przestrzeni mają wspólne koło urojone w nieskończoności. Koło to nazywa się absolutem albo granicą przestrzeni; zawiera ono wszystkie punkty kołowe każdej płaszczyzny przestrzeni (patrz Rozdz. IV § 3).

Chasles i P. Serret próbowali rozciągnąć na kwadryki twierdzenia Pascala i Brianchona. Patrz co do tego: Salmon — Fiedler (Anal. Geom. des Raumes. I, art. 144), Klein (Math. Ann. XXII, str. 246 1883).

---

§ 2.

Główne wzory geometryi analitycznej kwadryk.

Kwadryka jest miejscem punktów, które przedstawia równanie wymierne całkowite stopnia 2-go pomiędzy trzema spółrzędnemi punktu przestrzeni. Równanie takie ogólne zawiera dziesięć spółczynników, t. j.: trzy spółczynniki przy kwadratach trzech spółrzędnych, trzy przy iloczynach spółrzędnych, trzy przy wyrazach stopnia 1-go, jeden wreszcie wyraz od spółrzędnych niezależny. Miejsce uważane zależy tedy od dziewięciu stosunków z pomiędzy tych spółczynników do jednego, ostatniego, i dlatego mówimy, że miejsce stopnia 2-go określa dziewięć spółczynników niejednorodnych.

Równanie kwadryki w spółrzędnych jednorodnych x_1, x_2, x_3, x_4 punktu przestrzeni ma postać:

$$f(x) = \sum_{i,j}^{1\ldots 4} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

gdzie suma rozciąga się na wszystkie możliwe kombinacye liczb $i, j = 1, 2, 3, 4$, przy warunku $a_{ij} = a_{ji}$. Kładąc w tem równaniu $x_4 = 1$, otrzymujemy równanie kwadryki w spółrzędnych niejednorodnych.

Jeżeli czworościan podstawowy spółrzędnych jest czworościanem samosprzężonym, wtedy równanie kwadryki sprowadza się do formy kanonicznej

$$\sum_1^4 a_i x_i^2 = 0 .$$

Oznaczmy przez A wyznacznik (wyróżnik):

$$\begin{vmatrix} a_{11}, \cdots a_{14} \\ a_{21}, \cdots a_{24} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{41}, \cdots a_{44} \end{vmatrix},$$

przez A_{ij} dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} w A. Niechaj u_1, u_2, u_3, u_4 oznaczają spółrzędne jednorodne płaszczyzny, której równaniem jest:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0 ;$$

równaniem kwadryki w spółrzędnych płaszczyzny będzie:

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum_{i,j}^{1\dots 4} A_{ij}\, u_i\, u_j = 0\,. \qquad (A_{ij} = A_{ji})$$

Równanie to przedstawia kwadrykę nie jako miejsce punktów lecz jako obwiednią płaszczyzn stycznych. Można je uważać także jako warunek, któremu czynić winny zadość spółczynniki równania płaszczyzny, aby płaszczyzna ta była styczna do kwadryki, danej przez równanie w postaci pierwotnej.

Kwadryka jest określona, jeżeli mamy danych 9 punktów, przez które ma przechodzić lub 9 płaszczyzn, do których ma być styczną.

W poprzedzającym paragrafie podaliśmy własności geometryczne rozmaitych gatunków kwadryk; zobaczmy teraz, w jaki sposób z równania ogólnego (w którem zakładamy spółczynniki rzeczywiste) można odróżnić te rozmaite gatunki.

Połóżmy:

$$B = \begin{vmatrix} a_{11}\,, & a_{12}\,, & a_{13} \\ a_{21}\,, & a_{22}\,, & a_{23} \\ a_{31}\,, & a_{32}\,, & a_{33} \end{vmatrix}$$

i oznaczmy przez B_{ij} dopełnienie algebraiczne elementów a_{ij} w wyznaczniku B.

Jeżeli B nie jest zerem, wtedy kwadryki mają środek; jeżeli $B = 0$, otrzymujemy paraboloidy.

Jeżeli A równa się zeru, i tylko wtedy, mamy stożki. Jeżeli równocześnie $A = 0$, $B = 0$, mamy walce.

Oznaczmy przez (12), (13) ... kąty pomiędzy osiami spółrzędnych x_1 i x_2, x_1 i x_3, ... i połóżmy:

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1\,, & \cos(1,2)\,, & \cos(1,3) \\ \cos(1,2)\,, & 1\,, & \cos(2,3) \\ \cos(1,3)\,, & \cos(2,3)\,, & 1 \end{vmatrix};$$

będzie to liczba dodatnia, zawarta pomiędzy 0 i 1; oznaczmy dalej przez $\Omega_{11}, \Omega_{12} \ldots$ dopełnienia algebraiczne elementów wyznacznika Ω. Połóżmy nadto:

$$C = B_{11} + B_{22} + B_{33} + 2B_{12}\cos(1,2) + 2B_{13}\cos(1,3) + 2B_{23}\cos(2,3)$$

$$D = a_{11}\,\Omega_{11} + a_{22}\,\Omega_{22} + a_{33}\,\Omega_{33} + 2\,a_{12}\,\Omega_{12} + 2a_{13}\Omega_{13} + 2a_{23}\,\Omega_{23}\,.$$

Mamy wtedy twierdzenia następujące:

Stosunki $\frac{A}{\Omega}, \frac{B}{\Omega}, \frac{C}{\Omega}, \frac{D}{\Omega}$ nie zmieniają się przez przekształcenie spółrzędnych kartezyańskich (są niezmiennikami).

Znaki wielkości A, B, C, D nie zależą od wyboru układu spółrzędnych kartezyńskich.

W przypadku układu prostokątnego będzie:

$$C = B_{11} + B_{22} + B_{33} \quad , \quad D = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad , \quad \Omega = 1\,,$$

a zatem:

Wielkości $a_{11} + a_{22} + a_{23}$, $B_{11} + B_{22} + B_{23}$ pozostają co do wartości niezmiennemi przy przechodzeniu od jednego układu prostokątnego do innego.

Równanie

$$\Delta(\varrho) = \Omega\varrho^3 + D\varrho^2 + C\varrho + B = 0$$

ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste i w ogóle różne.

Równanie to można napisać też w postaci:

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} + \varrho & , a_{12} + \varrho\cos(1,2) \; , & a_{13} + \varrho\cos(1,3) \\ a_{21} + \varrho\cos(1,2)\; , & a_{22} + \varrho & , a_{23} + \varrho\cos(2,3) \\ a_{31} + \varrho\cos(1,3)\; , & a_{33} + \varrho\cos(2,3)\; , & a_{33} + \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Klasyfikacya kwadryk polega na znakach wielkości A, B, C, D.

I. B różne od zera: Kwadryki ze środkiem:

1. Elipsoida rzeczywista, $C > 0, BD > 0, A < 0.$
2. Elipsoida urojona, $C > 0, BD > 0, A > 0.$
3. Stożek urojony, $C > 0, BD > 0, A = 0.$
4. Stożek rzeczywisty, $\left.\begin{cases} C \gtreqless 0, BD < 0 \\ C < 0, BD \geqslant 0 \end{cases}\right\} A = 0.$
5. Hiperboloida jednopowłokowa, $\left.\begin{cases} C \gtreqless 0, BD < 0 \\ C < 0, BD \geqslant 0 \end{cases}\right\} A > 0.$
6. Hiperboloida dwupowłokowa. $\left.\begin{cases} C \gtreqless 0, BD < 0 \\ C < 0, BD \geqslant 0 \end{cases}\right\} A < 0.$

II. B równe zeru: Paraboloidy albo walce albo pary płaszczyzn, mianowicie:

7. Paraboloida eliptyczna, $C > 0, D \gtrless 0, A < 0.$
8. Paraboloida hyperboliczna, $C < 0, D \gtrless 0, A > 0.$
9. Walec o podstawie eliptycznej, $C > 0, D \gtrless 0, A = 0.$
10. Walec o podstawie hyperbolicznej, $C < 0, D \gtrless 0, A = 0.$
11. Walec o podstawie parabolicznej, $C = 0, D \gtrless 0, A = 0.$
12. Dwie płaszczyzny urojone z prostą rzeczywistą w odległości skończonej, $C > 0, D \gtrless 0, A = 0, A_{ii} = 0.$ $(i = 1, 2, 3)$
13. Dwie płaszczyzny rzeczywiste, spotykające się według prostej w odległości skończonej, $C < 0, D \gtrless 0, A = 0, A_{ii} = 0.$
14. Dwie płaszczyzny równoległe rzeczywiste różne, urojone albo zlewające się, $C = 0, D \gtrless 0, A = 0, A_{ii} = 0.$

Przy pomocy przekształcenia spółrzędnych Descartes'a, równania różnych kwadryk dają się sprowadzić do następujących form zredukowanych (w spółrzędnych niejednorodnych):

1. Elipsa rzeczywista, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2. Elipsa urojona, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$.

3. Stożek urojony, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$.

4. Stożek rzeczywisty, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

5. Hiperboloida jednopowłok., $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

6. Hiperboloida dwupowłok., $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

7. Paraboloida eliptyczna, $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-x=0$.

8. Paraboloida hyperbolicz., $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-x=0$.

9. Walec eliptyczny, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

10. Walec hyperboliczny, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

11. Walec paraboliczny. $y^2 \pm 2px=0$.

12. Dwie płaszczyzny urojone, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$.

13. Dwie płaszczyzny rzeczywis., $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

14. Dwie płaszczyzny równol., $\frac{x^2}{a^2}\mp 1=0$.

W równaniu każdej paraboloidy wyrazy stopnia 2-go względem zmiennych x_1, x_2, x_3 lub x, y, z tworzą iloczyn dwu czynników liniowych; własność ta jest charakterystyczna dla paraboloidy.

W równaniu walca parabolicznego wyrazy stopnia drugiego względem x_1, x_2, x_3 lub x, y, z tworzą kwadrat zupełny.

Jeżeli x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4 są spółrzędnemi dwu punktow w przestrzeni, to warunkiem na to, aby prosta, je łącząca, była styczna do kwadryki, $f=0$ jest:

$$f(x)f(y)-f^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0,$$

gdzie

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}y_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}y_3+\frac{\partial f}{\partial x_4}y_4\right)$$

$$=a_{11}x_1y_1+\ldots+a_{12}(x_1y_2+x_2y_1)+\ldots$$

Jeżeli wyobraziny sobie, że punkt o spółrzędnych y jest punktem stałym, punkt o spółrzędnych x bieżącym, to równanie poprzednie przedstawia stożek opisany na kwadryce z wierzchołkiem w pukcie (y_1, y_2, y_3, y_4).

Jeżeli $F(u)=0$ jest równaniem kwadryki w spółrzędnych płaszczyznowych, warunkiem na to, aby prosta przecięcia płaszczyzn (u_1, u_2, u_3, u_4), (v_1, v_2, v_3, v_4) była styczną do kwadryki, jest:

$$F(u)F(v)-F^2\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0.$$

Warunek ten jest równoważny następującemu:

$$\begin{vmatrix}
a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & u_1, & v_1\\
a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & u_2, & v_2\\
a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & u_3, & v_3\\
a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & u_4, & v_4\\
u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & 0, & 0\\
v_1, & v_2, & v_3, & v_4, & 0, & 0
\end{vmatrix}=0.$$

Jeżeli w tym wzorze zmienimy wszystkie a na odpowiednie A, wszystkie u na odpowiednie v, otrzymamy inną postać warunku na to, aby prosta $(x)(y)$ dotykała kwadryki.

Płaszczyznę biegunową punktu (y) przedstawia równanie $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, a spółrzędnemi bieguna płaszczyzny $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ są:

$$x_i = A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3 + A_{i4} u_4 , \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Jeżeli punkt (y) należy do kwadryki, to równanie $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ przedstawia płaszczyznę styczną.

Warunkiem na to, aby dwa punkty (x), (y) były sprzężonemi, jest oczywiście $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$; a warunkiem na to, aby dwie płaszczyzny były sprzężonemi, jest $F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$. Te dwa warunki dają się przedstawić w postaci:

$$\begin{vmatrix} A_{11}, \ldots, A_{14}, x_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{41}, \ldots, A_{44}, x_4 \\ y_1, \ldots, y_4, 0 \end{vmatrix} = 0 , \qquad \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{14}, u_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{41}, \ldots, a_{44}, u_4 \\ v_1, \ldots, v_4, 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Warunkami sprzężoności dwóch prostych (u, v), (u', v') są cztery następujące:

$$F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 , \quad F\begin{pmatrix} u \\ v' \end{pmatrix} = 0 , \quad F\begin{pmatrix} u' \\ v \end{pmatrix} = 0 , \quad F\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 .$$

W s p ó l n e m r ó w n a n i e m d w ó c h p ł a s z c z y z n, p r z e s u n i ę t y c h p r z e z p r o s t ą i s t y c z n y c h d o k w a d r y k i, j e s t:

$$F(u)(v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots)^2 - 2F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(u_1 x_1 + \ldots)(v_1 x_1 + \ldots)$$
$$+ F(v)(u_1 x_1 + \ldots)^2 = 0 .$$

Jeżeli f napiszemy zamiast F, u, zamiast x, v zamiast y, otrzymamy równanie (w spółrzędnych płaszczyznowych) dwu punktów spotkania prostej (x, y) z kwadryką. Spółrzędne tych punktów spotkania prostej (xy) z kwadryką są postaci $\frac{mx_i + ny_i}{m+n}$ gdzie $\frac{m}{n}$ ma wartości równe pierwiastkom równania

$$f(x)\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \frac{m}{n} + f(y) = 0.$$

Równanie płaszczyzny średnicowej jest postaci:

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

gdzie a_1, a_2, a_3 są trzy stałe dowolne. Prosta, idąca do punktu w nieskończoności o spółrzędnych $(a_1, a_2, a_3\, 0)$, odpowiada kierunkowi sprzężonemu z tą płaszczyzną średnicową.

Płaszczyzny średnicowe sprzężone z kierunkami trzech osi spółrzędnych x_1, x_2, x_3 wyrażają się równaniami:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0\ , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0\ , \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

Spółrzędnemi środka kwadryki są:

$$\frac{A_{14}}{B}, \frac{A_{21}}{B}, \frac{A_{34}}{B}.$$

Równanie stożka asymptotycznego

$$f(x) - \frac{A}{B} x_4^2 = 0$$

otrzymuje się z równania $f(x)=0$ przez zamianę a_{14} na $a_{14} - \frac{A}{B}$.

Płaszczyzny główne są to płaszczyzny średnicowe, prostopadłe do kierunku z niemi sprzężonego; proste, według których płaszczyzny te przecinają się, nazywają się **średnicami głównemi** lub **osiami**.

Dla otrzymania trzech płaszczyzn głównych, dość w równaniu płaszczyzny średnicowej zamiast a_1, a_2, a_3 położyć wartości proporcyonalne do pierwiastków kwadratowych trzech minorów głównych wyznacznika $\Delta(\varrho)$, jeżeli za ϱ bierzemy każdy z trzech pierwiastków (rzeczywistych) równania $\Delta(\varrho) = 0$. Wzory, naturalnie, upraszczają się znacznie w przypadku osi prostokątnych.

Kwadryką obrotową nazywamy taką, w której wszystkie płaszczyzny, przechodzące przez oś, są płaszczyznami głównemi. **Kula** jest kwadryką, w której każda płaszczyzna średnicowa jest główną.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby kwadryka była obrotową jest, by równanie $\Delta(\varrho)=0$ miało dwa pierwiastki równe.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to aby kwadryka była kulą, jest by równanie $\Delta(\varrho) = 0$ miało jeden pierwiastek trójkrotny.

W spółrzędnych prostokątnych warunki dla kwadryki obrotowej wyrażają się dwoma z pomiędzy związków:

$$\frac{B_{23}}{a_{23}} = \frac{B_{31}}{a_{31}} = \frac{B_{12}}{a_{12}} = \frac{B_{22}-B_{33}}{a_{22}-a_{23}} = \frac{B_{33}-B_{11}}{a_{33}-a_{11}} = \frac{B_{11}-B_{22}}{a_{11}-a_{22}} .$$

W spółrzędnych prostokątnych warunkami dla kuli są:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \quad , \quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0 .$$

W paraboloidzie mamy **dwie** tylko płaszczyzny główne w odległości skończonej, przecinające kwadrykę według dwóch parabol.

W spółrzędnych prostokątnych równania osi paraboloidy (t. j. przecięcia dwu płaszczyzn głównych) są następujące:

$$\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}}{\sqrt{B_{11}}} = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}}{\sqrt{B_{22}}} = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_3}}{\sqrt{B_{33}}}.$$

Równanie kwadryki ze środkiem w odniesieniu do środka (w spółrzędnych x, y, z niejednorodnych) jest typu:

$$a'_{11} x^2 + a''_{22} y^2 + a'_{33} z^2 + 2a'_{12} xy + 2a'_{13} xz + 2a'_{23} yz + \frac{A}{B} = 0$$

Równanie kwadryki ze środkiem, odniesione do trójki średnic sprzężonych, jest postaci:

$$a'_{11} x^2 + a''_{22} y^2 + a''_{33} z^2 + \frac{A}{B} = 0.$$

Jeżeli te średnice sprzężone są osiami, to wielkości

$$\sqrt{-\frac{A}{Ba''_{11}}}, \quad \sqrt{-\frac{A}{Ba''_{22}}}, \quad \sqrt{-\frac{A}{Ba''_{33}}}$$

nazywają się długościami półosi kwadryki. Otrzymujemy je, kładąc zamiast $-a''_{11}$, $-a''_{22}$, $-a''_{33}$ trzy pierwiastki (rzeczywiste) równania $\Delta(\varrho) = 0$.

W elipsoidzie rzeczywistej trzy osi przecinają powierzchnię w punktach rzeczywistych, a odległości tych punktów od środka są właśnie półosiami elipsoidy. Te trzy półosi są w ogóle różne; w elipsoidzie obrotowej dwie półosi są równe; w kuli wszystkie trzy półosi są równe.

W hyperboloidzie jednopowłokowej tylko dwie osi spotykają powierzchnię w punktach rzeczywistych, a odległości tych punktów od środka są właśnie długościami półosi.

W hyperboloidzie dwupowłokowej tylko jedna z osi przecina powierzchnię w punktach rzeczywistych, a odległość tych punktów od środka stanowi długość półosi powierzchni.

Osi, przecinające hyperboloidy w punktach rzeczywistych, nazywają się poprzecznemi.

Płaszczyzna $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$ przecina kwadrykę według elipsy, hyperboli albo paraboli, stosownie do tego, czy wielkość

$$G=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & u_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & u_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & u_3 \\ u_1, & u_2, & u_3, & 0 \end{vmatrix}$$

jest ujemna, dodatnia lub równa zeru. Dwie płaszczyzny równoległe przecinają kwadrykę według stożkowych tego samego gatunku.

Przez każdą oś kwadryki przechodzą dwie płaszczyzny (rzeczywiste lub urojone) takie, że one i płaszczyzny do nich równoległe przecinają kwadrykę według kół; te płaszczyzny nazywają się płaszczyznami kołowemi, dają one przecięcia lub przekroje kołowe kwadryki.

Dwie płaszczyzny kołowe, przechodzące przez każdą oś, są w położeniu symetrycznem względem każdej płaszczyzny głównej.

Z sześciu układów płaszczyzn kołowych dwa tylko są rzeczywistemi.

W każdym układzie płaszczyzn kołowych są zawsze dwie płaszczyzny styczne; ich punkty styczności nazywają się punktami kołowemi (umbilikami). Z dwunastu punktów kołowych jest rzeczywistych najwyżej cztery. Punkty kołowe leżą trójkami na ośmu prostych urojonych kwadryki. Punkty kołowe kwadryki ze środkiem leżą czwórkami na trzech płaszczyznach głównych.

Dwa przekroje kołowe, należące do każdego z dwu układów płaszczyzn kołowych, odpowiadających tej samej osi kwadryki, znajdują się zawsze na jednej kuli.

W kwadrykach obrotowych dwa układy płaszczyzn kołowych rzeczywistych sprowadzają się do układu równoleżników.

Warunek analityczny na to, aby płaszczyzna była kołową dla kwadryki, wyrażają równania:

$$\frac{G_{11}}{H_{11}} = \frac{G_{22}}{H_{22}} = \frac{G_{33}}{H_{33}} = \frac{G_{23}}{H_{23}} = \frac{G_{31}}{H_{31}} = \frac{G_{12}}{H_{12}};$$

tu G_{ij} są dopełnieniami algebraicznemi elementów wyznacznika G (patrz wyżej), H_{ij}—analogicznemi dopełnieniami algebraicznemi wyznacznika H, który przedstawia się w ten sposób:

$$H = \begin{vmatrix} 1, & \cos(1,2), & \cos(1,3), & u_1 \\ \cos(2,1), & 1 & \cos(2,3), & u_2 \\ \cos(3,1), & \cos(3,2), & 1, & u_3 \\ u_1, & u_2, & u_3, & 0 \end{vmatrix}$$

gdzie cos (1,2), cos (13),... są dostawami kątów pomiędzy osiami spółrzędnych.

W elipsie rzeczywistej trójosiowej (o trzech osiach nierównych)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \qquad (a > b > c),$$

płaszczyzny kołowe rzeczywiste przechodzą przez oś długości średniej (t. j. przez oś b) Spółrzędne czterech punktów kołowych rzeczywistych są:

$$\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\quad 0,\quad \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

W hyperboloidzie jednopowłokowej dwa układy płaszczyzn kołowych rzeczywistych są równoległe do większej z osi poprzecznych, a punkty kołowe są wszystkie urojone.

W hyperboloidzie dwupowłokowej dwa układy płaszczyzn kołowych rzeczywistych są równoległe do osi niepoprzecznej dłuższej a cztery punkty kołowe są rzeczywistemi. Jeżeli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ jest równaniem hyperboloidy dwupowłokowej i $b > c$, to spółrzędnemi czterech punktów kołowych rzeczywistych są:

$$\pm a \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}}, \quad 0, \quad \pm c \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Stożek ma dwa układy płaszczyzn kołowych rzeczywistych, które są zarazem układowi płaszczyzn kołowych dla hyperboloidy jedno- albo dwupowłokowej, dla których stożek dany jest stożkiem asymptotycznym.

W paraboloidzie eliptycznej są dwa układy płaszczyzn kołowych eliptycznych; są one równoległe do osi większych przekrojów prostopadłych do osi; dwa punkty kołowe są rzeczywiste i mają spółrzędne:

$$\frac{1}{4}(b^2-c^2), \quad 0, \quad \pm\frac{1}{2}\sqrt{c^2(b^2-c^2)},$$

jeżeli $\frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{c^2} - x = 0$. $(b > c)$ jest równaniem paraboloidy. Płaszczyzny kołowe rzeczywiste paraboloidy eliptycznej są równoległe do dwu płaszczyzn $c^2x^2 - (b^2 - c^2)z^2 = 0$.

W paraboloidzie hyperbolicznej dwa układy płaszczyzn kołowych rzeczywistych są równoległe do dwu płaszczyzn kierowniczych (patrz § 1); koła zniekształcają się tu na prostą w skończoności i na prostą w nieskończoności.

Jeżeli $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - x = 0$ jest równaniem paraboloidy, to dwa układy płaszczyzn kołowych są równoległe do dwu płaszczyzn $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$, $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$

§ 3.

Własności ogniskowe kwadryk.

Miejsce punktów takich, że stożki opisane z nich na kwadryce ze środkiem są stożkami obrotowemi, składa się z trzech stożkowych, położonych na trzech płaszczyznach głównych kwadryki; każda stożkowa ma te same ogniska, co przekrój kwadryki, otrzymamy przez przecięcie kwadryki płaszczyzną główną. Te stożkowe nazywają się ogniskowemi, a ich punkty są ogniskami kwadryki ze środkiem.

Stożkowe ogniskowe przechodzą przez cztery punkty kołowe (umbiliki) własnej płaszczyzny.

Elipsoida albo hyperboloida ma w ogóle jednę elipsę ogniskową (rzeczywistą) i jednę hyperbolę ogniskową; te dwie krzywe leżą na płaszczyznach, przechodzących przez dłuższą oś poprzeczną.

Dwa ogniska stożkowej ogniskowej są wierzchołkami innej stożkowej ogniskowej

Stożkowe ogniskowe dla stożków kwadrykowych redukują sią do trzech par prostych; tylko dwie z tych prostych są rzeczywistemi. Dla każdego stożka kwadrykowego istnieją dwie proste rzeczywiste (proste ogniskowe); przez każdą z nich przechodzi nieskończenie wiele par płaszczyzn sprzężonych wzajemnie prostopadłych Jeżeli stożek jest obrotowym, to dwie proste ogniskowe zlewają się z osią obrotu.

Stożkowa, będąca przecięciem stożka płaszczyzną prostopadłą do prostej ogniskowej, ma ognisko w tym punkcie przecięcia prostej z płaszczyzną.

Proste ogniskowe stożka asymptotycznego do kwadryki ze środkiem są asymptotami stożkowych ogniskowych kwadryki.

W paraboloidzie miejsce punktów takich, że stożek, na niej opisany z tych punktów, jest stożkiem obrotowym, składa się z dwóch parabol (ogniskowych), położonych na dwóch płaszczyznach głównych i mających tę samą oś co paraboloida, rozwartości zwrócone w zwrotach przeciwnych, a ogniska te same co parabole, otrzymane z przecięcia paraboloidy dwiema płaszczyznami głównemi.

Parabole ogniskowe w paraboloidzie są tak położone, że ognisko jednej jest wierzchołkiem drugiej.

Parametry dwóch parabol ogniskowych są sobie równe, równe zarazem różnicy parametrów parabol, które powstają z przecięcia paraboloidy płaszczyznami głównemi

1. Dla elipsoidy rzeczywistej $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ o półosiach $a>b>c$, trzema stożkowemi ogniskowemi są:

$$x=0,\quad \frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2-c^2}=-1,\quad \text{(elipsa urojona)},$$

$$y=0,\quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1,\quad \text{(hyperbola)},$$

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1,\quad \text{(elipsa rzeczywista)}$$

2. Dla elipsoidy urojonej $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ $(a>b>c)$ stożkowemi ogniskowemi są:

$$x=0,\quad \frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2-c^2}=1 \quad \text{(elipsa rzeczywista)},$$

$$y=0,\quad \frac{z^2}{b^2-c^2}-\frac{x^2}{a^2-b^2}=1 \quad \text{(hyperbola)},$$

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}==1 \quad \text{(elipsa urojona)}.$$

3. Dla hyperboloidy jednopowłokowej $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b)$ stożkowemi ogniskowemi są:

$$x=0,\quad \frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2+c^2}=-1 \quad \text{(elipsa urojona)},$$

$$y=0,\quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2+c^2}=1 \quad \text{(hyperbola)},$$

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}=1 \quad \text{(elipsa rzeczywista)}.$$

4. Dla hyperboloidy dwupowłokowej $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $(b>c)$ stożkowemi ogniskowemi są:

$$x=0,\quad \frac{y^3}{a^2+b^2}\cdot\frac{z^2}{a^2+c^2}=-1 \quad \text{(elipsa urojona)},$$

$$y=0,\quad \frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{z^2}{b^2-c^2}=1 \quad \text{(elipsa rzeczywista)},$$

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2+c^2}-\frac{y^2}{b^2-c^2}=1 \quad \text{(hyperbola)}.$$

5. Dla stożka rzeczywistego $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,(a>b)$ dwiema prostemi ogniskowemi rzeczywistemi są:

$$y=0,\quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2+c^2}=0.$$

6. Dla paraboloidy eliptycznej albo hyperbolicznej $py^2 + qz^2 - x = 0$ $(p \lesseqgtr q)$, gdzie p i q są jednego znaku dla paraboloidy eliptycznej, znaków przeciwnych dla hyperbolicznej, dwiema parabolami ogniskowemi są:

$$y = 0, \quad z^2 = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\left(x - \frac{1}{4p}\right),$$

$$x = 0, \quad y^2 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\left(x - \frac{1}{4q}\right).$$

Osi obrotu stożków, opisanych na kwadryce przez ogniska, są stycznemi do stożkowych ogniskowych.

Styczne do stożkowych ogniskowych są prostemi, przez które przechodzi nieskończenie wiele par płaszczyzn sprzężonych względem kwadryki i wzajemnie prostopadłych.

Płaszczyzna prostopadła do stycznej stożkowej ogniskowej w punkcie styczności przecina kwadrykę według stożkowej, której ogniskiem jest ten punkt, a kierownicą prosta prostopadła do płaszczyzny stożkowej ogniskowej.

Jeżeli z jakiegokolwiek punktu poprowadzimy prostą prostopadłą do jego płaszczyzny biegunowej względem kwadryki, to przecięcie prostej i płaszczyzny z płaszczyzną główną są biegunem i biegunową względem stożkowej ogniskowej.

Przecięcia płaszczyzną główną płaszczyzny stycznej i prostej normalnej do kwadryki są biegunową i biegunem względem stożkowej ogniskowej.

Iloczyn odległości płaszczyzny stycznej do kwadryki od dwu punktów stożkowej ogniskowej, w której styczne są równoległe do płaszczyzny, jest stały.

Jeżeli $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c)$ jest równaniem danej elipsoidy, to równanie:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{k^2}{c^2 \quad \lambda} = 1,$$

gdzie λ jest parametrem dowolnym, przedstawia kwadrykę spółogniskową z elipsoidą daną, t. j. mającą wspólne z nią stożkowe ogniskowe.

Ponieważ λ możemy zmieniać nieskończenie wielu sposobami, mamy przeto ∞^1 kwadryk spółogniskowych z daną.

Przez każdy punkt przestrzeni przechodzą trzy takie kwadryki, mianowicie: elipsoida, hyperboloida jednopowłokowa i hyperboloida dwupowłokowa, które są do siebie prostopadłemi w punkcie wspólnym.

Trzy wartości parametru λ, odpowiadające trzem kwadrykom spółogniskowym, przechodzącym przez punkt dany, można uważać za spółrzędne punktu; spółrzędne takie nazywamy eliptycznemi.

---

§ 4.

Własności metryczne kwadryk. Kwadryki równoboczne.

W elipsoidzie iloczyn odcinka normalnej, zawartego pomiędzy powierzchnią elipsoidy a płaszczyzną główną, przez odległość środka od płaszczyzny stycznej jest stały; równa się on kwadratowi półosi, prostopadłej do płaszczyzny stycznej.

W elipsoidzie suma kwadratów trzech półśrednic sprzężonych jest stała; objętość równoległościanu, zbudowanego na trzech półśrednicach sprzężonych, jest stała; suma kwadratów rzutów trzech półśrednic sprzężonych na prostą albo na płaszczyznę jest stała.

W paraboloidzie eliptycznej suma trzech parametrów głównych dwóch jakichkolwiek przecięć sprzężonych i średnicowych jest stała; w paraboloidzie hyperbolicznej stałą jest różnica tych dwóch parametrów.

W paraboloidzie eliptycznej miejscem wierzchołków czworościanów trójprostokątnych opisanych jest płaszczyzna prostopadła do osi, odległa od wierzchołka na $\frac{b^2+c^2}{4}$, jeżeli $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-x=0$, jest jak, zwykle równaniem paraboloidy.

Dla elipsoidy miejscem takich czworościanów jest spółsrodkowa z elipsoidą kula o promieniu $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, gdzie a, b, c są półosiami elipsoidy. Dla każdej innej kwadryki o środku miejscem takiem jest zawsze kula (Monge).

Jeżeli w hyperboloidzie jednopowłokowej płaszczyzna prostopadła do prostej na hyperboloidzie przecina powierzchnię według hyperboli równobocznej, wtedy wszystkie inne podobne płaszczyzny przecinają także hyperboloidę według hyperbol równobocznych.Taka hyperboloida nazywa się równoboczną.

Jeżeli w hyperboloidzie jednopowłokowej, prostej leżącej na powierzchni,odpowiadają dwie inne prostopadłe do niej i do siebie, także leżące na hyperboloidzie i do tego samego układu należące, wtedy to samo będzie miało miejsce dla każdej innej prostej—i sama hyperboloida będzie hyperboloidą równoboczną.

Jeżeli równaniem hyperboloidy jest, jak zwykle:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

wtedy warunkiem na to, aby była równoboczną, jest:

$$D=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0.$$

Jeżeli w stożku kwadrykowym przekrojem prostopadłym do tworzących jest hyperbola równoboczna, to toż samo będzie miało miejsce dla wszystkich przecięć prostopadłych do tworzących; stożek nazywa się wtedy równobocznym.

W stożku równobocznym każdej tworzącej odpowiadają dwie tworzące prostopadłe do siebie i do pierwszej.

Stożek jest równobocznym wtedy, gdy $D=0$.

Jeżeli w hyperboloidzie dwupowłokowej przekrój prostopadły do asymptoty (tworzącej stożka asymptotycznego) jest hyperbolą równoboczną, to tożsamo ma miejsce dla wszystkich przecięć podobnych. Hyperboloida dwupowłokowa nazywa się wtedy równoboczną.

W hyperboloidzie dwupowłokowej równobocznej, każdej asymptocie odpowiadają dwie inne prostopadłe do siebie i do pierwszej.

Hyperboloida dwupowłokowa jest równoboczna wtedy, gdy $D=0$.

W paraboloidzie eliptycznej nie może być $D=0$.

Paraboloida hyperboliczna jest równoboczną wtedy, gdy jej dwie płaszczyzny kierownicze są prostopadłemi do siebie. Aby hyperboloida hyperboliczna była równoboczną, trzeba aby było $D=0$. W paraboloidzie hyperbolicznej każde przecięcie prostopadłe do osi jest hyperbolą równoboczną.

---

§ 5.

Pęki i sieci kwadryk.

Niechaj będą równania dwóch kwadryk $f=0$, $f'=0$, wyrażone w spółrzędnych punktowych i płaszczyznowych; układ kwadryk, przedstawionych przez równanie $f+\lambda f'=0$, nazywa się odpowiednio pękiem albo pasmem kwadryk.

Wszystkie powierzchnie pęku przecinają się według krzywej skośnej rzędu 4-go (zwanej krzywą podstawową).

Płaszczyzna przecina wszystkie powierzchnie pęku kwadryk według pęku stożkowych, prosta przecina je według pęku grup dwu punktów, t. j. według par punktów, będących w inwolucyi.

Przez jeden punkt w przestrzeni przechodzi wogólności jedna tylko powierzchnia pęku; istnieją dwie kwadryki pęku, styczne do prostej danej; istnieją trzy kwadryki pęku, styczne do płaszczyzny danej.

Płaszczyzny biegunowe punktu P względem wszystkich kwadryk pęku przechodzą przez prostą stałą p, tworzą przeto pęk płaszczyzn. Prosta p nazywa się sprzężoną z punktem P.

Pęki płaszczyzn biegunowych, odnoszących się do dwóch punktów P, P' są wzajemnie rzutowemi.

Proste, wzajemne z prostą daną względem wszystkich kwadryk pęku, są tworzącemi hyperboloidy, w której drugi układ tworzących stanowią proste sprzężone ze wszystkiemi punktami prostej danej.

Bieguny płaszczyzny względem wszystkich kwadryk pęku znajdują się na jednej krzywej sześciennej skośnej, a stąd: Środki wszystkich kwadryk pęku znajdują się na jednej krzywej sześciennej skośnej.

W pęku kwadryk mamy wogóle trzy paraboloidy, w których jedna przynajmniej jest rzeczywistą.

W pęku kwadryk istnieją w ogólności cztery stożki.

Wszystkie kwadryki pęku mają wspólny jeden czworościan biegunowy (samosprzężony), którego wierzchołki są wierzchołkami czterech stożków, należących do pęku.

Niechaj $f=0$, $f'=0$, $f''=0$ będą równania trzech kwadryk, nie należących do jednego pęku; wszystkie powierzchnie przedstawione przez równanie $f+\lambda f'+\mu f''=0$, gdzie λ i μ są parametry dowolne, stanowią sieć kwadryk.

Wszystkie kwadryki sieci mają ośm punktów wspólnych (punkty podstawowe sieci).

Pomiędzy kwadrykami, należącemi do jednej sieci, jest nieskończenie wiele kwadryk, stycznych do jednej płaszczyzny; punkty styczności znajdują się na krzywej ogólnej rzędu 3-go.

Wszystkie kwadryki, przechodzące przez siedm punktów przestrzeni, przechodzą jeszcze przez jeden i ten sam punkt ósmy.

Ośm punktów podstawowych sieci kwadryk mają tę własność, że krzywa sześcienna skośna, określona przez sześć z pomiędzy tych punktów ma, jako sieczną, prostą, łączącą dwa punkty pozostałe.

Płaszczyzny biegunowe punktu P względem wszystkich kwadryk sieci przechodzą przez jeden punkt (sprzężony z punktem P).

Miejscem bieguna płaszczyzny względem wszystkich kwadryk sieci jest powierzchnia ogólna rzędu 3-go, na której znajdują się także punkty sprzężone względem sieci ze wszystkiemi punktami płaszczyzny.

Pomiędzy powierzchniami sieci znajduje się nieskończenie wiele stożków; miejscem ich wierzchołków jest krzywa rzędu 6-go. Na tej krzywej znajduje się nieskończenie wiele punktów, których płaszczyzny biegunowe względem powierzchni sieci przechodzą wszystkie przez jednę prostą.

Dawniejsi geometrowie nie mieli klasyfikacyi systematycznej kwadryk; pierwszą taką klasyfikacyę zawdzięczamy Eulerowi (Introductio in analysin inf. 1748). Teorya tych powierzchni uczyniła znaczne postępy w pierwszej połowie wieku 19-go, dzięki pracom Monge'a, Hachette'a, Lacroix'a, Bineta, Leroy'a, Ponceleta, Chasles'a. Stożkowe ogniskowe odkrył Dupin (Corr. de l'Ecole etc., II) i badał Chasles (Aperç. hist. Nota 31), Z punktu widzenia geometryi rzutowej zasadniczemi dla teoryi kwadryk były rozprawy specyalne Hessego (Crelle XVIII, XX, XXVI i t. d.), Seydewitza (Archiv Grunerta VII, VIII, IX, X), Sturma

(Crelle LXX, IC i t. d.), a dalej prace v. Staudta, Reyego (Patrz „Geometrie der Lage“) i innych. Obszerną listę prac o kwadrykach znaleść można w dziele G. Loria („Il passato e il presente delle teorie geometriche, wyd. 1-e, Turyn 1887, przekład polski, Warszawa 1889, wyd. 2-ie, Turyn 1897), do którego też odsyłamy czytelnika po wskazówki bibliograficzne. Ze stanowiska geometryi analitycznej pisali o kwadrykach Salmon-Fiedler, Hesse, Baltzer, D'Ovidio, Clebsch-Lindemann (drugi tom „Geometryi“); z punktu widzenia syntetycznego Schröter (Lipsk 1880). Geometryę wykreślną powierzchni stopnia 2-go traktuje Fiedler w dziele: „Darstellende Geometrie“. Na końcu dzieła D'Ovidio znajdujemy pewną liczbę dokładnych wskazówek o odkrywcach niektórych twierdzeń głównych, dotyczących kwadryk. O własnościach ogniskowych kwadryk traktuje nowe dzieło Staudego: „Die Focaleigenschaften der Flächen, 2-er Ordnung“ (Lipsk 1896). Niewiele mamy tu do zanotowania badań ze stanowiska teoryi form czwórkowych kwadratowych. Wymieniamy pracę Mertensa (Wien. Ber. XCVIII), w której znajdujemy układ zupełny form niezmienniczych kwadryki, sprowadzony do 20 utworów, oraz niektóre wskazówki o układzie zupełnym dwu kwadryk. W innej pracy (tamże 1890) Mertens rozważa układ trzech kwadryk, sprowadzony do 47 utworów (por. Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes I, Rozdz. 9).

ROZDZIAŁ VI.

TEORYA OGÓLNA KRZYWYCH PŁASKICH ALGEBRAICZNYCH.

---

§ 1.

Rzeczy ogólne. Punkty osobliwe Wzory Plückera. Wyróżnik.

Miejscem punktów, które przedstawia analitycznie równanie algebraiczne stopnia n-tego pomiędzy dwiema spółrzędnemi kartezyańskiemi, albo pomiędzy trzema spółrzędnemi jodnorodnemi punktu płaszczyzny, jest krzywa płaska jako miejsce punktów lub wprost krzywa płaska rzędu n-tego. Miejscem rzędu pierwszego jest prosta. Styczna do krzywej płaskiej jest granicą położenia prostej, łączącej dwa punkty nieskończenie blizkie krzywej.

Wzajemnie: Obwiednią prostych, przedstawionych przez równanie algebraiczne rzędu n-go pomiędzy spółrzędnemi prostej na płaszczyźnie, jest krzywa — obwiednia klasy n-tej. Obwiednią klasy pierwszej jest punkt.

Punktem krzywej obwiedniej jest położenie graniczne przecięcia dwu stycznych nieskończenie blizkich. Krzywe albo obwiednie, których równania nie rozpadają się na czynniki całkowite, nazywają się pojedyńczemi lub nierozkładalnemi.

Prosta płaszczyzny przecina krzywą płaską rzędu n-tego zawsze w n punktach (rzeczywistych lub urojonych).

Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi zawsze n prostych (rzeczywistych lub urojonych), stycznych do krzywej obwiedniej klasy n-tej.

Dwie krzywe rzędów n_1, n_2 mają wogóle $n_1 n_2$ punktów wspólnych (rzeczywistych lub urojonych); dwie obwiednie klas n_1, n_2 mają $n_1 n_2$ stycznych wspólnych (rzeczywistych lub urojonych).

Jeżeli obierzemy dowolnie $\frac{n(n+3)}{2}$ punktów na płaszczyźnie, to przez nie przechodzić będzie jedna i tylko jedna krzywa rzędu n-tego. Istnieje i odpowiednie twierdzenie wzajemne.

Punkt krzywej nazywa się r-krotnym lub punktem o wielokrotności r-tej, jeżeli przezeń krzywa przechodzi r razy, t. j. jeżeli ma w tym punkcie r stycznych; jeżeli te wszystkie styczne są różnemi, punkt r-krotny nazywa się zwyczajnym. Styczna nazywa się r-krotną, jeżeli dotyka krzywej obwiedniej r razy, t. j. jeżeli ma r punktów styczności; jeżeli te punkty są różnemi, styczna r-krotna jest zwyczajną.

Jeżeli krzywa rzędu n-tego ma punkt n-krotny, to jest ona tylko zbiorem n prostych, przez ten punkt przechodzących.

Krzywa pojedyńcza rzędu n-tego może mieć tylko, prócz punktu n—1-krotnego, jeden punkt podwójny.

Krzywa pojedyńcza rzędu n-tego może mieć najwyżej $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punktów podwójnych.

Jeżeli krzywa pojedyńcza rzędu n-tego ma punkty wielokrotne zwyczajne rzędu wielokrotności $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$, wtedy:

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{r_i(r_i-1)}{2} \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Tym wszystkim własnościom odpowiadają własności wzajemne.

Wszyskie krzywe w liczbie nieskończonej, przechodzące przez $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ punktów danych, przechodzą też przez $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ innych punktów, przez pierwsze określonych.

Jeżeli z pomiędzy n^2 punktów, dwóm krzywym rzędu n-tego wspólnych, nm punktów $(m<n)$ leży na krzywej rzędu m-tego, to pozostałe w liczbie $n(n-m)$ punkty leżą na krzywej rzędu $n-m$.

Największa liczba punktów, jaką możemy wziąć dowolnie na krzywej rzędu m, aby przez nie przesunąć krzywą pojedyńczą rzędu $n>m$, wynosi:

$$nm - \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)$$ (Tw. Jacobi'ego, Crelle XV)

Wszystkie krzywe rzędu n, opisane przez $nm-h$ punktów krzywej rzędu m i przez $n(n-m)-h$ punktów krzywej rzędu $n-m$, przecinają pierwszą krzywą jeszcze w innych h punktach stałych, a drugą w innych h' punktach stałych (Tw. Plückera „Algebr. Curv.“ str. 11).

Każda krzywa rzędu n-tego, przechodząca przez $nm-\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ punktów innej krzywej rzędu $m<n$, przecina ją jeszcze w innych $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ punktach stałych.

Każda krzywa rzędu n-tego, opisana przez $mm'-\frac{1}{2}(m+m'-n-1)(m+m'-n-2)$ punktów przecięcia dwu krzywych rzędów m i m' (m i m' są niewiększe od n), przechodzi też przez wszystkie inne punkty, wspólne tym krzywym (Tw. Cayley'a, Cambr. Math. Journ. III, 1843).

Jeżeli w punktach, w których prosta przecina krzywą rzędu n-tego, poprowadzimy do krzywej styczne, to styczne te przetną krzywą w innych $n(n-2)$ punktach, położonych na krzywej rzędu $n-2$ (Poncelet).

Wielkiej ważności dla t. z. geometryi na krzywej algebraicznej jest następujące twierdzenie Noethera:

Niechaj będą dwie krzywe $\varphi=0$, $\psi=0$; niechaj jeden z ich punktów przecięcia P_i będzie q_i-krotnym dla krzywej φ, r_i-krotnym dla krzywej ψ, i niechaj $q_i \leqq r_i$; niechaj dalej $f=0$ będzie krzywą, przechodzącą przez każdy z punktów przecięcia krzywych φ i ψ, mającą w P_i punkt wielokrotny rzędu q_i+r_i-1, wtedy równanie tej krzywej można zawsze przedstawić w postaci

$$f=A\varphi+B\psi=0,$$

gdzie $A=0$, $B=0$ przedstawiają dwie inne krzywe odpowiednich rzędów.

Aby wszakże można było przedstawić f w tej postaci, nie jest koniecznem, by krzywa $f=0$ miała w P_i punkt wielokrotny rzędu q_i+r_i-1; jest tylko koniecznem, aby rząd wielokrotności był co najmniej równy q_i (t. j. mniejszemu z dwu rzędów); wtedy atoli pomiędzy spółczynnikami równania $f=0$ zachodzić muszą związki liniowe.

Co do tego twierdzenia patrz: Noether (Math. Ann. VI, 352), Halphen (Bull. de la Société math. V), Bacharach (Math. Ann. XXVI), Voss (tamże XXVII), Cayley (tamże XXX), Stickelberger (tamże XXX), Noether (tamże XXX), Zeuthen (tamże XXXI), Guccia (Compt. rend. 1888) i t. d. Patrz także „Geometryę“ Clebscha-Lindemanna.

Punkt wielokrotny rzędu k można uważać za zjednoczenie $\frac{k(k-1)}{2}$ punktów podwójnych, a styczną wielokrotną rzędu k za zjednoczenie $\frac{k(k-1)}{2}$ stycznych podwójnych.

Styczna do krzywej rzędu n-tego ma z krzywą, prócz punktu styczności, jeszcze $n-2$ punktów wspólnych; z punktu na krzywej klasy n-tej można, prócz stycznej w tym punkcie, poprowadzić jeszcze $n-2$ stycznych.

W punkcie podwójnym dwie styczne mogą być: rzeczywistemi różnemi, urojonemi albo zlewającemi się. W drugim przypadku mamy punkt podwójny zwany odosobnionym, w przypadku trzecim mamy ostrze lub inaczej punkt zwrotu.

Styczna w ostrzu liczy się za trzy styczne, które z ostrza można poprowadzić do krzywej.

Ostrzu odpowiada wzajemnie tak zwana styczna przegięcia; jest to styczna do krzywej, mająca jeszcze $n-3$ punktów spotkania z krzywą, albo inaczej styczna, której punkt styczności można uważać za zjednoczenie trzech punktów nieskończenie blizkich. Taki punkt styczności nazywa się punktem przegięcia krzywej. Styczną przegięcia można uważać za styczną podwójną, której punkty styczności zlewają się; uważanie to jest właściwem wszakże tylko wtedy, gdy krzywą wyobrażamy sobie jako obwiednią stycznych.

Punkty wielokrotne i styczne wielokrotne nazywamy ogólnie punktami i stycznemi osobliwemi. Należy wszakże nadmienić, że punkt podwójny albo ostrze należy uważać za punkty osobliwe wtedy tylko, gdy krzywą rozpatrujemy jako miejsce punktów, a nie, gdy wyobrażamy ją sobie za obwiednią stycznych, albowiem w tym ostatnim przypadku każda obwiednia posiada zawsze pewną liczbę punktów podwójnych. Podobnież styczna podwójna lub styczna przegięcia mogą być uważane za styczne osobliwe wtedy tylko, gdy krzywe rozpatrujemy jako obwiednią, a nie jako miejsce punktów.

Niechaj n będzie rzędem, ν klasą, d liczbą punktów podwójnych, r—liczbą ostrzy, τ—liczbą stycznych podwójnych, ι—liczbą stycznych przegięcia krzywej danej. Pomiędzy temi liczbami zachodzą związki, które nazywamy wzorami Plückera (Crelle XII):

$$\nu = n(n-1) - 2d - 3r; \qquad n = \nu(\nu-1) - 2\tau - 3\iota.$$

$$\iota = 3n(n-2) - 6d - 8r; \qquad r = 3\nu(\nu-2) - 6\tau - 8\iota.$$

Z wzorów tych, z których każdy jest wynikiem trzech pozostałych, wypływają związki następujące:

$$3(\nu - n) = \iota - r,$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} - d - r = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \tau - \iota.$$

Krzywa—jako miejsce—ogólna, t. j. bez punktów podwójnych i ostrzy, posiada klasę, liczbę stycznych podwójnych i liczbę przegięć, określone przez związki:

$$\nu = n(n-1); \quad \iota = 3n(n-2); \quad \tau = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9),$$

i wzajemnie.

Przy d punktach podwójnych i r ostrzach liczba stycznych podwójnych wynosi:

$$\tau = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) - (2d+3r)[n(n-1)-6] + 2d(d-1)$$
$$+ \frac{9}{2} r(r-1) + 6dr.$$

Przy wprowadzeniu rodzaju krzywej (Riemann Crelle LIV, Clebsch tamże LXIII) wzory Plückera przyjmują inną postać. Połóżmy:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \tau - \iota;$$

liczba p nazywa się rodzajem krzywej—miejsca i krzywej obwiedniej. Przedstawia ona różnicę pomiędzy największą liczbą punktów podwójnych i ostrzy, jakie może mieć krzywa—miejsce, nie rozpadając się. a liczbą tych punktów i ostrzy, jaką w istocie posiada; albo też: różnicę pomiędzy największą liczbą stycznych podwójnych i przegięć, jaką mieć może krzywa obwiednia a liczbę stycznych podwójnych i przegięć, jaką w istocie posiada.

Wzory Plückera brzmią wtedy:

$$2p-2 = \nu+r-2n = \nu+\iota-2\nu$$

$$= n(n-3)-2(d+r) = \nu(\nu-3)-2(\tau+\iota).$$

We wzorach Plückera nie robimy rozróżnienia pomiędzy rzeczywistemi a urojonemi punktami i stycznemi osobliwemi. Istnieje wszakże związek pomiędzy samemi osobliwościami rzeczywistemi. (Patrz Klein, Math. An. V, Perrin, Bull. de la Soc. math. VI).

Rodzaj p krzywej pojedyńczej może być tylko albo zerem albo liczbą dodatnią.

Krzywa rodzaju zero nazywa się wymierną lub jednobieżną (Cayley); spółrzędne jej punktów dają się wyrazić jako funkcye wymierne jednego parametru; ma ona $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ punktów podwójnych i ostrzy, pomiędzy któremi może być najwyżej $\frac{3(n-2)}{2}$ ostrzy.

Pojęcie rodzaju wprow. dził Riemann (l. c.) a zastosował do geometryi Clebsch (l. c.); Cayley (London Math. Soc. 1865) rodzajowi (włoskie—genere, franc. genre, niemieckie—Geschlecht) nadaję nazwę defect.

Przytoczymy kilka pojęć zasadniczych, odnoszących się do postaci linii krzywej, t. j. do figury, utworzonej przez wszystkie jej punkty rzeczywiste. Krzywa może składać się z kilku gałęzi; przez gałęź krzywej rozumiemy ogół wszystkich punktów tejże krzywej, w którym możemy przejść sposobem ciągłym od jednego punktu do drugiego, przyczem włączamy też przypadek przejścia przez nieskończoność. Tak np. dwie części hyperboli stanowią z tego punktu widzenia jednę gałęź.

Gałęź krzywej może być parzystą lub nieparzystą, stosownie do tego, czy prosta przecina ją w parzystej lub nieparzystej liczbie punktów rzeczywistych. Gałęź nieparzystą można utworzyć przez odkształcenie prostej, gałęź parzystą przez odkształcenie stożkowej. Dwie gałęzie nieparzyste zawsze się przecinają, skąd wypływa, że krzywa bez punktów podwójnych może mieć tylko jednę gałęź nieparzystą; krzywa bez punktów podwójnych i rzędu nieparzystego ma zawsze gałęź nieparzystą; jeżeli zaś jest rzędu parzystego, to nie ma wcale gałęzi nieparzystej.

Te twierdzenia zawdzięczamy v. Staudtowi („Geometrie der Lage", Norymberga 1847); patrz także: Klein (Math. Ann. VI), Zeuthen (tamże, VII) i t. d.

Krzywa rodzaju p nie może mieć więcej niż $p+1$ gałęzi; jeżeli $(n-1)(n-2)$ jest równe p lub większe od p, istnieją zawsze krzywe rzędu n-tego, mające $p+1$ gałęzi (Harnack, Math. Ann VI).

Podamy teraz niektóre wzory zasadnicze geometryi analitycznej krzywych płaskich algebraicznych.

Równanie krzywej może być napisane w spółrzędnych kartezyańskich albo w spółrzędnych prostokątnych. W przypadku pierwszym zbierzmy wszystkie wyrazy stopnia zero, następnie wszystkie wyrazy stopnia 1-go, stopnia 2-go i t. d., t. j. napiszmy równanie w postaci:

$$f = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0,$$

gdzie ogólnie u_r jest wyrażeniem całkowitem jednorodnem dwu zmiennych x, y. W przypadku drugim niechaj x_1, x_2, x_3 będą trzema spółrzędnemi jednorodnemi; równanie krzywej możemy przedstawić w ten sposób:

$$f = u_0 x_3^n + u_1 x_3^{n-1} + \ldots + u_n = 0,$$

lub stosując zasady rachunku symbolicznego form trójkowych, w postaci:

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \ldots = 0.$$

Jeżeli $u_0 = 0$, wtedy krzywa przechodzi przez początek spółrzędnych (w przypadku pierwszym) lub przez wierzchołek $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ trójkąta podstawowego spółrzędnych (w przypadku drugim); równanie $u_1 = 0$ przedstawia styczną w tym punkcie.

Jeżeli $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, wtedy punkt ten jest punktem podwójnym krzywej f; dwie styczne w tym punkcie podwójnym przedstawia równanie $u_2 = 0$. Jeżeli u_2 jest kwadratem zupełnym, $\sqrt{u_2}$ zaś nie jest czynnikiem wymiernym ilości u_3 wtedy ten punkt jest ostrzem; gdy zaś $\sqrt{u_2}$ jest czynnikiem wymiernym ilości u_3, wtedy punkt uważany nie jest właściwie ostrzem, a tylko punktem, w którym styczna dotyka samej siebie (punktem samostyczności, Selbstberührungspunkt); punkt ten uważać należy za zjednoczenie dwóch punktów podwójnych. W tym to przypadku styczna przecina krzywą w czterech punktach nieskończenie blizkich, a nie w trzech, jak to ma miejsce w przypadku ostrza.

Jeżeli w ogóle jest $u_0 = u_1 = \ldots = u_{r-1} = 0$, wtedy początek spółrzędnych jest punktem r-krotnym krzywej $f = 0$, a r stycznych w tym punkcie określa równanie $u_r = 0$.

Dla punktu podwójnego trzy pochodne funkcyi f względem x_1, x_2, x_3 powinny być zerem, t. j. być powinno:

$$a_x^{n-2} a_1 = a_x^{n-1} a_2 = a_x^{n-1} a_3 = 0.$$

Jeżeli wyrugujemy x pomiędzy temi trzema równaniami, otrzymamy równanie $R = 0$, gdzie R jest utworem niezmienniczym spółczynników równania krzywej. Ten utwór nazywa się wyróżnikiem krzywej.

Znikanie wyróżnika jest warunkiem konieczny mi dostatecznym na to, aby krzywa f miała punkt podwójny.

Pomijając dawniejsze prace specyalne, wymieniamy, jako pierwsze systematyczne opracowanie teoryi ogólnej krzywych, to, które jest zawarte w „Introductio in analysin infinitorum“ (1748) Eulera, oraz w „Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques (1750) Cramera; Eulerowi też (Sur une contradiction apparente dans la doctrine des courbes, Akad. Berlińska 1747) zawdzięczamy zbadanie paradoksu, że dwie krzywe rzędu n-tego przecinają się w większej liczbie punktów niż ta, która jest potrzebna do określenia jednej z nich.

Po tych pracach, po pracach Lamégo, Gergonne'a i innych, najważniejszemi były następujące prace Plückera: „System des analytischen Geometrie“ (1835), „Theorie der algebraischen Curven“ i inne, ogłoszone w Jour. de Liouville (1834, 1837), w których podał on wzory, noszące obecnie jego imię.

O punktach osobliwych ogłosili badania: Puiseux (Journal de Liouville 1850), Cayley (Quart. Journ. VII, XI, Crelle LXIV i t. d.), Halphen (Mem. des Sav. étrang. XXVI, Comptes rendus LXXVIII, LXXX), Stolz (Math. Ann. VIII) i inni.

Dziełem podstawowem o teoryi ogólnej krzywych jest: Cremona „Introduzione a une teoria geometrica delle curve piane (Bolonia, 1862, przekład niemiecki 1865); w dziełach Salmona i Clebscha-Lindemanna, przełożonych na różne języki, przedstawione są systematycznie i przedstawione metodą analityczną główne wyniki tej teoryi. W następnych paragrafach podamy dalsze wskazówki historyczne i bibliograficzne.

---

§ 2.

Teorya biegunowości. Krzywe spółzmienne.

Niechaj będzie krzywa, przedstawiona symbolicznie przez

$$f = a_x^n = b_x^n = \ldots = 0;$$

krzywe, przedstawione przez równania:

$$a_x^{n-1} a_y = 0, \quad a_x^{n-2} a_y^2 = 0, \; \ldots \ldots, \; a_x a_y^{n-1} = 0,$$

nazywają się odpowiednio: krzywemi biegunowem rzędu 1-go, 2-go . . . bieguna y względem krzywej danej. Pierwsze wyrazy tych równań otrzymujemy, stosując do funkcyi f raz, dwa razy, ... działanie zwane biegunowem, które—jeżeli odwrócimy uwagę od czynnika liczbowego—w przypadku naszym (w obszarze trójkowym) wyobraża symbol:

$$\Delta = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Jeżeli z punktu y poprowadzimy prostą, przecinającą krzywą w n punktach, to przetnie ona krzywe biegunowe rzędów 1-go, 2-go . . . punktu y w środkach harmonicznych rzędu $n-1$, $n-2$, ... punktu y względem grupy n punktów.

Własność ta może służyć jako podstawa do określenia krzywych biegunowych.

Jeżeli biegun y znajduje się na biegunowej r-tej punktu z, wtedy punkt z znajduje się na biegunowej $(n-r)$-ej punktu y.

Jeżeli punkt y znajduje się na krzywej danej, wtedy wszystkie krzywe biegunowe przechodzą przezeń i w nim dotykają krzywej danej.

Biegunowa $(n-1)$-ta (prosta biegunowa) punktu, należącego do krzywej danej, jest styczną w tym punkcie.

Punkty w liczbie $n(n-1)$, w których pierwsza biegunowa punktu y przecina krzywą daną, są punktami styczności stycznych, poprowadzonych z punktu y do krzywej.

Punkt r-krotny krzywej danej jest punktem wielokrotnym rzędu $r-s$ dla biegunowej s-tej jakiegokolwiek bieguna.

Jeżeli krzywa rozpada się na prostą i na inną krzywą rzędu $(n-1)$-go, wtedy biegunowa pierwsza punktu prostej składa się z tej prostej i z biegunowej pierwszej względem krzywej rzędu $n-1$.

Biegunowa r-ta punktu O_r względem biegunowej s-tej punktu O_s zlewa się z biegunową s-tą punktu O_s względem biegunowej r-tej punktu O_r.

Jeżeli krzywa dana ma punkt podwójny D, wtedy biegunowa pierwsza jakiegokolwiek bieguna O przechodzi przez punkt D i, tu jako styczną, ma prostą sprzężoną harmonicznie z DO względem dwu stycznych w punkcie podwójnym. Jeżeli punkt podwójny jest ostrzem, wtedy styczna do biegunowej pierwszej jest sama styczną w ostrzu.

Biegunowe pierwsze wszystkich punktów na prostej tworzą pęk krzywych o tych samych $(n-1)^2$ punktach podstawowych.

Stożkowa biegunowa punktu podwójnego rozkłada się na dwie proste, które są dwiema stycznemi w punkcie podwójnym.

Stożkowa biegunowa punktu przegięcia rozkłada się na dwie proste, z których jedna jest styczną przegięcia.

Jeżeli punkt krzywej danej ma jako stożkową biegunową układ dwu prostych, wtedy jest on punktem przegięcia dla krzywej danej

Jeżeli biegun przebiega po krzywej rzędu m-tego, wtedy prosta biegunowa obwodzi krzywą klasy $m(n-1)$.

Na każdej prostej istnieje $2(n-2)$ punktów, w których biegunowe pierwsze są dotykane przez tę prostą; stożkowe biegunowe punktów zetknięcia są stycznemi do tej prostej.

Biegun, znajdujący się na jednej prostej wraz z n punktami krzywej rzędu n-tego, ma też samą prostą biegunową tak względem krzywej, jak i względem układu n stycznych w n punktach.

Prosta biegunowa punktu w nieskończoności w określonym kierunku nazywa się średnicą krzywej rzędu n-tego.

Średnica jest miejscem środków odległości średnich (patrz Rozdz. II § 2) wszystkich układów n punktów, które powstają z przecięcia krzywej układem cięciw równoległych.

Jeżeli uważamy krzywą jako obwiednią klasy ν-ej, wtedy biegun prostej w nieskończoności nazywa się środkiem.

Środek jest obwiednią (punktem) prostej równoległej do układu ν równoległych stycznych do krzywej i przechodzących przez środek odległości średnich ν punktów, wyznaczonych przez styczne na prostej do nich prostopadłej.

Jeżeli z punktu O prowadzimy dwie proste, przecinające krzywą w punktach $R_1, R_2,..,R_n$, $S_1, S_2,...,S_n$, wtedy stosunek

$$\frac{OR_1 \cdot OR_2 \ldots OR_n}{OS_1 \cdot OS_2 \ldots OS_n}$$

jest stały, niezależnie od wyboru punktu O, o ile tylko kierunek poprzecznych pozostaje stałym (Tw. Newtona, Enum. lin. tertii ordinis).

Niechaj będzie wielokąt $ABC\ldots$, którego boki przecinają krzywą rzędu n-tego w n punktach; oznaczmy przez $(B)_1, (B)_2 \ldots$ iloczyny odcinków (liczonych od punktu B aż do n punktów), znajdujących się odpowiednio na bokach BC, BA, przez (C_1), (C_2)..... iloczyny analogiczne i t. d., będzie:

$$(A)_1\,(B)_1\,(C)_1 \ldots = (A)_2\,(B)_2\,(C)_2 \ldots$$ (Twierdzenie Carnota, Géom. de pos. str. 437).

Jeżeli na każdej prostej, poprowadzonej przez punkt O i przecinającej krzywą w punktach $R_1, R_2 \ldots R_n$, wyznaczymy punkt taki, aby było:

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \ldots .$$

lub

$$\sum_{1}^{n} \left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_i} \right) = 0,$$

wtedy miejscem punktu R będzie prosta (Tw. Cotesa, Harmonia mensurarum, 1722), która jest prostą biegunową punktu O.

Podobnież: stożkowa biegunowa punktu O jest miejscem punktu R, który czyni zadość warunkowi:

$$\sum_{ij} \left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_i} \right) \left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_j} \right) = 0, \text{ i t. d., i t. d.}$$

Przez punk O poprowadźmy prostą, przecinającą krzywą w n punktach, i w punktach tych poprowadźmy styczną do krzywej; poprowadźmy następnie przez punkt O jakąkolwiek poprzeczną, która niechaj przecina krzywą w punktach $R_1, R_2, \ldots \ldots R_n$, i styczne w punktach $r_1, r_2, \ldots r_n$; będzie wtedy:

$$\sum_1^n \frac{1}{OR_i} = \sum_1^n \frac{1}{Or_i}. \quad \text{(Tw. Maclaurina).}$$

Wprowadzimy teraz trzy ważne krzywe spółzmienne: krzywą Hessego, Steinera i Cayleya.

Krzywa Hessego jest miejscem punktów podwójnych biegunowych pierwszych punktów płaszczyzny; krzywa Steinera — miejscem punktów, których biegunowe pierwsze mają punkt podwójny; punkty tych dwóch krzywych odpowiadają sobie dwujednoznacznie. Krzywą Cayley'a nazywamy obwiednią prostych, łączących punkt krzywej Steinera z odpowiednim punktem krzywej Hessego.

Jeżeli $f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \ldots = 0$ jest równaniem symbolicznem krzywej, to równaniem krzywej Hessego jest:

$$(abc)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} = 0,$$

lub

$$\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{23}, \\ f_{31}, & f_{32}, & f_{33}, \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie $f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Równanie krzywej Steinera otrzymujemy, eliminując x z pomiędzy trzech równań:

$$a_x^{n-2} a_y a_1 = 0, \quad a_x^{n-2} a_y a_2 = 0, \quad a_x^{n-2} a_y a_3 = 0.$$

W poniższej tablicy podajemy wartości liczb Plückerowskich (rzędu, klasy i t. d.), odnoszących się do wprowadza-nych tu trzech krzywych. Zakłada sią, że krzywa dana jest ogólną, t. j. że nie ma punktów podwójnych i ostrzy i że rząd jej jest równy n.

	Krzywa Hessego:	Krzywa Steinera:	Krzywa Cayleya:
rodzaj	$\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$	$\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$	$\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$
rząd	$3(n-2)$	$3(n-2)^2$	$3(n-2)(5n-11)$
klasa	$3(n-2)(3n-7)$	$3(n-1)(n-2)$	$3(n-1)(n-2)$
liczba punk. podw.	0	$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$	$\frac{9}{2}(n-2)(5n-13)(5n^2-19n+16)$
„ ostrzy . .	0	$12(n-2)(n-3)$	$18(n-2)(2n-5)$
„ stycz. podw.	$\frac{27}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(3n-8)$	$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$	$\frac{9}{2}(n-2)^2(n^2-2n-1)$
„ przegięć .	$9(n-2)(3n-8)$	$3(n-2)(4n-9)$	0

Jeżeli krzywa dana ma punkty podwójne i ostrza, wtedy w tablicy tej należy poczynić zmiany. Dla $n=3$ wzory w kolumnie trzeciej do krzywej Cayley'a nie stosują się; w tym przypadku krzywa Hessego i krzywa Steinera są jedną i tą samą krzywą rzędu 3-go; krzywa Cayley'a zamiast klasy 6-ej jest tylko 3-ej, zamiast rzędu 12-go jest tylko 6-go, ostrzy ma nie 18 lecz tylko 9.

Można podać różne definicye krzywych Hessego, Steinera i Cayley'a, odpowiadające różnym ich własnościom specyficznym.

Krzywą Hessego dla krzywej danej jest:

a) miejsce punktu styczności dwu (lub nieskończenie wielu) biegunowych pierwszych;

b) miejsce punktów podwójnych biegunowych pierwszych;

c) miejsce bieguna, którego stożkowa biegunowa rozpada się na dwa proste.

d) miejsce bieguna, którego proste biegunowe względem biegunowych pierwszych krzywej spotykają się w jednym punkcie.

Krzywą Steinera dla krzywej danej jest:

a) miejsce biegunów biegunowych pierwszych, mających punkty podwójne;

b) miejsce punktów przecięcia par prostych, które przedstawiają stożkowe biegunowe;

c) obwiednia prostych biegunowych punktów krzywej Hessego.

d) miejsce punktów, których biegunowe pierwsze dotykają krzywej Hessego.

e) miejsce punktu, w którym spotykają się proste biegunowe jednego i tego samego bieguna względem biegunowych pierwszych krzywej danej.

Krzywą Cayley'a dla krzywej danej jest:

a) obwiednia prostych, łączących punkty odpowiadające sobie w krzywej Hessego i w krzywej Steinera;

b) obwiednia stycznych wspólnych w punktach styczności pomiędzy biegunowemi pierwszemi.

W punkcie podwójnym krzywej zasadniczej i jej krzywa Hessego ma także punkt podwójny z temi samemi stycznemi.

W ostrzu krzywej danej jej krzywa Hessego ma punkt potrójny; dwie z jej gałęzi dotykają stycznej ostrzowej; w tym to punkcie można uważać jakby ośm zjednoczonych przecięć krzywej danej z jej krzywą Hessego.

Krzywa Hessego przechodzi przez punkty przegięcia krzywej zasadniczej.

K r z y w a S t e i n e r a i k r z y w a C a y l e y'a obie dotykają stycznych przegięcia krzywej zasadniczej.

Krzywa Hessego w każdym swym punkcie jest styczna do biegunowej drugiej odpowiedniego punktu krzywej Steinera.

Styczna w punkcie O krzywej Hessego jest sprzężona harmonicznie z prostą, łączącą ten punkt z odpowiadającym punktem O' krzywej Steinera względem dwu prostych, dotykających biegunowej pierwszej punktu O' w punkcie podwójnym; styczna zaś w punkcie O' do krzywej Steinera jest sprzężona harmoniczna z prostą $O'O$ względem dwu prostych, na które rozpada się stożkowa biegunowa punku O.

Początki teoryi biegunowych znajdujemy w pracach C r a m e r a, N e w t o n a i innych nad średnicami prostoliniowemi i krzywoliniowemi linij krzywych. B o b i l l i e r o w i (Ann. de Gergonne, XVIII, XIX, 1829) zawdzięczamy pojęcia ogólniejsze. Póżniej zajmowali się tą teoryą: P l ü c k e r (Crelle V), G r a s s m a n n (Crelle, XXIV), D e J o n q u i è r e s (Journ. de Liouville 1857), C a y l e y (Phil. Trans. CXLVIII). C r e m o n a teoryę biegunowych uczynił podstawę całej swej teoryi linij krzywych w dziele, cytowanem wyżej: Introduzione etc.

Krzywą Hessego wprowadził H e s s e (Crelle XXVIII, XLI), a nazwał ją tak S y l v e s t e r (Phil. Trans. CXLIII); krzywą Steinera wprowadził S t e i n e r, a nazwę nadał jej C r e m o n a (Introduzione etc.), sam Steiner nazywał ją „Kerncurve“; krzywą C a y l e y'a wprowadził C a y l e y dla krzywych rzędu 3-go (Phil. Trans. CXLVII, 1857); badali ją potem S t e i n e r (Crelle XLVII) i C l e b s c h (Crelle LXIV).

Istnieje kilka prac, mających na celu udowodnienie twierdzenia o braku punktów osobliwych w krzywej Hessego, odpowiadającej krzywej danej. Cremona przyjął to twierdzenie jako postulat; dla krzywych rzędu 4 go dowiódł go Geiser (Annali de math. IX). O krzywej Hessego pisali: Del Pezzo (Rend. Napoli 1883), Brill (Math Ann. XIII), Segre (Rend. Lincei 1895) i inni.

---

§ 3.

Układy liniowe krzywych płaskich.

Niechaj $a_x^n = 0$, $b_x^n = 0 \ldots$ będą równaniami $k+1$ krzywych płaskich rzędu n-tego; układ, przedstawiony przez równanie:

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \ldots = 0,$$

w którem $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ są parametry dowolne w liczbie $k+1$, stanowi to, co nazywamy układem liniowym gatunku k. Dla $k=1$ mamy pęk, dla $k=2$ — sieć. Jeżeli równania krzywych są wyrażone w spółrzędnych prostej, mamy pasmo dla $k=1$.

Układ liniowy gatunku k jest określony przez $k+1$ krzywych rzędu n-tego, które nie należą do tego samego układu liniowego rzędu niższego.

Jeżeli $k>1$, krzywe nie będą miały w ogóle żadnego punktu wspólnego (punktu podstawowego); jeżeli przeto wszystkie krzywe w liczbie $k+1$, charakteryzujące układ, mają punkt wspólny, to też punkt należeć będzie także do wszystkich innych krzywych ukladu.

Krzywa ogólna układu liniowego niema innych punktów wielokrotnych po za punktami podstawowemi (Bertini, Ist. Lomb. 1882).

W przypadku $k=1$ jest zawsze n^2 punktów podstawowych pęku, t. j. punktów, przez które przechodzą wszystkie krzywe układu.

Układ liniowy gatunku k krzywych rzędu n-tego wyznacza na poprzecznej inwolucyę punktów rzędu n-tego i gatunku k (patrz Rozdz. II § 1).

Pomiędzy krzywemi układu liniowego jest $(k+1)(n-k)$ krzywych, mających styczność rzędu k-tego z prostą daną (t. j. $k+1$ punktów nieskończenie blizkich).

Pomiędzy krzywemi układu liniowego jest

$$\frac{2^k(n-k)(n-k-1)\ldots,(n-2k+1)}{k!}$$

krzywych, z których każda dotyka k razy prostej danej.

Pomiędzy krzywemi pęku jest $2(n-1)$ krzywych, dotykających prostej danej; $m(2n+m-3)$ krzywych, dotykających krzywej danej rzędu m-tego bez punktów podwójnych i ostrzy. W przypadku, gdyby ta krzywa miała d punktów podwójnych i r ostrzy, należałoby od liczby poprzedniej odjąć $2d+3r$.

Pomiędzy krzywemi sieci jest $3(n-2)$ krzywych, dla każdej z których prosta dana jest styczną przegięcia.

Niechaj będą dwa pęki promieni, których środkami są punkty podstawowe w liczbie n^2 pęku krzywych rzędu n-tego; uważajmy za odpowiadające sobie takie dwa promienie, które są stycznemi, poprowadzonemi z dwóch punktów podstawowych do tej samej krzywej pęku, wtedy oba pęki promieni będą rzutowemi; stąd: stosunek anharmoniczny czterech stycznych do czterech krzywych pęku w jednym punkcie podstawowym jest taki sam, jak takiż stosunek anharmoniczny czterech stycznych w każdym innym punkcie. Z tego powodu możemy ten stosunek nazwać stosunkiem anharmonicznym czterech stycznych pęku.

Pomiędzy krzywemi pęku, które dotykają się wszystkie w punkcie podstawowym P, jest jedna taka, dla której punkt P

jest punktem przegięcia, i inna taka, dla której ten punkt P jest podwójnym.

Pomiędzy krzywemi pęku, którego jeden punkt podstawo- P jest punktem podwójnym dla wszystkich krzywych (o stycznych różnych i zmiennych od krzywej do krzywej), są dwie takie, dla których punkt P jest ostrzem; jeżeli jedna ze stycznych jest wspólna wszystkim krzywym, wtedy istnieje jedna tylko krzywa, dla której ten punkt jest ostrzem; a jeżeli obie styczne są stałemi, wtedy istnieje jedna krzywa pęku, dla której punkt A jest punktem potrójnym.

W pęku jest w ogólności $3(n-1)^2$ krzywych o punktach podwójnych.

Twierdzenie to ulega zmianom, gdy krzywe pęku mają punkty wielokrotne różnej natury (Patrz Cremona, Introduzione etc. i Annali di mat. VII, 1864).

Jeżeli $a_x^n=0$, $b_x^n=0$, $c_x^n=0$ są równaniami trzech krzywych, to warunkiem na to, aby te krzywe należały do jednego pęku, jest, by jakobian tych równań, t. j.

$$(a\,b\,c)\,a_x^{n-1}\,b_x^{n-1}\,c_x^{n-1}$$

był tożsamościowo zerem (Patrz Gordan-Noether Math. Ann. X).

Jeżeli z punktu O poprowadzimy styczne do wszystkich krzywych pęku, to punkty styczności leżeć będą na krzywej rzędu $2n-1$, przechodzącej przez punkt O i przez n^2 punktów podstawowych pęku.

Punkty podwójne krzywych pęku mają tę samą prostą biegunową względem wszystkich krzywych tegoż pęku.

Miejscem punktu, w którym dotykają się dwie krzywe (a więc i nieskończenie wiele krzywych) sieci jest krzywa rzędu $3(n-1)$, która nazywa się krzywą Hessego, albo też krzywą Jacobi'ego sieci. Przy pomocy zwykłych znakowań symbolicznych równanie tej krzywej przedstawia się w ten sposób:

$$(a\,b\,c)\,a_x^{n-1}\,b_x^{n-1}\,c_x^{n-1}=0.$$

Jest to kombinant układu trzech krzywych zasadniczych uważanej sieci; inaczej mówiąc, pierwsza strona tego równania, po podstawieniu, zamiast jednej z trzech krzywych, kombinacyi ich liniowej, zmienia się tylko o czynnik stały.

Krzywa Hessego sieci jest miejscem punktów podwójnych krzywych sieci, albo inaczej: miejscem punktów, których proste biegunowe względem krzywych sieci spotykają się w jednym punkcie.

Miejsce punktów, w których spotykają się proste biegunowe wszystkich punktów krzywej Hessego względem krzywych sieci, nazywa się krzywą Steinera sieci; obwiednia zaś prostych, łączących odpowiadające sobie punkty w krzywej Hessego, i w krzywej Steinera, nazywa się krzywą Cayley'a sieci.

Krzywa Steinera jest rzędu $3(n-1)^2$, krzywa Cayley'a klasy $3n(n-1)$.

Jeżeli rozważać będziemy sieć biegunowych pierwszych względem krzywej danej, to krzywa Hessego, Steinera i Cauley'a stają się odpowiednio krzywą Hessego, Steinera i Cayley'a dla krzywej danej zasadniczej (patrz § 2).

Do tych krzywych stosuje się następująca tablica:

	Krzywa Hessego lub Jacobi'ego sieci.	Krzywa Steinera sieci.	Krzywa Cayley'a sieci.
rząd	$3(n-1)$	$3(n-1)^2$	$3(n-1)(5n-6)$
klasa	$3(n-1)(3n-4)$	$3n(n-1)$	$3n(n-1)$
rodzaj	$\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$	$\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$	$\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$
liczb. punk. podw.	0	$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$	$\frac{9}{2}(n-1)(5n-8)(5n^2-9n+2)$
„ ostrzy . .	0	$12(n-1)(n-2)$	$18(n-1)(2n-3)$
„ stycz. podw.	$\frac{27}{2}n(n-1)(n-2)(3n-5)$	$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2+3n-8)$	$\frac{9}{2}(n-1)(n^2-2)$
„ punk. przeg.	$9(n-1)(3n-5)$	$3(n-1)(4n-5)$	0.

Jeżeli krzywe sieci mają jeden punkt wspólny, wtedy jedna z nich ma punkt podwójny, a te, które w tym punkcie dotykają prostej danej, tworzą pęk. Krzywa Hessego przechodzi przez tenże punkt i ma tu punkt podwójny ze stycznemi zlewającemi się ze stycznemi do krzywej, która ma tu punkt podwójny.

Jeżeli wszystkie krzywe sieci mają punkt wspólny i w nim tęż samą styczną, wtedy istnieje tu pęk krzywych, mających w tym punkcie punkt podwójny i dwie krzywe, mające tu ostrze. Krzywa Hessego ma tu punkt potrójny, a dwie ze stycznych w punkcie potrójnym zlewają się ze styczną wspólną.

Jeżeli wszystkie krzywe sieci mają w punkcie stałym punkt wielokrotny rzędu n-tego, wtedy krzywa Hessego ma tu punkt wielokrotny rzędu $3(r-1)$.

Każdej krzywej sieci, mającej dwa punkty podwójne, odpowiada punkt podwójny w krzywej Steinera, stąd w sieci ogólnej jest

$$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11),$$

krzywych z punktami podwójnemi.

Podobnież w sieci ogólnej jest

$$12(n-1)(n-2)$$

krzywych, mających ostrze,

$$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2+3n-8)$$

pęków krzywych, mających dwie styczności; wreszcie

$$3(n-1)(4n-5)$$

pęków krzywych, mających styczność rzędu 2-go (t. j. trzy punkty nieskończenie blizkie).

Wszystkie liczby powyższe ulegają zmianom, gdy sieć ma punkty podstawowe, pojedyńcze lub wielokrotne, t. j. punkty, przez które przechodzą wszystkie krzywe sieci.

Sieć, w której wszystkie krzywe spotykają każda każdą w jednym punkcie ruchomym, nazywa się siecią homaloidalną.

Wszystkie krzywe sieci homaloidalnej są rodzaju zero.

Jeżeli $\varrho_1, \varrho_2 \ldots, \ldots \varrho_s$ oznaczają welokrotności kolejnych punktów podstawowych sieci homaloidalnej, wtedy mamy związki:

$$\sum_1^s \varrho_i^2 = n^2 - 1; \quad \sum_1^s \frac{\varrho_i(\varrho_i - 1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$\sum_1^s \frac{\varrho_i(\varrho_i + 1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} - 2; \quad \sum_1^s \varrho_i = 3(n-1).$$

Niechaj będą trzy krzywe rzędów n_1, n_2, n_3; możemy utworzyć krzywe spółzmienne, odnoszące się do tego układ układu trzech krzywych i analogiczne z krzywemi Jacobi'ego i Steinera dla sieci (t. j. gdy $n_1 = n_2 = n_3 = n$).

Krzywa Jacobi'ego układu trzech krzywych jest krzywą rzędu $n_1 + n_2 + n_3 - 3$, stanowiącą miejsce punktów, których proste biegunowe względem trzech krzywych schodzą się w jednym punkcie.

Miejscem tego ostatniego punktu jest krzywa, która w przypadku rzędów równych staje się krzywą Steinera sieci, i dla tego nazwiemy ją krzywą Steinera układu trzech krzywych; krzywa ta jest rzędu

$$n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 - 2(n_1 + n_2 + n_3) + 3.$$

Krzywa Jacobi'ego układu trzech krzywych jest miejscem punktów, w których przecinają się biegunowe pierwsze tego samego punktu względem trzech punktów danych.

Jeżeli trzy krzywe mają wszystkie razem punkty wspólne, wtedy przez punkt ten przechodzi tak krzywa Jacobi'ego jak i krzywa Steinera.

Krzywa Jacobi'ego przechodzi też przez punkty podwójne krzywych danych.

Teoryę liniowych układów linij krzywych badano w ostatnich czasach w wielu kierunkach, gdyż wiąże się ona z różnemi teoryami geometrycznemi, jak: przekształcenie dwujednoznaczne, odwzorowanie powierzchni na płaszczyźnie i t. zw. geometrya grup punktów na krzywej algebraicznej.

O dwupękach linij krzywych, uważanych wodpowiedniości rzutowej, mamy ważne twierdzenie: Każda krzywa algebraiczna może być uważana jako miejsce punktów przecięcia odpowiadających sobie krzywych dwóch pęków rzutowych. Twierdzenie to wypowiedział i udowodnił Chasles dla krzywych rzędu 3-go (Compt. rend. XLI, 1853); ogólnie dowiódł go De Jonquières (Mem. de l'Acad. des sciences, XVI, 1858).

Twierdzenie to jest uogólnieniem tworzenia rzutowego stożkowych.

Z prac o układach liniowych prócz „Introduzione“ Cremony wymieniamy; De Jonquières (Math. Ann. I), Caporali (Collect. Math. 1881), Jung (Annali di math. XV, XVI), Guccia (Rend. Palermo, VII) i t. d. Należą tu także wszystkie badania o grupach punktów na krzywej, o czem mowa niżej, Osobliwości krzywej Jacobi'ego układu trzech krzywych badał Gerbaldi (Rend. Palermo VIII).

---

§ 4.

Grupy punktów na krzywej algebraicznej.

W t. zw. geometryi na krzywej algebraicznej badamy własności grup punktów na krzywej zasadniczej rzędu n-tego, powstających przy przecięciu krzywej układadami innych krzywych jakiegokolwiek rzędu, a specyalnie układami liniowemi, t. j. gdy ich równania zawierają liniowo parametry zmienne.

Jeżeli krzywa zasadnicza jest prostą, wtedy te grupy punktów stanowią inwolucyę rzędu wyższego, o której była mowa w § 2 Rozdz. II-go.

Wykład tej teoryi poprzedzimy podaniem kilku twierdzeń o punktach przecięcia dwu krzywych.

Krzywą zasadniczą f rzędu n-tego przetnijmy krzywą φ rzędu m-tego, przechodzącą przez δ punktów osobliwych pierwszej z nich (w liczbie δ liczymy ile razy przechodzi krzywa φ przez punkt osobliwy krzywej f). Punkty przecięcia dwu krzywych nie są od siebie niezależne: niektóre z nich są wyznaczone przez inne. Jeżeli k jest liczbą punktów przecięcia dwu krzywych, wyznaczonych przez wszystkie pozostałe, wtedy mamy następujące nierówności zasadnicze:

Jeżeli $m < n-2$, wtedy $k \leqslant mn - \frac{m(m+3)}{2} - \delta$

$$\left(= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}\right);$$

jeżeli zaś $m \geqslant n-2$, wtedy $k \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta$.

Krzywą dołączoną nazywamy krzywą, przechodzącą $r-1$ razy przez każdy punkt r-krotny krzywej f; stąd, jeżeli f nie ma innych punktów wielokrotnych, prócz punktów podwójnych i ostrzy, wtedy krzywa dołączona podlega tylko warunkowi, aby przechodziła pojedyńczo przez każdy punkt podwójny lub przez ostrze krzywej f.

Niechaj φ będzie krzywą dołączoną rzędu m-tego.

Wtedy—jeżeli przez k rozumiemy liczbę punktów przecięcia krzywych f i φ (z pomiędzy nm punktów przecięcia), wyznaczonych przez punkty pozostałe—zachodzą nierówności (p oznacza rodzaj krzywej f):

$$\text{gdy } m < n-2, \quad k \leqslant p - \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$$

$$\text{„} \quad m \geqslant n-2, \quad k \leqslant p.$$

G o d n e m j e s t u w a g i, ż e w d r u g i m p r z y p a d k u liczba k nie zależy wcale od rzędu m krzywej przecinającej; w pierwszym zaś przypadku, gdy $m = n - 3$, mamy $k \leqslant p - 1$.

Jeżeli krzywa φ jest krzywą dołączoną, wtedy w równaniu jej występuje l i n i o w o pewna liczba parametrów dowolnych w ten sposób, że zmieniając te parametry, otrzymujemy u k ł a d l n i o w y.

Niechaj Q będzie liczbą punktów r u c h o m y c h przecięcia krzywych f i φ, t. j. punktów przecięcia zmieniających się wraz z krzywą φ; jeżeli k z tych punktów wyznacza się z pozostałych $Q-k$, to liczba tych punktów, które na krzywej f możemy obrać dowolnie, wynosi $Q-k=q$; liczbę q nazwiemy w i e l o k r o t n o ś c i ą u k ł a d u Q p u n k t ó w, gdyż będzie ∞^q grup po Q punktów, które na krzywej f wyznaczają krzywe gatunku φ. L i c z b a q j e s t l i c z b ą p a r a m e t r ó w d o w o l n y c h, z a c h o d z ą c y c h l i n i o w o w r ó w n a n i u k r z y w e j φ. Twierdzenie powyższe daje wtedy:

$$\text{gdy } m \leqslant n-3, \text{ jest } q \geqslant Q - p + \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$$

$$\text{„} \quad m > n-3, \quad \text{„} \quad q \geqslant Q-p.$$

Te wzory można napisać w innej postaci, która służy do przedstawienia g r a n i c y w y ż s z e j dla liczby Q, gdy znana jest wielokrotność q układu. Można powiedzieć, że

$$\text{gdy } m = n-3, \text{ jest } Q \leqslant q + p - 1$$

$$\text{„} \quad m > n-3, \quad \text{„} \quad Q \leqslant q + p.$$

B r i l l i N o e t h e r (Matb. Ann. VII) znaleźli g r a n i c ę n i ż s z ą dla Q; j e s t m i a n o w i c i e z a w s z e:

$$Q \geqslant \frac{(q+p+1)}{q+1}.$$

Nadto, jeżeli położymy:

$$Q(q+1) - q(q+p+1) = r,$$

to można powiedzieć, że istnieje ∞^r układów o Q punktach i o wielokrotności q.

Jeżeli $r=0$, to liczba tych układów jest skończona i równa się:

$$\frac{2!\,3!\ldots q.\,2!\ldots\ldots(p-1-Q+q)!\,p!}{2!\,3!\ldots(2q+p-Q)!}$$

(Castelnuovo, Lincei 1889).

Dla $q=1$ liczba ta równa się:

$$\frac{p!}{(p-Q+1)!\,(p-Q+2)!}$$

(Brill-Nöther Math. Ann. V).

Przez symbol G_Q^q oznaczmy grupę układu liniowego o Q punktach i o wielokrotności q, przez symbol g_Q^q — cały układ takich grup.

Jeżeli $Q>2p-2$, wtedy jest ściśle $q=Q-p$.

Jeżeli $Q=2p-2$, wtedy $q=p-1$, albo $p-2$ (przypadek układu niespecyalnego patrz niżej).

Jeżeli f jest krzywą nierozkładalną, wtedy istnieje p krzywych dołączonych, liniowo niezależnych rzędu $n-3$, które z krzywą f nie mają innych punktów wspólnych, prócz punktów wielokrotnych. Jeżeli f rozkłada się na k czynników, wtedy istnieje $p+k-1$ krzywych dołączonych liniowo-niezależnych rzędu $n-3$. (Christoffel, Annali di mat. X.)

Krzywe dołączone rzędu $n-3$ przecinają krzywą zasadniczą f w $2p-2$ punktach (jeżeli wyłączymy punkty osobliwe stałe). Otóż istnieje następujące ważne twierdzenie:

Każdy układ liniowo q-krotnie nieskończony o Q punktach może być zawsze wycięty na krzywej zasadniczej f przez układ krzywych dołączonych rzędu $n-3$, o ile tylko $q \geqslant Q-p+1$. Warunek ten wyłącza (na zasadzie twierdzenia już podanego), aby było $Q > 2p-2$.

W szczególności:

Jeżeli pęk ($q=1$) krzywych dołączonych ma p przecięć ruchomych z krzywą f, wtedy każda grupa takich p punktów leży na krzywej dołączonej rzędu $n-3$.

Grupa Q punktów, przez które przechodzi co najmniej jedna krzywa dołączona rzędu $n-3$, nazywa się grupą specyalną; układ, do którego ta grupa należy, nazywa się układem specyalnym.

Układ g_{2p-2}^{p-1} nazywa się układem kanonicznym. Układ ten nie ma punktów stałych i jest jedynym.

Jednem z twierdzeń zasadniczych w teoryi, o której obecnie mówimy, jest tak zwane twierdzenie o reszcie (Restsatz), które pokazuje w pewien sposób, że grupy punktów na krzywej można rozważać jako coś niezależnego od krzywych przecinających.

Dwie grupy punktów G_Q, $G_{Q'}$ nazywają się spółresztowemi (kerezydualnemi), jeżeli istnieje inna grupa G_R taka, że dwie grupy G_Q i G_R przedstawiają wszystkie przecięcia ruchome (z wyłączeniem punktów osobliwych) krzywej dołączonej do krzywej f, i jeżeli grupy G_Q i G_R przedstawiają wszystkie przecięcia ruchome innej krzywej dołączonej. Dwie grupy G_Q i G_R nazywają się wzajemnie-resztowemi.

Twierdzenie o reszcie brzmi:

Jeżeli grupy G_Q i $G_{Q'}$ są spółresztowemi względem grupy G_R, to będą także spółresztowemi względem każdej innej grupy $G_{R'}$, które razem z niemi tworzy układ zupełny przecięć ruchomych jakiejkolwiek innej krzywej z krzywą f. Innemi słowy: własność dwu grup punktów, wyrażająca ich spółresztowość, jest niezależna od grupy punktów resztowej dla obu,

t. j. niezależna od krzywych, przecinających, wyznaczających na krzywej f grupy punktów. Albo jeszcze inaczej: jeżeli przez grupę G_Q punktów przesuniemy krzywą dołączoną, przecinającą krzywą f według grupy $G_{R'}$, wtedy grupy $G_{R'}$ i $G_{Q'}$ tworzyć będą układ zupełny przecięć ruchomych krzywej dołączonej z krzywą f.

Twierdzenie to, uważane algebraicznie, znajdujemy w pracy Brilla-Nöthera (Göttig Nachr. 1883 i Math. Ann. VII), ale początek jego tkwi w pracy Abela o całkach przestępnych (patrz odnośny rozdział w T. I „Repertoryum").

Niechaj będzie grupa punktów Q, należąca do układu liniowego g^q_Q i niechaj $\tau = r+1$ będzie liczbą krzywych dołączonych liniowo-niezależnych rzędu $n-3$, przechodzących przez punkty Q, wtedy wielokrotność q wyraża się wzorem:

$$q = Q - p + r + 1.$$

Jest to twierdzenie zwane twierdzeniem Riemanna-Rocha (Crelle LXIV); odkryto je przy badaniu teoryi funkcyj algebraicznych (patrz „Repertoryum" t. I, str. 339). Liczba r przedstawia w niem liczbę parametrów niejednorodnych, zachodzących w równaniu ogólnem krzywej dołączonej rzędu $n-3$, przechodzącej przez punkty Q; daje ono wielokrotność układu takich krzywych. Dla układu ogólnego (niespecyalnego) jest $r+1=0$.

Twierdzenie Riemanna-Rocha można przedstawić w postaci następującej, której nadajemy nazwę twierdzenia o wzajemności Brilla i Nöthera (tak nazwał je Klein):

Krzywa dołączona rzędu $n-3$ przecina krzywą f w $2p-2$ punktach, które dzielą się na dwie grupy o Q i R punktach ($Q+R=2p-2$). Grupa pierwszych Q punktów należy do układu niowego o wielokrotności q; grupa drugich R punktów należy do układu liniowego wielokrotności r, przyczem sprawdzają się związki:

$$q-r=Q-p+1;\quad r-q=R-p+1.$$

Z twierdzenia Riemanna-Rocha wypływa następujące, zwane twierdzeniem Clifforda (Phil. Trans. 1878).

Jeżeli układ g^q_Q jest specyalnym (t. j. jeżeli odpowiadająca mu liczba $r+1$ jest większa od zera) wtedy być musi $Q\geqslant 2q$.

W układzie liniowym g^q_Q istnieją pewne grupy punktów Q, należące do układu, mające dwa lub więcej punktów zlewających się; te punkty nazywamy punktami wielokrotnemi układu.

Liczbę punktów $(q+1)$-krotnych, należących do układu, wyraża wzór

$$(q+1)(Q+qp-q).$$

Patrz Brill, Math. Ann. IV; Clebsch-Lindemann, „Geometrie“. Pytaniami tego rodzaju zajmowali się: De Jonquières (Crelle LXVI), Cayley (Phil. Trans. CLVII) i inni.

W układzie g^{p-1}_{2p-2}, t. j. w układzie wszystkich grup punktów na krzywej f, powstałych z przecięcia jej wszystkiemi krzywemi dołączonemi rzędu n—3, istnieje w ogóle skończona liczba grup o p—1 punktach—każdy z nich liczony jest dwa razy; liczba ta wynosi $2^{p-1}(2^p-1)$. Grupy te odpowiadają krzywym dołączonym rzędu $n-3$, stycznym do krzywej f w każdym punkcie spotkania z tą krzywą.

Istnieje $2^{p-1}(2^p+1)$ krzywych dołączonych rzędu $n-2$, stycznych do krzywej f w p punktach.

Krzywa f może być wszakże taka, iż grup rzeczonych może być w niej nieskończenie wiele, a mianowicie ∞^{n-1} $(m=2, 3\ldots)$.

Badaniem takich układów, ważnem dla teoryi funkcyj ebelowych, zajmowali się pierwsi: Weber (Math. Ann. XIII i Kraus (tamże XVI).

Naturę krzywych f w przypadku nieskończonej liczby takich grup określają następujące twierdzenia Krausa:

Typem krzywej f, posiadającej ∞^1 grup o $p-1$ punktach, w których krzywa dołączona rzędu $n-3$ jest do niej styczna, jest, gdy $p>3$, krzywa rzędu $p+1$, mająca punkt taki, w którym dotyka samej siebie (punkt samostyczności), oraz $\frac{(p-4)(p+1)}{2}$ punktów podwójnych, położonych na krzywej rzędu $p-4$. Gdy $p=3$, mamy wtedy krzywą f rzędu piątego z punktem potrójnym.

Typem krzywej f, na której istnieje układ ∞^2 grup o $p-1$ punktach takich, o jakich mowa wyżej, jest krzywa rzędu $p-1$, mająca $\frac{(p-1)(p-6)}{2}$ punktów podwójnych, położonych na krzywej dołączonej rzędu $p-6$. Najmniejszym rodzajem dla krzywej w mowie będącej jest $p=6$.

Typem krzywej z układem ∞^{m-1} $(m>3)$ grup punktów, o jakich mowa, jest krzywa rzędu $p-m+2$, mająca $\frac{(p-m)^2-(p+m)}{2}$ punktów podwójnych, położonych na krzywej dołączonej rzędu $p-m+3$, która dotyka krzywej zasadniczej jeszcze w $m-3$ innych punktach. Najmniejszą wartością dla p w przypadku $m=4$ jest $p=q$.

Istnienie takich układów grup odpowiada istnieniu funkcyj ϑ, które znikają wraz ze wszystkiemi swojemi pochodnemi dla argumentu zero; w szczegóły wdawać się tu nie będziemy i odsyłamy czytelnika do cytowanej pracy Webera.

Punkty styczności w liczbie $(p-1)+(p-1)$ $=2p-2$ dwu krzywych dołączonych stycznych rzędu $n-3$, należących do tego samego układu, leżą na innej takiej krzywej dołączonej rzędu $n-3$ (Tw. Webera).

Wypływa stąd istnienie pewnych zależności kwadratowych tożsamościowych pomiędzy stronami pierwszemi równań dwu krzywych dołączonych rzędu $n-3$.

Ważną kategoryę krzywych stanowią krzywe, zwane hypereliptycznemi. Ze stanowiska teoryi grup punktów określamy te krzywe, jako posiadające układ $g_2{}^1$.

W układzie $g_2{}^1$ istnieje $2p+2$ par punktów zlewających się.

W krzywej hypereliptycznej punkty te są rozmieszczone parami w ten sposób, że każda krzywa dołączona rzędu $n-3$, przechodząca przez jeden z punktów pary, przechodzi koniecznie i przez punkt drugi.

Ważne znaczenie w zajmującej nas teoryi oraz rozmaite zastosowania posiada wzór, nazwany wzorem odpowiedniości (Corespondenzformel) Cayley'a i Brilla, będący uogólnieniem wzoru Chasles'a, o którym była mowa w § 2 Rozdziału I. Niechaj będzie związek:

$$\Phi\ (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$$

stopnia r względem spółrzędnych x, stopnia s względem spółrzędnych y. Jeżeli damy sobie punkt (x), to związek ten określi krzywą na płaszczyźnie, przecinającą krzywą zasadniczą f w ns punktach; a jeżeli damy sobie punkt (y), to związek określi nam krzywą, która przetnie krzywą f w ns punktach. Wybierzmy punkty (x) i (y) na krzywej f. Zmieniając punkt (x) na krzywej f, otrzymamy na niej szereg grup o ns punktach, a zmieniając (y), otrzymamy na krzywej f szereg grup o nr punktach. Mamy zatem odpowiedniość pomiędzy dwoma szeregami grup punktów na krzywej f. Wzór, o którym mówimy, daje nam liczbę punktów zjednoczonych tej odpowiedniości.

Przyjmijmy, że jednemu punktowi (x) odpowiada β punktów (y), danych przez przecięcie krzywej szeregu drugiego z krzywą f; że ta krzywa spotyka nadto krzywą f w γ punktach zlewających się z punktem (x); oraz że jednemu punktowi (y) odpowiada a punktów, danych przez przecięcie z krzywą f krzywej szeregu drugiego. Ta krzywa szerego drugiego powinna przejść jeszcze γ razy przez punkty (y), a liczbę punktów (x), zlewających się z odpowiadającemi im punktami (y), daje wyrażenie:

$$a + \beta + 2\gamma p.$$

Jeżeli $p=0$ (t. j. jeżeli f jest krzywą wymierną), wtedy wzór ten redukuje się do wzoru Chasles'a.

Punkty zlewające się tworzą zawsze układ zupełny przecięć krzywej f z inną krzywą.

Powyższe twierdzenie podał poraz pierwszy Cayley (Compt. rend. LXII, Proc. Lond. Math. Soc. I), dowód zaś podał Brill (Math. Ann. VI, VII, XXXI; patrz także Junker Dissert. Tybinga 1889). Inne dowody dali: Schubert (Calcul der abzähl. Geom. § 18), Bobek (Wien. Acad. XCIII)), Lindemann (Crelle, LXXXIV), Hurwitz (Math. Ann. XXVIII), Zeuthen (Math. Ann. XL), Segre (Annali di mat. XXII, § 12). Niektórzy autorowie (jak np. Hurwitz) podali twierdzenie jeszcze ogólniejsze. Porów. osobny paragraf, poświęcony temu twierdzeniu w „Geometryi" Clebscha-Lindemanna.

Geometryę grup punktów na krzywej utworzył,—rzec można—Riemann, który rozważał ją—co w istocie rzeczy wychodzi na jedno—z punktu widzenia teoryi funkcyj algebraicznych (patrz „Repertoryum" t. I, Rozdz. XV). Później teorya ta rozwijała się w różnych kierunkach. Kierunek, który możnaby nazwać funkcyjnym (lub teoretyczno-funkcyjnym), bierze początek od Riemanna oraz w licznych pracach o całkach abelowych; kierunek algebraiczno-geometryczny rozpoczyna się od rozprawy podstawowej Brilla-Noethera (Math. Ann. VII); mamy wreszcie kierunek algebraiczno-arytmetyczny Kroneckera, Dedekinda, Webera. W ostatnich czasach przybył jeszcze kierunek geometryczny czysty, o którym można powziąć wyobrażenie z nowej pracy Segrego (Annali di mat. XXII).

Teorya grup punktów jest wielce ważną w badaniu przekształcenia dwujednoznacznego krzywych płaskich (patrz niżej), gdyż dla tego przekształcenia własności grup mają cechy niezmiennicze.

Dla krótkości nie wymieniamy tu licznych innych prac Noethera, Brilla i t. d. Küpper, Bobek, Amodeo (patrz Lincei 1893, Annali di mat. XXI, XXIV, Acc. Nap. 1896) badali krzywe zwane k-gonalnemi; są to krzywe, posiadające szereg liniowy g_k^1 i nie mające szeregu liniowego jednokrotnie nieskończonego stopnia niższego; krzywe hypereliptyczne są ich szczególnym przypadkiem. Oczywiście, każda krzywa jest k-gonalną, o ile k ma wartość odpowiednią. Teorya, o której mówimy, jest traktowana metodą algebraiczną w nowej pracy Bertini'ego (Ann. di mat. XXII). Wskazówki, dotyczące tego przedmiotu, znaleść można w pracy historycznej Brilla-Noethera, ogłoszonej w Jahresber. d. Deutschen M., V, III, 1892—1893.

---

§ 5.

Przekształcenia dwujednoznaczne płaszczyzny lub krzywych płaskich. Przekształcenia wielokrotne.

Połóżmy:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

Znak $=$ jest tu znakiem proporcyonalności: w istocie tedy związków jest dwa a nie trzy; f_i—są funkcyami wymiernemi całkowitemi stopnia n-tego względem x_1, x_2, x_3 bez czynnika wspólnego. Przyjmijmy, że rozwiązując równania (1), otrzymujemy związki:

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

w którym φ_i są także funkcyami wymiernemi całkowitemi. Mówimy wtedy, że równania (1) określają przekształcenie dwuwymierne albo dwujednoznaczne płaskie w tem znaczeniu, że przez nie dwie płaszczyzny (płaszczyzna x i płaszczyzna y, które mogą być także nałożonemi) odpowiadają sobie w ten sposób: iż *punktowi jednej z nich odpowiada jeden i tylko jeden punkt drugiej, i odwrotnie.*

Przekształcenie takie nazywa się także *przekształceniem Cremony* (kremoniańskiem) od nazwiska uczonego, który po raz pierwszy przedstawił teoryę tego przekształcenia w całej ogólności.

Pierwsza własność zasadnicza tego podstawienia jest następująca:

Stopień funkcyj φ_i *powinien być taki sam, jak stopień funkcyj* f_i.

Dalej:

Aby przekształcenie było dwujednoznacznem, jest koniecznem, by sieć, utworzona z trzech krzywych $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$, *miała* n^2-1 *punktów stałych* (punktów zasadniczych przekształcenia). Sieć taka nazywa się, jak wiemy, homaloidalną.

Toż samo oczywiście stosuje się do sieci trzech krzywych $\varphi_i=0$.

Krzywe $f_i=0$ i $\varphi_i=0$ *powinny być wszystkie rodzaju zero, a ich punkty wielokrotne powinny znajdować się pomiędzy punktami zasadniczemi przekształcenia.*

Niechaj pomiędzy n^2-1 punktami zasadniczemi przekształcenia będzie a_1 punktów pojedyńczych dla wszystkich krzywych, a_2—punktów podwójnych, ... a_{n-1} punktów n—1-krotnych dla wszystkich krzywych; wtedy *pomiędzy liczbami* a *zachodzą trzy związki następujące, z których każdy jest wynikiem dwóch innych:*

$$a_1+4a_2+9a_3+\ldots\ldots+(n^2-1)\,a_{n-1}=n^2-1,$$

$$a_2+3a_3+\ldots\ldots+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\,a_{n-1}=\frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

$$a_1+3a_2+6a_3+\ldots+\frac{1}{2}\,n\,(n-1)\,a_{n-1}=\frac{1}{2}\,n\,(n+3)\quad 2,$$

Dawszy sobie wartość n, możemy z tych wzorów znaleść wartości możliwe dla liczb a; do tego celu służą tablice, ułożone przez Cremonę i Cayley'a.

Punkt zasadniczy k-krotny dla wszystkich krzywych przekształcenia nazywa się punktem zasadniczym rzędu k-tego.

Wzory powyższe utrzymują się, jeżeli krzywe f (i φ) nie mają stycznych wspólnych w punktach zasadniczych.

Punktowi zasadniczemu rzędu k-go na jednej płaszczyźnie odpowiada na drugiej krzywa rzędu k i rodzaju zero (krzywa zasadnicza k-ta)

Krzywe zasadnicze płaszczyzny mają punkty wielokrotne w punktach zasadniczych tejże płaszczyzny i tylko w tych punktach się przecinają.

Krzywa zasadnicza k-ta przechodzi przez punkt zasadniczy rzędu h razy a_{kh}, gdzie a_{kh} jest zarazem liczbą wyrażającą, ile razy krzywa zasadnicza rzędu h przechodzi przez punkt zasadniczy rzędu k. Jest tedy $a_{kh} = a_{hk}$; nadto wyznacznik $|a_{hk}| = \pm 1$.

Krzywa zasadnicza przechodzi $3k-1$ razy przez punkt zasadniczy rzędu k.

Jeżeli a_i oznacza, jak wyżej, liczbę punktów zasadniczych rzędu i dla jednej z płaszczyzn, β_i liczbę analogiczną dla drugiej, wtedy $\Sigma a_i = \Sigma \beta_i$, a liczby β różnią się od liczb a tylko porządkiem (Tw. Cremony).

Sama trzech liczb rzędowych trzech punktów zasadniczych rzędu najwyższego jest zawsze większa od n.

Wielce ważnem jest twierdzenie następujące:

Każde przekształcenie kremoniańskie można zastąpić skończoną liczbą przekształceń kwadratowych, których trzema punktami zasadniczemi są trzy punkty zasadnicze najwyższego rzędu przekształcenia pierwotnego.

Twierdzenie to podali: Clifford (patrz Cayley, Proc. of the Lond. math. Soc. III), Noether (Math. Ann. III, V), Rosanes (Crelle, LXXIII).

Na mocy przekształcenia kwadratowego ($n=2$), prostym na jednej płaszczyźnie odpowiadają na drugiej stożkowe, przechodzące przez trzy punkty stałe; punktowi przecięcia dwu prostych odpowiada czwarty punkt przecięcia odpowiednich stożkowych.

Równania przekształcenia kwadratowego dają się zawsze sprowadzić do postaci (Tw. Cayley'a):

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 .$$

Umieśćmy dwa punkty zasadnicze w dwóch punktach kołowych płaszczyzny, trzeci zaś w początku spółrzędnych kartezyańskich; otrzymamy wtedy przekształcenie zwane przekształceniem przez promienie wodzące odwrotne lub przez inwersyę (odwrócenie); niektórzy nazywają inwersyą przekształcenie kwadratowe ogólne.

Przekształcenie kwadratowe sprawia, iż krzywej rzędu m-tego, przechodzącej k_1, k_2, k_3 razy przez trzy punkty zasadnicze, odpowiada krzywa rzędu $2m-k_1-k_2-k_3$, przechodząca razy $m-(k_2+k_3)$, $m-(k_3+k_1)$, $m-(k_1+k_2)$ przez punkty zasadnicze własnej płaszczyzny.

Przekształcenie rzędu n-tego sprawia, że krzywej rzędu m-tego, przechodzącej l_i razy przez punkt zasadniczy rzędu r_i, odpowiada krzywa rzędu $\mu = nm - \Sigma r_i l_i$, przechodząca $\lambda_k = ms_k - \Sigma_i r_i a_{ik}$ razy przez punkt zasadniczy rzędu s_k (znaczenie liczb a_{ik} podaliśmy wyżej na str. 214).

Jeżeli chcemy, aby przekształcenie było dwujednoznacznem nie dla całej płaszczyzny, lecz tylko dla punktów dwóch odpowiadających sobie krzywych F i F', wtedy nie jest koniecznem, aby sieć przekształcenia była homaloidalną. Trzeba wszakże, aby krzywe sieci, które przecinają się w jednym punkcie krzywej F, nie przecinały się już w innym punkcie tejże krzywej, o ile ten drugi punkt nie jest punktem zasadniczym, t.j. wspólnym wszystkim krzywym sieci.

Rodzaj krzywej nie zmienia się wskutek przekształcenia dwuwymiernego (Twierdzenie Riemanna o zachowaniu rodzaju).

Krzywa nieprzywiedlna wymierna daje się dwuwymiernie przekształcać na prostą.

Krzywa rodzaju 1 (eliptyczna) może być dwuwymiernie przekształcona na krzywą rzędu 3-go

Krzywe dołączone rzędu $n-3$ mają własność wielce ciekawą dla przekształcenia dwuwymiernego, mianowicie:

Jeżeli wskutek przekształcenia dwuwymiernego krzywa F rzędu n-tego przekształca się na krzywą F' rzędu ν-tego, wtedy układ punktów przecięcia z krzywemi dołączonemi rzędu $n-3$ krzywej F przekształca się na układ punktów przecięcia krzywej F' z jej krzywemi dołączonemi rzędu $\nu-3$.

Rozważmy sieć krzywych rzędu $n-3$ dołączonych do danej krzywej F rodzaju p; weźmy punkty podstawowe sieci wszystkie na krzywej F i przyjmijmy wreszcie tę sieć za podstawę przekształcenia dwuwymiernego krzywej, wtedy krzywa F przekształca się na krzywą rzędu $p+1$ z punktami wielokrotnemi równoważnemi $\frac{1}{2}p(p-3)$ punktom podwójnym. Krzywą taką można przyjąć za typ normalny krzywej rodzaju p.

Jeżeli na krzywej F wybierzemy w sposób specyalny $p-3$ punktów podstawowych sieci, wtedy krzywa przekształcona stanie się krzywą rzędu możliwie najmniejszego, na którą przekształcić się daje krzywa rodzaju p; tym rzędem najmniejszym jest odpowiednio: $2\pi+2$, jeżeli $p=3\pi$; $2\pi+3$, jeżeli $p=3\pi+1$; $2\pi+4$, jeżeli $p=3\pi+2$ (Brill-Noether, Math. Ann. VII).

Z temi zagadnieniami wiąże się zagadnienie o wyznaczeniu liczby modułów krzywej rodzaju danego, t. j. liczby tych funkcyj spółczynników równania krzywej, które zachowują się jak niezmienniki bezwzględne względem jakiegokolwiek przekształcenia dwuwymiernego. Dochodzimy tu do wyniku następującego (Riemann):

Dla $p=0$, t. j. dla krzywych wymiernych, liczba modułów jest zerem; dla $p=1$, t. j. dla krzywych eliptycznych, liczba modułów jest 1; dla $p>1$ liczba modułów jest $3p-3$.

Ważnem zastosowaniem przekształcenia kremoniańskiego płaszczyzny jest tak nazwany rozkład osobliwości.

Przy pomocy tego przekształcenia można z krzywej o punktach wielokrotnych ze zlewającemi się stycznemi otrzymać krzywą, mającą tylko osobliwości zwyczajne, t. j. jedynie punkty wielokrotne o stycznych różnych (Noether, Göth. Nachr. 1871, Math. Ann. IX). Stąd: za pomocą przekształceń dwuwymiernych krzywa, mająca tylko osobliwości zwyczajne, daje się zamienić na krzywą, mającą tylko punkty podwójne.

Przekształcenia dwuwymierne kwadratowe badali już Magnus (Sammlung von Anfg. Berlin, 1833) i Steiner (Crelle VIII), lecz teoryę ogólną tych przekształceń utworzył dopiero Cremona (Acc. Bologna, 1863, 1865; Giorn. di Battagłini I, III). Nadto ważnemi są tu prace: Cayley'a (Proc. Lond. math. Soc. III, 1870), Rosanesa (Crelle, LXXIII), Clebscha (Math. Ann. III), Noethera (tamże V). Wykład teoryi przekształceń pomiędzy płaszczyznami oraz pomiędzy krzywemi znajdujemy w „Geometryi" Clebscha-Lindemanna.

Badano także przekształcenia niedwujednoznaczne (wielokrotne) pomiędzy dwiema płaszczyznami oraz takież przekształcenia pomiędzy dwiema krzywemi.

Zeuthen podał wzór, wyrażający związek pomiędzy rodzajami dwóch krzywych, będących w odpowiedniości niedwujednoznacznej (Math. Ann. III). Niechaj będą dwie krzywe rodzajów p i p', odpowiadające sobie w ten sposób, że każdemu punktowi pierwszej odpowiada m punktów drugiej, każdemu punktowi drugiej m' punktów pierwszej. Niechaj na pierwszej krzywej pomiędzy punktami odpowiadającemi punktom na drugiej, przypada μ razy zlanie się dwu punktów; odpowiednią liczbą dla krzywej drugiej niechaj będzie μ'; wzór Zeuthena jest:

$$\mu - \mu' = 2m'(p-1) - 2m(p'-1).$$

W przypadku $m = m' = 1$ mamy odpowiedniość dwujednoznaczną, i wtedy wypada z niego $p = p'$ (twierdz. Riemanna). Pomiędzy odpowiedniościami wielokrotnemi dwu płaszczyzn zawierają się odpowiedniości izogonalne, t. j. takie, przy których kąty zachowują się bez zmiany (patrz dzieło Holzmüllera, Theorie der isogon. Verwandsch. Lipsk 1883).

Najważniejszemi pracami o przekształceniach wielokrotnych są następujące: Wienera (Math. Ann. III) De Paolisa (Mem. Lincei 1877—8), Noethera (Erlang. Ber. 1878), Junga (Rend. Lincei 1886, Ist. Lomb. 188), Bertini'ego (Ist. Lomb. 1889).

ROZDZIAL VIII.

KRZYWE SZEŚCIENNE PŁASKIE.

---

§ 1.

Wiadomości ogólne o krzywych sześciennych płaskich. Punkty przegięcia. Punkty stycznościowe.

Równanie ogólne krzywej rzędu 3-go zawiera jednorodnie dziesięć spółczynników, a więc przez dziewięć punktów, dowolnie danych na płaszczyźnie, przechodzi w ogóle jedna krzywa sześcienna.

Te dziewięć punktów pozostawać mogą wszakże w takiej zależności wzajemnej, że przez nie przechodzi nieskończenie wiele krzywych sześciennych.

Wszystkie krzywe sześcienne, przechodzące przez ośm punktów płaszczyzny, przechodzą też przez punkt dziewiąty, przez tamte określony.

Krzywa sześcienna jest w ogóle krzywą klasy szóstej i rodzaju 1; ma ona dziewięć punktów przegięcia.

Jeżeli krzywa sześcienna ma punkt podwójny, wtedy jest rodzaju 0, należy do klasy 4-ej i ma trzy punkty przegięcia na jednej prostej; równanie jej w tym razie zależy od ośmiu stałych.

Jeżeli krzywa sześcienna ma ostrze, wtedy jest rodzaju 0, klasy 3-ej, liczba jej przegięć jest 1; równanie takiej krzywej zależy od siedmiu stałych.

Prosta, łącząca dwa punkty przegięcia, przechodzi zawsze przez trzeci punkt przegięcia.

Dziewięć punktów przegięcia leży trójkami na dwunastu prostych; przez każdy punkt przecięcia przechodzą cztery takie proste.

Dziewięć punktów przegięcia nie wszystkie mogą być rzeczywistemi; najwyżej trzy z nich są rzeczywiste.

Cztery proste, przechodzące przez punkt przegięcia, tworzą grupę równo-anharmoniczną.

Powyższe dwanaście prostych tworzą cztery trójki prostych takich, że każda trójka zawiera wszystkie dziewięć punktów przegięcia.

Każdy z trójkątów, którego bokami są proste tej trójki, nazywa się trójkątem przegięcia.

Przez dziewięć punktów przegięcia krzywej sześciennej przechodzi nieskończenie wiele krzywych sześciennych z temiż samemi punktami przegięcia; pęk tych wszystkich krzywych sześciennych, nazywa się pękiem syzygetycznym.

Niechaj $f=0$ będzie równaniem danej krzywej sześciennej, $H=0$ — równaniem należącej do niej krzywej Hessego (patrz Rozdz. V): wtedy równanie pęku syzygetycznego jest postaci:

$$\lambda_1 f + \lambda_2 H = 0.$$

Pomiędzy krzywemi tego pęku zawierają się także i cztery trójkąty przegięcia.

Stożkowa biegunowa punktu przegięcia rozpada się na dwie proste, z których jedna jest styczną przegięcia, druga zaś, nosząca nazwę biegunowej harmonicznej punktu przegięcia, ma własność taką, że każda prosta przesunięta przez punkt przegięcia, przecina ją w punkcie, który jest sprzężony harmonicznie z punktem przegięcia względem dwu punktów, w których ta prosta przecina krzywą sześcienną. Stąd wynika:

Biegunowa harmoniczna punktu przegięcia przecina krzywą sześcienną w trzech punktach, które są punktami styczności stycznych, poprowadzonych do krzywej sześciennej z punktu przegięcia.

Wszystkie krzywe sześcienne pęku syzygetycznego mają też same biegunowe harmoniczne.

Styczne w dwóch punktach przegięcia spotykają się na biegunowej harmonicznej punktu przegięcia, leżącego na jednej prostej z dwoma danemi punktami przegięcia.

Biegunowe harmoniczne trzech punktów przegięcia, leżących na jednej prostej, spotykają się w jednym punkcie

Każdemu punktowi krzywej sześciennej odpowiada inny punkt, będący punktem przecięcia krzywej z prostą styczną do niej w punkcie danym. Ten punkt nazywa się punktem stycznościowym (towarzyszącym) punktu danego.

Trzy punkty stycznościowe trzech punktów, leżących na prostej, leżą także na linii prostej (towarzyszącej).

Na płaszczyźnie leży prosta (towarzysząca prostej w nieskończoności), mająca własność, iż odległość od niej punktu na linii krzywej jest w stosunku stałym do iloczynu odległości tegoż punktu od trzech asymptot (t.j. stycznych w trzech punktach w nieskończoności).

Cztery punkty styczności czterech stycznych, które z punktu P krzywej sześciennej poprowadzić do niej można, tworzą czworokąt, mający trzy punkty przekątne, położone na krzywej; styczne do krzywej w tych trzech punktach wraz z styczną w punkcie P spotykają się w tym samym punkcie krzywej.

Stosunek anharmoniczny czterech stycznych, które z punktu krzywej sześciennej poprowadzić do niej można, pozostaje stałym przy przy zmianie tego punktu. Własność ta jest bardzo ważną.

Przez punkt A krzywej sześciennej poprowadźmy prostą, spotykającą krzywą w dwu innych punktach P i Q, i utwórzmy czworokąt zupełny, mający wierzchołki w czterech punktach, których punkt A jest punktem stycznościowym; dwa boki przeciwległe tego czworokąta przecinają prostą daną w dwu punktach harmonicznie sprzężonych z punktami P i Q (Twierdzenie Mac aurina).

Jeżeli punkty stycznościowe trzech punktów A, B, C znajdują się na jednej linii prostej, to i punkty A', B', C', w których proste BC, CA, AB przecinają ponownie krzywą, znajdować się będą na linii prostej.

Istnieje nieskończenie wiele wielokątów o $2n$ bokach i $2n$ wierzchołkach takich, że gdy ich wierzchołki leżą na krzywej sześciennej, to ich boki parzyste spotykają się wszystkie w jednym punkcie A, boki zaś nieparzyste spotykają się wszystkie w jednym punkcie B. Punkty A i B nazywają się stowarzyszonemi, a wielokąty noszą nazwę wielokątów Steinera (Crelle, XXXII).

Badanie tych wielokątow przeprowadza się najlepiej przy pomocy teoryi funkcyj eliptycznych (patrz niżej).

Krzywa Hessego i krzywa Steinera dla krzywej sześciennej są identycznemi i są krzywemi rzędu 3-go.

Krzywa Cayley'a dla krzywej sześciennej jest krzywą klasy 3-ej i rzędu 6-go; jest ona obwiednią wszystkich stożkowych biegunowych punktów płaszczyzny, które to stożkowe rozpadają się na dwie proste.

Każdą krzywą sześcienną można uważać za krzywą Hessego trzech innych, a każdą krzywą klasy 3-ej można uważać za krzywą Cayley'a krzywej sześciennej.

Niechaj będą dwie proste u, u'; rozważmy pęk stożkowych biegunowych punktów prostej u względem krzywej sześciennej. Biegun prostej u' względem każdej stożkowej pęku przebiega stożkową, która nazywa się stożkową biegunów mieszaną (poloconica mista) obu prostych (Cremona).

Jeżeli proste zlewają się, będzie:

Krzywa obwiednia prostej biegunowej wszystkich punktów prostej względej krzywej sześciennej jest stożkową, którą nazywamy stożkową biegunów czystą (poloconica pura).

Stożkowa biegunów prostej czysta dotyka krzywej Hessego w trzech punktach, w których taż prosta dotyka samej krzywej Hessego.

Jeżeli z punktu a płaszczyzny poprowadzimy sześć stycznych do stożkowej, to punkty stycznościowe sześciu punktów styczności znajdować się będą na jednej stożkowej, która nazywa się stożkową towarzyszącą (conica satellita) punktu a (Cremona) lub stożkowej biegunowej punktu a (na tej stożkowej znajduje się sześć punktów styczności stycznych).

Stożkowa biegunowa punktu i stożkowa towarzysząca tegoż punktu dotykają się wzajemnie w dwu punktach, w których przecina obie prosta biegunowa punktu.

Jeżeli stożkowa ma z krzywą rzędu 3-go dwa punkty styczności rzędu 2-go (t. j. dwa punkty, z których każdy może być uważany jako zjednoczenie trzech punktów nieskończenie bliskich), wtedy prosta, łącząca takie dwa punkty, przechodzi przez punkt przegięcia. Istnieje dziewięć układów takich stożkowych.

Przez każdy punkt styczności stycznej, poprowadzonej do krzywej sześciennej z punktu przegięcia, przechodzi stożkowa, mająca z krzywą sześcienną w tym punkcie styczność rzędu 5-go.

Punkt krzywej sześciennej, w którym stożkowa może mieć z krzywą styczność rzędu 5-go, nazywa się punktem sześciopunktowej styczności (sestatico, sextactique) krzywej.

Na krzywej sześciennej jest 27 punktów sześciopunktowej styczności; odpowiadają one 27 punktom przecięcia krzywej sześciennej z dziewięcioma biegunowemi harmonicznemi.

Istnieją trzy różne układy, złożone z ∞^2 stożkowych, dotykających krzywej rzędu 3-go w trzech punktach.

Punkty stycznościowe trzech punktów,

w których jedna z takich stożkowych dotyka krzywej sześciennej, leżą na linii prostej.

Krzywe sześcienne badali Newton (Enumeratio linearum tertii ordinis 1704) i Maclaurin (De linearum geometr. proprietatibus generalibus tractatus). W nowszych czasach teoryą tych krzywych zajmowali się: Plücker (System. der anal. Geom. 1835), Steiner (Werke, II), Hesse (Crelle XXVIII, XXXVI, XXXVIII), Salmon (Crelle, XLII), Cayley, Chasles, Cremona, Durège i wielu innych. Krzywe klasy 3-ej badali: Cayley (Journ. de Liouv. IX, 1844) Phil. Trans. 1857), Hesse, (l. c), Bellavitis (Ist. Veneto 1852) i t. d.

Głównemi dziełami, w których zebrano własności krzywych sześciennych, są: Cremona, Introd. etc., Salmon, Higher plane curves, Durège, Die ebenen Curven 3-er Ordnung, Lipsk 1871, Schroeter, Theorie der ebenen Curven, 3-er Ordn., Lipsk 1688, Clebsch-Lindemann, „Geometrie".

Clebsch pierwszy zastosował teoryę funkcyj eliptycznych do badania krzywych sześciennych płaskich (Crelle, LXIII). Patrz „Geometrie" Clebscha-Lindemanna i tom II dzieła „Fonctions elliptiques" Halphena. O własnościach krzywych sześciennych rodzaju zero (jednozbieżnych lub wymiernych) traktuje najnowsza praca Bindera „Theorie der unicursalen Plancurven, Lipsk 1896.

---

§ 2.

Tworzenie rzutowe krzywych sześciennych.

Niechaj będą na płaszczyźnie trzy pary punktów: A, A_1; B, B_1; C, C_1, takich, aby nie były wierzchołkami przeciwległemi czworoboku zupełnego; miejscem punktu P takiego, że trzy pary promieni PA, PA_1; PB, PB_1, PC, PC_1 są w inwolucyi, jest krzywa ogólna rzędu 3-go, przechodząca przez sześć punktów danych.

Do tegoż miejsca należą także punkty przecięcia prostych AB, A_1B_1; AB_1, A_1B; AC, A_1C_1; AC_1, A_1C . . . ; oznaczmy je odpow. przez D, D_1, E, E_1,... Punkty takie jak A,A_1; jak B, B_1; D, D_1 i t. d. nazywają się sprzężonemi.

Własność charakterystyczna dwu punktów sprzężonych jest następująca:

Styczne w dwu punktach sprzężonych spotykają się na krzywej w punkcie, który jest punktem sprzężonym trzeciego punktu przecięcia z krzywą prostej, łączącej dwa pierwotne punkty sprzężone.

Inne sposoby tworzenia rzutowego krzywych sześciennych są następujące:

Weźmy pęk stożkowych i pęk prostych oba wzajemnie rzutowe (parametry stożkowej i prostej obu pęków są związane równaniem dwuliniowem); wtedy miejscem punktów przecięcia promienia z odpowiadającą mu stożkową jest krzywa sześcienna, przechodząca przez środek pęku prostych i przez cztery punkty podstawowe pęku stożkowych (Chasles).

Jeżeli na krzywej sześciennej weźmiemy cztery punkty, jako punkty podstawowe pęku stożkowych, wtedy każda stożkowa tego pęku przetnie jeszcze krzywą w dwu punktach takich, że prosta je łącząca przechodzi przez punkt stały krzywej sześciennej (punkt przeciwległy czterem punktom danym).

Weźmy pasmo stożkowych stycznych do czterech prostych danych; z dwu punktów danych poprowadźmy dwie pary stycznych do każdej stożkowej pasma; miejscem punktów przecięcia tych stycznych będzie stożkowa ogólna.

Następujący sposób tworzenia stożkowych zawdzięczamy Grassmannowi: Punkt P opisuje krzywą rzędu 3-go, jeżeli proste, łączące go z trzema punktami stałemi, spotykają trzy proste stałe w trzech punktach, leżących na jednej linii prostej. W tym przypadku prosta ruchoma, na której znajdują się owe trzy punkty, obwodzi krzywą klasy 3-ej.

Inną konstrukcyę geometryczną podał Schroeter (Math. Ann. V).

O konstrukcyi krzywej sześciennej z danych jej dziewięciu punktów oraz o konstrukcyi dziewiątego punktu, przez który przechodzą wszystkie krzywe sześcienne pęku określonego przez ośm punktów, patrz głównie Chasles (Comptes rend. 1853), Cayley (Quart. Jour. of math. V, 1862), Cremona (Introd. etc.).

§ 3.

Formy kanoniczne równania krzywej sześciennej. Różne klasyfikacye krzywych sześciennych.

Weźmy jako wierzchołek ($x_1=0$, $x_3=0$) trójkąta podstawowego spółrzędnych punkt przegięcia krzywej; jako prostą $x_3=0$ — styczną przegięcia; jako prostą $x_2=0$ — biegunową harmoniczną tegoż punktu przegięcia, wtedy równaniem krzywej sześciennej w spółrzędnych jednorodnych będzie:

$$x_3x_2{}^2 = ax_1{}^3 + 3bx_1{}^2x_3 + 3cx_1x_3{}^2 + dx_3{}^3.$$

Jeżeli wielomian po stronie drugiej rozłożymy na jego trzy czynniki liniowe, wtedy każdy z tych czynników, przyrównany do zera, przedstawia odpowiednią styczną, którą z punktu przegięcia można poprowadzić do krzywej.

Jeżeli jako prostą $x_1=0$ obierzemy jednę z tych stycznych, wtedy równanie krzywej da się sprowadzić do postaci:

$$x_3x_2{}^2 = x_1(x_1-x_3)(x_1-k^2x_3),$$

lub także (przy innym odpowiednim wyborze osi $x_1=0$) do postaci:

$$x_3x_2^2 = 4x_1^3 - g_2x_1x_3^2 - g_3x_3^2.$$

Sprowadziwszy równanie krzywej sześciennej do jednej z postaci poprzedzających, widzimy, że spółrzędne punktu krzywej są proporcyonalne do funkcyj eliptycznych jednego parametru; można mianowicie napisać:

$$x_1 : x_1 : x_3 = p(u) : p'(u) : 1,$$

gdzie p, p' są funkcyami eliptycznemi Weierstrassa.

Jeżeli po sprowadzeniu równania krzywej sześciennej do ostatniej z powyższych postaci, będzie $g_3=0$, wtedy otrzymamy t. z. krzywą sześcienną harmoniczną, która ma tę własność, iż cztery styczne, poprowadzone z punktu krzywej do niej samej, tworzą grupę harmoniczną. Jeżeli zaś będzie $g_2=0$, wtedy mamy krzywą sześcienną równoanharmoniczną, mającą tę własność, iż cztery styczne, poprowadzone z punktu krzywej do niej samej, tworzą grupę równoanharmoniczną.

Jeżeli za trójkąt podstawowy spółrzędnych przyjmiemy jeden z trójkątów przegięcia, wtedy równaniem krzywej sześciennej będzie:

$$a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6bx_1x_2x_3 = 0.$$

Przy przyjęciu za trójkąt podstawowy trójkąta, utworzonego z trzech stycznych przegięcia, dochodzimy do równania:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 27kx_1x_2x_3 = 0.$$

Równanie krzywej sześciennej z punktem podwójnym (krzywej sześciennej wymiernej) daje się sprowadzić do postaci:

$$x_1^3 + x_2^3 + 6x_1x_2x_3 = 0,$$

jeżeli trójkątem podstawowym spółrzędnych jest trójkąt, utworzony z prostej $x_3=0$, na której znajdują się trzy punkty przegięcia i z dwóch stycznych w punkcie podwójnym ($x_1=0$, $x_2=0$).

Równanie krzywej sześciennej z ostrzem daje się sprowadzić do postaci:

$$x_2^3 - 3x_1^2 x_3 = 0,$$

jeżeli za trójkąt podstawowy spółrzędnych przyjmiemy trójkąt, utworzony ze stycznej ostrzowej ($x_1=0$), stycznej ($x_3=0$) w jedynym punkcie przegięcia i z prostej ($x_2=0$), łączącej ostrze z punktem przegięcia.

Jeżeli równanie krzywej sześciennej napiszemy w postaci:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0,$$

wtedy równaniem krzywej Hessego będzie:

$$H = -6m^2(x_1^3+x_2^3+x_3^3) + 6(1+2m^3)x_1x_2x_3 = 0;$$

równaniem krzywej Cayley'a w spółrzędnych prostej:

$$s = -6m(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) - 6(1-4m^3)u_1u_2u_3 = 0.$$

Równanie krzywej sześciennej można sprowadzić do postaci takiej, że zawiera tylko sześciany czterech form liniowych spółrzędnych. Jedna z tych form wybiera się dowolnie; przyrównana do zera, przedstawia ona prostą; jeżeli rozważymy pęk stożkowych biegunowych punktów tej prostej względem krzywej sześciennej, to trzy przekątne czworokąta, którego wierzchołkami są cztery punkty podstawowe pęku stożkowych, odpowiadają trzem pozostałym formom liniowym (patrz Salmon-Fiedler, Höh. Curv, nota 55).

Krzywa ogólna rzędu 3-go (bez punktów podwójnych), której równanie ma spółczynniki rzeczywiste, może mieć dwie różne postaci, t. j. składać się albo z jednej gałęzi rzeczywistej (rozciągającej się do nieskończoności), albo z dwu gałęzi rzeczywistych osobnych (patrz Rozdz. V, § 1). Krzywa, składająca się z jednej gałęzi rzeczywistej, ma własność, że z punktu jej można, prócz stycznej w tymże punkcie, poprowadzić do niej dwie styczne rzeczywiste (dwie inne są urojonemi). Krzywa, składająca się z dwu gałęzi, t. j. z owalu i z gałęzi, rozciągającej się do nieskończoności, ma własność, iż z żadnego punktu owalu nie można do niej poprowadzić stycznej rzeczywistej (prócz stycznej w uważanym punkcie), a z każdego punktu gałęzi, rozciągającej się do nieskończoności, można poprowadzić cztery styczne rzeczywiste do krzywej, dwie do owalu i dwie do gałęzi, do której uważany punkt należy.

Krzywe o jednej gałęzi różnią się od siebie według tego, w jaki sposób przecina je prosta w nieskończoności płaszczyzny; mamy tu krzywe następujące:

a) W ę ż o w n i c a e l i p t y c z n a ma jeden punkt rzeczywisty w nieskończoności, a styczna w tym punkcie rozciąga się w skończoności, jest przeto asymptotą do krzywej;

b) W ę ż o w n i c a p a r a b o l i c z n a, prócz punktu rzeczywistego w nieskończoności, posiada jeszcze punkty rzeczywiste i schodzące się z innemi dwoma punktami przecięcia; posiada tedy asymptotę w skończoności oraz prostą w nieskończoności jako styczną;

c) W ę ż o w n i c a h y p e r b o l i c z n a ma trzy punkty rzeczywiste w nieskończoności, a przeto trzy asymptoty w skończoności.

Krzywe o dwóch gałęziach są następujące:

a) W ę ż o w n i c a e l i p t y c z n a z o w a l e m e l i p t y c z n y m ma jeden punkt rzeczywisty w nieskończoności, położony na wężownicy.

b) W ę ż o w n i c a e l i p t y c z n a z o w a l e m p a r a b o l i c z n y m ma jeden punkt rzeczywisty w nieskończoności i dwa inne schodzące się i leżące na owalu, mającym postać paraboliczną.

c) Wężownica eliptyczna z owalem hyperbolicznym ma jeden punkt rzeczywisty w nieskończoności na wężownicy i dwa punkty rzeczywiste w nieskończoności na owalu postaci hyperbolicznej.

d) Wężownica paraboliczna z owalem eliptycznym ma trzy punkty rzeczywiste w nieskończoności, z nich przynajmniej dwa schodzące się, wszystkie położone na wężownicy;

e) Wężównica hyperboliczna z owalem eliptycznym: trzy punkty rzeczywiste różne w nieskończoności, wszystkie położone na wężownicy.

