

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



4874

L. inw.

USTER

PLANIMETRIE

B. G. TEUBNER



IN LEIPZIG

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299006

GEOMETRISCHE AUFGABEN
UND LEHRBUCH DER GEOMETRIE.

PLANIMETRIE — STEREOMETRIE
EBENE UND SPHÄRISCHE TRIGONOMETRIE.

NACH KONSTRUKTIV-ANALYTISCHER METHODE BEARBEITET

VON

DR. M. SCHUSTER,

PROFESSOR AN DER OBERREALSCHULE ZU OLDENBURG.

AUSGABE A: FÜR VOLLANSTALTEN.

ERSTER TEIL: PLANIMETRIE.

ZWEITE, NACH DEN PREUSSISCHEN LEHRPLÄNEN VON 1901
UMGEARBEITETE AUFLAGE.

MIT ZWEI LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.



LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1903.

KID 513.1/.2(075.3:076)



114894

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Akc. Nr. 3622/50

Vorwort.

„Die Jugend regt sich, wenn sie fühlt, daß sie etwas kann;
und das Gefühl des Könnens muß man ihr schaffen.“

(Herbart, Umriss pädagogischer Vorlesungen.)

Das vorliegende Buch ist im Gegensatz zu anderen Aufgabensammlungen zum durchaus selbständigen Gebrauch beim Unterricht bestimmt. Deshalb sind die Aufgaben nur innerhalb der einzelnen Abschnitte methodisch geordnet; diese selbst aber schließen sich in ihrer Gliederung und in ihrer Folge streng systematisch an einander und an die amtlichen Lehrpläne an, sodaß sich auf ihnen das ganze planimetrische Lehrgebäude lückenlos und folgerichtig aufbaut.

Der allgemeine Plan für die Auswahl und Anordnung der Aufgaben ist folgender. Der zu entwickelnde Satz wird zuerst an einfachen Einzelfällen in seinen Umrissen anschaulich erkennbar gemacht; dann wird durch geeigneten Wechsel in den Elementen und ihren Bezeichnungen das Wesentliche seines Inhaltes vom Nebensächlichen geschieden und er selbst auf die der betreffenden Stufe angepaßte abstrakte Form gebracht. Aus dieser werden bemerkenswerte Sonderfälle und Lösungsmethoden für neue Aufgaben abgeleitet, um letztere dann in Verbindung mit bereits Bekanntem zur Quelle neuer Erkenntnis zu machen.

Somit nimmt das Buch in planmäßigem Wechsel zwischen induktivem und deduktivem Verfahren, in stetem Umsatz von Wissen in Können, von Energie in Arbeit die Methode des arithmetischen Unterrichts zum Vorbild; es sucht ferner „nicht bloß die Beobachtung für sinnliche Dinge zu schärfen, sondern vorzüglich, geometrische Phantasie zu wecken und damit das arithmetische Denken zu verbinden“ (Herbart a. a. O. § 253).

Dieser Anordnung entsprechend zerfallen die Aufgaben in zwei Klassen: solche, deren Ergebnisse für den Weiterbau des Systems wichtig sind, und solche, die als Übungsbeispiele nur vorübergehenden Wert besitzen. Die Aufgaben der ersten Klasse sind durch einen

Stern hervorgehoben. Sie nehmen einen so knapp als möglich bemessenen Raum ein, sodaß sie auch bei beschränkter Zeit und sonstigen äußeren Hindernissen bequem erledigt und durch Übungsbeispiele ausreichend gestützt werden können. Andererseits war es das Bestreben des Verfassers, den Übungsstoff so reichhaltig und vielseitig zu gestalten, daß dem Geschmack des Lehrers und seiner persönlichen Methode voller Spielraum bleibt, und die Unterabteilungen der einzelnen Nummern sind so zahlreich, aber auch so nahe verwandt, daß für häusliche Arbeiten, die nicht bloß die Einübung von Formen bezwecken, sondern einen Wertmesser für selbständige Leistungen abgeben sollen, immer nur einer Gruppe von wenigen Schülern die nämliche Aufgabe gestellt zu werden braucht, während die schulmäßige Vorbereitung für alle gleichzeitig und von einheitlichem Gesichtspunkte aus erfolgen kann.

An die Aufgaben jedes Abschnittes schließt sich eine systematische „Zusammenfassung“ von Erklärungen (A) und Lehrsätzen (B). Die Stichworte für die Erklärungen und die Hinweise auf die in den Zusammenfassungen enthaltenen Ergebnisse sind im Texte der Aufgaben durch Sperrdruck hervorgehoben; die Lehrsätze sind in ihrer Bedeutung für das System durch dreifach abgestuften Druck als unbedingt notwendig, wünschenswert oder nebensächlich gekennzeichnet. Um die Aufgabensammlung namentlich auf höheren Klassen auch als Nachschlagebuch benutzen zu können, ist ein Sachverzeichnis angefügt. Dasselbe soll zugleich als Wörterbuch für Verdeutschungen dienen, von denen einige, z. B. „Maßkreis“ für Transporteur, (vgl. „Maßstab“), „Ringreise“ für konzentrische Kreise neu sein dürften. Indessen glaubte der Verfasser, in der Ausmerzung von Fremdwörtern nicht allzuweit gehen zu sollen; z. B. sind Ausdrücke wie kongruent, symmetrisch, parallel, Projektion, Diagonale, Hypotenuse, Kathete, Potenz, ferner die üblichen Vierecksbezeichnungen in Ermangelung ungekünstelter und mathematisch unzweideutiger Übersetzungen unbeanstandet gelassen.

Figuren sind nur in beschränkter Zahl und nur solchen Aufgaben beigegeben, auf welche im Laufe des Unterrichts öfters zurückgegriffen werden muß. Um sie gegebenenfalls ohne Umblättern betrachten zu können, sind sie nicht in den Text gedruckt, sondern auf besonderen Tafeln untergebracht. Diese Einrichtung ermöglicht auch die gleichzeitige Erörterung dualistisch verwandter Figuren bei Wiederholungen, sowie eine Benutzung der Tafel bei geschlossenem Buche. Im übrigen sollen die Schüler sich gewöhnen, mit dem Bleistift in der Hand zu arbeiten; denn das Skizzieren von Figuren sowohl, wie die saubere Ausführung von Zeichnungen sind gerade die Punkte, wo die Selbstbetätigung zuerst einsetzen muß, und die fruchtbarste Vorbereitung für die verstandesmäßige Durchdringung und Verarbeitung der sinnlichen

Anschauung. „Sinnliche Vorstellungen in gehöriger Stärke machen die sicherste Grundlage für einen Unterricht aus, dessen guter Erfolg abhängig ist von der Art, wie der Zögling die Vorstellungen des Räumlichen innerlich bildet“ (Herbart, a. a. O. § 102).

Oldenburg, den 10. August 1899.

M. Schuster.

Vorwort zur 2. Auflage.

Meine Absicht, die schulmäßige Behandlung der Geometrie vorzugsweise auf konstruktive Grundlage zu stellen, und die Art ihrer Ausführung haben, soweit mir bekannt geworden, allgemeine Zustimmung gefunden, die bedeutsamste durch die „Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen in Preußen“ vom Jahre 1901. Sie bezeichnen als „wichtigste Aufgabe des mathematischen Unterrichts die Schulung des Geistes, welche den Schüler befähigt, die erworbenen Anschauungen und Kenntnisse in selbständiger Arbeit richtig anzuwenden“ und „empfehlen“ insbesondere in der Planimetrie, „nur die für das System unentbehrlichen Sätze einzuprägen, alles andere aber als Übungsstoff, womöglich in der Form von Aufgaben zu behandeln“.

Es handelte sich demnach bei der Bearbeitung der 2. Auflage vor allem darum, die Eigenart des Buches zu wahren und nur in der Verteilung des Stoffes die durch die neuen Lehrpläne bedingten Änderungen vorzunehmen. Im wesentlichen sind es folgende:

1. Die „Inhaltsberechnung“ (Abschnitt VI in der 1. Auflage) ist als Abschnitt X hinter die „Flächengleichheit“ zurückgestellt worden.

2. Die Aufgaben über Proportionalität gerader Linien am Kreise und über stetige Teilung (1. Auflage XVI, 1—8) sind an Abschnitt XII angegliedert worden.

3. Der Abschnitt XV der 1. Auflage ist in zwei Teile: „XV. Anwendungen der Algebra auf die Geometrie“ und „XVI. Konstruktionsaufgaben mit algebraischer Analysis“ zerlegt, die rein konstruktiven Aufgaben des früheren Abschnittes XV aber sind an anderer Stelle eingereiht worden.

Um jedoch die Weiterbenutzung der 1. Auflage neben der zweiten zu ermöglichen, ist allen in ihrer Stellung veränderten Aufgaben die Nummer der 1. Auflage in Klammer beigefügt.

Den zahlreichen Freunden, die das Buch sich und mir erworben hat, sage ich für das bewiesene Interesse meinen herzlichsten Dank und verbinde damit die Bitte um Erhaltung ihres freundlichen Wohlwollens.

Oldenburg, den 16. März 1902.

M. Schuster.

Inhalt.

Abschnitt I. Die Raumgrößen.

	Seite
Die Arten der Raumgrößen. (1—6)	1
Wesentliche Merkmale. (7—9)	1
Einteilung der Flächen und Linien. (10—15)	2
Erzeugung der Raumgrößen durch Bewegung. (16—19)	2
Teilung der Raumgrößen. (20—22)	3

Abschnitt II. Der Winkel.

Entstehung eines Winkels. (1—3)	4
Rechte und gestreckte Winkel. (4—8)	4
Einteilung in Grade. (9—18)	5
Nebenwinkel und Scheitelwinkel. (19—23)	6

Abschnitt III. Das Dreieck.

Seiten und Winkel. (1—5)	8
Mittellinien, Winkelhalbierende, Höhen. (6—14)	9
Die Winkelsumme des Dreiecks. (15—22)	11
Rechtwinklige Dreiecke. (23—26)	12
Stumpfwinklige Dreiecke. (27—28)	13
Winkel mit paarweise senkrechten Schenkeln. (29—30)	14

Abschnitt IV. Das gleichschenklige Dreieck.

Symmetrische Beziehungen. (1—9)	16
Sonderfälle. (10—16)	17
Anwendungen des gleichschenkligen Dreiecks. (17—23)	18
Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln im ungleichseitigen Dreieck. (24—29)	19

Abschnitt V. Das Viereck.

Parallele Linien. (1—6)	21
Das Parallelogramm. (7—12)	22
Anwendungen des Parallelogramms. (13—21)	23
Besondere Parallelogramme. (22—26)	25
Das Trapez. (27—31)	25
Das allgemeine Viereck. (32—34)	26

Abschnitt VI. Örter und Kongruenzsätze.

Der Kreis als Ort. (1—2)	29
Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreiecks. (3—5)	29
Kongruenz von Dreiecken. (6—10)	30
Anwendungen der Kongruenz. (11—19)	31
Unvollständige Kongruenz. (20—22)	32
Die Gerade als Ort. (23—28)	33

Abschnitt VII. **Der Kreis.**

	Seite
Lage eines Punktes, einer Geraden, eines Kreises zu einem Kreise. (1—6)	35
Symmetrie des Kreises. (7—14)	36
Winkel am Kreise. (15—21)	37
Der Umfangswinkel auf dem Durchmesser. (22—31)	38
Der Ortsbogen. (32—40)	40

Abschnitt VIII. **Kreisvielecke.**

Das Dreieck als Sehnendreieck. (1—5)	44
Das Dreieck als Tangendendreieck. (6—9)	45
Das Sehnenviereck. (10—16)	45
Das Tangentenviereck. (17—20)	47
Beziehungen zwischen Umkreis, Inkreis und anderen Kreisen des Dreiecks. (21—27)	47

Abschnitt IX. **Flächengleichheit.**

Verwandlung eines Dreiecks. (1—8)	51
Verwandlung eines Parallelogramms. (9—16)	52
Verwandlung von Vielecken in Dreiecke, Rechtecke, Quadrate. (17—19)	53
Der pythagoreische Lehrsatz. (20—22)	53
Anwendungen des pythagoreischen Lehrsatzes. (23—25)	54
Teilung von Figuren. (26—34)	55

Abschnitt X. **Inhaltsberechnung.**

Das metrische Flächenmaß. (1—5)	57
Das Rechteck. (6—13)	57
Das Parallelogramm und das Dreieck. (14—20)	59
Das Trapez. (21—23)	60
Das n -Eck. (24—29)	61

Abschnitt XI. **Streckenverhältnisse.**

Innenteilung einer Strecke. (1—5)	62
Geometrische Verhältnisgleichungen. (6—9)	63
Winkel mit Parallelen. (10—16)	63
Außenteilung einer Strecke. (17—23)	64
Strahlenbüschel und Parallelenschar. (24—31)	66
Irrationale Verhältnisse. (32—33)	67

Abschnitt XII. **Verhältnisse am Dreieck und am Kreise.**

Teilverhältnis der Mittellinien eines Dreiecks. (1—4)	69
Teilung einer Dreiecksseite durch die Winkelhalbierenden. (5—10)	70
Verhältnis der Höhen eines Dreiecks. (11—15)	71
Mittlere Proportionalen im rechtwinkligen Dreieck. (16—20)	72
Verhältnis der Flächen zweier Dreiecke. (21—25)	73
Verhältnisse am Kreise. (26—33)	73

Abschnitt XIII. **Ähnlichkeit.**

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke. (1—5)	77
Anwendung ähnlicher Dreiecke. (6—15)	77

	Seite
Geodätische Anwendungen. (16—21)	79
Der Flächeninhalt ähnlicher Dreiecke. (22—28)	81
Ähnliche Vielecke. (29—33)	82
Ähnlichkeit der Kreise. (34—36)	82

Abschnitt XIV. **Regelmäßige Figuren, Kreisberechnung.**

Konstruktion regelmäßiger Vielecke aus dem Halbmesser des Umkreises. (1—6)	84
Konstruktion regelmäßiger Vielecke aus Seiten und Diagonalen. (7—10)	85
Berechnung der Seiten regelmäßiger Vielecke. (11—15)	85
Berechnung der Diagonalen, Halbmesser und Inhalte. (16—21)	86
Regelmäßige Tangentenvielecke. (22—23)	87
Berechnung des Kreisumfangs. (24—33)	87
Berechnung der Kreisfläche. (34—37)	89

Abschnitt XV. **Anwendungen der Algebra auf die Geometrie.**

Algebraische Summen von Strecken. (1—7)	92
Darstellung des Unterschiedes zweier Dreieckswinkel. (8—15)	93
Algebraische Anwendungen des pythagoreischen Lehrsatzes. (16—28)	95
Erweiterung des pythagoreischen Lehrsatzes. (29—37)	97
Die Ankreise des Dreiecks. (38—46)	98
Der Satz des Ptolemäus. (47—51)	100
Regelmäßige Vielecke und Sternfiguren. (52—57)	100
Ortsringkreise und Ortsparallelen. (58—68)	101

Abschnitt XVI. **Konstruktionsaufgaben mit algebraischer Analysis.**

Gleichungen ersten Grades. (1—12)	106
Dreieckskonstruktionen durch vierte Proportionalen. (13—20)	107
Dreieckskonstruktionen durch mittlere Proportionalen. (21—24)	109
Gleichungen zweiten Grades. (25—37)	109

Abschnitt XVII. **Potenzlinien und Potenzpunkte.**

Die Potenz eines Punktes. (1—4)	112
Die Potenzlinie zweier Kreise. (5—10)	112
Der Potenzpunkt dreier Kreise. (11—14)	113
Sonderfälle der Potenzlinie und des Potenzpunktes. (15—20)	114
Die Potenzlinie als Ort. (21—34)	115
Andere Potenzörter. (35—42)	118

Abschnitt XVIII. **Harmonische Punkte und Strahlen.**

Harmonische Punkte. (1—8)	121
Harmonische Vierstrahlen. (9—14)	122
Der Satz des Menelaus. (15—20)	123
Der Satz des Ceva. (21—26)	124
Das Vierseit. (27—35)	125
Der Satz des Pascal. (36—42)	127

Abschnitt XIX. **Pole und Polaren.**

Die Polare eines Punktes und der Pol einer Geraden. (1—7)	131
Die Polaren einer Punktreihe und die eines Büschels. (8—11)	131

	Seite.
Polare Beziehungen zwischen Sehnen- und Tangentenviereck. (12—15)	132
Der Satz des Brianchon. (16—20)	132
Polare Figuren. (21—22)	133
Beziehungen zwischen Polaren und Potenzlinien. (23—26)	133

Abschnitt XX. Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsachsen.

Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsstrahlen. (1—6)	136
Perspektivische Transversalen. (7—13)	137
Die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise. (14—23)	138
Die Ähnlichkeitspunkte des Umkreises und des Feuerbachkreises. (24—27)	139
Die Berührungsaufgabe des Apollonius. (28—34)	141
Ähnlichkeitsachsen. (35—39)	142

Maßzahlen und Lagenbezeichnungen	146
----------------------------------	-----

Sachverzeichnis	148
-----------------	-----

Druckfehler.

S. 111 Z. 5 v. u. statt: „der beiden anderen Seiten“
lies: „der Quadrate der beiden anderen Seiten“.

I. Die Raumgrößen.

Die Arten der Raumgrößen.

- *1. (Körper, Flächen, Linien.) Was ist ein Würfel? Wovon wird er begrenzt? Wie viele Kanten und Ecken hat er? Was sind seine Kanten? Was sind seine Ecken? — Fertige aus Pappe einen Würfel an, dessen Kanten je 10 cm lang sind.
Ergebnis: Zusammenfassung 1, 2.
2. Beschreibe **a)** eine Zigarrenkiste, **b)** das Schulzimmer. **c)** Nenne andere Körper, welche die Gestalt eines vierseitigen Prismas haben.
3. Beschreibe einen sechskantigen (ungespitzten) Bleistift. Zu welcher Art von Prismen gehört er?
4. Beschreibe **a)** ein dreiseitiges, **b)** ein fünfseitiges, **c)** ein achtseitiges Prisma. Fertige aus Pappe Modelle dieser Körper an.
5. Welche Gestalt gaben die alten Ägypter den Grabmälern ihrer Könige? Was sind die Seitenflächen einer Pyramide? Was ist die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide?
6. Beschreibe **a)** eine sechsseitige, **b)** eine dreiseitige, **c)** eine zehneitige Pyramide. (Pappmodelle!)

Wesentliche Merkmale.

- *7. (Ausdehnungen.) Bestimme durch Messen die Länge und Breite des Fußbodens, sowie durch Schätzen die Höhe der Wände. Beschreibe hiernach das Schulzimmer.
Ergebnis: Zusammenfassung 3, 4.
8. Miß die Kanten **a)** der Wandtafel, **b)** deines Griffelkastens, **c)** deiner Tischplatte, **d)** der Tür, **e)** des Klassenschrankes. Beschreibe hiernach diese Körper und ihre Begrenzungsflächen.

9. Wie nennt man die Ausdehnungen **a)** eines Zimmers, **b)** eines Buches, **c)** eines Grabens, **d)** des Fußbodens, **e)** einer Wandfläche, **f)** einer Tischkante?

Einteilung der Linien und Flächen.

