ERNESTO PASCAL.
Profesor uniwersytetu w Pawii.

RACHUNEK NIESKOŃCZONOŚCIOWY

PRZEŁOŻYŁ

S. DICKSTEIN.

CZĘŚĆ II.

RACHUNEK CAŁKOWY.

Z 15 drzeworytami w tekście.

WARSZAWA.
WYDAWNICTWO REDAKCYI PRAC MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH.
W drukarni J. Sikorskiego, Warszawa, Warecka 14.

—

1896.

Дозволено Цензурою, Варшава 31 Декабря 1896 г.

TREŚĆ.

ROZDZIAŁ I.

Całki określone i nieokreślone.

ROZDZIAŁ II.

Całkowalność funkcyj

ROZDZIAŁ III.

Obliczanie całek nieokreślonych i określonych.

ROZDZIAŁ IV.

Całki wielokrotne.

ROZDZIAŁ V.

ROZDZIAŁ VI.

Geometrya całkowa.

ROZDZIAŁ VII.

Równania różniczkowe.

ROZDZIAŁ I.

CAŁKI OKREŚLONE I NIEOKREŚLONE.

---

§ 1.

Definicya całki określonej.

Niechaj będzie funkcya $f(x)$ skończona w całym przedziale od a do b. Podzielmy ten przedział na n przedziałów cząstkowych, które oznaczmy przez $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. Niechaj f_r będzie wartością funkcyi w jednym z punktów przedziału δ_r, albo granicą wyższą lub niższą wartości funkcyi f w tym przedziale. Utwórzmy sumę:

$$\sum_1^n f_r \, \delta_r,$$

rozciągniętą na wszystkie przedziały cząstkowe. Suma ta ma wartość skończoną i będzie miała zawsze taką wartość, gdy będziemy powiększali liczbę przedziałów, zmniejszając każdy z nich.

Jeżeli przy nieograniczonem zmniejszaniu przedziałów cząstkowych i równoczesnem dążeniu liczby n do nieskończoności, istnieje granica powyższej sumy i jest niezależną od sposobu, w jaki zmniejszamy obszerność przedziałów i bez względu na wybór wartości f_r, wtedy granicę tę nazywamy całką określoną funkcyi $f(x)$ od a do b. Liczby a i b nazywają się granicą niższą i granicą wyższą całki określonej, a przedział od a do b nazywa się drogą całkowania.

Całka określona oznacza się za pomocą symbolu:

$$\int_a^b f(x)\, dx\,,$$

gdzie piszemy najprzód znak $\int$, (będący zniekształtnioną literą S, początkową wyrazu suma), potem piszemy funkcyę $f(x)$, której całkę obliczyć mamy, pomnożoną przez różniczkę dx zmiennej niezależnej.

Aby istniała granica sumy, o której wyżej mowa, koniecznem jest, by funkcya $f(x)$ czyniła zadość pewnym warunkom, które rozpatrzymy w następnych paragrafach. Nadto, aby powyższa definicya całki określonej zachowała znaczenie, jest koniecznem, by funkcya $f(x)$ nie stawała się nieskończenie wielką w przedziale od a do b i by obie te granice były skończonemi.

Później rozciągniemy powyższe określenie do przypadków, w których funkcya staje się nieskończoną w pewnym punkcie lub jedna z granic całkowania jest nieskończoną. Zachowujemy do odpowiedniego rozdziału badanie całkowalności funkcyj; obecnie w paragrafach następnych przyjmować będziemy, że funkcye, z któremi mamy do czynienia, są zawsze całkowalnemi.

Według podanego określenia obliczmy całkę od a do b najprostszej funkcyi $x - c$, t. j. całkę:

$$\int_a^b (x-c)\, dx\,.$$

Dla prostoty podzielmy przedział od a do b na n części równych.

Połóżmy $b - a = h$, wtedy każdy z przedziałów cząstkowych δ_r będzie równy $\frac{h}{n}$. Punktami podziału będą odpowiednio:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{h}{n},\ x_2 = a + \frac{2h}{n}, \ldots$$

W każdym z tych przedziałów cząstkowych powinniśmy obrać jeden punkt i obliczyć dla niego wartość funkcyi. Za taki punkt obierzmy punkt krańcowy każdego przedziału. Suma zasadnicza, o którą nam idzie, będzie tedy zbudowana w ten sposób:

$$\frac{h}{n}\left[(a-c) + \left(a-c+\frac{h}{n}\right) + \left(a-c+\frac{2h}{n}\right)\right.$$
$$\left. + \ldots + \left(a-c+\frac{n-1}{n}\,h\right)\right]$$

i równa się:

$$\frac{h}{n}\left[n\,(a-c) + n\,\frac{(n-1)}{2}\,\frac{h}{n}\right]$$
$$= (b-a)\,(a-c) + \frac{1}{2}\,\frac{n-1}{n}\,(b-a)^2\,.$$

Przechodząc do granicy dla $n = \infty$, otrzymujemy na wartość całki określonej:

$$(b-a)\,(a-c) + \frac{1}{2}\,(b-a)^2\,,$$

lub

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - c\,(b-a).$$

Jak widzimy, proces rachunkowy na tej drodze jest skomplikowany z punktu widzenia praktycznego; dla funkcyj bardziej złożonych obliczanie granicy sumy może być nawet praktycznie niewykonalnem. Dlatego w następstwie pokażemy, w jaki sposób na podstawie pewnej własności zasadniczej całek funkcyj ciągłych, można obliczać te całki przy pomocy znanych pojęć i wzorów rachunku różniczkowego. W ten sposób wiążą się w swej istocie oba rachunki: różniczkowy i całkowy.

---

§ 2.

Własności zasadnicze całek określonych. Wzór na wartość średnią.

Ustalimy w tym paragrafie niektóre własności ogólne, wynikające wprost z definicyi całki określonej.

1. Jeżeli odwrócimy granice całkowania, to wartość nowej całki równać się będzie wartości dawnej, wziętej ze znakiem przeciwnym.

W samej rzeczy, wykonajmy według określenia całkowanie od a do b, a potem całkowanie w kierunku odwrotnym od b do a. Jest widocznem, że w pierwszym i drugim przypadku możemy utworzyć te same przedziały cząstkowe δ_r, tylko wartość ich w obu przypadkach będzie znaku przeciwnego. Stąd wszystkie wyrazy sumy w pierwszym przypadku przejdą na wyrazy znaku przeciwnego, nie zmieniając swej wartości.

2. Widocznym jest nadto wzór:

$$\int_a^b c\, f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx\,,$$

gdzie c jest stałą.

3. Jeżeli $f(x) = 1$, wtedy całka od a do b sprowadza się do sumy $\Sigma \delta_r$, t. j. do długości drogi całkowania $b—a$.

4. Niechaj na całym przedziale od α do β funkcya będzie całkowalną. Obierzmy w tym przedziale trzy punkty dowolne a, b, c. Można łatwo dowieść, że:

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b .$$

W samej rzeczy, wyobraźmy sobie, że punkt c znajduje się pomiędzy punktami a i b. Utwórzmy zgodnie z określeniem całkę od a do b. Ponieważ wybór przedziałów δ_r jest dowolny, to możemy go uskutecznić w ten sposób, aby punkt c był jednym z punktów przedziału i aby pozostał nim na wszystkich stadyach przejścia do granicy; przytem sposób, w jaki same przedziały δ_r zdążają do zera, pozostaje zupełnie dowolnym. To uczyniwszy widzimy, że suma $\sum f_r \delta_r$ rozdziela się na dwie części: jednę, idącą od a do c, drugą — od c do b. Przeszedłszy do granicy znajdziemy potwierdzenie podanego wzoru.

Jeżeli punkt c znajduje się zewnątrz przedziału od a do b np. na prawo od punktu b, wtedy, według dopiero co dowiedzionej własności, mamy:

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c ;$$

lecz

$$\int_b^c = -\int_c^b ,$$

a więc także

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b .$$

5. Jeżeli $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$,... są funkcyami całkowalnemi, to i suma ich będzie całkowalną i całka sumy równać się będzie sumie całek pojedyńczych funkcyj, lub, innemi słowy, znak całki jest przemienny ze znakiem sumy.

W samej rzeczy, utwórzmy sumę:

$$\Sigma\delta_r\,[f_r^{(1)}+f_r^{(2)}+\cdot\cdot], \tag{1}$$

której granica stanowi całkę sumy

$$f^{(1)}(x)+f^{(2)}(x)+\ldots \tag{2}$$

Suma ta równa się widocznie:

$$\Sigma f_r^{(1)}\delta_r+\Sigma f_r^{(2)}\delta_r+\ldots \tag{3}$$

Jeżeli przyjmiemy, że każda z funkcyj danych jest całkowalną, t. j., że istnieją granice sum $\Sigma f_r^{(1)}\delta_r$, $\Sigma f_r^{(2)}\delta_r$, ..., to istnieć będzie i granica sumy tych wyrażeń, a stąd wynika pierwsza część naszego twierdzenia, t. j. że suma skończonej liczby funkcyj całkowalnych jest funkcyą całkowalną. Nadto, przechodząc do granicy w wyrażeniu (3), równem (1), widzimy, że każdy z wyrazów w (3) staje się całką odpowiedniej z pomiędzy funkcyj $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, ..., co uzasadnia i drugą część naszego twierdzenia.

6. Możemy teraz wyprowadzić wzór na wartość całki określonej.

Niechaj przedziały δ_r będą równe i pozostają takiemi zawsze na wszystkich stadyach przejścia do granicy. Innemi słowy, dzielimy przedział całkowania $b-a$ na coraz większą liczbę części równych. Wtedy każdy przedział δ_r równa się $\frac{b-a}{n}$, a więc podług określenia:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n=\infty}\frac{b-a}{n}\sum_1^n f_r\,,$$

skąd:

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n f_r}{n},$$

t. j. stosunek wartości całki określonej do przedziału całkowania można uważać za granicę średniej arytmetycznej wartości, które przyjmuje funkcya w pojedyńczych punktach całego przedziału.

Stąd możemy wyprowadzić twierdzenie użyteczne w wielu razach. Niechaj f i F oznaczają odpowiednio granicę niższą i wyższą wartości funkcyi w przedziale od a do b. Wtedy jest widoczne, że wyrażenie $\frac{\sum_1^n f_r}{n}$, jako średnia arytmetyczna, nie może być mniejsze od f, ani większe od F, posiada przeto wartość, zawartą między temi dwiema wartościami skrajnemi. Wartość tę możemy oznaczyć przez $f + \theta\,(F-f)$, gdzie θ jest liczbą zawartą między 0 i 1.

Otrzymujemy tedy wzór:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,[f + \theta\,(F-f)]\,.$$

Jeżeli funkcya $f(x)$ jest ciągłą, wtedy w przedziale przybierze wszelką wartość, zawartą pomiędzy maximum i minimum; a stąd istnieć będzie w przedziale punkt, w którym funkcya ma właśnie wartość $f + \theta\,(F-f)$. Oznaczywszy ten punkt przez $a + \vartheta\,(b-a)$, gdzie ϑ, jak zwykle, oznacza liczbę zawartą pomiędzy 0 i 1, możemy napisać inny wzór, stosujący się do przypadku, w którym funkcya jest ciągłą, mianowicie:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f\,(a + \vartheta\,(b-a))\,.$$

Wzór ten nazywa się wzorem na wartość średnią, i jak zobaczymy później, jest w związku z podobnie nazwanym „wzorem rachunku różniczkowego“ (patrz „Rachunek różniczkowy“, str. 77).

---

§ 3.

Całka określona, uważana jako funkcya granic. Funkcya całkowa.

Ustalmy w całce określonej jednę z granic, np. granicę niższą a zmieniajmy zaś granicę wyższą, którą oznaczmy przez x i zmieniajmy ją tak, aby w przedziale od a do x funkcya dana była wciąż całkowalną. Widocznem jest wtedy, że dla każdej wartości x istnieć będzie jedyna i oznaczona wartość całki określonej, którą będzie można przeto uważać za funkcyę granicy wyższej x.

Dowiedziemy przedewszystkiem, że ta funkcya jest ciągłą. Powiększmy granicę wyższą x o ilość h, którą potem będziemy zmniejszali do zera. Utwórzmy różnicę dwóch całek określonych, jednej od a do $x + h$ i drugiej od a do x; będzie:

$$\int_a^{x+h} f(x)\, dx - \int_a^x f(x)\, dx = \int_x^{x+h} f(x)\, dx.$$

Na zasadzie twierdzenia o wartości średniej, udowodnionego w poprzedzającym paragrafie, możemy napisać:

$$\int_x^{x+h} f(x)\, dx = h\,[f + \theta\ (F - f)],$$

gdzie f i F oznaczają odpowiednią wartość najmniejszą i największą, jaką ma funkcya pomiędzy x i $x + h$.

Ponieważ funkcya f jest zawsze skończoną, przeto czynnik drugi po prawej stronie poprzedniego wzoru musi być ilością skończoną i zostaje taką, gdy zmniejszamy h. Wynika stąd, że strona prawa przy zdążaniu ilości h do zera będzie także dążyła do zera, co właśnie stwierdza ciągłość funkcyi całkowej.

Przejdźmy teraz do różniczkowalności całki. Z poprzedniego wzoru otrzymujemy:

$$\lim_{h=0} \frac{\int\limits_a^{x+h} - \int\limits_a^{x}}{h} = \lim_{h=0} [f + \theta\,(F - f)].$$

Strona pierwsza jest tu pochodną całki, a zatem pochodna ta istnieć będzie lub nie, o ile istnieje lub nie istnieje granica wypisana po stronie prawej.

Przyjmijmy najprzód, że funkcya $f(x)$ jest funkcyą ciągłą w punkcie x. Wtedy można zawsze znaleźć taki przedział h, aby różnica dwóch wartości funkcyi w tym przedziale, a zatem i różnica pomiędzy jej wartością największą i najmniejszą, była mniejsza od pewnej jakkolwiek danej ilości. Ponieważ $f + \theta\,(F - f)$ jest właśnie pewną wartością funkcyi, zawartą pomiędzy jej wartościami najmniejszą i największą, te zaś dwie wartości przy powyższem założeniu dążą do jednej i tej samej wartości funkcyi w punkcie x, przeto do tej samej wartości dąży i wartość średnia. A więc w przypadku, gdy $f(x)$ jest funkcyą ciągłą w punkcie x, możemy powiedzieć, że pochodna funkcyi całkowej $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ w punkcie x jest wartością funkcyi $f(x)$, znajdującej się pod znakiem całkowania, w tymże punkcie x, t. j.

$$\frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(x)\,dx = f(x).$$

Przy temże założeniu możemy podobnie oznaczyć pochodną całki, względem granicy niższej. Pamiętając, że $\int\limits_a^x = -\int\limits_x^a$ i stosując twierdzenie o różniczkowaniu dopiero co dowiedzione dla granicy wyższej, mamy:

$$\frac{d}{da}\int\limits_a^x f(x)\,dx = -f(a)\,.$$

W przypadku, gdy funkcya nie jest ciągłą w punkcie x, pochodna całki będzie miała wartość inną, i może nawet nie istnieć.

Widzimy tedy, że dla funkcyj ciągłych zagadnienie całkowania jest odwrotnością zagadnienia różniczkowania, t. j. sprowadza się do szukania funkcyi, której pochodna jest równa funkcyi danej. Korzystamy poniżej z tego faktu zasadniczego dla odszukania głównych wzorów rachunku całkowego.

---

§ 4.

Całka określona w dwóch przypadkach osobliwych.

W definicyi całki określonej, podanej w § 1, przyjęliśmy najprzód, że funkcya pozostaje zawsze skończoną na całej drodze całkowania i nadto, że granice całkowania są obie skończone. Zbadamy teraz dwa przypadki osobliwe, w których nie spełniają się te dwa warunki.

Załóżmy najprzód, że funkcya staje się nieskończoną w punkcie i dla utrwalenia myśli, przyjmijmy, że staje się właśnie nieskończoną dla granicy wyższej b. Rozważmy całkę:

$$\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\,,$$

gdzie ε oznacza ilość dowolnie małą dodatnią. Tę całkę możemy obliczyć zgodnie z określeniem dawniejszem, gdyż podług założenia funkcya w całym przedziale od a do $b-\varepsilon$ (dla każdego ε dowolnie małego) nie staje się nieskończoną. Całka ta będzie pewną funkcyą ilości ε i może mieć granicę oznaczoną dla $\varepsilon = 0$. Chcąc podać określenie całki $\int_a^b$ uczynimy to, zachowując naturalnie własności najbardziej zasadnicze funkcyi całkowej, np. własność ciągłości w odniesieniu do granicy wyższej. Stąd mimowoli nasuwa się myśl, by za wartość całki $\int_a^b$ uważać granicę wartości całki $\int_a^{b-\varepsilon}$ dla $\varepsilon = 0$, gdy ta granica istnieje.

Jeżeli punkt, w którym funkcya staje się nieskończoną, nie jest punktem krańcowym przedziału całkowania, t. j. gdy nie jest jedną z granic całkowania, lecz punktem pośrednim, wtedy, mając zawsze na widoku zachowanie własności ogólnych całek określonych, można postępować w ten sposób. Niechaj c będzie punktem pomiędzy granicami całkowania a i b, w którym funkcya staje się nieskończoną. Rozdzielmy całkę od a do b na dwie części w punkcie c, i rozciągając znaną własność całek zwyczajnych, t. j. kładąc:

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

określmy każdą z dwu całek po stronie drugiej za pomocą wyżej podanego wzoru. Tym sposobem będziemy mieli określenie:

$$\int_a^b = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'=0} \int_{c+\varepsilon'}^b ,$$

przy założeniu, że wskazane po stronie drugiej granice istnieją.

Jeżeli istnieje więcej punktów, w których funkcya staje się nieskończoną, wtedy należy zastosować wzór powyższy odpowiednią liczbę razy.

Łatwo znaleźć warunek konieczny i dostateczny istnienia granic, o których mowa w określeniu. Jeżeli ma istnieć granica całki $\int\limits_a^{b-\varepsilon}$ dla $\varepsilon = 0$, to według teoryi ogólnej granic, jest koniecznem i dostatecznem, aby dawszy sobie ε, można było znaleźć taki przedział zmienności dla ε, by dla dwu wartości ε_1, ε_2 w tym przedziale zawartych, było co do wartości bezwzględnej:

$$\int\limits_a^{b-\varepsilon_1} - \int\limits_a^{b-\varepsilon_2} = \sigma,$$

t. j.

$$\int\limits_{b-\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} = \sigma.$$

Podobny warunek można napisać i dla innych przypadków.

Możemy napisać typ funkcyi, dla którego spełnia się ten warunek. Wyobraźmy sobie, że funkcya $f(x)$ w punkcie b staje się nieskończoną i jest taką, że jej wartość bezwzględna jest zawsze mniejsza lub równa bezwzględnej wartości funkcyi typu $\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$, gdzie ν jest liczbą dodatnią, mniejszą od 1, $\varphi(x)$ zaś funkcyą, która w punkcie b ma wartość skończoną i w żadnym z punktów pomiędzy a i b nie staje się nieskończoną. W przypadku szczególnym $f(x)$ może być funkcyą właśnie tego typu.

Niechaj M będzie granicą wyższą wartości bezwzględnych funkcyi $\varphi(y)$ w uważanym przedziale; według założenia liczba

M jest skończoną. Będzie zatem co do wartości bezwzględnej:

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx \leqq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{|\varphi(x)|}{(x-b)^\nu}\, dx \leqq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(x-b)^\nu}\, dx.$$

Nierówność tę otrzymujemy, stosując wprost definicyę zasadniczą całki określonej i zważając, że gdy mamy do obliczenia całkę określoną, odpowiadającą funkcyi, która co do wartości bezwzględnej w każdym punkcie drogi całkowania jest mniejszą od innej funkcyi, to wyrazy sumy, odnoszące się do funkcyi pierwszej będą odpowiednio mniejszemi od wyrazów sumy, odnoszącej się do drugiej, a stąd i całka, odpowiadająca funkcyi pierwszej, będzie z pewnością mniejsza od całki, odpowiadającej funkcyi drugiej.

Udowodnimy poniżej (patrz Rozdz. III § 1), że:

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(x-b)^\nu}\, dx = \frac{M}{1-\nu}\left[\frac{1}{\varepsilon^{\nu-1}} - \frac{1}{(a-b)^{\nu-1}}\right].$$

Widać stąd, że gdy $\nu - 1$ jest mniejsze od zera, t. j. ν mniejsze od 1, wtedy $\frac{1}{\varepsilon^{\nu-1}}$ dla $\varepsilon = 0$ dąży do zera i że całka dąży do ilości skończonej. Wnosimy stąd, że: „Jeżeli funkcya całkowalna staje się nieskończoną w punkcie b, a wartość jej bezwzględna pozostaje wciąż mniejsza lub równa takiej-że wartości funkcyi typu $\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$, gdzie $\nu < 1$, wtedy całka określona od a do b jest ilością skończoną.

Wyobraźmy sobie teraz, że funkcya staje się nieskończoną w punkcie b, lecz wartość jej pozostaje wciąż większą od wartości funkcyi typu $\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$, gdzie $\nu \gtreqless 1$, $\varphi(x)$ zaś jest funkcyą zawsze dodatnią, która nie staje się nieskończoną w żadnym punkcie przedziału od a do b ani też zerem w punkcie b. W szczególności $f(x)$ może być funkcyą właśnie tego typu.

Niechaj m będzie granicą niższą wartości $\varphi(x)$ w przedziale od a do b; będzie tedy:

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \geqq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}\,dx \geqq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{m}{(x-b)^\nu}\,dx.$$

Ostatnia całka jest, jak wyżej powiedziano, równa:

$$\frac{m}{1-\nu}\left[\frac{1}{\varepsilon^{\nu-1}} - \frac{1}{(a-b)^{\nu-1}}\right].$$

i dla $\nu > 1$ i $\varepsilon = 0$ dąży do nieskończoności, a więc i nasza całka nie dąży do granicy skończonej.

Dla $\nu = 1$ będzie, jak to niżej okażemy, wartość całki równa wyrażeniu:

$$m\,[\log\varepsilon - \log(a-b)],$$

a więc dla $\varepsilon = 0$ dążyć będzie także do nieskończoności.

Możemy tedy powiedzieć:

„Jeżeli fukcya staje się nieskończoną w punkcie b, a jej wartość bezwzględna pozostaje wciąż większą od wartości funkcyi postaci $\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$, gdzie $\nu \gtreqless 1$ i $\varphi(x)$ zawsze dodatnie, wtedy całka określona od a do b nie ma wartości skończonej.“

Przechodzimy do przypadku, w którym jedna z granic całkowania jest nieskończoną.

Utrzymując własność zasadniczą funkcyi całkowej, aby była funkcyą ciągłą granicy, znajdujemy środek określenia całki

$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, zakładając, że funkcya $f(x)$ jest całkowalną na jakiejkolwiek drodze od a do jakiegokolwiek punktu po stronie dodatniej lub po stronie ujemnej, stosownie do tego, czy chcemy obliczyć całkę od a do ∞, lub od a do $-\infty$.

Obierzmy granicę wyższą dowolną x i obliczmy całkę od a do x, a potem oznaczmy granicę tego wyrażenia dla $x = \infty$. Jeżeli ta granica istnieje, nazwiemy ją wartością całki od a do ∞.

Będzie przeto:

$$\int\limits_a^\infty = \lim_{x=\infty} \int\limits_a^x .$$

Można znależć warunek konieczny i dostateczny istnienia tej granicy. Opierając się na teoryi ogólnej granic, znajdujemy, że aby granica istniała, koniecznem i dostatecznem jest, by dawszy sobie σ dowolnie małe, można było znaleźć punkt a taki że dla dwóch punktów x', x'' pomiędzy a i ∞ będzie zawsze co do wartości bezwzględnej $\int\limits_{x'}^{x''} < \sigma$.

Możemy udowodnić twierdzenie, mające wiele podobieństwa z twierdzeniem wyżej udowodnionem, dla przypadku, w którym funkcya staje się nieskończoną.

„Jeżeli funkcya, mająca być całkowaną, staje się zerem dla $x = \infty$ w ten sposób, że jej wartość bezwzględna pozostaje zawsze mniejszą lub równą warości bezwględnej funkcyi typu $\frac{\varphi(x)}{x^\nu}$, gdzie $\nu > 1$, $\varphi(x)$ zaś jest funkcyą zawsze skończoną i dla $x = \infty$ różną od zera, wtedy całka określona od a do ∞ będzie miała wartość skończoną. W szczególności $f(x)$ może być funkcyą właśnie tego typu.

Jeżeli M oznacza granicę wyższą wartości bezwzględnych funkcyi $\varphi(x)$, to:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x=\infty} \int_a^x f(x)\,dx \leqq \lim_{x=\infty} \int_a^x \frac{|\,\varphi(x)\,|}{x^\nu}\,dx$$

$$\leqq \lim_{x=\infty} \int_a^x \frac{M}{x^\nu}\,dx.$$

Lecz jest, jak wyżej:

$$\int_a^x \frac{M}{x^\nu}\,dx = \frac{M}{1-\nu}\left[\frac{1}{x^{\nu-1}} - \frac{1}{a^{\nu-1}}\right];$$

dla $\nu > 1$ wyrażenie po stronie drugiej dąży do granicy skończonej dla $x = \infty$, co uzasadnia nasze twierdzenie.

W podobny sposób dowieść można, że gdy funkcya $f(x)$ pozostaje zawsze większą lub równą co do wartości bezwzględnej funkcyi typu $\frac{\varphi(x)}{x^\nu}$, gdzie $\varphi(x)$ jest zawsze dodatnie, ν zaś $\leqq 1$, lub jest w szczególności funkcyą tego typu, wtedy całka od a do ∞ nie ma wartości skończonej.

W następnych paragrafach, ilekroć zdarzy się sposobność, pokażemy, jakim zmianom ulegają twierdzenia zasadnicze o całkach w dwóch wyżej rozpatrzonych przypadkach osobliwych patrz np. § 7 niniejszego rozdziału).

§ 5.

Całki nieokreślone.

W podanej przez nas definicyi całki określonej przyjmuje się istnienie dwóch oznaczonych i ustalonych granic całkowania. Widzieliśmy, że w przypadku, gdy funkcya $\varphi(x)$ jest ciągła, zagadnienie całkowania sprowadza się do odszukania funkcyi $F(x)$, której pochodna jest właśnie funkcyą daną.

Wiadomo z rachunku różniczkowego, że istnieje nieskończenie wiele funkcyj, mających za pochodną $f(x)$ i że one różnią się od siebie o ilości stałe; innemi słowy, znalazłszy jednę taką funkcyę i dołączywszy do niej jakąkolwiek stałą, znajdziemy drugą funkcyę. Napisawszy zatem ogólnie:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx + \text{const.}\,,$$

otrzymujemy funkcyę ogólną zmiennej x, którą nazywamy c a ł k ą n i e o k r e ś l o n ą funkcyi danej. W tym wzorze przez a rozumieć należy oznaczoną wartość liczebną. Przymiotnik n i e o k r e ś l o n a przeciwstawiamy przymiotnikowi o k r e ś l o n a dla tego, że w całce nieokreślonej granice można z pewnego punktu widzenia uważać za ruchome, t. j. za zależne od zmienności stałej dowolnej.

Zmieniwszy w całce określonej $\int_a^x f(x)\,dx$ granicę niższą a na b, mamy całkę $\int_b^x f(x)\,dx$ równą $\int_a^x + \int_b^a$; gdzie całka $\int_b^a$ nie zależy już od x, czyli jest stałą ze względu na x. Widzimy zatem, że jeżeli zmienimy granicę niższą, to nowa całka określona jest równa dawnej, powiększonej o pewną stałą, której wartość zależy oczywiście od nowo wybranej granicy.

Całka nieokreślona jest funkcyą zmiennej x, niezależną od granicy niższej całkowania. Oznaczamy ją za pomocą symbolu całkowania, bez oznaczenia granic. Mając taką funkcyę, możemy z niej wyprowadzić już wartość całki określonej.

Niechaj $F(x)$ będzie tą funkcyą i mamy wyprowadzić z niej wartość całki $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, gdzie α i β są liczbami ustalonemi. Funkcya $F(x)$ jest postaci:

$$F(x) = \int_\alpha^x + c\,;$$

kładąc tu po kolei $x = \beta$, $x = \alpha$, mamy:

$$F(\beta) = \int_\alpha^\beta + c\,; \quad F(\alpha) = \int_\alpha^\alpha + c,$$

a odejmując od siebie te dwie równości znajdujemy:

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta - \int_\alpha^\alpha = \int_\alpha^\beta,$$

t. j. wartość całki szukanej.

Widzimy tedy, że mając całkę nieokreśloną, gdy idzie o obliczenie całki określonej, dość w pierwszej z nich zamiast x podstawić najprzód granicę wyższą, następnie granicę niższą i otrzymane rezultaty odjąć od siebie.

Odwrotnie, gdy daną jest wartość całki określonej, to nie można z niej wogóle otrzymać całki nieokreślonej, t. j. funkcyi zmiennej x. Zwracamy przeto wyraźnie uwagę na to, że gdy mówimy: daną jest całka określona, to rozumiemy przez to, że daną jest wartość liczebna pomiędzy danemi granicami liczbowemi; że nie byłoby oczywiście to samo, gdybyśmy znali jej wartość pomiędzy granicami nieoznaczonemi, wyrażonemi np. przez litery a i b, gdyż wtedy ta funkcya ilości a lub b byłaby, po za nazwą zmiennej, całką nieokreśloną.

Przed zamknięciem tego paragrafu okażemy, że zasadniczy związek pomiędzy całkami określonemi a nieokreślonemi pozostaje bez zmiany w dwóch przypadkach osobliwych, o których była mowa w § 4, t. j. gdy funkcya pod znakiem całkowania staje się nieskończoną w punkcie na drodze całkowania, lub kiedy jedna z granic jest nieskończoną.

W samej rzeczy, niechaj funkcya $f(x)$ staje się nieskończoną w punkcie c, zawartym pomiędzy granicami a i b całki określonej $\int_a^b f(x)\,dx$. Według określenia, całka ta równa się:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'=0} \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx;$$

jeżeli $F(x)$ jest całką nieokreśloną, wtedy pierwszy z dwóch tych wyrazów będzie $F(c-\varepsilon) - F(a)$, drugi zaś $F(b) - F(c+\varepsilon')$. Funkcya $F(x)$ jest funkcyą ciągłą w punkcie c, przy założeniu, że sprawdzają się nierówności:

$$\int_{c-\varepsilon_1}^{c-\varepsilon} < \sigma, \int_{c+\varepsilon'}^{c+\varepsilon_1'} < \sigma,$$

gdzie σ jest ilością dowolnie małą (bez tego założenia nie istnieje całka określona od a do b). Stąd:

$$\lim_{\varepsilon=0} F(c-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon'=0} F(c+\varepsilon') = F(c),$$

a więc całka dana jest równa $F(b) - F(a)$, co jest dowodem prawdziwości naszego twierdzenia.

Niechaj teraz jedna z granic całki będzie nieskończoną. Z określenia, przy zachowaniu oznaczeń, wynika:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x'=\infty} \int_a^{x'} f(x)\,dx = \lim_{x'=\infty} \left[F(x') - F(a)\right].$$

Z ciągłości funkcyi $F(x)$ w punkcie nieskończoności mamy:

$$\lim_{x'=\infty} F(x') = F(\infty),$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

---

§ 6.

Przekształcenie całki pojedyńczej.

Niechaj będzie całka nieokreślona (którą nazwijmy p o j e d y ń c z ą dla odróżnienia od całek w i e l o k r o t n y c h, które później rozważać będziemy)

$$\int f(x)\,dx,$$

gdzie $f(x)$ jest funkcyą ciągłą.

Wiemy, że znalezienie tej całki sprowadza się do szukania funkcyi, której pochodną jest $f(x)$, albo inaczej do znalezienia funkcyi, której różniczka $f(x)\,dx$ znajduje się pod znakiem całkowania. Zbadajmy, jak zmienia się całka przy przekształceniu z m i e n n e j c a ł k o w a n i a x. Okażemy, że c a ł k a p r z e k s z t a ł c a s i ę i ż e p o d z n a k i e m c a ł k o w a n i a b ę d z i e w y r a ż e n i e r ó ż n i c z k o w e, w y n i k a j ą c e z p r z e k s z t a ł c e n i a w y r a ż e n i a r ó ż n i c z k o w e g o

$f(x)\,dx$. W samej rzeczy, połóżmy $x = \varphi(y)$ i niechaj y będzie nową zmienną niezależną. Obliczenie całki sprowadza się do znalezienia funkcyi, której pochodna względem x jest $f(x)$; pochodną tej funkcyi względem y będzie $f(x)\frac{dx}{dy}$. Jeżeli w całce wyrazimy wszystko za pomocą zmiennej y, będziemy mieli do odszukania funkcyę, której pochodną jest $f(x)\frac{dx}{dy}$, t. j. $f(\varphi(y))\frac{dx}{dy}$, a więc całka nasza będzie teraz:

$$\int f(\varphi(y))\frac{dx}{dy}\,dy\,.$$

Przy obliczaniu całek przekształcenie może być dość użytecznem. Jest bowiem widocznem, że szukanie całki nieokreślonej jest tem bardziej skomplikowane, im bardziej złożoną jest funkcya, znajdująca się pod znakiem całkowania; może zatem oczywiście zdarzyć się, że przez odpowiednie przekształcenie zmiennej niezależnej całka dana sprowadza się do innej, mniej skomplikowanej lub do całki typu już znanego.

Niechaj będzie np. dana do obliczenia całka:

$$\int\frac{dx}{\sin x}\,,$$

w której funkcya, stojąca pod znakiem całkowania, jest p r z e s t ę p n ą. Połóżmy $x = \text{arc}\cos y$, t. j. $y = \cos x$, wtedy $\sin x = \sqrt{1-y^2}$, $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, a całka staje się:

$$-\int\frac{dy}{1-y^2}\,;$$

mamy więc do całkowania funkcyę a l g e b r a i c z n ą w y m i e r n ą zamiast funkcyi p r z e s t ę p n e j.

Jeżeli mamy całkę określoną pomiędzy granicami a i b, wtedy nową całkę względem zmiennej y należy wziąć oczywiście pomiędzy granicami, odpowiadającemi dwóm powyższym granicom danym. Za pomocą związku $x = \varphi(y)$ możemy znaleść, jaka wartość zmiennej y odpowiada wartości a zmiennej x i jaka wartości b tej zmiennej. Niechaj temi wartościami będą a', b'; będą to nowe granice całkowania. W powyższym przykładzie, jeżeli granicami całki względem zmiennej x są 0 i $\frac{\pi}{2}$, to całka przekształcona powinna być wziętą w granicach od $y = 1$ do $y = 0$, gdyż takie wartości zmiennej y, jak łatwo sprawdzić, odpowiadają powyższym wartościom 0 i $\frac{\pi}{2}$ zmiennej x.

---

§ 7.

Różniczkowanie względem parametru. Przemienność znaków granicy i całkowania; przemienność znaków różniczkowania i całkowania.

Rozważmy całkę określoną funkcyi, zawierającej, oprócz zmiennej całkowania x, jeszcze inną zmienną y. Dla większej ogólności przyjmijmy, że granice całkowania są także funkcyami tej zmiennej y i dlatego oznaczmy je przez $a(y)$, $b(y)$. Niechaj funkcya dana $f(x, y)$ będzie ciągła względem obu zmiennych w pewnym obszarze i niechaj będą też ciągłemi funkcye $a(y)$, $b(y)$. Wtedy widzimy przedewszystkiem, że całka określona od $x = a(y)$ do $x = b(y)$ jest także funkcyą ciągłą zmiennej y. Połóżmy:

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx .$$

Zwracamy raz na zawsze uwagę na to, że w twierdzeniach tego i następnego paragrafu dajemy tylko warunki dostateczne istnienia tych twierdzeń, nie zaś warunki konieczne. Warunki czysto konieczne, jeżeli można je znaleść, są prawie zawsze skomplikowane i bezużyteczne z powodu trudności przy stosowaniu ich do przypadków specyalnych. To spostrzeżenie występuje wciąż w całym rachunku nieskończonościowym, jak to już w swoim czasie wzmiankowaliśmy (patrz Przedmowę do „Rachunku różniczkowego").

Będzie tedy:

$$\varphi(y+k) - \varphi(y) = \int_{a(y+k)}^{b(y+k)} f(x, y+k)\, dx - \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx$$

$$= \int_{a(y)}^{b(y)} [f(x, y+k) - f(x, y)]\, dx - \int_{a(y)}^{a(y+k)} f(x, y+k)\, dx$$

$$+ \int_{b(y)}^{b(y+k)} f(x, y+k)\, dx. \tag{1}$$

Rozpatrzmy całkę $\int_{a(y)}^{a(y+k)} f(x, y+k)\, dx$. Ponieważ a jest funkcyą ciągłą zmiennej y, przeto różnica $a(y+k) - a(y)$ dąży do zera, gdy k do niego dąży. Jeżeli oznaczymy na chwilę całkę nieokreśloną przez $F(x, y+k)$, to całka określona będzie, jak wiemy,

$$F[a(y+k), y+k] - F[a(y), y+k].$$

Na mocy ciągłości funkcyi F i na podstawie znanego twierdzenia, mamy:

$$
\begin{aligned}
F[a(y+k), y+k] &- F[a(y), y+k] \\
&= [a(y+k) - a(y)]\, F'[a(y+\theta k), y+k] \\
&= [a(y+k) - a(y)]\, f[a(y+\theta k), y+k];
\end{aligned}
$$

na zasadzie zaś ciągłości funkcyj f i $a(y)$, możemy napisać:

$$f[a(y+\theta k), y+k] = f(a, y) + \varepsilon,$$

gdzie ε jest ilością, którą można uczynić dowolnie małą, zmniejszając odpowiednio ilość k. Stąd:

$$\int\limits_{a(y)}^{a(y+k)} f(x, y+k)\, dx = [a(y+k) - a(y)]\, [f(a, y) + \varepsilon].$$

Podobnież:

$$\int\limits_{b(y)}^{b(y+k)} f(x, y+k)\, dx = [b(y+k) - b(y)]\, [f(b, y) + \varepsilon'],$$

gdzie a i b oznaczają wprost wartości tych funkcyj w punkcie y.

Wynika stąd:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
\varphi(y+k) - \varphi(y) &= \int\limits_a^b [f(x, y+k) - f(x, y)]\, dx \\
&\quad - [a(y+k) - a(y)]\, [f(a, y) + \varepsilon] \\
&\quad + [b(y+k) - b(y)]\, [f(b, y) + \varepsilon']
\end{aligned}
$$

Jeżeli założymy, że funkcya f jest funkcyą ciągłą dwu zmiennych x, y dla wszystkich wartości zmiennej x, zawartych w granicach całkowania, wtedy dawszy sobie σ dostatecznie małe, można zawsze znaleźć taką wartość k, że dla każdej wartości

x zawartej w granicach całkowania, będzie zawsze co do wartości bezwzględnnej:

$$f(x, y+k) - f(x, y) < \sigma.$$

Wynika to wprost z twierdzenia w § 9 rozdziału I „Rachunku różniczkowego", t. j. że i dla funkcyj wielu zmiennych ciągłość zwyczajna jest jednocześnie ciągłością jednostajną w całym obszarze. Będzie tedy wartość bezwzględna całki

$$\int_a^b [f(x, y+k) - f(x, y)]\, dx,$$

mniejszą od $\int_a^b \sigma\, dx$, t. j. od $\sigma \int_a^b dx = \sigma\,(b-a)$, a więc może być uczyniona dowolnie małą, przy zmniejszaniu ilości σ. Widzimy więc, że wszystkie wyrazy drugiej strony wzoru (1) można dowolnie zmniejszyć, że więc granicą tej strony jest zero, albo innemi słowy, że funkcya φ jest ciągłą. A zatem: Jeżeli funkcya podcałkowa jest funkcyą ciągłą dwu zmiennych x, y, wtedy znak granicy jest przemienny ze znakiem całki. Wzorem wyraża się to w ten sposób:

$$\lim_{y=y'} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \lim_{y=y'} f(x, y)\, dx$$

$$= \int_a^b f(x, y')\, dx.$$

Załóżmy teraz, że funkcye $a(y)$, $b(y)$, $f(x, y)$ nie tylko są ciągłemi, lecz i różniczkowalnemi względem y; że nadto pochodna f'_y

jest ciągłą względem obu zmiennych. Będzie tedy:

$$f(x, y+k) - f(x, y) = k\, f'_y(x, y+\theta k),$$

gdzie θ jest liczbą, zawartą pomiędzy 0 i 1. Stąd:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} &= \int_a^b f'_y(x, y+\theta k)\, dx \\ (2) \qquad &- [f(a,y)+\varepsilon]\left[\frac{a(y+k)-a(y)}{k}\right] \\ &+ [f(b,y)+\varepsilon']\left[\frac{b(y+k)-b(y)}{k}\right]. \end{aligned}$$

Według założeń jest:

$$f'_y(x, y+\theta k) = f'_y(x, y) + \varepsilon'',$$

gdzie ε'' jest ilością, zdążającą do zera, dla k dążącego do zera; nadto, ze względu, iż zbieżność zwyczajna jest zbieżnością jednostajną w całym obszarze, można znaleźć takie k, aby d l a k a ż d e j w a r t o ś c i x, y w o b s z a r z e, było zawsze w powyższej nierówności $\varepsilon'' < \sigma$, gdzie σ jest ilością dowolnie małą. A zatem dla każdej wartości y, zawartej w obszarze i dla każdego θ, zawartego pomiędzy 0 i 1 będzie zawsze wartość bezwzględna całki $\int_a^b f'_y(x, y+\theta k)$ różnić się od całki $\int_a^b f'_y(x, y)\, dx$ o ilość $\int_a^b \varepsilon''\, dx$ mniejszą od $\sigma \int_a^b dx = \sigma(b-a)$, t. j. o ilość dowolnie małą. Znaczy to, że granica dla $k=0$ całki, znajdującej się po stronie prawej wzoru (2), jest $\int_a^b f'_y(x, y)\, dx$; mamy tedy (przechodząc do granicy dla $k=0$):

$$\varphi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\, dx - f(a, y)\, a'(y) + f(b, y)\, b'(y),$$

gdzie φ', a', b' oznaczają pochodne funkcyj φ, a, b.

Jeżeli w szczególnym przypadku granice a i b są stałemi, wtedy wzór poprzedni sprowadza się do następującego:

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{d}{dy} f(x, y)\, dx.$$

Widzimy tedy, że w przypadku, w którym funkcya spełnia podane wyżej warunki, t. j. gdy ona sama i jej pochodna względem y są funkcyami ciągłemi względem obu zmiennych, istnieje twierdzenie o przemienności znaków różniczkowania i całkowania.

Twierdzenie to nosi nazwę twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całkowania.

Z powyższego wzoru możemy wprost otrzymać znane już wzory na pochodną całki określonej względem granic (patrz § 3). Dość bowiem przyjąć, że funkcya f nie zawiera zmiennej y i że z dwu funkcyj $a(y)$, $b(y)$ jedna jest stałą, druga zaś jest samą zmienną y.

Dodajemy, że to twierdzenie o przemienności utrzymuje się zawsze, ile razy funkcya przedstawiona przez całkę określoną

$$F(x, y) = \int_a^x f(x, y)\, dx,$$

jest taką funkcyą zmiennych x, y, dla której istnieje twierdzenie o przemienności dwóch różniczkowań: jednego względem x, drugiego względem y.

W samej rzeczy, mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_a^x f(x, y)\, dx.$$

Według założenia jest:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

t. j.

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_a^x f(x, y)\, dx;$$

a więc całkując względem x, znajdujemy:

$$\int_a^x \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dx = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x f(x, y)\, dx,$$

co jest dowodem prawdziwości naszego twierdzenia.

Przechodzimy do rozważenia twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całkowania w przypadkach osobliwych, w których albo jedna z granic całkowania jest nieskończoną, albo funkcya, mająca być całkowaną, jest nieskończoną w jakim punkcie.

W tych przypadkach poprzednio podane warunki już nie wystarczają i trzeba do nich dołączyć inne, wyrażone w formie prostej i będące warunkami dostatecznemi istnienia twierdzenia.

Założmy najprzód, że jedna z granic całkowania jest nieskończoną, t. j., że mamy wziąć pochodną całki $\int_a^\infty f(x, y)\, dx$.

Widzieliśmy, że w ogólności, aby całka określona była funkcyą ciągłą parametru y, zawartego w funkcyi podcałkowej, trzeba, aby funkcya podcałkowa była funkcyą ciągłą obu zmiennych. Otóż ten warunek nie jest wystarczającym, gdy jedna z granic jest nieskończoną. Dla przekonania się o tem, weźmy przykład. Można znaleść, że

$$\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\, dx = \frac{1}{2}\pi,$$

dla każdej wartości skończonej y; lecz dla $y = 0$ jest zerem funkcya podcałkowa dla każdego x i dla $x = \infty$ całka będzie zerem. A więc całka określona nie jest funkcyą ciągłą parametru y, jakkolwiek $\frac{\sin yx}{x}$ jest funkcyą ciągłą obu zmiennych. Przykład ten wystarcza do zrozumienia, że w przypadku rozważanym zachodzą inne warunki.