Inną klasyfikacyę krzywych rzędu 3-go, których równania mają spółczynniki rzeczywiste, podał Newton. Dzieli on te krzywe na pięć gatunków parabol rozbieżnych. Powiedzieliśmy już wyżej, że przy pomocy odpowiedniego przekształcenia rzeczywistego spółrzędnych równanie takiej krzywej rzędu 3-go daje się sprowadzić do typu:

$$x_3 x_2^2 = a x_1^3 + 3b x_1^2 x_3 + 3c x_1 x_3^2 + d x_3^2,$$

gdzie spółczynniki a, b, c, d są rzeczywistemi; w tym celu dość za prostą $x_3 = 0$ wziąć jednę ze stycznych przegięcia (rzeczywistych), za punkt $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ punkt przegięcia (rzeczywisty), za prostą $x_2 = 0$ biegunową harmoniczną tego punktu względem krzywej. Jeżeli przeniesiemy do nieskończoności styczną przegięcia $x_3 = 0$, wtedy równanie krzywej sześciennej w spółrzędnych kartezyańskich przybierze postać:

$$y^2 = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d.$$

Odpowiednio do natury czynników wielomianu po drugiej stronie otrzymamy jeden z pięciu gatunków parabol rozbieżnych w klasyfikacyi Newtona:

a) trzy czynniki wielomianu są wszystkie rzeczywiste; krzywa składa się z owalu i z wężownicy.

b) Jeden tylko czynnik jest rzeczywisty: krzywa składa się jedynie z wężownicy.

c) Dwa z pomiędzy trzech czynników są równemi; wieloman jest postaci $(x-\alpha)^2(x-\beta)$ oraz $\alpha < \beta$; krzywa składa się z wężownicy, a owal redukuje się do dwu punktów urojonych sprzężonych, albo do jednego punktu rzeczywistego.

d) Wielomian rozkłada się podobnie: $(x-\alpha)^2(x-\beta)$, lecz $\alpha > \beta$; owal i wężownica łączą się w ten sposób, że tworzą jednę gałęź ciągłą i przecinającą samą siebie; krzywa ma punkt podwójny.

e) Trzy czynniki wielomianu są wszystkie równe: krzywa ma ostrze.

Jeżeli przeniesiemy do nieskończoności biegunową harmoniczną $x_2 = 0$, wtedy równanie krzywej w spółrzędnych kartezyńskich przybierze postać:

$$y = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3;$$

krzywa ta posiada środek, który jest punktem przegięcia $x = 0$, $y = 0$, t. j. każda cięciwa przez ten punkt poprowadzona, dzieli się w nim na dwie równe części. Jeżeli uwzględnimy, jak wyżej, naturę czynników wielomianu po stronie drugiej, otrzymamy podział krzywych sześciennych na pięć gatunków krzywych ze środkiem (Chasles).

Inną wreszcie klasyfikacyę podał Plücker, a zbadał ją Cayley; w niej punktem wyjścia jest położenie i natura stycznych (asymptot) w trzech punktach nieskończonościowych krzywej.

Z literatury o klasyfikacyi krzywych sześciennych wymieniamy: Newton (Enumeratio etc.), Euler (Introductio etc., 1748), Chasles (Aperçu. histor.), Plücker (System der analyt. Geom.), Cayley (Trans. of Cambr. XI, 1865), Bellavitis (Società Italiana delle scienze, Modena 1851), Möbius (Abh. der Säch. Ges. 1851), Durège (Crelle, LXXV, LXXVI) i t. d.

§ 4.

Forma sześcienna trójkowa. Jej niezmienniki i spółzmienniki.

Niechaj będzie forma sześcienna trójkowa, wyrażona symbolicznie przez $f = a_x^3 = b_x^3 \ldots$, albo przy pomocy spółczynników istotnych przez $f = \Sigma a_{ihk} x_i x_h x_k$.

Z trzech utworów niezmienniczych Δ, Q, R formy sześciennej dwójkowej otrzymujemy, przy pomocy zasady przeniesienia (patrz Rozdz. III), trzy utwory niezmiennicze formy sześciennej trójkowej, a mianowicie:

$$\theta = (abu)^2 a_x b_x \, ; \qquad Q_1 = (abu)^2 (cau)\, c_x^2\, b_x ,$$

$$F = (abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu) .$$

R ó w n a n i e $F=0$ j e s t r ó w n a n i e m k r z y w e j f, p r z e d s t a w i o n e m w s p ó ł r z ę d n y c h p r o s t e j (r ó w n a n i e m s t y c z n o ś c i o w e m k r z y w e j s z e ś c i e n n e j).

R ó w n a n i e $\theta=0$ p r z y x s t a ł e m p r z e d s t a w i a r ó w n a n i e s t y c z n o ś c i o w e s t o ż k o w e j b i e g u n ó w p u n k t u x; p r z y u s t a ł e m p r z e d s t a w i a r ó w n a n i e s t o ż k o w e j b i e g u n ó w (polokoniki) dla prostej u (patrz § 1).

R ó w n a n i e $Q_1=0$ p r z e d s t a w i a d l a k a ż d e j p r o s t e j u k r z y w ą s z e ś c i e n n ą, b ę d ą c ą m i e j s c e m p u n k t ó w x, w k t ó r y c h p r o s t e b i e g u n o w e s p o t y k a j ą p r o s t ą u w p u n k c i e s p r z ę ż o n y m z p u n k t e m x w z g l ę d e m s t o ż k o w e j b i e g u n ó w p r o s t e j u.

K r z y w a s z e ś c i e n n a $Q_1=0$ s p o t y k a p r o s t ą u w t r z e c h p u n k t a c h, k t ó r e r a z e m z p u n k t e m, w k t ó r y c h p r o s t a u s p o t y k a k r z y w ą s z e ś c i e n n ą $f=0$, t w o r z ą t r z y p a r y t e j s a m e j i n w o l u c y i; p u n k t a m i p o d w ó j n e m i t e j i n w o l u c y i s ą p u n k t y, w k t ó r y c h p r o s t a u s p o t y k a s w o j ą s t o ż k o w ą b i e g u n ó w.

Jeżeli położymy:

$$f_{ij} = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad \theta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j},$$

będzie:

$$F = -2 \begin{vmatrix} \theta_{11}, & \theta_{12}, & \theta_{13}, & u_1 \\ \theta_{21}, & \theta_{22}, & \theta_{23}, & u_2 \\ \theta_{31}, & \theta_{32}, & \theta_{33}, & u_3 \\ u_1, & u_2, & u_3, & 0 \end{vmatrix}, \quad \theta = -2 \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, & u_1 \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{23}, & u_2 \\ f_{31}, & f_{32}, & f_{33}, & u_3 \\ u_1, & u_2, & u_3, & 0 \end{vmatrix}$$

Jeżeli położymy symbolicznie:

$$\theta = \theta_x^2 u_\vartheta^2 = \theta'^2_x u^2_{\vartheta'},$$

będzie:

$$Q_1 = u_\vartheta^2 (c\theta u) c_x^2 \theta_x .$$

Układ zupełny formy sześciennej trójkowej składa się z 34 form.

Innemi utworami niezmienniczemi formy sześciennej trójkowej są:

hesyan $H = (abc)^2 a_x b_x c_x = \theta_x^2 c_\vartheta^2 c_x$;

cayleyan $s = (abc)(abu)(acu)(bcu) = (\theta cu)^2 c_\vartheta u_\vartheta$;

przeciwzmiennik $t = (abd)(abu)(aeu)(bfu)(def)^2$
$$= \theta_s^2 u_s u_\vartheta^2$$

i dwa niezmienniki: $S = (abc)(abd)(acd)(bcd))$

$$= \theta_{\vartheta'}^2 \theta'^2_\vartheta = a_s^3;$$

$$= \frac{2}{3} \Big\{ (a_{122}a_{133} - a^2_{123})^2 + (a_{222}a_{333} - a^2_{213})(a_{111}a_{133} - a^2_{113})$$
$$+ (a_{233}a_{333} - a^2_{233})(a_{111}a_{122} - a^2_{112})$$
$$+ (a_{222}a_{333} + a_{223}a_{233})(a_{112}a_{113} - a_{111}a_{123})$$
$$+ (a_{122}a_{233} + a_{223}a_{133} - 2a_{123}a_{233})(a_{112}a_{123} - a_{113}a_{122} \Big\}$$
$$+ (a_{122}a_{233} + a_{133}a_{222} - a_{123}a_{233})(a_{113}a_{123} - a_{112}a_{133})$$

$$T = (abc)(abd)(ace)(bcf)(def)^2 = a_t^3 .$$

Niema innych niezmienników zasadniczych prócz S i T; to znaczy, że każdy inny jest funkcyą całkowitą wymierną tych dwóch.

Jeżeli napiszemy f w postaci kanonicznej

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6m\, x_1 x_2 x_3,$$

będzie:

$$t = -2(1-10m^3)(u_1^3+u_2^3+u_3^3) + 2(30m^2+24m^5)\, u_1 u_2 u_3,$$

$$S = 24m(m^3-1),$$

$$T = 6(8m^6 + 20m^3 - 1),$$

równanie zaś krzywej f w spółrzędnych styczności owych będzie miało postać:

$$-\tfrac{1}{2} F = u_1^6 + u_2^6 + u_3^6 - (2+32m^3)(u_1^3 u_2^3 + u_2^3 u_3^2 + u_3^3 u_1^3)$$
$$-24m^2 u_1 u_2 u_3 (u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) - (24m + 48m^4)\, u_1^2 u_2^2 u_3^2 = 0.$$

Co do wyrażeń na H i C patrz § 3.

Warunek $S=0$ wyraża, że krzywa Hessego krzywej f rozpada się na trzy proste; krzywa Cayley'a składa się wtedy z trzech punktów podwójnych krzywej Hessego, a trójkąt z nich utworzony jest trójkątem biegunowym względem wszystkich stożkowych biegunowych krzywej pierwotnej.

Jeżeli $S=0$, krzywa rzędu 3-go, nazywa się równoanharmoniczną; w tym przypadku cztery styczne, poprowadzone z punktu krzywej do samej krzywej, tworzą grupę równoanharmoniczną.

Jeżeli $T=0$, krzywa rzędu 3-go nazywa się harmoniczną; w tym przypadku rzeczone cztery styczne tworzą grupę harmoniczną.

Jeżeli $T=0$, wtedy krzywa Hessego krzywej Hessego zlewa się z krzywą pierwotną, a krzywa Cayley'a krzywej Hessego zlewa się z $t=0$.

Wyróżnikiem krzywej rzędu 3-go, t. j. funkcyą, która przyrównana do zera, wyraża warunek dla punktu podwójnego, jest $T^2 - \frac{1}{6} S^3$. W przypadku, gdy f danem jest w postaci kanonicznej, wyróżnikiem jest $(1+8m^3)^3$.

Jeżeli przez a_{ijk} i h_{ijk} oznaczymy spółczynniki funkcyi f i hesyanu H, to wyróżnik będzie miał wyrażenie następujące:

$$R = \begin{vmatrix} a_{111}, & a_{122}, & a_{133}, & a_{123}, & a_{113}, & a_{112} \\ a_{211}, & a_{222}, & a_{233}, & a_{223}, & a_{213}, & a_{212} \\ a_{311}, & a_{322}, & a_{333}, & a_{323}, & a_{313}, & a_{312} \\ h_{111}, & h_{122}, & h_{133}, & h_{123}, & h_{113}, & h_{112} \\ h_{211}, & h_{222}, & h_{233}, & h_{223}, & h_{213}, & h_{212} \\ h_{311}, & h_{322}, & h_{333}, & h_{323}, & h_{312}, & h_{312} \end{vmatrix}$$

Wyrażenie $\frac{S^3}{T^2}$ *jest niezmiennikiem bezwzględnym formy sześciennej.*

Jeżeli napiszemy formę sześcienną w zwykłej postaci kanonicznej, będzie:

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{384m^3(m^3-1)^3}{(8m^6+20m^3-1)^2}.$$

Jeżeli α *jest stosunkiem anharmonicznym (stałym) czterech stycznych, poprowadzonych z punktu krzywej sześciennej do samej krzywej, to mamy związek godny uwagi:*

$$\frac{S^3}{T^2} = 24\,\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}.$$

Warunkami koniecznemi i dostatecznemi na to, aby krzywa sześcienna miała ostrze, są $S=0$, $T=0$.

Warunki konieczne i dostateczne na to, aby krzywa sześcienna rozpadała się na stożkową i prostą wyraża znikanie tożsamościo-

we wyrażenia $Ts - St$; jeżeli nadto prosta ma być styczna do stożkowej, wtedy warunki te wyraża znikanie tożsamościowe przeciwzmiennika t.

Aby krzywa sześcienna rozpadała się na trzy proste, jest koniecznem i dostatecznem, by forma $(ahu)\, a_x^2\, h_x^2$ była tożsamościowo zerem. Warunki konieczne i dostateczne na to, aby krzywa f rozpadała się na trzy proste, spotykające się w jednym punkcie, jest znikanie tożsamościowe hesyanu H.

Znikanie tożsamościowe wyrażenia F daje warunki na to, aby krzywa f rozpadała się na prostą pojedyńczą i prostą podwójną; wreszcie znikanie tożsamościowe wyrażenia θ daje warunki na to, aby krzywa f była prostą potrójną.

Jeżeli krzywa sześcienna ma punkt podwójny, wtedy styczne w tym punkcie przecinają jedyną linię przegięcia w dwóch punktach, które przedstawia hesyan Δ formy dwójkowej sześciennej, wyrażającej trzy punkty przegięcia. Spółzmiennik Q takiej formy dwójkowej sześciennej przedstawia wtedy trzy punkty, w których trzy proste harmoniczne trzech punktów przegięcia przecinają prostą przegięcia.

Dwie krzywe sześcienne $a_x^2 = 0$, $\alpha_x^3 = 0$ mają te same punkty przegięcia, jeżeli przeciwzmiennik jednoczesny $(a\alpha u)^3$ jest tożsamościowo zerem. Przyjąwszy, że drugą krzywą sześcienną jest krzywa Hessego, otrzymujemy stąd, że przeciwzmiennik $(ahu)^3$ jest tożsamościowo zerem.

W badaniu formy trójkowej sześciennej ważnem jest zbadanie formy dwójkowej dwukwadratowej

$$G(\lambda_1 \lambda_2) = \lambda_1^4 - S\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \frac{4}{3} T\lambda_1 \lambda_2^3 - \frac{1}{12} S^2 \lambda_2^4,$$

występującej przy tworzeniu hesyanu formy sześciennej pęku syzygetycznego $\lambda_1 f + \lambda_2 H$. Równaniem dwunastu prostych przegięcia jest:

$$G(H, -f) = 0.$$

Niezmiennik i formy dwukwadratowej G jest tożsamościowo zerem. Niezmiennik j tej formy równa się $\frac{2}{3}\left(\frac{S^3}{6} - T^2\right)$, t. j. — pomijając czynnik — równa się wyróżnikowi formy f.

Hesyan formy G różni się tylko czynnikiem liczbowym od niezmiennika $S_{\lambda_1\lambda_2}$ krzywej pęku syzygetycznego.

Niezmiennik rzędu 6-go formy G różni się tylko czynnikiem liczbowym od niezmiennnika $T_{\lambda_1\lambda_2}$ krzywej pęku syzygetycznego.

Formami sześciennemi trójkowemi zajmowali się: Hesse i Aronhold (Crelle XXXIV, LV), Cayley (Mem. upon quantics 1856, Phil. Trans. 1861, Am. Journ. IV), Gordan (Math. Ann. I), Clebsch-Gordan (Math. Ann. I, VI, VIII), Gundelfinger (Math. Ann. IV, V, VIII), Harnack (Math. Ann IX), Mertens (Wien. Ber. 1888), Dingeldey (Math. Ann. XXXI), Maisano (Rend. Palermo IV), Gerbaldi (Atti. Tor. XV, 1880). Szczegóły w Geometryi Clebscha-Lindemanna, którą posługiwaliśmy się w tym szkicu. Patrz także Salmon High. pl. curv. i Salmon-Fiedler Modern. Alg., Lipsk 1863, 1882.

ROZDZIAŁ VIII.

KRZYWE PŁASKIE RZĘDU CZWARTEGO.

§ 1.

Wiadomości ogólne. Tworzenie krzywych rzędu czwartego. Styczne podwójne. Stożkowe i krzywe sześcienne styczne.

Z wzorów Plückera wypływa dziesięć następujących kombinacyj dla liczb charakterystycznych krzywej płaskiej rzędu czwartego (kwartyki):

	n	d	r	ν	δ	i	p
1)	4	0	0	12	28	24	3
2)	4	1	0	10	16	18	2
3)	4	0	1	9	10	16	2
4)	4	2	0	8	8	12	1
5)	4	1	1	7	4	10	1
6)	4	0	2	6	1	8	1
7)	4	3	0	6	4	6	0
8)	4	2	1	5	2	4	0
9)	4	1	2	4	1	2	0
10)	4	0	3	3	1	0	0

Niechaj będą dwa pęki rzutowe stożkowych, których punkty podstawowe są różnemi; miejscem punktów przecięcia odpowiednich stożkowych jest krzywa ogólna rzędu czwartego, przechodząca przez ośm punktów podstawowych obu pęków.

Niechaj równaniami pęków będą:

$$U + \lambda V = 0, \qquad U' + \mu V' = 0;$$

gdzie $U = 0$, $V = 0$, $U' = 0$, $V' = 0$ są równaniami czterech stożkowych, a pomiędzy λ i μ zachodzi związek dwuliniowy postaci:

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0.$$

Wyrugowawszy λ i μ z tych trzech równań, otrzymamy równanie krzywej rzędu 4-go.

Bez szkody dla ogólności możemy przyjąć $\lambda = \mu$, $V' = V$, stąd wynika, że:

Równanie każdej krzywej rzędu czwartego można przedstawić w postaci:

$$UW = V^2,$$

gdzie $U = 0$, $W = 0$, $V = 0$ są równaniami trzech stożkowych, z których wszystkie razem nie przechodzą przez jeden i ten sam punkt.

Aby módz równanie krzywej rzędu 4-go sprowadzić do tej postaci, dość przyjąć, że U, V są dwie stożkowe styczne, t. j. stożkowe, dotykające krzywej rzędu 4-go w czterech punktach.

Mamy twierdzenie następujące:

Istnieją 63 układy stożkowych stycznych; każdy układ składa się z nieskończenie wielu stożkowych takich, że przez ośm punktów styczności dwu stożkowych jednego i tego samego układu przechodzi jedna i tażsama stożkowa inna. W równaniu powyższem stożkową tę przedstawia równanie $V = 0$. W każdym z 63 układów stożkowych stycznych występuje sześć par stycznych podwójnych.

Jeżeli $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $T_4 = 0$ są równaniami czterech stycznych podwójnych dwu takich par, należących do tego samego układu, to równanie krzywej rzędu czwartego można zawsze przedstawić w postaci

$$T_1 T_2 T_3 T_4 = S^2,$$

gdzie T są wyrażeniami liniowemi, S zaś jest wyrażeniem kwadratowem.

Z równania $UW = V^2$ wypływa, że krzywą rzędu czwartego można uważać jako obwiednią układu stożkowych:

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0.$$

Krzywą rzędu czwartego można też utworzyć przy pomocy dwu pęków rzutowych, z których jeden jest pękiem prostych, drugi pękiem krzywych sześciennych (patrz Milinowski, Schlöm. Ztschr. XXIII, 1878).

Z równania $T_1 T_2 T_3 T_4 = S^2$ wypływa, że styczne podwójne można ugrupować czwórkami w ten sposób, aby każde ośm punktów zetknięcia znajdowały się na jednej i tej samej stożkowej. Tych stożkowych jest 315.

Równanie krzywej rzędu czwartego można także przedstawić w postaci:

$$T_1 F_3 = \Omega^2,$$

gdzie: $T_1 = 0$ jest równaniem stycznej podwójnej; $F_3 = 0$ równaniem krzywej sześciennej, dotykającej krzywej danej w sześciu punktach i nazywanej dlatego krzywą sześcienną styczną; wreszcie $\Omega = 0$ jest równaniem stożkowej.

Istnieją 64 układy trójkrotnie nieskończone krzywych sześciennych stycznych. Układy te dzielą się na dwa gatunki: w pierwszym jest układów 28, w drugim 36. Układy gatunku pierwszego mają tę własność, iż każdemu z nich odpowiada jedna z 28 stycznych podwójnych w ten sposób, iż sześć punktów styczności wraz z dwoma punktami stycznej podwójnej znajduje się na jednej i tej samej stożkowej. Układy gatunku drugiego tej własności nie posiadają; stanowią one układ pojedyńczo-nieskończony krzywych sześciennych, zniekształconych na styczną do krzywej rzędu 4-go i na stożkową, przechodzącą przez dwa punkty, w których styczna spotyka krzywą rzędu 4-go i zarazem styczną do niej w trzech pozostałych punktach.

Jeżeli napiszemy równanie krzywej rzędu 4-go w postaci $T_1 F_3 = \Omega^2$, to krzywa sześcienna $F_3 = 0$ będzie krzywą układu gatunku pierwszego.

Krzywe sześcienne styczne gatunku 1-go albo 2-go mają tę własność, że przez dwanaście punktów styczności dwu krzywych sześciennych tego samego układu przechodzi zawsze nowa krzywa sześcienna.

W każdym układzie krzywych sześciennych stycznych jest zawsze 64 krzywych sześciennych, mających z krzywą rzędu czwartego styczność rzędu trzeciego w trzech punktach. Takich krzywych sześciennych jest przeto $4^6 = 4096$.

Istnieje 728 układów krzywych sześciennych, mających z krzywą rzędu czwartego styczność rzędu drugiego w czterech punktach. Te układy rozpadają się na 364 pary w ten sposób, iż punkty styczności krzywej sześciennej jednego układu i takież punkty krzywej sześciennej drugiego układu znajdują się na jednej i tej samej stożkowej.

Krzywa ogólna rzędu czwartego daje się utworzyć jeszcze sposobem następującym, wskazanym przez Hessego (Crelle, XLIX).

Niechaj będzie sieć kwadryk

$$x_1 \sum_1^4 a_{ik} z_i z_k + x_2 \sum_1^4 \beta_{ik} z_i z_k + x_3 \sum_1^4 \gamma_{ik} z_i z_k = 0,$$

gdzie x_1, x_2, x_3 są parametrami jednorodnemi sieci; z_1, z_2, z_3, z_4 — spółrzędnemi punktu przestrzeni; $a_{ik} = a_{ki}$, $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$.

Wierzchołki stożków, zawartych w tej sieci, leżą na krzywej skośnej rzędu szóstego. Jeżeli przez wielkości x rozumieć będziemy spółrzędne punktów płaszczyzny, wtedy punktom tej krzywej skośnej rzędu szóstego (wierzchołkom stożków) odpowiadają na płaszczyźnie punkty krzywej ogólnej rzędu czwartego, której równanie otrzymamy, przyrównawszy do zera wyróżnik jednej z kwadryk sieci.

Jeżeli położymy:

$$\pi_{ik} = x_1 \alpha_{ik} + x_2 \beta_{ik} + x_3 \gamma_{ik} ,$$

to równaniem krzywej rzędu czwartego będzie:

$$C_4 = \begin{vmatrix} \pi_{11}, & \pi_{12}, & \pi_{13}, & \pi_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{41}, & \pi_{42}, & \pi_{43}, & \pi_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli równanie krzywej rzędu czwartego ma tę właśnie postać, to równaniem krzywej sześciennej stycznej, należącej do układu 2-go gatunku będzie:

$$\Phi_{uu} = \begin{vmatrix} \pi_{11}, & \dots & \pi_{14}, & u_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & u_2 \\ \cdot & \dots & \cdot & u_3 \\ \pi_{41}, & \dots & \pi_{44}, & u_4 \\ u_1, & \dots & u_4, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

równanie zaś:

$$\Phi_{uv} = \begin{vmatrix} \pi_{11}, & \dots & \pi_{1u}, & u_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \pi_{41}, & \dots & \pi_{44}, & u_4 \\ v_1, & \dots & v_4, & 0 \end{vmatrix}$$

będzie równaniem krzywej sześciennej, przechodzącej przez punkty styczności krzywych $\Phi_{uu} = 0$, $\Phi_{vv} = 0$.

Napiszmy równanie sieci kwadryk w postaci symbolicznej:

$$0 = a_x \alpha_z^2 = b_x \beta_z^2 = \ldots\ldots$$

(tu x są zmiennemi trójkowemi, z — zmiennemi czwórkowemi), wtedy równanie krzywej C_4 przybiera postać:

$$(\alpha \beta \gamma \delta)^2 a_x b_x c_x d_x = 0,$$

a równania krzywych sześciennych $\Phi_{uu} = 0$, $\Phi_{uv} = 0$ przechodzą na następujące:

$$\Phi_{uu} = (\alpha\beta\gamma u)^2 a_x b_x c_x = 0;$$

$$\Phi_{uv} = (\alpha\beta\gamma u)(\alpha\beta\gamma v) a_x b_x c_x = 0.$$

Można ustanowić odpowiedniość dwujednoznaczną pomiędzy prostemi, łączącemi każdy dwa punkty podstawowe sieci kwadryk, a pomiędzy 28 stycznemi podwójnemi.

Geiser (Math. Ann. I) podał następujący sposób tworzenia krzywej ogólnej rzędu czwartego.

Jeżeli przez punkt P przesuniemy stożek styczny do powierzchni sześciennej, będziemy mieli stożek rzędu szóstego; lecz jeżeli punkt P znajduje się na powierzchni, wtedy mamy stożek rzędu czwartego oraz płaszczyznę styczną w tym punkcie, liczoną dwa razy. Przeciąwszy ten stożek płaszczyzną, otrzymamy krzywą ogólną rzędu czwartego, której styczną podwójną jest prosta przecięcia płaszczyzny siecznej z płaszczyzną styczną w punkcie P.

Rzutami przecięć płaskich powierzchni sześciennej są krzywe sześcienne styczne do krzywej rzędu 4-go; otrzymujemy mianowicie trójkrotnie nieskończony układ krzywych sześciennych stycznych gatunku 1-go, wzajemny względem stycznej podwójnej na płaszczyźnie stycznej w punkcie P. Rzutami 27 prostych powierzchni sześciennej są 27 stycznych podwójnych krzywej płaskiej rzędu czwartego.

Przy badaniu konfiguracyj stycznych podwójnych krzywej płaskiej rzędu 4-go dobrze jest przyjąć pewne znakowanie, ułatwiające otrzymywanie tych konfiguracyj. Jedno z takich przedstawień nasuwa nam wyżej już podana konfiguracya Hessego; tworzy ją 28 prostych, łączących każde dwa z pomiędzy ośmiu punktów podstawowych.

Inne przedstawienie otrzymujemy przy pomocy t. z. charakterystyk nieparzystych rodzaju 3 (patrz „Repertoryum" t. I, str. 402).

Każdą styczną podwójną możemy przedstawić przy pomocy symbolu

$$\begin{pmatrix} i, & j, & h \\ i_1, & j_1, & h_1 \end{pmatrix},$$

gdzie i, j, h, i_1, j_1, h_1 są liczbami 0, 1, suma zaś $ii_1 + jj_1 + hh_1$ jest nieparzysta.

Według przedstawienia pierwszego, grupę czterech stycznych podwójnych, przez punkty styczności których przechodzi stożkowa, przedstawiają cztery boki czworoboku (210 razy), albo cztery proste, z których żadne dwie nie mają wspólnego żadnego z ośmiu punktów (105 razy).

Według drugiego przedstawienia, grupę rzeczoną przedstawiają cztery charakterystyki nieparzyste takie, że sumy elementów, zajmujących te same miejsca, są wszystkie parzyste.

Wyszedłszy z tych zasad, można badać ile trójek, czwórek i t. d. stycznych podwójnych posiada własności specyalne, np. trójki, w których sześć punktów zetknięcia nie znajduje się na jednej stożkowej; czwórki, w których tylko sześć z pomiędzy 8 punktów styczności znajduje się na jednej stożkowej i t. d.

Z pomiędzy sześciu stycznych podwójnych należy wymienić grupy, badane przez Hessego i Steinera. Istnieje 1008 grup po sześć stycznych podwójnych takich, że przez ich punkty styczności przechodzi jedna krzywa **właściwa** rzędu 3-go.

W pierwszym z wyżej wspomnianych sposobów przedstawienia, grupy takie przedstawiają trzy figury różne, a mianowicie: a) boki dwu trójkątów, mających wierzchołki w sześciu z pomiędzy ośmiu punktów; b) proste, łączące dwa punkty, i proste, łączące inny punkt z pięcioma, c) proste, łączące jeden punkt z trzema i inny z trzema pozostałemi.

Istnieje 5040 grup o sześciu stycznych podwójnych takich, że dwanaście punktów styczności rozkłada się na sześć i sześć w ten sposób, że przez każdą grupę sześciu punktów przechodzi stożkowa.

Sześć stycznych podwójnych każdej z pomiędzy 1008 grup pierwszego gatunku dotyka jednej i tej samej stożkowej; każda zaś z 5040 grup drugiego gatunku dzieli się na trzy pary stycznych podwójnych w ten sposób, że trzy punkty spotkania stycznych jednej pary znajdują się na jednej linii prostej.

Pomiędzy grupami siedmiu stycznych podwójnych jest 288 grup, zwanych układami zupełnemi Aronholda; są one utworzone przed siedm stycznych takich, że tylko sześć punktów styczności trzech z pomiędzy nich znajduje się na jednej stożkowej.

Takie układy zupełne przedstawia siedm prostych, łączących jeden z ośmiu punktów z innemi siedmioma, albo przez proste, będące bokami trójkąta i cztery proste, łączące jeden z pozostałych punktów z czterema innemi.

Istnieją 72 układy Aronholda, zawierające daną styczną podwójną; a 16 układów takich, zawierających dwie dane styczne podwójne.

Przy pomocy konstrukcyj liniowych można z sześciu stycznych podwójnych układu Aronholda otrzymać wszystkie inne. Odwrotnie;

Jeżeli mamy na płaszczyźnie sześć prostych dowolnych, to można zawsze nakreślić krzywą rzędu czwartego, której stycznemi podwójnemi są proste dane, stanowiące względem krzywej układ zupełny Aronholda (Aronhold, Berl. Monatsber. 1864, Salmon-Fiedler. Höh. Cur. § 264 i nast., Frobenius, Crelle IC).

Pomiędzy różnemi postaciami, jakie mieć może krzywa rzędu czwartego, zasługuje na uwagę krzywa Plückera, utworzona z czterech owali, z których każdy znajduje się na zewnątrz pozostałych; każdemu z owali odpowiada styczna podwójna dotykająca go w dwóch punktach. Taka krzywa rzędu czwartego ma wszystkie styczne podwójne rzeczywiste.

Krzywe rzędu czwartego badali: Plücker (Alg. Curv.) Hesse (Crelle IL, LV, LIX), Steiner (tamże IL), Cayley (tamże LXVIII), Clebsch (tamże LXIII), Geiser (tamże LXXIII, Math. Ann. I), Zeuthen (Math. Ann. VII), który zajmował się zwłaszcza klasyfikacyą krzywych rzędu 4-go. Hesse (Crelle XXXVI, XL, XLI), Salmon (Quart. Journ. III), Cayley (Phil. Trans. 1859, 1861), Dersch (Math. Ann. VII) badali krzywą, przechodzącą przez punkty styczności stycznych podwójnych krzywej rzędu n. Wyznaczeniem stycznych podwójnych do krzywej rzędu czwartego zajmuje się też praca Aeschlimanna (Zürich 1880). Krzywe rzędu czwartego mają najściślejszy związek z teoryą funkcyj abelowych rodzaju 3; w tym kierunku wymieniamy prace: Riemanna, Clebscha, Webera (patrz „Geometryę“ Clebscha-Lindemanna). O konfiguracyi 28 stycznych podwójnych mamy prace: Aronholda (wyżej cytowaną), Kleina (Math. Ann. X), Noethera (tamże XV, XLVI), Frobeniusa (Crelle IC), Webera (Math. Ann. XXIII), E. Pascala (Rend. Lincei 1892—93) i t. p. Badanie tych konfiguracyj sprowadza się do badania t. zw. charakterystyk (patrz Pascal, Annali di mat. XX). Mało dotąd wiemy o konfiguracyi 24 punktów przegięcia krzywej ogólnej rzędu 4-go; rozprawa Grassmanna (Berl. 1875), w której stara się dowieść, że stożkowa, przechodząca przez pięć puntów przegięcia, przechodzi zawsze i przez szósty, jest błędna (patrz Klein Math. Ann. X); równaniem stopnia 24-go, od którego te punkty zależą, zajmował się Gerbaldi (Rend. Palermo, VII).

---

§ 2.

Krzywe rzędu czwartego z punktami osobliwemi.

Dajmy sobie równanie krzywej rzędu czwartego w postaci $T_1 T_2 T_3 T_4 = S^2$. Jeżeli pomiędzy sześcioma punktami spotkania prostych $T=0$ jeden, dwa, trzy punkty znajdują się na stożkowej $S=0$, mamy wtedy krzywą rzędu czwartego z jednym, dwoma, trzema punktami podwójnemi.

Jeżeli napiszemy równanie krzywej rzędu czwartego w postaci $UV = W^2$, to w przypadku, gdy stożkowe $U=0$, $V=0$, $W=0$ mają jeden, dwa, trzy punkty wspólne, mamy krzywą rzędu czwartego o jednym, dwóch, trzech punktach podwójnych.

Krzywa rzędu czwartego z jednym punktem podwójnym ma tylko 16 stycznych podwójnych. W sposobie tworzenia krzywych rzędu 4-go, według metody Geisera (patrz § 1), krzywą taką otrzymujemy, umieszczając środek rzutu P na jednej z prostych p powierzchni sześciennej; przecięcie tej prostej z płaszczyzną sieczną jest punktem podwójnym, rzuty zaś 16 prostych, które na powierzchni sześciennej nie przecinają prostej p, dają nam 16 stycznych podwójnych. W metodzie Hessego (§ 1) krzywą, o której mowa, otrzymujemy doprowadzając do zlania dwa z pomiędzy ośmiu punktów podstawowych sieci kwadryk.

Konfiguracyę stycznych podwójnych można badać tym samym sposobem, jakim badamy konfigurcyę ogólną, wyobraziwszy sobie, że dwa z pomiędzy ośmiu punktów podstawowych zlewają się, a więc przedstawiając 16 stycznych podwójnych przez proste, łączące parami sześć punktów podstawowych, i przez prostą, przechodzącą przez punkt siódmy. Proste, łączące ten punkt siódmy z sześcioma innymi, odpowiadają sześciu prostym, stycznym do krzywej, poprowadzonym z punktu podwójnego.

Szesnaście stycznych podwójnych można 60 sposobami ułożyć w grupy czwórkami tak, że przez ośm punktów styczności czterech stycznych każdej grupy przechodzi jedna stożkowa.

Krzywemi rzędu czwartego z punktem podwójnym zajmowali się: Brioschi, Cremona (Math. Ann. IV), Brill (Crelle LXV, Math. Ann. VI) i t. d.

Z pomiędzy krzywych rzędu czwartego z dwoma punktami podwójnemi badano specyalnie krzywe, w których temi punktami są punkty kołowe urojone w nieskończoności. Krzywa taka nazywa się krzywą dwukołową rzędu czwartego (Casey, R. Irish Trans. 1871, XXIV).

W krzywej rzędu czwartego z dwoma punktami, można z każdego z tych punktów poprowadzić cztery styczne do krzywej; stosunek anharmoniczny dwóch czwórek promieni tak utworzonych jest ten sam.

Szesnaście przecięć pierwszych czterech stycznych z czterema drugiemi stycznemi leżą czwórkami na stożkowych, przechodzących przez dwa punkty podwójne.

Krzywą dwukołową można uważać za obwiednią koła o zmiennym promieniu oraz o środku, poruszającym się po stożkowej, pozostającego zawsze ortogonalnem do innego koła danego. Jeżeli stożkowa jest parabolą, wtedy krzywa dwukołowa rozpada się na prostą w nieskończoności i na krzywą rzędu 3-go.

Szczególnym przypadkiem krzywych rzędu czwartego z dwoma ostrzami są krzywe, zwane krzywemi Descartes'a, w których dwoma ostrzami są dwa punkty kołowe urojone w nieskończoności.

Krzywe Descartes'a mają własność następującą: istnieją trzy punkty stałe A, B, C położone na prostej i takie, że jeżeli ϱ, ϱ', ϱ'' oznaczają ich odległości od punktu na linii krzywej, to zachodzą związki:

$$l\varrho + m\varrho' = c; \quad l\varrho + n\varrho'' = c'; \quad m\varrho' - n\varrho'' = c'',$$

w których l, m, n, c, c', c'' są ilości stałe. Te trzy punkty nazywają się **ogniskami**. Jeżeli te ogniska są wszystkie rzeczywistemi, mamy krzywą, zwaną owalem Descartes'a; jeżeli tylko jedno ognisko jest rzeczywiste, mamy krzywą, różną od krzywej, badanej przez samego Descartes'a.

Równanie krzywej Descartes'a jest postaci:

$$S^2 = k^3 L;$$

tu $S = 0$ jest równaniem koła, $L = 0$ równaniem prostej, k — stałą. Prosta $L = 0$ jest styczną podwójną do krzywej.

Suma odległości czterech punktów, w których prosta poprzeczna przecina krzywą Descartes'a, od ogniska jest stała.

Przypadkami szczególnemi krzywej Descartes'a są ślimakowa Pascala oraz kardioida. Pierwsza z nich, prócz dwu ostrzy w dwóch punktach kołowych, ma jeszcze jeden punkt podwójny; w drugiej ten nowy punkt podwójny zniekształca się na trzecie ostrze.

Równanie krzywej rzędu czwartego z trzema punktami podwójnemi można napisać w postaci:

$$a_{11}x_2^2x_3^2 + a_{22}x_3^2x_1^2 + a_{34}x_1^2x_2^2 + 2a_{23}x_1^2x_2x_3 + 2a_{31}x_2^2x_3x_1 + 2a_{12}x_3^2x_1x_2 = 0.$$

w założeniu, że trzy punkty podwójne są wierzchołkami trójkąta podstawowego spółrzędnych jednorodnych.

Jeżeli podzielimy to równanie przez $x_1^2\, x_2^2\, x_3^2$, to nadamy mu postać, z której okaże się, że daje się ono otrzymać z równania stożkowej przez zastąpienie w tem ostatnicm każdej spółrzędnej przez jej odwrotność. Spostrzeżenie to może być użytecznem w badaniu krzywej.

W krzywej rzędu 4-go o trzech punktach podwójnych sześć stycznych do krzywej w tych punktach są zarazem stycznemi do jednej i tej samej stożkowej.

Sześć stycznych, które z trzech punktów podwójnych można poprowadzić do krzywej, są także stycznemi do jednej i tej samej stożkowej.

Ośm punktów styczności czterech stycznych podwójnych tej krzywej leży na jednej stożkowej.

Równanie krzywej rzędu 4-go z trzema ostrzami można zawsze przedstawić w postaci:

$$x_1^{-\frac{1}{2}} + x_2^{-\frac{1}{2}} + x_3^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

a równaniami trzech stycznych ostrzowych są wówczas:

$$x_1 = x_3; \quad x_2 = x_3; \quad x_3 = x;$$

styczne te, jak widać stąd, przechodzą wszystkie przez jeden punkt.

Krzywe rzędu czwartego z trzema punktami podwójnemi badali głównie Brill (Math. Ann. XII) i Bretschneider (Diss. Erlangen 1874). Krzywe rzędu czwartego z punktami falowania (t. j. z punktami, w których styczne mają styczność czteropunktową; w punktach tych krzywa jest styczną do należącej do niej krzywej Hessego) badał Massoni (Diss. Neapol 1882). Wcześniej krzywemi temi zajmowali się: Cayley, Salmon (patrz „Geometrye" Salmona-Fiedlera), Kantor (Wien. Sitzungsber. LXXIX[1], 1879).

§ 3.

Formy rzędu czwartego trójkowe.

Jeżeli formę rzędu czwartego napiszemy w postaci

$$f = a_x{}^4 = b_x{}^4 = c_x{}^4 = \ldots,$$

to pierwszym nasuwającym się jej utworem niezmienniczym jest przeciwzmiennik:

$$\sigma = (abu)^4.$$

Przeciwzmiennik σ, przyrównany do zera, przedstawia w spółrzędnych stycznościowych krzywą, której styczne przecinają krzywą $f=0$ w czterech punktach, stanowiących grupę równoanharmoniczną.

Innym przeciwzmiennikiem jest:

$$(abu)^2\,(bcu)^2\,(cau)^2;$$

przeciwzmiennik ten, przyrównany do zera, przedstawia krzywą, której styczne przecinają krzywą $f=0$ w czterech punktach, stanowiących grupę harmoniczną.

Najprostszy niezmiennik przedstawia symbolicznie wyrażenie $A=(abc)^4$, które jest stopnia 3-go względem spółczynników. Inny niezmiennik B, będący stopnia 6-go względem spółczynników, ma wyrażenie następujące:

$$B = a_1{}^2\, b_2{}^2\, c_3{}^2\, d_2\, d_3\, e_3\, e_1\, f_1\, f_2 \begin{vmatrix} a_1{}^2, & a_2{}^2, & a_3{}^2, & a_2a_3, & a_3a_1, & a_1a_2 \\ b_1{}^2, & b_2{}^2, & b_3{}^2, & b_2b_3, & b_3b_1, & b_1b_2 \\ c_1{}^2, & c_2{}^2, & c_3{}^2, & c_2c_3, & c_3c_1, & c_1c_2 \\ d_1{}^2, & d_2{}^2, & d_3{}^2, & d_2d_3, & d_3d_1, & d_1d_2 \\ e_1{}^2, & e_2{}^2, & e_3{}^2, & e_2e_3, & e_3e_1, & e_1e_2 \\ f_1{}^2, & f_2{}^2, & f_3{}^2, & f_2f_3, & f_3f_1, & f_1f_2 \end{vmatrix};$$

otrzymujemy go eliminując metodą dialityczną spółrzędne x z pomiędzy sześciu pochodnych drugich funkcyi f.

Niezmiennik B jest w specyalnym związku z wyrażalnością formy f przez kombinacyę liniową czwartych potęg form liniowych.

Każda forma rzędu czwartego trójkowa f daje się zawsze wyrazić przy pomocy czwartych potęg sześciu form liniowych; jeżeli $B=0$, wtedy f daje się wyrazić przez potęgi czwarte pięciu form liniowych; jeżeli są zerami wszystkie minory rzędu 4-go wyznacznika B, wtedy f daje się wyrazić przez potęgi czwarte tylko czterech form liniowych (patrz Reye, Crelle LXXVIII, Clebsch, tamże LIX, Lüroth, Math. Ann. I).

Pomiędzy spółzmiennikami formy czwartego rzędu trójkowej zasługuje na uwagę spółzmiennik rzędu 4-go, badany przez Clebscha (Crelle LVII) i oznaczony przez niego literą S. Otrzymuje się on sposobem następującym: Niechaj a_x^4 będzie formą daną; utwórzmy biegunową $a_x^3 a_y$ i dla tej formy sześciennej, uważanej względem zmiennych x, utwórzmy niezmiennik rzędu 4-go. Niezmiennik S Clebscha jest wypadkową formy $a_x^2 a_y$ i tego właśnie niezmiennika (przy uważaniu ilości y za zmienne).

Jeżeli w szczególności forma rzędu czwartego trójkowa jest taką, że daje się sprowadzać do postaci:

$$aX_1^4 + bX_2^4 + cX_3^4 + dX_4^4 + eX_5^4,$$

gdzie $X_1 \ldots\ldots, X_5$ są formami liniowemi (co ma miejsce, gdy $B=0$; patrz wyżej), wtedy spółzmiennik S ma wyrażenie:

$$\frac{a}{X_1} + \frac{b}{X_2} + \frac{c}{X_3} + \frac{d}{X_4} + \frac{e}{X_5}.$$

Gdy zaś forma rzędu 4-go czwórkowa sprowadza się do typu, zawierającego tylko potęgi czwarte zmiennych x_1, x_2, x_3 i iloczyny kwadratów tychże, wtedy spółzmiennik S sprowadza się do tejże samej postaci. Patrz Salmon-Fiedler Höh. Cur. Lipsk 1882, str. 355.

Forma czwartego rzędu trójkowa może być uważana jako własny spółzmiennik S tylko wtedy, gdy przedstawia stożkową podwójną lub krzywą rzędu 4-go specyalną o równaniu:

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 + x_3^3 x_1 = 0,$$

badanem przez Kleina i mającem własność automorficzną (patrz Rozdz. XII), por. Ciani (Rend. Palermo XIV, 1899).

Gordan badał układ zupełny specyalnej formy czwartego rzędu, mianowicie wspomnianej formy Kleina i znalazł 54 utwory (Math. Ann. XVII, XX); Maisano rozważał wszystkie utwory aż do utworów stopnia 5-go względem spółczynników (Giorn. di Batt. XIX). Porów. Salmon-Fiedler (Höh. Curr. § 293), Scherrer (Math. Ann. X), Maisano (Rend. Paler. I).

ROZDZIAŁ IX.

TEORYA OGÓLNA POWIERZCHNI I KRZYWYCH SKOŚNYCH ALGEBRAICZNYCH.

---

§ 1.

Rozważania ogólne. Powierzchnie rozwijalne i skośne. Przekroje powierzchni. Geometrya na powierzchniach algebraicznych.

Miejsce punktów, które przedstawia analitycznie równanie algebraiczne stopnia n-tego pomiędzy trzema spółrzędnemi kartazyańskiemi punktu przestrzeni, nazywamy powierzchnią rzędu n-tego.

Powierzchnia rzędu pierwszego jest płaszczyzną.

Każda prosta płaszczyzny przecina powierzchnię rzędu n-tego w n punktach (rzeczywistych albo urojonych), a każda płaszczyzna przecina ją według krzywej rzędu n-tego..

Równanie powierzchni rzędu n-tego zawiera jednorodnie spółczynników:

$$\frac{1}{6} n(n^2+6n+11)+1 = \binom{n+3}{3} = N(n) + 1.$$

Prostą styczną do powierzchni jest położenie graniczne prostej, przechodzącej przez dwa punkty powierzchni, gdy te punkty, pozostając wciąż na powierzchni, zbliżają się do siebie nieograniczenie (styczność dwupunktowa).

Prostą ściśle styczną do powierzchni jest położenie graniczne prostej, przechodzącej przez trzy lub więcej punktów powierzchni, gdy te punkty zbliżają się do siebie nieograniczenie (styczność trójpunktowa, czteropunktowa i t. p.).

Wszystkie proste, styczne do powierzchni w jednym punkcie, leżą w ogóle na jednej płaszczyźnie, którą nazywamy płaszczyzną styczną do powierzchni w tym punkcie.

Płaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie P przecina powierzchnię według krzywej, mającej w P punkt podwójny. Jeżeli ten punkt P jest ostrzem, płaszczyzna styczna nazywa się stateczną

Dwie styczne w punkcie podwójnym są dwiema prostemi ściśle stycznemi do powierzchni. Stosownie do tego, czy te styczne są rzeczywistemi, zlewającemi się albo urojonemi, punkt powierzchni nazywa się hyperbolicznym, parabolicznym, eliptycznym.

Punkty paraboliczne powierzchni tworzą krzywą, którą nazywamy krzywą paraboliczną.

Liczba płaszczyzn stycznych, które przez prostą daną, położoną jakkolwiek w przestrzeni, można poprowadzić do powierzchni, nazywa się klasą powierzchni.

Powierzchnia rzędu n-tego jest w ogólności klasy $n(n-1)^2$, jeżeli nie zawiera żadnych osobliwości.

Niechaj będzie równanie powierzchni w spółrzędnych jednorodnych x_1, x_2, x_3, x_4 i dajmy, że jego strona pierwsza jest uporządkowana według potęg ilości x_4, wtedy równanie powierzchni można napisać w postaci:

$$u_0 x_4^n + u_1 x_4^{n-1} + u_2 x_4^{n-2} \ldots\ldots = 0,$$

gdzie $u_0, u_1, u_2, \ldots$ są funkcye jednorodne całkowite stopnia $0, 1, 2, \ldots$ względem spółrzędnych x_1, x_2, x_3.

Jeżeli punkt $x_1=x_2=x_3=0$ jest punktem powierzchni, będzie $u_0=0$ i wtedy $u_1=0$ jest równaniem płaszczyzny stycznej w tym punkcie.

Jeżeli poprowadzimy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny stycznej i nieograniczenie blizko do niej, to przetnie ona powierzchnię według pewnej krzywej; pomijając nieskończenie małe rzędów wyższych, można tę krzywą uważać przybliżenie za stożkową (krzywa wskazująca, indicatrice Dupina); punkt powierzchni jest eliptycznym, parabolicznym lub hyperbolicznym, stosownie do tego czy ta krzywa jest elipsą, parabolą albo hyperbolą.

Jeżeli równanie powierzchni napiszemy w postaci $z=f(x,y)$, to punkt x, y, z powierzchni będzie eliptycznym, parabolicznym albo hyperbolicznym, stosownie do tego, czy

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 \lesseqqgtr \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Przecięcie lub część przecięcia dwu powierzchni algebraicznych, którego punkty nie wszystkie leżą na jednej płaszczyznie, nazywa się krzywą skośną algebraiczną.

Każda płaszczyzna przestrzeni przecina krzywą skośną algebraiczną w stałej liczbie punktów (rzeczywistych, zlewających się albo urojonych). Ta liczba stanowi rząd krzywej skośnej.

Najmniejszym rzędem krzywej skośnej niezniekształconej jest 3.

Zauważmy, że nie można tu z całą ścisłością, jak dla krzywych płaskich, uważać układu dwu krzywych skośnych rzędów d i d' za zniekształcenie krzywej skośnej rzędu $d+d'$, gdyż jeżeli krzywa skośna rzędu $d+d'$, położona na powierzchni algebraicznej, rozpada się na dwie krzywe rzędów d i d', to te dwie krzywe będą miały wogólności punkty przecięcia, co wogóle nie zachodzi, jeżeli dwie krzywe dane uważa się za leżące jakkolwiek w przestrzeni.

Położenie graniczne prostej, przechodzącej przez dwa punkty krzywej, gdy te zbliżają się do siebie nieograniczenie, nazywa się prostą styczną do krzywej; a położenie graniczne płaszczyzny, przechodzącej przez trzy punkty krzywej, gdy te zbliżają się do siebie nieograniczenie, jest płaszczyzną ściśle styczną do krzywej.

Klasą krzywej skośnej nazywamy liczbę jej stycznych, które przecina prosta dowolna przestrzeni, albo liczbę płaszczyzn, przechodzących przez prostą dowolną przestrzeni i przez styczne do krzywej danej. Niektórzy tej liczbie nadają nazwę „porządku" (Rang), a klasą krzywej skośnej nazywają klasę jej powierzchni rozwijalnej (patrz niżej).

Powierzchnia, utworzona ruchem prostej, nazywa się powierzchnią prostoliniową lub wprost liniową. Powierzchnie te dzielimy na rozwijalne i na skośne (wichrowate).

Powierzchnia rozwijalna jest miejscem stycznych krzywej skośnej; powierzchnia ta powstaje tedy przez ruch prostej, której dwa położenia kolejne znajdują się na tej samej płaszczyźnie.

Tworzącemi powierzchni rozwijalnej są styczne krzywej skośnej, która znów nazywa się krawędzią zwrotu albo krzywą ostrzową powierzchni rozwijalnej. Rząd powierzchni rozwijalnej równa się klasie krzywej skośnej. Liczba ta nazywa się także porządkiem (Rang) układu, utworzonego przez krzywą skośną i jej powierzchnię rozwijalną.

Płaszczyzną ściśle styczną do krzywej skośnej jest płaszczyzna styczna do powierzchni rozwijalnej; powierzchnia ta tedy jest obwiednią płaszczyzn ściśle stycznych krzywej skośnej. Dla tego też nazywamy ją także rozwijalną ściśle styczną.

Jeżeli przetniemy płaszczyzną powierzchnię rozwijalną, to punkt, w którym płaszczyzna przecina krzywą skośną, będzie ostrzem dla krzywej przecięcia.

Punkty, w której spotykają się dwie tworzące nie nieskończenie blizkie powierzchni rozwijalnej, tworzą krzywą, którą nazywamy krzywą podwójną albo krzywą węzłową rozwijalnej.

Krzywa przecięcia rozwijalnej z płaszczyzną ma punkt podwójny w każdym punkcie, w którym płaszczyzna przecina krzywą węzłową.

Jakakolwiek tworząca rozwijalnej rzędu n-tego przecina $n-4$ tworzących nie nieskończenie blizkich.

Płaszczyzny, przechodzące przez dwie tworzące niekolejne, obwodzą nową rozwijalną, która jest dwustyczną (styczną w dwóch punktach) do krzywej skośnej i dla tego nazywa się rozwijalną dwustyczną krzywej skośnej.

Nazywamy liczbą punktów podwójnych pozornych krzywej skośnej liczbę prostych, dających się przeprowadzić z punktu przestrzeni do przecięcia z krzywą dwa razy. Liczba ta jest stała, t. j. niezależna od wyboru punktu w przestrzeni.

Nazywamy liczbą płaszczyzn podwójnych pozornych powierzchni rozwijalnej liczbę takich przecięć dwóch z pomiędzy jej płaszczyzn obwodzących, które znajdują się na jednej dowolnej płaszczyznie przestrzeni. I ta liczba jest oczywiście stałą.

Klasą powierzchni rozwijalnej jest liczba jej płaszczyzn stycznych, przechodzących przez dowolny punkt przestrzeni, lub liczba płaszczyzn ściśle stycznych do krzywej ostrzowej powierzchni rozwijalnej, przechodzących przez punkt dowolny przestrzeni.

Przypadkiem szczególnym powierzchni rozwijalnej jest stożek; powierzchnia ta powstaje przez ruch prostej, której jeden punkt jest stałym.

Jeżeli krzywa przecięcia stożka płaszczyzną jest krzywą algebraiczną rzędu n-tego, wtedy stożek nazywa się algebraicznym, a liczba n jest jego rzędem. Klasą stożka jest klasa krzywa przecięcia.

Powierzchnią skośną liniową nazywamy powierzchnię, utworzoną ruchem prostej, której dwa położenia sąsiednie nie znajdują się wogóle na jednej płaszczyźnie.

Powierzchnia skośna rzędu n-tego jest zazazem i klasy n-tej i odwrotnie (Cayley, Camb. Math. Journ. VII, 1852). Punkty, w których spotykają się dwie tworzące niekolejne powierzchni skośnej, tworzą i w tym razie krzywą podwójną lub węzłową powierzchni.

Płaszczyzny, przechodzące przez dwie tworzące niekolejne powierzchni skośnej, są dwustycznemi do powierzchni; obwodzą one powierzchnię rozwijalną powierzchni danej; klasa tej ostatniej jest równa rzędowi krzywej podwójnej (Cayley).

Rozpatrzmy niektóre związki zasadnicze, odnoszące się do powierzchni ogólnej rzędu n-tego bez osobliwości. Wraz z tą powierzchnią ogólną rozważać będziemy dwie powierzchnie rozwijalne, mianowicie obwiedzioną przez płaszczyzny dwustyczne do powierzchni i obwiedzioną przez płaszczyzny stateczne.

Wprowadźmy oznaczenia następujące: n — rząd powierzchni; a — rząd stożka opisanego na powierzchni z wierzchołkiem w punkcie dowolnym przestrzeni; δ — liczba tworzących podwójnych tego stożka; $\varkappa$ — liczba tworzących zwrotu stożka; n' — klasa powierzchni; a' — klasa jej przecięcia stożkowego (liczba a lub a' nazywa się zwykle porządkiem (Rang) powierzchni); δ' — liczba stycznych podwójnych tego przecięcia; $\varkappa'$ — liczba jego stycznych przegięcia; b' — klasa powierzchni rozwijalnej, obwiedzionej przez płaszczyzny dwustyczne powierzchni; k' — liczba płaszczyzn podwójnych pozornych tej powierzchni rozwijalnej, t. j. liczba przecięć dwu z pomiędzy jego płaszczyzn, znajdujących się na jednej płaszczyźnie danej; t' — liczba płaszczyzn trójstycznych powierzchni; g' — rząd powierzchni rozwijalnej płaszczyzn dwu stycznych; ϱ' — rząd krzywej punktów styczności płaszczyzn dwustycznych; c' — klasa powierzchni rozwijalnej płaszczyzn stycznych statecznych powierzchni; h' — liczba jej płaszczyzn podwójnych pozornych; r' — rząd tej powierzchni; β' — liczba płaszczyzn wspólnych dwóm powierzchniom rozwijalnym płaszczyzn dwustycznych i płaszczyzn statecznych i zarazem statecznych dla tej drugiej powierzchni; γ' — liczba płaszczyzn wspólnych tymże powierzchniom rozwijalnym i zarazem też statecznych względem pierwszej powierzchni; σ' — rząd krzywej parabolicznej.

Pomiędzy temi liczbami zachodzą związki następujące:

$$a = a' = n(n-1); \qquad \delta = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3),$$

$$\varkappa = n(n-1)(n-2); \qquad n' = n(n-1)^2,$$

$$\delta' = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9); \qquad \varkappa' = 3n(n-2),$$

$$b' = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12),$$

$$h' = \frac{1}{8} n(n-2)(n^{10} - 6n^9 + 16n^8 - 54n^7 + 164n^6$$

$$- 288n^5 + 547n^4 - 1058n^3 + 1068n^2 - 1214n + 1464),$$

$$t' = \frac{1}{6} n(n-2)(n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 45n^4 + 114n^3 - 111n^2 + 548n - 960),$$

$$q' = n(n-2)(n-3)(n^2 + 2n - 4),$$

$$\varrho' = n(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12),$$

$$c' = 4n(n-1)(n-2),$$

$$h' = \frac{1}{2} n(n-2)(16n^4 - 64n^3 + 80n^2 - 108n + 156),$$

$$r' = 2n(n-2)(3n-4); \qquad \beta' = 2n(n-2)(11n-24),$$

$$\gamma' = 4n(n-2)(n-3)(n^3 + 3n - 16); \qquad \sigma' = 4n(n-2).$$

Dwie powierzchnie rzędów n_1 i n_2 przecinają się według krzywej skośnej rzędu $n_1 n_2$.

Wszystkie powierzchnie rzędu n-tego, przechodzące przez $N(n)-1 = \binom{n+3}{3}-2$ punktów, dowolnie danych w przestrzeni, przecinają się według krzywej skośnej rzędu n^2.

Każda powierzchnia rzędu n-tego, przechodząca przez $N(n)-1$ punktów dowolnych krzywej skośnej rzędu n^2, będącej przecięciem zupełnem dwu powierzchni rzędu n-tego, zawiera całkowicie tę krzywą.

Przez daną krzywą skośną rzędu μ można zawsze przesunąć powierzchnię rzędu n, jeżel tylko $N(n) > n\mu$, gdyż jeżeli wtedy weźmiemy na krzywej $n\mu+1$ punktów dowolnych, to każda powierzchnia rzędu n-tego, przez nie przechodząca, zawierać będzie całkowicie krzywą rzędu μ.

Granicą wyższą liczby pojedyńczych warunków, odpowiadających przechodzeniu powierzchni rzędu n przez krzywą rzędu μ, jest liczba $n\mu+1$.

Dla krzywej rodzaju zero liczba tych warunków wynosi ściśle $n\mu+1$.

Dla krzywej rodzaju 1 (eliptycznej) liczba tych warunków wynosi $n\mu$ (Hermite, Crelle LXXXII).

Liczby $n\mu+1$ i $n\mu$ stosują się wszakże dla wartości n dość wielkich.

Dla krzywej rodzaju p ($\leq \mu-3$) liczba warunków pojedyńczych wynosi $n\mu+1-p$ (Lindemann, Crelle LXXXIV, Halphen, Journ. de l'Ec. pol. LII, str. 12).

Jeżeli krzywa jest przecięciem zupełnem powierzchni rzędów n_1, n_3, wtedy liczba warunków pojedyńczych, odpowiadających warunkowi przejścia powierzchni przez krzywą, wynosi $n\mu+1-p$, przy jakiemkolwiek p, byleby było $n \geqslant n_1 + n_2 - 3$. W przeciwnym razie, kładąc $n = n_1 + n_2 - \delta$, mamy zawsze następującą liczbę warunków:

$$n\mu + 1 - p + \frac{(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)}{6} \text{ (Halphen, l. c. str. 18).}$$

Krzywa skośna, będąca przecięcięciem zupełnem dwu powierzchni rzędów n_1, n_2, jest wyznaczona przez $N(n_1) - N(n_1 - n_2) - 1$ punktów, dowolnie danych w przestrzeni.

Jeżeli linia przecięcia dwu powierzchni rzędu n-tego zawiera krzywą rzędu np, położoną na powierzchni rzędu p, to część pozostała linii przecięcia jest krzywą rzędu $n(n-p)$, położoną na powierzchni rzędu $n-p$ (Poncelet, 1830).

Wszystkie powierzchnie rzędu n-tego, przechodzące przez $N(n) - 2$ punktów, danych dowolnie w przestrzeni, przechodzą także przez $n^3 - N(n) +$ innych punktów, wyznaczonych przez pozostałe.

Trzy powierzchnie rzędów n_1, n_2, n_3 przecinają się w $n_1 n_2 n_3$ punktach, z których niektóre są wyznaczone przez pozostałe, a mianowicie:

Jeżeli $n_1 > n_2 + n_3$, wtedy liczba punktów dowolnych, wyznaczających pozostałe, wynosi:

$$\tfrac{1}{2} n_2 n_3 (2n_1 - n_2 - n_3 + 4) - 1;$$

jeżeli zaś $n_1 < n_2 + n_3$, lecz $n_1 > n_2$, $n_1 > n_3$ wtedy punktów dowolnych będzie:

$$\tfrac{1}{2} n_2 n_3 (2n_1 - n_2 - n_3 + 4) + N(n_2 + n_3 - n_1 - 4).$$

Wzory te tracą znaczenie dla $n_2 = n_3$ (Jacobi, Crelle XV).

Jeżeli z n^3 punktów, wspólnych trzem powierzchniom rzędu n-tego, $n^2 p$ punktów leży na powierzchni rzędu p, wtedy pozostałe punkty w liczbie $n^2(n-p)$ leżą na powierzchni rzędu $n-p$ (Poncelet).

Trzy powierzchnie rzędów n_1, n_2, n_3, które mają wspólną krzywą rzędu n-tego i klasy (porządku) r, przecinają się prócz tego w

$$n_1 n_2 n_3 - n(n_1 + n_2 + n_3 - 2) + r$$

punktach.

Jeżeli krzywa jest podwójną dla pierwszej z tych powierzchni, wtedy liczba punktów wspólnych wynosi:

$$n_1 n_2 n_3 - n(n_1 + 2n_2 + 2n_3 - 4)$$

(Patrz Salmon-Fiedler, Geom. des Raumes II, wyd. 3, 146).

Jeżeli punkt, wspólny trzem powierzchniom rzędów n_1, n_2, n_3, jest punktem wielokrotnym rzędu λ dla pierwszej, μ dla drugiej, ν dla trzeciej, to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby w tym punkcie zeszło się $\lambda\mu\nu$ z pomiędzy $n_1 n_2 n_3$ przecięć jest, by stożki styczne do trzech powierzchni w punkcie wspólnym nie miały żadnej tworzącej wspólnej. Dowód ścisły tego twierdzenia (które jest uogólnieniem podobnego twierdzenia dla krzywych płaskich; porówn. pracę Vossa, cytowaną wyżej na str. 182) starał się podać Berzolari (Annali di mat. XXIV).

Twierdzeniami o przecinaniu się powierzchni zajmowali się: Poncelet (Propr. project. II), Jacobi (Crelle XV), Plücker (tamże XVI, XIX), Cayley (Papers I, 259), Reye (Math. Ann. II) i inni. Z tych badań zasługują na szczególną uwagę te, które odnoszą się do przypadku, gdy powierzchnie mają wspólne punkty lub linie wielokrotne; do nich należą wyniki pracy Cayley'a o przekształceniu dwuwymiernem przestrzeni (Proc. math. Soc. III, 1870), w której znajdujemy wzory zwane wzorami równoważności i postulacyi. Przedmiotem tym zajmowali się później Nöther, (Annali di mat. V) i inni.

Do powierzchni i krzywych skośnych stosują się niektóre twierdzenia, które można uważać jako uogólnienie twierdzeń podstawowych teoryi grup punktów na krzywej płaskiej.

Niechaj będzie powierzchnia ogólna F_n rzędu n-tego. Dwie krzywe R, R', tworzące razem przecięcie zupełne powierzchni F_n z inną powierzchnią, nazywają się resztowem (rezydualnemi) i jedna z nich jest resztą drugiej. Dwie krzywe nazywają się spółresztowemi, jeżeli każda z nich jest resztową względem jednej i tej samej krzywej trzeciej. Definicye analogiczne stosują się do grup punktów, wyciętych przez powierzchnię na krzywej skośnej.

Możemy wypowiedzieć następujące twierdzenia o reszcie dla powierzchni i dla krzywych skośnych:

Jeżeli na powierzchni dwie krzywe R, R' są resztowemi względem jednej i tej samej krzywej R'', a zatem spółresztowemi względem siebie, i jeżeli krzywa R jest resztową względem innej krzywej R''', wtedy i R' będzie resztową względem krzywej R'''.

Niechaj krzywa R będzie przecięciem dwu powierzchni F, Φ i niechaj R' będzie krzywą resztową dla krzywej R; powierzchnie, przechodzące przez krzywą R' niechaj przecinają krzywą R według grup punktów spółresztowych z inną grupą daną; jeżeli zmieniać będziemy F, Φ i R i pozostawimy niezmienioną krzywą R, wtedy układ grup punktów pozostanie niezmiennym.

Poszukiwania tego rodzaju (geometrya na powierzchni algebraicznej), których pomysł zawdzięczamy Clebschowi, prowadził głównie Noether (Math. Ann. II, VIII) w ostatnich zaś czasach zajmowali się tym przedmiotem Castelnuovo i Enriques. Porówn. referat tych autorów w Math Ann. t. XLVIII.

Pierwsze badania nad teoryą powierzchni datują od czasów Eulera, któremu zawdzięczamy podstawy teoryi powierzchni rozwijalnych.

Nie wiele posiadamy traktatów systematycznych o teoryi powierzchni z punktu widzenia geometryi wyższej. Po za rozprawami specyalnemi, cytowanemi w miejscach właściwych, wymieniamy tu jako najważniejsze: dzieło Cremony „Prelimin. di una teor. geom. delle superf.“, Bolonia 1866, przekład niemiecki Curtzego (Berlin 1870 i „Geometryę przestrzeni“ Salmona (przekład niemiecki Fiedlera, wyd. 3-e, Lipsk 1880). W przekładzie niemieckim dzieła Cremony dodano paragrafy, których niema w dziele oryginalnem, i dlatego w wielu razach cytaty nasze odnoszą się do tekstu niemieckiego.

---

§ 2.

Przedstawienie analityczne krzywych skośnych. Powierzchnie monoidalne Cayley'a.

Ważnem zagadnieniem w teoryi krzywych algebraicznych skośnych jest ich przedstawialność analityczna.

Jeżeli spółrzędne punktu krzywej wyrażone jako funkcye jednego parametru, w takim razie zagadnienie jest rozwiązanem, lecz przedstawienie takie rzadko daje się łatwo osiągnąć.

Najnaturalniejszym wydaje się pomysł przedstawienia analitycznego krzywej skośnej przy pomocy równań dwu powierzchni przez nią przechodzących; lecz łatwo widzieć, iż istnieją krzywe, nie będące przecięciami zupełnemi dwu powierzchni; a zatem sposób powyższy nie dopisuje, gdyż nie może służyć do indywidualizowania wogóle krzywej skośnej.

Myślano dawniej o wyznaczaniu krzywej przy pomocy równań trzech powierzchni, przechodzących przez nią i nie mających po za tem punktów wspólnych. Lecz przekonano się, że wogóle i trzy powierzchnie nie wystarczają; z pewnego twierdzenia Kroneckera (Crelle XCII), w teoryi funkcyj algebraicznych, wywnioskowano, że do scharakteryzowania krzywej skośnej ogólnej potrzeba mieć równania czterech powierzchni. Vahlen (Crelle CVIII) podał przykład następujący: Dajmy, że przecięcie dwu powierzchni F_μ, F_ν rzędów μ i ν rozpada się na dwie krzywe R_m^p, $R_{m'}^{p'}$ rzędów m, m' i rodzajów p, p'. Liczba punktów przecięcia dwu krzywych wynosi:

$$s = m(\mu + r - 4) - 2(p-1).$$

Poprowadźmy nową powierzchnię F_ϱ tylko przez krzywą R_m^p; krzywa $R_{m'}^{p'}$ przetnie tę powierzchnię w

$$S = \mu\nu\varrho - m(\mu + \nu + \varrho - 4) + 2(p-1)$$

punktach, które leżą wszystkie na trzech powierzchniach, ale nie leżą na krzywej R_m^p.

Otóż za pomocą jednej danej krzywej R_m^r nie będzie można wogóle wyznaczyć trzech powierzchni tak, aby liczba S była zerem. W samej rzeczy rozważmy krzywą $R_5{}^0$ rzędu piątego i rodzaju zero, którą prosta niechaj przecina w czterech punktach; gdyby liczba S była zerem, to ponieważ przez krzywą $R_5{}^0$ nie przechodzi żadna powierzchnia rzędu 2-go, musiałoby być $\mu = r = \varrho = 3$ Lecz i przy pomocy trzech powierzchni rzędu 3-go krzywa $R_5{}^0$ nie może być wyodosobnioną, gdyż łatwo widzieć, że każda taka powierzchnia, zawierając krzywą $R_5{}^0$, zawiera zarazem i prostą czworosieczną.

Inna metoda przedstawienia krzywej skośnej polega na uważaniu ogółu wszystkich prostych, przecinających krzywą. Jeżeli wprowadzimy sześć spółrzędnych prostej w przestrzeni, to kompleks tych prostych będzie można przedstawić analitycznie przy pomocy związku pomiędzy temi sześcioma spółrzędnemi. Odwrotnie wszakże, nie każdy związek pomiędzy sześcioma spółrzędnemi prostej przedstawia krzywą (patrz „Geometrya prostej“ Rozdz. XIV). Tym sposobem przedstawienia zajmowali się Cayley (Quart. Journ. III, V, 1860, 1862) i Voss (Math. Ann. XIII).

Wreszcie istnieje jeszcze inna metoda, którą zawdzięczamy Cayley'owi i która nazywa się metodą powierzchni monoidalnych.

Niechaj x_1, x_2, x_3, x_n będą spółrzędne jednorodne punktu krzywej; z punktu O $(x_1=x_2=x_3=x_4=0)$, który jest wierzchołkiem czworościanu podstawowego, rzućmy na płaszczyznę $x_4=0$ krzywą $R_p{}^m$ rzędu m i rodzaju p. Niechaj równaniem rzutu będzie:

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

gdzie zakładamy, iż spółrzędne ξ wybraliśmy w ten sposób, aby było:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x_1 : x_2 : x_3 .$$

Mamy tedy związki:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \frac{\psi_n(\xi)}{\psi_{n-1}(\xi)},$$

gdzie funkcye ψ_n i ψ_{n-1} są funkcyami wymiernemi całkowitemi spółrzędnych ξ, pierwsza rzędu n, druga rzędu n—1. Krzywa $R_p{}^m$ ukazuje się wtedy, jako przecięcie dwu powierzchni

$$f_m(x) = 0), \qquad x_4 \psi_{n-1}(x) - \psi_n(x) = 0,$$

z których pierwsza jest stożkiem rzędu m-tego z wierzchołkiem w punkcie O, druga zaś jest powierzchnią rzędu n-tego, mającą w O punkt $(n-1)$-krotny. Tę drugą powierzchnię nazywa Cayley monoidą (powierzchnią monoidalną).

Stożek i monoida przecinają się wzdłuż krzywej $R_p{}^m$ i po za tem jeszcze według $m(n-1)$ prostych, przechodzących przez punkt O i będących przecięciem dwu stożków $f_m=0$ i $\psi_{n-2}=0$; pomiędzy temi prostemi jest $(n-1)(m-n)+a$ prostych, liczonych podwójnie i będących prostemi podwójnemi stożka f_m oraz $(n-1)(2n-m)-2a$ prostych, które razem z poprzedniemi leżą na stożku $\psi_n=0$.

Dwa stożki $\psi_n=0$ i $\psi_{n-1}=0$ nazywają się stożkiem niższym, drugi stożkiem wyższym monoidy.

Jeżeli krzywa $R_p{}^m$ nie jest płaską, będzie zawsze $n \geqslant \frac{1}{2}m$; zatem rząd monoidy nie jest oznaczony, albowiem można ją zastąpić inną odmiennego rzędu.

Tą metodą, wyłożoną przez Cayley'a (Comp. rend. 1862), posługiwali się później Noether, Halphen, Weyer i inni w badaniach nad krzywemi skośnemi.

---

§ 3.

Klasyfikacya krzywych skośnych.

Z zagadnieniem o przedstawieniu analitycznem krzywych skośnych łączy się ściśle zagadnienie, dotyczące ich klasyfikacyi, dla tych krzywych bowiem rząd nie wystarcza do scharakteryzowania gatunku krzywej, jak to ma miejsce dla krzywych płaskich i dla powierzchni. W samej rzeczy już dla rzędu 4-go istnieją dwie różne krzywe, mające własności charakterystyczne zupełnie różne, o czem przekonał się Salmon (Camb. Journ. V, 1850), a później Steiner (Flächen 3-en Grad., Crelle LIII, 1856).

Zagadnienie, o którem obecnie mówimy, daje się wysłowić w ten sposób:

Wyliczyć, określić i wyróżnić od siebie rozmaite rodziny krzywych tego samego rzędu w ten sposób, aby każda rodzina nie mogła być przypadkiem szczególnym innej rodziny ogólniejszej.

W poszukiwaniu tem rozważać będziemy tylko krzywe bez punktów osobliwych, przyjmujemy bowiem jako postulat, iż każda krzywa o punktach osobliwych jest przypadkiem szczególnym krzywej tegoż rzędu bez punktów osobliwych (patrz Halphen w pracy niżej cytowanej).

Zagadnieniem tem zajmowali się specyalnie Halphen i Nöther w dwóch rozprawach, premiowanych na konkursie im.

Steinera, ogłoszonym przez Akademię berlińską w r. 1882 (patrz Journ. de l'Ecole polyt. LII 1881, Berliner Abh. 1883, Crelle XCIII); po tych rozprawach nastąpiły prace Valentinera (Acta math. II), Noethera (tamże VII) i innych.

Badania nad tym przedmiotem nie doprowadziły dotąd do rozwiązania zagadnienia w całej jego ogólności, lecz tylko do rozwiązania go w przypadkach specyalnych.

Po stwierdzeniu, że sam rząd krzywej skośnej nie wystarcza do jej scharakteryzowania, powstała myśl wprowadzenia innych liczb, które możnaby nazwać charakterystycznemi, a które wraz z rzędem mogłyby służyć do scharakteryzowania krzywej. Z rozważania dwóch gatunków krzywych skośnych rzędu czwartego wypłynął najprzód pomysł wprowadzenia, prócz rzędu, jeszcze liczby h punktów podwójnych pozornych (t. j. liczby prostych, które z punktu dowolnego w przestrzeni można przeprowadzić do krzywej). Znajdujemy atoli, że dla rzędu 9 istnieją dwie krzywe różne, mające tę samą liczbę punktów podwójnych pozornych, mianowicie 18. Te dwie krzywe wszakże różnią się od siebie inną liczbą, którą Halphen oznacza literą n; jest nią mianowicie rząd najmniejszy stożków, zawierających wszystkie h cięciw, dających się z punktu dowolnego przestrzeni poprowadzić do krzywej. Dla jednej z dwu powyższych krzywych jest $n=4$, dla drugiej $n=5$. Halphen przekonał się zarazem, że dla rzędu 15 znajdujemy dwie krzywe różne, dla których jest zawsze $h=63$, $n=9$.

Cayley (Crelle CXI, Math. Pap. V, p. 613) zauważył, że w niektórych przypadkach, w których Halphen znalazł krzywą, krzywa taka istnieć może faktycznie tylko przy pewnych konfiguracyach specyalnych h linij węzłowych. Tak np. Cayley znalazł, iż dla istnienia krzywych rzędu 9, mających $h=16$, $n=4$, nie wystarcza, by 16 linij węzłowych leżało na stożku kwartykowym, ale potrzeba jeszcze, aby te linie leżały równocześnie na dwu takich stożkach. Stąd wynika, że trzy liczby rząd $=d, h, n$ nie są w ogóle dostateczne do scharakteryzowania krzywej skośnej i że koniecznem jest nadto zbadanie warunków, przy których krzywa, mająca dane liczby charakterystyczne, istnieje faktycznie.

Podamy twierdzenia główne, odkryte przez Halphena i przez innych.

Krzywa stopnia d z h punktami podwójnemi pozornemi tworzą jednę rodzinę, jeżeli h zawiera się pomiędzy granicami:

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} \text{ i } \frac{(d-2)(d-3)}{2}+1.$$

Największą wartością liczby h jest $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$, najmniejszą zaś liczba największa całkowita, zawarta w liczbie $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$.

Nie można wszakże wziąć liczby h dowolnie pomiędzy temi dwiema granicami, gdyż dla danej wartości d szereg wartości h przedstawia lukę; luki tej niema już, począwszy od największej liczby całkowitej, zawartej w $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$, i wyżej.

Krzywe rzędu d, dla których liczba h jest mniejsza od największej liczby całkowitej, zawartej w $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$, leżą na powierzchni stopnia drugiego; jeżeli h jest większe od tej liczby, wtedy odpowiednie krzywe leżą na powierzchni sześciennej; jeżeli h jest większe od $\frac{3(d-1)^2}{8}$, wtedy krzywe leżą na powierzchni rzędu czwartego i t. d.

Każda krzywa rzędu d, dla której liczba n Halphena jest mniejsza od $\frac{2}{3}(d-3)$, leży na powierzchni rzędu 2-go.

Każda krzywa rzędu d, nie położona na powierzchni rzędu 2-go i dla której $n < \frac{3}{4}(d-4)$, leży na powierzchni rzędu 3-go; jeżeli $n < \frac{4}{5}(d-6)$ leży na powierzchni rzędu czwartego, o ile nie leży na powierzchni rzędu 2-go i 3-go; jeżeli $n < \frac{5}{6}$ i krzywa nie leży na powierzchniach rzędu niższego, to leży na powierzchni rzędu 5-go.

Tablice poniższe dają dla każdego rzędu d liczbę rodzin krzywych istniejących; wyjmujemy te tablice z cytowanej pracy Halphena, ale ograniczamy się tylko na kilku pierwszych przypadkach, gdyż liczby, podane przez Halphena, nie są zupełnie pewne, i tak np dla rzędu 9 należy je poprawić według wskazówek Cayley'a (Papers V, p. 616). Co do określenia rodzaju patrz § 4.

1. Krzywe skośne niezniekształcone rzędu 2-go nie istnieją.
2. $d = 3$. Istnieje jedna tylko rodzina krzywych sześciennych skośnych: liczba h punktów podwójnych pozornych równa się 1, rodzaj $p=0$.
3. $d = 4$. Istnieją dwie rodziny krzywych rzędu czwartego skośnych; różnią się one liczbą punktów podwójnych pozornych, która dla jednej rodziny jest 2, dla drugiej 3. Rodzaje odpowiednie są 1 i 0.
4. $d=5$. Istnieją trzy rodziny krzywych rzędu 5-go skośnych.

W tablicach podajemy: wartości odpowiednie liczb h i n, rzędy najmniejsze powierzchni, których przecięciami są krzywe, krzywe dopełniające, powstające przy przecięciu się tych powierzchni; wreszcie rodzaj najwyższy p krzywych każdej rodziny.

$d=5$	h	n	Rzędy najmn. pow.	Krzywe dop.	p
	4	2	2 i 3	prosta	2
	5	2	3 i 3	krzywa rzędu 4-go skośna z 3 punktami podw. pozornemi	1
	6	3	3 i 3	dwie stożkowe	0

Wszystkie te krzywe wyznaczają się z 20 warunków.

Salmon w dziele „Geom. des Raumes" II odróżnia cztery rodziny krzywych rzędu 5-go; czwartą wszakże rodzinę należy uważać za przypadek szczególny trzeciej (patrz Halphen, Écol. pol. LII. str. 12, Note).

5. $d=6$. Istnieje pięć rodzin krzywych rzędu szóstego skośnych. Liczba stałych w równaniu takiej krzywej wynosi 24 i dlatego do wyznaczenia krzywej potrzeba 24 warunków:

$d=6$	h	n	Rzędy najmn. pow.	Krzywe dop.	p
	6	2	2 i 3	—	4
	7	3	3 i 3	krzywa sześcienna skośna	3
	8	3	3 i 3	prosta i stożkowa	2
	9	3	3 i 3	trzy proste	1
	10	4	3 i 4	inna krzywa rzędu 6-go tej samej rodziny	0

6. $d=7$. Istnieje siedm rodzin krzywych skośnych rzędu 7-go. Liczba ich stałych wynosi 28.

$d=7$	h	n	Rzędy najmn. pow.	Krzywe dop.	p
	9	3	2 i 4	prosta	6
	10	3	3 i 3	stożkowa	5
	11	4	3 i 3	dwie proste	4
	12	4	3 i 4	krzywa rzędu 6-go skośna z 6 punkt. podw. pozornemi	3
	13	4	4 i 4	krzywa skośna rzędu 9-go	2
	14	4	4 i 4	krzywa skośna rzędu 9-go	1
	15	5	4 i 4	krzywa skośna rzędu 9-go	0

We wszystkich tych przypadkach wystarcza, jak widzimy, liczba h do scharakteryzowania krzywej; ale od rzędu 9-go począwszy, liczba ta nie jest już dostateczną. W związku z tym faktem pozostaje następujący, że dla rzędu $d = 9$ istnieją dwie rodziny krzywych, mające tensam rodzaj najwyższy p (mianowicie $p = 10$), a które uważać należy za różne.

Po szczegóły, dotyczące zwłaszcza siecznych wielokrotnych dla różnych wymienionych tu rodzin linij krzywych odsyłamy do prac Noethera (l. c. np. Crelle XCIII, str. 310).

Dodajmy jeszcze, że Chasles (Compt. rend. LIV) i Schwarz (Crelle LIV) zajmowali się klasyfikacyą krzywych skośnych, opartą na naturze odpowiednich powierzchni rozwijalnych.

---

§ 4.

Punkty osobliwe powierzchni i krzywych skośnych. Ich liczby charakterystyczne. Sieczne wielokrotne krzywych skośnych. Wzory Cayley'a. Styczność powierzchni.

Jeżeli każda prosta, przechodząca przez punkt na powierzchni, spotyka w nim powierzchnię w dwu punktach zlewających się, wtedy punkt ten nazywamy podwójnym.

Istnieje nieskończenie wiele prostych, które, przechodząc przez punkt podwójny P, mają w nim styczność trójpunktową z powierzchnią (trzy przecięcia nieskończenie blizkie). Miejscem tych prostych jest stożek rzędu 2-go; każda płaszczyzna styczna tego stożka przecina powierzchnię według krzywej, mającej ostrze w punkcie P.

Ten stożek może rozpadać na się dwie płaszczyzny różne, albo na dwie płaszczyzny zlewające się: mamy stąd trzy gatunki punktów podwójnych: punkt stożkowy (węzeł), punkt dwupłaszczyznowy, punkt jednopłaszczyznowy. Punkt jednopłaszczyznowy nazywamy zwykle **ostrzem** („pinch-point" **Cayley**'a albo „pince-point" matematyków francuskich). Punkt stożkowy zmniejsza wogóle o dwie jedności klasę powierzchni i dlatego oznacza się przez C_2. Istnieją różne gatunki punktów dwupłaszczyznowych i jednopłaszczyznowych; oznacza się je zwykle przez B_i, U_j stosownie do tego, czy zmniejszają o i lub o j klasę powierzchni.

Badaniem tych punktów osobliwych dla powierzchni rzędu 3-go zajmowali się: **Schläfli** (Phil. Trans. 1863), **Cayley** (tamże 1969), **Rodenberg** (Math. Ann. XIV, str. 46, patrz Rozdz. XI §1). **Kohn** poświęcił osobną pracę teoryi punktów dwupłaszczyznowych i jednopłaszczyznowych dla jakiejkolwiek powierzchni (Math Ann. XXII, str. 124).

Jeżeli $F=0$ **jest równaniem powierzchni w spółrzędnych jednorodnych, to warunkiem na to, aby powierzchnia miała punkt podwójny, jest znikanie wyróżnika, t. j. wyniku elimi nacyi spółrzędnych** x **z czterech równań:**

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial x_3}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial x_4}=0;$$

warunkiem na to, aby punkt (x) **był punktem podwójnym jest, by spółrzędne** x **czyniły zadość tym czterem równaniom**

Istnieje w ogóle sześć tworzących stożka stycznego, mających z powierzchnią styczność czteropunktową (cztery przecięcia nieskończenie blizkie).

Jeżeli każda prosta, przechodząca przez punkt powierzchni, spotyka w tym punkcie powierzchnię w r punktach zlewających się, wtedy punkt ten nazywamy r-**krotnym** punktem powierzchni. I tu podobnie, jak w przypadku poprzednim, można zbudować stożek rzędu r-tego, którego każda tworząca ma w tym punkcie $r+1$ punktów wspólnych z powierzchnią (stożek ściśle styczny); stożek ten ma w ogóle $r(r+1)$ tworzących, mających z powierzchnią $r+2$ punktów wspólnych.

Powierzchnia rzędu n-tego z punktem O n-krotnym jest koniecznie stożkiem o wierzchołku w punkcie O.

Powierzchnia może mieć linie wielokrotne lub osobliwe, t. j. linie, których wszystkie punkty są wielokrotnemi. Wzdłuż linii wielokrotnej rzędu r przechodzi r powłok powierzchni.

Punkty linii wielokrotnej rzędu r są punktami wielokrotnemi rzędu r, dla których stożek styczny, o którym mowa wyżej, rozpada się na r płaszczyzn.

Dla $r = 2$, gdy obie płaszczyzny styczne zlewają się, mamy krzywą ostrzową powierzchni, której każdy punkt jest punktem jednopłaszczyznowym.

Dla powierzchni, podobnie jak dla krzywych płaskich, można określić liczbę, zwaną rodzajem; liczba ta zależy wogóle od liczby krzywych podwójnych i ostrzowych powierzchni, przy założeniu, że ta powierzchnia nie posiada innych linij osobliwych wyższego rzędu.

Liczbę tę wprowadził Clebsch (Comptes rendus LXXII, 1868) i określił ją dla powierzchni rzędu n-tego jako liczbę spółczynników nieoznaczonych, pozostających w równaniu powierzchni rzędu n—4, przechodzącej przez linie podwójne i ostrzowe powierzchni.

Jeżeli powierzchnia nie ma linij podwójnych i ostrzowych, wtedy rodzaj wynosi:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)(n-2)}{2 \, . \, 3} \, .$$

Liczba ta nie ulega zmianie przy przekształceniu dwuwymiernem.

Twierdzenie to wypowiedział Clebsch (Compt. rend. 1868), udowodnili Noether (Math. Ann. II) i Zeuthen (tamże IV). Oprócz rodzaju wprowadza Noether (tamże VIII) dwie inne liczby, mające własności analogiczne.

Jeżeli powierzchnia ma krzywą podwójną rzędu $d \geqslant 0$ i rodzaju π i pewną liczbę skończoną $t (\geqslant 0)$ punktów potrójnych dla powierzchni i dla krzywej, wtedy liczba

$$p_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)d + 2t + \pi - 1$$

nazywa się rodzajem liczbowym powierzchni (Cayley, Math. Ann. III). Rodzajem geometrycznym p_g (albo inaczej rodzajem pierwszym) nazywamy liczbę spółczynników nieoznaczonych równania powierzchni rzędu $n-4$, o której mowa wyżej. Jest zawsze $p_g \geqslant p_n$. Jeżeli $p_g = p_n$ powierzchnia nazywa się regularną.

Dla powierzchni wymiernych (dających się odwzorować na płaszczyźnie) jest zawsze $p_n = p_g = 0$.

Za rodzaj powierzchni prostoliniowej przyjmujemy rodzaj jej przecięć płaskich, gdyż wszystkie przecięcia oczywiście są jednego rodzaju. Dla powierzchni prostoliniowej jest zawsze $p_g = 0$, $p_n = -p$.

Inną charakterystykę powierzchni wprowadza Segre (Att. Torino 1896), a ogólne rozważania o rodzajach powierzchni podają Castelnuovo i Enriques (Math. Ann. XLVIII).

Powierzchnia ogólna rzędu $n > 3$ nie zawiera żadnej prostej.

Jeżeli powierzchnia rzędu n-tego zawiera krzywą wielokrotną rzędu $n-2$, to zawiera i proste; jeżeli krzywa wielokrotna jest prostą, to powierzchnia zawiera, prócz niej, jeszcze $2(3n-4)$ prostych. Patrz Noether (Math Ann. III, str. 174).

Powierzchnia rzędu n-tego nie może zawierać więcej jak $n(11n-24)$ prostych.

Przez prostą na powierzchni rzędu n-tego przechodzi zawsze $(n+2)(n-2)^2$ płaszczyzn stycznych do powierzchni jeszcze w innym punkcie, nie należącym do prostej.

J e ż e l i n j e s t r z ę d e m p o w i e r z c h n i p r o s t o l i n i o w e j, t o r z ą d j e j k r z y w e j p o d w ó j n e j j e s t z a w a r t y p o m i ę d z y $n-2$ a $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ (Tw. C a y l e y'a).

S a l m o n, C a y l e y, Z e u t h e n zajmowali się badaniem związków, zachodzących pomiędzy liczbami charakterystycznemi a osobliwościami powierzchni (patrz S a l m o n - F i e d l e r, Geom. d. Raumes II, str. 671).

Jeżeli wszelka płaszczyzna, przeprowadzona przez punkt krzywej skośnej, spotyka w nim krzywą w dwu punktach zlewających się, wtedy punkt ten nazywamy p u n k t e m p o d w ó j n y m k r z y w e j s k o ś n e j.

W punkcie podwójnym mamy w ogólności dwie proste styczne i dwie płaszczyzny ściśle styczne do krzywej skośnej. Jeżeli te dwie styczne zlewają się, wtedy punkt podwójny nazywa się o s t r z e m. W ostrzu i dwie płaszczyzny ściśle styczne zlewają się.

Jeżeli dwie powierzchnie dotykają się wzajemnie w punkcie P (t. j. mają w tym punkcie wspólną płaszczyznę styczną), wtedy krzywa ich przecięcia ma w P punkt podwójny. Jeżeli w szczególności punkt ten jest ostrzem, mówimy wtedy, że obie powierzchnie mają w punkcie P s t y c z n o ś ć s t a t e c z n ą. Jeżeli krzywa, według której przecinają się powierzchnie, ma w P punkt potrójny, powierzchnie nazywają się ś c i ś l e s t y c z n e m i w tym punkcie. W tym przypadku każda płaszczyzna, przechodząca przez punkt P, przecina dwie powierzchnie według linij ściśle stycznych wzajemnie.

J e ż e l i p u n k t w s p ó l n y d w ó m p o w i e r z c h n i o m j e s t r_1-k r o t n y m d l a j e d n e j, r_2-k r o t n y m d l a d r u g i e j p o w i e r z c h n i, t o j e s t $r_1 r_2$-k r o t n y m d l a k r z y w e j i c h p r z e c i ę c i a; j e ż e l i $r_1 = r_2$ i o b i e p o w i e r z c h n i e m a j ą w t y m p u n k c i e s t o ż e k ś c i ś l e s t y c z n y, w t e d y t e n p u n k t j e s t p u n k t e m $r(r+1)$-k r o t n y m d l a k r z y w e j p r z e c i ę c i a.

J e ż e l i d w i e p o w i e r z c h n i e r z ę d ó w n_1, n_2 m a j ą s t y c z n o ś ć r z ę d u $k-1$ w z d ł u ż k r z y w e j r z ę d u

n, to przecinają się według innej krzywej rzędu $n_1 n_2 - kn$.

Największa liczba punktów, w których dwie powierzchnie rzędów n_1, n_2 mogą dotykać się wzajemnie, wynosi:

$$\tfrac{1}{2}(n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) + 1,$$

wtedy, gdy przecięcie dwu powierzchni nie rozpada się; w przeciwnym razie, liczba punktów styczności może być większą; np. dwie kwadryki mogą mieć cztery punkty styczności.

Do krzywej skośnej i odpowiadającej jej powierzchni rozwijalnej stosują się następujące wzory, zwane wzorami Cayley'a (Journ. de Liouv. X, 1845, Papers I, 207), wiążące ze sobą rozmaite liczby charakterystyczne krzywej i analogiczne do wzorów Plückera (Rozdz. VI, § 1), przy pomocy których mogą być w części wyprowadzone.

Niechaj n oznacza rząd krzywej skośnej; r jej klasę albo jej porządek; h—liczbę punktów podwójnych pozornych, t. j. liczbę prostych, którą z punktu dowolnego można poprowadzić tak, aby dwa razy spotykały krzywą; y—liczbę płaszczyzn, które, przechodząc przez punkt dowolny przestrzeni, dotykają krzywej w dwu punktach różnych, t. j. klasę powierzchni rozwijalnej dwustycznej; β—liczbę ostrzy; H—liczbę punktów podwójnych; v—liczbę stycznych przegięcia krzywej statecznych, mających z krzywą trzy punkty nieskończenie blizkie.

Niechaj dalej m oznacza klasę powierzchni rozwijalnej, ściśle stycznej do krzywej; r jej rząd albo też porządek, g —liczbę prostych jakiejkolwiek płaszczyzny, przez każdą z których przechodzą dwie płaszczyzny styczne do powierzchni rozwijalnej, t. j. klasę kongruencyi prostych, będących przecięciami płaszczyzn ściśle stycznych do krzywej (patrz Rozdz. XIV); x—liczbę punktów, położonych na jakiejkolwiek płaszczyźnie, przez które przechodzą dwie różne tworzące powierzchni rozwijalnej lub inaczej rząd krzywej węzłowej; α—liczbę płaszczyzn statecznych (t. j. płaszczyzn stycznych do powierzchni rozwijalnej wzdłuż dwu tworzących nieskończenie blizkich lub płaszczyzn, mających z krzywą wspólne cztery punkty nieskończenie blizkie); G —

liczbę płaszczyzn dwustycznych (stycznych w dwu punktach) do powierzchni rozwijalnej; v—liczbę tworzących, przez każdą z których przechodzą trzy płaszczyzny styczne kolejne (t. j. tworzących przegięciowych); ω—liczbę tworzących podwójnych powierzchni rozwijalnej.

Mamy wtedy związki następujące:

$$\begin{aligned} m &= r(r-1) - 2(x+\omega) - 3(n+v), \\ n &= r(r-1) - 2(y+\omega) - 3(m+v) \\ r &= m(m-1) - 2(g+G) - 3\alpha \\ &= n(n-1) - 2(h+H) - 3\beta, \\ \alpha &= 3r(r-2) - 6(x+\omega) - 8(n+v), \\ \beta &= 3r(r-2) - 6(y+\omega) - 8(m+v), \\ n+v &= 3m(m-2) - 6(g+G) - 8\alpha, \\ m+v &= 3n(n-2) - 6(h+H) - 8\beta, \end{aligned}$$

odpowiadające sześciu związkom niezależnym.

Rodzajem krzywej skośnej albo jej powierzchni rozwijalnej ściśle stycznej nazywamy liczbę, określoną przez wzory następujące:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - (h+H+\beta), \\ &= \frac{1}{2}(r-1)(r-2) - (y+\omega+m+v), \\ &= \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - (g+G+\alpha), \\ &= \frac{1}{2}(r-1)(r-2) - (x+\omega+n+v). \end{aligned}$$

Wprowadźmy jeszcze następujące liczby charakterystyczne: k — liczbę punktów podwójnych pozornych krzywej węzłowej; λ—liczbę prostych stycznych i w innem miejscu siecznych do krzywej danej; τ—liczbę punktów potrójnych krzywej węzłowej lub punktów potrójnych powierzchni rozwijalnej lub wreszcie punktów spotkania trzech stycznych (nie nieskończenie blizkich) krzywej danej; λ'— liczbę płaszczyzn ściśle stycznych i w innem miejscu stycznych do krzywej danej; R—porządek albo klasę krzywej węzłowej; p' — jej rodzaj; w t e d y zachodzić będą związki:

$$\lambda = n(r+4) - 6(r+\beta) - 4(\omega+H) - 2v,$$

$$\tau = \frac{1}{3}\Big[(x-m-3n-3v-2\omega)(r-2)+8m+20v+10\beta+18\omega\Big],$$

$$\lambda' = m(r+4) - 6(r+a) - 4(\omega+G) - 2v,$$

$$\tau' = \frac{1}{3}\Big[(y-n-3m-3v-2\omega)(r-2)+8n+20v+10a+18\omega\Big],$$

$$R = rm + 6r - 3n - 9m - 3v - 2G,$$

$$k = \frac{1}{8}\Big[r^4-6r^3+11r^2+66r-2r(r-5)(m+3n+3v+2\omega)$$
$$+ (m+3n+3v+2\omega)^2-58m-126n-126v-76\omega-24H\Big],$$

$$p-p'(r-14) = \frac{1}{2}(r-5)(r-6) - (\omega+G+H).$$

Wzory powyższe badali: S a l m o n (Trans. R. I. Acad. XXIII, 1857), C a y l e y (Quart. Journ. XI, Papers VIII, 72), C r e m o n a (Preliminari, przekład niem. Rozdz. IV), Z e u t h e n (Annali di mat. III). Są one podane w t. II Geom. an. przestrzeni S a l m o n a - F i e d l e r a (wyd. 3-e, str. 660 i nast.).

K r z y w a s k o ś n a r z ę d u $n_1 n_2$, b ę d ą c a p r z e c i ę c i e m z u p e ł n e m d w u p o w i e r z c h n i r z ę d ó w n_1, n_2, m a j ą c y c h s t y c z n o ś ć p o j e d y ń c z ą w δ p u n k t a c h i w χ p u n k t a c h s t y c z n o ś ć s t a t e c z n ą, m a n a s t ę p u j ą c e c h a r a k t e r y s t y k i:

$$p = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) - (\delta + \chi - 1),$$
$$m = 3n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3) - 6\delta - 8\chi,$$

$$r = n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2\delta - 3\chi,$$

$$h = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1),$$

$$g = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3) [9 n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3) - 6(6\delta + 8\chi) - 22]$$
$$+ \frac{5}{2} n_1 n_2 + \frac{1}{2} (6\delta + 8\chi)^2 + 22\delta + 28\chi,$$

$$y = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) [n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2(2\delta + 3\chi) - 10]$$
$$+ 4 n_1 n_2 + \frac{1}{2} (2\delta + 3\chi)^2 + 10\delta + \frac{27}{2}\chi.$$

$$x = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) [n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2(2\delta + 3\chi) - 4]$$
$$+ \frac{1}{2} (2\delta + 3\chi)^2 + 4\delta + \frac{11}{2}\chi,$$

$$a = 2 n_1 n_2 (3n_1 + 3n_2 - 10 - 3(4\delta + 5\chi);$$

$$\beta = \chi; \quad H = \delta; \quad G = 0; \quad v = 0, \quad \omega = 0.$$

Jeżeli dwie powierzchnie rzędów n_1, n_2 przecinają się według dwu krzywych (wzajemnie dopełniających się) rzędów n, n', klas r, r', mających odpowiednio h, δ; h' δ' punktów podwójnych pozornych i istotnych, χ, χ' ostrzy, — to oznaczywszy przez k liczbę ich przecięć pozornych, t. j. liczbę prostych, które można poprowadzić z punktu dowolnego przestrzeni aż do przecięcia się z obu krzywemi oraz przez i liczbę ich przecięć istotnych, będziemy mieli związki:

$$h + h' + k = \tfrac{1}{2} (n + n')(n_1 - 1)(n_2 - 1),$$

$$r - r' = (n - n')(n_1 n_2 - 1) - 2(h - h') - 2(\delta - \delta') - 3(\chi - \chi'),$$

$$(n_1 + n_2 - 2) n = r + i + 3\delta + 3\chi,$$

$$(n_1 + n_2 - 2) n' = r' + i + 2\delta' + 3\chi',$$

skąd wynika:

$$n(n_1-1)(n_2-1) = 2h + k; \quad n'(n_1-1)(n_2-1) = 2h' + k.$$

Do krzywej skośnej, opisanej na hyperboloidzie, spotykającej w α_1 punktach każdą tworzącą pierwszego układu, w α_2 punktach każdą tworzącą drugiego układu tworzących, mającej δ punktów podwójnych i χ ostrzy, stosują się związki następujące:

$$r = 2\alpha_1\alpha_2 - 2\delta - 3\chi,$$

$$m = 6\alpha_1\alpha_2 - 3(\alpha_1 + \alpha_2) - 6\delta - 8\chi,$$

$$y = \frac{1}{2}\left[2(\alpha_1\alpha_2-\delta) - 3\chi\right]^2 - 10(\alpha_1\alpha_2-\delta-\chi) + 4(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{7}{2}\chi,$$

$$h = \frac{1}{2}\left[\alpha_1(\alpha_1-1) + \alpha_2(\alpha_2-1)\right],$$

$$y = \frac{1}{2}\left[6(\alpha_1\alpha_2-\delta) - 3(\alpha_1+\alpha_2-8\chi\right]^2 - 22\alpha_1\alpha_2$$
$$+ \frac{27}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + 2(11\delta + 14\chi),$$

$$x = \frac{1}{2}\left[2(\alpha_1\alpha_2-\delta) - 3\chi\right]^2 - 4(\alpha_1\alpha_2-\delta) + \frac{11}{2}\chi,$$

$$\alpha = 4\left[3\alpha_1\alpha_2 - 2(\alpha_1+\alpha_2)\right] - 3(4\delta - 5\chi).$$

Jeżeli w szczególności krzywa skośna jest przecięciem zupełnem hyperboloidy z powierzchnią ogólną rzędu μ, dość w powyższych wzorach przyjąć $\alpha_1 = \alpha_2 = \mu$, aby otrzymać liczby charakterystyczne dla tego przypadku.

Krzywa skośna, opisana na hyperboloidzie, spotykająca tworzące układu 1-go i 2-go odpowiednio w α_1 i α_2 punktach, nie może mieć więcej niż $\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1$ punktów podwójnych i ostrzy.

W przypadku $\alpha_1 = \alpha_2 = \mu$ znajdujemy stąd twierdzenie, odpowiadające przypadkowi, w którym krzywa jest przecięciem zupełnem hyperboloidy z powierzchnią rzędu μ.

Można twierdzenia powyższe otrzymać za pomocą odwzorowania płaskiego hyperboloidy (patrz § 7).

Niechaj n oznacza rząd, p—rodzaj powierzchni prostoliniowej algebraicznej, ν rząd, π rodzaj krzywej, nakreślonej na tej powierzchni, — zakładamy, że krzywa jest pojedyńczą dla powierzchni—k niechaj oznacza liczbę punktów spotkania krzywej z każdą z tworzących powierzchni, δ—liczbę jej punktów podwójnych; mamy wtedy związek godny uwagi:

$$(k-1)\nu-\pi-\delta=\frac{k(k-1)}{2}n-k(p-1).$$

Sturm (Math. Ann. XIX, p. 487) znalazł ten wzór dla przypadku, w którym powierzchnia prostoliniowa jest stożkiem, Segre (Lincei 1887, Math. Ann. XXXIV) udowodnił ten wzór dla przypadku ogólnego.

Z podanemi wyżej wzorami mają pokrewieństwo wzory, odnoszące się do prostych, spotykających krzywą skośną więcej niż w dwóch punktach (t. j. do tak zw. siecznych wielokrotnych) oraz do prostych, spotykających dwie lub więcej krzywych skośnych.

Sieczne trójkrotne krzywej skośnej rzędu n-tego o h punktach podwójnych pozornych tworzą powierzchnię prostoliniową rzędu

$$(n-2)\left(h-\frac{n(n-1)}{6}\right).$$

To twierdzenie zasadnicze znajdujemy po raz pierwszy u Zeuthena (Ann. di mat. 1870), następnie u Picqueta (Bull. de la Soc. math. I, str. 268, 1872), Schuberta (Kalkül der abz. Geom., Lipsk 1879, § 43), Geisera (Collect. math., Medyolan 1889) i Berzolari'ego (Rend. Pal. IX, 1895).

Liczba siecznych czterokrotnych krzywej skośnej rzędu n-tego o h punktach podwójnych pozornych wynosi:

$$\frac{1}{2}h(h-4n+11)-\frac{1}{24}n(n-2(n-3)(n-13).$$

Wzór ten podał pierwszy Zeuthen (l. c.), następnie znajdujemy go u Picqueta (l. c. i Compt Rend. LXXVII, 1873) i Berzolari'ego (l. c.).

Liczba prostych trójsiecznych krzywej rzędu n-tego o h punktach podwójnych pozornych i spotykających drugą krzywą rzędu n', mającą z pierwszą i punktów wspólnych, wynosi:

$$n'(n-2)\left(h-\frac{n(n-1)}{6}\right)-i(h-n+2).$$

Liczba prostych, spotykających w dwóch punktach krzywą rzędu n-tego o h punktach podwójnych pozornych i w dwóch punktach inną krzywą rzędu n'-tego o h' punktach podwójnych pozornych, mającą z pierwszą i punktów wspólnych, wynosi:

$$hh'+\frac{1}{4}nn'(n-1)(n'-1)-i(n-1)(n'-1)+\frac{1}{2}i(i-1).$$

Liczba prostych, spotykających w dwu punktach krzywą (n, h) i w jednym punkcie dwie inne krzywe rzędów n', n'', mające odpowiednio i', i'', punktów wspólnych z krzywą daną, oraz j punktów wspólnych pomiędzy sobą, wynosi:

$$n'n''\left(h+\frac{1}{2}n(n-1)\right)-(n-1)(i'n''+i''n')-hj+i'i''.$$

Liczba prostych, opierających się na czterech krzywych rzędów n_1, n_2, n_3, n_4 i takich, że krzywe rzędów n_r i n_s mają i_{rs} punktów wspólnych, wynosi:

$$2n_1n_2n_3n_4-\sum_1^4 n_pn_qi_{rs}+\sum i_{pq}i_{rs},$$

gdzie skaźniki p, q, r, s są wszystkie różne.

We wszystkich tych wzorach zakłada się, że punkty wspólne krzywym są wszystkie różne.

Wzory te znajdujemy u Picqueta (l. c.); poprawki niektórych wyników Picqueta podał Guccia (Rend. Pal. I).

§ 5.

Powierzchnie biegunowe. Powierzchnie spółzmienne.

Pomijamy definicye i własności zasadnicze teoryi biegunowości, ponieważ są analogiczne do definicyj i własności, podanych w § 2 Rozdziału VI-go dla krzywych płaskich, i zajmiemy się tylko tem, co jest nowem w przypadku powierzchni.

Biegunowa pierwsza jakiegokolwiek punktu O względem powierzchni przecina powierzchnię według krzywej, która jest krzywą styczności powierzchni ze stożkiem, opisanym z wierzchołka O.

Jeżeli biegun znajduje się na samej powierzchni, wtedy wszystkie jej powierzchnie biegunowe mają w tym punkcie tę samą płaszczyznę styczną i te same proste ściśle styczne.

Kwadryka biegunowa [$(n-2)$-a powierzchnia biegunowa] punktu parabolicznego powierzchni jest stożkiem stycznym do odpowiedniej płaszczyzny stycznej statecznej, a tworząca, według której dotyka płaszczyzny, jest prostą, która w tym punkcie jest ściśle styczna do powierzchni danej.

Punkt paraboliczny powierzchni danej jest zarazem punktem parabolicznym dla wszystkich jej powierzchni biegunowych.

Biegunowa $(n-r)$-ta punktu r-krotnego powierzchni jest stożkiem rzędu r-tego z wierzchołkiem w tym punkcie, a biegunowe następne są nieoznaczonemi. Ten stożek rzędu r-tego jest miejscem prostych, mających w uważanym punkcie $r+1$ punktów wspólnych z powierzchnią, a przecięcia stożka z $(n-r-1)$-ą powierzchnią biegunową są prostemi — liczba prostych wynosi $r(r+1)$ — mającemi $r+2$ punktów nieskończenie blizkich, wspólnych z powierzchnią.

Miejscem punktów, których płaszczyzny biegunowe przechodzą przez prostą, jest krzywa skośna rzędu $n-1$. Krzywa ta nazywa się k r z y w ą b i e g u n o w ą p r o s t e j d a n e j.

Obwiednia płaszczyzn biegunowych punktów prostej jest powierzchnią rozwijalną klasy $n-1$ i rzędu $2(n-2)$, nazwaną biegunową $(n-1)$-ą prostej.

Linia węzłowa tej powierzchni rozwijalnej jest krzywą rzędu $2(n-3)(n-4)$, będącą miejscem biegunów, których pierwsze powierzchnie biegunowe są styczne do prostej w dwu punktach różnych. Obwiednia płaszczyzn biegunowych punktów krzywej rzędu m-tego jest powierzchnią rozwijalną klasy $m(n-1)$, będącą zarazem miejscem punktów, w których pierwsze powierzchnie biegunowe są styczne do krzywej.

Można wypowiedzieć wiele innych twierdzeń analogicznych o obwiedniach płaszczyzn biegunowych punktów powierzchni, o miejscach biegunów płaszczyzn stycznych do powierzchni i t. d. i t. d.

Miejscem punktów podwójnych biegunowych pierwszych powierzchni danej F_n jest nowa powierzchnia, nazwana powierzchnią Hessego dla powierzchni danej, albo powierzchnią Jacobi'ego układu biegunowych pierwszych.

Miejscem punktów, w których biegunowe pierwsze mają punkty podwójne, jest powierzchnia, zwana powierzchnią Steinera dla powierzchni danej.

Równania tych powierzchni znajdujemy sposobem podobnym do podanego dla krzywych w § 2 Rozdziału VI-go.

Inne określenia tych powierzchni są następujące:

Powierzchnia Hessego dla powierzchni F_n jest miejscem punktów, w których płaszczyzny biegunowe względem biegunowych pierwszych powierzchni F_n przechodzą wszystkie przez jeden punkt; albo też miejscem punktów styczności biegunowych pierwszych powierzchni F_n, albo wreszcie miejscem punktów, w których kwadryka biegunowa powierzchni F_n jest stożkiem.

Powierzchnia Steinera dla powierzchni F jest miejscem punktów, będących wierzchołkami stożka rzędu 2-go, będącego kwadryką biegunową; albo też jest obwiednią płaszczyzn biegunowych punktów powierzchni Hessego.

Powierzchnia Hessego jest rzędu $4(n-2)$ i ma w ogóle $10(n-2)^3$ punktów podwójnych.

Powierzchnia Steinera jest rzędu $4(n-1)^2(n-2)$ i ma $10(n-2)^3$ prostych, z których każda odpowiada punktowi podwójnemu powierzchni Hessego, a mianowicie:

Kwadryka biegunowa punktu podwójnego powierzchni Hessego składa się z pary płaszczyzn, przechodzących przez odpowiednią prostą powierzchni Steinera, a płaszczyzna biegunowa punktu podwójnego powierzchni Hessego jest styczna do powierzchni Steinera wzdłuż odpowiadającej temu punktowi prostej.

Krzywa paraboliczna powierzchni danej (będąca rzędu $4n(n-2)$) jest przecięciem zupełnem powierzchni z jej powierzchnią Hessego.

Jeżeli powierzchnia dana zawiera prostą pojedyńczą, wtedy prosta ta jest w $2(n-2)$ punktach styczną do powierzchni Hessego, a więc i do krzywej parabolicznej.

---

§ 6.

Układy liniowe powierzchni.

Niechaj $a_x^n = 0$, $b_x^n = 0 \ldots$ będą równaniami $k+1$ powierzchni (w znakowaniu symbolicznem); układ, przedstawiony przez równanie:

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \ldots\ldots = 0,$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_{k+1}$ są parametry dowolne, stanowi to, co nazywamy układem liniowym gatunku k.

Jeżeli $k=1$, mamy pęk, dla $k=2$ — sieć. Jeżeli powierzchnie są przedstawione przy pomocy spółrzędnych płaszczyznowych, układ dla $k=1$ nazywa się pasmem.

Wsystkie powierzchnie pęku mają wspólką krzywą rzędu n^2 (krzywą podstawową pęku), a wszystkie powierzchnie sieci mają n^3 punktów (podstawowych) wspólnych.

Jeżeli $k=N(n)=\binom{n+3}{3}-1$ (patrz § 1), wtedy układ składa się ze wszystkich powierzchni rzędu n-tego przestrzeni.

Biegunowe pierwsze punktów płaszczyzny względem powierzchni rzędu n-tego tworzą sieć, a biegunowe pierwsze punktów przestrzeni względem powierzchni tworzą układ liniowy gatunku 3-go.

Układ liniowy gatunku k jest wyznaczony przez $k+1$ powierzchni tego samego rzędu, nie należących do jednego układu rzędu niższego.

Pomiędzy powierzchniami układu liniowego gatunku k jest $(k-1)(n=k)$ powierzchni, mających styczność rzędu k z prostą daną, i $2^k \dfrac{(n--k)(n-k-1)\ldots(n-2k+1)}{k!}$ powierzchni, z których każda dotyka k-razy prostej danej.

Pomiędzy powierzchniami pęku jest $2(n-1)$ powierzchni stycznych do prostej danej i $3(n-1)^2$ stycznych do płaszczyzny danej.

Pomiędzy powierzchniami sieci jest $3(n-2)$ powierzchni ściśle stycznych do prostej danej, $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$ powierzchni podwójnie stycznych do płaszczyzny danej, wreszcie $12(n-1)(n-2)$ powierzchni, mających styczność stateczną z płaszczyzną daną.

Miejscem biegunów płaszczyzny danej względem wszystkich powierzchni pęku jest krzywa skośna rzędu $3(n-1)^2$.

W pęku powierzchni jest $4(n-1)^3$ powierzchni z punktem podwójnym. Każda z tych powierzchni ma tę samą płaszczyznę biegunową względem wszystkich powierzchni pęku.

Miejscem biegunów płaszczyzny względem wszystkich powierzchni sieci jest powierzchnia rzędu $3(n-1)$.

Miejscem punktów styczności pomiędzy płaszczyzną a powierzchniami sieci jest krzywa rzędu $3(n-1)$.

Miejscem punktów podwójnych powierzchni sieci jest krzywa skośna rzędu $6(n-1)^2$, która jest zarazem miejscem punktów styczności pomiędzy powierzchniami sieci, a także miejscem punktów, których płaszczyzny biegunowe względem powierzchni sieci przechodzą wszystkie przez jednę prostą. Krzywa ta nazywa się krzywą Jacobi'ego sieci.

Miejscem punktów, których płaszczyzny biegunowe względem powierzchni układu liniowego gatunku 3-go przechodzą wszystkie przez jeden punkt, jest powierzchnia rzędu $4(n-1)$, która nazywa się powierzchnią Hessego lub powierzchnią Jacobi'ego układu; jest ona zarazem miejscem punktów podwójnych wszystkich powierzchni układu, a także miejscem punktów styczności powierzchni tegoż.

Jeżeli układ liniowy jest układem biegunowych pierwszych powierzchni danej, otrzymujemy powierzchnię Hessego lub powierzchnię Jacobieg'o dla powierzchni danej (patrz § poprzedzający).

Można określić powierzchnię analogiczną i w przypadku, gdy dane są cztery powierzchnie rzędów różnych, t. j. nie tworzące układu liniowego; mianowicie:

Miejscem punktów, w których płaszczyzny biegunowe względem czterech danych powierzchni rzędów n_1, n_2, n_3, n_4 przechodzą przez jeden i ten sam punkt, jest powierzchnia rzędu $n_1+n_2+n_3+n_4-4$, która nazywa się powierzchnią Hessego lub Jacobi'ego czterech powierzchni.

Można jeszcze rozważać układy liniowe gatunku k powierzchni, będących wzajemnie w związku rzutowości, i badać miejsca, utworzone przez przecięcia odpowiadających sobie powierzchni.

Twierdzenia, odnoszące się do tego przedmiotu, znajdzie czytelnik w wielokrotnie cytowanem dziele „Introduzione“ Cremony.

§ 7.

Przekształcenie dwuwymierne przestrzeni i powierzchni. Odwzorowanie płaskie powierzchni.

Jak na płaszczyźnie rozważamy przekształcenie dwujednoznaczne pomiędzy dwiema płaszczyznami (przekształcenie Cremony) albo wprost pomiędzy dwiema krzywemi dwu płaszczyzn, podobnież w przestrzeni możemy rozważać przekształcenia dwujednoznaczne pomiędzy dwiema przestrzeniami albo tylko pomiędzy dwiema powierzchniami tych przestrzeni. To ostatnie zagadnienie nazywa się zagadnieniem o odwzorowaniu jednej powierzchni na drugiej, a szczególnym jego przypadkiem jest odwzorowanie płaskie powierzchni.

Niechaj x_1, x_2, x_3, x_4 będą spółrzędne jednorodne punktu jednej przestrzeni, y_1, y_2, y_3, y_4 — takież spółrzędne punktu drugiej; połóżmy:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

gdzie funkcye f_i są wymiernemi całkowitemi jednorodnemi stopnia n-tego; niechaj te związki będą takie, iż otrzymujemy z nich:

$$x_i = \varphi_i(x_1, y_2, y_3, y_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

gdzie i funkcye φ_i są funkcyami wymiernemi całkowitemi jednorodnemi stopnia m-tego. Przekształcenie tego gatunku nazywamy dwujednoznacznem, dwuwymiernem albo kremoniańskiem; na mocy tego przekształcenia każdemu punktowi jednej przestrzeni odpowiada punkt drugiej.

Gdy danym jest punkt (x), wtedy przy pomocy wzorów (1) znajdujemy odpowiadający mu punkt (y); gdy punkt (y) dany jest jako przecięcie trzech płaszczyzn:

$$\sum_1^4 \lambda_i y_i = 0, \qquad \sum_1^4 \mu_i y_i = 0, \qquad \sum_1^4 \nu_i y_i = 0,$$

wtedy odpowiadające mu punkty będą x dane tedy przecięcia trzech powierzchni:

$$\sum_1^4 \lambda_i f_i(x) = 0, \quad \sum_1^4 \mu_i f_i(x) = 0, \quad \sum_1^4 \nu_i f_i(x) = 0.$$

Aby przekształcenie było dwujednoznacznem, potrzeba, by trzy powierzchnie miały jeden tylko wspólny punkt przecięcia zmiennego, gdy inne punkty przecięcia pozostają stałemi przy zmianie parametrów λ, μ, ν. Stąd:

W przekształceniu dwujednoznacznem powierzchnie układu liniowego gatunku 3-go $\sum_1^4 \varrho_i f_i = 0$ winny przechodzić przez $n^3 - 1$ punktów stałych.

Dla przekształcenia dwujednoznacznego jest koniecznem, by powierzchnie $f_i(x) = 0$ były rodzaju zero; spółrzędne ich punktów dają się wyrazić jako funkcye wymierne dwu parametrów. Takie powierzchnie Cremona nazywa homaloidalnemi, Cayley—jednobieżnemi.

Przecięcie R zmienne (t. j. nie wspólne wszystkim powierzchniom f) dwu jakichkolwiek powierzchni $f_i = 0$ jest krzywą wymierną (rodzaju zero) rzędu m.

Układ powierzchni, utworzony z takich powierzchni f, nazywa się układem homaloidalnym.

Zauważmy, że dla przekształcenia dwujednoznacznego powierzchni nie jest koniecznem, by $m = n$, co ma miejsce w przypadku przekształcenia dwujednoznacznego płaskiego.

Punkty i linie, wspólne wszystkim powierzchniom układu homaloidalnego, nazywają się głównemi lub zasadniczemi.

Z pomiędzy nm przecięć powyżej określonej krzywej R z tą powierzchnią f, na której ona całkowicie nie leży, $nm-1$ przecięć znajduje się w punktach zasadniczych lub leży na krzywych zasadniczych przekształcenia.

Każdemu punktowi krzywej zasadniczej, która jest krzywą i-krotną dla wszystkich powierzchni układu homaloidalnego, odpowiada krzywa wymierna rzędu i, której miejscem geometrycznem jest powierzchnia, stanowiąca część powierzchni Jacobi'ego dla układu liniowego powierzchni $\varphi_i = 0$.

Krzywa zasadnicza przestrzeni (x) i-krotna dla powierzchni $f = 0$, jeżeli ją przecinają krzywe K, jest $(4i-1)$-krotną dla powierzchni Jacobi'ego układu f_i; jeżeli zaś krzywe K jej nie przecinają, wtedy jest dla tegoż układu krzywą $4i$-krotną.

Punkt zasadniczy przestrzeni (x) l-krotny dla układu f jest $4l-2$-krotnym dla powierzchni Jacobi'ego tegoż układu.

Związki liczbowe pomiędzy rzędami wielokrotności punktów i krzywych zasadniczych, analogiczne do związków w przekształceniu płaskiem (patrz Rozdz. VI § 5), podał Noether (Ann. di mat. V, str. 175—176).

Teorya przekształcenia dwuwymiernego przestrzeni nie jest dotąd tak doskonale zbadana, jak teorya takiegoż przekształcenia płaszczyzny. Głównemi pracami o tym przedmiocie są następujące: Cayley (Proc. Lond. math. Soc. III, 171), Cremona (Gött. Nachr. 1871. Math. Ann. IV, Rend. Ist. Lomb. 1871, Annali di mat. V, Acc. Bologna 1871—72) Noether (Math. Ann. III).

Przypadkiem szczególnym rozważanego przekształcenia jest przekształcenie przez promienie odwrotne lub inaczej inwersya, mająca własność niezmieniania kątów.

Jeżeli przekształcenie ma być dwujednoznacznem nie dla całej przestrzeni, lecz tylko dla dwóch powierzchni $F(x) = 0$, $\Phi(y) = 0$, zawartych w dwóch przestrzeniach, wtedy nie jest koniecznem, aby powierzchnie układu liniowego $\sum_1^4 \varrho_i f_i(x) = 0$ miały $n^3 - 1$ punktów wspólnych; jest koniecznem jedynie, by wszystkie powierzchnie tego układu, przechodzące przez punkt powierzchni $F = 0$, nie przecinały się równocześnie na tejże powierzchni.

Istnieje tu także twierdzenie, które można uważać za uogólnienie twierdzenia Riemanna, t. j. że rodzaj (genus) powierzchni przekształcających się dwujednoznacznie jedna na drugą, jest jeden i ten sam.

Patrz: Clebsch (Comp. rend. 1868, Math. Ann. II), Cayley (Math. Ann. III), Noether (Ann. di mat. V, Math. Ann. II, VIII), Zeuthen (Math Ann. IV), Castelnuovo - Enriques (Math. Ann. XLVIII).

Noether próbował rozciągnąć na powierzchnie twierdzenia o rozszczepianiu się punktów osobliwych dla krzywych płaskich, t. j. starał się zbadać, czy przy pomocy przekształceń dwuwymiernych przestrzeni lub powierzchni nie można powierzchni, mającej osobliwości wyższe, przekształcić na inną, mającą osobliwości zwyczajne.

Temże zagadnieniem, prócz Noethera (Math. Ann. XXIX, Berl. Sitzungsber. 1888) zajmowali się: Del Pezzo (Rend. Palermo II, III), Segre (Ann. di mat. XXV), Pannelli (tamże XXV), Levi (tamże XXVI). Podobne zagadnienie dla krzywych skośnych badali Poincaré (Compt. rend. CXVIII, 1888) i Pannelli (Ist. Lomb. 1893).

Przypadkiem szczególnym przekształcenia dwuwymiernego powierzchni jest tak zw. odwzorowanie płaskie powierzchni. Według powyższej terminologii Cremony, powierzchnia, dająca się odwzorować na płaszczyźnie, jest homaloidalną.

Aby powierzchnia dała się odwzorować na płaszczyźnie, musi być rodzaju liczbowego p_n równego zeru.

Warunkiem dostatecznym odwzorowalności powierzchni na płaszczyźnie jest, aby krzywa posiadała pasmo pojedyńczo-nieskończone krzywych wymiernych, wyciętych na powierzchni przez pęk innych powierzchni. (Noether, Gött. Nachr. 1870, Math. Ann. III).

Niechaj będzie powierzchnia S rzędu n-tego; spółrzędne jednorodne jej punktów można wyrazić za pomocą wzorów:

$$x_i = f_i(y_1\, y_2, y_3), \qquad (i=1,2,3,4)$$

gdzie funkcye f są wymiernemi jednorodnemi rzędu m; załóżmy, że z tych wzorów można otrzymać i stosunki pomiędzy spółrzędnemi y, wyrażone jako funkcye wymierne ilości x.

Powiemy tedy, że powierzchnia S daje się odwzorować na płaszczyźnie, gdyż, jeżeli przez spółrzędne y rozumiemy spółrzędne jednorodne punktów płaszczyzny, to wzory powyższe ustanawiają zależność dwujednoznaczną pomiędzy punktami płaszczyzny i punktami powierzchni S.

Krzywe układu liniowego płaskiego $\sum_1^4 \lambda_i f_i(y) = 0$ niechaj mają a_1 punktów pojedyńczych, a_2 punktów podwójnych, a_3 punktów potrójnych i t. d. wspólnych; wtedy zachodzi związek:

$$n = m^2 - a_1 - 4a_2 - 9a_3 \;.\;.\;.\;.\;.$$

Jeżeli p_1 oznacza rodzaj przekroju płaskiego powierzchni, d — rząd krzywej podwójnej tej powierzchni, r — rząd krzywej ostrzowej, to zachodzi związek:

$$p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - a_2 - 3a_3 - 6a_4 - \ldots$$

Mamy nadto nierówności:

$$4 \gtreqless \frac{(m+1)(m+2)}{2} - a_1 - 3a_2 - 6a_3 - \;.\;.\;.\;.\;.$$

Z tych związków wypływają następujące:

$$p_1 \gtreqless n-2; \qquad d + r \gtreqless \frac{(n-2)(n-3)}{2}\,.$$

Powierzchnie rzędu drugiego i trzeciego dają się, oczywiście, zawsze odwzorować na płaszczyźnie. Dla powierzchni rzędu drugiego dość z jakiegokolwiek punktu rzucić na płaszczyznę punkty powierzchni. Dla powierzchni rzędu 3-go dość rozważać dwie z jej prostych nie przecinających się, następnie przez punkt dowolny płaszczyzny przeprowadzić prostą, przecinającą tamte dwie; ta ostatnia prosta przetnie powierzchnię jeszcze w innym punkcie, który odpowiada dwujednoznacznie punktowi płaszczyzny.

Konstrukcyę geometryczną odwzorowania płaskiego powierzchni rzędu czwartego ze stożkową podwójną można wykonać sposobem następującym:

Rozważmy jednę z 16 prostych powierzchni danej, przecinającą stożkową podwójną. Przez punkt P płaszczyzny i przez prostą g przesuńmy płaszczyznę; płaszczyzna ta przetnie stożkową w punkcie, który połączony z punktem P daje prostą, opierającą się na stożkowej podwójnej i na prostej g, przecinającą zatem powierzchnię w innym jeszcze punkcie Q; odpowiedniość punktów P i Q jest dwujednoznaczną.

Jeżeli powierzchnia rzędu czwartego ma prostą podwójną, to można wykonać analogiczną konstrukcyę, wiedząc, że są wtedy na powierzchni stożkowe, przecinające prostą podwójną.

Dla powierzchni rzędu piątego z dwiema prostemi podwójnemi, nie przecinającemi się, można wykonać widocznie konstrukcyę geometryczną analogiczną do tej, którą wykonaliśmy dla powierzchni rzędu trzeciego.

Dla powierzchni rzędu piątego z krzywą sześcienną podwójną można oczywiście za promienie rzucające przyjąć cięciwy krzywej sześciennej, przecinające powierzchnię jeszcze w jednym punkcie. Konstrukcya analogiczna daje się wykonać, jeżeli krzywa sześcienna rozpada się na stożkową i na prostą, przecinającą stożkową w punkcie, albo na trzy proste, z których jedna przecina dwie pozostałe. Przypadki, w którym krzywa sześcienna jest płaską albo rozpada się na stożkową i na prostą, nie przecinającą stożkowej, albo wreszcie na trzy proste, nie przecinające się, nie są możliwemi.

Odwzorowanie płaskie powierzchni może być użyteczne w badaniu krzywych, nakreślonych na powierzchni. Za najdawniejsze badania, dotyczące odwzorowania płaskiego powierzchni, uważać można badania, odnoszące się do rzutu stereograficznego i w ogóle do wszelkich rzutów, wymyślonych dla kreślenia kart geograficznych.

Odwzorowanie płaskie powierzchni rzędu 2-go stosowali: Plücker (Crelle XXXIV, 1847), Chasles (Compt. rend. 1861), Cayley (Phil Mag. XXII, 1861) w celu badania krzywych, nakreślonych na tych powierzchniach (por. Clebsch-Lindemann, II, i niżej Rozdział X, § 1). Odwzorowanie płaskie powierzchni rzędu 3-go otrzymali: Cremona (Crelle LXIX) i Clebsch (tamże LXV); powierzchni rzędu 4-go i 5-go o stożkowej podwójnej: Clebsch (Crelle LXIX, Math Ann. I), Korndörfer (tamże I, IV), Frahm (tamże VII). Odwzorowanie płaskie powierzchni prostoliniowych wymiernych badali: Cremona (Annali di mat. I), Armenante (Ann. di mat. IV, 1870), Clebsch (Math. Ann. II, V), Noether (tamże II).

W przypadku powierzchni jakiejkolwiek, a więc i niealgebraicznej, zagadnienie o odwzorowaniu płaskiem powierzchni całkowitej lub jej części daje się traktować przy pomocy metod geometryi różniczkowej.

Rozważano też przekształcenia wielokrotne przestrzeni (patrz Rozdz. XI, § 5); do tej kategoryi badań należy rozprawa De Paolisa (Mem. Lincei 1885).

ROZDZIAŁ X.

KRZYWE SKOŚNE RÓŻNYCH RZĘDÓW.

---

§ 1.

Krzywe na powierzchniach rzędu 2-go. Krzywe kuliste (sferyczne).

Powiedzieliśmy wyżej, że badanie krzywych, położonych na powierzchni rzędu 2-go, daje się łatwo przeprowadzić przy pomocy odwzorowania płaskiego powierzchni. Jeżeli z punktu P powierzchni (który może być i punktem w nieskończoności) rzucimy punkty powierzchni na płaszczyznę, np. na płaszczyznę styczną w punkcie O spotkania z powierzchnią średnicy przez punkt P przechodzącej, otrzymujemy odwzorowanie płaskie powierzchni, które analogicznie do odwzorowania kul, nazywamy rzutem stereograficznym.

Rzutami wszystkich punktów, znajdujących się na dwóch tworzących kwadryki, przechodzących przez punkt P, są dwa punkty P_1 i P_2 w nieskończoności. Nazywamy je punktami zasadniczemi; prosta je łącząca (w tym przypadku prosta w nieskończoności) nazywa się prostą zasadniczą. Rzuty wszystkich prostych kwadryki stanowią dwa pęki promieni, których środki znajdują się w punktach P_1 i P_2.

Ustanówmy teraz na kwadryce układ spółrzędnych. Weźmy jako początek punkt O, jako osi—proste OX, OY, wzdłuż których płaszczyzna styczna w O przecina kwadrykę (jeżeli konstrukcyę te chcemy wykonać w obszarze rzeczywistym, bierzemy hyperboloidę). Niechaj A będzie punktem powierzchni; przez punkt ten przechodzą dwie tworzące: jedna, należąca do pierwszego układu, druga—do drugiego; te dwie tworzące niechaj przecinają tworzące stałe OX i OY w punktach A_1 (na OX) i A_2 (na OY). Odległości $\xi = OA_1$ i $\eta = OA_2$ można przyjąć za spółrzędne punktu A kwadryki. Spółrzędne takie nazywają się hyperboloidalnemi; wprowadził je Plücker (Crelle XXXIV).

Godnym uwagi jest fakt, że punkt, położony na płaszczyźnie stycznej XY i mający spółrzędne ξ i η, jest rzutem punktu A kwadryki z punktu P.

Równanie stopnia pierwszego $a\xi + b\eta + c = 0$ pomiędzy spółrzędnemi ξ, η przedstawia na powierzchni krzywą płaską, przechodzącą przez punkt P.

Jeżeli za osi spółrzędnych kartezyańskich przyjmiemy osi OX, OY i jakąkolwiek oś trzecią OZ, wtedy spółrzędne kartezyańskie x, y, z punktu A kwadryki związane będą ze spółrzędnemi hyperboloidalnemi tegoż punktu w ten sposób:

$$\xi = -\frac{dz}{cz + \mu y}, \quad \eta = -\frac{dz}{bz + \mu x},$$

lub:

$$\frac{y}{z} = -\left[\frac{d}{\mu}\frac{1}{\xi} + \frac{c}{\mu}\right], \quad \frac{x}{z} = -\left[\frac{d}{\mu}\frac{1}{\eta} + \frac{b}{\mu}\right],$$

jeżeli równanie kwadryki jest postaci:

$$z(az + by + cx + d) + \mu xy = 0.$$

Jeżeli w szczególności za oś Z weźmiemy średnicę, przechodzącą przez punkt O, wtedy równanie kwadryki przybiera postać:

$$z(z + d) + \mu xy = 0 \quad \text{(hyperboloida)},$$

albo:

$$dz + \mu xy = 0 \quad \text{(paraboloida)},$$

a powyższe związki zamieniają się na następujące:

$$\xi = -\delta \frac{z}{y}, \quad \eta = -\delta \frac{z}{x} \qquad \left(\delta = \frac{d}{\mu}\right).$$

Wzory te stosował Plücker; w spółrzędnych jednorodnych wzory są bardziej symetrycznemi (Clebsch-Lindemann l. c. II, str. 422).

Niechaj P, O będą dwa jakiekolwiek punkty kwadryki (nie jest koniecznem, aby były końcami jednej średnicy); niechaj wierzchołkami czworościanu podstawowego spółrzędnych będą P, O, P_1, P_2, gdzie P_1 i P_2 są dwoma punktami zasadniczemi na płaszczyźnie stycznej do kwadryki w punkcie O. Równanie kwadryki będzie miało postać:

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0,$$

jeżeli płaszczyzny $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ są odpowiednio płaszczyznami POP_1, POP_2, OP_1P_3, PP_1P_2. Jeżeli ξ_1, ξ_2, ξ_3 są spółrzędnemi jednorodnemi punktu (na płaszczyźnie OP_1P_2), będącego rzutem punktu kwadryki, wtedy zachodzą wzory:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1\xi_3 : \xi_2\xi_3 : \xi_1\xi_2 : \xi_3^2.$$

Ilości $\frac{x_3}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_2}$ można przyjąć za spółrzędne punktu na kwadryce (Cayley, Papers V, str. 70); odpowiadają one w istocie rzeczy spółrzędnym hyperboloidalnym Plückera.

Rzutem wszelkiej krzywej płaskiej w rozważanem odwzorowaniu jest stożkowa, która staje się kołem, jeżeli punkt P jest punktem kołowym (umbilikiem) kwadryki, punkt zoś O jest punktem średnicowo przeciwnym; wszystkie te stożkowe są do siebie podobne i podobnie ułożone; ich asymptoty są równoległemi do dwóch osi OX, OY, t. j. do przecięć płaszczyzny stycznej w O z powierzchnią.

Rzutem krzywej płaskiej rzędu n na kwadryce, nie przechodzącej przez punkt P, jest krzywa płaska rzędu n; jeżeli zaś krzywa przechodzi m razy przez punkt P, rzut jest rzędu $n—m$.

Wszelka krzywa rzędu n na kwadryce spotyka zawsze k razy jakąkolwiek tworzącą jednego układu, k' razy tworzącą układu drugiego, w ten sposób, że $k+k'=n$; rzut tej krzywej przechodzi k razy przez punkt P_1, k' razy przez punkt P_2. Liczby k, k' charakteryzują gatunek krzywej na kwadryce; gatunek ten oznaczamy symbolem $[k, k']$.