- *10. (Gerade und krumme Linien.) Auf wieviel Wegen kann man von einem Punkte *A* nach einem anderen Punkte *B* gelangen? Welcher Weg ist der kürzeste?
Ergebnis: Zusammenfassung 5, 6.
11. Nenne Flächen, die **a)** von geraden, **b)** von krummen, **c)** von geraden und krummen Linien begrenzt werden.
- *12. (Strecke, Strahl, Gerade.) **a)** Durch wieviel Punkte wird die Lage und die Richtung einer geraden Linie bestimmt? **b)** In welchem Falle bestimmen diese Punkte noch etwas anderes als Lage und Richtung? **c)** Wie kann eine gerade Linie begrenzt sein?
Ergebnis: Zusammenfassung 7.
- *13. (10.) (Ebene und gekrümmte Flächen.) Von was für Flächen wird eine runde Blechbüchse begrenzt? Nenne und beschreibe andere Körper, welche die Gestalt eines Zylinders haben.
Ergebnis: Zusammenfassung 5.
14. (11.) Inwiefern ist der Zylinder ein Prisma? Wie nennt man eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist? Von was für Flächen wird ein Kegel begrenzt?
15. (12.) Nenne Körper, die **a)** von lauter gekrümmten Flächen, **b)** von einer einzigen gekrümmten Fläche begrenzt werden.

Erzeugung der Raumgrößen durch Bewegung.

- *16. (13a, 14.) (Erzeugung einer Linie.) **a)** Was wird durch die Spitze des Zeichenstiftes erzeugt, wenn man sie auf dem Papiere fortbewegt? Was für eine Linie beschreibt der Mittelpunkt **b)** einer aufsteigenden Leuchtkugel, **c)** eines Billardballes, **d)** eines am Faden schwingenden Balles, **e)** eines Schneeballes, **f)** der Erde; ferner die Spitze **g)** eines Uhrzeigers, **h)** eines Uhrpendels?
- *17. (13b, 15.) (Erzeugung einer Fläche.) Was für eine Fläche wird erzeugt **a)** durch den Stab eines Rollvorhangs beim

Niederlassen, **b**) durch das Aufklappen eines Fächers, **c**) durch die Aufwärtsbewegung einer sich gleichmäßig verkürzenden geraden Linie?

- *18. (13c, 16.) (Erzeugung eines Körpers.) Was für einen Körper erzeugt die Bewegung eines Rechtecks **a**) beim Aufziehen einer Schublade, **b**) beim Aufziehen einer Ziehharmonika, **c**) beim Aufklappen eines Buches, **d**) beim Öffnen einer Tür? **e**) Was für ein Körper entsteht durch die Drehung eines Kreises um seinen Durchmesser? (Münze als Kreisel!)
Ergebnis von 16—18: Zusammenfassung 8.

19. (17.) Auf welche Art kann entstehen **a**) ein Würfel, **b**) ein sechsseitiges Prisma, **c**) eine sechsseitige Pyramide, **d**) ein Zylinder, **e**) ein Kegel, **f**) eine Kugel?

Teilung der Raumgrößen.

- *20. (18.) (Teilung einer Linie.) Ziehe eine Strecke MO von 48 mm Länge und teile sie (mittels des Maßstabes) **a**) in 2, **b**) in 3, **c**) in 4 gleiche Teile.
- *21. (19.) (Teilung einer Fläche.) Zeichne ein Viereck $AKLM$ und ziehe die Diagonale AL . In welche Teile wird das Viereck geteilt?
- *22. (20.) (Teilung eines Körpers.) Was für ein Körper wird geteilt, und durch welche Fläche wird die Teilung bewirkt **a**) beim Zersägen eines Baumstammes, **b**) beim Spalten eines Holzscheites, **c**) beim Zerschneiden eines Apfels, **d**) beim Anspitzen eines Bleistiftes, **e**) beim Anschneiden eines Brotes?
Ergebnis von 20—22: Zusammenfassung 9.

Zusammenfassung.

1. Es gibt drei Arten von Raumgrößen: Körper, Flächen, Linien.
2. Die Fläche ist die Grenze des Körpers, die Linie die Grenze der Fläche. Die Grenze der Linie ist der Punkt. Der Körper ist ein begrenzter Teil des Raumes.
3. Die Raumgrößen unterscheiden sich durch die Zahl ihrer Ausdehnungen. Der Körper hat drei Ausdehnungen: von links nach rechts, von vorn nach hinten, von oben nach unten. Die Fläche hat zwei Ausdehnungen, die Linie nur eine.

4. Die Ausdehnung der Linie heißt Länge; die Ausdehnungen der Fläche nennt man gewöhnlich Länge und Breite, die des Körpers Länge, Breite und Höhe.
5. Wir teilen die Linien ein in gerade und krumme, die Flächen in ebene und gekrümmte.
6. Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Sie wird also durch zwei Punkte bestimmt.
7. Eine gerade Linie heißt Strecke, Strahl oder Gerade, je nachdem sie beiderseits oder nur auf einer Seite oder gar nicht begrenzt ist.
8. Eine Linie entsteht durch Bewegung eines Punktes, eine Fläche durch Bewegung einer Linie, ein Körper durch Bewegung einer Fläche.
9. Eine Linie wird durch Punkte geteilt, eine Fläche durch Linien, ein Körper durch Flächen.

II. Der Winkel.

Entstehung eines Winkels.

- *1. (Bezeichnungen.) Ziehe von einem Punkte K aus zwei Strahlen KM und KP . Wie heißt der von ihnen eingeschlossene Winkel? Welches ist sein Scheitel? Welches sind seine Schenkel?

Ergebnis: Zusammenfassung A 1.

2. a) Zeichne ein Dreieck ABC . Nenne seine Winkel, ihre Scheitel und ihre Schenkel. b) Desgl. für ein Viereck. c) Desgl. für die zu I, 21 gezeichnete Figur.

- Fig. 1. *3. (Erzeugung eines Winkels.) Welche Bewegung muß der Strahl KM ausführen, um den Winkel MKP zu erzeugen? Welchen Weg beschreibt dabei ein Punkt A des Schenkels KM ? Wodurch wird ein Winkel gemessen?
Ergebnis: Zusammenfassung A 2.

Rechte und gestreckte Winkel.

- *4. (Der rechte Winkel.) Was für einen Winkel schließen je zwei Kanten der Wandtafel ein? Wie groß ist der Bogen eines rechten Winkels?

Ergebnis: Zusammenfassung A 3, 4.

5. a) Nenne andere Linien, die rechte Winkel einschließen.
 b) Um wieviel Uhr bilden die Uhrzeiger einen rechten Winkel?
 c) Welche Windrichtungen stehen senkrecht aufeinander?
- *6. (Senkrechte und Lot.) a) Errichte (mittels Lineal und Winkelscheit) auf der Geraden AB im Punkte C die Senkrechte. b) Fülle auf die Gerade AB von einem Punkte D das Lot.
 Ergebnis: Zusammenfassung A 5.
- *7. (Der gestreckte Winkel.) Zeichne einen Winkel, der doppelt so groß ist wie 1 R. Wie groß ist der Bogen eines gestreckten Winkels? Wie liegen seine Schenkel?
 Ergebnis: Zusammenfassung A 6.
8. a) Um wieviel Uhr bilden die Uhrzeiger einen gestreckten Winkel? b) Welche Windrichtungen bilden einen gestreckten Winkel?

Einteilung in Grade.

- *9. (Der Maßkreis.) Zeichne einen gestreckten Winkel AZT , teile seinen Halbkreis durch die Punkte B, C, D u. s. w. in 18 gleiche Teile¹⁾, ziehe die Halbmesser nach den Teilpunkten und teile dann die Bogen AB, BC u. s. f. nach dem Augenmaß erst in je 2, dann jede Hälfte in 5 gleiche Teile. Wieviel Grad hat a) ein gestreckter, b) ein rechter, c) ein Vollwinkel? (Jahreslauf der Erde.)
 Ergebnis: Zusammenfassung A 7.
10. Bestimme mittels des Maßkreises die Größe der Winkel a) eines (selbstgezeichneten) Dreiecks, b) eines Vierecks.
11. Mittels des Maßkreises soll an einen Strahl OX im Punkte O ein Winkel von a) 20° , b) 50° , c) 130° , d) 64° , e) 152° , f) $77,5^\circ$, g) $101,5^\circ$ angetragen werden.
- *12. (Spitze, stumpfe und erhabene Winkel.) Welche von den in 11 genannten Winkeln sind spitz, welche stumpf? Was ist ein erhabener Winkel?
 Ergebnis: Zusammenfassung A 8.
13. Welchen Winkel bilden die Uhrzeiger (vom großen aus in der Richtung ihrer Drehung gerechnet) um:
 a) 3^h c) 1^h e) 4^h g) 7^h i) 9^h l) 11^h
 b) 6^h d) 2^h f) 5^h h) 8^h k) 10^h m) 12^h ?

1) Nimmt man $ZA = 57$ mm, so ist $AB = BC = CD$ u. s. f. fast genau 10 mm.

14. Wieviel Grad legt der große Zeiger **a)** in 60^m , **b)** in 1^m , **c)** in 8^m , **d)** in 25^m , **e)** in 31^m , **f)** in 100^m , **g)** in t^m zurück? Beantworte dieselben Fragen für den kleinen Zeiger.
15. Wieviel Grad hat der kleine Zeiger von $5^h 0^m$ bis $5^h 20^m$ zurückgelegt? Um wieviel Grad hat er um $5^h 20^m$ die XII überschritten? Um wieviel Grad hat der große Zeiger um $5^h 20^m$ die XII überschritten? Welchen Winkel bilden die Uhrzeiger um $5^h 20^m$?
16. Wo stehen die Uhrzeiger und welchen Winkel bilden sie um:
- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $7^h 20^m$ | f) $8^h 20^m$ | l) $10^h 40^m$ | q) $3^h 10^m$ |
| b) $3^h 40^m$ | g) $2^h 40^m$ | m) $5^h 50^m$ | r) $9^h 30^m$ |
| c) $11^h 45^m$ | h) $10^h 35^m$ | n) $8^h 25^m$ | s) $12^h 45^m$ |
| d) $1^h 42^m$ | i) $4^h 8^m$ | o) $9^h 36^m$ | t) $7^h 22^m$ |
| e) $9^h 51^m$ | k) $7^h 43^m$ | p) $3^h 21^m$ | u) $4^h 27^m$ |
17. Welchen Winkel bilden die Windrichtungen:
- | | | | |
|----------------|--------|----------------|--------|
| a) N | mit O | n) N | mit S |
| b) SO | „ W | o) W | „ NO |
| c) S | „ SW | p) NO | „ N |
| d) N | „ OSO | q) NNO | „ OSO |
| e) WSW | „ SO | r) SW | „ WSW |
| f) OzS | „ NOzO | s) WzS | „ NOzN |
| g) O. | „ S | t) W | „ N |
| h) S | „ NW | u) NW | „ SO |
| i) NW | „ SO | v) O | „ SW |
| k) SW | „ WNW | w) SSO | „ WNW |
| l) NO | „ NNW | x) WSW | „ NO |
| m) SWzS | „ SWzW | y) NWzW | „ SzO? |
18. Welchen Kurs steuert ein Schiff, wenn der Winkel zwischen Meridian und Fahrtrichtung beträgt:
- | | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|
| a) 90^0 ö | g) 90^0 w | n) 45^0 ö | t) 45^0 w |
| b) 135^0 w | h) $112,5^0$ w | o) $22,5^0$ w | u) 135^0 ö |
| c) $22,5^0$ ö | i) $157,5^0$ ö | p) 180^0 | v) $67,5^0$ w |
| d) $157,5^0$ w | k) $67,5^0$ ö | q) $112,5^0$ ö | w) $146,25^0$ w |
| e) $123,75^0$ ö | l) $11,25^0$ w | r) $78,75^0$ w | x) $33,75^0$ w |
| f) $56,25^0$ w | m) $168,75^0$ ö | s) $146,25^0$ ö | y) $101,25^0$ ö? |

Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

Fig. 2. *19. (Erster Nebenwinkelsatz.) Ein Schenkel des Winkels JKS ist über den Scheitelpunkt hinaus verlängert. Wie groß ist $\angle JKW$, wenn $\angle JKS$ **a)** 60^0 , **b)** 140^0 , **c)** 52^0 , **d)** 27^0 , **e)** 131^0 , **f)** $67,5^0$, **g)** α^0 , **h)** $(180 - \alpha)^0$, **i)** $(90 + \alpha)^0$,

k) $(90 - \alpha)^0$ beträgt? **l)** Wie groß ist jeder von zwei gleichen Nebenwinkeln?

Ergebnis: Zusammenfassung A 9; B 1, 2.

***20.** (21.) (Zweiter Nebenwinkelsatz.) Halbiere¹⁾ die Nebenwinkel JKS und JKW (Fig. 2) durch KA und KB . Wenn nun der eine der beiden Nebenwinkel **a)** 58^0 , **b)** 104^0 , **c)** 73^0 , **d)** 135^0 , **e)** α^0 beträgt: wie groß ist dann $\angle JKA$, $\angle JKB$, $\angle AKB$?

Ergebnis: Zusammenfassung B 3.

21. (22.) (Umkehrung.) Errichte auf der Halbierungslinie eines Winkels im Scheitelpunkt die Senkrechte und beweise, daß sie den Nebenwinkel halbiert.

Ergebnis: Zusammenfassung B 4.

***22.** (20.) (Erster Scheitelwinkelsatz.) Verlängere beide Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus. Wie viele Nebenwinkel hat jeder Winkel? Wie groß ist jeder Nebenwinkel eines Winkels von **a)** 70^0 , **b)** 48^0 , **c)** 111^0 , **d)** α^0 , **e)** $(180 - \beta)^0$?

Ergebnis: Zusammenfassung A 10; B 5.

23. (Zweiter Scheitelwinkelsatz.) **a)** Berechne den Winkel, den die Halbierungslinien zweier Scheitelwinkel bilden. **b)** Bilde die Umkehrung des gefundenen Satzes und beweise sie.

Ergebnis: Zusammenfassung B 6, 7.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

1. Zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen bilden einen Winkel. Die Linien, welche einen Winkel einschließen, heißen Schenkel; ihr Schnittpunkt heißt Scheitel des Winkels.
2. Der Winkel entsteht durch Drehung eines Strahles um seinen Anfangspunkt. Er wird durch einen von seinem Scheitel aus geschlagenen Kreisbogen gemessen.
3. Zum Zwecke der Winkelmessung wird der Kreis zunächst in vier gleiche Teile geteilt.
4. Ein Winkel, dessen Bogen ein Viertelkreis ist, heißt rechter Winkel (1 R). Seine Schenkel stehen senkrecht aufeinander; jeder ist ein Lot auf dem anderen.

1) Vom Lehrer zu zeigen.

5. Auf einer Geraden wird in einem Punkte die Senkrechte errichtet; auf eine Gerade wird von einem Punkte das Lot gefällt.
6. Ein Winkel, dessen Bogen ein Halbkreis ist, heißt ein gestreckter Winkel. Ein gestreckter Winkel ist gleich $2 R$; seine Schenkel bilden eine Gerade.
7. Zum Zwecke genauerer Winkelmessung wird der Kreis in 360 Grade geteilt. Ein rechter Winkel hat also 90° , ein gestreckter 180° , ein Vollwinkel 360° .
8. Der Größe nach unterscheiden wir ferner spitze ($0-90^\circ$), stumpfe ($90-180^\circ$) und erhabene Winkel ($180-360^\circ$).
9. Zwei Winkel, die zusammen einen gestreckten Winkel bilden, heißen Nebenwinkel.
10. Zwei Winkel, die denselben Nebenwinkel haben, heißen Scheitelwinkel.

B. Lehrsätze.

1. Nebenwinkel betragen zusammen $2 R$ oder 180° . (19)
2. Wenn zwei Nebenwinkel einander gleich sind, so ist jeder $1 R$. (19)
3. Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel stehen aufeinander senkrecht. (20)
4. Die im Scheitel eines Winkels auf seiner Halbierungslinie errichtete Senkrechte halbiert den Nebenwinkel. (21)
5. Scheitelwinkel sind einander gleich. (22)
6. Die Halbierungslinien zweier Scheitelwinkel bilden eine Gerade. (23)
7. Die Verlängerung der Halbierungslinie eines Winkels halbiert den Scheitelwinkel. (23)

III. Das Dreieck.

Seiten und Winkel.

1. (Bezeichnungen.) Ziehe $BC = 70$ mm; trage daran in B einen Winkel von 50° , trage auf den freien Schenkel 80 mm ab, und nenne den erhaltenen Punkt A . Verbinde A mit C . Wie heißt das entstandene Dreieck? Wie heißen seine Seiten, seine Winkel?

2. Konstruiere das Dreieck ABC aus:

- a) $BC = 63$ mm, $\angle CBA = 105^\circ$, $AB = 39$ mm;
- b) $AB = 45$ mm, $BC = 108$ mm, $\angle ABC = 33^\circ$;
- c) $BC = CA = 54$ mm, $\angle BCA = 47^\circ$;
- d) $CA = 48$ mm, $AB = 55$ mm, $\angle A = 90^\circ$;
- e) $BC = 72$ mm, $\angle B = 61^\circ$, $\angle C = 42^\circ$;
- f) $CA = 67$ mm, $\angle C = 112^\circ$, $\angle A = 29^\circ$;
- g) $AB = 77$ mm, $\angle A = 65^\circ$, $\angle B = 25^\circ$;
- h) $BC = 51$ mm, $CA = 48$ mm, $AB = 36$ mm;
- i) $AB = 75$ mm, $BC = 28$ mm, $CA = 54$ mm;
- k) $BC = 56$ mm, $AB = AC = 75$ mm;
- l) $AB = BC = CA = 75$ mm;
- m) $BC = 45$ mm, $\angle B = 56^\circ$, $CA = 73$ mm;
- n) $AB = 64$ mm, $BC = 39$ mm, $\angle C = 100^\circ$;
- o) $AB = 35$ mm, $CA = 49$ mm, $\angle B = 72^\circ$.

*3. (Unbestimmte Maßzahlen.) Zeichne als Musterfigur ein Dreieck ABC . Die Maßzahlen seiner Seiten und Winkel seien:

$$\left. \begin{array}{l} BC = a \\ CA = b \\ AB = c \end{array} \right\} \text{(Millimeter)}, \quad \left. \begin{array}{l} \angle CAB = \alpha \\ \angle ABC = \beta \\ \angle BCA = \gamma \end{array} \right\} \text{(Grad)}.$$

Ergebnis: Zusammenfassung A 1.

4. Konstruiere das Dreieck ABC aus $BC = a$, $\angle ABC = \beta$, $AB = c$. Beschreibe das Verfahren¹⁾.
5. Dreieck aus: (Konstruktion und Beschreibung derselben!)
- a) $ab\gamma$ c) $a\beta\gamma$ e) $c\alpha\beta$ g) $bc\beta^2$ i) $ab\beta$
 - b) $bc\alpha$ d) $b\alpha\gamma$ f) abc h) $ab\alpha$ k) $bc\gamma$

Mittellinien, Winkelhalbierende, Höhen.

- *6. (Die Mittellinien.) Halbiere in der Musterfigur (mittels des Maßstabes oder eines Papierstreifens) BC durch E und ziehe die Mittellinie AE . Es sei: $AE = m_a$, $\angle EAC = \beta m_a^0$, $\angle EAB = \gamma m_a^0$, $\angle AEB = \alpha m_a^0$. a) Wie groß sind die Seiten und die Winkel der entstandenen Teildreiecke? b) Welche Gleichungen bestehen zwischen α , βm_a , γm_a ? c) Wieviel Mittellinien hat ein Dreieck?

Ergebnis: Zusammenfassung A 2.

1) Das Antragen (Verdoppeln, Halbieren) eines räumlich gegebenen Winkels ist (unter Hinweis auf II, A 2) vom Lehrer zu zeigen und zu erklären.

2) Doppellösungen bleiben bis zum Abschnitt VI grundsätzlich außer Betracht.