Okażemy, że w *przypadku, gdy funkcya dana do całkowania będąc ciągłą, jest zarazem taką, że dla $x = \infty$ staje się zerem algebraicznie rzędu wyższego od 1, wtedy ciągłość całki określonej, uważanej za funkcyę parametru, utrzymuje się i wtedy, gdy jedna z granic jest nieskończoną; gdy to samo zachodzi także dla pochodnej tej funkcyi względem parametru y, to utrzymuje się wtedy i twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki.*

W samej rzeczy, w przypadku, gdy funkcya $f(x, y)$ dla $x = \infty$ staje się zerem algebraicznie rzędu wyższego niż 1, to, jak wiemy, (§ 4) całka określona, rozciągnięta do ∞, ma wartość skończoną; można tedy znaleść zawsze liczbę a' taką, aby po obraniu dwóch *jakichkolwiek* liczb x', x'' pomiędzy a' i ∞, wartość całki określonej od x' do x'' była mniejsza od σ; w szczególności zaś biorąc $x' = a'$, aby było:

$$\int_{a'}^{x''} f(x, y)\, dx < \sigma$$

i

$$\int_{a'}^{x''} f(x, y+k)\, dx < \sigma ,$$

skąd wynika:

$$\int_{a'}^{x''} [f(x, y+k) - f(x, y)]\, dx < 2\sigma ,$$

a więc i granica tej całki dla $x'' = \infty$ będzie mniejsza od 2σ.

Lecz:

$$\int_a^\infty [f(x, y+k) - f(x, y)]\, dx = \int_a^{a'} + \int_{a'}^\infty = \int_a^{a'} + \lim_{x''=\infty} \int_{a'}^{x} .$$

Skutkiem ciągłości funkcyi $f(x, y)$ można zawsze znaleść taką wartość k, aby dla każdego $k_\iota < k$ i dla każdej wartości x, było:

$$| f(x, y+k_\iota) - f(x, y) | < | f(x, y+k) - f(x, y) | .$$

Ustaliwszy k, można znaleść taki punkt a', dla którego sprawdza się nierówność $\lim\limits_{x''=\infty} \int_{a'}^{x''} < 2\sigma$, a ustaliwszy znów w ten sposób wartość a', można potem zmniejszać k, aby było $\int_a^{a'} < \sigma$, a to na mocy ciągłości całki określonej pomiędzy granicami skończonemi.

Widzimy więc, że przy uczynionych założeniach można zawsze, zmniejszając ilość k, uczynić dowolnie małą wartość całki.

$$\int_a^\infty [f(x, y+k) - f(x, y)]\, dx,$$

co właśnie stwierdza ciągłość całki danej względem zmiennej y.

Załóżmy teraz, że pochodna f'_y dla $x = \infty$ staje się zerem rzędu wyższego od 1. Wtedy na podstawie powyższego dowodzenia wnosimy, że

$$\int_a^\infty [f'_y(x, y+\theta k) - f'_y(x, y)]\, dx$$

dąży do zera przy zmniejszaniu ilości k; lecz

$$\int_a^\infty \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}\, dx = \int_a^\infty f'_y(x, y+\theta k)\, dx,$$

przeto różnica

$$\int_a^\infty \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} - \int_a^\infty f'_y(x, y)\, dx$$

dąży do zera dla $k = 0$, t. j.

$$\lim_{k=0} \int_a^\infty \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}\, dx$$

jest pochodną całki względem zmiennej y i równą całce pochodnej. W ten sposób twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całkowania zostało dowiedzionem i dla przypadku, w którym jedna z granic jest nieskończoną.

Przejdźmy teraz do drugiego przypadku osobliwego, w którym funkcya podcałkowa staje się nieskończoną w punkcie. Dla ustalenia myśli, przyjmijmy, że staje się nieskończoną dla granicy wyższej. Udowodnimy twierdzenie:

Jeżeli $f(x, y)$ i $f'(x, y)$ w pewnym punkcie x (bez względu na wartość zmiennej y w obszarze) stają się nieskończonemi algebraicznie rzędu mniejszego od 1 i gdy nadto są ciągłemi względem obu zmiennych, wtedy utrzymuje się twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całkowym.

W samej rzeczy, jeżeli b jest punktem, w którym funkcye $f(x, y)$ i $f'_y(x, y)$ stają się nieskończonemi, wtedy, według założenia, dwie całki

$$\int_a^b f(x, y)\, dx, \quad \int_a^b f'_y(x, y + \theta k)\, dx$$

są skończonemi dla każdej wartości y, zawartej w obszarze i zgodnie z twierdzeniem w § 4. Z rezultatów, podanych w tymże paragrafie, wynika, że całkę:

$$\int_{b-\varepsilon}^{b} f'_y(x, y + \theta k)\, dx,$$

można uczynić dowolnie małą, zmniejszając odpowiednio ilość ε; a więc i granicę tej całki dla $k = 0$ można również uczynić dowolnie małą.

Lecz

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x, y)\, dx = \lim_{k=0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}\, dx,$$

$$+ \lim_{k=0} \int_{b-\varepsilon}^{b} f'_y(x, y + \theta k)\, dx,$$

(stosujemy tu drugą część twierdzenia o wartości średniej); nadto jest widocznem, że na zasadzie twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całkowym:

$$\lim_{k=0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} dx = \int_a^{b-\varepsilon} f'_y(x, y)\, dx ,$$

gdyż pomiędzy granicami a i $b-\varepsilon$ nie ma żadnego punktu, w którym funkcya staje się nieskończoną. Można więc wybrać ε tak, aby różnica pomiędzy $\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\, dx$ a $\int_a^{b-\varepsilon} f'_y(x, y)\, dx$ była mniejsza od ilości dowolnie małej; stąd dla $\varepsilon=0$ dochodzimy do równości pochodnej całki i całki pochodnej.

Zauważymy jeszcze, że twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całkowania może służyć niejednokrotnie z korzyścią do obliczania pewnych całek określonych na podstawie innych, już znanych. Tak np. obliczono, że:

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{y^2+x^2} = \frac{\pi}{2y} ;$$

biorąc pochodne obu stron względem y, otrzymujemy nowy wzór:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(y^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4y^3} ,$$

a z tego wzoru, biorąc znów pochodne względem y, można otrzymać nowe wzory.

I w inny jeszcze sposób można stosować twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całkowania do obliczania całek określonych. Niechaj będzie np. całka:

$$\int_0^1 x^\alpha \log x \, dx.$$

W niej $x^\alpha \log x$ jest pochodną funkcyi x^α względem α, możemy więc napisać:

$$\int_0^1 x^\alpha \log x \, dx = \int_0^1 \left(\frac{d}{d\alpha} x^\alpha\right) dx.$$

Na zasadzie twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki możemy przemienić znak pochodnej ze znakiem całki:

$$\int_0^1 x^\alpha \log x \, dx = \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 x^\alpha \, dx.$$

Tym sposobem otrzymaliśmy znaczne uproszczenie, gdyż oczywiście znacznie łatwiej obliczyć całkę funkcyi x^α aniżeli funkcyi $x^\alpha \log x$. Ponieważ x^α jest funkcyą ciągłą, więc obliczenie odpowiedniej całki określonej sprowadza się do odszukania funkcyi, której pochodną jest x^α. Tą funkcyą jest, jak łatwo widzieć, $\frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1}$; mamy zatem:

$$\int_0^1 x^\alpha \, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha + 1},$$

a więc:

$$\int_0^1 x^\alpha \log x \, dx = \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha + 1} = -\frac{1}{(\alpha + 1)^2}.$$

§ 8.

Przemienność dwóch znaków całkowania.

W poprzedzającym paragrafie zakładaliśmy, że funkcya pod znakiem całkowania zawiera parametr y i badaliśmy różniczkowanie całki względem tego parametru. Teraz rozważymy całkowanie względem tej zmiennej.

Kładąc, jak w § 7:

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx,$$

rozpatrzymy całkę:

$$\int_c^d \varphi(y)\, dy,$$

równą:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Takie wyrażenie nazywa się **całką podwójną**. Później rozpatrzymy całki wielokrotne w osobnym oddziale; tu postarajmy się znaleść odpowiedź na pytanie: czy można przemienić porządek dwóch całkowań? Zagadnienie to jest analogiczne z zadaniem rachunku różniczkowego o przemiennosci dwu różniczkowań.

Okażemy, że **gdy granice** a **i** b **są stałe** t. j. **niezależne od** y, **gdy stałemi są również granice** c **i** d **i gdy funkcya** $f(x, y)$ **jest funkcyą ciągłą obu zmiennych** x **i** y **w całym obszarze, który rozciąga się dla zmiennej** x **od** a **do** b, **dla zmiennej** y **od** c **do** d, **wtedy można przemienić porządek całkowań.**

W samej rzeczy łatwo widzieć, że pochodne dwu wyrażeń:

$$A = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x, y);\ B = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x, y),$$

uważane za funkcye czterech ilości a, b, c, d, są sobie równe; wynika stąd, że te dwa wyrażenia mogą tylko różnić się o ilość stałą, która, jak łatwo dowieść, jest równą zeru. Weźmy np. pochodną względem ilości a. W całce A ilość a jest parametrem, występującym w funkcyi znajdującej się pod znakiem pierwszej całki od c do d; ta funkcya $\int_a^b dx\, f(x, y)$ jest na zasadzie uczynionych założeń i znanych twierdzeń funkcyą ciągłą ilości a i y, nadto pochodna tej funkcyi względem a t. j. — $f(a, y)$ (patrz § 3) jest także funkcyą ciągłą obu ilości a i y. Na mocy twierdzeń poprzedzającego paragrafu możemy wziąć pochodne pod znakiem całkowania i otrzymujemy:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \int_c^d dy \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b dx\, f(x, y) = - \int_c^d dy\, f(a, y).$$

Weźmy teraz pochodną całki B względem a. Ponieważ a jest granicą niższą pierwszej całki w B, przeto:

$$\frac{\partial B}{\partial a} = - \left[\int_c^d dy\, f(x, y) \right]_{x=a} = - \int_c^d dy\, f(a, y);$$

jest to ten sam rezultat co wyżej. W ten sam sposób można stwierdzić równość pochodnych względem pozostałych ilości b, c, d. Dwa wyrażenia A, B różnią się zatem o pewną stałą C, t. j. nie zależą od żadnej z ilości a, b, c, d. Gdy więc weźmiemy $a = b$ stała C nie powinna zmienić swej wartości, lecz w tym przypadku A i B są zerami, ich różnica jest zerem, stąd $C = 0$. Wynika stąd równość wyrażeń A i B.

Twierdzenie dopiero co udowodnione, nazywa się **twierdzeniem o całkowaniu pod znakiem całki.**

Pozostaje zbadać dwa przypadki osobliwe, o których mówiliśmy w § 4. Zbadajmy najprzód, czy utrzymuje się twierdzenie o całkowaniu pod znakiem, jeżeli jedna z granic lub obie są nieskończonemi.

Przyjmijmy, że sprawdza się równość:

$$\int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x, y) = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x, y),$$

bez względu na to, jakkolwiek wielkiemi są skończone granice b i d. Niechaj jedna z nich np. b staje się nieskończoną; załóżmy naturalnie, że istnieją granice obu stron dla $b = \infty$. Strona druga na mocy określeń § 4 staje się wtedy:

$$\int_a^\infty dx \int_c^d dy\, f(x, y);$$

pierwszą zaś stronę oznaczamy przez:

$$\lim_{b=\infty} \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x, y).$$

Tego ostatniego wyrażenia nie można uczynić równem

$$\int_c^d dy \lim_{b=\infty} \int_a^b dx\, f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^\infty dy\, f(x, y),$$

o ile nie można okazać, że znak granicy odnośnie do parametru b jest przemienny ze znakiem $\int_c^d$. Otóż według twierdzeń poprzedzającego paragrafu, przemienność ta istnieje bez innych zastrzeżeń, gdy wiemy, że przy granicach c i d skończonych dla takiej przemienności t. j. dla ciągłości całki uważanej za funkcyę ilości b wystarcza, by funkcya znajdująca się pod znakiem całki t. j. $\int_a^b dx\, f(x, y)$ była funkcyą ciągłą ilości b i y, co w rzeczy samej się sprawdza. Otrzymujemy tedy, że gdy jedna z czterech granic jest nieskończoną, wtedy utrzymuje się twierdzenie o całkowaniu pod znakiem całki bez nowych zastrzeżeń o naturze funkcyi, prócz tych, które odnoszą się do całkowania przy granicy wyższej ∞.

Rzecz się ma inaczej, gdy obie granice są nieskończone, t. j. gdy dążą do nieskończoności tak b jak i d. Istotnie, gdy od związku:

$$\int_c^d dy \int_a^\infty dx\, f(x, y) = \int_a^\infty dx \int_c^d dy\, f(x, y),$$

przechodzimy do granicy dla $d = \infty$, wtedy strona pierwsza staje się równą: $\int_c^\infty dy \int_a^\infty dx\, f(x, y)$, druga zaś: $\lim\limits_{d=\infty} \int_a^\infty dx \int_c^d dy\, f(x, y)$,

i nie równa się:

$$\int_a^\infty dx \lim_{d=\infty} \int_c^d dy\, f(x, y) = \int_a^\infty dx \int_c^\infty dy\, f(x, y),$$

o ile nie spełniają się pewne warunki. Wiemy w samej rzeczy, z poprzedzającego paragrafu, że aby całka $\int_a^\infty$ funkcyi ilości d i x była funkcyą ciągłą parametru d, nie wystarcza, by funkcya pod znakiem całkowania była funkcyą ciągłą obu zmiennych d i x. Znaleźliśmy już warunek dostateczny do tego przypadku, lecz warunek ten, zastosowany do obecnego przypadku nie przedstawiłby się pod łatwą postacią. W zamian za to podamy inny warunek tylko dostateczny, mianowicie: przemienność utrzymuje się, gdy funkcya $f(x, y)$ jest zawsze mniejsza co do wartości bezwzględnej od:

$$\frac{\varphi(x)}{y^\nu}, \qquad (\nu > 1)$$

gdzie $\varphi(x)$ jest funkcyą całkowalną w jakimkolwiek przedziale aż do ∞

Istotnie, w tym przedziale mamy:

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty dy\, f(x, y) = \int_a^\infty dx \int_c^b dy\, f(x, y) + \int_a^\infty dx \int_b^\infty dy\, f(x, y),$$

a ponieważ możemy wybrać zawsze b tak, aby wyraz drugi strony drugiej był dowolnie małym — gdyż ten wyraz jest mniejszy co do wartości bezwzględnej od $-\frac{1}{1-\nu}\frac{1}{b^{\nu-1}}\int_a^\infty \varphi(x)\, dx$ (patrz § 4, rozdział 1) stającego się zerem dla $b = \infty$ — przeto granica wyrazu pierwszego strony drugiej dla $b = \infty$ równa się stronie pierwszej.

Przejdźmy wreszcie do przypadku, w którym funkcya staje się nieskończoną w punkcie np. dla $x = b$. Wtedy z równości:

$$\int_c^d dy \int_a^{b-\varepsilon} dx\, f(x, y) = \int_a^{b-\varepsilon} dx \int_c^d dy\, f(x, y),$$

przy przejściu do granicy dla $\varepsilon = 0$ wynika:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_c^d dy \int_a^{b-\varepsilon} dx\, f(x, y) = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x, y).$$

Po stronie pierwszej, jak już wiemy z paragrafu poprzedzającego, znak granicy nie jest przemienny ze znakiem całki, o ile funkcya $f(x, y)$, prócz ciągłości nie spełnia innych jeszcze warunków. Możemy wypowiedzieć warunek dostateczny w formie następującej:

Przemienność dwu całkowań utrzymuje się jeszcze w przypadku, w którym funkcya staje się nieskończoną w punkcie $x=b$, jeżeli funkcya oprócz zwykłego warunku ciągłości, posiada wciąż wartość bezwzględną mniejszą, niż:

$$\frac{\varphi(y)}{(x-b)^\nu} \qquad (\nu < 1)$$

gdzie $\varphi(y)$ ma wartość zawsze skończoną.

Dowodzenie jest podobne do powyższego i opiera się na tem, że

$$\int_c^d \int_a^b = \int_c^d \int_a^{b-\varepsilon} + \int_c^d \int_{b-\varepsilon}^b$$

i że według przyjętych założeń, drugi wyraz strony drugiej dąży do zera przy zmniejszaniu do zera ilości ε.

Nadmienimy jeszcze, że możnaby przeprowadzić badanie całek podwójnych już nie w przypadku granic stałych, lecz w przypadku ogólniejszym, gdy granice pierwszego całkowania (względem x) są funkcyami zmiennej y. Takie badanie ogólniejsze byłoby analogiczne do podanego wyżej badania, odnoszącego się do różniczkowania pod znakiem całkowania; lecz zajmiemy się niem dopiero w rozdziale o całkach wielokrotnych.

Podamy wreszcie przykład, w którym nie wolno przemieniać porządku całkowania. Jest nim całka:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx \, \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}.$$

Całkując najprzód względem x, następnie względem y, otrzymujemy $+\frac{\pi}{4}$; całkując w odwrotnym porządku, znajdujemy $-\frac{\pi}{4}$. Pochodzi to stąd, że funkcya dana jest nieciągłą w punkcie $x = 0$, $y = 0$.

ROZDZIAŁ II.

CAŁKOWALNOŚĆ FUNKCYJ.

---

§ 1.

Pierwsza postać warunków całkowalności.

Dotąd przyjmowaliśmy, że funkcye, któremi zajmowaliśmy się w różnych twierdzeniach poprzedzających paragrafów, były wszystkie całkowalnemi. Obecnie przedstawia się naturalnie zagadnienie takie: „Jakim warunkom powinna zadość czynić funkcya, aby była całkowalną pomiędzy danemi granicami, t. j. aby suma $\sum f_r\, \delta_r$, wskazana w rozdziale poprzedzającym, miała wartość oznaczoną i skończoną?"

Zauważmy najprzód, że według określenia zasadniczego całki określonej, granica ta powinna być niezależną: 1) od sposobu, w jaki przedziały δ_r dążą do zera; 2) od wyboru wartości f_r w każdym przedziale δ_r.

Załóżmy, że jako wartość f_r, wybieramy zawsze maximum, lub granicę wyższą L_r wartości funkcyi $f(x)$ w przedziale δ_r wraz z jego krańcami; wtedy granica sumy $\sum L_r\, \delta_r$ będzie wartością całki określonej. Gdybyśmy na wartość f_r wybrali minimum lub granicę niższą l_r wartości funkcyi f w przedziale δ_r, granica sumy $\sum l_r\, \delta_r$ będzie także wartością całki. Tym sposobem różnica dwóch tych granic, t. j. granica ich różnicy czyli $\Sigma\delta_r (L_r - l_r)$ powinna być zerem. Jeżeli różnicę $L_r - l_r$ nazwiemy oscylacyą funkcyi w przedziale δ_r i oznaczymy ją przez D_r^{*}, będzie:

$$\lim \Sigma\, \delta_r D_r = 0.$$

Z określenia całki wynika zatem następujący warunek konieczny istnienia granicy sumy: granica sumy iloczynów przedziałów cząstkowych przez oscylacye, funkcyi f w tych przedziałach, powinna być zerem.

Okażemy, że warunek ten jest zarazem warunkiem dostatecznym, stwierdzając, że gdy $\lim \Sigma\, \delta_r D_r = 0$, to istnieje wtedy granica wyrażenia $\Sigma f_r \delta_r$ i posiada wartość niezależną tak od wyboru wartości f_r, jak i od prawa, według którego przedziały δ_r dażą do zera. W samej rzeczy rozważmy dwa różne podziały całkowitego przedziału; przedziały cząstkowe pierwszego podziału oznaczmy przez $\delta_1, \ldots, \delta_r, \ldots$, drugiego przez $\delta_1', \ldots, \delta_r' \ldots$ i niechaj te dwa podziały będą zupełnie od siebie niezależne. Rozpatrzmy jeszcze trzeci podział, który zawiera punkty pierwszego podziału wraz z punktami drugiego podziału. Przedziały cząstkowe trzeciego podziału oznaczmy przez ϱ; tym sposobem każde δ i każde δ' jest sumą całkowitej liczby przedziałów cząstkowych ϱ.

Niechaj będzie:

$$\delta_r = \varrho_{h+1} + \varrho_{h+2} + \cdots + \varrho_{h+t},$$

a więc:

$$f_r \delta_r = f_r\, \varrho_{h+1} + f_r\, \varrho_{h+2} + \cdots + f_r\, \varrho_{h+t};$$

Jeżeli przez $f_{h+1}, f_{h+2}, \ldots, f_{h+t}$ oznaczymy wartości funkcyi f w przedziałach $\varrho_{h+1}, \varrho_{h+2}, \ldots, \varrho_{h+t}$, możemy napisać tożsamość:

$$f_r\, \delta_r = f_{h+1}\, \varrho_{h+1} + \cdots + f_{h+t}\, \varrho_{h+t}$$
$$+ [(f_r - f_{h+1})\, \varrho_{h+1} + \cdots + (f_r - f_{h+t})\, \varrho_{h+t}].$$

Lecz różnice $f_r - f_{h+1}, \ldots, f_r - f_{h+t}$ są różnicami pomiędzy dwiema wartościami funkcyi f w przedziale δ_r, gdyż każdy z przedziałów $\varrho_{h+1}, \ldots, \varrho_{h+t}$ jest częścią przedziału δ_r; różnice te zatem będą z pewnością mniejsze lub co najwyżej równe wartości oscylacyi funkcyi w δ_r, t. j. ilości D_r. Kładąc zatem:

$$f_r\,\delta_r = f_{h+1}\,\varrho_{h+1} + \ldots + f_{h+t}\,\varrho_{h+t} + \omega,$$

jesteśmy pewni, że co do wartości bezwzględnej:

$$\omega \leqq [D_r\,\varrho_{h+1} + \ldots + D_r\,\varrho_{h+t}],$$

t. j.

$$\omega \leqq D_r\,\delta_r.$$

Stąd, zmieniając skaźnik r i tworząc sumę, mamy:

$$\Sigma f_r\,\delta_r = \Sigma f_h\,\varrho_h + \Sigma\omega,$$

gdzie $\Sigma f_h\,\varrho_h$ jest sumą analogicznie utworzoną z przedziałów ϱ. Wyrażenie $\Sigma\omega$ czyni zadość nierówności:

$$\Sigma\omega \leqq \Sigma D_r\,\delta_r,$$

a więc na mocy założenia dąży do zera.

Jeżeli teraz powtórzymy te same rozumowania, wychodząc z przedziałów δ'_s zamiast z przedziałów δ_r, znajdziemy wzór:

$$\Sigma f_s\,\delta'_s = \Sigma f_h\,\varrho_h + \Sigma\omega',$$

gdzie $\Sigma\omega'$ dąży także do zera. Odejmując, otrzymujemy:

$$\Sigma f_r\,\delta_r - \Sigma f_s\,\delta'_s = \Sigma\omega - \Sigma\omega' = \Omega,$$

gdzie Ω jest widocznie ilością, zdążającą do zera.

Przyjmijmy obecnie, że podział drugi na przedziały δ' nie jest niezależny od pierwszego podziału, lecz przedstawia stadyum następujące po pierwszym podziale; innemi słowy, że gdy przedziały dążące do zera oznaczamy w stadyum poprzedzającem przez δ, to w stadyum następnem oznaczamy je przez δ'. W takim razie wzór powyższy orzeka, że różnicę pomiędzy wartościami wyrażenia $\Sigma f_r \delta_r$ w dwóch kolejnych stadyach można uczynić dowolnie małą; jestto, jak wiemy, warunek konieczny i dostateczny i do tego, aby to wyrażenie dążyło do granicy oznaczonej i skończonej. Tym sposobem twierdzenie nasze zostało dowiedzione.

Można jeszcze okazać, że granica ta jest niezależną: 1) od prawa, według którego ustanowiliśmy podział na przedziały cząstkowe i według którego dążą one do zera; 2) od wyboru wartości f_r. W samej rzeczy, z powyższego wzoru w założeniu, że przedziały δ i δ' są bezwzględnie niezależne, wynika:

$$\lim\,[\Sigma f_r \delta_r - \Sigma f_s \delta'_s] = 0,$$

a więc, jeżeli istnieje granica strony pierwszej, to możemy napisać:

$$\lim \Sigma f_r \delta_r - \lim \Sigma f_s \delta'_s = 0.$$

Stąd wnosimy, że istnieje wtedy i granica wyrazu drugiego, równa granicy wyrazu pierwszego. Jeżeli teraz ustanowimy inne prawo wyboru wartości f_r i, utworzymy sumę $\Sigma \delta_r f_r^{(1)}$ i przyjmiemy dalej, że istnieje granica sumy $\Sigma \delta_r f_r$, to możemy łatwo okazać, że istnieje też granica sumy poprzedniej, że jedna jest równa drugiej. Gdyż jest widocznie:

$$\Sigma \delta_r f_r - \Sigma \delta_r f_r^{(1)} = \Sigma \delta_r (f_r - f_r^{(1)});$$

ponieważ zaś $f_r - f_r^{(1)}$, jako różnica dwóch wartości funkcyi f w przedziale δ_r, jest mniejsza lub, co najwyżej, równa oscylacyi D_r, przeto:

$$\Sigma \delta_r f_r - \Sigma \delta_r f_r^{(1)} \leqq \delta_r D_r.$$

Na podstawie tedy założenia widzimy, że strona pierwsza dąży do zera, t. j., jeżeli istnieje granica jednego z tych wyrażeń, to istnieć musi granica drugiego i równać się pierwszej.

---

§ 2.

Druga postać kryteryum całkowalności.

Kryteryum całkowalności, znalezione w paragrafie poprzedzającym, przedstawia się pod postacią, która może okazać się trudną w zastosowaniu praktycznem i dlatego postaramy się przekształcić to kryteryum na inne, dogodniejsze w użyciu.

Warunek $\lim \sum \delta_r D_r = 0$ orzeka, że możemy sumę $\sum \delta_r D_r$ uczynić mniejszą od jakkolwiek małej ilości σ; możemy zatem znaleźć takie stadyum małości przedziałów δ, aby dla tego stadyum i dla wszystkich następnych było zawsze $\sum \delta_r D_r < \sigma$. Niechaj τ będzie sumą wszystkich przedziałów cząstkowych, w których oscylacya funkcyi jest większa od pewnej liczby ustalonej σ'. Będzie tedy widocznie:

$$\tau\sigma' \leqq \sum \delta_r D_r < \sigma,$$

skąd

$$\tau < \frac{\sigma}{\sigma'}.$$

Pozostawmy stałe σ' i zmniejszajmy σ, wtedy zmniejszać się będzie wartość τ i granica tego τ dla jakiegokolwiek stałego σ' będzie zerem. Znajdujemy więc warunek konieczny całkowalności taki: suma przedziałów cząstkowych, w których oscylacya funkcyi może być większa od pewnej ilości oznaczonej, powinna dążyć do zera, t. j. być winno $\lim \tau = 0$.

Łatwo dowieść, że warunek ten jest zarazem dostatecznym.

Jeżeli przez D oznaczymy największą z oscylacyj funkcyi f w różnych przedziałach, których suma jest τ, i jeżeli zauważymy, że we wszystkich innych przedziałach oscylacya jest mniejsza lub równa σ', otrzymamy nierówność:

$$\sum \delta_r\, D_r \leqq \tau D + (T - \tau)\, \sigma',$$

w której T oznacza całkowity przedział całkowania, $T-\tau$ zatem sumę przedziałów, nie należących do τ. Z tego związku widzimy, że gdy τ można uczynić dowolnie małem, t. j. gdy $\lim \tau = 0$; to ponieważ σ' zaś jest dowolnem, a zatem też może być uczynionem dowolnie małem, to i pierwszą stronę można uczynić tak małą, jak się podoba, lub innemi słowy, strona pierwsza dąży do zera.

Wnosimy stąd, że oba warunki całkowalności $\lim \sum \delta_r\, D_r$ i $\lim \tau = 0$ są doskonale równoważne.

---

§ 3.

Funkcye całkowalne i niecałkowalne. Zastosowanie znalezionych kryteryów.

Stosując twierdzenia, znalezione w dwu poprzedzających paragrafach, możemy znaleść klasy funkcyj całkowalnych. Widzimy przedewszystkiem, że każda funkcya ciągła jest całkowalną.

W samej rzeczy, dość przypomnieć sobie twierdzenia, dowiedzione w § 8 Rozdziału I-go „Rachunku różniczkowego" o funkcyach ciągłych. Widzieliśmy tam, że każda funkcya ciągła jest zarazem jednostajnie ciągłą, stąd zaś wyprowadziliśmy, że gdy mamy daną funkcyę ciągłą w pewnym całkowitym przedziale, to możemy przedział ten podzielić na inne przedziały cząstkowe takie, aby w każdym z nich oscylacya funkcyi była mniejsza od ilości σ' dowolnie małej. Wiążąc z tą własnością kryteryum podane w poprzedzającym paragrafie, możemy powiedzieć, że dla funkcyj ciągłych ilość τ dąży do zera dla każdego dowolnie małego σ'; stąd zaś wynika, że funkcye ciągłe są całkowalne.

Całkowalnemi są też funkcye skończone nieciągłe, mające skończoną liczbę punktów przerwy, w których funkcya ma skok, oczywiście skończony. Takie funkcye nazywamy zwykle funkcyami wogóle ciągłemi. Przypomnijmy w tym względzie, że dla funkcyi nieciągłej w punkcie a skokiem w tym punkcie nazywamy różnicę pomiędzy wartością funkcyi w a a granicą jej wartości przy zbliżaniu się do tego punktu w założeniu, że ta granica istnieje. Jeżeli zaś ta granica jest nieoznaczoną, wtedy skokiem funkcyi w a nazywamy różnicę dwóch wartości skrajnych, pomiędzy któremi oscyluje wartość funkcyi przy zbliżaniu się do punktu a. Jeżeli zaś, jak to przyjęliśmy, wartość funkcyi jest zawsze skończoną, to oczywiście i skok jej skończonym być musi.

Aby dowieść powyższego twierdzenia, oznaczmy przez $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n punktów przerwy funkcyi i otoczmy każdy z nich przedziałem dowolnie małym. Jeżeli d jest największy z tych przedziałów, to suma wszystkich jest mniejsza od nd. W pozostałym przedziale całkowania funkcya jest już ciągłą, możemy zatem ten przedział podzielić na przedziały cząstkowe takie, aby w każdym z nich oscylacya funkcyi była zawsze mniejsza od pewnej ustalonej ilości σ'. Przedziały, w których oscylacya fuukcyi może być większa od σ, znajdują się tylko w otoczeniu punktów przerwy; suma tych otoczeń jest mniejsza od nd, można ją zatem uczynić dowolnie małą, gdyż n jest skończone, d zaś dowolne. A zatem w naszym przypadku ilość τ można uczynić dowolnie małą i będzie $\lim \tau = 0$, co było do okazania.

Istnieją jeszcze inne klasy funkcyj nieciągłych całkowalnych; aby je znaleść, musimy wejść w pewne rozważania, odnoszące się do rozmaitych gatunków nieciągłości funkcyj. Punkty przerwy funkcyi mogą stanowić grupę nieskończoną punktów (p. Rozdz. I „Rachunku różniczkowego"). Grupa nieskończona punktów może być dwojakiego rodzaju. Może być taką, że wszystkie punkty grupy dają się zawrzeć w przedziałach, których sumę można uczynić mniejszą od każdej ilości danej; lub też taką, że tego uczynić nie można. W pierwszym przypadku grupę punktów nieskończonych nazywamy zwykle *grupą nieciągłą punktów*, w drugim zaś *grupą liniową punktów*. Nazwa grupy *liniowej* ma przypominać fakt, że dla *wszystkich* punktów przedziału *liniowego* własność ta nie ma miejsca.

Przykładem grupy *nieciągłej* punktów jest jakakolwiek grupa o skończonej liczbie punktów granicznych (p. § 1 I Rozdziału „Rachunku różniczkowego"). Jeżeli bowiem otoczymy te punkty graniczne dowolnie małemi przedziałami, to pozostaną na zewnątrz nich punkty grupy w liczbie *skończonej* i każdy z tych punktów będzie można otoczyć przedziałami, których suma może być dowolnie małą.

Powiemy jeszcze, że funkcya nieciągła nazywa się *punktowo-nieciągłą*, jeżeli punkty przerwy stanowią grupę nieciągłą; *liniowo-nieciągłą* zaś wtedy, gdy te punkty tworzą grupę liniową.

Możemy teraz udowodnić twierdzenie *Riemanna*:

Funkcya punktowo-nieciągła jest całkowalną.

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu, który stosowaliśmy w przypadku skończonej liczby punktów przerwy, gdyż i dla funkcyi punktowo-nieciągłej istnieje także własność zasadnicza, jaka miała miejsce i w tamtym przypadku, mianowicie, że wszystkie punkty przerwy dają się zawrzeć w przedziałach, których sumę można uczynić dowolnie małą.

Przykładem funkcyi punktowo-nieciągłej jest funkcya $f(x)$, określona w sposób taki: Niechaj $f(x)$ ma wartość 1 we *wszystkich punktach* grupy $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$ zaś wartość 0 we *wszystkich innych punktach* przedziału od 0 do 1. Funkcya taka jest całkowalną w tym przedziale. Stosując określenie całki określonej, łatwo znaleść, że wartość całki tej funkcyi jest zerem. W samej rzeczy, podzielmy przedział od 0 do 1 na przedziały cząstkowe i rozróżnijmy dwa ich rodzaje: jedne, znajdujące się w otoczeniu punktów przerwy, inne, nie zawierające punktów przerwy. Część sumy $\Sigma f_r \delta_r$, odpowiadająca tym drugim przedziałom, jest oczywiście zerem, ponieważ funkcya $f(x)$ jest zerem w każdym z ich punktów; część zaś sumy, odpowiadająca pierwszym przedziałom, będzie miała wartość mniejszą lub równą iloczynowi sumy wszystkich przedziałów przez 1, t. j. przez wartość funkcyi w punktach przerwy. Lecz ponieważ suma pierwszych przedziałów może być uczyniona dowolnie małą, przeto granica sumy może być tylko zerem.

---

§ 4.

Twierdzenia o funkcyach całkowalnych. Całkowanie przez szeregi.

Pytanie, jakie mimowoli się nastręcza o funkcyach całkowalnych, jest następujące: czy łącząc ze sobą za pomocą znaków działań analitycznych skończoną liczbę funkcyj całkowalnych, otrzymujemy funkcyę całkowalną?

S u m a d w u f u n k c y j c a ł k o w a l n y c h j e s t w i d o c z n i e c a ł k o w a l n ą, co wynika bezpośrednio z definicyi całki określonej, nawet bez stosowania twierdzeń o całkowalności, podanych w tym rozdziale. Dlatego to w rozdziale poprzedzającym mogliśmy już korzystać z tego twierdzenia. W samej rzeczy, jeżeli funkcye $\varphi(x)$, $\psi(x)$ są całkowalne, t. j. jeżeli dwie sumy $\Sigma \varphi_r \delta_r$, $\Sigma \psi_r \delta_r$ mają granice oznaczone i skończone, to i suma tych dwóch sum będzie miała również granicę oznaczoną i skończoną; a gdy jeszcze brać będziemy wartości obu funkcyi φ_r i ψ_r zawsze dla tych samych punktów, to okaże się, że ta ostatnia granica jest ściśle całką sumy dwu funkcyj.

Nieco trudniej dowieść twierdzenia: Iloczyn dwu funkcyj całkowalnych jest także funkcyą całkowalną.

Aby to okazać, rozpatrzmy najprzód oscylacyę iloczynu $\varphi(x) . \psi(x)$ w przedziale δ_r. Przyjmijmy na chwilę, że wartości φ, ψ są zawsze dodatnie dla całej drogi całkowania. Oznaczmy przez M_φ, m_φ granice wyższą i niższą wartości funkcyi φ w δ_r i podobnież przez M_ψ, m_ψ takież granice dla funkcyi ψ, przez $M_{\varphi\psi}$, $m_{\varphi\psi}$ granice dla iloczynu $\varphi\psi$. Wtedy różnice:

$$M_\varphi - m_\varphi, \quad M_\psi - m_\psi, \quad M_{\varphi\psi} - m_{\varphi\psi},$$

będą oscylacyami funkcyj $\varphi, \psi, \varphi\psi$, w przedziale δ_r. Ponieważ ilości M, m według założenia są dodatniemi, możemy więc napisać nierówności:

$$M_{\varphi\psi} \leqq M_\varphi M_\psi; \quad m_{\varphi\psi} \geqq m_\varphi m_\psi,$$

skąd:

$$\begin{aligned} M_{\varphi\psi} - m_{\varphi\psi} &\leqq M_\varphi M_\psi - m_\varphi m_\psi \\ &\leqq M_\varphi (M_\psi - m_\psi) + m_\psi (M_\varphi - m_\varphi), \end{aligned}$$

a jeżeli przez $D^{(r)}{}_{\varphi\psi}$, $D^{(r)}{}_\varphi$, $D^{(r)}{}_\psi$ oznaczymy oscylacye trzech funkcyj $\varphi\psi, \varphi, \psi$, będzie:

$$D^{(r)}_{\varphi\psi} \leqq M_\varphi D^{(r)}_\psi + m_\psi D^{(r)}_\varphi .$$

Kładąc M_ψ zamiast m_ψ, wzmocnimy jeszcze nierówność, możemy więc napisać:

$$D^{(r)}_{\varphi\psi} \leqq M_\varphi D^{(r)}_\psi + M_\psi D^{(r)}_\varphi .$$

Nierówność ta stosuje się do każdego przedziału δ_r; jeżeli więc przez M, M' oznaczymy granice wyższe wartości funkcyj φ, ψ dla całego przedziału całkowania i podstawimy w nierówności M, M' zamiast M_φ, M_ψ, nierówność wzmocni się jeszcze, gdyż

M, M' nie mogą być oczywiście mniejszemi odpowiednio od M_φ, M_ψ. Będzie tedy:

$$D^{(r)}_{\varphi\psi} \leqq M D^{(r)}_\psi + M' D^{(r)}_\varphi,$$

a stąd:

$$\Sigma\, \delta_r\, D^{(r)}_{\varphi\psi} \leqq M \Sigma\, \delta_r\, D^{(r)}_\psi + M' \Sigma\, \delta_r\, D^{(r)}_\varphi.$$

Ponieważ obie funkcye φ, ψ są z założenia całkowalnemi, przeto sumy $\Sigma\, \delta_r\, D^{(r)}_\psi$, $\Sigma\, \delta_r\, D^{(r)}_\varphi$ na podstawie twierdzenia, dowiedzionego w § 1, dążą do zera, a więc dążyć musi do zera i suma $\Sigma\, \delta_r\, D^{(r)}_{\varphi\psi}$, co znaczy, że iloczyn $\varphi\psi$ jest całkowalny.

Powyższy dowód przeprowadziliśmy w założeniu, że funkcye φ, ψ są zawsze dodatnie dla każdego punktu przedziału. Lecz jest jasnem, że twierdzenie to jest ogólnem, gdyż do funkcyj φ, ψ można zawsze dodać dwie stałe C, C' takie, aby sumy $\varphi + C$, $\psi + C'$ miały zawsze wartości dodatnie; w tym celu dość wziąść C i C' większe odpowiednio od wartości bezwzględnych granic niższych funkcyj φ, ψ w całym przedziale. Wtedy iloczyn:

$$(\varphi + C)\,(\psi + C') = \varphi\psi + C\psi + C'\varphi + CC',$$

na mocy powyższego dowodzenia, jest całkowalny, a więc będzie całkowalnym i iloczyn $\varphi\psi$, równy $(\varphi + C)(\psi + C') - C\psi - C'\psi - CC'$, jako będący sumą funkcyj całkowalnych.

Załóżmy teraz, że liczba działań nie jest już skończoną, lecz n i e s k o ń c z o n ą, np., że mamy nieskończoną liczbę wyrazów, z których każdy przedstawia funkcyę całkowalną. Będzie to t. zw. zagadnienie o c a ł k o w a n i u p r z e z s z e r e g i, analogiczne do zagadnienia o różniczkowaniu przez szeregi, którem zajmowaliśmy się w „Rachunku różniczkowym“ (Rozdz. II § 2).

Niechaj będzie szereg zbieżny, którego wyrazy są funkcyami całkowalnemi zmiennej x w przedziale od a do b. Pytamy się, w jakich przypadkach taki szereg przedstawia f u n kcyę całkowalną zmiennej x i kiedy można za całkę szeregu przyjąć sumę całek pojedyńczych jego wyrazów?

Jak zwykle, nie szukamy warunków czysto-koniecznych; wystarczy tu znaleźć warunek dostateczny w postaci łatwej i do użycia w zastosowaniach dogodnej. Udowodnimy twierdzenie. „Jeżeli szereg dany jest szeregiem zbieżnym jednostajnie i wszystkie jego wyrazy są funkcyami całkowalnemi, wtedy szereg przedstawia funkcyę całkowalną, a całkowanie uskutecznia się, biorąc sumę całek pojedyńczych wyrazów“.

Niechaj będzie szereg:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots = \sum_{h=1}^{\infty} u_h(x).$$

Oznaczmy przez $R_n(x)$ resztę szeregu, to będzie:

$$f(x) = \sum_{h=1}^{h=n} u_h(x) + R_n(x)\,.$$

Na mocy założenia o jednostajnej zbieżności szeregu można ilość $R_n(x)$ uczynić mniejszą od σ dla każdego punktu x. Dowiedziemy najprzód, że funkcya $f(x)$ jest całkowalną, jeżeli całkowalnemi są wyrazy $u(x)$. Oznaczmy przez $D_r^{(1)}, D_r^{(2)}, \ldots$ oscylacye wyrazów $u_1(x), u_2(x), \ldots$ w przedziale cząstkowym δ_r, który, jak zwykle, jest jednym z przedziałów, na które podzielono cały przedział całkowalności. Niechaj dalej $D_r^{(f)}, D_r^{(R)}$ oznaczają oscylacye funkcyj f i R w tymże przedziale δ_r. Wtedy jest widocznem, że wartość granicy wyższej w przedziale δ_r funkcyi f, równej sumie funkcyj $u_1, u_2, \ldots, u_n$, R nie może przewyższać sumy granic wyższych tych funkcyj. Np. jeżeli wszystkie te funkcye mają swoje wartości największe w jednym i tym samym punkcie x, wtedy i maximum funkcyi f odpowiada sumie tych maximów; w ogólności wszakże, gdy ten przypadek specyalny nie zachodzi, maximum funkcyi f będzie mniejsze od sumy maximów. Podobnież minimum funkcyi f będzie wogóle większe od sumy minimów. Jeżeli więc oznaczymy przez $M^{(f)}$, $m^{(f)}$, $M^{(1)}$, $m^{(1)}$, ..., $M^{(n)}$, $m^{(n)}$, $M^{(R)}$, $m^{(R)}$ maxima i minima funkcyj f, u_1, ... u_n, R, mieć będziemy:

$$M^{(f)} \leqq M^{(1)} + M^{(2)} + \ldots + M^{(n)} + M^{(R)},$$

$$m^{(f)} \geqq m^{(1)} + m^{(2)} + \ldots + m^{(n)} + m^{(R)},$$

a odejmując:

$$D_r^{(f)} \leqq D_r^{(1)} + D_r^{(2)} + \ldots + D_r^{(n)} + D_r^{(R)}.$$

Niechaj teraz dla każdego x będzie co do wartości bezwzględnej $R_n(x) < \sigma$, to widocznem jest, że oscylacye funkcyi R nie mogą być większe od 2σ, a więc:

$$D_r^{(f)} \leqq D_r^{(1)} + D_r^{(2)} + \ldots + D_r^{(n)} + 2\sigma,$$

$$\Sigma\, \delta_r\, D_r^{(f)} \leqq \Sigma\, \delta_r\, D_r^{(1)} + \Sigma\, \delta_r\, D_r^{(2)} + \ldots + \Sigma\, \delta_r\, D_r^{(n)} + 2\sigma \Sigma\, \delta_r.$$

Ponieważ $\Sigma\, \delta_r = b - a$, t. j. całemu przedziałowi całkowania, a sumy po stronie drugiej dążą do zera, gdyż funkcye $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... są całkowalnemi, σ zaś może być dowolnie małem, przeto i suma na stronie pierwszej ostatniego wzoru może być uczyniona dowolnie małą, co znaczy, że funkcya f jest całkowalną.

Łatwo teraz okazać, że całką funkcyi f jest suma całek pojedyńczych wyrazów szeregu. Istotnie, utwórzmy sumę:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b u_1(x)\, dx + \int_a^b u_2(x)\, dx + \ldots$$

$$+ \int_a^b u_n(x)\, dx + \int_a^b R_n(x)\, dx,$$

gdzie po drugiej stronie mogliśmy znak całkowania napisać przy każdym wyrazie, gdyż suma wyrazów jest skończoną. Jeżeli okażemy, że całka $\int_a^b R_n(x)\,dx$, w miarę wzrastania liczby n, może stać się mniejszą od każdej ilości dowolnie małej, t. j. dąży do zera, to jasnem będzie, że szereg całek, t. j.

$$\sum_{h=1}^{\infty} \int_a^b u_h(x)\,dx,$$

będzie szeregiem zbieżnym, którego wartość jest wartością całki funkcyi $f(x)$.