Jeżeli jedna z dwu liczb k, k' jest zerem, wtedy krzywa rozpada się na zbiór n prostych kwadryki.

Jeżeli nie będziemy uważali za zasadniczo różne dwu gatunków $[k, k']$, $[k', k]$, będzie można powiedzieć:

Na kwadryce istnieje $\frac{n-1}{2}$ (gdy n nieparzyste) lub $\frac{n}{2}$ (gdy n parzyste) różnych gatunków krzywych właściwych rzędu n-tego.

Przecięcie zupełne kwadryki z powierzchnią ogólną rzędu m jest typu $[m, m]$.

Przez $kk'+k+k'$ punktów, dowolnie danych na powierzchni, może przechodzić jedna i tylko jedna krzywa typu $[k, k']$.

Dwie krzywe typów $[k, k']$ i $[k_1, k_1']$ spotykają się w $kk'_1+k'k_1$ punktach.

Krzywa typu $[k, k']$ o δ punktach podwójnych i χ ostrzach dotyka $2k'(k-1)-2\delta-3\chi$ tworzących układu pierwszego, oraz $2k(k'-1)-2\delta-3\chi$ tworzących układu drugiego.

Co do osobliwości i liczb charakterystycznych dla krzywych, nakreślonych na kwadryce, patrz Rozdz. IX, § 4.

Na kwadryce niema krzywych właściwych rzędu 2-go innych prócz przekrojów płaskich, należących do typu [1, 1]; krzywe właściwe rzędu 3-go na tej powierzchni są typu [1, 2] lub—co na jedno wychodzi — [2, 1] i są skośnemi; krzywych rzędu 4-go są dwie rodziny: [2, 2] (krzywe gatunku pierwszego) i [1, 3] (krzywe gatunku drugiego).

Chasles pierwszy rozważał odwzorowanie płaskie kwadryk, jako uogólnienie rzutu stereograficznego kuli (Ann. de Gergonne XVIII, XIX, Aperçu hist. 1837, str. 219). Krzywe na tych powierzchniach badał Plücker w dwóch rozprawach (Crelle XXIV, 341—360). Cytujemy jeszcze noty Cayley'a (Phil. Mag. XXII, s. 181, Papers V, 70) i Chasles'a (Compt rend. 1861). Porówn. Clebsch-Lindemann, l. c. II, str. 414 i nast.

Przypadkiem szczególnym badań powyższych są badania nad rzutem stereograficznym kuli i nad krzywemi kulistemi, a w szczególności nad nad t. zw. stożkowemi kulistemi. Rzut stereograficzny kuli znali już geometrowie greccy; najważniejsza jego własność polega na odwzorowaniu podobnem, t. j. że kąt dwóch krzywych kulistych równa się kątowi pomiędzy ich rzutami płaskiemi, jeżeli środek rzutu znajduje się, jak wyżej, w punkcie P kuli, a płaszczyzna rzutu jest równoległa do płaszczyzny stycznej w punkcie P; w szczególności zaś, gdy płaszczyzna rzutu jest płaszczyzną styczną w punkcie O, średnicowo-przeciwległym punktowi P.

Zdaje się, że własność tę odkryli Hooke i Moivre (patrz Halley, Phil. Trans. 1696); niektórzy są zdania, że znał ją już Mercator w r. 1587 (patrz Breusing „Das Verebnen der Kugeloberfläche etc.", Lipsk 1892); później badali ją Lambert, Euler, Lagrange, Gauss i inni (patrz Chasles, Aperçu etc., str. 219 i 235).

Rzutem każdego przecięcia płaskiego kuli jest koło.

Rzut bieguna płaszczyzny siecznej jest środkiem koła, które jest rzutem przecięcia płaskiego (tw. Chasles'a, patrz Hachette „Geom. a trois dim." 1817).

Spółrzędne na knli i stożkowe kuliste, t. j. przecięcia kuli stożkiem rzędu 2-go, badali: Chasles (Mém. de Belg. VI), Gudermann (Crelle VI), Möbius (Werke II) i t. d. Wykład szczegółowy ich teoryi znajdujemy u Hessego (Anal. Geom. des Raumes wyd. 3, str. 51) i u Salmona-Fiedlera I, wyd. 3-e, str. 340 i nast.

Stożkowa kulista jest krzywą skośną rzędu czwartego i gatunku 1-go; jest ona przecięciem kuli ze stożkiem rzędu 2-go, którego wierzchołek znajduje się w środku kuli.

W stożkowej kulistej stosunek anharmoniczny czterech promieni, łączących punkt zmienny krzywej z czterema punktami stałemi krzywej, jest stały; przez stosunek anharmoniczny czterech promieni (nie leżących na jednej płaszczyźnie), rozumiemy tu stosunek anharmoniczny czterech płaszczyzn, rzucających te promienie ze środka kuli. Jest to własność analogiczna do własności stożkowych płaskich.

W stożkowej kulistej iloczyn wstaw łuków, poprowadzonych z punktu na kuli normalnie do dwu łuków kól wielkich, stycznych do stożkowej, jest w stosunku stałym do kwadratu wstawy łuku, poprowadzonego normalnie do łuku koła wielkiego, przechodzącego przez dwa punkty styczności.

Poprowadźmy przez środek kuli dwie płaszczyzny kołowe stożka rzędu 2-go (t. j. płaszczyzny, przecinające go według kół); odpowiadające tym płaszczyznom koła wielkie na kuli nazywają się k o ł a m i c y k l i c z n e m i, odpowiadającemi stożkowej kulistej.

Jeżeli koło wielkie przecina stożkową kulistą w dwóch punktach P i Q, a koła cykliczne w punktach A i B, wtedy $AP = BQ$; w szczególności:, łuk koła wielkiego styczny do stożkowej kulistej, zawarty pomiędzy dwoma kołami cyklicznemi, dzieli się w punkcie styczności na dwie równe części.

---

§ 2.

Krzywe sześcienne skośne.

Dwie kwadryki, mające wspólną linię prostą, przecinają się według krzywej resztowej, która jest k r z y w ą s z e ś c i e n n ą s k o ś n ą.

Zachowując znakowania, przyjęte w § 4 Rozdziału IX dla liczb charakterystycznych i osobliwości krzywych skośnych, mamy tu:

$$n=3,\quad r=4,\quad h=1,\quad y=0,\quad \beta=0,\quad H=0,\quad v=0,$$

$$m=3,\quad g=1,\quad x=0,\quad \alpha=0,\quad G=0,\quad \omega=0,\quad p=0,$$

skąd wypływają twierdzenia następujące:

Krzywa sześcienna skośna jest rodzaju zero i klasy czwartej; jej rozwijalna ścisle styczna jest rzędu czwartego i klasy trzeciej.

Przez jakikolwiek punkt przestrzeni przechodzi jedna tylko cięciwa i trzy płaszczyzny ściśle styczne krzywej sześciennej.

Jakakolwiek płaszczyzna przestrzeni zawiera jednę i tylko jednę prostą przecięcia dwu płaszczyzn, ściśle stycznych do krzywej sześciennej.

Rzut płaski krzywej skośnej rzędu 3-go jest krzywą sześcienną płaską z punktami po dwójnemi.

Każda krzywa rzędu 3-go daje się pomyśleć jako nakreślona na kwadryce; spotyka ona zawsze w jednym punkcie tworzące jednego układu, w dwóch punktach tworzące drugiego (patrz Rozdz. X, § 1).

Na kwadryce można pomyśleć dwa różne układy krzywych sześciennych; krzywe jednego układu spotykają tworzące ukł pierwszego w jednym, drugiego w dwóch punktach (a więc wiednio tworzące układu drugiego w dwóch punktach, pierws w jednym punkcie).

Dwie krzywe sześcienne różnych układów spotykają się w pięciu punktach, krzywe tegoż samego układu w czterech punktach.

Jeżeli dwie kwadryki przecinają się według krzywej sześciennej, a zatem i według prostej, wtedy prosta ta w każdej z dwóch kwadryk należy do tego układu, którego tworzące przecina krzywa sześcienna w dwóch punktach.

Przez pięć punktów, dowolnie danych na kwadryce, przechodzą dwie krzywe sześcienne na niej leżące (jedna jednego, druga drugiego układu).

Przez sześć punktów, danych dowolnie

w przestrzeni przechodzi zawsze jedna krzywa sześcienna.

Dla wykreślenia takiej krzywej sześciennej dość wziąć stożek kwadrykowy, mający wierzchołek w jednym ze sześciu punktów i przechodzący przez pięć pozostałych, a następnie drugi taki stożek, mający wierzchołek w innym z sześciu punktów i przechodzący przez pięć pozostałych. Te dwa stożki przetną się według prostej, łączącej dwa wierzchołki, i według krzywej sześciennej szukanej.

Krzywa sześcienna skośna jest miejscem punktów wspólnych dwóm trójkom płaszczyzn, odpowiadających sobie w trzech pękach płaszczyzn wzajemnie rzutowych.

Rozwijalną ściśle styczną krzywej sześciennej można uważać za obwiednią płaszczyzn, przechodzących przez trójki punktów odpowiadających sobie w trzech prostych punktowych.

Zniekształceniem krzywej sześciennej skośnej z jednym punktem podwójnym pozornym jest układ stożkowej i prostej łożonej tak, że przecina stożkową tylko w jednym punkcie.

Podamy niektóre własności krzywych sześciennych.

Cztery płaszczyzny, przechodzące przez zmienną cięciwę krzywej sześciennej i przez każdy z czterech stałych punktów krzywej, są w stałym stosunku anharmonicznym.

Prosta, będąca przecięciem dwu płaszczyzn ściśle stycznych do krzywej, przecina cztery płaszczyzny ściśle styczne krzywej w czterech punktach, będących w stosunku anharmonicznym.

W szczególności cztery płaszczyzny, łączące styczną do krzywej z czterema punktami tejże, zachowują stały stosunek anharmoniczny przy zmienianiu się stycznej.

Cztery płaszczyzny, w których styczna zmienna przecina cztery płaszczyzny ściśle styczne, są w stałym stosunku anharmonicznym.

Jeżeli 1, 2 . . . . . 7 są danemi siedmioma punktami krzywej sześciennej, to płaszczyzny 712 i 745, 723 i 756, 734 i 761 przecinają się według trzech prostych płaszczyzny, przechodzącej przez stałą cięciwę krzywej sześciennej, jeżeli pozostawiając stałemi pierwsze sześć punktów, zmieniamy tylko położenie siódmego (C r e m o n a).

Jeżeli dane są dwie krzywe sześcienne, przechodzące przez te same pięć punktów, to cięciwy pierwszej krzywej, przechodzące przez punkty drugiej, spotykają wszystkie cięciwy drugiej krzywej, przechodzące przez punkty pierwszej.

Płaszczyzny ściśle styczne w trzech punktach 1, 2, 3 krzywej sześciennej przecinają się w jednym punkcie (4) płaszczyzny 123.

Punkty styczności trzech płaszczyzn ściśle stycznych, poprowadzonych do sześciennej z punktu (4), znajdują się na jednej płaszczyźnie z punktem (4) (C h a s l e s).

Prosta przecięcia się płaszczyzn ściśle stycznych, znajdująca się w płaszczyźnie 123, jest biegunową harmoniczną punktu 4 względem trójkąta (123).

Cięciwa sześciennej, przechodząca przez punkt 4, jest prostą biegunową harmoniczną płaszczyzny 123 względem trójścianu trzech płaszczyzn ściśle stycznych.

Dodajemy dla objaśnienia ostatnich dwu twierdzeń, że biegunową harmoniczną p punktu S (bieguna harmonicznego) względem trójkąta jest prosta, przecinająca boki trójkąta ABC w trzech punktach A', B', C' takich, że pary promieni SA', $S'A'$; SB, $S'B'$; SC, $S'C'$ są w inwolucyi. Określenie to rozciąga się łatwo na przypadek trójścianu.

Cztery punkty sześciennej tworzą czworościan; inny czworościan tworzą płaszczyzny ściśle styczne w tych czterech punktach; każdy z tych czworościanów jest jednocześnie wpisany w drugi i opisany na nim (M ö b i u s, Crelle III, 273).

Twierdzenie C h a s l e s a pokazuje, że p r z y p o m o c y k r z y w e j s z e ś c i e n n e j s k o ś n e j u s t a n a w i a m y w p r z e s t r z e n i o d p o w i e d n i o ś ć s p e c y a l n ą p o m i ę d z y p u n k t a m i i p ł a s z c z y z n a m i w t e n s p o s ó b, ż e k a ż d e m u p u n k t o w i o d p o w i a d a p ł a s z c z y z n a, p r z e z e ń p r z e c h o d z ą c a, a k a ż d e j p ł a s z c z y ź n i e o d p o w i a d a p u n k t, n a n i e j p o ł o ż o n y. Taka odpowiedniość jest d w o i s t o ś c i ą b i e g u n o w ą, albo

inwolucyjną, a właściwie należy do tak zwanych **biegunowości zerowych** (patrz wyżej str. 51), lub do **układów zerowych** (Nullsystem). Por. **Möbius**, Statik I, 131 i Crelle X, 317). Punkt i odpowiadająca mu płaszczyzna nazywają się **biegunem** i **płaszczyzną biegunową**.

Cięciwa sześciennej, przechodząca przez biegun dany P, i prosta, położona na płaszczyznie biegunowej tego punktu, taka, że wzdłuż niej spotykają się dwie płaszczyzny ściśle styczne sześciennej, są dwiema prostemi, pozostającemi w biegunowości zerowej.

Różne konstrukcye. Zagadnienie, których rozwiązania tu podamy, dotyczą konstrukcyi krzywej sześciennej skośnej, czyniącej zadość warunkom danym.

1. Jest danych sześć punktów 1, 2, 3, 4, 5, 6 sześciennej; zbudować krzywą.

Przez proste (12) przesuwamy dowolną płaszczyznę α i wyznaczaczamy przecięcia:

$$[\alpha, (345)] = a, \ [\alpha, (456)] = b, \ [(23), (561)] = A, \ [(61), (234)] = B,$$

$$[\alpha, (B4)] = C, \ [\alpha, (A5] = D, \ [(CD), a] = E, \ [(CD), b] = F;$$

punkt $[(12), (2F) = P$ należy do sześciennej. Albo inaczej: Wyznaczamy

$$[\alpha, (45)] = G, \ [1, AG] = \beta, \ [2, BG] = \gamma,$$
$$[\beta, (34)] = H, \ [\gamma, (56)] = K,$$

trzy płaszczyzny $[61H]$, α, $[23K]$ przecinają się w punkcie krzywej; mamy naturalnie trzeci punkt krzywej, znajdujący się na płaszczyźnie α.

2. Mamy danych pięć punktów 1, 2, 3, 4, 5 i sieczną a krzywej sześciennej; zbudować krzywą.

Przez sieczną a przeprowadźmy płaszczyznę dowolną α, która przecina płaszczyzny [123], [124], [134], [234] według czterech prostych, wyznaczających razem z prostą a stożkową do nich styczną; płaszczyzna α przecina nadto płaszczyzny [123], [125], [135], [235] według czterech innych prostych, wyznaczających razem z prostą a inną stożkową. Te dwie stożkowe mają styczne wspólne a i $[a, [123)]$; punkt spotkania dwóch stycznych wspólnych jest punktem sześciennej.

3. Dane są cztery punkty i dwie sieczne; zbudować sześcienną.

Zagadnienie to albo wcale nie ma rozwiązań, albo ma ich nieskończenie wiele.

4. Mając dane trzy punkty i trzy sieczne, zbudować sześcienną.

Dość rozważyć trzy pęki płaszczyzn, mające za osi trzy sieczne dane i ustanowić odpowiedniość rzutową płaszczyzn trzech pęków, uważając jako odpowiadające sobie płaszczyzny, przechodzące przez każdy z trzech punktów danych; punktami krzywej szukanej będą przecięcia trzech jakichkolwiek odpowiadających sobie płaszczyzn.

5. Dane są dwa punkty A, B i cztery sieczne a, a', b, b', zbudować sześcienną.

Prowadzimy prostą c, przechodzącą przez punkt A, i spotykającą proste a, a'; prostą c', przechodzącą przez A i spotykającą proste b, b'; w podobny sposób prowadzimy proste d, d, przechodzące przez punkt B i spotykające odpowiednio a,a' i b,b'.

Niechaj przecięciem płaszczyzn $[cd]$, $[c'd']$ będzie l; dwie hyperboloidy $[aa'l]$, $[bb'l]$ przecinają się według krzywej żądanej.

6. Zbudować sześcienną, przechodzącą przez punkt dany i mającą jako sieczne pięć prostych danych.

Zagadnienie to zawsze ma rozwiązanie.

7. Zbudować sześcienną, mającą jako sieczne sześć prostych danych.

Zagadnienie to ma w ogólności s z e ś ć rozwiązań.

Co do tych konstrukcyj patrz dzieła niżej cytowane S c h r ö t e r a, C r e m o n y, S t u r m a.

Różne gatunki krzywych sześciennych. Dla krzywych, podobnie jak dla stożkowych, tworzymy kategorye według rzeczywistości ich punktów w nieskończoności; a mianowicie:

1. Jeżeli płaszczyzna w nieskończoności przecina krzywą sześcienną w j e d n y m t y l k o punkcie r z e c z y w i s t y m, mamy e l i p s ę s z e ś c i e n n ą.

2. Jeżeli płaszczyzna w nieskończoności zawiera trzy punkty rzeczywiste sześciennej, wtedy krzywa jest hyperbolą sześcienną.
3. Jeżeli w szczególności dwa z tych trzech punktów zlewają się, mamy hyperbolę sześcienną paraboliczną.
4. Jeżeli wreszcie wszystkie trzy punkty zlewają się, t. j. gdy płaszczyzna w nieskończoności jest płaszczyzną ściśle styczną, wtedy mamy parabolą sześcienną.

Przez hyperbolę sześcienną przechodzą trzy walce hyperboliczne rzeczywiste stopnia 2-go.

Przez elipsę sześcienną przechodzi jeden walec eliptyczny rzeczywisty stopnia 2-go.

Przez hyperbolę sześcienną paraboliczną przechodzą dwa walce rzeczywiste stopnia 2-go, z których jeden jest hyperbolicznym, drugi parabolicznym.

Przez parabolę sześcienną przechodzi jeden tylko walec rzeczywisty stopnia 2-go paraboliczny.

Jeżeli nazwiemy asymptotą styczną rzeczywistą (w skończoności) do punktu w nieskończoności linii krzywej, to będzie można powiedzieć, że elipsa sześcienna ma jednę tylko asymptotę, hyperbola szescienna trzy, hyperbola sześcienna paraboliczna ma jednę, parabola sześcienna nie ma żadnej.

Krzywe sześcienne badał pierwszy Möbius (Baryc. Calcul 1827, str. 120, Crelle X), po nim Chasles (Aperçu hist. Note XXXIII, Jour. de Liouville II 1854, Compt. rend. XLV); później zajmowali się tym przedmiotem: Seydewitz (Grun. Archiv X), Hesse (Crelle XXVI), Schröter (tamże LVI), v. Staudt (Beiträge III, 1860), Cremona (Annali di mat. I, II, V; Crelle LVIII, LX, LXIII; Nouv. Ann. 1, 2 série), Sturm (Crelle LXXIX, LXXX, LXXXVI), Müller (Math. Ann. V). Co do innych badań nad sześciennemi skośnemi, a zwłaszcza nad zastosowaniem do nich teoryi niezmienników form dwójkowych, patrz: Beltrami (Ist Lomb. 1868), Sturm (l. c.), Voss (Math. Ann. XIII), d'Ovidio (Acc. Torino XXXII 1879, Giorn. di Battag. XVII, Collect. math. 1881), Pitarelli (Giorn. di Batt. XVII), Gerbaldi (Mem. Torino 1880). Z traktatów o teoryi krzywych sześciennych skośnych wymieniamy: Salmon-Fiedler (Anal. Geom. d. R. II), a zwłaszcza Schröter (Theorie d. Oberfl. 2-er. Ordr., Lipsk 1880).

§ 3.

Krzywe skośne rzędu 4-go gatunku 1-go.

Krzywa skośna rzędu czwartego gatunku 1-go jest przecięciem zupełnem dwu kwadryk, na każdej z tych dwu powierzchni przecina ona w dwóch punktach każdą tworzącą jednego układu, oraz w dwóch punktach każdą tworzącą drugiego.

Przy założeniu, że kwadryki są jakiekolwiek, mamy następujące liczby charakterystyczne dla takiej krzywej:

$$n=4,\quad r=8,\quad h=2,\quad y=8,\quad \beta=0,\quad H=0,\quad z=0,$$

$$m=12,\quad g=38,\quad x=16,\quad a=16,\quad G=0,\quad \omega=0,\quad p=1.$$

Jeżeli dwie kwadryki mają styczność zwyczajną w jednym punkcie, wtedy krzywa rzędu 4-go otrzymuje punkt podwójny, a jej charakterystykami są:

$$n=4,\quad r=6,\quad h=2,\quad y=4,\quad \beta=0,\quad H=1,\quad v=0,$$

$$m=6,\quad g=6,\quad x=6,\quad a=4,\quad G=0,\quad \omega=0,\quad p=0.$$

Jeżeli kwadryki mają w punkcie styczność stateczną, wtedy krzywa ma ostrze, a jej charakterystykami są:

$$n=4,\quad r=5,\quad h=2,\quad y=2,\quad \beta=1,\quad H=0,\quad v=0,$$

$$m=4,\quad g=2,\quad x=2,\quad a=1,\quad G=0,\quad \omega=0,\quad p=0,$$

Zniekształcenia krzywej skośnej rzędu 4-go gatunky 1-go są następujące;

1. Krzywa sześcienna płaska wraz z prostą, położoną w przestrzeni tak, że przecina krzywą tylko w jednym punkcie.
2. Krzywa sześcienna skośna i jej cięciwa.
3. Dwie stożkowe, położone w przestrzeni w ten sposób, że mają dwa punkty wspólne.

Z własności, dotyczącej liczby stożków kwadrykowych, znajdujących się w pęku kwadryk, wypływa:

Przez każdą krzywą rzędu 4-go gatunku 1-go przechodzą cztery stożki kwadrykowe (Poncelet).

Krzywa rzędu 4-go gatunku 1-go niema wcale trójsiecznej.

Każda płaszczyzna pęku płaszczyzn, mającego za oś cięciwę albo styczną krzywej rzędu 4-go gatunku 1-go, przecina krzywą w dwóch punktach takich, że prosta je łącząca jest tworzącą kwadryki, na której krzywa leży całkowicie. W tym pęku są cztery płaszczyzny styczne do krzywej.

Ośm punktów, dowolnie danych w przestrzeni, określają krzywą rzędu czwartego gatunku 1-go.

Dwie krzywe gatunku 1-go, położone na jednej i tej samej kwadryce, przecinają się w ośmiu punktach. Są to te punkty, w których spotykają się trzy powierzchnie rzędu 2-go; jeżeli mamy danych siedm z pomiędzy tych punktów, to ósmy daje się wyznaczyć przy pomocy konstrukcyj liniowych; tworzą one grupę ośmiu punktów stowarzyszonych i przechodzi przez nie nieskończenie wiele krzywych rzędu 4-go (Hesse, Crelle XXVI, Reye tamże, C. Zeuthen tamże IC, Acta math, XII).

Przez sześć punktów z grupy ośmiu punktów stowarzyszonych poprowadźmy sześcienną skośną, to prosta, łącząca dwa pozostałe punkty, będzie cięciwą sześciennej. Odwrotnie: ośm punktów krzywej rzędu 4-go, mających tę własność, są ośmioma punktami stowarzyszonemi.

Przez pięć punktów krzywej rzędu 4-go gatunku 1-go przeprowadźmy wszystkie możliwe kwadryki, przecinające nadto krzywą jeszcze w trzech punktach; płaszczyzna tych trzech punktów przechodzi przez punkt stały krzywej danej.

Jeżeli na krzywej rzędu 4-go damy sobie dwie grupy po ośm punktów stowarzyszonych, t. j. razem 16 punktów i jeżeli pomiędzy temi punktami można wybrać ośm takich, aby tworzyły nową grupę punktów stowarzyszonych, wtedy i pozostałe ośm punktów tworzy grupę punktów stowarzyszonych.

Poprowadźmy trzy płaszczyzny, przecinające krzywą rzędu czwartego w punktach A_1, B_1, C_1, D_1; A_2, B_2, C_2, D_2; A_3, B_3, C_3, D_3; płaszczyzny $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$ przetną krzywą w czterech punktach, znajdujących się na jednej płaszczyźnie.

Cztery płaszczyzny, ściśle styczne w czterech punktach położonych na jednej płaszczyźnie, przecinają krzywą w czterech punktach, leżących na jednej płaszczyźnie (R e y e).

Na krzywej rzędu 4-go istnieją t r ó j k i p u n k t ó w A_1, A_2, A_3, mające tę własność, że trzy płaszczyzny ściśle styczne w tych punktach przecinają się w punkcie S krzywej, przez który przechodzi także i płaszczyzna $A_1 A_2 A_3$. Ten punkt nazywa się p u n k t e m t o w a r z y s z ą c y m trójki.

Niechaj będzie krzywa rzędu 4-go na kwadryce; trzy punkty B_1, B_2, B_3, w których tworzące tego samego układu, przechodzące przez punkty A_1, A_2, A_3 spotykają krzywą, tworzą także trójkę.

Niechaj O będzie punktem krzywej rzędu czwartego; trzy punkty, w których trzy płaszczyzny OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_1 przecinają także krzywą tworzą trójkę.

Trzy punkty, w których trzy płaszczyzny, przechodzące odpowiednio przez A_1, A_2, A_3 i przez sieczną albo przez styczną krzywej, przecinają krzywę, tworzą też trójkę.

Trójkę punktów dla danej krzywej rzędu 4-go można otrzymać sposobem następującym: Przyjmijmy punkt S na krzywej jako punkt towarzyszący trójki. Z tego punktu rzućmy krzywą na płaszczyznę, rzutem będzie krzywa rzędu 3-go. Płaszczyzna, przechodząca przez punkt S i przez jednę z prostych przegięcia sześciennej płaskiej przecina krzywą daną w trzech punktach tworzących trójkę.

Powiedziano wyżej, że w pęku płaszczyzn, którego osią jest cięciwa krzywej rzędu 4-go, istnieją cztery płaszczyzny styczne do niej; mówimy, że cztery punkty styczności tworzą czwórkę punktów.

Stosunek anharmoniczny czterech punktów tego pęku jest stały, t. j. nie zmienia się przy zmianie cięciwy, będącej osią pęku; a także:

Stosunek anharmoniczny czterech płaszczyzn, w których cztery styczne w czterech punktach czwórki przecinają cięciwę im odpowiadającą, jest stały.

Płaszczyzny, przechodzące przez cięciwę krzywej i przez każdy z czterech punktów czwórki, przecinają krzywą w czterech punktach, tworzących także czwórkę.

Cztery ściany czworościanu, którego wierzchołkami są cztery punkty czwórki, przecinają krzywą w czterech punktach innej czwórki, a mianowicie w tych samych czterech punktach, w których płaszczyzny ściśle styczne w czterech punktach pierwszej czwórki przecinają krzywą.

Na krzywej rzędu 4-go istnieją 24 dwójki takich punktów, że płaszczyzna ściśle styczna w jednym punkcie dwójki przechodzi przez drugi, i odwrotnie.

Badano konfiguracyę 16 punktów styczności krzywej rzędu 4-go i płaszczyzn statecznych powierzchni rozwijalnej ściśle stycznej, t. j. 16 punktów krzywej rzędu czwartego, w których płaszczyzna ściśle styczna ma styczność rzędu 3-go z krzywą.

Te 16 punktów są punktami spotkania krzywej z czterema ścianami czworościanu biegunowego, t. j. czworościanu, którego wierzchołkami są wierzchołki czterech stożków, przechodzących przez krzywą.

Każda płaszczyzna, przechodząca przez trzy z pomiędzy 16 takich punktów, przechodzi także przez punkt czwarty, który zresztą może zlewać się z jednym z trzech rozważanych. Takich płaszczyzn jest 116.

Te 16 punktów można przedstawić za pomocą symbolów (i, j), gdzie $i, j = 0, 1, 2, 3$; każde cztery punkty, dla których suma pierwszych skaźników i osobno suma drugich przystaje do 0 według modułu 4, są na jednej płaszczyźnie.

Spółrzędne punktu krzywej rzędu czwartego skośnej gatunku 1-go można wyrazić za pomocą funkcyj eliptycznych jednego parametru; jest mianowicie:

$$x = p(u), \quad y = p'(u), \quad z = p''(u),$$

gdzie p jest znaną funkcyą Weierstrassa (patrz „Repertoryum“ t. I Rozdz. XVI, § 4). Czterema punktami, leżącemi na jednej płaszczyźnie, są wtedy punkty dla których suma czterech argumentów $\equiv 0$ (mod. $2\omega, 2\omega'$).

Z tego punktu widzenia krzywą skośną rzędu 4-go gatunku 1-go badali: Harnack (Math. Ann. XII), Lange (Diss. Drezno 1882, Schlöm. Ztschrf. XXVIII); patrz Halphen, Fonct. elip. II, str. 449 i nast. Krzywe skośne rzędu 4-go gatunku 1-go badali nadto: Chasles (Compt. rend. LII, LIV), Reye (Ann. di mat. II), Gegenbauer (Wien. Ber. XCIII), Ameseder (tamże XXXVII). Traktat o tych krzywych napisał Schröter (Grandz. ein. rein. geom. Theorie der Raumcurven 4-er Ordn. 1-er Species, Lipsk 1890), gdzie można znaleźć liczne cytaty.

Do krzywych rzędu 4-go gatunku 1-go należą stożkowe kuliste, o których była mowa w § 1.

§ 4.

Krzywe rzędu 4-go skośne gatunku 2-go.

Krzywą skośną rzędu 4-go gatunku drugiego określamy jako krzywą rzędu 4-go, przez którą przechodzi jedna tylko kwadryka.

W ogóle, jeżeli powierzchnia rzędu 2-go i powierzchnia rzędu 3-go mają wspólną krzywą płaską rzędu 2-go (dwie proste na płaszczyźnie albo stożkową), wtedy przecięciem resztowem jest krzywa rzędu 4-go gatunku 1-go; stąd krzywa rzędu 4-go gatunku 2-go jest przecięciem resztowem powierzchni rzędu 2-go i powierzchni rzędu 3-go, mających wspólne dwie proste skośne.

Otrzymujemy także krzywą rzędu 4-go gatunku 2-go, jeżeli powierzchnia rzędu 2-go i powierzchnia rzędu 3-go mają wspólną prostą, która jest podwójną dla tej drugiej powierzchni.

Zamiast ogólnej powierzchni sześciennej można wziąć powierzchnię liniową skośną, stąd:

Każdą krzywą rzędu 4-go gatunku 2-go można uważać jako przecięcie powierzchni rzędu 2-go i powierzchni sześciennej skośnej, której kierownicą podwójną jest cięciwa krzywej (Cremona).

Każdą krzywą rzędu 4-go gatunku 2-go można uważać za miejsce punktów wspólnych, odpowiadających sobie płaszczyzn trzech pęków rzutowych, z których pierwszy jest pojedyńczym, drugi podwójnym inwolucyjnym, trzeci homograficznym względem drugiego (Cremona).

Rzut płaski krzywej rzędu 4-go gatunku 2-go jest wogóle krzywą ogólną rzędu 4-go klasy 6-ej z trzema punktami podwójnemi, czterema stycznemi podwójnemi i sześcioma przegięciami.

Jeżeli środek rzutu leży na krzywej, mamy wtedy krzywą rzędu 3-go i klasy 4-ej.

Przez krzywą rzędu 4-go gatunku 2-go przechodzą cztery stożki rzędu 3go i klasy 4-ej.

Liczbami charakterystycznemi dla krzywej rzędu 4-go gatunku 3-go są następujące:

$$n=4,\quad r=6,\quad h=3,\quad y=4,\quad \beta=0,\quad H=0,\quad v=0,$$

$$m=6,\quad g=6,\quad x=6,\quad \alpha=4,\quad G=0,\quad \omega=0,\quad p=0.$$

Krzywa rzędu 4-go gatunku 2-go przecina wszystkie tworzące jednego z układów kwadryki w trzech punktach, wszystkie tworzące drugiego w jednym tylko punkcie, stąd:

Krzywa ma jeden układ pojedyńczo - nieskończony trójsiecznych.

Istnieją cztery punkty, w których styczna do krzywej przecina nadto krzywą.

Krzywa gatunku 2-go może mieć w szczególności jednę lub dwie styczne stateczne ($v = 1, 2$) co nie ma miejsca dla krzywej gatunku 1-go. Liczbami charakterystycznemi dla tych przypadków szczególnych są następujące:

$$n=4,\quad r=6,\quad h=3,\quad y=4,\quad \beta=0,\quad H=0,\quad v=1,$$
$$m=5,\quad g=4,\quad x=5,\quad a=2,\quad G=0,\quad \omega=0,\quad p=0.$$

$$n=4,\quad r=6,\quad h=3,\quad y=4,\quad \beta=0,\quad H=0,\quad v=2,$$
$$m=4,\quad g=3,\quad x=4,\quad a=0,\quad G=0,\quad \omega=0,\quad p=0.$$

Zniekształcenia krzywej skośnej rzędu 4-go gatunku 2-go: 1) krzywa sześcienna skośna i prosta, przecinająca ją w jednym punkcie; 2) dwie stożkowe, mające jeden punkt wspólny.

Stosunek anharmoniczny czterech płaszczyzn, przechodzących przez cztery punkty krzywej i przez jakąkolwiek jej trójsieczną, nie zmienia się przy zmianie trójsiecznej. Można ten stosunek nazwać stosunkiem anharmonicznym czterech punktów krzywej rzędu 4-go.

Na powierzchni rzędu 2-go można nakreślić dwa układy krzywych rzędu 4-go gatunku 2-go; krzywe jednego układu przecinają w jednym punkcie tworzące powierzchni, należące do pierwszego układu tworzących i w trzech punktach tworzące drugiego układu tworzących; krzywe 2-go układu — odwrotnie.

Dwie krzywe rzędu 4-go, należące do różnych układów, spotykają się w 10 punktach, dwie krzywe jednego układu w 6 punktach.

Krzywa rzędu 4-go gatunku 1-go i krzywa rzędu 4-go gatunku 2-go, nakreślone na tej samej powierzchni rzędu 2-go, spotykają się w 8 punktach.

Krzywa sześcienna skośna i krzywa rzędu 4-go gatunku 2-go, nakreślone na tej samej kwadryce i spotykające każda w jednym tylko punkcie tę samą tworzącą powierzchni, przecinają się w 5 punktach; jeżeli zaś krzywa sześcienna spotyka tworzącą w dwóch punktach, a krzywa rzędu 4-go w jednym tylko punkcie tę samą tworzącą, wtedy krzywe mają 7 punktów wspólnych.

Przez ośm dowolnych punktów w przestrzeni przechodzą cztery krzywe rzędu 4-go gatunku 2-go.

Przez siedm punktów na kwadryce można przeprowadzić dwie krzywe rzędu 4-go gatunku 2-go, na tej powierzchni całkowicie leżące.

Z punktu P krzywej można przeprowadzić do niej trzy płaszczyzny ściśle styczne; trzy punkty styczności z krzywą leżą na jednej płaszczyźnie, przechodzącej przez punkt P i będącej płaszczyzną biegunowo-harmoniczną trójsiecznej, przechodzącej przez punkt P, względem trójścianu trzech płaszczyznych stycznych.

Jeżeli zmieniać będziemy punkt P, to płaszczyzna trzech punktów styczności obwiedzie stożek rzędu 2-go (C r e m o n a).

Nazywamy c i ę c i w a m i g ł ó w n e m i krzywej cięciwy przez które przechodzą dwie płaszczyzny ściśle styczne do krzywej, których punkty styczności są punktami przecięcia cięciw z krzywą (B e r t i n i).

Istnieją trzy cięciwy główne; przechodzą one przez jeden i ten sam punkt.

Przez punkt przestrzeni przechodzą trzy cięciwy krzywej (gdyż $h=3$); jeżeli przez ten punkt poprowadzimy sześć płaszczyzn, przechodzących przez styczne do krzywej w sześciu punktach przecięcia cięciw, to te sześć płaszczyzn dotykać będą jednego stożka rzędu 2-go.

Sześć płaszczyzn ściśle stycznych, poprowadzonych z jednego punktu do krzywej, dotyka jednego stożka rzędu 2-go.

Ośm prostych, poprowadzonych z jednego punktu przestrzeni do punktów styczności czterech płaszczyzn dwustycznych, przez ten punkt przechodzących, są tworzącemi takiegoż stożka.

Płaszczyzny ściśle styczne krzywej są stycznemi do kwadryki, której płaszczyzny styczne przecinają krzywa w czterech punktach, tworzących grupę anharmoniczną. Kwadryka ta jest wpisana w rozwijalną ściśle styczną linii krzywej (C r e m o n a).

Płaszczyzny, przecinające krzywą rzędu 4-go w czterech punktach, tworzących grupę harmoniczną, obwodzą powierzchnię S t e i n e r a (rzędu 4-go i klasy 3-ej), wpisaną w rozwijalną ściśle styczną krzywej (C r e m o n a).

Rozważmy pęk płaszczyzn, którego osią jest prosta, przecinająca krzywą w dwóch punktach; miejscem geometrycznem prostej, łączącej pozostałe dwa punkty spotkania każdej płaszczyzny z krzywą, jest powierzchnia rzędu 3-go skośna, której tworzącą podwójną jest oś pęku.

Krzywa, o której mówiemy, ma, jak to widać z tablicy cztery płaszczyzny ściśle styczne stateczne ($\alpha = 4$).

Cztery styczne w czterech punktach s t a t e c z n y c h, t. j. w punktach styczności płaszczyzn stycznych, leżą na jednej hyperboloidzie.

Cztery punkty styczne należą do krzywej węzłowej (rzędu 6-go) powierzchni rozwijalnej ściśle stycznej; płaszczyzny stateczne w tych punktach są zarazem płaszczyznami ściśle stycznemi do krzywej węzłowej.

Krzywa węzłowa ma także cztery punkty stateczne i niema innych punktów wielokrotnych; jest ona przecięciem powierzchni rzędu 2-go i powierzchni rzędu 3-go, mających styczność stateczną w czterech punktach.

Krzywa rzędu 4-go gatunku 2-go spotyka odpowiednią krzywą węzłową w ośmiu punktach, z których cztery są punktami statecznemi dla krzywej rzędu 4-go, a pozostałe cztery punktami statecznemi dla krzywej węzłowej.

Istnienie krzywych rzędu 4-go gatunku 2-go spostrzegli S a l m o n i C a y l e y (Cambr. Math. Journ. V, 1850) a potem S t e i n e r (Flächen 3-en Grades, Crelle LIII, 1857). Pierwszą ważną pracą o tym przedmiocie jest rozprawa C r e m o n y (Acc. Bologna 1861, Ann. di Tortol. IV); potem następują liczne prace Weyra (Math. Ann. IV, Wien. Ber. 1871—75—76—78), rozprawy Bertini'ego (Ist. Lomb. 1872), Armenanti'ego (Giorn. di mat. XI, XII) i wielu innych.

Study znalazł, że dawszy sobie punkt przestrzeni, możemy na krzywej rzędu 4-go gatunku 2-go określić inwolucyę rzędu 4-go gatunku 1-go (Leipz. Ber. 1886); przypadek szczególny takiej inwolucyi zauważył był już Bertini (l. c.). Inwolucya ta zastępuje w pewien sposób brak innej, która istnieje we wszystkich krzywych skośnych wymiernych rzędu większego od 4 (patrz § 6). Teorya tak zwanych „oskulant" jest właśnie z teoryą tych inwolucyj związana (patrz Jolles, Theorie der Osculanten, 1886; Stahl, Crelle CI, CIV)

Więcej szczegółów bibliograficznych i historycznych znaleść można w przedmowie do niedawnej pracy Berzolari'ego (Ann. di mat. XX), który dowiódł, że wspomniana wyżej inwolucya jest apolarną względem inwolucyi, którą otrzymujemy, przecinając krzywą płaszczyznami, przechodzącemi przez punkt dany.

Co do przypadków szczególnych, wyżej wymienionych, w których krzywa posiada styczne stateczne, patrz Cremona, (Rend. Ist. Lomb. 1868); Appel, (Comp. Rend. 1876) i t. d.

§ 5.

Krzywe skośne rzędu 5go, 6go i t. d.

Krzywe rzędu 5-go. Powiedziano już (patrz Rozdz IX § 3), że istnieją trzy rodziny krzywych skośnych rzędu 5-go: jedna z czterema punktami podwójnemi i o najwyższym rodzaju 2; druga z pięcioma punktami podwójnemi pozornemi i o najwyższym rodzaju 1; trzecia wreszcie z 6 punktami podwójnemi pozornemi rodzaju zero. Rozumie się tu oczywiście, że krzywe nie posiadają osobliwości istotnych, t. j. punktów podwójnych istotnych, ostrzy i t. d. Oznaczać będziemy te krzywe odpowiednio przez $R_5{}^2$, $R_5{}^1$, $R_5{}^0$.

Przez każdą krzywą skośną rzędu 5-go przechodzi nieskończenie wiele powierzchni rzędu 3-go.

Liczby charakterystyczne dla krzywej $R_5{}^2$ są następujące:

$$r=12,\quad m=21,\quad h=4,\quad g=156,\quad x=48,\quad y=32,\quad a=32;$$

pozostałe są zerami.

Z każdego punktu krzywej $R_5{}^2$ wychodzi jedna tylko trójsieczna krzywej.

Krzywa $R_5{}^2$ jest przecięciem cząstkowem powierzchni rzędu drugiego i powierzchni rzędu trzeciego, mających wspólną prostą, która jest trójsieczną krzywej.

Miejscem trójsiecznej krzywej jest kwadryka, na której leży krzywa,

Istnieje ośm punktów, w których styczna do krzywej przecina samą krzywą ($\lambda=8$; patrz Rozdz. IX, § 4).

Istnieje 96 punktów spotkania trzech stycznych nie nieskończenie blizkich (punktów potrójnych krzywej węzłowej powierzchni rozwijalnej).

Istnieją 72 płaszczyzny ściśle styczne i w innem miejscu styczne do krzywej.

Krzywa $R_5{}^2$ nie posiada siecznej czterokrotnej.

Krzywą $R_5{}^2$ można utworzyć przy pomocy trzech pęków rzutowych, z których jeden jest pękiem powierzchni rzędu 2-go, dwa pozostałe pękami płaszczyzn; kwadryka przechodzące przez $R_5{}^3$ jest wyznaczona przez przecięcie płaszczyzn, odpowiadających sobie w dwóch pękach płaszczyzn.

Krzywą $R_5{}^2$ można także określić jako przecięcie cząstkowe dwóch powierzchni rzędu 3-go, mających nadto wspólną krzywą rzędu 4-go gatunku 1-go. Ta ostatnia krzywa spotyka ośm razy krzywą $R_5{}^2$.

Liczby charakterystyczne dla krzywej $R_5{}^1$ są następujące:

$$r=10,\quad m=15,\quad h=5,\quad g=70,\quad x=30,\quad y=20,\quad a=20.$$

Krzywą $R_5{}^1$ można uważać jako przecięcie cząstkowe dwóch powierzchni sześciennych, które przecinają się nadto według krzywej rzędu 4-go gatunku 2-go.

Z każdego punktu krzywej $R_5{}^1$ można poprowadzić do niej dwie trójsieczne.

Istnieje 10 stycznych krzywej, przecinających ją nadto w innych punktach.

Istnieje 30 płaszczyzn ściśle stycznych, zarazem stycznych do krzywej w innych punktach.

Istnieje 40 punktów, w których spotykają się trzy styczne nie nieskończenie blizkie krzywej.

Miejscem trojsiecznych krzywej $R_5{}^1$ jest powierzchnia prostoliniowa rzędu 5-go.

Krzywa $R_5{}^1$ nie posiada siecznej czterokrotnej.

Liczby charakterystyczne dla krzywej $R_5{}^0$ są:

$$r=8,\quad m=9,\quad h=6,\quad g=20,\quad x=16,\quad y=12,\quad a=8.$$

Przez każdy punkt krzywej $R_5{}^0$ przechodzą trzy trójsieczne.

Istnieje 12 stycznych, które są siecznemi w innych punktach krzywej.

Istnieje dwanaście płaszczyzn ściśle stycznych, które są stycznemi w innych punktach.

Istnieje 8 punktów, w których spotykają się trzy styczne nie nieskończenie blizkie krzywej.

Istnieją dwa gatunki krzywych $R_5{}^0$, wyróżniające się tem, że krzywa gatunku pierwszego ma jednę tylko prostą czworosieczną, druga zaś ma nieskończenie wiele takich siecznych, tworzących powierzchnię rzędu 2 go.

Krzywa $R_5{}^0$ gatunku 1-go jest miejscem punktów wspólnych odpowiadającym sobie płaszczyznom trzech pęków rzutowych, z których dwa są podwójnemi inwolucyjnemi, trzeci zaś jest pojedyńczym.

Krzywa $R_5{}^0$ gatunku 2-go jest miejscem punktów wspólnych odpowiadającym sobie płaszczyznom trzech pęków rzutowych, z których dwa są pojedyńcze, trzeci zaś jest potrójnym inwolucyjnym.

Krzywa $R_5{}^0$ gatunku 1-go jest przecięciem cząstkowem dwu powierzchni rzędu 3-go, mających nadto wspólną krzywą skośną rzędu 3-go oraz prostą, nie przecinającą tamtej; albo też jest przecięciem cząstkowem dwu powierzchni rzędu 3-go prostoliniowych, mających wspólną prostą podwójną oraz dwie inne proste, z których jedna przecina prostą podwójną, druga zaś nie.

Krzywa $R_5{}^0$ gatunku 2-go jest przecięciem cząstkowem powierzchni stopnia 2-go i powierzchni prostoliniowej rzędu 4-go, których prostą potrójną jest czworosieczna krzywej $R_5{}^0$.

Trójsieczne krzywej $R_5{}^0$ gatunku pierwszego tworzą powierzchnię prostoliniową rzędu 8-go, dla której krzywa $R_5{}^0$ jest krzywą potrójną, a jej czworosieczna prostą poczwórną.

Z punktu widzenia klasyfikacyi krzywych skośnych krzywa $R_5{}^0$ gatunku 2-go nie przedstawia osobnej rodziny, a jest tylko przypadkiem szczególnym krzywej $R_5{}^0$ gatunku 1-go (patrz Halphen, École pol. LII, str. 12).

Krzywe rzędu 5-go badali; pierwszy Cayley (Comptes rend. LIV, LVIII, 1862, 1864; Papers V, 15, 24); Sturm (Flächen 3. O., Lipsk 1867) badał krzywe takie, położone na powierzchni rzędu 3-go; później zajmowali się tym przedmiotem Bertini (krzywe $R_5{}^0$; Collect. math. 1881), Berzolari (Linc. Mem. 1893), Weyr (krzywe $R_5{}^0$, Wiener Berichte 1884, 85, 88) i Montesano ($R_5{}^1$, Acc. Napol. 1888).

Krzywe rzędu 6-go. Istnieje, jak wiemy (Rozdz. IX, § 3), pięć rodzin krzywych skośnych rzędu 6-go, charakteryzujących się liczbą punktów podwójnych pozornych. Przez każdą z tych krzywych przechodzi zawsze powierzchnia rzędu 3-go.

Najważniejszą pomiędzy niemi jest krzywa rodzaju 4, która jest przecięciem zupełnem powierzchni stopnia 2-go i powierzchni stopnia 3-go. Jest ona zwłaszcza ważną dla teoryi funkcyj abelowych rodzaju 4, gdyż odgrywa w tej teoryi podobną rolę, jaką krzywe rzędu 4-go płaskie mają w teoryi funkcyj abelowych rodzaju 3.

Liczby charakterystyczne dla tej krzywej są:

$$r=18,\quad m=36,\quad h=6,\quad g=531,\quad x=126,\quad y=96,\quad a=60.$$

Przez punkt krzywej przechodzą dwie trójsieczne (dwie proste kwadryki, na której leży krzywa).

Liczba stycznych, które są zarazem w innych miejscach siecznemi, wynosi 24.

Liczba płaszczyzn ściśle stycznych, które w innych punktach są stycznemi, wynosi 324.

Powierzchnia rozwijalna ściśle styczna krzywej ma 480 punktów potrójnych.

Krzywa posiada 120 płaszczyzn trójstycznych i nie ma oczywiście żadnej czworosiecznej.

Zaczęto badać konfiguracyę 120 płaszczyzn trójstycznych krzywej rzędu szóstego skośnej i 360 odpowiednich punktów styczności. Konfiguracyę tę należy uważać za rozszerzenie na rodzaj $p=4$ konfiguracyj 28 stycznych podwójnych krzywej płaskiej rodzaju $p=3$.

Te punkty styczności (w liczbie 360) krzywej rzędu 6-go z jej płaszczyznami trójstycznemi znajdują się dwunastkami na 32130 powierzchniach rzędu 2-go, Te powierzchnie dają się uporządkować parami; istnieje mianowicie ośm różnych gatunków takich par. Para gatunku pierwszego ma własność, że cztery z pomiędzy pozostałych kwadryk spotykają każdą z powierzchni pary w $6+6$ punktach, należących do krzywej rzędu

6-go; szesnaście kwadryk spotyka jednę z powierzchni pary w 6 punktach (krzywej). drugą tylko w trzech punktach, a niema żadnej kwadryki, którąby miała własność przeciwną. Para taka, jak widzimy, jest w pewnym względzie dysymetryczną. Co do innych szczegółów patrz E. Pascal (Lincei 1893). Jeżeli mamy dwa pierwiastki równania, od którego zależy wyznaczenie 120 płaszczyzn trójstycznych krzywej rzędu 6-go skośnej, to pozostałe 118 pierwiastków rozkładają się na 54 i 64 pierwiastki w ten sposób, że rozwiązującą równania stopnia 64-go jest równanie stopnia 54-go, które znów — po rozwiązaniu równania stopnia 27-go, nie mającego rozwiązującej stopnia niższego — rozpada się na 27 czynników kwadratowych.

Jeżeli znamy trzy pierwiastki, wtedy zagadnienie zależy od równania stopnia 27-go, nie mającego rozwiązującej stopnia niższego. Twierdzenie to jest analogiczne do twierdzenia o 28 stycznych podwójnych krzywej płaskiej, albo do twierdzenia o 27 prostych powierzchni rzędu 3-go (patrz Pascal, Lincei, I półr. 1893, str. 120).

Krzywemi skośnemi rzędu 6-go zajmowali się: Clebsch (Crelle LXIII), Baule (Rozprawa, Getynga 1872), Weyer (Compt. rend. LXXVI), Noether (Crelle XCIII), London (Math. Ann. XLV), Petot (Compt. rend. CII) i inni.

Z prac o krzywych rzędu 7-go wymieniamy pracę Weyra (Wien. Ber. LXIX), a dla krzywej rzędu 9-go, będącej przecięciem zupełnem dwóch powierzchni rzędu 3-go (t. j. dla krzywej podstawowej pęku takich powierzchni) podajemy liczby charakterystyczne:

$$r=36,\quad m=81,\quad h=18,\quad g=3006,\quad x=576,\quad y=504,$$
$$\alpha=144,\quad p=10.$$

Przez każdy punkt krzywej przechodzi 11 trójsiecznych.

Istnieją 144 styczne, które są zarazem siecznemi w innych punktach; istnieje 2160 płaszczyzn ściśle stycznych, które są zarazem stycznemi w innych punktach; istnieje 3360 płaszczyzn trójstycznych.

O różnych zniekształceniach krzywej, będącej przecięciem dwu powierzchni sześciennych, patrz Sturm, Flächen 3-er Ord., Lipsk, 1867.

§ 6.

Krzywe skośne wymierne.

Krzywe rodzaju zero nazywają się, jak wiadomo, wymiernemi albo jednobieżnemi. Wyprowadzono różne ich własności ogólne, pomiędzy któremi najelementarniejsze odnoszą się do liczb charakterystycznych. Zakłada się oczywiście, że krzywa jest pozbawiona punktów osobliwych.

Rozwijalna ściśle styczna krzywej skośnej wymiernej rzędu n-tego jest rzędu $2(n-1)$.

Istnieje $(n-1)^2$ prostych, opierających się na dwu prostych dowolnych i będących siecznemi podwójnemi krzywej.

Prosta ruchoma, opierająca się na prostej dowolnej i zarazem dwusieczna krzywej, opisuje powierzchnię skośną rzędu $(n-1)^2$, dla której prosta stała jest prostą wielokrotną rzędu $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, krzywa dana jest krzywą wielokrotną rzędu $n-1$, i która ma $2(n-1)(n-2)$ punktów ostrzowych, położonych na krzywej wymiernej.

Krzywa wymierna ma oczywiście $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punktów podwójnych pozornych.

Przez każdy punkt krzywej przechodzi $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ trójsiecznych.

Istnieje $\frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)}{3 \cdot 4}$ siecznych czworokrotnych.

Powierzchnia skośna, utworzona przez trójsieczne, jest rzędu $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$

Klasa krzywej wynosi $3(n-2)$.

Przez punkt krzywej przechodzi $3(n-3)$ płaszczyzn ściśle stycznych w innych punktach.

Przez każdy punkt krzywej przechodzi $2(n-2)(n-3)$ płaszczyzn dwustycznych.

Przez każdy punkt krzywej przechodzi $2(n-3)(n-4)$ płaszczyzn dwustycznych w innych punktach.

Każda styczna spotyka $2(n-3)$ innych stycznych.

Krzywa ma $4(n-3)$ płaszczyzn statecznych.

Istnieje $6(n-3)(n-4)$ płaszczyzn ściśle stycznych i zarazem stycznych w innych miejscach.

Istnieje $2(n-2)(n-3)$ prostych stycznych i zarazem siecznych w innych punktach.

Krzywa ma $\frac{4(n-3)(n-4)(n-5)}{3}$ płaszczyzn dwustycznych.

Ważną własność krzywych wymiernych jest ta, która odnosi się do tak zw. inwolucyi zasadniczej na krzywej. Spółrzędne x_1, x_2, x_3, x_4 punktu krzywej dają się wyrazić jako funkcye wymierne parametru λ przy pomocy związków

$$x_1 = a_\lambda^n, \quad x_2 = b_\lambda^n, \quad x_3 = c_\lambda^n, \quad x_4 = d_\lambda^n,$$

gdzie a_λ, b_λ ... oznaczają symbolicznie formy dwójkowe stopnia n. Utwórzmy $n-3$ form stopnia n apolarnych z każdą z czterech form danych, a więc z każdą formą, należącą do układu liniowego, który te cztery formy charakteryzują. Układ liniowy, określony przez $n-3$ formy utworzone, przedstawia inwolucyę grup n punktów na krzywej, a zatem:

Na danej krzywej wymiernej istnieje inwolucya rzędu n i gatunku $n-4$, której grupy n-punktowe są apolarnemi ze wszystkiemi grupami n-punktowemi, wyciętemi na krzywej przez jakąkolwiek płaszczyznę przestrzeni.

Taką inwolucyę Stahl nazwał zasadniczą. W przypadku $n=4$ inwolucya sprowadza się oczywiście do grupy tylko czteropunktowej. Dla krzywej skośnej rzędu 4-go gatunku 2-go (wymiernej) grupa tych czterech punktów jest grupą czterech punktów styczności płaszczyzn ściśle stycznych statecznych (patrz § 4). Lecz w tym przypadku występują i inne inwolucye, znalezione przez S t u d y'ego, o czem była już mowa w § 4.

Co do inwolucyi zasadniczej na krzywej wymiernej patrz S t a h l (Crelle CIV, Math. Ann. XL). O krzywych wymiernych wymieniamy prace W e y r a (Giorn. di Bart. IX, Ann. di mat. IV, Crelle LXXIV, Ist. Lomb. 1882, Prag. Ber. 1883 i t. d.), K o r n d ö r f e r (Math. Ann III), B r i l l (tamże XXXVI) i t. d. B e r z o l a r i (Annali di mat. XXI) rozciągnął niektóre z poprzednich rozważań na krzywe wymierne w przestrzeni o jakiejkolwiek liczbie wymiarów.

ROZDIZAŁ XI.

POWIERZCHNIE RZĘDU 3-GO.

---

§ 1.

Wiadomości ogólne. Powierzchnie o punktach podwójnych. Tworzenie geometryczne.

Powierzchnia ogólna rzędu 3-go jest klasy 12. Rząd stożka, na niej opisanego i mającego wierzchołek w jakimkolwiek punkcie przestrzeni, jest 6; tworzących zwrotu tego stożka jest 6, a tworzących podwójnych niema. Rząd krzywej parabolicznej wynosi 12.

Równanie ogólne powierzchni takiej zawiera 19 spółczynników niejednorodnych.

Na powierzchni rzędu 3-go ogólnej leży 27 prostych.

Jeżeli powierzchnia rzędu 3-go ma linię podwójną, to taka prosta może być tylko jedyną, i w tym przypadku powierzchnia jest prostoliniową. Dla takiej powierzchni dwa punkty prostej podwójnej są jednopłaszczyznowemi, pozostałe dwupłaszczyznowemi (patrz Rozdz. IX, § 4).

Powierzchnia rzędu 3-go może mieć najwyżej cztery punkty podwójne.

Nie istnieją powierzchnie rozwijalne właściwe rzędu 3-go, lecz tylko powierzchnie rozwijalne niewłaściwe, jak stożki i walce rzędu 3-go.

Podajemy poniżej tablicę różnych gatunków powierzchni sześciennych o punktach osobliwych oraz powierzchni sześciennych prostoliniowych, których istnieją tylko dwa gatunki.

Klasyfikacyę tę podał całkowicie Cayley (Phil. Trans 1869); przypadki (5), (7), (11), (15), (20) rozważał dawniej już Schlaefli (Phil. Trans. 1863). Powierzchnie prostoliniowe badał Cremona (Ist. Lomb. 1861, Crelle LX); patrz pracę Weyra „Geometrie der räuml. Erzeugn, Lipsk 1870.

№ kolejny.	Natura osobliwości.	Klasa.	Równanie powierzchni. [1]
1	Nie ma punktów osobliwych.	12	
2	Jeden punkt stożkowy.	10	$u^{(2)} x_4 + u^{(3)} = 0$. Punkt stożkowy: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
3	Punkt dwupłaszczyznowy	9	$u^{(1)} v^{(1)} + u^{(3)} = 0$. Punkt dwupłaszczyznowy: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
4	Dwa punkty stożkowe	8	W równaniu pod № 2 należy przyjąć, że $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ zawierają x tylko w stopniu 1-ym
5	Punkt dwupłaszczyznowy taki, że przecięcie dwu płaszczyzn stycznych należy do powierzchni; należy go uważać za zjednoczenie dwu punktów stożkowych	8	Jeżeli równanie, należące do przypadku (3), napiszemy w postaci: $x_1 x_2 x_4 + u^{(3)} = 0$, to równanie dla przypadku niniejszego otrzymamy, założywszy, że $u^{(3)}$ nie zawiera x_3^3. Płaszczyznami stycznemi są: $x_1=0$, $x_2=0$.
6	Punkt stożkowy i punkt dwupłaszczyznowy	7	Równanie dla tego przypadku można otrzymać z równania dla przypadku (4), zakładając, że spółczynnik przy x_3 rozpada się na dwa czynniki.
7	Punkt dwupłaszczyznowy, jak w przypadku (5), lecz w założeniu, że płaszczyzna, styczna do po-	7	Równanie zredukowane jest dla tego przypadku postaci: $x_1x_2x_4 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 - ax_1^3 = 0$.

[1]) Symbole $u^{(1)}$, $u^{(2)}$. . . , $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ oznaczają funkcye jednorodne stopnia 1, 2 . . . zmiennych $x_1\ x_2\ x_3$.

№ kolejny.	Natura osobliwości.	Klasa.	Równanie powierzchni.
	wierzchni wzdłuż przecięcia dwu płaszczyzn stycznych, zlewa się z jedną z tych płaszczyzn. Osobliwość tę należy uważać za zjednoczenie punktu stożkowego z punktem dwupłaszczyznowym. Płaszczyzna styczna wzdłuż powyższej prostej przecina powierzchnię według tej prostej, liczonej dwa razy, i według innej prostej, różnej od tamtej.		Punktem dwupłaszczyznowym jest $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ wraz z płaszczyznami stycznemi $x_1=0$, $x_2=0$; płaszczyzna styczna w punkcie prostej przecięcia płaszczyzn jest zawsze $x_1 = 0$ i przecina powierzchnie według $x_1 = x_2 = 0$ dwa razy, oraz według $x_1 = x_3 = 0$. raz jeden.
8	Trzy punkty stożkowe	6	W równaniu dla przypadku 2-go należy założyć, że $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ zawierają x_2, x_3 tylko w stopniu pierwszym.
9	Dwa punkty dwupłaszczyznowe	6	Dość przyjąć, że równanie w przypadku 3-m zawiera x_3 tylko w stopniu pierwszym i że spółczynnik przy x_3 rozpada się na dwa czynniki.
10	Punkt stożkowy jest punktem dwupłaszczyznowym takiego gatunku, jak punkt w przypadku (5)	6	Dość w przypadku (5) przyjąć, że $u^{(3)}$ nie zawiera wcale x_3^2.
11	Punkt dwupłaszczyznowy, jak w przypadku (7), lecz taki, że płaszczyzna styczna wzdłuż prostej przecina powierzchnię według tejże prostej liczonej trzy razy. Mówimy wtedy, że ta prosta jest ściśle styczna do powierzchni, punkt zaś należy uważać za zjednoczenie trzech punktów stożkowych	6	Równanie zredukowane jest postaci: $x_1x_2x_4 + x_1x_3^2 + x_2^3 + -ax_1^3 = 0$.
12	Punkt jednopłaszczyznowy	6	$(x_1+x_2+x_3)^2x_4 + x_1x_2x_3 = 0.$
13	Punkt dwupłaszczyznowy zwykły i dwa punkty stożkowe	5	$x_2x_3x_4 + x_1^2(x_1+x_2+x_3) = 0.$
14	Punkt dwupłaszczyznowy, jak w przypadku(7). i punkt stożkowy	5	$x_1x_2x_4 + x_2x_3^2 + x_1^2x_3 = 0.$
15	Punkt jednopłaszczyznowy taki, że płaszczyzna styczna w tym punkcie przecina powierzchnię według trzech prostych, z których dwie zlewają się	5	$x_1^2x_4 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 = 0.$

№ kolejny.	Natura osobliwości.	Klasa.	Równanie powierzchni.
16	Cztery punkty stożkowe	4	$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_1+x_4x_1x_2=0$
17	Dwa punkty dwupłaszczyznowe i jeden punkt stożkowy	4	$x_1x_2x_3+x_1x_4^2+x_4^3=0.$
18	Jeden punkt, jak w przypadku (5), i dwa punkty stożkowe	4	$x_1x_2x_4+(x_1+x_2)x_3^2=0.$
19	Jeden punkt, jak w przypadku (11), i jeden punkt stożkowy	4	$x_1x_2x_4+x_1x_3^2+x_2^3=0.$
20	Punkt jednopłaszczyznowy taki, że płaszczyzna styczna w tym punkcie przecina powierzchnię według trzech prostych zlewających się	4	$x_1^2x_4+x_1x_3^2+x_2^3=0.$
21	Trzy punkty dwupłaszczyznowe	3	Dość w równaniu dla przypadku 9-go przyjąć, że x_2 znajduje się w stopniu pierwszym i że spółczynnik przy x_2 rozpada się na dwa czynniki. W przypadku szczególnym, w którym każdym dwom z pomiędzy trzech punktów dwupłaszczyznowych odpowiada wspólna płaszczyzna styczna, równaniem zredukowanem powierzchni jest $x_1^3+x_2x_3x_4=0.$
22	Jedna prosta podwójna, której wszystkie punkty są dwupłaszczyznowemi, prócz dwóch, które są jednopłaszczyznowemi. Powierzchnia jest prostoliniową. Tworzy się ona ruchem prostej, opierającej się na dwóch innych (kierownicach) w ten sposób, że szeregi punktowe na nich wyznaczone, jeden pojedyńczy, drugi podwójny inwolucyjny, są rzutowemi. Ta druga prosta jest prostą podwójną.	3	$x_3x_1^2-x_4x_2^2=0$ Prosta podwójna: $x_1=0$, $x_2=0$. Kierownice: $x_1=0$, $x_2=0$ i $x_3=0$, $x_4=0$.
23	Jedna prosta podwójna, w której punktach dwu lub jednopłaszczyznowych płaszczyzna styczna jest zawsze jedna i ta sama. Powierzchnię tę można uważać za przypadek graniczny poprzedzającej, gdy dwie kierownice zbliżają się nieograniczenie do siebie. Co do jej tworzenia patrz Salmon-Fiedler l. c. str. 370. Nazywają ją zwykle prostoliniową sześcienną Cayley'a.	3	$x_3^3+x_1(x_1x_3+x_2x_4)=0.$ Płaszczyzna $x_1=0$ jest styczną w każdym punkcie prostej podwójnej $x_1=x_2=0$ i przecina powierzchnię według tejże prostej, liczonej trzy razy. Inna płaszczyzna styczna obwodzi hyperboloidę $x_1x_3+x_2x_4=0.$

Tablica liczb charakterystycznych, odnoszących się do powierzchni ogólnej rzędu 3-go, i do niektórych powierzchni, zawartych w tablicy poprzedzającej [1]).

	Pow. ogólna	(2)	(3)	(4)	(6)	(8)	(9)	(12)	(13)	(16)	(17)	(21)	(22)
Punkty stożkowe	0	1	0	2	1	3	0	0	2	4	1	0	—
Punkty dwupłaszczyzn.	0	0	1	0	1	0	2	0	1	0	2	3	—
Punkty jednopłaszcz.	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-	—
$a = a'$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4
δ	0	1	0	2	1	3	0	3	2	4	1	0	0
$\varkappa$	6	6	7	6	7	6	8	6	7	6	8	9	3
n'	12	10	9	8	7	6	6	6	5	4	4	3	3
$\varkappa'$	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	3
b'	27	15	9	7	3	3	0	3	1	3	0	0	1
k'	216	105	36	21	3	3	0	3	0	3	0	0	0
t'	45	15	6	3	0	1	0	1	0	1	0	0	0
ρ'	27	15	9	7	3	3	0	3	1	3	0	0	1
c'	24	18	16	12	10	6	8	6	4	0	2	0	0
h'	180	96	84	38	24	6	24	7	2	0	0	0	0
ν'	30	24	18	17	12	9	8	7	5	0	2	0	0
σ'	12	12	12	10	9	6	8	6	4	0	2	0	0
β'	54	30	18	13	6	3	0	3	1	0	0	0	0

[1]) Liczby w nagłówku w nawiasach odnoszą się do przypadków, podanych w tablicy poprzedzającej: znaczenie głosek w kolumnie 1-ej objaśniono w Rozdz. IX, § 1.

O liczbie i konfiguracyi prostych, położonych na powierzchni rzędu 3 go o punktach podwójnych patrz niżej § 3.

Sposoby tworzenia geometrycznego powierzchni rzędu 3-go są następujące:

Niechaj będą dwa trójściany A i B; każda płaszczyzna pierwszego przecina każdą płaszczyznę drugiego, i mamy tym sposobem dziewięć prostych. Przez punkt P przestrzeni przesuwamy płaszczyznę, przecinającą te dziewięć prostych w dziewięciu punktach, przez które i przez punkt P przechodzi zawsze krzywa rzędu 3-go.. Jeżeli zmieniać będziemy wszelkiemi możliwemi sposobami płaszczyznę, przechodzącą przez punkt P, to miejscem geometrycznem krzywej rzędu 3-go będzie powierzchnia ogólna rzędu 3-go, przechodząca przez punkt P i przez dziewięć prostych (Steiner, Berl. Ak. 1856, Crelle LIII).

Miejscem przecięcia odpowiadających sobie elementów w dwóch pękach rzutowych, z których jeden jest pękiem kwadryk, drugi pękiem płaszczyzn, jest powierzchnia rzędu 3-go (Steiner).

W szczególności: miejscem stożkowych, według których każdą kwadrykę pęku przecina płaszczyzna biegunowa punktu P względem niej samej, jest powierzchnia rzędu 3-go (Steiner).

Miejscem punktów wspólnych trzem odpowiadającym sobie płaszczyznom trzech sieci płaszczyzn rzutowych jest powierzchnia rzędu 3-go (Grassmann, Crelle IL, Schröter, tamże LXII).

Miejscem bieguna płaszczyzny względem wszystkich kwadryk sieci jest powierzchnia rzędu 3-go (Steiner).

Miejscem punktów przecięcia trzech płaszczyzn biegunowych wszystkich punktów innej płaszczyzny względem trzech kwadryk nie należących do tego samego pęku, jest powierzchnia rzędu 3-go (Steiner).

Niechaj będzie sześć pęków płaszczyzn a, b, c; a_1, b_1, c_1, i niechaj ani trzy osi trzech pierwszych, ani trzy osi trzech drugich pęków nie spotykają się; ustanówmy związek rzutowy pomiędzy a, i a_1, b i b_1, c i c_1. Weżmy płaszczyznę π i na niej punkt P, przez który przejdą trzy płaszczyzny trzech pierwszych pęków, im zaś odpowiadać będą trzy płaszczyzny w drugich trzech pękach. Miejscem punktów spotkania tych ostatnich trzech płaszczyzn, przy poruszaniu się punktu P po płaszczyznie π, jest powierzchnia rzędu 3-go (August, Rozpr. Berlin 1862; Sturm, Flächen 3-er Ord. str. 44).

Powierzchnia rzędu 3-go z punktem stożkowym może być utworzona sposobem następującym (Salmon):

Niechaj cztery ściany czworościanu obracają się około czterech punktów, trzy zaś boki jednej ściany niechaj poruszają się po trzech płaszczyznach stałych; wtedy miejsce wierzchołka przeciwległego tej ścianie opisuje powierzchnię rzędu 3-go, której punktem podwójnym jest punkt spotkania trzech płaszczyzn stałych. Twierdzenie to jest przypadkiem szczególnym twierdzenia Grassmanna.

Niechaj A_1, A_2, A_3, A_4 będą cztery punkty płaszczyzny, A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 ich rzuty z punktu P na cztery płaszczyzny dane; miejscem punktu P, dla którego cztery punkty A' znajdują się na jednej płaszczyznie, jest powierzchnia rzędu 3-go z czterema punktami podwójnemi, które są wierzchołkami czworościanu, utworzonego przez cztery powyżej rzeczone płaszczyzny (Sturm l. c. str. 381).

Tę powierzchnię o czterech punktach stożkowych (klasy 4-ej) badał poraz pierwszy Cayley w r. 1844 (Jour. de Louv. IX) i dla tego niektórzy nazywają ją powierzchnią Cayley'a; jest ona ciekawą jeszcze z tego względu, iż jest biegunową wzajemną powierzchni Steinera (patrz Rozdz. XII, § 8). Tęż powierzchnię badali także Eckhardt (patrz niżej) i inni.

Spodki prostopadłych, spuszczonych z punktu powierzchni Cayley'a na cztery ściany czworościanu punktów podwójnych, znajdują się na jednej płaszczyźnie.

Z tej własności wypływa konstrukcya, będąca przypadkiem szczególnym wyżej wskazanej.

Beltrami znalazł niektóre proste własności powierzchni, o której mówimy (Giorn di Batt. I), a mianowicie:

Punkty środkowe 28 odcinków, wyznaczonych przez środki 8 kul wpisanych w czworościan, leżą na powierzchni rzędu 3-go, zawierającej całkowicie sześć krawędzi czworościanu. Jest to powierzchnia Cayley'a, której czterema punktami podwójnemi są wierzchołki czworościanu.

Cztery stożki, mające swe wierzchołki w wierzchołkach czworościanu i opisane na powierzchni rzędu 3-go, są stożkami rzędu 2-go, przecinającemi się po dwa każde według sześciu stożkowych płaskich. Płaszczyzna stożkowej przecięcia dwu stożków, mających wierzchołki w końcach jednej krawędzi, przechodzi przez krawędź przeciwległą i jest sprzężona harmonicznie względem dwu ścian czworościanu, przecinających się według tej krawędzi z płaszczyzną wzdłuż tejże krawędzi styczną. Nadto wszystkie sześć rzeczonych płaszczyzn przechodzą przez jeden i ten sam punkt.

Najdawniejszemi pracami o powierzchni rzędu 3-go są prace Cayley'a i Salmona (Camb. math. Journ. IV, 1849), Sylvestera (tamże VI, 1851), Steinera (l. c) i Grassmanna (l. c.). Potem najważniejszemi pracami o tym przedmiocie były prace Cremony (Crelle LXVIII) i Sturma, uwieńczone przez Akademię berlińską w r. 1866. Sturm ogłosił o powierzchniach rzędu 3go książkę (Lipsk 1867), a poważna część przekładu niemieckiego dzieła Cremony „Teoria delle superficie“ (przekład Curtzego, Berlin 1870) jest poświęcona tymże powierzchniom. Powierzchniami sześciennemi specyalnemi lub o punktach osobliwych zajmowali się pomiędzy innymi Cayley (l. c. str. 387), Schläfli (tamże), Clebsch (Math. Ann. IV, Gött. Nachr. 1872), Eckhardt (Math. Ann. V, X), Kohn (Wien. Ber. XCVI, 1887) i t. d. Powierzchniami prostoliniowemi rzędu 3-go zajmowali się; Cayley (Phil. Mag. 1862, 1864, Phil. Trans. 1864), Cremona (Ist. Lomb. 1860, Crelle LX), Em. Weyr (l. c. str. 337) i t. p. W „Geometryi przestrzeni“ Salmona (t. II) oraz w „Geometryi położenia“ Reye'go w wielu miejscach mowa jest o teoryi powierzchni sześciennych.

Bogaty zbiór modeli gipsowych rozmaitych form rzędu 3-go znajduje się w kolekcyi L. Brilla w Darmstadzie (obecnie Schillinga w Halli).

§ 2.

Pięciościan Sylvestera. Powierzchnia Hessego dla powierzchni sześciennej.

Równanie powierzchni ogólnej rzędu 3-go bez punktów osobliwych można przedstawić w postaci:

$$a_1 X_1^3 + a_2 X_2^3 + a_3 X_3^3 + a_4 X_4^3 + a_5 X_5^3 = 0,$$

gdzie $X_1=0$, $X_2=0, \ldots X_5=0$ są równaniami pięciu płaszczyzn, tworzących tak nazwany pięciościan Sylvestera. Wiadomo, że pomiędzy pięcioma wielkościami X zachodzi zawsze związek tożsamościowy liniowy jednorodny. Otóż można oczywiście założyć zawsze, że stałe, wchodzące do równań pięciu płaszczyzn X, są obrane w ten sposób, że związek liniowy jednorodny, zachodzący pomiędzy stronami pierwszemi równań tych płaszczyzn, sprowadza się wprost do postaci $\sum\limits_1^5 X_i = 0$. Można tedy powyższe twierdzenie wyrazić mówiąc, że równanie powierzchni rzędu 3-go daje się zawsze przedstawić w postaci równania (pięciościanowego, pentaedralnego)

$$\sum_1^5 a X_i^3 = 0,$$

w którem pomiędzy wielkościami X zachodzi związek:

$$\sum_1^5 X_i = 0.$$

To ważne twierdzenie podał pierwszy Sylvester bez dowodu (Cambr. Math. Journ. VI, 1851, str. 198); później dowiódł go ściśle Clebsch (Crelle LIX), a po nim Gordan (Math. Ann. V) i Reye (Crelle LXXVIII).

Powierzchnia Hessego dla powierzchni sześciennej, której równanie ma postać powyższą, przedstawić się daje przy pomocy równania

$$\frac{1}{a_1 X_1} + \frac{1}{a_2 X_2} + \frac{1}{a_3 X_3} + \frac{1}{a_4 X_4} + \frac{1}{a_5 X_5} = 0.$$

Powierzchnia Hessego i powierzchnia Steinera dla powierzchni rzędu 3-go są powierzchniami identycznemi (patrz Rozdz. IX. § 5) rzędu 4-go.

Punkty powierzchni Hessego odpowiadają sobie po dwa w ten sposób, że kwadryka biegunowa jednego z dwu punktów względem powierzchni sześciennej jest stożkiem mającym wierzchołek w drugim z tych punktów powierzchni Hessego. Ta odpowiedniość jest wzajemną.

Prosta, łącząca dwa odpowiadające sobie punkty powierzchni Hessego, ma tę własność, iż płaszczyzny biegunowe dwóch punktów przechodzą przez prostą stałą, która jest styczną podwójną (t. j. dotyka w dwóch punktach) powierzchni Hessego.

Powierzchnia Hessego ma 10 punktów podwójnych i 10 prostych; punkty podwójne leżą trójkami na 10 prostych, a proste przechodzą trójkami przez 10 punktów. Te 10 punktów i 10 prostych są: pierwsze wierzchołkami, drugie krawędziami pięciościanu Sylvestera, należącego do danej powierzchni sześciennej.

Kwadryka biegunowa względem powierzchni sześciennej dla jednego z 10 punktów powierzchni Hessego rozpada się na dwie płaszczyzny, których oś leży na powierzchni Hessego i jest jedną z 10 wskazanych prostych; te dwie płaszczyzny są sprzężonemi harmonicznie względem dwu ścian pięciościanu, przechodzących przez tę prostą.

Twierdzenie to ustanawia odpowiedniość pomiędzy 10 punktami i 10 prostemi.

Przecięcie (rzędu 12-go) powierzchni sześciennej z należącą do niej powierzchnią Hessego jest krzywą paraboliczną dla obu powierzchni (S t u r m).

Powierzchnia rozwijalna, opisana na powierzchni sześciennej wzdłuż krzywej parabolicznej, jest także opisaną na powierzchni Hessego.

Każda prosta powierzchni sześciennej jest styczną podwójną powierzchni Hessego.

Wyznaczenie 10 punktów podwójnych powierzchni Hessego zależy od rozwiązania równania stopnia 10-go, które zależy znów od rozwiązania równania stopnia 5-go (C l e b s c h, Crelle IL, S a l m o n - F i e d l e r l. c. § 298--299).

O konfiguracyi par płaszczyzn, przedstawiających kwadryki biegunowe 10 punktów podwójnych powierzchni Hessego, konfiguracyi prostych, w których się one przecinają i t.d., mówi twierdzenie C l e b s c h a, powtórzone i uzupełnione przez S t u r m a i S a l m o n a - F i e d l e r a

Jeżeli przyjmiemy, że w równaniu pięciościanowem powierzchni sześciennej wszystkie spółczynniki a_i są równe 1, otrzymamy równanie $\Sigma X_i^3 = 0$, gdzie pomiędzy wielkościami X zachodzi związek $\Sigma X_i = 0$. Powierzchnia, przedstawiona przez to równanie, nazywa się p o w i e r z c h n i ą p r z e k ą t n ą C l e b s c h a (Math. Ann. IV).

Na każdej z pięciu ścian pięciościanu rozważmy czworobok, wyznaczony przez cztery pozostałe ściany, i jego trzy przekątne; 15 przekątnych tych czworoboków leżą na powierzchni Clebscha i stąd jej nazwa „powierzchni przekątnej“. Powierzchnia ta ma tedy 15 prostych, które trójkami przechodzą 10 razy przez jeden punkt i 5 razy leżą na jednej płaszczyźnie.

Wszystkie punkty powierzchni przekątnej są hyperbolicznemi (patrz Rozdz. IX, § 1), prócz 10 wierzchołków pięciościanu, należących do powierzchni i będących dla niej punktami parabolicznemi (K l e i n, Math. Ann. VI). Część rzeczywista krzywej parabolicznej redukuje się do takich 10 punktów odosobnionych. Pozostałe 12 prostych na powierzchni Clebscha (poza 15 przekątnemi) tworzą dwuszóstkę (patrz § 3).

Powierzchnia, zajmująca miejsce pośrednie pomiędzy powierzchnią ogólną rzędu 3-go a powierzchnią przekątną, jest powierzchnią Cayley'a (Phil. Mag. I, 1864):

$$a_1 X_1^3 + a_2 X_2^3 + b(X_3^3 + X_4^3 + X_5^3) = 0.$$

Ma ona trzy płaszczyzny trójstyczne, przechodzące przez jednę prostę, i trzy proste, przechodzące przez jeden punkt.

O pięciościanie ogłosili nadto badania: Rodenberg (Math. Ann. XIV, Rozpr. Getynga 1875). Co do innych poszukiwań patrz Cremona i t. d. w § 3.

Clebsch podał (Crelle LXIII) następujące twierdzenie, będące rozwinięciem twierdzeń, odnoszących się do krzywych sześciennych płaskich:

Płaszczyzna biegunowa punktu P powierzchni sześciennej względem należącej do niej powierzchni Hessego przecina płaszczyznę styczną do powierzchni w punkcie P według prostej, która jest prostą przegięciową przecięcia tejże płaszczyzny biegunowej z powierzchnią sześcienną.

Obwiednia płaszczyzn, przecinających powierzchnię sześcienną według krzywych sześciennych harmonicznych (t. j. takich, dla których stosunek anharmoniczny, o którym mówimy w § 1 Rozdz. VII, jest równy -1), jest powierzchnią klasy 6-ej; obwiednia płaszczyzn, przecinających powierzchnię według krzywych sześciennych równoanharmonicznych (t. j. takich, dla których stosunek, o którym mowa w § 1 Rozdz, VII jest równy $-\varepsilon$, t. j. pierwiastkowi sześciennemu z -1), jest powierzchnią klasy 4-ej. Te dwie powierzchnie są wpisane w powierzchnię rozwijalną płaszczyzn statecznych, t. j. w rozwijalną, opisaną około powierzchni sześciennej wzdłuż krzywej parabolicznej.

Pomiędzy płaszczyznami, przecinającemi powierzchnię sześcienną według krzywych sześciennych równoanharmonicznych jest dziesięć płaszczyzn, przechodzących przez punkt podwójny powierzchni Hessego i przez odpowiadającą im prostą.

Co do innych własności powierzchni Hessego dla krzywej sześciennej patrz Cremona (l. c.) i Sturm (l. c.) i wyżej Rozdz. VII, § 3).

---

§ 3.

Proste powierzchni rzędu 3-go. Płaszczyzny trójstyczne Sześciosciany biegunowe Cremony.

Wiemy już, że powierzchnia ogólna rzędu 3-go zawiera 27 prostych.

Każda płaszczyzna, przechodząca przez jednę z tych prostych, jest płaszczyzną dwustyczną dla powierzchni; punktami jej styczności są dwa punkty, w których prosta przecina stożkową, będącą przecięciem resztowem płaszczyzny z powierzchnią.

W każdym z tych pęków płaszczyzn istnieje pięć płaszczyzn, dla których ta stożkowa rozpada się na dwie proste; te płaszczyzny są płaszczyznami trójstycznemi dla powierzchni.

Przez każdą prostą przechodzi 5 z pomiędzy 45 płaszczyzn trójstycznych, i oczywiście, każda płaszczyzna trójstyczna przechodzi przez trzy proste.

Każda prosta powierzchni dotyka krzywej parabolicznej tej powierzchni w dwóch punktach.

Punkty styczności z powierzchnią płaszczyzn dwustycznych, przechodzących przez prostą stałą powierzchni, tworzą na tej prostej inwolucyę, której punktami podwójnemi są punkty styczności prostej z krzywą paraboliczną.

Z jednego z twierdzeń poprzedzających wynika:

Każda prosta spotyka 10 innych, a nie spotyka 16 pozostałych; punktów spotkania prostych na powierzchni jest 135.

Dwie niespotykające się proste a, b przecinają się każde z pięcioma temi samemi prostemi; pomiędzy pozostałemi 20 ma jest pięć spotykających tylko prostą a, pięć spotykających tylko prostą b, wreszcie dziesięć, nie spotykających ani prostej a, ani prostej b

J e s t 216 p a r p r o s t y c h s k o ś n y c h (niespotykających się).

Trzy nieprzecinające się proste przecinają się z trzema innemi prostemi, także nieprzecinającemi się ze sobą; jest sześć innych prostych, nie spotykających żadnej z trzech danych.

Trzy proste skośne i trzy inne proste, które je przecinają, stanowią tak zwaną d w u t r ó j k ę (biterna, Doppeldrei, S t u r m). Jest 360 dwutrójek.

Cztery nieprzecinające się proste przecinają się każda z dwiema prostemi, a nie przecinają się z trzema innemi.

P i ą t e k prostych skośnych są dwa gatunki; piątki gatunku 1-go są takie, że istnieje szósta prosta, która nie spotyka żadnej z prostych piątki; piątki gatunku 2-go—takie, że takiej szóstej prostej nie ma. Piątek gatunku 1-go jest 432, drugiego 216.

S z ó s t e k, t. j. układów po sześć prostych, z których żadne dwie nie spotykają się, jest 72. Wyższe układy prostych skośnych nie istnieją.

Szóstki skośne w liczbie 72 dają się łączyć w pary:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6; \qquad b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6,$$

mające tę własność, że każda prosta a_i nie spotyka prostej b_i, spotyka zaś każdą inną prostą b, i odwrotnie. Taka para szóstek nazywa się d w u s z ó s t k ą (S c h l ä f l i). Dwuszóstek takich jest 36.

Dwie dwuszóstki mają 4 lub 6 prostych wspólnych.

Dwie płaszczyzny trójstyczne, nie mające wspólnych prostych, należących do powierzchni, wyznaczają trzecią płaszczyznę, będącą z niemi w jednakowym związku tak, że dziewięć prostych, znajdujących się na trzech płaszczyznach, można jeszcze jednym tylko sposobem połączyć trzema innemi płaszczyznami. Takie dwie trójki płaszczyzn stanowią t.zw. parę t r ó j ś c i a n ó w sprzężonych (Steinera). Istnieje 120 par trójścianów sprzężonych.

Piętnaście prostych, które pozostają z liczby 27 prostych dwuszóstki, leżą trójkami na piętnastu płaszczyznach, które szóstkami tworzą dziesięć par trójścianów sprzężonych.

Jest widocznem, że skoro dwa trójściany sprzężone przecinają się według dziewięciu prostych powierzchni, a każdy z nich przedstawia powierzchnię zniekształconą rzędu 3-go, to można powiedzieć, że określają one pęk powierzchni sześciennych, do których należy dana.

Jeżeli $A=0$, $B=0$, $C=0$; $A'=0$, $B'=0$, $C'=0$ są równaniami płaszczyzn dwu trójścianów sprzężonych, to równanie powierzchni jest typu:

$$ABC + kA'B'C' = 0.$$

Każdej parze trójścianów sprzężonych odpowiadają dwie inne pary w ten sposób, że układ trzech par zawiera wszystkie 27 prostych powierzchni. Takich układów po trzy pary trójścianów sprzężonych jest 40.

Konstrukcya geometryczna 27 prostych powierzchni jest następująca (Salmon, Sturm):

Niechaj będą cztery proste b_2, b_4, b_5, b_6, nie spotykające się i nie należące do jednej hyperboloidy, i niechaj proste niespotykające się a_1, a_2 przecinają cztery poprzedzające. Dajmy, że prosta b_2 spotyka prostą a_1, nie spotyka prostej a_2 i nie znajduje się na tej samej hyperboloidzie z żadną grupą trzech prostych, wybranych pomiędzy czterema prostemi b; niechaj b_1 będzie inna podobna prosta, spotykająca tylko prostą a_2, a nie spotykająca prostej a_1. Na prostej a_1 wybierzmy dowolnie cztery punkty, a na każdej z pięciu prostych b_2. b_3, b_4, b_5, b_6 trzy punkty. Powierzchnia sześcienna, przechodząca przez 19 tych punktów, zawiera wszystkie proste a, b; zawiera nadto prostą a_3, która wraz z prostą a_1 tworzy parę prostych, spotykających czwórkę b_2, b_4, b_5, b_6, i która razem z prostą a_2 tworzy parę prostych, spotykających czwórkę b_1, b_4, b_5, b_6. Biorąc podobnież proste a_4, a_5, a_6, które przecinają odpowiednio proste czwórek b_2, b_3, b_5, b_6; b_2, b_3, b_4, b_6; b_2, b_3, b_4, b_5, będziemy mieli razem 12 prostych, leżących na powierzchni sześciennej i tworzących dwuszóstkę. Pozostałe 15 prostych znajdziemy, tworząc 15 przecięć płaszczyzn $(a_i b_j)$ i $(a_j b_i)$ $(i \lesseqgtr j)$.

G r u p a p o d s t a w i e ń p o m i ę d z y 27 p r o s t e m i p o w i e r z c h n i r z ę d u 3-go j e s t r z ę d u 6! 72.

Wyznaczenie 27 prostych zależy od rozwiązania równania, nie mającego rozwiązujących stopnia niższego; lecz skoro znamy jeden z pierwiastków tego równania, t. j. jednę z 27 prostych, to pozostałe pierwiastki rozdzielają się na 10 + 16, a rozwiązującą równania, od którego zależy 16 pierwiastków, jest równanie, od którego zależą pierwsze 10; to zaś ostatnie równanie, przez rozwiązanie równania ogólnego stopnia 5-go, rozkłada się na pięć czynników stopnia drugiego. Jeżeli znamy jeszcze jeden pierwiastek z pomiędzy 16, t. j. jeżeli znamy razem dwie proste nieprzecinające się, to wyznaczenie pozostałych zależy od równania ogólnego stopnia 5-go (J o r d a n).

Równanie 27 prostych badali: C l e b s c h (Gött. Abh. XIV, 1868—9), J o r d a n („Substitutions" str. 310—368), S y l v e s t e r (Proc. London math. Soc. II, 155), K l e i n (J. de Liouville IV, str. 169, 1887), B u r k h a r d t (Gott. Nachr. 1892).

Zajmiemy się teraz pewnym związkiem, znalezionym przez C r e m o n ę (Math. Ann. XIII) pomiędzy dwuszóstkami skośnemi a pięciościanem S y l v e s t e r a. Niechaj równanie powierzchni sześciennej dane będzie w postaci:

$$Y_1^3 + Y_2^3 + Y_3^3 + Y_4^3 + Y_5^3 + Y_5^3 = 0 .$$

gdzie $Y_i = 0$ są równaniami sześciu płaszczyzn i $\Sigma Y_i = 0$. Można okazać, że równanie powierzchni da się przedstawić w postaci:

$$(Y_2 + Y_3)(Y_3 + Y_1)(Y_1 + Y_2) + (Y_5 + Y_6)(Y_6 + Y_4)(Y_4 + Y_5) = 0,$$

i pod innemi postaciami analogicznemi, które otrzymujemy z napisanej przez przemiany skaźników; tych równań będzie oczywiście tyle, iloma sposobami można podzielić sześć elementów na dwie grupy po trzy elementy, t. j. będzie ich 10.

Płaszczyzny $Y_i + Y_j = 0$ w liczbie 15 są płaszczyznami trójstycznemi powierzchni; one to po sześć wzięte są płaszczyznami dwóch trójścianów sprzężonych, odnoszących się do danej powierzchni.

Sześć płaszczyzn $Y_i = 0$ tworzy t. zw. sześcio ścian biegunowy (Cremona).

Dziesięć par wierzchołków przeciwległych sześcio ścianu biegunowego, (to jest np. punkty $Y_1=0$, $Y_2=0$, $Y_3=0$, oraz $Y_4=0$, $Y_5=0$, $Y_6=0$) są parami punktów, odpowiadających sobie na powierzchni Hessego (patrz § 2); stąd nazwa sześcio ścianu biegunowego, gdyż punkty, odpowiadające sobie na tej powierzchni, są takiemi, że stożek biegunowy jednego z tych punktów względem powierzchni sześciennej ma wierzchołek swój w drugim punkcie.

Wierzchołki przeciwległe sześcio ścianu biegunowego są też wierzchołkami dwóch trójścianów sprzężonych, utworzonych przez płaszczyzny trójstyczne powierzchni sześciennej.

Jest widocznem, że trzy płaszczyzny trójstyczne:

$$Y_h + Y_k = 0, \quad Y_i + Y_j = 0, \quad Y_l + Y_m = 0,$$

gdzie h, k, i, j, l, m stanowi przemianę liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, przecinają się wzdłuż tej samej prostej, należącej do powierzchni; stąd:

Piętnaście płaszczyzn trójstycznych $Y_i + Y_j = 0$ przechodzi przez piętnaście prostych na powierzchni, a przeto:

Pozostałe dwanaście prostych na powierzchni tworzy dwuszóstkę, a każdemu sześcio ścianowi biegunowemu odpowiada dwuszóstka, i odwrotnie.

Istnieje 36 sześcio ścianów biegunowych.

Godnem uwagi jest twierdzenie:

Dwa sześcio ściany biegunowe określają dwie powierzchnie rozwijalne klasy 3-ej, w nie wpisane; te dwie rozwijalne mają pięć płaszczyzn stycznych wspólnych, które tworzą pięcio ścian Sylvestera.

Co do badań dalszych nad związkami pomiędzy pięcio ścianem a sześcio ścianami patrz Beltrami (Ist. Lomb. 1879) i Meyer Apolarität etc., Tybinga 1883).

Powierzchnia sześcienna z punktem podwójnym zawiera 6 prostych, przechodzących przez punkt podwójny, i nadto 15 prostych; każdą z pierwszych sześciu prostych należy uważać za zjednoczenie dwu prostych; stąd mamy 15 płaszczyzn trójstycznych, przechodzących przez punkt podwójny, i 15 innych płaszczyzn, przechodzących przez 15 wyżej wskazanych prostych. Konfiguracya tych 15 płaszczyzn i 15 prostych jest podobna do konfiguracyj 15 prostych (i 15 płaszczyzn, przez nie utworzonych), które pozostają z 27 prostych, gdy wyłączymy 12 prostych dwuszóstki. Tą konfiguracyę, będącą w związku z sześciokątami Pascala (Rozdz. IV), zajmował się Cremona (Mem. Lincei 1876—77).

Powierzchnia sześcienna z dwoma punktami podwójnemi zawiera 1 prostą, łączącą te punkty podwójne, 8 prostych, przechodzących przez jeden punkt podwójny, i 7 innych prostych.

Powierzchnia sześcienna z trzema punktami podwójnemi zawiera trzy proste, z których każda łączy dwa z pomiędzy trzech punktów podwójnych; 6 prostych, przechodzących przez jeden punkt podwójny, i 3 inne proste.

Powierzchnia sześcienna z czterema punktami podwójnemi zawiera 6 prostych, przechodzących przez dwa z tych punktów, i 3 inne proste, nie przechodzące przez żaden z nich.

Prostemi na powierzchni sześciennej zajmowali się: Cayley i Salmon (Camb. mat. J. IV) oraz Steiner (Crelle LIII); Schläfli (Quart. Journ II), Sturm (Flächen 3-er O. Lipsk 1867, Math. Ann. XXIII), Affolter (Archiv. Grunerta LVI), którzy badali specyalnie mnogości krzywych skośnych, wreszcie Schröter (Crelle LXII) i Cremona (Ist. Lomb. 1870—71, Crelle LXVIII). Najnowszemi pracami o konfiguracyi prostych i płaszczyzn, o wielościanach, które można z nich utworzyć i t. d. są prace Bertini'ego (Ann. di mat. XII), E. Pascala (Ann di mat. XX, XXI, Ist. Lomb. 1892—93).

Schläfli stosuje następujące znakowanie dla 27 prostych. Oznaczmy przez

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6; \quad b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$$

proste jednej dwuszóstki; przyczem, jak wiemy, prosta a_i nie spotyka żadnej innej prostej a, a spotyka wszystkie proste b z wyjątkiem b_i. Oznaczmy przez c_{ij} prostą, będącą przecięciem płaszczyzn $a_i b_j$; tych prostych c_{ij} będzie 15.

Dwie proste c, mające jeden skaźnik wspólny, nie spotykają się; dwie proste c, nie mające żadnego skaźnika spólnego, spotykają się; wreszcie prosta a (albo b) spotyka prostą c, o ile skaźnik pierwszy jest jednym z dwu skaźników prostej c.

Inny sposób przedstawienia 27 prostych i będący w istocie rzeczy wynikiem poprzedzającego ją polega na tem, że te prostych jedna po jednej odpowiada prostym, łączącym po dwa z ośmiu punktów zasadniczych 1, 2, . . . 8, gdy z pomiędzy nich wyłączymy jednę prostą, np. (12). Uważamy wtedy dwie proste za należące do siebie stosownie do tego, czy razem z prostą (12) mogą lub nie mogą należeć do dwu figur zasadniczych, które nazywamy czwórkami zerowemi, a które powstają z czterech prostych takich, jak: (12), (34), (56), (78), albo z czterech prostych (12), (23), (34), (41).

Należy zaznaczyć, że konfiguracyę prostych, zachodzącą wtedy, gdy powierzchnia ma punkty podwójne, można badać, przyjmując, że w tej figurze dwa punkty zbliżają się do siebie nieograniczenie, gdyż i ta figura nabywa wtedy w pewien sposób punktów podwójnych.

Nadto dla badania konfiguracyi prostych rzeczywistych, należących do powierzchni rzeczywistej, dość przyjąć, że w tej figurze dwa, cztery i t. d. punkty są urojone sprzężone i wyprowadzić stąd potrzebne wnioski (patrz § 4).

Badanie konfiguracyi 27 prostych przy pomocy tej figury jest podobne do badania 28 stycznych podwójnych krzywej rzędu 4-go płaskiej (patrz Geiser, Math. Ann. I).

§ 4.

Klasyfikacya powierzchni sześciennych rzeczywistych ogólnych.

Powierzchnie sześcienne rzeczywiste bez punktów podwójnych można klasyfikować na podstawie rzeczywistości prostych, na nich położonych.

Mamy pięć gatunków takich powierzchni sześciennych:

a) Wszystkie proste są rzeczywiste, wtedy i płaszczyzny trójstyczne są wszystkie rzeczywiste; pięciościan jest rzeczywisty.

b) Piętnaście prostych i piętnaście płaszczyzn jest rzeczywistych; każde trzy płaszczyzny przechodzą przez jednę prostą rzeczywistą. Te to 15 prostych pozostają z liczby 27 prostych, skoro wyłączymy 12 prostych dwuszóstki.

c) Siedm prostych i pięć płaszczyzn jest rzeczywistych; te pięć płaszczyzn przechodzą wszystkie przez jednę prostą. Cztery inne proste są urojonemi i przechodzą każda przez punkt rzeczywisty.

d) Trzy proste rzeczywiste i 7 płaszczyzn rzeczywistych; trzy proste leżą na jednej płaszczyźnie; przez każdą z nich, prócz tej płaszczyzny, przechodzą jeszcze dwie płaszczyzny rzeczywiste. Dwanaście prostych jest urojonych i wszystkie one przechodzą przez punkt urojony.

e) Trzy proste rzeczywiste i 13 płaszczyzn rzeczywistych; trzy proste leżą na jednej płaszczyźnie; przez każdą z nich, prócz tej płaszczyzny, przechodzą jeszcze cztery płaszczyzny rzeczywiste. Inne 24 proste mają wszystkie punkt rzeczywisty.

Klasyfikacyę tę podał Schläfli (Quart: J. II, 55, 110, Phil. Trans. LIII, 193), który zajmował się także powierzchniami o punktach osobliwych. Tymże przedmiotem zajmowali się także Cremona i Sturm (l. c.), później Klein (Math. Ann. VI), patrz też Schläfli (Ann. di mat. V).

Pokrewnem do niniejszego badania jest badanie postaci i własności sytuacyjnych powierzchni sześciennych różnych gatunków. Zeuthen (Math. Ann. VIII, a także VII, str. 428 i nast.) badał położenie różnych powłók powierzchni sześciennych, posługując się okolicznością, że kontur powierzchni sześciennej z punktu na płaszczyznę rzuconej jest krzywą rzędu 4-go, i tworząc rodzaj rzutu stereograficznego powierzchni na płaszczyznę podwójną, t. j. na dwie płaszczyzny nałożone i zjednoczone wzdłuż konturu krzywej rzędu 4-go.

---

§ 5.

Odwzorowania płaskie powierzchni sześciennej.

Można obmyśleć rozmaite odwzorowania płaskie powierzchni sześciennej.

Wyobraźmy sobie odpowiedniość rzutową (dwujednoznaczną) pomiędzy trzema układami liniowemi gatunku 3-go płaszczyzn a układem punktów przestrzeni zwykłej, taką, że każdej płaszczyźnie jednego układu odpowiada płaszczyzna w każdym z dwu pozostałych oraz punkt przestrzeni; i odwrotnie: każdemu punktowi P przestrzeni odpowiadają trzy płaszczyzny w każdym z trzech układów. Jeżeli punkt P opisuje płaszczyznę, to płaszczyzny odpowiadające mu opiszą trzy sieci, a punkt ich spotkania opisuje powierzchnię rzędu 3-go (Grassmann, patrz § 1), której punkty będą tym sposobem odwzorowane na płaszczyźnie.

W s z y s t k i e p o w i e r z c h n i e s z e ś c i e n n e, o d p o w i a d a j ą c e t y m s p o s o b e m w s z y s t k i m p ł a s z c z y z n o m p r z e s t r z e n i, p r z e c h o d z ą p r z e z j e d n ę i t ę s a m ą k r z y w ą r z ę d u 6-go s k o ś n ą; p u n k t o m w płaszczyźnie odwzorowania odpowiadają nie punkty, lecz proste.

Sześć punktów, w których krzywa rzędu 6-go spotyka płaszczyznę odwzorowania, odpowiadają sześciu prostym $a_1, a_2, \ldots a_6$ powierzchni sześciennej; Cremona nazywa je punktami zasadniczemi odwzorowania płaskiego powierzchni S_3 i oznacza cyframi 1, 2, . . . 6.

Sześć stożkowych, które przechodzą przez pięć punktów zasadniczych, odpowiadają sześciu innym prostym $b_1, b_2 \ldots b_6$ powierzchni sześciennej, a piętnaście prostych, łączących każde dwa z sześciu punktów zasadniczych, odpowiadają pozostałym 15 prostym $(c_{r,s})$ powierzchni S_3.

Proste $b_1, \ldots, b_6$, odpowiadające sześciu stożkowym, i proste $a_1, \ldots, a_6$, odpowiadające sześciu punktom, tworzą dwuszóstkę Schläfli'ego.

Krzywej sześciennej płaskiej, położonej na powierzchni S_3, odpowiada na płaszczyźnie krzywa sześcienna, przechodząca przez sześć punktów zasadniczych.

Stożkowej, znajdującej się na płaszczyźnie, przechodzącej przez prostą a, odpowiada krzywa sześcienna, przechodząca przez sześć punktów zasadniczych, i mająca jeden z tych punktów jako podwójny.

Stożkowej, znajdującej się na płaszczyźnie, przechodzącej przez prostą b, odpowiada prosta, przechodząca przez punkt zasadniczy.

Stożkowej, znajdującej się na płaszczyźnie, przechodzącej przez prostą $c_{r,s}$, odpowiada stożkowa, przechodząca przez cztery punkty zasadnicze (z wyłączeniem punktów r i s).

Krzywej skośnej rzędu $3n$, będącej przecięciem powierzchni S_3 z powierzchnią rzędu n, odpowiada krzywa płaska, przechodząca n razy przez każdy punkt zasadniczy.

Prostej na płaszczyźnie odpowiada na powierzchni S_3 stożkowa albo krzywa sześcienna skośna, stosownie do tego, czy prosta przechodzi albo nie przechodzi przez punkt zasadniczy.

Stożkowej na płaszczyźnie odpowiada na powierzchni S_3 krzywa skośna rodzaju zero i rzędów 4, 5 i 6 odpowiednio do tego, czy stożkowa przechodzi przez 2, 1, 0 punktów zasadniczych.

To odwzorowanie podali Clebsch (Crelle LXV) i Cremona (l. c.). Inne odwzorowanie płaskie powierzchni sześciennej, o którem wspomnieliśmy w § 7 Rozdz. IX, podał Clebsch (Math. Ann. I). Patrz Cayley, Lond. math. Soc. III.

---

§ 6.

Forma sześcienna czwórkowa.

Forma sześcienna czwórkowa, wyrażona symbolicznie przez $f = a_x{}^3 = b_x{}^3 = \ldots$, ma tylko pięć niezmienników zasadniczych, będących odpowiednio stopnia 8, 16, 24, 32, 40. Dwa pierwsze są:

$$A = (abcd)^2 (ab'c'd')(a'b'c'd')(a'bcd')(a'b'c'd).$$

$$B = (abcd)^2 (a'b'c'd')^2 (a''b''c'd'')^2 (a'''b'''c''d''')^2$$
$$\times (aa'a''a''')(bb'b''b''')(cc'c''c''')(dd'd''d''').$$

Jeżeli formę sześcienną napiszemy w postaci Sylvesterowskiej

$$a_1 X_1{}^3 + a_2 X_2{}^3 + a_3 X_3{}^3 + a_4 X_4{}^3 + a_5 X_5{}^3,$$

to niezmienniki A, B przybiorą postać:

$$A = \Sigma\, a_2{}^2 a_3{}^2 a_4{}^2 a_5{}^2 - 2 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \Sigma\, a_1 a_2 a_3$$

$$B = a_1{}^2 a_2{}^3 a_3{}^3 a_4{}^3 a_5{}^3 \Sigma\, a_1\,;$$

pozostałemi zaś niezmiennikami są:

$$C = a_1{}^4 a_2{}^4 a_3{}^4 a_4{}^5 a_5{}^4 \sum a_2 a_3 a_4 a_5 ,$$

$$D = a_1{}^6 a_2{}^6 a_3{}^6 a_4{}^6 a_5{}^6 \sum a_1 a_2 ,$$

$$E = a_1{}^8 a_2{}^8 a_3{}^8 a_4{}^8 a_5{}^8 .$$

Wyrażenia symboliczne tych trzech niezmienników w przypadku ogólnym podał Clebsch (Crelle LVIII, 120).

Wyróżnik formy f wyraża się przy pomocy niezmienników w ten sposób:

$$(A^2 - 64 B)^2 - 16384 (D + 2 AC).$$

Istnieją cztery spółzmienniki liniowe dla formy sześciennej w postaci Sylvesterowskiej; są one:

$$L = a_1{}^2 a_2{}^2 a_3{}^2 a_4{}^2 a_5{}^2 \sum_1^5 a_i X_i ; \quad L' = a_1{}^3 a_2{}^3 a_2{}^3 a_4{}^3 a_5{}^3 \sum_1^5 a_3 a_2 a_4 a_5 X_i ,$$

$$L'' = a_1{}^5 a_2{}^5 a_3{}^5 a_4{}^5 a_5{}^5 \sum_1^5 a_i{}^2 X_i ; \quad L''' = a_1{}^8 a_2{}^8 a_3{}^8 a_4{}^8 a_5{}^8 \sum_1^5 a_i{}^3 X \cdot$$

Cztery płaszczyzny, które przedstawiają te spółzmienniki przyrównane do zera, spotykają się w jednym punkcie, gdy wyróżnik ilości a jest zerem.

Spółzmiennik rzędu czwartego przedstawia powierzchnię Hessego powierzchni sześciennej i, jak wiemy, dla postaci Sylvesterowskiej ma wyrażenie:

$$H = \sum a_2 a_3 a_4 a_5 X_2 X_3 X_4 X_5 .$$

Badanie form niezmienniczych formy czwórkowej sześciennej rozpoczęli prawie jednocześnie Clebsch (Crelle LVIII) i Salmon (Phil. Trans. 1860). Szczegóły znaleść można u Salmona-Fiedlera (l. c. § 317 i nast.). Clebsch wyraził także pięć niezmienników przez spółczynniki formy Hessego, Salmon zaś znalazł równanie powierzchni spółzmiennej, przecinającej powierzchnię sześcienną według 27 prostych.

ROZDZIAŁ XII.

POWIERZCHNIE RZĘDU CZWARTEGO.

§ 1.

Wiadomości ogólne. Powierzchnie o punktach podwójnych i o liniach podwójnych.

Powierzchnia ogólna rzędu 4-go jest klasy 36-ej; rząd stożka, opisanego na niej i mającego wierzchołek w dowolnym punkcie przestrzeni, jest 12; tworzących zwrotu takiego stożka jest 26, tworzących podwójnych jest 12.

Rząd krzywej parabolicznej wynosi 12 Równanie ogólne powierzchni rzędu 4-go ogólnej zależy od 34 spółczynników niejednorodnych.

Powierzchnia rzędu 4-go może mieć najwyżej 16 punktów podwójnych.

Powierzchnia rzędu 4-go, która nie jest prostoliniową, może posiadać prostą podwójną, stożkową podwójną, stożkową ostrzową (patrz Rozdz. IX, § 4) i trzy proste podwójne, które spotykają się w jednym punkcie i nie są położone na jednej płaszczyźnie.

Powierzchnia rzędu 4-go, mająca za linię podwójną linię skośną (nie będącą zbiorem trzech prostych, nie położonych na jednej płaszczyźnie i zbiegających się w jednym punkcie), jest zawsze powierzchnią prostoliniową.

Najwyższą osobliwością, jaką mieć może powierzchnia rzędu 4-go, jest prosta potrójna; powierzchnia jest wtedy koniecznie prostoliniową.

Jeżeli powierzchnia ma 16 punktów podwójnych, wtedy stożek, na niej opisany i mający wierzchołek w jednym z tych punktów, jest rzędu 6-go i rozpada się na 6 płaszczyzn.

Teorya powierzchni rzędu 4-go ogólnych nie jest dotąd tak zgłębiona, jak teorya powierzchni sześciennych. Badano najwięcej powierzchnie szczególne rzędu 4-go, mające punkty i linie podwójne, i badano także powierzchnie prosto-liniowe rzędu 4-go.

Najbardziej godnemi uwagi ze zbadanych dotąd powierzchni rzędu 4-go są następujące: powierzchnia Kummera, zawierająca 16 punktów podwójnych, tworzących ciekawą konfiguracyę; inne powierzchnie (zwane także powierzchniami Kummera), które mają nieskończenie wiele stożkowych; pomiędzy niemi wyróżniają się: powierzchnia rzędu 4-go o stożkowej podwójnej i powierzchnia rzymska Steinera; wreszcie powierzchnie prostoliniowe, których klasyfikacyę zupełną podali Cremona i Cayley. O tych powierzchniach mówić będziemy osobno w następnych paragrafach.

Tu podajemy tablicę liczb charakterystycznych, odnoszących się do powierzchni ogólnej rzędu 4-go, do powierzchni ze stożkowemi podwójnemi i ostrzowemi, oraz do powierzchni z 12 punktami podwójnemi lub węzłami (patrz Salmon-Fiedler l. c. § 512—516).

	Powierzchnie ogólne rzędu 4-go	Powierzchnie z 12 węzłami	Powierzchnie ze stożkową podwójną	Powierzchnie ze stożkową ostrzową
$a = a'$	12	12	8	6
δ	12	24	4	0
$\varkappa$	24	24	12	8
n	36	12	12	6
$\varkappa'$	24	24	12	8
b'	480	24	26	0
k'	102400	196	320	0
t'	3200	0	40	0
ρ'	320	32	36	0
c'	96	24	24	8
h'	4016	200	180	24
r'	128	56	36	8
σ'	32	32	16	8
β	320	32	52	0

§ 2.

Powierzchnie rzędu czwartego o punktach podwójnych.

Istnienie punktu podwójnego na powierzchni rzędu 4-go równoważy się z czterema pojedyńczemi warunkami, skąd zdawać by się mogło, że ponieważ taka powierzchnia zależy od 34 spółczynników, to może najwyżej mieć ośm punktów podwójnych dowolnie wybranych. Lecz przekonano się, że to nie jest możliwem, i że jeżeli powierzchnia rzędu 4-go nie zniekształcona ma ośm punktów podwójnych, to muszą one tworzyć konfiguracyę specyalną a tylko siedm z nich jest dowolnych (Cayley, Lond. math. Soc. III).

Pomiędzy powierzchniami rzędu 4-go o punktach podwójnych szczególnie ważną jest, jak już powiedziano wyżej, powierzchnia o 16 punktach podwójnych; Cayley (l. c.) badał tę powierzchnię i zarazem inne, mające mniejszą liczbę punktów podwójnych; Kummer zaś rozważał powierzchnie, mające 11, 12, 13, 14, 15 punktów podwójnych (Berl. Abh. 1866) z okoliczności badania układów promieni lub kongruencyi rzędu 2-go (patrz rozdz XIV).

Dla otrzymania równania powierzchni rzędu 4-go, mającej cztery punkty podwójne, przesuńmy przez te punkty sześć kwadryk $X_1=0, \ldots X_6=0$: funkcya jednorodna stopnia 2-go ilości X, przyrównana do zera, przedstawiać będzie powierzchnię żądanego gatunku. Równanie to zawierać będzie 18 stałych niezależnych.

Jeżeli danych punktów jest pięć, wtedy przesuwamy przez nie pięć kwadryk $X_i=0$ i forma stopnia 2-go ilości X, przyrównana do zera, przedstawiać będzie powierzchnię rzędu 4-go z pięcioma punktami podwójnemi; zawiera ona stałych 14.

Jeżeli mamy sześć punktów danych, to powierzchnię rzędu 4-go ogólną mającą te punkty, jako podwójne, przedstawia równanie:

$$(X_1, X_2, X_3, X_4)^2 + \lambda J(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0,$$

w którem $X_i = 0$ są równania czterech kwadryk, przechodzących przez sześć punktów danych; (X_1, X_2, X_3, X_4) jest formą stopnia 2-go ilości X, zaś J przedstawia powierzchnię Jacobi'ego układu czterech kwadryk.

Pomiędzy powierzchniami z sześcioma punktami podwójnemi zasługuje na uwagę powierzchnia, której równaniem jest

$$J(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0.$$

t. j. powierzchnia Jacobi'ego układu czterech kwadryk. Nazywa się ona powierzchnią Weddlego, bo ten autor pierwszy ją badał (Cambridge J. V, 1850), a jest ona miejscem wierzchołków stożków rzędu 2-go, przechodzących przez sześć punktów w przestrzeni.

Powierzchnia Weddlego zawiera 25 prostych, a mianowicie 15 prostych, łączących każde dwa z sześciu punktów, oraz 10 prostych, stanowiących przecięcia każdej z płaszczyzn, przechodzących przez trzy punkty z płaszczyzną, przechodzącą przez trzy pozostałe.

Stożek styczny, mający wierzchołek w punkcie podwójnym, przecina powierzchnię według pięciu prostych, łączących ten punkt z pięcioma pozostałemi punktami podwójnemi i według krzywej sześciennej skośnej, wyznaczonej przez sześć punktów przestrzeni.

Powierzchnię Weddlego badali też: Cayley (Comptes rendus LII, 1861), Hierholzer (Math. Ann. II, IV), Hunyady (Crelle XCII), Caspary (Compt. rend. 1891) i t. d.

Powierzchnia Weddlego jest powierzchnią taką, że spółrzędne jej punktów dają się wyrazić jako funkcye hypereliptyczne dwu parametrów.

Cayley badał inne powierzchnie analogiczne pod względem definicyi, ale nie będące już rzędu 4-go.

Dla otrzymania równania najogólniejszego powierzchni rzędu 4-go z siedmioma punktami podwójnemi, przesuwamy przez te punkty trzy kwadryki $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, dalej powierzchnię rzędu 3-go $Y = 0$, dla której cztery z tych punktów są podwójnemi, wreszcie płaszczyznę $Z = 0$ przez trzy inne punkty.

Równanie

$$(X_1, X_2, X_3)^2 + \lambda YZ = 0,$$

zawierające sześć stałych, jst równaniem szukanej powierzchni.

Dla otrzymania równania powierzchni rzędu 4-go, mającej ośm punktów podwójnych (nie dowolnych) można postąpić w sposób następujący: Weźmy trzy powierzchnie rzędu 2-go:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0,$$

przecinające się w ośmiu punktach, i utwórzmy funkcyę kwadratową jednorodną ilości X, którą przyrównajmy do zera. Otrzymamy tym sposobem równanie powierzchni rzędu 4-go z 8-ma punktami podwójnemi, leżącemi na trzech kwadrykach. Nie jest to wszakże typ ogólny powierzchni rzędu 4-go z 8-ma punktami podwójnemi; według Cayleya istnieje jeszcze typ inny.

Pierwsze badanie nad takiemi powierzchniami podjął Cayley (Quart. J. X, 34, XI, 111; Papers VII, 304, VIII, 25).

Można znaleść równania powierzchni czwartego rzędu z 9 lub 10 punktami podwójnemi, z których 7 jest dowolnych. Ważnem jest twierdzenie następujące:

Powierzchnia rzędu 4-go nie może mieć więcej niż 10 punktów podwójnych, jeżeli 7 z nich obrano dowolnie.

Powierzchnia rzędu 4-go z dziesięcioma punktami podwójnemi jest tak zwaną symetroidą; równaniem jej jest:

$$\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{12}, & f_{22}, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{13}, & f_{23}, & f_{33}, & f_{34} \\ f_{14}, & f_{24}, & f_{34}, & f_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie $f_{11}, f_{12} \ldots f_{44}$ ($f_{ij}=f_{ij}$) są dziesięcioma funkcyami liniowemi ilości zmiennych.

Minory rzędu 3-go tego wyznacznika symetrycznego, przyrównane do zera, wyrażają powierzchnie sześcienne, które mają wspólnych dziesięć punktów, będących punktami podwójnemi symetroidy.

Stożek z wierzchołkiem, znajdującym się w punkcie podwójnym, i opisany na symetroidzie, rozpada się na dwa stożki rzędu 3-go, przecinające się według dziewięciu prostych, które łączą każdy punkt podwójny z pozostałemi dziewięcioma.

Jeżeli jeden z 10 punktów podwójnych powierzchni rzędu 4-go ma własność, wskazaną w twierdzeniu poprzedzającem, to i wszystkie inne punkty podwójne mają tęż samą własność.

Prócz symetroidy istnieje inna powierzchnia rzędu 4-go z 10 punktami podwójnemi, mająca tę własność, że stożek rzędu 6-go z wierzchołkiem w jednym z tych punktów i opisany na powierzchni, nie rozpada się na dwa stożki rzędu 3-go.

Powierzchnia Hessego, należąca do powierzchni sześciennej, jest symetroidą; istotnie funkcye f w powyższem równaniu są pochodnemi strony pierwszej równania powierzchni sześciennej.

Jeżeli $f_{11}=0$, symetroida ma jeszcze 11-y punkt podwójny: jeżeli prócz tego $f_{22}=0$, wtedy ma punkt 12-y; jeżeli nadto $f_{33}=0$, wtedy ma 13-y, jeżeli wreszcie i $f_{44}=0$, wtedy ma 14-y.

Ustanowiono klasyfikacyę powierzchni rzędu 4-go z 11, 12, 13, 14 i 15 punktami podwójnemi na podstawie rozważania stożków, opisanych na nich i mających wierzchołki w jednym z punktów podwójnych; rozróżniamy mianowicie rozmaite gatunki powierzchni według tego, czy też stożki rzędu 6-go rozpadają się w ten lub inny sposób na stożki rzędu niższego. Badanie to prowadzili Kummer, Cayley (l. c.), Rohn (w rozprawie, uwieńczonej przez Akademię saską w r. 1886, patrz też Math. Ann. XXIX, 1887). Cayley i inni autorowie angielscy wprowadzili tu, jak to zwykli czynić, liczne i złożone nazwy na niektóre z wyżej wymienionych powierzchni, a zwłaszcza na powierzchnie o 8, 9, 10 punktach podwójnych, lecz mniemamy, że nazwy te raczej rzecz komplikują, niż upraszczają.

Niektóre z powierzchni o 11, 12,.....15 punktach podwójnych są zarazem powierzchniami ogniskowemi kongruencyi kwadratowej (patrz Rozdz. XIV).

---

§ 3.

Powierzchnia Kummera.

Powiedzieliśmy już, że powierzchnia Kummera jest powierzchnią rzędu 4-go, mającą punkty podwójne, odosobnione.

Jest ona klasy 4-ej; jej równanie ogólne zawiera 18 stałych niezależnych.

Stożek rzędu 6-go, styczny do powierzchni i mający wierzchołek w punkcie podwójnym rozpada się na 6 płaszczyzn

Każda z tych sześciu płaszczyzn dotyka powierzchni wzdłuż stożkowej, na której leżą pozostałe punkty podwójne w liczbie 3.

Takich płaszczyzn osobliwych jest 16; jest przeto 16 punktów osobliwych, mających tę ważną włsnosść, że każda płaszczyzna przechodzi przez sześć punktów, położonych na jednej stożkowej, a przez każdy punkt przechodzi sześć płaszczyzn.

Powierzchnia Kummera występuje głównie w Geometryi linii prostej; można ją określić jako powierzchnię ogniskową kongruencyi 2-go rzędu i 2-ej klasy (Kummer, Berl. Abh. 1886) albo jako powierzchnię osobliwości kompleksu kwadratowego ogólnego, albo wreszcie jako powierzchnię osobliwości nieskończenie wielu kompleksów kwadratowych spółogniskowych (Klein, Math. Ann. II, patrz niżej Rozdz. XIV).

Ważną własność tej powierzchni stanowi to, że jest ona wzajemną do samej siebie w sześciu biegunowościach.

Równanie powierzchni tej podali w różnych postaciach Kummer, Cayley i inni.

Niechaj $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=0$, $X_4=0$ będą równaniami czterech płaszczyzn osobliwych takich, że ich cztery punkty spotkania są razem punktami węzłowemi powierzchni, wtedy równanie jej można przedstawić w postaci:

$$\Phi^2 = 16\,k\,X_1 X_2 X_3 X_4\,,$$

gdzie k jest stałą, Φ zaś jest formą kwadratową ilości X, a mianowicie:

$$\begin{aligned}\Phi &= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + 2a\,(X_2 X_3 + X_1 X_4)\\ &\quad + 2b\,(X_3 X_1 + X_2 X_4) + 2c\,(X_1 X_2 + X_3 X_4);\\ k &= a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1. \qquad \text{(Kummer)}\end{aligned}$$

F o r m ą niewymierną równania tejże powierzchni jest następująca (Cayley, Crelle, LXX II, 292; Papers VII, 126):

$$\sqrt{\alpha x_1\left(\gamma'\gamma'' x_2 - \beta'\beta'' x_3 - \frac{x_4}{\alpha}\right)} + \sqrt{\beta x_2\left(\alpha'\alpha'' x_3 - \gamma'\gamma'' x_1 - \frac{x_4}{\beta}\right)}$$

$$+\sqrt{\gamma x_3\left(\beta'\beta'' x_1 - \alpha'\alpha'' x_2 - \frac{x_4}{\gamma}\right)} = 0,$$

przy warunkach:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha' + \beta' + \gamma' = 0, \quad \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 0.$$

Inne postaci otrzymujemy, przemieniając kołowo układ α, β, γ z układem $\alpha', \beta,, \gamma'$ lub z układem $\alpha'', \beta'', \gamma''$.

Równanie poprzedzające, po sprowadzeniu go do postaci wymiernej przedstawia się tak:

$$x_4{}^2 (x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2x_1x_2)$$
$$+2x_4\left[\alpha\alpha'\alpha''(x_2{}^2x_3 - x_3{}^2x_2) + \beta\beta'\beta''(x_3{}^2x_1 - x_1{}^2x_3) + \gamma\gamma'\gamma''(x_1{}^2x_2 - x_2{}^2x_1) + \theta x_1x_2x_3\right]$$
$$+(\alpha\alpha'\alpha'' x\, x_3 + \beta\beta'\beta'' x_3x_1 + \gamma\gamma'\gamma'' x_1x_2)^2 = 0,$$

gdzie:

$$\theta = (\beta - \gamma)\alpha'\alpha'' + (\gamma - \alpha)\beta'\beta'' + (\alpha - \beta)\gamma'\gamma''.$$

Wyrażenie θ nie zmienia wartości przy powyżej wspomnianych przemianach kołowych.

Równania 16 płaszczyzn osobliwych są:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

$$\frac{x_1}{\alpha} + \frac{x_2}{\beta} + \frac{x_3}{\gamma} = 0; \quad \frac{x_1}{\alpha'} + \frac{x_2}{\beta'} + \frac{x_3}{\gamma'} = 0; \quad \frac{x_1}{\alpha''} + \frac{x_2}{\beta''} + \frac{x_3}{\gamma''} = 0;$$

$$\gamma'\gamma'' x_2 - \beta'\beta'' x_3 - \frac{x_4}{\alpha} = 0; \quad \gamma''\gamma x_2 - \beta''\beta x_3 - \frac{x_4}{\alpha'} = 0;$$

$$\gamma\gamma' x_2 - \beta\beta' x_3 - \frac{x_4}{\alpha''} = 0;$$

$$\alpha'\alpha''x_3 - \gamma'\gamma''x_1 - \frac{x_4}{\beta} = 0; \quad \alpha''\alpha x_3 - \gamma''\gamma x_1 - \frac{x_4}{\beta'} = 0;$$

$$\alpha\alpha' x_3 - \gamma\gamma' x_1 - \frac{x_4}{\beta''} = 0;$$

$$\beta'\beta'' x_1 - \alpha'\alpha'' x_2 - \frac{x_4}{\gamma} = 0; \quad \beta''\beta x_1 - \alpha''\alpha x_2 - \frac{x_4}{\gamma'} = 0;$$

$$\beta\beta' x_1 - \alpha\alpha' x_2 - \frac{x_4}{\gamma''} = 0;$$

Inna postać równania powierzchni Kummera jest następująca (Rohn, l. c. i Math. Ann. XVIII):

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + Ax_1x_2x_3x_4 - 2A_{3456}(x_1^2x_2^2 + x_3^2x_4^2)$$
$$- 2A_{5612}(x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2) - 2A_{1234}(x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2) = 0,$$

gdzie:

$$A = \frac{8}{(k_1-k_2)(k_3-k_4)(k_5-k_6)}\Big[k_1k_2(k_3+k_4-k_5-k_6)+k_3k_4(k_5+k_6-k_1-k_2)$$
$$+ k_5k_6(k_1+k_2-k_3-k_4)\Big],$$

$$A_{ijhl} = \frac{(k_i-k_h)(k_j-k_l) + (k_i-k_l)(k_j-k_h)}{(k_i-k_j)(k_h-k_l)}.$$

Spółczynniki tego równania zależą, jak widzimy, od 6 ilości k, które można rozumieć jako pierwiastki formy szóstego rzędu dwójkowej,Tu właśnie ujawnia już się możliwość związku pomiędzy powierzchnią Kummera a formami rzędu 6-go dwójkowemi; znajdujemy mianowicie, że powierzchnia ta jest w związku specyalnym z funkcyami hypereliptycznemi rodzaju 2, należącemi do formy rzędu szóstego dwójkowej.

Klein (Math. Ann. V) spostrzegł pierwszy możliwość wyrażenia spółrzędnych punktu powierzchni Kummera przez cztery specyalne funkcye hypereliptyczne o dwóch argumentach; później ukazały się prace Cayley'a (Crelle LXXXIII), Borchardta (tamże), Webera (Crelle LXXXIV), Rohna

(Math. Ann. XX, XIIII), Reichardta (Nova Acta der Leop. Carol. Ak. Halle, 1887) i t. d.

Oto niektóre wskazówki co do tego. Istnieje jak wiadomo, 16 funkcyj ϑ rodzaju 2 (patrz „Repertoryum“ t. I, Rozdz. XVIII, § 3), każdej z nich odpowiada charakterystyka; z charakterystyk 10 jest parzystych i 6 nieparzystych. W ugrupowaniu charakterystyk wyróżniamy t. zw. czwórki Göpela (Crelle XXXV) i czwórki Rosenhaina (Mem. des sav. étr. XI, Paryż 1846). Czwórka Göpela (jest czwórek takich 60) jest zbiorem czterech charakterystyk wszystkich parzystych, albo dwóch parzystych i dwóch nieparzystych, których suma jest zerem; czwórka Rosenhaina (takich czwórek jest 80) jest zbiorem czterech charakterystyk, których suma jest też zerem, a pomiędzy któremi jest jedna nieparzysta i trzy parzyste, albo trzy nieparzyste i jedna parzysta. Mamy tedy twierdzenie: Pomiędzy kwadratami czterech funkcyj ϑ, odpowiadających charakterystykom czwórki Goepela albo Rosenhaina zachodzi zawsze związek wymierny jednorodny stopnia 4-go; jeżeli te funkcye ϑ^2 przyjmiemy za spółrzędne jednorodne punktu przestrzeni, wtedy związek ten przedstawia powierzchnię Kummera. W przypadku czwórki Goepela płaszczyzny czworościanu zasadniczego spółrzędnych są czterema płaszczyznami osobliwemi powierzchni, lecz żaden z wierzchołków tego czworościanu nie jest węzłem powierzchni; w przypadku zaś czwórki Rosenhaina cztery płaszczyzny czworościanu spółrzędnych są czterema płaszczyznami osobliwemi, a cztery wierzchołki są czterema punktami osobliwemi. W tem przedstawieniu inne funkcye ϑ^2 odpowiadają każda innym płaszczyznom osobliwym.

Można jeszcze, wychodząc z innego punktu widzenia, otrzymać równanie powierzchni Kummera. Dowodzi się, że jeżeli za spółrzędne jednorodne punktu przestrzeni przyjmiemy cztery funkcye hypereliptyczne, nazwane przez Kleina funkcyami Σ, wtedy można znaleść równanie powierzchni takie, że spółczynniki są niezmiennikami wymiernemi funkcyi rzędu szóstego dwójkowej, która w sposób wyżej wskazany odpowiada powierzchni Kummera; równanie takie nazywamy zwykle równaniem wymiernem powierzchni. Więcej szczegółów znaleść można u E. Pascala (Ann. di matem. XXIII, XIX).

Istnieje wiele badań nad konfiguracyą 16 punktów i płaszczyzn osobliwych powierzchni Kummera; wymieniamy pracę Caporali'ego (Lincei 1868); Schrötera (Crelle, C) i De Paolisa (Lincei 1890).

Szesnaście punktów zasadniczych, połączonych po dwa, lub 16 płaszczyzn, przecinających się po dwie, tworzą 120 prostych, które Caporali nazywa prostemi R.

Szesnaście punktów zasadniczych, branych po trzy, dają 240 płaszczyzn niezasadniczych (płaszczyzn Π) a szesnaście płaszczyzn zasadniczych, branych po trzy, dają 240 punktów niezasadniczych (punktów P).

Płaszczyzny Π przechodzą po sześć przez proste R, punkty P leżą na tych prostych szóstkami. Odwrotnie, proste R przechodzą po trzy przez punkt P i leżą trójkami na płaszczyznach Π.

Punkty P leżą po 45 na płaszczyznach zasadniczych, a płaszczyzny Π przechodzą po 45 przez punkty zasadnicze.

Jest 80 czworościanów, których wierzchołkami są punkty zasadnicze; odpowiadają one 80 czwórkom charakterystyk Rosenhaina).

Jest 50 czworościanów, których ścianami są płaszczyzny zasadnicze, a wierzchołkami punkty P (odpowiadają one 40 czwórkom Göpela).

Tej ostatniej własności odpowiada oczywiście własność dwoista.

240 punktów P i płaszczyzn Π składają 15 nowych konfiguracyj Kummera.

Jeżeli przetniemy płaszczyzną powierzchnię Kummera, to w przekroju możemy otrzymać krzywą płaską rzędu 4-go ogólną; mianowicie:

Przez każdą krzywą płaską rzędu 4-go ogólną przechodzi ∞^4 powierzchni Kummera.

Płaszczyzna sieczna przecina szesnaście płaszczyzn osobliwych według 16 prostych dwustycznych do krzywej; te 16 dwustycznych są właśnie temi, które pozostają z 28, gdy wyłączymy 12 dwustycznych niewspólnych dwom układom A r o n h o l d a, mającym jednę prostą wspólną. Innemi słowy: te 16 dwustycznych tworzą konfiguracyę, podobną do konfiguracyi 16 dwustycznych krzywej płaskiej rzędu 4-go z punktem podwójnym, jeżeli wyłączymy sześć stycznych, wychodzących z punktu podwójnego (patrz Rozdz. VIII, str. 280).

Cztery dwustyczne, powstające przy przecięciu czworościanu G ö p e l a (patrz wyżej), są czterema dwustycznemi, przez których ośm punktów styczności przechodzi stożkowa.

Na tych związkach pomiędzy dwustycznemi krzywej rzędu 4-go a punktami i płaszczyznami powierzchni Kummera opierają się niektóre najnowsze prace C i a n i'ego (Ann. di mat. (3), II, Rend. Ist. Lomb. 1878).

Można ustanowić znakowanie dla 16 płaszczyzn i punktów osobliwych powierzchni Kummera; jednę z płaszczyzn oznaczamy symbolem 0, sześć punktów na niej leżących symbolami 1, 2, 3, 4, 5, 6; wtedy pozostałe 15 płaszczyzn można przedstawić przy pomocy symboli dwójkowych 12, 13, 14, ... 56, a 10 punktów zasadniczych przy pomocy symboli trójkowych $\binom{123}{456}$, $\binom{124}{356}$, ... Przez punkt $\binom{123}{456}$ przechodzi sześć płaszczyzn 12, 23, 31, 45, 56, 64 i t. d.; przez punkt (1) sześć płaszczyzn 0, (12), (13), (14), (15), (16).

Inne znakowanie dla 16 płaszczyzn osobliwych polega na omówionej wyżej odpowiedniości pomiędzy niemi a charakterystykami rodzaju 2. Oznaczmy w tym celu każdą płaszczyznę symbolem $(abcd)$ *), gdzie a, b, c, d nie mogą przyjmować wartości odmiennych od 0 i 1. Wtedy 16 płaszczyzn można przedstawić symbolicznie w ten sposób:

*) Piszemy $(abcd)$ dla prostoty zamiast $\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}$.

$$(0000),\ (1000),\ (0100),\ (1100),$$
$$(0010),\ (1010),\ (0110),\ (1110),$$
$$(0001),\ (1001),\ (0101),\ (1101),$$
$$(0011),\ (1011),\ (0111),\ (1111).$$

Płaszczyznami, spotykającemi się w jednym punkcie, są trzy płaszczyzny, które w tej tablicy znajduje się na tej samej linii poziomej z elementem i trzy płaszczyzny w linii pionowej z tymże elementem; tak że sześcioma płaszczyznami, schodzącemi się w jednym punkcie, są płaszczyzny, oznaczone symbolami:

$$(a, b, c, d+1),\ (a, b, c+1, d),\ (a, b, c+1, d+1),$$
$$(a+1, b, c, d),\ (a, b+1, c, d),\ (a+1, b+1, c, d).$$

Podstawień grupy pozostawiających bez zmiany konfiguracyę jest 6! 16.

Równanie stopnia 16-go, od którego zależy wyznaczenie 16 płaszczyzn albo punktów osobliwych Kummera, staje się równaniem abelowem po rozwiązaniu równania stopnia 6-go, t. j. po rozwiązaniu tego ostatniego równania pierwsze rozwiązuje się przy pomocy czterech równań stopnia 2-go (Jordan, Crelle LXX, także Traaté des substitutions 1870).

Linie asymptotyczne (Hauptangentencurven), t. j. linie, których płaszczyzna ściśle styczna zlewa się z płaszczyzną styczną do powierzchni (patrz niżej Rozdz. XX), albo których styczne są prostemi ściśle stycznemi do powierzchni, — są na powierzchni Kummera w ogóle krzywemi 16-go rzędu i 16-ej klasy; mają 16 ostrzy w 16 punktach osobliwych powierzchni, 16 płaszczyzn statecznych, które są płaszczyznami osobliwemi powierzchni i 96 stycznych statecznych (patrz Rozdz. IX, § 4). Ich porządek (rang) wynosi 48, liczba punktów podwójnych pozornych 72, rząd krzywej podwójnej powierzchni rozwijalnej 952, rodzaj wynosi 17.

Jest sześć specyalnych linij asymptotycznych, których rząd i klasa redukuje się do połowy, t. j. każdą z nich należy liczyć dwa razy. Nie mają one ani ostrzy i płaszczyzn statecznych, mają zaś 40 stycznych statecznych. Ich porządek (rang) jest 24, liczba punktów podwójnych pozornych 12, rząd krzywej podwójnej powierzchni rozwijalnej 200, rodzaj 5.

Przez linie asymptotyczne powierzchni Kummera przechodzi pęk powierzchni rzędu 4-go (Reye).