7. Dreieck aus:

- | | | |
|---|--|--|
| a) $a \ b \ m_a$ | g) $a \ m_a \ \sphericalangle \ a m_a$ | n) $a \ m_a \ \sphericalangle \ c m_a$ |
| b) $a \ c \ m_a$ | h) $m_a \ \sphericalangle \ a m_a \ \sphericalangle \ c m_a$ | o) $a \ b \ \sphericalangle \ b m_a$ |
| c) $b \ m_a \ \sphericalangle \ b m_a$ | i) $a \ \beta \ \sphericalangle \ a m_a$ | p) $c \ m_a \ \sphericalangle \ a m_a$ |
| d) $c \ m_a \ \sphericalangle \ c m_a$ | k) $a \ m_a \ \beta$ | q) $b \ m_a \ \sphericalangle \ a m_a$ |
| e) $b \ \gamma \ \sphericalangle \ b m_a$ | l) $b \ m_a \ \gamma$ | r) $a \ c \ \sphericalangle \ a m_a$ |
| f) $c \ \beta \ \sphericalangle \ c m_a$ | m) $a \ m_a \ \sphericalangle \ b m_a$ | s) $a \ b \ \sphericalangle \ a m_a$ |

8. Dreieck aus:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $a \ b \ m_b$ | i) $m_b \ \sphericalangle \ a m_b \ \sphericalangle \ b m_b$ | r) $b \ m_b \ \sphericalangle \ a m_b$ |
| b) $b \ c \ m_c$ | k) $m_c \ \sphericalangle \ b m_c \ \sphericalangle \ c m_c$ | s) $c \ m_c \ \sphericalangle \ b m_c$ |
| c) $a \ m_b \ \sphericalangle \ a m_b$ | l) $b \ \alpha \ \sphericalangle \ b m_b$ | t) $a \ b \ \sphericalangle \ a m_b$ |
| d) $b \ m_c \ \sphericalangle \ b m_c$ | m) $c \ \beta \ \sphericalangle \ c m_c$ | u) $b \ c \ \sphericalangle \ c m_b$ |
| e) $b \ \alpha \ \sphericalangle \ b m_c$ | n) $b \ m_b \ \alpha$ | v) $a \ m_b \ \sphericalangle \ b m_b$ |
| f) $c \ \alpha \ \sphericalangle \ c m_b$ | o) $c \ m_c \ \beta$ | w) $b \ m_c \ \sphericalangle \ c m_c$ |
| g) $b \ m_b \ \sphericalangle \ b m_b$ ¹⁾ | p) $a \ m_b \ \gamma$ | x) $a \ b \ \sphericalangle \ b m_b$ |
| h) $c \ m_c \ \sphericalangle \ c m_c$ | q) $b \ m_c \ \alpha$ | y) $b \ c \ \sphericalangle \ c m_c$ |

- *9. (Die Winkelhalbierenden.) Halbiere in der Musterfigur den Winkel A durch AF (vergl. Fig. 7). Die Winkelhalbierende AF sei w_a mm lang, die zugehörigen Abschnitte von BC seien $FB = u_a$, $FC = v_a$. a) Wie groß sind die Seiten und die Winkel der entstandenen Teildreiecke (die Winkel bei F vorläufig ausgenommen)? b) Welche Gleichungen bestehen zwischen a , u_a , v_a ?

Ergebnis: Zusammenfassung A 3.

10. Dreieck aus:

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| a) $b \ v_a \ w_a$ | d) $c \ u_a \ \beta$ | g) $c \ w_a \ \beta$ | k) $b \ v_a \ \alpha$ |
| b) $c \ u_a \ w_a$ | e) $c \ w_a \ \alpha$ | h) $b \ w_a \ \gamma$ | l) $v_a \ w_a \ \alpha$ |
| c) $b \ v_a \ \gamma$ | f) $b \ w_a \ \alpha$ | i) $c \ u_a \ \alpha$ | m) $u_a \ w_a \ \alpha$ |

11. Ziehe in der Musterfigur die Winkelhalbierenden BN und CO . Es sei: $BN = w_\beta$, $CO = w_\gamma$; $NC = u_b$, $NA = v_b$; $OA = u_c$, $OB = v_c$. Dreieck aus:

- | | | | |
|-------------------------|-----------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $a \ u_b \ w_\beta$ | e) $a \ v_c \ \beta$ | e) $c \ w_\beta \ \beta$ | g) $a \ w_\gamma \ \beta$ |
| b) $b \ u_c \ w_\gamma$ | d) $b \ u_c \ \alpha$ | f) $a \ w_\gamma \ \gamma$ | h) $u_b \ w_\beta \ \beta$ |

- Fig. 5. *12. (Höhen und Seitenprojektionen.) Fälle im Musterdreieck ABC ²⁾ die Höhe $AD = h_a$. Die Projektionen³⁾

1) Es kann dem Schüler überlassen bleiben, welcher von den beiden Nebenwinkeln $b m_b$ Grad betragen soll.

2) Das Musterdreieck soll vorläufig stets spitzwinklig sein.

3) Zur Verdeutlichung eignet sich der Schatten eines Stabes auf einem von den Sonnenstrahlen senkrecht getroffenen Schirme.

der Seiten CA und AB auf BC seien $DC = p_a^b$, $DB = p_a^c$. Welche Strecken haben die Maßzahlen h_b , h_c , p_b^a , p_b^c , p_c^a , p_c^b ?
Ergebnis: Zusammenfassung A 4, 5.

13. Dreieck aus:

- | | | | |
|----------------------|------------------------|-----------------------|-------------------------|
| a) $b p_a^b p_a^c$ | f) $b h_a \alpha$ | l) $a p_b^c \alpha$ | q) $a h_b p_b^b$ |
| b) $b c p_a^b$ | g) $p_a^b p_a^c \beta$ | m) $h_c p_c^b \gamma$ | r) $b h_c p_b^a$ |
| c) $a c p_a^c$ | h) $a p_a^c \gamma$ | n) $c p_b^a p_b^c$ | s) $c h_a p_c^b$ |
| d) $h_a p_a^b p_a^c$ | i) $a b h_b$ | o) $a p_b^a \beta$ | t) $p_b^a \beta \gamma$ |
| e) $b c h_a$ | k) $b h_c p_c^a$ | p) $c h_c p_c^a$ | u) $p_a^c p_c^a \beta$ |

14. Dreieck aus:

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
| a) $h_a m_a p_a^c$ | h) $p_a^c w_a \beta$ | p) $p_c^b w_a \alpha$ |
| b) $b h_a m_a$ | i) $a p_b^a \angle a m_b$ | q) $h_a p_a^b w_\gamma$ |
| c) $c h_a \angle c m_a$ | k) $h_a m_c p_a^c$ | r) $h_b p_b^c u_a$ |
| d) $m_a p_a^b \gamma$ | l) $m_b p_c^b \alpha$ | s) $a h_c w_\beta$ |
| e) $h_a w_a u_a$ | m) $a h_b \angle a m_a$ | t) $b h_a u_c$ |
| f) $p_a^c u_a \beta$ | n) $c h_c m_c$ | u) $a p_b^a w_\gamma$ |
| g) $c h_a w_a$ | o) $b p_a^b \angle b m_b$ | v) $p_a^c v_b \beta$ |

Die Winkelsumme des Dreiecks.

- *15. (Summe der Außenwinkel eines Vielecks.) a) Wie Fig. 3. heißen die Außenwinkel des Fünfecks $ABCDE$? (Fig. 3a.) Durch welche Drehungen sind sie entstanden? Wie groß ist ihre Summe? (Fig. 3b.)

Bestimme ebenso die Summe der Außenwinkel b) eines Sechsecks, c) eines Achtecks, d) eines Vierecks, e) eines Dreiecks.
Ergebnis: Zusammenfassung A 6, B 1.

- *16. (Summe der Innenwinkel.) a) Wie groß ist in Figur 3a die Summe jedes Außenwinkels und seines Innenwinkels? — aller Außen- und Innenwinkel? — der Außenwinkel allein? — der Innenwinkel allein?

Berechne die Summe der Innenwinkel b) eines Sechsecks, c) eines Achtecks, d) eines Zehnecks, e) eines Zwanzigecks, f) eines Dreiecks, g) eines Vierecks, h) eines n -Ecks.
Ergebnis: Zusammenfassung B 2, 5, 6.

17. Wie groß ist im Dreieck ABC der Winkel C , wenn

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\angle A = 43^\circ$		61°	112°	65°	24°	α°	90°
$\angle B = 78^\circ$		42°	29°	25°	35°	β°	$\beta^\circ?$

(Die Aufgaben f und g sind arithmetisch und geometrisch zu lösen.)

18. Dreieck aus:

- a) $BC = 67$ mm, $\angle A = 102^\circ$, $\angle B = 35^\circ$
 b) $AB = 51$ mm, $\angle A = 81^\circ$, $\angle C = 47^\circ$
 c) $CA = 31$ mm, $\angle B = 27^\circ$, $\angle C = 95^\circ$
 d) $AB = 43$ mm, $\angle B = \angle C = 72^\circ$
 e) $BC = 74$ mm, $\angle A = 41^\circ$, $\angle C = 90^\circ$
 f) $a \propto \beta$ g) $b \propto \beta$ h) $b \beta \gamma$ i) $c \propto \gamma$

*19. (Außenwinkelsatz.) Im Dreieck ABC sei $\angle A =$ a) 84° , b) 55° , c) 112° , d) α° . Wie groß ist die Summe von $\angle B + \angle C$, und wie groß ist der Außenwinkel bei A ?
 Ergebnis: Zusammenfassung B 3.

20. Dreieck aus:

- a) $w_\alpha \propto \beta$ d) $w_\gamma \propto \beta$ g) $u_b \beta \gamma$ k) $u_\alpha \beta \gamma$
 b) $w_\beta \beta \gamma$ e) $u_\alpha \propto \beta$ h) $v_b \propto \gamma$ l) $u_b \propto \beta$
 c) $w_\alpha \beta \gamma$ f) $v_\alpha \propto \gamma$ i) $u_c \propto \beta$ m) $v_c \beta \gamma$

21. Dreieck aus:

- a) $m_\alpha \beta \angle cm_\alpha$ f) $a \angle am_\alpha \angle bm_\alpha$ l) $b \alpha \angle cm_b$
 b) $m_\alpha \gamma \angle bm_\alpha$ g) $b \gamma \angle am_\alpha$ m) $b \gamma \angle am_b$
 c) $m_\alpha \gamma \angle am_\alpha$ h) $m_b \gamma \angle am_b$ n) $a \angle bm_b \angle am_b$
 d) $a \beta \angle cm_\alpha$ i) $m_c \alpha \angle bm_c$ o) $c \angle cm_c \angle am_c$
 e) $c \angle am_\alpha \angle cm_\alpha$ k) $m_c \alpha \angle cm_c$ p) $a \beta \angle cm_c$

*22. (Einteilung der Dreiecke nach den Winkeln.) a) Wie viele rechte Winkel kann ein Dreieck enthalten? b) Wie viele stumpfe Winkel kann es enthalten? c) Wie viele spitze Winkel enthält jedes Dreieck mindestens?
 Ergebnis: Zusammenfassung A 7.

Rechtwinklige Dreiecke.

Fig. 4. *23. (Bezeichnungen.) a) Wie groß ist im rechtwinkligen Dreieck ABC ($\angle C = 90^\circ$) die Summe der Winkel an der Hypotenuse AB ? b) Wie groß ist der Gegenwinkel der

Kathete CA ? ($\angle A = \alpha^0$). **e)** Welches sind die Höhen des rechtwinkligen Dreiecks ABC ? **d)** Wie groß sind die Winkel zwischen den Katheten und der Höhe CD ?

Ergebnis: Zusammenfassung A 8, 9; B 4.

24. Rechtwinkliges Dreieck ($\angle C = 90^0$) aus:

- | | | | | |
|---------------|-----------------|-------------------|--------------------|----------------------|
| a) $a b$ | f) $c \alpha$ | l) $w_\alpha v_a$ | q) $a \angle am_b$ | v) $p_c^a \alpha$ |
| b) $a c$ | g) $a h_c$ | m) $a v_c$ | r) $b \angle bm_a$ | w) $h_c p_c^a$ |
| e) $b c$ | h) $b h_c$ | n) $b u_c$ | s) $a p_c^a$ | x) $h_c p_c^b$ |
| d) $b \alpha$ | i) $a w_\gamma$ | o) $a m_b$ | t) $b p_c^b$ | y) $h_c \alpha$ |
| e) $a \alpha$ | k) $b w_\gamma$ | p) $b m_a$ | u) $p_c^b \alpha$ | z) $w_\gamma \alpha$ |

25. Dreieck aus:

- | | | | |
|-------------------|-----------------------|------------------------|-------------------------|
| a) $b h_a \beta$ | e) $b p_a^b \beta$ | i) $h_a \beta \gamma$ | n) $p_a^c \beta \gamma$ |
| b) $a h_c \alpha$ | f) $a p_c^a \alpha$ | k) $h_b \alpha \gamma$ | o) $p_c^b \alpha \beta$ |
| c) $c h_c \alpha$ | g) $h_a p_a^c \gamma$ | l) $h_a \alpha \beta$ | p) $p_a^b \alpha \beta$ |
| d) $a h_a \beta$ | h) $h_b p_b^c \gamma$ | m) $h_c \beta \gamma$ | q) $p_b^c \beta \gamma$ |

26. Dreieck aus:

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|--------------------------|---------------------|
| a) $h_a m_a \beta$ | g) $a h_a \angle am_a$ | n) $h_a u_a \beta$ | t) $h_b u_a \alpha$ |
| b) $h_b m_b \gamma$ | h) $h_a \beta \angle cm_c$ | o) $h_b v_b \alpha$ | u) $h_c v_a \alpha$ |
| c) $h_a \beta \angle cm_a$ | i) $h_b m_a \gamma$ | p) $h_b w_\alpha \alpha$ | v) $h_a v_b \beta$ |
| d) $h_c \alpha \angle bm_c$ | k) $h_c m_b \alpha$ | q) $h_a w_\gamma \gamma$ | w) $h_b v_c \gamma$ |
| e) $b h_a \angle am_a$ | l) $h_a \beta \angle am_a$ | r) $h_a w_\alpha \beta$ | x) $h_c u_b \beta$ |
| f) $h_c p_c^b \angle cm_c$ | m) $h_b \alpha \angle bm_b$ | s) $h_c w_\gamma \beta$ | y) $h_a u_c \gamma$ |

Stumpfwinklige Dreiecke.

27. a) Wie lautet die Gleichung zwischen a , p_a^b , p_a^c , wenn $\angle B > 90^0$? **b)** Wie lauten die Gleichungen zwischen je einer Seite und den Projektionen der beiden anderen Seiten, wenn $\angle C > 90^0$? **c)** Zeichne ein Dreieck, in welchem $b = p_b^a - p_b^c$. Wie lautet in diesem Dreieck die Gleichung zwischen c , p_c^a , p_c^b ?

28. In den folgenden Aufgaben soll der gegebene, bzw. der erstgenannte Dreieckswinkel stumpf sein.

Dreieck aus:

a) $a p_a^c \beta$	g) $c p_a^c \gamma$	n) $p_b^c u_a \alpha$	t) $h_a \beta \angle cm_a$
b) $c p_c^a \alpha$	h) $h_a \beta \gamma$	o) $h_a u_a \beta$	u) $h_a \beta \angle am_a$
c) $b p_a^c \gamma$	i) $p_c^a \alpha \gamma$	p) $h_b w_a \alpha$	v) $h_b \gamma \angle am_a$
d) $b p_a^c \beta$	k) $p_a^b v_a \gamma$	q) $h_a w_a \beta$	w) $h_a \beta \angle cm_c$
e) $a h_a \beta$	l) $p_c^b w_a \alpha$	r) $h_b u_a \alpha$	x) $h_b m_a \gamma$
f) $b h_a \beta$	m) $p_a^c w_a \beta$	s) $h_a m_a \beta$	y) $h_c m_b \alpha$

Winkel mit paarweise senkrechten Schenkeln.

29. Zeichne einen spitzen Winkel O ($= \alpha^0$) und fälle von einem zwischen seinen Schenkeln liegenden Punkte Q auf letztere die Lote QK und QJ . Die Verlängerung von JQ schneide OK in H . Wie groß sind die Winkel der Dreiecke JOH und KQH ?
30. Wie gestaltet sich die Figur zu 29, wenn Q a) zwischen den Schenkeln eines Nebenwinkels von O , b) zwischen den Schenkeln seines Scheitelwinkels liegt, c) wenn $\alpha > 90$ und Q zwischen seinen Schenkeln, d) zwischen den Schenkeln eines seiner Nebenwinkel, e) zwischen den Schenkeln seines Scheitelwinkels liegt, f) wenn Q auf O fällt?

Ergebnis von 29—30: Zusammenfassung B 7.

- Fig. 5. 31. Fülle im Dreieck ABC die Höhen AD und BE ; ihr Schnittpunkt sei H . a) Wie groß ist $\angle BHD$? b) Wie groß sind die Winkel zwischen h_a und h_c und zwischen h_b und h_c ? c) Beantworte dieselben Fragen für ein stumpfwinkliges Dreieck.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

- Ein Dreieck hat drei Seiten (a, b, c) und drei Winkel (α, β, γ). Jede Seite (a) hat einen Gegenwinkel (α) und zwei Anwinkel (β, γ); jeder Winkel (α) hat eine Gegenseite (a) und zwei Anseiten (b, c).
- Eine Mittellinie ist die Verbindungslinie einer Ecke mit der Mitte ihrer Gegenseite. Ein Dreieck hat drei Mittellinien (m_a, m_b, m_c).

3. Ein Dreieck hat drei Winkelhalbierende ($w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$). Sie teilen ihre Gegenseiten in ungleiche Abschnitte ($u_a, v_a; u_b, v_b; u_c, v_c$).
4. Eine Höhe ist das von einer Ecke auf die Gegenseite gefällte Lot. Ein Dreieck hat drei Höhen (h_a, h_b, h_c).
5. Die durch die Höhe gebildeten Abschnitte einer Dreiecksseite sind „Projektionen“ der beiden anderen Seiten ($p_a^c, p_a^b; p_b^a, p_b^c; p_c^a, p_c^b$).
6. Ein Außenwinkel ist der Nebenwinkel eines Innenwinkels.
7. Nach ihren Winkeln teilen wir die Dreiecke ein in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige. Ein spitzwinkliges Dreieck hat drei spitze Winkel, ein rechtwinkliges einen rechten und zwei spitze, ein stumpfwinkliges einen stumpfen und zwei spitze.
8. Im rechtwinkligen Dreieck heißt die Gegenseite des rechten Winkels Hypotenuse, seine Anseiten heißen Katheten.
9. Unter der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks versteht man die auf die Hypotenuse gefällte Höhe.

B. Lehrsätze.

1. Die Außenwinkel jedes Vielecks betragen zusammen 360° oder 4 R. (15)
2. Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180° oder 2 R. (16 f)
3. Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel — also größer als jeder von ihnen. (19)
4. Die Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks betragen zusammen 90° . (23)
5. Die Summe der Innenwinkel eines Vierecks beträgt 360° oder 4 R. (16 g)
6. Die Summe der Innenwinkel eines n -Ecks beträgt $(2n - 4)$ R. (16 h)
7. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind entweder gleich oder betragen zusammen 180° . (29, 30)

IV. Das gleichschenklige Dreieck.

Symmetrische Beziehungen.

- *1. (Einteilung der Dreiecke nach den Seiten.) Wie unterscheiden sich die in III, Aufg. 2i—l genannten Dreiecke? Ergebnis: Zusammenfassung A 1. Vergl. auch III A, 7.