Wiemy, że $R_n(x)$ dla każdego x w przedziale całkowania może być mniejszem od σ, stąd całka $\int_a^b R_n(x)\,dx$ jest co do wartości bezwzględnej mniejsza od $\int_a^b \sigma\,dx = (b-a)\,\sigma$, t. j. tak małą, jak się podoba, co było do okazania.

Stosując dowiedzione twierdzenie do szeregu potęgowego, który, jak wiemy, (p. „Rachunek różniczkowy", Rozdz. I, § 7), gdy jest zbieżny w pewnym obszarze, zawartym pomiędzy punktami skrajnemi, to jest z pewnością i jednostajnie zbieżnym w tymże obszarze, z włączeniem punktów skrajnych, otrzymamy twierdzenie:

„Szereg potęgowy zmiennej x jest funkcyą całkowalną, a całkę jego otrzymujemy, biorąc sumę całek pojedyńczych wyrazów.

Pokażemy, w jaki sposób te twierdzenia można spożytkować w celu rozwinięcia na szeregi niektórych funkcyj. Jako przykład, weźmy funkcyę arc sin x. Funkcyę tę możemy wyrazić za pomocą całki określonej. Istotnie pochodną jej jest $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, a więc możemy napisać:

$$\text{arc}\sin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

zakładając, że funkcyę określamy w ten sposób, iż jest równa zeru dla $x = 0$. Według rozwinięcia dwumianowego (p. „Rachunek różniczkowy", Rozdz. III, § 3), mamy (jeżeli $x^2 < 1$):

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}x^4 + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}x^6 + \ldots,$$

gdzie strona druga jest szeregiem potęgowym, który możemy całkować. Całka tego każdego wyrazu jest typu:

$$\int_0^x x^{2n}\, dx,$$

a więc równa się:

$$\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

co sprawdzić łatwo (p. Rozdz. I, § 3). Znajdujemy więc:

$$\text{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\,\frac{x^5}{5} + \ldots$$

Zauważmy że szereg po stronie prawej jest jeszcze zbieżny i dla $x^2 = 1$, jakkolwiek szereg dwumianowy, z którego wyszliśmy, jest dla tej wartości x rozbieżnym. Funkcya pod znakiem całkowania staje się wtedy nieskończoną rzędu $\frac{1}{2}$, lecz całka pozostaje skończoną $\left(\text{jej wartością jest } \frac{\pi}{2}\right)$.

Piękny przykład całkowania przez szeregi stanowi:

$$\int \log (1-2\varrho \cos x + \varrho^2)\, dx.$$

Funkcya podcałkowa jest bardzo skomplikowana i całkowanie bezpośrednie nie byłoby łatwem; lecz jeżeli rozwiniemy tę funkcyę na szereg i wykonamy całkowanie przez szeregi, otrzymamy łatwo wartość całki pod postacią szeregu.

Przykład szeregu, który nie będąc jednostajnie zbieżnym, nie pozwala na całkowanie przez szeregi, podał Darboux; jest to szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n x e^{-nx^2} - (n+1)\, x e^{-(n+1)x^2}],$$

którego wartością jest wprost xe^{-x^2}.

Nie wchodzimy w szczegóły tego rozważania, które zresztą byłoby łatwem.

ROZDZIAŁ III.

OBLICZANIE CAŁEK NIEOKREŚLONYCH I OKREŚLONYCH.

---

§ 1.

Całki nieokreślone zasadnicze.

W dwóch poprzedzających paragrafach rozważaliśmy własności ogólne, wynikające z określenia całki; obecnie przechodzimy do części praktycznej rachunku całkowego, t. j. do odpowiedzi na pytanie: mając daną funkcyę, jak z niej obliczyć całkę nieokreśloną?

W rachunku różniczkowym zagadnienie różniczkowania może być rozwiązane zupełnie, jeżeli w danej funkcyi zachodzą tylko symbole zwykłe działań analitycznych. W rachunku całkowym rzecz ma się inaczej; tu bowiem, o ile nie mamy do czynienia z typami elementarnemi funkcyj, nie możemy ustanowić właściwych prawideł całkowania. Powodzenie zależy tu od zastosowania tego lub owego sposobu sztucznego i nie zawsze udaje się znaleść środek prowadzący do celu. Dalej, podczas gdy różniczkowanie zwykłych typów funkcyj prowadzi zawsze do funkcyj, nie wychodzących z zakresu tychże typów, to w rachunku całkowym rzecz ma się odmiennie. Całkowanie zwykłych typów funkcyj prowadzi bowiem nieraz do funkcyj, nie dających się już przedstawić w ten sam sposob, jak poprzednie, za pomocą skończonej liczby działań analitycznych, wykonanych na zmiennej niezależnej, jeżeli przez zwykłe działania analityczne rozumiemy działania matematyki elementarnej, t. j. sześć działań zasadniczych algebry, dalej działania logarytmowania i wykładnicze, działania trygonometryczne i odwrotne względem tychże.

Dla przekonania się, że całkowanie może prowadzić do funkcyj nowych, bardziej złożonych, rozważmy co następuje:

Wiemy, że pochodną funkcyi $\log x$ jest $\frac{1}{x}$; stąd wnosimy, że całką nieokreśloną funkcyi $\frac{1}{x}$ jest $\log x$, gdyż $\frac{1}{x}$ jest funkcyą ciągłą (p. Rozdział I, § 3). Wyobraźmy sobie na chwilę, że funkcya logarytmowa nie należy jeszcze do zakresu funkcyj, które uważamy za funkcye zwykłe, i że nie należy także do tegoż zakresu jej odwrotność, t. j. funkcya wykładnicza; wtedy będzie jasnem, że prosty proces całkowania najprostszej funkcyi wymiernej $\frac{1}{x}$ wprowadza już nową funkcyę logarytmową.

Jeżeli zaliczymy do klasy pierwszej funkcye wymierne, do drugiej niewymierne, do trzeciej przestępne (trygonometryczne i ich odwrotne, logarytmowe i wykładnicze), to różniczkowanie funkcyi jednej klasy nie prowadzi do funkcyj klasy wyższej, lecz do funkcyj tejże klasy lub niższej; całkowanie, przeciwnie, może prowadzić do funkcyj klasy wyższej.

W następnych paragrafach wskażemy niektóre zasadnicze środki sztuczne całkowania; obecnie podamy t. zw. wzory zasadnicze całkowania.

Rozpatrzmy wszystkie funkcye, które podzieliliśmy wyżej na trzy klasy; wszystkie one są funkcyami ciągłemi i ich pochodne są także funkcyami ciągłemi. Pamiętając o tem, że całka nieokreślona funkcyi ciągłej jest funkcyą, której pochodna jest równa funkcyi danej, możemy napisać wzory zasadnicze.

Z jedenastu związków:

1. $\frac{d}{dx}\frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m$ (dla jakiegokolwiek m, różnego od -1);

2. $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$; 3. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$; 4. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$;

5. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$; 6. $\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$; 7. $\frac{d}{dx}\operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

8. $\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sin} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 9. $\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,cos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10. $\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}$; 11. $\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,cotg} x = -\frac{1}{1+x^2}$,

otrzymujemy dziewięć wzorów zasadniczych:

1. $\int x^m\,dx = \frac{x^m+1}{m+1}$ (dla m różnego od -1);

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$; 3. $\int e^x\,dx = e^x$;

4. $\int \cos x\,dx = \sin x$; 5. $\int \sin x\,dx = -\cos x$;

6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x$; 7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x$;

8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sin} x = -\operatorname{arc\,cos} x$;

9. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,cotg} x$.

Rozumie się, że do stron drugich tych dziewięciu wzorów można dołączyć zawsze stałą dowolną, dla otrzymania całki nieokreślonej zupełnej.

Jeżeli mamy do obliczenia całkę funkcyi, nie znajdującej się w powyższej tablicy, to musimy znaleść odpowiedni sposób sprowadzenia jej do całek znanych. Przykłady podajemy w paragrafie następnym.

---

§ 2.

Sztuczne sposoby całkowania. Całkowanie przez części. Całkowanie przez szeregi.

Niechaj daną będzie do obliczenia całka $\int \frac{dx}{\sin x}$, nie należąca do żadnego z typów, podanych w powyższej tablicy. Mamy:

$$\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x,$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{\frac{d}{dx} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

Funkcya, której pochodna względem x równa się ostatniemu wyrażeniu, jest $\log \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; a zatem:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \text{const.}$$

Metodą często stosowaną jest metoda p o d s t a w i e n i a, polegająca na przekształceniu zmiennej niezależnej na inną (patrz Rozdz. I, § 6) tak, aby nowa funkcya podcałkowa była prostszą do całkowania, niż dana. Nie możemy, naturalnie, podać prawideł na to, jakiego używać należy podstawienia; powodzenie zależeć tu będzie często od większej lub mniejszej wprawy w rachunkach tego rodzaju. Celem podstawienia będzie zawsze dojście do typu funkcyi, której całka jest już znaną, chociażby nowa funkcya była gatunku wyższego niż ta, z której wyszliśmy; tak np. nowa funkcya może być przestępną, gdy dana jest algebraiczną. Tak np. całka $\int \frac{dx}{1-x^2}$ przez podstawienie $x = \cos y$ przekształca się (p. Rozdz. I, § 6) na $-\int \frac{dy}{\sin y}$, która na zasadzie rozważań poprzedzających równa się $-\log \operatorname{tg} \frac{y}{2} + \text{const.}$, a więc całka dana równa się:

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos x + \text{const.}$$

Ten rezultat można uprościć za pomocą wzorów trygonometryi; w samej rzeczy:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} y = \frac{\sin \frac{1}{2} y}{\cos \frac{1}{2} y} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} y \cos \frac{1}{2} y}{2 \cos^2 \frac{1}{2} y} = \frac{\sin y}{1 + \cos y}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 + x},$$

tak że ostatecznie całka nasza równa się:

$$\log \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 + x} + \text{const.}$$

Obliczmy całkę:

$$\int \frac{dx}{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}.$$

Połóżmy tożsamościowo:

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = (a x + b)^2 + c,$$

skąd należy oznaczyć stałe a, b, c. Rozwijając kwadrat i porównywając spółczynniki jednakowych potęg zmiennej x, znajdujemy:

$$\alpha = a^2; \quad \beta = ab; \quad \gamma = b^2 + c;$$

stąd:

$$a = \sqrt{\alpha}; \quad b = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}; \quad c = \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha},$$

przez co całka przekształca się na następującą:

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2+c}.$$

Przez podstawienie $ax + b = y$, z którego wynika $dx = \frac{dy}{a}$, ta całka zamienia się na:

$$\frac{1}{a} \int \frac{dy}{y^2+c}.$$

Wprowadźmy nową zmienną z za pomocą podstawienia $y = \sqrt{c} \,.\, z$, z którego wynika $dy = \sqrt{c} \,.\, dz$; otrzymujemy:

$$\frac{1}{a\sqrt{c}} \int \frac{dz}{z^2+1},$$

a gdy c jest ujemnem, podstawienie $y = \sqrt{-c} \,.\, z$, z którego wynika $\sqrt{-c} \,.\, dz$, doprowadza do całki:

$$-\frac{1}{a\sqrt{-c}} \int \frac{dz}{1-z^2}.$$

Pierwsza z ostatnich dwu całek sprowadza się do typu, znajdującego się w tablicy zasadniczej, druga do całki wyżej przez nas obliczonej. Otrzymujemy więc jako wynik w pierwszym przypadku:

$$\frac{1}{a\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{a\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} \frac{ax+b}{\sqrt{c}};$$

w drugim zaś:

$$-\frac{1}{a\sqrt{-c}} \log \operatorname{tg} \arccos \frac{z}{2} = -\frac{1}{a\sqrt{-c}} \log \operatorname{tg} \arccos \frac{ax+b}{2\sqrt{-c}}.$$

Powyższe przykłady niechaj wystarczą na teraz jako przykłady całkowania za pomocą metody podstawień. Wyłożymy obecnie zasady innej metody, bardzo użytecznej w praktyce, zwanej metodą całkowania przez części.

Niechaj $u(x)$, $v(x)$ będą dwie funkcye, mające pochodne; według prawideł na pochodną iloczynu będzie:

$$\frac{d}{dx}[u(x)\,v(x)] = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x),$$

stąd:

$$u(x)\frac{d}{dx}v(x) = \frac{d}{dx}[u(x)\,v(x)] - v(x)\frac{d}{dx}u(x).$$

Całkując obie strony i pamiętając, że całką pochodnej funkcyi jest sama funkcya, otrzymujemy wzór zasadniczy:

$$\int u(x)\frac{dv(x)}{dx}\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\frac{du(x)}{dx}\,dx.$$

Zatrzymajmy się na chwilę nad tym wzorom dla wyrozumienia, w jaki sposób może on służyć do naszego celu. Niechaj będzie do obliczenia całka funkcyi ciągłej $f(x)$. Możemy zawsze wyobrazić sobie, że funkcya $f(x)$, jako iloczyn dwóch czynników, z których jednym jest $u(x)$, drugim zaś $\frac{dv(x)}{dx}$, t. j. pochodna pewnej nieznanej funkcyi $v(x)$. Przy takiem założeniu można przy pomocy powyższego wzoru sprowadzić obliczenie całki danej do obliczenia innej całki, zupełnie różnej od pierwszej, a która może być znacznie prostszą lub znaną. Rozkład na czynniki można uskutecznić nieskończenie wielu sposobami, lecz naturalnie pomiędzy niemi obierzemy (o ile istnieje i może być znaleziony) sposób, czyniący zadość dwóm warunkom: 1) aby można znaleść bezpośrednio funkcyę $v(x)$; 2) aby funkcya $v(x)\frac{du(x)}{dx}$ była łatwiejsza do całkowania, niż funkcya dana. Zresztą wszystko zależy od zręczności i wprawy, nabytej w tego rodzaju rachunkach. Przykłady najlepiej rzecz wyjaśnią.

Niechaj będzie do obliczenia całka $\int \log x\, dx$. Uważajmy funkcyę $\log x$ za iloczyn $\log x \,.\, 1$; pierwszy czynnik nazwijmy $u(x)$, drugi $\frac{dv(x)}{dx}$. Ze związku $\frac{dv}{dx} = 1$, wynika $v = x$, a ze związku $u = \log x$ mamy $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$; stosując więc wzór całkowania przez części, otrzymujemy:

$$\int \log x\, dx = x \log x - \int dx$$

$$= x \log x - x + \text{const.}$$

Niekiedy nie udaje się całkowanie po jednokrotnem stosowaniu tej metody, lecz po kilkakrotnem. Oto przykład:

Niechaj będzie:

$$\int x^2 \sin x\, dx\,.$$

Funkcyę podcałkową rozłóżmy na dwa czynniki: $x^2 = u$,

$$\sin x = \frac{dv}{dx}\,;\ \text{stąd}\ \frac{du}{dx} = 2x,\ v = -\cos x\ \text{i będzie:}$$

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx\,.$$

Całka po drugiej stronie nie jest jeszcze znaną, lecz widocznie jest prostszą od całki danej, gdyż wykładnik zmiennej x jest w niej o jedność mniejszy. Stosując powtórnie całkowanie przez części, otrzymujemy:

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x\,,$$

a więc ostatecznie:

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2\,x \sin x + 2 \cos x + \text{const.}$$

W następnych paragrafach zajmiemy się zagadnieniem całkowania niektórych specyalnych typów funkcyj i dla pewnych typów dość ogólnych będziemy mogli podać wzory ogólne na całkowanie.

Gdy funkcya dana nie da się sprowadzić do żadnego z typów, które umiemy całkować, gdy więc okażą się daremnemi wszelkie próby i sztuczne sposoby, wtedy pozostaje tylko uciec się do całkowania przez szeregi, którego teoryę podaliśmy w § 4 rozdziału II-go. Staramy się wtedy rozwinąć funkcyę na szereg, którego każdy wyraz jest całkowalny i otrzymujemy rezultat w postaci szeregu.

Jako przykład podajemy całkę:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,, \qquad (k^2<1),$$

która nazywa się całką eliptyczną. Całki takie badają się szczegółowo w matematyce wyższej; dają one początek funkcyom wyższym, niż zwyczajne funkcye przestępne, za pomocą których wyrazić się nie dają. Jest oczywistem, że gdy chcemy te funkcye wyrazić za pomocą zwykłych funkcyj, to wszelkie usiłowania i sposoby sztuczne nie udają się i możemy wtedy stosować tylko całkowanie przez szeregi.

Aby przykładu tego nie uczynić zbyt skomplikowanym, ograniczymy się na obliczeniu całki określonej w granicach od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Funkcya podcałkowa daje się rozwinąć na szereg następujący:

$$(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \varphi + \ldots$$

Szereg ten jest jednostajnie zbieżny; kładąc bowiem za $\sin \varphi$ jego wartość największą 1, otrzymujemy szereg wartości największych:

$$1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 + \ldots$$

zbieżmy dla $k^2 < 1$, skąd na mocy znanego twierdzenia („Rachunek różniczkowy", Rozdz. 1, § 7) wynika, że szereg uważany jest jednostajnie zbieżny.

Całkując wyraz po wyrazie we wzorze powyższym, znajdujemy:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \varphi + \frac{1}{2} k^2 \int \sin^2 \varphi \, d\varphi$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \int \sin^4 \varphi \, d\varphi + \ldots$$

Aby dojść tedy do szukanego rezultatu, trzeba umieć obliczać całki postaci $\int \sin^{2n} \varphi \, d\varphi$. Możemy to uskutecznić za pomocą metody całkowania przez części. Mamy:

$$\int \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = - \sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi$$

$$+ (2n-1) \int \sin^{2n-2} \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \, ;$$

kładąc $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$ i łącząc wyrazy podobne, otrzymujemy:

$$\int \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = - \frac{\sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi}{2n} + \frac{2n-1}{2n} \int \sin^{2n-2} \varphi \, d\varphi \, .$$

Według tego wzoru całka, odpowiadająca wykładnikowi $2n$, zależy od całki, odpowiadającej wykładnikowi $2n-2$; stosując dostateczną liczbę razy ten wzór, dojdziemy w końcu do całki z wykładnikiem zero i otrzymamy tym sposobem wartość całki $\int \sin^{2n} \varphi \, d\varphi$. Rachunek upraszcza się, jak powiedzieliśmy, jeżeli rozpatrujemy całkę określoną od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Wtedy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi$ staje się:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \varphi \, d\varphi,$$

a stosując wzór ten kolejno n razy, znajdziemy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{(2n-1)\,(2n-3) \ldots 1}{2n \,.\, (2n-2) \ldots 2} \cdot \frac{\pi}{2} \, ,$$

stąd wartość szukana całki danej będzie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2}\Big[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k^4$$

$$+ \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 k^6 + \ldots\Big].$$

---

§ 3.

Całkowanie funkcyj wymiernych.

Metody, wskazane w poprzedzających rozdziałach, służyły do przekształcenia całki danej na inną, której obliczenie w wielu razach jest łatwiejszem. Obecnie przyjmiemy, że funkcya, mająca być całkowaną, jest specyalnego gatunku, mianowicie jest f u n k c y ą w y m i e r n ą. Wtedy możemy istotnie wskazać metodę ogólną do obliczania całki w każdym przypadku. Rozumiemy to tak, że zagadnienie uważa się za rozwiązane, gdy daje się sprowadzić do zagadnienia natury mniej wysokiej, np. do rozwiązania równania algebraicznego, które praktycznie może być trudnem i nawet niewykonalnem. Z punktu widzenia teoretycznego wszakże zagadnienie o całkowaniu należy wtedy uważać za rozwiązane.

Niechaj będzie funkcya wymierna, równa ilorazowi dwu funkcyj $\frac{F(x)}{f(x)}$, które możemy przyjąć jako względnie pierwsze. Podzielmy licznik przez mianownik, (gdy stopień funkcyi F jest większy od stopnia funkcyi f), przez co iloraz sprowadzimy do części całkowitej i do części ułamkowej, w której stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika. Co do części całkowitej, to całkowanie jej sprowadza się do całkowania wyrażeń typu ax^n, gdzie a jest stałą; takie całki obliczamy według znanych prawideł. Zagadnienie zatem sprowadza się do całkowania funkcyi typu $\frac{F(x)}{f(x)}$, gdzie funkcye F i f są względnie pierwszemi i stopień pierwszej z nich jest mniejszy od stopnia drugiej.

Niechaj $a_1, a_2, \ldots, a_p$ będą pierwiastkami funkcyi f; przyjmijmy, że są one rzeczywistemi i że $n_1, n_2, \ldots, n_p$ są stopniami ich wielokrotności. Wiemy wtedy z algebry (jak to okażemy na końcu tego paragrafu), że ułamek $\frac{F(x)}{f(x)}$ można rozłożyć na sumę ułamków cząstkowych sposobem następującym:

$$
(1) \quad \left\{ \begin{aligned}
\frac{F(x)}{f(x)} = & \frac{b_1^{(n_1)}}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{b_1^{(n_1-1)}}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{b'_1}{x-a_1} \\
& + \frac{b_2^{(n_2)}}{(x-a_2)^{n_2}} + \frac{b_2^{(n_2-1)}}{(x-a_2)^{n_2-1}} + \ldots + \frac{b'_2}{x-a_2} \\
& + \ldots\ldots \\
& + \frac{b_p^{(n_p)}}{(x-a_p)^{n_p}} + \frac{b_p^{(n_p-1)}}{(x-a_p)^{n_p-1}} + \ldots + \frac{b'_p}{x-a_p},
\end{aligned} \right.
$$

gdzie ilości b są stałemi, z których niektóre mogą być zerami. Lecz z pewnością różnemi od zera są: $b_1^{(n_1)}, b_2^{(n_2)}, \ldots, b_p^{(n_p)}$. Widzimy, że całkowanie strony drugiej tego wzoru sprowadza się zawsze do całek typu $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$. Dla $n = 1$ taka całka równa się $\log(x-a)$, dla n różnego od 1 równa się $-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$.

W ten sposób zadanie nasze jest zupełnie rozwiązane, a rezultat będzie sumą funkcyj wymiernych i logarytmowych.

Podajmy zastosowanie tej metody. Niechaj będzie do obliczenia całka:

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)}.$$

Pierwiastki mianownika są wszystkie rzeczywiste; są niemi 0, 1, — 1; wielokrotność wszystkich jest 1. Napiszemy tedy:

$$\frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

Dla oznaczenia stałych a, b, c pomnożmy tę równość kolejno przez x, $x-1$, $x+1$ i następnie połóżmy $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$; znajdziemy tym sposobem:

$$a = 1, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}.$$

Stąd

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \log x - \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x+1) + C$$

$$= \log \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} + C.$$

Wyłożoną metodę można stosować z pożytkiem w przypadku, gdy wszystkie pierwiastki a są r z e c z y w i s t e m i. Jeżeli niektóre z nich są urojonemi, wtedy nie możemy przejść do obliczeń, ponieważ wszystkie dotychczasowe rozważania nasze w rachunku różniczkowym i całkowym odnoszą się w istocie rzeczy do funkcyj, w których nie zachodzą ilości urojone. Należałoby tedy rozpocząć przedewszystkiem od rozciągnięcia dotychczasowych rozważań na przypadek funkcyj urojonych i okazać, że wykonywając na ilościach urojonych działania tak, jak się je wykonywa na ilościach rzeczywistych, dochodzi się do rezultatów ostatecznych, z których znikają ilości urojone. Rezultaty, które otrzymanoby w ten sposób pod postacią rzeczywistą, byłyby właśnie rezultatami szukanemi.

Lecz można okazać, że i w przypadku, w którym niektóre pierwiastki funkcyi f są urojonemi, daje się wykonać rachunek całkowania, bez wprowadzenia ilości urojonych.

Załóżmy, że funkcya f posiada pierwiastek u r o j o n y $\alpha + i\beta$, którego stopień wielokrotności jest n; wtedy posiada także i pierwiastek sprzężony $\alpha - i\beta$ tegoż stopnia wielokrotności. Czynnikiem przeto funkcyi f będzie:

$$[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n = (x^2 + ax + b)^n.$$

Z algebry wiadomo (okażemy to na końcu paragrafu), że ułamek $\frac{F(x)}{f(x)}$ można rozłożyć na ułamki cząstkowe jeszcze sposobem odmiennym od podanego we wzorze (1); mianowicie, można ją rozłożyć na szereg wyrazów, z których niektóre, odpowiadające pierwiastkom rzeczywistym funkcyi f, będą takie, jak w (1), inne zaś będą typu:

$$\frac{cx + d}{(x^2 + ax + b)^n},$$

gdzie pierwiastki równania $x^2 + ax + b = 0$ są urojonemi. Zagadnienie nasze sprowadza się do obliczania całek typu:

$$\int \frac{cx + d}{(x^2 + ax + b)^n}\, dx.$$

Jeżeli, jak wyżej, $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ są pierwiastkami mianownika, to będzie $x^2 + ax + b = (x - \alpha)^2 + \beta^2$; całka zaś zamienia się na:

$$\int \frac{cx + d}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^n}\, dx. \qquad (n > 0).$$

Tę ostatnią całkę można przedstawić tożsamościowo w ten sposób:

$$\int \frac{c\,(x-\alpha)+(c\alpha+d)}{[(x-\alpha)^2+\alpha^2]^n}\,dx$$

$$= c\int \frac{x-\alpha}{[(x-\alpha)^2+\alpha^2]^n}\,dx + (c\alpha+d)\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,.$$

Pierwsza z całek po prawej stronie przechodzi za pomocą podstawienia $x-\alpha=y$ na $c\int \frac{y\,dy}{(y^2+\beta^2)^n}$, a więc równa się:

$$-\frac{c}{2n-2}\cdot\frac{1}{(y^2+\beta^2)^{n-1}}, \quad \text{jeżeli } n>1;$$

lub:

$$\frac{c}{2}\log\,(y^2+\beta^2), \quad \text{jeżeli } n=1.$$

Druga z całek po prawej za pomocą tego samego podstawienia przechodzi na $\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n}$, a więc równa się: $\frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{\beta}$ dla $n=1$. Gdy zaś $n>1$, to uskuteczniamy przekształcenia:

$$\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{n-1}} = \int \frac{(y^2+\beta^2)}{(y^2+\beta^2)^n}\,dy$$

$$= \int \frac{y^2\,dy}{(y^2+\beta^2)^n} + \beta^2\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n}\,;$$

a wykonywając całkowanie przez części, otrzymujemy:

$$\int \frac{y^2\,dy}{(y^2+\beta^2)^n} = -\frac{y}{(2n-2)\,(y^2+\beta^2)^{n-1}}$$

$$+\frac{1}{2n-2}\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{n-1}}\,,$$

i łącząc te wzory, znajdujemy:

$$\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n} = \frac{y}{(2n-2)\beta^2 . (y^2+\beta^2)^{n-1}}$$
$$+ \frac{2n-3}{(2n-2)\beta^2} \int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{n-1}} .$$

Widzimy, że kolejne stosowanie tego wzoru redukcyjnego doprowadzi nas (przy n dodatniem i całkowitem) do całki tego samego gatunku, w której wykładnik przy ilości $y^2 + \beta^2$ jest jednością i taka całka, jak to już widzieliśmy, wyrazi się przez arcus tangens.

Tym sposobem zagadnienie całkowania danej funkcyi wymiernej jest zupełnie rozwiązanem, naturalnie w założeniu, że pierwiastki równania $f(x) = 0$ są znane; pokazaliśmy też, że we wszystkich przypadkach można uskutecznić obliczenie, wprowadzając jedynie ilości rzeczywiste, nawet gdy pierwiastki równania $f(x) = 0$ są urojonemi.

Jako rezultat tego całego badania możemy wypowiedzieć, że całka funkcyi wymiernej wyraża się zawsze i jedynie za pomocą trzech typów funkcyj: 1) funkcyj wymiernych, 2) funkcyj logarytmowych, 3) funkcyi arcus tangens. Funkcye trzeciego typu występują wtedy, jeżeli nie chcemy wprowadzać do rachunku ilości urojonych; gdy zaś wprowadzamy ilości urojone, to wystarczają funkcye dwu pierwszych gatunków.

Dla uzupełnienia tego wykładu podamy jeszcze w tym paragrafie ogólne twierdzenia algebry, odnoszące się do rozkładu funkcyj wymiernych na funkcye elementarne; twierdzenia te stanowią podstawę wszystkich powyższych wywodów.

a). Twierdzenia ogólne o rozkładzie funkcyj wymiernych ułamkowych.

Niechaj będzie funkcya $\frac{F(x)}{f(x)}$, której licznik i mianownik są wielomianami o zmiennej x, odpowiednio stopnia m-go i n-go.

Jeżeli stopień funkcyi F jest większy od stopnia funkcyi f, to po podzieleniu pierwszego wielomianu przez drugi, otrzymamy część całkowitą. $Q(x)$ stopnia $m-n$ i resztę $R(x)$ stopnia mniejszego od n; możemy więc napisać:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{f(x)}.$$

Taki podział na części całkowitą i ułamkową daje się uskutecznić jednym tylko sposobem. W samej rzeczy niechaj będzie:

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m,$$

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n;$$

twierdzę, że można j e d n y m t y l k o s p o s o b e m znaleść z a w s z e dwa wielomiany: jeden $Q(x)$ stopnia $m-n$ i $R(x)$ stopnia niższego od n, aby t o ż s a m o ś c i o w o, t. j. d l a k a ż d e j w a r t o ś c i x zachodziła równość:

$$F(x) = Q(x) f(x) + R(x).$$

Połóżmy:

$$Q(x) = q_0 x^{m-n} + q_1 x^{m-n-1} + \ldots + q_{m-n},$$

$$R(x) = r_0 x^{n-1} + r_1 x^{n-2} + \ldots + r_{n-1};$$

to być powinno:

$$\begin{aligned} & a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m \\ = & (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n)(q_0 x^{m-n} + q_1 x^{m-n-1} + \ldots + q_{m-n}) \\ & + r_0 x^{n-1} + r_1 x^{n-2} + \ldots + r_{n-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ ta równość winna zachodzić dla każdej wartości x, przeto spółczynniki jednakowych potęg zmiennej x po obu jej stronach winny być równe; stąd otrzymujemy związki:

$$\left\{\begin{aligned}
a_0 &= b_0\, q_0 \\
a_1 &= b_0\, q_1 + b_1\, q_0 \\
a_2 &= b_0\, q_2 + b_1\, q_1 + b_2\, q_0 \\
a_3 &= b_0\, q_3 + b_1\, q_2 + b_2\, q_1 + b_3\, q_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m-n} &= b_0\, q_{m-n} + b_1\, q_{m-n-1} + \cdots + b_{m-n}\, q_0
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
a_{m-n+1} &= b_1\, q_{m-n} + b_2\, q_{m-n-1} + \cdots + b_{m-n+1}\, q_0 + r_0 \\
a_{m-n+2} &= b_2\, q_{m-n} + b_3\, q_{m-n-1} + \cdots + b_{m-n+2}\, q_0 + r_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_m &= b_n\, q_{m-n} + r_{n-1}\,.
\end{aligned}\right.$$

Widać stąd, że pierwsza kategorya równań nie zawiera wcale spółczynników r, a zawiera natomiast wszystkie spółczynniki q; druga zaś kategorya zawiera spółczynniki r i spółczynniki q. Nadto z pierwszej kategoryi równań można oznaczyć spółczynniki q jednoznacznie, gdyż pierwsze z tych równań zawiera tylko spółczynnik q_0, a więc określa go jednoznacznie; drugie w ten sam sposób daje wartość jedyną na q_1, po oznaczeniu wartości q_0 i t. d., aż do ostatniego równania, z którego oznaczymy q_{m-n}. Gdy oznaczymy wszystkie spółczynniki q, to równania drugiej kategoryi określą w sposób jednoznaczny spółczynniki r. Jest tedy dowiedzione, że istnieją z a w s z e wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$ z własnościami wyżej podanemi, j e d n o z n a c z n i e określić się dające.

Udowodnijmy obecnie twierdzenie następujące:

N i e c h a j $(x-a)^\alpha$ b ę d z i e c z y n n i k i e m f u k c y i $f(x)$, l u b, c o n a j e d n o w y c h o d z i, n i e c h a j a b ę d z i e p i e r w i a s t k i e m r ó w n a n i a $f(x)=0$ o w i e l o k r o t n o ś c i α. W t e d y f u n k c y ę $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ m o ż n a r o złożyć zawsze w ten sposób:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

gdzie A jest stałą, $F_1(x)$ wielomianem całkowitym, $f_1(x)$ ilorazem funkcyi $f(x)$ przez $(x-a)^\alpha$.

W samej rzeczy, ponieważ

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x),$$

przeto jest tożsamościowo:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)}.$$

Możemy wybrać stałą A tak, aby było $F(a) - A f_1(a) = 0$, t. j. możemy przyjąć $A = \frac{F(a)}{f_1(a)}$, wtedy funkcya $F(x) - Af_1(x)$ będzie miała czynnik $x-a$; w drugim wyrazie powyższego wzoru będzie można wykonać skrócenie przez $x-a$ i pozostanie funkcya $F_1(x)$ stopnia $m-1$, w mianowniku zaś pozostanie $(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)$ c. b. d. o.

Z tego twierdzenia wypływa następujące:

Niechaj $a, b, \ldots, l$ będą pierwiastki rzeczywiste lub urojone funkcyi $f(x)$; $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ stopnie wielokrotności tych pierwiastków; wtedy funkcyę $\frac{F(x)}{f(x)}$ można rozłożyć w sposób następujący:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a_1)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gdzie $A, B, \ldots, A_1, B_1, \ldots$ są ilości stałe.

W samej rzeczy, stosując rozkład, podany w twierdzeniu poprzedzającem, do ułamka:

$$\frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

znajdziemy:

$$\frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_2(x)},$$

gdzie do drugiego wyrazu strony drugiej możemy znowu ten sam zastosować rozkład i postępując w ten sposób dalej, dojdziemy do powyższego wzoru. Zauważmy, że spółczynniki pierwsze tego rozkładu $A, B, \ldots$ nie mogą być zerami, gdyż są, jak wiemy, danemi przez wzory $A = \frac{F(a)}{f(a)}$, $B = \frac{F(b)}{f(b)}, \ldots$; gdyby więc były zerami, musiałoby być w takim razie $F(x) = 0$, t. j. a musiałoby być pierwiastkiem równania $F(x) = 0$, co nie zgadza się z założeniem, że ułamek $\frac{F(x)}{f(x)}$ jest nieprzywiedlny.

b). *Metoda wykonania rozkładu w przypadku pierwiastków rzeczywistych.*

Rozróżnimy dwa przypadki główne: jeden, gdy wszystkie pierwiastki są rzeczywistemi i drugi, w którym zachodzą też pierwiastki urojone. Gdy wszystkie pierwiastki są rzeczywistemi, rozpatrzmy dwa przypadki, pierwszy, gdy wszystkie są pojedyńczemi, drugi, gdy zachodzą i pierwiastki wielokrotne. W pierwszym razie mamy $f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l)$ i wtedy, na zasadzie poprzedzającego twierdzenia, można napisać:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{L}{x-l}.$$

Podamy metodę oznaczenia stałych A, B, C, ... Wiemy, że kładąc $f(x) = (x-a) f_1(x)$, t. j. $f_1(x) = (x-b)(x-c)\dots(x-l)$ mamy:

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Weźmy pierwszą pochodną funkcyi $f(x)$, t. j.:

$$f'(x) = (x-b)(x-c)\dots(x-l) + (x-a)(x-c)\dots(x-l) + \dots$$

Stąd:

$$f''(a) = (a-b)(a-c)\dots(a-l) = f_1(a),$$

a zatem:

$$A = \frac{F(a)}{f'(a)} \quad \text{i podobnie:} \quad B = \frac{F(b)}{f'(b)} \quad \text{i t. d.}$$

Zastosujemy te rezultaty do wyprowadzenia wzoru, który może być użyteczny w wielu razach. Niechaj funkcya $F(x)$ będzie stopnia $n-2$, gdy funkcya $f(x)$ jest stopnia n. Mnożąc obie strony wzoru, dającego rozkład funkcyi $\frac{F(x)}{f(x)}$, przez $f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-l)$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F(x) &= A(x-b)(x-c)\dots(x-l) \\ &+ B(x-a)(x-c)\dots(x-l) \\ &+ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Spółczynnik przy potędze x^{n-1} po stronie drugiej jest $A + B + C + \dots$, t. j.

$$\frac{F(a)}{f'(a)} + \frac{F(b)}{f'(b)} + \frac{F(c)}{f'(c)} + \dots = \Sigma \frac{F(a)}{f'(a)},$$

gdzie znak Σ oznacza, że suma ma być rozciągnięta na wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$. Gdy w funkcyi $F(x)$ spółczynnik przy x^{n-1} jest zerem, wtedy $\Sigma \frac{F(a)}{f'(a)} = 0$.

Pokażemy teraz jak obliczają się spółczynniki $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$ w przypadku ogólnym. Metoda bezpośrednia, wskazana w a) byłaby za długą i dlatego podamy wzory na wartość tych stałych, wyrażone przez pochodne funkcyj f i F. Wyjdźmy z wzorów:

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}, \quad A_1 = \frac{F_1(a)}{f_1(a)}, \ldots,$$

gdzie:

$$F_1(x) = \frac{F(x) - A f_1(x)}{x-a}, \quad F_2(x) = \frac{F_1(x) - A_1 f_1(x)}{x-a}, \ldots$$

Ponieważ $f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x)$, więc biorąc pochodne według wzoru Leibniza, znajdujemy:

$$f^{(\alpha)}(x) = \alpha!\, f_1(x) + \alpha \frac{\alpha!}{1}(x-a) f'_1(x)$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot \frac{\alpha!}{1 \cdot 2}(x-a)^2 f''_1(x) + \ldots$$

$$f^{(\alpha+1)}(x) = (\alpha+1)!\, f'_1(x) + \frac{(\alpha+1)\alpha}{2} \frac{\alpha!}{1}(x-a) f''_1(x)$$
$$+ \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{2 \cdot 3} \frac{\alpha!}{1 \cdot 2}(x-a)^2 f'''_1(x) + \ldots;$$

. . . .

dla $x = a$ otrzymujemy:

$$f^{(\alpha)}(a) = \alpha!\, f_1(a); \quad f^{(\alpha+1)}(a) = \frac{(\alpha+1)!}{1!} f'_1(a);$$
$$f^{(\alpha+2)}(a) = \frac{(\alpha+2)!}{2!} f''_1(a), \ldots$$

Biorąc zaś kolejne pochodne we wzorach:

$$(x-a)\, F_1(x) = F(x) - A\, f_1(x),$$

$$(x-a)\, F_2(x) = F_1(x) - A_1\, f'_1(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

znajdujemy:

$$F_1(x) + (x-a)\, F'_1(x) = F'_1(x) - A f'_1(x),$$

$$F_2(x) + (x-a)\, F'_2(x) = F'_1(x) - A_1 f'_1(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$2F'_1(x) + (x-a)\, F''_1(x) = F''(x) - A f''_1(x),$$

$$2F'_2(x) + (x-a)\, F''_1(x) = F''_1(x) - A f''_1(x).$$

Stąd dla $x = a$ będzie:

$$F_1(a) = F'(a) - Af'_1(a) = F'(a) - \frac{A}{(\alpha+1)!} f^{(\alpha+1)}(a),$$

$$F_2(a) = F'(a) - A_1 f'_1(a) = \frac{F''(a) - Af''_1(a)}{2} - A_1 f'(a)$$

$$= \frac{1}{2} F''(a) - \frac{A}{\alpha+2} f^{(\alpha+2)}(a) - \frac{A_1}{\alpha+1} f^{(\alpha+1)}(a),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Wstawiając tu wyrażenia na $A, A_1, A_2, \dots$, otrzymujemy żądane wzory zwrotne:

$$F(a) - \frac{A}{\alpha!} f^{(\alpha)}(a) = 0,$$

$$F'(a) - \frac{A}{(\alpha+1)!} f^{(\alpha+1)}(a) - \frac{A_1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(a) = 0,$$

$$F''(a) - \frac{A}{(\alpha+2)!} f^{(\alpha+2)}(a) - \frac{A_1}{(\alpha+1)!} f^{(\alpha+1)}(a) - \frac{A_2}{\alpha!} f^{(\alpha)}(a) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

których prawo tworzenia jest widoczne.

c). *Metoda wykonywania rozkładu w przypadku, w którym zachodzą pierwiastki urojone.*

Wykonanie w tym przypadku rozkładu za pomocą metod wyżej podanych dałoby we wzorach wyrażenia urojone i doprowadziłoby do rozkładu urojonego. Wskażemy przeto inny sposób rozkładu, wynikający z twierdzenia:

Jeżeli $x^2 + px + q$ jest czynnikiem mianownika $f(x)$, t. j. gdy:

$$f(x) = (x^2 + px + q)^n f_1(x),$$

wtedy tożsamościowo jest:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{F_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1} f_1(x)},$$

gdzie P i Q są dwie stałe, $F_1(x)$ zaś nowa funkcya całkowita.

W samej rzeczy mamy:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)}$$

$$= \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{F(x) - (Px + Q) f_1(x)}{(x^2 + px + q)^n f_1(x)}.$$

Możemy oznaczyć stałe P i Q tak, aby czynnikiem wyrażenia $F(x) - (Px + Q) f_1(x)$ był trójmian $x^2 + px + q$; jeżeli więc $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ są pierwiastkami równania $x^2 + px + q = 0$, to być powinno:

$$F(\alpha+i\beta) - [P(\alpha+i\beta) + Q] f_1(\alpha+i\beta) = 0;$$

$$F(\alpha-i\beta) - [P(\alpha-i\beta) + Q] f_1(\alpha-i\beta) = 0.$$

Otrzymujemy stąd:

$$P(a \pm i\beta) + Q = \frac{F(a \pm i\beta)}{f_1(a \pm i\beta)},$$

a obliczywszy stronę drugą, która będzie wogóle postaci $M \pm iN$, będziemy mieli:

$$Pa + Q = M; \quad P\beta = N,$$

skąd:

$$P = \frac{N}{\beta}, \quad Q = M - \frac{Na}{\beta}.$$

Dla tak określonych wartości P i Q znajdujemy:

$$F(x) - (Px + Q) f_1(x) = (x^2 + px + q) F_1(x),$$

co było do okazania.

Kolejne zastosowanie tego twierdzenia, podobnie jak w a), prowadzi do rozkładu:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots$$

$$+ \frac{P_{n-1}x + Q_{n-1}}{x^2 + px + q} + \frac{F_n(x)}{f_1(x)}.$$

Spółczynniki P, Q, P_1, Q_1, ... wyznaczają się ze związków:

$$Pk + Q = \frac{F(k)}{f_1(k)}, \quad (Pk + Q) f_1(k) = F(k),$$

$$P_1 k + Q_1 = \frac{F_1(k)}{f_1(k)}, \quad (P_1 k + Q_1) f_1(k) = F_1(k),$$

. . . .

gdzie k jest jednym z dwu pierwiastków równania $x^2+px+q=0$, funkcye zaś $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... są określone za pomocą związków:

$$(x^2+px+q)\,F_1(x) = F(x) - (Px+Q)\,f_1(x),$$

$$(x^2+px+q)\,F_2(x) = F_1(x) - (P_1x+Q)\,f_1(x),$$

. . . .

Zauważymy nadto, że gdy pierwiastki urojone funkcyi f nie są wielokrotnemi lecz pojedyńczemi, wtedy rozkład ten można otrzymać łatwo z pierwszego rozkładu. W samej rzeczy, jeżeli k i k' są dwa pierwiastki urojone sprzężone funkcyi x^2+px+q, wtedy rozkład za pomocą pierwszej metody daje:

$$\frac{R}{x-k}+\frac{R'}{x-k'},$$

gdzie:

$$R=\frac{F(k)}{f_1(k)\,(k-k')},\quad R'=\frac{F(k')}{f_1(k')\,(k'-k)}.$$

Łącząc oba ułamki w jeden, mamy:

$$\frac{(R+R')\,x-(Rk'+R'k)}{(x-k)\,(x-k')}=\frac{(R+R')\,x-(Rk'+R'k)}{x^2+px+q}.$$

Ponieważ k i k' są liczby urojone sprzężone, przeto R i R' a także Rk' i $R'k$ będą ilościami urojonemi sprzężonemi, skąd wynika, że $R+R'$, oraz $Rk'+R'k$ będą liczbami rzeczywistemi. Nadto kładąc $\dfrac{F(k)}{f_1(k)}=M+Ni$, oraz $k=\alpha+i\beta$, $k'=\alpha-i\beta$, otrzymujemy:

$$R=\frac{M+Ni}{2i\beta},\quad R'=\frac{M-Ni}{-2i\beta},$$

skąd:

$$R + R' = \frac{N}{\beta} = P$$

$$-(Rk' + R'k) = \frac{(M + Ni)(\alpha - i\beta) - (M - Ni)(\alpha + i\beta)}{-2i\beta}$$

$$= M - N\frac{\alpha}{\beta} = Q .$$

---

§ 4.

Całkowanie funkcyj niewymiernych. Całki dwumienne. Całki eliptyczne.