Krzywa paraboliczna powierzchni Kummera jest krzywą rzędu 32-go, rozpadającą się na 16 stożkowych, które są stożkowemi, położonemi na 16 płaszczyznach osobliwych.

Liniami asymptotycznemi powierzchni Kummera zajmowali się specyalnie: Klein i Lie (Math. Ann. XXIII), Reye (Crelle IIC), Segre (tamże, IIC).

Klasyfikacyą powierzchni Kummera z punktu widzenia rzeczywistości, punktów i płaszczyzn osobliwych zajmuje się Rohn (Math. Ann. XVIII); Weiler (Math. Ann. VI) rozpatruje klasyfikacyę, opartą na specyalizacyi powierzchni przy przyjęciu że niektóre z 16 punktów osobliwych zlewają się. Obie klasyfikacye wychodzą z rozważania wartości $k_1, k_2, \ldots k_6$ sześciu pierwiastków formy rzędu 6-go, która, jak to wyżej powiedziano, pozostaje w związku z równaniem powierzchni Kummera. Jeżeli przyjmiemy, że te 6 wartości specyalizujemy co do ich rzeczywistości i co do ich wielkości, otrzymamy wszystkie przypadki możliwe.

Niektóre z wyników Rohna są następujące:

I. Wszystkie ilości k są rzeczywistemi.

I a) Powierzchnia Kummera ma 16 punktów osobliwych rzeczywistych.

I b) Powierzchnia jest rzeczywista, lecz ma wszystkie punkty i płaszczyzny osobliwe urojone. Jeżeli weźmiemy na płaszczyźnie stycznej do powierzchni krzywą rzędu 4-go przecięcia, to sześć stycznych, poprowadzonych do tej krzywej z punktu podwójnego, są wszystkie rzeczywistemi.

I c) Powierzchnia jest urojona i ma wszystkie punkty i płaszczyzny osobliwe urojone.

II. Dwie z pomiędzy ilości y są urojonemi sprzężonemi, pozostałe są rzeczywistemi.

II a) Powierzchnia ma 8 punktów osobliwych rzeczywistych i tyleż płaszczyzn osobliwych rzeczywistych.

II b) Powierzchnia jest rzeczywista, lecz wszystkie punkty i płaszczyzny osobliwe są urojone. Nie jest wszakże tą samą, co w przypadku Ib), gdyż są jej sześciu stycznych, określonych, jak w przypadku Ib), są cztery rzeczywiste i dwie urojone.

III. Dwie pary ilości k są urojone sprzężone, a dwie inne pary są rzeczywiste

Powierzchnia ma cztery punkty osobliwe rzeczywiste i cztery płaszczyzny osobliwe rzeczywiste; każda płaszczyzna przechodzi przez dwa punkty rzeczywiste, mianowicie dwie płaszczyzny przechodzą przez te same dwa punkty, a dwie pozostałe przez inne dwa punkty.

IV. Trzy pary ilości k są urojonemi sprzężonemi.

IV a) Powierzchnia jest rzeczywista, ma cztery punkty i cztery płaszczyzny osobliwe rzeczywiste. Różni się wszakże od powierzchni w przypadku III, gdyż żadna z płaszczyzn rzeczywistych nie przechodzi przez punkt rzeczywisty.

IV b) powierzchnia jest urojona, lecz posiada cztery punkty i cztery płaszczyzny osobliwe rzeczywiste.

Modele gipsowe powierzchni Kummera znajdują się w kolekcyi L. Brilla w Darmstadzie, obecnie Schillinga w Halli.

---

§ 4.

Tetraedroida Cayley'a i powierzchnia falowa.

Przypadkiem szczególnym powierzchni Kummera jest powierzchnia, zwana tetraedroidą albo powierzchnią

Cayley'a. której przypadkiem specyalnym jest znów powierzchnia falowa Fresnela.

Tetraedroida jest powierzchnią Kummera, której szesnaście płaszczyzn osobliwych mają tę własność, iż dzielą się na grupy po cztery płaszczyzny w ten sposób, że płaszczyzny jednej grupy przechodzą przez ten sam punkt; tetraedroida ma tedy cztery wierzchołki i stąd jej nazwa.

Powierzchnia ta jest przekształceniem homograficznem powierzchni falowej, o której mówimy niżej; ta ostatnia jest tetraedroidą, metrycznie wyspecyalizowaną.

Równaniem powierzchni tetraedroidy, odniesionej do czworościanu zasadniczego, jest:

$$\begin{vmatrix} 0, & x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & x_4^2 \\ x_1^2, & 0, & a_{12}^2, & a_{13}^2, & a_{14}^2 \\ x_2^2, & a_{12}^2, & 0, & a_{23}^2, & a_{24}^2 \\ x_3^2, & a_{13}^2, & a_{23}^2, & 0, & a_{34}^2 \\ a_4^2, & a_{14}^2, & a_{23}^2, & a_{34}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Równania 16 płaszczyzn osobliwych są:

$$\begin{array}{rr}
a_{34}x_2 - a_{24}x_3 + a_{23}x_4 = 0; & a_{23}x_1 - a_{13}x_2 - a_{12}x_3 = 0; \\
-a_{24}x_1 - a_{14}x_2 + a_{12}x_4 = 0; & a_{34}a_1 + a_{14}x_3 + a_{13}x_4 = 0; \\
-a_{34}x_1 + a_{14}x_3 + a_{13}x_4 = 0; & a_{24}x_1 + a_{14}x_2 + a_{12}x_4 = 0; \\
-a_{23}x_1 + a_{13}x_2 - a_{12}x_3 = 0; & -a_{34}x_2 - a_{24}x_3 + a_{23}x_4 = 0; \\
a_{24}x_1 - a_{14}x_2 + a_{12}x_4 = 0; & -a_{34}x_1 - a_{14}x_3 + a_{13}x_4 = 0; \\
a_{34}x_2 + a_{24}x_3 + a_{23}x_4 = 0; & -a_{23}x_1 - a_{13}x_2 + a_{12}x_3 = 0; \\
-a_{23}x_1 - a_{13}x_2 - a_{12}x_3 = 0; & a_{34}x_2 - a_{24}x_3 - a_{23}x_4 = 0; \\
-a_{34}x_1 + a_{14}x_3 - a_{13}x_4 = 0; & a_{24}x_1 - a_{14}x_2 - a_{12}x_4 = 0.
\end{array}$$

Równanie uważanej powierzchni otrzymujemy z równania ogólnego powierzchni

Kummera, podanego przez Cayley'a (patrz § 3), jeżeli położymy:

$$\frac{\gamma}{\beta}=\frac{a_{24}}{a_{34}},\quad \frac{\alpha'}{\gamma'}=\frac{a_{34}}{a_{14}},\quad \frac{\beta''}{\alpha''}=\frac{a_{14}}{a_{24}},$$

$$\alpha\alpha'\alpha''=-\frac{a_{23}}{a_{14}},\quad \beta\beta'\beta''=-\frac{a_{13}}{a_{24}},\quad \gamma\gamma'\gamma''=-\frac{a_{12}}{a_{34}},$$

skąd

$$\alpha'\beta''\gamma=\alpha''\beta\gamma'.$$

Każda z czterech ścian czworościanu zasadniczego przecina tetraedroidę według pary stożkowych; względem każdej z nich trójkąt, znajdujący się na odpowiedniej ścianie czworościanu, jest trójkątem samosprzężonym (patrz Rozdz. IV, § 2).

Mamy tym sposobem cztery pary stożkowych na czterech ścianach czworościanu; 16 punktów spotkania tych czterech par stożkowych są 16 punktami osobliwemi powierzchni: punkty osobliwe leżą zatem czwórkami na czterech ścianach czworościanu zasadniczego. Ta własność wypływa z własności powierzchni Kummera, na mocy której jest ona wzajemna sama ze sobą (§ 3).

Cztery punkty osobliwe na każdej ścianie czworościanu leżą dwójkami na sześciu prostych, które przechodzą po dwie przez trzy wierzchołki trójkąta, stanowiącego ścianę czworościanu.

W przypadku tetraedroidy, równanie stopnia 6-go, od którego, jak wiemy, (§ 3) zależy, według Jordana, wyznaczenie 16 punktów osobliwych równania ogólnej powierzchni Kummera, daje się rozwiązać algebraicznie.

Powierzchnia falowa jest tetraedroidą szczególną; można ją określić następującemi sposobami:

Powierzchnia falowa jest miejscem skrajnych punktów promieni, wychodzących ze środka elipsoidy, a których długości są równe dwom półśrednicom głównym przecięcia elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do promienia; na każdym promieniu istnieją przeto cztery punkty powierzchni, dwa po jednej i dwa po drugiej stronie (F r e s n e l)

Powierzchnia składa się z dwu powłók, jednej wewnątrz drugiej, stycznych do siebie w punktach podwójnych.

Jeżeli $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $(a>b>c)$ jest równaniem elipsy, to r ó w n a n i e p o w i e r z c h n i f a l o w e j b ę d z i e p o s t a c i:

$$\xi^2\eta^2-\zeta^2+a^2b^2c^2=0,$$

g d z i e:

$$\zeta^2=x^2+y^2+z^2; \quad \eta^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2,$$

$$\zeta^2=a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(c^2+a^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2 \text{ (Fresnel).}$$

Równanie to otrzymujemy z równania tetraedroidy, jeżeli założymy powne związki specyalne pomiędzy spółczynnikami a_{12}^2, a_{13}^2 . . . (patrz S a l m o n - F i e d l e r l. c. II, str. 473—474).

Równanie F r e s n e l a można przedstawić w dwóch postaciach:

$$\frac{x^2}{\xi^2-a^2}+\frac{y^2}{\xi^2-b^2}+\frac{z^2}{\xi^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\eta^2-b^2c^2}+\frac{y^2}{\eta^2-b^2a^2}+\frac{x^2}{\eta^2-a^2c^2}=0.$$

Czworościan zasadniczy powierzchni falowej, uważanej za tetraedroidę, jest to czworościan, utworzony z trzech płaszczyzn głownych elipsoidy i z płaszczyzny w nieskończoności.

Przecięcie powierzchni falowej jedną z trzech płaszczyzn głównych elipsoidy składa się z elipsy i koła.

Szesnaście punktów osobliwych powierzchni stanowią: cztery punkty w nieskończoności, cztery punkty rzeczywiste na jednej z płaszczyzn głównych, zaś 4 i 4 są urojonemi i znajdują się na dwóch drugich płaszczyznach głównych.

Oczywiście, z płaszczyzn osobliwych tylko 8 jest rzeczywistych.

Tetraedroidę badał pierwszy C a y l e y (Journ. de Liouv. XI, 1846, Papers I, 302, Crelle LXV, LXXXVII). Powierzchnię falową badał pierwszy F r e s n e l (Mém. de Paris, 1827) w rozprawie o podwójnem załamaniu, z okoliczności zagadnienia fizykalnego o przechodzeniu światła przez ciała załamujące; zaraz potem przedmiot ten podjęli: A m p è r e (Ann. de Chimie et phys. XXXIX, 1828), C a u c h y (Exerc. de math. V. Paryż 1830, Comptes rendus XI, XII, XVIII), P l ü c k e r (Crelle XIX, 1839) i inni. Listę prac o powierzchni falowej znajdujemy w cytowanem już dziele: L o r i a, Teraźniejszość i przeszłość teoryj geometrycznych, przekład polski, Warszawa 1889, Wyd. 2-gie włoskie 1896. Inne sposoby tworzenia powierzchni podali. B ö k l e n' (Ztschr. Schlömilcha, XXIV, XXV, XXVII, 1879—1882) i C a y l e y (przy pomocy dwóch powierzchni rozwijalnych, Quart. J. III; 1860, Papers IV, 420—432, Annali di math. XX, 1892).

Można wyobrazić sobie przypadek jeszcze bardziej szczególny powierzchni Kummera, t. j., gdy można ją rozważać jako tetraedroidę nie jednym tylko, lecz wieloma sposobami; takie powierzchnie specyalnie badali R o h n (Leipz. Ber. 1884), S e g r e (tamże), a niedawno B e r t i n i (Ist. Lomb. 1898).

Niektóre modele gipsowe powierzchni falowych znajdują się w kolekcyi L. B r i l l a.

---

§ 5.

Powierzchnie rzędu 4-go, zawierające nieskończenie wiele stożkowych.

K u m m e r badał (Berl. Monatsber. 1863, Crelle LXIV) powierzchnie rzędu 4-go, zawierające nieskończenie wiele stożkowych. Podamy w tym paragrafie główne wyniki jego pracy.

N i e i s t n i e j ą p o w i e r z c h n i e r z ę d u 4 - g o t a k i e, ż e p r z e k r o j e, o t r z y m a n e z p r z e c i ę c i a i c h w s z y s t k i e m i p ł a s z c z y z n a m i p r z e s t r z e n i a l b o t e ż w s z y s t k i e m i p ł a s z c z y z n a m i w i ą z k i, s k ł a d a j ą s i ę z d w ó c h s t o ż k o w y c h.

Istnieją powierzchnie rzędu 4-go takie, że przekroje ich, otrzymane z przecięcia pewnemi nieskończenie wielu płaszczyznami, które nie są płaszczyznami stycznemi, składają się z dwóch stożkowych. Są niemi:

1. Powierzchnie rzędu 4-go z jedną stożkową podwójną i dwoma punktami podwójnemi takiemi, że łącząca je prosta nie spotyka powierzchni; każda płaszczyzna pęku, której osią jest ta prosta, przecina powierzchnię według dwóch stożkowych, których punkty spotkania są oczywiście punktami podwójnemi dla powierzchni, a stąd znajdują się na stożkowej podwójnej. Równanie powierzchni tego gatunku jest postaci:

$$\varphi^2 = 4p^2 qr,$$

gdzie φ jest formą stopnia drugiego, p, q, r są formami stopnia pierwszego.

2. Powierzchnia rzędu 4-go z jedną prostą podwójną; każda płaszczyzna, przesunięta przez tę prostą, przecina powierzchnię także według stożkowej. Równanie tej powierzchni jest postaci:

$$p^2 S + 2pq S_1 + q^2 S_2 = 0,$$

gdzie p, q są formami stopnia pierwszego, S, S_1, S_2 stopnia drugiego.

3. Powierzchnia rzędu 4-go z dwoma węzłami styczności owemi, t. j. punktami, w których dotykają się wzajemnie dwie powłoki powierzchni; każda płaszczyzna, przesunięta przez prostą łączącą dwa te punkty, przecina powierzchnię według dwóch stożkowych, które w tych punktach są stycznemi do siebie. Równanie powierzchni jest:

$$\varphi^2 = (p, q)^4,$$

gdzie φ jest formą kwadratową, p i q są dwiema formami liniowemi, (p, q) jest formą stopnia 4-go ilości p i q.

We wszystkich tych przypadkach płaszczyzny, przecinające powierzchnię w sposób wymagany, tworzą pęk.

Są powierzchnie rzędu 4-go takie, że przekroje, otrzymane z przecięcia ich płaszczyznami stycznemi (wszystkiemi lub niektóremi), składają się z dwóch stożkowych. Są niemi:

1. Powierzchnia o trzech prostych podwójnych, spotykających się w jednym punkcie (powierzchnia rzymska Steinera); przekroje, powstałe z przecięcia jej jakąkolwiek płaszczyzną styczną, składają się z dwóch stożkowych.

2. Powierzchnia z jedną stożkową podwójną i jednym punktem podwójnym; każda płaszczyzna styczna w punkcie podwójnym przecina powierzchnię według dwóch stożkowych. Równanie tej powierzchni jest postaci:

$$\varphi^2 = 4p^2\psi,$$

gdzie φ i ψ są formami kwadratowemi, p jest formą liniową, mianowicie $\psi=0$ jest równaniem stożka rzędu 2-go, którego wierzchołek znajduje się na kwadryce $\varphi=0$

Są powierzchnie rzędu 4-go takie, że każda ich płaszczyzna dwustyczna przecina powierzchnię według dwóch stożkowych. Są niemi:

1. Powierzchnie z jedną stożkową podwójną.

2. Powierzchnie prostoliniowe.

W następnych paragrafach mówimy osobno o głównych gatunkach wymienionych wyżej powierzchni, mianowicie o powierzchniach: a) ze stożkową podwójną, b) z prostą podwójną, c) o powierzchni Steinera, d) o powierzchniach prostoliniowych. Co się tyczy powierzchni o dwóch węzłach styczności owych, to były one dotąd mało badane.

§ 6.

Powierzchnie rzędu 4-go ze stożkową podwójną albo ostrzową.

Liczby charakterystyczne, odnoszące się do tej powierzchni, podaliśmy w § 1 Rozdz. XII-go.

Każda płaszczyzna przestrzeni przecina taką powierzchnię według krzywej rzędu 4-go z dwoma punktami podwójnemi; każda płaszczyzna styczna—według krzywej rzędu 4-go z trzema punktami podwójnemi, wreszcie każda płaszczyzna trójstyczna—według stożkowej i dwóch prostych.

Przez każdy punkt można poprowadzić dziesięć płaszczyzn, przecinających powierzchnie według par stożkowych.

Na stożkowej podwójnej są cztery punkty jednopłaszczyznowe lub ostrzowe; płaszczyzny styczne w tych punktach przechodzą przez jeden i ten sam punkt.

Równanie ogólne tej powierzchni jest postaci:

$$\varphi^2 - 4p^2\psi = 0,$$

gdzie $\varphi=0$, $\psi=0$ są równaniami dwóch kwadryk, $p=0$ równaniem płaszczyzny, której przecięcie z kwadryką $\varphi=0$ jest stożkową podwójną powierzchni.

Krzywa paraboliczna powierzchni (rzędu 32) składa się ze stożkowej podwójnej liczonej 8 razy, z przecięcia powierzchni $\varphi=0$, $\psi=0$, liczonego dwa razy, i z jednej jeszcze krzywej rzędu 8-go.

Powierzchnia zawiera 16 prostych (opierających się naturalnie na stożkowej podwójnej), z których każda przecina pięć innych. Konfiguracya tych 16 prostych jest ta sama, co 16 prostych, które pozostają z 27 prostych na powierzchni rzędu 3-go, gdy wyłączymy jednę prostą i wszystkie 10, które ją spotykają.

Każda płaszczyzna, poprowadzona przez jednę z 16 prostych. przecina powierzchnię według krzywej sześciennej z punktem podwójnym.

Płaszczyzn trójstycznych do powierzchni jest 40; każda z nich zawiera dwie proste.

Płaszczyzny dwustyczne powierzchni obwodzą pięć stożków rzędu 2-go, które nazywamy pięcioma stożkami Kummera; stożki te tworzą tedy powierzchnię rozwijalną (rzędu 10-go), dwustyczną do powierzchni.

Czterdzieści płaszczyzn trójstycznych powierzchni tworzą tę samą konfiguracyę co 40 płaszczyzn, pozostających z 45 płaszczyzn powierzchni sześciennej, gdy wyłączymy pięć płaszczyzn, przechodzących przez prostą stałą.

Każdy ze stożków Kummera dotyka 16 prostych powierzchni; rozdzielają się te proste po dwie na ośm płaszczyzn stycznych stożka. Stąd dla każdego z pięciu stożków te 16 prostych rozdzielają się różnie na 8 par; rozdział jest taki sam dla tychże 16 prostych, uważanych za należące do powierzchni sześciennej względem każdej z pięciu płaszczyzn wyłączonych. Mianowicie, jeżeli, dla ustalenia myśli, oznaczymy przez a, b dwie proste płaszczyzny wyłączonej, to 16 prostych rozdzielają się na 8 takich par, że dwie proste każdej pary przecinają się ze sobą i przecinają albo prostą a, albo prostą b. Ustanawiamy tym sposobem odpowiedniość pomiędzy pięcioma stożkami, odnoszącemi się do S_4 i pięcioma płaszczyznami, odnoszącemi się do S_3.

Styczna w punkcie P stożkowej podwójnej powierzchni S_4 i proste, łączące punkt P z wierzchołkami pięciu stożków, są tworzącemi stożka kwadrykowego.

Stożki Kummera przechodzą przez punkty ostrzowe, położone na linii podwójnej; płaszczyzny, styczne do stożków w tych punktach, przecinają powierzchnię według dwóch stożkowych stycznych.

Z 16 prostych, znajdujących się na powierzchni uważanej, można utworzyć dwa różne ugrupowania; zawierające po 4 proste, z których to czterech prostych żadne dwie nie przecinają się; ugrupowanie gatunku 1-go jest takie, że każda z pozostałych 12 prostych przecina zawsze przynajmniej jednę z czterech prostych ugrupowania; ugrupowanie drugiego gatunku jest takie, że pomiędzy 12 pozostałemi prostemi jest jedna i tylko jedna, która nie przecina żadnej z czterech prostych. Te ugrupowania nazywają się czwórkami odpowiednio 1-go i 2-go gatunku (quadrupla). Ugrupowań gatunku 1-go jest 40, drugiego 80.

Każdej czwórce odpowiada inna tego samego gatunku, mająca tę własność, że każda z jej czterech prostych przecina jednę i tylko jednę prostą pierwszej czwórki. Takie dwie czwórki nazywają się sprzężonemi i tworzą dwuczwórkę (biquadrupla, Doppelvier Clebscha).

Każdej dwuczwórce gatunku drugiego odpowiadają cztery inne w ten sposób, że proste, zawarte w pierwszej i w jednej z pozostałych, są wszystkiemi 16 prostemi powierzchni.

Z 16 prostych można utworzyć 16 piątek skośnych, t. j. ugrupowań po 5 prostych, z których żadne dwie nie spotykają się; nie można zaś utworzyć ugrupowań, złożonych z większej liczby prostych skośnych.

Grupa podstawień pomiędzy 16 prostemi jest rzędu 5! 16.

Pierwiastki równania stopnia 16-go, od którego zależy wyznaczenie szesnastu prostych powierzchni 4-go rzędu o stożkowej podwójnej, są funkcyami wymiernemi pierwiastków pewnego równania stopnia 10-go, które znów, po rozwiązaniu pewnego równania stopnia 5-go, rozpada się na pięć czynników kwadratowych.

Dość szczegółowo badano wielościany, utworzone z 40 płaszczyzn trójstycznych (patrz niżej).

Z powyższego wynika, że płaszczyzny stożkowych danej powierzchni są styczne do stożków Kummera, i oczywiście, na każdej płaszczyźnie są dwie stożkowe. Mamy zatem 10 układów stożkowych, należących do powierzchni; każdemu układowi odpowiada inny, który można nazwać z nim sprzężonym, gdyż stożkowa pierwszego znajduje się zawsze na jednej płaszczyźnie z pewną stożkową drugiego układu.

P r z e z k a ż d y p u n k t p o w i e r z c h n i (n i e p o ł o-ż o n y n a k r z y w e j p o d w ó j n e j) p r z e c h o d z i s t o ż-k o w a k a ż d e g o z 10 u k ł a d ó w.

Jeżeli odwrócimy uwagę od przecięć, które mogą mieć miejsce w punktach krzywej podwójnej, możemy powiedzieć: Stożkowe, należące do tego samego układu, nie przecinają się; dwie stożkowe jakiekolwiek, należące do dwóch układów sprzężonych, spotykają się w dwóch punktach; dwie stożkowe, należące do dwóch układów różnych (nie sprzężonych), spotykają się w jednym punkcie.

Jeżeli przetniemy jakąkolwiek płaszczyzną stożek, mający wierzchołek w punkcie P krzywej podwójnej i styczny do powierzchni, wtedy, prócz śladów dwóch płaszczyzn stycznych, będziemy mieli k r z y w ą p ł a s k ą o g ó l n ą rzędu 4-go (Z e u-t h e n 1879, patrz Ann. di mat. XIV str. 34). Stycznemi podwójnemi tej krzywej są ślady dwu płaszczyzn stycznych, ślady dziesięciu płaszczyzn, które można poprowadzić z punktu P do przecięcia z powierzchnią według pary stożkowych (patrz wyżej) i ślady szesnastu płaszczyzn, przechodzących przez punkt P i przez 16 prostych na powierzchni.

Rzutami stożkowej uważanej powierzchni są stożkowe czworostyczne do krzywej rzędu 4-go.

Jeżeli P jest jednym z punktów ostrzowych, położonych na krzywej podwójnej (patrz wyżej), to rzut konturu powierzchni będzie miał punkt podwójny na śladzie płaszczyzny stycznej w punkcie P.

Jeżeli rzucimy zaś powierzchnię z wierzchołka jednego ze stożków K u m m e r a, to rzut jej konturu stanowić będzie ślad stożka, liczony dwa razy, oraz krzywa rzędu 4-go z dwoma punktami podwójnemi, której w czterech punktach dotyka już to ślad rzeczony, już to rzut stożkowej podwójnej (Z e u t h e n l. c.).

Z e u t h e n posługuje się powyższemi twierdzeniami dla klasyfikacyi powierzchni rzędu 4-go ze stożkową podwójną z punktu widzenia rzeczywistości jej prostych i stożków K u m-m e r a. Główne jego rezultaty są następujące:

Istnieją następujące typy powierzchni rzeczywistych o stożkowej podwójnej rzeczywistej.

a) Wszystkie 16 prostych i 5 stożków są rzeczywistemi. Dziesięć układów stożkowych są też rzeczywistemi i każdy z czterema parami prostych rzeczywistych.

b) Ośm prostych i trzy stożki są rzeczywiste, pozostałe 8 prostych są urojone bez punktów rzeczywistych; sześć układów stożkowych jest rzeczywistych i niema pary prostych sprzężonych.

c) Cztery proste i jeden stożek—rzeczywisty. Dwa układy stożkowych rzeczywiste—każdy z dwiema parami prostych rzeczywistych i dwiema parami prostych sprzężonych. Z dwunastu par prostych urojonych cztery mają punkt rzeczywisty, pozostałe go nie mają.

d) Żadna z prostych nie jest rzeczywistą; wszystkie zaś 5 stożków są rzeczywistemi. Sześć układów stożkowych rzeczywistych, nie zawierających żadnej pary prostych rzeczywistych lub sprzężonych. Wszystkie 16 prostych są urojonemi bez punktów rzeczywistych.

e) Żadna z prostych nie jest rzeczywistą, a wszystkie 5 stożków są rzeczywistemi. Dwa układy stożkowych są rzeczywiste i do każdego należą cztery pary prostych urojonych sprzężonych.

f) Żadna prosta nie jest rzeczywista i tylko trzy stożki są rzeczywiste; z 16 prostych ośm ma jeden punkt rzeczywisty, pozostałe go nie mają. Dwa układy stożkowych są rzeczywiste i każdy ma dwie pary prostych sprzężonych,

Powierzchnię S_4, o której mówimy, badał pierwszy Clebsch przy pomocy swojego odwzorowania płaskiego (patrz Rozdział IX, § 7).

W tem odwzorowaniu prostej na powierzchni S_4 odpowiada na płaszczyźnie stożkowa, przechodząca przez pięć punktów zasadniczych; pięciu prostym, przecinającym tamtą prostą, odpowiada pięć punktów zasadniczych, a pozostałym dziesięciu prostym odpowiadają proste, łączące każde dwa z pięciu punktów zasadniczych. Każdej parze sprzężonych układów stożkowych na powierzchni S_4 odpowiadają stożkowe, przechodzące przez cztery z pomiędzy pięciu punktów zasadniczych, oraz proste, przechodzące przez punkt piąty. Obrazami przecięć płaskich powierzchni S_4 są krzywe sześcienne w liczbie ∞^8 układu liniowego sześciennych, przechodzących przez pięć punktów zasadniczych. Obrazem stożkowej podwójnej powierzchni S_4 jest krzywa sześcienna tegoż układu.

Ważną własnością, dającą nadto środek badania powierzchni, jest własność, która przy pomocy przekształcenia dwuwymiernego przestrzeni wprowadza powierzchnię uważaną w związek z powierzchnią ogólną rzędu 3-go. Badania te podjęli Geiser (Crelle LXX) i Cremona (Rend. Ist. Lomb, 1871).

Przez przekształcenie:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_1 y_2 : y_1 y_3 : y_2 y_4 - y_3^2,$$

albo

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 x_2 : x_2^2 : x_2 x_3 : x_1 x_4 + x_3^2$$

wprowadza się odpowiedniość pomiędzy powierzchnią ogólną rzędu 3-go S_3, przechodzącą przez stożkową $x_2 = 0$, $x_1 x_4 + x_3^2 = 0$ przestrzeni (x), nie styczną do płaszczyzny $x_1 = 0$ w punkcie $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, a powierzchnią rzędu 4-go S_4 o stożkowej podwójnej w przestrzeni (y) (Cremona).

Stożkową podwójną jest stożkowa:

$$y_1 = 0, \qquad y_2 y_4 - y_3^2 = 0.$$

Dwudziestu siedmiu prostym powierzchni S_3 odpowiadają: 1) 16 prostych powierzchni S_4, 2) 10 stożkowych powierzchni S_4, przechodzących przez punkt $y_1 = y_2 = y_2 = 0$ i stycznych w tym punkcie do płaszczyzny $y_2 = 0$, 3) punkt $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

Przy pomocy tychże zasad można otrzymać i odwzorowanie płaskie powierzchni S_4 z odwzorowania płaskiego powierzchni S_3.

Przypadkiem szczególnym rozważanej powierzchni jest powierzchnia, której stożkowa podwójna rozpada się na dwie przecinające się proste.

Równanie powierzchni daje się wtedy sprowadzić do postaci:

$$x_1^2 x_2^2 + 2m x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4^2 \varphi = 0,$$

gdzie φ jest formą kwadratową. Dwie proste podwójne znajdują się na płaszczyżnie $x_4 = 0$ i są przecięciami tej płaszczyzny z płaszczyznami $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. I w tym przypadku powierzchnia ma 16 prostych, z których ośm opiera się na jednej prostej podwójnej, ośm—na drugiej; każdą z pierwszych ośmiu przecinają cztery z pomiędzy ośmiu drugich. Na każdej z dwu prostych podwójnych są punkty jednopłaszczyznowe lub ostrzowe. Stożków Kummera jest właściwie cztery: piąty składa się z ogółu prostych podwójnych, uważanych za obwiednią płaszczyzn

Innym godnym uwagi przypadkiem jest ten, w którym stożkowa nie jest podwójną lecz ostrzową, t. j. każdy jej punkt jest jednopłaszczyznowym. Liczby charakterystyczne dla tego przypadku podaliśmy w tablicy w § 1.

Płaszczyzny styczne do powierzchni w punktach stożkowej ostrzowej przechodzą wszystkie przez jeden i ten sam punkt. Istnieje płaszczyzna styczna do powierzchni, dotykająca jej według stożkowej, przecinającej w dwóch punktach stożkową ostrzową. Jakakolwiek płaszczyzna, przechodząca przez jeden z tych punktów, przecina powierzchnię według krzywej, mającej w tym punkcie węzeł stycznościowy (close-point). Powierzchnia ma dwie czwórki prostych; cztery proste jednej czwórki przechodzą wszystkie przez jeden z węzłów stycznościowych i znajdują się na płaszczyźnie stycznej w tym punkcie do dwu stożkowych: ostrzowej i innej. Jeżeli nazwiemy płaszczyzny tych czwórek przez π i π', będziemy mogli wypowiedzieć twierdzenie:

Powierzchnia ma tylko trzy stożki Kummera, których wierzchołki znajdują się na prostej przecięcia płaszczyzn π i π'; te trzy stożki przechodzą przez stożkową ostrzową.

Rozważano jeszcze przypadki, w których powierzchnia, prócz stożkowej podwójnej albo ostrzowej, posiada jeszcze punkty podwójne odosobnione.

Powierzchnia rzędu 4-go o stożkowej podwójnej nie może mieć więcej niż cztery punkty podwójne odosobnione.

Powierzchnie takie badali specyalnie: Korndörfer (Math. Ann I, II), a później Segre (tamże XIV), rozważając i liczne przypadki specyalne.

Jeżeli punkt podwójny odosobniony przypada na stożkowej podwójnej, mamy wtedy powierzchnię, która, jak dowiódł Cremona, może być otrzymana z kwadryki przy pomocy przekształcenia dwuwymiernego, o którem mówiliśmy wyżej.

Inne przypadki analogiczne badał Segre (l. c.).

Przy założeniu, że stożkowa podwójna nie jest zniekształconą, mamy, ze względu na możliwe punkty odosobnione, 18 różnych gatunków powierzchni.

Powierzchnię rzędu 4-go o stożkowej podwójnej badał pierwszy Kummer w r. 1863 (Crelle LXIV). Potem, z innych punktów widzenia, Moutard, Darboux i Cayley zajmowali się wielokrotnie przypadkiem szczególnym bardzo ważnym tych powierzchni, a mianowicie cyklidami (mówimy o nich w § następnym), dla których stożkową podwójną jest koło urojone w nieskończoności. Przypadek szczególny cyklid, a mianowicie powierzchnia pierścieniowa jest już znana od dawnego czasu. W r. 1867 Clebsch (Crelle LXIX), z okoliczności badań nad odwzorowaniem powierzchni, podjął poszukiwania nad powierzchnią ogólną rzędu 4-go ze stożkową podwójną; po nim przedmiot ten opracowywali: Cremona, Korndörfer (l. c.), Cayley (Quart. J. X, XI, 1870—1871). Pomijając prace o cyklidach, o których mowa niżej, wymieniamy tu ważną pracę Zeuthena (napisaną po duńsku i przełożoną przez Lorię w Ann. di mat. XIV), w której autor podejmuje klasyfikacyę powierzchni stopnia 4-go, wyżej przez nas podaną W r. 1884 Segre w obszernej rozprawie (Math. Ann. XXIV) podaje teoryę tych powierzchni z nowego punktu widzenia, a mianowicie rozważając w przestrzeni trójwymiarowej rzuty przecięcia dwóch rozmaitości kwadratowych trójwymiarowych, położonych w przestrzeni czterowymiarowej. Praca Segrego, bogata w wyniki, w części znane i w części nowe, zawiera też szczegółową klasyfikacyę wszystkich powierzchni o stożkowej podwójnej i ostrzowej, zniekształconej lub niezniekształconej, z punktami podwójnemi odosobnionemi lub bez takich punktów. Powierzchnie o stożkowej ostrzowej badali też Cremona (Acc. Bologna 1892) i Tötössy (Math. Ann. XIX). Co się tyczy badania konfiguracyi 16 prostych lub 40 płaszczyzn trójstycznych powierzchni, to wymieniamy prace Berzolari'ego (Ann. di Math. XIII) i Pereno (tamże XXI), a po szczegóły bibliograficzne odsyłamy do pracy Segrego lub do cytowanego dzieła Lorii „O teoryach geometrycznych“

---

§ 7.

Cyklidy. Cyklida Dupina.

Cyklidy są to powierzchnie rzędu 4-go, mające jako stożkową podwójną koło urojone w nieskończoności, Tak nazywają te powierzchnie Darboux i Casey; Cayley zaś nazywa je powierzchniami bicyklicznemi (dwukołowemi).

Cyklida jest obwiednią kuli, przecinającej ortogonalnie kulę daną, i której środek opisuje kwadrykę daną (Casey, Phil. Trans. CLXI, 1871).

Równanie cyklidy można napisać wieloma sposobami.

Jeżeli $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=0$, $X_4=0$ są równaniami czterech kul, to równanie cyklidy można przedstawić w postaci:

$$\varphi_2\,(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0,$$

gdzie φ_2 jest formą ogólną stopnia 2-go.

Kula stała w tworzeniu cyklidy jest powierzchnią Jacobi'ego tych czterech kul, z których każda odpowiada położeniu kuli ruchomej ortogonalnej do kuli stałej.

Można napisać równanie cyklidy (w spółrzędnych Descartes'a) w ten sposób:

$$(x^2+y^2+z^2)^2+S_2 = C;$$

tu $S_2=0$ jest równaniem kwadryki.

Jeżeli $X_1 = 0, \ldots X_5 = 0$ są równaniami pięciu kul przecinających się ortogonalnie, to równanie cyklidy może mieć jednę z następujących postaci:

$$a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + a_3 X_3^2 + a_4 X_4^2 = 0,$$

$$a'_1 X_2^2 + a'_2 X_3^2 + a'_3 X_4^2 + a'_4 X_5^2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1^{IV} X_5^2 + a_2^{IV} X_1^2 + a_3^{IV} X_2^2 + a_4^{IV} X_3^2 = 0,$$

gdzie spółczynniki a są stałemi. Te postacie są równoważne dlatego, że pomiędzy pięcioma wielkościami X istnieje związek liniowy tożsamościowy, odpowiadający warunkom ortogonalności każdych dwu z pomiędzy pięciu kul. Tym związkiem jest:

$$\frac{X_1^2}{r_1^2} + \frac{X_2^2}{r_2^2} + \frac{X_3^2}{r_3^2} + \frac{X_4^2}{r_4^2} + \frac{X_5^2}{r_5^2} = 0,$$

gdzie $r_1, r_2, \ldots r_5$ są promienie kul.

W każdem z pięciu powyższych równań kula stała w tworzeniu cyklidy jest odpowiednio jedną z kul $X_5 = 0, X_1, = 0, \ldots X_4 = 0$, a cztery inne odpowiadają różnym położeniom kuli ruchomej. Powierzchnia więc powstaje pięcioma różnemi sposobami.

Ważną własnością cyklid jest ta, że są one powierzchniami analagmatycznemi, to znaczy, że przekształcają się same na siebie przez inwersyę (przekształcenie przez promienie wodzące odwrotne).

Powierzchnie analagmatyczne rzędu 4-go są cyklidami (Moutard).

Kulą zasadniczą w inwersyi jest kula, do której jest ortogonalną kula ruchoma, wytwarzająca cyklidę w sposób wyżej wskazany. Środek tej kuli jest wierzchołkiem jednego z pięciu stożków Kummera, należących do powierzchni według teoryi ogólnej (§ 6). Cyklida jest powierzchnią analagmatyczną względem pięciu różnych inwersyj i to naturalnie w odpowiedniości z pięcioma stożkami Kummera. Twierdzenie to jest w związku z twierdzeniem powyższem, że cyklida może być utworzona pięcioma różnemi sposobami.

Charakterystyczną własnością cyklid jest, że płaszczyzny dwustyczne (płaszczyzny styczne do stożków Kummera), zamiast przecinać powierzchnię według pary stożkowych (jak w przypadku § poprzedzającego), przecinają ją według pary kół. Możemy przeto powiedzieć:

Przez każdy punkt przestrzeni przechodzi dziesięć płaszczyzn, przecinających powierzchnię według pary kół. Stąd to pochodzi nazwa powierzchni dwukołowej, nadana przez Cayley'a.

Niechaj będzie cyklida, utworzona w sposób powyższy przez kulę ruchomą, przecinającą ortogonalnie kulę stałą $X_i=0$, i której środek opisuje kwadrykę $S_i=0$. Poprowadźmy ze środka kuli X stożek, którego płaszczyzny styczne są prostopadłe do tworzących stożka asymptotycznego kwadryki S_i; stożek ten jest jednym z pięciu stożków Kummera. Każdemu stożkowi Kummera odpowiada w ten sposób kwadryka S_i. Kwadryki $S_i (i=1,..,5)$ są spółogniskowemi. Przecięcie kwadryki $S_i=0$ z odpowiednią kulą $X_i=0$ jest krzywą, która nazywa się krzywą ogniskową cyklidy; jest zatem pięć krzywych ogniskowych.

Wspominamy przy sposobności, że określenie krzywych ogniskowych dla jakiejkolwiek powierzchni podał Darboux (Comptes rendus 1864), jako uogólnienie określenia, podanego przez Chasles'a i innych dla powierzchni rzędu 2-go.

Rozważmy powierzchnię rozwijalną, opisaną na danej powierzchni taką, że jej płaszczyzny styczne są też stycznemi do koła urojonego w nieskończoności; krzywa podwójna tej powierzchni rozwijalnej nazywa się krzywą ogniskową powierzchni. Przez każdą styczną krzywej ogniskowej można poprowadzić dwie płaszczyzny styczne wspólne, powierzchni i kołu w nieskończoności. Jeżeli dalej koło w nieskończoności należy do powierzchni, wtedy prócz krzywych ogniskowych zwyczajnych można rozważać jeszcze krzywe ogniskowe osobliwe (Laguerre); są to linie podwójne powierzchni rozwijalnej, opisanej około powierzchni wzdłuż punktów koła urojonego w nieskończoności.

Ważnem jest następujące twierdzenie o krzywych ogniskowych osobliwych cyklidy (Laguerre, De la Gournerie): Ogniskowe osobliwe cyklidy są ogniskowemi zwyczajnemi każdej z pięciu kwadryk, które, w sposób wyżej omówiony, służą do utworzenia cyklidy; te kwadryki mają (jak to już powiedziano) też same linie ogniskowe.

W pęku kul jest 12 kul, dotykających danej cyklidy; w pęku płaszczyzn jest 12 płaszczyzn, dotykających cyklidy; w wiązce prostych jest 12 prostych, normalnych do danej cyklidy.

Cyklidy, przedstawione przez równanie

$$\frac{X_1^2}{\lambda-a_1}+\frac{X_2^2}{\lambda-a_2}+\frac{X_3^2}{\lambda-a_3}+\frac{X_4^2}{\lambda-a_4}+\frac{X_5^2}{\lambda-a_5}=0,$$

gdzie λ jest parametrem zmiennym, są wszystkie spółogniskowe; przecinają się one wzajemnie ortogonalnie; przez punkt przestrzeni przechodzą trzy cyklidy tego układu, tworzą one zatem układ, zwany potrójnym ortogonalnym (Patrz Rozdz. XVI).

Trzy odpowiednie wartości λ można przyjąć za spółrzędne punktu przestrzeni.

Dwie cyklidy układu przecinają się według ich linij krzywizny, które są przeto krzywemi algebraicznemi. Linie krzywizny cyklid tworzą układ ortogonalny izotermiczny (Rozdz. XVI).

Jeżeli poczynimy pewne szczególne założenia metryczne o kwadryce, służącej do utworzenia cyklidy, otrzymamy cyklidy o formach specyalnych.

Jeżeli ta kwadryka jest kulą, wtedy cyklida jest powierzchnią obrotową, utworzoną obrotem owalów D e s c a r t e s'a (patrz niżej), obracających się około ich osi ogniskowej. W tym przypadku koło urojone w nieskończoności jest ostrzowem dla powierzchni.

Jeżeli kwadryka jest obrotową, wtedy krzywa ogniskowa zwyczajna cyklidy jest styczną podwójnie do koła w nieskończoności. D a r b o u x nazwał takie cyklidy c y k l i d a m i D e s c a r t e s'a.

Jeżeli wreszcie kwadryka jest bez środka (paraboloida), wtedy jedna z krzywych ogniskowych przechodzi do nieskończoności, a cyklida rozpada się na powierzchnię rzędu 3-go, przechodzącą przez koło urojone w nieskończoności, i na płaszczyznę w nieskończoności. Mamy wtedy t. zw. c y k l i d ę r z ę d u 3-go l u b p a r a b o l i c z n ą.

Cyklida ta zawiera oczywiście na płaszczyźnie w nieskończoności prostą, przez którą przechodzi pięć płaszczyzn trójstycznych do powierzchni: ich punkty styczności są pięcioma wierzchołkami pięciu stożków Kummera; każdy z nich redukuje się do pary prostych, położonych na powierzchni, a każda płaszczyzna, przechodząca przez jedną z 10 prostych tak utworzonych, przecina naturalnie powierzchnię według kół.

Z cyklidy ogólnej otrzymujemy cyklidę rzędu 3-go przy pomocy przekształcenia przez promienie odwrotne i biorąc środek przekształcenia na samej powierzchni.

Załóżmy teraz, że kwadryki S i kula kierownicza X mają położenie specyalne względem siebie, np. są stycznemi, wtedy otrzymujemy c y k l i d y o p u n k t a c h p o d w ó j n y c h.

Podobnie jak powierzchnie rozważane w paragrafie poprzedzającym, i cyklidy mogą mieć od 1 do 4 punktów podwójnych odosobnionych.

Cyklidy o punktach podwójnych można uważać zawsze jako powierzchnie odwrotne (otrzymane przez inwersyę) względem powierzchni rzędu 2-go.

Odwrotną kwadryki ogólnej jest cyklida z jednym punktem podwójnym; odwrotną stożka kwadrykowege ogólnego—cyklida z dwoma punktami podwójnemi; odwrotną kwadryki obrotowej—cyklida z trzema punktami podwójnemi; wreszcie odwrotną stożka obrotowego jest cyklida o czterech punktach podwójnych odosobnionych (cyklida Dupina).

Cyklidę z jednym punktem podwójnym otrzymujemy, jeżeli we wskazanem wyżej tworzeniu cyklidy kwadryka S_i jest styczną w jednym punkcie do kuli X_i (kuli kierowniczej), albo gdy ta redukuje się do punktu.

Taką cyklidę można jeszcze określić jako t. zw. powierzchnię spodkową kwadryki względem punktu O tejże, t. j. jako miejsce spodków prostopadłych, spuszczonych z punktu O do płaszczyzn stycznych kwadryki.

Jeżeli kwadryka S jest dwustyczną do kuli, mamy wtedy cyklidę o dwóch punktach podwójnych, która, jak powiedziano, jest powierzchnią odwrotną dla stożka kwadrykowego ogólnego.

Przypadek, w którym te dwa punkty podwójnie przypadają na kole urojonem w nieskończoności, badali: De La Gournerie (J. École Pol. XXIII, 1863, J. de Liouville (2), X, 1865) i Cayley (Quart. J. X, XI, 1870).

Powierzchnia, utworzona obrotem stożkowej około prostej, nie położonej na jej płaszczyźnie, jest w ogólności cyklidą z dwoma tylko punktami podwójnemi, położonemi na kole urojonem w nieskończoności; są to dwa punkty cykliczne na płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu.

W cyklidzie Dupina (t. j. o czterech punktach podwójnych) przynajmniej dwa z punktów podwójnych są zawsze urojonemi, a z 16 prostych, łączących punkty podwójne, cztery najmniej są zawsze urojonemi.

Z pięciu stożków Kummera cyklidy Dupina jeden tylko nie jest zniekształcony, t. j. jego płaszczyzny styczne przecinają powierzchnię według kół; cztery pozostałe zniekształcają się na cztery płaszczyzny styczne osobliwe (styczne do powierzchni wzdłuż całej krzywej), z których najmniej dwie są zawsze urojonemi.

Linie krzywiznowe cyklidy Dupina są kołami.

Cyklidę Dupina można określić jako obwiednią kuli, której promień porusza się po płaszczyźnie, a która dotyka dwu kul danych; albo jako obwiednią kuli, której środek porusza się po stożkowej a która dotyka innej kuli danej; albo wreszcie jako obwiednią kuli, której środek porusza się po stożkowej a która przecina ortogonalnie inną kulę.

Określenie, podane przez Dupina, mianowicie, że ta powierzchnia jest obwiednią kuli, dotykającej trzech kul danych, nie indywidualizuje jednej tylko cyklidy, ale określa ich cztery.

Jest oczywistem, że powierzchnia pierścieniowa (utworzona obrotem koła około prostej, znajdującej się na jego płaszczyźnie) jest cyklidą specyalną Dupina.

Jeżeli wszystkie cztery punkty podwójne są urojone, wtedy cyklida nazywa się pierścieniową (Ringcyklides); szczególnym jej przypadkiem jest powierzchnia poprzednia.

Jeżeli tylko dwa z punktów są rzeczywistemi (inne przypadki nie są możliwemi), wtedy dwie formy cyklidy są: jedna cyklida rożkowata (Horncyklide), która składa się z dwu powłok na zewnątrz jedna drugiej położonych, zakończonych ostrzami i złączonych dwoma punktami podwójnemi; druga nazywa się cyklidą wrzecionowatą (Spindelcyklide) i ta jest utworzona z dwu powłók, jednej wewnątrz drugiej, złączonych w dwu punktach.

Dla cyklid Dupina, podobnie jak dla cyklid ogólnych, można wyobrazić sobie, że stożkowa, na której znajdować się mają kule ruchome, których obwiednią jest cyklida, staje się parabolą; jest to założenie analogiczne do tego, które z cyklidy ogólnej prowadzi do cyklidy stopnia 3-go albo parabolicznej. Mamy wtedy cyklidy Dupina paraboliczne, które są po wierzchniami rzędu 3-go, gdyż tu odchodzi płaszczyzna w nieskończoności.

Można zbudować następujące typy takich cyklid: cyklida paraboliczna rożkowata (parabolische Horncyclide), której dwa punkty podwójne są rzeczywistemi; cyklida paraboliczna pierścieniowa, (parabolische Ringcyclide) której cztery punkty podwójne są wszystkie urojonemi. Te powierzchnie mają powłoki, rozciągające się do nieskończoności; należą do nich proste w nieskończoności i inne proste rzeczywiste.

Klasyfikacyę zupełną cyklid podał po raz pierwszy Loria (Acc. Torino 1884), który rozróżnia 18 różnych gatunków cyklid ze względu na inne osobliwości, które może posiadać powierzchnia. Te 18 gatunków odpowiadają naturalnie 18 gatunkom powierzchni rzędu 4-go o stożkowej podwójnej ogólnej, badanych razem z innemi niedawno przedtem przez Segrego (patrz § poprzedzający). Ten ostatni autor dowiódł nadto, że z 18 gatunków cyklid tylko 1) gatunków należy do cyklid rzeczywistych, t. j. mających równania o spółczynnikach rzeczywistych (Math. Ann. XXVIV, str. 439). Najdawniej zbadaną jest cyklida o 5 punktach podwójnych (Dupin, Applicat. de Géom. 1822), której przypadkiem szczególnym jest powierzchnia pierścieniowa. W r. 1860 Mannheim (Nouv. Ann. 1860) wykazał, że każda cyklida Dupina przy pomocy inwersyi daje się przekształcić na powierzchnię pierścieniową. Niezadługo potem zaczęli badać cyklidy jako powierzchnie analagmatyczne: Moutard (Ann. de math. (2). III, 1864), Darboux (Ann. de l'Éc. norm. 1865, 1872), Maxwell, (Quart. J. IX, 1867), który próbował je klasyfikować; później zaś Casey w obszernej rozprawie (Phil. Trans. CLXI, 1871). Teoryę tych powierzchni ogłosił Darboux w osobnej rozprawie (Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques, Paryż 1873, wyd. 2-gie 1896), do której odsyłamy czytelnika po szczegóły. Wreszcie Loria w r. 1884 (Acc. di Torino, Memorie, XXXVI) podjął badanie cyklid z innego punktu widzenia: korzysta mianowicie z pomysłów Liego, Kleina, Reyego, posługuje się t. zw. geometryą kul, w której kulę uważa się za element przestrzeni, rozpatruje kompleksy i kongruencye kuli i przeprowadza wyżej wzmiankowaną klasyfikacyę na 18 gatunków (patrz Rozdz. XIV).

---

§ 8.

Powierzchnie rzędu 4-go z prostą podwójną.

Równanie powierzchni rzędu 4-go z prostą podwójną można napisać w postaci:

$$p^2 S + 2pq\, S_1 + q^2 S_2 = 0, \qquad \text{(Kummer)}$$

gdzie p, q są funkcyami liniowemi—S, S_1, S_2 funkcyami kwadratowemi spółrzędnych. Przecięcie płaszczyzn $p=0$, $q=0$ jest prostą podwójną powierzchni.

Toż samo równanie można tak napisać (Cayley):

$$\varphi_4(x_1, x_2) + \varphi_3(x_1, x_2)x_3 + \psi_3(x_1, x_2)x_4 + \varphi_2(x_1, x_2)x_3^2$$
$$+ \psi_2(x_1, x_2)x_3 x_4 + \chi_2(x_1, x_2)x_4^2 = 0,$$

gdzie $\varphi_4, \varphi_3, \psi_2, \ldots$ są funkcyami zmienych x_1, x_2 stopni 4, 3..... Przecięcie płaszczyzn $x_1=0$, $x_2=0$ jest prostą podwójną powierzchni.

Powierzchnia jest w ogólności klasy 20-ej. Zawiera 16 prostych, prócz prostej podwójnej; ma 64 płaszczyzny trójstyczne, przecinające powierzchnię według dwu stożkowych. Jeden z czterech punktów spotkania tych stożkowych znajduje się na prostej podwójnej, trzy pozostałe zaś są trzema punktami styczności płaszczyzny trójstycznej.

Szesnaście prostych znajdują się parami na jednej płaszczyźnie z prostą podwójną, a więc grupują się w ośm par, a każda z tych par spotyka zawsze prostą podwójną.

Mamy tym sposobem 64 pary stożkowych i 8 par prostych; każda para stożkowych względem każdej pary prostych jest taka, że stożkowa pary pierwszej przecina jednę tylko prostą pary drugiej, a druga—drugą.

Główne przypadki szczególne tej powierzchni są następujące:

Jedna z płaszczyzn stycznych w punktach linii podwójnej może być zawsze ta sama; na to miejsce, gdy trzy funkcye φ_2, ψ_2, χ_2 w równaniu poprzedzającem mają czynnik wspólny. W tym przypadku jedna z 16 prostych powierzchni zlewa się z prostą podwójną.

Obiedwie płaszczyzny styczne w każdym punkcie prostej podwójnej mogą być zawsze jedne i te same; wtedy trzy powyższe funkcye różnią się od siebie tylko czynnikiem stałym.

Punkty prostej podwójnej mogą być wszystkie jednopłaszczyznowe, wtedy **prosta jest prostą ostrzową powierzchni**; ma to miejsce wtedy, gdy trzy ostatnie wyrazy dadzą się sprowadzić do postaci

$$(x_1 x_3 + x_3 x_4)(x_3 \varphi_1 + x_4 \psi_1),$$

gdzie φ_1, ψ_1 są funkcyami liniowemi względem x_1 i x_2.

Wreszcie może się zdarzyć, że płaszczyzny styczne w punktach prostej ostrzowej są zawsze jedne i te same; ma to miejsce wtedy, gdy trzy ostatnie wyrazy redukują się do jednego z dwu typów: $x_1^2 x_3 x_4$, $x_1^2 x_3^2$.

W przypadku, gdy prosta jest ostrzową, powierzchnia jest klasy 12-ej.

Powierzchnia rzędu 4-go o prostej podwójnej może mieć aż do 8 punktów podwójnych odosobnionych.

Równanie powierzchni rzędu 4-go z prostą podwójną i czterema punktami podwójnemi można otrzymać w ten sposób: Niechaj będą trzy powierzchnie rzędu 2-go $S=0$, $S'=0$, $S''=0$ z prostą wspólną; będą one miały jeszcze cztery punkty wspólne, a forma kwadratowa wyrażeń S, S', S'', przyrównana do zera, będzie równaniem takiej powierzchni.

W tym przypadku cztery płaszczyzny przechodzą przez prostą podwójną i przez każdy z punktów podwójnych, na każdej zaś z płaszczyzn leżą dwie proste powierzchni. przecinające się w punkcie podwójnym.

Równanie powierzchni rzędu 4-go z prostą podwójną i 8 punktami podwójnemi jest postaci:

$$\begin{vmatrix} 0, & x_1, & x_2, & 1 \\ x_1, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ x_2, & a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ 1, & a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

tu a_{11}, a_{22}, a_{12} są formami kwadratowemi spółrzędnych x_3, x_4; a_{23}, a_{12}—formami liniowemi; a_{33} jest stałą.

Istnieją cztery płaszczyzny, przechodzące przez prostą podwójną i styczne do powierzchni wzdłuż innej prostej, na której znajdują się dwa punkty podwójne.

Ośm punktów podwójnych rozkładają się po cztery na ośm płaszczyzn; przez każdy z nich przechodzą cztery takie płaszczyzny.

Powierzchnię tę badał Plücker (Neue Geom. I, N⁰ 213) w teoryi kompleksów prostych (patrz Rozdz. XIV).

Teoryę powierzchni, o których mowa w tym paragrafie, znaleść można u Salmona-Fiedlera (l. c. § 335 i nast), z którego specyalnie czerpaliśmy, dalej u Kummera (l. c. § 5), Clebscha (Math. Ann. I, s. 250). Model gipsowy powierzchni rzędu 4-go z prostą podwójną znajdujemy w cytowanej kolekcyi L. Brilla.

---

§ 9.

Powierzchnia rzymska Steinera.

Zasadniczą własność powierzchni Steinera stanowi to, że każda płaszczyzna styczna przecina ją według pary stożkowych.

Powierzchnia ta posiada trzy proste podwójne, przecinające się w jednym punkcie który jest naturalnie punktem potrójnym powierzchni.

Z czterech punktów spotkania dwóch stożkowych, według których płaszczyzna styczna przecina powierzchnię, jeden jest punktem styczności, trzy zaś pozostałe leżą każdy na jednej z trzech prostych podwójnych.

Powierzchnia Steinera jest klasy 3-ej, a stożek styczny, poprowadzony do niej z jakiegokolwiek punktu, jest rzędu 6-go.

Powierzchnia ta należy do powierzchni, badanych przez Kummera (Berl. Monatsber. 1862, 1866, 1872), mających cztery płaszczyzny styczne osobliwe, dotykające powierzchni według stożkowej; równaniem tych powierzchni jest

$$S^2 - \lambda X_1 X_2 X_3 X_4 = 0,$$

gdzie $S=0$ jest kwadryką, zaś $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=0$, $X_4=0$ są równaniami czterech płaszczyzn stycznych osobliwych.

Jeżeli wyspecyalizujemy odpowiednio formę S względem form X, otrzymamy rozmaite powierzchnie o rozmaitych własnościach; i tak z tego równania ogólnego możemy otrzymać równanie powierzchni Kummera o 16 punktach węzłowych (patrz § 3); specyalizując je w inny sposób, otrzymujemy powierzchnię Steinera.

Równanie powierzchni Steinera można napisać w postaci:

$$[X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - 2X_1X_2 - 2X_2X_3 - 2X_3X_1 - 2X_1X_4$$
$$- 2X_2X_4 - 2X_3X_4]^2 - 64X_1X_2X_3X_4 = 0,$$

albo też inaczej (Cayley):

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \sqrt{X_3} + \sqrt{X_4} = 0.$$

Powierzchnia ta jest biegunową wzajemną powierzchni rzędu 3-go z czterema punktami podwójnemi klasy 4-ej, (patrz Rozdz. XI, § 1), t. j. tak zw. powierzchni Cayley'a.

Jeżeli za płaszczyzny spółrzędne obierzemy trzy płaszczyzny, na których znajdują się po dwie proste podwójne, i jeszcze jednę płaszczyznę, wtedy równanie powierzchni Steinera będzie można przedstawić w postaci:

$$x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2x_3x_4 = 0,$$

gdzie trzy proste podwójne są krawędziami trójścianu $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ (Kummer).

Bardzo interesującą własnością powierzchni Steinera jest własność, odkryta przez Weierstrassa i stosowana przy odwzorowaniu płaskiem powierzchni; wyrażamy ją tak: spółrzędne jednorodne punktów powierzchni można wyrazić za pomocą form trójkowych kwadratowych.

Cayley i Clebsch dowiedli następnie, że jest to najogólniejsza powierzchnia rodzaju zero, której spółrzędne dają się w ten sposób przedstawić.

Jeżeli wyjdziemy z pierwszej z powyżej podanych postaci równania powierzchni, to będzie można wzory, służące do takiego przedstawienia, wyrazić w ten sposób:

$$x_1 = (y_1 + y_2 + y_3)^2, \qquad x_2 = (y_1 - y_2 - y_3)^2,$$

$$x_3 = (-y_1 + y_2 - y_3)^2, \quad x_4 = (-y_1 - y_2 + y_3)^2.$$

Wychodząc z postaci drugiej równania powierzchni, znajdziemy:

$$x_1 = 2y_2 y_3, \quad x_2 = 2y_3 y_1, \quad x_3 = 2y_1 y_2, \quad x_4 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Przy pomocy tych wzorów można badać odwzorowanie płaskie powierzchni, co uczynili Clebsch i inni: powierzchnia daje się wtedy odwzorować jednoznacznie bez punktów wyjątkowych (Clebsch, Math. Ann. V).

Przez każdy punkt powierzchni Steinera przechodzi ∞ stożkowych. Poza powierzchniami rzędu 2-go i powierzchniami prostoliniowemi rzędu 3-go, powierzchnia Steinera jest jedyną powierzchnią, mającą taką własność (Darboux, Bull. des scien. math. II, 1880).

Dwie stożkowe powierzchni Steinera przecinają się tylko w jednym punkcie, a przez dwa punkty przechodzi w ogólności jedna tylko stożkowa.

Na każdej płaszczyźnie przestrzeni jest sześć prostych ściśle stycznych do powierzchni i są cztery proste dwustyczne.

Przez punkt przestrzeni przechodzi dziewięć prostych ściśle stycznych.

Każda krzywa algebraiczna, znajdująca się na powierzchni, jest rzędu parzystego.

Wszystkie przekroje płaskie powierzchni są krzywemi wymiernemi; i jest to jedyna powierzchnia nieprostoliniowa mająca tę własność (Picard, Crelle C, patrz też Guccia Rend. Pal. 1).

Inną ważną własność tej powierzchni wyraża następujące twierdzenie Kroneckera, udowodnione przez Castelnuovo (Rend. Lincei 1894):

Poza powierzchniami prostoliniowemi powierzchnia Steinera jest jedyną powierzchnią nieprzywiedlną, którą każda płaszczyzna pewnego układu podwójnie nieskończonego przecina według krzywych przywiedlnych.

Pary płaszczyzn stycznych do powierzchni w punktach prostej podwójnej tworzą inwolucyę, do której należą płaszczyzny, przechodzące przez inne dwie proste podwójne.

Na każdej prostej podwójnej są dwa punkty ostrzowe.

Cztery stożkowe styczności płaszczyzn osobliwych przecinają się po dwie w punktach ostrzowych; też same cztery stożkowe znajdują się na jednej kwadryce, przecinającej proste podwójne w punktach ostrzowych.

Krzywe asymptotyczne powierzchni Steinera są krzywemi skośnemi rzędu 4-go gatunku 2-go (Clebsch, Cremona).

Cztery płaszczyzny osobliwe powierzchni są czterema płaszczyznami statecznemi dla wszystkich krzywych asymptotycznych.

Wszystkie krzywe rzędu 4-go asymptotyczne posiadają trzy cięciwy wspólne, schodzące się w punkcie potrójnym powierzchni, a przez każdą z cięciw można poprowadzić do każdej z krzywych dwie płaszczyzny ściśle styczne.

Krzywe asymptotyczne są przecięte na powierzchni nieskończenie wielu powierzchniami stopnia drugiego, mającemi ośm punktów wspólnych.

Każda z czterech stożkowych, wzdłuż których płaszczyzna osobliwa dotyka powierzchni, jest styczną do trzech krawędzi czworościanu płaszczyzn osobliwych; dwie z nich przecinają się na jednej z krawędzi (Beltrami).

Istnieją ∞^3 kwadryk, przecinających powierzchnię według czterech stożkowych.

Powierzchnię, o której mówimy, badał Steiner 1838 w czasie pobytu swego w Rzymie, ale nic o niej nie napisał; dopiero Kummer w r. 1863 bada ją w rozprawie o powierzchniach rzędu 4-go, zawierających nieskończenie wiele stożkowych, i odkrycie jej przypisuje Steinerowi. Później zajmowali się nią: Schröter (Berl. Monatsber. 1863, Crelle LXIV), Cremona (Crelle LXIII, Rend. Ist. Lomb. 1867), Lampe (Rozprawa, Berlin 1864), Cayley (Crelle LXIV, Proc. London Math. Soc III, V, 1873), Clebsch (Crelle LXVII), Reye (Geom. der Lage II, 246) i inni. Sturm (Mat. Ann. III) badał tę powierzchnię, uważając ją jako przypadek szczególny powierzchni klasy 3-ej i tworząc ją przy pomocy pęku kwadryk i prostej punktowej rzutowej względem pęku. Ze względu na własność powierzchni, polegającą na tem, że jest wzajemną z powierzchnią rzędu 3-go o 4 punktach stożkowych, badano ją wielokrotnie wraz z tą drugą powierzchnią, wyprowadzając własności jednej z nich z własności drugiej. Niektóre własności tejże powierzchni i jej wzajemnej znalazł już Beltrami w r. 1863 (Giorn. di Batt. I, Acc. Bologna, X, 1879). Nowszą pracą o powierzchni Steinera jest praca Gerbaldi'ego (osobne wydanie, Turyn 1881), w której wyprowadza on wszystkie własności powierzchni z jej najogólniejszego odwzorowania płaskiego przy pomocy form trójkowych kwadratowych.

Do odwzorowania płaskiego specyalnego daje się sprowadzić, jak już zauważyliśmy, i przypadek ogólniejszy (patrz Gerbaldi l. c. rozdz. IV, str. 41). Dodajemy jeszcze najnowszą rozprawę Wahlena (Acta math. XIX).

Cayley rozważał przypadki, w których dwie lub trzy linie podwójne zlewają się (Proc. London math. Soc. III) i znalazł, że powierzchnia jest wtedy wzajemną z powierzchnią specyalną rzędu 3-go:

$$x_1 x_3 x_4 + (x_1 + x_3) x_2^2 = 0,$$

albo też z powierzchnią

$$x_1 x_3 x_4 + x_2^2 x_3 + x_1^3 = 0.$$

We wspomnianej kolekcyi L. Brilla znajdują się modele powierzchni Steinera.

§ 10.

Powierzchnie prostoliniowe rzędu 4-go.

Krawędzią zwrotu powierzchni rozwijalnej rzędu 4-go jest krzywa sześcienna skośna; z powodu ścisłego związku, jaki zachodzi pomiędzy krzywemi skośnemi a ich powierzchniami rozwijalnemi ściśle stycznemi (patrz Rozdz. IX), teorya rozwijalnej rzędu 4-go sprowadza się tedy do teoryi krzywych skośnych, o której mówiliśmy w § 2 Rozdz. X-go.

Dodajemy tu następujące spostrzeżenia:

Powierzchnia rozwijalna rzędu 4-go jest zawsze rodzaju zero, t. j. rodzaj każdego jej przecięcia płaskiego jest zerem.

Jeżeli $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ są równaniami czterech płaszczyzn, to równanie płaszczyzny obwodzącej rozwijalną można napisać w postaci:

$$X_1 t^3 + 3 X_2 t^2 + 3 X_3 t + X_4 = 0,$$

a równaniem ogólnem powierzchni rozwijalnej będzie:

$$(X_1 X_4 - X_2 X_3)^2 - 4 (X_2^2 - X_1 X_3)(X_3^2 - X_2 X_4) = 0.$$

Płaszczyzny, dotykające dwu stożkowych, położonych na różnych płaszczyznach i mających styczną wspólną, obwodzą rozwijalną rzędu 4-go.

Jeżeli dwie kwadryki mają prostą wspólną, wtedy powierzchnia rozwijalna opisana na nich jest rzędu 4-go.

Spółrzędne punktu krawędzi zwrotu wyrażają się przy pomocy wzorów:

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 1 : -t : t^2 : -t^3.$$

Przechodzimy do powierzchni prostoliniowych skośnych rzędu 4-go.

Powierzchnia prostoliniowa skośna rzędu 4-go jest zarazem i klasy 4-ej; jest rodzaju zero albo rodzaju jeden. W pierwszym przypadku ma krzywą podwójną skośną rzędu 3-go zniekształconą lub nie (w szczególności prostą potrójną), a jej rozwijalna dwustyczna jest klasy 3-ej; w przypadku drugim na krzywą podwójną rzędu 2-go zniekształconą, a jej rozwijalna dwustyczna jest klasy 2-ej.

Cremona i Cayley rozklasyfikowali te powierzchnie na 10 gatunków, z których dziesięć gatunków należy do rodzaju 1, dwa zaś do rodzaju 0

a) **Powierzchnie z prostą potrójną.** Na prostej potrójnej są cztery punkty, w których dwie z płaszczyzn stycznych zlewają się.

Równanie powierzchni daje się sprowadzić (z wyjątkiem przypadku IV, patrz niżej) do postaci:

$$kx_1{}^2x_2{}^2 = x_1{}^2x_3(ax_1 + bx_2) + x_2{}^2x_4(cx_1 + dx_2),$$

gdzie $x_1=0$, $x_i=0$ jest prostą podwójną; punkt $x_1=x_2=x_3=0$ i punkt $x_1=x_2=x_4=0$ są dwoma punktami, w których zlewają się dwie płaszczyzny styczne; $x_1=0$, $x_2=0$ są płaszczyznami stycznemi podwójnemi w tych punktach.

Przez każdy z czterech punktów, mających wyżej wskazaną własność, przechodzi prosta (tworząca osobliwa), w której punktach płaszczyzna styczna do powierzchni jest zawsze jedna i ta sama.

Powierzchnia jest zawsze rodzaju zero.

Odróżniamy tu cztery podprzypadki.

I. (8-y gatunek Cremony, 9-y gatunek Cayley'a). Wszystkie proste powierzchni spotykają prostą potrójną R. Trzy tworzące, przechodzące przez punkt prostej R, nie znajdują się na jednej płaszczyźnie a określają trzy płaszczyzny, których obwiednia jest rozwijalną klasy 3-ej i rzędu 4-go, będącą rozwijalną dwustyczną do powierzchni.

Powierzchnia ta jest miejscem prostej, poruszającej się tak, że spotyka prostą stałą i dotyka w dwóch punktach danej rozwijalnej rzędu 4-go Równanie powierzchni jest takie, jak wyżej napisane, przyczem k jest różne od zera.

II. (9-y gatunek Cremony, 3-i Cayley'a). Jest tu prosta R' powierzchni, nie spotykająca prostej potrójnej R. Każda płaszczyzna, przechodząca przez R', zawiera trzy tworzące, schodzące się w punkcie prostej R, i w każdym punkcie prostej R krzyżują się tworzące, położone na jednej płaszczyźnie z prostą R'; z każdego punktu tej prostej wychodzi jedna tylko tworząca.

Powierzchnia ta jest miejscem prostych, łączących odpowiednie punkty odpowiedniości rzutowej (1. 1) pomiędzy punktami prostej R a punktami krzywej sześciennej płaskiej z punktem podwójnym O; odpowiedniości ustanowionej w ten sposób, że punktowi spotkania A prostej R z płaszczyzną krzywej sześciennej odpowiada punkt spotkania prostej AO z krzywą sześcienną. Równanie powierzchni otrzymujemy z powyższego, kładąc $k=0$.

Prosta R' jest obwiednią płaszczyzn trójstycznych powierzchni, liczona trzy razy zastępuje powierzchnię rozwijalną dwustyczną.

III. (3-i gatunek Cremony, 12-y Cayley'a). Jeżeli przez każdy punkt prostej R przechodzą trzy tworzące, z których jedna zlewa się z R, wtedy rozwijalna dwustyczna tworzy się z prostej R i ze stożka kwadrykowego.

Powierzchnia ta jest miejscem prostych, łączących punkty odpowiednie prostej R i stożkowej C, będących w odpowiedniości (1, 2), takiej, że każdemu punktowi prostej R odpowiadają dwa punkty stożkowej C i każdemu punktowi tej ostatniej odpowiada jeden punkt prostej R; przy warunku wszakże, aby prosta i stożkowa miały punkt wspólny, który nie jest punktem zjednoczonym w tej odpowiedniości. Równanie powierzchni otrzymujemy z równania ogólnego, kładąc $ad = bc$, tak, że dwa wyrazy strony drugiej otrzymują czynnik wspólny $ax_1 + bx_2$.

IV. (10-y gatunek Cremony, 6-y Cayley'a). Jeżeli przez każdy punkt prostej R przechodzą trzy tworzące, z których dwie zlewają się z prostą R, wtedy rozwijalna dwustyczna tworzy się z tej prostej R, liczonej trzy razy. Na prostej R są dwa punkty takie, że wszystkie trzy tworzące, przez nie przechodzące, zlewają się z prostą R.

Powierzchnia ta tworzy się podobnie, jak w przypadku II, tylko że dwa punkty A i O winny się zlewać. Równanie powierzchni daje się sprowadzić do postaci:

$$x_1{}^2 x_2{}^2 = (a x_1{}^2 + b x_1 x_2 + c x_2{}^2)(x_1 x_3 + x_2 x_4).$$

b. **Powierzchnie, których linią podwójną jest krzywa skośna rzędu 3-go nie zniekształcona.** Jeżeli powierzchnia rzędu 4-go ma, jako krzywą podwójną, krzywą skośną, wtedy jest ona w ogóle prostoliniową; wyjątek jedyny stanowi przypadek, w którym linia podwójna jest zbiorem trzech prostych, przez jeden punkt przechodzących (Powierzchnia Steinera, § 9).

Jeżeli krzywa podwójna jest krzywą sześcienną niezniekształconą, wtedy należy odróżnić tylko dwa przypadki.

V. (1-y gatunek Cremony, 10-y Cayley'a). Powierzchnia jest miejscem prostych, łączących punkty odpowiednie dwóch stożkowych, położonych jakkolwiek w przestrzeni na różnych płaszczyznach i tak, że pomiędzy punktami jednej i drugiej zachodzi odpowiedniość dwujednoznaczna (1, 1)

Obwiednią płaszczyzn dwustycznych jest rozwijalna ogólna klasy 3-ej i rzędu 4-go. Istnieją cztery tworzące osobliwe; w ich punktach płaszczyzna styczna jest stała. Krzywa sześcienna skośna ma cztery punkty ostrzowe; przez każdy z nich przechodzi jedna z tworzących osobliwych.

Powierzchnia jest rodzaju zero; równanie jej daje się sprowadzić do postaci:

$$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{23}X_2X_3 + 2a_{31}X_3X_1 + 2a_{12}X_1X_2 = 0,$$

gdzie:

$$X_1 = x_2x_4 - x_3^2, \quad X_2 = x_2x_3 - x_1x_4, \quad X_3 = x_1x_3 - x_2^2.$$

Powierzchnię można też określić jako miejsce prostych, przecinających w dwóch punktach krzywą sześcienną skośną i należących do kompleksu liniowego ogólnego (patrz Rozdz. XIV); albo jako miejsce prostych, przecinających w dwóch punktach krzywą sześcienną skośną, a w jednym punkcie stożkową, mającą dwa punkty wspólne z krzywą sześcienną; albo wreszcie jako miejsce prostych kompleksu liniowego, będących przecięciami dwóch płaszczyzn ściśle stycznych krzywej sześciennej skośnej.

VI. (7-y gatunek Cremony, 8-y Cayley'a). Jeżeli przyjmiemy, że kompleks liniowy, o którym mowa wyżej, jest zbiorem prostych, przecinających prostą stałą, otrzymamy gatunek VI-y.

Powierzchnia ta jest utworzona przez proste, przecinające w dwóch punktach krzywą sześcienną skośną i opierające się na prostej danej R.

Prosta, liczona trzy razy, przedstawia rozwijalną dwustyczną.

Powierzchnia jest rodzaju zero.

Powierzchnia może być uważana jako miejsce prostych, łączących odpowiednie punkty prostej R i krzywej sześciennej płaskiej z punktem podwójnym, jeżeli pomiędzy punktami prostej i punktami sześciennej zachodzi odpowiedniość dwujednoznaczna (1, 1).

Równanie powierzchni jest takie jak w przypadku poprzedzającym, przy założeniu wszakże, że pomiędzy spółczynnikami zachodzi związek:

$$a^2_{22} + 2a_{22}a_{13} - 4a_{23}a_{13} + a_{11}a_{33} = 0$$

c. **Powierzchnie, których linią podwójną jest stożkowa oraz prosta ją przecinająca.** Powierzchnie te są rodzaju zero. Odróżniamy tu dwa przypadki.

VII. (2-gi gatunek Cremony, 7-y Cayley'a). Powierzchnia ta jest miejscem prostych łączących punkty odpowiednie stożkowej C i prostej R, będących w odpowiedniości (2, 1) i nie mających żadnego punktu wspólnego.

Prosta R jest prostą podwójną. Rozwijalna dwustyczna jest utworzona ze stożka kwadrykowego i z prostej R. Równanie powierzchni daje się zawsze sprowadzić do postaci:

$$(x_1x_3 - x_2^2)^2 + mx_2x_4(x_1x_3 - x_2^2) + x_4^2(ax_1x_2 + bx_2^2) = 0,$$

gdzie b jest różne od zera; stożkową podwójną jest stożkowa na płaszczyznie $x_4 = 0$, a prostą podwójną jest $x_1 = x_2 = 0$.

Powierzchnię można uważać też jako miejsce prostych, łączących punkty odpowiednie stożkowej H i prostej R, będących w odpowiedniości (2, 2) i przecinających się wzajemnie, byleby punkt ich przecięcia odpowiadał samemu sobie. Wtedy stożkowa H i prosta R są krzywemi podwójnemi.

VIII. (4-y gatunek Cremony, 11-y Cayley'a).

Jeżeli przyjmiemy, że w poprzednio podanym sposobie tworzenia stożkowa C i prosta R spotykają się i że punkt ich spotkania, jako punkt stożkowej C, zlewa się z jednym z punktów, odpowiadających mu na prostej R, wtedy mieć będziemy powierzchnię gatunku VIII.

Rozwijalną dwustyczną jest prosta R, liczona trzy razy. Stożkowa C jest stożkową podwójną powierzchni (co niema miejsca w przypadku VII).

Równanie powierzchni otrzymujemy z równania w przypadku poprzedzającym, kładąc $b = 0$.

Na stożkowej jest jeden punkt ostrzowy, dwa zaś inne są na prostej.

d. **Powierzchnie, których linię podwójną stanowią trzy proste.** Powierzchnie są rodzaju zero. Odróżniamy tu dwa przypadki.

IX. (5-y gatunek Cremony, 2-gi Cayley'a). Jedna z trzech prostych przecina dwie inne, które ze sobą nie przecinają się. Przypadek ten można uważać jako pochodny przypadku c, gdy stożkowa podwójna rozpada się na dwie proste różne.

Powierzchnia jest miejscem prostych, łączących punkty odpowiednie prostych skośnych R, R', będących w odpowiedniości (2, 2), przy warunku, że każdy z dwu punktów, w których R i R' są przecięte inną prostą R'', odpowiada dwom punktom zjednoczonym na drugiej prostej.

Na każdej z prostych R, R' są dwa punkty ostrzowe. Rozwijalna ściśle styczna składa się z trzech prostych R, R', R''. Przez każdy punkt prostej R przechodzą dwie tworzące, których płaszczyzna przechodzi przez R'; i podobnie, przez każdy punkt prostej R' przechodzą dwie tworzące, których płaszczyzna przechodzi przez prostą R.

Jedynie płaszczyzny, przechodzące przez R'', przecinają powierzchnię według właściwych stożkowych, i jedynie punkty prostej R'' są wierzchołkami stożków kwadrykowych opisanych.

Powierzchnię daną można też otrzymać jako miejsce prostych, opierających się na dwóch prostych skośnych R, R' i na stożkowej C, nie mającej punktów wspólnych z prostemi;

albo jako miejsce prostych, opierających się na dwóch prostych R, R' i na krzywej sześciennej, przecinającej w jednym punkcie każdą z prostych;

albo jako miejsce prostych, łączących punkty odpowiednie dwóch stożkowych, będacych w odpowiedniości (1, 1), byleby tylko punktom, w których jedna z nich przecina prostą przecięcia płaszczyzn dwóch stożkowych, odpowiadały punkty, w których druga stożkowa przecina tęż samą prostą, będącą tym sposobem prostą podwójną;

albo wreszcie jako miejsce prostych, łączących odpowiednie punkty prostej R i stożkowej C, nie mających punktów wspólnych i będących w odpowiedniości (1, 2), byleby tylko punktowi r prostej R, w którym ta prosta spotyka płaszczyznę stożkowej C, odpowiadały na stożkowej dwa punkty r', r'', leżące na jednej linii prostej z punktem r. Ta prosta jest wtedy prostą podwójną R'' poprzedzających konstrukcyj; prosta R' spotyka płaszczyznę stożkowej w punkcie O, przez który przechodzą wszystkie cięciwy stożkowej, łączące pary punktów, odpowiadających jednemu i temu samemu punktowi prostej R.

Równanie powierzchni daje się sprowadzić do postaci:

$$x_1^2 x_3^2 + m x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4^2 (a x_1 x_2 + b x_2^2) = 0;$$

trzema jej prostemi podwójnemi są:

$$x_1 = 0, \quad x_4 = 0; \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

X. (6-y gatunek Cremony, 5-y gatunek Cayley'a). Załóżmy w szczególności, że prosta R'' zlewa się z prostą R; wtedy otrzymujemy inny gatunek powierzchni prostoliniowych. Można go określić jak gatunek, otrzymany przy pomocy ostatniej konstrukcyi w przypadku poprzedzającym, przy założeniu, że punkt r zlewa się z punktem O, t. j. z punktem wspólnym wszystkim cięciwom, łączącym pary punktów, odpowiadających temu samemu punktowi R.

Można jeszcze określić powierzchnię sposobem następującym: ustanówmy odpowiedniość (1, 1) pomiędzy punktami prostej R a płaszczyznami, przechodzącemi przez R; te płaszczyzny przecinają stożkową C w dwóch punktach, które, połączone z odpowiednim punktem prostej R, dają tworzące powierzchni.

Rozwijalną dwustyczną przedstawia prosta R, liczona dwa razy, i inna prosta R', spotykająca prostą R w punkcie, w którym R spotyka płaszczyznę stożkowej C.

Też same proste przedstawiają i krzywą podwójną.

Równanie powierzchni daje się sprowadzić do postaci:

$$(x_2 - ax_1)^2 u_2 + (x_2 x_4 - x_1 x_3)(x_2 - ax_1) u_1 + (x_2 x_4 - x_1 x_3)^2 = 0,$$

gdzie u_2, u_1 są formami stopni 2, 1 względem x_1, x_2; prostą podwójną R' jest:

$$x_2 - ax_1 = 0, \qquad ax_4 - x_3 = 0,$$

a prostą podwójną R, mającą być liczoną dwa razy, jest $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Przecięcie powierzchni jest w ogólności krzywą rzędu 4-go z węzłem stycznościowym w punkcie, w którym prosta R przecina płaszczyznę sieczną.

e. **Powierzchnie prostoliniowe, których liniami podwójnemi są dwie proste.** Powierzchnie te są rodzaju 1. Rozróżniamy tu dwa przypadki:

XI. (11-y gatunek Cremony, 1-y Cayley'a). Dwie proste nie spotykają się. Powierzchnia jest miejscem prostych, opierających się na krzywej płaskiej rzędu 4-go z dwoma punktami podwójnemi i na dwóch prostych, z których każda przechodzi przez jeden punkt podwójny.

Powierzchnia jest też miejscem prostych, łączących odpowiadające sobie punkty prostych R, R', będących w odpowiedniości (2, 2).

Z każdego punktu prostej R wychodzą dwie tworzące, położone na płaszczyźnie, przechodzącej przez prostą R', i odwrotnie.

Rozwijalna dwustyczna składa się z prostych R, R'.

Powierzchnia uważana daje też utworzyć się jako miejsce prostych, opierających się na dwóch prostych R, R' i na krzywej sześciennej płaskiej ogólnej, którą każda z prostych R, R' spotyka w jednym punkcie.

Równanie ogólne tej powierzchni daje się sprowadzić do postaci:

$$x_1^2 (ax_3^2 + 2bx_3x_4 + cx_4^2) + 2x_1x_2 (a'x_3^2 + 2b'x_3x_4 + c'x_4^2) + x_2^2 (a''x_3^2 + 2b''x_3x_4 + c''x_4^2) = 0;$$

prostemi podwójnemi są: $x_1=0$, $x_2=0$; $x_3=0$, $x_4=0$. Na każdej z prostych podwójnych są cztery punkty ostrzowe.

VII. (12-y gatunek Cremony, 4-y Cayley'a). Przyjmijmy, że dwie proste podwójne zlewają się. Powierzchnię można tedy otrzymać z poprzedzającej, wyobrażając sobie, że krzywa płaska rzędu 4-go ma węzeł stycznościowy, powstały ze zjednoczenia w jeden dwu punktów podwójnych.

Powierzchnia jest miejscem prostych, łączących odpowiadające sobie punkty prostej i krzywej sześciennej płaskiej, mającej punkt O wspólny z prostą i będącej w odpowiedniości (2, 1) z prostą; mianowicie odpowiedniość ta ustanowia się w sposób następujący: niechaj prosta punktowa na prostej będzie rzutową względem pęku promieni z wierzchołkiem w punkcie O, i niechaj punktowi O prostej odpowiada styczna w punkcie O do krzywej; dwa punkty krzywej, które odpowiadają wtedy jednemu punktowi prostej, będą temi dwoma punktami, w których odpowiedni promień przecina krzywą sześcienną.

Krzywą podwójną powierzchni jest prosta, liczona dwa razy; taż sama prosta, dwa razy liczona, jest jej rozwijalną dwustyczną.

Równanie powierzchni daje się tak napisać:

$$u_4 + (x_2x_4 - x_1x_3)\,u_2 + (x_2x_4 - x_1x_3)^2 = 0,$$

gdzie u_4, u_2 są formami stopni 4, 2 względem x_1 i x_2, a prostą podwójną, liczoną dwa razy, jest $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Powierzchniami prostoliniowemi rzędu 4-go zajmowali się Chasles (Compt. rend. 1861) i Cayley, który w rozprawie pierwszej o nich (Phil. Trans. 1864) odróżnia tylko 8 gatunków; Cremona (Mem. di Bologna VIII. 1868), przy pomocy metod geometryi czystej, uzupełnił klasyfikacyę do 12 gatunków; a w roku następnym Cayley (Phil. Trans. 1869), podjąwszy na nowo to badanie, znalazł 12 gatunków Cremony. Badanie powierzchni prostoliniowych ze stanowiska rzeczywistości pewnych elementów podjął Rohn (Math. Ann. XXIV, XXVIII), który traktował i inne analogiczne problematy, np. zagadnienie, odnoszące się do powierzchni Kummera (patrz Rozdz. XII § 3). O powierzchniach prostoliniowych rzędu 4-go z trzema prostemi podwójnemi pisał niedawno Segen (Crelle CXII). Główne wyniki badań Cayley'a znajdują się u Salmona-Fiedlera (l. c.). Kolekcya L. Brilla zawiera całą seryę model powierzchni prostoliniowych rzędu 4-go.

Oprócz wymienionych przez nas, badano jeszcze następujące powierzchnie rzędu 4-go:

Powierzchnie rzędu 4-go z punktami potrójnemi (Lampe, Berlin 1864, Rohn, Math. Ann. XXIV); powierzchnie rzędu 4-go ze skończoną liczbą prostych (Sturm, Math. Ann. IV, Schur, Math. Ann. XX); cztery powierzchnie rzędu 4-go wymierne (Cremona, Collect. math. 1881; Nöther (Math. Ann. XXXIII) i t. d. Co się tyczy tych ostatnich, to Noether dowiódł, że są to jedyne powierzchnie rzędu 4-go wymierne, pozbawione krzywych wielokrotnych.

ROZDZIAŁ XIII.

POWIERZCHNIE RZĘDU WYŻSZEGO NIŻ CZWARTY. POWIERZCHNIE PROSTOLINIOWE.

---

§ 1.

Powierzchnie rzędu 5-go nieprostoliniowe.

Pomiędzy badanemi dotąd powierzchniami rzędu 5-go jedna z najbardziej godnych uwagi jest powierzchnia, zawierająca krzywą podwójną rzędu 5-go; Oto jej własności główne.

Krzywa rzędu 5-go, podwójna dla powierzchni, posiada punkt potrójny, który jest takimże punktem dla powierzchni.

Powierzchnia posiada 10 prostych, które są cięciwami krzywej podwójnej.

Konfiguracya tych 10 prostych jest ta sama, co konfiguracya 10 prostych, które pozostają z 16 prostych powierzchni rzędu 4-go ze stożkową podwójną, jeżeli wyłączymy jednę prostą i pięć spotykających ją prostych, albo—co wychodzi na jedno—konfiguracya ta jest ta sama, co konfiguracya 10 prostych, które pozostają z 27 prostych na powierzchni rzędu 3-go, jeżeli wyłączymy z nich dwie proste skośne i piętnaście innych, spotykających jednę lub drugą z tych dwóch prostych. Stąd:

Każda z dziesięciu prostych spotyka trzy inne; te dziesięć rozmieszczają się po dwie na

15 płaszczyznach i spotykają się w 15 punktach; przez każdą prostą przechodzą trzy płaszczyzny; na każdej z tych płaszczyzn jest pięć punktów spotkania prostych i przez każdy z tych punktów przechodzi pięć płaszczyzn.

Istnieje 5 czwórek skośnych prostych, t. j. zbiorów po 4 proste, z których żadne dwie nie spotykają się.

Powierzchnia daje się odwzorować na płaszczyźnie.

Na krzywej podwójnej jest 8 punktów ostrzowych.

Jest oczywistem, iż na powierzchni istnieje 10 układów krzywych rzędu 4-go skośnych, które są przecięciami powierzchni z płaszczyznami, przechodzącemi przez każdą z 10 prostych.

Każda krzywa układu spotyka w dwóch punktach stałych krzywą podwójną; są to te same dwa punkty, w których prosta, odpowiadająca układowi krzywych, spotyka krzywą podwójną; krzywa rzędu 4-go spotyka nadto krzywą podwójną w trzech punktach, które są naturalnie punktami podwójnemi dla krzywej rzędu 4-go.

W każdym układzie są dwie krzywe, dotykające prostej, której ten układ odpowiada; płaszczyzny tych dwóch krzywych są płaszczyznami stycznemi statecznemi; punkty styczności są punktami parabolicznemi.

Dwie krzywe rzędu 4-go, należące do dwóch układów różnych, mają 4 lub 3 punkty wspólne, stosownie do tego, czy proste, którym odpowiadają te dwa układy, przecinają się albo nie.

Istnieje pięć układów stożkowych na powierzchni, odpowiadających pięciu czwórkom skośnym prostych; mianowicie stożkowa jednego układu spotyka cztery proste jednej czwórki i nie spotyka sześciu prostych pozostałych.

Każda stożkowa spotyka krzywą podwójną w czterech punktach; dwie stożkowe tego samego układu nie spotykają się; dwie stożkowe różnych układów spotykają się w ogóle w jednym punkcie.

Powierzchnia posiada wogóle 35 płaszczyzn trójstycznych; z nich 20 płaszczyzn przecina powierzchnię według dwóch stożkowych i prostej, i 15 płaszczyzn według dwu prostych i krzywej sześciennej. Przez każdą prostą powierzchni przechodzą dwie płaszczyzny gatunku pierwszego i trzy gatunki drugiego.

Główne liczby charakterystyczne dla powierzchni są następujące (por. Rozdz. IX, § 1):

a (rząd stożka opisanego, i t.d.) = 10, δ (liczba tworzących podwójnych tego stożka) = 12, $\varkappa$ (liczba tworzących zwrotu stożka) = 18, n' (klasa powierzchni) = 12, b' (klasa rozwijalnej dwustycznej) = 25, c' (klasa rozwijalnej płaszczyzn dwustycznych) = 24, σ' (rząd krzywej parabolicznej) = 20.

Przez punkt powierzchni przechodzą 4 styczne podwójne i 12 prostych ściśle stycznych.

W każdej płaszczyźnie jest 15 prostych ściśle stycznych i 20 prostych dwustycznych. Pomiędzy stycznemi w punkcie powierzchni są cztery, które dotykają jej i gdzieindziej.

Konstrukcya rzutowa powierzchni jest następująca:

Jeżeli połączymy odpowiadające sobie punkty w dwóch układach płaszczyzn homograficznych i znajdziemy punkty spotkania prostych łączących z płaszczyznami wiązki wzajemnej względem tych płaszczyzn to otrzymamy powierzchnię; jej punktem potrójnym jest środek wiązki (Del Re).

O powierzchniach, których własności wyżej podano, mówią Clebsch (Math. Ann. III) i Cremona (tamże IV); szczegółowiej badał je Sturm (tamże IV), i jej to poświęcił pracę premiowaną Caporali (Annali di mat. VII). Pewien gatunek powierzchni, będący miejscem punktów styczności płaszczyzn, poprowadzonych z punktu stałego do kwadryk spółogniskowych, badał Darboux (Bull. des sciences math. 1871); powierzchnia ta ma własność, że 6 jej prostych przechodzi przez punkt potrójny. Inne prace o tych powierzchniach ogłosił Del Re, któremu zawdzięczamy powyższą konstrukcyę rzutową (Acc. Napoli 1886, Rend. Lincei 1890, Acc. Torino 1893).

Inną powierzchnią rzędu 5-go, badaną jak poprzednia, specyalnie przy pomocy odwzorowania płaskiego, jest powierzchnia z krzywą podwójną rzędu 3-go.

Powierzchnia ta ma 11 prostych, z których żadne dwie nie przecinają się, a które są cięciwami krzywej sześciennej podwójnej; zawiera nadto 55 stożkowych, z których każda przecina w jednym punkcie dwie z powyższych prostych. Dwie stożkowe przecinają się lub nie przecinają stosownie do tego, czy pary prostych, do których należą, nie mają prostej wspólnej lub mają taką prostą.

Powierzchnia ma 220 płaszczyzn trójstycznych, które po 20 przechodzą przez każdą prostą powierzchni; ma dalej 55 płaszczyzn trójstycznych, które są płaszczyznami, przechodzącemi przez 55 stożkowych; ma wreszcie i inne płaszczyzny trójstyczne. przecinające powierzchnię według krzywych rzędu 5-go niezniekształconych.

Przez prostą powierzchni przeprowadźmy pęk płaszczyzn: każda z nich przecina powierzchnię jeszcze według krzywej rzędu 4-go płaskiej, przecinającej prostą w dwóch punktach stałych i w dwóch ruchomych; te ostatnie tw rzą inwolucyę. Są dwie płaszczyzny szczególne, dla których krzywa rzędu 4-go jest styczna do prostej. Dwa punkty stałe spotkania krzywej rzędu 4-go z prostą są punktami, w których prosta przecina krzywą sześcienną podwójną.

Na sześciennej podwójnej znajduje się 10 punktów ostrzowych powierzchni.

Clebsch (Math. Ann. I) badał tę powierzchnię, rozpatrując jej odwzorowanie płaskie; potem zajmował się nią Sturm (tamże IV); ogłosił o niej prace Del Re (Lincei 1892—93, Acc. Modena IV, 1893).

Powierzchnię rzędu 5-go z krzywą rzędu 4-go podwójną gatunku 1-go badali Clebsch (Gött. Abh, XV, Math. Ann. III), Noether (Math. Ann. III), Sturm (tamże IV); o powierzchni rzędu 5-go z prostą podwójną pisał Cremona w rozprawie „Trasformazione birazionale dello spazio“ (Ist. Lomb. 1871), a później Del Re (Lincei 1891). Powierzchnię rzędu 5-go z dwiema prostemi skośnemi badał Clebsch (Math. Ann. I) przy pomocy odwzorowania płaskiego.

---

§ 2.

Powierzchnie rozwijalne rzędu 5-go.

Powierzchnia rozwijalna rzędu 5-go i klasy 4-ej posiada tworzącą przegięciową i krzywą podwójną rzędu 2-go.

Jedno jej przecięcie płaskie jest zawsze rodzaju zero i dlatego powierzchnia jest rodzaju zero.

Krawędzią zwrotu powierzchni jest krzywa skośna rzędu 4-go gatunku 1-go z punktem ostrzowym, potrójnym dla powierzchni.

Powierzchnia jest rozwijalną opisaną na dwóch kwadrykach, mających styczność stateczną w punkcie.

Powierzchnia rozwijalna rzędu 5-go jest obwiednią płaszczyzn stycznych, wspólnych dwóm stożkowym, mającym punkt wspólny, i takim, że jedna z nich jest styczna w punkcie wspólnym do przecięcia płaszczyzn dwu stożkowych (Cremona).

Każda tworząca powierzchni spotyka inną, którą Cremona nazywa sprzężoną z pierwszą; miejscem punktów spotkania dwu tworzących sprzężonych jest naturalnie stożkowa podwójna K. Nazywamy podobnież sprzężonemi punkty, w których dwie tworzące sprzężone dotykają krzywej ostrzowej C, a płaszczyznami sprzężonemi nazywamy płaszczyzny styczne do rozwijalnej wzdłuż dwu tworzących sprzężonych.

Wszystkie proste, łączące dwa punkty sprzężone krzywej rzędu 4-go skośnej, przechodzą przez jeden punkt; jest to punkt C, w którym tworząca przegięciowa rozwijalnej przecina płaszczyznę ściśle styczną krzywej rzędu 4-go w punkcie statecznym A; wszystkie te proste są tworzącemi stożka kwadrykowego S.

Płaszczyzna, zawierająca dwie tworzące sprzężone, jest styczna do tego samego stożka kwadrykowego S. Prosta przecięcia dwóch płaszczyzn sprzężonych jest zawsze styczna do stożkowej podwójnej K, a więc znajduje się na płaszczyźnie stałej

Tworzącą przegięciową przecinają pary płaszczyzn sprzężonych według par punktów, będących w inwolucyi, której punktami podwójnemi są: punkt B, t. j. punkt styczności krzywej rzędu 4-go i tworzącej przegięciowej, oraz punkt C, w którym taż prosta przecina płaszczyznę ściśle styczną do krzywej rzędu 4-go w punkcie A.

Punkty sprzężone na krzywej rzędu 4-go są sprzężonemi harmonicznie względem wierzchołka stożka kwadrykowego S (o którym mowa wyżej) i płaszczyzny krzywej stożkowej podwójnej K. Własność analogiczna zachodzi dla płaszczyzn sprzężonych.

Przez stosunek anharmoniczny czterech punktów krzywej rzędu 4-go skośnej rozumiemy stosunek anharmoniczny czterech płaszczyzn, przechodzących przez te cztery punkty i przez prostą, łączącą punkt stateczny A krzywej rzędu 4-go z punktem D, w którym tworząca rozwijalnej, przechodząca przez punkt A, przecina płaszczyznę styczną do rozwijalnej wzdłuż tworzącej przegięciowej.

Podobnie, stosunkiem anharmonicznym czterech płaszczyzn stycznych powierzchni rozwijalnej nazywamy stosunek anharmoniczny czterech punktów, w których te płaszczyzny styczne przecinają prostą, łączącą punkt B styczności krzywej rzędu 4-go i tworzącej przegięciowej, z punktem C, w którym ta tworząca przecina płaszczyznę ściśle styczną w punkcie A.

Mamy tedy:

Stożkowa podwójna jest obwiednią płaszczyzny, przecinającej krzywą skośną w czterech punktach, tworzących grupę równoanharmoniczną.

Stożek kwadrykowy S jest miejscem punktu, z którego można do rozwijalnej poprowadzić cztery płaszczyzny styczne, stanowiące grupę równoanharmoniczną.

Miejscem punktu, z którego można poprowadzić cztery płaszczyzny styczne harmoniczne do rozwijalnej, jest powierzchnia rzędu 3-go i klaty 4-ej.

Obwiednią płaszczyzny, przecinającej krzywą rzędu 4-go skośną w czterech punktach harmonicznych, jest powierzchnia rzędu 4-go i klasy 3-ęj.

Niechaj $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=0$, $X_4=0$ będą równaniami czterech płaszczyzn; równanie rozwijalnej rzędu 5-go daje się napisać w postaci:

$$X_1^3 X_4^2 - 18 X_1^2 X_3 X_4 + 54 X_1 X_2^2 X_3 X_4 + 81 X_1 X_3^4$$
$$- 27 X_2^4 X_4 - 54 X_2^2 X_3^3 = 0; \qquad \text{(Schwarz)}$$

$X=0$ jest płaszczyzną stateczną; punkt $X_1=X_2=X_3=0$ punktem potrójnym powierzchni, t. j. punktem ostrzowej krzywej zwrotu; tworzącą przegięcową jest prosta $X_3=X_4=0$, stożkową podwójną: $X_2=0$, $X_1 X_4-9X_3^2=0$.

Płaszczyzna styczna do powierzchni wyraża się wzorem:

$$X_1 t^4 + 4X_2 t^3 + 6 X_3 t^2 + X_4 = 0,$$

gdzie t jest parametrem dowolnym; płaszczyzna, zawierająca dwie tworzące, jest:

$$X_1 t^4 - 6 X_3 t^2 - 3 X_4 = 0,$$

a stożkiem, obwiedzionym przez tę płaszczyznę

$$X_1 X_4 - 3 X_3^2 = 0.$$

Płaszczyzna

$$X_1 t^3 + 3 X_2 t + 3 X_3 = 0$$

przechodzi przez tworzące rozwijalnej i obwodzi stożek kwadrykowy

$$3 X_2^2 - 4 X_1 X_3 = 0,$$

na którym znajduje się i krzywa rzędu czwartego, będąca przecięciem dwóch ostatnich stożków, mających wspólną płaszczyznę styczną $X_1 = 0$; wierzchołek drugiego stożka znajduje się na pierwszym stożku, t. j. prosta łącząca wierzchołki, jest tworzącą pierwszego stożka.

Spółrzędne X_1, X_2, X_3, X_5 punktu krawędzi zwrotu wyrażają się wzorami:

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 3 : - 2t : t^2 : - t^4 .$$

Rozwijalnemi rzędu 5-go zajmowali się: Cayley (Camb. J. V, 1850, Quart. J. 1863), Chasles (Comp. rend. 1862, str. 317, 418, 715), Cremona (tamże, str. 604), Schwarz (Crelle LXIV). Analityczne dowody twierdzeń Cremony dają d'Ovidio i Dino (Giorn. di Batt. III).

---

§ 3.

Powierzchnie prostoliniowe rzędu 5-go.

Powierzchnie prostoliniowe skośne rzędu 5-go mogą być rodzajów: 0, 1 i 2.

Powierzchnie rodzaju zero, zawierają wszystkie krzywą podwójną rzędu 6-go zniekształconą lub niezniekształconą, przyczem prostą poczwórną uważamy jako 6 prostych podwójnych, zlewających się, a więc jako specyalne zniekształcenie krzywej podwójnej rzędu 6-go. Powierzchnie rodzaju 1 zawierają krzywą podwójną rzędu 5-go zniekształconą lub niezniekształconą; powierzchnie rodzaju 2 zawierają krzywą podwójną rzędu 4-go zniekształconą.

Schwarz (Crelle LXVII) rozklasyfikował te powierzchnie na 10 gatunków rodzaju 0, cztery gatunki rodzaju 1 i jeden gatunek rodzaju 2.

Powierzchnie rodzajów 0 i 1 zawierają układ nieskończony krzywych płaskich rzędu 3-go, wyjąwszy te powierzchnie rodzaju zero, zawierające prostą kierowniczą, przez której punkty przechodzi jedna tylko inna tworząca.

Powierzchnie prostoliniowe skośne rodzaju zero powstają jednym z następujących dwóch sposobów: 1) Ustanawiamy odpowiedniość dwujednoznaczną pomiędzy punktami prostej a punktami krzywej rzędu 4-go płaskiej rodzaju zero; miejscem prostych, łączących odpowiadające sobie punkty, jest w ogóle powierzchnia prostoliniowa skośna rodzaju zero i rzędu 5-go: 2) Ustanawiamy odpowiedniość dwujednoznaczną pomiędzy punktami dwóch krzywych sześciennych płaskich rodzaju zero, mających punkt wspólny, odpowiadający samemu sobie; miejscem prostych, łączących odpowiadające sobie punkty, jest powierzchnia prostoliniowa skośna rodzaju zero i rzędu 5-go. Zamiast tego drugiego sposobu tworzenia można wziąć następujący 2a). Ustanawiamy odpowiedniość dwujednoznaczną pomiędzy punktami stożkowej a punktami krzywej sześciennej rodzaju zero; miejscem prostych, łączących odpowiadające sobie punkty, jest powierzchnia prostoliniowa skośna wymierna rzędu 5-go. W tej konstrukcyi stożkowa może być dana jako prosta podwójna, wtedy rozpatrujemy odpowiedniość (2, 1) pomiędzy punktami tej prostej a punktami krzywej sześciennej.

Równanie powierzchni, utworzonej pierwszym sposobem, możemy otrzymać, eliminując t pomiędzy dwoma równaniami typu:

$$X_1 t^4 + X_2 t^3 + X_3 t^2 + X_4 t + X_5 = 0; \quad X_6 t + X_7 = 0,$$

gdzie równania $X=0$ przedstawiają płaszczyzny przestrzeni; równanie powierzchni, utworzonej sposobem drugim, możemy otrzymać, eliminując t pomiędzy dwoma równaniami:

$$X_1 t^3 + X_2 t^2 + X_3 t + X_4 = 0; \quad X_5 t^2 + X_6 t + X_7 = 0;$$

Tu zamiast drugiego równania można oczywiście podstawić kombinacyę liniową obu, a więc równanie stopnia 3-go względem t.

Pierwsza konstrukcya daje powierzchnię prostoliniową skośną wymierną z prostą poczwórną ($X_6 = X_7 = 0$), t. j. typ I Schwarza; konstrukcya druga daje w ogóle powierzchnie prostoliniowe, mające jako linię podwójną krzywą rzędu 6-go z punktem potrójnym i będące rodzaju 1, t. j. typ II.

Krzywa rzędu 6-go może się zniekształcać i wtedy otrzymujemy inne przypadki, w których krzywa podwójna jest utworzona: III. z prostej potrójnej i krzywej sześciennej skośnej, mającej dwa punkty wspólne z prostą podwójną; wszystkie tworzące opierają się na prostej potrójnej (prostej kierowniczej); IV. z prostej potrójnej kierowniczej, ze stożkowej i z prostej; V. z prostej potrójnej i prostej podwójnej, obu kierowniczych, i z dwóch prostych podwójnych; VI. z prostej kierowniczej, z krzywej skośnej rzędu 5-go z punktem potrójnym i z trzech punktów podwójnych pozornych; ta krzywa ma dwa punkty wspólne z prostą; VII. z prostej kierowniczej, krzywej rzędu 4-go skośnej z punktem podwójnym i z innej prostej; krzywa rzędu 4-go przecina w jednym punkcie prostą kierowniczą; VIII. ze stożkowej i z krzywej rzędu 4-go z punktem podwójnym; stożkowa przechodzi przez ten punkt i przez dwa inne punkty krzywej rzędu 4-go; IX. z trzech stożkowych, mających jeden punkt wspólny i z których każde dwie przecinają się nadto jeszcze w jednym punkcie; X. z prostej kierowniczej i krzywej rzędu 5-go skośnej z punktem podwójnym.

Powierzchnie prostoliniowe rzędu 5-go rodzaju 1 powstają w sposób następujący: Wyobraźmy sobie na płaszczyźnie krzywą rzędu 3-go ogólną i weźmy na niej punkt, z którego rzucajmy inne punkty krzywej; te punkty będą połączone w pary. Wyobraźmy sobie, że krzywa rozszczepia się na dwie przez rozdzielenie płaszczyzn i że punkt jednej krzywej odpowiada temu z dwóch punktów drugiej, z którym nie zlewał się przed rozdwojeniem; miejscem odpowiadających sobie punktów jest powierzchnia prostoliniowa skośna rodzaju 1 (Schwarz). Rozróżniamy tu następujące gatunki: XI. Powierzchnia z krzywą rzędu 5-go podwójną; przez każdy jej punkt przechodzą dwie tworzące, z których każda przecina nadto krzywą podwójną w dwóch punktach. Przez każdy punkt przestrzeni przechodzi pięć płaszczyzn, z których każda ma dwie proste wspólne z powierzchnią; przez każdy punkt powierzchni przechodzą dwie krzywe sześcienne płaskie, leżące na powierzchni. XII. Powierzchnia z jedną prostą kierowniczą potrójną i ze stożkową podwójną, XIII. Powierzchnia z prostą kierowniczą podwójną i z prostą podwójną. XIV. Powierzchnia z prostą kierowniczą podwójną i z krzywą rzędu 4-go skośną podwójną.

Powierzchnie prostoliniowe rzędu i rodzaju 2 można utworzyć w sposób następujący: Niechaj będzie krzywa rzędu 4-go płaska z punktem podwójnym oraz pęk promieni, z tego punktu wychodzących; wyobraźmy sobie prostą punktową (a), odniesioną rzutowo do pęku w ten sposób, aby punkt prostej zlewał się z jednym z dwóch punktów spotkania odpowiadającego mu promienia z krzywą rzędu 4-go; miejscem prostych, łączących każdy punkt prostej z dwoma punktami, w których promień mu odpowiadający przecina krzywą, jest powierzchnia prostoliniowa rzędu 5-go i rodzaju 2. Prosta (a) jest prostą potrójną kierowniczą dla powierzchni, na której znajdują się nadto inne proste podwójne kierownicze.

Co do innych szczegółów patrz cytowaną pracę Schwarza, z której zaczerpnęliśmy powyższe rezultaty.

---

§ 4.

Powierzchnie rzędu 6-go albo klasy 6-ej.

Powierzchnia klasy 6-ej (badana przez S. Kantora, Wien. Berichte 1879, II, str. 768) powstaje w sposób następujący:

Niechaj będą trzy punkty A_1, A_2, A_3 przestrzeni i kwadryka F_2. Z punktu zmiennego P tej powierzchni rzucamy na nią punkty A; płaszczyzna trzech rzutów obwodzi powierzchnię klasy 6-ej. Powierzchnia ta daje się odwzorować na płaszczyźnie; ma ona płaszczyznę czworostyczną (płaszczyznę trzech punktów A), która jest ściśle styczną w każdym z punktów styczności. Dwie płaszczyzny styczne do powierzchni, przecięte według prostej przez płaszczyznę czworostyczną, są rozdzielone harmonicznie przez tę płaszczyznę i przez płaszczyznę, przechodzącą przez jej biegun względem kwadryki.

Na powierzchni opisać się daje podwójnie stożek klasy 3-ej z wierzchołkiem w rzeczonym biegunie.

Na płaszczyźnie czworostycznej są trzy proste (boki trójkąta $A_1 A_2 A_3$), przez każdą z których przechodzi nieskończenie wiele płaszczyzn dwustycznych do powierzchni.

Powierzchnią dwoiście wzajemną względem danej jest oczywiście powierzchnia rzędu 6-go; ma ona punkt czworokrotny, trzy proste podwójne przez ten punkt przechodzące, oraz krzywą podwójną rzędu 3-go.

S. Kantor badał (l. c.) i następującą powierzchnię: Niechaj będą cztery punkty A_1, A_2, A_3, A_4 i kwadryka F_2; z jednego punktu jej rzućmy na nią cztery punkty danej, znajdziemy wtedy cztery inne punkty A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 i dwa czworościany (A), (A') będące homologicznemi: płaszczyzna ich homologii obwodzi powierzchnię klasy 6-ej.

Inna powierzchnia rzędu 6-go (rozważana przez Weyra Wien. Ber. 1882, II, str. 515), powstaje sposobem następującym. Na krzywej sześciennej skośnej rozważajmy inwolucyę czterech punktów; pęki czworościanu czterech punktów każdej grupy tworzą powierzchnię prostoliniową rzędu 6-go, której krzywa potrójną jest dana krzywa sześcienna. Ściany czworościanu są płaszczyznami ściśle stycznemi krzywej klasy 3-ej. Stożek, opisany na powierzchni z wierzchołkiem w punkcie dowolnym przestrzeni, jest klasy 6-ej, i jako płaszczyzny styczne potrójne ma trzy płaszczyzny ściśle styczne krzywej klasy 3-ej, przechodzące przez punkt dany.

Noether (Math. Ann III, str. 203 i nast.) badał powierzchnię rzędu 6-go, której krzywą podwójną jest krzywa sześcienna skośna i prosta, nie przecinająca tej krzywej; równanie tej powierzchni daje się napisać:

$$\Sigma A_{ik} y_i y_k = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

gdzie:

$$y_1 = L_2 M_3 - L_3 M_2, \quad y_2 = L_3 M_1 - L_1 M_3, \quad y_3 = L_1 M_2 - L_2 L_1;$$

L, M są funkcyami jednorodnemi liniowemi spółrzędnych x_1, x_2, x_3, x_4, spółczynniki zaś A wyrażają się przy pomocy wzorów:

$$A_{ik} = \alpha_{ik} x_3^2 + 2\beta_{ik} x_3 x_4 + \gamma_{ik} x_4^2.$$

Każda płaszczyzna pęku $x_4 - \lambda x_3 = 0$ przecina powierzchnię według krzywej zmiennej rzędu 4-go wymiernej (z trzema punktami podwójnemi); prócz tego według prostej, t. j. osi pęku, liczonej dwa razy. Równanie powierzchni zawiera 18 stałych, gdyż istnienie krzywej sześciennej i prostej podwójnej pochłania 66 stałych, jak tego dowiódł Nöther.

Prócz prostej podwójnej, powierzchnia ma 10 prostych; dalej znajduje się na niej 12 stożkowych i 32 krzywe sześcienne skośne. Po dwie z tych krzywych wraz z krzywą sześcienną skośną leżą na tej samej hyperboloidzie i przechodzą przez te same dwa punkty prostej podwójnej. Każda z krzywych ma pięć punktów wspólnych z sześcienną podwójną i nie spotyka żadnej z 10 prostych. Każda z 32 sześciennych odpowiada 6 stożkowym, z których każdą przecina w jednym punkcie. Jeżeli uporządkujemy 12 stożkowych w sześć par, biorąc w jednej parze te, które przechodzą przez te same punkty prostej podwójnej, i weźmiemy pięć stożkowych dowolnie w pięciu parach, to zawsze jedna z 32 sześciennych skośnych przetnie w jednym punkcie każdą z pięciu stożkowych; szósta stożkowa, przecięta przez tęż sześcienną, będzie tym sposobem jednoznacznie określona.

Powierzchnia ta jest rodzaju zero i dlatego daje się odwzorować na płaszczyźnie. To odwzorowanie i inne własności powierzchni zbadał Noether (l. c).

Do powierzchni rzędu 6-go należą t. zw. powierzchnie styczności powierzchni Kummera, a badanie ich wiąże się z badaniem funkcyj hypereliptycznych rodzaju 2. Dotykają one powierzchni Kummera wzdłuż krzywej rzędu 12-go. Ich równanie t. zw. wymierne (bo spółczynniki jego są niezmiennikami wymiernemi formy dwójkowej rzędu 6-go) podał E. Pascal (Ann. di mat. XIX).

Inne powierzchnie rzędu 6-go badali: Pieri (Acc. Torino 1889), Humbert (Comptes rend. 1895), Del Pezzo (Acc. Napoli 1897).

Powiemy teraz słów kilka o powierzchniach rozwijalnych rzędu 6-go.

Krzywa zwrotu takiej powierzchni nie może być rzędu wyższego nad 6-y, ani niższego niż 4-y. Powierzchnia jest zawsze rodzaju zero, t. j. zerem jest rodzaj jej przecięcia płaskiego.

Istnieją trzy gatunki powierzchni rozwijalnych rzędu 6-go, mianowicie:

1. Powierzchnia, której krawędzią zwrotu jest krzywa skośna rzędu 4-go, która może być gatunku 1-go albo 2-go. W przypadku pierwszym powierzchnia ma punkt podwójny istotny i dwa punkty podwójne pozorne, jest tedy przecięciem dwóch kwadryk stycznych do siebie w jednym punkcie; w przypadku drugim ma trzy punkty podwójne pozorne. Liczbami jej charakterystycznemi są:

$$m=6,\quad a=4,\quad \beta=0;\quad x=6,\quad y=4,\quad g=6,\quad \lambda=4,$$

$$\tau=0,\quad k=6,\quad R=6.$$

Przecięcie płaskie jest krzywą rzędu 6-go i klasy 6-ej z 4 ostrzami i 6 punktami podwójnemi, 4 stycznemi przegięciowemi i 6 stycznemi podwójnemi. Co do innych własności patrz Rozdz. X, § 4.

2. Powierzchnia, której krawędzią zwrotu jest krzywa skośna rzędu 5-go z dwoma ostrzami i czterema punktami pozornemi. Liczbami jej charakterystycznemi są:

$$m=5,\quad a=2,\quad \beta=2,\quad x=5,\quad y=5,\quad g=4,\quad \lambda=2,$$
$$\tau=0,\quad k=4,\quad R=6.$$

Przecięcie płaskie jest rzędu 6-go i klasy 5-ej z 5 punktami podwójnemi, 5 ostrzami, 2 przegięciami i 4 stycznemi podwójnemi.

2. Powierzchnia, której krawędzią zwrotu jest krzywa sześcienna skośna z czterema ostrzami i sześcioma punktami podwójnemi pozornemi. Jej liczby charakterystyczne są następujące:

$$m=4,\quad a=0,\quad \beta=4,\quad x=4,\quad y=6,\quad g=3,\quad \lambda=0,$$
$$\tau=0,\quad k=3,\quad R=6.$$

Cztery płaszczyzny styczne wzdłuż czterech tworzących ostrzowych przechodzą przez jeden punkt. Przecięcie płaskie jest rzędu 6-go i klasy 4-ej z 6 ostrzami, 4 punktami podwójnemi, 3 stycznemi podwójnemi i bez przegięć.

Równanie ogólne rozwijalnej rzędu 6-go można otrzymać w ten sposób:

Niechaj $X_1=0, \ldots X_5=0$ będą równaniami pięciu płaszczyzn; formy X są oczywiście związane związkiem liniowym postaci:

$$a_1 X_1 + 4a_2 X_2 + 6a_3 X_3 + 4a_4 X_4 + a_5 X_5 = 0.$$

a równanie powierzchni będzie (Cayley):

$$(X_1X_5 + 4X_2X_4 + 3X_3^2)^3 - 27(X_1X_3X_5 - X_1X_4^2 - X_2^2X_3$$
$$+ 2X_2X_3X_4 - X_3^3)^2 = 0.$$

Krawędź zwrotu jest przecięciem cząstkowem lub zupełnem dwu powierzchni:

$$X_1 X_5 - 4 X_2 X_4 + 3 X_3^2 = 0;$$

$$X_1 X_3 X_5 - X_1 X_4^2 - X_2^2 X_3 + 2 X_2 X_3 X_4 - X_3^3 = 0;$$

krzywą podwójną albo węzłową wyrażają równania:

$$\frac{X_1 X_3 - X_2^2}{X_1} = \frac{X_1 X_4 - X_2 X_3}{2 X_2} = \frac{X_1 X_5 + 2 X_2 X_4 - 3 X_3^2}{6 X_3}$$

$$= \frac{X_2 X_5 - X_3 X_4}{X_4} = \frac{X_3 X_5 - X_4^2}{2 X_5},$$

a punkty spotkania krzywej węzłowej z krawędzią zwrotu znajdziemy z równań

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_2}{X_3} = \frac{X_3}{X_4} = \frac{X_4}{X_5}.$$

Rozmaite gatunki rozwijalnych rzędu 6-go rozróżniamy według natury ilości $a_1, \ldots, a_5$, t. j. według natury pierwiastków równania stopnia 4-go, którego spółczynnikami są te ilości (Cayley); mianowicie: jeżeli pierwiastki tego równania są różne, mamy rozwijalną, odpowiadającą krawędzi zwrotu rzędu 6-go; jeżeli dwa pierwiastki są równe, rozwijalna odpowiada krawędzi zwrotu rzędu 5-go; jeżeli są dwie pary pierwiastków równych, mamy rozwijalną, odpowiadającą krawędzi zwrotu rzędu 4-go gatunku 1-go; jeżeli wreszcie są trzy lub cztery pierwiastki równe, wtedy powierzchnia zniekształca się na powierzchnię rzędu 5-go albo 4-go.

Powierzchniami rozwijalnemi rzędu 6-go zajmowali się: Cayley (Combr. Math. J. V. 1850; Quart. J. VII 1865, IX 1867; Annali di mat. II (1868) str. 88, 219 i t. d.); Salmon (Camb. Math. J. 1850); Chasles (Comptes rendus LIV, 1862); Schwarz (Crelle LXIV). Powierzchniami prostoliniowemi rzędu 6-go zajmowali się: Bergstedt (Rozprawa, Lund. 1886), Fink (Progr. Real. Würtemb. 1887), Wiman (Lund. 1892; patrz notę w art. Wimana Acta math. XIX, p. 63).

§ 5.

Rozwijalne rzędu 7-go.

Krawędź zwrotu rozwijalnej rzędu 7-go może być rzędu 5-go, 6-go albo 7-go.

Następujące twierdzenie stosuje się do wszystkich rozwijalnych rzędu nieparzystego:

Dla każdej powierzchni rozwijalnej rzędu nieparzystego liczba płaszczyzn stycznych przegięciowych jest nieparzysta; nieparzystą jest również liczba ostrzy krawędzi zwrotu (Schwarz).

Wszystkie rozwijalne, aż do rzędu 7-go włącznie, są rodzaju zero, t. j. ich przecięcia płaskie są tego rodzaju; wynika stąd, że dla tych powierzchni suma liczb rzędowych krawędzi zwrotu i krzywej węzłowej jest stała.

Wszystkie rozwijalne, aż do 7-go rzędu włącznie, powstają jako obwiednie płaszczyzn, w równaniach których zachodzi wymiernie jeden parametr t, t j. płaszczyzn, których równania są postaci:

$$X_1 t^n + X_2 t^{n-1} + \ . \ . \ . = 0,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, X zaś są formy liniowe spółrzędnych.

Tym rozwijalnym, które Cayley nazywa płaszczyznowemi (planarnemi), poświęcona jest praca Schwarza (Crelle LXIV).

Liczby charakterystyczne dla trzech gatunków rozwijalnych rzędu 7-go są następujące:

1. Krawędź zwrotu rzędu 5-go: $m=7$, $g=10$, $h=5$, $\alpha=5$, $\beta=1$, $x=10$, $y=8$, $\lambda=7$ $\tau=2$, $k=22$, $R=13$.

2. Krawędź zwrotu rzędu 6-go: $m=6$, $g=7$, $h=7$, $\alpha=3$, $\beta=3$, $x=9$, $y=9$, $\lambda=6$, $\tau=1$, $k=18$, $R=12$.

3. Krawędź zwrotu rzędu 7-go: $m=6$, $g=5$, $h=10$, $\alpha=1$, $\beta=5$, $x=8$, $y=10$, $\lambda=5$, $\tau=0$, $k=15$, $R=11$.

---

§ 6

Powierzchnie prostoliniowe jakiegokolwiek rzędu.

W § 1 Rozdziału IX podaliśmy już niektóre własności ogólne powierzchni prostoliniowych algebraicznych, w § 4 tegoż Rozdziału inne ich własności, odnoszące się do rzędu, klasy, rodzaju, do krzywej węzłowej, do krzywych, nakreślonych na powierzchni i t. d. Nie powtarzając tych rzeczy, podamy tu jeszcze niektóre inne własności interesujące. Wymieniamy przedewszystkiem następującą własność rzutową

Każda płaszczyzna, zawierająca tworzącą powierzchni prostoliniowej skośnej, jest styczna w jednym i tylko w jednym punkcie do powierzchni, pęk zaś płaszczyzn stycznych jest rzutowy względem prostej punktów styczności wzdłuż tworzącej (Chasles).

Wymieniamy dalej następujące własności metryczne.

Jeżeli przetniemy powierzchnię prostoliniową płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny stałej, to styczne do przekrojów w punktach tej samej tworzącej tworzą paraboloidę.

Paraboloidę tworzą też normalne do powierzchni w punktach jednej tworzącej (paraboloida linij normalnych).

Nazywamy punktem środkowym (centralnym) na tworzącej spodek prostej prostopadłej do dwu nieskończenie blizkich tworzących; miejsce zaś punktów środkowych tworzy t. zw. linię zwężenia (Chasles).

Punkt środkowy tworzącej jest wierzchołkiem paraboloidy normalnych.

Nazywamy płaszczyzną środkową (centralną), należącą do danej tworzącej, płaszczyznę, przechodzącą przez tworzącą i przez prostopadłą wspólną do tej tworzącej i do drugiej nieskończenie blizkiej; nazywamy zaś pochyłością płaszczyzny stycznej kąt pomiędzy tą płaszczyzną a płaszczyzną środkową, należącą do tworzącej, przechodzącej przez punkt styczności.

Styczna (trygonometryczna) pochyłości płaszczyzny stycznej jest proporcyonalna do odległości punktu styczności od punktu środkowego.

Płaszczyzna środkowa jest styczną w punkcie środkowym; płaszczyzna środkowa i płaszczyzna styczna w punkcie nieskończenie odległym tworzącej są do siebie prostopadłe.

Nazywamy parametrem tworzącej odległość jej punktu środkowego od punktu, w którym pochyłość płaszczyzny stycznej jest $\frac{\pi}{4}$.

Jeżeli płaszczyzna przechodzi przez tworzącą powierzchni skośnej, wtedy iloczyn odległości punktu środkowego od dwóch punktów, w których ta płaszczyzna jest styczna i normalna, jest stały i równy kwadratowi parametru (Chasles).

Jeżeli dwie powierzchnie prostoliniowe skośne przecinają się pod kątem stałym we wszystkich punktach jednej tworzącej, wtedy prosta ta ma ten sam parametr i ten sam punkt środkowy tak dla jednej jak i dla drugiej powierzchni; i odwrotnie.

Na powierzchniach prostoliniowych skośnych rozważamy pewne punkty i pewne proste osobliwe. Dajmy, że jakaś tworząca spotyka drugą nieskończenie blizką; ten punkt spotkania nazywamy ostrzem (Spitze, sommet); a tworząca, na której takie ostrze się znajduje, nazywa się osobliwą (lub krawędzią, (arête, Kante, Torsalinie); płaszczyzna (styczna) przechodząca przez taką tworzącą i drugą nieskończenie blizką, nosi nazwę płaszczyzny stycznej osobliwej. Jest widocznem, że ostrze należy do linii podwójnej lub węzłowej.

Jeżeli n jest rząd powierzchni skośnej, a jej porządek (t. j. rząd a stożka na niej opisanego albo klasa a' przekroju płaskiego, patrz Rozdz. IX, § 1), wtedy liczba tworzących osobliwych wynosi:

$$T = 2a - 2n.$$

(Sturm, Math Ann. VI, Schubert, tamże XVII).

Ponieważ prosta przestrzeni określa się czterema warunkami, będziemy tedy mieli w ogóle powierzchnię prostoliniową, skoro poddamy prostą warunkom, aby opierała się na trzech krzywych danych, albo opierała się podwójnie na jednej krzywej i pojedyńczo na innej, albo wreszcie potrójnie na jednej krzywej. Powstaje wtedy zagadnienie o wyznaczeniu charakterystyk powierzchni prostoliniowych, których kierownicami są krzywe w sposób wyżej wskazany.

Zagadnieniem tem zajmowali się: Cayley (Camb. J. VII 1852, Phil. Trans. CLIII 1863), Salmon (Camb. J. VIII 1862, Trans. Irisch. Acad. XXIII) i Rupp (Math Ann. XVIII).

Tworząca powierzchni prostoliniowej może być podwójną, t. j. taką, że każdym z jej punktów są dwie różne płaszczyzny styczne do powierzchni; jeżeli te dwie płaszczyzny styczne zlewają się w każdym punkcie tworzącej, wtedy będzie ona tworzącą stateczna.

Tworząca, przechodząca przez punkty stateczne krzywej kierowniczej, jest tworzącą stateczną, i w ogóle tworząca stateczna nie może powstać innym sposobem.

Linia podwójna powierzchni prostoliniowej daje się podzielić na różne części, z których jedne są liniami kierowniczemi powierzchni, inne zaś nie. Oznaczmy przez D_N sumę rzędów krzywych podwójnych (węzłowych), które są zarazem kierownicami: przez R_N sumę rzędów krzywych podwójnych, po wyłączeniu tych, które są także kierownicami, oraz tworzących podwójnych; przez G_N — liczbę tworzących podwójnych, po wyłączeniu tworzących statecznych; przez T_N — sumę trzech liczb poprzedzających, t. j. liczbę punktów podwójnych (z wyjątkiem ostrzy) przekroju płaskiego powierzchni; przez G_S — liczbę stycznych statecznych; przez T — liczbę tworzących osobliwych; przez a — porządek powierzchni. Zachodzą wtedy związki następujące:

Przypadek 1. Trzy kierownice pojedyńcze φ, ψ, χ rzędów m_1, m_2, m_3, klas r_1, r_2, r_3, rodzajów p_1, p_2, p_3, z h_1, h_2, h_3 punktami podwójnemi pozornemi i z β_1, β_2, β_3 ostrzami. Będzie:

$$n \text{ (rząd powierzchni)} = m_1 m_2 m_3 ,$$

$$D_N = \frac{1}{2} m_1 m_2 m_3 (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1),$$

$$G_N = \frac{1}{2} m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3 - 3) + m_1 m_2 h_3 + m_2 m_3 h_1 + m_3 m_1 h_2 ,$$

$$R_N = \frac{1}{2} m_1 m_2 m_3 \left[4 m_1 m_2 m_3 - (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) - 2(m_1 + m_2 + m_3) + 5 \right]$$

$$2T_N = 2m_1 m_2 m_3 (2m_1 m_2 m_3 - 2) - (m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2)$$
$$- 3 (m_1 m_2 \beta_3 + m_2 m_3 \beta_1 + m_3 m_1 \beta_2) ,$$

$$G_S = \beta_1 m_2 m_3 + \beta_2 m_3 m_1 + \beta_3 m_1 m_2 ,$$

$$a = 2 m_1 m_2 m_3 + m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2 ,$$

$$T = 2 (m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2) .$$

Przypadek 2. Krzywa φ jest kierownicą podwójną, krzywa ψ kierownicą pojedyńczą:

$$n = m_2 \left[h_1 + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) \right] ,$$

$$D_N = \frac{1}{2} m_2 \left[h_1^2 - h_1 + m_1 m_2 (m_1 - 1)^2 - m_1 (m_1 - 1) \right] ,$$

$$G_N = h_1 h_2 + \frac{1}{4} m_1 m_2 (m_1 - 1)(m_2 - 1) + 3 m_2 (m_1 - 2)\left[h_1 - \frac{1}{6} m_1 (m_1 - 1)\right],$$

$$R_N = m_2 \left[\frac{1}{2} h_1 (m_1 - 2)(m_1 - 3) + \frac{1}{8} m_1 (m_1 - 1)(m_1 - 2)(m_1 - 3)\right]$$

$$+ m_2 (m_2 - 1) \left[\frac{1}{2} h_1^2 + \frac{1}{2} h_1 (m_1^2 - m_1 - 1)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{8} m_1 (m_1 - 1)(m_1^2 - 5 m_1 + 2\right],$$

$$2 T_N = m_2^2 \left[h_1 + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)\right]^2 - m_2 h_1 - \frac{3}{2} m_1 m_2 (m_1 - 1)$$

$$- r_1 m_2 (m_1 - 3) - h_1 r_2 - 3 \beta_2 \beta_1 - 3 \beta_1 m_2 (m_1 - 3),$$

$$G_S = \beta_2 h_1 + \beta_1 m_2 (m_1 - 2),$$

$$a = r_1 m_2 (m_1 - 3) + m_1 m_2 (m_1 - 1) + h_1 r_2 - 3 \beta_1 m_2,$$

$$T = r_1 m_2 (2 m_1 - 5) + 2 h_1 r_2 - 3 \beta_1 m_2,$$

Przypadek 3. Krzywa φ jest kierownicą potrójną (powierzchnia tworzy się z trójsiecznych krzywej, patrz Rozdz. IX, § 4):

$$n = (m - 2)\left[h - \frac{1}{6} m (m - 1)\right],$$

$$D_N = \frac{1}{2} m (h - m + 2)(h - m + 1),$$

$$G_N = \frac{1}{4}\left[- m^4 + 18 m^3 - 71 m^2 + 78 m - 48 m h + 132 h - 12 h^2\right],$$

$$R_N = \frac{1}{2} h^2 m (m - 1) - \frac{1}{6} h (m^4 - 5 m^3 + 5 m^2 - 49 m + 120)$$

$$+ \frac{1}{72} (m^6 - 6 m^5 + 31 m^4 - 270 m^3 + 868 m^2 - 840 m),$$

$$2\,T_N = m^2h^2 - 4mh^2 + 6h^2 - \frac{1}{3}\,(m^4 - 5m^3 + 11m^2 + 14m - 78)\,h$$

$$+ \frac{1}{36}\,(m^6 - 6m^5 + 13m^4 + 90m^3 - 518m^2 + 636m)\,,$$

$$G_S = \beta\,(h - 2m + 6),$$

$$a = -\,2h^2 + h\,(m^2 + 5m - 24) - \frac{1}{6}\,(16\,m^3 - 84\,m^2 + 104\,m)$$

$$-\,3\,\beta\,(h - 2m + 6)\,,$$

$$T = -\,4h^2 + 2h(m^2 + 4m - 22) - 5m^3 + 27m^2 - 34m - 6\beta\,(h - 2m + 6).$$

Otrzymujemy także powierzchnię prostoliniową, łącząc odpowiadające sobie punkty dwóch krzywych (kierownic), będących w odpowiedniości (a_1, a_2); jeżeli rzędy tych krzywych są m_1, m_2, wtedy rząd powierzchni jest $m_1 a_2 + m_2 a_1$.

Z punktu widzenia Geometryi linii prostej (patrz Rozdz. XIV) powierzchnie prostoliniowe określają się jako przecięcia trzech kompleksów prostoliniowych; mogą one być albo przecięciem zupełnem, albo też częścią przecięcia. We wzorach poniższych zakładamy przypadek pierwszy.

Jeżeli m_1, m_2, m_3 są rzędy trzech kompleksów, wtedy rząd powierzchni prostoliniowej jest $n = 2m_1m_2m_3$, a jej porządek:

$$a = 2\,m_1\,m_2\,m_3\,(m_1 + m_2 + m_3 - 2) - 2\,G_N.$$

Rząd krzywej podwójnej daje wzór:

$$D = m_1\,m_2\,m_3\left[2\,m_1m_2m_3 - (m_1 + m_2 + m_3) + 1\right],$$

a rodzaj powierzchni:

$$p = m_1m_2m_3\,(m_1 + m_2 + m_3 - 4) - 1 - G_N.$$

Wzory te ulegają zresztą zmianom, stosownie do rozmaitych właściwości uważanych kompleksów.

Jeżeli jeden z kompleksów jest liniowym ($m_3 = 1$), wtedy krzywe asymptotyczne algebraiczne powierzchni są klasy (porządku)

$$12 m_1 m_2 (m_1 + m_2 - 2) \text{ i rzędu } 2 m_1 m_2 (m_1 + m_2 - 1).$$

Liczby te ulegają zmianom, jeżeli kompleksy dane pozostają z sobą w związkach specyalnych; jeżeli np. i $m_2 = 1$, wtedy liczby powyższe nie stosują się już, gdy dwa kompleksy liniowe mają wspólną kongruencyę specyalną (patrz Voss, Math. Ann. VIII, p. 82—83).

Na powierzchni jest ∞^1 punktów, w których styczna do powierzchni ma styczność czteropunktową. Krzywa tych punktów styczności jest rzędu

$$2 m_1 m_2 m_3 \left[6 (m_1 + m_2 + m_3) - 19 \right]$$

i zawiera

$$8 m_1 m_2 m_3 \left[3 (m_1 + m_2 + m_3) - 10 \right]$$

punktów, w których jest styczna do tworzących danej powierzchni; tworzące te są stycznemi statecznemi krzywej asymptotycznej algebraicznej. Co do stycznych, mających styczność rzędu 4-go, patrz Voss (l. c. str. 99).

Powierzchnia prostoliniowa rzędu n bez tworzących wielokrotnych, będąca rodzaju zero, jest porządku $2(n-1)$ i zawiera krzywą podwójną rzędu $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Jest $2(n-2)(n-3)$ tworzących stycznych do krzywej podwójnej, $\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$ punktów potrójnych i tyleż płaszczyzn trójstycznych.

Jest $2(n-2)$ tworzących osobliwych w znaczeniu powyżej wskazanem.

Powierzchnia prostoliniowa, utworzona ze stycznych o styczności czteropunktowej, jest rzędu $8(n-3)$ i tyleż jest punktów, w których krzywa tych punktów styczności jest styczną do tworzącej. Rodzaj tej prostoliniowej wynosi $4n-13$.

Na danej powierzchni prostoliniowej jest $10(n-4)$ punktów, w których styczna ma styczność rzędu 4-go z powierzchnią.

Linie asymptotyczne powierzchni prostoliniowej rzędu n_1+n_2 rodzaju zero i mające za kierownice dwie proste odpowiednio n_1-krotne i n_2-krotne, są krzywemi algebraicznemi rzędu $2(n_1+n_2-1)$ (Cremona, Ann. di mat. I).