- Fig. 6. *2. (Die Symmetrale des gleichschenkligen Dreiecks.) Im gleichschenkligen Dreieck ABC ($AB = AC$) ist der Winkel an der Spitze A durch AF halbiert. Klappe $\triangle AFB$ um AF : in welche Richtung fällt dann der Schenkel AB ? Wohin fällt Punkt B ? Warum ist $FB = FC$? Warum ist $\angle AFB = \angle AFC$? Wie groß muß jeder von ihnen sein? (II B 2.)

Ergebnis: Zusammenfassung A 2—4; B 4.

- *3. (Erster Grundwinkelsatz.) Wohin fällt beim Umklappen des Dreiecks AFB der Grundwinkel B ? Ergebnis: Zusammenfassung B 1, 12.

4. Wie groß ist jeder Grundwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Winkel an der Spitze **a)** 36° , **b)** 67° , **c)** 90° , **d)** 60° , **e)** α° beträgt? Wie groß ist der Winkel an der Spitze, wenn ein Grundwinkel **f)** 53° , **g)** 69° , **h)** 72° , **i)** β° beträgt?

- *5. (6.) (Umkehrung.) Konstruiere $\triangle ABC$ aus $BC = a$, $\angle B = \angle C = \beta$. Halbiere $\angle A$ durch AF . Wie groß werden $\angle CAB$, $\angle CAF$, $\angle AFC$, $\angle AFB$? Warum muß beim Umklappen um AF der Punkt B in die Richtung AC fallen? Warum auch in die Richtung FC ? Warum muß $AC = AB$ sein?

Ergebnis: Zusammenfassung B 2.

6. (7.) Gleichschenkliges Dreieck ($AB = AC = b$) aus:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a)} & ab & \mathbf{c)} & b\beta & \mathbf{e)} & bh_a & \mathbf{g)} & h_a\beta \\ \mathbf{b)} & b\alpha & \mathbf{d)} & a\alpha & \mathbf{f)} & ah_a & \mathbf{h)} & h_a\alpha \end{array}$$

- *7. (5.) (Zweiter Grundwinkelsatz.) Wie groß sind die einzelnen Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Außenwinkel an der Spitze **a)** 94° , **b)** 147° , **c)** $28,5^\circ$, **d)** $77,4^\circ$, **e)** x° beträgt?

Ergebnis: Zusammenfassung B 3.

8. (Symmetrische Transversalen.) **a)** Halbiere im gleichschenkligen Dreieck ABC $\angle B$ durch BL ; BL schneide

die Symmetrale AF in S . Klappe $\triangle ABC$ um AF : wohin fallen dann BS , Punkt L , $\angle SBC$, $\angle SBA$? — Beweise ebenso die symmetrische Gleichheit **b**) der zu den Schenkeln gehörigen Mittellinien und der von ihnen gebildeten Winkel, **c**) der Schenkelhöhen und der von ihnen abgeschnittenen Projektionen. Ergebnis: Zusammenfassung B 6.

9. Gleichschenkliges Dreieck aus:

a) $w_\beta \alpha$	e) $v_b \beta$	i) $a h_b$	n) $b p_b^a$	r) $h_b \alpha$
b) $w_\beta \beta$	f) $u_b \alpha$	k) $b h_b$	o) $p_b^a p_b^b$	s) $h_b \beta$
c) $v_b \alpha$	g) $b m_b$	l) $b p_b^b$	p) $h_b p_b^a$	t) $p_b^b \beta$
d) $u_b \beta$	h) $b \angle b m_b$	m) $a p_b^a$	q) $p_b^a \beta$	u) $p_b^a \alpha$

Sonderfälle.

10. Kann ein gleichschenkliges Dreieck stumpfwinklig sein? Löse die Aufgaben 9 i—u auf Grund eines stumpfwinkligen Musterdreiecks.
11. Welche Eigenschaften hat ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem der Winkel an der Spitze **a**) gleich dem Grundwinkel, **b**) doppelt so groß, **c**) halb so groß ist wie dieser. (Halbiere bei c einen Grundwinkel und betrachte die entstandenen Teildreiecke; vergl. Fig. 33.)
12. Gleichseitiges Dreieck aus: **a**) a , **b**) h , **c**) p .
Rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ($\angle A = 90^\circ$) aus: **d**) b , **e**) a , **f**) h_a , **g**) h_b , **h**) w_β , **i**) p_a^b , **k**) p_b^a .
- *13. (Symmetrie des Doppeldreiecks.) Fälle im (ungleichseitigen) Dreieck ABC die Höhe AD und klappe die Figur um BC um. Welche Eigenschaften hat dann die Linie BC ? Ergebnis: Zusammenfassung B 7.
- *14. **a**) Eine gegebene Strecke soll ohne Benutzung des Maßstabs halbiert werden. **b**) Ein gegebener Winkel soll ohne Benutzung des Maßkreises halbiert werden. **c**) Von einem gegebenen Punkte soll auf eine gegebene Gerade ohne Benutzung des Winkelscheits das Lot gefällt werden. **d**) Es soll nur mit Hilfe von Lineal und Zirkel auf einer Geraden in einem Punkte die Senkrechte errichtet werden (vergl. II A, 6).
15. Konstruiere Winkel von:

a) 90°	e) 135°	i) 60°	n) 150°	r) $127,5^\circ$
b) 45°	f) $67,5^\circ$	k) 30°	o) 105°	s) $71,25^\circ$
c) $22,5^\circ$	g) $112,5^\circ$	l) 15°	p) 75°	t) $86,25^\circ$
d) $11,25^\circ$	h) $146,25^\circ$	m) 120°	q) 165°	u) $18,75^\circ$

v) Teile einen rechten Winkel in drei gleiche Teile.

16. Verlängere den Schenkel $BA^1)$ des gleichschenkligen Dreiecks ABC um sich selbst bis D , ziehe DC , und berechne den Winkel DCB . Errichte auf Grund dieser Musterfigur im Endpunkte einer Strecke die Senkrechte.

Anwendungen des gleichschenkligen Dreiecks.

17. Zeichne ein ungleichseitiges Dreieck ABC , verlängere CA um AB bis D und ziehe BD . Wie lang ist CD ? Welche Eigenschaft hat das Dreieck ABD ? Wie groß sind seine Winkel?

Dreieck aus $(b + c)$ und:

- a) $a \gamma$ e) $\alpha \gamma$ e) $a h_b$ g) $h_b \gamma$ i) $p_b^a \gamma$ l) $h_b p_b^c$
 b) $a \alpha$ d) $\alpha \beta$ f) $h_b \alpha$ h) $p_b^c \alpha$ k) $h_b p_b^a$ m) $a p_b^a$

18. Verlängere die Seite BA des Dreiecks ABC um AC bis E , ziehe CE , und löse auf Grund dieser Musterfigur die Aufgaben:

Dreieck aus $(b + c)$ und:

- a) $a \beta$ e) $\alpha \beta$ e) $a h_c$ g) $h_c \beta$ i) $p_c^a \beta$ l) $h_c p_c^b$
 b) $a \alpha$ d) $\alpha \gamma$ f) $h_c \alpha$ h) $p_c^b \alpha$ k) $h_c p_c^a$ m) $a p_c^a$

19. Dreieck aus:

$(a + b)$ und:

$(a + c)$ und:

- a) $c \gamma$ e) $c \beta$ i) $h_b \gamma$ n) $b \beta$ r) $b \gamma$ v) $h_c \alpha$
 b) $\alpha \beta$ f) $c h_a$ k) $c p_a^c$ o) $\alpha \beta$ s) $b h_a$ w) $b p_a^b$
 c) $\beta \gamma$ g) $c h_b$ l) $p_a^c \beta$ p) $\alpha \gamma$ t) $b h_c$ x) $p_c^a \beta$
 d) $c \alpha$ h) $h_a \beta$ m) $h_b p_b^c$ q) $b \alpha$ u) $h_a \beta$ y) $h_a p_a^b$

20. a) Trage die Seite AB des Dreiecks ABC ($AC > AB$) auf AC bis G ab und ziehe BG . Wie lang ist CG ? Welches Dreieck ist gleichschenklig? Wie groß sind seine Winkel? Wie groß ist $\angle BGC$? b) Wie gestaltet sich die Figur, wenn AC auf die (verlängerte) Seite AB (bis F) abgetragen wird?

21. Dreieck aus:

$(b - c)$ und:

$(a - b)$ und:

$(a - c)$ und:

- a) $a \gamma$ e) $a h_c$ i) $c \gamma$ n) $h_b \alpha$ r) $b \alpha$ v) $h_a \beta$
 b) $a \beta$ f) $p_c^b \alpha$ k) $\alpha \beta$ o) $c p_a^c$ s) $b h_a$ w) $p_a^b \gamma$
 c) $\alpha \beta$ g) $h_b p_b^c$ l) $c h_a$ p) $h_b p_b^c$ t) $b h_c$ x) $h_c p_c^b$
 d) $a h_b$ h) $a p_c^a$ m) $c h_b$ q) $p_a^b \gamma$ u) $h_c \beta$ y) $p_a^c \beta$

1) Durch die Buchstabenfolge wird zugleich die Richtung der Verlängerung bestimmt.

22. a) Verlängere am Dreieck ABC die Seite BC über C um CA bis K , über B um BA bis L , und ziehe AK und AL . Welche Dreiecke sind gleichschenklige? Wie groß sind: die Seite LK , $\angle L$, $\angle K$ und die Winkel bei A ? **b)** Wie gestaltet sich die Figur, wenn CA beiderseits verlängert wird?

23. Dreieck aus $(a + b + c)$ und:

a) $\beta \gamma$	e) $h_a \gamma$	e) $h_b \alpha$	g) $h_c \alpha$
b) $\alpha \beta$	d) $h_a \beta$	f) $h_b \gamma$	h) $h_c \beta$

Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln im ungleichseitigen Dreieck.

***24.** (23.) (Seiten und Gegenwinkel.) **a)** Im $\triangle ABC$ sei Fig. 7. $AC > AB$; $\angle A$ wird durch AF halbiert und $\triangle AFB$ um AF umgeklappt. Warum ist $\angle AB_1F > \angle C$, $\angle B > \angle C$? Beweise ebenso, daß **b)** $\angle A > \angle C$, wenn $BC > BA$.
Ergebnis: Zusammenfassung B 8.

25. (24.) Wie groß sind in Fig. 7 die Seiten und die Winkel des Dreiecks B_1FC ?

Dreieck aus:

a) $(b - c) v_a \gamma$	d) $(a - c) u_b \alpha$	g) $(b - a) u_c \beta$
b) $(b - c) u_a (\beta - \gamma)$	e) $(c - a) u_b v_b$	h) $u_b v_b (\gamma - \alpha)$
c) $u_a v_a (\beta - \gamma)$	f) $(a - b) v_c (\alpha - \beta)$	i) $a h_b (\beta - \gamma)$

***26.** (25.) (Winkel und Gegenseiten.) Welche Beziehungen gelten im Dreieck ABC für $\angle B$ und $\angle C$, **a)** wenn $AC = AB$, **b)** wenn $AC > AB$? Welche Beziehung muß zwischen AC und AB stattfinden, wenn $\angle B < \angle C$?
Ergebnis: Zusammenfassung B 9.

***27.** (26.) (Abstand eines Punktes von einer Geraden.) Beweise, daß alle schrägen Verbindungslinien eines Punktes mit einer Geraden **a)** paarweise symmetrisch, **b)** um so größer sind, je größer ihre Projektionen sind. **c)** Welches ist die kürzeste Verbindungslinie eines Punktes mit einer Geraden?
Ergebnis: Zusammenfassung A 5; B 10, 11.

28. (27.) Bestimme im Dreieck ABC auf BC den Punkt P so, daß sein Abstand von CA gleich seiner Entfernung von B ist.

***29.** (28.) **a)** Warum ist in Fig. 7 $\angle FCB_1 < \angle FB_1C$? (III B, 2.) Warum ist $FB < FC$? Kann die Winkelhalbierende eines ungleichseitigen Dreiecks zugleich Mittellinie sein? — Beweise, **b)** daß die Winkelhalbierende eines ungleichseitigen Dreiecks

nicht Höhe, c) daß die Höhe nicht Mittellinie sein kann.
(Fälle $AD \perp BC$ und klappe $\triangle ABD$ um AD .)

Ergebnis: Zusammenfassung B 5.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

1. Nach ihren Seiten teilen wir die Dreiecke ein in gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige. Ein gleichseitiges Dreieck hat drei gleiche Seiten, ein gleichschenkliges nur zwei.
2. Die beiden gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks heißen Schenkel, die dritte Seite heißt Grundlinie. Die Winkel an der Grundlinie heißen Grundwinkel. Die Gegenecke der Grundlinie heißt Spitze.
3. Eine Figur heißt symmetrisch, wenn sie durch eine Gerade so geteilt wird, daß der eine Teil durch Umklappen mit dem anderen zur Deckung gebracht werden kann.
4. Eine Gerade, die eine Figur symmetrisch teilt, heißt Symmetrale.
5. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden wird durch das Lot bestimmt. Vergl. B 10.

B. Lehrsätze.

1. Die Grundwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich. (Gleiche Seiten eines Dreiecks haben gleiche Gegenwinkel.) (3)
2. Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist gleichschenklig. (Gleiche Winkel eines Dreiecks haben gleiche Gegenseiten.) (5)
- X 3. Jeder Grundwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks ist gleich der Hälfte des Außenwinkels an der Spitze. (7)
4. Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist zugleich Höhe und Mittellinie. (2)
5. Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn eine Winkelhalbierende zugleich Höhe oder Mittellinie, oder wenn eine Mittellinie zugleich Höhe ist. (29)

6. Die zu den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks gehörigen Winkelhalbierenden, Mittellinien und Höhen sind paarweise gleich. (8)
7. Die Verbindungslinie der Spitzen zweier gleichschenkligen Dreiecke auf gemeinschaftlicher Grundlinie halbiert die Winkel an den Spitzen, halbiert die Grundlinie und steht auf ihr senkrecht. (13)
8. Die größere (größte) Seite eines Dreiecks hat den größeren (größten) Gegenwinkel. Vergl. 1. (24)
9. Der größere (größte) Winkel eines Dreiecks hat die größere (größte) Gegenseite. Vergl. 2. (26)
10. Die kürzeste von allen Strecken, die einen Punkt mit einer Geraden verbinden, ist das Lot. Vergl. A 5. (27)
11. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse größer als jede Kathete. (27)
12. Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks beträgt 60° . Vergl. 1. (3)

V. Das Viereck.

Parallele Linien.

- *1. (Senkrechte auf einer Geraden.) Auf einer Geraden MN Fig. 8. sind in B und C die Senkrechten BD und CF errichtet. Können sie einander schneiden? (III, Aufg. 22 a). Können ihre Verlängerungen BE und CG einander schneiden?
Ergebnis: Zusammenfassung A 1; B 1.
- *2. (Stufenwinkel und Wechselwinkel.) Eine zweite durch B gehende Gerade PQ schneide FG unter dem Winkel $BAC = \alpha^\circ$. Wie groß ist $\angle ABC$? Berechne alle Winkel, die von den Parallelen DE und FG mit der schneidenden Geraden PQ gebildet werden.
Ergebnis: Zusammenfassung A 2—4; B 3, 4.
- *3. Beweise die Umkehrung der in 1 und 2 gefundenen Sätze.
Ergebnis: Zusammenfassung B 2, 5.
- *4. (Parallelenkonstruktion.) Ziehe durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Parallele: **a)** mit Hilfe von Stufenwinkeln, **b)** mit Hilfe von inneren Wechselwinkeln, **c)** mit Hilfe von äußeren Wechselwinkeln, **d)** mit Hilfe des Lotes, **e)** mittels Lineal und Winkelscheit.

5. Beweise folgende Sätze:
- a) Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie einander parallel.
- b/c) Trägt man von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Schenkel — oder auf ihre Verlängerungen — gleiche Stücke ab, so ist die Verbindungslinie der erhaltenen Punkte parallel der Grundlinie. (Löse hiernach Aufgabe 4.)
- d/e) Trägt man jede von zwei Dreiecksseiten von der gemeinschaftlichen Ecke aus an die andere an — oder auf die andere ab —, so sind die Verbindungslinien der beiden anderen Ecken mit den erhaltenen Punkten einander parallel. (Vergl. IV, Aufg. 17—21.)
6. Ziehe in einem stumpfwinkligen Dreieck zur größten Seite die Parallele, welche gleich ist **a)** dem unteren Abschnitt einer zweiten Seite, **b/c)** der Summe (dem Unterschied) der unteren Abschnitte der beiden anderen Seiten, **d)** der Summe des unteren Abschnittes einer zweiten Seite und des oberen Abschnittes der dritten.

Das Parallelogramm.

- *7. Gegeben ist ein Winkel A und zwischen seinen Schenkeln ein Punkt C . Ziehe durch C zu den Schenkeln die Parallelen und bezeichne die Schnittpunkte mit B, D . Berechne die einzelnen Winkel des Parallelogramms $ABCD$, wenn $\angle A = \mathbf{a)}$ 46° , $\mathbf{b)}$ 127° , $\mathbf{c)}$ $55,6^\circ$, $\mathbf{d)}$ $136,3^\circ$, $\mathbf{e)}$ α° .
Ergebnis: Zusammenfassung A 7.

- Fig. 10. *8. (Das Parallelogramm als zentrische Figur.) Im Parallelogramm $ABCD$ ist die Diagonale AC durch O halbiert. Drehe $\triangle ABC$ um O und um einen Winkel von 180° : wohin fallen dann $OA, OC, \angle OAB, \angle OCB$, Punkt B , Seite AB , Seite BC ? Wohin fällt OB ? Verbinde ferner O mit einem Punkte R der Seite AB , und verfolge das Ergebnis der Drehung.
Ergebnis: Zusammenfassung A 11; B 10.

- *9. (Erkennungsmerkmale.) Beweise, daß ein Viereck ein Parallelogramm ist, **a)** wenn einer seiner Winkel jeden der beiden Nachbarwinkel zu 180° ergänzt, **b)** wenn je zwei Gegenwinkel gleich sind (III B, 5), **c)** wenn je zwei Gegenseiten gleich sind (drehe ein Dreieck um die Mitte einer Seite), **d)** wenn zwei Gegenseiten gleich und parallel sind (drehe einen Winkel mit begrenzten Schenkeln um die Mitte des einen Schenkels), **e)** wenn die Diagonalen einander halbieren (drehe ein Dreieck um eine Ecke).
Ergebnis: Zusammenfassung B 11.

- 10.** Ziehe durch P zu MN die Parallele mit Benutzung von
a) 9a, **b)** 9c, **c)** 9e.
- *11.** (Abstand zweier Parallelen.) Fälle im Parallelogramm $ABCD$ von D und von einem Punkte M der Seite CD auf AB die Lote DG und ML . Warum ist $DG = ML$?
 Ergebnis: Zusammenfassung B 6.
- 12.** Parallelogramm¹⁾ aus:
- | | | |
|--|---|---|
| a) $ab \quad \alpha$ | i) $e \quad f \quad \angle ef$ | r) $e \quad h_a \quad \alpha$ |
| b) $ab \quad e$ | k) $a \quad e \quad \angle ef$ | s) $f \quad h_a \quad \alpha$ |
| c) $bf \quad \alpha$ | l) $e \quad f \quad \angle ae$ | t) $e \quad h_b \quad \alpha$ |
| d) $ae \quad \angle ae$ | m) $e \quad \angle ae \quad \angle ef$ | u) $e \quad f \quad h_a$ |
| e) $be \quad \angle ae$ | n) $e \quad \angle af \quad \angle ef$ | v) $f \quad h_a \quad \angle ef$ |
| f) $a \quad \alpha \quad \angle af$ | o) $a \quad \angle ae \quad \angle ef$ | w) $e \quad h_b \quad \angle ef$ |
| g) $e \quad \alpha \quad \angle ae$ | p) $a \quad e \quad h_a$ | x) $h_a \quad \angle ae \quad \angle ef$ |
| h) $ae \quad f$ | q) $a \quad e \quad h_b$ | y) $h_b \quad \angle bf \quad \angle ef$ |

Anwendungen des Parallelogramms.