Jeżeli w przypadku funkcyj wymiernych mogliśmy zupełnie rozwiązać zadanie całkowania, to nie możemy tego uczynić w przypadku funkcyj niewymiernych. Musimy tu ograniczyć się na pewnych typach specyalnych i zobaczyć, czy i w jaki sposób można dla tych typów otrzymać metodę ogólną.

Jednym z łatwiejszych typów funkcyj niewymiernych jest ten, w którym występują różne potęgi ułamkowe zmiennej x; t. j. funkcya postaci $f(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \ldots)$, gdzie f jest symbolem funkcyi wymiernej, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ zaś są jakiekolwiek liczby wymierne ułamkowe. Taka funkcya f jest w istocie funkcyą niewymierną zmiennej x, lecz za pomocą prostego przekształcenia możemy ją łatwo sprowadzić do typu funkcyi wymiernej. W samej rzeczy, niechaj μ będzie najmniejszą wspólną wielokrotną mianowników w ułamków $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; wtedy $\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma, \ldots$ będą liczbami całkowitemi. Połóżmy $x = y^\mu$, skąd:

$$x^\alpha = y^{\mu\alpha},\ x^\beta = y^{\mu\beta}, \ldots$$

$$dx = \mu y^{\mu - 1}\, dy.$$

Za pomocą tego podstawienia dochodzimy do funkcyi zmiennej y, w której wszystkie wykładniki są liczbami całkowitemi; otrzymujemy zatem funkcyę wymierną zmiennej y i sprowadzamy zagadnienie do przypadku, rozważonego w paragrafie poprzedzającym.

Rozważmy całkę typu $\int f(x, \sqrt{R})\, dx$, gdzie R jest wielomianem stopnia 2-go względem x, t. j. $R = a + 2bx + cx^2$, f zaś przedstawia funkcyę w y m i e r n ą ilości x i $\sqrt{R}$. Funkcya f jest oczywiście funkcyą n i e w y m i e r n ą zmiennej x, a niewymierność ta pochodzi od pierwiastnika drugiego stopnia, t. j. od $\sqrt{R}$. Wykonamy pewne przekształcenia przygotowawcze dla okazania, że przez przekształcenie algebraiczne całka dana daje się wyrazić za pomocą pewnych całek typu oznaczonego.

Ponieważ potęga druga funkcyi $\sqrt{R}$ jest już wyrażeniem wymiernem, więc $\sqrt{R}$ w funkcyi f może występować tylko w stopniu p i e r w s z y m, a więc ogólna postać funkcyi f jest

$$\frac{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x) + \psi_1(x)\sqrt{R(x)}}.$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $\varphi_1(x) - \psi_1(x)\sqrt{R(x)}$, otrzymujemy:

$$\frac{\varphi(x)\varphi_1(x) - \psi(x)\psi_1(x)R(x) + \sqrt{R(x)}\,(\varphi_1(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi_1(x))}{\varphi_1^2(x) - \psi_1^2(x)R(x)},$$

gdzie mianownik jest już wymiernym. Funkcya f tedy może być sprowadzona do typu:

$$G(x) + H(x)\sqrt{R}(x),$$

w którym G i H są dwie funkcye wymierne zmiennej x. Winniśmy zatem zająć się całkami typu:

$$\int H(x)\sqrt{R}(x)\,dx,$$

które przez pomnożenie i podzielenie przez $\sqrt{R}$ sprowadzają się do:

$$\int \frac{H(x)\,R(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx = \int \frac{K(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx,$$

gdzie $K(x)$ jest funkcyą wymierną.

Jeżeli rozłożymy funkcyę $K(x)$ na część całkowitą i na ułamki elementarne według teoryi podanej w poprzedzającym paragrafie, spostrzeżemy, że gdy pozostajemy w obszarze ilości rzeczywistych, to całka powyższa sprowadza się do całek trzech typów, mianowicie do całki:

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{R(x)}}\,dx,$$

pochodzącej od części całkowitej, zawartej w $K(x)$; do całki:

$$\int \frac{1}{(x-a)^n\sqrt{R(x)}}\,dx,$$

pochodzącej od pierwiastków rzeczywistych w mianowniku funkcyi $K(x)$; wreszcie do całki:

$$\int \frac{cx+d}{(x^2+px+q)^n\sqrt{R(x)}}\,dx,$$

pochodzącej od pierwiastków urojonych mianownika tej funkcyi. Można pokazać, że każda z tych całek sprowadzić się daje do całki wymiernej. Dowód podamy dla całki typu ogólnego $\int f(x, \sqrt{R(x)})\,dx$, a nie dla całek jednego z trzech typów specyalnych, lubo przekształcenia wyżej wskazane mogą być w praktyce bardzo użytecznemi.

Rozróżnijmy dwa przypadki: c dodatniego i c ujemnego. W pierwszym z nich kładziemy $\sqrt{R} = y + \sqrt{c} \,.\, x$, skąd:

$$a + 2bx + cx^2 = y^2 + 2\sqrt{c}\, xy + cx^2,$$

a więc:

$$x = \frac{y^2 - a}{2\,(b - \sqrt{c} \,.\, y)},$$

$$\sqrt{R} = y + \frac{\sqrt{c} \,.\, (y^2 - a)}{2\,(b - \sqrt{c} \,.\, y)} = - \frac{\sqrt{c}\, y^2 - 2by + a\sqrt{c}}{2\,(b - \sqrt{c} \,.\, y)},$$

$$dx = \frac{2y\,(2b - 2\sqrt{c}\, y) + 2\,(y^2 - a)\sqrt{c}}{4\,(b - \sqrt{c} \,.\, y)^2}\, dy,$$

$$= - \frac{\sqrt{c} \,.\, y^2 - 2by + a\sqrt{c}}{2\,(b - \sqrt{c} \,.\, y)^2}\, dy.$$

Te podstawienia sprawiają, że f staje się funkcyą wymierną zmiennej y. Jako przykład weźmy całkę $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, która zamienia się wprost na $\int \frac{dy}{b - \sqrt{c}\, y} = - \frac{1}{\sqrt{c}} \log (b - \sqrt{c}\, y) + \text{const.}$, skąd:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = - \frac{1}{\sqrt{c}} \log\,(b - \sqrt{c}\sqrt{R} + cx) + \text{const.}$$

W drugim przypadku, $c < 0$, jeżeli funkcya podcałkowa jest funkcyą rzeczywistą zmiennej x dla każdej wartości rzeczywistej tej zmiennej, $\sqrt{R}$ nie może być ilością urojoną, t. j. R nie może być ujemnem dla żadnej wartości x. Lecz:

$$R = c\left(x^2 + \frac{2b}{c}\, x + \frac{a}{c}\right) = c\,(x - \alpha)\,(x - \beta),$$

gdzie α i β są pierwiastkami równania $R = 0$. Te pierwiastki nie mogą być zatem urojonemi. Gdyby bowiem były urojonemi, to iloczyn $(x-\alpha)(x-\beta)$ dla każdej wartości **rzeczywistej** x byłby iloczynem dwu liczb urojonych sprzężonych, a jako taki równałby się sumie dwu kwadratów liczb rzeczywistych i byłby stale dodatni; z powodu zaś czynnika c ujemnego, R byłoby ujemnem dla każdego x rzeczywistego, $\sqrt{R}$ — liczbą urojoną, a więc funkcya dana zawierałaby ilości zespolone, wbrew założeniu. Gdy zatem α i β są rzeczywistemi, to możemy zastosować podstawienie $\sqrt{R} = y(x-\alpha)$, które będzie podstawieniem **rzeczywistem**. Wynika z niego:

$$R = a + 2bx + cx^2 = y^2(x-\alpha)^2,$$

lub

$$c(x-\alpha)(x-\beta) = y^2(x-\alpha)^2,$$

$$c(x-\beta) = y^2(x-\alpha),$$

skąd:

$$x = \frac{c\beta - \alpha y^2}{c-y^2},$$

$$dx = \frac{-2\alpha y(c-y^2) + 2y(c\beta - \alpha y^2)}{(c-y^2)^2}\,dy = \frac{2cy(\beta-\alpha)}{(c-y^2)^2}\,dy;$$

$$\sqrt{R} = y\left(\frac{c\beta - \alpha y^2}{c-y^2} - \alpha\right) = \frac{cy(\beta-\alpha)}{c-y^2}.$$

A więc i to podstawienie prowadzi do funkcyi wymiernej zmiennej y. Zresztą można to podstawienie stosować także w przypadku, gdy c jest dodatnie, byleby tylko pierwiastki równania $R = 0$ były rzeczywistemi.

Stosując to podstawienie do całki $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, znajdziemy:

$$2\int \frac{dy}{c-y^2} = -\frac{2}{c}\int \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{-c}}\right)^2}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{\sqrt{-c}} + C.$$

Po zbadaniu całek funkcyj, zawierających pod znakiem pierwiastka kwadratowego wielomian stopnia drugiego, nasuwa się mimowoli myśl rozpatrzenia całek funkcyj, zawierających pierwiastek kwadratowy wielomianu stopnia 3-go, 4-go i wyższych. Gdy jednak w przypadku wielomianu stopnia 2-go można, jak widzieliśmy, całkowanie wykonać zawsze przy pomocy funkcyj zwykłych, to natomiast rzecz ma się inaczej w przypadkach innych. W tych to przypadkach okazuje się potrzeba wprowadzenia wyższych funkcyj przestępnych. Takie całki nazywają się eliptycznemi i były badane po raz pierwszy przez matematyka włoskiego Fagnano (1682—1766) i przez Eulera (1707—1783), a później szczegółowiej przez Legendre'a (1762—1833). Nazwa tych całek pochodzi stąd, że za pomocą nich rozwiązuje się zagadnienie wyprostowania (rektyfikacyi) elipsy. Nie możemy tu zająć się bliżej badaniem całek eliptycznych i podamy tylko niektóre pojęcia zasadnicze, do nich się odnoszące.

Za pomocą przekształcenia, w którego szczegóły nie wchodzimy, dochodzi się do twierdzenia, że gdy do rachunku włączymy ilości zespolone, to każda całka postaci $\int f(x, \sqrt{R})\, dx$, gdzie R jest wielomianem stopnia 4-go, f zaś symbolem funkcyi wymiernej, daje się wyrazić przez kombinacyę liniową całek tylko trzech typów:

$$1) \int \frac{dy}{\sqrt{R}}, \quad 2) \int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{R}}, \quad 3) \int \frac{dy}{(y^2-a)\sqrt{R}},$$

gdzie R jest wielomianem 4-go stopnia postaci: $R = (1-y^2)(1-k^2y^2)$ $(k^2 < 1)$: Te trzy całki nazywają się całkami normalnemi Legendre'a gatunku 1-go, 2-go i 3-go.

Okażemy jeszcze, że powyższe trzy całki można sprowadzić do innej postaci, bardzo często używanej, a którą już raz napotkaliśmy przy teoryi rozwijania całek na szeregi (p. Rozdz.

III, § 2). Połóżmy $y = \sin \varphi$, skąd $dy = \cos \varphi \, d\varphi$, i trzy całki powyższe przyjmą postaci:

$$1) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}; \quad 2) \int \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}};$$

$$3) \int \frac{d\varphi}{(1+n \sin^2 \varphi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

(w trzeciej z pominięciem czynnika stałego i przy założeniu $a = -\frac{1}{n}\Big)$. Te trzy całki oznaczamy zwykle za pomocą symbolów:

$$F(\varphi), \quad Z(\varphi), \quad \Pi(\varphi);$$

pierwsza z nich właśnie była badaną w miejscu wyżej cytowanem. Całki te możemy obliczyć za pomocą całkowania przez szeregi.

Przechodzimy teraz do innego typu całek, mniej złożonych, mianowicie do c a ł e k d w u m i e n y c h, które rozważał pierwszy E u l e r. Taka całka jest postaci:

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

gdzie m, n, p są liczbami w y m i e r n e m i u ł a m k o w e m i, d o d a t n i e m i l u b u j e m n e m i. Gdyby p było liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną, wtedy należałoby rozwinąć potęgi dwumianu w liczniku lub mianowniku, stosownie do tego, czy p byłoby dodatnie lub ujemne i otrzymalibyśmy tym sposobem funkcyę wymierną różnych potęg ułamkowych zmiennej x. Taki typ funkcyj rozważaliśmy już na początku tego paragrafu. Przyjmijmy tedy, że p jest ułamkiem. Liczby m, n mogą być jakiekolwiek, lecz łatwo widzieć, iż bez zmniejszania ogólności, można założyć, że są c a ł k o w i t e m i. Gdyby bowiem nie były takiemi, to kładąc $x = y^\mu$, gdzie μ jest najmniejszą wspólną wielokrotną mianowników liczb m, n, otrzymalibyśmy całkę:

$$\mu \int y^{(m+1)\mu-1} (a + by^{n\mu})^p \, dy,$$

która jest także całką dwumienną, lecz gdzie wykładniki ilości y są już całkowitemi. Można nadto przyjąć, że n jest zawsze dodatnie, gdyż w razie przeciwnym, napisawszy całkę naszą w postaci:

$$\int x^{m+np} (ax^{-n} + b)^p \, dx,$$

otrzymalibyśmy wykładnik $-n$ dodatni. Zastosujmy podstawienie $a + bx^n = y$, z którego wynika:

$$x = \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dy;$$

skutkiem tego całka nasza staje się:

$$\text{(I)} \quad \frac{1}{nb}\int \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} y^p \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dy = \frac{1}{nb}\int y^p \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} . \, dy.$$

Jeżeli zaś wyjdziemy z postaci:

$$\int x^{m+np} (ax^{-n} + b)^p \, dx,$$

to kładąc $ax^{-n} + b = y$, znajdziemy podobnie:

$$\text{(II)} \qquad -\frac{1}{na}\int y^p \left(\frac{y-b}{a}\right)^{-\frac{m+1}{n}-p-1} . \, dy.$$

Otóż gdy $\dfrac{m+1}{n}$ jest liczbą całkowitą, to postać (I) można odrazu sprowadzić do wymierności, kładąc $y = z^\mu$, gdzie μ jest mianownikiem ułamka p. Gdy zaś $\frac{m+1}{n}+p$ jest liczbą całkowitą, to postać (II) tymże sposobem sprowadza się do wymierności. Istnieją zatem dwa przypadki, w których całkę dwumienną można sprowadzić bezpośrednio do całki wymiernej, mianowicie: 1) gdy $\frac{m+1}{n}$ jest liczbą całkowitą; 2) gdy $\frac{m+1}{n}+p$ jest liczbą całkowitą.

Gdy te przypadki nie zachodzą, wtedy można stosować wzory redukcyjne, za pomocą których dana całka dwumienna sprowadza się do innych takich całek z innemi liczbami m, n, p. Te wzory redukcyjne otrzymujemy, stosując metodę całkowania przez części. Kładąc mianowicie $u=(a+bx^n)^p$, $\frac{dv}{dx}=x^m$, skąd:

$$v=\frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \frac{du}{dx}=bpn\,(a+bx^n)^{p-1}\,x^{n-1},$$

znajdujemy wzór:

$$\text{(A)} \qquad \int x^m\,(a+bx^n)^p\,dx=\frac{x^{m+1}\,(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{bpn}{m+1}\int x^{m+n}\,(a+bx^n)^{p-1}\,dx,$$

za pomocą którego całka dwumienna z wykładnikami m, n, p wyraża się przez całkę dwumienną z wykładnikami $m+n$, n, $p-1$. Jeżeli więc napiszemy:

$$\int x^m\,(a+bx^n)^p\,dx=\int x^m\,(a+bx^n)\,(a+bx^n)^{p-1}\,dx$$

$$=a\int x^m\,(a+bx^n)^{p-1}\,dx+b\int x^{m+n}\,(a+bx^n)^{p-1}\,dx$$

i za pomocą poprzedniego wzoru wyrugujemy ostatnią całkę, znajdziemy:

$$(B) \quad \int x^m (a+bx^n)^p \, dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1+pn} + \frac{apn}{m+1+pn} \int x^m (a+bx^n)^{p-1} \, dx.$$

Za pomocą tego wzoru zmniejsza się o 1 wykładnik ilości $a+bx^n$.

Kombinując ze sobą rozmaicie te sztuczne sposoby całkowania, można znaleść rozmaite wzory redukcyjne. Nie ma potrzeby wyprowadzać ich, gdyż z jednej strony rzecz ta nie przedstawia żadnej trudności teoretycznej, z drugiej zaś dogodniej jest używać tych sposobów w każdym szczególnym przypadku, przystosowując je do natury badanej całki. W wielu znów razach dogodniej używać wzorów redukcyjnych, otrzymywanych wskazanemi sposobami, niż posługiwać się powyżej podanem kryteryum, nawet w przypadku, gdy się ono sprawdza.

Jeżeli żaden z wzorów redukcyjnych nie doprowadza do całek znanych, wtedy pozostaje tylko stosowanie całkowania przez szeregi, po rozwinięciu na szereg potęgi p-ej dwumianu $a+bx^n$.

Jako przykład weźmy całkę:

$$\int \frac{x^m \, dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (m \text{ całkowite})$$

którą możemy napisać:

$$\int x^m (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, dx.$$

Jest to całka dwumienna, wynikająca z postaci ogólnej przy $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$; należy ona do przypadków elementarnych, wyżej wymienionych. W samej rzeczy, gdy m jest parzyste, wtedy $\frac{m+1}{n}+p=\frac{m+1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{m}{2}$ jest liczbą całkowitą; gdy zaś m jest nieparzystem, wtedy $\frac{m+1}{n}=\frac{m+1}{2}$ jest liczbą całkowitą.

---

§ 5.

Całkowanie funkcyj przestępnych.

W tym paragrafie zbadamy niektóre typy specyalne funkcyj przestępnych i pokażemy, jak się one całkują.

1) Niechaj będzie funkcya typu $f(e^x)$, gdzie f jest symbolem funkcyi wymiernej. Kładąc $e^x = y$, skąd $dx = \frac{dy}{y}$, sprowadzamy funkcyę daną do funkcyi wymiernej zmiennej y.

2) Rozpatrzmy całki typu $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$. Połóżmy $\sin x = t$, to otrzymamy:

$$\int t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt\,,$$

t. j. całkę dwumienną.

Możemy użyć innego sposobu, a mianowicie całkowania przez części. Kładąc $u = \cos^{n-1} x$, $\frac{dv}{dx} = \sin^m x \cos x$, otrzymujemy:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1}$$
$$+\ \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx.$$

Uskuteczniając tu przekształcenie podobne do użytego przy całkach dwumiennych, t. j. kładąc:

$$\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx = \int \sin^m x \, (1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx$$

$$= \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx - \int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

podstawiając i rozwiązując względem $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, znajdujemy:

$$\int \sin^m x \cos^n dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx.$$

3) Niechaj będą do obliczenia całki:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx, \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

Za pomocą całkowania przez części znajdujemy:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx;$$

skąd:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C.$$

4) Niechaj będzie wreszcie całka z funkcyą podcałkową typu $f(\sin x, \cos x)$, gdzie f jest symbolem funkcyi wymiernej.

Kładąc $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, otrzymujemy:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2},$$

i to podstawienie zmienia już funkcyę daną na funkcyę wymierną zmiennej t, dającą się całkować metodami znanemi.

Jako przykład weźmy:

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

Wykonywając powyższe przekształcenie, znajdujemy:

$$2\int \frac{dt}{2at + b(1-t^2)} = 2b \int \frac{dt}{(a^2+b^2) - (bt-a)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left[\int \frac{bdt}{\sqrt{a^2+b^2} + (bt-a)} + \int \frac{bdt}{\sqrt{a^2+b^2} - (bt-a)} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \frac{\sqrt{a^2+b^2} + (bt-a)}{\sqrt{a^2+b^2} - (bt-a)} + C,$$

a podstawiając za t jego wyrażenie w zmiennej x, dochodzimy do wzoru szukanego.

---

§ 6.

Obliczanie całek określonych. Całki Eulerowe.

W poprzedzających paragrafach badaliśmy różne typy specyalne funkcyj w celu obliczania odpowiadających im całek nieokreślonych. Lecz może się zdarzyć, że nie umiejąc obliczyć całki nieokreślonej, potrafimy natomiast obliczyć całkę określoną pomiędzy pewnemi granicami. Paragraf ten poświęcimy wyłożeniu sposobów sztucznych i metod obliczania całek określonych.

W paragrafach 7 i 8-ym Rozdziału I-go wskazaliśmy już, że metodą dość płodną szukania całek określonych stanowi różniczkowanie i całkowanie pod znakiem całki. Podamy kilka przykładów stosowania tej metody.

Z wzoru:

$$\int_0^1 x^{a-1}\,dx = \left[\frac{x^a}{a}\right]_0^1 = \frac{1}{a}, \qquad (a > 0)$$

przez różniczkowanie względem parametru a otrzymujemy:

$$\int_0^1 x^{a-1}\log x\,dx = -\frac{1}{a^2},$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^2\,dx = \frac{1\,.\,2}{a^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^n\,dx = (-1)^n\,\frac{1\,.\,2\,\ldots\,n}{a^{n+1}}.$$

Całkowanie zaś względem a pomiędzy dwiema dowolnemi granicami α i β, daje:

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}-x^{\alpha-1}}{\log x}\,dx = \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Z wzoru, znalezionego w paragrafie poprzedzającym:

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx ,$$

otrzymujemy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx.$$

Przez kolejne stosowanie tego wzoru znajdujemy:

dla n parzystego: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3 \, . \, 1}{n(n-2)\ldots 4 \, . \, 2} \cdot \frac{\pi}{2}$,

dla n nieparzystego: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4 \, . \, 2}{n(n-2)\ldots 5 \, . \, 3}$.

Zauważmy, że pomiędzy granicami 0 i $\frac{\pi}{2}$ funkcya $\sin x$ jest liczbą dodatnią, mniejszą od 1, przeto:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx ,$$

a więc:

$$\frac{2 \, . \, 4 \ldots 2n-2}{3 \, . \, 5 \ldots 2n-1} > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \, . \, 3 \ldots 2n-1}{2 \, . \, 4 \ldots 2n} > \frac{2 \, . \, 4 \ldots 2n}{3 \, . \, 5 \ldots (2n+1)} .$$

Stąd wynika:

$$\frac{2 \, . \, 2 \, . \, 4 \, . \, 4 \ldots 2n-2 \, . \, 2n-2}{1 \, . \, 3 \, . \, 3 \, . \, 5 \ldots 2n-3 \, . \, 2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} > \frac{\pi}{2}$$

$$> \frac{2 \, . \, 2 \, . \, 4 \, . \, 4 \ldots 2n-2 \, . \, 2n-2}{1 \, . \, 3 \, . \, 3 \, . \, 5 \ldots 2n-3 \, . \, 2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} .$$

Dwie liczby, pomiędzy któremi zawiera się liczba $\frac{\pi}{2}$, różnią się od siebie czynnikiem $\frac{2n}{2n+1}$, który dąży do 1, gdy n dąży do nieskończoności. Możemy więc napisać:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

Jest to wyrażenie liczby $\frac{\pi}{2}$ pod postacią iloczynu nieskończonego; nazywa się ono wzorem Wallisa (1616—1703).

Z wzoru w paragrafie niniejszym:

$$\int_0^1 x^{a-1} (\log x)^n \, dx = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{a^{n+1}},$$

przez podstawienie $x = e^{-y}$, z którego wynika: $\log x = -y$; $dx = -e^{-y} dy$; $y = \infty$ dla $x = 0$, $y = 0$ dla $x = 1$, znajdujemy:

$$\int_0^1 x^{a-1} (\log x)^n \, dx = \int_0^\infty e^{-ay} (-y)^n \, dx.$$

Stąd wynika:

$$\int_0^\infty e^{-ay} y^n \, dy = \frac{n!}{a^{n+1}},$$

a dla $a = 1$:

$$\int_0^\infty e^{-y} y^n \, dy = n!$$

Ten wzór stosuje się do n całkowitego, gdyż w metodzie, którą go otrzymaliśmy, liczba n oznacza liczbę różniczkowań, wykonanych na pewnej zmiennej.

Badanie wartości tej całki, określonej w przypadku, w którym n nie jest liczbą całkowitą, stanowi badanie t. z. całki Eulerowej 2-go gatunku. Przyjmuje się dla tej całki znakowanie:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = \Gamma(a).$$

Funkcya taka nazywa się funkcyą gamma Eulera; posiada ona wiele osobliwych własności; tak np. można ją rozwinąć na iloczyn nieskończony:

$$\Gamma(a) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m \left(\frac{m+1}{m}\right)^{a-1}}{a+m-1}.$$

Nie możemy tu zająć się szczegółowem badaniem tych funkcyj.

ROZDZIAŁ IV.

CAŁKI WIELOKROTNE.

---

§ 1.

Określenie całki podwójnej i wielokrotnej. Warunki całkowalności.

W § 8-ym Rozdziału I-go przy sposobności podaliśmy już określenie całki podwójnej. Obecnie podamy wykład zupełny, rozpoczynając go od określenia, które jest tylko wprost rozszerzeniem określenia całek pojedyńczych.

Niechaj będzie funkcya $f(x, y)$ dwu zmiennych, określona, dajmy na to, dla pewnego pola płaskiego, zamkniętego krzywą o równaniu $\varphi(x, y) = 0$. Niechaj dla każdego punktu tego pola funkcya f będzie skończona. Obszary zmienności zmiennych x i y nie są niezależnemi od siebie. Jeżeli ustalimy wartość zmiennej y, to obszar zmienności zmiennej x określi się sposobem następującym: Poprowadźmy prostą równoległą do osi odciętych o rzędnej y ustalonej; prosta ta przetnie obwód pola zamkniętego przynajmniej w dwu punktach i obszar zmienności zmiennej x dla ustalonej wartości zmienej y będzie rozciągał się od wartości odciętej w punkcie, znajdującym się na lewo, do wartości odciętej w punkcie na prawo.

Granice zmienności zmiennej x będą tedy funkcyami zmiennej y i odwrotnie. Gdybyśmy chcieli znaleść te funkcye, należałoby rozwiązać względem x równanie $\varphi(x, y) = 0$, które da nam wogóle dwie wartości y, t. j. da dwie funkcye zmiennej y, której wartościom dla każdego x odpowiadać będą granice obszaru zmienności tej zmiennej. W szczególnym przypadku granice całkowania mogą być stałemi gdy mianowicie pole dane jest prostokątem o bokach równoległych do spółrzędnych x, y. Wtedy dla każdej wartości y granice zmienności zmiennej x będą zawsze jednakowemi. W tym przypadku można powiedzieć, że funkcya f jest określoną, gdy ją uważamy pomiędzy stałemi granicami zmienności zmiennych x, y np. od $x = a$ do $x = b$ i od $y = a'$ do $y = b'$.

Podzielmy pole dane na dowolną liczbę części; podział ten możemy uskutecznić według prawa dowolnego. Tak np. można postępować w ten sposób: Pomiędzy nieskończenie wielu wartościami zmiennej y w różnych punktach pola można wybrać wartość najmniejszą i największą; niechaj niemi będą a', b'. Podobnież a, b niechaj będą wartościami najmniejszą i największą zmiennej x. Jeżeli nakreślimy proste $y = a'$, $y = b'$, $x = a$, $x = b$, otrzymamy prostokąt, wewnątrz którego zawiera się pole dane. Podzielmy tak przedział $a'\,b'$ jak i przedział $a\,b$ na dowolną liczbę części. Jeżeli przez punkty tych przedziałów poprowadzimy proste równoległe do osi spółrzędnych, podzielimy prostokąt na prostokąty cząstkowe. I całe pole podzieli się na tyleż części, z których niektóre będą prostokątami, inne (najbliższe obwodu) będą częściami prostokątów. Z tych prostokątów będziemy rozważali tylko te, które leżą całkiem wewnątrz danego pola.

Niechaj $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta'_1, \delta'_2, \ldots,$ będą przedziały cząstkowe, na które podzielono przedział $a\,b$ na osi x i przedział $a'\,b$ na osi y; pole prostokąta cząstkowego wyrazi się iloczynem $\delta_r\ \delta'_s$. Weźmy punkt wewnątrz takiego prostokąta, oznaczmy przez f_{rs} wartości funkcyi f w tym punkcie i utwórzmy sumę podwójną:

$$\sum_{rs} f_{rs}\, \delta_r\, \delta'_s.$$

Suma ta będzie miała wartość skończoną bez względu na sposób, w jaki obrano wartości funkcyi f i uskuteczniono podział pola. Niechaj teraz, podobnie jak przy określeniu całek pojedyńczych, dążą do zera przedziały δ_r, δ'_s gdy liczba ich dąży do nieskończoności. Wtedy suma powyższa może dążyć do granicy oznaczonej, która będzie niezależną od wyboru wartości f_{rs} i od sposobu, w jaki przedziały dążą do zera. Jeżeli ten przypadek zachodzi, wtedy granicę tę nazywamy całką podwójną funkcyi f w polu danem i oznaczamy ją za pomocą symbolu:

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Widzimy zatem, że, jak już powiedziano, określenie to jest wprost rozszerzeniem określenia całek pojedyńczych i można tu powtórzyć też same rozważania, jakie tam uczyniono. Rozważania te streścimy tylko.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia granicy sumy powyższej jest, aby była zerem granica sumy $\Sigma D_{rs}\, \delta_r\, \delta'_s$, w której D_{rs} oznacza oscylacyę funkcyi w polu $(\delta_r\, \delta'_s)$. Dowód tego twierdzenia jest zupełnie podobny do dowodu, podanego w § 1 Rozdziału II-go. Wynika z niego, że całkowalnemi są: 1) funkcye ciągłe dwu zmiennych x, y; 2) funkcye nieciągłe w skończonej liczbie punktów lub linij na płaszczyźnie; 3) funkcye nieciągłe w nieskończonej liczbie punktów lub linij, lecz takie, że te punkty można zawrzeć w polach, których suma daje się uczynić dowolnie małą.

Dla lepszego zrozumienia natury całki podwójnej i znalezienia sposobu jej obliczania, wskażemy związek, zachodzący między nią a całkami pojedyńczemi. Dla otrzymania całki podwójnej winniśmy utworzyć sumę podwójną i przejść od niej do granicy przy zmniejszaniu do zera sposobem dowolnym ilości δ_r, δ'_s. Wyobraźmy sobie, że wykonaliśmy najprzód sumowanie względem skaźnika r, potem względem skaźnika s. To znaczy, że sumujemy najprzód wyrazy $f_{rs}\, \delta_r\, \delta'_s$ pochodzące od prostokątów, położonych w pasmie poziomem, t j. równoległem do osi odciętych (na pasmie s-em), następnie nadajemy skaźnikowi s wszystkie jego wartości i tworzymy sumę wszystkich wyrazów, odpowiadających różnym pasmom poziomym. Wybór wartości f_{rs} zależy od naszej woli; możemy więc wybrać wartości w punktach, położonych na prostych równoległych do osi x i znajdujących się w różnych pasmach poziomych. Zbadajmy, jaką wartość posiada suma, odnosząca się do jednego pasma poziomego, np. do pasma s-go. Niechaj $y^{(s)}$ będzie rzędna prostej wewnątrz takiego pasma, na której wybieramy wartości f_{rs}. Wtedy wartości funkcyi f przez nas uważane będą wartościami funkcyi $f(x, y^{(s)})$ samej zmiennej x; funkcyę tę otrzymujemy, kładąc $y = y^{(s)}$ w funkcyi $f(x, y)$. Suma względem r, odnosząca się do pasma s-go, będzie:

$$\delta'_s \sum_r \delta_r f(x^{(r)}, y^{(s)}),$$

gdzie $x^{(r)}$ oznacza odciętą punktu, znajdującego się w przedziale δ_r. Tę sumę należy rozciągnąć pomiędzy dwiema granicami, zależnemi od skaźnika s, t. j. od wartości rzędnej $y^{(s)}$ s-go pasma. Zależnie od tego, jaką wartość y rozważamy, obszar zmienności zmiennej x zmienia się, jak to już powiedzieliśmy na początku paragrafu. Jeżeli przechodzimy do granicy powyższej sumy pojedyńczej, zmniejszając do zera tylko przedział δ_r, wtedy—na podstawie określenia całki pojedyńczej—otrzymamy:

$$\delta'_s \int f(x, y^{(s)})\, dx,$$

gdzie całkowanie rozciąga się pomiędzy dwiema wartościami x, odpowiadającemi krańcom s-go pasma. Te dwie granice otrzymujemy z równania $\varphi(x, y) = 0$, rozwiązując je względem x i kładąc w niem $y = y^{(s)}$.

Tworząc sumę wszystkich wartości, w ten sposób otrzymanych, rozciągając ją na wszystkie pasma poziome, t. j. zmieniając skaźnik s, otrzymujemy:

$$\Sigma\, \delta'_s \int f(x, y^{(s)})\, dx,$$

a przechodząc do granicy dla $\delta'_s = 0$:

$$\int dy \int f(x, y)\, dx,$$

gdzie drugie całkowanie względem y należy wziąć pomiędzy dwiema granicami stałemi, odpowiadającemi najniższemu i najwyższemu pasmu, t. j. (ponieważ pasma stają się nieskończenie wązkiemi) rzędnym dwu stycznych poziomych obwodu pola.

Widzimy stąd, że całce podwójnej odpowiada następstwo dwu całek pojedyńczych: pierwsza jest wzięta pomiędzy granicami, które są funkcyami zmiennej y, druga zaś — pomiędzy granicami stałemi.

Jeżeli pole całkowania jest prostokątem o bokach równoległych do osi spółrzędnych, wtedy i pierwsze całkowanie odbywa się pomiędzy granicami stałemi.

W ten sposób te rozważania wiążą się z rozważaniami w § 8-ym Rozdziału I-go.

Jeżeli funkcya $f(x, y)$ jest c a ł k o w a l n ą, wtedy jest widocznem, że jej całka podwójna pomiędzy granicami stałemi, tak względem x, jak i względem y, jest równa:

$$\int_{a'}^{b'} dy \int_{a}^{b} dx\, f(x, y),$$

lub też:

$$\int_{a}^{b} dx \int_{a'}^{b'} dy\, f(x, y),$$

w założeniu, że odcięte i rzędne prostokąta, wewnątrz którego uskuteczniamy całkowanie, są a, b; a', b'. Stąd wynika, że powyższe dwa wyrażenia są równe. A więc jako uogólnienie twierdzenia o całkowaniu pod znakiem całki (Rozdział I, § 8) otrzymujemy, że to całkowanie to jest możliwem, gdy funkcya dana jest funkcyą całkowalną dwu zmiennych

Rozważania powyższe, odnoszące się do całek podwójnych, można bez istotnych zmian rozciągnąć na całki potrójne, poczwórne i wogóle wielokrotne.

Każdą całkę wielokrotną (której określenie jest podobne do określenia całek podwójnych) można przedstawić jako kolejne następstwo całek pojedyńczych. Nie mamy potrzeby zatrzymywać się nad tem.

---

§ 2.

Całka wielokrotna jako funkcya granic; określenie jej w przypadkach osobliwych.

Podamy o całkach podwójnych rozważania, podobne do podanych w § 3-cim Rozdziału I-go; zbadajmy ciągłość i różniczkowalność tych całek, uważanych za funkcye swych granic.

Niechaj będzie całka podwójna:

$$\int_{a'}^{y}\int_{a}^{x} f(x, y)\, dx\, dy,$$

gdzie x, y oznaczają zarazem i granice wyższe całkowania. Wartość tej całki będzie funkcyą zmiennych x, y, którą oznaczmy przez $\varphi(x, y)$. Dla zbadania ciągłości tej funkcyi utwórzmy:

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) = \int_{a'}^{y+k}\int_{a}^{x+h} - \int_{a'}^{y}\int_{a}^{x},$$

co można przekształcić na:

$$\left[\int_{a'}^{y} + \int_{y}^{y+k}\right] \int_{a}^{x+h} - \int_{a'}^{y} \left[\int_{a}^{x+h} - \int_{x}^{x+h}\right]$$

$$= \int_{y}^{y+k} \int_{a}^{x+h} + \int_{a'}^{y} \int_{x}^{x+h} .$$

Ponieważ porządek całkowań jest przemienny w wyrazie drugim strony drugiej, przeto powyższe wyrażenie równa się:

$$\int_{y}^{y+k} \int_{a}^{x+h} + \int_{x}^{x+h} \int_{a'}^{y} .$$

Całki od y do $y+k$ oraz od x do $x+h$ dążą, jak wiemy, do zera (p. § 3 Rozdz. I), przeto ostatnie wyrażenie, które można uważać jako sumę dwu całek pojedyńczych dwu funkcyj różnych, całek rozciągających się pomiędzy wyżej podanemi granicami, dążyć będzie do zera wraz z ilościami h i k, co stwierdza ciągłość funkcyi $\varphi(x, y)$.

Przejdźmy do pochodnych cząstkowych funkcyi φ. Wiedząc, że całka podwójna jest następstwem dwu całek pojedyńczych i że można przemienić porządek całkowań, możemy uważać funkcyę φ za całkę, już to względem zmiennej x, już to względem zmiennej y. Jeżeli chcemy mieć pochodną cząstkową względem x, uważamy φ jako całkę względem tej zmiennej i na podstawie znanego twierdzenia o różniczkowaniu całek, otrzymujemy, że g d y:

$$\int_{a'}^{y} f(x, y)\, dx,$$

j e s t f u n k c y ą c i ą g ł ą z m i e n n e j x, t o p o c h o d n ą c z ą s t k o w ą f u n k c y i φ w p u n k c i e x' j e s t:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = \left[\int_{a'}^{y} f(x, y)\, dy\right]_{x=x'}.$$

Jeżeli teraz przyjmiemy, że $f(x, y)$ jest funkcyą ciągłą obu zmiennych x, y, to ponieważ całka $\int_{a'}^{y} f(x, y)\, dy$ jest funkcyą ciągłą tej zmiennej i wartość jej dla $x = x'$ równa się granicy jej wartości dla wartości x, dążących do x' i nadto (§ 7, Rozdz. I) granica ta równa się całce granicy funkcyi, otrzymujemy wprost:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = \int_{a'}^{y} f(x', y)\, dy.$$

Podobnież:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = \int_{a}^{x} f(x, y')\, dx.$$

Jak zwykle, warunek dla funkcyi f, aby była funkcyą ciągłą obu zmiennych jest warunkiem dostatecznym lecz nie jest koniecznym.

Przy tych warunkach zachodzi dla funkcyi φ twierdzenie o przemienności różniczkowań, gdyż z wzorów powyższych wypływa widocznie:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'\partial x'} = f(x', y'), \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial y'} = f(x', y'),$$

t. j., że dwie pochodne są równe.

Ustalimy teraz pojęcie całki podwójnej w dwu przypadkach osobliwych, które rozważaliśmy i przy całkach pojedyńczych, mianowicie: przypadek, w którym funkcya staje się nieskończoną w jakimkolwiek punkcie lub na linii pola całkowania, oraz przypadek, w którym jedna z granic całkowania jest nieskończoną.

Kryteryum, służące do określenia w tych przypadkach, pozostaje zawsze bez zmiany; jest niem zachowanie własności zasadniczej — ciągłości całki. Stąd, gdy funkcya staje się nieskończoną w punkcie, nazwiemy jej całką podwójną w obszarze, ten punkt obejmującym, granicę (w założeniu, że istnieje i jest jedyną) wartości całki w obszarach, ten punkt wykluczających. Możemy np. punkt ten otoczyć kółkiem i rozważać obszar pierwotny, zmniejszony o powierzchnię kółka; jeżeli następnie zmniejszać będziemy promień koła, granica wartości całki podwójnej będzie właśnie wartością całki określonej w całym obszarze. Lecz tu występują pewne rozróżnienia; zajść bowiem może, że granica, o której mówimy, istnieje, gdy zmienne x, y zbliżają się do punktu osobliwego tylko w pewnych kierunkach, a nie we wszystkich, lub też otrzymujemy jednę granicę dla pewnych kierunków przybliżania się, inną zaś dla innych. W tych przypadkach nie istnieje właściwie całka rozciągnięta na cały obszar. Może się wtedy zdarzyć, że istnieje wartość skończona całki, gdy ją obliczamy za pomocą dwu całkowań pojedyńczych, nie istnieje zaś całka zgodna z określeniem, a którą należy uważać za wartość całki podwójnej. Nie możemy zatrzymywać się tu nad szczegółami.

Gdy obszar całkowania rozciąga się do nieskończoności, wtedy przez całkę podwójną rozumiemy znowu granicę wartości całek określonych w obszarach, które rozszerzamy kolejno do nieskończoności, w założeniu oczywiście, że ta granica istnieje i że jest jedyną, bez względu na sposób, w jaki obszar rośnie do nieskończoności.

§ 3.

Przekształcanie całek wielokrotnych.

Widzieliśmy już (Rozdz. I, § 6), jakim sposobem przekształca się całka pojedyńcza. Jeżeli mamy $\int R\,dx$, gdzie R jest funkcyą zmiennej x i chcemy tę całkę przekształcić na inną ze zmienną y, związaną z x za pomocą pewnego związku, wtedy dość funkcyę podcałkową pomnożyć przez pochodnę dawnej zmiennej względem nowej. Zobaczmy, jak się ma rzecz w przypadku całek wielokrotnych.

Niechaj będzie całka:

$$\int\int\ldots\int R\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

ze zmiennemi niezależnemi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, którą chcemy przekształcić na całkę ze zmiennemi $y_1, y_2, \ldots, y_n$, połączonemi ze zmiennemi x za pomocą n związków. Niechaj temi związkami będą:

$$(1)\qquad \begin{gathered} x_1 = x_1\,(y_1, y_2, \ldots, y_n),\; x_2 = x_2\,(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots x_n = x_n\,(y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{gathered}$$

W drugiem równaniu podstawmy zamiast y_1 wartość tej zmiennej, otrzymaną z pierwszego równania, wtedy x_2 wyrazi się przez $x_1, y_2, \ldots, y_n$; w trzeciem równaniu połóżmy zamiast y_1, y_2 ich wartości z dwóch pierwszych równań, wtedy x_3 wyrazi się przez $x_1, x_2, y_3, \ldots, y_n$. Postępując w ten sposób dalej wyrazimy x_n przez $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_n$. Tym sposobem otrzymamy wzory takie:

$$
(2) \quad \begin{aligned} & x_1 = f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ x_2 = f_2(x_1, y_2, y_3, \ldots, y_n),\ x_3 = f_3(x_1, x_2, y_3, \ldots, y_n), \\ & \ldots\ x_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_n). \end{aligned}
$$

W danej całce wielokrotnej wykonajmy najprzód całkowanie względem x_n i za pomocą ostatniego z równań (2) wprowadźmy zmienną y_n zamiast zmiennej x_n, uważając wszystkie inne zmienne chwilowo za stałe. Nasza całka stanie się przez to równą:

$$
\int\int \ldots \int R \frac{\partial f}{\partial y_n} dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}\, dy_n .
$$

Podobnież, za pomocą przedostatniego z równań (2), wprowadźmy zmienną y_{n-1} zamiast x_{n-1}; otrzymamy:

$$
\int\int \ldots \int R \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial f_n}{\partial y_n} dx_1\, dx_2 \ldots dy_{n-1}\, dy_n
$$

i postępując tak dalej, dojdziemy wreszcie do całki przekształconej:

$$
\int\int \ldots \int R \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial f_n}{\partial y_n} dy_1\, dy_2 \ldots dy_n.
$$

Dla wykonania tego przekształcenia należy znać funkcye $f_1, f_2, \ldots, f_n$; nie są to właściwie funkcye, wyrażające dawne zmienne przez nowe—te są dane wprost—lecz otrzymują się z tych ostatnich wyrażeń za pomocą wskazanych wyżej eliminacyj. Stąd naturalnie powstaje pytanie, jak przekształcić całkę, nie tworząc funkcyj f, lecz opierając się wprost na funkcyach, wyrażających zmienne x przez zmienne y.

W tym celu rozpatrzmy w y z n a c z n i k f u n k c y j n y lub j a k o b i a n zmiennych y (patrz „Rachunek różniczkowy“, Rozdz. V, § 2), t. j. wyznacznik:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_n}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Można dowieść, że iloczyn:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial y_n},$$

przez który, jak widzieliśmy, należy pomnożyć funkcyę podcałkową, aby otrzymać całkę przekształconą, jest właśnie wyznacznikiem funkcyjnym. Stąd zaś wynika, że dla otrzymania całki przekształconej dość pomnożyć funkcyę podcałkową przez jakobian dawnych zmiennych, uważanych za funkcye nowych.

Aby dowieść powyższego twierdzenia, napiszmy równanie:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}} \frac{\partial x_{i-1}}{\partial y_j},$$

w którem pierwsza strona oznacza pochodną zmiennej x_i względem zmiennej y_j, otrzymaną z wzorów (1), po drugiej zaś stronie pochodne funkcyi f_i wzięte są według równań (2). Jeżeli $j < i$, wtedy pierwszy wyraz strony drugiej jest zerem, gdyż pierwsze z równań (2) jest tem samem, co pierwsze z równań (1), a więc pochodne zmiennej x_1 równają się pochodnym zmienej f_1.