Jeżeli dwie kierownice zbliżają się do siebie nieograniczenie aż do zlania się, wtedy linie asymptotyczne stają się rodzaju zero i rzędu $2n_1+n_2-2$ (gdy $n_1 \geqslant n_2$) (Cremona, tamże).

Pierwsze i zasadnicze własności metryczne powierzchni prostoliniowych znaleźli i zbadali: Monge (Addition à la Géom. descr.), Hachette (Crelle VIII), Chasles (Journ. de Liouv. II) i t. d. patrz De La Gournerie Géométrie déscript. Cayley, Salmon, Rupp w pracach już cytowanych zajmowali się zagadnieniami, dotyczącemi liczb charakterystycznych dla powierzchni prostoliniowych, mających kierownice oznaczone. Linie asymptotyczne powierzchni tych badali Clebsch (Crelle LXVIII), Cremona (l. c.), Voss (l. c.) i inni. Powierzchniom prostoliniowym szczególnym poświęcona jest książka De La Gournerie „Recherches sur les surfaces réglées tetraédrales symétriques“ (Paryż 1867). Lüroth (Crelle LXVII) i Voss (Math. Ann. VIII) badali powierzchnie prostoliniowe, które można uważać jako przecięcia zupełne trzech kompleksów linij prostych. Prostoliniowe wymierne (rodzaju zero) badali: Cremona (l. c.), Armenante (Annali di mat. IV), Clebsch (Math. Ann. V), Noether (Math. Ann. III str. 184); ten ostatni badał prostoliniową wymierną rzędu n, mającą prostą $n-1$-krotną.

Najnowsze badania o powierzchniach prostoliniowych z punktu widzenia Geometryi na powierzchni i przy rozważaniu przestrzeni wielowymiarowych ogłosił Segre (Acc. Torino 1884, 1886; Lincei 1897; Math. Ann. XXXIV).

§ 7.

Powierzchnie wymierne, powierzchnie o przekrojach wymiernych, eliptycznych, hypereliptycznych.

Nazywamy powierzchnie wymiernemi (jednobieżnemi, homaloidalnemi) wtedy, gdy dają się sprowadzić do odpowiedniości dwujednoznacznej z płaszczyzną. Do twierdzeń, podanych o nich w § 7 Rozdziału IX, dołączamy tu następujące:

Warunki na to, aby powierzchnia rzędu n z krzywą podwójną rzędu d i rodzaju π, mającą t punktów potrójnych, będących zarazem równocześnie takiemiż punktami dla powierzchni, była wymierna, są następujące:

1) rodzaj liczbowy powierzchni (Rodz. IX, § 4) ma być zerem, t. j.

$$p = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)\,d + 2t + \pi - 1 = 0;$$

2) nie mają istnieć powierzchnie rzędu $2(n-4)$, przechodzące podwójnie przez krzywą podwójną (prócz powierzchni, zawierających daną).

Każda taka powierzchnia, dla której spółrzędne jakiegokolwiek punktu wyrażają się w funkcyi wymiernej dwu parametrów, jest wymierną. Twierdzenia tego i analogicznego do twierdzenia Lürotha dla krzywych dowiódł Castelnuovo (Math. Ann. XLIV, XLVIII, str. 313).

Każda powierzchnia rzędu 3-go jest wymierna, wyjąwszy stożek ogólny rzędu 3-go.

Każda powierzchnia rzędu 4-go, mająca linie wielokrotne, jest wymierną, prócz powierzchni prostoliniowych rodzaju wyższego od zera. Pomiędzy powierzchniami rzędu 4-go, nie mającemi linij podwójnych, są tylko cztery gatunki wymierne. Jeden z nich zbadał Cremona (Collect. math. Medyolan 1881), pozostałe wraz z tym pierwszym Noether (Math. Ann. XXXIII).

Każda powierzchnia, zawierająca układ pojedyńczo-nieskończony krzywych wymiernych, i taka, że przez każdy punkt powierzchni przechodzi jedna tylko krzywa układu, daje się przekształcić dwuwymiernie na powierzchnię prostoliniową (odwzorować na powierzchni prostoliniowej); jeżeli układ rzeczony jest wymierny, to i sama powierzchnia jest wymierną. Własność tę badał Noether (Math. Ann. III), który udowodnił całkowicie ostatnią część twierdzenia; co do przypadku ogólnego patrz Enriques (Rend. Lincei 1898 i Math. Ann. LII).

Każda powierzchnia, zawierająca układ podwójnie nieskończony krzywych eliptycznych, jest wymierna albo daje się przekształcać dwuwymiernie na powierzchnię prostoliniową rodzaju 1 (t. j. odwzorować na takiej powierzchni). (Castelnuovo Rend. Lincei 1894).

Co do przypadku, w którym krzywe układu liniowego są hypereliptyczne, patrz Castelnuovo (tamże).

Powierzchnia, której wszystkie przecięcia płaskie są krzywemi wymiernemi, jest prostoliniową albo powierzchnią rzędu 4-go Steinera (Picard, Crelle C, patrz Rozdz. XII, § 9).

Powierzchnia, której wszystkie przecięcia płaskie są krzywemi eliptycznemi, jest wymierną albo prostoliniową; w przypadkn pierwszym rodzaj jej nie może być wyższy nad 9 (Castelnuovo, Rend. Lincei 1894).

Powierzchnia, której wszystkie przecięcia płaskie są krzywemi hypereliptycznemi, jest wymierną (i zawiera pęk stożkowych) albo jest prostoliniową (Enriques, Lincei 1893).

Podane tu i inne wyniki zebrali Castelnuovo-Enriques we wspólnej pracy, ogłoszonej w Math. Ann. XLVIII, str. 307 i nast

Ci sami uczeni dowiedli niedawno (Comptes rendus 5 listopada 1900, str. 439 i dalsze) następującego twierdzenia ogólnego: Jeżeli powierzchnia algebraiczna zawiera układ liniowy krzywych C rodzaju $\pi > 0$, z których każde dwie przecinają się w n punktach. gdzie $n > 2\pi - 2$, wtedy jest wymierną, albo też przy pomocy przekształcenia dwuwymiernego daje się sprowadzić do walca $(x, y) = 0$ rodzaju $p > 0$.

Z tego twierdzenia wynika:

1. Jeżeli powierzchnia algebraiczna zawiera szereg ciągły krzywych wymiernych C, wtedy albo jest wymierna, albo daje się sprowadzić do walca rodzaju wyższego od zera. 2. Powierzchnie, dopuszczające szereg przekształceń dwuwymiernych na siebie same, nie tworzących grupy skończonej, są albo wymiernemi albo dają się sprowadzić do walców.

Kwestyami temi zajmował się pierwszy Picard (J. de math. (4) V), i wyczerpał przypadek grupy przemiennej ∞^2, który prowadzi do klasy powierzchni hypereliptycznych, badanych szczegółowo przez Humberta (J. de math. (4), IX). Patrz też cytowaną pracę Castelnuovo-Enriques (Math. Ann. XLVIII); dzieło Painlevégo (Leçons sur la théorie analytique des équ. diff. Paryż 1897), zajmuje się teoryą przekształceń powierzchni na same siebie.

ROZDZAŁ XIV.

GEOMETRYA PROSTĘJ W PRZESTRZENI. GEOMETRYA KULI.

---

§ 1.

Wiadomości ogólne. Spółrzędne prostej w przestrzeni.

Prosta w przestrzeni wyznacza się przez cztery warunki elementarne, a stąd przestrzeń prostoliniową (której elementem jest prosta), można uważać za przestrzeń czterowymiarową (nie liniową lecz kwadratową).

Niechaj x_1, x_2, x_3, x_4 będą spółrzędne jednorodne punktu przestrzeni; y_1, y_2, y_3, y_4 — spółrzędne innego punktu; utwórzmy wyznaczniki rzędu 2-go macierzy

$$\left|\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \end{matrix}\right|$$

i połóżmy:

$$p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i. \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Stosunki dwu którychkolwiek z tych sześciu wielkości p_{ij} nie zmieniają się, jeżeli zamiast jednego lub obu punktów (x), (y) weźmiemy inny jakikolwiek punkt prostej je łączącej; wielkości tedy p_{ij} można uważać za spółrzędne jednorodne prostej w przestrzeni. Pomiędzy temi spółrzędnemi ma miejsce jedyny związek tożsamościowy:

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

Przez takie określenie spółrzędnych prosta jest uważana jako miejsce punktów, i spółrzędne te nazywają też promieniowemi (Strahlencoordinaten, Plücker).

Jeżeli zaś uważać będziemy prostą jako obwiednią płaszczyzn, otrzymamy analogicznie spółrzędne osiowe (Axencoordinaten). Niechaj (u), (v) będą spółrzędnemi jednorodnemi dwu płaszczyzn, przechodzących przez prostą; uważajmy dwumiany $\pi_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$. Stosunki dwu którychkolwiek wielkości π_{ij} są niezależne od wyboru dwu płaszczyzn szczególnych (u), (v), przechodzących przez prostą; a zatem wielkości π_{ij} można uważać jako spółrzędne osiowe prostej w przestrzeni; pomiędzy niemi zachodzi jedyny związek tożsamościowy:

$$\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi_{23} = 0.$$

Warunki na to, aby dwie proste o spółrzędnych (p) i (p') spotykały się (znajdowały się na jednej płaszczyźnie), wyraża się w ten sposób:

$$p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} + p'_{12}p_{34} + p'_{13}p_{42} + p'_{14}p_{23} = 0.$$

Sześć prostych przestrzeni, dla których pięć z pomiędzy sześciu spółrzędnych są zerami, są krawędziami czworościanu podstawowego

Spółrzędne p wyrażają się przez spółrzędne prostokątne Descartes'a przy pomocy wzorów:

$$p_{14} = x - x', \quad p_{24} = y - y', \quad p_{34} = z - z',$$

$$p_{23} = yz' - zy', \quad p_{31} = zx' - xz', \quad p_{12} = xy' - yx';$$

będziemy tę spółrzędne oznaczali odpowiednio przez l, m, n, L, M, N.

Podajmy niektóre wzory zasadnicze, odnoszące się do własności metrycznych.

Kąt pomiędzy dwiema prostemi (l, m, n, L, M, N), ($l_,$, m', n', L', M', N') wyrażają wzory:

$$\cos(r, r') = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)}},$$

$$\sin^2(r, r') = \frac{\begin{Vmatrix} l' & m' & n' \\ l & m & n \end{Vmatrix}^2}{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)}.$$

Odległość pomiędzy dwiema prostemi wyraża wzór:

$$\text{odl.}\,(r, r') = \frac{lL' + mM' + nN' + Ll' + Mm' + Nn'}{\sqrt{\begin{Vmatrix} l, & m, & n \\ l' & m' & n' \end{Vmatrix}^2}},$$

Momentem dwóch prostych nazywamy, według Cayley'a, iloczyn wstawy kąta pomiędzy niemi przez najmniejszą pomiędzy niemi odległość; z wzorów poprzedzających wynika, że moment ten wyraża się w ten sposób:

$$\text{mom.}\,(r, r') = \frac{lL' + mM' + nN' + Ll' + Mm' + Nn'}{\sqrt{(l^2+n^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)}}.$$

Sześć spółrzędnych jednorodnych ogólnych prostej są proporcyonalne do sześciu momentów prostej względem każdej z sześciu krawędzi czworościanu podstawowego spółrzędnych, t. j. względem sześciu prostych przestrzeni, dla których pięć z pomiędzy sześciu spółrzędnych są zerami.

Wzory poprzedzające i jeszcze inne podał Cayley (Camb. Trans. XI, część 2-a); co do wzorów analogicznych współrzędnych p_{ij} patrz D'Ovidio (Giorn. di Batt. VIII, XI).

Inny układ spółrzędnych wprowadza Zeuthen (Math. Ann. I); tu spółrzędnemi jednorodnemi prostej są objętości sześciu czworościanów; dwiema krawędziami przeciwległemi każdego z nich jest odcinek (jedność), wzięty na prostej, i jedna z sześciu krawędzi czworościanu podstawowego.

Spółrzędne te czynią zadość związkowi jednorodnemu stopnia 2-go o trzech wyrazach, podobnemu do tego, jakiemu czynią zadość spółrzędne p_{ij} (patrz też Drach, Math. Ann. II, D'Ovidio, Giorn. di Batt. X).

Od sześciu spółrzędnych p_{ij} możemy przy pomocy przekształcenia liniowego przejść do układu liniowego spółrzędnych $x_i (i=1, 2, \ldots 6)$, w ten sposób, aby związek kwadratowy, któremu czynią zadość spółrzędne p, przekształcił się na związek kwadratowy specyalny $\Sigma x_i^2 = 0$. Te spółrzędne x_i nazywają się spółrzędnemi Kleina (patrz Math. Ann. II i rozprawę inauguracyjną, Bonn 1898, ogłoszoną i w Math. Ann. XXIII).

Piękna interpretacya geometryczna tego przekształcenia jest następująca: Uważajmy wielkości p_{ij} za spółrzędne jednorodne punktu w przestrzeni pięciowymiarowej, wtedy związek stopnia drugiego, któremu te spółrzędne czynią zadość, przedstawia w tej przestrzeni kwadrykę niezniekształconą (gdyż wyróżnik jej jest różny od zera); każdy punkt tej kwadryki odpowiada tym sposobem jednej prostej w przestrzeni, i odwrotnie; geometrya na tej kwadryce odpowiada tedy geometryi linii prostej.

Wykonajmy przekształcenie liniowe spółrzędnych w przestrzeni pięciowymiarowej w ten sposób, aby równanie tej kwadryki przybrało postać $\Sigma x_i^2 = 0$, t. j. postać formy. zawierającej tylko kwadraty spółrzędnych (co uskutecznić można nieskończenie wieloma sposobami); nowe spółrzędne są rzeczonemi wyżej spółrzędnemi Kleina. Otóż wiadomo, że jeżeli równanie kwadryki jest dane w tej formie, wtedy przestrzenie liniowe $x_i = 0$ są parami sprzężone względem kwadryki, t. j. biegun jednej z nich względem kwadryki znajduje się na drugiej (własność ta jest uogólnieniem własności stożkowych, podanej w § 3

Rozdz. IV i własności kwadryk, podanej w § 2 Rozdz. V); a zatem przestrzenie podstawowe nowego układu są parami sprzężone względem kwadryki zasadniczej.

Jeden związek pomiędzy spółrzędnemi prostych przedstawia ∞^3 prostych przestrzeni i dla tego nazywa się kompleksem prostych; dwa związki pomiędzy spółrzędnemi prostych przedstawiają ∞^2 prostych, czyli t. zw. kongruencyę prostych; wreszcie trzy związki pomiędzy spółrzędnemi prostych przedstawiają powierzchnię prostoliniową.

Cztery związki tego gatunku przedstawiają w ogóle liczbę skończoną prostych w przestrzeni.

Określamy tedy kompleks jako rozmaitość (mnogość) ∞^3 prostych i nazywamy kompleksem algebraicznym rozmaitość ∞^3 prostych, których spółrzędne są funkcyami trzech parametrów niezależnych. Mamy twierdzenie:

Każdy kompleks algebraiczny daje się całkowicie przedstawić przez jeden tylko związek algebraiczny pomiędzy sześcioma spółrzędnemi prostych. Twierdzenie to, przy stosowaniu powyższej kwadryki w przestrzeni pięciowymiarowej, daje się wysłowić tak:

Każda przestrzeń algebraiczna trójwymiarowa, zawarta w kwadryce zasadniczej, jest zawsze przecięciem zupełnem tejże kwadryki z inną przestrzenią algebraiczną czterowymiarową.

Jeżeli związek algebraiczny, przedstawiający kompleks algebraiczny, jest stopnia n, wtedy i kompleks ten jest stopnia n-tego.

Stopień kompleksu równa się rzędowi stożka, utworzonego przez wszystkie proste, należące do kompleksu a przechodzące przez jakikolwiek punkt przestrzeni (stożek kompleksu).

Na płaszczyźnie mamy ∞^1 prostych kompleksu, obwodzących krzywą, zwaną krzywą kompleksu (Complexcurve); klasa tej krzywej równa się stopniowi kompleksu.

Pojęcia rzędu i klasy zlewają się dla kompleksu, i mamy tu jedyną liczbę charakterystyczną, mianowicie stopień, który jest liczbą prostych, przechodzących przez jeden punkt i położonych na jednej płaszczyźnie.

Kongruencya nazywa się algebraiczną, jeżeli jest przecięciem cząstkowem albo zupełnem dwóch kompleksów algebraicznych. Rzędem kongruencyi algebraicznej nazywamy liczbę jej prostych, przechodzących przez jeden punkt przestrzeni; klasą zaś jej nazywamy liczbę jej prostych, znajdujących się na jednej płaszczyźnie.

Dwa kompleksy stopni n i n' mają wspólną kongruencyę rzędu nn' i klasy nn'; trzy kompleksy stopni n, n', n'' mają wspólną powierzchnię prostoliniową rzędu $2nn'n''$; cztery kompleksy stopni n, n', n'', n''' mają wogóle $2nn'n''n'''$ prostych wspólnych.

Dwie kongruencye rzędów n, n' i klas m, m' mają w ogóle $nn' + mm'$ prostych wspólnych (Halphen, Comp. rend. 1872).

Wszystkie proste, przecinające krzywą algebraiczną rzędu n, tworzą kompleks algebraiczny stopnia n; wszystkie proste, przecinające prostą daną, tworzą kompleks liniowy specyalny (mający jedną kierownicę).

Wszystkie proste, opierające się na dwóch krzywych rzędów n_1, n_2, tworzą kongruencyę rzędu i klasy $n_1 n_2$; wszystkie proste, przecinające dwie proste dane, tworzą kongruencyę rzędu i klasy 1, t. j. kongruencyę liniową.

Wszystkie proste, przecinające trzy krzywe algebraiczne rzędów n_1, n_2, n_3, tworzą powierzchnię prostoliniową rzędu $2n_1 n_2 n_3$ (Cayley, patrz też § 6, Rozdz. XII).

Istnieją dwie proste, przecinające równocześnie cztery proste dane (Tw. Steinera, Systemat. Entwickel i t. d., Werke I, str. 284).

Istnieje $2n_1 n_2 n_3 n_4$ prostych, opierających się na krzywych algebraicznych rzędów n_1, n_2, n_3, n_4.

Wszystkie proste styczne do powierzchni algebraicznej rzędu n i porządku a (patrz Rozdz. IV § 1 i Rozdz. XIII § 6) tworzą kompleks stopnia a (specyalny).

Jeżeli pominiemy pewne badania dawniejsze, a pomiędzy niemi niektóre Cayley'a, to będzie można powiedzieć, że Geometrya prostej jest nauką, powstałą wraz z dziełem „Neue Geometrie des Raumes" Plückera (Lipsk 1868—9), który już od roku 1865 ogłaszał prace o tym samym przedmiocie (Lond. math. Soc. 1865, Phil. Trans. 1865). W latach 1866—1868 Battaglini ogłosił (Acc. Nap. Rend. 1866; Atti Acc. Nap. 1866, IV 1868; Giorn. di Batt. VI, VII, X) badania własne nad kompleksami, podał ich własności ogólne, teoryę pewnego szczególnego kompleksu kwadratowego, który nosi jego nazwisko, zaproponował znakowanie symboliczne, które później Clebsch udoskonalił (patrz § 2), wreszcie podał liczne zastosowania Geometryi linii prostej do mechaniki (Acc. Napoli 1869—1870). Pomiędzy pracami, następującemi po tamtych, wymieniamy prace Clebscha (Math. Ann. II, X), Kleina (tamże II, V, VII, XXII i t.d., rozprawa z r. 1868 przedrukowana w Math. Ann. XXIII), Liego (Math. Ann. V, patrz „Prace mat. fiz.", Warszawa, t. XI), Reye'go patrz § 4), Vossa (Math. Ann. IX), Segrego (Acc. Torino, 1883—1884) i t. d. Sturm ogłosił w trzech tomach traktat systematyczny o tej teoryi (Die Gebilde I u. II Grades der Liniengeometrie, Lipsk 1892—93—96). Szczegóły bibliograficzne, które podamy jeszcze w następnych paragrafach, znaleść można w wielokrotnie cytowanej pracy historycznej prof. Loria.

Sturm w cytowanem wyżej dziele wprowadza odmienne nieco nazwy dla kompleksów i kongruencyj; kompleks liniowy nosi u niego nazwę Strahlengewinde albo wprost Gewinde; kompleks liniowy specyalny nazywa Strahlengebüsch albo wprost Gebüsch, kongruencya liniowa — Strahlennetz. Niektórzy autorowie niemieccy przyjęli te nazwy.

§ 2.

Kompleks algebraiczny ogólny stopnia n. Znakowanie symboliczne Battagliniego i Clebscha. Formy niezmiennicze kompleksu.

Kompleks algebraiczny stopnia n indywidualizuje się przez

$$\binom{n+5}{5} - \binom{n+3}{5} - 1$$

prostych, skąd wynika, że do wyznaczenia kompleksu liniowego potrzeba 5 prostych, kwadratowego zaś 19 prostych.

Wszystkie proste kompleksu, opierające się na określonej prostej w przestrzeni, tworzą naturalnie kongruencyę, która jest przecięciem zupełnem kompleksu z innym kompleksem liniowym specyalnym, utworzonym przez proste, opierające się na prostej danej; wszystkie proste tej kongruencyi są stycznemi do jednej i tej samej powierzchni, która nazywa się powierzchnią kompleksu (Complexfläche, Plücker) Stosownie do tego, czy prosta dana znajduje się w skończoności lub w nieskończoności, powierzchnia kompleksu nazywa się południkową albo równikową (Plücker).

Jeżeli przez prostą daną przesuniemy płaszczyznę, to wszystkie proste kompleksu, znajdujące się na tej płaszczyźnie, obwodzą krzywą; powierzchnia kompleksu jest miejscem takich krzywych obwiednich.

Stożek, którego wierzchołek znajduje się w punkcie prostej a tworzące są prostemi kompleksu, jest opisany na powierzchni kompleksu, stąd powierzchnię tę można uważać jako obwiednią stożków kompleksu, których wierzchołki znajdują się w punktach prostej.

Powierzchnie kompleksu stopnia n są rzędu i klasy $2n(n-1)$, a prosta, na której opierają się jej styczne, będące prostemi kompleksu, jest prostą wielokrotną rzędu $n(n-1)$; prosta ta jest wielokrotną dla powierzchni uważanej już to jako miejsce, już to jako obwiednia. Dla kompleksu stopnia 2-go, powierzchnie te są zatem rzędu 4-go i klasy 4-ej i mają prostą podwójną.

Proste przestrzeni, do której należą powierzchnie kompleksu, przechodzące przez jeden punkt albo styczne do tej samej płaszczyzny, tworzą kompleks stopnia $n(n-1)$.

Istnieją pewne punkty w przestrzeni, w których proste kompleksu, przez nie przechodzące, tworzą stożek z podwójną tworzącą; są też pewne płaszczyzny w przestrzeni takie, że obwiednie prostych kompleksu, znajdujących się na tych płaszczyznach, mają styczne podwójne. Te punkty i te płaszczyzny nazywają się osobliwemi; miejscem pierwszych jest powierzchnia, będąca obwiednią drugich (Pasch, Rozpr. Giessen 1870, Crelle LXXVI) i nazwana powierzchnią osobliwości kompleksu.

Prosta podwójna dla stożka, wychodząca z jednego z jej punktów, jest też podwójną dla obwiedniej, położonej na jednej z płaszczyzn, przez nią przechodzących. Ta prosta nazywa się prostą osobliwą kompleksu.

Może się zdarzyć, że wszystkie punkty prostej są punktami osobliwemi i wszystkie płaszczyzny, przechodzące przez nią, są płaszczyznami osobliwemi; wtedy prosta jest prostą podwójną kompleksu. Lecz nie może to mieć miejsca w kompleksie ogólnym.

Powierzchnia osobliwości kompleksu stopnia n jest rzędu i klasy $2n(n-1)^2$ (Clebsch, Math. Ann V). Proste osobliwe kompleksu są przecięciami zupełnemi kompleksu z innym kompleksem stopnia $2(n-1)$, tworzą przeto kongruencyę stopnia i klasy $2n(n-1)$.

Podajemy tu następujące twierdzenia Clebscha (Math. Ann. V):

Wierzchołki stożków, należących do kompleksu stopnia n i przeciętych przez prostą stałą w n punktach, dla których znika pewien niezmiennik dwójkowy stopnia k, tworzą powierzchnię stopnia kn, zawierającą tę prostą stałą, jako wielokrotną o wielokrotności $\frac{kn}{2}$.

Proste, przecinające stożek, należący do kompleksu stopnia n, w n punktach, mających określoną własność niezmienniczą, (dla których znika pewien niezmiennik dwójkowy stopnia k), tworzą kompleks stopnia $\frac{kn}{2}$.

Tym twierdzeniom odpowiadają oczywiście twierdzenia dwoiste, które otrzymujemy, zastępując wierzchołki stożków płaszczyznami krzywych obwiednich, prostą punktową pękiem płaszczyzn i t. d.

W przypadku $n=4$ otrzymujemy:

Wierzchołki stożków, należących do kompleksu stopnia 4-go i przeciętych przez prostą stałą w czterech punktach równoanharmonicznych albo harmonicznych, tworzą powierzchnię rzędu 8-go albo 12-go, której ta prosta jest poczwórną lub poszóstną.

Proste, przecinające stożek określony stopnia 4-go w czterech punktach równoanharmonicznych albo harmonicznych, tworzą kompleks stopnia 4-go albo 6-go.

Mając kompleks $C=0$ stopnia n, możemy określić kompleksy biegunowe prostej wprzestrzeni w sposób zupełnie analogiczny do tego, jaki jest stosowany w zwykłej teoryi biegunowości; jeżeli p'_{ij} są spółrzędnemi prostej danej, wtedy równanie $\Sigma \frac{\partial C}{\partial p_{ij}} p'_{ij}=0$ przedstawia kompleks stopnia $n-1$, nazwany kompleksem biegunowym danego. W ten sposób otrzymujemy inne kompleksy biegunowe.

Battaglini, a po nim Clebsch, wprowadził w przedstawieniu analitycznem kompleksów rachunek symboliczny, analogiczny do rachunku, używanego w teoryi niezmienniczej krzywych i powierzchni. Oto ten rachunek w postaci, udoskonalony przez Clebscha (Math. Ann. II).

Jeżeli spółrzędnemi są p_{ij}, to równanie kompleksu algebraicznego jest postaci:

$$\sum_1^4 a_{ij,\,kh,\,lm} \ldots p_{ij} p_{kh} p_{lm} \ldots = 0;$$

położmy symbolicznie:

$$a_{ij,\,kh,\,lm} \ldots = a_{ij} a_{kh} a_{lm} \ldots \ldots,$$

wtedy strona pierwsza poprzedzającego równania wyrazi się jako potęga symboliczna wyrażenia liniowego, t. j. jako

$$\left[\sum_1^4 a_{ij} p_{ij}\right]^n,$$

gdzie symbole a_{ij} mają własność zmieniania znaku przy przestawianiu skażników i i j. Otóż dowodzi się, że można zawsze i to tylko jednym sposobem wyrazić stronę pierwszą równania kompleksu jako n-tą potęgę symboliczną pierwszej strony równania kompleksu liniowego (symbolicznego) specyalnego, t. j. mającego prostą stałą, jako kierownicę.

Niechaj $P=0$ będzie równaniem kwadratowem, któremu czynią zadość spółrzędne p_{ij}; jest widocznem, że równanie $F=0$ każdego kompleksu stopnia $n>1$ daje się zawsze przedstawić w postaci $F+MP=0$, gdzie $F=0$ jest równaniem danem, M zaś formą stopnia $n-2$ ze spółczynnikami dowolnemi. Jeżeli w powyższem wyrażeniu symbolicznem położymy:

$$a_{ij} = a_i b_j - a_j b_i \qquad (i, j = 1, 2, 4, 4),$$

wtedy kompleks liniowy $\Sigma a_{ij} p_{ij} = 0$ staje się kompleksem prostych, opierających się na prostej, łączącej dwa punkty (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4); lecz to znakowanie symboliczne daje się stosować wtedy tylko, kiedy pomiędzy spółczynnikami istotnemi kompleksu zachodzą pewne związki liniowe, stające się tożsamościowemi, gdy spółczynniki istotne wyrazimy przy pomocy czynników typu $a_i b_j - a_j b_i$. Otóż jedyny związek, istniejący pomiędzy temi czynnikami, jest

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_3 b_4 - a_4 b_3) + (a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_4 b_2 - a_2 b_4)$$
$$+ (a_1 b_4 - a_4 b_1)(a_2 b_3 - a_3 b_2) = 0.$$

Stąd jedynemi związkami stopnia n-tego pomiędzy wyznacznikami typu $a_i b_j - a_j b_i$ będą te, które otrzymujemy, mnożąc związek poprzedzający przez jakąkolwiek kombinacyę jednomianową stopnia $n-2$ tychże wyznaczników; jeżeli to uczynimy, to każdy z trzech wyrazów poprzedzającego związku stanie się spółczynnikiem istotnym kompleksu; pomiędzy temi spółczynnikami musi tedy zachodzić związek liniowy:

$$a_{12,\,34,\,lm,\,\ldots} + a_{13,\,42,\,lm,\,\ldots} + a_{14,\,23,\,lm,\,\ldots} = 0.$$

Otóż, w ogólności pomiędzy spółczynnikami wyrażenia F nie zachodzą związki tego gatunku, ale można zawsze wybrać i to jednym sposobem formę M tak, aby spółczynniki wyrażenia $F+MP$ czyniły zadość tym związkom. Dowiódł tego Clebsch (Math. Ann. II). Postać, którą w ten sposób przybiera równanie kompleksu, nazywa się postacią normalną. Clebsch okazał, że jest nią:

$$F - \frac{P}{1.n+1}\Delta F + \frac{P}{1.2.(n+1)n}\Delta^2 F - \frac{P^3}{1.2.3.(n+1)n(n-1)}\Delta^3 F + \ldots = 0,$$

gdzie

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial p_{12}\,\partial p_{34}} + \frac{\partial^2 F}{\partial p_{13}\,\partial p_{42}} + \frac{\partial^2 F}{\partial p_{14}\,\partial p_{23}};\ \Delta^2 F = \Delta(\Delta F),\ \Delta^3 F = \Delta\Big[\Delta(\Delta F)\Big] \text{ i t. d.}$$

Przestrzeń prostych przekształca się na samą siebie przez każde przekształcenie rzutowe lub dwoiste przestrzeni punktów i płaszczyzn; grupa wszystkich przekształceń liniowych pomiędzy spółrzędnemi p_{ij}, przez które przestrzeń prostych przekształca się na samą siebie, jest grupą wszystkich i tylko tych przekształceń liniowych, dla których związek

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

pozostaje niezmienionym. Spółczynniki kompleksu niechaj będą $a_{ij,hk}\ldots$, spółczynniki przekształconego przez jedno z tych przekształceń niechaj będą $a'_{ij,hk}\ldots$; te drugie wyrażają się liniowo przez pierwsze. Pojęcie niezmienników kompleksu wypływa stąd bezpośrednio; niezmiennikiem (albo spółzmiennikiem) stopnia k kompleksu nazywamy funkcyę wymierną całkowitą stopnia k względem spółczynników a (albo stopnia k względem spółczynników a i innego jakiegokolwiek stopnia względem spółrzędnych p), która — jeżeli odwrócimy uwagę od ewentualnego czynnika, będącego potęgą wyznacznika podstawienia — pozostaje niezmienioną, gdy zamiast ilości a podstawimy ilości a' (albo gdy zamiast ilości a podstawimy ilości a' i zamiast spółrzędnych p spółrzędne przekształcone p').

---

§ 3.

Kompleksy liniowe.

Równaniem ogólnem kompleksu liniowego jest:

$$\sum_1^4 a_{ij} p_{ij} = 0.$$

Przyjmijmy, że spółczynniki a czynią zadość związkowi:

$$A \equiv a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23} = 0;$$

wtedy kompleks będzie utworzony przez wszystkie proste, opierające się na prostej danej, której spółrzędnemi są ilości a_{ij}: mamy kompleks liniowy specyalny. Kompleks liniowy ma jedyny niezmiennik A.

Jeżeli damy sobie punkt w przestrzeni, to proste kompleksu, przezeń przechodzące, znajdują się na jednej płaszczyźnie i są wszystkiemi prostemi płaszczyzny, przez ten punkt przechodzącemi; jeżeli znowu mamy daną płaszczyznę, to wszystkie na niej położone proste kompleksu obwodzą punkt.

Przy pomocy kompleksu ustanawia się tedy biegunowość przestrzenna specyalna, a mianowicie jedna z tych, które nazwaliśmy *biegunowościami zerowemi* lub *układami zerowemi* (patrz Rozdz. I § 4, Rozdz. X § 2). Punkt i płaszczyzna, sprzężone w tej biegunowości, nazwać można także *sprzężonemi względem kompleksu*.

Dwie proste przestrzeni, odpowiadające sobie w biegunowości zerowej, nazywają się *sprzężonemi względem kompleksu*; *proste kompleksu liniowego są sprzężonemi same ze sobą*.

Dwie proste sprzężone, jeżeli nie zlewają się, nie mogą się spotykać. Każda prosta, opierająca się na dwóch prostych sprzężonych, należy do kompleksu; odwrotnie, każda prosta kompleksu, spotykająca prostą, nie należącą do niego, spotyka także i prostą sprzężoną.

Średnicami kompleksu nazywamy proste sprzężone z prostemi w nieskończoności przestrzeni; *płaszczyznami średnicowemi* kompleksu nazywamy płaszczyzny sprzężone z punktami w nieskończoności.

Średnice są wszystkie równoległe do siebie i do płaszczyzn średnicowych.

Proste kompleksu w liczbie nieskończonej, znajdujące się na płaszczyźnie średnicowej, są wszystkie równoległe.

Osią kompleksu nazywa się jego średnica (jedyna), prostopadła do płaszczyzn, przechodzących przez sprzężoną z nią prostą w nieskończoności.

Dla każdej prostej kompleksu iloczyn jej odległości najmniejszej od osi przez styczną trygonometryczną kąta, jaki tworzy z osią, jest stały. Ten iloczyn stały nazywa się *parametrem* kompleksu.

Kompleks liniowy przekształca się sam na siebie przez każdy ruch śrubowy (helisoidalny) około własnej osi.

Kompleks liniowy można utworzyć rozmaitemi sposobami: 1. przy pomocy prostych zjednoczonych biegunowości zerowej; 2. budując wszystkie proste, opierające się na różnych parach tworzących sprzężonych w jakiejkolwiek inwolucyi, ustanowionej pomiędzy tworzącemi kwadryki (C h a s l e s, Journ. do Liouville (1) IV); 3. budując wszystkie proste, przecięte przez dwa wzajemnie rzutowe pęki płaszczyzn według prostych punktowych w inwolucyi; 5. budując proste, z których dwie proste punktowe o pokładach nie spotykających się, rzucają się według inwolucyi płaszczyzn; 4. budując wszystkie proste, opierające się na parach odpowiadających sobie promieni w dwóch pękach rzutowych promieni w różnych płaszczyznach i z różnemi środkami, ale mających promień wspólny, odpowiadający samemu sobie (S y l v e s t e r, Compt. rend. LII, 1861).

O konstrukcyi kompleksu liniowego z danych pięciu jego prostych patrz S t u r m l. c str. 107 i nast.

---

§ 4.

Pęki i sieci kompleksów liniowych.

Mając równania dwóch kompleksów liniowych, utwórzmy kombinacyę liniową pierwszych ich stron i przyrównajmy ją do zera; otrzymamy wtedy równanie p ę k u k o m p l e k s ó w l i n i o w y c h.

P ę k k o m p l e k s ó w l i n i o w y c h z a w i e r a w o g ó l n o ś c i **dwa** k o m p l e k s y l i n i o w e, k t ó r e s ą s p e c y a l n e m i.

Stąd:

Przecięcie dwóch kompleksów liniowych jest w ogóle kongruencyą rzędu i klasy 1 (kongruencya liniowa — kongruencya podstawowa pęku), utworzoną we wszystkich prostych, opierających się na dwóch prostych danych.

Jeżeli dwa kompleksy specyalne pęku zlewają się, wtedy kongruencya, będąca ich przecięciem, jest kongruencyą specyalną, mającą jednę tylko kierownicę.

Jeżeli wszystkie kompleksy pęku są specyalnemi, wtedy kongruencya, będąca przecięciem ich jest utworzona ze wszystkich prostych, znajdujących się na jednej płaszczyźnie i ze wszystkich prostych przestrzeni, przechodzących przez jeden punkt tejże płaszczyzny.

Osi wszystkich kompleksów liniowych pęku tworzą powierzchnię prostoliniową sześcienną o kierownicach różnych, z których jedna jest kierownicą w nieskończoności. Równanie tej powierzchni prostoliniowej daje się sprowadzić do postaci:

$$z(x^2+y^2)-cxy = 0; \qquad \text{(Plücker)}$$

Cayley nazywa ją cylindroidą.

Jeżeli mamy równania trzech kompleksów liniowych: $C=0$, $C'=0$, $C''=0$, to równanie $C+\lambda C'+\mu C''=0$ przedstawia sieć kompleksów liniowych.

Przecięcie trzech kompleksów liniowych jest w ogólności powierzchnią prostoliniową rzędu 2-go; ∞^1 kierownic wszystkich kompleksów liniowych, zawartych w sieci, tworzy drugi układ tworzących tejże samej prostoliniowej rzędu 2-go.

Osi wszystkich ∞^2 kompleksów sieci tworzą kongruencyę rzędu 2-go i klasy 3-ej, składającą się z prostopadłych wspólnych ∞^2 parom tworzących prostoliniowej rzędu 2-go podstawowej.

Kompleks liniowy badali pierwsi: Giorini (Mem. Società dei quaranta XX, 1828), Möbius (Crelle X) i Chasles (Corr. math. VI, 1830, Journ. de Liouv. IV, 1839); potem zajmowali się niemi, prócz Plückera, Reye (Crelle LXIX, LXXXVI, XCV i t. d.), Pasch (tamże LXXV), D'Ovidio (Acc. Torino 1881, Ann. di mat. VIIII, Lincei (2) III), De Paolis (Mem. Lincei 1885) i t. d.

Należy zauważyć, że teorya figur wzajemnych w statyce graficznej ma związek najściślejszy z teoryą kompleksów liniowych.

Badano układy kompleksów liniowych, pozostające w związku rzutowym, i utwory geometryczne, utworzone przez proste wspólne odpowiadającym sobie kompleksom (patrz Segre, Acc. Torino 1883—4, Montesano, Acc. Napoli 1886).

O badaniu przestrzeni prostoliniowej, a w szczególności kompleksów liniowych przy pomocy Geometryi stożkowych na płaszczyznie patrz Cremona (Giorn. di Battag. VIII), Aschieri (Rend. Ist. Lomb. 1879, Memorie, tamże 1883), Segre (Acc. Torino 1885).

Odwzorowanie kompleksu liniowego w przestrzeni punktowej (pierwszy pomysł tego odwzorowania zawdzięczamy Kleinowi) badali specyalnie Caporali (Mem. Lincei 1877—1878) u Del Pezzo (Rend. Palermo I).

---

§ 5.

Kompleksy liniowe inwolucyjne Kleina.

Jeżeli dwa kompleksy liniowe

$$\Sigma a_{ij} p_{ij} = 0, \qquad \Sigma b_{ij} p_{ij} = 0$$

są takie, że niezmiennik

$$a_{12} b_{34} + a_{13} b_{42} + a_{14} b_{23} + a_{34} b_{12} + a_{42} b_{13} + a_{23} b_{14}$$

jest zerem, wtedy dwa kompleksy nazywają się inwolucyjnemi (Klein, Math. Ann. II).

Każdy kompleks liniowy specyalny jest inwolucyjnym ze samym sobą.

Może być aż do sześciu kompleksów liniowych, z których każde dwa są ze sobą w inwolucyi; istnieje ∞^{15} takich szóstek kompleksów liniowych; każda z tych szóstek składa się zawsze z samych kompleksów niespecyalnych.

Badanie tych szóstek wiąże się z nowemi spółrzędnemi prostej, wprowadzonemi przez Kleina (patrz § 1). Jeżeli przez $x_i = 0$ oznaczymy równania sześciu kompleksów szóstki, wtedy równanie kwadryki zasadniczej przestrzeni pięciowymiarowej (patrz

§ 1) będzie $\sum x_i^2 = 0$. Każdy inny kompleks liniowy wyraża się równaniem $\sum a_i x_i = 0$, a dwa kompleksy $\sum a_i x_i = 0$, $\sum b_i x_i = 0$ są inwolucyjnemi wtedy, gdy $\sum a_i b_i = 0$.

Z sześciu kompleksów inwolucyjnych przecinają się każde dwa razem według 15 kongruencyj liniowych o kierownicach różnych (patrz § 11); kierownice jednej z nich należą do czterech innych kompleksów zasadniczych i opierają się na 12 kierownicach sześciu kongruencyj, przez nie określonych.

Wychodząc z tych pojęć, otrzymujemy godne uwagi konfiguracye i jednę konfiguracyę 16 punktów i 16 płaszczyzn, tę samą, co konfiguracyę punktów i płaszczyzn osobliwych powierzchni Kummera (patrz Rozdział XII).

Co do innych szczegółów patrz Klein (l. c.), Koenigs (Géom. réglée, Ann. de Toulouse VIII, 1893) i dzieło Sturma. O zastosowaniach do powierzchni Kummera patrz rozprawę Reichardta, cytowaną w § 3 Rozdziału XII.

§ 6.

Kompleksy kwadratowe w ogólności.

Kompleks kwadratowy zależy od 19 stałych, a więc charakteryzuje się przy pomocy 19 swoich prostych.

Powierzchnia kompleksu, odnosząca się do danej prostej r, jest rzędu i klasy 4; prosta r jest dla niej prostą podwójną (patrz wyżej).

Miejscem wierzchołków stożków kompleksu, względem którego dwa punkty są wzajemnemi, jest powierzchnia rzędu 2-go, przechodząca przez dwa punkty (Battaglini).

Na każdej prostej r są cztery punkty A_1, A_2, A_3, A_4 takie, że stożki kompleksu, mające w tych punktach wierzchołki, rozpadają się na dwie płaszczyzny; przez każdą prostą r przechodzą cztery płaszczyzny a_1, a_2, a_3, a_4 takie, że proste kompleksu, położone na nich, obwodzą dwa punkty.

Punkty A są punktami ostrzowemi dla powierzchni kompleksu, odnoszącej się do prostej r (podwójnej dla powierzchni); płaszczyzny zaś a są czterema płaszczyznami, przechodzącemi przez prostą r, których dwa punkty styczności z powierzchnią zlewają się w jeden.

Stosunek anharmoniczny czterech punktów A równa się stosunkowi anharmonicznemu czterech płaszczyzn a (Klein, Math. Ann. II, VII).

Punkty A i płaszczyzny a tworzą i obwodzą tę samą powierzchnię rzędu i klasy 4-ej (powierzchnię osobliwą kompleksu kwadratowego) (patrz § 2). Ta powierzchnia jest powierzchnią Kummera.

Każdemu punktowi A odpowiada prosta a, przezeń przechodząca (prosta podwójna stożka z wierzchołkiem w punkcie A); każdej płaszczyźnie a odpowiada prosta a', na niej położona (prosta podwójna dla obwiedniej, położonej na płaszczyznie a); proste a i a' są p r o s t e m i o s o b l i w e m i k o m p l e k s u (patrz § 2).

Do każdej prostej osobliwej r należy punkt osobliwy S na na niej i płaszczyzna osobliwa σ, przez nią przechodząca; jest ona styczna do powierzchni osobliwej w punkcie osobliwym S i przecina tę powierzchnię w dwóch innych punktach, które są środkami dwóch pęków, położonych na płaszczyźnie osobliwej σ Dwie inne płaszczyzny styczne, poprowadzone przez prostą s, są dwiema płaszczyznami, tworzącemi stożek o wierzchołku w punkcie S.

Każda płaszczyzna π przecina powierzchnię osobliwą według krzywej stycznej w każdym punkcie przecięcia do krzywej kompleksu (patrz § 1), położonej na płaszczyźnie π; proste styczne wspólne są prostemi osobliwemi dla kompleksu; własności tej odpowiada własność wzajemnie dwoista.

Płaszczyzny takie, że położone na nich krzywe kompleksu przecinają dwie proste dane, albo przecinają jednę prostą i dotykają jednej płaszczyzny, albo wreszcie dotykają dwu płaszczyzn, obwodzą powierzchnię rozwijalną klasy 16 albo 8 albo wreszcie 4 ej.

Powierzchnia prostoliniowa, utworzona przez proste osobliwe, spotykające prostą daną, jest rzędu 8-go, a wszystkie proste osobliwe tworzą kongruencyę rzędu i klasy 4.

Jest 16 płaszczyzn, na których krzywe kompleksu są utworzone z dwu punktów nieskończenie blizkich—i wzajemnie: jest 16 punktów, w których stożki kompleksu składają się z dwóch zlewających się płaszczyzn.

Te 16 punktów i 16 płaszczyzn są punktami i płaszczyznami osobliwemi powierzchni Kummera, która jest powierzchnią osobliwą kompleksu Te 16 punktów znajdują się na wszystkich powierzchniach kompleksu, odnoszących się do jakichkolwiek prostych, a 16 płaszczyzn dotyka tychże powierzchni.

Jeżeli dana jest powierzchnia Kummera, to kompleks tworzy się w sposób następujący: Na płaszczyźnie stycznej σ do powierzchni w punkcie S weźmy prostą osobliwą s kompleksu; ta prosta przecina powierzchnię w dwóch innych punktach. Weźmy na płaszczyźnie σ dwa pęki promieni, których środki znajdują się w tych punktach; ogół tych wszystkich ∞^2 pęków, otrzymanych przy zmienianiu płaszczyzny σ, jest właśnie kompleksem żądanym.

Rozważmy teraz pęk promieni ze środkiem w punkcie S, położonych na płaszczyźnie σ oraz ∞^2 takich pęków. Dowodzi się, że można ustanowić pomiędzy niemi odpowiedniość rzutową taką, że jeżeli weźmiemy w jednym z nich jakikolwiek promień, a we wszystkich innych promienie mu odpowiadające, i jeżeli brać będziemy dwa inne punkty spotkania tych promieni z powierzchnią, a następnie dwa pęki promieni, położone odpowiednio na płaszczyznach stycznych i mające środki w tych dwóch punktach, wtedy te ∞^2 pęków promieni tworzą inny kompleks kwadratowy, mający tę samą powierzchnię osobliwą, co kompleks dany. Mamy tym sposobem ∞^1 kompleksów kwadratowych, które nazywają się spółogniskowemi (Klein i Lie, u Segrego — omofocali) lub będącemi w inwolucyi (Schur) lub wreszcie spółosobliwemi (Sturm).

Ponieważ równanie powierzchni Kummera zależy od 18 stałych, równanie zaś powierzchni kompleksu kwadratowego od 19 stałych, przeto istotnie, jak widzimy, będzie ∞^1 kompleksów kwadratowych z tą samą powierzchnią osobliwą.

Co do sposobu ustanowienia opisanej wyżej odpowiedniości odsyłamy do Sturma l. c. III, str. 32.

Każda prosta przestrzeni należy do czterech kompleksów spółogniskowych.

Kongruencya, utworzona przez proste osobliwe kompleksu kwadratowego, może być uważana jako przecięcie kompleksu danego z innym kompleksem, nieskończenie mało różniącym się od pierwszego w szeregu kompleksów spółogniskowych z danym.

Prosta osobliwa kompleksu, która jest ściśle styczną (o styczności trójpunktowej) do powierzchni Kummera, nazywa się prostą osobliwą rzędu 2-go kompleksu (Segre); jeżeli zaś ma styczność czteropunktową z powierzchnią Kummera, nazywa się styczną osobliwą rzędu 3-go (Segre).

Proste osobliwe rzędu 2-go kompleksu kwadratowego tworzą powierzchnię prostoliniową rzędu 16; proste zaś osobliwe wszystkich kompleksów szeregu spółogniskowego tworzą kongruencyę rzędu i klasy 24.

Prostych osobliwych rzędu 3-go kompleksu kwadratowego danego jest 32; proste osobliwe kompleksów szeregu spółogniskowego tworzą powierzchnię prostoliniową rzędu 64-go, która rozpada się na 16 obwiednich kwadratowych, zawartych w każdej z płaszczyzn podwójnych powierzchni Kummera i na 16 stożków kwadratowych, wychodzących z każdego z 16 punktów podwójnych tejże powierzchni.

Jeżeli zastosujemy spółrzędne Kleina (§ 1), to równanie kompleksu kwadratowego da się napisać w postaci $\sum_1^6 k_i x_i^2 = 0$, gdzie spółrzędne x są połączone związkiem $\sum_1^6 x_i^2 = 0$. Proste osobliwe rzędu 1-go są przecięciem kompleksu danego z kompleksem, mającym za równanie $\sum\limits_{1}^{6} k_i^2 x_i^2 = 0$; proste osobliwe rzędu 2-go są przecięciem kongruencyi poprzedzającej z kompleksem $\sum\limits_{1}^{6} k_i^2 x_i^2 = 0$, wreszcie dla prostych osobliwych rzędu 3-go mamy $\sum\limits_{1}^{6} k_i^4 x_i^2 = 0$. **R ó w n a n i e m s z e r e g u k o m p l e k s ó w s p ó ł o g n i s k o w y c h** jest $\sum\limits_{1}^{6} \frac{x_i^2}{k_i + \lambda} = 0$, gdzie λ jest parametrem zmiennym. Możnaby mniemać, że pomiędzy temi ∞ kompleksami niema kompleksu o równaniu $\sum\limits_{1}^{6} k_i x_i^2 = 0$; ale zauważmy, że równanie to można napisać w postaci $\sum\limits_{1}^{6} (k_i + \mu) x_i^2 = 0$, gdyż $\sum x_i^2 = 0$, a równanie szeregu kompleksów w postaci:

$$\sum_{1}^{6} \left(\frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{1}{k_i + \lambda} \right) x_i^2 = 0 \text{ lub } \sum_{1}^{6} \frac{(k_i + \mu)}{(\mu - \lambda)(k_i + \lambda)} x_i^2 = 0,$$

lub wreszcie $\sum\limits_{1}^{6} \frac{k_i + \mu}{k_i + \lambda} x_i^2 = 0$. Mnożąc przez przez $k_i + \lambda$, przyjmując, że λ dąży do ∞ i z uwagi, że $\lim\limits_{\lambda = \infty} \frac{k_i + \lambda}{k_i + \lambda} = 1$ (dla $i = 1, 2, \ldots 6$), otrzymujemy $\sum\limits_{1}^{6} (k_i + \mu) x_i^2 = 0$.

Kompleksami kwadratowemi zajmował się pierwszy B a t t a g l i n i (Acc. Napoli 1865, Giorn. di Batt. VI), który badał szczególny kompleks kwadratowy, noszący jego nazwisko, (patrz § 7); należy wszakże nadmienić, że z początku mniemał on, że ten kompleks jest najogólniejszy, czemu potem zaprzeczył K l e i n (Rozpr. Bonn. 1868). W dziele P l ü c k e r a podana jest po raz pierwszy teorya kompleksów kwadratowych, które były potem szczegółowiej badane przez C l e b s c h a, K l e i n a, L i e g o; wykładowi obszernemu teoryi tych kompleksów jest poświęcony tom III cytowanego już dzieła S t u r m a. Z innych prac o kompleksach kwadratowych wymieniamy: C a p o r a l i'ego (Lincei Mem. 1878) który podał ich odwzorowanie w przestrzeni punktowej, S c h u r a (Rozpr. Berlin 1879), Reye'ego (Crelle, LXXXVI, XCIII, XCV, XCVII, XCVIII), Segre'go (Acc. Torino 1883—4) który rozwija teoryę Kleina, t. j. bada geometryę na kwadryce w przestrzeni pięciowymiarowej, Montesano (Acc. Napoli 1886) i t. d. O klasyfikacyi kompleksów kwadratowych i o najbardziej godnych uwagi takich kompleksach mówimy w paragrafach następnych. O teoryi biegunowości (patrz § 2) względem kompleksu kwadratowego, o biegunowości (będącej szczególnym przypadkiem poprzedniej) średnic, środków i t. d. pisał specyalnie Plücker (patrz § 567—585 tomu III dzieła Sturma). Reye (Crelle XCVIII) podał klasyfikacyę kompleksów ogólnych stopnia 2-go, opartą na liczbie elementów urojonych w nich zawartych. Odróżnia on kompleksy hyperboliczne, paraboliczne, eliptyczne i urojone.

§ 7.

Klasyfikacya kompleksów kwadratowych

Oznaczmy przez $P=0$ (patrz § 2) związek kwadratowy tożsamościowy pomiędzy spółrzędnemi prostej lub równanie kwadryki zasadniczej w przestrzeni pięciowymiarowej, przez $C=0$ równanie innej takiej kwadryki w tejże przestrzeni, że przecięcie jej z pierwszą daje rozmaitość, odpowiadającą kompleksowi kwadratowemu prostych. Utworzymy klasyfikacyę kompleksów, rozważając wyróżnik kwadryki $P+\lambda C=0$, będący stopnia szóstego względem λ; wyróżnik ten jest właściwie wyznacznikiem Δ rzędu 6-go. Jeżeli pierwiastki tego wyznacznika są wszystkie różne, t. j. gdy pęk kwadryk zawiera sześć stożków różnych, wtedy mamy przypadek kompleksu ogólnego z 19 stałemi (patrz § 6); powierzchnią osobliwą jest wtedy powierzchnia ogólna Kummera. Może się zdarzyć, że powierzchnia ta staje się tetraedroidą (patrz § 4 Rozdz. XII), wtedy mamy t. zw. kompleks Battagliniego lub kompleks harmoniczny, którego przypadkiem szczególnym jest kompleks Painvina; w tym ostatnim powierzchnią osobliwą jest powierzchnia Fresnela (patrz Rozdz. XII § 4). Należy dalej rozważyć przypadki, w których niektóre z pierwiastków wyróżnika Δ są równe, lecz żaden z nich nie zamienia na zero wszystkich minorów rzędu 5-go wyznacznika rzędu 6-go. Wtedy niektóre ze stożków kwadrykowych, o których mowa wyżej, zlewają się. Dajmy, dla ustalenia myśli, że zlewają się dwa z nich, trzy i t. d.; wtedy kompleksy oznaczać będziemy symbolami [21111], [31111] i t. d.; kompleks zaś ogólny oznaczać będziemy analogicznie przez [111111]. W tych przypadkach kompleks ma proste podwójne (patrz § 3), które są zarazem prostemi podwójnemi dla powierzchni osobliwej. Prócz przypadku ogólnego, rozróżniamy 10 przypadków i otrzymujemy następującą tablicę:

<table>
<tr><th>№</th><th>Symbol</th><th>Liczba stałych</th><th>Liczba prostych kompleksu</th><th>Powierzchnia osobliwa</th></tr>
<tr><td>2</td><td>[21111]</td><td>18</td><td>1</td><td rowspan="4">Rzędu i klasy 4-ej z jedną prostą podwójną. Jest ona powierzchnią kompleksu kwadratowego ogólną, odnoszącą się do jednej jakiejkolwiek prostej, — do prostej kompleksu, — do osobliwej rzędu 1-go, wreszcie do osobliwej rzędu 2-go.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>[3111]</td><td>17</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>[411]</td><td>16</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>[51]</td><td>15</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>[2211]</td><td>17</td><td rowspan="3">2 proste, przecinające się</td><td rowspan="3">Rzędu i klasy 4-ej z 2 prostemi spotykającemi się. Powierzchnia kompleksu kwadratowego ogólna, odnosząca się do stycznej powierzchni Kummera. Proste są: obie podwójne — jedna ostrzowa — dwie ostrzowe.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>[321]</td><td>16</td></tr>
<tr><td>8</td><td>[33]</td><td>15</td></tr>
</table>

№	Symbol	Liczba stałych	Liczba prostych podwójnych kompleksu	Powierzchnia osobliwa
9	[222]	16	3 proste, położone na jednej płaszczyźnie, albo też (uważając dwoiście) przechodzące przez jeden punkt [1]	Powierzchnia Cayley'a 3-go rzędu, 4-ej klasy i płaszczyzna, przechodząca przez trzy proste (lub dwoiście).
10	[42]	15		Powierzchnia Steinera 4-o rzędu i 3-ej klasy (patrz Rozdz. XI i XII) i punkt na trzech prostych.
11	[6]	14		Powierzchniakompleksowa kompl ksu ogólnego,odnosząca się do prostej osobliwej rzędu 3-go.

[1]) W kompleksie [42] dwie z trzech prostych zlewają się, w kompleksie [6] wszystkie zlewają się. Wynika stąd sprzeczność pozorna pomiędzy rezultatami u różnych autorów: Weilera (cyt. niżej), Segrego i Sturma. Na okoliczność tę zwracamy uwagę, celem ustrzeżenia się od pomyłek.

W przypadkach 9, 10, 11 powierzchniami osobliwemi są właściwie, prócz płaszczyzny, powierzchnie, oznaczonemi numerami 16, 18, 19 w klasyfikacyi Cayley'a (Mem. on Cubic surfaces, Phil. Trans. 1869, Część I str. 117) i dwoiście.

Należy teraz rozpatrzyć przypadki, w których wyznacznik Δ rzędu 6-go ma pierwiastki wielokrotne, zamieniające na zero wszystkie minory rzędu 5-go wyznacznika Δ, które oznaczać będziemy przez Δ', albo też wszystkie minory rzędu 4-go, które oznaczać będziemy przez Δ''. Przyjmiemy następujące znakowanie dla kompleksów w tych przypadkach. Niechaj dany pierwiastek wyznacznika Δ będzie wielokrotności ν, niechaj jego wielokrotność dla wszystkich minorów będzie ν' i niechaj ten pierwiastek nie zamienia na zero wszystkich minorów Δ''. Odpowiadający temu pierwiastkowi kompleks oznaczać będziemy symbolem $[(\nu-\nu', \nu'), r, s....]$, gdzie $\nu+r+s+..=6$ i gdzie $r, s....$ oznaczają wielokrotności innych pierwiastków wyznacznika Δ (w założeniu, że te inne pierwiastki nie zamieniają na zero wyznaczników Δ'). Innemi słowy, jeżeli założymy, że pierwiastek wielokrotności ν wyznacznika Δ jest pierwiastkiem wielokrotności ν' wyznaczników Δ, to w symbolu, poprzednio (str. 460) dla kompleksów podanym, można będzie zamiast liczby ν wziąć symbol $(\nu-\nu', \nu')$. Podobnie, jeżeli pewien pierwiastek jest wielokrotności ν dla wyznacznika Δ, wielokrotności ν' dla wszystkich wyznaczników Δ', wreszcie wielokrotności ν'' dla wszystkich wyznaczników Δ'', wtedy w tymże symbolu zamiast liczby ν można będzie wziąć symbol $(\nu-\nu', \nu'-\nu'', \nu'')$. Dowodzi się, że jest zawsze $\nu-\nu' \geqslant \nu'-\nu'' \geqslant \nu''$ (Weierstrass). Tak np. symbol $[(32)1]$ oznacza, że z sześciu pierwiastków wyznacznika Δ jeden jest wielokrotności 5 i jest podwójnym dla wszystkich wyznaczników Δ'; symbol $[(111)21]$ oznacza, że z sześciu pierwiastków wyznacznika Δ jeden jest pojedyńczym, jeden jest podwójnym i nie sprowadza do zera wszystkich wyznaczników Δ'; inny znów jest potrójnym dla Δ, podwójnym dla wszystkich wyznaczników Δ'', pojedyńczym dla wszystkich wyznaczników Δ'' i t. d. To znakowanie przeniesione zostało z teoryi dzielników elementarnych Weierstrassa, o której mówimy w Rozd. III § 4.

Zagadnienie zasadnicze tej teoryi, a mianowicie zagadnienie o równoczesnem przekształceniu dwóch danych form jednego stopnia o m zmiennych na postaci kanoniczne zawiera w sobie dla $n=2$, $m=6$ zagadnienie o klasyfikacyi kompleksów kwadratowych (Klein, Math. Ann. II, str. 203) (patrz też Rozdz. III § 4 oraz najnowsze dzieło Mutha „Theorie und Anwendung der Elementartheiler", Lipsk 1899).

Podamy teraz tablicę wszystkich przypadków, które wymieniliśmy wyżej. W tych wszystkich przypadkach powierzchnia osobliwa jest zawsze prostoliniową: w przypadkach, gdy wszystkie wyznaczniki Δ'' znikają dla pewnego pierwiastka wyznacznika Δ, powierzchnia osobliwa zniekształca się na kwadrykę podwójną.

№	Symbol	Liczba stałych	Liczba prostych podwójnych kompleksu	Powierzchnia osobliwa
12	[(11)1111]	17	2 proste skośne.	Prostoliniowa rzędu 4-go z dwiema kierownicami podwójnemi i bez tworzących podwójnych (typ XI Cremony. patrz Rozdz. XII § 10).
13	[(11)211]	16	3 proste, z których jedna spotyka dwie pozostałe wzajemnie skośne.	Także powierzchnia z tworzącą podwójną (typ V Cremony ogólny)
14	[(11)31]	15	Tożsamo	Także powierzchnia z tworzącą ostrzowa (typ V Cremony z tworzącą ostrzową).
15	[(11)22]	15	4 proste, z których 2 skośne i 2 proste spokają się: jedna z dwóch pierwszych tworzy z dwiema drugiemi trójkąt a jedna trójścian.	Prostoliniowa sześcienna z dwiema kierownicami, jedną podwójną i jedną pojedyńczą, punkt na kierownicy podwójnej i płaszczyzna, przechodząca przez kierownicę pojedyńczą i przecinająca kierownicę podwójną w punkcie jakimkolwiek (nie ostrzowym). Prostoliniowa sześcienna ma dwa punkty i dwie płaszczyzny ostrzowe odpowiednio na jednej i na drugiej z dwu kierownic.
16	[(11)4]	14	Tożsamo.	Także powierzchnia ale punkt i płaszczyzna są ostrzowemi.
17	(21)111]	16	2 proste skośne	Prostoliniowa rzędu 4-go z dwiema zlewającemi się kierownicami (typ XII Cremony). Do tej kierownicy należą 4 punkty i 4 płaszczyzny ostrzowe.
18	[(21)21]	15	3 proste, z których 2 skośne przecina trzecia	Prostoliniowa 4-go rzędu (typ VI Cremony) z tworzącą podwójną.
19	[(21)3]	14	Tożsamo.	Także z tworzącą ostrzową.
20	[(31)11]	13	Tożsamo.	Prostoliniowa rzędu 4-go z prostą potrójną. która jest kierownicą pojedyńczą z tworzącą podwójną (typ X Cremony).

№	Symbol	Liczba stałych	Liczba prostych podwójnych kompleksu	Powierzchnia osobliwa
21	[(31)2]	14	Jak w przyp. 15-ym.	Prostoliniowa sześcienna Cayley'a z punktem i płaszczyzną jak w przypadku 15.
22	[(41)1]	14	Jak w przyp. 18-ym.	Jak w przyp. 20, ale prosta potrójna jest tworzącą ostrzową (nietylko podwójną) (typ X Cremony) z płaszczyznami statecznemi zlewającemi się.
23	[(51)]	13	Jak w przyp. 15-ym.	Prostoliniowa sześcienna Cayley'a, punkt i płaszczyzna jak w przyp. 16-ym.
24	[(22)11]	14	Pęk prostych	Stożek kwadrykowy i stożkowa.
25	[(32)1]	13	Tożsamo	Stożek kwadrykowy i stożkowa, przechodząca przez wierzchołek stożka; płaszczyzna stożkowej jest styczna do stożka.
26	[(22)2]	13	Pęk prostych i nadto prosta, przechodząca przez środek pęku albo (dwoiście) znajdująca się na płaszczyźnie pęku	Jak w przypadku 24-ym, tylko, że stożek rozpada się na dwie płaszczyzny, albo (dwoiście) stożkowa rozpada się na dwa punkty.
27	(42)]	12	Tożsamo.	Dwie płaszczyzny i stożkowa styczna do wspólnego ich przecięcia, albo — dwoiście — stożek i dwa punkty na jednej z jego tworzących (przypadek szczególny przypadku 26-go)
28	[(33)]	11	Pęk prostych i dwie proste, jedna na płaszczyźnie pęku, druga przechodząca przez środek.	Płaszczyzna potrójna, punkt potrójny: inna płaszczyzna i punkt do niej należący.
29	[(11 (11)11]	15	4 proste, tworzące czworobok skośny.	Dwie kwadryki, przecinające się według czworoboku skośnego

№	Symbol	Liczba stałych	Liczby prostych podwójnych kompleksu	Powierzchnia osobliwa
30	[(11)(11)2]	14	5 prostych, tworzących czworobok, i 1 przekątna.	Jedna z kwadryk staje się parą płaszczyzn stycznych do drugiej (kompleks Hirsta, Collect. math. Medyolan 1881, str. 51, Lond. Math. Soc. Proc. X) Tworzy się on przy pomocy dwóch płaszczyzn wzajemnie rzutowych (patrz Sturm III, str. 429—430).
31	[(21)(11)1]	14	Jak w przyp. 29.	Dwie kwadryki, mające prostą wspólną, liczoną dwa razy, i dwie inne proste, przecinające poprzednią.
32	[(21)(21)]	13	Tożsamo.	Dwie kwadryki, mające wspólną parę prostych, liczonych dwa razy.
33	[22)(11)]	12	Jak w przyp. 28-ym.	Dwie płaszczyzny i dwa punkty; jedna płaszczyzna i jeden punkt do niej należący, liczone dwa razy.
34	[(31)(11)]	13	Jak w przyp. 30-ym.	Jak w przypadku 30-ym.
35	[(11)11)(11)]	13	6 krawędzi czworościanu.	4 płaszczyzny i 4 punkty, stanowiące ściany i wierzchołki czworościanu. Jest to kompleks czworościanowy (tetraedralny) (patrz § 9).
36	[(111)111]	14	Jeden układ tworzących kwadryki.	Kwadryka, liczona dwa razy.
37	[(111)21]	13	Jeden układ tworzących kwadryki i jej kierownica.	Tożsamo.
38	[(111)3]	12	Tożsamo.	Tożsamo.
39	[(211)11]	13	Dwa pęki promieni.	2 płaszczyzny podwójne, a na ich przecięciu dwa punkty podwójne.
40	[(211)2]	12	Dwa pęki promieni i jedna prosta podwójna w każdym z nich.	Tożsamo.
41	[(311)1]	12	Dwa pęki promieni.	Tożsamo.

№	Symbol	Liczba stałych	Liczby prostych podwójnych kompleksu	Powierzchnia osobliwa
42	[(411)]	11	Tożsamo.	Tożsamo.
43	[(221)1]	11	Dwa pęki promieni, zlewające się.	Płaszczyzna i punkt do niej należący, liczone 4 razy.
44	[(321)]	10	Tożsamo.	Tożsamo.
45	[222]	8	Sieć lub dwoiście wiązka promieni.	Stożek kwadrykowy podwójny lub dwoiście stożkowa podwójna.
46	[(111)(11)1]	12	Jeden układ tworzących kwadryki i dwie różne jej kierownice.	Kwadryka podwójna.
47	[(111)21]	11	Tożsamo, ale dwie kierownice zlewające się.	Tożsamo.
48	[(211)11]	11	Dwa pęki promieni i dwa promienie, jeden należący do jednego pęku, drugi do drugiego.	Para płaszczyzn i para punktów, liczone dwa razy.
49	[(111)(111)]	9	Dwa układy tworzą- rzących kwadryki.	Kwadryka podwójna.

Razem tedy mamy 49 gatunków; jeżeli zaś uwzględnimy, że 6 gatunkom odpowiadają dwoiście wzajemne (gatunek 9, 10, 11, 26, 27, 45), będziemy mieli gatunków 55.

Pierwszą pracę o klasyfikacyi kompleksów ogłosił Weiler (Math. Ann. VII), ale praca ta nie jest wolna od wielu niedokładności, które wykryli Segre i inni. Segre traktował ten przedmiot w pracy Acc. Torino XXXVI; w Math. Ann. XXIII zaś zajmuje się przypadkiem, w którym powierzchnia osobliwa jest kwadryką podwójną zniekształconą. W tomie III dzieła Sturma przedmiot ten jest traktowany przy pomocy metod geometryi czystej.

§ 8.

Kompleks Battagliniego lub harmoniczny.

Kompleks Battagliniego (patrz § 7) jest ogółem prostych, spotykających dwie kwadryki f_1, f_2 w czterech punktach harmonicznych, albo ogółem prostych, z których można do dwóch kwadryk danych (innych, niż poprzednio) poprowadzić cztery płaszczyzny styczne harmoniczne (Aschieri, Giorn. di Batt. VIII).

Kompleks Battagliniego daje się tym sposobem utworzyć (rzutowo) ∞ sposobami. Kongruencya prostych osobliwych kompleksu Battagliniego jest przecięciem tego kompleksu z kompleksem czworościanowym (tetraedralnym) (patrz § 9) prostych, których biegunowe względem dwóch kwadryk f_1, f_2 przecinają się.

Jeżeli, mając pęk $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$, łączyć będziemy parami w inwolucyę kwadryki tego pęku tak, aby $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ były jej elementami podwójnemi, wtedy proste kompleksu będą stycznemi wspólnemi do dwóch kwadryk każdej pary (Segre i Loria, Math. Ann. XXIII).

Płaszczyzny biegunowe kompleksu są płaszczyznami stycznemi wspólnemi każdej pary, a proste osobliwe są prostemi, łączącemi punkty styczności.

Wyżej (§ 7) powiedziano już, że powierzchnia osobliwa kompleksu Battagliniego jest tetraedroidą; dodajmy, że:

Każdej tetraedroidzie, jako powierzchni osobliwej, oddowiadają dwa kompleksy Battagliniego.

Równanie kompleksu Battaglini'ego w spółrzędnych p wyraża się przy pomocy samych kwadratów tych spółrzędnych, Przypadkiem szczególnym kompleksu Battagliniego jest kompleks Painvina (Bull. de Darboux 1871, Nouv. Ann. de math. 1872, Demoulin Bull. de la Soc. Math. XX), t. j. ogół prostych, z których do danej elipsoidy poprowadzić można pary płaszczyzn stycznych ortogonalnych.

Otrzymujemy ten kompleks, zniekształcając jednę z dwóch kwadryk (jako obwiednią), które służyły do utworzenia kompleksu w sposób wyżej wskazany na absolut przestrzeni (euklidesowej). Absolut ten albo granica przestrzeni jestto, jak wiadomo, koło urojone w nieskończoności (wspólne wszystkim kulom przestrzeni), t. j. miejsce punktów kołowych wszystkich płaszczyzn przestrzeni.

Powierzchnią osobliwą dla kompleksu Painvina jest powierzchnia falowa Fresnela.

Klasyfikacyę kompleksów Battagliniego podali Segre i Loria (Math. Ann. XXIIII) oraz Monteiano Acc. Napoli 1886); patrz tom III dzieła Sturma str. 488 i nast.

---

§ 9.

Kompleks Reyego lub czworościanowy.

Kompleks czworościanowy Reyego jest to kompleks, któremu odpowiada symbol [(11)(11)(11)] (patrz § 8); równanie jego w spółrzędnych Kleina wyraża się w ten sposób:

$$a\,(x_1{}^2+x_2{}^2) + b\,(x_3{}^2+x_4{}^2) + c\,(x_5{}^2+x_6{}^2) = 0.$$

Kompleksowi Reyego odpowiada czworościan taki, że każda prosta, należąca do ściany, oraz każdy wierzchołek czworościanu należą do kompleksu.

Cztery ściany i cztery wierzchołki czworościanu stanowią powierzchnię osobliwą kompleksu; kongruencyą zaś prostych osobliwych jest kongruencya wszystkich prostych, znajdujących się na jednej z czterech płaszczyzn oraz wszystkich prostych, przechodzących przez jeden z czterech wierzchołków.

Krawędzie czworościanu są prostemi podwójnemi kompleksu.

Jeżeli ten czworościan obierzemy jako czworościan podstawowy spółrzędnych, to równanie kompleksu w spółrzędnych p_{ij} będzie postaci:

$$a p_{12} p_{34} + b p_{13} p_{42} + c p_{14} p_{23} = 0.$$

Kompleks Reyego składa się ze wszystkich prostych, przecinających cztery płaszczyzny czworościanu podstawowego w czterech punktach, mających oznaczony stosunek anharmoniczny; albo składa się ze wszystkich prostych, rzuconych z czterech wierzchołków czworościanu na cztery płaszczyzny o oznaczonym stosunku harmonicznym (równym poprzedniemu). Zmieniając ten stosunek anharmoniczny i pozostawiając stałym czworościan, otrzymujemy ∞^1 kompleksów czworościanowych spółogniskowych.

Reye podał następujący sposób tworzenia kompleksów czworościanowych:

Kompleks ten jest mnogością prostych, łączących odpowiadające sobie punkty dwóch nałożonych na siebie przestrzeni, będących w odpowiedniości homograficznej; albo mnogością prostych, będących przecięciami płaszczyzn, odpowiadających sobie w dwóch takich przestrzeniach; albo mnogością prostych, spotykających odpowiadające im proste w tychże przestrzeniach.

Inne sposoby tworzenia są następujące:

Kompleks Reyego jest mnogością prostych, opierających się na parach promieni, odpowiadających sobie w dwóch pękach prostych wzajemnie homograficznych i jakkolwiek położonych w przestrzeni; albo mnogością prostych, łączących punkty płaszczyzny z punktami promieni, odpowiadających im w wiązce, odniesionej homograficznie do płaszczyzny; albo mnogością cięciw i stycznych wszystkich krzywych sześciennych skośnych, przechodzących przez cztery wierzchołki czworościanu i przecinających dwa razy prostą przestrzeni, należącą oczywiście do kompleksu. Jeżeli zmieniamy tę prostą w kompleksie, zmieniają się krzywe sześcienne, ale kompleks pozostaje bez zmiany.

Kompleks R e y e g o indywidualizuje czworościan i jedną z jego prostych.

Kompleksem czworościanowym wyspecyalizowanym z punktu widzenia metrycznego, jest k o m p l e k s p r o s t y c h r ó w n o o d l e g ł y c h o d d w ó c h p u n k t ó w s t a ł y c h (patrz S t u r m l. c. str. 364); za inny kompleks specyalny można uważać kompleks o charakterystyce [(22)(11)] (patrz § 8); w n i m t o k r z y w e k o m p l e k s u (t. j. krzywa obwiedziona przez proste kompleksu w płaszczyznach przestrzeni) s ą w s z y s t k i e p a r a b o l a m i, a s t o ż k i k o m p l e k s u s ą w s z y s t k i e r ó w n o b o c z n e m i.

Kompleks czworościanowy badał pierwszy R e y e (Geom. der Lage); potem zajmowali się nim: L i e, Gott. Nachr. 1870), B a t t a g l i n i (Giorn. di Battal. XII), A s c h i e r i (Rend. Ist. Lomb. 1879), L o r i a (Acc. Torino 1884, Giorn. di Batt. XXIII) i t. d. W e i l e r (Zeitschr. f. Math. XXII) podał jego przedstawienie w przestrzeni trójwymiarowej; druga część pierwszego tomu dzieła S t u r m a jest temu kompleksowi poświęcona. Co do innych prac o tym przedmiocie patrz cytowaną już wielokrotnie książkę L o r i a „Przeszłość i stan obecny teoryj geometrycznych“.

§ 10.

Teorya ogólna kongruencyj linij prostych.

Rzędem n kongruencyi algebraicznej jest liczba prostych tej kongruencyi, przechodzących przez punkt dowolny przestrzeni; **klasą** m jest liczba jej prostych, położonych na płaszczyźnie dowolnej; **porządkiem** r (Rang u **Sturma** Art u **Schumachera**) jest liczba par jej prostych, które z prostą dowolną przestrzeni należą do jednego pęku.

Kongruencyę rzędu n i klasy m oznaczamy zwykle symbolem (n, m) albo też symbolem (n, m, r), jeżeli chcemy wskzać i porządek.

Jeżeli p jest **rodzajem** powierzchni prostoliniowej, według której kompleks liniowy ogólny przecina kongruencyę (n, m, r), wtedy zachodzi związek:

$$p = (n-1)(m-1) - r.$$

Liczba p nazywa się zwykle **rodzajem** kongruencyi.

Jeżeli klasa i rząd są równe 1, wtedy porządek równa się zeru. Każda kongruencya o równych rzędzie i klasie, należąca do kompleksu liniowego, jest porządku równego zeru.

Kongruencya, będąca przecięciem dwóch kompleksów stopni n_1, n_2, jest porządku $n_1 n_2 (n_1-1)(n_2-1)$.

Płaszczyzny, przesunięte przez dwa z pomiędzy n promieni kongruencyj, przechodzących przez punkt P, obwodzą, gdy punkt P porusza się po prostej, powierzchnię rozwijalną T klasy $\frac{1}{2}n(n-1)+r$; jeżeli zaś P przebiega płaszczyznę, to te płaszczyzny obwodzą powierzchnię S klasy $\frac{1}{2}m(m-1)+r$, dla której płaszczyzna, po której porusza się punkt P, jest płaszczyzną styczną $\frac{1}{2}m(m-1)$ razy wielokrotną.

Punkty spotkania m prostych kongruencyi, położonych na płaszczyźnie, gdy ta obraca się około innej prostej, tworzą krzywą C rzędu $\frac{1}{2}m(m-1)+r$, a gdy płaszczyzna obraca się około punktu, opisują powierzchnię S_1 rzędu $\frac{1}{2}n(n-1)+r$, dla której środek wiązki płaszczyzn jest punktem wielokrotności $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Miejscem prostych kongruencyi, przeciętych przez prostą daną, jest powierzchnia prostoliniowa R rzędu $n+m$, dla której ta prosta jest kierownicą n-krotną.

Za pośrednictwem kongruencyj algebraicznych ustalono odpowiedniości inwolucyjne rzędu wyższego pomiędzy płaszczyznami a punktami przestrzeni; odpowiedniości te nazywamy układami zerowemi rzędu wyższego przez analogię z biegunowością lub układami zerowemi zwyczajnemi Möbiusa (patrz § 3). Jeżeli dany jest punkt przestrzeni, to przechodzi przezeń n promieni kongruencyi a zatem $\alpha = \frac{1}{2}n(n-1)$ płaszczyzn; jeżeli dana jest płaszczyzna, to jest na niej m promieni kongruencyi, a zatem $\beta = \frac{1}{2}m(m-1)$ punktów; biegunowość zerowa zwykła jest przypadkiem jej szczególnym (dla $\alpha = \beta = 1$). Takiej odpowiedniości można nadać i inną charakterystykę γ, wyrażającą, ile punktów znajduje się na dowolnej prostej przestrzeni, w ten sposób, aby jedna z płaszczyzn im odpowiadających przechodziła przez prostą; w przypadku, gdy taki układ zerowy jest utworzony za pośrednictwem kongruencyi, jego trzecia charakterystyka γ odpowiada porządkowi kongruencyi.

Najdawniejszy przykład takiej odpowiedniości podał Cremona (Compt rend. LIV, 1862); później zajmowali się nią: Ameseder Crelle XCVII), Voss (Math. Ann. XXIII), Sturm (tamże XXVIII). Inne szczegóły i przykłady w dziele Sturma t. I, § 56.

Każdy promień kongruencyi spotyka dwa inne promienie nieskończenie blizkie; dwa punkty spotkania nazywają się ogniskami, a dwie płaszczyzny, przechodzące przez tę prostą i przez każdą z dwóch innych, nazywają się płaszczyznami ogniskowemi.

Ogniska opisują tę samą powierzchnię (powierzchnię ogniskową), którą obwodzą płaszczyzny ogniskowe; jej rząd $n_1 = 2m(n-1)-2r$, jej klasa $m_1 = 2n(m-1)-2r$. Stąd: różnica pomiędzy rzędem a klasą powierzchni ogniskowej kongruencyi algebraicznej równa się podwójnej różnicy pomiędzy rzędem a klasą kongruencyi (Twier. Kleina patrz Lie, Gött. Nachr. 1870).

Każdy promień kongruencyi jest styczny do powierzchni ogniskowej w punktach ogniskowych, a płaszczyzny styczne w tych punktach są płaszczyznami ogniskowemi.

Nazywamy punktami i płaszczyznami osobliwemi kongruencyi te punkty i płaszczyzny, do których należy ∞ prostych kongruencyi; stożki, utworzone przez te proste i krzywe, przez nie obwiedzione, nazywają się stożkami i krzywemi osobliwemi kongruencyi. Jeżeli stożki te są klasy h, wtedy punkt osobliwy nazywa się punktem stopnia h; jeżeli krzywe te są klasy h, wtedy płaszczyzna osobliwa nazywa się płaszczyzną stopnia h. Dwa punkty albo dwie płaszczyzny osobliwe nazywają się sprzężonemi (zjednoczonemi, verbundene u matematyków niemieckich), gdy prosta, łącząca dwa punkty albo wspólna dwóm płaszczyznom, należy do kongruencyi.

Niekiedy zdaje się, że kongruencya jest pozbawiona właściwej powierzchni ogniskowej, a posiada tylko jedną linię ogniskową. Tak. np. gdy mamy kongruencyę prostych, opierających się na dwóch krzywych danych, wtedy punkty tych krzywych występują jako ogniska promieni kongruencyi, i stąd zdawałoby się, że nie ma innych punktów ogniskowych, prócz punktów, należących do dwu krzywych. Niektórzy autorowie nazywają takie kongruencye, pozbawionemi powierzchni ogniskowej, ale Sturm (w cytowanem dziele) zauważył, że ściśle tak nie jest, gdy rząd kongruencyi jest większy od 1; albowiem łatwo widzieć, że skoro rozważymy płaszczyznę styczną wspólną dwom krzywym oraz prostą, łączącą dwa punkty styczności, to każdy punkt tej prostej można poczytać za ognisko, a zatem w tym przypadku powierzchnia ogniskowa jest powierzchnią prostoliniową, utworzoną przez rzeczone proste łączące, t. j. powierzchnię rozwijalną płaszczyzn stycznych, wspólnych dwom krzywym.

Punkty dwóch krzywych są widocznie także punktami osobliwemi kongruencyi, zgodnie z podaną wyżej definicyą; widzimy stąd, że te kongruencye posiadają nieskończenie wiele punktów osobliwych, tworzących jednę lub kilka linij, które nazwiemy osobliwemi: w ogólności wszakże liczba punktów osobliwych jest skończona. Kongruencye rzędu wyższego niż 1 mogą tedy być dwojakie: t. j. albo nie posiadać linij osobliwych, albo posiadać takie linie.

Jeżeli rozważamy promień jakiejkolwiek kongruencyi (nawet niealgebraicznej), wszystkie promienie nieskończenie z nim blizkie i najmniejsze pomiędzy niemi odległości, wtedy spodki tych najmniejszych odległości na promieniu są w ogólności zawarte zawsze pomiędzy dwoma punktami, nazwanemi punktami granicznemi. Pomiędzy wszystkiemi promieniami nieskończenie blizkiemi są, jak powiedziano wyżej, dwa promienie, spotykające dany, t. j. promienie, dla których powyższa odległość najmniejsza jest zerem; zasługuje na uwagę twierdzenie, że ogniska, które oczywiście znajdują się oba wewnątrz odcinka, ograniczonego punktami granicznemi, są w równej odległosci od tych dwóch punktów; stąd punkt środkowy odcinka punktów granicznych zlewa się z punktem środkowym odcinka ognisk; nazywamy ten punkt punktem środkowym promienia.

Rozważając dwa promienie nieskończenie blizkie z danym i takie, że spodki ich najkrótszych odległości od danego zlewają się z punktami granicznemi, mamy twierdzenie: kierunki odległości najkrótszych, wychodzących z punktów granicznych, są do siebie prostopadłe; płaszczyzny, przechodzące przez promień i przez te kierunki, nazywamy płaszczyznami głównemi.

Płaszczyzny dwusieczne kątów pomiędzy płaszczyznami głównemi zlewają się z płaszczyznami dwusiecznemi kątów pomiędzy płaszczyznami ogniskowemi. Pomiędzy kątem γ

dwu płaszczyzn ogniskowych, odległością $2d$ punktów granicznych i odległością 2δ punktów ogniskowych zachodzi związek $\sin\gamma = \frac{\delta}{d}$.

Pojęcia powyższe należą do teoryi nieskończonostkowej kongruencyi, której początek zawdzięczamy Hamiltonowi i Kummerowi; mówimy o niej w Rozdziale XVI, gdzie podajemy według Kummera, też określenie t. zw. gęstości układu w punkcie promienia t. j. pojęcia pokrewnego z pojęciem krzywizny powierzchni w punkcie. Pomiędzy kongruencyami, badanemi za pomocą metod geometryi nieskończonostkowej, zasługują na uwagę kongruencya normalnych do powierzchni (patrz Rozdz XVI): na teraz w § następnym ograniczamy się do rozważania kongruencyj algebraicznych niższych rzędów.

Ten to ważny gatunek kongruencyi normalnych nasunął się najprzód geometrom. W r. 1828 Hamilton rozpoczął badanie kongruencyj, inaczej układów promieni (Irish. Trans. XV, 1828; XVI, 1880, XVII, 1837), a w r. 1860 Kummer ogłosił rozprawę (Crelle LVII), stanowiącą krok ważny w teoryi. Kongruencyę algebraiczną rzędów 1-go i 2-go rozpoczął badać systematycznie Kummer w r. 1866 (Berl. Abh. 1866), Plücker zaś obszerną część swojego dzieła „Neue Geometrie“ poświęcił teoryi kongruencyj, a specyalnie kongruencyom, które otrzymujemy z przecięcia dwóch kompleksów liniowych. Prace o kongruencyach ogłosili nadto: Möbius (Leipz. Ber. XIV, 1862), Matthiessen (Ztschr. f. Math. XIX, Acta math. IV), Weingarten (Crelle XCVIII), Bianchi (Ann. di mat. XV), Voss (Math. Ann. IX), Sturm (Gött. Nach. 1888; Math. Ann. XXXVI), Schumacher (tamże XXXVII, XXXVIII) Montesano (Acc. Torino 1892, Rend. Lincei 1892, Rend. Palermo 1893) i t. d. Teoryę zupełną kongruencyi znajdujemy w tomie II dzieła Sturma. Pojęcie porządku kongruencyi wprowadził Schumacher.

§ 11.

Kongruencye rzędu 1-go.

Wszystkie kongruencye rzędu 1-go są porządku zero; nie mogą mieć prawdziwej powierzchni ogniskowej, jako miejsca, mają natomiast powierzchnię ogniskową, jako obwiednią.

Pomiędzy kongruencyami rzędu 1-go wyróżnia się wiązka prostych, będąca klasy zero i mająca tylko jeden punkt osobliwy.

Każda inna kongruencya rzędu 1-go ma przynajmniej jednę linię osobliwą. Jeżeli γ_h jest rząd linii osobliwej kongruencyi liniowej takiej, że promienie w liczbie nieskończonej, wychodzące z jednego jej punktu, tworzą stożek rzędu h, wtedy zachodzi związek: $\Sigma \gamma_h h(h-1) = m(m-1)$, w którym m jest klasą kongruencyi, a suma rozciąga się na wszystkie linie osobliwe. Prócz tego mamy jeszcze dwa następujące związki:

$$\Sigma \gamma_h h^2 = m(m+1), \qquad \Sigma \gamma_h = 2m;$$

drugi z nich wypływa z dwóch poprzedzających.

Kongruencya rzędu 1-go może mieć **najwyżej dwie** linie osobliwe (kierownice kongruencyi). Jeżeli ma jednę tylko kierownicę i na każdym z promieni ogniska są w ogólności różne, wtedy będzie to kongruencya cięciw pewnej krzywej. Jedyną kongruencyą rzędu 1-go, utworzoną z cięciw krzywej, jest kongruencya cięciw krzywej sześciennej skośnej; jest ona klasy 3-ej.

Jeżeli kongruencya ma dwie kierownice, wtedy jedna z nich musi być linią prostą; rząd drugiej jest wtedy klasą m kongruencyi, a sama ona spotyka w $m(m-1)$ punktach prostą.

Jeżeli dwa ogniska na każdym promieniu kongruencyi zlewają się, wtedy ma ona jednę tylko krzywą ogniskową i kierowniczą, która nie może być linią prostą.

Kongruencya ta tworzy się jednym tylko sposobem, mianowicie przez ustanowienie odpowiedniości $[1, m]$ pomiędzy punktami prostej a płaszczyznami pęku, którego osią jest ta prosta, i uważanie za proste kongruencyi wszystkich tych prostych (tworzących pęk), które przechodzą przez punkt prostej i znajdują się na odpowiadającej mu płaszczyźnie.

Dla każdego promienia punkt ogniskowy (jedyny) jest punktem, w którym promień spotyka prostą kierowniczą, a płaszczyzna ogniskowa jest płaszczyzną, przechodzącą przez promień i przez tę prostą.

Kummer w rozprawie z r. 1866, klasyfikując kongruencye rzędu 1-go, nie włączył do swej klasyfikacyi kongruencyj, mających jednę tylko linię ogniskową.

---

§ 12.

Kongruencye rzędu 2-go bez linij osobliwych.

Kongruencye rzędu 2-go mogą posiadać tylko skończoną liczbę punktów osobliwych albo linij osobliwych.

W przypadku pierwszym klasa nie może być wyższa nad 7.

W kongruencyi rzędu 2-go bez linij osobliwych płaszczyzny osobliwe nie mogą być stopnia wyższego nad 6 (patrz § 10).

Każdy punkt osobliwy stopnia 1-go jest środkiem pęku promieni, znajdujących się na płaszczyźnie osobliwej też rzędu 1-go.

Porządek kongruencyi $(2, m)$ bez linij osobliwych wynosi

$m-2$; charakterystykami układu zerowego, określonego przez kongruencyę $(2, m)$, są: 1, $\frac{1}{2}m(m-1)$, $m-2$.

Powierzchnia ogniskowa kongruencyi $(2, m)$ bez krzywych osobliwych jest rzędu 4-go, klasy $2m$ i porządku 12 (przez p o r z ą d e k rozumiemy tu liczbę a, określoną w Rozdz. IX, § 1); punkt osobliwy kongruencyi jest punktem podwójnym powierzchni ogniskowej.

Promienie, których punkty ogniskowe zlewają się, i te, których płaszczyzny ogniskowe zlewają się, tworzą dwie powierzchnie prostoliniowe stopnia $2(m+2)$.

J e ż e l i a_h j e s t l i c z b ą p u n k t ó w o s o b l i w y c h s t o p n i a h, w t e d y m a m y z w i ą z k i n a s t ę p u j ą c e:

$$\Sigma a_h = 18 - m; \quad \Sigma a_h h = 4(m+2); \quad \Sigma a_h h^2 = 2m(m+2);$$

$$\Sigma a_h h^3 = (m+2)^2(m-1).$$

Każda kongruencya $(2, m)$ bez linij osobliwych ma promieni podwójnych $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$; do każdego punktu osobliwego stopnia h należy $\frac{1}{2}(h-1)(h-2)$ promieni podwójnych, które są tworzącemi podwójnemi stożka, wychodzącego z tego punktu: żaden promień podwójny nie leży na powierzchni ogniskowej.

Każda płaszczyzna osobliwa zawiera sześć punktów osobliwych, położonych na jednej stożkowej i każdy stożek kwadrykowy (wychodzący z punktu osobliwego stopnia 2-go) zawiera 9 punktów osobliwych, położonych na krzywej skośnej rzędu 4-go gatunku 1-go, mającej punkt osobliwy w wierzchołku stożka. Każdy promień podwójny zawiera dwa punkty osobliwe, których stopnie dodane czynią $m+2$.

I s t n i e j ą d w a g a t u n k i k o n g r u e n c y i $(2, m)$ b e z l i n i j o s o b l i w y c h, a mianowicie: I. kongruencye o punktach osobliwych stopni 1, 2, 3, $m-1$ (g a t u n e k p i e r w s z y); II. kongruencye, mające punkty osobliwe stopni 1, 2, $\frac{1}{2}m+1$ (g a t u n e k d r u g i). Liczby β_h, odnoszące się do tych gatunków kongruencyj $(2, m)$ bez linij osobliwych, podane są w następujących tablicach:

	Kongruencye gatunku 1-go.					
	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2,6)*	(2, 7)
α_1	16	10	6	3	1	0
α_2	—	5	6	6	4	0
α_3	—	—	2	3	3	10
α_4	—	—	—	1	0	0
α_5	—	—	—	—	1	0
α_6	—	—	—	—	—	1

	Kongruencye gatunku 2-go.	
	(2, 4)	(2,6) *)
α_1	6	0
α_1	6	8
α_3	2	0
$\alpha^{\dagger}$	—	4

*) Dwie kongruencye (2,6) odróżniają się znakowaniem (2, 6)I, (2, 6)II Sturm (l. c.); autorowie przed Sturmem nazywali gatunek 1-y - 2-gim i odwrotnie.

Powierzchnią ogniskową kongruencyi (2, 2) jest powierzchnia Kummera; kongruencya ta jest przecięciem kompleksu kwadratowego z kompleksem liniowym. Szesnaście punktów osobliwych powierzchni tworzy 40 par punktów sprzężonych, i 90 par punktów niesprzężonych; każdy punkt jest sprzężony z innemi pięcioma.

Kongruencyę tę badali specyalnie: Kummer (Berl. Abh. 1866), Reye (Crelle LXXXVI), Schur (Math. Ann. XV), Caporali (Linaei Mem. II_3), Stahl (Crelle XCII), Hirst (London mat. Soc. IV), Sturm (Crelle LI). Wykład zupełny o tej i o innych kongruencyach znajdujemy w drugim tomie dzieła Sturma str. 117 i nast.

Kongruencya (2, 3) ma 5 punktów osobliwych S_2 stopnia 2-go; 10 punktów S_1 stopnia 1-go, a zatem 10 płaszczyzn osobliwych; każda z tych płaszczyzn przechodzi przez dwa punkty S_2 i przez jeden punkt S_1. Każdy punkt S_2 jest sprzężony z każdym innym punktem S_2 oraz z czterema punktami S_1; każdy punkt S_1 jest sprzężony z trzema punktami S_1 i z dwoma punktami S_2. Przez każdą kongruencyę (2, 3) przechodzi 10 kompleksów czworościanowych; czworościan zasadniczy dla każdego z nich ma wierzchołki w trzech punktach S_2 i w jednym punkcie S_1 niesprzężonym z żadnym z tych trzech punktów S_2.

Powierzchnia ogniskowa jest powierzchnią rzędu 4-go i klasy 6-ej, mającą 15 płaszczyzn osobliwych jako płaszczyzny styczne podwójne wzdłuż stożkowych.

Kongruencyę tę, prócz Kummera, Reyego, Hirsta (patrz wyżej), badali jeszcze: Stahl (Crelle XCI), Voss (Math Ann. XXIII), Schumacher (Untersuchungen über Strahlensysteme 3 Ord. und 2 klasse Dis. Monachium 1885).

Kongruencya (2,4) jest porządku 2; ma koniecznie jeden promień podwójny, łączący dwa punkty osobliwe 3-go stopnia; ma dwa punkty osobliwe S_3 stopnia 3-go, z sobą sprzężone; 6 punktów osobliwych S_2 stopnia 2-go i 6 punktów S_1 stopnia 1-go, a stąd 6 płaszczyzn osobliwych. Na każdej płaszczyźnie osobliwej mamy 1 punkt S_3, 2 punkty S_2 i 2 punkty S_1. Każdy punkt S_2 nie jest sprzężony z jednym tylko z pozostałych punktów S_2; punkt S_3 i punkt S_2 są zawsze sprzężone; każdy punkt S_1 nie jest sprzężony z trzema innemi punktami S_1 a jest sprzężony z jednym tylko punktem S_3.

Powierzchnia ogniskowa jest rzędu 4-go, klasy 8-ej z 6 płaszczyznami stycznemi wzdłuż stożkowych; płaszczyzny dwustyczne obwodzą rozwijalną klasy 4-ej, a płaszczyzny styczne — rozwijalną klasy 12-ej, która dotyka jej wzdłuż krzywej rzędu 12-go.

Przez kongruencyę (2,4) przechodzą trzy kompleksy czworościanowe. Wierzchołkami czworościanu są dwa punkty S_3 i dwa punkty S_2 niesprzężone wzajemnie.

Kongruencyę tę, prócz Kummera i innych, wspomnianych wyżej autorów, badał specyalnie Stahl (Crelle XCVII).

Kongruencya (2,5) ma trzy płaszczyzny osobliwe i jest poporządku 3. Mamy tu 1 punkt S_4, 3 punkty S_3, 6 punktów S_2 i 3 punkty S_1; dalej trzy promienie podwójne łączące S_4 z każdym z punktów S_3.

Istnieje jeden tylko stożek osobliwy rzędu 4-go, zawierający wszystkie punkty osobliwe, prócz jednego punktu S_1; płaszczyzna osobliwa, odpowiadająca temu punktowi S_1, zawiera dwa inne punkty S_1.

Kongruencya (2, 5) należy do jednego tylko kompleksu czworościanowego, którego czworościan ma swe wierzchołki w punktach S_4, S_3.

Powierzchnia ogniskowa jest rzędu 4-go, klasy 10 ej z 13 punktami stożkowemi i 3 płaszczyznami stycznemi osobliwemi. Płaszczyzny dwustyczne obwodzą rozwijalną klasy 12-ej, a płaszczyzny stateczne rozwijalną klasy 18-ej. Ta powierzchnia ogniskowa nie jest jedyną powierzchnią rzędu 4-go z 13 punktami stożkowemi.

Kongruencya $(2,6)_I$ ma 1 punkt S_5, 6 punktów S_3, 4 punkty S_2, 1 punkt S_1, 1 płaszczyznę osobliwą, 6 promieni podwójnych; wszystkie punkty S_2 i jedyny punkt S_5 znajdują się na płaszczyźnie osobliwej.

Rząd kongruencyi równa się 4; kongruencya należy do kompleksu czworościanowego. Powierzchnia ogniskowa jest rzędu 4-go, klasy 12-ej. ma 12 punktów podwójnych; nie jest jedyną powierzchnią tego gatunku, Rohn dowiódł (Math. Ann. XXIX, patrz Sturm l. c. II, str. 271), że są cztery gatunki powierzchni rzędu 4-go z 12 punktami podwójnemi. Rozwijalne dwustyczne i rozwijalne płaszczyzn statecznych są obie klasy 24-ej.

Kongruencya $(2,6)_{II}$ ma 4 punkty S_4, 8 punktów S_2, 6 promieni podwójnych, które są prostemi, łączącemi 4 punkty S_2; rząd jej wynosi 4.

Odmiennie od innej kongruencyi klasy 6-ej, należy ona do kompleksu czworościanowego, a wierzchołkami czworościanu są 4 punkty S_4.

Sześć promieni kongruencyi, znajdujące się na jednej płaszczyźnie, tworzą zawsze sześciobok Brianchona.

Powierzchnia ogniskowa ma 12 punktów podwójnych i nie jest ta sama co, dla kongruencyi $(2,6)_I$, lecz jest powierzchnią, należącą do jednego z czterech odkrytych przez Rohna gatunków, o których mowa wyżej.

Należy tu nadmienić, że kongruencye (2,5), (2,4), (2,3), (2,2) można uważać wszystkie, jako przypadki szczególne kongruencyi $(2,6)_{II}$ (Kummer l. c. 102, Sturm l. c. II, str. 294).

Kongruencya (2,7) ma 1 punkt S_6 i 10 punktów S_3; 10 punktów podwójnych, które łączą jedyny punkt S_6 z 10 punktami S_3; kongruencya jest porządku 5.

Powierzchnia ogniskowa jest klasy 14-ej i ma 11 punktów stożkowych; rozwijalne dwustyczne i rozwijalne płaszczyzn statecznych są odpowiednie klasy 40 i 30; powierzchnia ta nie jest jedyną powierzchnią o 11 punktach stożkowych; są i inne jeszcze, jak to znalazł Rohn.

Kongruencyę rzędu 2-go tylko z punktami osobliwemi badał najprzód Kummer w cytowanej rozprawie (1866), potem nastąpiły inne prace wyżej wymienione i nadto zajmowali się temi kongruencyami: Caporali (Acc. Napoli 1879), Bertini (Acc. Lincei 1879—80). Loria (Acc. Torino 1884—86), Masoni (Acc. Napoli 1883). W pracy Caporali'ego znajdujemy piękny sposób tworzenia (jedyny) dla kongruencyj (7,2), (6,2), (5,2).

---

§ 12.

Kongruencye rzędu 2-go z liniami osobliwemi.

Kongruencye te należą do trzech następujących kategoryj:

I. Kongruencya tworzy się z cięciw krzywej skośnej, która może być tylko krzywą rzędu 4-go gatunku 1-go (p. Rozdz. X). Kongruencya ta jest klasy 6-ej i porządku 2. Jej powierzchnia ogniskowa jest rzędu 8-go i tworzy się z czterech stożków kwadrykowych, przechodzących przez krzywą rzędu 4-go; cztery wierzchołki stożków są punktami osobliwemi stopnia 2-go dla kongruencyi; linią osobliwą jest oczywiście krzywa rzędu 4-go skośna.

II. Kongruencya tworzy się z prostych, spotykających dwie krzywe, które są liniami osobliwemi; te krzywe być mogą:

a) Dwiema stożkowemi z dwoma punktami wspólnemi. Kongruencya jest klasy 4-ej i porządku 2-go; punkty dwóch stożkowych są punktami osobliwemi stopnia 2-go, ale punkty wspólne obu stożkowym są osobliwemi stopnia 3-go; płaszczyzny obu stożkowych są osobliwemi stopnia 2-go, a dwie płaszczyzny styczne do obu stożkowych w ich punktach spotkania są osobliwemi stopnia 1-go. Jeżeli weźmiemy pęk kwadryk, przechodzących przez dwie stożkowe i w takim pęku dwa stożki niezniekształcone, to i wierzchołki tych dwóch stożków będą także punktami osobliwemi stopnia 2-go kongruencyi; powierzchnia osobliwa (rzędu 4-go) składa się z dwu takich stożków.

b) Jedna z linij osobliwych jest prostą, druga krzywą rzędu n-tego, przecinającą prostą w $n-2$ punktach. Kongruencya jest klasy n, porządku 0. Każdy punkt prostej osobliwej jest punktem osobliwym stopnia n-tego, każdy zaś punkt na krzywej jest osobliwym stopnia 1-go; każda płaszczyzna przechodząca przez prostą, jest płaszczyzną osobliwą stopnia 2-go. Powierzchnię ogniskową tworzy ogół wszystkich płaszczyzn stycznych, poprowadzonych z prostej do krzywej, jest ona przeto rzędu $m-2(n-2)$, jeżeli m jest klasą krzywej skośnej. Promieniami podwójnemi kongruencyi są dwusieczne krzywej, poprowadzone z punktów prostej; tworzą one powierzchnię prostoliniową rzędu $2(n-1)-\frac{1}{2}m$.

III. Kongruencya tworzy się z promieni, przecinających raz jeden tylko pewną linię osobliwą; mogą tu zachodzić następujące przypadki:

a) Linia osobliwa jest prostą; porządek kongruencyi równa się zeru; kongruencya być może: (1) kongruencyą (2,2) wszystkich prostych, stycznych do kwadryki i przecinających daną prostą; (2) jedną z kongruencyj $(2, 2\mu-2)$ prostych stycznych w punkcie do powierzchni rzędu μ, mającej prostą $(\mu-2)$-krotną i opierających się na tej prostej w innym punkcie; (3). jedną z kongruencyj $(2, m)$ prostych, powstających przez ustanowienie odpowiedniości $(2, m)$ pomiędzy punktami prostej a płaszczyznami pęku przez nią przechodzącego, i zbudowanie pęków prostych ze środkiem w punkcie prostej, a których płaszczyzny odpowiadają punktowi uważanemu. Tego gatunku (3) nie znajdujemy u Kummera.

b) Linia osobliwa jest rzędu $n > 1$; z każdego jej punktu wychodzi pęk promieni kongruencyi i nadto inny promień osobny. Klasa kongruencyi równa się rzędowi krzywej osobliwej, która musi być wymierną. Płaszczyzny pęków promieni, wychodzących z punktów krzywej osobliwej, muszą być stycznemi do stożka kwadrykowego, którego wierzchołek jest także punktem osobliwym kongruencyi. Porządek kongruencyi wynosi $n—1$. Kongruencya tworzy się ze stycznych stożka kwadrykowego. Ten gatunek obejmuje następujące podgatunki: (1). krzywa wymierna rzędu n leży na stożku kwadrykowym i przechodzi $n—2$ razy przez jego wierzchołek; (2). krzywa wymierna rzędu n nie leży na stożku ale jest wzajemnie z nim rzutowa, t. j. jej punkty odpowiadają jednoznacznie płaszczyznom stycznym stożka, i każdy punkt znajduje się na odpowiadającej mu płaszczyźnie stycznej.

c) Linia osobliwa jest rzędu $n > 1$, z każdego jej punktu wychodzi stożek kwadrykowy prostych kongruencyi i nie wychodzi żaden inny promień. Porządek kongruencyi wynosi $n—2$. Rozróżniamy następujące przypadki: (1). Stożek kwadrykowy rozpada się na dwie płaszczyzny, kongruencya jest klasy $2n$ i tworzy się z promieni, stycznych do stożka kwadrykowego i przecinających krzywą płaską rzędu n, przechodzącą $n-1$ razy przez wierzchołek stożka. Gatunki następne, nie badane przez Kummera, odkrył Sturm. W przypadku (2) stożek kwadrykowy wychodzi z punktu linii osobliwej niezniekształconej; ta linia jest stożkowa; kongruencya składa się z prostych, przecinających tę stożkową i stycznych do powierzchni rzędu 4-go, której ta stożkową jest krzywą podwójną, i mającej jeszcze 4 punkty stożkowe. Kongruencya jest klasy 4-ej. (3) Stożek nie jest zniekształconym. a linia osobliwa jest krzywą sześcienna płaską z punktem podwójnym. Kongruencya jest klasy 6-ej i powstaje w ten sposób: bierzemy w przestrzeni 4 punkty; sześć łączących je prostych, spotykają się na krzywej sześciennej; wszystkie stożki kwadrykowe, mające wierzchołki na tej krzywej i przechodzące przez cztery punkty obrane oraz przez punkt podwójny sześciennej, tworzą kongruencyę (2, 6); (4) Stożek nie jest zniekształcony, a linią osobliwą jest krzywa sześcienna skośna; kongruencya jest klasy 6-ej i powstaje w ten sposób: na krzywej sześciennej skośnej bierzemy 4 punkty, przez jeden z nich P prowadzimy cięciwę, przecinającą krzywą w piątym punkcie Q; wszystkie stożki kwadrykowe, mające wierzchołki na krzywej sześciennej, przechodzącej przez 4 punkty, i styczne w punkcie P do cięciwy PQ, tworzą kongruencyę. Sześć prostych, łączących 4 punkty, są przecięciami podwójnemi kongruencyi, a 4 punkty są punktami osobliwemi stopnia 4-go.

Kongruencyami rzędu 2-go z liniami osobliwemi zajmował się pierwszy K u m m er w wielokrotnie cytowanej rozprawie z r. 1866. Rozpoczął on ich klasyfikacyę ale pominął niektóre gatunki. Klasyfikacyę zupełną podał S t u r m (Math. Ann. XXXVIII i rozprawa cytowana). O tych kongruencyach traktuje ostatni rozdział 2-go tomu dzieła S t u r m a. Zajmował się niemi także M o n t e s a n o (Acc. Torino 1892, Rend. Lincei (4) I, Rend. Palermo VII, Ist. Lomb. 1893), który badał odwzorowanie ich na płaszczyźnie.

O kongruencyach rzędu wyższego nad 2-gi mało dotąd mamy prac. Kongruencyę (3, 3) badał R o c c e l l a w rozprawie: „Sugli enti geometriei dello spazio di rette etc.“ (1882), w której rozpatruje kongruencyę szczególną, utworzoną przez trzy pęki rzutowe kompleksów liniowych. Kongruencye rzędu 3-go i wyższego badali jeszcze H i r s t (Proc. London Soc. XIV, XVI, XVII; Rend. Palermo I) i F a n o Acc. Torino 1894—96).

§ 4.

Geometrya kul.

Niechaj będzie pięć kul, danych (w spółrzędnych Descartes'a) przez równanie:

$$s_i \equiv (x-\alpha_i)^2 + (y-\beta_i)^2 + (y-\gamma_i)^2 - R_i^2 = 0 \qquad (i=1,2,\ldots 5);$$

równanie każdej innej kuli w przestrzeni wyrazi się w ten sposób:

$$s \equiv s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + s_4 x_4 + s_5 x_5 = 0,$$

gdzie $x_1, \ldots x_5$ są wielkości, zależne od specyalnej rozpatrywanej kuli. Te wielkości x można uważać za spółrzędne jednorodne kuli w przestrzeni, a pięć kul danych za kule podstawowe układu spółrzędnych.

Jeżeli uważać będziemy kulę jako element przestrzeni, to oczywiście ogół wszystkich kul stanowić będzie przestrzeń liniową czterowymiarową, gdy ogół wszystkich prostych przestrzeni tworzy, jak już wiemy, przestrzeń kwadratową czterowymiarową. Ten układ spółrzędnych stosował w badaniach swych Loria. Inny układ spółrzędnych niejednorodnych, stosowany przez Reyego, jest następujący: Nazwijmy potęgą punktu względem kuli iloczyn odległości punktu od dwóch punktów kuli, leżących z danym na jednej prostej (iloczyn ten nie zmienia się przy zmianie prostej poprzecznej, przez punkt dany przechodzącej); trzy spółrzędne α, β, γ środka kuli i potęga p początku spółrzędnych Descartes'a względem kuli (wyrażeniem tej potęgi jest $p = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$) można uważać za spółrzędne kuli w przestrzeni.

Spółrzędne x_i mają własność (analogiczną do własności spółrzędnych jednorodnych punktów albo płaszczyzn) taką, że ich przekształcenie liniowe odpowiada geometrycznie zmianie układu pięciu kul podstawowych na układ pięciu innych, mających jako spółrzędne względem kul pierwotnych spółczynniki podstawień liniowych odwrotnych względem podstawień danych.

Nadto: jeżeli przekształcimy przestrzeń kul za pomocą przekształcenia przez promienie odwrotne, to spółrzędne kul przekształconych względem pięciu kul podstawowych przekształconych będą te same, co spółrzędne kul pierwotnych względem kul podstawowych pierwotnych.

Połóżmy:

$$2R_{ij} = 2R_{ji} = R_i^2 + R_j^2 - \left[(\alpha_i - \alpha_j)^2 + (\beta_i - \beta_j)^2 + (\gamma_i - \gamma_j)^2\right];$$

wyrażenie $2R_{ij}$ nazywa się niezmiennikiem dwu kul podstawowych $(i)(j)$; znikanie tego niezmiennika jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby kule były ortogonalne.

Jeżeli wszystkie wyrażenia R_{ij} są zerami, t. j. jeżeli każde dwie kule są ortogonalne, mamy tedy związek $\sum \frac{1}{R_i^2} = 0$ (Darboux. Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces, Paryż 1873, str. 135).

Jeżeli R jest promień jakiejkolwiek kuli o spółrzędnych x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, mamy wzór:

$$R^2 = \frac{\sum_{ij} R_{ij} x_i x_j}{(\sum_i x_j)^2},$$

skąd wynikają odrazu warunki, którym zadość czynić winny spółrzędne x, aby kula miała promień zero, t. j. sprowadzała się do punktu, zwanego punktem — kulą, albo też miała promień nieskończony, t. j. stawała się płaszczyzną, zwaną płaszczyzną — kulą.

Punkt—kulę uważać można jako ortogonalny do kuli, na której się znajduje; dwa punkty—kule są ortogonalne, jeżeli zlewają się.

Jeżeli R_{xy} jest biegunową bieguna y dla formy $R_{xx}=\sum_{ij} R_{ij}x_ix_j$, to niezmiennik jednoczesny dwu kul o spółrzędnych (x) i (y) równa się:

$$-\frac{R_{xy}}{\sum_i x_i \sum_i y_i}.$$

Warunkiem na to, aby dwie kule (x), (y) były styczne, jest:

$$R_{yy}R_{xx}-(R_{xy})^2=0.$$

Podobnie jak w geometryi linii prostej, mamy w geometryi kuli także kompleksy kul, kongruencye kul i t. d.

Wszystkie kule kompleksu liniowego są ortogonalne do jednej i tej samej kuli.

Wszystkie punkty—kule przestrzeni tworzą oczywiście kompleks kwadratowy, którego równaniem jest $\sum_{ij} R_{ij}x_ix_j=0$; jeżeli przyjmiemy, że pomiędzy wielkościami x zachodzi nowe równanie kwadratowe, będziemy mieli inny kompleks kwadratowy kul; kongruencya rzędu 4, wspólna tym dwóm kompleksom, będzie utworzona tylko z punktów—kul. Godne uwagi jest twierdzenie:

Miejscem tych dwóch ∞^2 punktów—kul jest cyklida (patrz Rozdz. XII, § 7).

W ogólności:

Miejscem punktów—kul kompleksu rzędu n jest powierzchnia rzędu $2n$, dla której linią n-krotną jest koło urojone w nieskończoności; miejscem punktów—kul kongruencyi rzędu n jest krzywa rzędu $2n$.

Z tego to punktu widzenia Loria badał cyklidy i rozklasyfikował je, o czem była mowa w Rozdz. XII.

Pierwsze pomysły z dziedziny Geometryi kul zawdzięczamy Liemu (Comptes rendus Rend. 1871, Math. Ann. V); potem zajmowali się nią Reye (Synthetische Geometrie der Kugeln, Lipsk 1879; Crelle IC), Loria (Mem. Torino 1884, Acc. Torino 1885). Praca tego ostatniego autora zawiera wykład systematyczny, z którego zaczerpnęliśmy powyższe wiadomości. Związkami metrycznemi, odnoszącemi się do kul w przestrzeni, zajmowali się: Frobenius (Crelle LXXIX) i Darboux (l. c. Annales de l'École norm sup. 1872), patrz też Salmon-Fiedler l. c. II i t. d. O wyznaczeniu punktu—kuli, przechodzącej przez trzy punkty dane i o związku tego zagadnienia z zagadnieniem o konstrukcyi kół, stycznych do trzech kół danych, patrz Casey (Trans. Irish. Acad. 1866) i Cayley (Ann. di mat. l).

ROZDZIAŁ XV.

GEOMETRYA LICZĄCA.

§ 1.

Rzeczy ogólne. Zasada zachowania liczby.

Geometrya licząca (Abzählende Geometrie, geometria numerativa) zajmuje się zagadnieniami, w których szukamy liczby określonych form geometrycznych, czyniących zadość warunkom danym. Tak np. ile w pęku stożkowych jest stożkowych stycznych do prostej; ile jest krzywych rzędu 4-go z punktem potrójnym przechodzących przez 10 punktów danych? i t. d.

Ustanowiwszy definicyę formy geometrycznej, przyjmiemy, że istnieje ∞^c indywiduów, czyniących tej definicyi zadość, t. j. przyjmiemy, że w przedstawieniu analitycznem tej formy pozostaje c stałych nieoznaczonych; liczba c nazywa się zwykle liczbą stałych formy.

1. Dla punktu na płaszczyznie jest $c=2$, dla punktu w przestrzeni $c=3$.

2. Dla płaszczyzny w przestrzeni jest $c=3$.

3. Dla prostej na płaszczyźnie jest $c=2$, w przestrzeni $c=4$.

4. Dla trójkąta w przestrzeni $c=9$, dla trójkąta na płaszczyźnie $c=6$.

5. Dla wielokąta płaskiego o n bokach w przestrzeni jest $c = 2n + 3$.

6. Dla wielościanu o k ścianach: $c = k + 6$ (Hoppe, Grun. Archiv LV, Schubert, tamże LXIII).

7. Dla krzywej (położonej na płaszczyźnie danej) rzędu n, klasy ν, z d punktami podwójnemi, δ stycznemi podwójnemi, ι przegięciami jest:

$$c = 3 + \frac{1}{2} n(n+3) - d - 2r = 3 + \frac{1}{2} \nu(\nu+3) - \delta - 2\iota.$$

8. Dla powierzchni ogólnej rzędu n jest:

$$c = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 1.$$

9. Dla kompleksu prostych ogólnego rzędu n jest: $c = \frac{1}{12}(n+1)(n+2)^2(n+3) - 1$.

(Lüroth, Crelle LXVII, Voss, Math. Ann. IX).

Jeżeli y wyraża warunek, któremu poddajemy formę geometryczną, daną przez definicyę, z inny warunek, wtedy warunek, wynikający z połączenia obu, wyrażamy przez yz i nazywamy iloczynem obu warunków y i z. Tak np. jeżeli g wyraża warunek, aby prosta przecinała prostą daną, g_p warunek, aby prosta przechodziła przez punkt określony, to gg^p wyrażać będzie warunek, aby prosta przechodziła przez punkt dany opierała się na prostej danej; g^2 warunek, aby prosta opierała się na dwóch prostych danych i t. p.

Warunek dany nazywamy warunkiem wymiaru a dla danej formy geometrycznej, jeżeli prowadzi do a równań pomiędzy c stałemi formy, t. j. jeżeli istnieje ∞^{c-a} form, czyniących zadość temu warunkowi. Ogół wszystkich ∞^{c-a} form, czyniących zadość warunkowi wymiaru a, nazywa się układem gatunku $c-a$: i tak: krzywa jest układem gatunku 1, kompleks promieni układem gatunku 3-go, powierzchnia prostoliniowa układem promieni gatunku 1-go i t. d.

Wymiar warunku, będącego iloczynem innych warunków, równa się sumie wymiarów czynników.

Niechaj c będzie liczbą stałych formy geometrycznej, którą poddajmy warunkom o wielokrotności c, wtedy w ogólności istnieć będzie liczba skończona N indywiduów form, czyniących zadość tym warunkom. Przez przemianę położenia wzajemnego elementów formy lub przez odpowiednie wyspecyalizowanie liczba N albo się nie zmienia, albo też staje się nieskończoną. Zasada ta nazywa się zasadą zachowania liczby (Schubert). Pojmowana algebraicznie, wyraża ona, że równanie, jeżeli w jakikolwiek sposób zmieniamy wartości jego spółczynników albo ma zawsze tęż samą liczbę pierwiastków, albo staje się tożsamością, przez co liczba jego pierwiastków staje się nieskończoną. Zasada ta jest bardzo użyteczna, albowiem przez wyspecyalizowanie elementów formy można znakomicie uprościć rachunek liczby indywiduów, czyniących zadość warunkom danym. Pokaże to przykład następujący:

Chcemy wyznaczyć liczbę prostych, opierających się na czterech prostych danych.

Wyspecyalizujmy położenie tych czterech prostych, i przyjmijmy, że dwie z nich przechodzą przez punkt P, dwie drugie przez punkt P'; wtedy widać, że istnieją dwie proste, opierające się na czterech danych, są niemi: prosta, łącząca punkty P i P' i prosta przecięcia dwóch płaszczyzn, na których położone są dwie pary prostych. Na mocy powyższej zasady możemy twierdzić, że istnieją zawsze dwie proste, opierające się na czterech prostych danych. Jest jasnem, że specyalizując w inny sposób położenie prostych (przyjmując np., że trzy z nich znajdują się na jednej płaszczyźnie, albo że trzy z nich przechodzą przez jeden punkt i t. d.), możemy otrzymać liczbę nieskończoną szukanych prostych.

Tej zasady, którę można uważać za postulat, zastosowania są bardzo rozmaite.

Zasadę tę, wypowiedzianą wyraźnie przez Schuberta (patrz niżej), można przedstawić czterema różnemi sposobami, które uważać można za wnioski z zasady (patrz cytowane niżej dzieło Schuberta str. 12 i 334).

§ 2.

Rachunek symboliczny warunków. Wzory na incydencyę i koincydencyę. Twierdzenia o styczności.

Do rozważań, o których mówimy, wprowadza się rachunek symboliczny.

Jeżeli formę o liczbie stałych równej c poddajemy warunkowi ν wymiaru c, otrzymujemy skończoną liczbę indywiduów, czyniących zadość temu warunkowi; liczbę tych indywiduów oznaczać będziemy także literą ν, wyrażającą warunek. Można wtedy ustanowić pewne związki lub tożsamości zasadnicze pomiędzy symbolami, wyrażającemi różne warunki, jakim poddajemy formę, aby ta była określona s k o ń c z o n ą l i c z b ą sposobów. Niechaj np. p będzie symbolem warunku, by punkt znajdował się na płaszczyźnie; P symbolem warunku, by punkt znajdował się stale w miejscu specyalnem, wtedy możemy widocznie napisać symbolicznie $p^3 = P$, gdyż oba wyrazy mają wartość liczebną równą 1.

Można w ten sposób ustanowić związki tylko pomiędzy warunkami jednego wymiaru c, ale przy pomocy następującej umowy można nadać znaczenie i związkom pomiędzy warunkami wymiaru jakiegokolwiek $a < c$.

Niechaj będą rozmaite warunki $\nu, \nu', \nu'' \ldots\ldots$ wymiaru a i niechaj y będzie jakimkolwiek warunkiem wymiaru $c - a$. Pomnożywszy $\nu, \nu', \nu'' \ldots$ przez y, otrzymamy warunek wymiaru c. Otóż rozumieć będziemy, że pomiędzy warunkami ν zachodzi związek, jeżeli pomnożywszy każdy wyraz tego związku przez jakikolwiek warunek y, otrzymamy związek (pomiędzy warunkami wymiaru c), istniejący faktycznie w znaczeniu wyżej wskazanem, Tak np. jeżeli p_g wyraża warunek, aby punkt znajdował się na prostej, to będzie oczywiście $p^2 = p_g$. Istotnie mnożąc obie strony np. przez p, mamy $p^3 = pp_g$ — związek faktycznie istniejący, gdyż obie strony jego mają wartość liczebną 1.

W ogólności do równań symbolicznych, o jakich tu mowa, stosują się wszystkie prawidła arytmetyczne o dodawaniu, odejmowaniu i mnożeniu.

Związki zasadnicze są następujące:

$$p^2 = p_g; \qquad p^3 = pp_g = P;$$

p, p_g, P są symbolami, wyrażającemi warunki na to, aby punkt znajdował się na płaszczyźnie, na prostej, wreszcie aby był ustalony;

$$e^2 = e_g; \qquad e^3 = e\,e_g = E;$$

e, e_g, E są symbole, wyrażające warunki na to, aby płaszczyzna przechodziła przez punkt, przez prostą, wreszcie aby była ustalona;

$$g^2 = g_p + g_e; \qquad g g_p = g_s = g g_z; \qquad g g_s = G = \tfrac{1}{2} g^4;$$

$$G = g_e^2 = g_p^2;$$

g, g^e, g_p, g_s, G są symbole, wyrażające warunki na to, aby prosta przecinała prostą, aby znajdowała się na płaszczyźnie, aby przechodziła przez punkt, aby należała do pęku, aby wreszcie była ustalona.

Nazywamy wpadającemi na siebie punkt i prostą, płaszczyznę i prostą, punkt i płaszczyznę, jeżeli należą do siebie, t. j. jeżeli punkt znajduje się na prostej, prosta na płaszczyźnie, punkt na płaszczyźnie; nazywamy wpadającemi na siebie—dwie proste spotykające się. Nazywamy wzorami na incydencyę (na przynależność) wszystkie równania pomiędzy warunkami, wyrażającemi te cztery incydencye.

Oto są te wzory:

$$pg = p_g + g = p^2 + g_e; \qquad pg_p = p^3 + g_s;$$

$$pg_s = p^2 g_p = G + p^3 g = G + p^2 g_e,$$

prosta g i punkt p należą do siebie;

$$eg = g_p + e_g = g_p + e^2; \; eg_e = g_s + e^3; \; e^2 g_e = eg_s = G + e^3 g = G + e^2 g_p,$$

płaszczyzna e i prosta g należą do siebie;

$$p^3 - p^2 e + p e^2 - e^3 = 0; \quad p^3 e - p^2 e^2 + p e^3 = 0,$$

punkt p i płaszczyzna e należą do siebie;

$$G - g_s h + g_e h_p + g_p h_e - g h_s + H = 0; \quad G h - g_s (h_p + h_e) + (g_p + g_e) h_s - g H = 0;$$

$$G h_e - g_s h_s + g_p H = 0; \quad G h_p - g_s h_s + g_e H = 0;$$

symbol h podobnie jak i g jest symbolem prostej, proste g i h przecinają się.

Liczne są zastosowania tych wzorów, ale nie możemy zatrzymywać się nad niemi, a odsyłając po nie czytelnika do dzieła S c h u b e r t a, podamy tylko kilka przykładów.

Rozważmy układ pojedyńczo- nieskończony wszystkich prostych s t y c z n y c h do krzywej skośnej wraz z ich p u n k t a m i s t y c z n o ś c i; wziąwszy układ pojedyńczo—nieskończony krzywych skośnych, będziemy mieli układ p o d w ó j n i e n i e s k o ń c z o n y (gatunku 2-go) prostych i punktów do niej należących. Dla tego układu symbol p^2 przedstawia warunek na to, aby jeden z punktów znajdował się jednocześnie na dwóch płaszczyznach danych, t. j. na prostej danej; stąd symbol ten przedstawia także liczbę krzywych układu, przeciętych przez prostą daną. Podobnież symbol g_e przedstawia liczbę s t y c z n y c h układu, leżących na płaszczyźnie danej, a więc także liczbę krzywych układu stycznych do płaszczyzny danej; pg przedstawiać będzie liczbę punktów układu które znajdując się na płaszczyźnie danej, odpowiadają prostym, przecinającym prostą daną. Z wzoru tedy $pg = p^2 + g_e$ wynika twierdzenie:

N i e c h a j b ę d z i e u k ł a d p o j e d y ń c z o - n i e s k o ń c z o n y k r z y w y c h s k o ś n y c h; j e ż e l i d o l i c z b y k r z y w y c h, p r z e c i n a j ą c y c h p r o s t ą d a n ą, d o d a m y l i c z b ę k r z y w y c h s t y c z n y c h d o p ł a s z c z y z n y d a n e j, z n a j d z i e m y l i c z b ę k r z y w y c h u k ł a d u, p r z e c i n a j ą c y c h p ł a s z c z y z n ę w t e n s p o s ó b, ż e s t y c z n e w p u n k t a c h s p o t k a n i a s p o t y k a j ą p r o s t ą o b r a n ą; a l b o i n a c z e j, z n a jdziemy stopień krzywej jako miejsca punktów styczności wszystkich stycznych do krzywych układu, które to styczne przecinają prostą obraną (Zeuthen, Compt. rend. 1872).

Niechaj n będzie rzędem krzywej płaskiej, ν—warunkiem na to, aby krzywa przecinała prostą daną przestrzeni, μ—warunkiem na to, aby jej płaszczyzna przechodziła przez punkt dany, P—warunkiem na to, aby ta płaszczyzna przechodziła przez punkt dany. Jeżeli rozważać będziemy układ potrójnie nieskończony tych krzywych, będziemy mieli układ podwójnie nieskończony punktów, płaszczyzny zaś krzywych tworzyć będą układ podwójnie nieskończony. Wzór na przynależność, to jest $p^3-p^2e+pe^2-e^3=0$ zamienia się na następujący $P=\mu\nu-n\mu^2$, gdyż $p^3=P$, $e=\mu$, $p^2=\nu$ i nadto $e^3-\mu^3=0$, a w układzie podwójnie nieskończonym krzywych nie można w ogóle zadośćuczynić warunkowi (potrójnemu), aby krzywa znajdowała się na płaszczyźnie dowolnie danej, t. j. aby płaszczyzna krzywej przechodziła przez trzy punkty dane. Otóż związek poprzedni przedstawia warunek P przy pomocy warunków ν, μ; stąd, jeżeli mamy tablicę, dającą nam wartości μ, ν, μ^2, otrzymamy wartość na P. Tak np. niechaj będzie układ podwójnie nieskończony stożkowych w przestrzeni, a mianowicie układ wszystkich stożkowych, stycznych do trzech płaszczyzn danych i przecinających trzy proste dane: jeżeli przez ϱ oznaczymy warunek na to, aby stożkowa przestrzeni była styczna do płaszczyzny, to warunek, któremu czynią zadość wszystkie takie stożkowe, wyrazi się przez $\nu^3\varrho^3$. Pomnożywszy obie strony poprzedzającego związku przez $\nu^3\varrho^3$ (i z uwagi, że w uważanym przypadku $n=2$) będziemy mieli:

$$P\nu^3\varrho^3=\mu\nu^4\varrho^3-2\mu^2\nu^3\varrho^3.$$

Z tablic, podanych niżej w § 4, mamy:

$$\mu\nu^4\varrho^3=72, \qquad \mu^2\nu^3\varrho^3=24,$$

przeto:

$$P\nu^3\varrho^3=24,$$

t. j. w naszym układzie stożkowych jest 24 stożkowych, przechodzących przez punkt dany.

Nazywamy zlewającemi się dwa elementy (dwa punkty, dwie proste, dwie płaszczyzny) nieskończenie blizkie. Odpowiadające im wzory nazywają się wzorami koincydencyi; takim jest wzór, zwany zasadą odpowiedniości Chasles'a (patrz Rozdz. I, § 2).

Niechaj będzie układ pojedyńczo-nieskończony par punktów taki, że w nim jest p par, mających wspólny punkt pierwszy, i q par, mających wspólny punkt drugi; niechaj g będzie prosta, łącząca punkty jednej pary. Stąd, jeżeli przez g oznaczymy liczbę takich prostych łączących, które przecina prosta dowolna przestrzeni; jeżeli ε oznacza liczbę koincydencyj, t.j. liczbę, wyrażającą ile razy dwa punkty pary zlewają się, będzie $\varepsilon = p + q - g$. Jeżeli prosta, łącząca dwa punkty jednej pary, ma położenie stałe, wtedy $g = 0$ i będzie $\varepsilon = p + q$, co odpowiada wzorowi odpowiedniości Chasles'a. Z tego wzoru otrzymujemy wiele innych, np. dwa następujące:

$$\varepsilon g_p = p^3 + q^3 + g_s; \qquad \varepsilon p = pq - g_e.$$

które interpretujemy w sposób następujący:

Jeżeli dany jest układ potrójnie nieskończony par punktów, to suma liczby par, mających pierwszy element stały, liczby par, mających drugi element stały, i stopnia kompleksu prostych, utworzonego przez proste, łączące punkty odpowiednie jednej pary, równa się liczbie wyrażającej, ile razy dwa odpowiadające sobie punkty zbliżają się nieograniczenie w kierunku, przechodzącym przez punkt stały dowolny.

Dla układu podwójnie nieskończonego par punktów różnica pomiędzy liczbą par punktów, znajdujących się odpowiednio na ustalonych z góry płaszczyznach, a liczbą par punktów, dla których prosta, łącząca dwa punkty, znajduje się na ustalonej z góry płaszczyźnie, równa się rzędowi krzywej skośnej, będącej miejscem koincydencyj.

Zasadę odpowiedniości Chasles'a rozciągnęli na płaszczyznę i na przestrzeń Salmon (Geom. of three dim. 1865, str. 511), Zeuthen (Compt. rendus 1874) i Schubert (Math. Ann. X i dzieło Abzählende Geometrie. Lipsk 1879. str. 45).

Z tychże zasad wypływają następujące ważne twierdzenia:

Niechaj będzie układ pojedyńczo-nieskończony krzywych płaskich i inna krzywa rzędu n i klasy m. Jeżeli ν, ϱ są t. zw. dwie charakterystyki układu krzywych płaskich, t. j. liczby wyrażające, ile krzywych układu przechodzi przez jeden punkt, oraz ile krzywych dotyka jednej prostej, wtedy będzie $n\varrho + m\nu$ krzywych układu, stycznych do krzywej danej. Podobnie: w układzie pojedyńczo - nieskończonym krzywych skośnych jest $n\varrho + m\nu$ krzywych, stycznych do powierzchni rzędu n i klasy m, jeżeli ϱ oznacza liczbę krzywych stycznych do płaszczyzny, ν zaś liczbę krzywych, dotykających prostej.

Punkty styczności dwóch układów pojedyńczo-nieskończonych krzywych płaskich o charakterystykach $\nu_1, \varrho_1; \nu_2, \varrho_2$, tworzą krzywą rzędu $\nu_1\varrho_1 + \nu_1\varrho_2 + \nu_1\nu_2$, styczne zaś w tych punktach obwodzą krzywą klasy $\nu_1\varrho_2 + \varrho_1\nu_2 + \varrho_1\varrho_2$.

Uogólnienie pierwszego twierdzenia jest następujące:

Ustanówmy na płaszczyźnie odpowiedniość pomiędzy punktami a prostemi taką, że każdej prostej odpowiada ϱ punktów na niej, każdemu punktowi — ν prostych, przezeń przechodzących, wtedy zdarzy się $n\varrho + m\nu$ razy, że jedna z tych prostych jest styczna w jednym z odpowiadających jej punktów do krzywej płaskiej rzędu n i klasy m.

Z tego twierdzenia wypływa zasada odpowiedniości Brilla-Cayley'a (patrz Rozdz. VI, § 4), będąca rozciągnięciem zasady odpowiedniości Chaslesa, odnoszącej się do prostej (patrz § 18 dzieła Schuberta), na odpowiedniości krzywych jakiegokolwiek rodzaju.

Płodność i sposób stosowania tych twierdzeń pokażemy na przykładzie:

Szukajmy, ile jest stożkowych na płaszczyźnie, stycznych do pięciu danych stożkowych. Oznaczmy przez S warunek na to, aby stożkowa pewnego układu była styczna do innej stożkowej u s t a l o n e j; przez μ — warunek na to, aby jej płaszczyzna przechodziła przez punkt dany: wtedy warunek na to, aby stożkowa układu p ł a s k i e g o była styczna do pięciu stożkowych, wyrazi się przez $\mu^3 S^5$. Na zasadzie poprzedzającego twierdzenia, biorąc $m = n = 2$, mamy: $S = n\varrho + m\nu = 2\varrho + 2\nu$, a więc warunek szukany wyrazi się w ten sposób:

$$\mu^2 S^5 = \mu^2(2\varrho + 2\nu)^5 = 2^5\mu^3(\varrho^5 + 5\varrho^4\nu + 10\varrho^3\nu^2 + 10\varrho^2\nu^3 + 5\varrho\nu^4 + \varrho^5).$$

Z tablic w § 4, biorąc wartości na $\mu^3\varrho^5$, $\mu^3\varrho^4\nu$ i t. d., znajdziemy:

$$\mu^3 S^5 = 2^5 . 102 = 3264.$$

§ 3.

Teorya charakterystyk.

Dajmy w płaszczyźnie układ pojedyńczo - nieskończony stożkowych; niechaj z będzie warunkiem 1-go wymiaru (pojedyńczym), ν i ϱ niechaj przedstawiają warunki na to, aby stożkowa układu przechodziła przez punkt i aby dotykała prostej.

Teorya charakterystyk bierze początek z następującego spostrzeżenia C h a s l e s'a, które tenże uważał za twierdzenie ogólne, gdy tymczasem H a l p h e n wykazał później, że twierdzenie to nie stosuje się do wszystkich przypadków.

W a r u n e k z w w i e l u p r z y p a d k a c h w y r a ż a s i ę l i n i o w o p r z e z ν i ϱ w z o r e m $z = \alpha\nu + \beta\varrho$, g d z i e α i β s ą l i c z b y z a l e ż n e **jedynie** o d w a r u n k u z. Liczby ν i ϱ n a z y w a j ą s i ę c h a r a k t e r y s t y k a m i u k ł a d u s t o ż k o w y c h.

To twierdzenie, bardzo ważne w geometryi liczącej stożkowych, znalazł empirycznie C h a s l e s (Comptes rend. 1864), wypowiedział je bez dowodzenia i wskazał rozmaite jego zastosowania. Dowody twierdzenia podali C l e b s c h (Math. Ann. VI), H a l p h e n (Bull. Soc. mat. I), S c h u b e r t i H u r w i t z (Gött. Nachr. 1876, patrz także Abzählende Geom. § 38), B r i l l (Math. Ann. X) i t. d.