- 13.** Verlängere die Mittellinie AE des Dreiecks ABC um sich selbst bis F' . Warum ist $ABFC$ ein Parallelogramm? (9e.)

Dreieck aus:

- | | | |
|--|---|--|
| a) $bc \quad m_a$ | f) $b \quad \gamma \quad \angle am_c$ | l) $c \quad h_c \quad \angle cm_b$ |
| b) $bc \quad \angle bm_a$ | g) $m_a \quad \alpha \quad \angle cm_a$ | m) $a \quad h_b \quad \angle bm_c$ |
| c) $b \quad \alpha \quad \angle bm_a$ | h) $m_b \quad \angle am_b \quad \angle cm_b$ | n) $h_b \quad m_a \quad \alpha$ |
| d) $bm_c \quad \gamma$ | i) $b \quad h_b \quad m_a$ | o) $h_a \quad m_b \quad \angle cm_b$ |
| e) $bm_a \quad \angle cm_a$ | k) $a \quad h_b \quad m_c$ | p) $h_b \quad \gamma \quad \angle bm_c$ |
| q) $h_c \quad \beta \quad \angle cm_a$ | u) $(a + c) m_b \quad \beta$ | |
| r) $h_b \quad p_b^a \quad \angle bm_a$ | v) $(b + c) h_b \quad m_a$ | |
| s) $p_a^b \quad \gamma \quad \angle am_b$ | w) $(b - c) \alpha \quad \angle cm_a$ | |
| t) $(a + b) \gamma \quad \angle bm_c$ | x) $(c - a) \beta \quad \angle am_b$ | |

- *14.** (Winkel mit parallelen Schenkeln.) Verlängere zwei Nachbarseiten eines Parallelogramms über die gemeinschaftliche Ecke und erörtere an dieser Figur die Beziehungen zweier Winkel, deren Schenkel **a)** gleichgerichtet, **b)** gegengerichtet parallel sind, **c)** von denen das eine Schenkelpaar gleich-, das andere gegengerichtet parallel ist.
 Ergebnis: Zusammenfassung B 7, 8.

1) $AB = a, BC = b, \angle A = \alpha, AC = e, BD = f.$

- 15.** Wie groß ist die Summe der von einem Punkte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks **a)** zu den Schenkeln gezogenen Parallelen, **b)** auf die Schenkel gefällten Lote, **c)** der von einem Punkte innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks auf die Seiten gefällten Lote?
- 16.** Gegeben ist ein Winkel S und ein Punkt P . Ziehe durch P die Gerade, die **a)** durch P halbiert wird, wenn P zwischen den Schenkeln liegt, **b)** durch den einen Schenkel halbiert wird, wenn P außerhalb liegt, **c)** durch den Scheitel S gehen muß, wenn derselbe unzugänglich ist.

Fig. 11. ***17.** (Teilung einer Strecke.) Auf dem einen Schenkel des Winkels A sind drei gleiche Strecken $AB = BC = CD$ abgeschnitten und durch B, C, D sind drei Parallelen $BE \parallel CF \parallel DG$ gezogen. Verschiebe $\triangle AEB$ längs AD : welchen Weg beschreibt dann E ? Wohin fällt AE , wenn A auf B und wenn A auf C angekommen ist? Warum ist $BE_1 = EF, CE_2 = FG$?

- 18.** Teile eine gegebene Strecke (AG in Fig. 11) **a)** in 3, **b)** in 5, **c)** in 8, **d)** in n gleiche Teile. Desgl. in zwei Teile, von denen der eine **e)** 3 mal, **f)** 5 mal, **g)** $\frac{4}{3}$ mal, **h)** $\frac{2}{5}$ mal so groß ist wie der andere. Desgl. im Verhältnis¹⁾ **i)** 1 : 2, **k)** 2 : 3, **l)** 2 : 5, **m)** 3 : 8, **n)** 7 : 2, **o)** $m : n$, **p)** 1 : 2 : 3, **q)** 3 : 2 : 5, **r)** 8 : 3 : 10, **s)** $m : n : p$.
- ***19.** (19d.) (Das Dreieck der Seitenmitten.) Halbiere im Dreieck ABC die Seite AB durch C_1 und ziehe $C_1B_1 \parallel BC, C_1A_1 \parallel AC$. **a)** In welchem Verhältnis werden AC und BC geteilt? **b)** Warum ist $A_1B_1 \parallel BA$? **c)** Wieviel Parallelogramme enthält die Figur, wenn A_1B_1 gezogen ist? **d)** Wie verhalten sich die Inhalte der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und ABC ?
Ergebnis: Zusammenfassung B 9.
- 20.** (19.) Welche Eigenschaften hat **a)** die Verbindungslinie der Mitten der oberen Abschnitte zweier Dreieckshöhen, **b)** die Verbindungslinie der Mitte einer Dreiecksseite mit der Mitte des oberen Abschnittes einer nichtzugehörigen Höhe, **c)** das durch die Seitenmitten eines Vierecks bestimmte Viereck?

1) Der Verhältnissbegriff ist an sich so einfach und den Schülern aus der täglichen Erfahrung (Alters-, Vermögens-, Gewichtsverhältnisse) und anderen Unterrichtsfächern (Prozentverhältnisse in Erd- und Naturkunde, sowie im Rechnen) so vertraut, daß die Geometrie keine Veranlassung hat, ihn bis zur Ähnlichkeitslehre ängstlich zu vermeiden. Übrigens können die bis dahin vorkommenden Aufgaben über Verhältnisse, ohne den Zusammenhang zu stören, überschlagen werden.

d) Beweise, daß die Verbindungslinie der Diagonalenmitten eines Vierecks und die Verbindungslinien der Mitten je zweier Gegenseiten einander in einem Punkte schneiden.

Ergebnis zu c: Zusammenfassung B 17.

- 21.** (20.) Halbiere im Parallelogramm $ABCD$ AB durch M , CD durch N , und ziehe DM und BN . Warum ist $BN \parallel DM$? Wie wird AC durch DM und BN geteilt?

Besondere Parallelogramme.

- *22.** (21.) (Das Rechteck.) Welche Eigenschaften hat ein Viereck mit lauter gleichen Winkeln? (Aufg. 9b.) Wie viele Symmetralen hat ein Rechteck? Warum sind seine Diagonalen einander gleich?

Ergebnis: Zusammenfassung A 8; B 12.

- *23.** (22.) (Der Rhombus.) Welche Eigenschaften hat ein Viereck mit lauter gleichen Seiten? (Aufg. 9c.) Wie wird es durch jede Diagonale geteilt? (IV, B 7.) Wie viele Symmetralen hat ein Rhombus?

Ergebnis: Zusammenfassung A 9; B 13.

- *24.** (23.) (Das Quadrat.) Was ist ein Quadrat? Wie viele Symmetralen hat es? Welche Eigenschaften haben seine Diagonalen?

Ergebnis: Zusammenfassung A 10; B 14.

- | | | | |
|------------------|---|---|--------------|
| 25. (24.) | Rechteck aus: | Rhombus aus: | Quadrat aus: |
| | $\overbrace{a \quad b \quad c \quad d} \quad \angle b \quad \angle c \quad \angle d \quad \angle a$ | $\overbrace{e \quad f \quad g \quad h} \quad e \quad f \quad g \quad h$ | $i \quad e$ |
| | $\overbrace{a \quad e \quad d \quad c} \quad \angle a \quad \angle e \quad \angle d \quad \angle c$ | $\overbrace{e \quad f \quad h \quad g} \quad e \quad f \quad h \quad g$ | $k) (a + e)$ |

- 26.** (XV, 74. 77.) **a)** Einem gleichschenkligen Dreieck soll das Quadrat umgeschrieben werden, dessen eine Ecke in die Spitze des Dreiecks fällt. **b)** Einem Rhombus soll das Quadrat eingeschrieben werden. **c)** Einem Quadrat soll das gleichseitige Dreieck eingeschrieben werden, welches mit dem Quadrat eine Ecke gemein hat.

Das Trapez.

- *27.** (25.) (Bezeichnungen und Eigenschaften.) Im Trapez $ABCD$ ¹⁾ ist der Schenkel AD durch Q halbiert. Verschiebe $\angle A$ längs der Grundlinie AB , bis Q auf BC fällt.

1) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$; $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $AC = e$, $BD = f$.

Warum ist dann $QQ_1 \parallel AB$? Warum ist $Q_1B = Q_1C$? (Drehe Dreieck Q_1A_1B um Q_1 .) Welches sind die Maßzahlen der Seiten und Winkel des Dreiecks Q_1A_1B ? Wie lang ist QQ_1 ? (Ziehe AC und beachte B 9.)

Ergebnis: Zusammenfassung A 6; B 15.

28. (26.) Trapez aus:

- | | |
|--------------------------|--------------------------------------|
| a) $a b c \beta$ | n) $b d e (\alpha + \beta)$ |
| b) $b c d e$ | o) $b d (\alpha + \beta) \angle cf$ |
| c) $a c e \beta$ | p) $a b c (\alpha + \beta)$ |
| d) $a e f \alpha$ | q) $a b c d$ |
| e) $a b \alpha \beta$ | r) $(a + c) b e f$ |
| f) $b c \beta \angle ae$ | s) $(a + c) b f \angle ef$ |
| g) $b d c h_a$ | t) $a e f \angle ef$ |
| h) $a b f h_a$ | u) $b e f \angle ef$ |
| i) $a b h_a \alpha$ | v) $c e f \angle ae$ |
| k) $d f h_a \beta$ | w) $e f \angle bf \angle ef$ |
| l) $(a - c) b d f$ | x) $e \angle ae \angle bf \angle ef$ |
| m) $(a - c) b f \alpha$ | y) $f \angle ae \angle df \angle ef$ |

Anm.: In der Musterfigur zu r bis w verlängere AB um CD .

*29. (27.) (Das gleichschenklige Trapez.) Ziehe in einem gleichschenkligen Dreieck eine Parallele zur Grundlinie und erörtere die Eigenschaften des abgeschnittenen Trapezes. Welches ist die Symmetrale eines gleichschenkligen Trapezes? Ergebnis: Zusammenfassung B 16.

30. (28.) Beweise, daß ein Trapez gleichschenklige ist, wenn die Winkel an einer Grundlinie einander gleich sind. (Vergl. IV, Aufg. 5.)

31. (29.) Gleichschenklige Trapez aus:

- | | | |
|-------------------|---------------------------|-------------------------------|
| a) $a b e$ | f) $e \alpha \angle ae$ | l) $(a + c) b e$ |
| b) $a b h_a$ | g) $h_a \alpha \angle ae$ | m) $(a + c) b h_a$ |
| c) $c e h_a$ | h) $a c h_a$ | n) $(a + b) e \alpha$ |
| d) $a h_a \alpha$ | i) $a c e$ | o) $(a - b) \alpha \angle ae$ |
| e) $e h_a \alpha$ | k) $(a - c) h_a e$ | p) $(b + c) h_a \alpha$ |

Das allgemeine Viereck.

32. (30.) Verschiebe in dem ungleichseitigen Viereck $ABCD$ $\angle ABC$ längs BC , bis B auf C fällt, und bestimme aus

den Maßzahlen des Vierecks $ABCD^1$) die Größe von AA_1 , AD , CA_1 , CD und ihrer Zwischenwinkel.

Viereck aus:

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| a) $abcd(\alpha + \beta)$ | e) $ac\alpha\beta\gamma$ |
| b) $abcd(\alpha + \delta)$ | d) $bd\alpha\gamma\delta$ |

33. (31.) Verschiebe im Viereck $ABCD \triangle ABC$ längs BD , bis B auf D fällt, erörtere die Eigenschaften des Vierecks AA_1C_1C und bestimme die Maßzahlen seiner Stücke, sowie der bei D zusammenstoßenden Winkel.

Viereck aus $ef \angle ef$ und:

- | | | | |
|---------|---------|------------------|------------------|
| a) ab | c) ac | e) $a \angle ae$ | g) $c \angle cf$ |
| b) bc | d) bd | f) $b \angle be$ | h) $d \angle df$ |

34. (32.) (Satz vom Diagonalenparallelogramm.) Vergleiche in dem zu 33 gezeichneten Diagonalenparallelogramm AA_1C_1C die Dreiecke ADA_1 und DAB , CDC_1 und DCB . Wie groß ist die Summe der Dreiecke ADA_1 und CDC_1 ? Wie groß ist $\triangle ADC + \triangle A_1DC_1$? Wie groß ist das Diagonalenparallelogramm?

Ergebnis: Zusammenfassung B 18.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

- Zwei Gerade, die einander nicht schneiden, soweit man sie auch verlängert, heißen parallel.
- Wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden, so entstehen Stufenwinkel und Wechselwinkel.
- Stufenwinkel sind ein innerer und ein äußerer Winkel (an verschiedenen Scheitelpunkten und) an derselben Seite der Schneidenden.
- Wechselwinkel sind zwei innere oder zwei äußere Winkel (an verschiedenen Scheitelpunkten und) an verschiedenen Seiten der Schneidenden.
- Besondere Arten der Vierecke sind das Trapez, das Parallelogramm, das Rechteck, der Rhombus, das Quadrat.
- Ein Trapez ist ein Viereck mit zwei parallelen Gegenseiten. Die parallelen Seiten heißen Grundlinien, die nicht parallelen Schenkel.

1) Die Maßzahlen des Vierecks $ABCD$ entsprechen denen des Trapezes (vgl. Anm. Seite 25), außerdem ist $\angle C = \gamma$, $\angle D = \delta$.

7. Ein Parallelogramm ist ein Viereck mit je zwei parallelen Gegenseiten.
8. Ein Rechteck ist ein Viereck mit lauter gleichen Winkeln.
9. Ein Rhombus ist ein Viereck mit lauter gleichen Seiten.
10. Ein Quadrat ist ein gleichseitiges Viereck mit einem rechten Winkel.
11. Eine Figur heißt zentrisch, wenn sie einen Punkt enthält, der alle durch ihn gelegten Geraden der Figur halbiert. Dieser Punkt heißt Mittelpunkt der Figur.

B. Lehrsätze.

1. Senkrechte auf einer Geraden sind parallel. (1)
2. Eine Senkrechte auf der einen von zwei Parallelen steht auch senkrecht auf der anderen. (3)
3. Stufenwinkel } an Parallelen sind paarweise gleich. (2)
4. Wechselwinkel } an Parallelen sind paarweise gleich. (2)
5. Wenn ein Paar Stufenwinkel oder ein Paar Wechselwinkel gleich sind, so sind die geschnittenen Linien parallel. (3)
6. Parallele Gerade haben überall gleichen Abstand. (11)
7. Winkel mit parallelen und gleichgerichteten (oder gegengerichteten) Schenkeln sind einander gleich. (14)
8. Winkel mit parallelen, aber ungleichartig gerichteten Schenkeln betragen zusammen 180° . (14)
9. Die Verbindungslinie der Mitten zweier Dreiecksseiten ist der dritten Seite parallel und halb so groß wie diese. (19)
10. Im Parallelogramm
 - a) sind je zwei Gegenseiten einander gleich,
 - b) sind je zwei Gegenwinkel einander gleich,
 - c) halbieren die Diagonalen einander. (8)
11. Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn
 - a) je zwei Gegenseiten einander gleich sind,
 - b) je zwei Gegenwinkel einander gleich sind,
 - c) ein Paar Gegenseiten gleich und parallel sind,
 - d) die Diagonalen einander halbieren. (9)
12. Das Rechteck ist ein Parallelogramm; seine Diagonalen sind einander gleich und bilden mit entsprechenden Seiten gleiche Winkel. (22)
13. Der Rhombus ist ein Parallelogramm; seine Diagonalen stehen aufeinander senkrecht und halbieren die Winkel. (23)

14. Die Diagonalen des Quadrats halbieren einander, sind einander gleich, stehen aufeinander senkrecht und halbieren die Winkel. (24)
15. Im Trapez ist die Verbindungslinie der Schenkelmitten den Grundlinien parallel und gleich ihrer halben Summe. (27)
16. Im gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen gleich und bilden mit entsprechenden Seiten gleiche Winkel. (29)
17. Die Seitenmitten jedes Vierecks sind die Ecken eines Parallelogramms, und dieses ist gleich der Hälfte des Vierecks. (20c)
18. Das aus den Diagonalen und dem Diagonalenwinkel eines Vierecks gebildete Parallelogramm ist zweimal so groß wie das Viereck selbst. (33)

VI. (VII.) Örter und Kongruenzsätze.

Der Kreis als Ort.

- *1. Schlage um K mit dem Halbmesser r den Kreis. **a)** Wie weit ist jeder Punkt des Umfangs vom Mittelpunkt K entfernt? **b/c)** Wie groß ist die Mittelpunktsentfernung jedes anderen Punktes innerhalb (außerhalb) des Umfangs? **d)** Welches ist der Ort für alle Punkte, die von P^1 die Entfernung r haben? Ergebnis: Zusammenfassung A 1, 2; B 8.
2. Bestimme den Punkt, der von P_1 die Entfernung r_1 hat und **a)** auf g liegt, **b)** auf k liegt, **c)** von P_2 die Entfernung r_2 hat. (Beachte die Möglichkeit und die Zahl der Lösungen.)

Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreiecks.

- *3. (Seitensatz.) **a)** In welchen Fällen ist die Aufgabe: „Dreieck aus abc “ unlösbar? **b)** Welche Beziehungen müssen zwischen den Seiten eines Dreiecks stets stattfinden? Ergebnis: Zusammenfassung B 1.
4. Beweise folgende Sätze: In jedem Dreieck ist **a)** $m_a < \frac{1}{2}(b+c)$ (V, Aufg. 13), **b)** $m_a + m_b + m_c < a + b + c$, **c)** $w_\alpha + w_\beta + w_\gamma \leq m_a + m_b + m_c$ (IV, Aufg. 29). **d)** In jedem Vier-

1) Fortan bezeichnet P ($P_1, P_2 \dots$) einen gegebenen Punkt, K den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises, k seinen Umfang, g eine gegebene Gerade. Alle anderen kleinen Buchstaben bedeuten nach wie vor stets Zahlen.

eck ist $a + c < e + f$, **e)** $\frac{1}{2}(a + b + c + d) < e + f < (a + b + c + d)$. **f)** In jedem Viereck mit einspringender Ecke ist die Summe der an dieser zusammenstoßenden Seiten kleiner als die Summe der beiden anderen.

- 5.** (XV, 7.) Die Pleuelstange und die Kurbel einer Dampfmaschine bilden in jeder Stellung die Seiten eines Dreiecks mit veränderlicher Grundlinie. **a)** Welches sind die Grenzwerte dieser Grundlinie, wenn die Pleuelstange 1,25 (1,96) m, die Kurbel 0,25 (0,39) m lang ist? **b)** Welchen Spielraum hat der Kolben, und wie lang muß der innere Raum des Dampfzylinders sein? **c)** Wie weit muß der Zylinder von der Achse des Schwungrades entfernt sein?

Kongruenz von Dreiecken.