Według teoryi iloczynu wyznaczników, przy uwzględnieniu powyższego wzoru, napisanego w postaci:

$$-\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_j} - \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} - \ldots - \frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}} \frac{\partial x_{i-1}}{\partial y_j} + \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j},$$

otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \dots\dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \dots 0, & 0 \\ -\frac{\partial f_n}{\partial x_2} + \dots 1 \dots & 0 \\ \dots\dots\dots, & \dots \\ -\frac{\partial f_n}{\partial x_1} - \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, 0, 0, \dots, 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2}, \frac{\partial f_2}{\partial y_2}, 0, \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_n}, \frac{\partial f_2}{\partial y_n}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial y_n}.$$

Lecz drugi z wyznaczników strony pierwszej jest równy 1, przeto istotnie iloczyn $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial y_n}$ jest równy wyznacznikowi funkcyjnemu. Tym sposobem uzasadniliśmy teoryę przekształcenia całki wielokrotnej. Należy jeszcze zanotować, że w przypadku $n = 1$, t. j. w przypadku całki pojedyńczej, wzór na przekształcenie całki wielokrotnej przechodzi na znany wzór przekształcenia całki pojedyńczej.

Podamy zastosowanie wzorów powyższych. Niechaj będzie całka podwójna:

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy\,;$$

zmienne x, y przekształcimy na inne ϱ, φ za pomocą wzorów, dających przekształcenie spółrzędnych Descartes'a na biegunowe, t. j. za pomocą wzorów $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$. Wyznacznik funkcyjny jest:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho}, & \frac{\partial y}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -\varrho\sin\varphi, & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \varrho,$$

a więc całką przekształconą będzie:

$$\int\int f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi.$$

---

§ 4.

Własności całek podwójnych. Twierdzenie Greena.

Wiemy, że dla funkcyi ciągłej $f(x)$ szukanie całki nieokreślonej sprowadza się do szukania innej funkcyi $F(x)$, której pochodną jest $f(x)$ i że, gdy taką funkcyę znajdziemy, to wartość całki określonej w jakimkolwiek przedziale otrzymamy, tworząc różnicę wartości funkcyi $F(x)$ w dwóch krańcach przedziału w ten sposób, że wartość całki określonej zależy tylko od wartości funkcyi $F(x)$ w tych dwóch krańcowych punktach, nie zależy zaś wcale od wartości funkcyi w innych punktach przedziału.

Zobaczymy teraz, że coś analogicznego zachodzi w przypadku całek podwójnych.

Niechaj będzie całka podwójna:

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy,$$

rozciągnięta na pole płaskie, ograniczone obwodem, którego równaniem jest $\varphi(x, y) = 0$. Dla ustalenia myśli przyjmijmy, że obwód ten tworzy krzywa, mająca postać owala taką, iż każda prosta spotyka go najwyżej w dwu punktach. Wykonawszy pierwsze całkowanie nieokreślone względem x, otrzymamy funkcyę zmiennych x, y, w której należy podstawić, jako granice, dwie funkcye zmiennej y, otrzymane przez rozwiązanie względem x równania $\varphi(x, y) = 0$. Niechaj temi funkcyami będą $x = \varphi_1(y)$ i $x = \varphi_2(y)$. Z tych dwu funkcyj niechaj pierwsza przedstawia wartość odciętej w punkcie, położonym bardziej na lewo, druga zaś wartość odciętej w punkcie, położonym bardziej na prawo. Niechaj $F(x, y)$ będzie całką nieokreśloną, do jakiej doprawadziło całkowanie względem x, t. j. funkcyą, czyniącą zadość równaniu $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = f(x, y)$, to trzeba będzie jeszcze wykonać całkowanie względem y wyrażenia:

$$F(\varphi_2(y), y) - F(\varphi_1(y), y)$$

i to pomiędzy dwiema granicami, które będą rzędnemi punktu najniższego i najwyższego krzywej, to jest pomiędzy dwoma punktami, w których styczne są równoległe od osi x. Niechaj temi rzędnemi będą y_1, y_2; potrzeba tedy obliczyć:

$$\int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_2(y), y)\, dy - \int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_1(y), y)\, dy,$$

lub po przestawieniu granic w drugiej całce:

$$\int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_2(y), y)\, dy + \int_{y_2}^{y_1} F(\varphi_1(y), y)\, dy.$$

Sumę tych dwóch całek można interpretować w sposób następujący:

Niechaj będzie całka $\int F(x, y)\, dy$, gdzie zamiast x należy wyobrazić sobie podstawioną wartość tej zmiennej z równania $\varphi(x, y) = 0$. Rozciągnijmy tę całkę na wszystkie pary wartości zmiennych x, y, czyniące zadość temu równaniu, t. j. na całkowity obwód danego pola Rozdzielmy tę całkę na dwie części. Wyjdźmy z punktu najniższego krzywej, t. j. z punktu o rzędnej y_1 i przebiegajmy część prawą krzywej (t. j. bok, którego punkty mają odcięte oznaczone przez funkcyę $\varphi_2(y)$), aż do punktu najwyższego, którego rzędną jest y_2. Tym sposobem obliczymy całkę:

$$\int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_2(y), y)\, dy\,.$$

Przebiegnijmy następnie drogę od y_2 do y_1 po lewej części krzywej (t. j. tej, której punkty mają odcięte oznaczone przez funkcyę $\varphi_1(y)$). Tym sposobem obliczymy całkę:

$$\int_{y_2}^{y_1} F(\varphi_1(y), y)\, dy\,.$$

Suma tych dwóch całek będzie całką, rozciągniętą na cały obwód pola. Wynika stąd także kierunek, w jakim należy przebiegać obwód krzywej. Wyszliśmy z punktu najniższego, przebiegliśmy część prawą obwodu, a potem szliśmy dalej w tymże kierunku. Obwód zatem należy przebiegać w ten sposób, że powierzchnia pola pozostaje zawsze po stronie lewej.

Możemy więc napisać:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int F(x, y)\, dy\,,$$

gdzie na stronie pierwszej znajduje się całka podwójna, odniesiona do danego pola, na drugiej zaś całka pojedyńcza, odniesiona do obwodu pola. Mamy tym sposobem przekształcenie całki podwójnej na całkę pojedyńczą oraz wartość całki podwójnej, zależną jedynie od wartości funkcyi $F(x, y)$ na obwodzie pola, nie zaś od punktów wewnętrznych tegoż. Jest to uogólnienie dokładne własności, wspomnianej na początku tego paragrafu. Stanowi ono właśnie wzór Greena, któremu można nadać i inne postaci.

Podobnie jak otrzymaliśmy wzór poprzedni, całkując najprzód względem x, możemy teraz, zmieniając porządek całkowania, otrzymać:

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy = - \int F_1(x, y)\, dx\,,$$

gdzie całki mają to samo znaczenie, co przedtem, i jest nadto:

$$\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} = f(x, y).$$

Znak ujemny po stronie drugiej pochodzi stąd, że wyobrażamy sobie, iż obwód przebiegamy w tym samym kierunku, co w pierwszym razie.

Dwa wzory otrzymane możemy jeszcze tak napisać:

$$\int\int \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\, dy = \int F\, dy\,,$$

$$\int\int \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\, dy = - \int F_1\, dx\,,$$

gdzie dwie funkcye F, F_1 są połączone związkiem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = f.$$

Zresztą te dwa wzory są od siebie niezależne, i dwie funkcye F i F_1 mogą nie być połączone powyższym związkiem. W tym przypadku przez odejmowanie otrzymujemy:

$$\iint \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \int (F dy + F_1 dx),$$

rozumiejąc przez F i F_1 dwie jakiekolwiek niezależne od siebie funkcye zmiennych x, y. Taką postać nadać można wzorowi Greena.

Jeżeli w szczególności F i F_1 są takiemi funkcyami, że dla wszystkich punktów pola danego spełnia się warunek $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$, wtedy pierwsza strona ostatniego wzoru jest zerem, a stąd:

$$\int (F dy + F_1 dx) = 0,$$

t. j. całka wyrażenia $F dy + F_1 dx$, rozciągnięta na cały obwód, jest tożsamościowo zerem.

Z tego twierdzenia możemy otrzymać inne.

Niechaj x_0, y_0; x, y będą spółrzędnemi dwóch jakichkolwiek punktów obwodu, Nakreślmy linię od pierwszego do drugiego punktu, znajdującą się całkowicie wewnątrz pola. Nakreślmy następnie drugą podobną linię, idącą od drugiego do pierwszego punktu. Te dwie linie utworzą nowy obwód, zamykający pewne pole i spełniający warunki wyżej podane; będzie zatem całka:

$$\int (F dy + F_1 dx),$$

rozciągnięta na ten nowy obwód, zerem. Stąd wynika, że całka od punktu (x_0, y_0) do punktu (x, y), wzdłuż pierwszej linii, równa się całce od pierwszego do drugiego punktu, wzdłuż drugiej linii. A zatem: Na każdej linii wewnątrz pola, prowadzącej od punktu (x_0, y_0) do punktu (x, y), wartość całki jest jednakowa. Jeżeli więc ustalimy wartość granicy niższej, to możemy uważać całkę za funkcyę punktu, należącego do pola. Można dowieść, że ta funkcya ma za pochodne cząstkowe względem x i y, odpowiednio funkcye F i F_1, a jej różniczką zupełną jest wyrażenie $F_1\,dx + F\,dy$. Tym sposobem rozwiązaliśmy zagadnienie: „dane są dwie funkcye F i F_1 takie, że:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

znaleść funkcyę, której pochodne cząstkowe są równe funkcyom danym.“ Zagadnienie to, nazwane całkowaniem różniczki zupełnej, rozpatrzymy szczegółowiej.

ROZDZIAŁ V.

CAŁKOWANIE RÓŻNICZEK ZUPEŁNYCH.

Widzieliśmy, że gdy $f(x)$ jest funkcyą ciągłą, wtedy obliczenie całki $\int f(x)\,dx$ sprowadza się do znalezienia funkcyi $\varphi(x)$, której pochodną jest $f(x)$ lub, co na jedno wychodzi, funkcyi, której różniczką jest $f(x)\,dx$. Stąd zaś odwrotnie wynika, że gdy funkcya $f(x)$ jest ciągłą, to znalezienie funkcyi, której różniczką jest $f(x)\,dx$, sprowadza się do znalezienia całki nieokreślonej, która odpowiada funkcyi $f(x)$.

Postaramy się rozszerzyć to zagadnienie na przypadek większej liczby zmiennych.

Niechaj będzie funkcya $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$ pewnej liczby zmiennych; wiemy, że jej różniczką zupełną jest:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots$$

Stawiamy zagadnienie odwrotne. Niechaj będzie wyrażenie typu:

$$(1) \qquad X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_n\, dx_n,$$

w którem ilości X są funkcyami ciągłemi i skończonemi wszystkich zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$; znaleść funkcyę tychże zmiennych taką, aby jej różniczka zupełna równa była danemu wyrażeniu. Czy taka funkcya zawsze istnieje?

Zagadnieniem tego rodzaju było zadanie, podane na końcu poprzedniego paragrafu.

Okażemy, że nie zawsze można znaleść taką funkcyę φ_1: aby ona istniała, muszą funkcye X czynić zadość pewnym związkom.

Załóżmy przedewszystkiem, że funkcye X są skończone i ciągłe i że takiemiż są ich pochodne względem wszystkich zmiennych. Dalej, gdy istnieje funkcya $\varphi\,(x_1\, x_2 \ldots x_n)$, której różniczka zupełna:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\, dx_n,$$

jest identyczną z wyrażeniem (1), wtedy koniecznie być musi:

$$(2) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = X_1, \ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = X_2, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = X_n\,.$$

Wziąwszy tylko dwa pierwsze równania i zróżniczkowawszy pierwsze względem x_2, drugie względem x_1, otrzymamy:

$$(3) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\, \partial x_1} = \frac{\partial X_1}{\partial x_2}, \ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\, \partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\,.$$

Ponieważ założyliśmy, że funkcye X są skończone wraz z swemi pierwszemi pochodnemi, to na podstawie związków (2) i (3) otrzymujemy, że pochodne pierwsze i drugie funkcyi φ są skończone; tym sposobem spełniają się warunki, aby różniczkowania względem zmiennych x_1, x_2 były przemiennemi (patrz „Rachunek różniczkowy“, rozdz. II, § 7), t. j. aby było:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \, \partial x_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \, \partial x_2} .$$

Wynika stąd, że:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1} .$$

Podobne równanie stosuje się oczywiście do każdych dwu innych funkcyj X. Do tego warunku przybywają tedy inne tego samego typu przez kombinowanie funkcyj X po dwie. Wszystkich takich warunków będzie $\frac{n(n-1)}{2}$ i można je wyrazić w postaci ogólnej:

$$(4) \qquad \frac{\partial X_r}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s}{\partial x_r} ,$$

$$s=1, 2, \ldots, n;\ r=1, 2, \ldots, n,\ s \gtreqless r.$$

Okażemy, że te warunki są dostatecznemi, t. j. gdy one się spełniają, funkcya φ zawsze istnieje. W samej rzeczy, uważajmy chwilowo zmienne $x_2, x_3, \ldots, x_n$ za stałe i obliczmy całkę:

$$\int X_1 \, dx_1 ;$$

całka ta istnieje, gdyż funkcya X_1 jest ciągłą. Niechaj L_1 będzie całką nieokreśloną. Możemy do niej dodać stałą dowolną względem zmiennej x_1. Całka zatem powyższa przedstawia się tak:

$$\varphi = L_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n) + \psi_1 (x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Zobaczmy, czy można oznaczyć funkcyę ψ_1, aby funkcya φ była całką danego wyrażenia różniczkowego. Różniczką znpełną funkcyi φ jest:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} dx_1 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}\right) dx_n .$$

Jeżeli ta różniczka ma być identyczna z wyrażeniem (1), to różnica tych dwu wyrażeń musi być zerem; skąd — jeżeli zwrócimy uwagę na to, że $\frac{\partial L_1}{\partial x_1} = X_1$ — wynika:

$$\left(X_2 - \frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(X_n - \frac{dL_1}{dx_n}\right) dx_n$$

$$= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} dx_3 + \ldots + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} dx_n ,$$

t. j. że funkcya ψ_1 zmiennych $x_2, \ldots, x_n$ powinna być oznaczoną w ten sposób, aby jej różniczką zupełną było wyrażenie:

$$(5) \qquad \left(X_2 - \frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(X_n - \frac{dL_1}{\partial x_n}\right) dx_n .$$

Ponieważ funkcya ψ_1 nie zawiera zmiennej x_1, przeto jest jasnem, że w tem wyrażeniu nie powinna zachodzić zmienna x_1. Nadto dla wyrażenia tego powinny się spełniać znane już nam warunki k o n i e c z n e całkowalności. Otóż łatwo okazać, że w wyrażeniu (5) występuje zmienna x_1 tylko pozornie. W samej rzeczy, weźmy pochodną względem x_1 jednego ze spółczynników, mianowicie spółczynnika $X_r - \frac{\partial L_1}{\partial x_r}$, to znajdziemy, że ta pochodna jest zerem, gdyż pochodną tą jest:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial L_1}{\partial x_r} = \frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial L_1}{\partial x_1} = \frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_r} ,$$

co równa się zeru na podstawie warunków (4). Zobaczymy teraz, że wyrażenie (5) spełnia też warunki całkowalności. Istotnie:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(X_s - \frac{\partial L_1}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial X_s}{\partial x_r} - \frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial L_1}{\partial x_s}$$

$$= \frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial L_1}{\partial x_r} = \frac{\partial}{\partial x_s}\left(X_r - \frac{\partial L_1}{\partial x_r}\right),$$

co było do okazania.

Możemy zatem do różniczki (5) zastosować na nowo metodę, stosowaną do wyrażenia (1), i znajdziemy wtedy, że ψ_1 równa się pewnej funkcyi $L_2(x_2 \ldots x_n)$ wraz ze stałą względem zmiennej x_2; tę stałą możemy przedstawić jako funkcyę $\psi_2(x_3 \ldots x_n)$ zmiennych $x_3, \ldots, x_n$. Postępując w ten sposób dalej, dojdziemy wreszcie do różniczki, zawierającej jednę tylko zmienną x_n, a więc do różniczki zawsze całkowalnej. Otrzymamy w ten sposób:

$$\varphi = L_1 + L_2 + \ldots + L_n + C,$$

gdzie stała C jest stałą bezwzględną, t. j. niezależną od żadnej ze zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Widzimy stąd, że bez posługiwania się innemi warunkami, prócz wyrażonych równaniami (4), możemy znaleść funkcyę φ, co stwierdza, że warunki (4) są d o s t a t e c z n e m i.

Podamy przykład:

Niechaj będzie wyrażenie:

$$\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \left(2y - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy\,.$$

Warunki całkowalności są tu spełnione, gdyż:

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2y - \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Dla wykonania całkowania obliczmy:

$$\int \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + \psi_1 (y) .$$

Utwórzmy wyrażenie:

$$\left(2y - \frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{d}{dy} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} = 2y - \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$+ \frac{x}{y^2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = 2y$$

i całkujmy:

$$\int 2y\, dy = y^2 .$$

Tym sposobem otrzymujemy szukaną całkę w postaci:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + y^2 + C.$$

ROZDZIAŁ VI.

GEOMETRYA CAŁKOWA.

---

§ 1.

Pole krzywej płaskiej.

Niechaj będzie krzywa, dana przez równanie $y = f(x)$. Weźmy na krzywej dwa punkty A, B o odciętych α i β; część

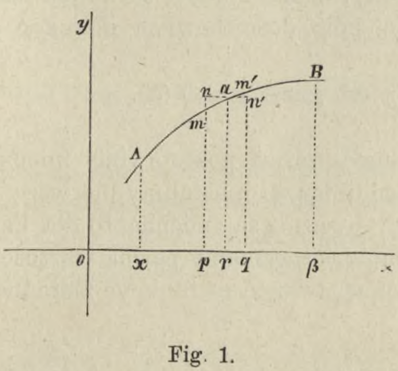

Fig. 1.

płaszczyzny, zawartą pomiędzy krzywą, osią odciętych i dwiema rzędnemi punktów krańcowych A i B, nazywamy p o l e m k r z y w e j.

Jest rzeczą konieczną ustalić dokładniej pojęcie pola. W tym celu podzielmy przedział $\alpha\,\beta$ na przedziały cząstkowe δ_r i przez każdy z punktów podziału poprowadźmy odpowiednią rzędną. Niechaj jednym z tych przedziałów δ_r będzie $p\,q$, a odpowiadające mu rzędne niechaj przecinają krzywą w punktach m i m'. Wybierzmy jakikolwiek punkt a na krzywej pomiędzy punktami m i m', poprowadźmy przezeń prostą $n\,n'$, równoległą do osi odciętych i utwórzmy prostokąt $nn'pq$. Pole tego prostokąta równa się $np \,.\, pq = f(x)\,\delta_r$, t. j. iloczynowi długości δ_r przez wartość funkcyi f w punkcie a. Utwórzmy sumę wszystkich takich iloczynów i zmniejszajmy następnie do zera przedziały δ_r. Wtedy na podstawie definicyi całki określonej wiemy, że granica tej sumy (o ile istnieje) jest właśnie całką określoną od α do β funkcyi $f(x)$.

Lecz $f(x)$ wyraża rzędną krzywej danej; załóżmy, że ta f u n k c y a j e s t c i ą g ł ą l u b, c o n a j w y ż e j, p o s i a d a s k o ń c z o n ą l i c z b ę p u n k t ó w p r z e r w y. Pamiętając, że dla funkcyi ciągłej lub mającej skończoną liczbę punktów przerwy istnieje zawsze calka określona, widzimy, że granica sumy $\Sigma f(x)\,\delta_r$ i s t n i e j e i j e s t o z n a c z o n ą. Tę granicę nazywamy p o l e m k r z y w e j.

Widzimy tedy, w jaki sposób rachunek całkowy daje możność obliczania pól; dość bowiem obliczyć całkę określoną

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \text{ lub } \int_\alpha^\beta y\,dx \text{ gdzie } y = f(x).$$

Jeżeli granicę górną pozostawimy nieoznaczoną $\beta = x$ i ustalimy granicę dolną, t. j. ustalimy pierwszą rzędną skrajną, a drugą będziemy uważali za zmienną, to dla każdego położenia tej drugiej zmiennej, otrzymamy pewną wartość pola; tym sposobem pole u można uważać za funkcyę zmiennej x i napisać:

$$u = \varphi(x) = \int_\alpha^x f(x)\,dx = \int_\alpha^x y\,dx\,.$$

Gdy f jest funkcyą ciągłą, to, jak wiemy, pochodna całki jest równa funkcyi podcałkowej, stąd wnosimy, że pochodna pola względem zmiennej x wyraża wartość rzędnej linii krzywej.

Z powodu tej analogii pomiędzy rachunkiem krzywych płaskich a rachunkiem całek pojedyńczych funkcyj ciągłych całkowanie nazywa się także kwadraturą, i mówi się często kwadratura krzywej zam. obliczanie jej pola. Przechodzimy do przykładów:

1) Niechaj będzie hyperbola równoboczna, odniesiona do swych asymptot; jej równaniem jest $xy = m^2$, gdzie m jest stałą.

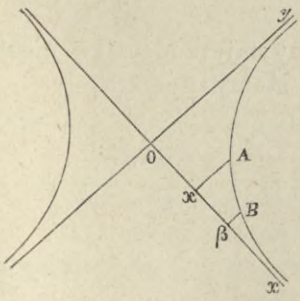

Fig. 2.

Pole $u = AB\alpha\beta$ wyrazi się tak:

$$u = \int_\alpha^\beta y\, dx = m^2 \int_\alpha^\beta \frac{dx}{x},$$

a ponieważ $\int \frac{dx}{x} = \log x$,

przeto:

$$u = m^2 (\log \beta - \log \alpha) = m^2 \log \frac{\beta}{\alpha}.$$

Niechaj w szczególności $m^2 = 1$ i punkt A będzie wierzchołkiem hyperboli, wtedy α będzie 1 (gdyż w wierzchołku x i y są równe, a że iloczyn ich ma być 1, więc obie są równe 1); będzie tedy:

$$u = \log \beta,$$

t. j. pole hyperboli równobocznej mierzy się logarytmem neperowym odciętej 0β. Z tego powodu logarytmy neperowe nazywają się także hyperbolicznemi.

2) Niechaj będzie koło: $x^2 + y^2 = r^2$; mamy obliczyć pole $SOPQ$.

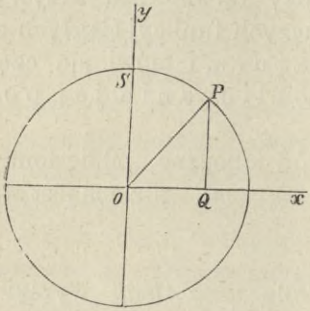

Fig. 3.

Obliczmy całkę:

$$\int y\,dx = \int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx,$$

w granicach od $x = 0$ do $x = 0Q$; drugą z granic pozostawiamy nieoznaczoną, t. j. piszemy $\int_0^x \sqrt{r^2-x^2}\,dx$.

Obliczmy najprzód całkę nieokreśloną. Mamy:

$$(1) \qquad \int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{r^2 - x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

a także:

$$(2) \int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int \frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = r^2 \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Dodając (1) i (2), otrzymujemy:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}.$$

Ponieważ dla $x = 0$ strona druga jest zerem, więc to wyrażenie jest właśnie szukaną całką określoną od 0 do x. Zauważmy, że ponieważ powierzchnia trójkąta $0PQ$ równa się $\frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2}$, przeto powierzchnia wycinka kołowego $0PS$ równa się $\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}$.

3) Obliczyć pole krzywej, której równaniem jest $y^n = px^m$, gdzie n i m są dwie liczby wymierne.

Takie krzywe nazywają się wogóle p a r a b o l a m i.

Obliczmy $0PQ$. Mamy:

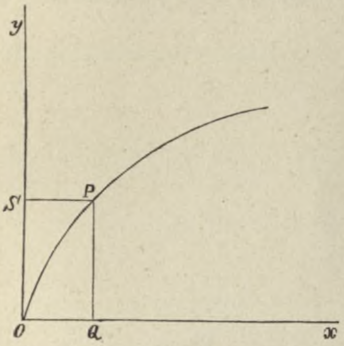

Fig. 4.

$$\int_0^x y\,dx = p^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{\frac{m}{n}}\,dx$$

$$= \frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{m+n} xy,$$

a więc pole paraboliczne OPQ tak się ma do powierzchni prostokąta $OSPQ = xy$, jak liczba n do liczby $m+n$.

Odejmując od powierzchni prostokąta pole paraboliczne, znajdujemy:

$$\left(1 - \frac{n}{m+n}\right) xy = \frac{m}{m+n} xy; \text{ a więc:}$$

$$OSP = \frac{m}{m+n} xy, \quad \text{stąd:}$$

$$\frac{OPQ}{OSP} = \frac{n}{m},$$

t. j., że parabola dzieli prostokąt $OSPQ$ w stosunku $n : m$. W przypadku $n = 2$, $m = 1$ otrzymujemy stąd twierdzenie, znane z Geometryi analitycznej.

4) Rozważmy krzywe dane przez równanie $x^m y^n = p$. Krzywe takie nazywają się h y p e r b o l a m i; w szczególnym przypadku $n = m = 1$ mamy hyperbolę zwykłą równoboczną.

Niechaj $n > m$; wtedy:

$$\int_0^x y\,dx = p^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{-\frac{m}{n}}\,dx = \frac{n}{n-m}\, p^{\frac{1}{n}}\, x^{-\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{n-m}\, xy\,.$$

Stąd pole zawarte pomiędzy osią y i rzędną PQ, jakkolwiek roz-

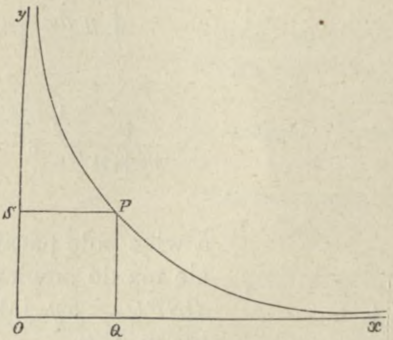

Fig. 5.

ciąga się do nieskończoności—gdyż krzywa y spotyka oś rzędną w nieskończoności (oś ta jest asymptotą krzywej)—ma wszakże wartość skończoną.

Odejmując od tego pola powierzchnię prostokąta $x\,y$, znajdujemy:

$$\text{Pole } (SP\infty) = \left(\frac{n}{n-m} - 1\right) xy = \frac{m}{n-m}\, xy\,,$$

a stąd:

$$\frac{OQP\infty}{SP\infty} = \frac{n}{m}\,.$$

Jest to twierdzenie analogiczne do twierdzenia, odnoszącego się do paraboli.

5) Obliczmy pole elipsy:

$$a^2\, y^2 + b^2\, x^2 = a^2\, b^2.$$

W tym celu obliczmy:

$$\int_a^x y\,dx = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Odpowiednie pole, należące do koła o promieniu $OA = a$, t. j.

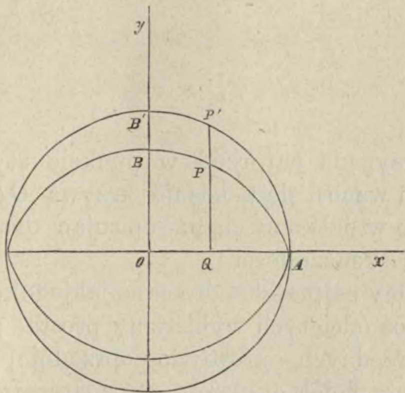

Fig. 6.

pole $OB'P'Q$, równa się $\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, stąd:

$$\frac{OBPQ}{OB'P'Q} = \frac{b}{a}\,.$$

Aby więc mieć powierzchnię ćwiartki elipsy, dość powierzchnię ćwiartki koła, t. j. $\frac{1}{4}\pi a^2$ pomnożyć przez $\frac{b}{a}$; otrzymamy $\frac{1}{4}\pi ab$. Powierzchnia całej elipsy będzie πab.

6) Zbadamy obecnie krzywą interesującą, mającą wiele dość ważnych własności, mianowicie c y k l o i d ę.

Jej tworzenie mechaniczne jest takie: Wyobraźmy sobie koło, toczące się bez ślizgania po prostej stałej. Jeden z punktów

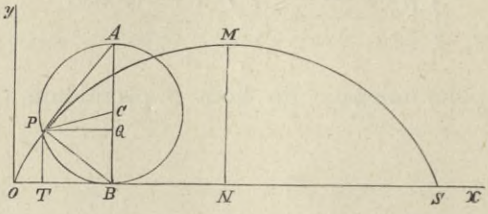

Fig. 7.

P tego koła przypada najprzód w punkcie styczności okręgu i prostej, potem wznosi się i opisuje krzywą $OPMS$; następnie koło obraca się w dalszym ciągu, opisując drugą podobną gałąź i t. d. do nieskończoności.

Wyznaczmy najprzód spółrzędne jakiegokolwiek punktu P cykloidy. Za oś odciętych wybierzmy prostą, po której toczy się koło, za oś rzędnych—prostą do poprzedniej prostopadłą, za początek O wierzchołek cykloidy. Rozpatrzmy położenie koła, odpowiadające punktowi P. Połączmy punkt P z punktem C i oznaczmy przez θ kąt PCQ; wtedy:

$$x = OT = OB - TB = OB - PQ.$$

Lecz długość prostoliniowa OB równa się oczywiście łukowi kołowemu PB, t. j. równa się $r\theta$; $PQ = r \sin \theta$, gdzie r jest promieniem koła. Stąd:

$$x = r(\theta - \sin \theta).$$

Dalej:

$$y = PT = CB - CQ = r - r \cos \theta;$$

stąd:

$$y = r(1 - \cos \theta).$$

Rugując θ z ostatnich dwu równań, dojdziemy do równania cykloidy. Okażemy najprzód własność zasadniczą stycznej do cykloidy.

Jeżeli poprowadzimy średnicę AB i połączymy punkt P z najwyższym punktem A i z najniższym B, to otrzymamy styczną i normalną do cykloidy w punkcie B. Aby to okazać, zauważmy, że kąt PAC równa się $\frac{1}{2}\theta$, a stąd kąt, który prosta PA tworzy z osią odciętych, jest dopełnieniem kąta $\frac{1}{2}\theta$. Z drugiej strony wiadomo, że kąt, jaki styczna geometryczna w punkcie P tworzy z osią odciętych, równa się $\frac{dy}{dx}$. W naszym przypadku możemy oznaczyć pochodną $\frac{dy}{dx}$, obliczając z równań cykloidy pochodne $\frac{dy}{d\theta}$, $\frac{dx}{d\theta}$. Ponieważ z tych równań wypływa:

$$\frac{dy}{d\theta} = r \sin\theta = 2r \sin\frac{1}{x}\theta \cos\frac{1}{2}\theta,$$

$$\frac{dx}{d\theta} = r\,(1 - \cos\theta) = 2r \sin^2\frac{1}{2}\theta,$$

przeto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}},$$

co właśnie wskazuje, że kąt, jaki styczna tworzy z osią odciętych, równa się $\frac{1}{2}\theta$, a więc, że styczną geometryczną jest właśnie prosta PA. Stąd zaś wynika już bezpośrednio, że normalną jest prosta PB.

Obliczmy pole cykloidy.

W tym celu uskutecznijmy zamianę osi, przenosząc je równolegle do siebie samych, do Bx, By. Nowa odcięta x będzie równa dawnej zmniejszonej o $OA = \pi r$, nowa zaś rzędna y równać się będzie średnicy $2r$, zmniejszonej o dawną rzędną; tym sposobem będzie:

$$x = r(\theta - \sin\theta) - \pi r; \quad y = 2r - 2r\sin^2\frac{1}{2}\theta = 2r\cos^2\frac{1}{2}\theta$$

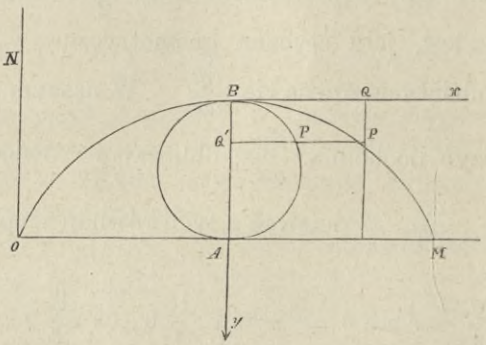

Fig. 8.

Stąd:

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) = 2r\sin^2\frac{1}{2}\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -2r\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta,$$

a więc:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{dy}{d\theta}} = -\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = -\frac{\sqrt{2r-y}}{\sqrt{y}}.$$

Pole BPQ równa się $\int_0^x y\,dx$. Gdybyśmy wyrazili y i dx za pomocą zmiennej θ, mielibyśmy do całkowania funkcyę przestępną; lecz biorąc za zmienną niezależną y, będziemy mieli do całkowania funkcyę $y\,\frac{dx}{dy}$, która jest algebraiczną.

Ponieważ dla $x = 0$ jest $y = 0$, przeto:

$$BPQ = -\int_0^y \sqrt{2ry - y^2}\,dy.$$

Jeżeli chcemy obliczyć pole $BQ'P'$ koła tworzącego, otrzymamy tenże wzór. Stąd wnosimy, że:

$$BP'Q' = BQP,$$

a więc cała powierzchnia BAM równa się prostokątowi na liniach BA i AM, zmniejszonemu o powierzchnię półkola $BP'A$, t. j.

$$BAM = 2r^2\pi - \frac{1}{2}\,r^2\pi = \frac{3}{2}\,r^2\pi\,,$$

a więc pole cykloidy równa się $3\pi r^2$, t. j. potrójnej powierzchni koła tworzącego.

---

§ 2.

Łuk krzywej płaskiej.

Wyobraźmy sobie krzywą ciągłą i jej styczną pomiędzy punktami A i B, poruszającą się sposobem ciągłym lub mającą skończoną liczbę punktów przerwy. Wtedy łukiem krzywej pomiędzy punktami A i B nazwiemy długość nici gięt-

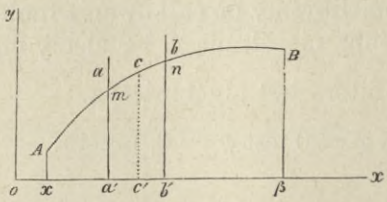

Fig. 9.

kiej, która przystaje dokładnie do krzywej i kończy się w punktach A i B.

Ściślejsze określenie łuku krzywej dajemy w sposób następujący. Wyobraźmy sobie przedział pomiędzy α i β, podzielony na przedziały cząstkowe δ_r i niechaj $a' b'$ będzie jednym z takich przedziałów. Przez punkty przedziału poprowadźmy rzędne, t. j. proste równoległe do osi y. Rzędne te przetną krzywą w punktach takich, jak punkty m i n. Weźmy na krzywej punkt c pośredni pomiędzy punktami m i n, poprowadźmy styczną do krzywej w tym punkcie i ograniczmy ją za pomocą dwu rzędnych. Powtarzając to działanie dla wszystkich przedziałów δ_r i sumując wszystkie odcinki prostoliniowe takie jak $a b$, biorąc wreszcie granicę tej sumy w założeniu, że przedziały δ_r dążą do zera a ich liczba rośnie do nieskończoności, otrzymamy to, co nazywa się łukiem krzywej pomiędzy pnnktami A i B.

Należy dowieść, że przy założeniach, uczynionych co do natury stycznej do krzywej, wzmiankowana w określeniu granica rzeczywiście istnieje. W tym celu szukajmy przedewszystkiem analitycznego wyrażenia łuku.

Odcinek ab równa się swemu rzutowi $a' b'$, podzielonemu przez dostawę kąta pomiędzy ab i osią odciętych, t. j. $a b = \frac{a' b'}{\cos \theta}$.

Lecz $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}$, a więc:

$$ab = a'b' \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}\,.$$

Ponieważ prosta ab jest styczną do krzywej, przeto $\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_c$, gdzie znaczek c u dołu oznacza, że pochodną należy wziąć dla punktu c o odciętej pośredniej pomiędzy a i b. Kładąc $a'b' = \delta_r$, mamy na mocy określenia dla łuku s:

$$s = \lim \Sigma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, \delta_r,$$

gdzie suma rozciąga się na wszystkie przedziały δ_r pomiędzy α i β, wartość zaś funkcyi $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ należy brać za każdym razem odpowiadającą pewnemu punktowi, którego odcięta zawiera się w przedziale δ_r. Widzimy stąd, że łuk s jest ściśle równy całce funkcyi $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ pomiędzy granicami α i β, t. j.

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Ponieważ według założenia styczna do krzywej porusza się sposobem ciągłym lub, co najwyżej, posiada skończoną liczbę przerw, przeto funkcya $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ będzie funkcyą ciągłą lub będzie posiadała, co najwyżej, skończoną liczbę punktów przerwy; stąd wynika, że s jako całka funkcyi ciągłej jest wogóle ciągłą, a zatem zawsze istnieje.

Jeżeli odciętą α będziemy uważali za stałą, odciętą zaś β za zmienną i napiszemy x zamiast β, znajdziemy łuk s jako funkcyę zmiennej x, a jej pochodna względem x będzie:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

skąd:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Tym sposobem zagadnienie obliczania łuku krzywej zostało rozwiązane.

Zagadnienie to nazywamy często zagadnieniem wyprostowywania (rektyfikacyi) krzywych, podobnie jak zagadnienie obliczania pól nazywa się zagadnieniem kwadratur.

Niechaj będzie łuk krzywej i jego cięciwa prostoliniowa. Ustalmy jeden z krańców, np. A i zbliżajmy drugi kraniec do A, wtedy łuk i jego cięciwa zmniejszać się będą nieograniczenie. Można dowieść, że granica ich stosunku jest jednością; jest to własność, z której korzystaliśmy już w „Rachunku różniczkowym".

W samej rzeczy można dowieść, że cięciwa, liczona od punktu stałego A, uważana za funkcyę odciętej, ma tę samą pochodną w punkcie A, jaką ma funkcya s w tym punkcie. Jeżeli bowiem oznaczymy przez Δx, Δy różnice pomiędzy odpowiedniemi spółrzędnemi dwóch punktów krańcowych cięciwy, będzie:

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \,.\, \Delta x,$$

a więc:

$$\frac{c}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Jeżeli Δx dąży do zera, to i Δy dąży do zera, a stosunki $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{c}{\Delta x}$ dążyć będą do wartości pochodnych funkcyi y i c względem x; więc pochodna funkcyi c względem x, t. j.

$$\frac{dc}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

a stąd:

$$\frac{ds}{dc} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{dc}{dx}} = 1.$$

Powyższy wzór na różniczkę łuku krzywej płaskiej stosuje się do przypadku spółrzędnych prostokątnych. Można znaleść wzór analogiczny w przypadku, gdy osie spółrzędnych tworzą ze sobą kąt φ. Istotnie, za pomocą podobnego, jak wyżej, postępowania znajdziemy, że pochodna funkcyi s względem x jest:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx}\cos\varphi},$$

a stąd:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy\cos\varphi}.$$

Przejdźmy do przypadku spółrzędnych biegunowych. Niechaj ϱ i θ będą spółrzędnemi biegunowemi punktu M. Możemy znaleść wzór na różniczkę łuku, przekształcając wzór otrzymany w spółrzędnych prostokątnych. Spółrzędne x, y wyrażają się przez spółrzędne ϱ, θ za pomocą wzorów $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$, z których wynika $dx = -\varrho\sin\theta\,d\theta + \cos\theta\,d\varrho$; $dy = \varrho\cos\theta\,d\theta + \sin\theta\,d\varrho$. Podnosząc do kwadratu i dodając, znajdujemy:

$$dx^2 + dy^2 = \varrho^2\,d\theta^2 + d\varrho^2,$$

skąd:

$$ds = \sqrt{\varrho^2\,d\theta^2 + d\varrho^2}.$$

Za pomocą różniczki ds możemy wyrazić prostym sposobem dostawy i wstawy kierunku stycznej do krzywej. W rzeczy samej, jeżeli θ jest kątem, który styczna tworzy z osią odciętych, to $\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx}$, skąd:

$$\sin\theta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dy}{ds};\ \cos\theta = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dx}{ds}.$$

Powiedzieliśmy wyżej, że łuk krzywej można uważać za funkcyę odciętej x. Odwrotnie, jeżeli łuk (liczony od pewnego początku stałego) jest dany, to wtedy jest zarazem oznaczony drugi punkt końcowy łuku, a więc jego spółrzędne x, y. Stąd obie spółrzędne x, y można uważać za funkcye łuku s, przyjętego za zmienną niezależną. W takim razie równanie krzywej można zawsze wyrazić w postaci:

$$x = \varphi(s),\ y = \psi(s);$$

kształt funkcyj φ, ψ wyznacza się w przypadkach szczególnych.

Z powyższych wzorów wynika też, że pochodne zmiennych x, y względem s są właśnie dostawami i wstawami kierunkowemi stycznej do linii krzywej.

Z wzoru $ds^2 = dx^2 + dy^2$, przy przyjęciu zmiennej s za niezależną, otrzymujemy przez różniczkowanie:

$$0 = \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}.$$

Ten wzór służy dla przypadku, gdy x, y są funkcyami zmiennej niezależnej s.

Podamy kilka przykładów:

1) Znaleść wyrażenie łuku koła o promieniu r.

Równaniem koła jest $x^2 + y^2 = r^2$, skąd:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y},$$

a więc:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{1}{y}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{r}{y} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Całkując, znajdujemy:

$$s = r \text{ arc cos } \frac{x}{r} + C.$$

Jeżeli zaczynamy liczyć łuk od punktu $x = r$, $y = 0$, t. j. od krańcowego punktu po prawej stronie okręgu, wtedy dla $x = r$ jest $s = 0$, stąd $C = 0$, a więc:

$$s = r \text{ arc cos } \frac{x}{r},$$

co jest znanem wyrażeniem łuku kołowego.

2) Obliczyć łuk spiralnej logarytmowej, danej przez równanie $\varrho = e^{\theta}$.

Jest $d\varrho = e^{\theta} d\theta$, a stąd:

$$ds = \sqrt{e^{2\theta}\, d\theta^2 + e^{2\theta}\, d\theta^2} = \sqrt{2}\; e^{\theta}\, d\theta,$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{2} \,.\, e^{\theta}.$$

Całkując, znajdujemy:

$$s = \sqrt{2}\; e^{\theta} + C = \sqrt{2} \,.\, \varrho + C.$$

Dla oznaczenia stałej C zauważmy, że jeżeli zaczynamy liczyć łuk s od punktu, odpowiadającego wartościom spółrzędnych $\varrho = 1$, $\theta = 0$ (t. j. gdy dla tych wartości jest $s = 0$), to wtedy C równa się $-\sqrt{2}$, stąd:

$$s = \sqrt{2}\,(\varrho - 1) = \sqrt{2}\,(e^{\theta} - 1).$$

3) Wyprostowanie paraboli $y^2 = 2px$.

Z równania paraboli wynika:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{p},$$

stąd:

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx,$$

a po przekształceniu tej całki tak, aby zmienną niezależną była zmienna y:

$$s = \frac{1}{p} \int \sqrt{y^2 + p^2}\, dy.$$

Liczyć będziemy długość łuku od wierzchołka paraboli ($y = 0$), aż do pewnej wartości ogólnej y. Wykonywając całkowanie przez części, mamy:

$$s = \frac{1}{p}\, y \sqrt{y^2 + p^2} - \frac{1}{p} \int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

Z drugiej strony:

$$s = \frac{1}{p} \int \sqrt{y^2 + p^2}\, dy = p \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}} + \frac{1}{p} \int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{y^2 + p^2}},$$

tak, że:

$$s = \frac{1}{2p}\, y \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

Ostatnią całkę obliczymy za pomocą wzoru ogólnego, podanego w § 4 Rozdziału III-go i otrzymamy:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}} = \log\left(y + \sqrt{y^2 + p^2}\right) - \log p.$$

Tym sposobem będzie:

$$s = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}.$$

4) Obliczyć długość łuku elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Spółrzędne punktu elipsy można wyrazić w funkcyi jednego parametru w ten sposób:

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b \cos\varphi,$$

skąd:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \frac{dx}{d\varphi} = a\cos\varphi;$$

$$s = \int\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = a\int\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Za granice całkowania można wziąć $\varphi = 0$ do φ jakiegokolwiek (odpowiednio do granic: $x = 0$ i x jakiekolwiek). Można okazać, że żadnemi środkami sztucznemi ta całka nie dałaby się wyrazić pod postacią skończoną za pomocą funkcyj zwykłych, znanych, jak funkcye wymierne i niewymierne algebraiczne, logarytmowe, trygonometryczne i wykładnicze.

Takie całki napotkaliśmy już w § 4 Rozdziału III-go i nazwaliśmy je całkami eliptycznemi, właśnie dlatego, że służą, jak widzimy, do wyprostowywania elipsy. Można te całki obliczyć za pomocą całkowania przez szeregi. Patrz § 2 Rozdziału III-go.

5) Obliczyć długość łuku cykloidy.

Przyjmiemy te same spółrzędne, co w paragrafie poprzedzającym. Znaleźliśmy tam, że $\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{2r-y}}{\sqrt{y}}$, a więc gdy y weźmiemy za zmienną niezależną, będzie:

$$s = \int_0^y \sqrt{1 + \frac{2r-y}{y}}\, dy = \int_0^y \sqrt{\frac{2r}{y}}\, dy\text{, skąd:}$$

$$s = 2\sqrt{2r}\sqrt{y}\,.$$

A więc długość łuku BP (patrz fig. 8) równa się podwójnej długości prostej BP', której długością jest właśnie $\sqrt{2ry}$. Dla $y=2r$ jest $s = 4r$, jako długość połowy cykloidy.