Twierdzenie C h a s l e s'a, jak powiedziano, nie jest prawdziwe dla każdej wartości z. Pokazał to H a l p h e n (Compt. rend. LXXXIII, str. 537 i 886; Proc. Lond. math. Soc. IX, X; Math. Ann. XV, Journal de l'École polyt. XLV).

H a l p h e n doszedł do następującego rezultatu:

A b y t w i e r d z e n i e C h a s l e s'a m i a ł o m i e j s c e, t. j. a b y y m o g ł o b y ć w y r a ż o n e w z o r e m $z = \alpha\nu + \beta\varrho$, g d z i e α i β o d z n i e z a l e ż ą, j e s t k o n i e c z n e m, b y l i c z b a s t o ż k o w y c h, c z y n i ą c y c h z a d o s ć w a r u n k o w i z i m a j ą c y c h s t y c z n o ś ć r z ę d u 3-go z k r z y w ą d a n ą, w y n o s i ł a $\alpha + \beta$.

Z twierdzenia C h a s l e s'a wynika wniosek, wypływający też z twierdzenia, podanego przez nas w § 2 o liczbie krzywych, stycznych do krzywych danych.

A b y o t r z y m a ć l i c z b ę s t o ż k o w y c h u k ł a d u, s t y c z n y c h d o k r z y w e j r z ę d u n i k l a s y m, d o ś ć w e w z o r z e C h a s l e s'a p o ł o ż y ć $\alpha = m$, $\beta = n$.

Można postawić zagadnienie ogólniejsze od zagadnienia C h a s l e s'a, mianowicie:

Dany jest układ form geometrycznych jakichkolwiek k-krotnie nieskończony; czy istnieje s k o ń c z o n a liczba warunków k-krotnych takich, że każdy inny warunek k-krotny z wyraża się przez warunki poprzednie za pomocą wzoru liniowego ze spółczynnikami, zależnemi tylko od warunku z? Te warunki k-krotne w liczbie skończonej nazwać można c h a r a k t e r y s t y k a m i układu.

Czyniono wiele prób rozwiązania tego zagadnienia; sam C h a s l e s był zdania, że dwie charakterystyki ν i ϱ wystarczyć mogą nietylko dla stożkowych lecz i dla każdej krzywej płaskiej. Halphen rozciągnął te rozważania na stożkowe w przestrzeni i na kwadryki (Bull. Soc. math. III); Cremona spostrzegł, że dla układu potrójnie nieskończonego stożkowych można ustanowić trzy charakterystyki, któremi są: liczba stożkowych, przechodzących przez dwa punkty; liczba stożkowych, przechodzących przez jeden punkt i stycznych do prostej; liczba stożkowych stycznych do dwóch prostych (Compt. rend. LXIX, str. 776); Schubert poświęcił cały rozdział swego dzieła temu zagadnieniu, które stara się rozwiązać dla pewnych prostych układów form.

Pierwsze bardzo liczne prace o teoryi charakterystyk ogłosił Chasles (Compt. rend. 1864, głównie 27 czerwca 1864); niektóre z nich dały powód do polemiki z De Jonquières'em. Listę odnośnych publikacyj znaleść można w cyt. dziele Loria,: Stan teoryj geometr., Warszawa 1889. Dalej ogłosili w tym przedmiocie prace: Cayley (głównie w Phil. Trans. 1868), Salmon (patrz jego dzieło o krzywych płaskich), Cremona (Compt. rend. 1864 i także Introd. ad una teoria geom. delle cuvre piane etc.), Zeuthen (patrz np. Bull. des sciences math VII). Krótki wykład znajdujemy w „Geometryi" Clebscha-Lindemanna; dużo wskazówek bibliograficznych aż do roku 1872) u Painvina (Bull. des sciences math. III); dalej w dziele cytowanem Lorii, gdzie znajduje się długa lista innych not Chasles'a (Compt. rend. 1871—77) o licznych zastosowaniach zasady odpowiedniości w Geometryi liczącej. O historyi tej zasady, tak ściśle związanej z teoryami Geometryi liczącej, patrz notę Segrego (Bibl. math. 1892).

Geometrya licząca, jako osobna nauka, powstała, rzec można, wraz z teoryą charakterystyk Chasles'a. Halphen, wychodząc z tej teoryi, obmyślił rachunek symboliczny warunków, którego zasady systematycznie przedstawił Schubert w pracy „Beiträge zur abzählenden Geometrie" (Math. Ann. X) i w rozprawach późniejszych (tamże XI, XII i t. d.). Wiele rezultatów i wyznaczeń, odnoszących się do Geometryi liczącej, otrzymali byli już dawniej rozmaici autorowie na drodze geometrycznej; np. Steiner (Crelle XXXII, XXXVII, XLV, LV), Bischoff (tamże LVI), De Jonquières (Journ. de Liouv. VI 1871, X 1865), którego niektóre rezultaty były wszakże błędne; lecz celem autorów, którzy potem zajmowali się Geometryą liczącą, było głównie sprowadzenie tych wyznaczeń do praw stałych i do ustanowienia dla nich rachunku, tak aby ta część geometryi przedstawiała całość systematyczną. Ważnem dziełem, w którem zebrano i zbadano wszystkie metody i wyniki Geometryi liczącej, jest dzieło Schuberta (Kalkül der abzählenden Geometrie, Lipsk 1879), z którego korzystaliśmy wielokrotnie przy redakcyi tego rozdziału. Najnowsze badania o zajmującym nas przedmiocie ogłosili: Schubert (Math. Ann. XXVI, XXXVIII, XLV; Acta math. VIII; Hamburger Mitth. I, III, III i t. d.) i Pieri (Rend. Palermo V, Ist. Lomb. 1893—95).

§ 4.

Metoda szukania liczb charakterystycznych dla danego układu form i zestawienie niektórycb ważnych rezultatów Geometryi liczącej.

Z rozważań powyższych wynika, że przy pomocy rachunku symbolicznego warunków można obliczenie jednego warunku sprowadzić do obliczenia innych; teoryi charakterystyk np. celem jest właśnie poznanie, czy istnieją pewne warunki elementarne, za pomocą których wszystkie inne wyrazić się dają. Powstaje tedy zagadnienie o znalezieniu liczb, przedstawiających takie warunki elementarne, t. j. charakterystyk, przez które dają się wyrazić wszystkie lub niektóre z warunków pozostałych. Poszukiwanie to odbywa się według metody, wprowadzonej przez Chasles'a, stosowanej szerzej i rozwiniętej przez Zeuthena, Schuberta i innych.

Rozważa się zniekształcenia niezmiennicze specyalne formy danej, szuka się związków pomiędzy warunkami na to, aby forma zniekształcała się w dany sposób, a innemi warunkami elementarnemi (przechodzenie przez punkt, styczność do płaszczyzny i do prostej), stąd otrzymuje się liczby charakterystyczne dla form zniekształconych, i przy pomocy znalezionych związków otrzymuje się wreszcie liczby charakterystyczne dla form ogólnych.

Przykład wystarczy do wyjaśnienia tych uwag o stosowaniu metody. Niechaj formą daną będzie stożkowa; rozważmy dwa jej zniekształcenia niezmiennicze mianowicie: η, t. j. stożkową, której punkty tworzą prostą podwójną i której styczne tworzą dwa różne pęki promieni, mające środek w dwu punktach prostej; δ, t j. stożkową, której punkty tworzą dwie proste różne i której styczne tworzą dwa zlewające się pęki promieni, których środek znajduje się w punkcie spotkania dwu prostych. Jeżeli przez η i δ oznaczymy i warunki na to, aby stożkowa zniekształcała się dwoma powyższemi sposobami, przez μ, ν, ϱ — warunki na to, aby płaszczyzna stożkowej przechodziła przez punkt, aby stożkowa przecinała prostą i aby była styczną do płaszczyzny danej, znajdziemy związki:

$$2\nu - \varrho - 2\mu = \eta; \qquad 2\varrho - \nu = \delta,$$

z których wypływa:

$$\nu = \frac{2}{3}\eta + \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{3}\mu; \qquad \varrho = \frac{1}{3}\eta + \frac{2}{3}\delta + \frac{2}{3}\mu$$

Chcemy teraz znaleść liczbę $\mu^3\nu\varrho^4$, t. j. liczbę stożkowych płaszczyzny, przechodzących przez punkt dany (t. j. przecinających prostą przestrzeni) i stycznych do czterech prostych (t. j. stycznych do czterech płaszczyzn przestrzeni); z wzorów poprzedzających wynika:

$$\mu^3\nu\varrho^4 = \frac{2}{3}\eta\mu^3\varrho^4 + \frac{1}{3}\delta\mu^2\varrho^4 + \frac{1}{3}\mu^4\varrho^4.$$

Otóż, wyraz zawierający czynnik μ^4 jest zerem, gdyż płaszczyzny nie można przeprowadzić przez cztery punkty dowolne przestrzeni; a zatem, jeżeli przyjmiemy jako znane dwa pierwsze wyrazy strony drugiej, otrzymamy wartość strony pierwszej. Otóż na płaszczyźnie (μ^3) liczba stożkowych η, dotykających czterech prostych, jest oczywiście równa 3, liczba stożkowych δ, stycznych do czterech prostych danych, jest zerem, tak że ostatecznie $\mu^3 \nu \varrho^4 = 2$.

Aby dać wyobrażenie o rezultatach, które otrzymujemy przy pomocy metod powyższych, przytoczymy tu niektóre z wyników głównych i ważnych także samych w sobie, niezależnie od metod, któremi je osiągnięto. Są one podane w rozdziale 4-ym dzieła S c h u b e r t a.

1. Są dwie proste, opierające się na czterech prostych danych.

2. Są trzy wielokąty o n bokach, skośne, których wierzchołki (w liczbie n) znajdują się na płaszczyznach danych, a boki przechodzą przez punkty dane.

3. Mając w przestrzeni pięć par prostych, możemy 20 rozmaitemi sposobami zbudować pięć promieni, położonych na jednej płaszczyznie i zbiegających się w jednym punkcie, i tak mianowicie, że każdy z nich opiera się na dwóch prostych, należących do jednej z par danych.

4. Niechaj μ przedstawia warunek, aby płaszczyzna stożkowej przechodziła przez punkt dany; ν—warunek, aby stożkowa przecinała prostą daną; ϱ—warunek, aby była styczną do płaszczyzny danej. Stosując znakowania paragrafów poprzedzających, otrzymujemy następującą tablicę liczb s t o ż k o w y c h p r z e s t r z e n i, czyniących zadość o ś m i u warunkom. Dla jasności dodajemy, że symbol $\mu^3 \nu^5$ oznacza, iż płaszczyzna stożkowej ma przechodzić przez trzy punkty dane, t.j. że jest daną, a stożkowa ma przecinać pięć prostych danych w przestrzeni; $\mu^3 \nu^4 \varrho$—oznacza, że stożkowa ma znajdować się na danej płaszczyźnie, przecinać cztery proste dane, t. j. przechodzić przez cztery punkty dane swojej płaszczyzny i być styczną do płaszczyzny danej, a zatem być styczną do prostej na swojej płaszczyźnie.

$\mu^3\nu^5 = 1$	$\mu^2\nu^6 = 8$	$\mu\nu^7 = 34$	$\nu^8 = 92$
$\mu^3\nu^3\rho = 2$	$\mu^2\nu^5\rho = 14$	$\mu\nu^6\rho = 52$	$\nu^7\rho = 116$
$\mu^3\nu^3\rho^2 = 4$	$\mu^2\nu^4\rho^2 = 24$	$\mu\nu^5\rho^2 = 76$	$\nu^6\rho^2 = 128$
$\mu^3\nu^2\rho^3 = 4$	$\mu^3\nu^3\rho^3 = 24$	$\mu\nu^4\rho^3 = 72$	$\nu^5\rho^3 = 104$
$\mu^3\nu\rho^4 = 2$	$\mu^2\nu^2\rho^4 = 16$	$\mu\nu^3\rho^4 = 48$	$\nu^4\rho^4 = 64$
$\mu^3\rho^5 = 1$	$\mu^2\nu\rho^5 = 8$	$\mu\nu^2\rho^5 = 24$	$\nu^3\rho^5 = 32$
	$\mu^2\rho^6 = 4$	$\mu\nu\rho^6 = 12$	$\nu^2\rho^6 = 16$
		$\mu\rho^7 = 6$	$\nu\rho^7 = 8$
			$\rho^8 = 4$

5. Na danej płaszczyźnie jest stożkowych 3264, stycznych do pięciu stożkowych danych.

Liczbę tych stożkowych wyznaczył był błędnie Steiner jako równą 6^5; liczbę dokładną znaleźli pierwsi Chasles i Th. Berent.

6. Jeżeli μ oznacza warunek, aby kwadryka przechodziła przez punkt dany, ϱ — warunek, aby była styczną do płaszczyzny, β — warunek, aby była styczną do prostej, wtedy mamy następującą tablicę liczb kwadryk przestrzeni, czyniących zadość dziewięciu warunkom:

$\mu^9 = \rho^9 = 1$	$\nu^2\mu^7 = \nu^2\rho^7 = 4$	$\nu^4\mu^3\rho^2 = \nu^4\mu^2\rho^3 = 112$
$\mu^8\rho = \mu\rho^8 = 3$	$\nu^2\mu^6\rho = \nu^2\mu\rho^6 = 12$	$\nu^5\mu^4 = \nu^5\rho^4 = 32$
$\mu^7\rho^2 = \mu^2\rho^7 = 9$	$\nu^2\mu^5\rho^2 = \nu^2\mu^2\rho^5 = 36$	$\nu^5\mu^3\rho = \nu^5\mu\rho^3 = 80$
$\mu^6\rho^3 = \mu^3\rho^6 = 17$	$\nu^2\mu^4\rho^3 = \nu^2\mu^3\rho^4 = 68$	$\nu^5\mu^2\rho^2 = 128$
$\mu^5\rho^4 = \mu^4\rho^5 = 21$	$\nu^3\mu^6 = \nu^3\rho^6 = 8$	$\nu^6\mu^3 = \nu^6\rho^3 = 56$
$\nu\mu^8 = \nu\rho^8 = 2$	$\nu^3\mu^5\rho = \nu^3\mu\rho^5 = 24$	$\nu^6\mu^2\rho = \nu^6\mu\rho^2 = 104$
$\nu\mu^7\rho = \nu\mu\rho^7 = 6$	$\nu^3\mu^4\rho^2 = \nu^3\mu^2\rho^4 = 72$	$\nu^7\mu^2 = \nu^7\rho^2 = 80$
$\nu\mu^6\rho^2 = \nu\mu^2\rho^6 = 18$	$\nu^3\mu^3\rho^3 = 104$	$\nu^7\mu\rho = 104$
$\nu\mu^5\rho^3 = \nu\mu^3\rho^5 = 34$	$\nu^4\mu^5 = \nu^4\rho^5 = 16$	$\nu^8\mu = \nu^8\rho = 92$
$\nu\mu^4\rho^4 = 42$	$\nu^4\mu^4\rho = \nu^4\mu\rho^4 = 48$	$\nu^9 = 92$

Tablice te służą także do znajdowania liczb stożkowych, i kwadryk, czyniących zadość innym warunkom; a dzieje się to w ten sposób, że przy pomocy równań symbolicznych pomiędzy warunkami wyrażamy nowe warunki pomiędzy μ, ν, ϱ, a następnie posługujemy się temi tablicami, podstawiając za każdy wyraz stopnia 8-go jego wartość liczbową (patrz przykład w § 2).

7. Istnieje 666841088 kwadryk, stycznych do dziewięciu kwadryk danych.

8. Niechaj ν oznacza warunek, aby krzywa sześcienna płaska przechodziła przez punkt, ϱ—warunek, aby była styczną do prostej: mamy wtedy tablice następujące:

a) jeżeli sześcienna jest ogólną, t. j. klasy 6-ej, jest:

$$\nu^9=1,\quad \nu^8\varrho=4,\quad \nu^7\varrho^2=16,\quad \nu^6\varrho^3=64,\quad \nu^5\varrho^4=256,\quad \nu^4\varrho^5=976,$$
$$\nu^3\varrho^6=3424,\quad \nu^2\varrho^7=9766,\quad \nu\varrho^8=21004,\quad \varrho^9=33616.$$

b) jeżeli sześcienna ma jeden punkt podwójny, t. j. jest klasy 4-ej, wtedy:

$$\nu^8=12,\quad \nu^7\varrho=36,\quad \nu^6\varrho^2=100,\quad \nu^5\varrho^3=240,\quad \nu^4\varrho^4=480,$$
$$\nu^3\varrho^5=712,\quad \nu^2\varrho^6=756,\quad \nu\varrho^7=600,\quad \varrho^8=400.$$

c) jeżeli sześcienna ma ostrze, t. j. jest klasy 3-ej, wtedy:

$$\nu^7=24,\quad \nu^6\varrho=60,\quad \nu^5\varrho^2=114,\quad \nu^4\varrho^3=168,\quad \nu^3\varrho^4=168,$$
$$\nu^2\varrho^5=114,\quad \nu\varrho^6=60,\quad \varrho^7=24.$$

Liczby, odnoszące się do krzywych sześciennych płaskich, obliczyli: M a i l l a r d (Rech. des caractéristiques des systèmes élém. de courbes planes du 3 ordre 1871, wyniki te powtórzone w Bull. Darboux, III, 1872, st. 161), Z e u t h e n (Compt. rend 1872) i S c h u b e rt (Gött. Nachr. 1874, 1875, Math. Ann. XIII).

9. Dla krzywej rzędu 4-go płaskiej klasy 12-ej, znajdującej się w płaszczyźnie danej, przy zwykłem znaczeniu symboli ν i ϱ, jest:

$$\nu^{14}=1,\quad \nu^{13}\varrho=6,\quad \nu^{12}\varrho^2=36,\quad \nu^{11}\varrho^3=216,\quad \nu^{10}\varrho^4=1296,$$
$$\nu^9\varrho^5=7776,\quad \nu^8\varrho^6=46656,\quad \nu^7\varrho^7=279600,\quad \nu^6\varrho^8=1668096,$$
$$\nu^5\varrho^9=9840040,\quad \nu^4\varrho^{10}=56481396,\quad \nu^3\varrho^{11}=308389896,$$
$$\nu^2\varrho^{12}=1530345504,\quad \nu\varrho^{13}=6533946576,\quad \varrho^{14}=23011191144,$$

Te liczby wraz z wieloma innemi dla kwadryk specyalnych (z punktami podwójnemi, potrójnemi, ostrzami i t. p.) wyrachował Zeuthen (Comptes rendus 1872, Akademia w Kopenhadze 1873). Patrz książkę Schuberta, w której te rezultaty są powtórzone.

10. Niechaj P oznacza warunek, aby krzywa sześcienna skośna przechodziła przez punkt dany, T—warunek, aby była styczna do prostej, ν—warunek, aby przecinała prostą, ϱ—warunek, aby była styczna do płaszczyzny, B—warunek, aby przecinała prostą daną w dwóch punktach; wtedy:

$$\nu^{12} = 801060, \quad \varrho^{12} = 56960,$$

$$P^5\nu^2=5, \ P^5\nu\varrho=10, \ P^5\varrho^2=20, \ P^4\nu^4=30, \ P^4\nu^3\varrho=60, \ P^4\nu\varrho^3=240,$$

$$P^4T\nu = 4, \quad PT^3\nu = 12, \quad P^4T\varrho = 8, \quad PT^3\varrho = 12,$$

$$T^2\varrho^6 = 608, \quad T^3\nu^2 = 120, \quad T^3\nu^2\varrho = 120,$$

$$P^3B^3 = 1, \quad P^2B^4 = 1, \quad PB^5 = 1, \quad B^6 = 6,$$

$$P^3B^2\nu^4 = 4, \quad P^2B^3\nu^2 = 6, \quad PB^4\nu^2 = 9, \quad B^5\nu^2 = 20,$$

$$P^3B^2\nu\varrho = 8, \quad P^2B^3\nu\varrho = 12, \quad PB^4\nu\varrho = 18, \quad B^5\nu\varrho = 40.$$

Wiele innych wyznaczeń analogicznych można otrzymać, wprowadzając inne warunki. Zbiór wielu takich wyznaczeń znajdujemy w § 25 dzieła Schuberta. Niektóre z liczb dla krzywych sześciennych skośnych otrzymał Cremona (Crelle LX)), inne Sturm (Crelle LXXIX, LXXX) na drodze geometrycznej, oraz Schubert.

O liczbach, odnoszących się do kongruencyj liniowych promieni, do pęków promieni albo płaszczyzn rzutowych i t. p., patrz dzieło Schuberta.

ROZDZIAŁ XVI.

TEORYA NIESKOŃCZONOSTKOWA KRZYWYCH I POWIERZCHNI.

---

§ 1.

Styczne i normalne do krzywych i do powierzchni.

Prosta styczna do krzywej (płaskiej albo skośnej) w punkcie P (punkcie styczności) jest położeniem granicznem prostej zmiennej, przechodzącej przez punkt P i przez inny punkt P', należący do tejże gałęzi krzywej, gdy punkt P' dąży do zlania się z punktem P.

Prostą normalną do krzywej płaskiej w punkcie jest prosta, przez ten punkt przechodząca i prostopadła do stycznej w tymże punkcie.

Jeżeli $y=f(x)$ jest równaniem krzywej, wtedy równania

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x);\quad \frac{dy}{dx}(Y-y)=-(X-x)$$

są równaniami: pierwsze stycznej, drugie normalnej; x, y są spółrzędnemi punktu styczności; X, Y—spółrzędnemi bieżącemi. Jeżeli równanie krzywej jest postaci $\varphi(x,y)=0$, wtedy równania stycznej i normalnej przybierają postać:

$$(X-x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0;\quad (X-x)\frac{\partial\varphi}{\partial y}-(Y-y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0.$$

Jeżeli wreszcie krzywa jest dana przez dwa równania $x=\psi(t)$, $y=\chi(t)$, wtedy równaniami stycznej i normalnej są:

$$(Y-y)\frac{d\psi}{dt}-(X-x)\frac{d\chi}{dt}=0;\quad (Y-y)\frac{d\chi}{dt}+(X-x)\frac{d\psi}{dt}=0.$$

Jeżeli θ, θ' są kąty, jakie styczna i normalna tworzą z osią odciętych, wtedy (kładąc $\frac{dy}{dx}=y'$) mamy:

$$\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},\quad \sin\theta=\pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}};$$

$$\cos\theta'=\pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},\quad \sin\theta'=\pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Znak w tych wzorach zależy od umowy, jaki czynimy co do kierunku dodatniego stycznej i normalnej.

Nazywamy długością T stycznej i długością N normalnej długości odcinków stycznej i normalnej, zawartych pomiędzy punktem styczności a osią odciętych; nazywamy podstyczną S_t i podnormalną S_n długości odcinków na tejże osi, zawartych pomiędzy spodkiem prostopadłej, spuszczonej z punktu krzywej na oś odciętych, a punktem, w którym normalna spotyka tę oś. Mamy wzory:

$$T=\frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'},\quad N=y\sqrt{1+y'^2},\quad S_t=\frac{y}{y'},\quad S_n=yy'.$$

Nazywamy podstyczną biegunową i podnormalną biegunową części stycznej i normalnej, zawarte pomiędzy punktem krzywej a prostopadłą do promienia wodzącego, wyprowadzoną z bieguna.

Asymptotą krzywej płaskiej jest prosta, przedstawiająca położenie graniczne stycznej do krzywej, gdy punkt styczności oddala się nieograniczenie na gałęzi nieskończonej krzywej danej. Równaniem asymptoty jest:

$$Y - AX - B = 0, \text{ gdzie: } A = \lim \frac{dy}{dx}, \quad B = \lim\left(y - \frac{dy}{dx}x\right);$$

granice te bierze się w tem znaczeniu, że spółrzędne punktu x, y krzywej dążą do wartości spółrzędnych punktu, znajdującego się w nieskończoności na krzywej.

Równaniami stycznej do krzywej skośnej, danej przez równania $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, są:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \quad Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x),$$

lub symetryczniej:

$$\frac{X - x}{dy} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

Jeżeli równania krzywej są postaci $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$, wtedy styczna wyraża się równaniami:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(Y - y) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \dfrac{\partial F}{\partial x}(Y - y) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0. \end{array}\right.$$

Nazywamy płaszczyzną normalną do krzywej skośnej w punkcie płaszczyznę prostopadłą do stycznej w tym punkcie i przechodzącą przez punkt styczności. Równanie płaszczyzny normalnej ma jednę z dwóch postaci:

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0$$

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Dostawy kątów $(t, x) = \alpha$, $(t, x) = \beta$, $(t, z) = \gamma$, *jakie styczna* t *tworzy z osiami, wyrażają się w ten sposób:*

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dx^2 + dz^2}.$$

Jeżeli przez punkt P powierzchni poprowadzimy wszystkie możliwe krzywe skośne na niej położone, to proste styczne do wszystkich tych krzywych w punkcie P znajdować się będą na jednej płaszczyźnie, którą nazywamy *płaszczyzną styczną do powierzchni*. *Równaniem płaszczyzny stycznej do powierzchni* $f(x, y, z) = 0$ *jest:*

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Prosta, przechodząca przez punkt P i prostopadła do płaszczyzny stycznej do powierzchni w tym punkcie, nazywa się *prostą normalną do powierzchni*. *Równaniami normalnej są:*

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

a dostawy jej kierunku wyrażają się wzorami:

$$\cos(n, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos(n, y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos(n, z) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Jeżeli równanie powierzchni dane jest w postaci $z = \varphi(x, y)$, to (kładąc $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$), mamy równania normalnej:

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1},$$

a dostawy jej kierunkowe wyrażają się wzorami:

$$\cos(n, x) = \pm \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos(n, y) = \pm \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos(n, z) = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

---

§ 2.

Wklęsłość i wypukłość krzywych płaskich. Przegięcie.

Niechaj P będzie punkt krzywej płaskiej o równaniu $y = f(x)$, x_0—odcięta tego punktu; jeżeli istnieje liczba k taka, że wszystkie punkty, których odcięte wyrażają się przez $x_0 \pm h$ (gdzie $h < k$), tworzą łuk, znajdujący się całkowicie po jednej stronie stycznej po krzywej w punkcie P, mówimy wtedy, że krzywa w punkcie P jest wypukła albo jest wklęsła; jeżeli zaś nie można znaleść takiej liczby k, wtedy mówimy, że krzywa w tym punkcie nie jest ani wypukła ani wklęsła, lecz że posiada w punkcie P przegięcie.

Mówimy, że krzywa w punkcie P jest wypukła albo wklęsła względem osi x, jeżeli wszystkie punkty o odciętej $x_0 = h$ są położone w jednym z dwóch kątów rozwartych albo ostrych, które styczna do krzywej tworzy z osią x.

Aby krzywa w punkcie była wypukła albo wklęsła, jest koniecznem i dostatecznem, by— w założeniu, że w punkcie x_0 znikają pochodne $y', y'' \dots y^{(m)}$ funkcyi y względem x, i że pierwszą nieznikającą w punkcie x_0 pochodną jest $y^{(m+1)}$ — liczba m była liczbą nieparzystą. W tym przypadku krzywa będzie wypukła albo wklęsła względem osi x, zależnie od tego, czy iloczyn $f(x_0) f^{(m+1)}(x_0)$ jest dodatni albo ujemny.

Aby punkt P o odciętej x_0 był punktem przegięcia krzywej, jest koniecznem, aby dla $x = x_0$ pochodna druga $f''(x)$ znikała; to znaczy: punkty przegięcia są pomiędzy punktami, których odcięte zamieniają na zero pochodną drugą funkcyi y względem x.

---

§ 3.

Pola płaskie, łuki, objętości i pola powierzchniowe.

Niechaj będzie krzywa o równaniu $y = f(x)$ (odniesiona do układu prostokątnego); rozważajmy gałąź krzywej od $x = \alpha$ do $x = \beta$ taką, że prosta równoległa do osi y przecina ją tylko raz jeden. Poprowadźmy rzędne w punktach skrajnych o odciętych α, β; pole płaskie, zawarte pomiędzy gałęzią krzywej, osią x a dwiema rzędnemi skrajnemi, określamy w sposób następujący: Podzielmy przedział od α do β na jakąkolwiek liczbę części $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$; z punktów podziału poprowadźmy rzędne aż do krzywej; pomiędzy dwiema kolejnemi rzędnemi zawierać się będzie łuk krzywej, na którym obierzmy punkt jakikolwiek P; niechaj x_r będzie odcięta punktu obranego na łuczku, odpowiadającym przedziałowi δ_r. Iloczyn $\delta_r f(x_r)$ jest polem prostokąta o podstawie δ_r i o wysokości równej rzędnej punktu P. Granica sumy $\sum\limits_{r=1}^{n} \delta_r f(x_r)$, gdy szerokość przedziałów cząstkowych δ_r zmniejsza się nieograniczenie, a stąd liczba ich n rośnie do nieskończoności, stanowi—na zasadzie definicyi—pole płaskie, zawarte pomiędzy krzywą a osią x. Analitycznie pole to wyrażamy w ten sposób:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx\,.$$

Pole, ograniczone krzywemi płaskiemi, można zawsze złożyć z pól gatunku powyższego, t.j. z pól, ograniczonych częściami krzywej i osią x.

Wykonawszy poprzednią konstrukcyę, poprowadźmy styczną do krzywej w punkcie o odciętej x_r i we wszystkich analogicznych i rozważmy odcinek stycznej, ograniczony dwiema rzędnemi, przechodzącemi przez końce przedziału δ_r. Określamy wtedy długość łuku krzywej lub wprost długość krzywej, jako granicę sumy wszystkich takich odcinków linij stycznych. Wyrażenie analityczne łuku krzywej płaskiej jest:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.\, dx\,.$$

Jeżeli s oznacza łuk krzywej, wtedy zachodzi związek różniczkowy:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

jeżeli θ jest kąt, jaki styczna do krzywej w punkcie tworzy z osią x, wtedy:

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\theta = \frac{dy}{ds}.$$

Określmy teraz długość łuku krzywej skośnej. Niechaj $y = \varphi(x)$, $z=\psi(x)$ będą równania tej krzywej; rozpatrzmy gałąź krzywej od punktu o odciętej $x = \alpha$ do punktu o odciętej $x = \beta$ i przyjmijmy, że każda płaszczyzna o odciętej, zawartej pomiędzy α a β i prostopadła do osi x, spotyka krzywą tylko w jednym punkcie. Podzielmy, jak wyżej, część osi odciętej od α do β na przedziały $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_r$, i w punktach podziału poprowadźmy płaszczyzny prostopadłe do osi x; płaszczyzny te podzielą łuk krzywej na tyleż łuków cząstkowych. W każdym z nich np. w tym, którego rzutem jest δ_r, obierzmy punkt, poprowadźmy w nim styczną do krzywej i uważajmy odcinek tej stycznej, ograniczony płaszczyznami, przechodzącemi przez koniec odcinka δ_r. Granica sumy wszystkich tych odcinków, gdy przedziały δ_r zmniejszają się nieograniczenie co do wielkości, jest granicą łuku krzywej skośnej. Wyrażeniem analitycznem łuku krzywej jest:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx,$$

gdzie $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Jeżeli (t, x), (t, y), (t, z) są kąty kierunkowe stycznej, będzie:

$$\cos(t, x) = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(t, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(t, z) = \frac{dz}{ds}.$$

Rozważmy kawałek skończony powierzchni, ograniczony linią zamkniętą (konturem), której rzutem na płaszczyznę xy jest linia płaska zamknięta φ; prosta, przechodząca przez punkt płaszczyzny pola płaskiego, ograniczonego krzywą φ, niechaj spotyka tylko w jednym punkcie powierzchnię. Utwórzmy na płaszczyźnie xy prostokąt o bokach równoległych do osi x, y i stycznych do krzywej φ, która niechaj zawiera się wewnątrz takiego prostokąta; niechaj α, β będą odcięte wierzchołków prostokąta, α', β' ich rzędne. Podzielmy przedział na osi odciętych od α do β na przedziały cząstkowe $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$; przedział osi rzędnych od α' do β' na przedziały cząstkowe $\delta', \delta'_2, \ldots, \delta'_n$ i przez punkty podziału poprowadźmy proste, odpowiednio równoległe do osi x i y. Prostokąt, opisany na krzywej φ, podzieli się na prostokąty cząstkowe; pole jednego z nich będzie $\delta_r\delta_s$. Z tych prostokątów weźmy tylko te, które znajdują się wewnątrz pola φ albo są przecięte przez krzywą φ, a odrzućmy te, które znajdują się całkiem zewnątrz pola φ. Przez punkt $x_r y_s$, znajdujący się w prostokącie $\delta_r\delta'_s$ (nie wyłączając obwodu tegoż), poprowadzimy prostą równoległą do osi z aż do spotkania z powierzchnią w punkcie, którego wysokość nad płaszczyzną xy będzie $z_{rs} = f(x_r y_s)$, jeżeli $z = f(x,y)$ jest równaniem powierzchni. G r a n i c a s u m y o b j ę t o ś c i w s z y s t k i c h p r o s t o p a d ł o ś c i a n ó w, m a j ą c y c h z a p o d s t a w y $\delta_r\delta'_s$ a z a w y s o k o ś ć z_{ss}, g d y p r z e d z i a ł y $\delta_r . \delta'_s$ z m n i e j s z a j ą s i ę n i e o g r a n i c z e n i e, s t a n o w i t o, c o n a z y w a m y o b j ę t o ś c i ą z a w a r t ą m i ę d z y p o w i e r z c h n i ą a p ł a s z c z y z n ą xy. O b j ę t o ś ć t a w y r a ż a s i ę a n a l i t y c z n i e w t e n s p o s ó b:

$$V = \iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

g d z i e c a ł k a p o d w ó j n a r o z c i ą g a s i ę n a c a ł e p o l e, o g r a n i c z o n e k r z y w ą φ (Patrz Tom I, str. 169).

Jakakolwiek objętość ograniczona powierzchnią daje się zawsze podzielić na objętości takie, jak powyższa, t. j. ograniczone kawałkami powierzchni i płaszczyzną xy.

Jeżeli utworzymy prostopadłościan nieograniczony o podstawie $\delta_r\delta'_s$, to ściany jego wytną na powierzchni czworobok krzywoliniowy, wewnątrz którego jest punkt o wysokości z_{rs}. Poprowadźmy płaszczyznę styczną w tym punkcie i ograniczmy ją ścianami tegoż prostopadłościanu; g r a n i c a s u m y p ó l w s z y s tkich równoległoboków, które w ten sposób tworzą się na różnych płaszczyznach stycznych, gdy δ_s i δ_s zmniejszają się nieograniczenie, stanowi pole powierzchniowe. Wyrażeniem analitycznem tego pola jest:

$$A = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

gdzie całka podwójna, jak wyżej, rozciąga się na całe pole płaskie, ograniczone krzywą φ.

Do niedawnego czasu pola powierzchniowe określano w najpoważniejszych traktatach (np. Serreta) inaczej, mianowicie jako granicę sumy pól ścian wpisanych w powierzchnię wielościanów o ścianach trójkątnych. Schwarz pokazał, że określenie takie może w pewnych razach okazać się zwodniczem albo niedokładnem (Werke II, str. 309); patrz też drugie wydanie dzieła „Cours d'analyse" Hermite'a, Paryż 1883, str. 35—36, gdzie po raz pierwszy pojawiła się nota Schwarza.

Jeżeli oś z jest osią obrotu danej powierzchni, której równaniem jest $z = F(\sqrt{x^2 + y^2})$, wtedy objętość, zawarta pomiędzy dwiema płaszczyznami prostopadłemi do osi obrotu, wycinającemi na powierzchni dwa równoleżniki o promieniach r_1, r_2, wynosi:

$$\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 F'(r)\, dr,$$

pole zaś powierzchniowe, zawarte pomiędzy dwoma równoleżnikami r_1, r_2, wynosi:

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} r \sqrt{1 + F'^2(r)}\, dr\,.$$

Pole pasa kulistego, t. j. mniejszego z dwóch **kawałków kuli**, ograniczonego kołem o promieniu r nakreślonym na kuli, jest:

$$2\pi R(R-\sqrt{R^2-r^2})$$

gdzie R jest promień kuli.

Jeżeli elipsę o półosiach a, b $(a>b)$ obrócimy około osi większej, powstanie elipsoida obrotowa. Pole elipsoidalne, ograniczone dwiema płaszczyznami prostopadłemi do osi obrotu, z których jedna przechodzi przez środek, a druga przechodzi od środka w odległości r, wynosi:

$$\pi\frac{b}{a}\left[r\sqrt{a^2-e^2r^2}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{e}\arcsin\frac{e}{a}r\right],$$

gdzie $e^2=\frac{a^2-b^3}{a^2}$. Stąd pole połowy elipsoidy jest:

$$\pi b^2+\frac{\pi ab}{e}\arcsin e.$$

Objętość, elipsoidy o trzech osiach nierównych wynosi $\frac{4}{3}\pi abc$, gdzie a, b, c są długości trzech półosi.

Objętość, zamknięta w hyperboloidzie jednopowłokowej dwiema płaszczyznami równoległemi do elipsy szyjowej i odległemi od siebie na $\pm c$, wynosi $\frac{8}{3}\pi abc$, gdzie a, b są półosi elipsy szyjowej.

Objętość, zamknięta w paraboloidzie eliptycznej płaszczyzną prostopadłą do osi, jest połową objętości walca o tejże podstawie i wysokości.

Pole powierzchniowe pierścienia, utworzonego obrotem koła o promieniu R około prostej odległej na długość a od środka koła, wynosi $4\pi^2aR$; objętość zaś pierścienia $2\pi^2aR^2$.

Pola i objętości biegunowe. Niechaj ϱ (promień wodzący), θ (amplituda) będą spółrzędne biegunowe punktu krzywej danej na płaszczyźnie, P_1, P_2 punkty krzywej, O biegun układu spółrzędnych. Niechaj część krzywej, zawarta między punktami P_1 i P_2, będzie taka, że jakakolwiek prosta, przechodząca przez punkt O i zawarta w kącie P_1OP_2, spotyka krzywą w jednym tylko punkcie. Podzielmy kąt P_1OP_2 na n części $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$; wtedy krzywa pomiędzy P_1 i P_2 zostanie podzielona na n części przez ramiona kątów cząstkowych; w każdej z tych części (np. w tej, która odpowiada kątowi ω_r) obierzmy punkt dowolny o promieniu wodzącym ϱ_r i opiszmy łuk kołowy ze środka O promieniem ϱ_r, zawarty pomiędzy ramionami kąta ω_r. Granica sumy pól wszystkich wycinków kołowych takich, jak ten, którego pole wynosi $\frac{1}{2}\varrho^2_r\omega_r$ (ω_r oznacza tu równocześnie, jak zwykle i długość łuku o promieniu 1, obejmującego kąt środkowy ω_r) będzie polem, zawartem pomiędzy krzywą a dwoma promieniami wodzącemi w punktach skrajnych P_1, P_2. Wyrażenie analityczne tego pola jest:

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho^2 d\theta,$$

gdzie θ_1, θ_2 są amplitudy punktów P_1, P_2 (równanie krzywej wyraża ϱ w funkcyi amplitudy θ).

Ta definicya pola zgadza się z definicyą pola poprzednią w tem znaczeniu, że gdy pole podzielimy na pola biegunowe sposobem powyższym, a następnie podzielimy ją na pola sposobem, wskazanym w paragrafie poprzedzającym, to wyniki, otrzymane ze stosowania dwóch wzorów, będą równe.

W podobny sposób postępujemy i dla objętości. Rozważmy kawałek powierzchni i punkt na niej o spółrzędnych biegunowych ϱ, θ, φ. Niechaj będzie stożek o podstawie niepłaskiej, mający wierzchołek w biegunie O i za podstawę oznaczony kawałek powierzchni; dajmy taki, że każda prosta, przechodząca przez punkt O i położona wewnątrz stożka, spotyka go zawsze w jednym tylko punkcie Podzielmy kąt bryłowy w wierzchołku O stożka na kąty cząstkowe; każdy z nich wytnie na powierzchni cząstkę, na której obierzmy punkt $P_{r,s}$ i niechaj $\varrho_{r,s}$ będzie promieniem wodzącym tego punktu; utwórzmy stożek, którego kątem bryłowym w wierzchołku jest kąt bryłowy cząstkowy, wewnątrz którego znajduje się punkt $P_{r,s}$, a którego podstawą jest część powierzchni kuli, opisanej z punktu O jako ze środka. *Granica sumy objętości wszystkich tych stożków, gdy maleją nieograniczenie kąty cząstkowe, na które podzielono kąt bryłowy całkowity, pod jakim widzialna jest powierzchnia z bieguna O, jest—na zasadzie definicyi—objętością zawartą pomiędzy powierzchnią a punktem O.* Objętość tę można nazwać *objętością biegunową; jej wyrażeniem analitycznem jest:*

$$V = \frac{1}{3} \int\int \varrho^3 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi ,$$

gdzie całka podwójna rozciąga się na wszystkie wartości θ, φ, *odpowiadające punktom uważanego kawałka powierzchni.*

Oczywiście ta nowa definicya objętości nie jest w niezgodzie z dawniejszą w tem znaczeniu, że gdybyśmy chcieli obliczyć objętość biegunową przy pomocy wzorów poprzednich (t. j. przez podział objętości biegunowej na sumy i różnice objętości poprzednio rozważonych, i przez stosowanie wzorów do nich odnoszących się), wtedy obydwa wyniki musiałyby być jednakowe.

Podamy wreszcie, wzory, dające łuki krzywej płaskiej, łuki krzywej skośnej i pola powierzchniowe w spółrzędnych biegunowych. Oto są one po kolei:

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \sqrt{1+\varrho^2\left(\frac{d\theta}{d\varrho}\right)^2}; \quad \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \sqrt{1+\varrho^2\left(\frac{d\theta}{d\varrho}\right)^2 + \varrho^2 \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2}$$

$$\int\int \varrho \, d\theta \, d\varphi \sqrt{\left[\varrho^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \theta}\right)^2\right] \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}\right)^2}.$$

§ 4.

Krzywizna linij płaskich i skośnych. Skręcenie. Równania wewnętrzne.

Niechaj będą styczne w dwóch punktach sąsiednich P i P' krzywej płaskiej albo skośnej; kąt między niemi, dążący do zera, gdy punkty zbliżają się nieograniczenie, nazywa się kątem styczności. Kąt ten mierzymy łukiem kołowym o promieniu 1, podtrzymującym w środku kąt, równy kątowi styczności; wielkość tego kąta oznaczamy przez θ. Jeżeli s jest łukiem, zawartym pomiędzy dwoma punktami sąsiedniemi, wtedy krzywizną krzywej krzywej płaskiej albo skośnej w punkcie P nazywamy granicę stosunku $\frac{\theta}{s}$, gdy punkt P' dąży do P; sam zaś stosunek $\frac{\theta}{s}$ nazywamy krzywizną średnią łuku s.

Uważając θ jako funkcyę wielkości s, możemy powiedzieć, że krzywizna krzywej jest pochodną wielkości θ względem s.

Odwrotność krzywizny nazywamy promieniem krzywizny.

Jeżeli $y=f(x)$ jest równaniem krzywej płaskiej, wtedy krzywizna jej wyraża się wzorem

$$C=\frac{1}{R}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

jeżeli krzywa płaska wyraża się równaniami: $x=\varphi(t)$, $y=\varphi(t)$, wtedy:

$$C=\frac{1}{R}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

J e ż e l i $t = s$ (t. j. łukowi krzywej), wtedy:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}} = -\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}; \quad \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}.$$

W s p ó ł r z ę d n y c h b i e g u n o w y c h j e s t;

$$\frac{1}{R} = \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{(\varrho + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Związek analityczny, istniejący pomiędzy krzywizną a łukiem krzywej, nazywa się r ó w n a n i e m w e w n ę t r z n e m krzywej; wystarcza ono do określenia postaci linii krzywej, ale nie wystarcza do oznaczenia jej położenia na płaszczyznie.

W y r a ż e n i e k r z y w i z n y d l a k r z y w e j s k o ś n e j j e s t:

$$C = \frac{1}{R} = \frac{1}{ds^3} \sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}$$

lub, g d y z a z m i e n n ą n i e z a l e ż n ą w e ź m i e m y s:

$$C = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Jeżeli z punktu przestrzeni poprowadzimy równoległe do wszystkich prostych stycznych do danej krzywej skośnej i ograniczymy te równoległe kulą, której środkiem jest punkt przestrzeni, wtedy na powierzchni kuli utworzy się k r z y w a k u l i s t a, którą nazywamy o b r a z e m k u l i s t y m k r z y w e j s k o ś n e j d a n e j. Jeżeli z punktu krzywej danej poprowadzimy równoległą do stycznej w odpowiednim punkcie obrazu kulistego, otrzymamy n o r m a l n ą g ł ó w n ą d o k r z y w e j s k o ś n e j. R ó w n a n i a m i t e j n o r m a l n e j s ą:

$$\frac{X - x}{d \cdot \frac{dx}{ds}} = \frac{Y - y}{d \cdot \frac{dy}{ds}} = \frac{Z - z}{d \cdot \frac{dz}{ds}},$$

a jej dostawami kierunkowemi:

$$\cos\xi = R\frac{d\,.\,\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \cos\eta = R\frac{d\,.\,\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \cos\zeta = R\frac{d\,.\,\frac{dz}{ds}}{ds},$$

gdzie R jest promieniem krzywizny.

Rozumieć będziemy przez kierunek dodatni normalnej do krzywej płaskiej w punkcie P lub normalnej głównej do krzywej skośnej w punkcie P ten z dwóch kierunków normalnej, w którym, wychodząc z punktu P, spotykamy punkty, które z punktami krzywej nieskończenie blizkiemi punktu P znajdują się po jednej i tej samej stronie stycznej w punkcie P, albo po jednej i tej samej stronie płaszczyzny, prostopadłej do normalnej głównej, poprowadzonej przez punkt P. Rozumieć będziemy przez kierunek dodatni stycznej do krzywej płaskiej w punkcie P ten z dwóch kierunków stycznej, który zlewa się z kierunkiem dodatnim osi y, gdy przesuniemy krzywą w jej własnej płaszczyźnie tak, aby kierunek dodatni osi x zeszedł się z kierunkiem dodatnim normalnej.

Punkt na kierunku dodatnim normalnej do krzywej płaskiej albo normalnej głównej do krzywej skośnej w punkcie P, odległy od tego punktu na długość równą promieniowi krzywizny R, nazywa się środkiem krzywizny, odpowiadającym punktowi P.

W przypadku krzywej skośnej, jeżeli poprowadzimy przez środek krzywizny prostą prostopadłą do stycznej i do normalnej głównej, otrzymamy prostą biegunową: prosta równoległa do prostej biegunowej i przechodząca przez punkt krzywej, nazywa się dwunormalną (binormalną).

Środek krzywizny dla krzywej płaskiej jest położeniem granicznem przecięcia normalnej w punkcie P z normalną w punkcie nieskończenie blizkim punktu P.

Prosta biegunowa dla krzywej skośnej jest położeniem granicznem prostej przecięcia płaszczyzny normalnej w punkcie P z płaszczyzną normalną w punkcie nieskończenie blizkim punktu P:

S p ó ł r z ę d n e m i ś r o d k a k r z y w i z n y dla k r z y w e j p ł a s k i e j s ą:

$$x_1 = x + R\frac{dy}{ds},\quad y_1 = y - R\frac{dx}{ds};$$

te wzory mają ważność przy uwzględnieniu umów powyższych co do kierunków dodatnich stycznej i normalnej i przy uważaniu wielkości R za zasadniczo dodatnią.

S p ó ł r z ę d n e m i ś r o d k a k r z y w i z n y k r z y w e j s k o ś n e j s ą:

$$x_1 = x \pm R^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad y_1 = y \pm R^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad z_1 = z \pm R^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds},$$

gdzie znak określamy zgodnie z umową, przyjętą co do kierunku dodatniego stycznej.

R ó w n a n i a m i p r o s t e j b i e g u n o w e j s ą:

$$\frac{X - x_1}{\cos\lambda} = \frac{Y - y_1}{\cos\mu} = \frac{Z - z_1}{\cos\nu},$$

g d z i e k ą t y k i e r u n k o w e λ, μ, ν t e j p r o s t e j m a j ą w a r t o ś c i, o k r e ś l o n e p r z e z w z o r y:

$$\cos\lambda = R\frac{dyd^2z - dzd^2y}{ds^3},\quad \cos\mu = R\frac{dzd^2x - dxd^2z}{ds^3};$$

$$\cos\nu = R\frac{dxd^2y - dyd^2x}{ds^3}.$$

Płaszczyzna stycznej i normalnej głównej do krzywej skośnej nazywa się p ł a s z c z y z n ą ś c i ś l e s t y c z n ą; j e j r ó w n a n i e m j e s t:

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z \\ dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Płaszczyzna ściśle styczna jest położeniem granicznem płaszczyzny, przechodzącej przez punkt krzywej i przez dwa inne jej punkty, gdy te dwa punkty w jakikolwiek sposób zbliżają się nieograniczenie do pierwszego.

Skręcenie lub inaczej krzywizna druga ma związek z odchyleniem prostej biegunowej w przejściu od jednego do drugiego punktu krzywej, podobnie jak krzywizna pierwsza lub inaczej krzywizna przegięcia wiąże się z odchyleniem stycznej.

Jeżeli τ oznacza kąt pomiędzy dwiema prostemi biegunowemi w dwóch punktach nieskończenie blizkich krzywej (lub lepiej łuk kołowy o promieniu 1, podtrzymujący w środku kąt ten), wtedy granica stosunku $\frac{\tau}{s}$ nazywa się skręceniem krzywej skośnej w punkcie uważanym; jej wyrażeniem analitycznem jest:

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2},$$

gdzie λ, μ, ν są kąty kierunkowe prostej biegunowej, T zaś nazywa się promieniem skręcenia.

W teoryi krzywych skośnych lub krzywych o podwójnej krzywiznie ważnemi są wzory Freneta albo Serreta, wyrażające różniczki dziewięciu dostaw: trzech dostaw kierunkowych stycznej: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; trzech dostaw kierunkowych normalnej głównej: $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$; trzech dostaw kierunkowych prostej biegunowej: $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$. Wzory te są następujące:

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{1}{R}\cos\xi, \quad \frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{1}{R}\cos\eta, \quad \frac{d\cos\gamma}{ds} = \frac{1}{R}\cos\zeta,$$

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{1}{T}\cos\xi, \quad \frac{d\cos\mu}{ds} = \frac{1}{T}\cos\eta, \quad \frac{d\cos\nu}{dv} = \frac{1}{T}\cos\zeta,$$

$$\frac{d\cos\xi}{ds} = -\frac{1}{R}\cos\alpha - \frac{1}{T}\cos\lambda, \quad \frac{d\cos\eta}{ds} = -\frac{1}{R}\cos\beta - \frac{1}{T}\cos\mu,$$

$$\frac{d\cos\zeta}{ds} = -\frac{1}{R}\cos\gamma - \frac{1}{T}\cos\nu.$$

Co do umów względem znaków w tych wzorach patrz rozprawę Knesera (Crelle CXIII, str. 89)

Związki analityczne pomiędzy krzywizną a łukiem s krzywej oraz pomiędzy skręceniem a łukiem nazywają się równaniami wewnętrznemi krzywej; równania te indywidualizują postać krzywej, ale nie określają jej położenia w przestrzeni.

Jeżeli damy sobie dowolnie $R = R(s)$, $T = T(s)$ jako równania wewnętrzne krzywej, to istnieje zawsze krzywa, im odpowiadająca, a zadanie o wyznaczeniu tej krzywej sprowadza się do równania typu równania Riccati'ego (Darboux).

Krzywa, dla której stosunek obu krzywizn jest stały, jest helisą na walcu (t. j. krzywą przecinającą tworzące walca pod kątem stałym); jeżeli w szczególności obie krzywizny są stałe, wtedy walec jest kołowym (Puiseux, Crelle VII; Bertrand tamże VIII).

Równanie wewnętrzne stożkowej jest postaci:

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{dR}{\sqrt{-1 + AR^{\frac{2}{3}} - BR^{\frac{4}{3}}}},$$

gdzie A i B są ilości stałe. Równania paraboli i hyperboli równobocznej są odpowiednio:

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{p}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}}, \quad s = \frac{1}{3}\int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}},$$

gdzie p, a są odpowiednio parametrami paraboli i hyperboli równobocznej.

Jedno z równań wewnętrznych krzywej kulistej (położonej na powierzchni kuli) jest:

$$\frac{R}{T}+\frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right)=0.$$

Krzywe, dla których jedno z równań wewnętrznych krzywej kulistej jest związkiem liniowym pomiędzy dwiema krzywiznami, nazywają się krzywemi Bertranda (Crelle XV); mają one tę ciekawą własność, że ich normalne główne są zarazem normalnemi głównemi innej krzywej, sprzężonej z daną (patrz, Bonnet J. Éc. pol. XXXII, 1848; Serret, Crelle XVI, Compt. rend. 1877; Cesàro, Riv. di mat. II, Mathesis II i t. d.).

Teoryą krzywych płaskich zajmowali się pierwsi ex professo głównie Clairaut (Traité des courbes à double courbure, 1731), Tinseau (Mém. des Sav. étr. IX, 1781), Monge (tamże X, 1785, Journ. Éc. pol. II, 1799), Lancret (Mém de Paris I 1806, II 1811) Jacobi (Crelle XIX, XVI), Saint-Venant (Journ. Éc. pol. 1845).

Sławne wzory Freneta i Serreta odkryli prawie równocześnie ci dwaj uczeni (Crelle XVII 1852 i XVI 1851; rozprawa Freneta zresztą już w 1847 była odznaczona nagrodą przez fakultet nauk w Tuluzie).

Geometryą wewnętrzną krzywych, t. j. badaniem krzywych na podstawie ich równań wewnętrznych zajmowali się specyalnie: Hoppe w wielu rozprawach (Crelle LX, LXIII, Archiv. der Math. 1880—85—89 i t. d.), Lie (Christiania Versl. 1882, patrz też Vorlesungen über contuirl. Gruppen, Lipsk 1893), Cesàro, który temu przedmiotowi poświęcił osobną książkę (Geometria intrinseca, Napoli 1896).

Głównemi traktatami o geometryi nieskończonostkowej krzywych skośnych są książki: Schella (Lipsk 1859, wyd. 2-gie 1898), P. Serreta (Paryż, 1860), Joachimsthala (wyd. 3-e, Lipsk 1890), i prócz tego traktaty o geometryi różniczkowej, o których mówimy w paragrafach następnych.

§ 5.

Styczność krzywych i powierzchni.

Niechaj $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ będą równania dwóch krzywych płaskich, mówimy, że krzywe te mają w punkcie o odciętej $x=x_0$ styczność rzędu i, gdy dla $x=x_0$ jest:

$$f(x_0)=\varphi(x_0),\quad f'(x)=\varphi'(x_0),\ldots\ldots, f^{(i)}(x_0)=\varphi^{(i)}(x_0).$$

Jeżeli i jest liczbą parzystą, krzywe w punkcie zetknięcia przecinają się; jeżeli i jest liczbą nieparzystą, wtedy w tym punkcie nie przecinają się.

Jeżeli dwie krzywe f, φ mają w pewnym punkcie styczność rzędu i, wtedy trzecia krzywa ψ, mająca z krzywą f styczność rzędu $k<i$, ma i z drugą krzywą φ styczność tegoż rzędu k.

Krzywą, mającą w pewnym punkcie z inną krzywą stałą styczność rzędu i, można uważać jako położenie graniczne krzywej, przechodzącej przez $i+1$ punktów krzywej stałej, wtedy gdy te punkty zbliżają się do siebie nieograniczenie.

Krzywa, której równanie zawiera i stałych nieoznaczonych, nazywa się ściśle styczną do krzywej stałej, jeżeli ma z nią w uważanym punkcie największy możliwie rząd styczności, przy uwzględnieniu wszystkich stałych rozporządzalnych; w ogóle tym największym rzędem jest $i-1$; w szczególnych przypadkach rząd może być wyższy.

Kołem ściśle stycznem do krzywej w punkcie jest koło, które z krzywą w tym punkcie jest koło, które z krzywą w tym punkcie ma styczność rzędu przynajmniej drugiego.

Koło ściśle styczne do krzywej w punkcie przechodzi przez ten punkt i ma środek swój w środku krzywizny (koło krzywizny).

Jeżeli koło ściśle styczne ma z krzywą w punkcie styczność rzędu nieparzystego (a więc wyższego od 2), wtedy promień krzywizny w tym punkcie jest maximum albo minimum.

Niechaj będzie dana powierzchnia i jej prosta normalna w punkcie P; niechaj będzie i krzywa skośna, przechodząca przez punkt powierzchni; rzućmy tę krzywą na powierzchnię za pomocą prostych rzucających, równoległych do normalnej. Mówimy, że krzywa i powierzchnia mają w tym punkcie styczność rzędu i, gdy krzywa i rzut jej, tak utworzony, mają w punkcie P styczność rzędu i.

Powierzchnia, której równanie zawiera i parametrów dowolnych, nazywa się ściśle styczną do krzywej w punkcie, jeżeli w tym punkcie ma z krzywą styczność rzędu możliwie największego, zgodnego z liczbą parametrów stałych.

Najwyższy rząd styczności wynosi co najmniej $i-1$.

Płaszczyzną ściśle styczną do krzywej skośnej jest płaszczyzna, przechodząca przez punkt krzywej i mająca z nią w tym punkcie styczność co najmniej rzędu 2-go (patrz §4).

Kulą ściśle styczną jest kula, mająca z krzywą skośną w punkcie styczność co najmniej rzędu 3-go.

§ 6.

Obwiednie krzywych i powierzchni. Powierzchnie rozwijalne.

Jeżeli równanie $f=0$ (krzywej albo powierzchni) zawiera parametr nieoznaczony a, to zmieniając go w sposób ciągły, otrzymamy szereg krzywych albo powierzchni. Wziąwszy wartość pewną a, a następnie drugą $a + \Delta a$, będziemy mieli dwie krzywe albo powierzchnie, których przecięcie, w miarę gdy Δa dążyć będzie do zera, może zbliżać się w ogólności do pewnego położenia granicznego. Ogół tych wszystkich położeń granicznych może tworzyć krzywą albo powierzchnię, którą nazywamy obwiednią danego szeregu krzywych albo powierzchni. Krzywa albo powierzchnia szeregu nazywa się obwiedzioną. W przypadku powierzchni, położenie graniczne krzywej przecięcia dwóch powierzchni nieskończenie blizkich nazywa się charakterystyką (Monge).

Dla znalezienia równania obwiedniej należy wyrugować parametr a pomiędzy równaniem danem a równaniem, jakie otrzymujemy, przyrównywając do zera pochodną danego równania względem parametru, t. j. pomiędzy równaniami $f = 0$, $\frac{df}{da} = 0$.

Obwiednia jest styczna do wszystkich obwiedzionych wzdłuż odpowiedniej charakterystyki.

Charakterystyka, położona na obwiedzionej, spotyka obwiedzioną sąsiednią w pewnych punktach, które mogą dążyć do położeń granicznych, gdy dwie obwiedzione zbliżają się nieograniczenie; ogół wszystkich położeń granicznych tworzy w ogólności krzywą, należącą do obwiedniej i nazwaną krawędzią zwrotu obwiedniej; równania tej krzywej otrzymujemy, eliminując a pomiędzy trzema równaniami:

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0.$$

Obwiednia układu pojedyńczo-nieskończonego płaszczyzn jest powierzchnią, zwaną powierzchnią rozwijalną.

Niechaj r, s, t oznaczają pochodne drugie wielkości z względem x i y, otrzymane z równania powierzchni; równaniem różniczkowem powierzchni rozwijalnej jest:

$$rt - s^2 = 0.$$

Powierzchnie rozwijalne otrzymały swą nazwę dlatego, że dają się rozwinąć na płaszczyznie, bez rozciągania i zrywania.

Powierzchnia rozwijalna jest miejscem stycznych krzywej skośnej, która jest jej krawędzią zwrotu, a same styczne są jej charakterystykami.

Płaszczyzny styczne rozwijalnej są płaszczyznami ściśle stycznemi jej krawędzi zwrotu.

Obwiednia płaszczyzn normalnych do krzywej skośnej jest powierzchnią, która nazywa się rozwijalną biegunową krzywej skośnej.

Charakterystykami powierzchni rozwijalnej biegunowej są proste biegunowe krzywej danej.

Spółrzędne punktu krawędzi zwrotu rozwijalnej biegunowej są:

$$x_0 = x + R\cos\xi - T\frac{dR}{ds}\cos\lambda;\quad y_0 = y + R\cos\eta - T\frac{dR}{ds}\cos\mu;$$

$$z_0 = z + R\cos\zeta - T\frac{dR}{ds}\cos\nu.$$

Krawędź zwrotu rozwijalnej biegunowej krzywej skośnej jest miejscem środków kul ściśle stycznych w punktach krzywej. Obwiednia płaszczyzn, stycznych do krzywej skośnej i prostopadłych do normalnej głównej, jest t. zw. rozwijalną prostującą dla krzywej skośnej.

Jeżeli rozwiniemy na płaszczyznie rozwijalną prostującą danej krzywej skośnej, to ta krzywa (należąca do powierzchni) przekształca się na prostą.

---

§ 7.

Rozwinięte i rozwijające.

Niechaj będzie krzywa płaska albo skośna; wyobraźmy sobie nawiniętą na nią nić giętką i nierozciągalną, a następnie rozwińmy ją tak, aby pozostała zawsze napiętą i zatem styczną do krzywej; wtedy punkt jakikolwiek nici opisze krzywą, którą nazywamy rozwijającą danej; daną względem tej ostatniej nazywamy rozwiniętą.

Styczna do rozwiniętej jest zawsze prostopadła do stycznej do krzywej rozwijającej, a styczna do rozwijającej jest równoległa do normalnej głównej krzywej rozwiniętej.

Jeżeli mamy daną krzywą skośną albo płaską, to spółrzędne punktu rozwiniętej wyrażają się w ten sposób:

$$x' = x + R\cos\xi + R\,\mathrm{tg}(\tau + k)\cos\lambda;$$

$$y' = y + R\cos\eta + R\,\mathrm{tg}(\tau + k)\cos\mu;$$

$$z' = z + R\cos\eta + R\,\mathrm{tg}(\tau + k)\cos\nu,$$

gdzie:

$$\tau = \int \frac{ds}{T},$$

i gdzie k jest stałą dowolną. Istnieje tedy nieskończenie wiele rozwiniętych danej krzywej płaskiej albo skośnej. Jeżeli krzywa jest płaską, wtedy τ jest stałe. Kąt, jaki styczna do rozwiniętej tworzy z normalną główną rozwijającej, równa się $\tau + k$.

Jeżeli krzywa jest płaską, to kładąc $\tau + k = 0$, otrzymamy, pomiędzy nieskończenie wielu rozwiniętemi, rozwiniętą płaską. Wszystkie rozwinięte krzywej leżą na powierzchni rozwijalnej biegunowej dla krzywej rozwijającej i są wszystkie krzywemi geodezyjnemi (patrz niżej) tej powierzchni.

Jeżeli rozwijająca jest skośną, to i wszystkie rozwinięte są skośnemi; jeżeli jest płaską, to jedna rozwinięta jest płaską, pozostałe skośnemi. W tym przypadku jedyna rozwinięta płaska jest miejscem środków krzywizny krzywej rozwijającej, a pozostałe są helisami walca, którego podstawą jest to miejsce.

Styczne do dwóch różnych rozwiniętych, wychodzące z tego samego punktu rozwijającej, tworzą kąt stały.

O powierzchniach rozwiniętych dla powierzchni danej patrz niżej § 13.

Z wyżej podanej konstrukcyi linii rozwijającej wynika bezpośrednio, że krzywa dana posiada nieskończenie wiele rozwijających.

Rozwiniętą krzywej płaskiej rozważał po raz pierwszy H u y g e n s (Horologium oscillatorium 1663), który do konstrukcyi wahadła izochronicznego zastosował izochronizm cykloidy (p. Rozdz. XVII), opierając pręt wahadła na dwóch półrozwiniętych tej krzywej; stąd pochodzi myśl badania rozwiniętych w ogólności. Przedmiotem tem zajął się później N e w t o n w swojej „Metodzie fluksyj".

§ 8.

Spółrzędne krzywoliniowe. Element liniowy powierzchni. Formy różniczkowe zasadnicze powierzchni. Odwzorowanie podobne. Odwzorowanie kuliste.

Niechaj będzie powierzchnia, określona przez równania:

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v),$$

gdzie u, v, są dwa parametry dowolne; linie, dla których u=const, v=const, przedstawiają dwa układy linij, położonych na powierzchni i przecinających się w punktach, dla których u i v nazywają się s p ó ł r z ę d n e m i k r z y w o l i n i o w e m i. Odległość nieskończonostkowa pomiędzy dwoma punktami powierzchni, których spółrzędne są u i v, $u+du$ i $v+dv$, nazywa się e l e m e n t e m l i n i o w y m p o w i e r z c h n i; j e g o k w a d r a t m a w y r a ż e n i e:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2,$$

g d z i e :

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2; \quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$F=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2; \quad EG-F^2>0.$$

Jeżeli przez (u,x), (u,y) . . . oznaczymy kąty, jakie tworzą z osiami $x, y, \dots$ styczne do linij $u=\text{const}$, $v=\text{const}$, będzie:

$$\cos(u,x)=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos(u,y)=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \cos(u,z)=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\cos(v,x)=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \cos(v,y)=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \cos(v,z)=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

a kąt Ω pomiędzy liniami $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ dają wyrażenia;

$$\cos\Omega=\frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin\Omega=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby dwie linie $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ *były ortogonalnemi, jest* $F=0$.

Element pola powierzchni dany jest przez wyrażenie:

$$\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Jeżeli X, Y, Z *oznaczają dostawy kierunkowe normalnej do powierzchni, będzie:*

$$X=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}; \quad Y=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v}, & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix};$$

$$Z=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix};$$

Forma różniczkowa $f = Edu^2 + 2Fdu\,dz + Gdv^2$ nazywa się pierwszą formą różniczkową zasadniczą powierzchni, forma zaś

$$\varphi = -\Sigma\, dx\, dX = Ddu^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2$$

nazywa się drugą formą różniczkową zasadniczą powierzchni; tu wielkości D mają wartości:

$$D = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad D' = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad D'' = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

gdzie symbol Σ oznacza, że suma rozciąga się na trzy wielkości, z których dwie otrzymujemy z wypisanej, przemieniając x, X odpowiednio na y, Y; z, Z.

Pomiędzy spółczynnikami E, F, G, D, D', D'' zachodzą trzy związki, które w przypadku, gdy krzywe spółrzędne są ortogonalnemi, t. j. gdy $F=0$, są postaci:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right) - \frac{D'}{\sqrt{EG}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{D}{E}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right) - \frac{D'}{\sqrt{EG}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{D''}{G}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{D'^2 - DD''}{\sqrt{EG}} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right).$$

Co do związków tych w przypadku ogólnym, wyrażonych przy pomocy symboli Christoffela, patrz Bianchi (Geometria differ. s. 90—91 lub przekład niemiecki s. 91—92). Ostatni wzór odpowiada wzorowi Gaussa (Disquis. circa superf. i t d.); dwa pierwsze—wzorom, znalezionym przez Mainardi'ego (Ist. Lomb. IX, str. 395, 1856, a później odkrytym poraz drugi przez Codazzi'ego (Annali di mat. II, 1868); nazywają się one też wzorami Codazzi'ego.

Gdy dane są dwie formy kwadratowe różniczkowe f i φ (patrz wyżej), z których pierwsza jest **określona** (t.j. ma znak stały, co ma miejsce wtedy, gdy $EG-F^2>0$), to — aby istniała powierzchnia, posiadająca te dwie formy jako pierwszą i drugą formę różniczkową, jest koniecznem i dostatecznem, by spełniały się powyższe trzy związki (napisane, oczywiście, dla przypadku ogólnego). Powierzchnia jest wtedy jedyną i postaci oznaczonej, ale nie jest oznaczoną co do położenia swego w przestrzeni. Dla znalezienia równania powierzchni dość zcałkować równanie różniczkowe typu równania Riccati'ego.

Jeżeli w szczególności w pierwszej formie różniczkowej zasadniczej jest $E = G$, $F = 0$, wtedy układ krzywych spółrzędnych nazywa się ortogonalnym izotermicznym, a u i v nazywają się parametrami izometrycznemi.

Niechaj linie u, v stanowią układ izotermiczny o parametrach izometrycznych, t. j. niechaj pierwsza forma różniczkowa daje się sprowadzić do postaci:

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2),$$

wtedy jest jasnem, że, skoro położymy $u = \Phi(u')$, $v = \Psi(v')$ gdzie Φ, Ψ są dwiema funkcyami dowolnemi, wtedy krzywe spółrzędne $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ zasadniczo się nie zmienią, t. j. $u' = \text{const}$, $v' = \text{const}$ będą te same, co poprzedzające; ale forma różniczkowa, wyrażona w nowych spółrzędnych u', v', nie będzie już izometryczna; będzie mianowicie:

$$ds^2 = E\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)^2 du'^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v'}\right)^2 dv'^2\right],$$

a spółczynniki przy du'^2 i dv'^2 nie będą już równemi.

Tu przedstawia się konieczność wprowadzenia pewnych odróżnień w pojęciu, wyżej podanem. Układ (u, v) nazwiemy wprost izotermicznym, jeżeli staje się zadość warunkom:

$$F = 0, \quad \frac{E}{G} = \frac{U}{V},$$

gdzie funkcye U, V są funkcyami: pierwsza samego u, druga samego v; nazywa się zaś izotermicznym o parametrach izometrycznych, jeżeli mamy nadto $E = G$.

Każdy układ wprost izotermiczny daje się zawsze sprowadzić do formy izometrycznej.

Można nieskończenie wielu sposobami wykonać taką zamianę zmiennych u, v na zmienne u', v', aby nowy układ był izotermiczny.

Jeżeli mamy na powierzchni układ izotermiczny (u, v), to każdy inny układ izotermiczny (u', v') otrzymuje się z danego, kładąc zmienną zespoloną $u' + i v'$, jako funkcyę zmiennej zespolonej $u + i v$, t. j. biorąc

$$u' + iv' = \Phi(u + iv),$$

gdzie Φ jest symbolem funkcyi dowolnej.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby linie $\varphi = \text{const}$ wraz z ich trojektoryami ortogonalnemi tworzyły układ izotermiczny jest, by stosunek dwóch parametrów różniczkowych 1-go i 2 go funkcyi φ był funkcyą samego tylko φ. Temi parametrami różniczkowemi (których określenie podaliśmy w Rozdz. IX Tomu I str. 216) są tu:

$$\Delta_1\varphi = \frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2},$$

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right\}.$$

Jeżeli jedna z powierzchni jest taka, że jej element liniowy daje się sprowadzić do formy $(U + V)(du^2 + dv^2)$, gdzie U, V są dwie funkcye: pierwsza tylko samego u, druga tylko samego v, wtedy mówimy, że powierzchnia jest typu Liouville'a. Do powierzchni tego typu należą kwadryki i powierzchnie obrotowe.

Najnowsze prace o powierzchniach Liouville'a ogłosili:

K o e n i g s (Compt. rend. 1889), S t ä c k e l (Math. Ann. XXXV) i R i c c i (Rend. Lincei 1893).

Niechaj będzie układ izotermiczny spółrzędnych (u, v), sprowadzony do postaci izometrycznej, tak że $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$. Uważajmy u, v za spółrzędne kartezyańskie prostokątne punktu na płaszczyźnie; każdemu tedy punktowi powierzchni odpowiadać będzie punkt płaszczyzny i otrzymamy tym sposobem o d w z o r o w a n i e p ł a s k i e k a w a ł k a p o w i e r z c h n i. Odwzorowanie to jest p o d o b n e m, t. j. kąty odpowiednie są równe.

Niechaj wogólności u, v będą spółrzędnemi izometrycznemi na powierzchni lub na części tejże: aby mieć najogólniejsze odwzorowanie p o d o b n e tej powierzchni na płaszczyźnie, na której spółrzędnemi kartezyańskiemi niechaj będą x, y, dość przyjąć, że zmienna zespolona $u + iv$ jest funkcyą dowolną zmiennej zespolonej $x + iy$ albo zmiennej $x - iy$. W przypadku pierwszym kąty odpowiednie są równe i jednego zwrotu, w drugim równe i zwrotów przeciwnych.

Jeżeli mamy drugą powierzchnię lub część powierzchni ze spółrzędnemi izometrycznemi u', v', to, aby mieć najogólniejsze odwzorowanie jednej powierzchni na drugiej, dość przyjąć, że zmienna zespolona $u + iv$ jest funkcyą dowolną jednej z dwóch zmiennych $u' + iv$ albo $u' - iv'$ (Porów. „Repertoryum“ t. I str. 340—341).

Odwzorowanie części powierzchni na kuli otrzymujemy, ustanawiając odpowiedniość pomiędzy punktami kuli w ten sposób, aby n o r m a l n e w o d p o w i a d a j ą c y c h s o b i e p u n k t a c h d w u p o w i e r z c h n i b y ł y r ó w n o l e g ł e; w tym celu ze środka kuli prowadzimy promienie równoległe do dodatnich kierunków linij normalnych w rozmaitych punktach powierzchni; końce tych promieni będą odpowiadały punktom powierzchni. Odwzorowanie to nazywamy zwykle o d w z o r o w a n i e m k u l i s t e m G a u s s a.

O d w z o r o w a n i e t o n i e j e s t w o g ó l n o ś c i p o d o b n e m; j e s t o n o p o d o b n e m t y l k o d l a p o w i e r z-chni o krzywiznie średniej równej zeru (powierzchni najmniejszych) i dla kuli.

Spółczynniki e, f, g formy różniczkowej o spółrzędnych u, v, przedstawiającej kwadrat elementu liniowego kuli odwzorowującej, wyrażają się wzorami:

$$e = -(KE + HD), \quad f = -(KF + HD'), \quad g = -(KG + HD''),$$

gdzie:

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}.$$

Forma różniczkowa

$$e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

nazywa się zwykle trzecią formą różniczkową, należącą do powierzchni.

O własnościach odwzorowania kulistego odnośnie do linij krzywiznowych, asymptotycznych i t. d., mówimy w paragrafie następnym.

Pierwsze prace z teoryi różniczkowej powierzchni, mianowicie pierwsze badania nad krzywizną zawdzięczamy Eulerowi i Meusnierowi (Mém. de Berlin 1760, Sav. str. 1785). Dwiema pracami podstawowemi geometryi różniczkowej były: sławne dzieło Monge'a (Applic de l'anal. à la géom., Paryż 1807 - 1809, wydanie Liouville'a z r. 1850) i rozprawa Gaussa (Disqu. generales circa superficicies curvas, Werke IV). Inne rozprawy wymienimy jeszcze niżej; tu zaś wymieniamy tylko najnowsze traktaty: Darboux, Théorie générale des surfaces, Paryż 1887—96 i Bianchi Geom. diff. Piza 1894, przekład niemiecki, Lipsk 1899.

W najnowszych pracach stosowanemi bywają w rachunkach symbole Christoffela (Crelle LXX), a mianowicie:

a) Symbole gatunku pierwszego:

$$\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \quad \begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}=\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},$$

$$\begin{bmatrix}22\\1\end{bmatrix}=\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \begin{bmatrix}22\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

b) Symbole gatunku 2-go:

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\frac{G\frac{\partial E}{\partial u}+F\frac{\partial E}{\partial v}-2F\frac{\partial F}{\partial u}}{2(EG-F^2)}, \quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\frac{-F\frac{\partial E}{\partial u}+2E\frac{\partial F}{\partial u}-E\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\frac{G\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}, \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=\frac{-F\frac{\partial G}{\partial v}+2G\frac{\partial F}{\partial v}-G\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}, \quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=\frac{E\frac{\partial G}{\partial v}+F\frac{\partial G}{\partial u}-2F\frac{\partial F}{\partial v}}{2(EG-F^2)}.$$

Pochodne spółczynników D, D', D'' drugiej formy różniczkowej wyrażają się przez spółczynniki D i symbole Christoffela za pomocą wzorów Weingartena (patrz Bianchi l. c. wyd. niem. str. 126).

Z przedstawienia w tym paragrafie wynika, że badania o elemencie liniowym powierzchni i spółrzędnych krzywoliniowych są pokrewne z badaniami nad formami różniczkowemi kwadratowemi, parametrami różniczkowemi i t. d. Bibliografię tego przedmiotu podaliśmy w Rozdz. IX § 4 tomu I-go tej książki. Przypominamy tylko, że zasadnicze pomysły tej teoryi znajdujemy w rozprawach Beltrami'ego (Giorn. di Battag. II, Ann. di mat. I 1867, Mem. Bologna 1869, Math. Ann. I).

§ 9

Linie nakreślone na powierzchni. Linie krzywiznowe. Styczne sprzężone. Linie geodezyjne. Linie asymptotyczne.

Linia, nakreślona na powierzchni, nazywa się linią krzywiznową, gdy normalne do powierzchni, przez punkty tej linii poprowadzone, są stycznemi pewnej krzywej skośnej, t. j. tworzą powierzchnię rozwijalną.

Linie krzywiznowe tworzą podwójny układ ortogonalny, t. j. przez każdy punkt powierzchni przechodzą zawsze dwie linie krzywiznowe wzajemnie prostopadłe.

Przesuwając się wzdłuż linii krzywiznowej, mamy:

$$dx : dy : dz = dX : dY : dZ.$$

Równaniem różniczkowem linij krzywiznowych jest:

$$(FD''- GD')\, dv^2 + (ED'' - GD)\, du\, dv + (ED' - FD)\, du^2 = 0,$$

gdzie D, D', D'' mają wartości, wskazane w § 8.

Równanie to można też napisać w postaci:

$$\begin{vmatrix} E du + F dv, & F du + G dv \\ D du + D' dv, & D' du + D'' dv \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli $z = f(x, y)$ jest równaniem powierzchni, p, q pochodnemi pierwszemi, r, s, t pochodnemi drugiemi funkcyi z względem x, y, to równanie różniczkowe linij krzywiznowych przybiera postać:

$$\Big[(1 + p^2) s - p q r\Big] dx^2 + \Big[(1 + p^2)\, t - (1 + q^2)\, r\Big]\, dx\, dy$$

$$+ \Big[p q t - (1 + q^2)\, s\Big]\, dy^2 = 0.$$

Na kuli i na płaszczyznie każda linia jest linią krzywiznową.

Liniami krzywiznowemi powierzchni rozwijalnej są tworzące i trajektorye do nich prostopadłe.

Jeżeli dwie powierzchnie przecinają się wzdłuż linii krzywiznowej dla obu, to przecinają się pod kątem stałym; odwrotnie: jeżeli dwie powierzchnie przecinają się pod kątem stałym, a ich przecięcie jest linią krzywiznową dla jednej z nich, to będzie linią krzywiznową i dla drugiej.

W odwzorowaniu kulistem Gaussa układ linij na powierzchni, pozostający ortogonalnym, jest układem linij krzywiznowych.

Nazywamy powierzchniami listewkowemi (modanate, moulures według Monge'a) powierzchnie, dla których linie krzywiznowe jednego układu znajdują się w płaszczyznach normalnych do powierzchni.

Powierzchnia listewkowa tworzy się ruchem krzywej płaskiej, której płaszczyzna toczy się bez ślizgania po powierzchni rozwijalnej.

Jeżeli w punkcie powierzchni poprowadzimy dwie linie krzywiznowe, styczne do nich w tym punkcie i normalną do powierzchni, wtedy płaszczyzna, poprowadzona przez normalną i przez jednę ze stycznych, przecina powierzchnię wzdłuż krzywej, którą nazywamy przecięciem normalnem głównem w tym punkcie. Widzimy stąd, że dla każdego punktu powierzchni są dwa przecięcia normalne główne, przecinające się pod kątem prostym.

Promienie krzywizny r_1, r_2 tych dwóch przecięć normalnych głównych nazywają się promieniami głównemi krzywizny powierzchni, a środki krzywizny tychże przecięć są dwoma środkami krzywizny powierzchni w tym punkcie. Jeżeli te środki znajdują się po stronach przeciwległych względem punktu powierzchni, wtedy promieiniom krzywizny nadajemy oczywiście znaki przeciwne.

Jeżeli krzywe spółrzędne u, v są liniami krzywiznowemi, wtedy zachodzą związki:

$$D = -\frac{E}{r_2}, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{G}{r_1}, \quad F = 0,$$

gdzie r_1, r_2 są promieniami krzywizny przecięć normalnych, stycznych odpowiednio do linij $v = \text{const}$, $u = \text{const}$.

Promienie główne krzywizny r_1 i r_2 są pierwiastkami równania:

$$(DD'' - D'^2)r^2 + (ED'' - DG - 2FD')r + (EG - F^2) = 0.$$

Promień R krzywizny jakiegokolwiek przecięcia normalnego powierzchni wyraża się przez r_1, r_2 za pomocą wzoru:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{r_2} + \frac{\sin^2\theta}{r_1} \quad \text{(wzór Eulera)},$$

gdzie θ oznacza kąt, jaki płaszczyzna przecięcia czyni z płaszczyzną przecięcia normalnego głównego, którego promieniem krzywizny jest r_2.

Przy pomocy tego wzoru promienie krzywizny przecięć normalnych wyrażają się przez promienie główne.

Następujące twierdzenie Meusniera pozwala wyrazić promień krzywizny jakiejkolwiek linii, nakreślonej na powierzchni, przez promienie główne:

Promień krzywizny jakiejkolwiek linii, nakreślonej na powierzchni, równa się promieniowi przecięcia normalnegó stycznego do krzywej, pomnożonemu przez dostawę kąta, jaki płaszczyzna przecięcia normalnego tworzy z płaszczyzną ściśle styczną do krzywej.

Jeżeli promienie r_1, r_2 są jednego znaku, wtedy odpowiadający im punkt powierzchni nazywa się eliptycznym; jeżeli $r_1 = r_2$, punkt nazywa się kołowym (umbilikiem): jeżeli r_1, r_2 są znaków przeciwnych, nazywa się hyperbolicznym;

wreszcie punkt nazywa się parabolicznym, gdy jeden z promieni jest nieskończenie wielki.

W przypadku punktu eliptycznego, powierzchnia w otoczeniu tego punktu leży całkowicie po jednej stronie płaszczyzny stycznej; w przypadku punktu hyperbolicznego leży częścią po jednej, częścią po drugiej stronie płaszczyzny stycznej.

Jeżeli $DD''-D'^2>0$, wtedy punkt jest eliptycznym, jeżeli $DD''^2-D'^2<0$ — hyperbolicznym.

Ten podział punktów na eliptyczne, paraboliczne i hyperboliczne odpowiada podziałowi, podanemu w Rozdz. IX, § 1 dla powierzchni algebraicznych. Równanie wskazującej Dupina (patrz tamże) można napisać w postaci równania krzywej

$$\frac{\xi^2}{r_1}+\frac{\eta^2}{r_2}=1,$$

położonej na płaszczyźnie stycznej do powierzchni i dla której osi spółrzędnych ξ, η zlewają się odpowiednio z kierunkami stycznych do dwóch linij krzywiznowych, przez uważany punkt przechodzących.

Kwadrat półśrednicy ϱ tej elipsy, tworzącej kąt θ z osią η, wyraża się przy pomocy równania:

$$\frac{1}{\varrho^2}=\frac{\cos^2\theta}{r_2}+\frac{\sin^2\theta}{r_1}.$$

Porównawszy ten wzór z wzorem Eulera, otrzymujemy $\varrho^2=R$; a zatem, kwadrat półśrednicy wskazującej Dupina równa się promieniowi krzywizny przecięcia normalnego, przechodzącego przez tę średnicę.

To twierdzenie Dupina (Développ. de géom., Paryż, 1813) można uważać za interpretacyę geometryczną wzoru Eulera; stąd nazwa wskazującej Dupina.

Dwie średnice sprzężone wskazującej Dupina nazywają się stycznemi sprzężonemi na powierzchni. Układ podwójny linij na powierzchni nazywa się sprzężonym, jeżeli w każdym punkcie powierzchni styczne do dwóch linij, przezeń przechodzących są sprzężonemi. Jeżeli θ, θ' są kąty, jakie styczne sprzężone tworzą z linią krzywiznową v, będzie:

$$\operatorname{tg}\theta \,.\, \operatorname{tg}\theta' = -\frac{r_1}{r_2}.$$

Dla układu sprzężonego jest zawsze $D'=0$; i odwrotnie: jeżeli $D'=0$, układ linij u, v jest sprzężony.

W odwzorowaniu kulistem Gaussa kąt pomiędzy dwoma kierunkami sprzężonemi albo zachowuje niezmiennie swą wielkość, albo przechodzi na kąt dopełniający zależnie od tego, czy punkt powierzchni jest hyperboliczny albo eliptyczny.

Następujące twierdzenie daje nowe określenie stycznych sprzężonych.

Dwie styczne do powierzchni w punkcie P są sprzężonemi, jeżeli powierzchnia rozwijalna, opisana na danej powierzchni wzdłuż krzywej nakreślonej na niej i stycznej do jednej z dwóch danych prostych, ma jako tworzącą drugą z tych prostych.

Układ linij krzywiznowych jest jedynym układem, równocześnie ortogonalnym i sprzężonym.

Liniami asymptotycznemi powierzchni nazywają się linie, nakreślone na powierzchni i takie, że ich płaszczyzna ściśle styczna w każdym punkcie zlewa się z płaszczyzną styczną do powierzchni.

Linie asymptotyczne tworzą układ podwójny; przez każdy punkt powierzchni przechodzą dwie takie linie, wogóle nie prostopadłe. W każdym punkcie styczna do linii asymptotycznej zlewa się z własną sprzężoną.

Styczne do dwóch linij asymptotycznych

w każdym punkcie zlewają się z asymptotami wskazującej Dupina.

Linia asymptotyczna czyni zadość związkowi:

$$D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2 = 0.$$

Oznaczając, jak zwykle, przez p, q, r, s, t pochodne pierwsze i drugie funkcyi z względem x i y, otrzymane z równania powierzchni, możemy równanie różniczkowe linij asymptotycznych napisać w postaci:

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Linie asymptotyczne są rzeczywistemi tylko w punktach hyperbolicznych powierzchni, są zaś urojonemi w puntach eliptycznych.

Dla powierzchni rozwijalnych dwa układy linij asymptotycznych zlewają się z tworzącemi powierzchni,

Kwadrat skręcenia linij asymptotycznych w punkcie równa się całkowitej krzywiznie powierzchni w uważanym punkcie, wziętej ze znakiem przeciwnym (Tw. Ennepera).

$$\frac{1}{T^2} = -\frac{1}{r_1 r_2},$$

stąd: w każdym punkcie powierzchni dwie linie asymptotyczne, przezeń przechodzące, mają skręcenia równe co do wartości bezwzględnej.

Przy przekształceniach rzutowych zachowują się układy sprzężone i linie asymptotyczne; przy przekształceniach przez promienie odwrotne zachowują się linie krzywiznowe (Darboux).

W odwzorowaniu kulistem Gaussa kierunki linij asymptotycznych odchylają się na 90^0.

Dajmy, że na kuli odwzorowującej są u', v' obrazami linij asymptotycznych powierzchni; oznaczmy przez $\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'$

symbole Christoffela, odnoszące się do elementu liniowego na kuli, wtedy:

$$\frac{\partial}{\partial u'}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = \frac{\partial}{\partial v'}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'.$$

Jeżeli odniesiemy powierzchnię do układu jej linij asymptotycznych, wtedy kwadrat elementu liniowego przybiera postać $\varrho^2(e du^2 - 2f du dv + g dv^2)$, gdzie $\varrho^2 = -r_1 r_2$, zaś g, e i f są spółczynnikami trzeciej formy różniczkowej zasadniczej.

Dla powierzchni prostoliniowej linie asymptotyczne jednego układu są tworzącemi powierzchni.

Stosunek anharmoniczny czterech punktów, w których tworząca spotyka cztery asymptotyczne ustalone danej drugiego układu, jest stały. (Twierdzenie P. Serreta)

Jeżeli linię L, nakreśloną na powierzchni i przechodzącą przez punkt P, rzucimy ortogonalnie na płaszczyznę styczną w punkcie P, to krzywizna tego rzutu w punkcie P nazywa się krzywizną geodezyjną lub stycznościową w punkcie P linii nakreślonej na powierzchni, a środek krzywizny rzutu nazywa się środkiem krzywizny geodezyjnej linii L w punkcie P.

Krzywizna geodezyjna linii L, nakreślonej na powierzchni, równa się zwykłej krzywiznie linii płaskiej, na którą przekształca się krzywa L, skoro rozwiniemy na płaszczyznę powierzchnię rozwijalną, opisaną na danej powierzchni wzdłuż linii L.

Jeżeli u, v są krzywe spółrzędne na powierzchni, $\varphi(u,v)=0$ równanie linii na niej nakreślonej, to krzywizna geodezyjna $\frac{1}{\varrho_\varphi}$ linii φ w punkcie wyraża się wzorem:

$$\frac{1}{\varrho_\varphi}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{F\frac{\partial\varphi}{\partial v}-G\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\frac{F\frac{\partial\varphi}{\partial u}-E\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}\right\}.$$

Wzór ten nazywa się wzorem Bonneta.

Promień krzywizny geodezyjnej równoleżnika powierzchni obrotowej równa się części stycznej do południka, zawartej pomiędzy punktem styczności a osią obrotu.

Linia, nakreślona na powierzchni i stanowiąca najkrótszą odległość pomiędzy dwoma jej punktami dostatecznie blizkiemi, nazywa się linią geodezyjną powierzchni.

Dla linii geodezyjnej normalna główna zlewa się w każdym punkcie z normalną do powierzchni. Tę własność można przyjąć za określenie linij geodezyjnych.

Linia geodezyjna jest w ogóle oznaczoną, skoro są dane dwa jej punkty, albo skoro dany jest punkt, przez który ma przechodzić, i kierunek stycznej do niej w tym punkcie.

Krzywiznę geodezyjną linii w punkcie można też określić w sposób następujący:

Niechaj będą dwa punkty P i P' nieskończenie blizkie na krzywej i w tych punktach linie geodezyjne styczne; granica stosunku kąta, przez nie utworzonego, do łuku PP' linii krzywej, gdy punkt P' zbliża się nieograniczenie do punktu P, jest krzywizną geodezyjną linii w punkcie P. W ten sposób określenie krzywizny geodezyjnej jest naturalnem rozszerzeniem określenia krzywizny linij płaskich.

Beltrami'emu (Giorn. di Batt. II) zawdzięczamy twierdzenie, służące do wyznaczania środka krzywizny geodezyjnej linii w punkcie.

Wyobraźmy sobie na powierzchni układ ∞^1 linij geodezyjnych g i linię l, mającą styczne sprzężone z liniami g; styczne do linij g w punktach linii l tworzą powierzchnię rozwijalną z krawędzią zwrotu s. Każdemu punktowi linii l odpowiadać będzie tedy punkt krawędzi s, jeżeli za punkt krzywej l, odpowiadający punktowi P uważać będziemy punkt M, w którym tworząca rozwijalnej, przechodząca przez punkt P, jest styczna do krawędzi zwrotu. Punkt M jest środkiem krzywizny geodezyjnej w punkcie P linii, przechodzącej przez punkt P i prostopadłej do linii geodezyjnej, przez ten punkt przechodzącej,

Równanie różniczkowe linij geodezyjnych (równanie Gaussa) jest:

$$\sqrt{EG-F^2}\, d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{\partial E}{\partial v}dv\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}du - \frac{\partial F}{\partial u}du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}dv,$$

gdzie θ jest kąt, który linia geodezyjna tworzy z liniami $u =$ const i dla którego:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right), \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\frac{dv}{ds}.$$

Jeżeli linie u, v są ortogonalne, mamy:

$$d\theta = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}du - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}dv.$$

W przypadku, w którym układ linij u, v jest ortogonalny izotermiczny, równanie różniczkowe linij geodezyjnych jest postaci:

$$\sqrt{E}\, d\theta = \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}du - \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u}dv.$$

Dla powierzchni Liouville'a, dla których element liniowy daje się sprowadzić do formy

$[\alpha(u)+\beta(v)](du^2+dv^2)$, równanie linij geodezyjnych przybiera postać:

$$\int \frac{du}{\sqrt{\alpha(u)-a}} \mp \int \frac{dv}{\sqrt{\beta(v)+a}} = b,$$

gdzie a i b są stałe całkowania. Widzimy tedy, że w tym przypadku równanie linij geodezyjnych daje się całkować bezpośrednio.

Dla powierzchni rozwijalnych równanie różniczkowe linij geodezyjnych całkuje się przy pomocy dwóch kwadratur.

W każdym punkcie linii geodezyjnej, nakreślonej na powierzchni obrotowej, iloczyn promienia równoleżnika przez wstawę kąta nachylenia do południków jest stały (Tw. Clairauta).

Linia krzywiznowa, będąca zarazem linią geodezyjną, jest płaską; i każda geodezyjna płaska jest linią krzywiznową.

Łuki linij geodezyjnych, odcięte przez trajektorye do nich prostopadłe, są równej długości. Dlatego to trajektorye ortogonalne układu ∞^1 linij geodezyjnych nazywają się liniami geodezyjnie równoległemi.

Odległością geodezyjną dwóch punktów jest długość linii geodezyjnej, przez te punkty przechodzącej.

Linia na powierzchni, której punkty mają równą odległość geodezyjną od punktu stałego powierzchni, nazywa się kołem geodezyjnem.

Linia, której punkty mają takie odległości od dwóch punktów stałych, że suma albo różnica tych odległości jest stałą, nazywa się elipsą albo hyperbolą geodezyjną.

Trójkątem geodezyjnym nazywamy trójkąt, utworzony z trzech łuków krzywych geodezyjnych.

Jeżeli wraz z Gaussem nazwiemy krzywizną całkowitą pola powierzchniowego, wartość całki podwójnej

$$\int K\,d\sigma,$$

rozciągniętej na to pole, gdzie K jest krzywizną powierzchni w punkcie (patrz § 10), $d\sigma$ zaś elementem pola powierzchniowego, to można będzie wypowiedzieć następujące twierdzenie (Gaussa):

Krzywizna całkowita trójkąta geodezyjnego równa się nadmiarowi sumy trzech jego kątów ponad dwa kąty proste. Stąd (gdy K jest stałe): na powierzchni o krzywiznie stałej pole trójkąta geodezyjnego jest proporcyonalne do nadmiaru sumy trzech jego kątów ponad dwa kąty proste. (Porów. twierdzenie analogiczne Alberta Girarda o trójkątach kulistych Rozdz. II, § 6).

Twierdzenie to uogólnił Schering (Gött. Nach. 1867). O teoryi trójkątów geodezyjnych patrz: Christoffel (Berl. Abh. 1868), Weingarten (Berl. B. 1882), v. Mangoldt (Crelle XCIV).

Nazywamy skręceniem geodezyjnem w punkcie linii, nakreślonej na powierzchni, skręcenie linii geodezyjnej, stycznej do linii danej w uważanym punkcie.

Skręcenie geodezyjne linii zlewa się ze skręceniem zwykłem tych wszystkich i tylko tych linij, których normalna główna jest nachylona pod kątem stałym do powierzchni, w szczególności zaś ma to miejsce dla linij geodezyjnych i asymptotycznych.

Jeżeli $\frac{1}{T_u}$, $\frac{1}{T_v}$ są skręcenia geodezyjne krzywych spółrzędnych u, v, wtedy:

$$\frac{1}{T_u} = \frac{GD' - FD''}{G\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{1}{T_v} = \frac{FD - ED'}{E\sqrt{EG - F^2}}.$$

Związek pomiędzy skręceniem geodezyjnem $\frac{1}{T_l}$ a skręceniem bezwzględnem $\frac{1}{T}$ jakiejkolwiek linii l wyraża się w ten sposób:

$$\frac{1}{T_l} = \frac{1}{T} + \frac{d\omega}{ds},$$

gdzie ω jest kąt pomiędzy normalną główną linii l a normalną do powierzchni, s zaś jest łukiem linii l.

Linie krzywiznowe są to linie, których krzywizna geodezyjna w każdym punkcie jest zerem.

Określiliśmy już wyżej (Rozdz. XIII, § 6) linię zwężenia powierzchni prostoliniowej; obecnie dodajemy, że w każdym punkcie linii zwężenia powierzchni prostoliniowej krzywizna geodezyjna trajektoryj ortogonalnych do tworzących jest zerem.

Podamy kilka twierdzeń o liniach geodezyjnych elipsoidy.

Każda linia geodezyjna, wychodząca z punktu kołowego, przechodzi przez punkt kołowy średnicowo przeciwległy.

Dwa punkty kołowe przeciwległe można połączyć nieskończenie wieloma łukami geodezyjnemi równej długości (jak na kuli).

Jeżeli punkt M na elipsoidzie połączymy liniami geodezyjnemi z dwoma punktami kołowemi nie przeciwległemi, wtedy kierunki linij krzywiznowych, przechodzących przez punkt M, będą dwusiecznemi kątów pomiędzy liniami geodezyjnemi.

Dla każdej linii geodezyjnej na elipsoidzie iloczyn odległości środka od płaszczyzny stycznej w punkcie linii geodezyjnej przez długość średnicy równoległej od stycznej do geodezyjnej w tymże punkcie jest stały.

Linie krzywiznowe pierwszy rozważał Monge (patrz § 8); Dupinowi zaś (Dével. de géom. 1813) zawdzięczamy rozważania nad liniami asymptotycznemi i kierunkami sprzężonemi oraz wprowadzenie wskazujących. O liniach krzywiznowych pisali następnie: Brioschi (Ann. di Tortolini IV, 1863), Ribaucour (Compt. rend. 1872), Darboux (tamże 1877, 1881) i inni. O liniach krzywiznowych, przechodzących przez punkt kołowy: Cayley (Phil. Mag. 1863, Quart. Journ. XI, 1870), Frost (tamże X), Hoppe (Arch. d. Math. LXX, 1883). Wiele prac ogłoszono o powierzchniach, mających linie krzywiznowe płaskie albo kuliste: Serret (Crelle XVIII), Bonnet (Éc. pol. XXXIII, 1853), Dini (Ann. di mat. I, Mem Soc. dei Quaranta III, 1869), Enneper (Crelle XCIV) i wielu innych.

Linie geodezyjne badał Gauss; Legendre nazywał je liniami minimalnemi; nazwę dzisiaj używaną wprowadził Liouville. Prócz Gaussa, pisał o nich Steiner (Berl. Ber. 1839), Jacobi (Crelle XIX—o geodezyjnych elipsoidy), Minding (Crelle XX), Liouville (w wydaniu z r. 1850 dzieła Monge'a), Appel. de l'Anal. a la Géom.), Brioschi (Ann. di Tortol. IV), Beltrami (Ist. Lomb. 1868) i t. d. W ostatnich czasach: Weingarten (Berl. Ber. 1882), Brill (Münch. Abh. 1883), Ricci (Ist. Veneto 1893—94). O historyi geodezyjnych patrz Stäckel (Leipz. Ber. 1893). O geodezyjnych na elipsoidzie patrz tom 2-gi traktatu Halphena o funkcyach eliptycznych.

---

§ 10.

Krzywizny powierzchni. Rozwijalność jednych powierzchni na drugie.

Wyrażenia

$$K = \frac{1}{r_1 r_2}\,; \qquad H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

noszą nazwę: pierwsze krzywizny całkowitej Gaussa, drugie krzywizny średniej w uważanym punkcie. Wielkości te wyrażają się przy pomocy wzorów:

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}\,, \qquad H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}\,.$$

Inną krzywiznę, mającą za wyrażenie $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)$, wprowadził Casorati (Acta math. XIV, patrz Catalan, tamże XV).

Krzywiznę K można wyrazić za pomocą wzoru, w którym występują tylko spółczynniki pierwszej formy różniczkowej:

$$K=\frac{1}{2(EG-F^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial G}{\partial u}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial u}\right]\right\}.$$

Jeżeli równanie powierzchni dane jest w postaci $z=f(x,y)$ i jeżeli położymy: $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t$, wtedy:

$$K=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, \quad H=\frac{2pqs-(1+p^2)t-(1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Krzywizna K jest dodatnia w punktach hyperbolicznych, jest zerem w punktach parabolicznych.

Krzywizna K powierzchni prostoliniowej jest zawsze ujemna albo równa zeru. Jeżeli nie jest zerem wzdłuż tworzącej, to jest największą pod względem wartości liczebnej w punkcie środkowym (patrz Rozdz. XIII, § 6) i zmniejsza się w miarę oddalenia się od tego punktu na tworzącej.

Powierzchnia o krzywiznie K równej zeru we wszystkich punktach jest powierzchnią rozwijalną, i odwrotnie.

Krzywiznę K wyrazić można przez krzywizny geodezyjne $\frac{1}{\varrho_u}, \frac{1}{\varrho_v}$ dwu linij spółrzędnych za pomocą wzoru Liouville'a (Journ. de Liouv. XVI):

$$K=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial v}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{\varrho_u}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{\varrho_v}\right\},$$

gdzie Ω jest kąt, jaki tworzą linie spółrzędne.

Krzywiznę całkowitą powierzchni można określić jako odwrotność granicy stosunku pola powierzchniowego nieskończenie małego do pola kulistego, odpowiadającego pierwszemu w odwzorowaniu kulistem powierzchni.

Jeżeli pomiędzy punktami dwu powierzchni można ustanowić odpowiedniość taką, że odpowiadające sobie ich elementy liniowe stają się równemi, wtedy powierzchnie nazywają się wzajemnie na siebie rozwijalnemi.

Jeżeli dwie powierzchnie dają się rozwinąć jedna na drugą, to wtedy za pomocą zgięcia można rozciągnąć jednę (albo część jednej) na drugiej bez zerwania i bez zdwojenia.

Krzywizna całkowita powierzchni w jakimkolwiek punkcie nie zmienia się przy dowolnem zginaniu powierzchni: albo, co na jedno wychodzi, dwie powierzchnie, dające się rozwinąć jedna na drugiej, mają równe krzywizny w odpowiadających sobie punktach. I dla tego krzywiznę K nazywamy niezmiennikiem gięcia.

Jeżeli zegniemy powierzchnię, wtedy nie zmienia się krzywizna geodezyjna jakiejkolwiek linii, nakreślonej na powierzchni; a stąd w szczególności, linie geodezyjne powierzchni zmieniają się na linie geodezyjne powierzchni przekształconej.

Równość krzywizny całkowitej dwu powierzchni dla każdej pary odpowiadających sobie punktów nie jest wszakże dostateczną na to, aby te dwie powierzchnie dały się rozwinąć jedna na drugiej; wystarcza zaś jedynie tylko w tym przypadku, gdy obie powierzchnie mają w każdym punkcie krzywiznę stałą i t. p.

Dwie powierzchnie o tej samej stałej krzywiznie całkowitej dają się nieskończenie wielu sposobami rozwinąć jedna na drugiej; stąd: powierzchnia rozwijalna (o krzywiznie równej zeru) daje się zawsze rozwinąć na płaszczyźnie, a powierzchnia o krzywiznie stałej dodatniej daje się zawsze rozwinąć na kuli.

Każda powierzchnia o krzywiznie stałej może za pomocą ∞^3 gięć przechodzić na samą siebie.

Każda powierzchnia, zezwalająca na ∞ gięć ciągłych na samą siebie, daje się rozwinąć na powierzchni obrotowej.

Helisoidami nazywamy powierzchnie, utworzone ruchem linii płaskiej albo skośnej, obracającej się około osi, która znów równocześnie posuwa się wzdłuż samej siebie, tak, że stosunek dwu prędkości (obrotu i przesunięcia) jest stały.

Każda helisoida daje się zawsze rozwinąć na powierzchni obrotowej; elipsy rozwijają się wtedy wzdłuż równoleżników (Tw. Boura).

Jeżeli na powierzchni giętkiej ustalimy jednę krzywą, wtedy powierzchnia nie daje się odkształcać, o ile ta krzywa nie jest asymptotyczna.

Można dwoma różnemi sposobami odkształcić powierzchnię tak, aby jedna jej krzywa C przybrała postać dowolną Γ, byleby krzywizna pierwsza krzywej Γ była w każdym punkcie większa od krzywizny geodezyjnej krzywej C w odpowiednim punkcie.

Można nieskończenie wieloma sposobami odkształcić powierzchnię tak, aby jedna jej jakakolwiek linia stała się linią krzywiznową powierzchni odkształconej.

Niepodobna odkształcić powierzchni S w ten sposób, aby krzywe asymptotyczne stały się krzywemi asymptotycznemi powierzchni odkształconej, o ile powierzchnia S nie jest powierzchnią prostoliniową, a krzywe asymptotyczne jej tworzącemi prostoliniowemi.

Jeżeli dwie powierzchnie prostoliniowe, nie dające się otrzymać przez odkształcenie jednej i tej samej powierzchni stopnia 2-go, dają się rozwinąć jedna na drugiej, wtedy tworzące jednej po przekształceniu rozwijają się wzdłuż tworzących drugiej (Tw. Bonneta).

Nazywamy stożkiem kierowniczym powierzchni prostoliniowej stożek, utworzony przez proste poprowadzone z danego punktu i równoległe odpowiednio do tworzących powierzchni danej.

Każda powierzchnia prostoliniowa daje się zawsze przekształcić w ten sposób, że jej stożek kierowniczy przybiera postać dowolną.

Każda powierzchnia prostoliniowa daje się zawsze zgiąć w ten sposób, że linia dowolna, nakreślona na niej, zamienia się na linię asymptotyczną.

Przekształcając powierzchnię prostoliniową, możemy zawsze sprawić, że jedna z jej linij geozyjnych przekształca się na prostą.

Można ∞^1 sposobami odkształcić prostoliniową tak, aby jakakolwiek z jej krzywych stała się krzywą płaską.

Jedynemi powierzchniami prostoliniowemi rozwijalnemi na powierzchniach obrotowych są przekształcenia helisoidy prostoliniowej o polu najmniejszem (p. niżej) i hyperboloidy obrotowej.

Krzywizną powierzchni zajmowali się już Euler i Meusnier, lecz dopiero Gauss rozwiązał zagadnienie to w § VIII swoich „Disquisitiones generales etc." Gaussowi też zawdzięczamy odkrycie, że krzywizna K nie zmienia się przy zginaniu powierzchni. Pomiędzy pierwszemi pracami o rozwijaniu powierzchni ważnemi są rozprawy Mindinga (Crelle XIX), Boura (Éc. pol. LIX, 1861), Bonneta (tamże LXI, LXII), Codazzi'ego (Mém. prés. Paryż XXVII) i t. p. Dalej wymieniamy rozprawy: Weingartena (Crelle LIX), Ribaucoura (Comp. Rend. LXX), Dini'ego (Giorn. di Batt. II) i t. d. Jedną z pierwszych prac o zginaniu powierzchni prostoliniowych jest rozprawa Mindinga (Crelle XVIII), i zasadnicza praca Beltrami'ego (Ann. di mat. VII, 1865). Nowe prace Weingartena o teoryi rozwijalności powierzchni, opartej na nowej metodzie, znajdują się w Compt. rend, CXII, str. 607, 706 i w Acta mat. XX, a wykład nowej metody w dziele Darboux'a o powierzchniach (t. IV, str. 308).

§ 11.

Powierzchnie o krzywiznie całkowitej stałej. Powierzchnie pseudosferyczne.

Powierzchnia o krzywiznie stałej ujemnej $K = -\frac{1}{R^2}$ nazywa się powierzchnią pseudosferyczną o promieniu R. Nazywamy horycyklem krzywą na powierzchni pseudosferycznej, mającą krzywiznę geodezyjną stałą równą $\frac{1}{R}$.

Element liniowy każdej powierzchni o krzywiznie stałej normalnej $K = \frac{1}{R^2}$ daje się wyrazić analitycznie przez wzór:

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 \frac{u}{R}\, dv^2,$$

a element liniowy każdej powierzchni o krzywiznie stałej ujemnej $K = -\frac{1}{R^2}$ za pomocą jednego z trzech wzorów następujących:

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2 \frac{u}{R}\, dv^2 \quad \text{(typ hyperboliczny)},$$

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}}\, dv^2 \quad \text{(typ paraboliczny)},$$

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sinh^2 \frac{u}{v}\, dv^2 \quad \text{(typ eliptyczny)}.$$

Dla pierwszej z tych trzech form liniami spółrzędnemi są geodezyjne v=const, ortogonalne do geodezyjnej stałej L, oraz trajektorye do nich prostopadłe v=const. Za pomocą podobnego układu spółrzędnych sprowadzamy także i element liniowy powierzchni o krzywiznie stałej dodatniej do formy wyżej podanej.

Dla formy drugiej linie v=const są liniami geodezyjnemi, ortogonalnemi do linii L, mającej krzywiznę geodezyjną stałą $\frac{1}{R}$ (horycykle), a linie u = const. są trajektoryami do tamtych prostopadłemi.

Dla formy trzeciej linie v = const. są geodezyjnemi, wychodzącemi z jednego punktu, linie u = const. są trajektoryami do nich prostopadłemi.

Element liniowy każdej powierzchni o krzywiznie stałej i równej 1, odniesionej do linij krzywiznowych, przedstawia się w postaci:

$$ds^2 = \sinh^2 \omega \, du^2 + \cosh^2 \omega \, du^2 ,$$

gdzie ω czyni zadość związkowi:

$$\frac{d^2 \omega}{du^2} + \frac{d^2 \omega}{dv^2} = - \sinh \omega \cosh \omega .$$

Element liniowy każdej powierzchni pseudosferycznej o promieniu 1, odniesionej do linij krzywiznowych, przedstawia się w postaci:

$$ds^2 = \cos^2 \omega \, du^2 + \sin^2 \omega \, dv^2 ,$$

gdzie ω czyni zadość związkowi:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \sin \omega \cos \omega .$$

Na danej powierzchni o krzywiznie stałej istnieje zawsze układ spółrzędnych taki, że linie geodezyjne wyrażają się za pomocą równań liniowych pomiędzy spółrzędnemi, i odwrotnie: powierzchnia jest powierzchnią o krzywiznie stałej, skoro jej linie geodezyjne dają się przedstawić za pomocą równań liniowych (Tw. Beltrami'ego). Twierdzenie to rozciąga się na przestrzenie wyższe.

Rozpatrzymy teraz powierzchnie pseudosferyczne obrotowe. Odniósłszy ich element do południków i równoleżników, mieć będziemy:

$$ds^2 = du^2 + \left[ce^{\frac{u}{R}} + c'e^{-\frac{u}{R}}\right]^2 dv^2.$$

Stosownie do tego, czy spółczynniki c i c' są jednego znaku, jeden z nich jest zerem, albo wreszcie są znaku przeciwnego, mamy trzy typy powierzchni pseudosferycznych obrotowych. Są niemi mianowicie:

1. Typ hyperboliczny. Stałe c i c' są jednego znaku; element liniowy, odniesiony do południków i równoleżników, wyraża się wzorem:

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 \cosh^2 \frac{u}{R}\, dv^2.$$

Powierzchnia powstaje przez obrót krzywej

$$x = \lambda \cosh \frac{u}{R}, \quad y = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \sinh^2 \frac{u}{R}}\, du$$

około osi y.

2. Typ paraboliczny. Jedna ze stałych c, c' jest zerem; element liniowy, odniesiony do południków i równoleżników, wyraża się wzorami:

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}}\, dv^2.$$

Powierzchnia powstaje przez obrót krzywej (traktoryi):

$$x = e^{\frac{u}{R}}, \qquad y = \int \sqrt{1 - \frac{1}{R^2} e^{\frac{2u}{R}}}\, du$$

około osi y. Traktorya ma własność, że część jej stycznej, zawarta pomiędzy punktem styczności a osią y (która jest asymptotą krzywej). jest stała (i równa R, patrz Rozdz. XVII). Powierzchnia tego typu nazywa się pseudosferą.

3. Typ eliptyczny. Stała c i c' są znaków przeciwnych. Element liniowy, odniesiony do południków i do równoleżników, wyraża się wzorem:

$$ds^2 = du + \lambda^2 \sinh^2 \frac{u}{R} dv^2.$$

Powierzchnia powstaje przez obrót krzywej

$$x = \lambda \sinh \frac{u}{R}, \quad y = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \cosh^2 \frac{u}{R}}\, du$$

około osi y.

Krzywe asymptotyczne powierzchni pseudosferycznej mają w każdym punkcie skręcenie stałe (Enneper).

W każdym czworoboku krzywoliniowym, zawartym pomiędzy czterema liniami asymptotycznemi powierzchni pseudosferycznej, kąty przeciwległe są równe (Dini).

Pomiędzy powierzchniami pseudosferycznemi godnemi uwagi są powierzchnie Dini'ego (Compt. rend. 1865), i powierzchnie Ennepera (Gött. Nachr. 1868), których szczególnym przypadkiem jest powierzchnia, badana przez Bianchi'ego (Rozpr. Piza 1879, Math. Ann. XVI). Pomiędzy powierzchniami o krzywiznie stałej dodatniej zasługują na uwagę powierzchnie Ennepera, których przypadkiem szczególnym jest powierzchnia Kuena (Münch. Ber. 1884)

Wszystkie te powierzchnie o krzywiznie stałej, ujemnej albo dodatniej, mają tę własność, że posiadają układ linij krzywiznowych płaskich.

Spółrzędne punktu powierzchni Ennepera wyrażają się przez funkcye eliptyczne dwu parametrów; dla innych powierzchni wystarczają funkcye kołowe.

Powierzchnię pseudosferyczną Dini'ego tworzy traktorya, poruszająca się ruchem helisoidalnym około własnej asymptoty; powierzchnia ta jest tedy helisoidą. Jeden układ jej linij krzywiznowych składa się z południków (traktoryj), drugi z krzywych nakreślonych na kulach, mających środek na osi; kule te przecinają ortogonalnie helisoidę. Ta własność stosuje się i do powierzchni Ennepera.

Rozważmy na danej powierzchni pseudosferycznej o promieniu R układ linij geodezyjnych równoległych; na każdej stycznej do tych linij odetnijmy odcinek długości R. poczynając od punktu styczności; miejsce geometryczne punktów skrajnych tych odcinków jest nową powierzchnią pseudosferyczną tego samego promienia. Powierzchnia dana i nowa tworzą dwie powłoki rozwiniętej jednej i tej samej powierzchni, której normalnemi są styczne, o których wyżej mowa (Bianchi). Przy pomocy tego twierdzenia można z jednej powierzchni pseudosferycznej otrzymać nieskończenie wiele innych; a przekształcenie, o którem to twierdzenie mówi, nazywa się przekształceniem dopełniającem (Bianchi) i stanowi przypadek szczególny przekształcenia ogólniejszego, nazwanego przekształceniem Bäcklunda (Lunds. Univ. Arsskrift. XIX, 1883; Math. Ann. IX, XIX).

Jeżeli przekształcenie poprzednie zastosujemy do pseudosfery (powierzchni utworzonej obrotem traktoryi), otrzymamy powierzchnię Bianchi'ego, która, jak powiedziano wyżej, jest przypadkiem szczególnym powierzchni Ennepera, posiadających układ linij krzywiznowych płaskich, jak helisoida Dini'ego.

Spółrzędne punktu tej powierzchni wyrażają się w funkcyi dwu parametrów u, v przy pomocy wzorów:

$$x = 2R \frac{\sin u}{1 + v^2 \sin^2 u} (\cos v + v \sin v);$$

$$y = 2R \frac{\sin u}{1 + v^2 \sin u} (\sin v + v \cos v);$$

$$z = R\left(\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} u + \frac{2 \cos u}{1 + v^2 \sin u}\right).$$

Powierzchnia posiada krzywą podwójną.

Modele gipsowe tej powierzchni, helisoidy Dini'ego oraz powierzchni o krzywiznie dodatniej Ennepera i Kuena, znajdują się w kolekcyi L. Brilla.

Można utworzyć trygonometryę pseudosferyczną na podobieństwo trygonometryi sferycznej, wprowadzając w tym celu łuki linij geodezyjnych zamiast łuków kół wielkich. W ogólności powiedzieć można:

Wzory trygonometryczne, odnoszące się do trójkąta geodezyjnego pseudosferycznego, wyprowadzają się z wzorów zwykłej trygonometryi kulistej, zmieniając R (promień kuli) na $R\sqrt{-1}$. Zauważył to poraz pierwszy Minding (Crelle XIX, XX). Nadto:

Twierdzenia geometryi nieeuklidesowej znajdują swoją interpretacyę na powierzchniach pseudosferycznych. Patrz co do tego Beltrami (Saggio etc., Giorn. di Batt. VI, 1868).

Z prac o powierzchniach o krzywiznie stałej, prócz wyżej podanych, wymieniamy: Beltrami (Ann. di mat. VII), Dini (Giorn. di Batt. III), Bianchi (Math. Ann. XVI, Giorn. di Batt. XX, Rend. Lincei 1892, 1899), Hazzidakis (Crelle LXXXVIII), Weingarten (Crelle XCIV, XCV), Darboux (Compt. rend. 1883, Éc. norm. 1890), Guichard (Éc. norm. 1890) i t. d. Najnowszą pracą z teoryi powierzchni, traktowanej przy pomocy metody Weingartena, jest rozprawa Bianchi'ego (Anc. di mat. (3) II). O przekształceniach powierzchni o krzywiznie stałej dodatniej, prócz cytowanej pracy Hazzidakisa, patrz noty Bianchi'ego (Rend. Lincei 1899).

§ 12.

Powierzchnie o krzywiznie średniej dodatniej. Powierzchnie minimalne.

Dwie powierzchnie, równoległe do powierzchni S o krzywiznie stałej dodatniej $K = \frac{1}{R^2}$ i odległe od niej na $\pm R$, mają krzywiznę średnią stałą $H = \pm \frac{1}{R}$ (Bonnet). Odwrotnie: Każda powierzchnia o krzywiznie średniej stałej $\pm \frac{1}{R}$ ma równoległą w odległości R o krzywiznie bezwzględnej stałej $\frac{1}{R^2}$.

Jeżeli będziemy uważali za odpowiadające sobie punkty trzech powierzchni, położone na tej samej normalnej, wtedy odwzorowanie dwu powierzchni o krzywiznie stałej jednej na drugiej jest podobnem; a odwzorowanie jednej z tych powierzchni na powierzchni S jest takie, że dwom kierunkom na niej ortogonalnym do siebie odpowiadają zawsze na powierzchni S dwa kierunki sprzężone (patrz Chini, Giorn. di Batt. XXVII, 1889).

Element liniowy każdej powierzchni o krzywiznie średniej stałej $\pm \frac{1}{R}$ w odniesieniu do linij krzywiznowych u, v, wyraża się wzorem:

$$ds^2 = R^2 e^{\pm 2\theta} (du^2 + dv^2),$$

gdzie θ czyni zadość równaniu

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = - \sinh \theta \cosh \theta .$$

Stąd:

Linie krzywiznowe każdej powierzchni o krzywiznie średniej stałej tworzą układ izotermiczny.

Każda powierzchnia o krzywiznie średniej stałej może odkształcać się, zachowując tęż samą krzywiznę średnią w ten sposób, że nowe linie krzywiznowe stają się trajektoryami pod kątem stałym linij krzywiznowych dawnych.

Powierzchnie obrotowe o krzywiznie średniej stałej otrzymujemy, według twierdzenia Bonneta, z przekształconej obrotowej, powstałej z kuli o promieniu R, jeżeli na normalnych z jednej i drugiej strony odcinamy długości równe R. Otrzymujemy w ten sposób dwa typy powierzchni obrotowych o krzywiznie średniej stałej; są niemi: unduloida i nodoida. Do określenia krzywej południkowej tych powierzchni służy następujące piękne twierdzenie Delaunay'a:

Krzywe południkowe undoloidy i nodoidy są to krzywe, opisane na płaszczyznie przez ognisko elipsy albo hyperboli, toczącej się bez ślizgania po prostej (osi obrotu powierzchni). Jeżeli zaś około tej prostej obraca się krzywa, opisana na płaszczyznie przez ognisko paraboli, toczącej się po prostej bez ślizgania, wtedy powstająca powierzchnia obrotowa jest powierzchnią także o stałej średniej krzywiznie, ale równej zeru. Jest to katenoida (należąca do powierzchni o polu powierzchniowem najmniejszem).

Nazywamy powierzchniami o polu najmniejszem, powierzchniami minimalnemi, najmniejszemi, lub wreszcie elasoidami — powierzchnie, które pomiędzy wszystkiemi powierzchniami, zakończonemi jednym obwodem i nieskończenie mało różniącemi się od siebie, zamykają pole najmniejsze.

Jeżeli $z = f(x, y)$ jest równaniem powierzchni, p, q, r, s, t zaś mają zwykłe znaczenie, wtedy równanie o pochodnych cząstkowych dla powierzchni o polu najmniejszem jest:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0,$$

lub

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

W powierzchniach minimalnych promienie główne krzywizny są w każdym punkcie równe i znaków przeciwnych, lub inaczej: krzywizna średnia jest zerem. Odwrotnie: każda powierzchnia o krzywiznie średniej zero jest powierzchnią o polu najmniejszem.

Odwzorowanie kuliste powierzchni minimalnej jest odwzorowaniem podobnem (Bonnet).

Jedyną powierzchnią rzeczywistą rozwijalną o polu najmniejszem jest płaszczyzna.

Na powierzchni minimalnej linie asymptotyczne tworzą układ podwójny ortogonalny, linie krzywiznowe — układ podwójny ortogonalny izometryczny.

Spółrzędne punktu powierzchni o polu najmniejszem wyrażają się wzorami Weierstrassa:

$$x=\int'(1-\tau^2)F(\tau)d\tau,\quad y=\int' i(1+\tau^2)F(\tau)d\tau,\quad z=\int' 2\tau F(\tau)\,d\tau,$$

gdzie akcent $'$, położony nad znakiem całki, oznacza, że należy wziąć tylko część rzeczywistą otrzymanego wyrażenia; $F(\tau)$ jest jakąkolwiek funkcyą zmiennej zespolonej τ; każdej wartości F odpowiada określona powierzchnia minimalna; i na odwrót.

Jeżeli przez τ_1, $F_1(\tau_1)$ oznaczymy zmienne sprzężone względem τ, $F(\tau)$, wtedy element liniowy powierzchni minimalnej wyrazi się wzorem:

$$ds^2=(1+\tau\tau_1)^2F(\tau)\,F_1(\tau_1)\,d\tau d\tau_1.$$

a promień główny dodatni krzywizny przez:

$$r_2 = \frac{1}{2}(1+\tau\tau_1)^2 \sqrt{F(\tau)F_1(\tau_1)}\,.$$

Wzory Weierstrassa można napisać jeszcze w postaci:

$$x = \{(1-\tau^2)\varphi''(\tau) + 2\tau\varphi'(\tau) - 2\varphi(\tau)\}';$$

$$y = \{i(1+\tau^2)\varphi''(\tau) - 2i\tau\varphi'(\tau) - 2i\psi(\tau)\}';$$

$$z = \{2\tau\varphi''(\tau) - 2\varphi'(\tau)\}',$$

gdzie akcent $'$ ma to samo znaczenie co wyżej, funkcya zaś $\varphi(\tau)$ jest funkcyą dowolną.

Wszystkie powierzchnie minimalne algebraiczne otrzymujemy z tych wzorów, biorąc na $\varphi(\tau)$ funkcye algebraiczne zmiennej τ.

Jeżeli dwie powierzchnie minimalne rozwijają się jedna na drugiej, wtedy funkcya F, należąca do jednej powierzchni, musi być równa funkcyi F, należącej do drugiej, pomnożonej przez funkcyę wykładniczą $e^{i\alpha}$, gdzie α jest dowolną stałą rzeczywistą. W ten sposób otrzymujemy najogólniejsze odkształcenia powierzchni minimalnych, przy których zostają one powierzchniami minimalnemi.

Dwie powierzchnie minimalne, w ten sposób otrzymane, nazywają się stowarzyszonemi.

Jeżeli weźmiemy $\alpha = \frac{\pi}{2}$, wtedy dwie powierzchnie minimalne nazywają się sprzężonemi w rozwijalności (Bonnet)

Powierzchnie o polu najmniejszem, rozwijalne na powierzchniach obrotowych, a więc i nieskończenie wieloma sposobami na sobie samych, otrzymujemy z wzorów Weierstras : kładąc $F(\tau) = C\tau^k$, gdzie k jest stałą rzeczywistą, C stałą jakąkolwiek.

W przypadku $k = -2$ mamy powierzchnie helisoidalne. Jedyną powierzchnią prostoliniową o polu najmniejszem jest helisoida, której równaniem jest $z = m \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ (Tw. Catalana).

Powierzchnia o równaniu $\sqrt{x^2+y^2} = m \cosh \frac{z}{m}$ (katenoida lub aliseida) jest powierzchnią o polu najmniejszem; jest ona powierzchnią obrotową, na której rozwija się helisoida prostoliniowa twierdzenia poprzedzającego; jest to jedyna powierzchnia obrotowa o polu najmniejszem.

Jeżeli we wzorach Weierstrassa położymy $F(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau^4}$, otrzymamy powierzchnię minimalną algebraiczną, zwaną powierzchnią minimalną Henneberga; jest ona jednostronna (patrz Rozdz. XVIII) klasy 5-ej i rzędu 15.

Jeżeli w ogólności zamiast $F_1(\tau)$ weźmiemy funkcyę taką, że, oznaczywszy przez $F_3(\tau)$ funkcyę, otrzymaną z funkcyi $F_1(\tau)$ przez zamianę spółczynników na sprzężone, będziemy mieli $F(\tau) = -\frac{1}{\tau^4} F_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)$, wtedy otrzymane powierzchnie będą jednostronnemi.

Kładąc $F(\tau) = 3$, otrzymujemy powierzchnię, dla której spółrzędnemi punktu są:

$$x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3; \quad y = \beta^3 - 3\beta - 3\alpha^2\beta; \quad z = 3(\alpha^2 - \beta^2).$$
$$(\tau = \alpha + i\beta)$$

Powierzchnia ta nazywa się powierzchnią Ennepera i jest rzędu 9-go; jej linie krzywiznowe są sześciennemi płaskiemi rodzaju zero; linie asymptotyczne $\alpha - \beta = \text{const}$, $\alpha + \beta = \text{const}$ są sześciennemi skośnemi. Powierzchnia Ennepera daje się rozwinąć na powierzchni obrotowej; jest ona obwiednią płaszczyzn prostopadłych w punktach środkowych do prostych, łączących punkty dwóch parabol, mających jedno ognisko (Darboux).

Wszystkie powierzchnie stowarzyszone z powierzchniami Ennepera mają postać tej powierzchni.

Jeżeli położymy $F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}$, otrzymamy powierzchnię minimalną Schwarza, zakończoną czworobokiem skośnym, utworzonym przez dwie pary przeciwległych krawędzi czworościanu foremnego. Powierzchnia ta rozwiązuje dla przypadku szczególnego t. zw. zagadnienie Plateau'a, mianowicie: mając obwód zamknięty, zbudować powierzchnię minimalną, zakończoną tym obwodem i pozbawioną w swem wnętrzu punktów osobliwych.

Plateau rozwiązał doświadczalnie to zagadnienie, zanurzywszy pręt metalowy, zgięty w odpowiedni kontur, w ciecz specyalną lekko lepką,, błonka bardzo subtelna cieczy, przylegająca do konturu, układa się według praw mechaniki dokładnie jako powierzchnia o polu najmniejszem.

Wymieniamy jeszcze powierzchnię przesunięcia Scherka, którą otrzymujemy, szukając rozwiązań postaci $z = \varphi(x) + \psi(y)$ równania różniczkowego powierzchni najmniejszych. Równaniem jej jest:

$$z = \frac{1}{a}\left\{\log\cos(ax) - \log\cos(ay)\right\} \quad \text{(Crelle XII, 1835).}$$

Jeżeli jeden układ linij krzywiznowych powierzchni minimalnej składa się z linij płaskich, to i linie krzywiznowe drugiego układu będą płaskie.

Każda prosta, leżąca na powierzchni minimalnej, jest osią symetryi powierzchni.

Jeżeli płaszczyzna przecina ortogonalnie w każdym punkcie przecięcia powierzchnię minimalną, wtedy jest płaszczyzną symetryi dla powierzchni.

Aby powierzchnia dała się rozwinąć na powierzchni minimalnej, jest koniecznem i dostatecznem, by forma różniczkowa, która przedstawia jej element liniowy po pomnożeniu przez $\sqrt{-K}$, gdzie K jest krzywizną całkowitą, była zerem (Ricci).

Jeżeli pominiemy przypadek bardzo szczególny, rozważany przez Eulera (Methodus inveniendi etc. 1744), to można będzie powiedzieć, że pierwszy Lagrange (Misc, Taur. II) zajmował się teoryą powierzchni najmniejszych, jako zastosowaniem rachunku waryacyjnego. Równanie różniczkowe tych powierzchni badali: Meusnier, Monge, Legendre, Ampère. Później przedmiotem tym zajmowali się: Poisson (Crelle VIII), Scherk (l. c.), Steiner (Berl. Ber. 1840), który znalazł twierdzenie o powierzchniach równoległych do powierzchni minimalnych, Bonnet (Compt rend. 1853), Enneper (Zeitschr. f. Math. IX, 1864), Weierstrass (Berl. Ber. 1866), Riemann (Gött. Abh. XIII, 1867), Beltrami (Mem. Bologna 1868), Schwarz (Berl Ber. 1872, Crelle LXXX, Werke I), Lie (Math. Ann. XIV) i t. d. Wskazówki historyczne i wykład zupełny tego przedmiotu mamy w dziele Darboux'a (Thèorie des surf. I); zarys historyczny w cytowanej rozprawie Beltrami'ego.

Modele gipsowe tych powierzchni znajdują się w kolekcyi L. Brilla.

O powierzchniach o średniej krzywiźnie stałej pisali: Delaunay (Crelle VI), Sturm (tamże), Jellet (tamże XVIII), Dini (Annali di mat. VII) i t. d.

§ 13.

Powierzchnie rozwinięte.

Miejsce dwóch środków głównych krzywizny w punktach powierzchni (patrz § 9) nazywa się powierzchnią rozwiniętą danej, a dana względem niej nazywa się rozwijającą.

Rozwiniętą środkową nazywamy powierzchnię, obwiedzioną przez płaszczyzny prostopadłe do normalnych powierzchni w punktach środkowych odcinka, ograniczonego dwoma środkami krzywizny (Ribaucour).

Każdą z dwu powłók rozwiniętej można też uważać za miejsce krawędzi zwrotu powierzchni rozwijalnej, utworzonej z normalnych do powierzchni wzdłuż punktów linii krzywiznowej każdego z dwu układów.

Te krawędzie zwrotu są liniami geodezyjnemi powierzchni rozwiniętej.

Na powierzchni rozwiniętej linie, odpowiadające liniom krzywiznowym powierzchni danej, tworzą układ sprzężony (patrz § 9).

Linie asymptotyczne na dwóch powłokach powierzchni, której promienie główne krzywizny połączone są pewnym związkiem, odpowiadają sobie wzajemnie; i odwrotnie.

Dla tych powierzchni (które niektórzy nazywają powierzchniami W) iloczyn krzywizn całkowitych w odpowiednich punktach dwóch powłok rozwiniętej równa się $\frac{1}{(r_1-r_2)^4}$, gdzie r_1, r_2 są dwa promienie krzywizny powierzchni danej w każdym punkcie (Halphen).

W szczególności: W powierzchniach o krzywiznie stałej K—i tylko w tych powierzchniach—linie asymptotyczne na dwóch powłokach rozwiniętej nie tylko odpowiadają sobie wzajemnie, lecz odpowiadają także liniom asymptotycznym powierzchni.

Na dwóch powłokach rozwiniętej, należącej do powierzchni, której promienie krzywizny są połączone związkiem r_1-r_2=const — i tylko na tych powierzchniach—linie krzywiznowe odpowiadają sobie wzajemnie.

Każda powłoka rozwiniętej, należącej do powierzchni, której promienie połączone są związkiem, daje się rozwinąć na powierzchni obrotowej; i odwrotnie: poza powierzchniami prostoliniowemi, będącemi miejscem normalnych głównych dla krzywych o stałem skręceniu (powierzchniami, dającemi się rozwinąć na katenoidzie), każdą inną powierzchnię dającą się rozwinąć na powierzchni obrotowej można uważać za powłokę rozwiniętej, należącej do powierzchni, której promienie krzywizny połączone są związkiem (Tw. Weingartena).

Każda powłoka rozwiniętej, należącej do powierzchni pseudosferycznej, daje się rozwinąć na katenoidzie.

Appell (Americ. Journ. X) i Goursat (tamże) badali powierzchnie, których rozwinięta środkowa redukuje się do punktu i dla których promienie krzywizny połączone są związkiem $r_1+r_2=\mu\delta$, gdzie μ jest stałą, δ zaś jest odległością początku od płaszczyzny stycznej.

Rozwinięta środkowa powierzchni Goursata jest też powierzchnią Goursata.

Powierzchniami, dla których zachodzi związek pomiędzy promieniami krzywizny, zajmował się Weingarten (Crelle LXII,CIII), od którego to powierzchnie te otrzymały używaną przez niektórych nazwę powierzchni W; dalej Halphen (Bull. Soc. math. IV), Lie (tamże IV), Beltrami (Ann. di mat. VII), Dini (tamże VII) i t.d. Lipschitz (Acta X, Compt. rend. 1887) i Lilienthal (Acta XI) badali przypadek, w którym różnica dwóch promieni krzywizny jest stała.

Powierzchnie kanałowe są szczególnym przypadkiem powierzchni W, mianowicie tym, w którym jeden z promieni krzywizny jest stały. Innemi przypadkami szczególnemi są oczywiście powierzchnie o polu najmniejszem i powierzchnie o krzywiznie stałej (bezwzględnej lub średniej).

§ 14

Układy potrójne powierzchni ortogonalnych.

Dajmy, że mamy trzy układy po ∞^1 powierzchni i takie, że przez każdy punkt pewnego obszaru przestrzeni przechodzi jedna tylko powierzchnia z każdego z trzech układów. Jeżeli ustanowimy odpowiedniość jednoznaczną pomiędzy każdą powierzchnią każdego z trzech układów a wartościami parametrów $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, to te trzy parametry będzie można uważać za spółrzędne krzywoliniowe punktu przestrzeni Trzy układy powierzchni tworzą t. zw. układ potrójny powierzchni. Jeżeli x, y, z są spółrzędne kartezyańskie punktów przestrzeni i jeżeli

$$\varrho_1 = f_1(x, y, z), \quad \varrho_2 = f_2(x, y, z), \quad \varrho_3 = f_3(x, y, x)$$

są równaniami trzech powierzchni, rozwiązanemi względem parametrów, wtedy x, y, z będzie można wyrazić przez parametry ϱ, a jeden związek pomiędzy parametrami ϱ odpowiada równaniu powierzchni w spółrzędnych krzywoliniowych ϱ.

Kwadrat odległości pomiędzy dwoma punktami nieskończenie blizkiemi przestrzeni, wyrażony w spółrzędnych krzywoliniowych, będzie:

$$ds^2 = H_1{}^2 d\varrho_1{}^2 + H_2{}^2 d\varrho_2{}^2 + H_3{}^2 d\varrho_3{}^2 + 2h_{12} d\varrho_1 d\varrho_2 + 2h_{13} d\varrho_1 d\varrho_3 + 2h_{23} d\varrho_2 d\varrho_3,$$

gdzie:

$$H_i^2 = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_i}\right)^2, \quad h_{ij} = \Sigma \frac{dx}{\partial \varrho_i} \frac{\partial x}{\partial \varrho_j};$$

suma Σ rozciąga się na trzy wyrazy: wypisany i dwa powstające z niego przez zamianę x na y i na z.

Jeżeli $h_{12} = h_{23} = h_{13} = 0$, wtedy każda z powierzchni jednego układu jest ortogonalna do każdej powierzchni dwóch drugich układów, i odwrotnie; w tym przypadku układ nazywa się układem potrójnym ortogonalnym. Dla takich układów ma miejsce następujące twierdzenie zasadnicze Dupina:

W każdym układzie potrójnym ortogonalnym linia przecięcia dwóch powierzchni różnego układu jest linią krzywiznową dla obu Nadto:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby do dwóch układów powierzchni ortogonalnych można było dobrać układ trzeci ortogonalny do obydwóch, jest, by dwa pierwsze przecinały się wzdłuż linij krzywiznowych (Darboux, Ann. Éc. norm. 1866).