- *6.** (5.) (Erster Kongruenzsatz.) Wie viele Lösungen hat die Aufgabe: „Dreieck aus abc “ (wenn sie lösbar ist)? Sind die erhaltenen Dreiecke von einander verschieden? (IV, Aufg. 13.)
Ergebnis: Zusammenfassung A 3; B 2a.
- *7.** (6.) (Zweiter Kongruenzsatz.) Erörtere für die Aufgabe: „Dreieck aus $ab\gamma$ “ die Möglichkeit der Lösung, sowie die Zahl der möglichen Lösungen, und bringe die erhaltenen Dreiecke durch Umklappen oder durch Drehen zur Deckung.
Ergebnis: Zusammenfassung B 2b.
- *8.** (7.) (Dritter Kongruenzsatz.) Erörtere die Aufgaben: **a)** Dreieck aus $a\beta\gamma$, **b)** Dreieck aus $a\alpha\beta$.
Ergebnis: Zusammenfassung B 2c.
- *9.** (8.) (Vierter Kongruenzsatz.) Erörtere die Lösbarkeit und die Ein- oder Mehrdeutigkeit der Aufgabe: Dreieck aus $bc\gamma$ für den Fall, daß **a)** $b > c$, **b)** $b < c$.
Ergebnis: Zusammenfassung B 2d.
- *10.** (9.) Beweise für zwei kongruente Dreiecke die Gleichheit **a)** entsprechender Mittellinien und der zugehörigen Winkel, **b)** entsprechender Winkelhalbierenden und der zugehörigen Abschnitte, **c)** entsprechender Höhen und Seitenprojektionen; ferner entsprechender Abschnitte und Winkel, die gebildet werden: **d)** von Mittellinien miteinander, **e)** von Winkelhalbierenden miteinander, **f)** von Höhen miteinander, **g)** von einer Mittellinie mit einer Winkelhalbierenden, **h)** von einer Winkelhalbierenden mit einer Höhe, **i)** von einer Höhe mit einer Mittellinie.
Ergebnis: Zusammenfassung B 3.

Anwendungen der Kongruenz.

11. (10.) Stelle Kongruenzsätze auf **a)** für rechtwinklige, **b)** für gleichschenklige, **c)** für rechtwinklig-gleichschenklige, **d)** für gleichseitige Dreiecke.

Ergebnis von a: Zusammenfassung B 4.

12. (11.) Beweise durch Kongruenz von Dreiecken die Eindeutigkeit folgender Aufgaben:

Dreieck aus:

a) $a \quad h_a \quad \beta$	e) $m_a \quad \gamma \quad \angle b m_a$	i) $c \quad w_a \quad \alpha$
b) $a \quad b \quad m_a$	f) $b \quad v_a \quad w_a$	k) $a \quad b \quad m_c$
c) $b \quad m_a \quad \angle b m_a$	g) $u_a \quad \alpha \quad \beta$	l) $m_b \quad \angle a m_b \quad \angle c m_b$
d) $c \quad \beta \quad \angle c m_a$	h) $w_\beta \quad \beta \quad \gamma$	m) $m_c \quad \gamma \quad \angle a m_c$

13. (12.) Beweise mittels kongruenter Dreiecke die Gleichheit **a)** der Grundwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks, **b)** ihrer Halbierungslinien und der durch dieselben gebildeten Abschnitte, **c)** der zu den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks gehörenden Höhen und der entsprechenden Schenkelprojektionen, **d)** der entsprechenden Mittellinien und der von ihnen mit entsprechenden Seiten gebildeten Winkel, **e)** der Gegenseiten eines Parallelogramms, **f)** der Diagonalen eines Rechtecks, **g)** der Lote, die von zwei Ecken eines Dreiecks auf die zur dritten gehörige Mittellinie gefällt sind, **h)** zweier Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe. (Fig. 21.)
14. (13.) Beweise mittels kongruenter Dreiecke, **a)** daß im gleichschenkligen Dreieck die zur Grundlinie gehörige Höhe, Mittellinie und Winkelhalbierende identisch sind, **b)** daß die Diagonalen eines Parallelogramms einander halbieren, **c)** daß die Diagonalen eines Rhombus aufeinander senkrecht stehen und die Winkel halbieren.
15. (14.) Beweise, daß ein Dreieck gleichschenklige ist, wenn **a)** zwei Winkel, **b)** zwei Höhen, **c)** zwei Mittellinien, **d)** die Projektionen einer Seite auf jede der beiden anderen, **e)** die Projektionen zweier Seiten aufeinander, **f)** die Abstände der Mitte einer Seite von den beiden anderen, **g)** die Entfernungen der Mitte einer Seite von den Mitten der beiden anderen einander gleich sind; desgl. **h)** wenn eine Winkelhalbierende, **i)** wenn eine Mittellinie zugleich Höhe ist. — Andeutung zu c: Fälle in Fig. 6 von den Mitten der Seiten AC und AB auf BC die Lote $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ und beweise: $\triangle BB_1 B_2 \cong \triangle CC_1 C_2$ (benutze V B, 9 und 6); dann $\triangle CB_1 B_2 \cong \triangle BC_1 C_2$.

Fig. 10. **16.** (15.) Untersuche, ob das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm sein muß, wenn

- a) $AB = CD, BC = DA$ e) $AB = CD, \angle A = \angle C$
 b) $AB = CD, AB \parallel CD$ f) $AO = CO, BO = DO$
 c) $AB = CD, BC \parallel DA$ g) $AB = CD, AO = CO$
 d) $AB \parallel CD, \angle A = \angle C$ h) $AB \parallel CD, AO = CO$

17. Beweise, daß ein Trapez gleichschenkelig ist, wenn **a)** die Winkel an einer Grundlinie, **b)** zwei entsprechende Diagonalabschnitte, **c)** die Diagonalen gleich sind; **d)** wenn die Verbindungslinie der Mitten der Grundlinien auf diesen senkrecht steht.

***18.** (Kongruenz zweier n -Ecke.) Gegeben ist ein Fünfeck $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$. **a)** Zeichne ein zweites Fünfeck A_2/E_2 so, daß $A_2 B_2 = A_1 B_1, \angle B_2 = \angle B_1, B_2 C_2 = B_1 C_1, \angle C_2 = \angle C_1, C_2 D_2 = C_1 D_1, \angle D_2 = \angle D_1, D_2 E_2 = D_1 E_1$. Warum ist $\triangle B_2 C_2 D_2 \cong \triangle B_1 C_1 D_1, \triangle A_2 B_2 D_2 \cong \triangle A_1 B_1 D_1, \triangle A_2 D_2 E_2 \cong \triangle A_1 D_1 E_1$? **b)** Beweise, daß zwei Fünfecke kongruent sind, wenn sie in drei aufeinanderfolgenden Seiten und den vier Anwinkeln übereinstimmen.

19. (16.) Stelle Kongruenzsätze auf für ***a)** Vierecke, **b)** Sechsecke, **c)** Achtecke, **d)** Zwanzigecke, ***e)** n -Ecke.
 Ergebnis: Zusammenfassung B 5.

Unvollständige Kongruenz.

***20.** (18.) Gegensatz zum zweiten Kongruenzsatz.) Zeichne zwei ungleiche Winkel $\angle A_1 > \angle A_2$, trage auf ihren Schenkeln $A_1 B_1 = A_2 B_2$ und $A_1 C_1 = A_2 C_2$ ab, und ziehe $B_1 C_1$ sowie $B_2 C_2$. Lege dann $\triangle A_2 B_2 C_2$ so auf $A_1 B_1 C_1$, daß $A_2 B_2$ auf $A_1 B_1$ fällt, und beweise, daß $B_1 C_1 > B_2 C_2$ (Aufg. 4 d, f).
 Ergebnis: Zusammenfassung B 6.

***21.** (19.) (Gegensatz zum ersten Kongruenzsatz.) Zwei Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ stimmen in zwei Seiten überein ($A_1 B_1 = A_2 B_2, A_1 C_1 = A_2 C_2$). Welche Beziehung besteht zwischen $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$: **a)** wenn $\angle A_1 = \angle A_2$ (B 2 b), **b)** wenn $\angle A_1 > \angle A_2$? (B 6). Unter welcher Bedingung ist es allein möglich, daß $\angle A_1 < \angle A_2$?
 Ergebnis: Zusammenfassung B 7.

22. (20.) Beweise, daß im Parallelogramm die größere Diagonale den größeren Gegenwinkel hat.

Die Gerade als Ort.

- *23. (21.) (Die Parallele als Ort.) Welches ist der Ort für alle Punkte, die von einer gegebenen Geraden den Abstand a haben? (Wie viele Linien?) (VB, 6). Bestimme hiernach die Punkte, die von g_1 den Abstand a_1 haben und **a)** auf g_2 , **b)** auf k liegen, **c)** von g_2 den Abstand a_2 , **d)** von P die Entfernung r haben. (Grenzfälle!)
Ergebnis: Zusammenfassung B 9.
24. (22.) Dreieck aus:
- | | | |
|----------------------|-------------------------|-----------------------------------|
| a) $a \ h_a \ h_b$ | e) $h_a \ h_c \ p_a^c$ | i) $(h_b + h_c) \ p_b^c \ \alpha$ |
| b) $b \ h_a \ h_b$ | f) $h_b \ h_c \ p_b^c$ | k) $(h_a + h_b) \ p_a^b \ \gamma$ |
| c) $a \ h_a \ p_b^a$ | g) $h_b \ h_c \ \alpha$ | l) $(h_b - h_a) \ p_b^a \ \gamma$ |
| d) $c \ h_c \ p_b^c$ | h) $h_a \ h_c \ \beta$ | m) $(h_c - h_a) \ p_a^c \ \beta$ |
- (Die Aufgaben i bis m sind auf einfachere zurückzuführen.)
- *25. (23.) (Die Mittelsenkrechte als Ort.) **a)** Warum ist jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Strecke AB von den Endpunkten derselben gleichweit entfernt? (15i.) **b)** Beweise, daß ein Punkt, der nicht auf der Mittelsenkrechten liegt, von A und B ungleiche Entfernungen hat. ($AM = AP_1 + P_1M = BP_1 + P_1M > BM$; vergl. B 1.)
Ergebnis: Zusammenfassung B 10.¹⁾ Fig. 13.
- *26. (24.) (Die Winkelhalbierende als Ort.) **a)** Beweise (durch Umklappen oder durch Kongruenz), daß jeder Punkt der Halbierungslinien eines Winkels und seines Nebenwinkels von den Schenkeln gleichen Abstand hat, **b)** daß ein Punkt, der nicht auf einer der Halbierungslinien liegt, von den Schenkeln ungleiche Abstände hat. ($A_1M = A_1P_1 + P_1M = B_1P_1 + P_1M > B_1M > DM$).
Ergebnis: Zusammenfassung B 11. Fig. 14.
- *27. (25.) (Die Mittelparallele als Ort.) Welches ist der Ort für alle Punkte, die von zwei parallelen Geraden gleichen Abstand haben?
Ergebnis: Zusammenfassung B 12.
28. (26.) Bestimme den Punkt, der
- | | | |
|--|---------|--|
| a) von P_1 und P_2 gleiche Entfernung
b) von g_1 und g_2 gleichen Abstand | } und { | I. von P_3 die Entfernung r hat,
II. von g_3 den Abstand a hat. |
|--|---------|--|

1) Als Übungsbeispiele können die Aufgaben IV, 17—23 wiederholt und die Aufgaben XV, 1—7 herangezogen werden.

- c) Bestimme den Punkt, der von P_1 und P_2 gleiche Entfernung und von g_1 und g_2 gleichen Abstand hat. (Beachte die Zahl und Möglichkeit der Lösungen, sowie die Grenzfälle.)

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

1. Der Ort für einen Punkt ist eine Linie, auf welcher der Punkt liegen muß, und deren sämtliche Punkte der gestellten Bedingung genügen.
2. Der Kreis¹⁾ ist der Ort für alle Punkte, die von einem festen Punkte gleiche Entfernung haben.
3. Figuren heißen kongruent, wenn sie durch Aufeinanderlegen zur Deckung gebracht werden können.

B. Lehrsätze.

1. Jede Dreiecksseite ist kleiner als die Summe der beiden anderen und größer als ihr Unterschied. (3)
2. Dreiecke sind kongruent, sobald sie übereinstimmen
 - a) in allen drei Seiten, (6)
 - b) in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel, (7)
 - c) in einer Seite und zwei entsprechend liegenden Winkeln, (8)
 - d) in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren. (9)
3. Kongruente Dreiecke stimmen in allen entsprechenden Strecken und Winkeln überein. (10)
4. Rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, sobald sie übereinstimmen
 - a) in zwei entsprechenden Seiten,
 - b) in einer entsprechenden Seite und einem entsprechenden spitzen Winkel. (11a)
5. Vierecke (Vielecke) sind kongruent, sobald sie in fünf ($2n-3$) aufeinanderfolgenden Stücken übereinstimmen. (19)
- 6/7. Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten übereinstimmen,

die Zwischenwinkel	die Zwischenseiten
aber ungleich sind, so hat	
der größere Zwischenwinkel die größere Gegenseite.	die größere Zwischenseite den größeren Gegenwinkel.
(20)	(21)

1) Unter „Kreis“ wird stets die Kreislinie verstanden.

- 8/9. Der Ort für alle Punkte, die von einem Punkte P die Entfernung r haben, ist der Kreis um P mit dem Halbmesser r . (1)
- 10/11. Der Ort für alle Punkte, die von zwei Punkten P_1 und P_2 gleiche Entfernung haben, ist die Mittelsenkrechte der Strecke P_1P_2 . (25)
12. Der Ort für alle Punkte, die von zwei parallelen Geraden gleichen Abstand haben, ist die ihren Abstand halbierende Zwischenparallele. (27)
- einer Geraden g den Abstand a haben, ist jede der beiden im Abstände a gezogenen Parallelen. (23)
- einander schneidenden Geraden g_1 und g_2 gleichen Abstand haben, ist jede der beiden Halbierungslinien der von g_1 und g_2 gebildeten Winkel. (26)

VII. (VIII.) Der Kreis.

Lage eines Punktes, einer Geraden, eines Kreises zu einem Kreise.

- *1. (Kreis und Punkt.) Welches sind die verschiedenen Lagen eines Punktes zu einem Kreise? Welche Beziehungen finden in den einzelnen Fällen zwischen der Zentrale des Punktes und dem Halbmesser des Kreises statt? Fig. 15.
 Ergebnis: Zusammenfassung A 1; B 1, 18.
2. Der Halbmesser von K sei r , die Zentrale von P_1 sei c mm Fig. 15.
 lang. Welches ist die längste, welches die kürzeste Verbindungslinie von P_1 und k ? ($P_1A = KC + KP_1 > P_1C$; $P_1P_3 = KC - KP_1 < P_1C$.) Was ergibt sich, wenn $c > r$?
 Beispiele: $r = 30$; $c =$ a) 25, b) 12, c) 8, d) 72, e) 41, f) 64, g) 30, h) 0.
 Ergebnis: Zusammenfassung B 2.
- *3. (Kreis und Gerade.) Eine Gerade g_1 , deren Mittelpunktsabstand $KC_1 = d$ ist, schneide k in A_1 und B_1 . a) Warum ist $d < r$? b) Welche Beziehungen treten ein, wenn g_1 senkrecht zu KC_1 verschoben wird? c) Welches sind die verschiedenen Lagen einer Geraden zu einem Kreise? Fig. 16.
 Ergebnis: Zusammenfassung A 4—7, 12, 13; B 3, 4.

Fig. 16. *4. (3b.) (Tangentensatz.) Warum liegen alle Punkte einer Geraden (g_3), die im Endpunkte eines Halbmessers (KC_3) senkrecht steht, außerhalb des Kreises — mit Ausnahme von C_3 ? (IV B, 11.)

Ergebnis: Zusammenfassung B 4, 19, 20.

5. (4.) Lege an k die Tangente, die **a)** k in P berührt, **b)** g parallel ist, **c)** auf g senkrecht steht, **d)** g unter α^0 schneidet.

*6. (5.) (Zwei Kreise.) **a)** Welches sind die verschiedenen Lagen zweier (ungleichen) Kreise gegen einander? (Sonnenfinsternisse.) **b)** Warum ist die Zentrale zweier einander schneidenden Kreise kleiner als die Summe und größer als der Unterschied der Halbmesser? (VI B, 1.) **c)** Welche Grenzfälle treten ein? **d)** Wo liegt der Berührungspunkt zweier Kreise? Ergebnis: Zusammenfassung A 2, 3; B 5, 21.

Symmetrie des Kreises.

*7. (8.) (Der Durchmesser als Symmetrale.) **a)** Welche Eigenschaft hat in Fig. 16 das Dreieck KA_1B_1 ? **b)** Welches ist seine Symmetrale? **c)** Welches ist die Symmetrale für alle Sehnen, die A_1B_1 parallel sind? **d)** Welche Beziehung findet zwischen den von parallelen Sehnen eingeschlossenen Bogen statt? **e)** Wie viele Symmetralen hat ein Kreis? **f)** Welches ist die gemeinschaftliche Symmetrale zweier Kreise? Ergebnis: Zusammenfassung A 9, 15; B 6, 7, 22, 25.

8. (9.) Lege durch P_1 und P_2 den Kreis, **a)** der den Halbmesser r hat, **b)** dessen Mittelpunkt auf g liegt, **c)** in welchem zur Sehne P_1P_2 ein Mittelpunktswinkel von α^0 gehört, **d)** der auch durch P_3 geht, **e)** der g_1 in P_1 berührt, **f)** der k_1 in P_1 berührt.

9. (10.) Konstruiere den Kreis, der

a) den Mittelpunkt P_1 hat	}	und	{	I. k_2 halbiert,
b) den Halbmesser r_1 hat, durch P_2 auf k_2 geht				II. von k_2 halbiert wird.

Fig. 16. *10. (11, 13.) (Satz von Sehne und Mittelpunkt.) **a)** Drehe in Fig. 16 $\triangle KA_1B_1$ um K . Welche Wege beschreiben dabei die Punkte A_1, B_1, C_1 ? **b)** In welcher Weise ändern sich Mittelpunktswinkel, Sehne und Mittelpunktswinkel, wenn g_1 senkrecht zu KC_1 verschoben wird? **c)** Welches ist die größte, welches die kleinste Sehne eines Sehnenbüschels mit dem Scheitel P ?

Ergebnis: Zusammenfassung A 14; B 8—11.

- * 11. (14.) (Symmetrale zweier Tangenten.) Zwei in A und B Fig. 17. an k gelegte Tangenten bilden den Winkel $ADB = \alpha^0$. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel der Berührungssehne? (III B, 5.) Wie groß sind die Winkel an der Berührungssehne? Warum ist $DA = DB$? (IV B, 2.)
Ergebnis: Zusammenfassung A 8; B 12, 23, 24.
12. Ziehe in k die Sehne, die
 a) in P halbiert wird,
 b) den Mittelpunktswinkel α } hat I. g parallel ist,
 c) die Länge s } und II. auf g senkrecht steht.
13. (15.) Gegeben ist ein Kreis k und in ihm ein Durchmesser AB . Bestimme auf der Verlängerung von AB den Punkt P so,
 a) daß die von P an k gezogenen Tangenten einen Winkel von α^0 einschließen, b) daß die zwischen P und k liegenden Abschnitte dieser Tangenten gleich der Berührungssehne, c) daß sie gleich dem Halbmesser sind.
14. (16.) Konstruiere den Kreis, der g_1 und g_2 berührt und a) durch P_1 auf g_1 geht, b) durch P_1 auf der einen Halbierungslinie des Winkels $g_1 g_2$ geht, c) den Halbmesser r hat, d) dessen Berührungssehne gleich s ist, e) der auch g_3 berührt.

Winkel am Kreise.