---

§ 3.

Łuk krzywej skośnej.

Wyobraźmy sobie odcinek krzywej skośnej AB o stycznej ciągłej. Niechaj odciętemi punktów skrajnych będą α i β. Po-

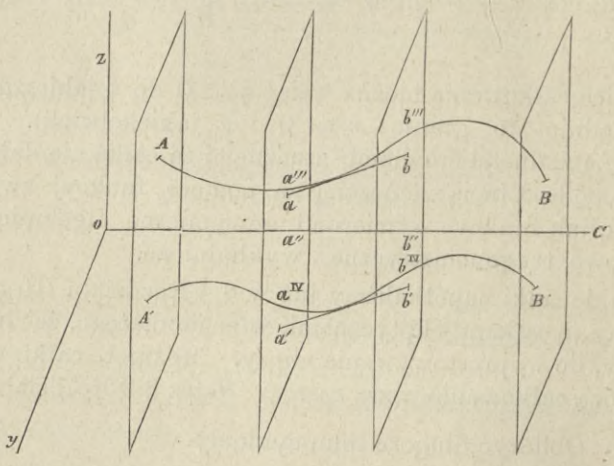

Fig. 10.

dzielmy odcinek prostoliniowy $\alpha\beta$ na pewną liczbę odcinków cząstkowych takich, jak $a''\,b'' = \delta_r$. Przez punkty podziału poprowadźmy płaszczyzny prostopadłe do osi odciętych, mianowicie aa'', bb'' i t. d.; te płaszczyzny przetną krzywą w punktach a''', b''', ..., pośrednich pomiędzy punktami A i B. Poprowadźmy styczną do krzywej w punkcie c pośrednim pomiędzy a''' i b''' i ograniczmy tę styczną dwiema płaszczyznami równoległemi; otrzymamy tym sposobem odcinek prostoliniowy ab. Postępując w ten sposób dla wszystkich pasm, otrzymamy zbiór odcinków takich, jak ab i te wszystkie odcinki będą oczywiście dążyły do zera, gdy odcinki $a''\, b'' = \delta_r$ do zera dążą. Otóż granicę sumy wszystkich odcinków ab dla przedziałów δ_r, równych zeru przy nieskończonem wzrastaniu liczby tych odcinków, nazywamy ł u k i e m k r z y w e j p o m i ę d z y p u n k t a m i A i B. Okażemy, że ta granica istnieje i że jest nią mianowicie całka pewnej funkcyi ciągłej lub w ogólności ciągłej.

W tym celu znajdźmy wyrażenie odcinka ab. Niechaj ξ, η, ζ oznaczają kąty, które styczna tworzy z osiami spółrzędnych; będzie oczywiście $ab = \dfrac{\delta_r}{\cos \xi}$. Lecz ponieważ z równania $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta + \cos^2 \zeta = 1$ wynika $\dfrac{1}{\cos \xi} = \sqrt{1 + \dfrac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \xi} + \dfrac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \xi}}$,

przeto:

$$ab = \delta_r \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \xi} + \frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \xi}}.$$

Stosunki $\dfrac{\cos \eta}{\cos \xi}$, $\dfrac{\cos \zeta}{\cos \xi}$ wyrazić można za pomocą pochodnych zmiennych y i z względem zmiennej x. Istotnie rzutem danej krzywej skośnej na płaszczyznę xy jest krzywa płaska $A'B'$, rzutem zaś stycznej ab jest styczna $a'b'$ do krzywej $A'B'$. Jeżeli δ_r i ε_r są rzutami odcinka ab na osie x i y, to będą one także rzutami odcinka $a'b'$ na też osie. Mamy: $\cos \xi = \dfrac{\delta_r}{a\,b}$, $\cos \eta = \dfrac{\varepsilon_r}{a\,b}$, i jeżeli ζ', η' są kątami, które odcinek $a'\,b'$ tworzy z osiami x, y, będzie też: $\cos \xi' = \dfrac{\delta_r}{a'b'}$, $\cos \eta' = \dfrac{\varepsilon_r}{a'b'}$, a więc:

$$\frac{\cos\eta'}{\cos\xi'} = \frac{\varepsilon_r}{\delta_r} = \frac{\cos\eta}{\cos\xi}.$$

Gdy układ osi x, y jest prostokątny, to $\frac{\cos\eta'}{\cos\xi'}$ jest styczną kąta ξ', który odcinek $a'\,b'$ tworzy z osią x i ta styczna wyraża się także przez $\frac{dy}{dx}$ (gdyż $a'\,b'$ jest styczną do krzywej płaskiej), a więc:

$$\frac{\cos\eta}{\cos\xi} = \frac{dy}{dx},$$

gdzie pochodna oblicza się oczywiście dla punktu styczności odcinka ab. Podobnież będzie:

$$\frac{\cos\zeta}{\cos\xi} = \frac{dz}{dx}.$$

Wynika stąd:

$$ab = \delta_r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Jeżeli więc s oznacza łuk AB, będzie na mocy określenia:

$$s = \lim \sum_\alpha^\beta \delta_r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

co właśnie orzeka, że łuk s wyraża się za pomocą następującej całki określonej:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \, . \, dx.$$

Ponieważ założyliśmy, że odcinek krzywej AB ma styczną ciągłą lub w ogólności ciągłą, przeto $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{dz}{dx}$, jako zależne właśnie od kierunku stycznej, są funkcyami ciągłemi lub w ogólności ciągłemi, a stąd wynika, że powyższa całka z a w s z e i s t n i e j e. Pochodna łuku s względem zmiennej x (zakładając, że granica górna β jest zmienną i pisząc x zamiast β), będzie wogóle równa funkcyi podcałkowej, t. j. będzie:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

a stąd na różniczkę łuku s otrzymujemy wzór:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Możnaby dowieść, że podobnie jak w przypadku krzywych płaskich, granica stosunku łuku do jego cięciwy jest równa jedności.

Zrobimy jeszcze jedno spostrzeżenie. Znaleźliśmy, że:

$$\frac{1}{\cos \xi} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

gdzie ξ jest kątem pomiędzy styczną a osią x. Stąd znajdujemy: $\cos \xi = \frac{dx}{ds}$ i podobnie: $\cos \eta = \frac{dy}{ds}$, $\cos \zeta = \frac{dz}{ds}$, a więc za pomocą różniczki ds możemy wyrazić dostawy kierunkowe stycznej, co stanowi zupełną analogię do przypadku krzywych płaskich.

Podajmy przykład:

Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny ABC i walec prosty kołowy; nawińmy trójkąt na walec w ten sposób, aby jego podstawa zlała się z okręgiem podstawy walca, wtedy przeciwprostokątnia AC wyznaczy na powierzchni walca krzywą, zwaną h e l i s ą (patrz „Rachunek różniczkowy", str. 245). Weźmy za osie x i y dwie proste prostopadłe do siebie i przechodzące przez środek O koła, za oś z — oś walca. Spółrzędnemi punktu

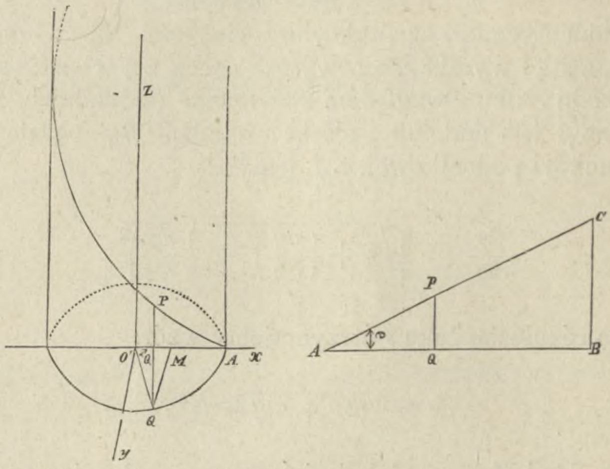

Fig. 11.

P helisy będą:

$$x = OM, \quad y = MQ, \quad z = QP.$$

Gdy rozwiniemy walec, to trójkąt AQP stanie się trójkątem prostokątnym OQP o kącie stałym φ, a więc:

$$PQ = \text{łuk } AQ \,.\, \operatorname{tg} \varphi = r\theta \operatorname{tg} \varphi,$$

$$MQ = r \sin \theta, \quad OM = r \cos \theta,$$

gdzie r jest promieniem koła podstawy. Mamy zatem:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = r \,.\, \theta \,.\, \operatorname{tg} \varphi.$$

Stąd:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\,; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \theta}\,,$$

a zatem:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\operatorname{tg}^2\varphi}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\,.$$

Będzie tedy:

$$s=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

$$=-\int r\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\,d\theta=-r\theta\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}+\text{const.}$$

Gdy zaczynamy liczyć s od punktu A, to dla $\theta=0$ jest $s=0$, a więc const $=0$ i będzie:

$$s=-r\theta\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi},$$

a ponieważ $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{1}{\cos\varphi}$, $r\theta=AQ$, więc bez względu na znak, jest:

$$s=\frac{AQ}{\cos\varphi},$$

co zresztą wynikłoby wprost z rozważania trójkąta prostokątnego APQ, w którym przeciwprostokątnia AP jest właśnie długością łuku s.

§ 4.

Pole powierzchni krzywej.

Wyobraźmy sobie powierzchnię, której równaniem jest $z = \varphi(x, y)$, ograniczoną linią zamkniętą o jednym obwodzie l, którego rzutem na płaszczyznę xy jest linia zamknięta o jednej gałęzi. Podamy określenie tego, co nazywa się polem powierzchni ograniczonej linią zamkniętą. Załóżmy, że część uważanej powierzchni jest taką, że prosta równoległa do osi z przecina ją tylko w jednym punkcie. Nakreślmy na płaszczyźnie xy prostokąt o bokach równoległych do osi x i y, opisany na linii krzywej zamkniętej, która jest rzutem linii ograniczającej powierzchnię. Podzielmy jeden z boków tego prostokąta na przedziały cząstkowe δ_r, drugi na przedziały δ'_s i poprowadźmy przez punkty podziału proste równoległe do osi x, y. Prostokąt

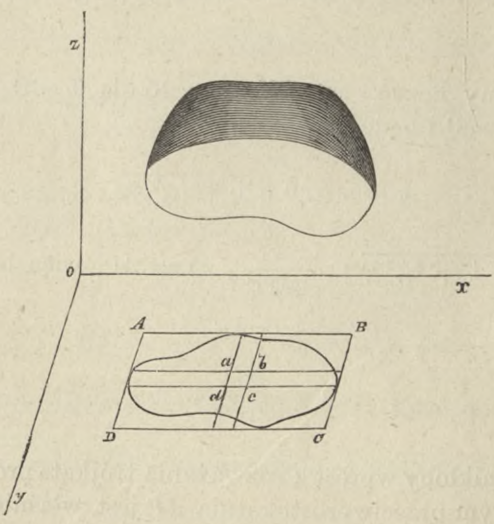

Fig. 12.

$ABCD$ podzieli się na prostokąty $abcd$, z których jedne pozostaną wewnątrz krzywej, inne będą w części wewnątrz, w części zaś zewnątrz, inne wreszcie będą całkiem zewnątrz. Rozważmy tylko te, które są zawarte całkiem wewnątrz krzywej i biorąc je za podstawy, wznieśmy na nich prostopadłościany; te prostopadłościany podzielą powierzchnię daną na części. Weźmy w każdej z tych części pewien punkt wewnętrzny, poprowadźmy przezeń płaszczyznę styczną do powierzchni i na tej płaszczyźnie weźmy pod uwagę czworobok, wyznaczony na niej przez odpowiedni prostopadłościan. Granica sumy tych wszystkich czworoboków, gdy przedziały cząstkowe δ_r, δ'_s maleją nieograniczenie, liczba zaś ich rośnie do nieskończoności, nazywa się p o l e m p o w i e r z c h n i.

Każdy z tych czworoboków równa się swemu rzutowi, t. j. prostokątowi δ_r, δ'_s, podzielonemu przez dostawę kąta, który płaszczyzna styczna tworzy z płaszczyzną xy, albo, co na jedno wychodzi, przez dostawę kąta, który prostopadła do płaszczyzny stycznej tworzy z osią z.

Oznaczmy przez ξ, η, ζ kąty kierunkowe prostopadłej do płaszczyzny stycznej, wtedy pole jednego takiego czworoboku będzie $q = \frac{\delta_r \delta'_s}{\cos \zeta}$, a ponieważ ze związku $\cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta = 1$ wynika:

$$\frac{1}{\cos \zeta} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \xi}{\cos^2 \zeta} + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \zeta}},$$

przeto:

$$q = \delta_r \delta'_s \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \xi}{\cos^2 \zeta} + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \zeta}}.$$

To wyrażenie przekształcimy. Przez punkt styczności płaszczyzny stycznej poprowadźmy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny xz; przetnie ona powierzchnię według pewnej krzywej c, a płaszczyznę styczną według stycznej t do tej krzywej. Równanie tej krzywej c znajdziemy wprost z równania powierzchni, uważając w tem ostatniem ilość y za stałą (t. j.

równą odległości linii płaskiej c od płaszczyzny xz). Niechaj α', β' γ' będą kąty kierunkowe stycznej t do krzywej c; ponieważ prosta ta znajduje się w płaszczyznie prostopadłej do osi y, przeto $\cos\beta' = 0$, kąty zaś α' i γ' są dopełniającemi się wzajemnie. Prosta prostopadła do płaszczyzny stycznej będzie prostopadłą do prostej t, t. j. będzie zachodził związek:

$$\cos\xi\cos\alpha' + \cos\eta\cos\beta' + \cos\zeta\cos\gamma' = 0,$$

który zamienia się na:

$$\cos\xi\cos\alpha' + \cos\zeta\cos\gamma' = 0.$$

Stąd:

$$\frac{\cos\xi}{\cos\zeta} = -\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'},$$

lecz:

$$\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'} = \frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'} = \operatorname{tg}\alpha' \quad \text{i także} \quad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{\partial z}{\partial x},$$

a więc:

$$\frac{\cos\xi}{\cos\zeta} = -\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Podobnież znaleźlibyśmy:

$$\frac{\cos\eta}{\cos\zeta} = -\frac{\partial z}{\partial y};$$

tym sposobem będzie:

$$q = \delta_r\,\delta'_s \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

a więc pole powierzchni S określi się za pomocą wzoru:

$$S = \lim \sum_r \sum_s \delta_r \delta'_s \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Na mocy określenia całki podwójnej będzie:

$$S = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Co się tyczy granic całkowania, to dość powtórzyć takież same rozważania, jakie uczyniliśmy w swoim czasie o granicach całek podwójnych.

Ponieważ przyjmujemy, że powierzchnia jest ciągła i że płaszczyzna styczna porusza się sposobem ciągłym po całej uważanej części powierzchni, przeto funkcya $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ będzie funkcyą ciągłą zmiennych zmiennych x, y, a stąd wynika, że całka podwójna zawsze istnieje. Okazaliśmy więc nietylko istnienie granicy sumy, t. j. pola powierzchni zgodnie z danem określeniem, lecz znaleźliśmy zarazem wzór, za pomocą którego można to pole obliczać.

---

§ 5.

Powierzchnie obrotowe.

W przypadku powierzchni obrotowych łatwo wzór powyższy sprowadzić do całki pojedyńczej, gdyż jedno z dwu całkowań daje się wtedy wykonać.

Wyobraźmy sobie na płaszczyznie zx krzywą, której równaniem jest $z = \varphi(x')$; krzywa ta, obracając się około osi z, tworzy powierzchnię obrotową. Podczas obrotu punkt P pozostawać będzie w odległości stałej od osi z (tą odległością będzie zawsze x') i w jednakowej wysokości nad płaszczyzną xy,

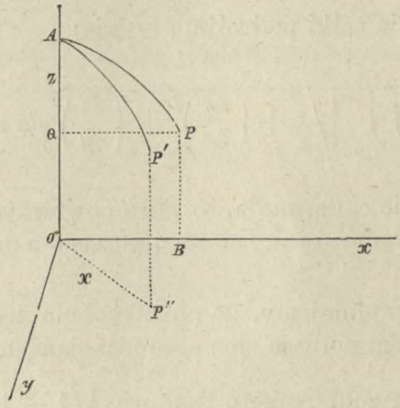

Fig. 13.

w ten sposób, że spółrzędna z punktu P w każdem położeniu będzie ta sama, co spółrzędna z punktu P płaszczyzny xz. Wielkość zaś x' będzie w każdem położeniu punktu P równą $\sqrt{x^2+y^2}$, gdzie x, y są spółrzędnemi punktu P w przestrzeni. Aby więc mieć równanie powierzchni, dość w równaniu krzywej położyć $x' = \sqrt{x^2+y^2}$ i będzie:

$$z = \varphi\,(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Pochodne cząstkowe zmiennej z względem zmiennych x, y są:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'\,(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'\,(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

skąd:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \varphi'^2\,(\sqrt{x^2+y^2}),$$

a więc powierzchnia S ma wartość:

$$S = \int\int \sqrt{1 + \varphi'^2 (\sqrt{x^2 + y^2})}\, dx\, dy\,.$$

Wyobraźmy sobie, że gałęzią krzywej płaskiej, obracającej się około osi z, jest AP i że odcięta punktu P równa się r; wtedy konturem powierzchni będzie koło, opisane przez punkt P, którego rzutem na płaszczyznę xy jest koło o promieniu r. Ponieważ całkowanie ma się rozciągać tak, aby x, y przebiegły całą ćwierć koła, zawartego pomiędzy osiami x, y, powinniśmy więc całkować względem y od $y = 0$ do $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, a względem x od $x = 0$ do $x = r$. W całce względem y przyjmijmy za zmienną niezależną x' zamiast y, kładąc $x^2 + y^2 = x'^2$, wtedy funkcyą do całkowania będzie $\sqrt{1 + \varphi'^2 (x')}$ i aby przekształcić całkę dość pomnożyć tę funkcyę przez pochodnę dawnej zmiennej y, względem nowej x', t. j. przez $\frac{dy}{dx'} = \frac{x'}{y} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 - x^2}}$.

Otrzymujemy tedy całkę:

$$\int x' \sqrt{1 + \varphi'^2 (x')}\, dx' \int \frac{dx}{\sqrt{x'^2 - x^2}}\,,$$

i te dwa całkowania należy rozciągnąć tak, aby objąć wszystkie punkty ćwiartki koła o promieniu r. Całkowanie względem x rozciągniemy od $x = 0$ do $x = x'$, całkowanie względem x' od $x' = 0$ do $x' = r$. Lecz:

$$\int_0^{x'} \frac{dx}{\sqrt{x'^2 - x^2}} = \left[\text{arc sin}\ \frac{x}{x'}\right]_0^{x'} = \frac{\pi}{2}\,,$$

przeto całka podwójna sprowadza się do pojedyńczej:

$$\frac{\pi}{2} \int_0^r x' \sqrt{1 + \varphi'^2 (x')}\, dx'\,.$$

Jeżeli chcemy mieć wielkość całej powierzchni obrotowej około A, dość poprzedni rezultat pomnożyć przez 4 i będzie:

$$S = 2\pi \int_0^r x' \sqrt{1 + \varphi'^2(x')}\, dx' .$$

A więc w przypadku powierzchni obrotowych całkę podwójną można sprowadzić do pojedyńczej.

Można pokazać, że $\sqrt{1 + \varphi'^2(x')}$ jest odwrotnością dostawy kąta, który styczna do krzywej tworzącej tworzy z osią x. Istotnie styczną tego kąta jest $\frac{dz}{dx'} = \varphi'(x')$, zaś $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}}$, skąd $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2(x')}}$.

---

§ 6.

Pasmo kuliste.

Znajdźmy powierzchnię pasma kulistego, zawartego pomiędzy płaszczyzną styczną do kuli w punkcie A a płaszczyzną do niej równoległą.

Krzywą tworzącą na płaszczyźnie xz jest tu ćwierć okręgu o promieniu R, gdzie R jest promieniem kuli. Niechaj B będzie punktem, w którym płaszczyzna równoległa do płaszczyzny stycznej przecina ten okrąg, A' zaś punktem, w którym taż płaszczyzna przecina oś z.

Połóżmy $BA' = r$ i zastosujmy wzory poprzednie. Będzie:

$$z = \varphi(x') = \sqrt{R^2 - x'^2},$$

a stąd:

$$\varphi'(x') = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x'^2}}\,; \quad \sqrt{1 + \varphi'^2(x')} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,;$$

$$\int_0^r \frac{Rx'}{\sqrt{R^2 - x'^2}}\, dx' = \left[-R\sqrt{R^2 - x'^2}\right]_0^r = -R\sqrt{R^2 - r^2} + R^2.$$

Pole pasma wyniesie:

$$2\pi R\,(R-\sqrt{R^2-x^2}).$$

Jeżeli chcemy mieć całą półkulę, kładziemy $x=R$ i znajdujemy $2\pi R^2$; jest to wynik znany z geometryi elementarnej.

---

§ 7.

Powierzchnia elipsoidy obrotowej.

Na płaszczyznie xz weźmy elipsę AB, obracającą się około osi wielkiej a; niechaj jej równaniem będzie $\frac{z^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$.

Z tego równania mamy:

$$\sqrt{1+\varphi'^2(x')}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}=\frac{1}{b^2z}\sqrt{b^4z^2+a^4x^2}$$

$$=\frac{1}{bz}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)\,z^2}\,,$$

lub po wprowadzeniu mimośrodu $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$:

$$\sqrt{1+\varphi'^2(x')}=\frac{a}{bz}\sqrt{a^2-e^2z^2}\,.$$

Stąd:

$$S=2\pi\int\frac{b}{a}\,\frac{x'}{z}\sqrt{a^2-e^2z^2}\,dx'\,.$$

Uskutecznijmy zamianę zmiennych, biorąc za zmienną niezależną z zamiast x'; powinniśmy tedy funkcyę podcałkową pomnożyć przez $\frac{dx'}{dz}=-\frac{b^2z}{a^2x'}$. Bez względu na znak, znajdziemy:

$$S = 2\pi \int \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2 z^2}\, dz .$$

Lecz wiemy, że:

$$\int \sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{t}{2} \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} t ,$$

skąd:

$$\int \sqrt{a^2 - e^2 z^2}\, dz = \frac{z}{2} \sqrt{a^2 - e^2 z^2} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{e} \operatorname{arc\,sin} \frac{e}{a} z ,$$

a całkując pomiędzy granicami 0 i z:

$$S = \pi \frac{b}{a} \left[z \sqrt{a^2 - e^2 z^2} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{e} \operatorname{arc\,sin} \frac{e}{a} z \right] .$$

Dla $z = a$ otrzymujemy powierzchnię połowy elipsoidy, t. j.:

$$\pi b^2 + \frac{\pi a b}{e} \operatorname{arc\,sin} e .$$

Dla $e = 0$ jest $a = b = R$, a stąd $2\pi R^2$, t. j. wyrażenie powierzchni półkuli.

---

§ 8.

Objętości ograniczone powierzchniami.

Do objętości, zamkniętych powierzchniami, można zastosować rozważania, podobne do tych, jakie stosowaliśmy do pól krzywych płaskich.

Wyobraźmy sobie część powierzchni z zamkniętym konturem, którego rzutem na płaszczyznę xy jest krzywa zamknięta;

niechaj powierzchnia będzie taką, że prosta równoległa do osi z przecina ją w jednym tylko punkcie. Podobnie, jak w poprzednich paragrafach, wyobraźmy sobie pole krzywej zamkniętej, podzielone na prostokąty cząstkowe $\delta_r\ \delta'_s$ i na tych prostokątach zbudujmy prostopadłościany. Te prostopadłościany podzielą powierzchnię na cząstki; w każdej z tych cząstek weźmy punkt i poprowadźmy przezeń płaszczyznę równoległą do płaszczyzny xy. Ta płaszczyzna zamknie prostopadłościan, tworząc jego podstawę górną. Granica sumy tych prostopadłościanów nazywa się objętością, zawartą pomiędzy powierzchnią daną a płaszczyzną xy.

Jeżeli $z = f(x, y)$ jest równaniem powierzchni, to objętość prostopadłościanu cząstkowego będzie $\delta_r\ \delta'_s\ f(x, y)$, gdzie wartość $f(x, y)$ oblicza się dla punktu, znajdującego się wewnątrz prostokąta $\delta_r\ \delta'_s$. Szukana objętość wyraża się przez:

$$V = \lim \Sigma\ \delta_r\ \delta'_s\ f(x, y),$$

lub:

$$V = \int\int f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Wyobraźmy sobie powierzchnię zamkniętą i zobaczmy, w jaki sposób obliczyć można objętość w niej zawartą. W tym celu zastosujemy dwa razy metodę poprzednią sposobem następującym: Na powierzchni danej opiszmy walec prosty o tworzących równoległych do osi z. Walec ten dotknie powierzchni według pewnej krzywej, która podzieli powierzchnię na dwie części: wyższą i niższą. Obliczamy po kolei objętość, zawartą pomiędzy każdą z tych części a płaszczyzną xy; odjąwszy jedną objętość od drugiej, znajdziemy objętość szukaną. Ponieważ obie części powierzchni mają kontur wspólny, którym jest krzywa styczności walca i powierzchni, przeto całkowania względem zmiennych x, y uskuteczniają się w obu razach pomiędzy temi samemi granicami, gdyż w obu razach odnoszą się do tego samego pola płaskiego. Tylko że w pierwszym razie funkcya

$f(x, y)$ ma inne wartości niż w drugim, w założeniu, że powierzchnia jest zamknięta. Te wartości znajdujemy, rozwiązując równanie powierzchni względem z; mamy wtedy funkcyę $z = f(x, y)$, która powinna być funkcyą o dwu wartościach $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, ponieważ założyliśmy, że prosta przecina powierzchnię w dwu punktach. Obie wartości występować winny w całkowaniu i szukana objętość będzie:

$$V = \int\int [f_1(x, y) - f_2(x, y)]\, dx\, dy,$$

a ponieważ:

$$\int_{f_2(x,y)}^{f_1(x,y)} dz = f_1(x, y) - f_2(x, y),$$

przeto możemy także napisać:

$$V = \int\int\int dx\, dy\, dz,$$

gdzie całkowanie względem z wykonać należy pomiędzy wartościami f_1, f_2 jakie ma z, a które otrzymujemy, rozwiązując równanie powierzchni względem z. Całkowanie względem y wykonywa się pomiędzy dwiema granicami, które otrzymujemy, rozwiązując względem y równanie krzywej płaskiej, będącej przecięciem płaszczyzny xy z walcem opisanym na powierzchni. Te granice są funkcyami zmiennej x. Całkowanie względem x uskutecznia się pomiędzy granicami stałemi, które są odciętemi punktów styczności stycznych do poprzedniej krzywej płaskiej, równoległych do osi y.

Aby módz stosować tę metodę w rozmaitych przypadkach specyalnych, trzeba tylko umieć znaleść krzywą płaską, będącą rzutem konturu powierzchni.

Widzieliśmy w poprzedzającym paragrafie, że gdy ξ, η, ζ są kątami kierunkowemi prostopadłej do płaszczyzny stycznej w punkcie x, y, z, to:

$$\frac{\cos\xi}{\cos\zeta} = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\cos\eta}{\cos\zeta} = -\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Jeżeli równaniem powierzchni jest $F(x, y, z) = 0$, to:

$$\frac{\cos\xi}{\cos\zeta} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\cos\eta}{\cos\zeta} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

skąd:

$$\cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Jeżeli płaszczyzna styczna jest równoległa do osi z, wtedy $\cos\zeta = 0$, a stąd dla punktu styczności być powinno $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$. To równanie przedstawia nową powierzchnię, która przecina daną według krzywej styczności walca opisanego; rugując więc z z równań $F(x, y, z) = 0$ i $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, otrzymamy związek pomiędzy zmiennemi x, y, który można uważać za równanie walca opisanego, albo — gdy uważamy go tylko w płaszczyznie xy — za równanie podstawy walca; będzie to równanie szukane krzywej.

---

§ 9.

Objętość bryły obrotowej.

Obliczanie objętości sprowadza się, jak widzieliśmy, do obliczania całki podwójnej. Wszakże gdy idzie o objętość, zamkniętą w powierzchni obrotowej, to można, jak to zaraz okażemy, wykonać jedno całkowanie, nie znając nawet równania powierzchni; możemy tedy sprowadzić rachunek do obliczenia całki pojedyńczej, która zależy już od znajomości krzywej tworzącej powierzchni. Jest to fakt podobny do rozważanego przy obliczaniu pola powierzchni.

Zachowajmy oznaczenia, stosowane w paragrafach poprzedzających. Niechaj $z = \varphi\,(\sqrt{x^2+y^2})$ będzie równaniem powierzchni obrotowej; objętość dana będzie przez całkę:

$$\int\!\!\int \varphi\,(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy.$$

Połóżmy $x^2 + y^2 = x'^2$ i przekształćmy całkę, wprowadzając zmienną x' zamiast y. Będzie:

$$\int\!\!\int \varphi\,(x')\,\frac{x'}{\sqrt{x'^2 - x^2}}\,dx\,dx';$$

jeżeli całkowanie jak w przypadku powierzchni ma się rozciągnąć na ćwierć koła o promieniu r, musimy przyjąć granice całkowania $x = 0$ do $x = x'$ dla x, oraz $x = 0$ i $x' = r$ dla x'. Wykonawszy całkowanie względem x, otrzymujemy $\frac{\pi}{2}$, pozostaje przeto:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^r x'\,\varphi\,(x')\,dx'.$$

Ten wzór przedstawia objętość bryły, utworzonej obrotem krzywej $APBO$ (fig. 13) na ćwierć okręgu koła około osi z; mnożąc przez 4, otrzymujemy całkowitą objętość bryły obrotowej:

$$V = 2\pi\int_0^r x'\,\varphi\,(x')\,dx'.$$

Jeżeli chcemy mieć objętość, utworzoną obrotem figury APQ, odejmujemy objętość walca, utworzonego obrotem figury $QPBO$, t. j. $\pi r^2 . PB$ lub $\pi r^2 \varphi(r)$. Całkując przez części, mamy:

$$2\pi \int x' \varphi(x')\, dx' = \pi x'^2 \varphi(x') - \pi \int x'^2 \varphi'(x')\, dx',$$

a stąd:

$$2\pi \int_0^r x' \varphi(x')\, dx' = \pi r^2 \varphi(r) - \pi \int_0^r x'^2 \varphi'(x')\, dx',$$

a więc różnica dwu objętości jest, bez względu na znak, równa:

$$V_1 = \pi \int_0^r x'^2 \varphi'(x')\, dx'.$$

Zmieniając tu zmienne, t. j. wprowadzając jako zmienną niezależną $z = \varphi(x')$, a więc mnożąc funkcyę podcałkową przez $\dfrac{dx'}{dz} = \dfrac{1}{\varphi'(x')}$, znajdujemy:

$$V_1 = \pi \int_{z_2}^{z_1} x'^2\, dz,$$

gdzie z_2 i z_1 są rzędne punktów skrajnych A, P krzywej tworzącej, t. j. są długościami OA, BP.

---

§ 10.

Objętość elipsojdy. Bryła utworzona obrotem cyklojdy.

Niechaj będzie elipsojda:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Winniśmy obliczyć całkę potrójną:

$$\int\int\int dx\, dy\, dz\,.$$

Całkowanie względem z należy uskutecznić pomiędzy granicami $-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, $+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, tak, że pozostanie całka podwójna:

$$2c\int dx\int dy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,.$$

Zbadajmy, jakie będą granice całkowania względem y. Zauważmy, że rzutem powierzchni na płaszczyznę xy jest w tym przypadku przecięcie powierzchni z tą płaszczyzną, t. j. krzywa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; stąd wynika, że granicami całkowania względem y będą $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Stosując wzór:

$$\int dt\,\sqrt{1-t^2}=\frac{1}{2}\,t\,\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\,\text{arc sin}\,t\,,$$

znajdziemy:

$$\int dy\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{1}{2}\,y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

$$+\frac{b}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\text{arc sin}\,\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\,.$$

a całkując w powyższych granicach:

$$\frac{1}{2}\pi b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

tak, że pozostaje całka:

$$\pi bc\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx\,,$$

z której otrzymujemy wreszcie na szukaną objętość: $\frac{4}{3}\pi abc$.

Jeżeli $a = b = c = r$, znajdujemy znane wyrażenie $\frac{4}{3}\pi r^3$ na objętość kuli.

Niechąj będzie cyklojda OA, obracająca się około stycznej OF w wierzchołku. Niech OEB będzie kołem tworzącem cyklojdy. Dla znalezienia objętości, ograniczonej powierzchnią,

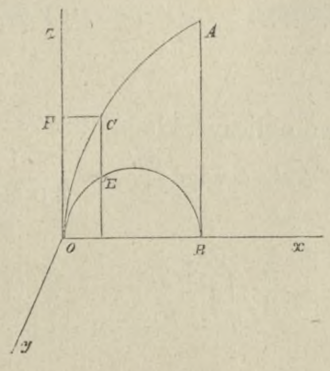

Fig. 14.

utworzoną obrotem cyklojdy, należy obliczyć całkę $\pi\int x'^2\,dz$, zawartą w granicach od $z = 0$ do $z = z$.

Weźmy x' za zmienną niezależną; ponieważ $\frac{dz}{dx'}$ jest równe, jak wiadomo $\sqrt{\frac{2r-x'}{x'}}$, przeto otrzymujemy:

$$\pi \int_0^{x'} x' \sqrt{2rx' - x'^2}\, dx'$$

$$= \pi r \int_0^{x'} \sqrt{2rx' - x'^2}\, dx' - \pi \int_0^{x'} (r-x') \sqrt{2rx' - x'^2}\, dx'.$$

Gdybyśmy chcieli obliczyć pole płaskie OED, zawarte w kole, musielibyśmy obliczyć całkę $\int_0^{x'} \sqrt{2rx' - x'^2}\, dx'$, a więc możemy napisać, że szukana objętość:

$$= \pi r \,.\, \text{odcin. } OED - \pi \int_0^{x'} (r-x') \sqrt{2rx' - x'^2}\, dx'.$$

Ostatnią całkę łatwo obliczyć, kładąc $2rx' - x'^2 = t$; albowiem wtedy $\frac{dt}{dx'} = 2r - 2x'$, a więc $\frac{dx'}{dt} = \frac{1}{2(r-x')}$; będzie zatem:

$$-\frac{\pi}{2} \int_0^t t^{\frac{1}{2}}\, dt = -\frac{\pi}{3} t^{\frac{3}{2}},$$

tak, że otrzymujemy ostatecznie:

$$\pi r \,.\, \text{odcin. } OED - \frac{\pi}{3} (2rx' - x'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Jeżeli chcemy obliczyć objętość, zamkniętą przez powierzchnię, utworzoną obrotem połowy cyklojdy OCA, należy uczynić $x' = OB = 2r$, wtedy odcinek OED staje się półkolem $= \frac{\pi r^2}{2}$ i otrzymujemy ostatecznie $\frac{1}{2} \pi^2 r^3$.

ROZDZIAŁ VII.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE.

---

§ 1.

Rozważania i określenia zasadnicze.

Dotąd zajmowaliśmy się pytaniem, jak, mając pochodną funkcyi, znaleść samą funkcyę? Obecnie stawiamy zagadnienie ogólniejsze. Wyobraźmy sobie funkcyę y zmiennej x i utwórzmy jej pochodne rzędu pierwszego, drugiego i t. d., aż do pochodnej rzędu n-go, które oznaczmy przez $y', y'', \ldots, y^{(n)}$; niechaj ta funkcya i jej pochodne będą nieznane, lecz za to znamy związek pomiędzy $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. Pytamy, czy mając ten związek, możemy znaleść funkcyę y?

Związek taki nazywa się r ó w n a n i e m r ó ż n i c z k o w e m, a zagadnienie przez nas postawione nazywa się c a ł k o w a n i e m r ó w n a n i a r ó ż n i c z k o w e g o.

Ustalimy najprzód zasadnicze określenia rozmaitych gatunków równań różniczkowych, jakie można pomyśleć. Przedewszystkiem można wyobrazić sobie, że funkcya szukana jest funkcyą jednej zmiennej albo wielu zmiennych niezależnych, a stąd związek dany może być związkiem pomiędzy funkcyą, zmienną i pochodnemi funkcyi względem tej jednej zmiennej albo też może być związkiem pomiędzy funkcyą, zmiennemi i pochodnemi cząstkowemi funkcyi względem różnych zmiennych. Mamy więc dwie kategorye równań różniczkowych: kategoryę pierwszą stanowią równania różniczkowe zwyczajne, kategoryę drugą — równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych. W jednym i drugim przypadku rzędem równania nazywamy rząd pochodnej najwyższego rzędu w równaniu zachodzącej.

Można wyobrazić sobie, że zamiast jednego związku pomiędzy zmienną, funkcyą i jej pochodnemi, takich związków jest więcej; te związki nazywają się jednoczesnemi i otrzymujemy wtedy układ równań różniczkowych.

Zanim przejdziemy do zagadnienia całkowania równań różniczkowych, zajmijmy się badaniem wstępnem, t. j. zagadnieniem, odnoszącem się do sposobu, w jaki można zbudować równanie różniczkowe, mając daną samą funkcyę. Po rozstrzygnięciu tego pytania łatwiej nam będzie próbować rozwiązania zagadnienia odwrotnego.

Niechaj y będzie daną funkcyą zmiennej x; utwórzmy jej pierwszą pochodną y'. Jeżeli funkcya dana zawiera pewien parametr c, to i pochodna będzie go wogóle zawierała; wyrugowawszy ten parametr pomiędzy funkcyą i jej pochodną, otrzymamy oczywiście związek pomiędzy y i y', który będzie równaniem różniczkowem. Całką tego równania będzie funkcya dana y; lecz ponieważ c może mieć wartość dowolną, więc przy każdej wartości na c (która jest owym wyrugowanym parametrem) funkcya y czyni zadość równaniu różniczkowemu. Otrzymujemy więc w istocie nie jednę funkcyę, lecz nieskończenie wiele funkcyj, lub, właściwiej mówiąc, otrzymujemy funkcyę, zawierającą parametr dowolny. Równanie różniczkowe, tak utworzone, jest równaniem różniczkowem rzędu 1-go.

Jest rzeczą jasną, że za pomocą podobnych rozważań można dojść do równania różniczkowego rzędu n-go. Dość przyjąć w tym celu, że funkcya dana zawiera n stałych $c_1, c_2, \ldots, c_n$;

że tworzymy n pierwszych pochodnych funkcyj; że pomiędzy niemi i funkcyą daną rugujemy n stałych. Otrzymujemy wtedy równanie, zawierające w ogólności $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ i będące równaniem różniczkowem rzędu n-go. Z takiej konstrukcyi równania różniczkowego widać, że funkcya dana, która będzie jego całką, ma tę własność, że gdy utworzymy jej pochodne aż do rzędu n-go włącznie i wartości $y, y', \ldots, y^{(n)}$, w ten sposób otrzymane, podstawimy w równaniu różniczkowem, otrzymamy związek tożsamościowy, bez względu na wartości zmiennej x, oraz wartości stałych $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Rzeczone rozwiązanie równania różniczkowego z n stałemi dowolnemi nazywamy całką ogólną. Nasuwa się tedy odrazu pytanie, czy każde dane równanie posiada zawsze całkę ogólną. Można dowieść, że w rzeczy samej każde równanie różniczkowe posiada całkę ogólną; lecz nie możemy tu zająć się tym dowodem.

Jeżeli wszystkim lub niektórym stałym nadamy wartości szczególne, otrzymamy wtedy rozwiązania równania różniczkowego, nazwane całkami szczególnemi. Takie całki nie zawierają n stałych dowolnych, lecz albo mniej niż n, albo żadnej. Każdą z tych całek można otrzymać zawsze z całki ogólnej; wszakże odwrotnie z całki szczególnej można otrzymać ogólną tylko w pewnych przypadkach specyalnych.

Zbadajmy dokładnie, jakie są cechy charakterystyczne całki ogólnej. Każde rozwiązanie równania różniczkowego powinno być zawsze taką funkcyą y zmiennej x, że otrzymawszy z niej $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ i podstawiwszy wraz z y w danem równaniu różniczkowem, otrzymamy wyrażenie tożsamościowo się spełniające dla każdej wartości x. Jest to własność wspólna wszystkim gatunkom całek; lecz pytamy, co prócz tego spełnić się jeszcze musi, abyśmy całkę mogli nazwać ogólną?

Powiedzieliśmy już, że całka ogólna powinna zawierać n stałych dowolnych; pozostaje nam określić bliżej charakter istotny tych stałych. Otóż powiadamy, że powinny być one zawarte w funkcyi w pewien sposób specyalny, mianowicie taki:

aby po utworzeniu n kolejnych pochodnych funkcyi y, można było wyrugować te stałe pomiędzy $n+1$ otrzymanemi równaniami. Wtedy i tylko wtedy możemy twierdzić, że stałe są niezależnemi od siebie i że ich jest właśnie n. Gdy zdarzy się, że rugując pewną liczbę stałych, rugujemy już przez to samo inne, to wtedy pozornie tylko jest n stałych dowolnych, a w rzeczy samej jest ich mniej: całka nie jest już ogólną lecz szczególną.

Podaną własność można wyrazić jeszcze tak: z n pierwszych równań, t. j. z równania, wyrażającego funkcyę daną, oraz z równań, wyrażających n—1 pierwszych pochodnych, można otrzymać wartości n stałych dowolnych $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Istotnie, jest jasnem, że gdy to da się uskutecznić, wtedy podstawiając znalezione wartości stałych w równaniu, wyrażającem pochodną n-tą funkcyi y, otrzymamy związek z pewnością nietożsamościowy, który będzie danem równaniem różniczkowem. Ten związek nie będzie tożsamościowym dlatego, że wyraz, zawierający $y^{(n)}$ nie może znieść się z żadnym innym wyrazem, bo $c_1, c_2, \ldots, c_n$ są wyrażone tylko przez $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, a nie przez $y^{(n)}$.

Jeżeli wartości stałych dowolnych są wyrażone w funkcyi ilości $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, wtedy, gdy zmiennej x nadamy jakąkolwiek wartość, zawartą w pewnym obszarze, a ilościom $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ wartości dowolnie ustalone, powinniśmy stąd módz otrzymać wartości oznaczone na stałe $c_1, c_2, , \ldots, c_n$. Można przeto powiedzieć, że stałe $c_1, c_2, \ldots, c_n$ powinny zachodzić w całkach ogólnych w ten sposób, aby przynajmniej dla wartości zmiennej x, zawartych w pewnym obszarze, można było nadać im takie wartości, by ilości $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ przybrały wartości z góry i dowolnie dane.

Prócz tych dwu gatunków całek, to jest prócz całek ogólnych i szczególnych, istnieje jeszcze inny gatunek t. zw. **całek osobliwych**, o których później będzie mowa.

To, co wyżej powiedziano, odnosi się do równań zwyczajnych. O całkach równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych mówić będziemy w innym paragrafie.

Przechodzimy teraz do zagadnienia: **mając równanie różniczkowe, znaleść jego całkę.** Nie możemy tu, jak zwykle, podać prawideł ogólnych, lecz musimy ograniczyć się na ustaleniu pewnych typów równań różniczkowych i do badania ich osobno, podobnie, jak to uczyniliśmy wyżej w zagadnieniu o całkowaniu funkcyj (kwadratury).

Zagadnienie o całkowaniu równań różniczkowych będziemy uważali zawsze za rozwiązane, o ile potrafimy je sprowadzić do prostego całkowania, to jest do kwadratury. Może się zdarzyć, że taka kwadratura nie jest praktycznie wykonalną, lecz wtedy trudność zadania tkwi już w innej dziedzinie badań. Wogóle uważamy zagadnienie w rachunku nieskończonościowym za rozwiązane, ilekroć potrafimy je przekształcić w ten sposób, aby rozwiązanie jego zależało od rozwiązania zagadnienia algebraicznego, np. od rozwiązania równania algebraicznego.

Zanim przejdziemy do badania różnych typów równań różniczkowych, pokażemy, jak one występują w rozwiązaniu pewnego zagadnienia geometrycznego.

---

§ 2.

Przykład zagadnienia geometrycznego, którego rozwiązanie prowadzi do równania różniczkowego,

Przy stosowaniu analizy do wielu zagadnień geometryi, w których idzie np. o znalezienie równania krzywej płaskiej, majacej pewne własności specyalne, może się zdarzyć, że dochodzimy bezpośrednio nie do prostego związku analitycznego między spółrzędnemi x, y lecz do związku pomiędzy x, y i pochodnemi funkcyi y względem x, t. j. do równania różniczkowego. Jest jasnem, że rozwiązanie zadania sprowadza się wtedy do całkowania tego równania różniczkowego.

Wybierzmy przykład następujący. Mamy oznaczyć krzywą, której promień wodzący OP równa się odcinkowi OR na osi x, zawartemu między początkiem spółrzędnych a spodkiem stycznej PR.

Zauważmy; że $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$; z drugiej strony $\frac{PQ}{QR} = \frac{dy}{dx}$, skąd $\frac{y}{x + OR} = \frac{dy}{dx}$.