Każdy układ ∞^1 kul albo płaszczyzn należy do nieskończonej liczby układów potrójnych ortogonalnych.

Każdy układ powierzchni równoległych należy do układu potrójnego ortogonalnego: powierzchnie dwóch drugich układów są powierzchniami rozwijalnemi— miejscami normalnych wzdłuż linij krzywiznowych pierwszych powierzchni.

Dla układu potrójnego ortogonalnego wielkości H, jako funkcye wielkości ϱ, czynią zadość sześciu równaniom różniczkowym, zwanym równaniami Lame'go:

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial\varrho_j \partial\varrho_k} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial\varrho_j}\frac{\partial H_i}{\partial\varrho_k} + \frac{1}{H_j}\frac{\partial H_j}{\partial\varrho_k}\frac{\partial H_i}{\partial\varrho_j};$$

$$\frac{\partial}{\partial\varrho_i}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial\varrho_i}\right) + \frac{1}{\partial\varrho_k}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial\varrho_k}\right) + \frac{1}{H_j^2}\frac{\partial H_i}{\partial\varrho_j}\frac{\partial H_k}{\partial\varrho_j} = 0.$$

Te warunki, którym mają czynić wielkości H, są konieczne i dostateczne na to, aby układ był potrójnym ortogonalnym: jeżeli spełniają się, wtedy istnieje jeden i tylko jeden odpowiadający im układ potrójny ortogonalny.

Przez przekształcenie przestrzeni za pomocą promieni wodzących odwrotnych układ potrójny ortogonalny przechodzi na układ potrójny ortogonalny.

Jednym z najprostszych i najwięcej zbadanych układów potrójnych ortogonalnych jest t. zw. układ kwadryk spółogniskowych. Układ ten tworzą trzy powierzchnie ($a^2 > b^2 > c^2$):

$$\frac{x^2}{a^2+\varrho_1}+\frac{y^2}{b^2+\varrho_1}+\frac{z^2}{c^2+\varrho_1}=1, \quad (-c^2<\varrho_1<+\infty),$$

$$\frac{x^2}{a^2+\varrho_2}+\frac{y^2}{b^2+\varrho_2}+\frac{z^2}{c^2+\varrho_2}=1, \quad (-b^2<\varrho_2<-c^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2+\varrho_3}+\frac{y^2}{b^2+\varrho_3}+\frac{z^2}{c^2+\varrho_3}=1, \quad (-a^2<\varrho_3<-b^2),$$

z których pierwsza jest elipsoidą, druga hyperboloidą jednopowłokową, trzecia hyperboloidą dwupowłokową (patrz Rozdz. V, § 3).

Spółrzędne, odpowiadające temu układowi potrójnemu ortogonalnemu, nazywają się zwykle spółrzędnemi eliptycznemi (Lamé). Element liniowy w spółrzędnych eliptycznych otrzymuje się ze związku:

$$ds^2=\frac{1}{4}\left[\frac{(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_1-\varrho_3)}{(a^2+\varrho_1)(b^2+\varrho_1)(e^2+\varrho_1)}d\varrho_1^{\,2}+\frac{(\varrho_2-\varrho_3)(\varrho_2-\varrho_1)}{(a^2+\varrho_2)(b^2+\varrho_2)(c^2+\varrho_2)}d\varrho_2^{\,2}\right.$$

$$\left.+\frac{(\varrho_3-\varrho_1)(\varrho_3-\varrho_2)}{(a_2+\varrho_3)(b_2+\varrho_3)(c_2+\varrho_3)}d\varrho_3^{\,2}\right].$$

Teoryę spółrzędnych eliptycznych przestrzeni wprowadził najprzód Lamé (Mem. prés. V, 1833, Crelle II) w przypadku specyalnym spółrzędnych eliptycznych, a następnie w przypadku ogólnym spółrzędnych ortogonalnych (Crelle V, XVI; Leçons, sur les coordonnées curvilignes, Paryż 1859). O tymże przedmiocie pisali następnie: Aoust (Crelle LVIII, Ann. di mat. (1) VI, (2) II, III, V), Brioschi (tamże (2), I) Codazzi (tamże (1) VIII, (2) I, II, IV, V), Darboux (Ann. Éc. norm. 1866, 1878), Roberts (Crelle

LXII) i t. d. W nowszych czasach ogłosili prace: Bianchi (Giorn. di Batt. XXI, XXII, Ann. di mat. (2), XIII, XIV, XVIII, XIX, Rend. Lincei 1885, 1886, 1890; Mem. Lincei 1887 i t. d.). W tych pracach układami potrójnemi Weingartena nazywają się układy ortogonalne (odkryte przez Weingartena), zawierające układ powierzchni pseudosferycznych (albo też o krzywiznie dodatniej stałej), wszystkich o jednym promieniu. Ważną klasę tych układów zbadał Ribaucour (1870, Comp. rend. LXX). Twierdzenie zasadnicze Weingartena o tych układach podał w nocie swej Bianchi (Rend. Lincei 25 lutego 1883, 15 marca 1885). W dziele Darboux'a (Leçons sur les systémes orthog. etc., Paryż 1898) znajdujemy wykład zupełny teoryi układów potrójnych i spółrzędnych krzywoliniowych płaszczyzny.

---

§ 15.

Kongruencye prostych.

Mówiliśmy już w Rozdz. XIV o kongruencyach linij prostych w przestrzeni, zwanych także układami promieni, a będących układami ∞^2 prostych. Teorya tych utworów była wszakże badana nietylko ze stanowiska Geometryi linii prostej, ale—jako związana ściśle z teoryą powierzchni—także ze stanowiska Geometryi nieskończonostkowej; przytem rozważano kongruencye jakiekolwiek algebraiczne albo niealgebraiczne.

Wyobraźmy sobie kongruencyę, przeciętą pewną powierzchnią i za punkt początkowy na promieniu kongruencyi weźmy jeden z punktów, w którym promień spotyka powierzchnię. Niechaj x, y, z będą spółrzędne tego punktu; X, Y, Z dostawy kierunku promienia. Wybierzmy układ spółrzędnych krzywoliniowych u, v na powierzchni, połóżmy:

$$\Sigma\left(\frac{dX}{du}\right)^2 = E, \quad \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = F, \quad \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = G,$$

$$\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = e, \quad \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = f, \quad \Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = f', \quad \Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = g,$$

i wprowadźmy dwie formy różniczkowe zasadnicze:

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 = ds_1{}^2 = \Sigma(dX)^2,$$

$$e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2 = \Sigma\,dx\,dX,$$

z których pierwsza przedstawia kwadrat elementu liniowego w odwzorowaniu kulistem powierzchni, t. j. element liniowy krzywej, ktorą otrzymujemy na kuli o promieniu 1, prowadząc przez środek kuli promień równoległy do promienia kongruencyi i uważając punkt, w którym promień ten spotyka powierzchnię kuli, jako punkt, odpowiadający promieniowi kongruencyi. Jeżeli przez dp oznaczymy odległość najkrótszą (nieskończenie małą) pomiędzy promieniem (u, v) kongruencyi a promieniem nieskończenie blizkim $(u+du, v+dv)$, będzie:

$$dp = \frac{1}{\sqrt{EG-F_1}\,.\,ds_1}\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \\ e\,du + f\,dv, & f'\,du + g\,dv \end{vmatrix},$$

a odcięta r spodka tej odległości najkrótszej na promieniu u, v wyrazi się wzorem:

$$r = -\frac{e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Na każdym promieniu kongruencyi rozważamy: dwa punkty graniczne, dwa ogniska, punkt środkowy, a dla każdego promienia: dwie płaszczyzny główne, dwie płaszczyzny ogniskowe i t. d.; określenia tych utworów podaliśmy w Rozdz. XIV.

Odcięte r_1, r_2 dwóch punktów granicznych dają pierwiastki równania:

$$(EG-F^3)\,r^2 + \left[gE - (f+f')\,F - e\,G\right]r + eg - \left(\frac{f+f'}{2}\right)^2 = 0,$$

a odcięte ϱ_1, ϱ_2 dwóch ognisk pierwiastki równania:

$$(EG - F^2)\varrho^2 + \left[gE - (f+f')F + eG\right]\varrho + eg - ff' = 0.$$

Jeżeli ω oznacza kąt, jaki odległość najkrótsza dp promieni (u, v), $(u+du, v+dv)$, tworzy z odległością najkrótszą, której spodek przypada w punkcie granicznym, jest:

$$r = r_1 \cos^2\omega + r^2 \sin^2\omega \quad \text{(wzór Hamiltona)}.$$

Jeżeli $2d$ oznacza odległość dwóch punktów granicznych, 2δ odległość dwóch ognisk, γ kąt między płaszczyznami ogniskowemi, wtedy:

$$d^2 - \delta^2 = \frac{(f-f')^2}{4(EG-F^2)}; \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{d^2-\delta^2}}{d}; \quad \sin\gamma = \frac{\delta}{d}.$$

W punkcie P promienia kongruencyi poprowadźmy płaszczyznę π prostopadłą do promienia i nakreślmy na niej w około punktu P krzywą nieskończonostkową c, zamykającą pole A. Na kuli odwzorowującej, promienie, odpowiadające promieniom, wychodzącym z punktów krzywej c, wyznaczą krzywą kulistą, zamkniętą nieskończonostkową c' o polu A'. Granica stosunku $\frac{A'}{A}$ nazywa się gęstością kongruencyi w punkcie P.

Gęstość kongruencyi w punkcie P, położonym na promieniu l. równa się odwrotności iloczynu odległości punktu P od dwóch ognisk na promieniu l.

Pęk promieni, wychodzących z obwodu krzywej c, stanowi to, co nazywamy pękiem nieskończenie wązkim, promieni (unendlich dünnes Strahlenbündel); promień l jest jego osią. Jeżeli przetniemy ten pęk płaszczyzną, przechodzącą przez punkt P i prostopadłą do promienia zasadniczego l, otrzymamy jako przekrój krzywą c; jeżeli zaś przetniemy go płaszczyzną równoległą do poprzedniej i przechodzącą przez punkt P_1 promienia l, otrzymamy inny przekrój c_1. *Pola, ograniczone takiemi dwiema krzywemi, są odwrotnie proporcyonalne do gęstości w odpowiednich punktach* P, P_1. Jeżeli r jest odciętą punktu P na promieniu l, to *gęstość w punkcie* P *wyraża wzór:*

$$\frac{EG - F^2}{(EG-F^2)r^2 + [gE - (f+f')F + eG]r + eg - ff'}.$$

Gęstość jest zawsze rzeczywista; nadto, gdy ogniska są rzeczywiste, jest ona dodatnią wpunktach zewnątrz odcinka ognisk, ujemna w punktach wewnątrz tego odcinka; ma wartość ujemną największą w punkcie środkowym promienia; jeżeli ogniską są urojone, gęstość jest zawsze dodatnia i ma wartość największą w punkcie środkowym promienia.

W badaniu kongruencyi promieni rozważamy pięć powierzchni, a mianowicie: powierzchnie, utworzone z dwóch punktów granicznych, dwóch ognisk i przez punkty środkowe; nazywamy je powierzchniami *granicznemi*, powierzchniami *ogniskowemi*, powierzchnią *środkową*.

Promienie kongruencyi są stycznemi wspólnemi do dwóch powierzchni ogniskowych.

Nazywamy powierzchniami prostoliniowemi kongruencyi, powierzchnie prostoliniowe, których tworzącemi są promienie kongruencyi: *prostoliniowemi głównemi* zaś te prostoliniowe kongruencyi, których linie zwężenia zlewają się z miejscem punktów granicznych promieni, do nich należących.

Istnieją dwa szeregi prostoliniowych głównych.

Pomiędzy prostoliniowemi kongruencyi jest nieskończenie wiele rozwijalnych, a mianowicie *są dwa szeregi takich powierzchni.*

Nazywamy *kongruencyami normalnemi* kongruencye, których promienie są normalnemi do jednej i tej samej powierzchni.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby kengruencya była normalną, jest, aby ogniska zlewały się z punktami granicznemi, lub aby płaszczyzny ogniskowe były do siebie prostopadłe.

W kongruencyi normalnej dwie powierzchnie ogniskowe zlewają się z dwiema powłokami rozwiniętej dla powierzchni normalnej do kongruencyi; gęstość zaś w punktach tej powierzchni normalnej jest identyczna z krzywizną całkowitą tej powierzchni.

Jeżeli kongruencya normalna promieni świetlnych podlega pewnej liczbie odbić i załamań, to pozostaje zawsze koogruencyą normalną (Twierdzenie *Malusa-Dupina*; patrz też § 3 o kaustykach w Rozdz. XVII.

To sławne twierdzenie jest pokrewne z innem twierdzeniem, znalezionem później przez *Beltrami*'ego (Ricerche di analisi etc., Giorn. di Battagl. II, III), które orzeka, że *gdy wyobrazimy sobie promienie l kongruencyi normalnej, wychodzące z punktu powierzchni S, zbudujemy powierzchnię normalną do tej kongruencyi, przecinającą jej promienie l w punktach P, a następnie odkształcimy powierzchnię S w ten sposób, aby unosiła z sobą promienie kongruencyi w sposób niezmienny z nią związane, wtedy nowa otrzymana kongruencya będzie także normalną, miejscem zaś nowych położeń punktów P będzie powierzchnią do tej kongruencyi ortogonalna.*

Jeżeli w kongruencyi promieni tak odległość ognisk, jak i odległość punktów granicznych, jest stała, wtedy dwie powierzchnie ogniskowe są powierzchniami pseudosferycznemi o promieniu równym odległości punktów granicznych (*Bianchi*, Ann. di mat. XV). Kongrucye takie *Bianchi* nazwał *pseudosferycznemi*.

Kongruencya, dla której jest:

$$e : \frac{f+f'}{2} : g = E : F : G,$$

nazywa się kongruencyą izotropową Ribaucoura. Powierzchnia, obwiedziona przez płaszczyzny prostopadłe do promieni kongruencyi izotropowej w punktach środkowych jest powierzchnią o polu najmniejszem (Ribaucour).

Monge i jego uczniowie zajmowali się wraz z teoryą powierzchni i kongruencyami, utworzonemi z normalnych do powierzchni; Malus odkrył podane wyżej twierdzenie o tych kongruencyach dla przypadku, w którym mamy początkowo układ promieni, wychodzących z jednego punktu (J. Éc. pol. XIV, cah. 1808); twierdzenie to uzupełnił później Dupin (Appl. de géom. etc. pour faire suite aux Développ. de géom. Paryż 1822). Kongruencye ogólne badali: Gergonne, Quetelet, a zwłaszcza Hamilton; później badanie to podjął na nowo i szczęśliwie rozwinął Kummer (Crelle LVII, 1880, Berliner Monatsber. 1859—60). Po tych pracach nastąpiło wiele innych; najnowszemi są prace: Weingartena (Crelle XCVIII), Bianchi'ego (cytowane wyżej), Guicharda (Ann. Éc. norm. (3) VI, Comptes rendus 1890—92).

ROZDZAŁ XVII.

GŁÓWNE SPOSOBY TWORZENIA I PRZEKSZTAŁCANIA KRZYWYCH, WYSPECYALIZOWANE METRYCZNIE. GEOMETRYA KRZYWYCH SPECYALNYCH.

---

§ 1.

Krzywe i powierzchnie odwrotne i Desargues'a. Przekształcenie za pomocą promieni odwrotnych. Przekształcenie Desargues'a.

W § 5 Rozdziału VI była już mowa o tem, że przekształcenie za pomocą promieni odwrotnych lub inwersyę otrzymać można jako przypadek szczególny przekształcenia dwuwymiernego kwadratowego, jeżeli trzy punkty podstawowe przekształcenia umieścimy w ten sposób: dwa w punktach kołowych płaszczyzny, trzeci zaś w początku spółrzędnych kartezyańskich.

Geometrycznie przekształcenie to możemy określić w sposób następujący:

Niechaj będzie na płaszczyźnie koło o promieniu R, mające środek w początku O spółrzędnych; każdemu punktowi płaszczyzny, którego promieniem wodzącym jest r, argumentem φ, odpowiadać ma punkt o promieniu wodzącym $\frac{R^2}{r}$ i o tymże argumencie φ. Promień R nazywa się modułem inwersyi, punkt O jest biegunem lub środkiem.

Dla wykonania przekształcenia przez promienie odwrotne w przestrzeni przyjmujemy kulę podstawową o promieniu R.

Stosując te przekształcenia do krzywej albo do powierzchni, otrzymujemy krzywe albo powierzchnie, będące odwrotnemi względem danych.

Punktowi O odpowiada prosta w nieskończoności albo płaszczyzna w nieskończoności.

Jedynemi punktami, odpowiadającemi samym sobie, są punkty okręgu albo powierzchni kuli.

Każda prosta, przechodząca przez biegun O, odpowiada samej sobie.

Prostej w ogólności odpowiada okrąg koła, przechodzący przez punkt C; w przypadku przekształcenia płaskiego osią pierwiastną obu kół, t. j. koła o promieniu O i koła, przechodzącego przez punkt O, jest prosta dana.

Kołu odpowiada inne koło, mające z kołem podstawowem (w przypadku przekształcenia płaskiego) tę samą oś pierwiastną, co koło dane.

Łatwo rozumieć, w jaki sposób twierdzenia te rozciągają się na przypadek przekształcenia w przestrzeni.

Najważniejszą własnością rozważanego przekształcenia jest ta, że jest ono przekształceniem podobnem, t. j. nie zmieniającem kątów.

Godnem uwagi jest twierdzenie:

Normalna do krzywej w punkcie P i normalna do krzywej odwrotnej w punkcie Q spotykają się w punkcie prostopadłej, wystawionej do prostej PQ w punkcie środkowym.

Krzywa albo powierzchnia, mająca tę własność, iż przekształca się na samą siebie przy pomocy pewnego szczególnego przekształcenia przez promienie odwrotne, nazywa się zwykle analagmatyczną.

Krzywe skośne analagmatyczne rzędu 4-go lub cykliki (jak je nazywa Darboux: Sur une classe remarquable etc., Paryż, wyd. 2-gie, 1896) są przecięciami kuli i kwadryki

Powierzchnie analagmatyczne rzędu 4-go są cyklidami (patrz Rozdz. XII, § 7). Moutard dowiódł, że każda powierzchnia analagmatyczna jest obwiednią szeregu kół ortogonalnych do koła stałego, mającego środek swój w środku inwersyi a promień równy modułowi tejże (patrz Rozdz. XII, § 7). Nazywamy przekształceniem Desargues'a przekształcenie kwadratowe, wyspecyalizowane metrycznie według następującej konstrukcyi geometrycznej.

Niechaj będzie dany trójkąt podstawowy ABC; punkt odpowiadający punktowi P otrzymujemy, łącząc punkt P z trzema wierzchołkami trójkąta, kreśląc proste symetryczne do prostych AP, BP, CP względem dwusiecznych kątów trójkąta; punkt spotkania tych trzech nowych linij będzie właśnie punktem szukanym. Krzywa, otrzymana z danej za pomocą takiego przekształcenia, nazywa się argezyaną (arguesienne) danej.

Koło, opisane na trójkącie ABC, jest argezyaną prostej w nieskończoności płaszczyzny; argezyana średnicy tego koła jest hyperbolą równoboczną.

O tem przekształceniu pisali: Cayley (J. de Liouv. 1849), Mathieu (Nouv. Ann. 1865, str. 393, 481, 529), Saltel (Mém. de Belg. 1872) i inni. Ten ostatni autor nadał powyższą nazwę przekształceniu temu, badanemu zresztą dawniej już przez Steinera i Magnusa.

§ 2.

Spodkowa krzywej płaskiej i powierzchni.

Nazywamy spodkową (także spodkową dodatnią lub prostą) punktu P względem krzywej płaskiej miejsce geometryczne spodków prostopadłych, poprowadzonych z punktu danego do stycznej linii krzywej. Krzywa dana nazywa względem utworzonej krzywą spodkową ujemną lub odwrotną.

Definicye analogiczne można utworzyć dla spodkowych powierzchni danej.

Normalna w punkcie do spodkowej przechodzi przez punkt środkowy prostej, łączącej punkt stały z uważanym punktem krzywej.

Spodkowa punktu P względem krzywej C jest krzywą, powstającą przez przekształcenie za pomocą promieni odwrotnych z krzywej biegunowej dla krzywej C, w odniesieniu do jakiegokolwiek koła, opisanego ze środka P.

Jeżeli oznaczymy przez s', ϱ' łuk i promień krzywizny krzywej spodkowej, przez s, ϱ też wielkości dla krzywej danej, przez r odległość punktu P od punktu Q krzywej, przez θ kąt, jaki prosta PQ tworzy ze styczną w punkcie Q, wtedy równanie wewnętrzne spodkowej znajdziemy, eliminując s z równań:

$$s = \int \frac{r}{\varrho}\, ds, \qquad \varrho' = \frac{r^2}{2r - \varrho \sin\theta}.$$

Steiner (Crelle XXI) podał następujące twierdzenie o spodkowych:

Jeżeli wykreślimy spodkową krzywej zamkniętej i bez przegięć względem jakiegokolwiek punktu P, a następnie wyobrazimy sobie, że ta krzywa w stałem połączeniu z punktem P toczy się po pewnej prostej tak, że punkt P opisuje t. zw. linię cykloidalną lub ruletę (patrz § 6), wtedy łuk tej krzywej równać się będzie odpowiadającemu mu łukowi spodkowej, a pole, zamknięte pomiędzy ruletą a prostą, będzie równe podwójnemu polu, ograniczonemu linią spodkową.

Nadto: Jeżeli spodkowa względem punktu P toczy się po rulecie, opisanej przez punkt P

w sposób wyżej wskazany, wtedy miejscem punktu P będzie prosta (Twierdzenie Habicha).

Odwrotność promienia wodzącego krzywej płaskiej równa się różnicy odwrotności promieni krzywizny spodkowej i rulety tej krzywej; spodkowa jest tu wyznaczona przez stosunek początkowy promieni wodzących, ruleta zaś jest ruletą, utworzoną ruchem tego punktu, stale związanego z krzywą, która toczy się po prostej.

O związku pomiędzy spodkową i kaustyką patrz § 3.

§ 3

Krzywe i powierzchnie kaustyczne.

Kaustyką krzywej płaskiej nazywamy obwiednią promieni odbitych od tej krzywej albo załamanych w niej [1]), gdy promienie padające na krzywą wychodzą z jednego punktu w skończoności albo w nieskończonosci (punktu promieniowania). Odróżniamy według powyższego kaustyki przez odbicie czyli katakaustyki lub kaustyki katoptryczne i kaustyki przez załamanie czyli diakaustyki lub kaustyki dioptryczne.

Można uogólnić pojęcie kaustyki w ten sposób, że zamiast rozważania promieni padających, wychodzących tylko z jednego punktu, wyobrażamy sobie ogólnie, że są normalnemi do krzywej

[1]) Jak wiadomo z fizyki elementarnej — jeżeli dany jest promień padający w punkcie P krzywej, to promieniem odbitym od krzywej jest promień tworzący ten sam kąt z normalną do krzywej w punkcie P_1 co promień padający; nazywa się załamanym, gdy stosunek wstaw kątów, jakie ten promień padający i odbity tworzą z tąż normalną do krzywej jest stały; stosunek ten nazywa się spółczynnikiem (skaźnikiem) załamania.

danej, t. j. że tworzą to, co nazywamy układem normalnym. Można też oczywiście rozważania te rozciągnąć na przestrzeń i wyobrazić sobie układ podwójnie nieskończony promieni padających (wychodzących z punktu albo normalnych do powierzchni), t. j. tak zwaną kongruencyę normalną promieni padających (patrz Rozdz. XVI); dalej mając jakąkolwiek powierzchnię, rozważać miejsce punktów spotkania promieni od nich odbitych lub w niej załamanych i nieskończenie blizkich.

Twierdzenie Malusa-Dupina, dotyczące normalnych kongruencyj promieni (p. Rozdz. XVI), zawiera w sobie jako przypadek szczególny twierdzenie następujące: mając na płaszczyźnie układ normalny promieni), t. j. normalny do pewnej krzywej), otrzymujemy zawsze, po pewnej liczbie odbić i załamań, znowu system normalny, t. j. istnieje zawsze krzywa, do której te promienie odbite i załamane są normalnemi.

W ten sposób kaustyki płaskie są rozwiniętemi pewnych krzywych, które Quetelet nazwał kaustykami wtórnemi lub antykaustykami.

Gergonne podał następujące twierdzenia ogólne:

I. Kaustyka przez odbicie dla układu normalnego promieni jest rozwiniętą krzywej, którą otrzymujemy jako obwiednią kół, mających środek na krzywej odbijającej i stycznych do krzywej, do której promienie padające są normalnemi.

II. Kaustyka przez załamanie dla układu normalnego promieni jest rozwiniętą krzywej, którą otrzymujemy jako obwiednią kół, mających środki na krzywej załamującej, a których promienie są w stosunku $\frac{1}{n}$ (n jest spółczynnikiem załamania) do odległości tychże środków od krzywej, do której wszystkie promienie padające są normalnemi.

Jeżeli promienie wychodzą z punktu P w odległości skończonej, a za krzywą do nich normalną obierzemy okrąg o promieniu zero ze środkiem w punkcie P, będziemy mieli twierdzenie Queteleta; jeżeli P znajduje się w odległości skończonej, a za krzywą normalną obierzemy okrąg ze środkiem w punkcie P i o promieniu jakimkolwiek, albo też prostą prostopadłą do kierunku promieni padających, będziemy mieli twierdzenie, które znalazł Gergonne, a przed nim Sarrus.

Uogólnienie tych twierdzeń w przypadku powierzchni kaustycznych, dla którego antykaustyki mogą być uważane jako obwiednie kul, podał Gergonne w pracy, ogłoszonej w tomie XV „Annales de mathématiques“ (p. 13, 307).

Kąt, utworzony przez styczną do kaustyki wtórnej i przez promień wodzący, poprowadzony z punktu promieniowania, równa się kątowi, jaki styczna do krzywej odbijającej albo załamującej tworzy z promieniem wodzącym, poprowadzonym także z punktu promieniowania.

Kąt, zawarty pomiędzy promieniami wodzącemi kaustyki wtórnej a promieniami krzywej odbijającej albo załamującej, równa się kątowi załamania.

Spodkowa punktu stałego względem krzywej danej jest kaustyką wtórną przez odbicie krzywej podobnej do danej, w założeniu, że punkt promieniowania znajduje się w punkcie stałym (Dandelin, Mém. Ac. de Belgique IV; Genocchi, Ann. di Tortolini VI, str. 117, E. Weyr, Zeitchr für Math. 1869, str. 376).

Tschirnhausen (1682) pierwszy rozważał kaustykę płaską, utworzoną przez promienie równoległe, odbite od koła, ale Cassini, Mariotte, De la Hire, referenci Akademii nauk w Paryżu, uznali badanie jego za błędne; później kaustykami zajmowali się: Bernoulli'owie, Hôpital i inni.

Malus w r. 1810 badał pierwszy teoryę ogólną powierzchni kaustycznych i znalazł piękne twierdzenia, które uogólnił dopiero w r. 1822 Dupin (Ann. de Georgonne XIV, str. 129). Twierdzenia o antykaustykach, gdy promienie padające wychodzą z jednego punktu, przewidziane przez Gergonne'a w r. 1815 (Ann. de Gerg. IX, str. 283, XI str. 229, XIV str. 1) znalazł Quetelet najprzód w przypadku szczególnym, gdy krzywa dana jest kołem (tamże XV, str. 205), a następnie w przypadku krzywej jakiejkolwiek (Mém. Ac. Bruxelles III, str. 89). Sarrus badał przypadek promieni padających równoległych, Gergonne podał formę ogólniejszą konstrukcyi, znalezionej przez Queteleta, a następnie znalazł twierdzenie ogólniejsze, wyżej podane (dla przypadku jakiegokolwiek układu normalnego promieni padających). W pracy Gergonne'a (Annales XV, str. 345 i nast) podana jest historya tych badań i także wiadomość o rezultacie, otrzymanym przez Sarrusa. Inne prace o tym przedmiocie ogłosili: Timerman (Corresp. math. I, str. 336 o powierzchniach antykaustycznych), Cayley (Phil. Trans. CXLVIII, str. 273) i t. d. Bibliografię o kaustykach znajdujemy w „l'Intermédiaire des mathématiciens" 1895, str. 321.

---

§ 4.

Krzywe i powierzchnie równoległe. Krzywe i powierzchnie muszlowe.

Krzywą równoległą do krzywej płaskiej danej nazywamy obwiednią prostych prostopadłych do normalnej do krzywej i odległych od niej w obu kierunkach na odległość stałą równą $\pm k$. Tak więc krzywe równoległe są także krzywemi równoodległemi

Dwie krzywe płaskie równoległe mają ten sam środek krzywizny.

Krzywa równoległa do danej rozpada się na dwie części, z których jedna odpowiada odległości $+k$, druga odległości $-k$; w ogóle zatem mamy dwie gałęzie tej samej krzywej.

O teoryi krzywych równoległych patrz Salmon-Fiedler Ebene Curven. etc. § 118 i nast., Cesàro, Geom. intrinseca str. 29 i t.d.

W sposób analogiczny można określić i powierzchnie równoległe.

Nazywamy konchoidami lub krzywemi muszlowemi krzywe, które powstają w sposób następujący: Niechaj będzie O punktem na płaszczyźnie, P—punktem krzywej danej na promieniu wodzącym OP; weźmy z jednej i drugiej strony punktu P dwa odcinki długości $\pm k$. Miejscem końców tych odcinków jest krzywa muszlowa.

W sposób analogiczny określamy powierzchnie konchoidalne.

Łatwo wykreślić normalną do konchoidy, dość bowiem przez punkt O poprowadzić prostopadłą do promienia wodzącego i znaleść punkt spotkania S tej prostopadłej z normalną do krzywej; normalne do konchoidy w punktach, odpowiadających punktowi P, przechodzą przez punkt S. Innemi słowy: konchoida ma w każdym punkcie tę samą podnormalną biegunową, co krzywa dana.

O konstrukcyi środka krzywizny konchoidy patrz l'Interm. des math. 1894 str. 165; 1895, str. 112, 224.

Krzywą muszlową można też określić w sposób następujący: Niechaj będą trzy krzywe f, φ, ψ; poprowadźmy styczną do krzywej f, która spotyka krzywe φ, ψ w dwóch punktach A, B; na tej stycznej odetnijmy, poczynając od punktu styczności, z jednej i drugiej strony dwa odcinki równe AB; miejscem końców tych odcinków będzie krzywa muszlowa.

§ 5.

Krzywe dzielnicze lub dzielcze.

Nazywamy dzielniczemi lub dzielczemi krzywe, będące miejscem przecięcia A dwóch prostych, obracających się z prędkościami jednostajnemi około dwóch punktów stałych P, P'.

Jeżeli stosunek dwu prędkości dwóch obrotów jest $n:n'$ (gdzie $n' < n$), wtedy kąt dopełniający dla kąta $AA'P$ jest do kąta PAA' w stosunku $n:n'$.

Krzywa dzielnicza przechodzi $n-1$ razy przez punkt P, $n'-1$ razy przez punkt P' i n' razy przez punkty kołowe płaszczyzny.

W przypadku $n'=1$ albo $n'=n-1$ mamy krzywe jednobieżne; w przypadku $n'=1$ i $n=3$ krzywe trójdzielcze Maclaurina, w przypadku $n'=2$, $n=3$ ślimakową Pascala (patrz § 11), którą można nazwać krzywą sześciodzielczą.

Nazwa krzywych dzielniczych pochodzi stąd, że pozostają one w związku z zagadnieniem o dzieleniu kąta; i tak, jest $n'=1$, to mogą one służyć do podziału kąta na n części równych.

Patrz o tych krzywych pracę Schoutego (Journal desmath. spéc. 1885).

§ 6.

Krzywe cykloidalne lub rulety. Glisety.

Nazywamy krzywemi cykloidalnemi lub z francuska ruletami krzywe, utworzone ruchem punktu płaszczyzny krzywej, która toczy się bez ślizgania po innej krzywej stałej, zwanej podstawą rulety.

Nazywamy glisetami krzywe, utworzone ruchem punktu płaszczyzny krzywej, która nie zmieniając swej postaci, porusza się, pozostając wciąż styczną do krzywych danych albo przechodząc przez punkty dane.

Jeżeli $x=yf(y)$ jest równaniem glisety, t. j. miejscem punktu P płaszczyzny krzywej, która jest stale styczna do prostej stałej w punkcie stałym, wtedy $\frac{dy}{dx}=-f(y)$ będzie równaniem różniczkowem rulety tego punktu, gdy taż krzywa toczy się po prostej (B r o c a r d, Nouv. Corresp. II. 1876, str. 377, 383)

Normalna do rulety przechodzi przez punkt M styczności pomiędzy krzywą stałą a krzywą ruchomą.

Środek krzywizny rulety znajdujemy następującym sposobem. Połączmy punkt P rulety ze środkiem krzywizny krzywej ruchomej aż do spotkania w punkcie R z prostopadłą, spuszczoną z punktu M na MP Połączywszy R ze środkiem krzywizny krzywej stałej, otrzymamy środek krzywizny na przecięciu tej prostej z prostą PM.

Inną własność rulety w związku ze spodkową podaliśmy w § 3.

Pierwsza z badanych rulet była c y k l o i d ą w ł a ś c i w ą (patrz § 12) utworzoną ruchem punktu koła, gdy podstawą jest prosta. Monografię dość kompletną rulet i gliset wydał B e s a n t (Notes on rulettes and glissetes, Cambridge 1870); patrz też rozmaite artykuły w Nouv. Ann. 1871 i wskazówki zawarte w nowej książce litografowanej B r o c a r d a (Notes de bibliogr. des courbes géometr. Bar le Duc 1893).

§ 7.

Powierzchnie obrotowe, walcowe stożkowe, konoidy.

R ó w n a n i e (w p o s t a c i s k o ń c z o n e j) p o w i e r z c h n i o b r o t o w e j (o s i ą o b r o t u j e s t o ś z) p r z e d s t a w i a s i ę t a k:

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

g d z i e φ j e s t s y m b o l e m f u n k c y i d o w o l n e j.

J e ż e l i $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, t o r ó w n a n i e o p o c h o d n y c h c z ą s t k o w y c h p o w i e r z c h n i o b r o t o w e j b ę d z i e p o s t a c i:

$$py - qx = 0.$$

Równanie powierzchni walcowej ma postać:

$$\varphi(x-az, y-bz)=0,$$

a równanie różniczkowe tejże powierzchni:

$$ap+bq=1.$$

Równanie powierzchni stożkowej przedstawia się tak:

$$\varphi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0;$$

x_0, y, z_0 są spółrzędne wierzchołka; równanie różniczkowe tej powierzchni jest:

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)=z-z_0.$$

Nazywamy konoidą powierzchnię, utworzoną ruchem prostej, opierającej się na prostej stałej i równoległej do płaszczyzny stałej. Jeżeli prostą daną jest oś z, a płaszczyzną daną płaszczyzna xy, wtedy równanie różniczkowe konoidy jest:

$$px+qy=0,$$

a równanie w postaci skończonej:

$$z=\varphi\left(\frac{y}{z}\right).$$

Ogólnie, równanie różniczkowe konoidy jest;

a równanie w postaci skończonej:

$$z=\varphi\left(\frac{y-bz}{x-az}\right).$$

§ 8.

Stożkowe.

Do rozważań geometrycznych i analitycznych o stożkowych, w Rozdziale IV podanych, dołączamy tu niektóre wyniki metryczne, zależne specyalnie od ich geometryi nieskończonostkowej.

Równanie wewnętrzne tych krzywych podaliśmy już w Rozdziale XVI.

Spodkowa ogniska stożkowej jest okręgiem koła.

Promień krzywizny w punkcie elipsy o półosiach a i b jest proporcyonalny do sześcianu normalnej (kończącej się na osi większej).

Rozwinięta elipsy o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ ma równanie postaci:

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Pole całej elipsy wynosi πab, pole jej rozwiniętej $\frac{3}{8} \pi ab$.

Długość łuku elipsy przedstawia całka eliptyczna gatunku 2-go.

$$s = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \, . \, d\varphi \, ; \qquad \left(e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right),$$

gdzie φ jest t. zw. anomalią, t. j. kątem, danym przez wzory $x = x \sin\varphi$, $y = b\cos\varphi$. Jeżeli nakreślimy koło o promieniu a, spółśrodkowe z elipsą, to wtedy φ będzie kątem, jaki tworzy z osią y promień wodzący punktu koła o spółrzędnych x i $\frac{a}{b} y$, jeżeli x i y są spółrzędnemi punktu elipsy.

Obwód całej elipsy można wyrazić przez szereg:

$$2\pi a\left\{1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2\ 4.6}e^3\right)^2-\ldots\right\}.$$

Jeżeli dany jest łuk elipsy, to można znaleść inny jej łuk taki, aby różnica tych dwóch łuków była wyprostowywalną (t. j. dała się wyrazić za pomocą odcinka prostej (Fagnano Prod. mat. 1750, t. II)

Weźmy mianowicie dwa punkty P i Q na kwadrancie elipsy takie, aby ich anomalie φ, ψ były połączone związkiem $\operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a}$; oznaczmy przez A i B końce kwadrantu; poprowadźmy styczne do elipsy w punktach P i Q, ze środka zaś elipsy prostopadłe do tych stycznych, i niechaj P_1 i Q_1 będą spodkami prostopadłych; wtedy różnica pomiędzy łukami PB i QA jest równa długości PP_1 lub takiejże długości QQ_1.

Punkt Q, gdy dany jest punkt P, można otrzymać za pomocą następującej konstrukcyi Eulera (Nova Comm. Petr. 1761). Poprowadźmy w punkcie P styczną aż do spotkania osi małej (przechodzącej przez B) w punkcie R; weźmy na stycznej długość $RPM=a$; punkt kwadrantu, mający tę samą odciętą co punkt M, jest szukanym punktem Q. (Patrz co do tego noty II i III w końcu dzieła Ennepera, Ellipt. Funct. Halla, 1890),

Łuk hyperboli o równaniu $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ wyraża się wzorem:

$$a\left[\frac{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{k\cos\varphi}-\frac{1}{k}\int_0^{\varphi}d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+\frac{k'^2}{k}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right],$$

gdzie φ jest anomalią, określoną jak wyżej; $k^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}$, $k'^2=\frac{b^2}{a^2+b^2}$; we wzorze tym mamy całki eliptyczne gatunku 1-go i 2-go.

Fagnano znalazł dla hyperboli twierdzenie analogiczne do powyższego o wyprostowywalności sumy dwóch łuków, z których jeden jest dowolny.

Twierdzenie Landena (Phil. Trans. 1775) wyraża łuk hyperboli za pomocą dwóch łuków elips.

Granica różnicy pomiędzy długością asymptoty, liczoną od środka aż do punktu P', a długością łuku hyperboli, liczoną od wierzchołka A aż do punktu P, mającego tę samą odciętą co punkt P' (osi położone są, jak wyżej), jest wielkością określoną, gdy P oddala się do nieskończoności.

Pomiędzy innemi badaniami, odnoszącemi się do łuków elips i hyperbol, wymieniamy: Legendre'a, (Traité I, str. 46), Küpper (Crelle LV, LXIII).

Niechaj będzie hyperbola równoboczna o równaniu (w odniesieniu do asymptot) $xy = m^2$. Pole, zawarte pomiędzy łukiem krzywej a asymptotą $y=0$, równa się $m^2 \log \frac{\beta}{\alpha}$, gdzie β i α są odległości końców łuku od drugiej asymptoty $x=0$.

Dla $m=1$, $\alpha=1$ otrzymujemy: pole, zawarte pomiędzy łukiem krzywej, liczonym od wierzchołka, a asymptotą, równa się logarytmowi neperowemu odległości końca łuku od drugiej asymptoty.

Inne własności hyperboli równobocznej znaleźć można w książce Milinowskiego (Elem. synt. Geom. der gleichseitigen Hyperbel, Lipsk 1883).

W paraboli promień krzywizny równa się podwójnemu odcinkowi normalnej, zawartej pomiędzy punktem danym a kierownicą.

Rozwinięta paraboli stożkowej jest parabolą półsześcienną, zwaną także parabolą

Neila; jeżeli $y^2 = 2px$ jest równaniem paraboli, to równaniem rozwiniętej będzie:

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^2.$$

Łuk paraboli, liczony od wierzchołka, wyraża się wzorem:

$$s = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{1}{2}p \log \frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}.$$

---

§ 9.

Cysoidy. Krzywa sześcienna lub zwrotnica (versiera) *Maryi Agnesi. Trójdzielcza Maclaurina. Strofoida. Liść.*

Najważniejszą pomiędzy cysoidami jest krzywa, zwana cysoidą Dioklesa, który za pomocą niej chciał rozwiązać zagadnienie o podwojeniu sześcianu, to jest t. zw. zagadnienie delijskie (patrz Cantor, Gesch. d. Math. I, str. 302—306). Starożytni stosowali też tę krzywą do rozważania zagadnienia o znalezieniu dwóch średnich proporcyonalnych (patrz Newton, Arithm. univ. Lugd, Batav. 1732, str. 231). Krzywa ta powstaje w sposób następujący: Mamy kąt prosty stały, którego jedno ramie OP jest długości stałej $= 2a$; drugi kąt prosty ruchomy ma jedno ramię, przechodzące przez P, koniec zaś drugiego ramienia, mającego długość stałą $2a$; przesuwa się po drugiem ramieniu pierwszego kąta prostego. Miejscem punktu środkowego na ramieniu o długości $2a$ jest cysoida (Newton).

Równanie tej krzywej jest:

$$x^3 = y^2(2a-x).$$

Punkt $x=0$ jest ostrzem; prosta $x=2a$ jest asymptotą. Krzywa jest zawsze wypukła względem osi x. Krzywa przechodzi przez dwa punkty kołowe (umbiliki) płaszczyzny (jest krzywą cykliczną).

Krzywą można też utworzyć sposobem następującym: Nakreślmy koło o średnicy $2a$ i niechaj AB będzie jego średnicą; niechaj BT będzie styczną do koła w punkcie B; z punktu A prowadźmy wszelkie proste AMN, przecinające okrąg M, styczną zaś BT w punkcie N. Jeżeli weźmiemy $AP=MN$, to miejscem punktu P będzie cysoida.

Pole zawarte pomiędzy krzywą a asymptotą (którą jest prosta BT), równa się potrojonemu polu koła, które służy do utworzenia krzywej.

Cysoida jest spodkową paraboli względem jej wierzchołka.

Można kreślić cysoidy pochyłe w ten sam sposób, w jaki kreślimy cysoidę Dioklesa przy pomocy koła; w tym celu zamiast średnicy koła bierzemy jego cięciwę. Jeżeli zaś zamiast koła weźmiemy elipsę, otrzymamy cysoidę, zwaną cysoidą Zahrádnika (Grun. Arch. LVI, 8; Nouv. Corresp. math. 1874—1875, str. 86).

Ta cysoida jest zawsze krzywą sześcienną wymierną.

Niechaj będzie okrąg koła i dwie jego średnice do siebie prostopadłe. Z końca O jednej średnicy prowadzimy prostą, przecinającą okrąg w punkcie A, drugą zaś średnicę w punkcie B; z punktów A i B prowadzimy równoległe do dwóch średnic, spotykające się w punkcie P. Miejscem punktu P jest krzywa sześcienna lub zwrotnica (versiera) Maryi Agnesi. Jest to sześcienna z punktem podwójnym w nieskończoności; równaniem jej jest:

$$y^2x + r^2(x-2r) = 0,$$

gdzie r jest promień koła, służącego do konstrukcyi.

Aby mieć styczną do krzywej w punkcie P, robimy następującą konstrukcyę. Przez punkt A prowadzimy styczną do koła aż do przecięcia z średnicą drugą w punkcie M i po stronie przeciwległej bierzemy $AM' = AM$; na prostej OAB bierzemy ze strony przeciwległej od A względem O długość $OR = AB$; z punktu R prowadzimy prostą równoległą do średnicy pierwszej aż do spotkania się w punkcie S z prostą, przechodzącą przez A i równoległą do średnicy drugiej. Z punktu S prowadzimy równoległą do RM' aż do spotkania w punkcie K ze średnicą pierwszą. Prosta, poprowadzona przez K równoległe do średnicy drugiej, spotyka styczną AM do koła w punkcie T, który—połączony z punktem P — daje styczną do krzywej.

Styczna do koła w punkcie O jest asymptotą krzywej.

Pole, zawarte pomiędzy krzywą a jej asymptotą, jest równe poczwórnemu polu koła, które służy do konstrukcyi.

Zwrotnica i to koło, obracając się około asymptoty, wytwarzają dwie bryły, z których pierwsza ma objętość dwa razy większą niż druga.

Krzywą tę badała Agnesi w swoich „Inst. analitiche“, Medyolan 1748. Co do tego i innych krzywych analogicznych, które niesłusznie mieszano z zwrotnicą, patrz artykuł Lorii (w Bibl. math. 1897, str. 7). Inny sposób konstrukcyi stycznych znaleść można u Longchampsa, Géom. de la règle, str. 111.

Nazywamy trójdzielczą Maclaurina krzywą, której równaniem jest:

$$x(x^2+y^2) = \frac{r}{2}(y^2-3x^2).$$

Kreślimy ją w sposób następujący: Niechaj będzie koło o promieniu r i środku C, ze średnicą OCO' i prostą do niej prostopadłą w punkcie środkowym linii OC; z końca O średnicy prowadzimy prostą, przecinającą w punkcie A koło, w punkcie B

prostą prostopadłą do średnicy; bierzemy po stronach przeciwległych $OP = AB$; miejscem punktu P jest trójdzielcza.

Krzywa ta jest krzywą sześcienną z punktem podwójnym w punkcie O.

Styczna w punkcie A do koła spotyka w punkcie M prostą prostopadłą do średnicy; jeżeli w kierunkach przeciwległych weźmiemy $AT = AM$, będzie TP styczną do krzywej.

Krzywa ta jest krzywą dzielczą (patrz § 5). Co do innych jej własności odsyłamy do pracy Brocarda, cytowanej w końcu § 6. O rektyfikacyi tej krzywej za pomocą funkcyj eliptycznych patrz Longchamps, Compt. rend. 1887.

Jeżeli w konstrukcyi poprzedzającej, zamiast prostej prostopadłej do średnicy, przechodzącej przez środek prostej OC, weźmiemy prostą prostopadłą do średnicy i przechodzącą przez punkt C (środek), wtedy krzywa, którą otrzymujemy przy pomocy takiej konstrukcyi, jest strofoidą prostokątną (zwaną także logocykliką); równaniem jej jest

$$r\,(x^2 - y^2) = x\,(x^2 + y^2).$$

Jest to krzywa z punktem podwójnym w punkcie O. Styczną do niej otrzymujemy przy pomocy podobnej konstrukcyi, jak dla trójdzielczej.

Strofoida jest spodkową paraboli względem spodka kierownicy; wierzchołek paraboli jest w punkcie C; kierownica jest styczną w punkcie O do koła.

Jeżeli rzucimy punkt C ortogonalnie na promień wodzący OP, to rzut będzie punktem środkowym odcinka PB.

Jeżeli w konstrukcyi powyższej, zamiast prostopadłej przechodzącej przez punkt C, weźmiemy prostą pochyłą do średnicy, otrzymamy strofoidę pochyłą albo ogniskową Queteleta, którą można też uważać jako spodkową paraboli względem punktu jej kierownicy.

Bibliografię, historyę i inne własności tej krzywej znaleść można: w nocie Tortolini'ego (Nouv. Ann. 1861, str. 82), w nocie

Lorii (Bull. di Bibliogr. delle scienze matem. 1878, str. 1), w pracy Brocarda (cyt. w § 6); patrz także art. Schoutego (Crelle, IC) i wiadomość w Interm. des math. 1895 str. 425, 1896 str. 278.

Liść Descartes'a jest krzywą sześcienną wymierną, bardzo podobną do trójdzielczej i do strofoidy; równaniem tej krzywej jest:

$$x^2 + y^2 = 3rxy;$$

albo, gdy ją okrócimy około osi o 45^0:

$$r(x^2 - y^2) = x(x^2 + 3y^2).$$

Kreślimy ją geometrycznie, podobnie jak wyżej strofoidę prostokątną: Jeżeli na promieniu wodzącym OPB weźmiemy punkt Q, sprzężony harmonicznie z punktem O względem PB, to miejscem punktu Q będzie liść Descartes'a.

Styczną do krzywej w Q otrzymujemy, prowadząc styczną do strofoidy w punkcie P (patrz wyżej(i łącząc następnie Q z punktem, w którym ta styczna spotyka średnicę drugą.

Krzywę tę badali Roberval, który nakreślił jej postać fałszywie (stąd jej nazwa) i Descartes. Szczegóły w cytowanej pracy Brocarda.

§ 10.

Owale Cassini'ego. Lemniskata. Ósemka

Nazywamy owalem Cassini'ego, kasynoidą lub elipsą Cassinie'go krzywą, dla której iloczyn odległości jej punktu od dwóch punktów stałych (ognisk) jest stały.

Jeżeli $2a$ jest odległością punktów stałych, b^2 iloczynem odległości, to równanie krzywej w spółrzędnych kartezyańskich ortogonalnych jest:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4,$$

jeżeli za osi spółrzędnych przyjmiemy oś ogniskową i prostą prostopadłą do niej w punkcie środkowym odcinka ogniskowego.

W spółrzędnych biegunowych ϱ i φ równanie krzywej jest:

$$\varrho^4 - 2a^2\varrho^2 \cos 2\varphi = b^4 - a^4.$$

Punkty kołowe urojone w nieskończoności są punktami podwójnemi krzywej, która jest klasy 8-ej.

Promień krzywizny jest:

$$R = \frac{2b^2\varrho^3}{3\varrho^4 - b^4 + a^4}.$$

Jeżeli $b < a$, kasynoida rozpada się na dwa owale, znajdujące się zewnątrz siebie; jeżeli $b = a$, mamy lemniskatę (patrz niżej); jeżeli $a\sqrt{2} > b > a$, krzywa ma formę elipsy spłaszczonej w dwóch końcach osi mniejszej; jeżeli $d > a\sqrt{2}$, krzywa składa się z jednego owalu.

Styczną w punkcie P otrzymujemy, prowadząc z ognisk F, F' prostopadłe do promieni ogniskowych FP, $F'P$, a następnie przez punkt P prostą, przecinającą te prostopadłe tak, że punktem środkowym zawartego pomiędzy niemi odcinka jest P.

Jeżeli w kasynoidę wpiszemy równoległobok, mający środek w środku krzywej, to suma algebraiczna kątów, pod któremi są widzialne boki przeciwległe z punktu krzywej jest stała. (Darboux, Sur une classe remarquable etc., Paryż 1896, s. 82).

W tej to książce (str. 61 i nast.) znajdujemy badanie klasy ogólnej krzywych algebraicznych, obejmujących w sobie jako przypadek szczególny krzywe Cassini'ego.

Lemniskata. W przypadku $b = a$ mamy lemnikatę Jana Bernoulli'ego (Acta Erud. 1694). Lemnikatę możemy też określić jako krzywą, powstającą zapomocą następującego wykreślenia. Weźmy koło i dwie jego styczne, prostopadłe do siebie i spotykające się w punkcie O: na każdej prostej, poprowadzonej przez punkt O, weźmy odcinki $\pm OP$, równe odpowiednio długościom cięciw, wyznaczonych w kole przez te proste;

miejscem punktów P będzie lemniskata. Krzywa jest miejscem spodków linij prostopadłych, spuszczonych ze środka O hyperboli równobocznej na jej styczne (spodkowa punktu O względem hyperboli równobocznej) Z tego powodu lemniskata nazywa się zwykle lemniskatą hyperboliczną.

Lemniskata jest także przypadkiem szczególnym krzywej Watta (patrz cyt. książkę Brocarda).

Lemniskata ma formę ósemki; ma punkt podwójny w punkcie O; kąty dwóch stycznych w punkcie O z osią ogniskową są $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$

Średnica, przechodząca przez punkt O, jest oczywiście osią symetryi tej krzywej i przechodzi przez dwa ogniska (oś ogniskowa); kąt, który styczna do krzywej w punkcie P tworzy z promieniem wodzącym, przechodzącym przez punkt O, równa się podwójnemu kątowi prostej PO z osią ogniskową, powiększonemu o kąt prosty; stąd:

Nachylenie normalnej do osi ogniskowej równa się potrojonemu nachyleniu promienia wodzącego do tejże osi.

Rzut promienia krzywizny na promień wodzący jest trzecią częścią tego promienia.

Równanie krzywej w spółrzędnych prostokątnych (za osi spółrzędnych przyjmujemy oś ogniskową i prostą prostopadłą do niej w punkcie O) jest:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0.$$

Równanie krzywej w spółrzędnych biegunowych (biegun O, oś biegunowa zlewa się z osią ogniskową) jest:

$$\varrho^2=2a^2\cos 2\varphi.$$

Promień krzywizny $R=\dfrac{2a^2}{3\varrho}$.

Pole, zamknięte przez lemniskatę, równa się $2a^2$.

Rozwinięta lemniskaty wyraża się równaniem:

$$\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}a.$$

Objętość bryły, utworzonej obrotem lemniskaty około jej osi ogniskowej, wynosi:

$$\pi\sqrt{2}\,a^3\left\{-\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})\right\}.$$

Łuk lemniskaty wyraża się wzorem:

$$s = a\sqrt{2}\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}; \qquad r = \frac{\varrho}{a\sqrt{2}},$$

gdzie ϱ jest promieniem wodzącym.

Widzimy stąd, że lemniskata jest krzywą, mającą tę własność, że łuk jej wyraża się przez całkę eliptyczną gatunku 1-go; moduł Legendre'a, odpowiadający tej całce eliptycznej, jest $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (patrz Repertoryum tom I, str. 365).

Jeżeli uczynimy $r = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}}$, będzie:

$$\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{2du}{\sqrt{1-u^4}};$$

znaczy to, że mając łuk, któremu odpowiada promień wodzący $ar\sqrt{2}$, możemy za pomocą poprzedniego wzoru algebraicznego (związku pomiędzy r i u) znaleść promień wodzący $au\sqrt{2}$, odpowiadający połowie łuku. Mamy tedy sposób algebraicznego rozwiązania zagadnienia o podziale na dwie równe części łuku lemniskaty.

Kwadrant lemniskaty można podzielić algebraicznie na 3 i na 5 części równych; a zatem na każdą liczbę części równych, dającą się wyrazić w postaci 2^m, $3\,.\,2^m$, $5\,.\,2^m$ (Tw. Fagnano, Produz. mat Pesaro.1750, II, str. 368). Do tego twierdzenia można dołączyć następujące twierdzenie Abela (Crelle III). Za pomocą kół i prostych można zawsze kwadrant lemniskaty podzielić na n części równych, jeżeli n jest postaci 2^m albo liczbą pierwszą postaci 2^m+1. Abel dowiódł, że można w tym celu stosować metodę analogiczną do stosowanej przez Gaussa przy podziale koła (t. j. rozwiązywanie równań dwumiennych, patrz Repertoryum t. I, str. 120); zdaje się, że wiedział o tem i sam Gauss. Patrz (Werke I, str. 412, 413; Disq arith.)

Prócz Fagnano i Eulera (Mém. de St. Pétersb. V, str. 1751—52) o podziale lemniskaty (teorya ta ma związek z mnożeniem zespolonem funkcyj eliptycznych) pisali Libri (Crelle X), Liouville (Compt. rend. 1843) Clausen (Astr. Nachr. 1842), Wichert (Progr. Conitz, 1846), Eisenstein (Crelle XXX, XXXIX), Hoffmann (Crelle XLVIII), Kiepert (tamże LXXV). Funkcya odwrotna względem całki lemniskatowej nazywa się zwykle funkcyą lemniskatową. Co do innych szczegółów patrz Enneper (Ellipt. Funct. str. 382. 531, 546).

Określiwszy lemniskatę przy pomocy hyperboli równobocznej (patrz wyżej) i ustanowiwszy tym sposobem odpowiedniość pomiędzy punktami tej krzywej, Chasles (Compt. rend, 1845) znalazł, że dwom łukom hyperboli, których różnica jest wyprostowywalna, odpowiadają łuki wyprostowywalne lemniskaty.

Krzywemi, których łuki, podobnie jak łuki lemniskaty, wyrażają się całkami gatunku 1-go, zajmowali się Legendre (Traité des fonct. ellipt. II, 590), Roberts (J. de Liouv. IX), Serret (tamże X). Szczegóły u Ennepera (l, c. str. 560); patrz też „Funkcye elipt." Cayley'a (Rozdz. III, XV).

Obwód całej lemniskaty można wyrazić szeregiem:

$$4\sqrt{2}a\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{13}+\ldots\ldots\right).$$

Ósemka. Krzywa tejże postaci co lemniskata Bernoulli'ego i dla tego nieraz z nią mieszana (patrz Interm. des math. 1897, str. 98 i 190—191) i nazywana niekiedy lemniskatą Gerono, przez innych ósemką, ma równanie (w postaci najprostszej):

$$y^4 = y^2 - x^2 .$$

Konstrukcya jej jest następująca: Punkt P koła rzucamy ortogonalnie na średnicę i na styczną w jej końcu; niechaj rzutem na średnicę będzie P'; jeżeli połączymy środek koła z rzutem na styczną i wyznaczymy punkt spotkania tej prostej z prostą PP', to miejscem punktu spotkania będzie ósemka.

---

§ 11.

Owale Descartes'a. Slimakowa Pascala. Kardioida. Konchoida Nikomedesa. Spiryki.

O owalach Descartes'a mówiliśmy już w Rozdz. VIII § 2 tego tomu. Są to krzywe rzędu czwartego z dwoma ostrzaw dwóch punktach kołowych płaszczyzny; są to zatem krzywe cykliczne. Do własności zaś podanych dołaczamy co następuje:

Równanie krzywej w spółrzędnych prostokątnych można napisać w postaci:

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 + b\,(x - d) = 0;$$

w spółrzędnych biegunowych (biegun w ognisku patrz Rozdz. VIII, § 2) równanie jest postaci:

$$\varrho^2 - (a + b\cos\varphi)\,\varrho + e^2 = 0;$$

wreszcie w spółrzędnych dwubiegunowych (jeżeli ϱ, ϱ' są promienie wodzące, poprowadzone z dwóch ognisk krzywej) mamy równanie

$$l\varrho + m\varrho' = c,$$

gdzie l, m, c są stałe.

Krzywa ma trzy ogniska rzeczywiste, położone w linii prostej; przez ogniska krzywej rozumiemy w ogólności punkty przecięcia prostych stycznych do krzywej i poprowadzonych przez dwa punkty kołowe płaszczyzny, które w naszym przypadku należą do krzywej i są jej ostrzami. Chasles odkrył trzecie ognisko krzywej; Descartes znał tylko dwa.

Krzywa powstaje jako miejsce trzeciego wierzchołka trójkąta, którego dwa pozostałe wierzchołki (końce podstawy) poruszają się na dwóch okręgach, gdy równocześnie podstawa obraca się około punktu, znajdującego się na prostej środków, a dwa drugie boki obracają się około środków okręgów. Te środki są dwoma ogniskami krzywej.

Własność optyczna ognisk owalów Descartes'a jest następująca: Promienie wychodzące z jednego ogniska. załamane przez krzywą, zbiegają się w drugiem ognisku, jeżeli spółczynnik załamania równa się stosunkowi promieni dwóch okręgów, służących do utworzenia krzywej.

Owale Descartes'a są rozwiniętemi kaustyki przez odbicie, należącej do koła patrz Salmon-Fiedler, (Ebene Curven, 2-gie wyd. str. 127).

W „Geometryi" Descartes'a z r. 1637 znajdujemy po raz pierwszy badania własności tych krzywych. Z nowszych prac o nich wymieniamy: Genocchi (Nouv. Ann. 1855, Mathesis 1884), Zeuthen (Nouv. Ann. 1864, str. 304), Sylvester (Phil, Mag. XXXI, 1866), D'Ocagne (Compt. rend. 1883, str. 1429) i t d. Bibliografię ich dość obszerną znaleść można u Ligina (Bull. Darboux 1882) i w Interm. des math. 1896, str. 238—239. O rektyfikacyi tych krzywych przy pomocy łuków elips patrz Genocchi (Ann. di Tortol. VI, str. 11; Compt. rend. 1875).

Ślimakowa Pascala. Jeżeli w równaniu biegunowem owalu Descartes'a położymy $e = 0$, otrzymamy równanie biegunowe ślimakowej Pascala, która, prócz ostrzy w punktach kołowych, ma jeszcze punkt podwójny w początku. Nazwę tej krzywej nadał Roberval (Acad. des sciences 1708, str. 78). Równaniem tej krzywej w spółrzędnych biegunowych jest:

$$\varrho = a + b\cos\varphi,$$

a w spółrzędnych prostokątnych:

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Krzywą tę można określić jako spodkową albo jako konchoidę (patrz § 2 i 4).

Krzywa Pascala jest konchoidą koła i jest także spodkową koła.

Niechaj będzie koło o promieniu a; na jednej z jego średnic weźmy punkt P odległy od środka na długość b. Spodkowa punktu P względem koła jest ślimakową o powyższem równaniu. Nakreślmy następnie koło, którego średnicą jest odcinek, zawarty pomiędzy punktem P a środkiem koła; odciąwszy na promieniach wodzących od punktu P do koła długości stałe równe a z obu stron końca tego promienia wodzącego, otrzymamy ślimakową.

Inne konstrukcye krzywej są następujące:

Krzywa jest odwrotną (patrz § 1) stożkowej; środkiem inwersyi jest jedno z ognisk elipsy

Niechaj będzie trójkąt wpisany w koło, niechaj jeden wierzchołek A będzie ustalony, kąt A zaś stały; ślimakowa będzie miejscem środków kół, wpisanych wewnętrznie i zewnętrznie.

Jest także miejscem wierzchołka kąta stałego, którego dwa boki są styczne do dwóch danych okręgów.

Jest także ruletą (patrz § 6), utworzoną ruchem punktu, związanego z płaszczyzną koła, toczącego się po innem kole tegoż promienia.

Przypadkiem szczególnym ślimakowej Pascala jest **kardioida**, którą otrzymujemy kładąc $a = b$.

Krzywa ta jest miejscem punktu okręgu koła, toczącego się po innym okręgu równego promienia; albo jest spodkową okręgu względem jednego z jego punktów; albo konchoidą koła względem jednego jego punktu, jeżeli odcinamy odcinki równe średnicy; albo wreszcie odwrotną paraboli, gdy środek inwersyi znajduje się w ognisku.

Normalna w punkcie kardioidy przechodzi przez punkt styczności dwóch okręgów, które służą do jej utworzenia.

Pole kardioidy równa się sześciokrotnemu polu koła, którego jest konchoidą; jest $\frac{3}{2}$ pola koła, którego jest spodkową (promień tego drugiego koła jest dwa razy większy od promienia pierwszego; koło zaś pierwsze równa się kołom, które służą do utworzenia krzywej jako rulety).

Długość kardioidy równa się 16 razy wziętej długości okręgu koła, którego jest konchoidą, a 8 razy wziętemu obwodowi koła, którego jest spodkową.

Promień krzywizny w danym punkcie jest $\frac{3}{2}$ odcinka średnio proporcyonalnego pomiędzy promieniem wodzącym tego punktu a promieniem koła, którego krzywa jest spodkową,

Konchoida Nikomedesa jest konchoidą (patrz § 4) prostej. W spółrzędnych biegunowych równaniem jej jest:

$$\varrho = \frac{a}{\cos\omega} \pm b,$$

w spółrzędnych kartezyańskich zaś:

$$y^2 (x-a)^2 = x^2 (b+a-x)(b-a+x),$$

gdzie a jest odległością punktu od prostej, b długością stałego odcinka, odcinanego na promieniu wodzącym. Prosta podstawowa konchoidy Nikomedesa jest oczywiście jej asymptotą.

Nikomedes wprowadził konchoidę do rozwiązania t. zw. zadania delijskiego, Newton stosował ją do rozwiązywania równań stopnia 3-go i 4-go. Patrz Cantor, Geschichte der Mathematik, I

Spiryki są przecięciem pierścienia (powierzchni, utworzonej obrotem koła około prostej na jego płaszczyźnie, patrz Rozdział XII, § 7) z płaszczyznami równoległemi do osi obrotu pierścienia.

Krzywe te mają punkty podwójne w dwóch punktach kołowych płaszczyzny i są w ogóle rzędu 4-go.

Szczególnym przypadkiem tych krzywych są owale Descartes'a, lemniskata i t d. Niektórzy autorowie nazywają w ogóle spirykami krzywe, przechodzące przez punkty kołowe płaszczyzny, t. j. krzywe cykliczne; patrz Darboux (Sur une classe remarquable etc., Paryż 1896)

Co do historyi tych krzywych patrz Tannery (Bull. scien. math. 1884) i Schiaparelli (Le sfere omocentriche di Eudosso, Calippo etc.).

---

§ 12.

Cykloida. Trochoida. Hypocykloida Epicykloida. Astroida. Czworoostrze.

Cykloidą właściwą jest krzywa, utworzona ruchem punktu okręgu koła o promieniu r, toczącego się po prostej (podstawie).

Równaniem kartezyańskiem cykloidy jest:

$$x = r \arccos \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}\ .$$

Jeżeli θ oznacza kąt pomiędzy prostą, łączącą punkt P krzywej ze środkiem koła tworzącego, a prostą prostopadłą do podstawy (osi x), wtedy spółrzędne x, y punktu P wyrażają się w funkcyi kąta θ w ten sposób:

$$x = r(\theta - \sin\theta)\ ; \qquad y = r(1 - \cos\theta).$$

Równanie różniczkowe cykloidy jest postaci:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r - y}{y}};$$

równaniem wewnętrznem krzywej jest:

$$\varrho^2 + s^2 = 16r^2.$$

Normalną w punkcie P otrzymujemy, łącząc punkt P z punktem styczności koła i prostej.

Jeżeli przedłużymy normalną o długość równą PA poza A, wtedy koniec tego odcinka będzie środkiem krzywizny.

Rozwinięta cykloidy jest cykloidą równą danej.

Pole, zawarte pomiędzy podstawą a jedną z gałęzi cykloidy, równa się potrójnemu polu koła tworzącego.

Łuk jednej gałęzi cykloidy równa się ośm razy wziętej długości łuku koła tworzącego.

Za pomocą cykloidy rozwiązuje się zadanie o brachystochronie (patrz „Repertoryum" t. I, str. 241).

Cykloida jest krzywą, przechodzącą przez dwa punkty i obejmującą pole najmniejsze i zawarte pomiędzy nią, jej rozwiniętą i normalnemi w punktach skrajnych (patrz „Repertoryum" t. I, str. 244).

Cykloida jest tautochroną, t. j. czas, jakiego potrzebuje punkt ciężki dla przebieżenia łuków cykloidy wywróconej dla dojścia do punktu najniższego, jest stały, bez względu na punkt, od którego rozpoczyna się spadanie (Huygens 1673).

O tautochronach i ich historyi patrz monografie Ohrtmanna Berlin 1872 i Amodeo 1883. Cykloida jest krzywą sławną w historyi matematyki: badali ją Mersenne i Galileusz; Roberval w r. 1634 znalazł jej kwadraturę, Descartes konstrukcyę stycznej do niej; po tem zajmowali się nią B. Pascal, Huygens, Bernoulli'owie i inni. Co do innych szczegółów patrz Chasles (Aperçu histor. str. 529), Günther (Bibl. math. 1887, str. 8) i cytowaną książkę Brocarda.

Nazywamy cykloidami wydłużonemi i cykloidami skróconemi lub w ogólności trochoidami krzywe, opisane przez punkt stale przytwierdzony do płaszczyzny koła, toczącego się po prostej, a którego odległość od środka koła jest odpowiednio mniejsza albo większa od promienia. Jeżeli a jest tą odległością, r zaś promieniem koła, wtedy równanie krzywej jest:

$$x = r \arccos \frac{r-y}{a} - \sqrt{a^2-(r-y)^2}.$$

Jeżeli koło o promieniu a toczy się po innem kole o promieniu R, wtedy krzywa, opisana przez jeden z jego punktów, nazywa się epicykloidą, gdy koła znajdują się wewnątrz jedno drugiego; hypocykloidą, gdy jedno jest zewnątrz drugiego Spółrzędne punktu dane są dla epicykloidy przez wzory:

$$x = (r+R)\cos\theta + r\cos\frac{r+R}{r}\theta; \quad y = (r+R)\sin\theta - r\sin\frac{r+R}{r}\theta;$$

dla hypocykloidy zaś należy zmienić $R+r$ na $R-r$.

Rozwinięte i rozwijające epicykloid i hypocykloid są krzywemi tego samego gatunku.

Jeżeli $r=R$, mamy kardioidę (patrz § 10).

Jeżeli $r=\frac{R}{4}$ i koło ruchome znajduje się wewnątrz stałego, otrzymujemy hypocykloidę o czterech ostrzach czyli astroidę, której równaniem jest:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}};$$

równanie wewnętrzne tej krzywej jest postaci:

$$\varrho^2 + 4s^2 = 9R^2$$ (Cesàro, Nouv. Ann. 1885, str. 258).

Obwód astroidy jest równy sześć razy wziętemu promieniowi koła stałego; pole jej równa się $\frac{3}{8}$ pola koła.

Astroida jest obwiednią prostej o długości stałej, opierającej się na dwóch prostych prostopadłych.

Jeżeli $r = \frac{R}{3}$, otrzymujemy hypocykloidę trójostrzową lub trójkątną Steinera.

Hypocykloida trójostrzowa jest obwiednią t. zw. prostej Simpsona albo Wallace'a, należącej do trójkąta trzech ostrzy; jest to prosta, na której znajdują się spodki prostopadłych, spuszczonych na boki trójkąta z punktu koła opisanego (patrz Rozdz. XXII).

Nazywamy w ogólności epitrochoidami krzywe, utworzone ruchem punktu płaszczyzny koła, toczącego się zewnętrznie po innem kole stałem. Stosownie do tego, czy ten punkt jest punktem zewnętrznym czy wewnętrznym koła ruchomego, mamy dwa gatunki krzywych, które nazywamy epicykloidami skróconemi i epicykloidami wydłużonemi. Podobne definicye określają hypotrochoidy, t. j. hypocykloidy skrócone i wydłużone.

Epicykloidy i hypocykloidy badali: De La Hire (Mém. de Paris 1694, 1706): Newton (Principia), który zajmował się ich rektyfikacyą; Euler (Nova Comm. Petrop. 1766, 1781; Acta Petrop, 1784); Raabe (Crelle I), Eckardt (Zeitschr. f. Math. XV, 1870), Kiepert (tamże XVII, 1872). Hypocykloidami trójostrzowemi zajmowali się: Steiner (Crelle LIII, LV), Cremona (Crelle LXIV), Clebsch (tamże), Battaglini (Giorn. di Batt. IV, 1866), Painvin (Nouv. Ann. 1870), Cahen (tamże 1875), Laguerre (Bull. Soc. math. VII, str. 108), Intrigila (Giorn. di Batt. 1885) i t. p. Pole tych krzywych obliczał Balitrand (Jonrn. de Longchamps 1893, str. 75). Patrz też Salmon-Fiedler Teorya krzywych, płaskich Rozdz. VII).

Jeżeli w drugiej konstrukcyi astroidy (uważanej za obwiednią) przyjmiemy, że dwie proste nie są prostopadłemi lecz pochylonemi do siebie pod kątem α, wtedy otrzymamy krzywą, zwaną czworoostrzem. Jest to zatem obwiednia prostej długości stałej a, której końce opierają się na dwóch prostych, pochylonych do siebie pod kątem a. Jest to krzywa rzędu 6-go i klasy 4-ej; jej pole wynosi:

$$\frac{\pi a^2}{8 \sin^2 a}(1+2\sin^2 a).$$

Badanie tej krzywej zaproponował Merlieux w r. 1842 (Nouv. Ann. 1842, str. 59, pyt. 12); Joachimsthal (tamże 1847) znalazł jej równanie, Steiner (tamże) wiele jej własności. Potem badali ją: Bellavitis (Metodo delle equipollenze), który nadał jej nazwę, i Mannheim (Nouv. Ann. 1878); o jej rektyfikacyi patrz „Mathesis" 1894, str. 129, a co do innych wskazówek Interm. des math. V, str. 160.

---

§ 13.

Krzywe spiralne. Krzywe Ribaucoura.

Nazywamy zwykle spiralnemi krzywe, rozwijające się w nieskończoną liczbę zwojów naokoło punktu, znajdującego się zewnątrz albo wewnątrz krzywej, Nazwa ta dotyczy raczej sposobu, w jakim postać tych krzywych przedstawia się oczom naszym, aniżeli pewnej własności, wspólnej wszystkim tym krzywym.

Krzywa spiralna jest koniecznie krzywą przestępną.

Równaniem w spółrzędnych biegunowych spiralnej Archimedesa (znanej także spiralną Konona) jest $\varrho = a\varphi$.

Krzywa ta jest tedy trajektoryą punktu, posuwającego się ruchem jednostajnym po prostej, gdy sama prosta obraca się ruchem jednostajnym na około jednego ze swych punktów. Krzywa składa się z dwóch części symetrycznych i odpowiadających dwóm częściom, na które punkt stały dzieli prostą ruchomą.

W spiralnej Archimedesa podnormalna biegunowa jest stała i równa parametrowi a.

Pole biegunowe, zawarte pomiędzy łukiem spiralnej Archimedesa a dwoma skrajnemi promieniami wodzącemi, wyraża wzór:

$$\frac{a^2}{b}(\varphi_1{}^3-\varphi_2{}^3),$$

gdzie φ_1, φ_2 są argumenty dwóch końców łuku. Spiralna Archimedesa jest spodkową rozwijającej koła względem środka samego koła.

Spiralna logarytmowa jest krzywą o równaniu biegunowem $\varrho=e^{a\varphi}$.

Jej rozwinięta, jej kaustyka przez odbicie i kaustyka przez załamanie są także spiralnemi logarytmowemi i to równemi danej (Jakób Bernoulli, Acta Erud. 1691).

Krzywa spotyka promień pod kątem stałym (stąd nazwa spiralnej równokątowej).

Początek promieni wodzących jest punktem asymptotycznym krzywej.

Łuki, liczone od punktu $\varrho=1$, $\varphi=0$ i w zwrocie ujemnym obrotu, dążą do wielkości skończonej $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$, gdy punkt ich końcowy dąży do bieguna.

Środek krzywizny jest końcem podnormalnej biegunowej.

Ruleta i gliseta (patrz § 6) bieguna spiralnej logarytmowej względem tej samej prostej, służącej za podstawę, są dwiema krzywemi ortogonalnemi.

Spiralna logarytmowa i jej własna biegunowa wzajemna względem każdej hyperboli równobocznej, mającej swój środek w biegunie spiralnej, jest do niej styczna (Klein-Lie, Bull. des sciences math. 1872, str. 331).

Odwrotną spiralnej logarytmowej, gdy środek inwersyi znajduje się w biegunie, jest spiralna logarytmowa równa danej.

Spiralną logarytmową badał pierwszy Descartes, po nim Jakób Bernoulli. Niektóre wskazówki bibliograficzne o tej krzywej można znaleść w cytowanej książce Brocarda; krótką jej monografię napisał Whitwhort (Nouv. Ann. 1869). Patrz także Rozdz. VII, cyt. traktatu Salmona.

Spiralna hyperboliczna jest odwrotnością spiralnej Archimedesa; równaniem jej biegunowem jest $\varrho = \frac{a}{\varphi}$.

Biegun krzywej jest jej punktem asymptotycznym; krzywa ma prostą asymptotyczną i składa się z dwóch gałęzi symetrycznych względem prostopadłej do prostej asymptotycznej a przechodzącej przez biegun.

Podstyczna biegunowa jest stała.

Spiralna hyperboliczna jest rzutem helisy na płaszczyznę prostopadłą do osi z punktu tej osi.

Spiralna paraboliczna lub spiralna Fermata ma równanie $\varrho^2 = \varphi$.

Niechaj O będzie biegunem, OM osią biegunową, którą krzywa spotyka w punktach $O, M, M', M''\ldots$. Ze środka O promieniem OM opiszmy okrąg koła. Pole, zamknięte pierwszym łukiem spiralnej i osią OM, jest połową pola koła; pole to jest połową pola, zawartego pomiędzy pierwszą gałęzią spiralnej, drugą gałęzią MM' a prostą MM'; to drugie pole równa się polu, zawartemu pomiędzy gałęzią drugą, gałęzią trzecią a prostą $M'M''$; to znów równa się polu, zawartemu pomiędzy gałęzią trzecią, gałęzią czwartą a prostą $M''M'''$ i t. d. i t. d.

Krzywe takie, że rzut środka ich krzywizny na promień wodzący dzieli ten promień wodzący w stosunku stałym, nazywają się spiralnemi — sinusoidalnemi (De la Goupillière); ich równaniem biegunowem jest:

$$\varrho^n = a^m \sin(n\varphi),$$

a równaniem wewnętrznem:

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}.$$

Kąt, jaki styczna do krzywej tworzy z promieniem wodzącym, jest φ.

Dla wartości szczególnych liczby n (skażnika) mamy krzywe już znane i niezłożone; i tak: dla $n=1$ mamy koło, dla $n=1$ prostą.

Pokrewnemi z temi krzywemi są krzywe Ribaucoura, których równaniem wewnętrznem jest:

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{n}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}.$$

W krzywych tych promień krzywizny jest proporcyonalny do odcinka normalnej, zawartego pomiędzy punktem krzywej a prostą stałą.

Jeżeli spiralna—sinusoidalna o skażniku n toczy się po prostej, to biegun jej (początek promieni wodzących) opisuje krzywą Ribaucoura o skażniku $\frac{n-1}{n+1}$.

O spiralnych—sinusoidalnych pisali: De La Goupillière (Nouv. Ann. 1876, str. 97). Brocard (tamże 1866 i t. d. Krzywą Ribaucoura napotkał ten autor w poszukiwaniach swoich nad powierzchniami najmniejszemi (Mém. de l'Acad. de Belg. XLIV, Nouv. Ann. 1888) i t. d. Wykład tej o tych dwóch gatunkach krzywych znajduje się u Cesàro w Geom. intr. 1896, str. 45; inne wskazówki w § 6 cytowanej ksiące Brocarda.

---

§ 14.

Łańcuchowa. Krzywa Delaunay'a. Traktorya. Sinusoida. Kwadratryca. Krzywa sprężysta.

Łańcuchową jest krzywa równowagi nici ciężkiej, przytwierdzonej w dwóch punktach; jej równaniem jest:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

równaniem zaś wewnętrznem:

$$a\varrho = a^2 + s^2.$$

Oś odciętych x, odległa na a od najwyższego punktu krzywej, nazywa się osią łańcuchowej; względem tej osi krzywa jest wypukłą.

Łańcuchowa jest ruletą ogniska paraboli, toczącej się po prostej.

Styczną do łańcuchowej w punkcie P otrzymujemy, opisując ze spodka rzędnej punkt P okrąg koła o promieniu a i prowadząc z punktu P styczną do tego koła.

Promień krzywizny równa się odcinkowi normalnej aż do spotkania z osią odciętych x; środek krzywizny tedy znajdujemy, przenosząc w kierunku przeciwnym taką długość normalnej.

Łańcuchowa posiada najniższy środek ciężkości pomiędzy wszystkiemi krzywemi równoobrotowemi (patrz „Repertoryum" t. I, str. 243).

Obrót łańcuchowej około osi wytwarza katenoidę (powierzchnię łańcuchową), która jest powierzchnią minimalną (patrz Rozdz. XVI i tom I, str. 245, gdzie podano i inną własność katenoidy).

Długość łuku AP łańcuchowej znajdujemy, prowadząc z punktu spotkania stycznej w P ze styczną w A prostopadłą do stycznej w P aż do spotkania z osią w punkcie R, a następnie rzucając ten punkt na oś; jeżeli rzutem jest Q, wtedy długość QR równa się długości łuku AP.

Pole, zawarte pomiędzy łukiem AP łańcuchowej a osią odciętych, równa się iloczynowi łuku AP przez parametr a.

Krzywą równowagi nici ciężkiej przyjmował Galilei błędnie za parabolę; potem badali ją Leibniz i Jakób Bernoulli. Wiadomości historyczne znajdują się u Laisanta (Ass. Franç. Congrès de Toulouse 1887. str. 64).

Łańcuchowa zwykła jest, jak powiedziano, ruletą ogniska paraboli; można też badać rulety ognisk elipsy i hyperboli. Krzywe, w ten sposób powstające, nazywają się łańcuchow e m i e l i p t y c z n e m i i h y p e r b o l i c z n e m i, albo też k r z y w e m i D e l a u n a y'a, bo on pierwszy badał i znalazł, że są krzywemi południkowemi powierzchni obrotowej o krzywiznie średniej stałej (unduloidy i nodoidy, patrz Rozdz. XVI). R ó w n a n i e r ó ż n i c z k o w e k r z y w y c h j e s t p o s t a c i:

$$(y^2 + c^2) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 2ay = 0,$$

a r ó w n a n i e m i c h w e w n ę t r z n e m j e s t:

$$\frac{e}{a} \varrho = e - \cos \frac{s}{a} + \frac{\sin^2 \frac{s}{a}}{e - \cos \frac{s}{a}}.$$

Każda krzywa Delaunay'a jest równoległa do krzywej równej.

O tych krzywych patrz np. C e s à r o, Geom. intr. str. 69.

T r a k t o r y a jest krzywą taką, że długość stycznych, zawarta pomiędzy punktem styczności a prostą stałą, jest stała $(= a)$. Prosta stała nazywa się asymptotą traktoryi. R ó w n a n i e r ó ż n i c z k o w e k r z y w e j j e s t p o s t a c i:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

a r ó w n a n i e m j e j w w y r a z a c h s k o ń c z o n y c h j e s t:

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

Krzywa ta jest trajektoryą ortogonalną kół o promieniu a, których środki znajdują się na osi; jest ona rozwijającą łańcuchowej. Jest obwiednią osi paraboli, która toczy się po prostej. Jest krzywą południkową pseudosfery i helisoidy pseudosferyczne D i n i e'go (patrz Rozdz. XVI).

Promień krzywizny w punkcie P tej krzywej wyznaczamy, prowadząc z jej wierzchołka $(x = 0, y = a)$ równoległą do stycznej w punkcie P aż do spotkania z asymptotą w punkcie R; odcinek OR (gdzie O jest rzutem ortogonalnym wierzchołka na asymptotę) jest promieniem krzywizny.

Nazywamy traktoryą wydłużoną i skróconą rzuty traktoryi zwykłej na płaszczyznę, przechodzącą przez asymptotę, otrzymane przy pomocy prostych rzucających prostopadłych do płaszczyzny traktoryi i odpowiednio prostopadłych do płaszczyzny rzutu (patrz Bianchi, Geom. diff. str. 24)3.

Traktorye badał Bomie (Acad. des. sciences des Paris 1712, str. 281), patrz także Cesàro (Mathesis 1882, str. 217).

Równanie sinusoidy jest postaci $y = \sin x$.

Krzywa ta ma nieskończenie wiele przegięć na osi x, znajdujących się w równej odległości; w tych punktach styczna jest pochylona pod kątem 45^0.

Pole, zamknięte pomiędzy łukiem sinusoidy, pomiędzy dwoma kolejnemi przegięciami a osią x, równa się podwójnemu polu kwadratu, wystawionego na jednostce liniowej; jednostką tą jest wysokość ponad osią x punktu krzywej, w którym styczna jest równoległa do tej osi.

Długość łuku sinusoidy pomiędzy dwoma kolejnemi przegięciami równa się długości półelipsy o półosiach $\sqrt{2}$ i 1 i wyraża się wzorem:

$$\pi\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2-\cdots\right].$$

Kwadratryca (quadratrix) Dinostrata jest krzywą, której równaniem jest:

$$\varrho = \frac{2}{\pi}\,\frac{\varphi}{\sin\varphi}.$$

lub

$$y = x \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}.$$

Asymptotami jej są proste równoległe do prostej $y=0$, odległe od niej na ± 2, $\pm 4, \ldots$.

Krzywą tę można określić i następującym sposobem: Niechaj będzie koło, a w nim dwie średnice prostopadłe OA i OB. Z punktów O i A wychodzą jednocześnie dwa punkty ruchome i poruszają się ruchem jednostajnym: jeden na OB, drugi na łuku koła AB tak, aby równocześnie znalazły się w punkcie B; jeżeli L i M są dwoma punktami, w których równocześnie znajdują się punkty ruchome, to miejsce spotkania prostej OM z prostą równoległą do OA, poprowadzoną przez punkt L, jest kwadratrycą.

Odległość wierzchołka krzywej od środka koła wynosi $\frac{2}{\pi}$; stąd, nakreśliwszy kwadratrycę, moglibyśmy znaleść liczbę π, i dla tego krzywa ta może służyć do kwadratury koła.

Krzywą tę badał Newton (Opuscula I, str. 104). Wiadomości historyczne o niej podał P. Tannery (Bull. des. sciences math. 1883, str. 278).

Krzywa sprężysta (sprężystości) jest to krzywa, której równaniem różniczkowem jest:

$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

Jest to krzywa równowagi blaszki sprężystej, przytwierdzonej w jednym końcu i poddanej ciśnieniu odpowiednich sił w drugim. Badał ją po raz pierwszy Jakób Bernoulli (Acad. de Paris, 1703, 1705).

Promień krzywizny tej krzywej jest odwrotnie proporcyonalny do odciętej.

Krzywa sprężysta pomiędzy wszystkiemi krzywemi równoobwodowemi, przechodzącemi przez dwa punkty stałe, daje bryłę obrotową o największej objętości (patrz „Repertoryum" tom I, str. 245).

O krzywej ze stanowiska teoryi funkcyj eliptycznych patrz Enneper Ellipt. Funct. i Halphen Funct. ellip. t. II.

§ 15.

Krzywe skośne. Helisy. Loksodromie.

Nazywamy helisą (krzywą śrubową) walcową krzywą, nakreśloną na walcu, która spotyka pod kątem stałym wszystkie tworzące walca. Jest ona linią geodezyjną walca.

Po rozwinięciu walca na płaszczyznę helisa staje się prostą.

W każdym punkcie helisy jej normalna główna zlewa się z normalną do powierzchni.

Dla każdej helisy stosunek dwóch krzywizn jest stały; i odwrotnie: krzywa, dla której stosunek dwu krzywizn jest stały, jest helisą.

Dwie krzywizny są stałe jedynie dla helis, nakreślonych na walcu kołowym prostym (Puiseux, patrz także Rozdz. XVI,, § 4).

Rozróżniamy helisy lewozwrotne i prawozwrotne, odpowiednio do ich zwrotu względem tworzących walca. Dajmy mianowicie, że ustawiliśmy walec tak, aby jego tworzące były w kierunku promienia widzenia i że punkt ruchomy przebiega helisę w ten sposób, iż zbliża się do spostrzegacza; jeżeli wtedy ruch punktu ma zwrot taki, jak ruch skazówki zegarowej, mówimy, że helisa jest lewozwrotną; w przeciwnym razie jest prawozwrotną. I tak helisa na zwykłej śrubie stolarskiej jest helisą prawozwrotną

Spółrzędne punktu helisy walcowej kołowej (t. j. opisanej na walcu kołowym prostej) wyrażają się wzorami:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = r\theta\,\mathrm{tg}\varphi,$$

gdzie r jest promieniem podstawy walca, φ kątem stałym, pod którym helisa spotyka tworzące.

Łuk helisy wyraża się wzorem:

$$s = r\theta\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\,.$$

Helisą walcowo-stożkową nazywamy helisę, nakreśloną na stożku obrotowym i spotykającą pod kątem stałym jego tworzące.

Rzut takiej helisy na płaszczyznę prostopadłą do osi stożka jest spiralną logarytmową; stąd helisa ta daje się nakreślić na walcu, którego podstawą jest spiralna logarytmowa i dla tego walca jest ona także helisą, t.j. spotyka tworzące jego pod kątem stałym. Jeżeli rozwiniemy stożek na płaszczyznę, wtedy helisa walcowo-stożkowa przekształca się na spiralną logarytmową. Jej normalna główna jest prostopadła do osi stożka.

Helisy wyżej rozpatrzone należą do ogólniejszej klasy krzywych, zwanych loksodromiami; t. j. do krzywych, nakrzywych, nakreślonych na powierzchniach obrotowych, i spotykających pod kątem stałym południki tych powierzchni.

Zbadano specyalnie przypadek, w którym powierzchnia obrotowa jest kulą. Patrz np. Joachimsthal (Anw der Diff. und Integr. Lipsk 1890).

O historyi tych krzywych pisał Günther (Studien zur Gesch. der math. Geogr, Halla 1874) i Brocard w artykule bibliogtaficznym (Bull. Darboux 1879, str. 239)

---

§ 16.

Cykliki kuliste. Okna Vivandi'ego. Spiryki kuliste.

Cyklikami kulistemi nazywamy przecięcia kuli z powierzchnią stopnia 2-go. Przypadkiem ich szczególnym są stożkowe kuliste (patrz Rozdz. X, § 1)

Cykliki płaskie można uważać za krzywe odwrotne względem cyklik kulistych; dość w tym celu uskutecznić inwercyę, przez którą kula przekształca się na płaszczyznę.

Krzywe te badał Darboux (Sur une classe remarquable etc., gdzie jest i wiele wskazéwek bibliograficznych).

Niechaj będzie dana półkula; nakreślmy średnicę płaszczyzny równikowej i na dwóch promieniach tej średnicy nakreślmy dwa koła, których średnicami są te promienie; następnie wystawmy walce, których te koła są podstawami: przecięcie jednego z tych walców z kulą jest krzywa, którą nazywamy krzywą Viviani'ego lub oknem Viviani'ego.

Początek tej krzywej dało zadanie, postawione przez Viviani'ego w r. 1692 i rozwiązane przez samego Viviani'ego, przez Leibniza (Acta Erud. 1602) i Jana Bernoulli'ego (tamże); szło o nakreślenie na sklepieniu półkulistem czterech okien równych w ten sposób, aby część pozostała dała się zkwadrować.

Jeżeli wystawimy dwa walce wyżej wskazane, to pozostałe pole na kuli równa się polu kwadratowemu, wystawionemu na średnicy kuli.

Spiryki kuliste są przecięciami kuli z pierścieniem (Darboux l. c.)

O innych krzywych specyalnych można znaleść wiadomości w nowej pracy Brocarda (Notes de bibliographie des courbes géom. Bar-le-Duc 1897. litogr. z dopełn. 1899); początek tej pracy, dało postawione przez De La Goupillière'a w t. I pisma „Interm. des math." (1894, str. 37) pytanie. w którem żądano monografiii wszystkich krzywych specyalnych, mających osobne nazwy. Podobne pytanie zawierał temat konkursowy za lata 1894 i 1897 Akademii nauk w Madrycie. Nagrody konkursowe otrzymali Gino Loria i F. Gomes Teixeira. Praca (nie ogłoszona dotąd) pierwszego z nich obejmuje krzywe płaskie algebraiczne i przestępne, ich teoryę i historyę; próbę porównawczej geometryi płaszczyzny.

ROZDZAŁ XVIII.

ANALYSIS SITUS CZYLI TOPOLOGIA. TEORYA WIELOŚCIANÓW. SPÓJNOŚĆ POWIERZCHNI RIEMANNA.

---

§ 1.

Spójność powierzchni. Powierzchnie jednostronne i dwustronne. Liczba zasadnicza. Rodzaj.

Powierzchnia może być otwarta albo zamknięta; jest otwartą wtedy, gdy posiada brzegi, t. j. linie, w której punktach się kończy; jest zamkniętą, gdy brzegów nie posiada. Pole nieskończonostkowe naokoło jednego punktu powierzchni może być uważane z dwóch stron przeciwnych, odpowiadających dwóm kierunkom normalnej do powierzchni w tym punkcie; odnośnie do tych dwóch stron każdy punkt może być uważany podwójnie, t j. jako należący do jednej albo do drugiej strony; takie dwa punkty, na które się rozdwaja jeden punkt, nazywać będziemy wzajemnie sprzężonemi.

Powierzchnia może być dwustronną albo też jednostronną. Dwustronną jest wtedy, gdy wychodząc z punktu powierzchni i postępując na niej po drogach ciągłych, bez przekroczenia brzegów, nie można dojść do punktu sprężonego z punktem wyjścia; nazywa się jednostronną wrazie przeciwnym.

Przykładami powierzchni dwustronnej są: kula, część płaszczyzny i t. d.; przykłady powierzchni jednostronnych podał

Möbius (Zur Theorie der Polyeder i t. d., Werke II; Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders, 1865, Werke II).

Niechaj będzie karta prostokątna dostatecznie długa $ABCD$; dłuższemi jej bokami niechaj będą AC i BD. Złączmy brzeg CD z brzegiem AB, po obróceniu go około prostej, łączącej punkty środkowe boków AB, CD, tak aby punkt D przypadł w A, a punkt C w B. Powierzchnia, powstała tym sposobem, będzie powierzchnią jednostronną otwartą z jednym tylko brzegiem. Jeżeli przed złączeniem boku CD z bokiem AB, obrócimy bok CD nieparzystą liczbą razy około punktów środkowych boków AB, CD, a potem doprowadzimy je jak poprzednio do zlania, wtedy otrzymamy także powierzchnię jednostronną otwartą z jednym tylko brzegiem.

Można utworzyć powierzchnię jednostronną zamkniętą w sposób następujący (Möbius):

Dajmy pięć punktów A, B, C, D, E, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyznie; wtedy trójkąty ABC, BCD, CDE, DEA, EAB utworzą powierzchnię jednostronną otwartą, której konturem jest pięciokąt $ACEBD$. Jeżeli weźmiemy punkt P, który z trzema któremikolwiek z pięciu punktów A, B, C, D, E nie leży na jednej płaszczyźnie, wtedy poprzednie pięć trójkątów oraz trójkąty PAC, PCE, PEB, PBD, PDA będą ścianami wielościanu splecionego, który stanowi powierzchnię zamkniętą jednostronną.

Inną powierzchnię zamkniętą jednostronną można otrzymać następującym sposobem: Wyobraźmy sobie kulę z dwoma otworami; z jednego z nich niechaj wychodzi rura na zewnątrz kuli, wchodząca następnie w kulę, tworząca splot i kończąca się w drugim otworze lecz od wewnątrz kuli. Otrzymujemy tym sposobem powierzchnię jednostronną zamkniętą (Dyck, Math. Ann. XXXII).

Przecinając powierzchnię wzdłuż punktów jakiejkolwiek linii, na niej nakreślonej, robimy tak zwane cięcie. Cięcie może być otwarte albo zamknięte. Pomiędzy cięciami odrożniamy takie, których końce są dwoma punktami tego samego brzegu; są to cięcia gatunku 1-go — oraz cięcia, których końce są dwoma punktami różnych brzegów; **są to cięcia gatunku 2-go**.

Cięcie zamknięte albo otwarte 1-go i 2-go gatunku nie może rozcinać powierzchni więcej niż na dwa kawałki.

Jeżeli powierzchnia jest dwustronna, wtedy cięcie otwarte gatunku pierwszego powiększa o 1 liczbę brzegów; jeżeli powierzchnia jest jednostronna wtedy takie cięcie albo nie zmienia wcale liczby brzegów albo powiększa ją o 1.

Cięcie gatunku 1-go nazywamy cięciem **klasy 1-ej** albo **klasy drugiej**, stosownie do tego, czy w przypadku powierzchni jednostronnej **powiększa** liczbę brzegów albo **nie powiększa** jej.

Cięcie gatunku 1go i klasy 2-giej nie rozcina powierzchni jednostronnej.

Cięcie gatunku 2-go zmniejsza o 1 liczbę brzegów powierzchni jednostronnej, ale nie może jej rozcinać.

Cięcie, wykonane wzdłuż linii otwartej, której jeden koniec jest na brzegu, drugi zaś, jak również i cała linia, jest wewnątrz powierzchni (**wnętrzem** powierzchni rozumiemy ogół wszystkich jej punktów, nie należących do konturu), nie powiększa liczby brzegów i nie rozcina powierzchni.

Jeżeli wreszcie końce linii otwartej i całkowicie położonej wewnątrz powierzchni nie znajdują się na żadnym brzegu, wtedy liczba brzegów powiększa się o 1. ale powierzchnia nie rozpada się.

Jeżeli powierzchnia jest dwustronna, wtedy cięcie zamknięte powiększa o 2 liczbę brzegów; jeżeli jest jednostronna, wtedy cięcie zamknięte powiększa o 2 albo o 1 liczbę brzegów. Stosownie do tego, czy staje się jedno czy drugie, nazywać będziemy powierzchnię jednostronną powierzchnią **klasy 1-ej** albo **klasy 2-giej**.

Cięcie zamknięte klasy 2-giej nie rozcina powierzchni jednostronnej.

Jeżeli na powierzchni można wykonać cięcie otwarte gatunku 1-go, nie rozcinając jej na kawałki, wtedy można też wykonać takież cięcie zamknięte, i odwrotnie.

Powierzchnia nazywa się jednospójną (jednołączną) jeżeli jest skończoną, otwartą, ograniczoną jednym tylko brzegiem i taką, że jakiekolwiek cięcie zamknięte (albo—co na jedno wychodzi—jakiekolwiek cięcie otwarte, łączące dwa punkty brzegu) rozcina ją na kawałki.

Powierzchnia jednospójna jest zawsze dwustronną.

Kawałek płaszczyzny, ograniczony okręgiem koła, jest najprostszym przykładem powierzchni jednospójnej.

Jeżeli wyobrazimy sobie, że powierzchnia jest utworzona z tkanki giętkiej i sprężystej, to każdą powierzchnię jednospójną będziemy mogli uważać za dającą się przekształcić na powierzchnię, wyżej wskazaną, za pomocą odkształceń ciągłych, t. j. za pomocą rozciągań i ściśnień, lecz bez rozrywania

Na powierzchni dwustronnej można zawsze uskutecznić takie cięcia zamknięte albo otwarte gatunku 1-go i 2-go, aby otrzymać powierzchnię jednospójną.

Za pomocą cięć otwartych gatunku 1-go i klasy 2-giej, albo też za pomocą cięć zamkniętych klasy 2-giej można zawsze powierzchnię jednostronną sprowadzić do dwustronnej.

Niechaj będzie dana powierzchnia; za pomocą cięć odpowiednich podzielmy ją na skończoną liczbę a części jednospójnych, Przyjmijmy, że w tym celu wykonaliśmy: pewną liczbę cięć zamkniętych i takich cięć otwartych, których jeden tylko koniec należy do jednego brzegu; dalej τ_1 cięć otwartych gatunku 1-go, τ_2 cięć otwartych gatunku 2-go, τ_3 cięć otwartych, znajdujących się całkowicie i swemi końcami wewnątrz powierzchni. Znajdziemy wtedy, że liczba $\tau_1+\tau_2+\tau_3-a$ jest stałą, niezależnie od sposobu wykonania cięć.

Liczba ta, powiększona o 2, nazywa się liczbą zasadniczą powierzchni.

Dla grupy s powierzchni istnieje twierdzenie analogiczne i liczba analogiczna, nazwana liczbą zasadniczą grupy.

Liczba zasadnicza K grupy wyraża się przez liczby zasadnicze K każdej z powierzchni za pomocą wzoru:

$$K = \sum_{i=1}^{i=s} K_i - 2s + 2\,.$$

Liczba zasadnicza powierzchni nie może być ujemna i nie może być zerem, gdy powierzchnia jest otwarta.

Liczba zasadnicza powierzchni jednospójnej jest 1, i odwrotnie, jeżeli tylko przyjmiemy, że powierzchnia jest otwartą lub dwustronną.

Jeżeli powierzchnia rozpada się na dwie części przez wykonanie jednego cięcia zamkniętego albo cięcia otwartego gatunku 1-go, wtedy suma liczb zasadniczych obu części równa się liczbie zasadniczej samej powierzchni, powiększonej odpowiednio o 2 albo o 1.

Niechaj będzie dana powierzchnia dwustronna zamknięta albo otwarta z $\omega\,(\geqslant 0)$ brzegami. Nazywamy rodzajem tej powierzchni największą liczbę cięć zamkniętych albo otwartych gatunku 1-go, jakie wykonać można na powierzchni bez rozcięcia jej. Jeżeli p jest rodzajem powierzchni dwustronnej otwartej albo zamkniętej, wtedy liczba zasadnicza K wyraża się w ten sposób:

$$K = 2p + \omega\,.$$

Nazywamy rodzajem powierzchni jednostronnej liczbę, którą daje suma dwóch liczb: jedną jest liczba cięć zamkniętych klasy 2-giej, albo cięć otwartych gatunku 1-go i klasy 2-giej, jakie potrzebne są, aby powierzchnię zamienić na dwustronną; drugą jest rodzaj tej ostatniej powierzchni.

Jeżeli π jest rodzajem powierzchni jednostronej otwartej albo zamkniętej z ω ($\geqslant 0$) brzegami, K liczbą zasadniczą, wtedy:

$$K = \pi + \omega.$$

Nazywamy rzędem spójności albo wprost spójnością powierzchni liczbę $K+2$, jeżeli powierzchnia jest zamknięta, liczbę zaś K, jeżeli jest otwarta.

Twierdzenie zasadnicze, dotyczące rodzaju powierzchni, jest następujące: Dwie powierzchnie, obie dwustronne albo obie jednostronne, będące jednego rodzaju i posiadające jednakową liczbę brzegów, dają się odkształcać jedna na drugą.

Rodzaj powierzchni nie zmienia się, gdy zrobimy w niej otwór.

Otwór powiększa o 1 spójność powierzchni otwartej, zmniejsza o 1 spójność powierzchni zamkniętej i w każdym przypadku powiększa o 1 liczbę zasadniczą.

Rozważania nad spójnością powierzchni rozpoczął Riemann (Theorie der Abel'schen Funct. § 2, Crelle LIV i „Fragment aus der Analysis situs. Werke s. 448); prowadził je w dalszym ciągu Neumann (Abel'sche Integrale, wyd. 1^0 1865, 2^0 1884). Z czasem badania te razem z innemi (np badaniami Listinga, Vorst. zur Topologie, Getynga 1847) utworzyły osobną część swego rodzaju Geometryi nowoczesnej, którą nazywamy zwykle Analysis situs, a jeszcze lepiej Topologią (jakkolwiek, zdaje się, że niektórzy nadają wyrazowi temu znaczenie, nieco bardziej ścieśnione, niż nazwa Analysis situs), która bada własności utworów geometrycznych, niezależnie od ich postaci i od ich wielkości. Innemi słowy: ta część geometryi bada formy, które przybiera utwór geometryczny; przyczem nie uważamy za różne dwóch form utworu, gdy od jednej można przejść do drugiej za pomocą odkształcenia ciągłego, t. j. gdy te dwie formy odpowiadają sobie punktami dwujednoznacznie; nie ma wszakże potrzeby zakładania, że prawo odpowiedniości jest analityczne, wystarcza bowiem, że jest ciągłe.

Pierwsze uogólnienia na przestrzeni trójwymiarowe (rozpoczęte już przez Riemanna w cytowanym „Fragmencie") poczynił Listing

(Census räumlicher Complexe, Gött. Abh. X, 1861, Gött. Nachr. 1867), a jeszcze dalsze po raz pierwszy Betti (Ann. di mat. IV, 1870). Dalej ogłosili w tym przedmiocie prace: Picard (Journ. de Liouv. (4), I), W. Dyck (Math. Ann. XXXII, XXXVII), De Paolis (Teoria dei gruppi geom. etc. Soc. Ital. delle scienz. (3), VII), Tonnelli Lincei 1890) i Poincaré (Journ, de l'École. pol. (2) I, 1890). Po tej pracy Poincarégo nastąpiła inna (Rend. Palermo XIII, 1899), w której znajduje się odpowiedź na pracę Heegarda (Kopenhaga 1898), i w której Poincaré prostuje niektóre błędy, popełnione w pracy pierwszej. Trzecią rozprawę w tym przedmiocie ogłosił Poincaré w r. 1900 (Second complément à l'Analysis Situs, Proceed. London Math. Society XXXII, 1900 str. 277—308).

Pokrewne z powyższemi badania dotyczą sposobów rozwiązywania, tworzenia węzłów z linij krzywych i t. p.; przedmiotem tym zajmował się Simony (Math. Ann. XIX, XXIV); Hoppe (Arch. der Math. LXIV 1879, LXV 1880), Durège (Wien. Ber. 1880) i Schlegel (Zeitschr. f. Math. XXVIII, 1883) rozciągnęli te badania na przestrzenie wielowymiarowe.

---

§ 2.

Spójność przestrzeni.

Listing rozciągnął rozważania, dotyczące spójności powierzchni, na przestrzenie trójwymiarowe, Betti na przestrzenie wielowymiarowe. We wspomnianym już wyżej „Fragmencie" Riemanna znajdujemy niektóre wyniki, odnoszące się do tego przedmiotu.

Niechaj będzie n zmiennych $z_1, z_2, \ldots z_n$, mogących przybierać wszystkie wartości rzeczywiste od $-\infty$ do $+\infty$; obszar n-krotnie nieskończony układów wartości tych zmiennych nazywać będziemy przestrzenią n wymiarową i oznaczać przez S_n; układ wartości z stanowi będzie to, co nazywamy spółrzędnemi punktu tej przestrzeni. Układ m równań pomiędzy ilościami z określa przestrzeń o $n—m$ wymiarach, zawartą w przestrzeni S_n. Przestrzeń S_{n-m}, zawarta w przestrzeni S_n, nazywa się liniowo-spójną albo mającą spójność gatunku 1-go, jeżeli dwa jej punkty można połączyć zawsze linią, zawartą w niej całkowicie, t. j. gdy punkt ruchomy można przenieść do innego punktu sposobem ciągłym, pozostając wciąż w przestrzeni S_{n-m}. Jeżeli $F(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0$ jest związkiem pomiędzy ilościami z, funkcya zaś F jest ciągłą i jednoznaczną dla każdego układu wartości rzeczywistych z, wtedy przestrzeń S_{n-1}, przedstawiona przez równanie $F=0$ podzieli w ogóle przestrzeń S_n na dwa obszary: dla jednego z nich będzie $F>0$, dla drugiego $F<0$. Jeżeli te dwa obszary są liniowo-spójne, przestrzeń S_{n-1} nazywa się zamkniętą.

Przestrzeń S_{n-m} nazywamy przestrzenią, mającą spójność powierzchniową czyli gatunku 2-go, jeżeli jakakolwiek linia zamknięta, w niej zawarta, daje się odkształcić sposobem ciągłym na każdą inną analogiczną i należącą wciąż do przestrzeni S_{n-m}; w ogólności mówić będziemy, że przestrzeń S_{n-m} ma spójność gatunku r-go, jeżeli każda przestrzeń zamknięta $r—1$ wymiarowa, w niej zawarta, daje się odkształcić sposobem ciągłym na inną analogiczną, należącą we wszystkich stadyach odkształcenia do przestrzeni S_{n-m}.

Jeżeli przestrzeń S_{n-m} nie ma spójności rzędu r-go, to można w niej zawsze utworzyć przestrzenie zamknięte o $r—1$ wymiarach i takie, że dwie z nich nie dają się odkształcić sposobem ciągłym jedna na drugą, ani żadna z nich sprowadzić do punktu, ale każda inna podobna przestrzeń zamknięta daje się zawsze odkształcić na jednę z nich, albo sprowadzić do punktu.

Liczba p_r takich przestrzeni zamkniętych jest stała i niezależna od sposobu, w jaki tworzymy te przestrzenie; liczba p_r+1 nazywa się rzędem spójności gatunku r-tego.

D l a p r z e s t r z e n i, m a j ą c e j s p ó j n o ś ć g a t u n k u r, l i c z b a p_r j e s t z e r e m; r z ą d s p ó j n o ś c i g a t u n k u r j e s t 1.

Kawał płaszczyzny, zawartej pomiędzy dwoma kołami, z których jedno jest wewnątrz drugiego, ma rząd 1 dla spójności liniowej, rząd 2 dla spójności powierzchniowej.

Dla przestrzeni, zawartej pomiędzy dwiema kulami. z których jedna znajduje się wewnątrz drugiej, rząd spójności liniowej jest 1, spójności powierzchniowej 1, spójności przestrzeniowej 2.

Przestrzeń, zawarta w pierścieniu, ma spójność liniową pojedyńczą, t. j. rzędu 1-go, spójność powierzchniową podwójną t. j. rzędu 2 go, spójność przestrzeniową pojedyńczą.

Przestrzeń, zawarta pomiędzy dwoma pierścieniami, z których jeden znajduje się wewnątrz drugiego, ma spójność liniową pojedyńczą, powierzchniową—podwójną, przestrzeniową—podwójną.

Inne szczegóły i bibliografię podajemy w paragrafie następnym. Co do pojęcia przestrzeni jednostronnych i dwustronnych patrz cytowane rozprawy P o i n c a r é g o.

§ 3.

Sieci wielościanowe. Twierdzenie Eulera. Wielościany w przestrzeni o trzech i więcej wymiarach.

Na powierzchni rodzaju p rozwińmy sieć wielościanową w ten sposób, aby kontur każdej ściany zamykał kawałek pojedyńczo-spójny powierzchni.

Jeżeli ta sieć ma F ścian, S krawędzi, V wierzchołków, wtedy m a m y z w i ą z e k:

$$V + F = S - 2p + 2 .$$

Jeżeli przyjmiemy, że powierzchnia dana jest rodzaju zero, wtedy otrzymujemy twierdzenie, podane przez E u l e r a:

Dla wielościanu zwyczajnego wypukłego, mającego V wierzchołków, F ścian, S krawędzi zachodzi związek zasadniczy:

$$V + F = S + 2.$$

Wielościany tego gatunku nazywamy zwykle wielościanami Eulera (patrz Hessel, Crelle VIII).

Twierdzenie to było, być może, znane już geometrom starożytnym; znajdujemy je we fragmencie Descartes'a, wydanym dopiero w r. 1860 (patrz Baltzer, Monatsber. Berl. Akad. 1861), ale ogłosił je i udowodnił dopiero Euler (Nova Comm. Petrop. IV, 1752). Inne dowody podali; Legendre (Géométrie), L'Huilier (Ann. de Georg. 1812, III), Cauchy (Journ. de l'École. pol. 1813), Steiner (Crelle I), Grunert (Crelle II) i v. Staudt (Geom. der Lage). Rozważania nad twierdzeniem Eulera i nad przypadkami, w których ona nie ma miejsca, podali; Poinsot (Journ de l'École. pol. cah. X, 1801), L'Huilier (l. c.), Legendre (l. c.), Gergonne (Ann. de Gerg. XV), Steiner (tamże XIX) i t. d. Patrz Baltzer, Stereometrie. O uogólnieniu tego twierdzenia dla przestrzeni o większej liczbie wymiarów pisali: Stringham (Americ. Journ. of Math. III), Biermann (Wien. Berl. XC, 1884), Hoppe (Grunert's Archiv LXVII), Schlegel (Nova Acta der Leop. Deutsch. Akad. XLIV), Eberhard (Math. Ann. XXXVI) (patrz koniec tego paragrafu).

Niechaj będzie dany wielościan i niechaj F, S, V mają te same znaczenia, co wyżej; mamy wtedy nierówności:

$$6 + S \leqslant 3F \leqslant 2S; \quad 6 + S \leqslant 3V \leqslant 2S;$$

$$4 + V \leqslant 2F \leqslant 4V - 8; \quad 4 + F \leqslant 2V \leqslant 4F - 8.$$

Liczba kątów płaskich wielokątów (ścian) wielościanu równa się podwójnej liczbie krawędzi.

Ze ścian wielościanu nie mogą mieć wszystkie więcej niż po pięć wierzchołków; z kątów bryłowych wielościanu nie mogą mieć wszystkie więcej niż po pięć ścian.

Nie istnieje wielościan o siedmiu krawędziach.

Jeżeli przez F_3 oznaczymy liczbę ścian trójkątnych wielościanu, przez F_4 liczbę jego ścian czworokątnych i t. d.. przez V_3 liczbę jego kątów bryłowych trójściennych, przez V_4 liczbę kątów bryłowych czworościennych i t d, wtedy zachodzą związki:

$$2(F_3 + F_4 + \ldots) = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + \ldots$$

$$2(V_3 + V_4 + \ldots) = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + \ldots$$

$$F_3 + V_3 = 8 + (F_5 + V_5) + 2(F_6 + V_6) + \ldots$$

Jeżeli damy wielościan, to w ogóle istnieje inny względem danego dwoisty, t. j. mający tę samą liczbę krawędzi, i tak, że każdej ścianie m-krawędziowej jednego odpowiada kąt bryłowy m-ścienny drugiego. Własności wielościanów poddane są tedy widocznie prawu dwoistości.

Nazywamy wielościanami foremnemi lub wielościanami Platona wielościany, mające ściany foremne i kąty brytowe foremne, wszystkie jednego gatunku.

W przestrzeni zwykłej istnieje tylko pięć gatunków wielościanów foremnych. Są niemi:

1. Czworościan: 4 ściany trójkątne, 4 wierzchołki kątów bryłowych trójściennych, 6 krawędzi. Jeżeli promień kuli, w którą czworościan jest wpisany, przyjmiemy za 1, to długość krawędzi wyniesie $l = 1{,}632994\ldots\ldots$ Punkty środkowe ścian tworzą inny czworościan, a punkty środkowe krawędzi tworzą ośmiościan.

2. Sześcian: 6 ścian czworokątnych, 8 wierzchołków kątów bryłowych trójściennych, 12 krawędzi długości $l = 1{,}154700\ldots$. Punkty środkowe ścian tworzą ośmiościan.

3. Ośmiościan: 8 ścian trójkątnych, 6 wierzchołków kątów bryłowych czworościennych, 12 krawędzi długości $l = 1{,}414214\ldots$ Punkty środkowe ścian tworzą sześcian.
4. Dwunastościan: 12 ścian pięciokątnych, 20 wierzchołków kątów bryłowych trójściennych, 30 krawędzi długości $l = 0{,}713644\ldots$. Punkty środkowe ścian tworzą dwudziestościan, punkty środkowe krawędzi tworzą 5 ośmiościanów.
5. Dwudziestościan: 20 ścian trójkątnych, 12 wierzchołków kątów bryłowych pięciościennych, 30 krawędzi długości $l = 1{,}051462\ldots$ Punkty środkowe ścian tworzą dwunastościan, punkty środkowe krawędzi 5 ośmiościanów.

Nazywamy wielościanami półforemnemi lub wielościanami Archimedesa wielościany, których wszystkie kąty bryłowe są równe albo podobne, ściany zaś są zawsze wielokątami foremnemi, lecz w ogóle różnemi; oraz wielościany z niemi wzajemne.

Jeżeli kąty bryłowe są wszystkie m-ścienne, wtedy mamy:

$$V = 2\,\frac{F-2}{m-2},$$

a więc przypadkami możliwemi są następujące:

$$m = 3, \qquad 2S = 3V = 6(F-2);$$

$$m = 4, \qquad S = 2V = 2(F-2);$$

$$m = 5, \qquad 2S = 5V = \frac{10}{3}(F-2).$$

Tylko w dwóch przypadkach $m=3, 4$ możliwe są wielościany o $2n$ wierzchołkach (n jakiekolwiek), przyczem każdy kąt bryłowy tworzą albo dwie ściany trójkątne i jedna ściana n-kątna, albo trzy ściany trójkątne i jedna n-kątna. Prócz tych przypadków wielościanów nieoznaczonych istnieje tylko

13 wielościanów Archimedesa, a mianowicie: 7 dla $m=3$, 4 dla $m=4$, 2 dla $m=5$.

Obliczenie to podali Pappus (Collect. math. V) i Kepler (Harm. mundi II, str. 28). Szczegóły w Stereometryi Baltzera.

W przestrzeni czterowymiarowej jest sześć wielościanów foremnych, mianowicie:

1. [1]) ograniczony 5 czworościanami, z których każde 4 mają wierzchołek wspólny; ma 5 wierzchołków, 10 krawędzi i 10 ścian. Ten wielościan jest wzajemny z samym sobą.
2. [2]) ograniczony 8 sześcianami, z których każde 4 mają wspólny wierzchołek; ma 16 wierzchołków, 32 krawędzie, 24 ściany.
3. [3]) ograniczony 16 czworościanami, mający 8 wierzchołków, 24 krawędzie, 32 ściany; ten wielościan jest wzajemny z poprzednim w sposób analogiczny do tego, w jaki ośmiościan jest wzajemny z sześcianem.
4. [4]) wielościan o 24 ośmiościanach, 24 wierzchołkach, 96 krawędziach, 96 ścianach trójkątnych; jest wzajemny ze samym sobą.
5. [5]) wielościan o 600 czworościanach, 120 wierzchołkach, 720 krawędziach, 1200 ścianach trójkątnych.
6. [6]) wielościan o 120 dwunastościanach, 600 wierzchołkach, 1200 krawędziach, 720 ścianach pięciokątnych; jest wzajemny z poprzedzającym.

---

[1]) Pentraetroid według Stringhama, Fünfzell według Schlegela.

[2]) Oktaedroid (Stringham), Achtzell (Schlegel).

[3]) Heksadekaedroid (Stringham), Sechszehnzell (Schlegel).

[4]) Ikosatetraedroid (Stringham), Vierundzwanzigzell (Schlegel).

[5]) Heksakosiedroid (Stringham), Sechshundertzell (Schlegel).

[6]) Hekatonikosaedroid (Stringham), Hundertzwanzigzell (Schlegel).

W przestrzeni, mającej więcej niż cztery wymiary, istnieją tylko trzy wielościany foremne, będące uogólnieniem trzech pierwszych w przestrzeni czterowymiarowej; te zaś ostanie odpowiadają czworościanowi, sześcianowi i ośmiościanowi przestrzeni trójwymiarowej.

W przestrzeni n-wymiarowej liczba wierzchołków tych wielościanów równa się odpowiednio: $n+1$, 2^n, $2n$; wielościan, mający wierzchołków $n+1$, jest wzajemny z samym sobą, drugi zaś jest wzajemny z trzecim.

Jeżeli promień kuli n-wymiarowej, w którą wpisane są te wielościany, przyjmiemy za 1, wtedy długości ich krawędzi będą odpowiednio:

$$\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Wzór Eulera, uogólniony dla wielościanu w przestrzeni n-wymiarowej, jest postaci:

$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} = 0,$$

to N_0, N_1, N_2. . . . oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi, ścian, przestrzeni trójwymiarowych. . . ., należących do danego wielościanu (Stringham).

O wielościanach foremnych w przestrzeni o 4 i więcej wymiarach patrz Stringham (l. c.) Scheffler (Die polydim. Grössen, Brunświk 1889), Schlegel (l. c. oraz Bull. Soc. math. X, str. 172, Rend. Palermo 1891). O wielościanach w ogóle pisali nadto: Möbius (Werke II), Kirkman (Soc. Manchester 1854 1862), Jordan (Crelle LXVI, LXVIII, LXX), Eberhard (tamże CVI).

W kolekcyi L. Brilla znajdują się modele rzutów wielościanów foremnych czterowymiarowych na przestrzeń trójwymiarową.

§ 4.

Spójność powierzchni Riemanna. Powierzchnie Riemanna foremne i symetryczne.

Mówiliśmy już w Rozdz XV, § 2 tomu I-go, z okoliczności funkcyj algebraicznych, o t. zw. powierzchniach Riemanna, specyalnie zaś o powierzchniach dwupowłokowych (lub dwuliściowych), i wspomnieliśmy już o tem, że za pomocą cięć można te powierzchnie przekształcać na jednospójne.

Podobnie dla powierzchni jakiegokolwiek rodzaju występuje przedewszystkiem zagadnienie o sprowadzaniu powierzchni do pewnego typu określonego, a następnie zagadnienie o wykonywaniu takich cięć, które powierzchnię zamieniają na jednospójną.

Nie będziemy tu wchodzili w szczegóły rozwiązania tych zagadnień; powiemy tylko, że zajmowali się niemi Lüroth (Math. Ann. IV), Clebsch (tamże VI), którego rezultaty zastosował Kasten (Rozprawa, Getynga 1876) do przypadku powierzchni trójliściowej, Graf (Rozprawa, Bern 1878) dla przypadku powierzchni sześcioliściowej o 20 punktach rozgałęzienia. Pokrewnemi są prace Lürotha (Erlang. Ber. 1883, Abh. d. Bayr. Akad. 1885 i 1887).

Każdy punkt rozgałęzienia, w którym m_1 powłok (liści) powierzchni jednoczy się w jednym cyklu, jest równoważny z m_1-1 pojedyńczemi punktami rozgałęzienia, t. j. punktami, w którym spajają się tylko dwa liście (patrz Repert. t. I, str. 334).

Jeżeli powierzchnia n-liniowa jest rodzaju p_1, zaś t oznacza całkowitą liczbę pojedyńczych punktów rozgałęzienia, równoważnych ze wszystkiemi punktami rozgałęzienia powierzchni, będzie:

$$t = 2n + 2p - 2.$$

Rodzaj powierzchni Riemanna wyraża się wzorem;

$$p = -n + 1 + \frac{1}{2} \sum_i (m_i - 1),$$

gdzie suma Σ rozciąga się na wszystkie liczby m_i, oznaczające, ile liści powierzchni spaja się cyklicznie w każdym punkcie rozgałęzienia.

Dla danej liczby p najmniejszą wartością liczby n jest największa liczba całkowita, zawarta w $\frac{p+3}{2}$.

Horwitz (Math. Ann. XXXIX) rozwiązał następujące zagadnienie: Danych jest t wartości zmiennej z, w których powierzchnia Riemanna n-lisciowa i rodzaju p posiada punkty rozgałęzienia; ile może być takich powierzchni? Znajdujemy, że

gdy $n=2$, liczba powierzchni Riemanna jest 1,
„ $n=3$ „ „ „ „ $\frac{1}{2}(3^{t-2}-1)$,
„ $n=4$ „ „ „ $\frac{1}{2}(2^{t-1}-1)(3^{t-2}-1)$
. . . .

Jeżeli rodzaj $p=0$, a liczba powłók jest $n(>2)$, wtedy liczba powierzchni Riemanna wynosi:

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\,n^{n-4}.$$

Tem zagadnieniem w przypadku $n=3$ zajmował się i Kasten w wyżej wspomnianej rozprawie.

Powierzchnię Riemanna rodzaju p można w ogólności ∞^{ϱ} sposobami odwzorować podobnie na samej sobie; $\varrho=0$ gdy $p=0$; $\varrho=1$ gdy $p=1$; $\varrho=0$ gdy $p>1$, (Schwarz, Crelle LXXXVII; Hettner, Gött. Nachr. 1880, str. 386; Noether, Math. Ann. XX, XXI, Klein, Ueber Riemann's Theorie der alg. Fun., Lipsk 1882, str. 66—67).

Wszystkie powierzchnie rodzaju zero dają się przekształcać za pomocą odwzorowania podobnego jedna na drugą; nie mają one żadnego niezmiennika bezwzględnego lub modułu, t. j. nie istnieje żadne wyrażenie zależne od stałych, określających powierzchnię Riemanna i pozostające niezmiennem przy przekształcaniu powierzchni.

W przypadku $p=1$ istnieje jeden moduł; dla $p>1$ jest ich $3p-3$; w ogólności liczba modułów wynosi $3p-3+\varrho$, gdzie ϱ ma znaczenie, wyżej wskazane (Riemann, Abel'sche Func. § 12).

Każda powierzchnia Riemanna o n liściach i t punktach rozgałęzienia daje się za pomocą przekształcenia ciągłego przekształcić na każdą inną o tej samej liczbie liści i punktów rozgałęzienia (Patrz Lüroth, Math. Ann. IV; Clebsch tom VI; Klein, l. c. str. 66).

Posługując się własnością powierzchni najmniejszych, mianowicie tem, że ich odwzorowanie kuliste jest podobnem (patrz Rozdz. XVI), otrzymamy, że powierzchnia Riemanna, rozciągnięta na kuli (zamiast na płaszczyźnie) wielolisciowej, daje się odwzorować sposobem podobnym na powierzchni najmniejszej (Weierstrass).

Mamy tym sposobem powierzchnię o zwykłym wyglądzie, mogącą służyć, podobnie jak powierzchnia Riemanna, do badania funkcyj analitycznych. Przy pomocy zasad Analizy położenia (Analysis situs) można zawsze, jak wiemy, otrzymać powierzchnię o wyglądzie zwykłym (t. j. bez rozgałęzień), będącą odkształceniem jakiejkolwiek powierzchni Riemanna rodzaju p (np. kulę p powłokową, patrz „Repertoryum" t. 1 Rozdz. XV, § 2); stąd ważność powyższego twierdzenia polega na fakcie, że powierzchnia najmniejsza i powierzchnia Riemanna dają się odwzorować na sobie przez podobieństwo, co nie ma miejsca dla kuli p-powłokowej w stosunku do powierzchni Riemanna.

Powierzchnia Riemanna rodzaju $p>1$ nie może mieć ∞ przekształceń dwujednoznacznych na samą siebie; a może mieć tylko skończoną liczbę takich przekształceń.

Niechaj $f(w, z) = 0$ będzie równaniem, odpowiadającem powierzchni Riemanna w płaszczyznie z; połóżmy:

$$w_1 = R_1(w, z), \quad x_1 = R_2(w, z),$$

gdzie R_1, R_2 są funkcyami wymiernemi takiemi, że w i z wyrażone być mogą jako funkcye wymierne ilości w_1 i z_1.

Dajmy, że to przekształcenie, które oznaczmy przez S, jest takie, że przez nie powierzchnia Riemanna przekształca się na samą siebie.

Liczba przekształceń dwuwymiernych lub dwujednoznacznych powierzchni Riemanna na samą siebie nie może być większa niż $84(p-1)$ dla $p>1$ (Hurwitz, Math. Ann. XLI, str. 424).

Przekształcenie dwuwymierne powierzchni Riemanna na samą siebie jest zawsze peryodyczne; to znaczy, że jeżeli wyjdziemy z punktu P i zastosujemy m-razy to przekształcenie, to musimy powrocić do punktu P. Największa wartość liczby m jest $10(p-1)$.

Każda powierzchnia Riemanna, posiadająca przekształcenie na samą siebie o peryodzie m, może być określona przez równanie typu $\varphi(w^m, z)=0$, a samo przekształcenie za pomocą wzorów zredukowanych:

$$w_1 = e^{\frac{2i\pi}{m}} w, \quad z_1 = z.$$

Twierdzenie to ma także miejsce dla $p=0$ i dla $p=1$. Twierdzenia powyższe podał Hurwitz (Math. Ann. XXXII).

Oprócz przekształceń S można wyobrazić sobie inne, określone wzorami:

$$w_1 = R_1(\bar{w}, \bar{z}), \qquad z_1 = R_2(\bar{w}, \bar{z}),$$

gdzie $\bar{w}$, $\bar{z}$ oznaczają wartości sprzężone z wartościami w, z. Takie przekształcenie oznaczać będziemy przez Σ, i możemy przyjąć, że do powierzchni Riemanna należą także przekształcenia Σ.

Wszystkie przekształcenia S lub Σ, należące do powierzchni Riemanna, tworzą oczywiście grupę.

Powierzchnia Riemanna, do której należy przekształcenie Σ o peryodzie 2 (t. j. takie, że $\Sigma^2 = 1$), nazywa się symetryczną.

Jeżeli związek $f(w, z) = 0$ ma spółczynniki rzeczywiste, jest jasnem, że powierzchni Riemanna odpowiada podstawienie Σ typu

$$w_1 = \bar{w}, \quad z_1 = \bar{z},$$

że więc powierzchnia Riemanna jest symetryczną. Ale i odwrotnie: jeżeli powierzchnia jest symetryczną, wtedy pomiędzy nieskończenie wieloma postaciami odpowiadającego mu równania jest zawsze jedna, której spółczynniki są rzeczywiste.

Na powierzchniach symetrycznych istnieją linie, pozostające niezmiennemi przy przekształceniu linij (symetrya); liczba tych linij nie może być większa od liczby $p+1$.

Powierzchnie Riemanna symetryczne badali: Klein (Riemann's Theorie etc. Lipsk 1891) i Weichhold (Zeitschr. f. Math. XXVIII); temu przedmiotowi poświęcona jest znaczna część drugiego tomu litografowanych wykładów Kleina; Ueber Riemann'sche Flächen, Getynga 1892.

Powierzchnia Riemanna o N-powłokach, jednakowo rozgałęzionych w ten sposób, że istnieje N przekształceń, przez które jedna powłoka może przekształcać się na którąkolwiek inną, nazywa się powierzchnią Riemanna regularnie rozgałęzioną lub wprost regularną (foremną).

Powierzchnia Riemanna, odpowiadająca równaniu dwumiennemu, jest regularną.

W powierzchni takiej punkty rozgałęzienia są rozmieszczone w sposób następujący: jeżeli $z = z_0$ jest wartością zmiennej z, dla której mamy rozgałęzienie, wtedy N powłok rozdzieli się w punkcie $z = z_0$ na $\frac{N}{r_i}$ cyklów, każdy o r_i powłokach. Rodzaj powierzchni wyraża się wzorem:

$$p = -N + 1 + \frac{N}{2} \sum_1 \frac{r_i - 1}{r_i},$$

gdzie r_i jest liczba powłók, złączonych cyklicznie w każdym punkcie rozgałęzienia, suma zaś Σ rozciąga się na wszystkie t. zw. miejsca rozgałęzienia, t. j. na wszystkie punkty rozgałęzienia, zawarte w jednej tylko powłoce.

Niechaj będzie równanie $f(w,z)=0$; uważajmy je jako algebraiczne względem jednej tylko zmiennej w, zmienną zaś z uważajmy jako parametr i utwórzmy rozwiązującą Galois'a tego równania. Będzie to równanie pewnego stopnia N (odpowiadającego liczbie podstawień grupy, należącej do danego równania algebraicznego, patrz Repert t. I, str. 115); powierzchnia Riemanna N-liściowa, odpowiadająca rozwiązującej Galois'a o z jednym parametrze, jest regularnie rozgałęzioną.

Powierzchnie Riemanna regularnie rozgałęzione badał po raz pierwszy Klein (Math. Ann. XIV), a mianowicie specyalnie przypadek $p=3$, $N=168$, odpowiadający rozwiązującej Galois'a równania modułowego przekształcenia 7 rzędu funkcyj eliptycznych. Potem przedmiotem tym zajmował się Dyck (Rozpr., Monachium 1879, Math. Ann. XVII. XX), który rozwiązał przypadki $p=1,2,3$; w innej zaś rozprawie (w tomie XVII Math. Ann. str. 510) rozważał także przypadek $p=3$, $N=96$. Co do wartości N, odpowiadających wartościom $p=0,1,2$, patrz Appell-Goursat (Fonct. alg. 1895, str. 241 i nast., gdzie można znaleść i inne wskazówki).

Dla $p=0$ mamy powierzchnie Riemanna o 12, 24, 60 liniach; odpowiednie grupy są grupami wielościanowemi (patrz Repert. t. I, str. 316 i nast). Równania algebraiczne, odpowiadające tym przypadkom, są następujące:

$$N=12, \qquad z=\frac{(w^4-2\sqrt{-3}\,w^2+1)^3}{(w^4+2\sqrt{-3}\,w^2+1)^3},$$

$$N=24, \qquad z=\frac{(w^8+14w^4+1)^3}{108w^4(w^4+1)^4},$$

$$N=60, \qquad z=\frac{(-w^{20}+228w^{15}-494w^{10}-228w^5-1)^3}{1728w^5(w^{10}+11w^5-1)^5}.$$

Wielomiany, zawarte w pierwszym z tych wzorów, są to wielomiany czworościanu (patrz Repert. I, str. 318); licznik i mianownik wzoru drugiego odpowiadają wielomianom sześcianu i ośmiościanu; mianownik trzeciego jest piątą potęgą wielomianu dwudziestościanu, licznik zaś jest jego formą Hessego (patrz Klein, Ikosaeder i t. d., Lipsk 1884).

Ważnem jest następujące twierdzenie Dycka (Math. Ann. XX, str. 30), uogólnione przez Hurwitza (tamże XLI, str. 421).

Jeżeli dana jest grupa skończona N przekształceń, to można zawsze znaleść powierzchnię Riemanna N-liściową regularnie rozgałęzioną, której grupa jest holoedrycznie izomorficzna z grupą daną.

Przy pomocy tego twierdzenia, mając daną powierzchnię Riemanna z grupą przekształceń na samą siebie, można zbudowac zawsze powierzchnię Riemanna regularnie rozgałęzioną o tej samej grupie. Nadto: Mając grupę przekształceń, można zawsze rozmaitemi sposobami zbudować powierzchnię Riemanna, mającą grupę holoedrycznie izomorficzną z grupą daną (Hurwitz).

§ 5.

Powierzchnie Riemanna w znaczeniu rzutowem według Kleina.

Ze względu na pokrewieństwo przedmiotu powiemy tu kilka słów o powierzchniach Riemanna w znaczeniu rzutowem, rozważanych przez Kleina.

Niechaj będzie krzywa klasy m. Z punktu rzeczywistego P płaszczyzny można do tej krzywej poprowadzić m stycznych, z których niektóre mogą być urojonemi; każdemu punktowi urojonemu odpowiadać będzie punkt styczności urojony, t. j. punkt urojony krzywej.

Wyobraźmy sobie punkt P, liczony tyle razy w tyluż leżących na sobie liściach, ile jest stycznych urojonych, poprowadzonych z punktu P do krzywej lub ile jest punktów (styczności stycznych, poprowadzonych z punktu P) urojonych krzywej. Ogół punktów P, tak rozmieszczonych, będzie utworem geometrycznym rzeczywistym, którego punkty jeden po jednym odpowiadać będą punktom urojonym krzywej. Co się tyczy punktów rzeczywistych krzywej, to otrzymamy je, skoro punkt P przypadnie na rzeczywistej gałęzi krzywej; albowiem wtedy dwie styczne sprzężone jednoczą się i dają styczną rzeczywistą z punktem styczności rzeczywistym. Z tego powodu części płaszczyzn, utworzone z punktów P, muszą się kończyć na obwodzie rzeczywistym krzywej i tu spajać się ze sobą po dwie.

Niechaj będzie np. elipsa. Jedynemi punktami płaszczyzny, z których można poprowadzić styczne urojone, są punkty wewnątrz krzywej. Wychodzą z nich po d w i e styczne urojone sprzężone; trzeba będzie tedy wyobrazić sobie część płaszczyzny, zawartą wewnątrz elipsy zdwojoną, t.j. jako dwa liście równe, spojone wzdłuż samej elipsy. Otrzymujemy tym sposobem powierzchnię, która, jak widzimy, daje się bezpośrednio przekształcić na kulę (powierzchnię rodzaju zero).

Nie tak łatwo zbudować powierzchnię, gdy krzywa zasadnicza jest klasy wyższej. Zagadnienie to sprowadza się do szukania sposobu spajania różnych liści; przyczem pewne części płaszczyzny uważać będzie trzeba za podwójne, inne za poczwórne i t. p.

O tym przedmiocie pisał K l e i n (Math. Ann. VII, X); H a r n a c k Math. Ann. IX) zbudował powierzchnie Riemanna, odpowiadające krzywym klasy 3-ej; H a s k e l l (Rozpr. Baltimore 1890) zajmował się specyalną krzywą klasy 4-ej, której równaniem w spółrzędnych prostej jest $u_1{}^2 u^2 + u_2{}^2 u_3 + u_3{}^3 u_1 = 0$.

ROZDZIAŁ XIX.

GEOMETRYA RZUTOWA NADPRZESTRZENI.

---

§ 1.

Rzeczy ogólne. Rozmaitości liniowe. Związki rzutowe i metryczne. Odpowiedniości homograficzne.

Jeżeli dane są zmienne $x_1, x_2, \ldots x_n$, to każdy układ wartości szczególnych (rzeczywistych albo zespolonych) tych zmiennych jest elementem (punktem) w przestrzeni o n wymiarach, którą oznaczać będziemy przez S_n.

Zamiast n zmiennych można wziąć ich $n+1$ i rozważać stosunki n zmiennych do ostatniej; punkt przestrzeni S_n będzie wyznaczony przez wartości tych stosunków, a odpowiadające sobie wartości $n+1$ zmiennych można nazwać spółrzędnemi jednorodnemi punktu. Spółrzędne te mogą przybierać wszelkie wartości, tylko nie mogą być wszystkie zerami.