- * 15. (17.) (Satz vom Sehnentangentenwinkel.) In Fig. 17 Fig. 17. sei $\angle AKB = \alpha^0$. Wie groß ist a) $\angle KAB$, b) der Sehnentangentenwinkel DAB ? — c) Wie groß ist der stumpfe Sehnentangentenwinkel EAB , d) der zugehörige Mittelpunktswinkel?
Ergebnis: Zusammenfassung A 10; B 13.
- * 16. (18.) (Satz vom Umfangswinkel.) In Fig. 18 sei Fig. 18. $\angle BKC = 2\alpha^0$, $\angle CKA = 2\alpha^0$. Wie groß ist a) $\angle BKA$, b) $\angle BAD$, c) $\angle CAD$, d) der Umfangswinkel BAC ? — Berechne ebenso die Größe der Umfangswinkel BA_1C , BA_2C u. s. w.
Ergebnis: Zusammenfassung A 11; B 14.
- * 17. (19.) (Umfangswinkel auf entgegengesetzten Bogen.)
 a) Wie viele Sehnentangentenwinkel gehören zu jeder Sehne? (Vergl. Fig. 17.) b) Wie viele verschiedene Umfangswinkel?
 c) Wie groß ist ihre Summe?
 Ergebnis: Zusammenfassung B 15.

18. (20.) Wie groß sind zwei Umfangswinkel auf entgegengesetzten Bogen, **a)** wenn sie einander gleich sind, **b)** wenn der eine das Doppelte, **c)** das Dreifache, **d)** das Vierfache, **e)** das n -fache des anderen ist? Desgl. wenn sie sich verhalten¹⁾ wie **f)** 2:3, **g)** 3:5, **h)** 2:7, **i)** 5:4, **k)** 11:7, **l)** 3:4, **m)** 7:4, **n)** 8:5, **o)** $m:n$?
19. (21.) Welcher Umfangswinkel ist **a)** gleich dem Mittelpunktswinkel auf dem entgegengesetzten Bogen, **b)** das Doppelte, **c)** die Hälfte, **d)** das Vierfache, **e)** das n -fache des entgegengesetzten Mittelpunktswinkels? **f)** Welcher Umfangswinkel verhält sich zum entgegengesetzten Mittelpunktswinkel wie 2:5, **g)** 4:7, **h)** 7:4, **i)** 3:14, **k)** 11:2, **l)** 3:5, **m)** 5:3, **n)** 7:5, **o)** $m:n$?
20. (22.) Welche Beziehung besteht zwischen zwei einander schneidenden Sehnen, die **a)** gleiche Bogen einschließen, **b)** in einem Abschnitte übereinstimmen, **c)** einander gleich sind, **d)** einander halbieren, **e)** einen Durchmesser in demselben Punkte unter gleichen Winkeln schneiden? **f)** Desgl. zwischen zwei parallelen Sehnen aus den Endpunkten eines Durchmessers?
21. (XV, 89.) (Winkel zweier Sehnen.) Die Sehnen B_1B_2 und C_1C_2 schneiden einander in M **a)** innerhalb, **b)** außerhalb k . Die Bogen B_1C_1 und B_2C_2 fassen α° und β° . Bestimme die Größe der Winkel $B_1B_2C_1$, $B_2C_1C_2$, B_1MC_1 .
Ergebnis: Zusammenfassung B 17.

Der Umfangswinkel auf dem Durchmesser.

- * 22. (Satz des Thales.) Ziehe in k einen Durchmesser AB und verbinde P auf k mit A , B , K . Es sei $\angle AKP = x^\circ$. Wie groß ist **a)** $\angle BKP$, **b)** $\angle KPB$ (IV B, 3), **c)** $\angle KPA$, **d)** $\angle APB$?
Ergebnis: Zusammenfassung B 16.
- * 23. (27.) (Der Thaleskreis.) Ziehe in k einen Durchmesser AB und verbinde **a)** P_1 innerhalb k , **b)** P_2 außerhalb k mit A und B . Warum ist $\angle AP_1B > 90^\circ$, $\angle AP_2B < 90^\circ$? (III B, 3.) Welches ist der Ort für alle Punkte, von denen aus AB unter rechtem Winkel erscheint?
Ergebnis: Zusammenfassung B 27.

1) Wegen der Verhältnisaufgaben vergl. die Anm. Seite 24.

24. (28.) Rechtwinkliges Dreieck ($\angle C = 90^\circ$) aus:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } p_c^a p_c^b & \text{c) } c \angle cm_c & \text{e) } h_c m_c & \text{g) } a \angle cm_c \\ \text{b) } c h_c & \text{d) } a m_c & \text{f) } c \angle bm_c & \text{h) } h_c \angle cm_b \end{array}$$

Dreieck aus:

$$\begin{array}{llll} \text{i) } a h_b h_c & \text{l) } h_a h_b p_a^c & \text{n) } h_b h_c m_a & \text{p) } h_a h_c \angle cm_b \\ \text{k) } c p_a^c p_b^c & \text{m) } h_a h_c \gamma & \text{o) } h_a h_b m_a & \text{q) } h_b h_c \angle cm_b \end{array}$$

Parallelogramm aus: r) $a h_a h_b$ s) $e h_a h_b$

*25. (29.) Ziehe von P (außerhalb k) an k die Tangenten.

26. (30.) Ziehe durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise die Gerade, a) die Bogen von gleichen Mittelpunktswinkeln abschneidet, b) die in beiden Kreisen Sehnen von gleicher Länge ergibt, c) deren Sehnenlänge gleich einer gegebenen Strecke ist.

27. (31.) Welches ist der Ort für die Mitten a) eines Sehnenbüschels, b) der durch den einen Schnittpunkt zweier gleichen Kreise gelegten Sekanten?

Ergebnis von a: Zusammenfassung B 26.

28. (32.) Ziehe in k die Sehne, die

a) den Mittelpunktsabstand a hat } und $\left\{ \begin{array}{l} \text{I. innerhalb } k \\ \text{II. außerhalb } k \\ \text{III. auf } k \end{array} \right\}$ geht.
 b) von der gegebenen Sehne AB }
 halbiert wird } P

*29. (34.) (Konstruktion der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise.) Errichte auf DO ($= 70 \text{ mm}$) in D und O die gleichgerichteten Senkrechten DE ($= 35 \text{ mm}$), OL ($= 15 \text{ mm}$) und schlage um E und L die Kreise mit den Halbmessern ED und LO . Ziehe EL , ferner $LM \parallel OD$. a) Wie lang ist EM ? b) Welches sind die Örter für M , wenn die Kreise E und L gegeben sind? c) Wie gestaltet sich die Figur, wenn die Senkrechten in D und O gegengerichtet sind?

30. (34.) Lege nach 29 an k_1 und k_2 die gemeinschaftlichen a) äußeren, b) inneren Tangenten. (Grenzfälle? Vergl. Aufg. 6a.)

31. (XV, 100.) Mit dem Triebrad einer Kraftmaschine soll das Wellrad einer Arbeitsmaschine so verbunden werden, daß beide Räder a) in gleicher, b) in entgegengesetzter Richtung laufen. Wie muß die Verbindung hergestellt werden I. durch Treibriemen, II. durch Verzahnung?

Der Ortsbogen.

- *32. (23.) Gegeben ist ein Winkel M ($= \alpha^0$) und auf dem einen Schenkel ein Punkt P . Konstruiere den Kreis, der diesen Schenkel unter der Sehne MP schneidet und den anderen (in M) berührt. Unter welchem Winkel erscheint MP von allen Punkten des Kreisbogens, der nicht zwischen den Schenkeln des Winkels M liegt? Beweise wie in 23, daß $\angle MLP \geq \alpha$, je nachdem L innerhalb oder außerhalb k liegt.
Ergebnis: Zusammenfassung B 28.

33. (24, 33.) Dreieck aus:

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $a \alpha \angle am_a$ | g) $a h_a \angle bm_a$ | n) $h_b m_a \beta$ |
| b) $b m_b \beta$ | h) $u_a v_a \alpha$ | o) $h_a \alpha \angle am_b$ |
| c) $c p_c^a \gamma$ | i) $p_a^c u_a \alpha$ | p) $a m_b \alpha$ |
| d) $a h_a \alpha$ | k) $h_c u_c \gamma$ | q) $b m_c \angle cm_b$ |
| e) $a \angle bm_a \angle cm_a$ | l) $m_a \alpha \angle am_a$ | r) $c \alpha \angle am_a$ |
| f) $b p_b^a \angle am_b$ | m) $m_c \alpha \gamma$ | s) $b c \angle am_a$ |
- t) Rechtwinkliges Dreieck aus $c m_a$.

34. (25.) Gegeben sind zwei Winkel α und β , sowie

- a) auf einer Geraden
 b) auf den Schenkeln eines Winkels C } die Abschnitte $\left\{ \begin{array}{l} \text{I. } BC, CD \\ \text{II. } AB, DE. \end{array} \right.$

Bestimme den Punkt, von dem aus der erste Abschnitt unter α^0 , der zweite unter β^0 erscheint. (b I. ist die „Pothotsche Aufgabe“.)

35. (26.) Bestimme innerhalb eines gegebenen Dreiecks den Punkt, von dem aus die drei Seiten unter gleichen Winkeln erscheinen. (Grenzfall?)
36. (XV, 80.) Konstruiere das gleichseitige Dreieck, dessen Ecken auf P , g_1 und g_2 liegen, wenn a) g_1 parallel g_2 , b) g_1 und g_2 einander schneiden. (Fälle im Musterdreieck PAB $PD \perp AB$, $PE \perp g_1$, $PF \perp g_2$ und benutze die Thaleskreise über PA und PB .)
37. (XV, 96.) Auf k_1 liegen P und K_2 . Konstruiere den Kreis, der durch P geht, seinen Mittelpunkt auf k_1 hat und k_2 a) ausschließend, b) einschließend berührt. (Vergl. IV, Aufg. 21.)
38. (XV, 97.) Gegeben sind drei Kreise; K_1 und K_2 liegen auf k_3 . Konstruiere den Kreis, der k_1 und k_2 berührt und seinen Mittelpunkt ebenfalls auf k_3 hat; und zwar sollen a) k_1 und k_2 ausschließend, b) k_1 und k_2 einschließend, c) k_1 aus-

schließend und k_2 einschließend, **d**) k_1 einschließend und k_2 ausschließend berührt werden. (Wegen der verschiedenen Möglichkeiten in der Lage von k_1 und k_2 vergl. B 5.)

39. (XV, 98b.) Ziehe durch die Schnittpunkte von k_1 und k_2 mit k_3 die von einem Punkte von k_1 ausgehenden gleichlangen Sekanten.
40. (XV, 99.) Einem gegebenen Viereck soll umgeschrieben werden:
a) das Rechteck, dessen eine Seite gleich a ist (nach 26c),
b) der Rhombus, dessen spitzer Winkel α ist (nach 39),
c) das Quadrat.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen (siehe auch VI, A 2).

1. Die Zentrale eines Punktes ist die Strecke, die ihn mit dem Mittelpunkt eines Kreises verbindet.
2. Die Zentrale zweier Kreise ist die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte.
3. Kreise, die denselben Mittelpunkt haben, heißen Ringkreise.
4. Eine Gerade, die einen Kreis schneidet, heißt Sekante.
5. Eine Gerade, die einen Kreis berührt, heißt Tangente.
6. Eine Sehne ist dasjenige Stück einer Sekante, welches innerhalb des Kreises liegt.
7. Ein Durchmesser ist eine Sehne, die durch den Mittelpunkt geht.
8. Die Berührungssehne zweier Tangenten ist die Sehne, die ihre Berührungspunkte verbindet.
9. Ein Mittelpunktswinkel ist ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkt liegt.
10. Ein Sehnentangentenwinkel ist ein Winkel, dessen Scheitel auf dem Umfang liegt, und von dessen Schenkeln der eine eine Sehne, der andere eine Tangente ist.
11. Ein Umfangswinkel ist ein Winkel, dessen Scheitel auf dem Umfang liegt, und dessen Schenkel Sehnen sind.
12. Ein Kreisabschnitt ist der von einem Bogen und seiner Sehne begrenzte Teil der Kreisfläche.
13. Ein Kreisabschnitt ist der von einem Bogen und den zugehörigen Halbmessern begrenzte Teil der Kreisfläche.

14. Gehen mehrere Gerade durch einen Punkt, so bilden sie ein Büschel; der Punkt heißt Scheitel des Büschels.
15. Sind mehrere Gerade einander parallel, so bilden sie eine Schar.

B. Lehrsätze.

1. Ein Punkt liegt innerhalb (außerhalb) eines Kreises, wenn seine Zentrale kleiner (größer) ist als der Halbmesser. (1)
2. Die kürzeste (längste) Verbindungslinie eines Punktes mit einem Kreise ist gleich dem Unterschied (der Summe) von Halbmesser und Zentrale. (2)
3. Eine Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten (hat mit dem Kreise keinen Punkt gemein), wenn ihr Abstand vom Mittelpunkt kleiner (größer) ist als der Halbmesser. (3)
4. Eine Gerade, die im Endpunkte eines Halbmessers senkrecht steht, ist Tangente. (3, 4)
5. Wenn die Zentrale zweier Kreise
- a) größer ist als die Summe der Halbmesser, so schließen sie einander aus;
 - b) gleich der Summe der Halbmesser ist, so berühren sie einander ausschließend;
 - c) kleiner ist als die Summe, aber größer als der Unterschied der Halbmesser, so schneiden sie einander;
 - d) gleich dem Unterschied der Halbmesser ist, so berührt der größere den kleineren einschließend;
 - e) kleiner ist als der Unterschied der Halbmesser, so schließt der größere den kleineren ein. (6)
6. Die Mittelsenkrechte einer Sehne geht durch den Mittelpunkt und fällt mit der Halbierungslinie des zugehörigen Mittelpunktswinkels zusammen. (7)
7. Bogen zwischen parallelen Sehnen sind gleich. (7)
8. Gleiche Sehnen haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt, gleiche Bogen und gleiche Mittelpunktswinkel. (10)
9. Gleichweit vom Mittelpunkt entfernte Sehnen sind gleich. (10)
10. Die größere von zwei Sehnen hat den kleineren Abstand vom Mittelpunkt. (10)

Transportpunkt zwischen Kreis und Linie

- X 11. Von zwei Sehnen ist diejenige die größere, die den kleineren Abstand vom Mittelpunkt hat. (10)
- X 12. Zieht man von einem Punkte P an einen Kreis k die beiden Tangenten, so sind die zwischen P und k liegenden Tangentenabschnitte einander gleich; die Zentrale ihres Schnittpunktes halbiert den Winkel der Tangenten, den zugehörigen Mittelpunktswinkel, die Berührungsehne und steht auf dieser senkrecht. (11)
13. Ein Sehnentangentenwinkel ist gleich der Hälfte des Mittelpunktswinkels, dessen Schenkel denselben Bogen einschließen. (15)
14. Alle Umfangswinkel auf demselben (oder gleichem) Bogen sind einander gleich und gleich dem Sehnentangentenwinkel, dessen Schenkel denselben Bogen einschließen. (16)
15. Zwei Umfangswinkel auf entgegengesetzten Bögen betragen zusammen 180° . (17)
16. Satz des Thales: Der Umfangswinkel auf dem Durchmesser beträgt 90° . (22)
17. Der Winkel, den zwei einander innerhalb (außerhalb) eines Kreises schneidende Sehnen bilden, wird gemessen durch die halbe Summe (den halben Unterschied) der von ihnen eingeschlossenen Bögen. (21)
-
- 18/19. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die den Halbmesser r haben und durch P gehen, ist der Kreis um P mit dem Halbmesser r . Vergl. VI B, 8. (1)
- g berühren, ist jede der beiden im Abstände r zu g gezogenen Parallelen. Vergl. VI B, 9. (4)
- 20/21. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die g in P berühren, ist die — beiderseits verlängerte — Senkrechte auf g in P . (4)
- k in P berühren, ist die — beiderseits verlängerte — Zentrale von P . (6)
- 22/23. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die durch P_1 und P_2 gehen, ist die Mittelsenkrechte der Strecke P_1P_2 . Vergl. VI B, 10. (7)
- g_1 und g_2 berühren, ist jede der beiden Halbierungslinien der von g_1 und g_2 gebildeten Winkel. Vergl. VI B, 11. (11)

Der Ort für 3 Punkte, die nicht in gerader Linie liegen ist ein Kreis.

24. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei parallele Gerade berühren, ist die ihren Abstand halbierende Zwischenparallele. Vergl. VI B, 12. (11)
- 25/26. Der Ort für die Mitten einer Sehnenchar ist der auf ihr senkrechte Durchmesser. (7) | eines Sehnenbüschels ist der Kreis, dessen Durchmesser die Zentrale des Scheitels ist. (27)
- 27/28. Der Ort für alle Punkte, von denen aus eine Strecke AB unter einem rechten Winkel erscheint, ist der Kreis, dessen Durchmesser AB ist. (Thaleskreis.) (23) | Winkel von α^0 erscheint, ist der Kreisbogen, in welchem auf der Sehne AB Umfangswinkel von α^0 stehen. (Ortsbogen.) (32)

VIII. (IX.) Kreisvielecke.

Das Dreieck als Sehnendreieck.

- *1. (Erster merkwürdiger Punkt des Dreiecks.) Warum muß jedes Dreieck einen Umkreis besitzen? (VII, Aufg. 8d.) Welche Dreieckslinien schneiden einander im Mittelpunkt des Umkreises? Wo liegt der Mittelpunkt des Umkreises, wenn $\alpha = 90^0$? (VII B, 27.) Wo liegt er, wenn $\alpha \leq 90^0$?
Ergebnis: Zusammenfassung A 1; B 1, 2.

2. a) Zeichne in einen Kreis U (Halbmesser r) ein spitzwinkliges Sehnendreieck ABC . Welches sind die Maßzahlen der Seiten und Winkel der Dreiecke ABU , BCU , CAU ?
b) Erörtere ebenso ein stumpfwinkliges Sehnendreieck.

3. Dreieck aus r und:

a) a	b	g) b	h_b	n) β	$\angle b m_b$
b) b	γ	h) a	h_b	o) p_c^b	γ
c) a	m_a	i) h_b	m_b	p) h_a	α
d) b	$\angle b m_b$	k) h_c	α	q) a	u_a
e) a	p_a^b	l) α	β	r) c	m_a
f) p_c^a	p_c^b	m) m_a	α	s) m_c	β

4. Beweise, daß die beiden Dreiecke, die aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleineren konstruiert werden können, gleiche Umkreise besitzen. (Nach Aufg. 3a und VII, B 14.)

5. Folgende Aufgaben sollen auf einfachere zurückgeführt werden:

Dreieck aus r und:

- | | | |
|------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| a) $(a + b) \alpha$ | g) $(a + b) \gamma$ | n) $(u_a - v_a) \alpha$ |
| b) $(b - c) \gamma$ | h) $(b - c) \alpha$ | o) $(b + h_b) \beta$ |
| c) $a(\alpha + \beta)$ | i) $(a + b + c) \alpha$ | p) $(c - h_c) \gamma$ |
| d) $b(\beta - \gamma)$ | k) $(b + c - a) \beta$ | q) $(a + m_b) \alpha$ |
| e) $a(b + c)$ | l) $(a + m_a) \alpha$ | r) $\alpha(\beta - \gamma)$ |
| f) $b(c - a)$ | m) $(b - m_b) \beta$ | s) $h_a(\beta + \gamma)$ |

Das Dreieck als Tangendendreieck.

- *6. (Zweiter merkwürdiger Punkt des Dreiecks.) a) Warum muß jedes Dreieck einen Inkreis besitzen? (VII, Aufg. 14e.)
b) Welche Dreieckslinien schneiden einander im Mittelpunkt des Inkreises?