Ponieważ ma być $OP = OR$, przeto otrzymujemy związek:

$$\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{dy}{dx},$$

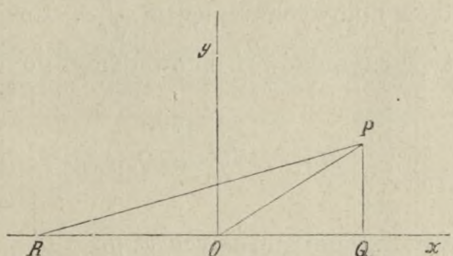

Fig. 15.

który jest równaniem różniczkowem rzędu 1-go.

W § 4 zobaczmy, jak się to równanie całkuje; jako rozwiązanie znajdziemy pęk parabol. Otrzymujemy tym sposobem twierdzenie, że parabola jest właśnie krzywą, posiadającą wyżej rzeczoną własność.

§ 3.

Równania różniczkowe 1-go rzędu. Równania, w których można rozdzielić zmienne.

Podamy niektóre metody, za pomocą których można całkować pewne typy specyalne równań różniczkowych. Zaczynamy od równań rzędu 1-go.

Niechaj będzie równanie:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

niechaj $\frac{dy}{dx}$ występuje w tem równaniu algebraicznie sposobem wymiernym i całkowitym. Równanie to można wtedy rozwiązać względem $\frac{dy}{dx}$ i otrzymać pierwszą stronę jego pod postacią n czynników liniowych względem $\frac{dy}{dx}$. Rozpatrzmy najprzód jeden z tych czynników i sprowadźmy go do równania typu:

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0, \tag{2}$$

gdzie M i N są funkcyami zmiennych x, y.

Jeden z pierwszych przypadków, w których można bezpośrednio zcałkować równanie (2), jest ten, gdy funkcye M i N są odpowiednio funkcyami, pierwsza tylko zmiennej x, druga tylko zmiennej y. Wtedy mamy:

$$Mdx + Ndy = 0,$$

a całkując:

$$\int Mdx + \int Ndy = C.$$

Mówimy w tym przypadku, że zmienne są **r o z d z i e l o n e**. Niechaj będzie naprzykład równanie:

$$xy\,dx - (a-x)(y-b)\,dy = 0.$$

Dzieląc obie strony przez $y\,(a-x)$, otrzymujemy:

$$\frac{x}{a-x}\,dx - \frac{y-b}{y}\,dy = 0,$$

a całkując:

$$-x - a\log(x-a) - y + b\log y = C.$$

Jest tu dogodnem stałą dowolną C przedstawić pod postacią logarytmu, t. j. napisać $\log C$ zamiast C; przechodząc następnie od logarytmów do liczb, otrzymujemy:

$$y^b\,(x-a)^{-a} = Ce^{x+y}.$$

Łatwo sprawdzić, że różniczkując to równanie względem x, a następnie rugując C pomiędzy otrzymanem równaniem i poprzedniem, dochodzimy do danego równania różniczkowego.

---

§ 4.

Równania różniczkowe jednorodne.

Niechaj w równaniu:

$$(1) \qquad Mdx + Ndy = 0,$$

M i N będą **f u n k c y a m i j e d n o r o d n e m i** jednego stopnia, albo inaczej mówiąc, niechaj będą takiemi funkcyami, że gdy w nich zamiast x, y położymy λx, λy, to funkcye M i N

przejdą na $\lambda^m M$, $\lambda^m N$. W tym przypadku istnieje ogólna metoda całkowania.

Wprowadźmy nową zmienną zależną z, określoną za pomocą równania $z = \frac{y}{x}$. Podzielmy obie strony równania (1) przez x^m, wtedy spółczynniki przy dx i dy zależeć będą tylko od stosunku $\frac{y}{x}$, tak że można będzie napisać:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0,$$

Z równania $\frac{y}{x} = z$ wynika $dy = x\,dz + z\,dx$, co podstawiając, znajdziemy:

$$\varphi(z)\,dx + \psi(z)(x\,dz + z\,dx) = 0,$$

lub:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(z)}{\varphi(z) + z\psi(z)}\,dz = 0,$$

gdzie zmienne są już rozdzielone; można więc całkować jak w przypadku poprzedzającym.

Równanie różniczkowe, podane w § 2, jest właśnie równaniem jednorodnem i może być całkowane tą metodą. Równanie to napisane w postaci:

$$y\,dx - (x + \sqrt{x^2 + y^2})\,dy = 0,$$

jest jednorodnem stopnia 1-go. Dzieląc przez y i kładąc $\frac{x}{y} = z$ mamy:

$$z\,dy + y\,dz - (z + \sqrt{1 + z^2})\,dy = 0\,.$$

Stąd:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dy}{y},$$

a całkując:

$$\log y = \log (z + \sqrt{1+z^2}) + \log C,$$

a więc:

$$y = (z + \sqrt{1+z^2})\, C.$$

Przywracając zmienną x, znajdujemy kolejno:

$$y^2 = C\,(x + \sqrt{x^2+y^2}); \quad (y^2 - Cx)^2 = C^2\,(x^2+y^2);$$

$$y^2\,(y^2 - 2\,Cx - C^2) = 0,$$

a wyłączając rozwiązanie $y = 0$, otrzymujemy jako rozwiązanie parabolę:

$$y^2 - 2\,Cx - C^2 = 0,$$

której ognisko przypada w początku spółrzędnych.

---

§ 5.

Równania liniowe 1-go rzędu.

Równanie postaci:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

gdzie P i Q są funkcyami samej zmiennej x, nazywa się równaniem liniowem; zawiera ono liniowo zmienną y i jej pochodną $\frac{dy}{dx}$.

Połóżmy $y = uv$, skąd $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, a dane równanie zamieni się na następujące:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Puv = Q,$$

$$u\frac{dv}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + Pu\right)v = Q.$$

Jednę z funkcyj u, v możemy wybrać dowolnie; wybierzmy więc u tak, aby było:

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0,$$

lub:

$$\frac{du}{u} = -Pdx.$$

Całkując, otrzymujemy:

$$\log u = -\int P\,dx;\quad u = e^{-\int P dx}.$$

Pozostaje: $u\frac{dv}{dx} = Q$, skąd:

$$v = \int Q\,e^{\int P dx}\,dx + C,$$

a więc ostatecznie:

$$y = e^{-\int P dx}\left[\int Q\,e^{\int P dx}\,dx + C\right].$$

Niechaj będzie np. równanie:

$$\frac{dy}{dx} + y = x^3.$$

Jest tu:

$$\int P dx = x,$$

$$\int Q e^{\int P dx} dx = \int x^3 e^x dx.$$

Do ostatniej całki stosujemy metodę całkowania przez części:

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx$$

$$= x^3 e - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6 \int e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x.$$

Jest tedy:

$$y = e^{-x} [x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C].$$

Istnieją typy równań różniczkowych, dające się bezpośrednio sprowadzić do przypadku równań liniowych.

Weźmy np. równanie:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n,$$

gdzie P i Q są funkcyami samej zmiennej x. Połóżmy $\frac{y^{1-n}}{1-n} = z$, skąd $y^{-n} dy = dz$; znajdziemy równanie:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n) Pz = Q,$$

które jest już liniowem.

Powiedzieliśmy wyżej, że gdy znamy całkę szczególną, to wogóle nie możemy z niej otrzymać całki ogólnej. Podamy tu typ równań, dla których to jest możliwem.

Niechaj będzie równanie:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + R.$$

Niechaj u będzie całką szczególną, t. j. niechaj będzie tożsamościowo:

$$\frac{du}{dx} + Pu = Qu^2 + R. \tag{1}$$

Połóżmy $y = u + v$, wtedy na mocy równania (1) będzie:

$$\frac{dv}{dx} + (P - 2Qu)\,v = Qv^2,$$

Jest to równanie typu poprzedzającego; możemy je całkować i otrzymamy z niego v ze stałą dowolną.

Naprzykład równanie:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + (1 + Px - Qx^2),$$

ma całkę szczególną $y = x$. Stosując wskazaną metodę, będziemy mieli do zcałkowania równanie:

$$\frac{dv}{dx} + (P - 2Qx)\,v = Qv^2.$$

§ 6.

Równania różniczkowe rzędu 1-go, nierozwiązalne względem $\frac{dy}{dx}$.

Jeżeli rozwiązanie równania różniczkowego względem $\frac{dy}{dx}$ nie da się praktycznie wykonać, wtedy szukamy innych metod, prowadzących do celu i nie wymagających tego rozwiązywania.

Jak zwykle, podajemy tu nie metody ogólne, lecz tylko metody specyalne dla rozmaitych przypadków:

1) Załóżmy, że równanie różniczkowe nie zawiera ani x, ani y, a tylko pochodną $\frac{dy}{dx}$. Wtedy redukcya równania dałaby $\frac{dy}{dx} = a =$ const., gdzie a jest nieznane. Lecz wiedząc, że jest to stała, możemy zcałkować poprzedni związek i otrzymujemy z niego $y = ax + c$, skąd $a = \frac{y - c}{x}$. Jeżeli w równaniu danem zamiast $\frac{dy}{dx}$ napiszemy tę wartość a, znajdziemy całkę ogólną.

2) Wyobraźmy sobie, że równanie różniczkowe nie zawiera zmiennej y; niechaj niem będzie:

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Jeżeli możemy rozwiązać to równanie względem x, to kładąc $\frac{dy}{dx} = p$, znajdziemy $x = \varphi(p)$, $\frac{dx}{dp} = \varphi'(p)$, a biorąc p za nową zmienną, będziemy mieli:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{1}{\varphi'(p)},$$

stąd:

$$\frac{dy}{dp} = p\,\varphi'(p),$$

a po zcałkowaniu:

$$y = \int p\,\varphi'(p)\,dp + C.$$

Dla znalezienia całki ogólnej dość wyrugować p pomiędzy tem równaniem a równaniem $x = \varphi(p)$.

Gdy mamy np. równanie:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - x = 0;$$

to będzie:

$$x = p + p^2,$$

$$y = \int p\,(2p+1)\,dp = \frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{6}C.$$

Rugując p z ostatnich dwu równań, znajdziemy całkę ogólną. Z pierwszego z nich jest $p^2 = x - p$, a więc:

$$y = \frac{2}{3}p\,(x-p) + \frac{1}{2}(x-p) + \frac{1}{6}C = \frac{2}{3}px - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}x$$

$$- \frac{2}{3}(x-p) + \frac{1}{6}C = \frac{2}{3}px + \frac{1}{6}p - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}C.$$

Rozwiązując względem p, mamy $p = \dfrac{6y + x - C}{1 + 4x}$, a podstawiając tę wartość w równaniu pierwszem, znajdujemy:

$$x = \left(\frac{6y + x - C}{1 + 4x}\right)^2 + \left(\frac{6y + x - C}{1 + 4x}\right).$$

3) Wyobraźmy sobie, że równanie dane nie zawiera zmiennej x, tylko zmienną y i że daje się rozwiązać względem y. Wtedy kładąc $\frac{dy}{dx} = p$, otrzymujemy równanie $y = f(p)$. Różniczkując je względem x, mamy:

$$\frac{dy}{dx} = f'(p)\frac{dp}{dx},$$

a więc:

$$p = f'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Z tego ostatatniego równania wynika:

$$x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + C.$$

Pozostaje tylko wyrugować p pomiędzy ostatniem równaniem a równaniem $y = f(p)$, aby otrzymać całkę ogólną.

Niechaj będzie np. równanie:

$$y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = a\frac{dy}{dx}.$$

Wprowadzając $\frac{dy}{dx} = p$ i rozwiązując względem y, znajdziemy $y = \frac{ap}{1+p^2}$ i następnie:

$$x = \int\left[\frac{adp}{p(1+p^2)} - \frac{2a\,p\,dp}{(1+p^2)^2}\right] + C.$$

$$= \frac{a}{1+p^2} + a\int\frac{dp}{p(1+p^2)} + C.$$

Lecz:

$$\int \frac{dp}{p(1+p^2)} = \int \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{1+p^2}\right) dp = \log p - \frac{1}{2} \log(1+p^2),$$

a więc:

$$x = \frac{a}{1+p^2} + a \log p - \frac{1}{2} a \log(1+p^2) + C.$$

Pozostaje tylko wyrugować p pomiędzy tem równaniem a związkiem $y = \frac{ap}{1+p^2}$.

4) Rozpatrzmy równanie różniczkowe typu:

$$y = x f\left(\frac{dy}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Kładąc $\frac{dy}{dx} = p$ i różniczkując względem x, znajdziemy:

$$p = f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx},$$

lub:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{xf'(p)}{f(p)-p} = -\frac{\varphi'(p)}{f(p)-p}.$$

Jest to równanie liniowe takie, jakie rozpatrywaliśmy w paragrafie poprzedzającym; całką jego jest:

$$x = e^{-\int \frac{f'(p)\,dp}{f(p)-p}} \left[-\int \frac{\varphi'(p)}{f(p)-p} e^{\int \frac{f'(p)}{f(p)-p} dp} dp + C\right].$$

Trzeba jeszcze wyrugować p z tego związku i z danego równania różniczkowego.

Należy jeszcze oddzielnie rozpatrzeć przypadek, w którym $f(p) = p$, bo wtedy funkcya pod znakiem całkowym staje się nieskończoną. W tym przypadku równanie dane ma postać:

$$y = xp + \varphi(p);$$

różniczkując względem x i redukując, mamy:

$$[x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0.$$

Tu przedstawiają się dwa przypadki; albo kładziemy $x + \varphi'(p) = 0$, albo $\frac{dp}{dx} = 0$. W drugim przypadku p jest ilością stałą, t. j. $p = C$, a rugując p pomiędzy tem równaniem i równaniem danem, otrzymujemy:

$$y = xC + \varphi(C).$$

W pierwszym przypadku jest $x = -\varphi'(p)$ i trzeba wyrugować p pomiędzy tem równaniem a danem. Wtedy otrzymana całka nie będzie zawierała stałej dowolnej i można przekonać się, że nie można tej całki otrzymać z całki ogólnej przez nadanie stałej wartości szczególnej. W samej rzeczy, ze związku $x = -\varphi'(p)$, otrzymujemy $p = \psi(x)$, a całka, o której mowa, będzie:

$$y = x\psi(x) + \varphi[\psi(x)].$$

Z całki ogólnej można ją otrzymać, kładąc za stałą C nie wartość szczególną, lecz pewną funkcyę zmiennej x. Taka całka nie należy przeto do rzędu całek szczególnych, jest to nowy gatunek całek, tak zwanych o s o b l i w y c h, o których mówimy w § 9-ym.

---

§ 7.

O czynniku całkującym.

Niechaj będzie równanie różniczkowe 1-go rzędu i 1-go stopnia, dane w postaci:

$$M\,dx + N\,dy = 0. \tag{1}$$

Jeżeli M jest funkcyą samej zmiennej x, N zaś funkcyą samej zmiennej y, wtedy oczywiście strona pierwsza tego równania jest różniczką zupełną. Prócz tego, strona pierwsza będzie różniczką zupełną, jeżeli spełnia się warunek:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ponieważ strona druga równania danego jest zerem, możemy więc zawsze zmienić postać równania, mnożąc stronę pierwszą przez czynnik jakikolwiek.

Pytamy teraz: czy można wogóle znaleść funkcyę zmiennych x, y taką, że po pomnożeniu przez nią, pierwsza strona równania staje się różniczką zupełną?

Jest jasnem, że gdy w jakikolwiek sposób dojdziemy do takiego czynnika, to wtedy całkowanie równania różniczkowego da się uskutecznić. Czynnik taki nazywa się c z y n n i k i e m c a ł k u j ą c y m. Okażemy: 1) że czynnik taki istnieje zawsze; 2) że czynników całkujących jest nieskończenie wiele; 3) że mając jeden z nich, możemy znaleść wszystkie inne.

Co do 1), to wiemy już, że zawsze istnieje całka ogólna równania różniczkowego. Wyobraźmy sobie taką całkę, rozwiązaną względem stałej C, to będziemy mieli wyrażenie typu:

$$\varphi\,(x, y) = C, \tag{2}$$

Jeżeli to jest całka ogólna danego równania (1), to różniczkując równanie (2) i rugując C pomiędzy (2) i pochodną jego, powinniśmy dojść do równania (1). Możemy też powiedzieć, że po wyrugowaniu C, wartość $\frac{dy}{dx}$ stąd otrzymana powinna zgadzać się z wartością $\frac{dy}{dx}$, otrzymaną z równania różniczkowego. Lecz jeżeli przy różniczkowaniu całki ogólnej stała C znika sama przez się, co właśnie zachodzi wtedy, gdy ta całka jest postaci (2), wtedy nie ma oczywiście potrzeby rugowania stałej C i równanie, które otrzymujemy różniczkując równanie (2), powinno dawać wprost wartość pochodnej $\frac{dy}{dx}$.

Z równania (2) mamy:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}},$$

a z równania różniczkowego danego:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N},$$

powinno zatem być tożsamościowo:

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}},$$

lub:

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{N}.$$

Jeżeli oznaczymy przez μ wartość wspólną obu stosunków, będzie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu N,$$

a stąd na podstawie równania (1):

$$0 = \mu M\, dx + \mu N\, dy = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy,$$

skąd widać, że pierwsza strona równania (1), po pomnożeniu przez μ, staje się różniczką zupełną funkcyi $\varphi(x, y)$. Znalazłszy funkcyę φ, dość napisać $\varphi = C$, aby mieć całkę ogólną.

Stąd okazuje się, że zawsze istnieje pewna funkcya μ, mająca własność czynnika całkującego.

Łatwo okazać, że przyjąwszy istnienie jednego takiego czynnika, można ich znaleść nieskończenie wiele. Istotnie, niechaj czynnik μ sprawia, iż $\mu(Mdx + Ndy)$ jest różniczką zupełną pewnej funkcyi φ; rozważmy wyrażenie $\mu f(\varphi)$, gdzie f jest symbolem funkcyi dowolnej. Mnożąc pierwszą stronę równania (1) przez $\mu f(\varphi)$, mamy:

$$f(\varphi)[\mu Mdx + \mu Ndy] = f(\varphi)\, d\varphi,$$

a więc otrzymujemy różniczkę zupełną wyrażenia $\int f(\varphi)\, d\varphi$; widzimy więc, że i $\mu f(\varphi)$ jest także czynnikiem całkującym.

Możemy wreszcie dowieść, że wszystkie czynniki całkujące zawierają się w formie $\mu f(\varphi)$. Niechaj μ i μ' będą dwa czynniki całkujące równania (1); wtedy wyrażenia:

$$\mu Mdx + \mu Ndy, \quad \mu' Mdx + \mu' Ndy$$

będą różniczkami zupełnemi dwu funkcyj φ, φ', t. j. równać się będą: $d\varphi$, $d\varphi'$. Otrzymujemy więc:

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{\mu}{\mu'}, \quad d\varphi' = \frac{\mu'}{\mu}\, d\varphi.$$

Funkcye φ, φ' zależą od x i y; rugując pomiędzy niemi zmienną x, możemy uważać φ' za funkcyę ilości φ i y. W takim razie różniczką zupełną funkcyi φ' będzie:

$$d\varphi' = \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial \varphi'}{\partial y}\, dy,$$

a porównywając to wyrażenie z poprzedzającem, znajdujemy $\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0$, co oznacza, że funkcya φ' nie będzie zawierała zmiennej y, gdy wyrugujemy x przy pomocy związku $\varphi(x, y) = \varphi$. Innemi słowy φ' będzie funkcyą samego tylko φ, a zatem i $\frac{\mu'}{\mu}$, jako pochodna funkcyi φ' względem φ będzie też funkcyą samego φ, co można wyrazić w ten sposób:

$$\frac{\mu'}{\mu} = f(\varphi),$$

stąd wynika:

$$\mu' = \mu f(\varphi),$$

co było do okazania.

Wypływa z powyższego, że **gdy są znane dwa czynniki całkujące, to iloraz ich, przyrównany do stałej dowolnej (w założeniu, że nie jest już sam przez się stałym), będzie całką ogólną.** Istotnie, stosunek ten przyrównany do stałej, daje $f(\varphi) = C$ i gdy $\varphi = \text{const.}$ jest całką ogólną, to i $f(\varphi) = C$ będzie też całką ogólną.

§ 8.

Równanie o pochodnych cząstkowych, któremu czynią zadość czynniki całkujące.

Łatwo znaleść równanie o pochodnych cząstkowych, któremu czynią zadość czynniki całkujące. W samej rzeczy, gdy $\mu Mdx + \mu Ndy$ ma być różniczką zupełną, wtedy być powinno (p. Rozdział V):

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

lub po rozwinięciu:

$$(1) \qquad M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Jest to równanie różniczkowe z nieznaną funkcyą μ, w którem występują pochodne cząstkowe tej funkcyi względem x i y. Całkowanie tego równania jest zagadnieniem wogóle bardziej złożonem niż całkowanie danego równania różniczkowego. Lecz w wielu przypadkach zadanie się upraszcza, jak to zaraz zobaczymy.

Przypadek I. Załóżmy, że $-\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ jest funkcyą $\psi(x)$ tylko zmiennej x, wtedy łatwo znaleść czynnik całkujący μ będący tylko funkcyą tej zmiennej.

W samej rzeczy, gdy położymy:

$$\mu = e^{\int \psi(x)\, dx},$$

lub:

$$\log \mu = \int \psi(x)\, dx,$$

wtedy będzie:

$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = \psi(x); \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0,$$

i równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych (1) będzie spełnionem.

Podobnie istnieje czynnik całkujący, będący funkcyą tylko zmiennej y, jeżeli wyrażenie $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ jest funkcyą tylko tej zmiennej.

Weźmy jako przykład równanie różniczkowe:

$$(x+y)\,dx+dy=0.$$

to:

$$M=x+y;\quad N=1;\quad \frac{\partial M}{\partial y}=1;\quad \frac{\partial N}{\partial x}=0;$$

a stąd $-\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=1$ można uważać za funkcyę tylko zmiennej x. Czynnikiem całkującym odpowiednim będzie $\mu=e^{\int dx}=e^x$. W samej rzeczy, mnożąc dane równanie różniczkowe przez e^x, mamy:

$$e^x(x+y)\,dx+e^x\,dy=d\,[e^x\,y+e^x\,x-e^x],$$

a więc całką ogólną danego równania będzie:

$$e^x(y+x-1)=C.$$

Przypadek 2). Załóżmy, że różnica $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ daje się przedstawić pod postacią $N\varphi(x)-M\psi(y)$; wtedy można okazać, że istnieje czynnik całkujący, będący iloczynem pewnej funkcyi samej zmiennej x przez funkcyę samej zmiennej y.

Istotnie, weźmy dwie funkcye:

$$X=e^{\int\varphi(x)\,dx},\quad Y=e^{\int\psi(y)\,dy},$$

wtedy iloczyn XY będzie czynnikiem całkującym; kładąc bowiem w równaniu (1) $\mu=XY$, będziemy mieli:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=Y\frac{dX}{dx}=XY\varphi(x);\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=X\frac{dY}{dy}=XY\psi(y),$$

a więc równanie (1) będzie spełnionem tożsamościowo.

Niechaj będzie np. równanie różniczkowe:

$$\left(\frac{x^2+2x-1}{y}+y\right)dx+2\,dy=0.$$

Mamy:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{x^2+2\,x-1-y^2}{y^2}=-\frac{1}{y}M+2=1\,.\,N-\frac{1}{y}\,.\,M,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=0,$$

możemy więc przyjąć: $\varphi(x)=1$, $\psi(y)=\dfrac{1}{y}$. Będzie $X=e^{\int dx}=e^x$, $Y=e^{\int\frac{dy}{y}}=y$, a więc czynnikiem całkującym jest $\mu=ye^x$, całką zaś ogólną równanie:

$$e^x(x^2+y^2-1)=C.$$

Przypadek 3) Niechaj funkcye M i N będą jednorodnemi tego samego stopnia; wtedy czynnikiem całkującym jest:

$$\mu=\frac{1}{Mx+Ny}.$$

W samej rzeczy, biorąc pochodne, mamy:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=-\frac{M+x\dfrac{\partial M}{\partial x}+y\dfrac{\partial N}{\partial x}}{(Mx+Ny)^2};$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=-\frac{N+x\dfrac{\partial M}{\partial y}+y\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(Mx+Ny)^2};$$

podstawiając te wartości w równaniu (1) i redukując, otrzymujemy:

$$x N \frac{\partial M}{\partial x} + y N \frac{\partial N}{\partial x} - x M \frac{\partial M}{\partial y} - y M \frac{\partial N}{\partial y}$$

$$= (Mx + Ny) \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Pamiętając o tem, że funkcye jednorodne M i N tego samego stopnia n, na mocy twierdzenia E u l e r a, czynią zadość związkom:

$$x \frac{\partial M}{\partial x} + y \frac{\partial M}{\partial y} = nM; \quad x \frac{\partial N}{\partial x} + y \frac{\partial N}{\partial y} = nN,$$

widzimy, że równanie powyższe spełnia się tożsamościowo.

Niechaj będzie np. równanie:

$$\frac{x+y}{y} dx + dy = 0 .$$

Czynnikiem całkującym będzie tu $\frac{1}{x+2y}$; mnożąc równanie przez ten czynnik, mamy:

$$\frac{x+y}{x(x+2y)} dx + \frac{1}{x+2y} dy = 0,$$

gdzie strona pierwsza jest różniczką zupełną wyrażenia $\frac{1}{2} \log x (x + 2y)$.

Jeżeli umiemy znaleść innym jakim sposobem czynnik całkujący μ równania różniczkowego jednorodnego, to wiedząc, że czynnikiem całkującym tego równania jest napewno $\frac{1}{Mx + Ny}$, możemy, przyrównywając iloraz ilości μ przez $\frac{1}{Mx + Ny}$ do stałej, o i l e n i e j e s t j u ż s a m p r z e z s i ę s t a ł y m, otrzymać całkę ogólną. Tą całką będzie zatem:

$$\mu (Mx + Ny) = C.$$

Gdy więc pierwsza strona równania różniczkowego jest już różniczką zupełną, możemy przyjąć, że $\mu = 1$, a wtedy całką ogólną będzie:

$$Mx + Ny = C,$$

o ile pierwsza strona tego związku nie jest już sama przez się ilością stałą.

Tak np. wiemy, że pierwsza strona równania różniczkowego:

$$\frac{x+y}{x(x+2y)}\,dx + \frac{1}{x+2y}\,dy = 0\,,$$

jest różniczką zupełną, wszakże $Mx + Ny$ jest już stałą 1. Przeciwnie dla równań:

$$y\,dx + x\,dy = 0,\ (x+y)\,dx + x\,dy = 0,$$

wyrażenie $Mx + Ny$ ma odpowiednio wartości: $2xy$, $x(x+2y)$. Stąd całką pierwszego równania będzie $2xy = C$, drugiego: $x(x+2y) = C$.

---

§ 9.

Całki osobliwe równań różniczkowych zwyczajnych.

Wspominaliśmy już w paragrafach poprzedzających o istnieniu innego gatunku całek równań różniczkowych, prócz całek ogólnych i szczególnych. O tym gatunku powiemy nieco szczegółowiej.

Niechaj będzie równanie różniczkowe $f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0$ i jego całka ogólna $\varphi(x,\ y,\ C) = 0$, gdzie C jest stałą dowolną. Niechaj $\psi(x,\ y) = 0$ będzie inną całką tegoż równania. Może się zdarzyć, że φ dla szczególnej wartości C staje się pewną funkcyą ψ; wtedy ψ jest całką szczególną. Lecz może się też zdarzyć, jak to teraz zobaczymy, że ψ nie daje się otrzymać z funkcyi φ przy żadnej szczególnej wartości stałej C; wtedy φ będzie całką innej natury, a mianowicie będzie całką osobliwą.

Jest jasnem, że gdy istnieje taka całka ψ, to ona powinna dać się otrzymać z funkcyi φ, gdy położymy za C już nie wartość stałą oznaczoną, lecz pewną funkcyę zmiennych x, y. Istotnie w tym celu wystarczy wziąć za C funkcyę, wynikającą ze związku:

$$\varphi(x, y, C) = \psi(x, y).$$

Okażemy, że można za stałą C w całce ogólnej wziąć taką funkcyę zmiennych x, y, aby otrzymane stąd wyrażenie czyniło zadość danemu równaniu różniczkowemu. Istotnie, jeżeli φ jest całką to, gdy z niej oznaczymy $\frac{dy}{dx}$, a następnie wyrugujemy C z równania na $\frac{dy}{dx}$ i ze związku $\varphi = 0$, powinniśmy otrzymać tę samą wartość $\frac{dy}{dx}$, jaką otrzymuje się z danego równania różniczkowego. Otóż pochodna $\frac{dy}{dx}$ z równania $\varphi = 0$ otrzymuje się za pomocą związku:

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Jeżeli zaś C ma być funkcyą zmiennych x, y, wtedy ilość $\frac{dy}{dx}$, pochodzącą ze związku $\varphi = 0$, otrzymuje się z równania:

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Związki (1) i (2) będą identycznemi, jeżeli:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Ponieważ ze związku $\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$ wynikałoby, że ilość C jast stałą, i powrócilibyśmy tym sposobem do całki ogólnej, należy więc przyjąć, że:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C}=0.$$

Jeżeli oznaczymy ilość C tak, aby czyniła zadość temu związkowi, wtedy może się zdarzyć, że natrafimy na całkę danego równania; będzie to właśnie całka osobliwa.

Niechaj będzie np. równanie:

$$dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

którego całką ogólną jest:

$$(x-C)^2+y^2=a^2.$$

Jest to równanie gromady kół o środku na osi x i o promieniu równym a. Aby otrzymać rozwiązanie osobliwe, należy położyć:

$$0=\frac{\partial \varphi}{\partial C}=-2(x-C),$$

skąd wynika $C=x$; kładąc tę wartość w całce ogólnej, znajdujemy:

$$y^2=a^2.$$

To równanie przedstawia dwie proste $y-a=0$, $y+a=0$; te dwie proste są stycznemi do wszystkich okręgów, przedstawionych przez całkę ogólną, albo, mówiąc dokładniej, te proste są powłóczącemi tych okręgów.

Łatwo dowieść, że ta własność jest ogólną dla wszystkich całek osobliwych, które otrzymujemy, kładąc $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$.

Wyobraźmy sobie całkę ogólną, przedstawioną geometrycznie na płaszczyźnie. Przedstawia ona gromadę krzywych, które otrzymujemy zmieniając stałą C. Wtedy całka osobliwa przedstawia właśnie powłóczącą wszystkich tych krzywych, jeżeli taka powłócząca istnieje.

Wiemy w samej rzeczy, że dla otrzymania powłóczącej należy różniczkować równanie gromady krzywych względem parametru C, następnie wyrugować parametr pomiędzy równaniem danem i jego pochodnem; jest to oczywiście ten sam proces, za pomocą którego dochodzimy do rozwiązania osobliwego.

§ 10.

Równania różniczkowe liniowe jednorodne.

W poprzedzających paragrafach zajmowaliśmy się badaniem równań różniczkowych rzędu 1-go; obecnie przechodzimy do równań rzędu wyższego.

Rozważymy tu klasę specyalną równań różniczkowych rzędu wyższego, t. z. równań różniczkowych liniowych. Tem mianem oznaczamy równania różniczkowe typu:

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = X_{n+1},$$

gdzie wszystkie ilości X są funkcyami tej samej zmiennej x i gdzie zmienna y i jej kolejne pochodne występują tylko liniowo.

Takie równanie nazywa się jednorodem, gdy nie zawiera wyrazu niezależnego x, t. j. gdy $X_{n+1} = 0$.

W tym rozdziale badać będziemy tylko równania jednorodne, a później okażemy, że całkowanie każdego równania niejednorodnego można sprowadzić zawsze do całkowania równania jednorodnego.

Udowodnimy najprzód kilka własności równań jednorodnych liniowych, t. j. równań postaci:

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y = 0 . \tag{1}$$

Przedewszystkiem za pomocą odpowiedniego przekształcenia można sprowadzić to równanie do innego równania rzędu $n-1$, lecz już nieliniowego.

Połóżmy $y = e^{\int z\, dx}$, gdzie z przedstawia nową funkcyę zależną zamiast y. Wtedy:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int z\, dx} z ; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{\int z\, dx} \left(z^2 + z \frac{dz}{dx}\right); \quad \ldots .$$

Widzimy więc, że wogóle pochodna ilości y rzędu k-go wyraża się za pomocą pochodnych ilości z aż do pochodnej rzędu $(k-1)$-go. Wstawiając te wartości w równaniu (1), możemy znieść czynnik wspólny $e^{\int z\, dx}$ we wszystkich wyrazach i pozostanie równanie ze zmienną z, zawierające pochodne tej ilości aż do pochodnej rzędu $n-1$ włącznie, co było do okazania.

Dalej jest rzeczą jasną, że gdy y_1 jest jednem z rozwiązań szczególnych równania (1), to i $c_1 y_1$, gdzie c_1 jest stałą dowolną, będzie także rozwiązaniem tego równania.

Podobnie, gdy y_1, y_2 są dwa rozwiązania szczególne, to wyrażenie $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, gdzie c_1 i c_2 są stałe dowolne, będzie także całką. Wstawiając bowiem to wyrażenie do równania (1), otrzymujemy dwie kategorye wyrazów; w jednej z nich czynnikiem wspólnym jest c_1 i występują pochodne tylko funkcyi y_1; w drugiej zaś czynnikiem wspólnym jest c_2 i występują tylko pochodne funkcyi y_2. Każda kategorya wyrazów daje sumę równą zeru, gdyż y_1 i y_2 na mocy założenia czynią zadość równaniu (1).

W ogólności, gdy znamy n rozwiązań szczególnych:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

równania (1), to:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n, \tag{2}$$

będzie też całką tego równania.

Ponieważ wyrażenie (2) zawiera n stałych $c_1, c_2, \ldots, c_n$, powstaje przeto naturalnie pytanie, czy wyrażenie (2) może być całką ogólną?

Wiemy, że aby to wyrażenie mogło być całką ogólną, jest koniecznem, by stałe zachodziły w niem w ten sposób, że gdy utworzymy $n-1$ równań pochodnych wyrażenia (2), to będziemy mogli wyznaczyć z tych równań ilości c, jako funkcye ilości: $x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.

Równaniami, z których mamy otrzymać ilości c, są:

$$\begin{aligned}
y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n, \\
y' &= c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + \ldots + c_n y'_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n-1)} &= c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n y_n^{(n-1)};
\end{aligned}$$

jest zatem koniecznem, aby wyznacznik:

$$D = \begin{vmatrix} y_1, & y'_2, & \ldots, & y_n \\ y'_1, & y'_2, & \ldots, & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

był różny od zera.

Należy bliżej określić, w jaki sposób wyznacznik D ma być różnym od zera. Wszystkie wyrazy tego wyznacznika są funkcyami oznaczonemi zmiennej x. Otóż jest jasnem, że wogóle istnieją zawsze wartości x, dla których $D = 0$; należy więc wyobrazić sobie, że x porusza się wewnątrz obszaru, w których niema takich punktów x. Innemi słowy funkcya y, określona wzorem (2), jest całką ogólną równania (1) tylko w obszarze, w którym nie ma żadnego punktu, gdzie wyznacznik D staje się zerem.

Mogłoby wszakże zdarzyć się, że dla każdej wartości x wyznacznik D jest zawsze zerem; wtedy wyrażenie (2) w żadnym przypadku nie mogłoby być całką ogólną. Innemi słowy, całki szczególne $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nie są wtedy wszystkie dobrane tak, aby mogły dać całkę ogólną, czyli, jak się mówi, nie stanowią wtedy układu zasadniczego. W rachunku różniczkowym (Rozdz. V, § 3) badaliśmy już wyznacznik postaci D; nazwaliśmy go wrońskianem i dowiedliśmy, że gdy ten wyznacznik jest zerem dla każdej wartości x, wtedy pomiędzy funkcyami y istnieje związek liniowy. Możemy więc powiedzieć: aby całki szczególne $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tworzyły układ zasadniczy, koniecznem jest, by pomiędzy niemi nie istniał żaden związek liniowy jednorodny.

Z kolei powstaje znowu pytanie: Czy istnieje układ zasadniczy? Pytanie to zlewa się z innem: czy można całkę ogólną równania różniczkowego liniowego i jednorodnego przedstawić w postaci (2), t. j, tak, aby stałe $c_1, c_2, \ldots, c_n$ zachodziły w niej tylko liniowo.

Jeżeli odpowiedź na to pytanie będzie twierdzącą, to oczywiście i odpowiedź na pierwsze pytanie także będzie twierdzącą. Otóż można dowieść, że w rzeczy samej całka ogólna równania (1) daje się zawsze przedstawić w postaci (2).

Aby to okazać, udowodnimy najprzód twierdzenie następujące: Jeżeli znamy jednę całkę szczególną $y = y_1$ równania (1), wtedy całkowanie równania tego sprowadzić można do całkowania innego równania tego samego typu, lecz rzędu o jedność mniejszego.

Połóżmy w samej rzeczy $y = y_1 z$, gdzie z jest nową zmienną zależną. Wtedy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} z + y_1 \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2} z + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dy^2} y_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \cdots$$

Podstawiając te wartości w równaniu (1) i uwzględniając to, że część zawierająca czynnik z znosi się, ponieważ y_1 jest rozwiązaniem równania (1) na mocy założenia, otrzymujemy równanie liniowe, zawierające tylko pochodne zmiennej z od pochodnej rzędu 1-go do n-go włącznie i nie zawierające wyraźnie samej zmiennej z. Mamy tedy:

$$X'_0 \frac{d^nz}{dx^n} + X'_1 \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \ldots + X'_{n-1} \frac{dz}{dx} = 0,$$

gdzie $X'_0, X'_1, \ldots, X'_{n-1}$ są funkcyami zmiennej x. Połóżmy $\frac{dz}{dx} = u$, to otrzymamy:

$$X'_0 \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + X'_1 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots + X'_{n-1} u = 0,$$

t. j. równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu $n - 1$. Znalazłszy u, otrzymamy:

$$z = \int u\, dx + c_1,$$

a stąd:

$$y = y_1\, z = y_1 \left(\int u\, dx + c_1\right).$$

Przyjmijmy teraz, że całka ogólna równania różniczkowego liniowego rzędu $(n-1)$ go ma postać:

$$u = c_2\, u_2 + c_3\, u_3 + \ldots + c_n\, u_n$$

i dowiedźmy, że taż własność sprawdza się dla równania różniczkowego liniowego rzędu n-go.

Istotnie, z poprzedzającego przekształcenia wynika, że gdy y_1 jest całką szczególną równania danego, wtedy:

$$y = c_1\, y_1 + c_2\, y_1 \int u_2\, dx + c_3\, y_1 \int u_3\, dx + \ldots + c_n\, y_1 \int u_n\, dx.$$

Lecz:

$$y_1 \int u_2\, dx,\ y_1 \int u_3\, dx,\ \ldots,\ y_1 \int u_n\, dx,$$

są całkami szczególnemi równania danego, które możemy oznaczyć przez $y_2, y_3, \ldots, y_n$, a stąd wynika, że gdy twierdzenie jest prawdziwem dla rzędu $n-1$, to jest także prawdziwem dla rzędu n-go.

Pozostaje więc tylko pokazać, że twierdzenie jest prawdziwem dla $n = 1$, t. j. że całce równania liniowego jednorodnego rzędu 1-go można zawsze nadać postać $y = c\, y_1$, gdzie y jest całką szczególną. Otóż dla równania:

$$\frac{dy}{dx} + X_1\, y = 0,$$

mamy:

$$\frac{dy}{y} = - X_1\, dx\,,$$

a całkując:

$$\log y = -\int X_1\, dx + \log c,$$

$$y = ce^{-\int X_1\, dx},$$

jak właśnie być powinno.

---

§ 11.

Równania liniowe jednorodne o spółczynnikach stałych.

Przechodzimy do przypadku, w którym równanie różniczkowe liniowe (1) paragrafu poprzedzającego ma wszystkie spółczynniki X stałe, t. j. gdy równanie jest postaci:

$$(1) \qquad a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0.$$

Spróbujmy, czy funkcya typu $y = e^{\alpha x}$, gdzie α jest stałą, może sprawdzić to równanie. Kolejne pochodne funkcyi y są:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha e^{\alpha x}, \frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha^2 e^{\alpha x}, \ldots\ldots,$$

co podstawiając w równaniu (1), znajdziemy:

$$e^{\alpha x} (a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n) = 0,$$

a ponieważ $e^{\alpha x}$ nie może być zerem, więc zerem być musi czynnik drugi. Aby więc $y = e^{\alpha x}$ mogło być całką szczególną równania (1), jest koniecznem, by α było jednym z pierwiastków równania algebraicznego:

$$(2) \qquad a_0\, a^n + a_1\, a^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

które tworzy się z równania (1), gdy zamiast kolejnych pochodnych funkcyj y napiszemy odpowiednie kolejne potęgi ilości a. Niechaj $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą n różnemi pierwiastkami równania (2) — zakładamy na początek różność pierwiastków (1) — wtedy $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x}$ będą n całkami szczególnemi równania (1). Jeżeli okaże się, że wrońskian, utworzony z tych całek szczególnych i z ich pochodnych aż do pochodnych rzędu (n—1)-go włącznie, jest różnym od zera, wtedy według poprzednio wyłożonej teoryi będziemy mogli twierdzić, że całką ogólną naszego równania (1) jest:

$$y = c_1\, e^{a_1 x} + c_2\, e^{a_2 x} + \ldots + c_n\, e^{a_n x}.$$

Wrońskian, o którym mowa, jest istotnie różnym od zera, gdyż:

$$\begin{vmatrix} e^{a_1 x}, & e^{a_2 x}, & \ldots, & e^{a_n x} \\ a_1\, e^{a_1 x}, & a_2\, e^{a_2 x}, & \ldots, & a_n\, e^{a_n x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1}\, e^{a_1 x}, & a_2^{n-1}\, e^{a_2 x}, & \ldots, & a_n^{n-1}\, e^{a_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{a_1 x}.\, e^{a_2 x}.\, \ldots .\, e^{a_n x} \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1}, & a_2^{n-1}, & \ldots, & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Tu czynnik pierwszy po stronie drugiej jest funkcyą wykładniczą, zawsze różną od zera. Czynnik drugi jest wyznacznikiem, równym, jak wiadomo z algebry, iloczynowi różnic pierwiastków równania danego, branych we wszelkich kombinacyach po dwa; jest więc także różnym od zera, gdyż żaden z czynników jego nie może być zerem, albowiem wyłączyliśmy przypadek równości dwu pierwiastków.

Tak np równaniu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = 0,$$

odpowiada równanie algebraiczne:

$$a^2 - n^2 = 0,$$

skąd $a = \pm n$, a więc całką ogólną, będzie:

$$y = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx},$$

Przyjmijmy teraz, że równanie charakterystyczne (2) ma dwa pierwiastki równe; wtedy nie będziemy mieli n całek szczególnych różnych i nie będziemy mogli znaleść drogą wskazaną całki ogólnej danego równania. Dla znalezienia postaci, jaką przybiera wtedy całka ogólna, użyjemy metody przejścia do granicy. Niechaj a_1, a_2 będą dwa pierwiastki równe. Przyjmijmy na chwilę, że są różnemi; że się różnią mianowicie o ilość h. Wtedy, za pomocą metody poprzedzającej, możemy znaleść całkę ogólną; przekształcając ją odpowiednio i przechodząc do granicy, znajdziemy całkę ogólną. Połóżmy tedy $a_2 = a_1 + h$, to całką ogólną będzie:

$$c_1 e^{a_1x} + c_2 e^{a_2x} + \ldots + c_n e^{a_nx}$$

$$= (c_1 + c_2 e^{hx}) e^{a_1x} + c_3 e^{a_3x} + \ldots + c_n e^{a_nx}$$

$$= \left[(c_1 + c_2) + c_2 hx + c_2 \frac{h^2 x^2}{2!} + \ldots\right] e^{a_1x} + c_3 e^{a_3x} + \ldots + c_n e^{a_nx}.$$

Połóżmy $c_1 + c_2 = C_1$, $c_2 h = C_2$, to będzie:

$$\left[C_1 + C_2 x + C_2 \frac{hx^2}{2!} + \ldots\right] e^{a_1x} + c_3 e^{a_3x} + \ldots + c_n e^{a_nx}.$$

a w granicy dla $h = 0$:

$$(C_1 + C_2 x) e^{\alpha_1 x} + c_3 e^{\alpha_3 x} + \ldots + c_n e^{\alpha_n x}.$$

Jest to całka ogólna w przypadku, gdy dwa pierwiastki równania charakterystycznego są równemi.

Podobnie w przypadku k pierwiastków równych dość pomnożyć funkcyę wykładniczą, odpowiadającą temu pierwiastkowi, przez funkcyę całkowitą zmiennej x stopnia $k-1$ o spółczynnikach dowolnych.