Równanie liniowe jednorodne pomiędzy spółrzędnemi jednorodnemi określa rozmaitość liniową, zawartą w przestrzeni S_n i nazwaną nadpłaszczyzną. Przestrzeń S_n zawiera ∞^n nadpłaszczyzn i także ∞^n punktów.

Nadpłaszczyzna i punkt mogą być uważane jako elementy wzajemne (dwoiste) przestrzeni S_n, którą możemy uważać jako złożoną z punktów, albo też dwoiście, jako złożoną z nadpłaszczyzn.

Za spółrzędne jednorodne nadpłaszczyzny można przyjąć $n+1$ spółczynników jej równania.

Ogół punktów, których spółrzędne czynią zadość dwom równaniom liniowym, tworzy rozmaitość o n—2 wymiarach, którą nazywamy dwupłaszczyzną; ogół punktów, których spółrzędne czynią zadość k równaniom liniowym, nazywamy k-płaszczyzną. Mamy więc w ogóle wielopłaszczyzny.

Łatwo widzieć, że n-płaszczyzna jest punktem, (n—1)-płaszczyzna jest prostą, (n—2)-płaszczyzna jest płaszczyzną zwykłą, (n-3)-płaszczyzna jest przestrzenią zwykłą.

Jeżeli jako elementy przestrzeni S_n przyjmiemy nadpłaszczyzny, zamiast punktów, to, przy pomocy znanego rozważania, zamiast wielopłaszczyzn będziemy mieli odpowiednio wielopunkty.

Wielopłaszczyzny i wielopunkty tworzą dwa szeregi zasadnicze, odpowiadające sobie dwoiście w przestrzeni S_n, a mianowicie: (n—1)-płaszczyzna (złożona z punktów), (n—1) - punkt (złożony z nadpłaszczyzn) są formami gatunku 1-go (jednego wymiaru); (n—2) - płaszczyzna i (n—2) - punkt są formami gatunku 2-go i t, d.; k - płaszczyzna jest wyznaczona w ogóle przez $n-k+1$ punktów: jest ona przestrzenią liniową wymiaru $n-k$, t. j. S_{n-k}, zawartą w S_n.

Dwie przestrzenie liniowe S_{n-k}, $S_{n-k'}$, zawarte w S_n, nie mają w ogóle punktów wspólnych, jeżeli $k+k'>n$; mają zaś co najmniej wspólną przestrzeń S_r, jeżeli $k+k'=n-r$; mogą wszakże nawet, gdy $k+k'>n$, mieć punkty wspólne.

Jeżeli S_r i $S_{r'}$ nie mają punktów wspólnych i należą do przestrzeni S_n, wtedy przestrzeń liniowa najmniejszego wymiaru, należąca do S_n i zawierająca w sobie obie przestrzenie dane, jest wymiaru $r+r'+1$.

Jeżeli S_r i $S_{r'}$ mają przestrzeń wspólną S_m, wtedy przestrzeń najmniejszego wymiaru, zawierająca w sobie obie, jest wymiaru $t=r+r'-m$, czyli jest wtedy: $t+m=r+r'$.

Inne twierdzenia, dotyczące przestrzeni liniowych, zawartych w S_n, podali: Bertini (Rend. Ist. Lomb. 1866), Segre (Rend. Palermo II, 1888), Castelnuovo (Rend. Lincei 1889).

Uogólniwszy zwykłe wzory i rozważania geometryi analitycznej, można utworzyć Geometryę analityczną przestrzeni wielowymiarowych, wprowadzając pojęcia równoległości, prostopadłości, odległości, kątów i t. p.

Rozważania takie wprowadzili Jordan (Bull. de la Sc. math. III, 103) i d'Ovidio (Mem. Lincei 1877, Math. Ann. XII); ten ostatni wyprowadził wzory sposobem bardziej ogólnym, przyjmując za absolut przestrzeni (patrz Rozdz. XXI) nadkwadrykę.

Dwie nadpłaszczyzny, których równania są:

$$a_1 x_1 + \ldots a_n x_n + \alpha = 0; \quad b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n + \beta = 0,$$

nazywają się równoległemi, gdy:

$$\frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Niechaj będą dwie rozmaitości S_{n-k} i $S_{n-k'}$ wymiarów $n-k$ i $n-k'$, dane odpowiednio przez równania:

$$S_{n-k} \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n + \alpha_1 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_k = a_{k1} x_1 + \ldots + a_{kn} x_n + \alpha_k = 0; \end{array} \right.$$

$$S_{n-k'} \left\{ \begin{array}{l} B_1 = b_{11} x_1 + \ldots + b_{1n} x_n + \beta_1 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{k'} = b_{k'1} x_1 + \ldots + b_{k'n} x_n + \beta_k = 0. \end{array} \right.$$

Pomiędzy nadpłaszczyznami, zawartemi w S_{n-k}, niechaj będzie ϱ niezależnych od siebie (t. j. takich, że nie zachodzi żaden związek liniowy tożsamościowy o spółczynnikach stałych pomiędzy stronami pierwszemi ich równań), i równoległych do tyluż nadpłaszczyzn. zawartych w $S_{n-k'}$; mowimy wtedy, że dwie rozrozmaitości liniowe S_{n-k} i $S_{n-k'}$ posiadają równoległość rzędu ϱ.

Jeżeli $k \leqslant k'$ i $\varrho = k$, powiadamy, że pierwsza rozmaitość jest równoległa do drugiej.

Dwie rozmaitości mają równoległość rzędu ϱ, gdy równania:

$$\lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_k a_{k1} = \mu_1 b_{11} + \ldots + \mu_{k'} b_{k'1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_k a_{kn} = \mu_1 b_{1n} + \ldots + \mu_{k'} b_{k'n}$$

sprowadzają się do $k+k'-\varrho$ równań różnych, t. j. gdy charakterystyka macierzy tych równań jest $k+k'-\varrho$.

Odległość dwóch punktów (x), (y) przedstawia wyrażenie:

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots\ldots + (x_n-y_n)^2}.$$

Odległością punktu od rozmaitości liniowej jest odległość jego od najbliższego punktu rozmaitości; ten ostatni punkt nazywa się rzutem ortogonalnym danego.

Odległością dwóch rozmaitości liniowych jest odległość dwóch punktów najbliższych siebie: jednego w jednej, drugiego w drugiej rozmaitości.

Rozmaitość $S_{n-k'}$ nazywa się prostopadłą do rozmaitości S_{n-k}, jeżeli, po poprowadzeniu przez pewien punkt przestrzeni dwóch rozmaitości S'_{n-k} i $S'_{n-k'}$ równoległych do rozmaitości danych, każdy punkt rozmaitości $S'_{n-k'}$ rzuca się na rozmaitość S'_{n-k} w punkcie, należącym do wspólnego przecięcia obu rozmaitości S'.

Jeżeli rozmaitośc $S_{n-k'}$ jest prostopadła do S_{n-k}, to i rozmaitość S_{n-k} jest prostopadła do $S_{n-k'}$.

Niechaj będą dwie proste, dane przez równania:

$$\frac{x_1-a_1}{\alpha_1}=\frac{x_2-a_2}{\alpha_2}=\ldots=\frac{x_n-a_n}{\alpha_n};\ \frac{x_1-b_1}{\beta_1}=\frac{x_2-b_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{x_n-b_n}{\beta_n};$$

wyrażenie:

$$\cos^2\theta=\frac{\Sigma\alpha_r\beta_r}{\Sigma\alpha_r^2\,\Sigma\beta_r^2}$$

pozostaje niezmiennem co do wartości (jest niezmiennikiem) dla każdego przekształcenia liniowego ortogonalnego spółrzędnych, t. j. dla takiego przekształcenia liniowego, wykonanego na zmiennych x, że wyznacznik przekształcenia jest wyznacznikiem ortogonalnym (patrz „Repertoryum", t. I, str. 58).

Kąt θ nazywa się kątem dwóch prostych.

Jeżeli dane są dwie jakiekolwiek rozmaitości, to za pomocą poprzedzającego wzoru można obliczyć kąt pomiędzy jakąkolwiek prostą w jednej z nich a jakąkolwiek prostą w drugiej; najmniejszy z tych kątów, w ten sposób utworzonych, nazywa się kątem dwóch rozmaitości.

Dwie rozmaitości są prostopadłe, gdy ich kąt jest kątem prostym; w tym przypadku każda prosta jednej rozmaitości jest zawsze prostopadła do każdej prostej w rozmaitości drugiej.

Przeciąć przestrzeń S_r przestrzenią $S_{r'}$ znaczy zbudować przestrzeń $S_m = S_{r+r'-n}$, wspólną obydwóm; wykonać rzut (rzucić) przestrzeń S_r z przestrzeni $S_{r'}$ znaczy zbudować przestrzeń $S_{r+r'-1}$, obejmującą obiedwie.

Jeżeli w dwóch przestrzeniach S_n, $S_{n'}$ dane są grupy $n+2$ punktów, to można zawsze za pomocą rzutów i przecięć przejść od jednej grupy do drugiej,

Dwie przestrzenie n-wymiarowe S_n i S'_n, nazywają się rzutowemi, homograficznemi lub kolinearnemi, jeżeli pomiędzy zawartemi w jednej z nich przestrzeniami liniowemi a przestrzeniami jednoimiennemi, zawartemi w drugiej, zachodzi odpowiedniość dwujednoznaczna ciągła taka, iż dwóm przestrzeniom, należącym do jednej, odpowiadają dwie przestrzenie, należące do drugiej, i nadto prostej punktowej w jednej z nich odpowiada punktowa rzutowa w drugiej.

Dwie przestrzenie S_n i S'_n, homograficzne i nałożone, nie mogą mieć więcej niż $n+2$ punktów zjednoczonych jeżeli nie zlewają się, o ile $n+1$ jakichkolwiek z tych punktów nie znajdują się na tej samej nadpłaszczyznie.

W sposób podobny określa się dwoistość lub wzajemność między dwiema przestrzeniami.

Homografię między dwiema przestrzeniami przedstawiamy, jak zwykle, analitycznie, ustanawiając związki liniowe pomiędzy spółrzędnemi odpowiadających sobie punktów w dwóch przestrzeniach; homografia jest ogólna, gdy wyznacznik spółczynników tych związków liniowych jest różny od zera; lecz można wyobrazić sobie, że wyznacznik ten jest zerem i posiada charakterystykę $n-h+1$ (patrz „Repertoryum" t. I, str. 48); wtedy otrzymujemy homografie osobliwe gatunku h. W tym przypadku w jednej z dwóch przestrzeni istnieje przestrzeń liniowa S'_{h-1} wymiaru $h-1$ (przestrzeń osobliwa), której każdemu punktowi odpowiadają wszystkie punkty innej przestrzeni: i wzajemnie: w przestrzeni drugiej istnieje przestrzeń S_{n-h} wymiaru $n-h$ (przestrzeń osobliwa), której punktom odpowiadają w pierwszej przestrzeni punkty przestrzeni S'_h, obejmującej przestrzeń osobliwą S'_{h-1}.

Teoryę homografij dla nadprzestrzeni rozpoczął Veronese w pracy niżej wymienionej; potem prowadzili ją: Segre (Mem. Lincei 1884—1886, Mem. Torino 1885), Bertini (Rend. Ist. Lomb. 1886—7, Acc. di Torino 1887), Predella (Ann. di mat. XVII, Acc. Torino 1890—92) i t. d.

Cayley (Cambr. mat. J, IV 1845, Crelle 1846, Papers, I str. 55, 317) i Cauchy (Comptes rend. 1847) pierwsi stosowali wyrażenia geometryi n-wymiarowej; pierwszą zaś definicyę rozmaitości n-wymiarowych podał Grassmann w swojej „Ausdehnungslehre (1844).

Pierwszy głęboki rozbiór zasad Geometryi w przestrzeni jakiejkolwiek zawdzięczamy Riemannowi (Ueber der Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen 1854, ogłosz. w r. 1867; przekład polski Dicksteina i Gosiewskiego, Paryż 1877); Riemannowi zawdzięczamy też pojęcie krzywizny przestrzeni (patrz Rozdz. XX).

Prace i badania, odnoszące się do geometryi n-wymiarowej, możemy podzielić na trzy kategorye. Do kategoryi pierwszej można zaliczyć wszystkie prace, dotyczące zasad podstawowych geometryi w znaczeniu bezwzględnem, t j. niezależnie od pewnych hypotez zasadniczych o naturze przestrzeni. np od hypotezy liniowości. Pomiędzy temi poszukiwaniami, z któremi łączą się następnie prace o podstawach geometryi nieeuklidesowej Łobaczewskiego i Bolyai'a (patrz Rozdz. XXI), głównemi są prace: Riemanna (patrz wyżej). Cayley'a (Phil. Trans. 1859, Papers II) Beltrami'ego (patrz § 6), Helmholtza (Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, Gött. Nachr. 1868), Kleina (Math. Ann. IV, VI), De Tilly'ego (Essai sur les principes fondam. de la Géom. 1879), G. Cantora (Crelle LXXXIV, lub Acta math. II), Liego (Leipz. Ber. 1886, 1890 i t d. Wykład systematyczny tego przedmiotu zawierają prace: Pascha (Neuere Geometrie, Lipsk 1882), Veronese'go (Fondamenti di Geometria etc., Padwa 1891, przekład niemiecki 1894), Killinga (Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Paderborn 1893). W końcu dzieła Veronesego znajdują się liczne wskazówki historyczno-krytyczne. Druga kategorya badań dotyczy rozciągnięcia na przestrzenie wyższe pojęć i wzorów zwykłej geometryi nieskończonostkowej (patrz Rozdz. XX). Trzecia wreszcie dotyczy rozciągnięcia na rozmaitości wyższe pojęć i zagadnień geometryi rzutowej i metrycznej płaszczyzny i przestrzeni. Cytowane już prace Jordana i d'Ovidia należą do tej kategoryi, do której zalicza się też podstawowa praca Veronesego w Math. Ann. t. XIX. Od tej właśnie rozprawy rozpoczyna się praca nad geometryą rzutową nadprzestrzeni, t. j. teorya homografij ogólnych, teorya rozmaitości rzędów wyższych zawartych w S_n, a specyalnie teorya nadkwadryk, krzywych, powierzchni prostoliniowych i t. d., zawartych w S_n. Jest rzeczą naturalną, że starano się także rozciągnąć na przestrzenie wielowymiarowe teoryę odpowiedniości dwuwymiernych płaszczyzn i przestrzeni zwykłych (patrz Rozdz. VI, § 5, Rozdz. IX, § 6). Należą tu prace: Noethera (Math. Ann. II), Kantora (Rend. Ist. Lomb. 1894), Brilla (Quart. Journ. XXVII, 1895) i (dla przestrzeni czterowymiarowej) Del Pezzo (Acc. Napoli 1896 - 97).

Geometryą wykreślną w przestrzeni czterowymiarowej zajmował się Veronese (Atti Ist. Ven. 1882). Wziąwszy za element przestrzeni czterowymiarowej prostą zamiast punktu, można utworzyć Geometryę prostej; badania o tym przedmiocie ogłosili: Segre (Rend. Palermo II) i Castelnuovo (Att. Ist. Ven. 1891).

Należy wreszcie wspomnieć, że kinematyką w przestrzeniach wyższych zajmowali się: Jordan (w pracy wspomnianej), Clifford (Proc. Lond. math. Soc. 1878), Beltrami (Bull. coc. math. 1876). Długą listę prac o tym przedmiocie można znaleść w dziele Lorii (Teorye geometryczne i t. d.).

§ 13.

Rozmaitości nieliniowe. Nadpowierzchnie. Przedstawienie monoidalne.

Ogół tych punktów przestrzeni S_n, których spółrzędne czynią zadość równaniu wymiernemu całkowitemu jednorodnemu rzędu ν względem spółrzędnych, nazywa się nadpowierzchnią algebraiczną rzędu ν.

Liczba ν jest liczbą punktów, w których prosta przecina powierzchnię.

Nadpowierzchnia rzędu ν jest wyznaczona przez

$$N(\nu) = \binom{n+\nu}{\nu} - 1$$

punktów dowolnych.

Przez punkt P nadpowierzchni można poprowadzić do niej proste, mające w tym punkcie dwa przecięcia zjednoczone (styczność dwupunktowa); miejscem wszystkich tych prostych jest nadpłaszczyzna, którą nazywamy nadpłaszczyzną styczną do nadpowierzchni w punkcie P.

Nazywamy klasą nadpowierzchni liczbę jej nadpłaszczyzn stycznych, przechodzących przez rozmaitość ogólną S_{n-2} przestrzeni S_n; klasa nadpowierzchni rzędu ν równa się w ogóle $\nu(\nu-1)^{n-1}$, jeżeli nadpowierzchnia nie ma osobliwości, t. j. kiedy przedstawia się przez równanie ogólne.

Nazywamy punktami osobliwemi rzędu r nadpowierzchni także punkty, że każda prosta, przez nie przechodząca, spotyka w nich powierzchnię w r punktach zjednoczonych.

Każdy punkt osobliwy rzędu r zniża klasę powierzchni o $r(r-1)^{n-1}$ jedności.

Nadpowierzchnia rzędu ν z punktem ν-krotnym składa się z ∞ prostych, przez ten punkt przechodzących (stożek).

Nazywamy rozmaitością algebraiczną wymiaru k i rzędu ν przestrzeń k-wymiarową, zawartą w S_n i taką, że każda przestrzeń S_{n-k} w S_n zawarta przecina uważaną w ogóle w ν punktach różnych.

Rozmaitości dwuwymiarowe nazywają się zwykle powierzchniami, jednowymiarowe krzywemi.

Rozmaitość algebraiczna nazywa się normalną dla swej własnej przestrzeni, jeżeli nie może być uważana jako rzut rozmaitości tegoż rzędu, zawartej w przestrzeni wyższej. Każda rozmaitość algebraiczna wymiaru k i rzędu ν jest zawsze zawarta w przestrzeni liniowej $S_{k+\nu-1}$, ale może być zawarta i w przestrzeni liniowej niższej. W szczególności: Każda rozmaitość rzędu 2-go k-wymiarowa jest zawsze zawarta w przestrzeni liniowej S_{k+1}.

Każda krzywa rzędu ν jest zawsze zawarta w przestrzeni liniowej, której wymiar wynosi najwyżej ν.

Z tego twierdzenia wyprowadzamy, że krzywa rzędu $_-$-go jest zawsze najwyżej płaską, krzywa rzędu 3-go jest najwyżej krzywą sześcienną skośną i t. d.

Jeżeli dana jest rozmaitość wymiaru k, o ogół wszystkich prostych stycznych do niej w punkcie (patrz niżej) tworzy rozmaitość liniową tegoż wymiaru k. Co do przestrzeni liniowych stycznych do rozmaitości patrz Del Pezzo (Acc Napol 1886).

Dwie rozmaitości algebraiczne, jedna rzędu ν i wymiaru k, druga rzędu ν' i wymiaru k' przecinają się według rozmaitości rzędu $\nu\nu'$ i wymiaru $k+k'-n$, o ile $k+k' \geqslant n$, i te dwie rozmaitości nie mają rozmaitości wspólnej rzędu równego $k+k'-n+1$ lub wyższego; jeżeli zaś $k+k'<n$, wtedy te dwie rozmaitości nie mają w ogólności żadnego punktu wspólnego; jeżeli $k+k'=n$, to mają $\nu\nu'$ punktów wspólnych (Halphen, Bull. Soc. math. II, Noether, Math. Ann. XI)

Podobnie jak dla krzywych skośnych przestrzeni zwykłej, nasuwa się tu naturalnie zagadnienie o przedstawieniu analitycznem w przestrzeni S_n takich rozmaitości, które niezawsze są przecięciami zupełnemi nadpowierzchni. W tym to właśnie celu Halphen (l. c.) uogólnił przedstawienie monoidalne Cayley'a dla krzywych skośnych (patrz Rozdz IX, § 2).

Monoida jest nadpowierzchnią rzędu ν z punktem $(\nu-1)$-krotnym; każda prosta, przechodząca przez punkt wielokrotny, spotyka ją w jednym tylko punkcie (stąd nazwa monoidy). Każda rozmaitość wymiaru k może być przedstawiona analitycznie przez związek jednorodny pomiędzy $k+2$ spółrzędnemi (jednarodnemi) $x_0, x_1, \ldots x_{k+1}$, przedstawiający nadpowierzchnię stożkową i przez $n-k-1$ monoid.

Inna metoda przedstawienia analitycznego rozmaitości opiera się na następującem twierdzeniu Kroneckera, o którem mówiliśmy już w teoryi krzywych skośnych w przestrzeni zwykłej (Rozdz. IX, § 2):

Każda rozmaitość wymiaru k w przestrzeni S_n może być uważana za przecięcie zupełne najwyżej $n+1$ nadpowierzchni.

---

§ 3.

Nadkwadryki przestrzeni S_n. Wskazówki o nadpowierzchniach sześciennych przestrzeni S_4.

Nadkwadryka przestrzeni S_n jest nadpowierzchnią rzędu 2-go, analitycznie przedstawia się tedy za pomocą równania stopnia 2-go pomiędzy spółczynnikami.

Przez $\frac{n(n+3)}{2}$ punktów przestrzeni S_n przechodzi wogóle jedna tylko nadkwadryka.

Nadkwadryka jest nadpowierzchnią klasy 2-ej.

Jeżeli równanie nadkwadryki napiszemy w postaci

$$\Sigma_{ij}\, a_{ij}\, x_i\, x_j = 0, \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

to wyróżnikiem jej będzie:

$$A = |a_{ij}|.$$

Jeżeli ten wyróżnik nie jest zerem, mamy nadkwadrykę ogólną; w razie przeciwnym mamy stożki kwadrykowe lub nadkwadryki specyalne. Są one różnych gatunków odpowiednio do charakterystyki wyznacznika A; jeżeli tą charakterystyką jest liczba $n-h+1$, mamy wtedy stożek kwadrykowy gatunku h.

Stożek kwadrykowy gatunku h zawiera ∞ punktów podwójnych, tworzących przestrzeń liniową S_{h-1}; jeżeli $h=1$, mamy tylko jeden punkt podwójny.

Nadkwadryki nie mają niezmienników bezwzględnych; mają tylko jeden niezmiennik (wyróżnik), są więc wszystkie równoważne z punktu widzenia geometryi rzutowej.

W nadkwadryce ogólnej zawarte są przestrzenie liniowe wymiaru $\frac{n-2}{2}$ albo $\frac{n-1}{2}$, stosownie do tego, czy n jest parzyste albo nieparzyste.

Jeżeli nadkwadryka jest gatunku h, wtedy zamiast liczb powyższych mamy $\frac{n+h-2}{2}$ albo $\frac{n+h-1}{2}$, stosownie do tego, czy $n+h$ jest parzyste albo nieparzyste.

Jeżeli n jest nieparzyste, istnieją dwa układy różne przestrzeni $S_{\frac{n-1}{2}}$, zawartych w nadkwadryce; pomiędzy przypadkiem $\frac{n-1}{2}$ parzystego a $\frac{n-1}{2}$ nieparzystego zachodzi ta zasadnicza różnica, że w pierwszym z nich przecinają się dwie rozmaitości $S_{\frac{n-1}{2}}$ tylko wtedy, gdy należą do jednego układu, w drugim zaś wtedy, gdy należą do układów różnych (Segre). Ogólniej: Jeżeli przestrzeń (nieliniowa) wymiaru $\frac{n-1}{2}$, zawarta w nadkwadryce, spotyka w k punktach przestrzenie liniowe $S_{\frac{n-1}{2}}$ układu pierwszego, w k' punktach przestrzenie liniowe układu drugiego; jeżeli innej przestrzeni analogicznej odpowiadają podobnie punkty k_1 i k'_1: wtedy liczba punktów, w której się te dwie przestrzenie przecinają, wynosi: $kk_1'+k_1k'$, gdy $\frac{n-1}{2}$ jest nieparzyste; $kk_1k'+k_1'$, gdy $\frac{n-1}{2}$ jest parzyste.

Twierdzenie to podał Segre; jest ono uogólnieniem twierdzenia Chasles'a o krzywych algebraicznych, nakreślonych na kwadryce w przestrzeni zwykłej (patrz Rozdz. X, § 1).

Nadkwadryki badał najprzód Veronese (rozprawa w Math. Ann. XIX, § 3); potem poświęcił im obszerną pracę Segre (Mem. Torino 1884), który badał także pęki nadkwadryk i nadpowierzchnie rzędu czwartego, p o d s t a w ę pęku, oraz podał ich klasyfikacyę, opartą na teoryi dzielników elementarnych W e i e r s t r a s s a (patrz Rozdz. XIV, § 7 i III). Badanie i klasyfikacya tej nadpowierzchni rzędu 4-go są pokrewne z badaniem powierzchni rzędu 4-go o stożkowej podwójnej, która to powierzchnia jest rzutem nadpowierzchni rzędu 4-go w przestrzeni S_3. Patrz Rozdz. XII, § 6. Pęki nadkwadryk badał też B e r t i n i (Rend. Lincei 1886), pęki nadkwadryk wyspecyalizowanych (stożki) S e g r e (Acc. Torino 1884); dalej przedmiotem tym zajmował się D e l P e z z o (Acc. Napoli 1885, 1895), a o równaniu różniczkowem nadkwadryk pisał B e r z o l a r i (Rend. Lincei 1896). O tworzeniu rzutowem nadkwadryk, jako o uogólnieniu tworzenia kwadryk (Rozdz. V, § 1), pisali V e r o n e s e i S e g r e (l. c.).

Nadpowierzchnie sześcienne w przestrzeni czterowymiarowej badali w przypadkach ważniejszych (mianowicie: nadpowierzchnie zawierające płaszczyzny; nadpowierzchnie z 6, 7, 8, 9, 10 punktami podwójnemi) S e g r e (Mem. di Torino XXXIX, Atti di Torino 1887) i C a s t e l n u o v o (Atti. Ist. Veneto 1881). Niektóremi rozmaitościami trójwymiarowemi, złożonemi z szeregów płaszczyzn, zajmował się S e g r e (Atti Torino XXI, 1886).

---

§ 4.

Powierzchnie lub rozmaitości dwuwymiarowe przestrzeni S_n. Prostoliniowe. Powierzchnia Veronesego w przestrzeni S_5.

Pomiędzy rozmaitościami k - wymiarowemi, zawartemi w przestrzeni S_n, badano specyalniej powierzchnie ($k=2$), a pomiędzy temi ostatniemi znów powierzchnie, dające się rozwinąć na płaszczyźnie, oraz powierzchnie prostoliniowe.

Badali je: V e r o n e s e (l. c.), S e g r e (Atti Torino 1884, 1886; Rend. Lincei 1887, Math. Ann. XXX, XXXIV), D e l P e z z o (Acc. Napoli 1885—86—87; Rend. Palermo I, 1887).

Wiele rozważań o powierzchniach przestrzeni zwykłej można łatwo rozciągnąć na powierzchnie w przestrzeniach wyższych, tak np. odwzorowanie płaskie, rozważania dotyczące r o -

dzaju powierzchni i t. p. Co do tych ostatnich rozważań patrz prace, cytowane w rozdz. IX, § 4; w pracy tamże wspomnianej Segrego uogólnione zostały rozważania, dotyczące charakteru niezmienniczego, analogicznego z rodzajem.

Powierzchnia, dająca się odwzorować punktami na płaszczyźnie, jest homaloidalną (lub powierzchnią rodzaju zero, wymierną, jednobieżną).

Jeżeli powierzchnię prostoliniową, należącą do przestrzeni S_n, przetniemy przestrzeniami liniowemi S_{n-1}, otrzymamy naturalnie krzywą jednego i tego samego rodzaju (o rodzaju krzywych patrz § 5); rodzaj ten przyjmujemy jako rodzaj powierzchni prostoliniowej. (Rozdz. IX, § 4.)

Wszystkie powierzchnie rzędu $n-1$, należące do przestrzeni S_n (a nie do przestrzeni liniowej niższej), są albo prostoliniowemi, albo stożkami, z wyjątkiem (gdy $n=5$) t. zw. powierzchni rzędu 4-go Veronesego, o której niżej mówimy (Del Pezzo).

Powierzchnie rzędu n, zawarte w przestrzeni S_n dla $n>9$, są wszystkie prostoliniowemi.

Powierzchnie rzędu ν, zawarte w przestrzeni S_n są dla ν poniżej pewnych granic wszystkie prostoliniowemi. Granice te obliczył Del Pezzo (Acc. Napoli 5 lutego 1887), lubo sposobem niebardzo prostym,

Powierzchnia prostoliniowa rzędu $n-1$, należąca do powierzchni S_n, jest zawsze wymierna.

Nazywamy kierownicą powierzchni prostoliniowej krzywą, którą spotykają wszystkie tworzące.

Każda prostoliniowa rzędu $n-1$ w przestrzeni S_n ma jedną tylko kierownicę rzędu najniższego, wyjąwszy przypadek, w którym n jest nieparzyste, a rząd najniższy jest $\frac{n-1}{2}$; w tym bowiem razie kierownic rzędu najniższego („najmniejszych“) jest ∞^1.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby dwie prostoliniowe rzędu $n-1$ przestrzeni S_n, były rzutowo tożsamościowemi jest, by miały kierownice najmniejsze tego samego rzędu.

Na tem opiera się klasyfikacya prostoliniowych rzędu $n-1$ przestrzeni S_n według rzędu kierownicy najniższego rzędu; rząd ten może zmieniać się od 1 do $\frac{n}{2}$ albo do $\frac{n-1}{2}$ (Segre).

Na prostoliniowej rzędu $n-1$ przestrzeni S_n dwie kierownice rzędów $n-k$, $n-k'$ przecinają się w $n-k-k'-3$ punktach.

Prostoliniowe wymierne ($p=0$) rzędu $n-1$ jakiejkolwiek przestrzeni można otrzymać wszystkie, jako rzuty powierzchni prostoliniowych rzędu $n-1$, należących do przestrzeni S_n.

Prostoliniowe eliptyczne ($p=1$) rzędu $n+1$ jakiejkolwiek przestrzeni, a nie będące stożkami, są zawsze rzutami powierzchni prostoliniowych rzędu $n+1$ przestrzeni S_n.

Wszystkie prostoliniowe, (nie będące stożkami) rodzaju 2 i rzędu $n+3$, są rzutami prostoliniowych tegoż rzędu, należących do przestrzeni S_n. Ogólniej: Wszystkie prostoliniowe rzędu ν i rodzaju p, należące do jednej przestrzeni niższej niż $S_{\nu-2p+1}$, są rzutami prostoliniowych tego samego rzędu, należących do tejże przestrzeni.

Każda prostoliniowa rzędu ν i rodzaju p ma krzywe kierownicze rzędu $\leqslant \frac{\nu+p}{2}$; stąd, podobnie jak dla prostoliniowych wymiernych, wynika kryteryum klasyfikacyi prostoliniowych według ich kierownic najniższego rzędu.

Wzór Sturma-Segrego, dotyczący rzędu i rodzaju krzywej, nakreślonej na prostoliniowej, podaliśmy w Rozdz. IX, § 4.

Prostoliniowa rodzaju $p>0$ i rzędu $\nu \geqslant 4p$[1], o ile nie jest stożkiem, zawarta jest najwyżej w przestrzeni $S_{\nu-p}$; jeżeli jest zawarta w przestrzeni $S_{\nu-p}$ i przytem $p>1$, wtedy ma kierownicę podwójną; jeżeli jest zawarta w przestrzeni S_{n-p-1} i przytem $p>2$, wtedy ma stożkową podwójną albo też kierownicę prostoliniową albo potrójną, gdy zaś $p>3$ — krzywą pojedyńczą płaską rzędu 4-go (Segre).

Powierzchnia Veronesego, którą oznaczać będziemy przez V_2^4, jest powierzchnią rzędu 4-go, zawartą w przestrzeni pięciowymiarowej; daje się ona punktami odwzorować na płaszczyźnie (jest homaloidalną) i jest powierzchnią normalną (patrz § 1) dla przestrzeni S_5.

Można ją utworzyć, ustanawiając odpowiedniość homograficzną pomiędzy nadpłaszczyznami przestrzeni S_5 a stożkowemi płaszczyzny; wszystkim stożkowym, przechodzącym przez jeden punkt, odpowiadać będzie ∞^1 nadpłaszczyzn przestrzeni S_5, spotykających się w jednym punkcie; miejscem tych punktów jest powierzchnia Veronesego.

Powierzchnia zawiera układ podwójnie nieskończony stożkowych K; przez dwa jej punkty przechodzi jedna tylko stożkowa, a przez jeden punkt przechodzi stożkowych ∞^1.

Dwie stożkowe K spotykają się w jednym punkcie i są położone w przestrzeni S_4, stycznej w tym punkcie do powierzchni.

Płaszczyzny styczne tworzą nadpowierzchnię klasy 3-ej.

Płaszczyzny stożkowych K nazywają się płaszczyznami siecznemi gatunku 1-go.

Dwie płaszczyzny sieczne gatunku 1-go nie przecinają się według prostej, lecz zawsze spotykają się w jednym tylko punkcie; stanowią one nadpowierzchnię rzędu 3-go.

Płaszczyzna przestrzeni S_5 nie ma wogóle żadnego punktu wspólnego z przestrzenią (nie jest sieczną), ale może mieć jeden, dwa, trzy punkty wspólne; jeżeli ma trzy punkty

---

[1]) Ograniczenie to służy jedynie do prostszego wyrażenia wyników. Patrz prace Segrego w Math. Ann. l. c.

wspólne, a nie jest gatunku 1-go, wtedy nazywa się płaszczyzną styczną gatunku 2-go.

Pomiędzy nieskończenie wielu nadpłaszczyznami S_4, przechodzącemi przez płaszczyznę styczną do powierzchni w punkcie, jest jedna tylko, przecinająca powierzchnię według dwóch zlewających się stożkowych; taka nadpłaszczyzna nazywa się nadpłaszczyzną styczną podwójną.

Nadpłaszczyzny styczne, podwójne, których jest ∞^2, obwodzą powierzchnię wzajemną (klasy 4-ej) z daną. Dwie takie nadpłaszczyzny przecinają się według płaszczyzny stycznej; dwa punkty powierzchni określają płaszczyznę sieczną gatunku 1-go. Dwie płaszczyzny styczne spotykają się zawsze w jednym tylko punkcie.

Pomiędzy powierzchniami, nie zawartemi w przestrzeni S_4, powierzchnia Veronesego jest jedyną powierzchnią, której każde dwie płaszczyzny styczne spotykają się (Del Pezzo).

Jeżeli rzucimy powierzchnię $V_4{}^2$ z prostej S_1 na przestrzeń naszą, otrzymamy wtedy powierzchnię Steinera (patrz Rozdz. XII, § 9). Jeżeli prosta S_1 spotyka powierzchnię $V_2{}^4$ w punkcie, wtedy rzut jest powierzchnią prostoliniową rzędu 3-go; jeżeli prosta S_1 spotyka powierzchnię $V_2{}^4$ w dwóch punktach, otrzymujemy kwadrykę; jeżeli wreszcie prosta S_1 jest styczna do $V_2{}^4$, otrzymujemy stożek kwadrykowy.

Powierzchnia Veronesego należy do kategoryi ogólnej powierzchni normalnych homaloidalnych rzędu n^2 w przestrzeni o $\frac{n(n+3)}{2}$ wymiarach; powierzchnie takie mają tę własność zasadniczą, że przy pomocy rzutu ich na przestrzeń naszą można otrzymać wszystkie powierzchnie przestrzeni S_3, dające się odwzorować punktami na płaszczyźnie przy pomocy krzywych rzędu n albo mniejszego od n.

Powierzchnię tę zauważył najprzód Veronese w pracy swej w Math. Ann. XIX; później badał ją w rozprawie osobnej (Mem. Lincei XIX, 1884).

Z badaniami temi pokrewne są badania stożkowych na płaszczyźnie, o których była mowa w Rozdz. IV, § 5.

§ 5

Krzywe w przestrzeniach S_n.

Przechodzimy do rozmaitości jednowymiarowych, t. j. do krzywych. Przedewszystkiem łatwe jest uogólnienie (nad którem nie zatrzymujemy się) pojęć: płaszczyzny ściśle stycznej (mającej z krzywą trzy przecięcia nieskończenie blizkie) w punkcie krzywej, przestrzeni S_3 ściśle stycznej (mającej cztery przecięcia nieskończenie blizkie) i t.d. Nadto prosta styczna nazywać się będzie stateczną albo przegięciową, gdy ma z krzywą trzy przecięcia nieskończenie blizkie; płaszczyzna ściśle styczna nazywać się będzie stateczną, gdy, zamiast trzech, ma cztery nieskończenie blizkie przecięcia z krzywą i t. d.

Pierwsze nasuwające się tu zagadnienie dotyczy związków, istniejących pomiędzy liczbami charakterystycznemi, t. j. dotyczące uogólnienia znanych wzorów Plückera dla krzywych płaskich i wzorów Cayley'a dla krzywych skośnych przestrzeni zwykłej. Zagadnienie to rozwiązał pierwszy Veronese w cytowanej rozprawie.

Rozważmy rzut krzywej C^m przestrzeni S_n z punktu przestrzeni S_n na przestrzeń liniową S_{n-1}; otrzymamy krzywą w przestrzeni S_{n-1}. Rzut tej krzywej na przestrzeń liniową S_{n-2} da nową krzywą w przestrzeni S_{n-2} i t. d. Rozważmy dalej nadpowierzchnię rozwijalną, utworzoną ze stycznych do krzywej C^m. oraz przecięcie tej nadpowierzchni z przestrzenią liniową S_{n-1}; potem rzucajmy to przecięcie kolejno, jak przedtem, na przestrzenie liniowe niższe. Rozważmy nadto rozwijalną, odnoszącą się do wskazanego wyżej przecięcia; przetnijmy ją przestrzenią liniową S_{n-2} i postępujmy, jak wyżej, tworząc kolejne rzuty na przestrzenie niższe.

Postępując tym sposobem, otrzymamy $n-1$ krzywych płaskich, których liczby charakterystyczne odpowiadać będą tyluż liczbom charakterystycznym krzywej danej; stosując do każdej z tych krzywych wzory P l ü c k e r a, otrzymamy razem $3(n-1)$ związków pomiędzy l i c z b a m i c h a r a k t e r y s t y c z n e m i krzywej danej.

Oznaczmy przez: m r z ą d krzywej C^m; k — p o r z ą d e k p i e r w s z y krzywej C^m, t. j. liczbę stycznych S_1 krzywej C^m, przecinających przestrzeń S_{n-2} dowolną; w — p o r z ą d e k d r u g i krzywej C^m, t. j. liczbę płaszczyzn S_2 ściśle stycznych do C^m, przecinających dowolną przestrzeń S_{n-3}; $w^{(1)}$ — p o r z ą d e k t r z e c i krzywej C^m, t. j. liczbę przestrzeni ściśle stycznych S_3 do krzywej C^m, przecinających dowolną przestrzeń S_{n-4}, ... ; $w^{(n-2)}$ porządek $(n-2)$—i krzywej C^m, t. j. liczbę przestrzeni S_{n-1} ściśle stycznych do krzywej C^m, spotykających prostą dowolną; przez $w^{(n-3)}$ k l a s ę krzywej; w_1 — liczbę stycznych przegięciowych (z t r z e m a punktami nieskończenie blizkiemi wspólnemi z krzywą); $w_1^{(1)}$ — liczbę płaszczyzn ściśle stycznych (z c z t e r e m a punktami nieskończenie blizkiemi wspólnemi z krzywą); $w_1^{(2)}$ — liczbę przestrzeni S_3 statecznych; . . . . ; $w_1^{(n-3)}$ — liczbę przestrzeni S_{n-2} statecznych; $w_1^{(n-2)}$ liczbę przestrzeni S_{n-1} statecznych; R — liczbę ostrzy krzywej C^m; D_1 — liczbę punktów podwójnych krzywej C^m; D — liczbę przestrzeni S_{n-2}, przechodzących przez $n-2$ punktów dowolnych i przecinających dwa razy krzywą skośną (punkty podwójne pozorne); $D^{(1)}$ — liczbę par stycznych niekolejnych krzywej, C^m przecinających przestrzeń S_{n-1} w dwóch punktach prostej, którą przecina dowolna przestrzeń S_{n-4}; $D^{(2)}$ — liczbę par płaszczyzn ściśle stycznych niekolejnych krzywej C^m, przecinających przestrzeń S_{n-2} w dwóch punktach prostej, którą spotyka dowolna przestrzeń S_{n-5}; . . . . ; $D^{(n-2)}$ — liczbę par przestrzeni S_{n-1} ściśle stycznych niekolejnych do krzywej C^m, spotykających się w punkcie danej płaszczyzny dowolnej (albo rząd nadpowierzchni podwójnej o $n-2$ wymiarach dla rozwijalnej, utworzonej z przestrzeni S_{n-2} ściśle stycznych do C^m); d — liczbę przestrzeni S_{n-1}, przechodzących przez $n-2$ punktów dowolnych i zawierających dwie styczne niekolejne krzywej C^m; $d^{(1)}$ — liczbę par płaszczyzn ściśle stycznych niekolejnych krzywej C^m, przecinających przestrzeń S_{n-1} według dwóch prostych, które razem z n—3 punktami dowolnemi stałemi przestrzeni S_{n-1} znajdują się w tej samej przestrzeni S_{n-2}; . . . .; $d^{(n-2)}$—liczbę par przestrzeni ściśle stycznych S_{n-1} niekolejnych krzywej C^m, przecinających się według prostej płaszczyzny stałej; d_1 —liczbę stycznych podwójnych krzywej C^m; $d^{(1)}$—liczbę płaszczyzn stycznych podwójnych krzywej C^m; . . . .; $d_1^{(n-2)}$—liczbę przestrzeni S_{n-1} ściśle stycznych podwójnych krzywej C^m.

Ustanowiwszy te oznaczenia, mamy związki następujące:

$$k=m(m-1)-2(D+D_1)-3R;\quad m=k(k-1)-2(d+d_1)-3(w+w_1);$$

$$w+w_1-R=2(k-m).$$

$$w=k(k-1)-2(D^{(1)}+d_1)-3(m+w_1);$$

$$k=w(w-1)-2(d^{(1)}+d_1^{(1)})-3(w^{(2)}+w_1^{(2)})$$

$$m+w_1-(w^{(1)}+w_1^{(1)})=3(k-w).$$

$$w^{(1)}=w(w-1)-2(D^{(2)}+d_1^{(1)})-3(k+w_1^{(1)});$$

$$w=w^{(1)}(w^{(2)}-1)-2(d^{(2)}+d_1^{(2)})-3(w^{(2)}+w_1^{(2)});$$

$$k+w_1^{(1)}-(w^{(2)}+w_1^{(2)})=3(w-w^{(1)}).$$

. . . .

$$w^{(n-3)}=w^{(n-4)}(w^{(n-4)}-1)-2(D^{(n-2)}+d_1^{(n-3)})-3(w^{(n-5)}+w_1^{(n-3)});$$

$$w^{(n-4)}=w^{(n-3)}(w_1^{(n-3)}-1)-2(d^{(n-2)}+d_1^{(n-2)})-3w_1^{(n-2)};$$

$$w^{(n-5)}+w^{(n-3)}-w_1^{(n-2)}=3(w^{(n-4)}-w^{(n-3)}).$$

Jeżeli określimy rodzaj p krzywej C^m, jako rodzaj jakiegokolwiek jej rzutu płaskiego, będzie:

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - (D+D_1) - R$$

$$= \frac{(k-1)(k-2)}{2} - (d+d_1) - (w+w_1)$$

$$= \frac{(k-1)(k-2)}{2} - (D^{(1)}+d_1) - (m+w_1)$$

$$= \frac{(w-1)(w-2)}{2} - (d^{(1)} + d_1^{(1)}) - (w^{(1)} + w_1^{(1)}),$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Krzywa, będąca przecięciem zupełnem $n-1$ nadpowierzchni przestrzeni S_n rzędów $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_{n-1}$ jest rzędu $m = \nu_1 \nu_2 \ldots\ldots \nu_{n-1}$; jej porządkiem pierwszym jest:

$$k = \nu_1 \ldots\ldots \nu_{n-1} [\Sigma \nu_i - n + 1],$$

a wyrażenie na D jest:

$$2D = \nu_1 \ldots \nu_{n-1} [\nu_1 \ldots \nu_{n-1} - \Sigma \nu_i + n - 2].$$

Przy pomocy tych wzorów Veronesego można otrzymać wartości innych liczb charakterystycznych.

W szczególności:

Przecięcie zupełne rzędu 8-go trzech nadkwadryk przestrzeni cztero-wymiarowej ma porządek pierwszy równy 8, porządek drugi równy 48, klasę równą 32, rodzaj 5, i ma 120 przestrzeni S_3 statecznych.

Najwyższa przestrzeń, do której należeć może krzywa rzędu ν i rodzaju p (gdy $\nu > 2p-2$) jest $S_{\nu-p}$. To ważne twierdzenie, przypominające inne o powierzchniach prostoliniowych (§ 4), podał Clifford (Phil. Trans. 1888).

Zajmowali się niemi także Veronese (Math. Ann. XIX, str. 213) i Segre (Math. Ann. XXX, str. 207).

Z twierdzenia w § 2 wynika, że najniższym rzędem krzywych, należących do przestrzeni S_n, jest n.

K r z y w a r z ę d u n, n a l e ż ą c a d o p r z e s t r z e n i S_n, j e s t w y m i e r n a (r o d z a j u zer o). Oczywiście k r z y w a t a k a j e s t k r z y w ą n o r m a l n ą d l a p r z e s t r z e n i S_n. D l a t a k i e j k r z y w e j p o r z ą d e k 1-szy i$(n-2)$—i, 2-gi i$(n-3)$—i i t. d. s ą r ó w n e o d p o w i e d n i o $2(n-1)$, $3(n-2)$ ......; k l a s a k r z y w e j w y n o s i n; k r z y w a n i e p o s i a d a e l e m e n t ó w p o d w ó j n y c h i s t a t e c z n y c h.

Przez $n+3$ punkty przestrzeni S_n, z których żadne $n+1$ nie znajdują się na jednej nadpłaszczyznie, przechodzi jedna i tylko jedna krzywa rzędu n przestrzeni S_n.

Dwie krzywe rzędu n przestrzeni S_n są zawsze rzutowo identyczne.

Prosta, płaszczyzna, przestrzeń S_3 i t. d. mogą mieć z krzywą normalną rzędu n przestrzeni S_n najwyżej dwa, trzy, cztery i t. d. punkty wspólne.

Krzywą taką można uważać jako miejsce przecięć odpowiadających sobie nadpłaszczyzn w $n-1$ pękach nadpłaszczyzn rzutowych.

Przez punkt P przestrzeni S_n można poprowadzić n nadpłaszczyzn ściśle stycznych do krzywej; jeżeli n jest nieparzyste, to n punktów styczności tych nadpłaszczyzn znajduje się na płaszczyznie, przechodzącej przez punkt P, (Patrz analogiczne twierdzenie C h a s l e s'a dla krzywej sześciennej skośnej, Rozdz. X, § 2).

K r z y w e r z ę d u $n+1$ p r z e s t r z e n i S_n s ą e l i p t y c z n e m i (r o d z a j u $p=1$); n i e m a j ą e l e m e n t ó w p o d w ó j n y c h i s t a t e c z n y c h, p r ó c z $(n+1)^2$ p r z e s t r z e n i s t a t e c z n y c h S_{n-1}; i c h k l a s a w y n o s i $n(n+1)$, a ich p o r z ą d k a m i s ą o d p o w i e d n i o l i c z b y: $k=2(n-1)+2$; $w=3(n-2)+6, \ldots, w^{(n-4)}=n^2-1$.

I t a k r z y w a j e s t n o r m a l n ą d l a p r z e s t r z e n i S_n; nie może być bowiem rzutem rzędu $n+1$ przestrzeni S_{n+1}, gdyż rzut taki byłby wymierny.

Wszystkie krzywe wymierne rzędu $m \leqq n$, zawarte w przestrzeniach $S_2, S_3, \ldots\ldots S_{n-1}$, są zawsze rzutami krzywej normalnej rzędu n przestrzeni S_n.

Wszystkie krzywe eliptyczne rzędu $m \leqq n+1$, zawarte w przestrzeniach $S_2, S_3, \ldots\ldots S_{n-1}$, są zawsze rzutami krzywej normalnej rzędu $n+1$ przestrzeni S_n.

W ogólności:

Wszystkie krzywe rzędu $n+p$ i rodzaju p, należące do przestrzeni S_n, wraz ze swemi rzutami w przestrzeniach niższych, tworzą całość wszystkich krzywych wskazanego rzędu i rodzaju, należących do przestrzeni S_r, gdzie $r \leqq n$; a jeżeli $n+p > 2p-2$, wtedy wszystkie te krzywe stanowią całość wszystkich krzywych powyższego rzędu i rodzaju; albowiem wtedy (według twierdzenia Clifforda), prócz krzywych tego rodzaju i rzędu, istniejących w przestrzeniach S_r $(r \leqq n)$, nie ma innych krzywych.

Do prac o krzywych algebraicznych przestrzeni S_n, wymienionych w § poprzedzającym, dodajemy prace Segrego (Giorn. di Batt. XXVI, Rend. Palermo II).

ROZDZIAŁ XX.

GEOMETRYA NIESKOŃCZONOSTKOWA I WEWNĘTRZNA W NADPRZESTRZENIACH LINIOWYCH I W PRZESTRZENIACH O KRZYWIŹNIE STAŁEJ.

---

§ 1

Krzywe w przestrzeniach liniowych.

Niechaj spółrzędne x punktu krzywej będą wyrażone w funkcyi parametru t.

Przez $k+1$ punktów krzywej można poprowadzić przestrzeń liniową o k wymiarach; dajmy, że te punkty zbliżają się nieograniczenie do jednego punktu P; położenie graniczne przestrzeni liniowej nazywać będziemy **przestrzenią liniową k-wymiarową ściśle styczną do krzywej w punkcie P**. Liczba k może zmieniać się od 1 do $n-1$.

Odległość punktu krzywej, blizkiego punktu P, od przestrzeni liniowej k wymiarowej ściśle stycznej w punkcie P, jest nieskończonostką rzędu $k+1$.

Równaniami przestrzeni liniowej k—wymiarowej, ściśle stycznej do krzywej, są równania, które otrzymujemy, przyrównywając do zera minory macierzy.

$$\left\| \begin{matrix} X_1 - x_1, & X_2 - x_2, & \ldots & X_n - x_n \\ x'_1, & x'_2, & \ldots\ldots & x'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(k)}, & x_2^{(k)}, & \ldots\ldots & x_1^{(k)} \end{matrix} \right\|,$$

w której $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są spółrzędnemi punktu P, $x'_1, x''_1, \ldots; x'_2, x''_2, \ldots$, pochodnemi tychże spółrzędnych względem zmiennej niezależnej t.

Oznaczmy przez θ_k kąt pomiędzy dwiema przestrzeniami liniowemi k-wymiarowemi w dwóch blizkich punktach krzywej, przez s łuk, zawarty pomiędzy temi punktami; granica stosunku $\frac{\theta_k}{s}$, gdy s dąży do zera, nazywa się krzywizną k-tą krzywej w punkcie i—jak zwykle—odwrotność tej krzywizny nazywa się promieniem krzywizny. Promieni krzywizny jest n—1.

Jeżeli przez M_k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ oznaczymy sumę kwadratów minorów rzędu k, zawartych w macierzy

$$\left\| \begin{matrix} x'_1, & \ldots\ldots & x'_n \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ x_1^{(k)}, & \ldots\ldots & x_n^{(k)} \end{matrix} \right\|,$$

położymy $M_0 = 1$, przez R_k zaś oznaczymy k-ty promień krzywizny, będzie ogólnie:

$$\frac{1}{R_k^2} = \frac{M_{k+1}\, M_{k-1}}{M_1\, M_k},$$

gdzie oczywiście $M_1 = x'^2_1 + x'^2_2 + \ldots + x'^2_n$.

Mamy także wzór:

$$\frac{1}{R_k^2\, R^4_{k-1} \ldots R_1^{2k}} = -\frac{M_{k+1}}{M_2^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}}.$$

Jeżeli M_n jest zerem dla wszystkich punktów krzywej, wtedy krzywa położona jest w przestrzeni liniowej niższej; jeżeli M_{k+1} jest zerem dla wszystkich punktów krzywej a nie jest zerem M_k, wtedy krzywa jest położona w przestrzeni liniowej k-wymiarowej.

Punkty krzywej, dla których jest $M_n=0$, są t. zw. punktami stacecznemi krzywej.

Niechaj będzie punkt P krzywej; rozważmy następujący układ n prostych, z których każde dwie są do siebie prostopadłe: najprzód styczną do krzywej, następnie prostą prostopadłą do stycznej i położoną w przestrzeni ściśle stycznej dwuwymiarowej, potem prostopadłą do tej ostatniej przestrzeni i położoną w przestrzeni ściśle stycznej trójwymiarowej i t. d. Jeżeli oznaczymy wtedy przez

$$\alpha_{11}, \ldots \alpha_{1n}; \quad \alpha_{21}, \ldots \alpha_{2n}; \quad \ldots\ldots \alpha_{n1}, \ldots \alpha_{nn}$$

odpowiednie kąty kierunkowe tych n prostych względem n osi pierwotnych, to zachodzić będą następujące wzory, które można uważać za uogólnienie wzorów Freneta i Serreta (Rozdz. XII, § 4), odnoszących się do krzywych skośnych; wzory te wyrażają różniczki n^2 dostaw kątów α przez funkcye liniowe samych dostaw:

$$\frac{d\cos\alpha_{ki}}{ds} = \frac{\cos\alpha_{k+1,i}}{R} - \frac{\cos\alpha_{k-1,i}}{R_{k-1}},$$

gdzie, rozumie się, że, w przypadku $k=1$ znieść należy wyraz drugi po stronie drugiej, gdy zaś $k=n$, to należy znieść wyraz pierwszy. Patrz Brunel (Math. Ann. XIX) i Landsberg (Crelle CXIV).

O uogólnieniu twierdzenia Bonneta, dotyczącego odległości dwóch stycznych nieskończenie blizkich krzywej i odległości punktu krzywej od płaszczyzny ściśle stycznej w punkcie nieskończenie blizkim, patrz Jordan (Compt. rend. LXXIX, 1874, str. 796).

O teoryi nieskończonostkowej krzywych w jakiejkolwiek przestrzeni pisał też Hoppe (Archiv, (1), LXIV, (2), VI, XI, XII 1880—1892).

§ 2.

Geometrya różniczkowa rozmaitości wielowymiarowych, znajdujących się w przestrzeniach liniowych. Formy różniczkowe kwadratowe.

Jak w teoryi powierzchni wprowadzamy znaną formę różniczkową kwadratową o dwóch zmiennych, przedstawiającą kwadrat należącego do powierzchni elementu liniowego, podobnież dla rozmaitości, mających więcej niż dwa wymiary, wprowadzamy formę różniczkową kwadratową n zmiennych:

$$ds^2 = \sum_1^n a_{ij}\, dx_i\, dx_j\,, \tag{1}$$

przedstawiającą kwadrat odległości nieskończenie małej pomiędzy dwoma nieskończenie blizkiemi punktami rozmaitości, czyli, jak się mówi, kwadrat elementu liniowego, należącego do rozmaitości. Przyjmujemy, że forma (1) jest określoną dodatnią i że jej wyznacznik jest różny od zera.

Hypoteza, która jest podstawą przyjęcia formy różniczkowej kwadratowej a nie innej, np. formy rzędu 4-go lub 6-go, jest istotnie hypotezą szczególną, ale jest ona wynikiem innej hypotezy, którą czynimy tu wyraźnie, że nasza rozmaitość znajduje się zawsze w przestrzeni liniowej o większej liczbie wymiarów.

Jeżeli przyjmiemy, że element liniowy daje się wyrazić formą kwadratową, jaką jest forma (1), to można zawsze znaleść liczbę h:

$$0 \leqslant h \leqslant \frac{n(n-1)}{2}\,,$$

taką, że dobrawszy odpowiednie funkcye y_1, $y_2, \ldots y_{n+h}$ zmiennych $x_1, \ldots x_n$, sprowadzić można formę (1) do postaci:

$$\sum_{i=1}^{n+h} dy_i^2\,,$$

odpowiadającej przestrzeni liniowej o $n+h$ wymiarach (patrz Schläfli, Ann. di mat. V, str. 190; Ricci, tamże XII, str. 137).

Najmniejsza z liczb h nazywa się klasą rozmaitości (Ricci).

Geometrya wewnętrzna rozmaitości sprowadza się tym sposobem do badania form różniczkowych kwadratowych i ich przekształceń.

W teoryi form różniczkowych kwadratowych dogodnie jest wprowadzić t. z. symbole Christoffela. Istnieją cztery kategorye tych symboli, a mianowicie: trójskaźnikowe gatunku 1-go i 2-go i czteroskaźnikowe gatunku 1-go i 2-go (patrz Christoffel, Crelle LXX i wyżej Rozdział XVI § 8). Symbolami trójskaźnikowemi gatunku 1-go są:

$$\begin{bmatrix} kh \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_h} + \frac{d a_{hi}}{\partial x_k} - \frac{\partial x_{kh}}{\partial x_i}\right);$$

trójskaźnikowemi gatunku 2-go:

$$\begin{Bmatrix} kh \\ i \end{Bmatrix} = \sum_i A_{il} \begin{bmatrix} kh \\ l \end{bmatrix},$$

gdzie wielkości A są dopełnieniami algebraicznemi elementów, mających też same skaźniki w wyznaczniku spółczynników a. Symbolami czteroskaźnikowemi gatunku 2-go są:

$$\{kh, ij\} = \frac{\partial \begin{Bmatrix} ki \\ h \end{Bmatrix}}{\partial x_j} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} kj \\ h \end{Bmatrix}}{\partial x_i}$$

$$+ \sum_l \left[\begin{Bmatrix} ki \\ l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} lj \\ h \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} kj \\ l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} li \\ h \end{Bmatrix} \right];$$

wreszcie symbolami czteroskaźnikowemi gatunku 1-go są:

$$(kh, ij) = \sum_l a_{il} \{kl, ij\}$$

Pomiędzy temi symbolami istnieje bardzo wiele związków, które czytelnik znaleść może w „Geometryi różniczkowej“ Bianchi'ego.

Daną formę różniczkową kwadratową (1), skoro zmienne x uczynimy funkcyami innych zmiennych x', możemy przekształcić na inną formę różniczkową $\sum_1^n a'_{ij}\, dx'_i\, dx'_j$. Te dwie formy różniczkowe nazywają się wówczas równoważnemi.

Zasadniczem zagadnieniem w teoryi form różniczkowych jest szukanie warunków na to, aby dwie formy różniczkowe były równoważne.

Najprzód szuka się warunków, którym winny czynić zadość funkcye x zmiennych x'; warunki te wyrażają się $\frac{n^2(n+1)}{2}$ równaniami różniczkowemi cząstkowemi jednoczesnemi typu:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r\, \partial x'_s} + \sum_{hk} \begin{Bmatrix} hk \\ i \end{Bmatrix} \frac{\partial x_h}{\partial x'_s} \frac{\partial x_k}{\partial x'_r} = \sum_j \begin{Bmatrix} rs \\ j \end{Bmatrix}' \frac{\partial x_i}{\partial x'_j},$$

gdzie $\begin{Bmatrix} rs \\ j \end{Bmatrix}'$ oznacza symbol Christoffela, obliczony dla formy przekształconej.

Warunkami całkowalności tego układu równań o pochodnych cząstkowych będą równania warunkowe, którym powinny czynić zadość spółczynniki a, a' i ich pochodne Kombinując w odpowiedni sposób te równania warunkowe, możemy nadać im formę niezmienniczą, i w ten sposób będzie można otrzymać niezmienniki i parametry różniczkowe, t. j. wyrażenia, pozostające niezmienionemi przy przekształceniu zmiennych (patrz „Repertoryum“ t. I, str. 209). Nie będziemy tu zatrzymywali się nad szczegółami konstrukcyi tych parametrów różniczkowych i odsyłamy czytelnika do prac niżej wymienionych.

Liczba warunków przekształcalności dwóch form różniczkowych kwadratowych o n zmiennych wynosi $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

Aby forma różniczkowa kwadratowa o n

zmiennych dała się przekształcić na inną, dla której kwadrat elementu liniowego jest postaci $\sum\limits_{1}^{n} dx_i^2$, koniecznemi są warunki $(hk, ij)=0$, gdzie (hk, ij) jest symbolem Christoffela.

Zagadnienie o przekształceniu form różniczkowych obejmuje w sobie, jako przypadek szczególny, zagadnienie, dotyczące warunków, jakim czynić winna zadość przestrzeń, aby była liniową, t. j. aby kwadrat jej elementu liniowego dał się sprowadzić do postaci $\sum\limits_{i=1}^{n} dx'^2_i$.

Równania Lamego, odnoszące się do układów potrójnych ortogonalnych (Rozdz. XVI, § 14), odpowiadają właśnie warunkom liniowości przestrzeni trójwymiarowej.

Pokrewnem z zagadnieniem o przekształceniu jest szukanie warunków, przy których forma różniczkowa jest klasy 0, klasy 1 i t. d. Patrz Ricci (Ann. di mat. XII; Rend. Lincei, marzec, 1888).

Zagadnienie o przekształceniu form różniczkowych kwadratowych poczęli badać Christoffel (Crelle LXX) i Lipschitz (tamże LXX, LXXI, LXXII, LXXIV, LXXVIII, LXXXI, patrz też Bull. Darboux, IV, 1873). Lipschitz rozważał także przypadek formy różniczkowej stopnia wyższego. Suworow (w pracy rosyjskiej, streszczonej w Bull. Darboux IV) rozważał tylko przypadek form różniczkowych kwadratowych trójkowych i otrzymał trzy wyrażenia niezmiennicze; przypadek ogólny form kwadratowych roztrząsa Voss (Math. Ann. XVI).

---

§ 3.

Odkształcenie i krzywizna Riemanowska przestrzeni. Przestrzenie o krzywiźnie Riemannowskiej stałej.

Jeżeli przypomnimy sobie własność zasadniczą krzywizny Gaussowskiej K powierzchni, mianowicie, że nie zmienia się ona przez przekształcenie formy różniczkowej zasadniczej, to powstanie odrazu myśl o przejściu od badań nad przekształceniem form różniczkowych do badań nad uogólnieniem pojęcia krzywizny. W tym paragrafie mówić będziemy o krzywiznie przestrzeni według pomysłu Riemanna.

Podamy przedewszystkiem następujące ważne twierdzenie Beeza (Zeitschr. f. Math. und. Ph. XX, XXI; patrz także Ricci, Ann. di mat. XII, str. 163 i Cesàro, Geom. intrinseca).

Przestrzeń o $n > 2$ wymiarach, znajdująca się w przestrzeni o $n+1$ wymiarach, nie może w ogóle odkształcać się, pozostając zawsze w przestrzeni $n+1$ wymiarowej, t. j. nie można w ogóle zginać jej w przestrzeni otaczającej, przy zachowaniu niezmienności elementu liniowego, jak to można czynić z największą swobodą dla przestrzeni jednowymiarowych (linij) i ze swobodą ścieśnioną dla przestrzeni dwuwymiarowych (powierzchni). Zginanie jest możliwem tylko dla przestrzeni specyalnych. Jedyne odmiany, jakim może ulegać przestrzeń ogólna o liczbie wymiarów $n > 2$, bez wyjścia z przestrzeni $(n+1)$-wymiarowej, w której jest zawartą, są ruchy sztywne, t. j. przesunięcia i obroty i t. d.

Możemy teraz dać pojęcie krzywizny przestrzeni w punkcie, według Riemanna.

Niechaj będzie punkt P przestrzeni; w otoczeniu tego punktu nieskończenie małem poprowadźmy przez ten punkt wszystkie możliwe linie geodezyjne we wszystkich kierunkach, t.j. linie, stanowiące najkrótsze drogi pomiędzy punktem P a punktami nieskończenie blizkiemi tej przestrzeni; linie, dla których całka wyrażająca długość łuku, jest najmniejsza. Takich linij można poprowadzić ∞^{n-1}, jeżeli przestrzeń jest n-wymiarową. Można pomiędzy niemi wybrać n linij (i nie więcej nad n) takich, że jeżeli ds_1, $ds_2, \ldots ds_n$ są różniczkami ich łuków, liczonych od punktu P, wielkości $ds, ds, \ldots ds_n$ będą liniowo niezależne; różniczka łuku każdej innej linii geodezyjnej wyrazi się wtedy liniowo przez $ds_1, ds_2, \ldots ds_n$.

Rozważmy dwie takie linie np. linie, odpowiadające różniczkom ds_1, ds_2, wraz z nieskończenie wieloma innemi liniami, których różniczka łuku wyraża się wzorem $ds_{12} = \lambda_1 ds_1 + \lambda_2 ds_2$. Punkty wszystkich tych nieskończenie wielu linij w otoczeniu nieskończenie małem punktu P utworzą rozmaitość dwuwymiarową (powierzchnię), zawartą w przestrzeni uważanej; takich rozmaitości powierzchniowych nieskończonostkowych około punktu P można utworzyć $\frac{n(n-1)}{2}$.

Dla każdej z tych powierzchni obliczamy sposobem Gaussa krzywiznę w punkcie P (utworzymy ją sposobem znanym przy pomocy spółczynników formy różniczkowej kwadratowej o dwu zmiennych, wyrażającej kwadrat elementu liniowego powierzchni). Krzywiznę tę nazywamy za Riemannem krzywizną przestrzeni w punkcie P w tak określonej oryentacyi powierzchniowej. Widzimy tedy, że w każdym punkcie przestrzeni liczba krzywizn wynosi $\frac{n(n-1)}{2}$, t. j. tyle, ile wynosi liczba różnych oryentacyj powierzchniowych. W przypadku, gdy te wszystkie krzywizny, odnoszące się do danego punktu są równe i pozostają równemi w przejściu od punktu do punktu, mówimy o przestrzeniach ze stałą krzywizną Riemannowską.

Krzywizna stała może być dodatnia, ujemna albo równa zeru; jeżeli jest zerem, przestrzeń jest liniową.

Jeżeli krzywizna jest stałą dodatnią, przestrzeń nazywamy kulistą (sferyczną), przestrzenią Riemanna lub wreszcie eliptyczną; jeżeli krzywizna jest stałą ujemną, przestrzeń nazywamy pseudosferyczną, przestrzenią Łobaczewskiego, hyperboliczną lub nieeuklidesową w znaczeniu ściślejszem; jeżeli wreszcie krzywizna jest zerem, mamy, jak już powiedziano, przestrzeń liniową, którą nazywamy inaczej euklidesową lub paraboliczną (patrz Rozdz. XXI).

Przestrzeń pseudosferyczna lub hyperboliczna rozciąga się do nieskończoności, przestrzeń zaś eliptyczna nie jest nieskończona (Riemann).

Przestrzenie o krzywiznie stałej Riemanna mają ważną własność, że dają się rozwijać na samych sobie w ten sposób, iż z jednego ich punktu można się przenieść do każdego innego i to bez odkształcenia, które zresztą nie byłoby możliwe według twierdzenia Beeza; t. j. dla tych przestrzeni utrzymuje się w całej zupełności zasada przemieszczania w nich figur bez odkształcenia. jak to ma miejsce dla powierzchni kulistych przestrzeni zwykłej (Lipschitz w pracy, cyt. w § poprzedzającym; patrz Bianchi, Rend. Lincei 1898).

Element liniowy każdej przestrzeni o krzywiznie stałej Riemanowskiej K daje się zawsze przez odpowiedni wybór spółrzędnych (nazywanych niekiedy stereograficznemi) przedstawić w postaci (Riemann):

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}{1 + \frac{K}{4}(x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2)},$$

w której spółczynniki formy różniczkowej zasadniczej są proporcyonalne do wielkości stałych, a czynnik proporcyonalności jest funkcyą wszystkich zmiennych x.

Jeżeli obierzemy inny układ spółrzędnych, to element liniowy przestrzeni o krzywiznie stałej ujemnej $-\frac{1}{R^2}$ można będzie przedstawić w postaci:

$$ds^2 = \frac{R^2}{x^2}(dx^2 + dx_1^2 + \ldots dx_n^2),$$

gdzie wielkości x połączone są związkiem:

$$x^2 + x_1^2 + \ldots\ldots + x_n^2 = a^2;$$

a jest ilością stałą. Element liniowy przestrzeni o krzywiznie stałej dodatniej $+\frac{1}{R^2}$

daje się przedstawić przy pomocy wzoru:

$$ds^2 = \frac{R^2}{x^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 - dx^2),$$

gdzie wielkości x połączone są związkiem:

$$x^2 = a^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Ważną jest następująca własność przestrzeni o stałej krzywiznie Riemannowskiej.

Przy odpowiednim wyborze układu spółrzędnych (tego mianowicie, przy którym element liniowy ma postać ostatnio podaną), linie geodezyjne wyrażają się za pomocą równań liniowych (twierdzenie Beltrami'ego, Anali di mat. II); odwrotnie: jeżeli równania linij geodezyjnych przestrzeni są liniowemi dla specyalnego układu spółrzędnych, wtedy przestrzeń ma stałą krzywiznę Riemannowską (Schläfli, Annali di mat. V; Beltrami, tamże; patrz Rozdz. XVI, § 11).

W przestrzeni o krzywiznie stałej ujemnej dwa punkty indywidualizują linię geodezyjną, i to **bez wyjątku**; dwie geodezyjne, przechodzące przez jeden punkt, nie mają innych punktów wspólnych; przeciwnie, w przestrzeniach o krzywiznie stałej dodatniej **może się zdarzyć**, że dwie geodezyjne, przechodzące przez jeden punkt, spotykają się jeszcze i w innym punkcie (przypominamy dla przykładu zwykłą powierzchnię kulistą); ale nie zachodzi to dla wszystkich przestrzeni o krzywiznie stałej dodatniej. (Spostrzeżenie Kleina, patrz Rozdz. XXI, § 2).

Element liniowy przestrzeni o krzywiznie stałej dodatniej $\frac{1}{R^2}$ można przedstawić w postaci (Bianchi, Rend. Lincei VII, 1898, str 155):

$$ds^2 = R^2(dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2 + \ldots + \sin^2 x_1 \ldots \sin^2 x_{n-1} dx_n^2),$$

a element liniowy przestrzeni o krzywiznie stałej ujemnej $-\frac{1}{R^2}$ w każdej z trzech następujących postaci (Bianchi, patrz XVI, § 11):

$$ds^2 = dx_1{}^2 + \cosh^2\left(\frac{x_1}{R}\right)\sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k \text{ (typ hyperboliczny)},$$

$$ds^2 = dx_1{}^2 + e^{\frac{2x_1}{R}} \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k \text{ (typ paraboliczny)},$$

$$ds^2 = dx_1{}^2 + \sinh^2\left(\frac{x_1}{R}\right)^2 \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k \text{ (typ eliptyczny)}.$$

Jedynym z najprostszych układów spółrzędnych dla przestrzeni o krzywiznie stałej jest układ Weierstrassa (który znaleść już można w dawnej rozprawie Beltrami'ego z roku 1868); w układzie tym element liniowy ma dla przestrzeni o krzywiznie stałej ujemnej $-\frac{1}{R^2}$ postać:

$$ds^2 = R^2\left(\sum_i dy_i{}^2 - dy^2\right), \text{ przyczem } y^2 - \sum_i y_i{}^2 = 1\,;$$

dla przestrzeni zaś o krzywiznie stałej dodatniej postać:

$$ds^2 = R^2\left(dy^2 + \sum_i dy_i{}^2\right), \text{ przyczem } y^2 + \sum_i y_i{}^2 = 0\,,$$

Ten układ spółrzędnych otrzymujemy z układu, w którym równania linij geodezyjnych są liniowemi, kładąc $\frac{a}{x} = y$, $\frac{x_i}{x} = y_i$. Co do form, przy pomocy których przechodzimy od tego układu do układu Riemanna, patrz Bianchi (Ann. mat. (3), II, str. 102).

Potrzeba spełnienia sześciu warunków na to, aby przestrzeń trójwymiarowa miała krzywiznę stałą Riemanowską K; jeżeli element liniowy tej przestrzeni przyjmiemy w postaci:

$$ds^2 = H_1 dx_1^2 + H_2 dx_2^2 + H_3 dx_3^2,$$

wtedy warunkami temi będą:

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x_j \, \partial x_k} = \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial x_k} \frac{\partial H_i}{\partial x_j}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{H_j^2} \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} = -kH_i H_j;$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3)$$

(patrz Suworow l. c.).

Dla $K = 0$ otrzymujemy wzory Lamégo (patrz Rozdz. XVI, § 14), dające warunki na to, aby przestrzeń była liniowa.

Pojęcie krzywizny, wyżej przedstawione, zawdzięczamy Riemannowi (Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen); Beltrami (Ann. di math. II) rozwinął je w rozprawie o przestrzeniach o krzywiznie stałej; poczem nastąpiły wymienione już prace Schläfli'ego i Beltrami'ego (Ann. di mat. V), Lipschitza, Vossa i innych, wymienione w § 2, w których rozwinięto w odmienny sposób pojęcie krzywizny całkowitej Gaussowskiej dla rozmaitości, znajdującej się w przestrzeni wyższej, i otrzymano ważne przyczynki do teoryi krzywizny Riemannowskiej; w pracach tych znajdujemy też wzór na krzywiznę Riemannowską, wyrażoną przez spółczynniki formy różniczkowej kwadratowej zasadniczej

Przestrzeń o krzywiznie stałej Riemannowskiej ma, jak już wyżej powiedziano, nieskończenie wiele ruchów w samej sobie, a mianowicie daje się rozwinąć na siebie samą $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sposobami, jeżeli n jest liczbą jej wymiarów.

Powstaje zagadnienie o badaniu natury takich przestrzeni, które nie zezwalają na tyle przekształceń na same siebie, a mają tylko przekształceń ∞^r, gdzie $r < \frac{n(n+1)}{2}$. Tak np. w przestrzeni zwykłej, prócz kuli, mającej ∞^3 przekształceń na samą siebie, powierzchnie obrotowe mają ich tylko ∞^1.

Zagadnieniem tem zajmowali się: Lie (Theorie der Transformationsgr. I str. 310, III str. 575), Killing (Crelle CIX, str. 121), a w przypadku $n=3$ opracował to zagadnienie w zupełności Bianchi (Mem. della Società Ital. delle scienze (3), XI, str. 267, 1897).

§ 4.

Inne uogólnienie pojęcia krzywizny rozmaitości lub przestrzeni więcej niż o dwóch wymiarach, znajdującej się w przestrzeni wyższej.

Uogólnienie, które nadał Riemann pojęciu krzywizny, stosując je do przestrzeni wyższych, okazało się bardzo ważnem i zostało specyalnie wyzyskane w przypadku, w którym krzywizna Riemannowska jest stała. W innych przypadkach to uogólnienie krzywizny Gaussowskiej ma tę niedogodność, że krzywizna posiada nie jedną tylko wartość dla każdego punktu przestrzeni lub rozmaitości, a ma tych wartości $\frac{n(n-1)}{2}$, t. j. tyle, ile jest oryentacyj powierzchniowych w uważanym punkcie. Wynika stąd potrzeba odmiennego jeszcze uogólnienia pojęcia krzywizny.

Rozważmy rozmaitość $(n-1)$-wymiarową M_{n-1}, znajdującą się w jakiejkolwiek przestrzeni M_n n-wymiarowej. Jak w przypadku powierzchni, znajdujących się w przestrzeni liniowej, uważamy proste styczne do powierzchni, podobnie w tym przypadku rozważmy linie geodezyjne rozmaitości M_n, styczne do rozmaitości M_{n-1} w punkcie P. Dla powierzchni zwykłych kierunki linij krzywiznowych można uważać jako dwusieczne kierunków linij asymptotycznych, t. j. jako osi stożkowej, której asymptotami są te ostatnie kierunki (patrz Rozdz. XVI, § 9); podobnież w ogólności, jako miejsce stycznych do linij asymptotycznych uważajmy linie geodezyjne rozmaitości M_n ściśle styczne (t. j. z stycznością trójpunktową) do rozmaitości M_{n-1} w punkcie P; utworzą one rozmaitość kwadratową, której $n-1$ osi uważamy za kierunki linij krzywiznowych.

Każde dwie z tych osi są wzajemnie prostopadłe; ich długości, podobnie jak to ma miejsce dla przypadku zwykłego wskazującej Dupina w powierzchniach, są promieniami krzywizny przecięć normalnych rozmaitości M_{n-1}, wziętemi w kierunku linij krzywiznowych (promienie główne); odpowiadają one dokładnie maximom i minimom promieni krzywizny nieskończenie wielu przecięć normalnych.

Odwrotność iloczynu tych głównych promieni krzywizny nazywa się krzywizną całkowitą rezmaitości w uważanym punkcie.

Pojęcia powyższe wypływają z rozważań Lipschitza i Vossa (cyt. w § 2), opartych na teoryi form różniczkowych kwadratowych.

Kronecker (Berl. Ber. 1869, str. 170, 695) i Beez (Zeitschr. f. Math. XXI, XXIV, Math. Ann. VII) wychodzą z innego stanowiska, bardzo zresztą naturalnego.

Ograniczmy się dla prostoty do przypadku, w którym rozmaitość M_{n-1} znajduje się w przestrzeni liniowej S_n i rozważmy w tej ostatniej rozmaitość kulistą $(n-1)$-wymiarową o promieniu 1, t. j. rozmaitość, określoną przez równanie

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots = x_n^2 - 1 = 0;$$

równaniem zaś rozmaitości danej niechaj będzie:

$$F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0.$$

Ustanówmy odpowiedniość między punktami rozmaitości F i f, w sposób analogiczny do stosowanego przy odwzorowaniu kulistem powierzchni (Rozdz. XVI, § 8), t. j. niechaj odpowiadają sobie wzajemnie punkty, których proste normalne są równoległe. Rozważmy objętość elementu nieskończonostkowego rozmaitości w punkcie P i odpowiadającego mu elementu rozmaitości kulistej; granica stosunku drugiego do pierwszego jest krzywizną Gaussowską rozmaitości w punkcie P; jest ona równa odwrotności iloczynu promieni głównych, o których mowa w rozważaniu poprzedniem. Krzywizna ta K wyraża się wzozem:

$$K = -\frac{1}{S^{n+1}} \begin{vmatrix} 0, & F_1, & F_2, & \ldots, & F_n \\ F_0, & F_{11}, & F_{12}, & \ldots, & F_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_n, & F_{n1}, & F_{n2}, & \ldots, & F_{nn} \end{vmatrix},$$

gdzie F_i, F_{ij} są pochodnemi pierwszemi i drugiemi funkcyi F, S zaś równa się $\sqrt{F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2}$.

Co do tego wyrażenia patrz Ricci (Ann. di mat. XII, str. 165, a dla $n=4$ Suworow (Bull. des sciences math. IV, str. 186).

Nazwijmy rozmaitości M_{n-1}, należące do przestrzeni M_n, płaskiemi, gdy w każdym punkcie wszystkie $n-1$ promieni krzywizny są równe ∞; kulistemi, gdy wszystkie są równe tej samej wielkości skończonej, zachowującej stale swą wartość przy przejściu od punktu do punktu, wtedy:

W przestrzeni M_n jakiejkolwiek nie istnieją w ogólności rozmaitości płaskie i kuliste; jeżeli spółczynniki elementu liniowego przestrzeni M_n czynią zadość pewnym warunkom, wtedy przestrzeń M_n zawiera ∞^n płaszczyzn lub kul (danego promienia); w przypadku, gdy M_n zawiera ∞^n płaszczyzn, wtedy nie mogą w niej istnieć rozmaitości, których promienie główne krzywizny, będąc stałemi dla każdego pojedyńczego punktu, zmieniają się od punktu do punktu rozmaitości. Innemi słowy, zachodzi to samo co dla przestrzeni zwykłej, w której, prócz kul, nie ma innych powierzchni, mających własność, iż każdy ich punkt jest kołowym (umbilikiem).

W przestrzeni o krzywiznie stałej Riemanna (patrz § 3) istnieją rozmaitości, mające w każdym punkcie wszystkie promienie krzywizny równe, ale zmieniające się od punktu do punktu.

Jeżeli krzywizna całkowita jest zerem w każdym punkcie rozmaitości, wtedy rozmaitość ta ma własność, że z każdego jej punktu wychodzi linia geodezyjna przestrzeni M_n, mająca z nią styczność czteropunktową. Stosując tu nazwy, wzięte z teoryi powierzchni, możemy powiedzieć, że każdy punkt jest punktem parabolicznym (patrz Rozdz. XVI, § 9).

Jeżeli krzywizna całkowita jest zerem, i $n-2$ z pomiędzy promieni głównych krzywizny są ∞ w każdym punkcie rozmaitości $(n-1)$ - wymiarowej, wtedy przez analogię z przestrzenią zwykłą, mówimy, że rozmaitość jest rozwijalną, gdyż tworzy się ona z linij geodezyjnych przestrzeni M_n w sposób podobny do tego, w jaki powierzchnia rozwijalna tworzy się z prostych w przestrzeni zwykłej.

Pokrewnem z poprzedzającemi jest następujące twierdzenie A. Brilla (Math. Ann. XXVI, str. 302).

Rozmaitość pseudosferyczna (o krzywiznie Riemanna ujemnej) trójwymiarowa rzeczywista nie istnieje w przestrzeni liniowej czterowymiarowej, lecz tylko w przestrzeni liniowej pięciowymiarowej.

Ogólniej (Bianchi, Differentialgeometrie, Lipsk 1899, str. 619): W przestrzeni $(n+1)$ - wymiarowej S_{n+1} $(n>2)$ o krzywiznie Riemannowskiej K stałej nie istnieje żadna rozmaitość o krzywiznie Riemannowskiej K_0 stałej, jeżeli K_0-K jest ujemne; jeżeli ta różnica jest dodatnia, wtedy odpowiednie powierzchnie są tylko nadkulami.

Wspomnimy jeszcze o tem, że uogólniono dla rozmaitości wyższych i inne pojęcia oraz twierdzenia teoryi powierzchni.

Uogólnienie wzorów Codazzi'ego doprowadza do układu $\frac{1}{6} n(n-1)(5n-1)$ wzorów dla rozmaitości n-wymiarowej, znajdującej się w przestrzeni liniowej; twierdzenie Eulera uogólnił Jordan (Comptes rendus. LXXIX, 1874, str. 912), twierdzenie Dupina: Lie (Gott. Nachr. 1878), Klein (Math. Ann. V), Cesàro (Geom. intrinseca). Wykład Geometryi różniczkowej przestrzeni wyższych zawiera dzieło Killinga, Die Nicht-Euclid. Raumf., Lipsk 1885.

---

§ 5.

Geometrya różniczkowa rozmaitości dwuwymiarowych (powierzchni), znajdujących się w przestrzeniach o krzywiźnie stałej Riemanna.

W niektórych badaniach nowszych, a zwłaszcza w badaniach Bianchi'ego, uogólniono zwykłą geometryę różniczkową powierzchni dla przypadku, w którym te powierzchnie znajdują się w przestrzeniach trójwymiarowych o krzywiźnie stałej.

Niechaj elementem przestrzeni trójwymiarowej o krzywiźnie stałej będzie $\frac{1}{R^2}$ albo $-\frac{1}{R^2}$; odpowiedniemi formami będą $ds^2 = R^2(\pm dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$, gdzie wielkości x czynią zadość związkowi $x^2 \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 = 1$; znaki górne stosują się do przestrzeni hyperbolicznej.

Do każdej powierzchni w takiej przestrzeni należą dwie zwykłe formy różniczkowe kwadratowe; pomiędzy spółczynnikami E, F, G, D, D', D'' tych form zachodzą trzy związki, z których dwa pierwsze są wzorami Codazzi'ego (patrz

Rozdz. XVI, § 8), trzeci zaś związek Gaussa zamienia się na następujący:

$$\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}=k-K,$$

gdzie K jest krzywizną przestrzeni, k - krzywizną bezwzględną powierzchni (odnoszącą się do pierwszej formy różniczkowej zasadniczej). Strona pierwsza tego związku nazywa się krzywizną względną powierzchni; równa się ona odwrotności iloczynu dwóch promieni głównych krzywizny zredukowanych r_1, r_2.

Bianchi badał w przestrzeniach o krzywiznie stałej powierzchnie o krzywiznie bezwzględnej zerowej (Acc. Torino 1895, Annali di mat. (2) XXIV, (3) II), do których należy powierzchnia Clifforda (patrz Klein, Math. Ann. XXXVII, Killing, tamże XXXIX); badał powierzchnie najmniejsze (Rend. Lincei 1880, Annali di mat. (3), II; temi powierzchniami zajmowali się także Lipschitz, Crelle LXXXVIII, i Cayley (Compt. rend. CXI, 1890); powierzchnie typu Liouville'a, dla których $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=2$ albo $r_1+r_2=0$ i t. d. (patrz prace cytowane). Tenże autor zajmował się też układami Weingarten-a (patrz Rozdz. XVI, § 14) w przestrzeniach o krzywiznie stałej (Mem. Lincei (4), IV, 1887). Wyznaczeniem objętości w przestrzeniach o krzywiznie stałej zajmowali się: Simon (Math. Ann. XLII), D'Ovidio (Acc. Torino 1893), Loria (Giorn. di Battag. XXVI). O innych pracach w tym przedmiocie, nie odnoszących się specyalnie do geometryi nieskończonostkowej, mówimy w Rozdziale następnym.

Wspomnimy wreszcie, że podział foremny przestrzeni nieeuklidesowej lub pseudosferycznej na wielościany przystające prowadzi do zagadnienia o grupach nieciągłych podstawień liniowych jednej zmiennej (Poincaré p. Repert. I. Rozdz. XIV, § 2). O tych badaniach patrz Bianchi, (Math. Ann. XXXVIII, XL, XLII i Rend. Lincei 1893).

ROZDZIAŁ XXI.

GEOMETRYA BEZWZGLĘDNA I SPECYALNIE GEOMETRYA NIEEUKLIDESOWA NA PŁASZCZYZNIE I W PRZESTRZENI.

§ 1.

Zarys historyczny geometryi nieeuklidesowej.

Cała metryka geometryi euklidesowej opiera się na hypotezie, której logicznie nie można dać pierwszeństwa przed żadną inną podobną; jedyny powód jej pierwszeństwa pochodzi z prawdopodobnego przystosowania się do niej naszych zmysłów. Taką hypotezą jest w istocie rzeczy ta, która wiąże się ze sławnym postulatem o liniach równoległych Elementów Euklidesa.

W różnych czasach czyniono liczne usiłowania, by udowodnić ten postulat albo też zastąpić go innemi; po szczegóły w tym przedmiocie odsyłamy do dzieła Engela i Stäckela (Die Theorie der Parallelinien von Euklid bis auf Gauss" (Lipsk 1895). Pomiędzy temi usiłowaniami znanemi są najwięcej rozważania Legendre'a, zawarte w dwóch pierwszych wydaniach jego „Elementów geometryi" (1794), (patrz też Mém. de Paris 1833 i „Planimetrye" Baltzera); godnemi są też uwagi dawniejsze rozważania Girolama Saccheri'ego (Euclides ab omni noevo vindicatus etc., Medyolan 1733), na które Beltrami zwrócił uwagę matematyków (Lincei Rend. 1889), oraz Lamberta (1766), (patrz wspomn. wyżej dzieło Engela-Stäckela).

Zdaje się, że Gauss posiadał już sposób rozwiązania tego problematu (patrz Engel-Stäckel l. c., Math. Ann. XLIX, str. 159, Bull. des. sciences math. 1897, str. 206, wreszcie Gauss, Werke t. VIII, 1900); lecz dopiero Łobaczewski i Jan Bolyai, syn Wolfganga Bolyai'a, pierwsi w osobnych rozprawach podali nowe i oryginalne poglądy na prawdziwą istotę teoryi ogólnej równoległych, przyjmując za zasadę podstawową, że postulat o liniach równoległych nie jest prawdą, dającą się wyprowadzić logicznie z innych, lecz że jest od innych niezależnym. Prace Łobaczewskiego o tym przedmiocie są następujące: „Wykład zasad geometryi i t. d." (przedstaw. Uniwersytetowi kazańskiemu w r. 1826), „Nowe podstawy geometryi" (Zapiski Uniw. kazańskiego 1835—1858). Prace te Engel przełożył na język niemiecki i wydał w tomie, ogłoszonym u Teubnera w Lipsku w r. 1899; dalej idą: „Géométrie imaginaire" (Crelle XVII), „Geometrische Untersuchungen" (Berlin 1840), „Pangeometrya" (Kazań 1855). Praca Bolyai'a ma tytuł „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens etc." i wydane zostało jako dodatek do książki Wolfganga Bolyai'a „Tentamen etc." (1832).

W ten sposób utworzona została teorya, którą nazwano Geometryą bezwzględną, Geometryą urojoną, Pangeometryą, Geometryą abstrakcyjną, Metageometryą, albo mniej właściwie Geometryą nieeuklidesową. Powstała tedy Geometrya ogólna, w której nie zakładamy koniecznie protestu Euklidesa i która zawiera w sobie geometryę euklidesową, jako przypadek szczególny.

Nadmienić wypada, że nazwą Geometryi nieeuklidesowej oznaczamy tę część Geometryi bezwzględnej, z której wyłącza się przypadek szczególny geometryi euklidesowej; tym sposobem Geometrya bezwzględna dzieli się na dwie: na euklidesową i nieeuklidesową.

Dodajmy jeszcze, że Łobaczewski, przyjąwszy postulat o prostej nieskończonej, doszedł do jednej tylko z dwóch geometryj nieeuklidesowych, mianowicie do t. zw. geometryi hyperbolicznej (patrz § 2).

We wzorach Geometryi bezwzględnej występuje stała nieoznaczona, której wartość charakteryzuje przestrzeń rozważanych utworów geometrycznych w ten sam sposób, w jaki wartość krzywizny charakteryzuje przestrzeń Riemannowską o krzywiznie stałej; wartość tej stałej nieoznaczonej może dać tylko doświadczenie. Tym sposobem postulat Euklidesa lub każdy inny podobny można uważać jedynie za dany doświadczalnie i sprawdzający się w granicach naszych spostrzeżeń.

Do wyjaśnienia i utrwalenia nowej nauki przyczyniły się w dwóch różnych kierunkach pomysły Riemanna o przestrzeniach z krzywizną stałą (patrz Rozdz. XX) i pomysły Cayley'a (Phil, Trans. 1859) o sposobach określania rzutowego metrycznych własności figur. Pożytek, jaki geometrya nieeuklidesowa może mieć z teoryi powierzchni i przestrzeni o krzywiznie stałej według Riemanna, wykrył pierwszy Beltrami (Saggio d'interpretazione della Geometria non euclidea, Giorn. di Batt. VI, 1868; Annali di mat. I); związek zaś pomiędzy badaniami Cayley'a a pojęciami geometryi bezwzględnej znalazł Klein (Math. Ann. IV, VI). Te pokrewieństwa wykazały ściśle niemożność wywodu logicznego postulatu Euklidesa, co Łobaczewski i Bolyai przyjmowali byli bez dowodu.

Inne prace specyalne o Geometryi bezwzględnej ogłosili: Cayley (Math. Ann. V), Story (Amer. Journ. IV, V), Simon (Crelle CIV), którzy uogólnili wzory trygonometryczne; Battaglini (Giorn. di Batt XII, XVI), d'Ovidio (Mem. Lincei 1875—76, Atti Torino 1891—93) i wielu innych. Pomiędzy głównemi książkami wykładowemi o geometryi nieeuklidesowej wymieniamy dzieła: Frischhaufa (Lipsk 1875), Killinga (Lipsk 1885), Mansiona (Paryż 1893, Mathesis 1895), tegoż „Pierwsze zasady Mategeometryi" przekład polski S. Dicksteina, „Wiad. mat. I, 1897 i w osobnej odbitce), wykłady litografowane Kleina (1889—90). Dalej do oryginalnych prac o geometryi nieeuklidesowej należą: De Tilly'ego „Recherches sur les éléments de géométrie", Bruksela 1860) „Essai sur les principes fondam. etc." (Mém. de Bordeaux (2), III, 1877), „Essai de geom. anal. générale (Mém. de Belgique 1892), Flye S. Marie'go

„Études analytiques etc.“ (Paryż 1871). Przedmioty ogólniejsze traktuje „Fondamenti di Geometria“ Veronesego i prace cytowane wyżej i w Rozdz. XIX, § 1; dodatek do dzieła Veronesego zawiera bardzo szczegółowe wiadomości historyczno-krytyczne, patrz też artykuł Mansiona w Revue des questions scientifiques“ 1895) w którym uwzględnione są poszukiwania De Tilly'ego. O ważnych badaniach Liego w t. III dzieła „Theorie der Transformatiansgruppen“ patrz F. Klein Zur ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises (Math. Ann. L, 1898, str. 583—600), Barbarin, Ètudes de gèom. anal. non euclidienne, Bruksela 1900).

§ 2.

Postulat V-y Euklidesa. Wyniki, otrzymane przez Łobaczewskiego i Bolyai'a. Trzy geometrye z punktu widzenie elementarnego.

Postulat V-y Euklidesa brzmi:

Jeżeli kąty wewnętrzne, utworzone po jednej stronie przez prostą z dwiema innemi przecinającemi ją prostemi są takie, że suma ich jest mniejsza od dwóch kątów prostych, wtedy te dwie proste przedłużone spotykają się po tejże stronie.

Wymieniamy jeszcze inne postulaty euklidesowe, kładąc przy nich numery kolejne, przyjęte w wydaniach Euklidesa, np. w ważnem wydaniu Heiberga (1883—1888). Co do uwag krytycznych o postulatach, patrz Tannery (Bull. des sciences math. (2) V, VIII i artykuł Mansiona (Soc. scient. des Bruxelles XIV, 1889—90). O postulatach Geometryi patrz najnowszą pracę Hilberta: „Ueber die Grundlagen der Geometrie“ (Lipsk 1899).

I. Dwa punkty dane można zawsze połączyć prostą.

II. Linię prostą można przedłużyć.

III. Mając dany środek jakikolwiek i dany promień, możemy zawsze nakreślić koło.

IV. Wszystkie kąty proste są równe.

VI. Dwie proste nie zamykają sobą przestrzeni skończonej.

Trzy pierwsze postulaty nazywają się postulatami konstrukcyi.

Usiłowania udowodnienia postulatu V-go doprowadziły do zastąpienia go innemi. Wallis w 1693 r. w dwóch notach do „Elementów Geometryi" (patrz Engel-Stäckel l. c.) zastąpił go następującym: Istnieją trójkąty podobne. Postulat ten jest zresztą za obszerny i można go zastąpić innym (spostrzeżenie Saccheri'ego): Istnieją dwa trójkąty o kątach odpowiednio równych i nierównoważne.

Inny postulat zamiast Euklidesowego wprowadził Legendre:

a) Z punktu zewnątrz prostej można poprowadzić do niej jednę tylko równoległą, co odpowiada przyjęciu, że istnieje jeden tylko punkt w nieskończoności na prostej.

Twierdzeniami równoważnemi postulatowi Euklidesa są następujące:

b) Suma trzech kątów trójkąta równa się dwom kątom prostym.

c) W czworoboku, w którym dwa kąty są proste a dwa boki przeciwległe, przyległe kątom prostym, są równe—i dwa pozostałe kąty są proste (postulat, przyjęty przez Saccheri'ege.

d) W czworoboku trójprostokątnym kąt czwarty jest prostym (postulat, przyjęty przez Lamberta i mało różniący się od poprzedniego).

Hypotezy. w których przyjmujemy, że te kąty są rozwarte albo ostre, nazywamy dla krótkości hypotezą kąta rozwartego i hypotezą kąta ostrego Saccheri'ego lub Lamberta.

Niezależnie od przyjęcia postulatu, mamy twierdzenia następujące;

Jeżeli przyjmiemy istnienie trójkąta, dla którego suma kątów równa się dwom kątom prostym, to toż samo zachodzić będzie w każdym innym trójkącie (Legendre).

Jeżeli przyjmiemy, że prosta ma punkty w nieskończoności, to suma kątów trójkąta nie może być wyższa od dwóch kątów prostych (Legendre).

Przy tem założeniu nie można przyjąć hypotezy kąta rozwartego Saccheri'ego lub Lamberta.

Jeżeli postulat Saccheri'ego lub Lamberta jest prawdziwy w jednym przypadku, to jest prawdziwy zawsze.

Jeżeli hypoteza kąta prostego albo rozwartego Saccheri'ego lub Lamberta jest prawdziwa w jednym przypadku, to jest prawdziwa zawsze.

Stosownie do tego, czy suma trzech kątów trójkąta jest mniejsza od dwóch kątów prostych, równa dwóm kątom prostym, albo większa od dwóch kątów prostych, prawdziwą jest odpowiednio hypoteza kąta ostrego Saccheri'ego, hypoteza kąta prostego, wreszcie hypoteza kąta rozwartego (Saccheri).

Przy przyjęciu hypotezy o sumie dwóch kątów trójkąta, mniejszej od dwóch kątów prostych, dwie proste albo przecinają się, albo są asymptotami jedna dla drugiej (zbliżają się nieograniczenie, nie spotykając się) albo też mają prostopadłą wspólną, od której począwszy, rozchodzą się (Tw. Saccheri'ego).

Przy tejże hypotezie pole trójkąta jest proproporcyonalne do niedomiaru kątowego, jeżeli przez niedomiar rozumiemy różnicę pomiędzy dwoma kątami prostemi a sumą trzech kątów trójkąta (tw. Lamberta).

Jeżeli przyjmiemy, że przez punkt, położony wewnątrz kąta trójkąta, można poprowadzić prostą przecinającą oba ramiona kąta, to wyniknie stąd, że suma trzech kątów trójkąta nie jest mniejsza od dwóch kątów prostych (Legendre, patrz Baltzer, Leipz. Ber. 1870, Crelle LXXIII, str. 372).

Z twierdzeń poprzedzających wypływa jasno podział Geometryi ogólnej na trzy główne gatunki, mianowicie:

I. Geometrya Łobaczewskiego lub hyperboliczna. Prosta jest w niej nieograniczona lub otwarta. Pystulat V-y nie stosuje się; stosuje się natomiast postulat VI-y. Suma kątów trójkąta jest mniejsza od dwóch kątów prostych.

Geometrya ta odpowiada hypotezie kąta ostrego Saccheri'ego lub Lamberta.

Z każdego punktu można poprowadzić do prostej danej dwie proste równoległe. W geometryi tej wyobrażamy sobie, że prosta ma dwa punkty w nieskończoności.

Jeżeli oznaczymy, jak zwykle, przez a, b, c, A, B, C boki i kąty trójkąta, wtedy zachodzić będą związki następujące:

$$\sin\frac{b}{R}\sin C = \sin\frac{c}{R}\sin B, \quad \text{(Twierdzenie o wstawie)}$$

$$\sin\frac{c}{R}\cos A + \sin\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}\cos C = \sin\frac{b}{R}\cos\frac{a}{R},$$

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A, \quad \text{(Tw. o dostawie)}$$

$$\cos A + \cos B\cos C = \sin B\sin C\cos\frac{a}{R},$$

$$\sin C\sin A = \sin B\cos\frac{a}{R} - \cos C\sin A\cos\frac{b}{R},$$

w których R oznacza liczbę stałą czysto-urojoną; możnaby więc sposobem zwykłym zastąpić w tych wzorach funkcye kołowe funkcyami hyperbolicznemi.

Trzeci z powyższych związków podał w r. 1825 Taurinus, który równocześnie z Łobaczewskim pracował nad zasadami geometryi (patrz (Engel-Stäckel l. c.).

Lambert zaś w r 1766 zauważył, że geometrya na tej hypotezie kąta ostrego oparta, daje się interpretować na kuli o promieniu urojonym; poprzednie wzory trygonometryczne stwierdzają słuszność tego spostrzeżenia.

W Geometryi Łobaczewskiego krzywe, których punkty mają odległości równe od prostej danej (krzywe równych odległości), posiadają następujące własności.

1. Normalne ich są wszystkie prostopadłe do prostej, i odwrotnie.

2. Każda prosta, spotykająca krzywą w dwóch punktach, tworzy w tych punktach kąty równe z krzywą.

3. Dwie styczne, poprowadzone do krzywej z jednego punktu, mają równe długości.

Krzywa, mająca własności 2 i 3 i nadto własność, że jej normalne są wszystkie równoległe, nazywa się horycyklem lub krzywą graniczną Łobaczewskiego. Jest ona przypadkiem granicznym krzywych równych odległości i zarazem przypadkiem granicznym koła.

Horycykl można uważać za koło, którego środek znajduje się w nieskończoności.

W przestrzeni hyperbolicznej o trzech wymiarach mamy podobnie horysferę lub powierzchnię graniczną Łobaczewskiego; powierzchnie te odpowiadają powierzchniom, które Bolyai oznaczał literą *F*.

II. Geometrya euklidesowa lub paraboliczna. Prosta jest nieograniczona lub otwarta Stosują się pewniki V i VI. Suma kątów trójkąta równa się dwóm kątom prostym.

Geometrya ta odpowiada hypotezie kąta prostego Saccheri'ego lub Lamberta.

Z punktu można poprowadzić jednę tylko równoległą do prostej danej. Prosta ma jeden tylko punkt w nieskończoności.

Stosują się tu powyższe wzory trygonometryczne, gdy przyjmiemy w nich $\frac{1}{R} = 0$ lub $R = \infty$, a zatem gdy zamiast $R \sin \frac{a}{R}$ weźmiemy a, zamiast $\cos \frac{a}{R}$ jedność.

III. Geometrya Riemanna lub eliptyczna. Prosta jest zamknięta i skończona. Nie stosuje się ani pewnik V, ani też tem bardziej pewnik VI. Suma kątów trójkąta jest większa od dwóch prostych.

Geometrya ta odpowiada hypotezie kąta rozwartego Saccheri'ego lub Lamberta.

Z punktu danego nie można poprowadzić żadnej równoległej do prostej danej; prosta nie ma żadnego punktu w nieskończoności.

Wzory trygonometryczne są te same, co poprzednio, ale należy w nich R uważać za liczbę rzeczywistą dodatnią.

Klein pierwszy zauważył, że geometryę tę należy podzielić na dwie, a to sposobem następującym:

Przy pomocy wzorów trygonometrycznych znajdujemy, że jeżeli dwie proste spotykają się w pewnym punkcie, to spotykają się i w drugim odległym na $R\pi$ od pierwszego, oraz że gdy na prostej wyjdziemy z pewnego punktu, to po drodze równej najwyżej $2R\pi$, powrócimy do punktu wyjścia. Przy tej zasadzie możliwe są dwie hypotezy, a mianowicie:

a) Przebiegając po prostej, wracamy po raz pierwszy do punktu wyjścia, przebywszy drogę równą $R\pi$; wtedy punkt drugi, w którym spotykają się dwie proste, jest ten sam co pierwszy stąd wypływa twierdzenie: dwie proste spotykają się w jednym tylko punkcie; przez dwa punkty przechodzi jedna tylko prosta. Długość prostej równa się wtedy $R\pi$. Geometrya, na tej hypotezie oparta, nazywa się geometryą Riemanna pojedyńczą lub geometryą eliptyczną pojedyńczą.

W Geometryi tej największa odległość dwóch punktów jest $\frac{1}{2}R\pi$; jeżeli damy punkt, to wszystkie punkty odległe od niego na $\frac{1}{2}R\pi$, tworzą prostą.

Płaszczyzna w tej geometryi nie dzieli się na dwie części przez prostą na niej.

b) Przebiegając po prostej, powracamy po raz pierwszy do punktu wyjścia, odbywszy drogę $2R\pi$; wtedy dwie proste spotykają się zawsze w dwóch punktach i istnieją pary punktów, przez które przechodzi nieskończenie wiele prostych. Długość każdej prostej równa się $2R\pi$; Geometrya, oparta na tej hypotezie, nazywa się Geometryą Riemanna lub eliptyczną podwójną (Klein).

Największa odległość pomiędzy dwoma punktami jest $R\pi$, dla danego punktu istnieje tylko jeden punkt, odległy od niego na $R\pi$. Istnieje zawsze prostopadła wspólna do dwóch prostych danych. Płaszczyzna przez każdą prostą na niej albo przez każdą linię zamkniętą rozpada się na dwie części. Każde koło ma dwa środki.

Ta specyalna Geometrya Riemannowska jest podobna do Geometryi sferycznej i daje się interpretować na kuli.

Jeżeli interpretujemy Geometryę eliptyczną na powierzchni o krzywiznie stałej dodatniej, wtedy podział tej Geometryi na dwie inne ma związek z hypotezą podwójną, jaką uczynić można o dwustronności i jednostronności powierzchni (patrz Rozdz. XVIII, § 1).

To odróżnienie dwóch geometryj Riemannowskich, nie spostrzeżone przez niektórych matematyków, np. przez Beltrami'ego, znalazł Klein (Math. Ann. IV, str. 604 nota i VI, str. 125), patrz także Newcomb (Crelle LXXXIII i Killing (l. c.); ten ostatni nazywa przestrzeń eliptyczną pojedyńczą: formą biegunową przestrzeni Riemanna. Porów. t. I wspomnionych już wykładów litografowanych Kleina, str. 243, 293.

Zauważmy, że postulat IV stosuje się do wszystkich trzech geometryj; odpowiada on w pewien sposób postulatowi o niezmienności figur, bez którego nie można zbudować żadnego układu geometrycznego (patrz De Tilly, Essai sur les principes fondam., Bordeaux, 1879, str. 18); podobnież stosują się do wszystkich trzech geometryj postulaty I, II, III.

De Tilly w pracach, cytowanych w paragrafie poprzednim, a zwłaszcza w pracy z r. 1893, utworzył trzy geometrye, wychodząc jedynie z pojęcia odległości, uważanego za pierwotne, i wyłączając kąty. Już dawniej Fourier miał tęż samą myśl zbudowania całej geometryi euklidesowej na tem pojęciu (porów. ustęp, powtórzony w „Mathesis" IX, str. 139—141, 1889). De Tilly dla scharakteryzowania trzech geometryj korzysta ze związku, zachodzącego pomiędzy odległościami czterech punktów na płaszczyźnie i ze związku pomiędzy odległościami pięciu punktów w przestrzeni, wskazanych już przez Lagrange'a, badanych przez Cayley'a, uogólnionych wreszcie przez Scheringa na przestrzenie nieeuklidesowe (patrz Rozdz. I, § 3 i 4), i na tych związkach opiera zasady trzech geometryj. Z tychże zasad otrzymał on też dowód niemożliwości wywodu logicznego postulatu Euklidesa, czego pierwsi twórcy geometryi bezwzględnej nie uczynili, a co wynikło dopiero z prac Beltrami'ego. Nadto De Tilly podał dowód, że nie istnieje żaden inny system geometryi, prócz systemu euklidesowego i dwóch nieeuklidesowych. Co do krytyki prac De Tilly'ego patrz „Fondamenti" Veronesego str. 592.

---

§ 3.

Zwykłe związki metryczne w postaci rzutowej.

Związki metryczne zwykłe można przedstawić w postaci rzutowej, uważając na płaszczyznie dwa punkty kołowe urojone w nieskończoności, w przestrzeni zaś koło urojone w nieskończoności (Rozdz. IV, § 3; V, § 2):

Niechaj $x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$ będą spółrzędne jednorodne dwóch punktów P, P'; $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$ spółrzędne dwóch punktów kołowych płaszczyzny (Rozdz. I, § 3); odległość między dwoma punktami wyraża się wzorem:

$$r = R\frac{\sqrt{(xx'\xi)(xx'\xi')}}{(x\xi\xi')(x'\xi\xi')},$$

gdzie R jest stałą zależną od jedności miary.

Jeżeli wprowadzimy jednostkę miary, przyjmując, że odległość dwóch punktów a, a' równa się 1, wtedy wyrażenie rzutowe odległości r będzie postaci:

$$r = \frac{\sqrt{(xx'\xi)(xx'\xi')}\,(a\xi\xi')(a'\xi\xi')}{\sqrt{(aa'\xi)(aa'\xi')}\,(x\xi\xi')(x'\xi\xi')}.$$

Niechaj $u_x = 0$, $u'_x = 0$ będą równania dwóch prostych na płaszczyznie w spółrzędnych jednorodnych; kąt pomiędzy prostemi wyrazi się we wzorach rzutowych w ten sposób:

$$\cos\omega = \frac{1}{2}\frac{u_\xi u'_{\xi'} + u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'}\,.\,u'_\xi u'_{\xi'}}}, \quad \sin\omega = \frac{i}{2}\frac{u_\xi u_{\xi'} - u'_{\xi'} u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'}\,.\,u'_\xi u'_{\xi'}}}.$$

Ważnem jest w tym względzie twierdzenie Laguerre'a (Nouv. Ann. XII, str. 64, 1853, podane już przez nas Roz. I, § 3):

Kąt ω dany jest przez wzór

$$\omega = \frac{1}{2}\log\frac{u_\xi\,.\,u'_{\xi'}}{u_{\xi'}\,.\,u'_\xi},$$

t. j. ω równa się $\frac{i}{2}$, pomnożonemu przez logarytm stosunku harmonicznego czwórki, utworzonej przez dwie proste dane i przez dwie proste, idące do punktów kołowych.

Aby znaleść wzory analogiczne dla przestrzeni, należy wprowadzić rozważanie koła urojonego w nieskończoności.

Dajmy, że mamy wyznaczyć odległość punktów danych w spółrzędnych jednorodnych: x_1, x_2, x_2, x_4; x'_1, x'_1, x'_3, x'_4.

Utwórzmy stożek kwadrykowy, który rzuca z punktu y_1, y_2, y_3, y_4 przestrzeni koło urojone w nieskończoności i niechaj $F(X, y)$ będzie równaniem takiego stożka, w którym X oznaczają spółrzędne bieżące; niechaj dalej $T(X) = 0$ będzie równaniem płaszczyzny, przechodzącej przez koło urojone w nieskończoności. Odległość pomiędzy dwoma punktami przestrzeni wyrazi się wzorem:

$$r = R\,\frac{\sqrt{F(x,x')}}{T(x)\,T(x')},$$

gdzie R jak zwykle oznacza stałą zależną tylko od jednostki miary, a którą możemy wyznaczyć, jak wyżej.

Niechaj będą dwie proste, wychodzące z punktu y; niechaj na jednej z nich znajduje się punkt (x), na drugiej punkt (x'); oznaczmy przez $F_{x'}$ biegunową formy F z biegunem (x') i względem zmiennych (x), przez $\Phi_{x'}(xy) = 0$ — równanie płaszczyzny stycznej, poprowadzonej przez punkt (x') do stożka z wierzchołkiem w punkcie (y); kąt pomiędzy dwiema prostemi wyrazi się wtedy wzorami:

$$\cos\omega = \frac{F_{x'}(x,y)}{\sqrt{F(x,y)\,F(x',y)}}, \quad \sin\omega = i\,\frac{\sqrt{\Phi_{x'}(x,y)}}{\sqrt{F(x,y)\,F(x',y)}},$$

a pomiędzy F i Φ zachodzić będzie związek:

$$\Phi_{x'}(xy) = F^2_{x'}(xy) - F(xy)\,F(x'y).$$

Kąt pomiędzy dwiema płaszczyznami jest iloczynem $\frac{i}{2}$ przez logarytm stosunku podwójnego czwórki, utworzonej z dwóch płaszczyzn danych i z dwóch innych, przechodzących przez oś, i stycznych do koła urojonego w nieskończoności.

Jeżeli koło urojone w nieskończoności uważać będziemy za kwadrykę obwiednią zniekształconą, wtedy trzy osi główne jakiejkolwiek kwadryki będą trzema krawędziami czworościanu samosprzężonego (patrz Rozdz. V, § 1 i 4), odnoszącego się do danej kwadryki i do kwadryki zniekształconej, którą przedstawia koło urojone w nieskończoności.

Kwadryki spółogniskowe (Rozdz. V, § 3) są kwadrykami, wpisanemi w tęż samą powierzchnię rozwijalną, zawierającą koło urojone w nieskończoności.

---

§ 4.

Absolut Cayley'a. Metryka rzutowa. Interpretacya rzutowa trzech geometryj.

Cayley w szóstej swej rozprawie o teoryi form algebraicznych dwójkowej i trójkowej (Phil. Trans. 1859) podał pomysł głęboki, o którym mówić tu będziemy; pomysł ten Klein (Math. Ann. IV, VI) zastosował do rzutowej interpretacyi geometryi nieeuklidesowej.

Formy gatunku 1-go. Ustalmy na prostej parę punktów, którą nazwijmy absolutem prostej. Jeżeli x_1, x_2 są spółrzędnemi jednorodnemi bieżącemi punktu prostej, wtedy parę punktów przedstawi forma dwójkowa kwadratowa zmiennych x_1, x_2, którą oznaczmy przez Σ_{xx}. Do absolutu odnieśmy stosunki metryczne pomiędzy punktami prostej.

Niechaj x, x' będą punkty dane, ξ, ξ' punkty absolutu; utwórzmy stosunek podwójny

$$D = \frac{(x\xi)(x'\xi')}{(x\xi')(x'\xi)},$$

i nazwijmy odległością dwóch punktów x, x' wyrażenie:

$$r = R \log D,$$

gdzie R jest stałą dowolną. Jeżeli $\Sigma_{xx'}$ oznacza biegunową formy Σ_{xx} o biegunie x', wtedy:

$$r = R \log \frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx} \Sigma_{x'x'}}}{\Sigma_{xx'} - \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx} \Sigma_{x'x'}}} .$$

O d l e g ł o ś ć r c z y n i z a d o ś ć z w i ą z k o w i z a s a d n i c z e m u (któremu czynią zadość i odległości na prostej, pojmowane w zwykłem znaczeniu tego wyrazu):

$$r_{12} + r_{22} + r_{31} = 0 ,$$

gdzie r_{ij} oznacza odległość punktów i, j. Meżemy odróżnić trzy przypadki:

I. Dwa punkty ξ i ξ' są różne (t. j. wyróżnik formy Σ jest różny od zera) i urojone sprzężone. W przypadku tym mamy g e o m e t r y ę e l i p t y c z n ą n a p r o s t e j .

II. Dwa punkty ξ, ξ' zlewają się. Mamy g e o m e t r y ę p a r a b o l i c z n ą.

III. Dwa punkty ξ, ξ' są rzeczywiste. M a m y g e o m e t r y ę h y p e r b o l i c z n ą.

W geometryi hyperbolicznej dwa punkty ξ, ξ' mają odległość nieskończoną od każdego innego punktu; prosta ma dwa punkty w nieskończoności

Odległość w przypadku geometryi parabolicznej wypada zawsze równa zeru, gdy R dąży do ∞. Kładziemy wtedy $\xi'_1 = \xi_1 + \nu\zeta_1$, $\xi'_2 = \xi_2 + \varepsilon\zeta_2$, zamiast R piszemy $\frac{R}{\varepsilon}$ i określamy odległość jako granicę, mianowicie:

$$r = \lim_{\varepsilon=0} \left[\frac{R}{\varepsilon} \log D \right] .$$

W geometryi parabolicznej jedyny punkt ξ jest punktem w nieskończoności, t. j. ma odległość ∞ od każdego innego punktu; o d l e g ł o ś ć r p o m i ę d z y d w o m a p u n k t a m i wyraża się jako różnica dwóch dwustosunków

$$r = \frac{(xO)(E\xi)}{(x'\xi)(EO)} - \frac{(xO)(E\xi)}{(x\xi)(EO)},$$

gdzie O jest początkiem na prostej, E zaś punktem — jednością.

W Geometryi eliptycznej długość prostej jest skończona i równa $2R\pi$.

Formy gatunku 2-go. Wyobraźmy sobie na płaszczyznie stożkową o równaniu $\Sigma_{xx}=0$, nazwijmy ją absolutem płaszczyzny; równaniem jej w spółrzędnych prostej niechaj będzie $S_{uu}'=0$.

Każda prosta płaszczyzny przecina stożkową w dwóch punktach, które są rzeczywistemi, urojonemi sprzężonemi albo zlewającemi się; te punkty będą punktami zasadniczemi dla Geometryi na prostej płaszczyzny.

Z każdego punktu płaszczyzny można poprowadzić dwie styczne do stożkowej absolutnej; te dwie proste będą prostemi zasadniczemi dla geometryi pęku prostych, wychodzących z tego punktu.

Odległość dwóch punktów (x), (x') określamy za pomocą wyrażenia:

$$r = R \log \frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx}\Sigma_{x'x'}}}{\Sigma_{xx'} - \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx}\Sigma_{x'x'}}};$$

kąt dwóch prostych (u), (u') za pomocą wyrażenia:

$$\omega = R' \log \frac{S_{uu'} + \sqrt{S^2_{uu'} - S_{uu}S_{u'u'}}}{S_{uu'} - \sqrt{S^2_{uu'} - S_{uu}S_{u'u'}}}.$$

Stożkowa absolutna jest miejscem punktów płaszczyzny, mających odległość nieskończoną od punktu danego.

Miejscem punktów płaszczyzny, mających odległość stałą od punktu danego (x) jest stożkowa, dotykająca stożkowej absolutnej w dwóch punktach, w których tejże stożkowej dotyka biegunowa punktu (x). I wzajemnie: Proste, które z prostą daną (u) tworzą kąt stały, obwodzą stożkową, dotykającą stożkowej absolutnej w dwóch punktach jej przecięcia z prostą u.

Proste, spotykające się na stożkowej absolutnej, tworzą kąt zero i dla tego można uważać je za równoległe. Stąd: z każdego punktu można do prostej danej poprowadzić dwie równoległe (rzeczywiste, urojone, zlewające się).

Dajmy, że stożkowa Σ jest urojoną i połóżmy $R = iR_1$, $R' = iR'$; długość każdej prostej rzeczywistej na płaszczyznie będzie skończona i równa $2R_1\pi$, suma zaś kątów w pęku prostych będzie $2R'_1\pi$.

Jeżeli przyjmiemy jeszcze $R'_1 = \frac{1}{2}$, otrzymamy Geometryę Riemanna lub eliptyczną (patrz § 2).

Jeżeli przyjmiemy, że stożkowa Σ jest rzeczywistą i położymy $R = iR_1$, $R' = iR'_1$ i $R'_1 = \frac{1}{2}$, otrzymamy Geometryę Łobaczewskiego lub hyperboliczną.

Jeżeli wreszcie stożkowa zniekształca się i jako obwiednia redukuje się do pary punktów, otrzymujemy Geometryę paraboliczną w znaczeniu szerszem, która sprowadza się do Geometryi euklidesowej, gdy te dwa punkty są punktami kołowemi (urojonemi sprzężonemi).

Niema już teraz żadnej trudności w uogólnieniu tych rozważań na formy gatunku 3-go, a w szczególności na przestrzeń zwykłą. W przestrzeni tej absolutem będzie kwadryka. Stosownie do tego, czy kwadryka ta jest urojoną, rzeczywistą ale nie o tworzących rzeczywistych, albo zniekształconą (jako obwiednia) na stożkową płaską lub koło urojone, otrzymujemy trzy geometrye: eliptyczną, hyperboliczną i paraboliczną § 2-go.

§ 5.

Odwzorowanie geometryi nieeuklidesowej na powierzchniach lub rozmaitościach wyższych przestrzeni euklidesowej, podane przez Beltramiego.

Geometrya Łobaczewskiego jest tożsama z geometryą w przestrzeni o krzywiznie stałej ujemnej Riemanna (patrz Rozdz. XX); dość tylko zamiast linij prostych podstawić linie geodezyjne. Stąd w szczególności, geometrya płaska Łobaczewskiego lub hyperboliczna zlewa się z geometryą na powierzchni o krzywiznie stałej ujemnej (patrz Rozdz. XVI, § 11) i dla tego geometryę tę można nazwać także pseudosferyczną.

Powiedziano już w § 2, że Lambert w r. 1766 spostrzegł, że geometryę, wypływającą z t. zw. hypotezy kąta ostrego, można interpretować na kuli o promieniu urojonym.

Minding (Crelle XIX, XX, 1839—1840) spostrzegł był, że wzory trygonometryczne, odnoszące się do trójkątów pseudosferycznych, można otrzymać z wzorów dla trójkątów kulistych, zmieniając R na $R\sqrt{-1}$ (Rozdz. XVI, § 11). Przedmiotem tym zajmował też się Codazzi (Ann. di Tort. 1857), lecz dopiero Beltrami (Giorn. di Bat. IV, 1868) znalazł pierwszy prawdziwe i piękne wyjaśnienie tych faktów. W późniejszej rozprawie (Ann. di matt. II) Beltrami rozciągnął na przestrzenie trójwymiarowe rozważania, poczynione poprzednio dla płaszczyzny.

Stała R, zachodząca we wzorach Geometryi Łobaczewskiego (patrz § 2), jest pierwiastkiem kwadratowym z odwrotności krzywizny przestrzeni, w której interpretujemy tę geometryę.

Co do geometryi płaskiej Riemanna lub eliptycznej, to powiedzieliśmy już w § 2, że dzieli się ona na dwie. Tylko jedna z nich daje się interpretować na kuli; druga odpowiada wprawdzie geometryi powierzchni o krzywiznie stałej, ale takiej, której spójność jest różna od spójności powierzchni kuli. Patrz uwagi Kleina w wykładach litogr. (I, 1892, str. 243—293) i to, co powiedziano wyżej na str. 697.

ROZDZAŁ XXII.

NOWA GEOMETRYA TRÓJKĄTA

Punkty i koła Lemoine'a i Brocarda. Prosta Eulera. Koło dziewięciu punktów lub koło Feuerbacha. Koła Taylora i Tuckera. Prosta Simpsona.

Podamy w tym ostatnim Rozdziale najważniejsze rezultaty t. zw. Geometryi trójkąta.

Niechaj będzie trójkąt ABC, oraz prosta, która tak jest nachylona do boków AB, AC; jak prosta BC odpowiednio do boków AC, AB, nazywają się przeciwrównoległą (antiparallela) do boków BC.

Punkty środkowe wszystkich przeciwrównoległych do jednego boku trójkąta znajdują się na prostej, przechodzącej przez wierzchołek przeciwległy temu bokowi; prosta ta nazywa się symedianą trójkąta.

Trzy symediany przechodzą przez jeden punkt, zwany punktem Lemoine'a.

Odległości punktu Lemoine'a od trzech boków trójkąta są proporcyonalne do tych boków, a suma kwadratów tych odległości jest najmniejsza (minimum).

Jeżeli z punktu Lemoine'a poprowadzimy równoległe do trzech boków trójkąta, to sześć punktów, w których te proste spotykają boki, tworzą sześciokąt Lemoine'a i leżą na okręgu koła, zwanego pierwszem kołem Lemoine'a lub kołem potrójnego stosunku.

Środek pierwszego koła Lemoine'a jest środkiem prostej, łączącej punkt Lemoine'a ze środkiem koła opisanego na trójkącie.

Jeżeli D, D'; E, E'; F, F' są wierzchołki sześciokąta Lemoine'a, położone odpowiednio na trzech bokach trójkąta, to odcinki DD', EE', FF' są w stosunku sześcianów boków, na których się znajdują.

Jeżeli przez punkt Lemoine'a poprowadzimy przeciwrównoległe do boków trójkąta, to sześć punktów, w jakich te proste przetną boki, do których nie są przeciwrównoległemi, znajdują się na okręgu koła, które nazywa się drugiem kołem Lemoine'a lub kołem dostawy.

Odcinki. które to koło odcina na bokach trójkąta, są proporcyonalne do dostaw kątów trójkąta.

Niechaj będzie dany trójkąt ABC, punkt O na płaszczyznie taki, że kąty OAB, OBC, OCA są równe, oraz punkt O' taki, że katy $O'CB$, $O'BA$, $O'AC$ są równe. Pierwszy z tych punktów nazywa się punktem dodatnim Brocarda, drugi punktem ujemnym Brocarda. Rozróżnienie to, oczywiście, ma ważność bezwzględną tylko wtedy, gdy ustalimy położenie wzajemne wierzchołków trojkąta zasadniczego; przyjmijmy tedy, że droga AB, BC, CA jest drogą o zwrocie przeciwnym ruchowi skazówek zegarowych.

Kąt OAB równa się kątowi $O'BA$ i podobnież rzecz się ma z kątami pozostałemi; wspólna wartość tych kątów nazywa się kątem Brocarda. Kąt ten nie może być większy o jednę trzecią od kąta protego. Wielkość jego daje wzór:

$$\operatorname{cotg} \omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C.$$

Koło spółśrodkowe z kołem pierwszem Lemoine'a i przechodzące przez pierwszy punkt Lemoine'a, a więc przez środek koła opisanego na trójkącie, nazywa się kołem Brocarda.

Ze środka koła, opisanego na trojkącie, poprowadźmy prostopadłe do boków i niechaj A', B', C' będą punkty, w których te prostopadłe przecinają okrąg Brocarda, wtedy proste BA' CB', AC' zbiegają w punkcie dodatnim Brocarda, proste AB', BC', CA' w punkcie ujemnym Brocarda.

Koło Brocarda przechodzi przez dwa punkty Brocarda.

Jeżeli L_1, L_2 są promienie dwóch kół Lemoine'a, B promień koła Brocarda, R promień koła opisanego na trójkącie, wtedy zachodzą związki:

$$R^2 = 3L_1{}^2 + B^2, \qquad L_1{}^2 = L_2{}^2 + B^2.$$

Koło Brocarda nazywamy jeszcze kołem pięciu punktów lub kołem siedmiu punktów.

Jeżeli z danego punktu poprowadzimy równoległe do boków trójkąta, to sześć punktów, w których te proste przecinają boki, leżą na jednej stożkowej, zwanej stożkową sześciu punktów; stożkowa ta staje się kołem (pierwszem kołem Lemoine'a), gdy punkt, z którego prowadzimy równoległe, jest pierwszym punktem Lemoine'a.

Punkt Lemoine'a i środek ciężkości trójkąta otrzymuje się jeden z drugiego przy pomocy konstrukcyi, należącej do przekształcenia Desargues'a (patrz Rozdz. XVII); innemi słowy: jeden z tych punktów powstaje przez przekształcenie Desargues'a z drugiego. W podobnej zależności od siebie są dwa punkty Brocarda.

W trójkącie punkt H przecięcia wysokości (zwany ortocentrem), punkt S przecięcia trzech środkowych (środek ciężkości—barycentr), punkt M przecięcia trzech prostopadłych, wyprowadzonych z punktów środkowych boków, (środek koła opisanego) leżą na jednej prostej, zwanej prostą Eulera (Novi Comm. Petrop. XI, 1765, str. 114). Prosta MN podzielona jest w punkcie S wewnętrznie w stosunku $\frac{HS}{SM} = 2$.

Koło dziewięciu punktów, zwane także przez niektórych błędnie (patrz pracę Mackaya niżej cytowaną) kołem Eulera, jest to koło, przechodzące przez środki trzech boków trójkąta. Przechodzi ono także i przez środki trzech wysokości i przez środki trzech odcinków, zawartych pomiędzy wierzchołkami a punktem spotkania wysokości trójkąta.

Środek N koła dziewięciu punktów znajduje się na prostej Eulera i leży na niej tak, że odcinek MN dzieli się wewnętrznie w punkcie S (środku ciężkości) i zewnętrznie w punkcie H (punkcie spotkania wysokości) w stosunku 2 : 1.

Promień koła dziewięciu punktów jest połową promienia koła opisanego.

Koło dziewięciu punktów jest styczne w czterech punktach do czterech kół: wpisanego i zewnętrznie wpisanych w trójkąt (twierdz. Feuerbacha, Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlingen Dreiecks, Norymberga 1822; dlatego niektórzy koło dziewięciu punktów nazywają także kołem Feuerbacha).

Koło dziewięciu punktów jest też styczne do każdego z dwunastu kół, wpisanych wewnętrznie i zewnętrznie do trójkątów, utworzonych z ortocentru i dwóch z pomiędzy trzech wierzchołków trójkąta (tw. Hamiltona, Nouv. Ann. 1862, str. 183).

Na okręgu dziewięciu punktów istnieją inne jeszcze godne uwagi punkty trójkąta, mianowicie dwa punkty Schroetera (Nouv. Ann. 1865, str. 178), punkt Vigari'ego (Math. 1888), punkt Lemoine'a (J. de math. élém. de Longchamps 1889, str. 93; 1890, str. 118), dwa punkty Boubalsa (tamże 1891, str. 215).

Koło dziewięciu punktów jest przypadkiem szczególnym stożkowej dziewięciu punktów, przechodzącej przez sześć środków boków czworoboku zupełnego i przez trzy punkty przekątne.

Jeżeli jeden z wierzchołków czworokąta zupełnego staje się ortocentrem trzech pozostałych, wtedy stożkowa staje się kołem; a jeżeli cztery wierzchołki znajdują się na okręgu, wtedy stożkowa jest hyperbolą równoboczną.

Stożkowa dziewięciu punktów jest miejscem środków stożkowych pęku, którego punktami podstawowemi są cztery wierzchołki czworokąta.

Bibliografia koła dziewięciu punktów: Brianchon i Poncelet (Ann. de Gergonne XI, 1820, str. 215), Steiner (tamże XIX, str. 86 i Geom. Constr. Berlin 1833, str. 55), Casey (Quart. J. 1860, IV), Kücher (Grunert's Archiv XLVII), Schroeter (Crelle LXVIII, Math. Ann. VII), Lappe (Crelle LXXI), Baur (Schlöm. Zejtich. XII), Schubert (tamże XVI). Historyę koła siedmiu punktów podał Mackay (Proc. of the R. Soc. of Edinburgh XI, 1892—93).

Koło Taylora jest to koło, przechodzące przez sześć punktów, które są rzutami ortogonalnemi spodków wysokości na boki trojkąta zasadniczego (Proc. Lond. Soc. XX, 1889).

Jeżeli rozważymy trójkąt homotetyczny z trójkątem zasadniczym, przy przyjęciu punktu Lemoine'a za środek homotetyi, wtedy boki tych dwóch trójkątów przetną się w sześciu punktach, znajdujących się na tem samem kole. Koła takie nazywamy kołami Tuckera.

Koło opisane, dwa koła Lemoine'a, koło Taylora są kołami specyalnemi Tuckera; miejscem środków wszystkich kół Tuckera jest prosta, będąca średnicą koła Brocarda.

Obwiednia kół Tuckera jest elipsą zwaną elipsą Brocarda; ogniskami jej są dwa punkty Brocarda; jest ona wpisana w trójkąt i dotyka boków trójkąta w spadkach symedian (Brocard, Ann. de Toulouse 1887, J. de math. spéc. 1889; Catalan, Mém. de Belg. XLIX, 1891).

Inną interesującą własnością elementarną trójkąta jest następująca:

Jeżeli z punktu okręgu koła, opisanego na trójkącie, poprowadzimy prostopadłe do trzech jego beków, to spodki tych prostopadłych znajdować się będą na jednej prostej, zwanej prostą spadkową Simpsona lub Wallace'a trójkąta.

Obwiednią prostej Simpsona jest hypocykloida trójostrzowa (patrz Rozdz. XVII, § 12).

Twierdzenie o spodkowej podał Servois (Ann, de Georg IV, 1813—14; str. 251), przypisując je Simpsonowi; Gergonne (tamże) dał dowód analityczny twierdzenia i wypowiedział uogólnienie tegoż dla czworościanu, uznane wszakże przez Durrande'a (tamże VII) za błędne. Inne uogólnienie podał Steiner (tamże XIX). Porówn. Brocard (Bull. Soc. mat.) i Mackay (Soc. mat. Edinburgh IX, 1890, Assoc. Franç. 1893). Wskazówki bibliograficzne znaleść można w Interm. des math. III, 169; IV. 7.

Badania nad t. zw. geometryą trójkąta nie są zbyt dawne. Pomijając niektóre prace dawniejsze lub cytowane poprzednio, wymieniamy jako, pierwsze najważniejsze, badania: Lemoine'a (Nouv. Ann. 1873, Assoc. Franç. 1873—74), Brocarda (Nouv. Corresp. math. de Catalan III, 1877, 1879, 1880), Neuberga (tamże 1879, 1880, Assoc. Franç. 1888, Mém de Belg. 1890), Schoutego (Acad. d'Amsterdam, 1886), Cesàro (Nouv. Ann. 1887, Mathesis 1890) i t. d. Patrz także Lemoine (Bull. Soc. math. XII, 72. XIV, 167), F. Caspary, Zur neueren Dreiecksgeometrie (Archiv. der Math. u. Phys. (3) I, 1901, str. 143—158). W dziele Casey'a (A sequel to Euclid. 188, przekład francuski p. t. Géom. élém. récente, Paryż 1890 zebrana jest większa część rezultatów Geometryi trójkąta); inną pracą tego rodzaju jest Poulaina (Nouv. geom. du triangle, Paryż 1892). W literaturze polskiej mamy pracę S. Kępińskiego p. t. „Własności szczególnych trójek punktów trójkąta" (Prace mat.-fiz. II, 1890, str. 169—219). Wymieniamy datej: Rouché et Comberousse, Traité de géométrie 6 éd., Paryż 1891, str. 429—485. Note III, Sur la géométrie récente du triangle; A. Emmerich, Die Brocard'schen Gebilde etc., Berlin 1891). Krótszy zbiór rezultatów geometryi trójkąta znajdujemy w Periodico di mat. VI. Historyę tego przedmiotu obejmuje Vigarié Esquisse historique sur la géom. du triangle (Assoc. Fr. 1889).

Uogólnienia podanych wyżej twierdzeń, odnoszące się do czworokątów, sześciokątów i t. d. poczynili: Neuberg (Mathesis 1885), Tucker (Educ. Times 1885), Casey (Irish. Acad. 1886, Mathesis 1890), Neuberg i Tarry (Assoc. Franç. 1886) i t.d.; uogólnienie do czworościan poczynili Picquet (Assoc. Franç. 1874) i Neuberg (Mem. de l'Acad. de Belgique 1884).

SPROSTOWANIA.

Do Tomu I.

Str. 74 i 81. Całkę Eulera, oznaczoną na tych stronicach literą C, należy oznaczyć literą A, dla utrzymania jednostajności znakowania, przyjętego na str. 426 i innych.

Str. 78 wierz 5-y od dołu, zamiast Lsurent, powinno być Laurent.

Str. 154 wiersz 3-ci, dodać: Całka ta znana jest od dłuższego czasu; łatwą metodę jej obliczenia podał Lobatto (Crelle IX).

Str. 155 wiersz 3-ci od góry, zamiast wyrażenia po stronie drugiej wzoru, powinno być:

$$\int \frac{da}{\sqrt{a^2-1}} \arccos \frac{1+a\cos x}{a+\cos x}, \text{ przy warunku } a > 1.$$

Wzór ten może służyć do znalezienia całki, określonej w granicach od 0 do π.

Str. 158 wiersz 1 i 5. Funkcya $\log(\log x)$ jest czysto-urojoną pomiędzy 0 i 1 i dlatego całki, występujące w tych wzorach należy rozumieć, jako podzielone przez $-\log(-1)$. Taż sama uwaga stosuje się do wzoru Mascheroni'ego na str. 426.

Str. 160 wiersz 1-y od góry dodać: liczby a i b są liczbami całkowitemi różnemi.

Str. 373 wiersz 1-y od dołu powinno być:

$$c_{2n}^{(i)} = Dc_{2n-2}^{(i)} - \text{i t. d.}$$

i nadto należy zauważyć, że stosując w tym wzorze działanie D, uwzględniamy okoliczność, iż wielkości c zależą też wyraźnie od e_i, że więc należy dołączyć wyraz:

$$+\frac{\partial c_{2n-2}^{(i)}}{\partial e_i} Dc_i,$$

t. j.

$$+\frac{\partial c_{2n-2}^{(i)}}{\partial e_i}\left(4e_i^2 - \frac{2}{3}g_2\right).$$

Do Tomu II.

Str. 146 w wierszu 15 od góry, zamiast: „które są opisane około stożkowej f' i wpisane w stożkową f“ powinno być: „które są opisane około stożkowej f' oraz ∞^1 trójkątów biegunowych względem stożkowej f' i wpisanych w stożkową f“.

O tych trójkątach pisali: Smith (Proc. Lond. math. Soc. II), Rosanes (Math. Ann. VI), Darboux (Bull. des sciences math. I, 348).

Str. 553. Do bibliografii linij geodezyjnych dołączamy: Sochocki „Prace mat. fiz.“ III, 1892, str. 82—109.

SKOROWIDZ ALFABETYCZNY
rzeczy.

*) Liczby oznaczają stronice.