Zresztą łatwo sprawdzić, że gdy α_1 jest pierwiastkiem podwójnym równania (2), wtedy $y = xe^{\alpha_1 x}$ jest całką szczególną. Istotnie jest wtedy:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\alpha_1 x} + x\alpha_1 e^{\alpha_1 x}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2\alpha_1 e^{\alpha_1 x} + x\alpha_1^2 e^{\alpha_1 x}; \ldots.$$

Postawiając te wartości w danem równaniu różniczkowem i znosząc wspólny czynnik wykładniczy, znajdujemy:

$$(a_0 \alpha_1^n + a_1 \alpha_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n)$$
$$+ (na_1 \alpha_1^{n-1} + (n-1) a_1 \alpha_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) = 0.$$

Ten związek sprawdza się w samej rzeczy, gdy α_1 jest pierwiastkiem podwójnym, gdyż dla $x = \alpha_1$ znika pierwsza strona równania (2) i jej pierwsza pochodna, skutkiem tego każdy z dwóch wyrazów w nawiasie w związku poprzednim jest równy zeru.

Podobnież dowieść można ogólnie, że gdy α_1 jest k-krotnym pierwiastkiem równania (2), wtedy $x^{k-1} e^{\alpha_1 x}$ jest całką szczególną.

Niechaj będzie np. równanie różniczkowe:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 0;$$

odpowiadającem mu równaniem algebraicznem jest równanie $\alpha^n = 0$, mające n pierwiastków równych zeru. Całką ogólną równania różniczkowego będzie:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_n x^{n-1}.$$

Przyjmijmy nakoniec, że pomiędzy pierwiastkami równania (2) niektóre są urojonemi; możnaby wtedy zastosować tę samę metodę i otrzymać całkę ogólną pod postacią urojoną. Lecz ponieważ we wszystkich stosowanych przez nas dotąd zasadach mieliśmy do czynienia tylko z funkcyami rzeczywistemi zmiennych rzeczywistych, postarajmy się więc wyłączyć wszystkie rozważania ilości urojonych i nadać całce ogólnej postać rzeczywistą. Niechaj:

$$a_1 = \beta + i\gamma, \quad a_2 = \beta - i\gamma,$$

będą dwa pierwiastki urojone sprzężone. Wtedy:

$$c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} = e^{\beta x} (c_1 e^{i\gamma x} + c_2 e^{-i\gamma x})$$

$$= e^{\beta x} [c_1 (\cos \gamma x + i \sin \gamma x) + c_2 (\cos \gamma x - i \sin \gamma x)]$$

$$= e^{\beta x} [(c_1 + c_2) \cos \gamma x + (c_1 - c_2) i \sin \gamma x].$$

Kładąc:

$$c_1 + c_2 = C_1, \quad i (c_1 - c_2) = C_2,$$

gdzie C_1, C_2 są dwie nowe stałe dowolne, znajdujemy:

$$e^{\beta x} [C_1 \cos \gamma x + C_2 \sin \gamma x].$$

W całce ogólnej znajdzie się taki wyraz zamiast dwu wyrazów, odpowiadających pierwiastkom urojonym. Możnaby w samej rzeczy okazać, że $e^{\beta x} \cos \gamma x$, $e^{\beta x} \sin \gamma x$ są całkami szczególnemi równania danego.

Niechaj będzie np. równanie:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0;$$

odpowiedniem równaniem algebraicznem jest:

$$a^3 - a - 6 = 0,$$

którego pierwiastkami są:

$$a = 2, \quad a = -1 + i\sqrt{2}, \quad a = -1 - i\sqrt{2}.$$

a więc całką ogólną będzie:

$$y = c_1 e^{2x} + (c_2 \cos x\sqrt{2} + c_3 \sin x\sqrt{2})\, e^{-x}.$$

Całką ogólną równania:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

jest:

$$y = C \cos x + C_1 \sin x.$$

Do tego rezultatu dojść można, zważywszy, że $\cos x$, $\sin x$ są takiemi dwiema funkcyami zmiennej x, że ich pochodne drugie równają się samym funkcyom ze zmienionym znakiem, a stąd przedstawiają one dwa rozwiązania szczególne danego równania.

---

§ 12.

Równania liniowe niejednorodne.

Niechaj będzie równanie niejednorodne:

$$(1) \qquad X_0 \frac{d^ny}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y = X,$$

gdzie $X_0, X_1, \ldots, X_n, X$ są funkcyami tylko zmiennej x.

Zcałkujmy równanie jednorodne:

$$(2) \qquad X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y = 0,$$

które otrzymujemy z równania (1), znosząc wyraz po stronie drugiej. Niechaj:

$$(3) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n .$$

będzie całką ogólną równania (2). Zobaczmy, czy można tą postacią (3) zadość uczynić równaniu (1), przyjmując, że ilości c nie są stałemi lecz funkcyami zmiennej x. Utwórzmy pochodne kolejne funkcyi (3).

Napiszmy najprzód pochodną pierwszą:

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + \ldots + c_n \frac{dy_n}{dx}$$

$$+ y_1 \frac{dc_1}{dx} + \ldots + y_n \frac{dc_n}{dx},$$

i połóżmy:

$$y_1 \frac{dc_1}{dx} + \ldots + y_n \frac{dc_n}{dx} = 0,$$

to będzie:

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + \ldots + c_n \frac{dy_n}{dx}.$$

Jest to wyrażenie takie samo, jak to, do któregobyśmy doszli, uważając ilości c za stałe.

Weźmy pochodną pochodnej pierwszej i uczyńmy znów równą zeru część, zawierającą pochodne ilości c; prowadźmy to działanie w ten sam sposób aż do pochodnej rzędu n—1-go włącznie. Otrzymamy tedy układ równań:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + c_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + c_n \frac{dy_n}{dx}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = c_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + c_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + c_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}},$$

przyczem pochodne ilości c czynią zadość warunkom:

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & y_1 \frac{dc_1}{dx} + \ldots + y_n \frac{dc_n}{dx} = 0, \\ & \frac{dy_1}{dx}\frac{dc_1}{dx} + \ldots + \frac{dy_n}{dx}\frac{dc_n}{dx} = 0, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{dc_1}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{dc_n}{dx} = 0, \end{aligned} \right.$$

t. j. n funkcyj $c_1, c_2, \ldots, c_n$ czyni zadość $n-1$ warunkom, wyrażonym przez tyleż równań różniczkówych. Poddajmy te funkcye jeszcze jednemu warunkowi, a mianowicie warunkowi, który odpowiada faktowi, że (3) ma być całką równania (1). Zobaczmy, jak się ten warunek wyraża.

Mamy widocznie:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = c_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + \ldots + c_n \frac{d^n y_n}{dx^n}$$

$$+ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dc_1}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dc_n}{dx},$$

a podstawiając wartości kolejnych pochodnych funkcyi y po pierwszej stronie równania (1), będziemy mieli po uporządkowaniu wyrazów:

$$c_1 \left(X_0 \frac{d^n y_1}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y_1 \right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ c_n \left(X_0 \frac{d^n y_n}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y_n \right)$$

$$+ X_0 \left(\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \frac{dc_1}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \frac{dc_n}{dx} \right).$$

Aby równaniu (1) stało się zadość, musi to całe wyrażenie być równe X.

Otóż czynniki ilości $c_1, c_2, \ldots, c_n$ są zerami, gdyż $y_1, y_2, \ldots, y_n$ są całkami szczególnemi równania (2); pozostaje zatem jako warunek, któremu jeszcze mają czynić zadość ilości c, równanie:

$$\text{(5)} \qquad \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \frac{dc_1}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \frac{dc_n}{dx} = \frac{X}{X_0}.$$

Jeżeli można będzie znaleść ilości c, czyniące zadość wszystkim n związkom różniczkowym (4) i (5), wtedy zagadnienie będzie rozwiązanem. Otóż te równania (4) i (5) są wszystkie liniowemi względem $\frac{dc_1}{dx}, \frac{dc_2}{dx}, \ldots, \frac{dc_n}{dx}$, można więc będzie z nich otrzymać wartości tych pochodnych, jeżeli wyznacznik spółczynników nie jest zerem. Wyznacznik ten, którym jest, jak widać wprost:

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \\ y'_1, & y'_2, & \ldots, & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

nie jest zerem, gdyż jest on wyznacznikiem zasadniczym rozwiązań szczególnych $y_1, y_2, \ldots, y_n$, który, jak to wiemy z paragrafu poprzedzającego, jest różnym od zera, gdyż inaczej wyrażenie(3) nie byłoby całką ogólną równania (2). Po wyznaczeniu pochodnych $\frac{dc_1}{dx}, \ldots, \frac{dc_n}{dx}$ w funkcyi zmiennej x, pozostanie wykonać tylko proste kwadratury dla wyznaczenia samych ilości c. Wyznaczenie każdej z tych ilości wprowadza jednę stałą dowolną tak, że razem będziemy mieli n stałych dowolnych.

Niechaj będzie do zcałkowania równanie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = e^x.$$

Znajdźmy najprzód całkę ogólną równania:

$$\frac{d^2y}{dx} - n^2y = 0\,;$$

jest nią (patrz str. 207):

$$y = c_1\, e^{nx} + c_2\, e^{-nx}.$$

Trzeba teraz wyznaczyć ilości c_1, c_2 z warunków:

$$y_1 \frac{dc_1}{dx} + y_2 \frac{dc_2}{dx} = 0\,; \quad y'_1 \frac{dc_1}{dx} + y'_2 \frac{dc_2}{dx} = e^x,$$

t. j. z warunków:

$$e^{nx} \frac{dc_1}{dx} + e^{-nx} \frac{dc_2}{dx} = 0\,; \quad ne^{nx} \frac{dc_1}{dx} - ne^{-nx} \frac{dc_2}{dx} = e^x\,,$$

z których wynika:

$$\frac{dc_1}{dx} = \frac{1}{2n}\, e^{(1-n)\,x}\,; \quad \frac{dc_2}{dx} = -\frac{1}{2n}\, e^{(1+n)\,x}.$$

Stąd:

$$c_1 = \frac{1}{2n}\int e^{(1-n)\,x}\,dx = \frac{1}{2n\,(1-n)}\, e^{(1-n)\,x} + C_1\,,$$

$$c_2 = -\frac{1}{2n}\int e^{(1+n)\,x}\,dx = -\frac{1}{2n\,(1+n)}\, e^{(1+n)\,x} + C_2;$$

tak że całką ogólną danego równania różniczkowego będzie:

$$y = \frac{1}{2n(1-n)} e^x + C_1 e^{nx} - \frac{1}{2n(1+n)} e^x + C_2 e^{-nx},$$

$$= \frac{1}{1-n^2} e^x + C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}.$$

---

§ 13.

Twierdzenia o równaniach różniczkowych liniowych. Wzór L i o u v i l l e'a.

Widzieliśmy w paragrafie poprzedzającym, w jaki sposób otrzymać można całkę równania różniczkowego liniowego zupełnego (ze stroną drugą różną od zera) z całki równania jednorodnego, które powstaje z poprzedniej przez zniesienie strony drugiej. Obecnie udowodnimy kilka twierdzeń następujących.

Niechaj będzie równanie:

$$(1) \qquad X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y = X;$$

utwórzmy odpowiednie równanie jednorodne:

$$(2) \qquad X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y = 0.$$

Znając całkę szczególną Y równania (1) i całkę ogólną Y_1 równania (2), można odrazu znaleść całkę ogólną równania (1), biorąc sumę całek Y i Y_1.

Istotnie, podstawiając Y zamiast y po pierwszej stronie równania (1), sprowadzamy ją do X; podstawiając Y_1 zamiast y po pierwszej stronie tegoż równania (1) sprowadzamy ją do zera, a więc podstawiając $Y + Y_1$ zamiast y po stronie pierwszej tego równania, sprowadzamy ją do X. Skąd wynika, że $Y + Y_1$ jest całką tego równania; a ponieważ ta całka zawiera n stałych dowolnych (gdyż Y_1 jest całką ogólną równania (2)), a więc $Y + Y_1$ jest całką ogólną równania (1).

Widzimy przeto, że gdy według teoryi, wyłożonej w paragrafie poprzedzającym, znalezienie całki ogólnej równania (1) z całki ogólnej równania (2) wymagało wykonania n kwadratur, to w metodzie niniejszej te kwadratury są zbytecznemi, gdy znamy jednę całkę szczególną równania (1).

Weźmy np. równanie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 2 \cos mx + 3 \sin mx.$$

Ponieważ znamy całkę ogólną równania zredukowanego $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$, mianowicie $Y_1 = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx$, przeto dla rozwiązania zadania potrzeba znać tylko jeszcze jednę całkę szczególną danego równania. Spróbujmy, czy taką całką nie będzie wyrażenie postaci: $Y = \alpha \cos mx + \beta \sin mx$, gdzie α i β są dwie stałe nieznane. Biorąc pochodne i podstawiając w równaniu danem, znajdziemy, że będzie ono spełnionem, gdy:

$$\alpha = \frac{2}{n^2 - m^2}, \quad \beta = \frac{3}{n^2 - m^2},$$

a więc:

$$y = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx + \frac{2 \cos mx + 3 \sin mx}{n^2 - m^2},$$

jest szukaną całką ogólną.

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

1) G d y z n a m y j e d n ę c a ł k ę s z c z e g ó l n ą r ó w n a n i a (1), t o c a ł k o w a n i e t e g o r ó w n a n i a s p r o-

wadzić można do całkowania równania liniowego jednorodnego tego samego rzędu.

2) Gdy znamy jednę całkę szczególną równania (2), to całkowanie równania (1) sprowadzić można do całkowania równania liniowego niejednorodnego rzędu niższego.

Niechaj Y będzie całką szczególną równania (1), wtedy kładąc $y = Y + z$ dochodzimy z łatwością do równania jednorodnego względem z i tego samego rzędu; tym sposobem twierdzenie 1) jest dowiedzionem.

Niechaj Y_1 będzie całką szczególną równania (2), wtedy przekształcenie $y = CY_1$ i założenie $\frac{dC}{dx} = z$, prowadzi do redukcyi, o jakiej mowa w twierdzeniu pod 2)

Wyprowadzimy jeszcze godne uwagi wyrażenie, podane przez Liouville'a na wrońskian n całek szczególnych równania różniczkowego liniowego jednorodnego.

Ze związków:

$$X_0 \frac{d^n y_1}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} + \ldots + X_n y_1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_0 \frac{d^n y_n}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y_n = 0,$$

rugując $X_2, X_3, \ldots, X_n$, otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} X_0 \frac{d^n y_1}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}, & \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}}, & \ldots, & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_0 \frac{d^n y_n}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^n}, & \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}}, & \ldots, & y_n \end{vmatrix} = 0,$$

lub, co na jedno wychodzi:

$$X_0 \begin{vmatrix} y_1^{(n)}, y_1^{(n-2)}, \ldots, y_1 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ y_n^{(n)}, y_n^{(n-2)}, \ldots, y_n \end{vmatrix} + X_1 \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}, y_1^{(n-2)}, \ldots, y_1 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ y_n^{(n-1)}, y_n^{(n-2)}, \ldots, y_n \end{vmatrix} = 0.$$

Na zasadzie twierdzenia, dowiedzionego w „Rachunku różniczkowym“ (Rozdz. V, § 3), wyznacznik pierwszy jest pochodną drugiego, który oznaczymy przez D, a więc:

$$X_0 \frac{dD}{dx} + X_1 D = 0,$$

stąd:

$$\frac{dD}{D} = -\frac{X_1}{X_0} dx,$$

$$\log D = -\int \frac{X_1}{X_0} dx + \log C,$$

a zatem:

$$D = C e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}.$$

To wyrażenie wrońskianu D za pomocą funkcyi wykładniczej nazywa się wzorem L i o u v i l l e'a.

---

§ 14.

O pewnych szczególnych klasach równań różniczkowych liniowych.

Widzieliśmy, że w przypadku, gdy spółczynniki równań liniowych są stałemi, można znaleść całkę ogólną i że szukanie jej sprowadza się do rozwiązania równania algebraicznego. Gdy spółczynniki są funkcyami zmiennej x, to w ogólności nie możemy podać metody ogólnej rozwiązania, którego powodzenie zależy od użycia różnych mniej lub więcej odpowiednich sposobów sztucznych. Zbadamy tu niektóre typy prostsze takich równań.

Niechaj będzie równanie:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{a_1}{ax+b}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{a_i}{(ax+b)^i}\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}$$

$$+ \ldots + \frac{a_n}{(ax+b)^n} y = X,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n$, a, b są stałemi, X zaś pewną funkcyą zmiennej x.

Połóżmy $ax + b = e^t$ i weźmy t za zmienną niezależną zamiast x. Będzie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{a}{ax+b}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a}{ax+b}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\frac{a}{ax+b} - \frac{dy}{dt}\frac{a^2}{(ax+b)^2}\frac{ax+b}{a}\right]$$

$$= \frac{a^2}{(ax+b)^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

. . . .

Podstawiając te wartości w równaniu danem i mnożąc przez $(ax + b)^n$, otrzymamy równanie o spółczynnikach stałych.

Niechaj będzie np. równanie:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - (2n-1)\,x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0\,.$$

Dzieląc przez x^2, otrzymamy równanie powyższego typu. Kładziemy $x = e^t$ i znajdujemy:

$$\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] - (2n-1)\frac{dy}{dt} + n^2y = 0,$$

t. j.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} + n^2y = 0.$$

Odpowiadające temu równaniu różniczkowemu równanie algebraiczne charakterystyczne jest:

$$z^2 - 2nz + n^2 = 0 \text{ lub } (z-n)^2 = 0,$$

o pierwiastku podwójnym $z = n$. Całkami szczególnemi będą więc e^{nt} i te^{nt}, a całką ogólną po wprowadzeniu x:

$$y = c_1\,x^n + c_2\,x^n \log x.$$

Rozważmy inny typ równania różniczkowego liniowego o spółczynnikach niestałych:

$$a_0\,x^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\,x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\,x\frac{dy}{dx} + a_n\,y = 0.$$

Połóżmy $y = x^\alpha$, gdzie a jest stałą wyznaczyć się mającą. Biorąc pochodne, znajdujemy:

$$\frac{dy}{dx} = ax^{\alpha-1};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = a(a-1)\,x^{\alpha-2};\ \ldots\ ;$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = a\,(a-1)\ldots(a-n+1)\,x^{\alpha-n},$$

a podstawiając te wyrażenia w równaniu danem, będziemy mieli czynnik wspólny x^a, oraz:

$$a_0\,a\,(a-1)\ldots(a-n+1) + a_1\,a\,(a-1)\ldots(a-n+2)$$
$$+ \ldots + a_{n-1}\,a + a_n.$$

Aby rozwiązać równanie różniczkowe, trzeba znaleść wartość a, sprowadzającą do zera poprzednie wyrażenie; rozwiązując przeto względem a wyrażenie to, przyrównywane do zera, znajdziemy n wartości a i odpowiednich n całek szczególnych, z których złożymy całkę ogólną sposobem znanym.

§ 15.

Równania liniowe 2-go rzędu.

Zbadamy teraz specyalnie równania liniowe 2-go rzędu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = X. \tag{1}$$

Jeżeli znamy jednę całkę szczególną równania:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0, \tag{2}$$

to można zniżyć rząd równania (2) i otrzymamy równanie 1-go rzędu, które daje się zawsze całkować: możemy zatem powiedzieć, że w tym przypadku będzie można znaleść całkę ogólną równania (2), skąd, jak wiadomo, za pomocą kwadratur znajdziemy całkę równania (1).

Dla zcałkowania równania 2-go rzędu (1), wystarcza przeto znajomość całki szczególnej równania (2)

Pokażemy, jak ten rachunek można uprościć. Niechaj y_1 będzie całką szczególną równania (2), tak że:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + P\frac{dy_1}{dx} + Qy_1 = 0. \tag{3}$$

Od równania (1), pomnożonego przez y_1, odejmijmy równanie (3), pomnożone przez y, to będzie:

$$\left(y_1\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{d^2y_1}{dx^2}\right) + P\left(y_1\frac{dy}{dx} - y\frac{dy_1}{dx}\right) = Xy_1.$$

Połóżmy $y_1\dfrac{dy}{dx} - y\dfrac{dy_1}{dx} = z$, skąd $y_1\dfrac{d^2y}{dx^2} - y\dfrac{d^2y_1}{dx^2} = \dfrac{dz}{dx}$, to otrzymamy:

$$\frac{dz}{dx} + Pz = Xy_1 .$$

Całką ogólną tego równania liniowego 1-go rzędu jest:

$$z = e^{-\int P dx} \left[\int X y_1 e^{\int P dx}_{dx} + C \right].$$

Z poprzedniego wynika:

$$\frac{d\,\dfrac{y}{y_1}}{dx} = \frac{z}{y_1^2}, \text{ skąd } \frac{y}{y_1} = \int \frac{z}{y_1^2}\, dx + C_2,$$

a więc:

$$y = y_1 \int \frac{z}{y_1^2}\, dx + C_2\, y_1 .$$

Jest to wartość zmiennej y, stanowiąca rozwiązanie równania (1).

Okażemy teraz interesującą własność całek szczególnych równania liniowego jednorodnego rzędu 2-go, odkrytą przez Sturma.

Jeżeli y_1, y_2 są dwie całki szczególne różne równania (2), to wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} y_1 , & y_2 \\ \dfrac{dy_1}{dx}, & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix},$$

powinien być różnym od zera dla wszelkiej wartości x, zawartej w rozważanym obszarze, t. j. funkcya $y_1 \dfrac{dy_2}{dx} - y_2 \dfrac{dy_1}{dx}$ dla każdej wartości x, zawartej w tym obszarze, powinna być jednego znaku. Niechaj będzie np. dodatnią. Jeżeli y_1 jest zerem dla $x = a$ i dla $x = b$, to dla tych wartosci x musi być $y_2 \dfrac{dy_1}{dx}$

ujemnem, t. j. y_2 i $\frac{dy}{dx}$ muszą być znaku przeciwnego. Lecz pomiędzy temi dwoma punktami a i b, dla których znika funkcya y_1, istnieje z pewnością, na mocy twierdzenia Rollego, taki punkt pośredni, dla którego znika pochodna $\frac{dy_1}{dx}$; jeżeli więc x przechodzi od wartości a do wartości b, pochodna $\frac{dy_1}{dx}$ zmienia znak; zmienia tedy znak i funkcya y_2, gdyż iloczyn musi być znaku stałego, tak w a jak i w b. Wynika stąd, że funkcya y_2 musi stawać się zerem w punkcie, zawartym pomiędzy a i b. A zatem pomiędzy dwoma kolejnemi punktami zerowemi funkcyi y_1 istnieje zawsze punkt zerowy funkcyi y_2 i podobnie pomiędzy dwoma punktami zerowemi funkcyi y_2 istnieje punkt zerowy funkcyi y_1; t. j. miejsca zerowe dwu całek szczególnych y_1, y_2 równania różniczkowego rzędu 2-go są wzajemnie przemiennemi. Zakładamy naturalnie zawsze ciągłość funkcyj, gdyż inaczej nie moglibyśmy do nich stosować twierdzenia Rolle'go i wyprowadzać pozostałych dedukcyj.

---

§ 16.

Układy równań liniowych jednoczesnych.

Wyobraźmy sobie n równań, zawierających n funkcyj $y, z, \ldots$ zmiennej x i pochodne tych funkcyj. Stawiamy zagadnienie wyznaczenia tych funkcyj.

Dla prostoty przyjmijmy, że mamy dwa równania, zawierające y, z i ich pochodne. aż do drugiego rzędu włącznie:

$$(1)\quad \begin{cases} f\left(x, y, z, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^2z}{dx^2}\right) = 0, \\ \varphi\left(x, y, z, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^2z}{dx^2}\right) = 0. \end{cases}$$

Połóżmy:

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx} = u, \quad \frac{dz}{dx} = v, \ldots,$$

to równania:

$$(3)\quad f\left(x, y, z, u, v, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right) = 0; \quad \varphi\left(x, y, z, u, v, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right) = 0,$$

razem z równaniami (2) stanowią cztery równania, zawierające cztery funkcye y, z, u, v i ich pochodne.

W ogólności, mając układ n równań różniczkowych, zawierających n funkcyj i ich pochodne rzędu wyższego, możemy zawsze układ ten sprowadzić do układu m równań $(m > n)$ pomiędzy m funkcyami i ich pochodnemi rzędu 1-go.

Innemi słowy, powiększając liczbę równań i funkcyj, możemy zawsze obniżyć rząd równań danych. Tak np. gdy mamy jedno równanie z jedną funkcyą y i jej pochodnemi aż do pochodnej rzędu r-go, to kładąc $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{dz}{dx} = u, \ldots$, otrzymamy $r-1$ równań, które razem z danem stanowią r równań pomiędzy r funkcyami $y, z, u, \ldots$ i w tych r równaniach występują tylko pochodne pierwsze tych funkcyj. Lecz oczywiście rozwiązanie tego układu nie przedstawia mniej trudności niż rozwiązanie równania pierwotnego.

Pokażemy teraz, jak wykonywa się postępowanie odwrotne, t. j. w jaki sposób z układu n równań 1-go rzędu pomiędzy n funkcyami, otrzymuje się inny układ o mniejszej liczbie równań różniczkowych rzędu wyższego z mniejszą liczbą funkcyj, a w szczególności jedno tylko równanie różniczkowe z jedną funkcyą. Dla prostoty przyjmijmy, że mamy trzy równania z trzema zmiennemi y, z, u. Pomyślmy sobie, że te równanie rozwiązaliśmy względem trzech pierwszych pochodnych funkcyj y, z, u, lub jeszcze ogólniej, pomyślmy, że te trzy równania zostały za pomocą procesów eliminacyjnych sprowadzone do postaci:

$$f_1\left(x, y, z, u \frac{dy}{dx}\right) = 0; \quad f_2\left(x, y, z, u, \frac{dz}{dx}\right) = 0;$$

$$f_3\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}\right) = 0.$$

Przy pomocy ostatniego równania wyrazimy y przez $x, z, u, \frac{du}{dx}$, a różniczkując, znajdziemy znów pochodną $\frac{dy}{dx}$, wyrażoną przez $x, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}$. Podstawiając te wartości do dwu pierwszych równań, otrzymamy dwa równania typu:

$$\varphi_1\left(x, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{dz}{dx}\right) = 0; \quad \varphi_2\left(x, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0;$$

Rozwiązując je względem $z, \frac{dz}{dx}$, następnie różniczkując tak otrzymane z względem x i porównywając z otrzymanem $\frac{dz}{dx}$, znajdziemy równanie trzeciego rzędu z jedną funkcyą u:

$$\psi\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}\right) = 0.$$

Podobne postępowanie można stosować w ogólności; zresztą postępowanie to, najściślejsze pod względem teoretycznym, przedstawia częstokroć trudności praktyczne i może być nieprzystępne.

Jest ono przystępnem, gdy równania dane są liniowemi, a więc gdy łatwo rozwiązać się dają względem zmiennych, które w nich zachodzą.

Możemy pokazać na przykładzie, w jaki sposób ta metoda stosuje się w przypadku równań liniowych.

Niechaj będą dwa równania:

$$\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0; \quad \frac{dz}{dx} - y + z = 0.$$

Z drugiego otrzymujemy $y = \frac{dz}{dx} + z$, skąd:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx},$$

a po podstawieniu tej wartości w równaniu pierwszem:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 4\frac{dz}{dx} + 4z = 0.$$

To równanie jest liniowem jednorodnem o spółczynnikach stałych; odpowiadające mu równanie charakterystyczne jest:

$$t^2 + 4t + 4 = 0, \text{ lub } (t + 2)^2 = 0;$$

mamy zatem dwie całki szczególne: e^{-2x} i xe^{-2x}, tak że całką ogólną jest:

$$z = (c_1 + c_2 x)\, e^{-2x},$$

a stąd:

$$y = (c_2 - c_1)\, e^{-2x} - c_2\, xe^{-2x}.$$

§ 17.

Równania różniczkowo rzędu wyższego.

Z pomiędzy równań różniczkowych rzędu wyższego nad pierwszy rozpatrzyliśmy dotąd tylko równania liniowe Obecnie zbadamy inne typy równań.

1. Niechaj będzie równanie, zawierające tylko pochodną rzędu n-go funkcyi y, t. j. równanie typu:

$$f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, x\right) = 0.$$

Rozwiązując to równanie względem pochodnej $\frac{d^n y}{dx^n}$, otrzymamy związek:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

gdzie X jest pewną funkcyą zmiennej x. Związek ten jest równaniem liniowem; do zcałkowania go możnaby zastosować metodę, podaną w paragrafach poprzedzających, pamiętając, że całka równania odpowiedniego bez strony drugiej, t. j. całka równania $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ jest:

$$y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n.$$

Lecz w przypadku obecnym rzecz się upraszcza, albowiem z równania $\frac{d^n y}{dx^n} = X$ możemy otrzymać wprost przez całkowanie:

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int X\,dx + C_1,$$

a całkując po raz drugi:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int dx \int X\,dx + C_1 x + C_2\,.$$

Powtarzając to działanie, dojdziemy nakoniec do szukanego wyrażenia na y.

2) Rozpatrzymy równanie postaci:

$$f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

w którem występują tylko dwie pochodne kolejne.

Kładąc $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p$, mamy $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dp}{dx}$, i równanie dane sprowadza się do równania:

$$f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0,$$

które rozwiązując względem $\frac{dp}{dx}$, otrzymamy:

$$\frac{dp}{dx} = \varphi(p)\,,$$

skąd:

$$x = \int \frac{dp}{\varphi(p)} + C\,.$$

Jeżeli z tego związku określimy p w funkcyi zmiennej x:

$$p = \psi(x),$$

znajdziemy:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \psi(x)\,,$$

t. j. równanie typu, poprzednio rozważanego.

Jako przykład podajemy równanie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

którego całką jest:

$$y = c_1 + \frac{e^{x-c_2} + e^{-(x-c_2)}}{2}.$$

3) Weźmy równanie, w którem zachodzą tylko dwie pochodne rzędów różniących się o dwie jedności, t. j. równanie postaci:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right).$$

Połóżmy $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p$, skąd $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^2p}{dx^2}$; równanie dane zamieni się przeto na następujące:

$$\frac{d^2p}{dx^2} = f(p).$$

Połóżmy tu: $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dp}q$, to będzie:

$$q\frac{dq}{dp} = f(p),$$

skąd:

$$q\,dq = f(p)\,dp.$$

Całkowanie daje:

$$\frac{1}{2}q^2 = \int f(p)\,dp + C.$$

t. j.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = \int f(p)\,dp + C.$$

Stąd wynika:

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{2\int f(p)\,dp + 2C}},$$

a po zcałkowaniu:

$$x = \int \frac{dp}{\sqrt{2\int f(p)\,dp + 2C}} + C_1.$$

Z tego związku otrzymamy p jako funkcyę zmiennej x, a po podstawieniu w równaniu $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p$, pozostanie jeszcze raz zcałkować równanie typu, rozważanego na początku tego paragrafu.

4) Rozpatrzmy przypadek, w którym równanie dane jest jednorodnem stopnia m-go względem zmiennej y i jej pochodnych.

W tym przypadku można obniżyć rząd równania o jedność, a to następującym sposobem. Połóżmy $y = e^z$; pochodne funkcyi y wyrażą się wtedy za pośrednictwem pochodnych takich samych rzędów zmiennej z i będą miały zawsze jako czynnik funkcyę wykładniczą e^z. Ta funkcya wystąpi w stopniu m-tym we wszystkich wyrazach; po zniesieniu jej, otrzymamy równanie, zawierające pochodne zmiennej z, a nie zawierające wyrażnie samej tej zmiennej. Kładąc następnie $\frac{dz}{dx} = u$, obniżymy rząd równania o jedność.

Tęż samę metodę można przedstawić w innej postaci, łączącej w sobie dwa kolejno stosowane wyżej podstawienia. Kładąc $y' = uy$, otrzymujemy:

$$y'' = u'y + uy' = u'y + u^2y = y\,(u' + u^2)$$

. . . .

Wszystkie pochodne funkcyi y będą zawierały tedy czynnik y; a ponieważ równanie jest jednorodnem, więc we wszystkich wyrazach będzie czynnik y^m. Zniósłszy ten czynnik, otrzymamy równanie względem u rzędu $(n-1)$-go, jeżeli równanie dane było rzędu n-go.

---

§ 18

Całkowanie przez szeregi.

Całkowanie przez szeregi stanowi środek, do którego uciekamy się w razie, gdy metody całkowania poprzednio wyłożone nie mogą znaleść zastosowania.

Niechaj będzie równanie różniczkowe:

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Jego całka ogólna powinna być, jak wiemy, funkcyą zmiennej x z n stałemi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ taką, aby dla każdej wartości $x = x_0$, zawartej w pewnym obszarze zmienności zmiennej x, nadawszy funkcyom $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ wartości dowolne $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ możnaby znaleść dla stałych c wartości takie, aby dla $x = x_0$ funkcye $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ przybierały istotnie powyższe wartości z góry dobrane.

Niechaj będzie tedy punkt $x = x_0$; wyobraźmy sobie, że w otoczeniu tego punktu funkcya y rozwija się na szereg według wzoru T a y l o r a. Będzie:

$$y = y_0 + (x-x_0)\, y'_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\, y''_0$$

$$(1) \qquad + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\, y_0^{(n)} + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\, y_0^{(n+1)} + \ldots$$

Z danego równania różniczkowego otrzymujemy:

$$y^{(n)} = \varphi\,(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

a biorąc kolejne pochodne:

$$y^{(n+1)} = \psi\,(x, y, y', \ldots, y^{(n)}), \tag{2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Z tych związków możemy mieć wartości pochodnych $y^{(n)}, y^{(n+1)}, \ldots$ dla $x = x_0$, jeżeli ustalimy dowolnie wartości funkcyj $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ w tym punkcie; oznaczmy tak otrzymane wartości pochodnych przez $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \ldots$

Podstawiając te wartości w powyższem rozwinięciu (1) znajdziemy funkcyę y, wyrażoną przez szereg, w którym występują jako stałe dowolne: $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$. Otóż, gdy szereg ten jest zbieżny w pewnym obszarze, otaczającym punkt x_0, można uważać go za całkę ogólną w otoczeniu tego punktu; w przypadku, gdy można wykonać sumowanie szeregu, możemy nawet otrzymać całkę w postaci skończonej.

Może się atoli zdarzyć, że równania (2) dla $x = x_0$ oraz dla $y = y_0, y' = y'_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ nie doprowadzają do rozwiązań (np. gdy niektóre z pochodnych $y^{(r)}$ stają się nieskończonemi). Należałoby wtedy zmienić wartości dowolnie obrane, równanie zaś (1), nawet gdy spełniają się warunki zbieżności, nie może być uważane za całkę ogólną, lecz za całkę szczególną, gdyż, aby całka była ogólną, trzeba aby wartości $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ można było dobrać najzupełniej dowolnie. Oznaczać to będzie, że całka ogólna nie daje się rozwinąć na szereg T a y l o r a w otoczeniu punktu x_0.

Następujący przykład dobrze nam wyjaśni metodę niniejszą: przykładem tym jest równanie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{m}{x}\,\frac{dy}{dx} + ny = 0\,,$$

nazwane **r ó w n a n i e m B e s s e l a**; jest to równanie liniowe jednorodne rzędu drugiego. Możemy je napisać tak:

$$xy'' + my' + nxy = 0,$$

a biorąc pochodne, znajdujemy:

$$xy''' + (m+1)\, y'' + nxy' + ny = 0,$$

$$xy^{(4)} + (m+2)\, y''' + nxy'' + 2ny' = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Prawo dalszego tworzenia tych związków jest widoczne.

Widać tu, że dla $x_0 = 0$ nie można wziąć dowolnych wartości na y_0 i y_0', gdy bowiem weźmiemy $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ otrzymamy $y_0' = 0$. A więc całka **o g ó l n a** naszego równania nie może być rozwiniętą na szereg **T a y l o r a** w otoczeniu punktu $x = 0$. Za pomocą tej metody możemy otrzymać tylko całkę szczególną w otoczeniu tego punktu. Połóżmy $x = x_0 = 0$, $y = y_0$, $y' = y'_0 = 0$, wtedy z poprzedzających równań otrzymujemy:

$$y'' = \frac{-ny_0}{m+1}, \quad y''' = 0, \quad y^{(4)} = \frac{3n^2 y_0}{(m+3)\,(m+1)}, \quad \ldots$$

Podstawiając te wartości, znajdujemy całkę:

$$y = y_0 \left[1 - \frac{1\,.\,nx^2}{2!\,(m+1)} + \frac{1\,.\,3\,.\,n^2x^4}{4!\,(m+1)\,(m+3)} - \ldots\right].$$

Wyrazem ogólnym tego szeregu jest:

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2r+1)\, n^{r+1}\, x^{2r+2}}{(2r+2)!\,(m+1)\,(m+3) \ldots (m+2r+1)}$$

i łatwo widzieć, że stosunek wyrazu rozwinięcia do poprzedzającego dąży do zera; szereg jest przeto zbieżnym dla każdej skończonej wartości zmiennej x. Przedstawia on całkę szczególną równania **B e s s e l a**.

Dla $m = 1, n = 1$ będzie:

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 . 4^2} - \frac{x^6}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \ldots\right).$$

Ilość zawarta w nawiasie jest funkcyą znaną w analizie pod nazwą funkcyi Bessela.

Dla $m = 2, n = 1$ mamy funkcyę:

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \ldots\right),$$

gdzie strona druga równa się $y_0 \dfrac{\sin x}{x}$, jak to łatwo spostrzedz, przypominając sobie szereg na rozwinięcie funkcyi $\sin x$.

---

§ 19.

Równania o pochodnych cząstkowych.

Dotąd uważaliśmy tylko funkcye jednej zmiennej, dające początek równaniom różniczkowym zwyczajnym. Wyobraźmy sobie teraz funkcyę pewnej liczby zmiennych niezależnych, t. j. związek pomiędzy taką funkcyą, zmiennemi niezależnemi oraz pochodnemi cząstkowemi funkcyi względem tych zmiennych. Stawiamy sobie zadanie znalezienia przy pomocy równania o pochodnych cząstkowych najogólniejszej postaci funkcyi, która mu odpowiada; funkcyę tę nazwiemy całką równania danego.

Rozpocznijmy od przypadku dość prostego. Niechaj będzie równanie:

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

w którem z jest funkcyą zmiennych x i y, przytem w równaniu tem występuje tylko pochodna cząstkowa zmiennej z względem jednej zmiennej x. Uważając chwilowo zmienną y za stałą, możemy zcałkować to równanie, które wtedy staje się równaniem różniczkowem zwyczajnem; niechaj całką równania będzie:

$$z = \varphi(x, y, c),$$

gdzie c jest stałą dowolną. Ta całka czyni zadość równaniu danemu, w tem rozumieniu, że otrzymawszy z niego pochodną zmiennej z względem x i rugując z obu stałą c, dochodzimy do równania danego. Lecz jest widocznem, że gdy zamiast uważać ilość c za stałą, uważać ją będziemy za funkcyę dowolną zmiennej y, pod warunkiem, by pochodna zmiennej z względem x miała to samo wyrażenie, co poprzednio, to i w tym przypadku zmienna z będzie czyniła zadość równaniu danemu. Widzimy więc, że w rozwiązywaniu równań o pochodnych cząstkowych występuje fakt, że w wyrażeniu całki zamiast stałej dowolnej może zachodzić funkcya dowolna.

Nie możemy zająć się tu badaniem teoryi ogólnej równań o pochodnych cząstkowych i ograniczymy się jedynie na przypadku równań rzędu 1-go i liniowych względem pochodnych.

Rozpatrzmy przypadek dwu zmiennych niezależnych x, y. Postać ogólna równania liniowege o pochodnych cząstkowych jest:

$$(1) \qquad Pp + Qq = R,$$

gdzie p i q są pochodnemi zmiennej z względem zmiennych x i y, ilości zaś P, Q, R są funkcyami zmiennych x, y, z.

Całkowanie tego równania daje się, jak to okażemy, sprowadzić do całkowania układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Niechaj $u =$ const., gdzie u jest funkcyą zmiennych x, y, z będzie rozwiązaniem danego równania, (o ile rozwiązanie takie istnieje). Stąd otrzymamy.

$$p = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}},$$

a wstawiając te wartości w równaniu danem, powinniśmy otrzymać tożsamościowo:

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Jeżeli założymy, że istnieje inne rozwiązanie $v = \text{const.}$, różne od poprzedzającego, powinno być analogicznie:

$$P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Ponieważ jest także:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial z}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz = 0,$$

przeto ilości dx, dy, dz otrzymane z równań $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, powinny być takiemi, że:

(2) $$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

t. j. powinny być proporcyonalne do ilości P, Q, R. Otóż te dwa ostatnie równania tworzą układ dwu równań różniczkowych zwyczajnych, w którym dwie z trzech zmiennych x, y, z można uważać za funkcye trzeciej. Układ taki, jak wiemy, ma zawsze rozwiązanie; można zatem zawsze znaleść dwa związki pomiędzy zmiennemi x, y, z takie, że otrzymawszy z nich dwie z tych zmiennych, wyrażone przez trzecią, będziemy mieli dwie funkcye, czyniące zadość układowi (2). Temi dwiema całkami będą właśnie $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, z nich każda jest całką równania o pochodnych cząstkowych.

W ten sposób możemy znaleść dwie różne całki równania danego; obie są rozwiązane względem dwu stałych dowolnych. Jednak łatwo spostrzedz, że można otrzymać rozwiązanie daleko ogólniejsze. Można mianowicie okazać, że wyrażenie:

$$u = \varphi(v),$$

w którem φ jest symbolem f u n k c y i d o w o l n e j czyni również zadość równaniu danemu.

W samej rzeczy, z tego nowego związku pomiędzy zmiennemi x, y, z wynika:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p = \varphi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q = \varphi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q\right),$$

skąd:

$$p = -\frac{\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial u}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}}{\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial u}{\partial z}},$$

co podstawiając w równaniu danem, otrzymujemy:

$$-\varphi'(v)\left(P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,$$

t. j. oczywiście tożsamość, bez względu na to, jaką jest funkcyą $\varphi(v)$. Doszliśmy zatem do interesującego rezultatu, że znając dwie całki u, v, możemy utworzyć całkę ogólniejszą, wprowadzając symbol funkcyi dowolnej. Taka całka nazywa się c a ł k ą o g ó l n ą r ó w n a n i a o p o c h o d n y c h c z ą s t k o w y c h.

Podamy kilka zastosowań tej teoryi.

1) Szukajmy równania powierzchni, której płaszczyzna styczna w każdym punkcie jest równoległa do prostej danej.

Niechaj prosta ta przechodzi przez początek spółrzędnych i wyraża się równaniami:

$$aZ = X, \quad bZ = Y,$$

lub:

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{1},$$

gdzie a i b są stałe. Płaszczyzna styczna do powierzchni $z = f(x, y)$ w punkcie x, y, z wyraża się równaniem:

$$(X-x)\,p + (Y-y)\,q - (Z-z) = 0,$$

a warunkiem, aby ta płaszczyzna była równoległa do prostej danej jest:

$$ap + bq - 1 = 0.$$

Dla oznaczenia powierzchni winniśmy zcałkować to równanie liniowe o pochodnych cząstkowych. Stosując metodę powyższą, mamy do rozwiązania układ równań różniczkowych.

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

i winniśmy znaleść dwie całki tego układu: $u =$ const, $v =$ const, rozwiązane względem stałych. Równania te możemy napisać tak:

$$\frac{dx}{dz} = a, \quad \frac{dy}{dz} = b,$$

skąd:

$$x = az + \text{const}, \quad y = bz + \text{const}.$$

Znajdujemy przeto:

$$u = x - az, \quad v = y - bz,$$

tak, że całkę ogólną otrzymamy w postaci:

$$\varphi\,(x - az,\ y - \ z) = 0,$$

gdzie φ jest funkcyą dowolną. Jest to równanie szukanej powierzchni, która będzie walcem o tworzących równoległych do prostej stałej. W samej rzeczy, jeżeli x, y, z jest punktem powierzchni i jeżeli $x - az = \alpha$, $y - bz = \beta$, to jest jasnem, że każdy punkt prostej, przedstawionej przez te dwa równania, jest zarazem punktem powierzchni.

2) Znaleść równanie powierzchni takiej, że płaszczyzna styczna w każdym punkcie przechodzi przez punkt stały.

Jeżeli x_0, y_0, z_0 jest punktem stałym, to warunek dla płaszczyzny stycznej w punkcie x, y, z wyraża się w ten sposób:

$$(x - x_0)\,p + (y - y_0)\,q = z - z_0,$$

t. j. równaniem o pochodnych cząstkowych. By to równanie zcałkować, bierzemy układ równań różniczkowych:

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0},$$

który po zcałkowaniu daje:

$$\log\,(x - x_0) = \log\,(z - z_0) + \log C_1,$$
$$\log\,(y - y_0) = \log\,(z - z_0) + \log C_2,$$

skąd:

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = C_1, \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = C_2,$$

a więc równaniem szukanej powierzchni będzie:

$$\varphi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \ \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0,$$

gdzie φ jest funkcyą dowolną.

Powierzchnią szukaną jest stożek z wierzchołkiem w punkcie x_0, y_0, z_0. W samej rzeczy, jeżeli x, y, z są spółrzędnemi punktu powierzchni $\varphi = 0$, wtedy widocznie $\frac{x + \lambda x_0}{1 + \lambda}$, $\frac{y + y \lambda_0}{1 + \lambda}$, $\frac{z + \lambda z_0}{1 + \lambda}$ będą także spółrzędnemi punktu powierzchni, jak to wprost sprawdzić łatwo.