Ergebnis: Zusammenfassung A 2; B 1, 3.

7. Dreieck aus ρ (Halbmesser des Inkreises) und:

- | | | | | |
|-------------------|----------------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| a) $a \beta$ | c) $p_a^c \beta$ | e) $h_a \alpha$ | g) $h_b \gamma$ | i) $h_a w_\alpha$ |
| b) $\alpha \beta$ | d) $w_\gamma \gamma$ | f) $a h_b$ | h) $h_b \beta$ | k) $h_b w_\beta$ |

- *8. a) Wie viele Berührungskreise haben drei Gerade? (VII B, 23.) Fig. 19.
b) Wie viele Ankreise hat ein Dreieck? c) Welche Dreieckslinien schneiden einander in den Mittelpunkten der Ankreise?
Ergebnis: Zusammenfassung A 3; B 1.

9. Dreieck aus:¹⁾

- | | | | | | |
|------------------|----------------------|-------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| ρ_a und | | ρ_b und | | ρ_c und | |
| a) $b \alpha$ | e) $w_\gamma \gamma$ | i) $\beta \gamma$ | n) $w_\beta \beta$ | r) $\alpha \beta$ | v) $h_a w_\alpha$ |
| b) $h_a \beta$ | f) $h_a w_\alpha$ | k) $h_c \beta$ | o) $h_a \alpha$ | s) $h_b \alpha$ | w) $h_c \gamma$ |
| c) $p_c^a \beta$ | g) $\rho \alpha$ | l) $p_a^c \beta$ | p) $\rho \gamma$ | t) $p_b^c \alpha$ | x) $a \beta$ |
| d) $b h_a$ | h) $\rho_c \beta$ | m) $b h_a$ | q) $\rho_c \beta$ | u) $a h_b$ | y) $c \alpha$ |

Das Sehnenviereck.

- *10. (Satz vom Sehnenviereck.) Wie groß ist im Sehnenviereck $ABCD$ die Summe von $\angle A$ und $\angle C$? (VII B, 15.)
Wie groß ist $\angle D$, wenn $\angle B = \beta$? Wie groß ist der

1) ρ_a, ρ_b, ρ_c sind die Maßzahlen für die Halbmesser der Ankreise.

Außenwinkel bei C ? Welche Umfangswinkel stehen auf dem Bogen AB ? Welche gleichen Winkelpaare enthält die Figur? Welche Winkel sind ae , af , be , bf Grad? ¹⁾

Ergebnis: Zusammenfassung A 1; B 9.

A 11. Berechne die Winkel eines Sehnenvierecks, in welchem

a) $\angle B = 2 \cdot \angle A$, $\angle C = 3 \cdot \angle A$;

b) $\angle B = 3 \cdot \angle A$, $\angle C = 8 \cdot \angle A$;

c) $\angle B = \frac{1}{2} \cdot \angle A$, $\angle C = \frac{1}{3} \cdot \angle A$;

d) $\angle A = \frac{1}{2} \cdot \angle B$, $\angle B = 2 \cdot \angle C$;

e) $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 5 : 7$;

f) $\angle A : \angle C : \angle D = 2 : 7 : 5$;

g) $\angle B : \angle C : \angle D = 2 : 4 : 3$;

h) $\angle A : \angle B : \angle D = 5 : 11 : 7$;

i) $\angle A : \angle B : \angle C = m : n : p$.

12. Welche Eigenschaft hat ein Sehnenviereck, in welchem a) zwei Gegenseiten parallel (VII B, 7), b) zwei Gegenseiten gleich (VII B, 8, 14), c) zwei Nachbarseiten gleich (VII B, 8), d) je zwei Gegenseiten parallel, e) je zwei Gegenseiten gleich, f) je zwei Nachbarseiten gleich, g) alle Seiten gleich, h) zwei Nachbarwinkel gleich, i) zwei Nachbarwinkel je 90° sind?

* 13. (Umkehrung.) Zeichne in k ein Dreieck ABC . a) Welches ist der Ort für alle Punkte, von denen aus BC unter $(180 - \alpha)^\circ$ erscheint? b) Welcher Bedingung muß ein Viereck genügen, wenn es einen Umkreis besitzen soll?

Ergebnis: Zusammenfassung B 11.

14. Sehnenviereck aus:

a) $abc r$

b) $abr \alpha$

c) $cra \beta$

d) $bd r \beta$

e) $abe \alpha$

f) $ab \alpha \beta$

g) $af \alpha \beta$

h) $be f \beta$

i) $af \beta \angle ae$

k) $ace \beta$

l) $abf \angle be$

m) $abr \angle ef$

n) $abr (\alpha + \beta)$

o) $bcr (\alpha - \beta)$

p) $ad (b + c) \alpha$

q) $bc (a - d) \alpha$

z) Sehnen trapez aus acr

r) $a (b + c) r \alpha$

s) $b (c - d) r \beta$

t) $d (a + b) e \beta$

u) $d (b - c) f \alpha$

v) $(c - d) f \beta \angle af$

w) $(a + d) e \alpha \angle af$

x) $bc (a + e) \angle ae$

y) $cd (f - b) \angle bf$

15. a) Welche Parallelogramme, b) welche Trapeze besitzen Umkreise? c) Beweise, daß die Halbierungslinien der Innen-

1) Maßzahlen wie S. 25, Anm. 1. Der Halbmesser des Umkreises ist r .

winkel jedes Vierecks ein Sehnenviereck einschließen. **d)** Desgl. die Halbierungslinien der Außenwinkel.

16. Warum ist im Sehnensechseck $ABCDEF$ $\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$?
Ergebnis: Zusammenfassung A 1; B 13.

Das Tangentenviereck.

- * 17. (Satz vom Tangentenviereck.) Was folgt beim Tangentenviereck $ABCD$ aus der Addition der Gleichungen für MA, MB, OC, OD ? (VII B, 12.)
Ergebnis: Zusammenfassung A 2; B 10.

18. (Umkehrung.) Verbinde in Fig. 20 einen Punkt D_1 auf CD (auf der Verlängerung von CD) mit A und untersuche, ob im Viereck $ABCD_1$ die Summen der Gegenseiten gleich sein können. (VI B, 1.) **a)** Welcher Bedingung muß ein Viereck genügen, wenn es einen Inkreis haben soll? **b)** Welche Parallelogramme und welche Trapeze haben Inkreise?
Ergebnis: Zusammenfassung B 12.

19. Tangentenviereck aus:¹⁾

a) $a b \alpha \beta$	g) $a \rho \alpha \gamma$	n) $(a - d) \alpha \beta \angle df$
b) $a b c \beta$	h) $a f \rho \alpha$	o) $a b (c + f) \gamma$
c) $b c d e$	i) $a b \rho \alpha$	p) $(f - b) \gamma \delta \angle cf$
d) $a d f \angle bf$	k) $(a + b) c e \angle ae$	q) $(a - b) e \alpha \delta$
e) $a d e \angle be$	l) $(a - b) d e \beta$	r) $(c - d) \beta \gamma \angle be$
f) $\rho \alpha \beta \gamma$	m) $a (b + c) \gamma \angle bf$	s) $a c d (\alpha + \beta)$

20. Stelle nach 17 Sätze auf: **a)** für ein Tangentensechseck, **b)** für ein Tangentenachteck.
Ergebnis: Zusammenfassung B 14.

Beziehungen zwischen Umkreis, Inkreis und anderen Kreisen des Dreiecks.

21. In Fig. 19 ist zu beweisen: **a)** $JB J_1 C$ ist ein Sehnenviereck, **b)** der Mittelpunkt U_1 seines Umkreises halbiert $J J_1$, **c)** U_1 liegt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC (berechne $\angle B U_1 C = 2 \cdot \angle B J_1 C$), **d)** U_1 liegt auf der Mittelsenkrechten von BC . — Welches ist hiernach der Ort für J und für J_1 , wenn a und α gegeben sind?
Ergebnis: Zusammenfassung B 5.

1) Maßzahlen wie beim allgemeinen Viereck (vgl. S. 25 und 27, Anm.). Der Halbmesser des Inkreises ist ρ mm lang.

22. Dreieck aus:

- a) $a r \rho$ c) $r \rho \gamma$ e) $c \rho_c \gamma$ g) $b (r + \rho) \beta$
 b) $b \rho \beta$ d) $b r \rho_b$ f) $r \rho_a \alpha$ h) $a (\rho_a + r) \alpha$

Tangentenviereck aus:

- i) $a c \rho \alpha$ k) $a \rho \gamma \delta$ l) $a c \alpha \beta$ m) $b d \alpha \delta$.

Fig. 19. 23. Welche Rolle spielen (Fig. 19) die Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC im Dreieck $J_1 J_2 J_3$? (II, B 3.) Zeichne hier nach Fig. 19, ausgehend vom Dreieck $J_1 J_2 J_3$, und beweise:

- * a) (Dritter merkwürdiger Punkt des Dreiecks.) Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte. (Bedeutung des Höhenpunktes für das Höhenfußpunktsdreieck?)
 b) Der Kreis, dessen Durchmesser der obere Abschnitt einer Dreieckshöhe ist, geht durch die Fußpunkte der beiden anderen.
 c) Sein Mittelpunkt liegt auf dem Umkreise des Höhenfußpunktsdreiecks.
 d) Der Kreis, dessen Durchmesser eine Dreiecksseite ist, geht durch die Höhenfußpunkte der beiden anderen, und sein Mittelpunkt liegt auf dem Umkreise des Höhenfußpunktsdreiecks.
 * e) (Der Feuerbachkreis.) Der durch die Seitenmitten eines Dreiecks geschlagene Kreis geht auch durch die Höhenfußpunkte und durch die Mitten der oberen Höhenabschnitte. (Kreis der neun Punkte.) Umkehrungen?

Ergebnis: Zusammenfassung B 4, 8.

24. Dreieck¹⁾ aus:

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| a) $J_1 J_2 J_3$ | g) $H_a M_a M_b$ | h) $H_a H_b H_c$ |
| b) $J J_1 J_2$ | h) $H_a M_b O_a$ | o) $A H M_a$ |
| c) $B C H$ | i) $H_b O_a O_b$ | p) $H_a H_b M_a$ |
| d) $A H M_b$ | k) $H_a M_b O_c$ | q) $H_a H_b O_a$ |
| e) $H H_b H_c$ | l) $M_c O_a O_b$ | r) $H_b M_b O_a$ |
| f) $H H_a M_b$ | m) $O_a O_b O_c$ | s) $H M_a O_a$ |

25. Der Höhenpunkt des Dreiecks ABC sei H ; die Höhe AD schneide (verlängert) den Umkreis in H_1 . Beweise, daß

1) Es bedeuten: ABC die (der Lage nach gegebenen) Eckpunkte des gesuchten Dreiecks, H seinen Höhenpunkt, $H_a H_b H_c$ seine Höhenfußpunkte, J seinen Inkreismittelpunkt, $J_1 J_2 J_3$ die Ankreismittelpunkte, $M_a M_b M_c$ die Seitenmitten, $O_a O_b O_c$ die Mitten der oberen Höhenabschnitte.

$DH_1 = DH$ ist: **a)** wenn $\triangle ABC$ spitzwinklig ist, **b)** wenn $\angle A > 90^\circ$, **c)** wenn $\angle B > 90^\circ$. ($\angle DBH = \angle H_1AC = \angle H_1BD$.)

Ergebnis: Zusammenfassung B 6.

- 26.** (Die Simsonsche Gerade.) Zeichne in k ein Sehnendreieck ABC und fälle von einem Punkte P des Bogens BC die Lote $PA_1 \perp BC$, $PB_1 \perp CA$, $PC_1 \perp AB$. Bestimme in der Figur vier Sehnenvierecke und beweise, daß $\angle CA_1B_1 = \angle CPB_1 = \angle BPC_1 = \angle BA_1C_1$. Wie groß ist $\angle C_1A_1B_1$?

Ergebnis: Zusammenfassung B 7.

- 27.** Beweise folgende Sätze:

- Die Sehne des Umkreises, die im Endpunkt einer Dreiecksseite auf dieser senkrecht steht, ist gleich dem oberen Abschnitt der ihr parallelen Höhe.
- Die in den Ecken eines Dreiecks auf den Seiten errichteten Senkrechten schneiden einander auf dem Umkreise und bilden ein Sehnensechseck mit parallelen und gleichen Gegenseiten.
- Die Fußpunkte der von einem Höhenfußpunkte auf die beiden anderen Seiten und auf die zu ihnen gehörigen Höhen gefällten Lote liegen auf einer Geraden. (Nach 26.)
- Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ist gleich dem Ankreishalbmesser.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

- | | | |
|--------------------------------|--|-----------------------|
| 1/2. Ein Sehnenvieleck | | Ein Tangentenvieleck |
| ist ein Vieleck, dessen Seiten | | |
| Sehnen | | Tangenten |
| eines Kreises sind. | | Dieser Kreis heißt |
| Umkreis des Vielecks. | | Inkreis des Vielecks. |
3. Ein Ankreis ist ein Kreis, der eine Seite eines Vielecks und die Verlängerungen der beiden Nachbarseiten berührt.

B. Lehrsätze.

- ✕ 1. Jedes Dreieck hat einen Umkreis (1), einen Inkreis (6) und drei Ankreise (8).

- \times 2. Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte. Er ist der Mittelpunkt des Umkreises (erster merkwürdiger Punkt des Dreiecks). (1)
- \times 3. Die Halbierungslinien der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte. Er ist der Mittelpunkt des Inkreises (zweiter merkwürdiger Punkt des Dreiecks). (6)
4. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte. Er heißt Höhenpunkt (dritter merkwürdiger Punkt des Dreiecks). (23a)
5. Der von einem Punkte des Umkreises eines Dreiecks durch die Endpunkte einer Seite geschlagene Kreis ist ein Ort für die Mittelpunkte des Inkreises und des zu der betreffenden Seite gehörigen Ankreises. (21)
6. Die Gegenpunkte des Höhenpunktes eines Dreiecks in Bezug auf die Seiten liegen auf dem Umkreise. (25)
7. Die Fußpunkte der von einem Punkte des Umkreises eines Dreiecks auf die Seiten gefällten Lote liegen auf einer Geraden. (Simsonsche Gerade.) (26)
8. Der Kreis, der die drei Seiten eines Dreiecks halbiert, geht auch durch die drei Höhenfußpunkte und durch die Halbierungspunkte der drei oberen Höhenabschnitte. (Feuerbachs Kreis der neun Punkte.) (23e)
- 9/10. Im Sehnenviereck | Im Tangentenviereck
 sind die Summen der
 Gegenwinkel | Gegenseiten
 (10) gleich. (17)
- 11/12. Ein Viereck hat einen
 Umkreis, | Inkreis,
 wenn die Summen der
 Gegenwinkel | Gegenseiten
 (13) gleich sind. (18)
- 13/14. In jedem
 Sehnenviereck | Tangentenviereck
 von gerader Seitenzahl ist
 $\angle A + C + \dots = \angle B +$ | $AB + CD + \dots =$
 $+ \angle D + \dots$ (16) | $= BC + DE + \dots$ (20)

IX. (X.) Flächengleichheit.

Verwandlung eines Dreiecks.

- * 1. (Gleichheitssatz.) Zeichne zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ von gleicher Grundlinie ($B_1C_1 = B_2C_2$) und gleicher Höhe ($A_1D_1 = A_2D_2 = h$). a) Welches ist der Ort für A_1 und A_2 ; wenn die Grundlinien aufeinander gelegt werden? Fig. 21.
b) Warum ist $\triangle A_1BC = \triangle A_2BC$? (Vergl. VI, Aufg. 13h.)
Ergebnis: Zusammenfassung A 1, 2; B 1—4.
- * 2. (1.) (Dreiecksverwandlung durch volle Verschiebung.)
Verwandle nach Fig. 21 ein Dreieck ABC unter Beibehaltung der Seite $BC = a$ in ein anderes, von welchem gegeben ist
a) b , b) γ , c) m_a , d) $\angle am_a$, e) r , f) h_b , g) m_c , h) $\angle am_b$,
i) α , k) $\angle bm_a$, l) $\angle cm_c$. Desgl. m) in ein gleichschenkliges Dreieck, n) in ein Dreieck, in welchem $b = m_a$.
3. (2.) Dreieck aus F (gegebenes Dreieck) und:
- | | | | | |
|---------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------|
| a) $a b$ | f) $a m_a$ | l) $a \angle am_b$ | q) $c \angle bm_c$ | v) $r \gamma$ |
| b) $b c$ | g) $a \angle am_a$ | m) $b \angle bm_a$ | r) $b \angle am_a$ | w) $a h_b$ |
| c) $a \beta$ | h) $c \angle cm_c$ | n) $c \gamma$ | s) $a \angle bm_b$ | x) $c h_a$ |
| d) $c \alpha$ | i) $a m_b$ | o) $a \alpha$ | t) $b r$ | y) $m_a \alpha$ |
| e) $b m_b$ | k) $b m_c$ | p) $a \angle bm_a$ | u) $a r$ | z) $m_b \beta$ |
- * 4. (3.) (Dreiecksverwandlung durch Teilverschiebung.)
Bezeichne auf der Seite AC des Dreiecks ABC einen Punkt A_1 , ziehe A_1B und verwandle das Dreieck ABA_1 unter Beibehaltung der Seite BA_1 in ein anderes, dessen Spitze B_1 auf der Verlängerung von CB liegt. In welches Dreieck ist $\triangle ABC$ dadurch verwandelt worden?
5. (4.) Verwandle $\triangle ABC$ in ein anderes, von welchem eine Ecke liegt in einem gegebenen Punkte
- | | |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| a) auf AB | d) auf der Verlängerung von BC |
| b) auf BC | e) in P innerhalb $\triangle ABC$ |
| c) auf der Verlängerung von CA | f) in P außerhalb $\triangle ABC$. |
6. (5.) Verwandle $\triangle ABC$ unter Beibehaltung des Winkels B in ein anderes, von welchem gegeben ist a) $a (< BC)$, b) $a (> BC)$, c) c , d) $h_a (< AD)$, e) $h_a (> AD)$, f) h_c .
7. (6.) Dreieck aus F und:
- | | | | |
|--------------------|--------------------|-----------------|----------------------|
| a) $a c$ | f) $c m_a$ | l) $b h_a$ | q) $h_a \angle am_a$ |
| b) $b \gamma$ | g) $b \beta$ | m) $h_a \beta$ | r) $h_b \angle bm_a$ |
| c) $c m_c$ | h) $b \angle am_b$ | n) $h_a \alpha$ | s) $h_c \angle am_a$ |
| d) $b \angle bm_b$ | i) $a \angle cm_c$ | o) $h_a m_a$ | t) $h_a r$ |
| e) $b \angle bm_c$ | k) $c r$ | p) $h_b m_a$ | u) $h_b h_c$ |

8. (7.) Verwandle ein Dreieck ***a)** in ein Rechteck mit gleicher Grundlinie, **b)** in ein Rechteck mit gegebener Grundlinie, **c)** in ein Parallelogramm mit gegebener Grundlinie und gegebenem Winkel, **d)** in ein Parallelogramm mit gegebenen Seiten, **e)** in ein gleichschenkliges Trapez mit gegebenen Grundlinien.

Verwandlung eines Parallelogramms.

- *9.** (8.) (Satz von den Ergänzungsparallelogrammen.) Ziehe im Parallelogramm $ABCD$ die Diagonale AC , bezeichne auf ihr einen Punkt E und ziehe durch E zu AB und zu BC die Parallelen KL und JM . **a)** Beweise, daß die Ergänzungsparallelogramme $EJBL$ und $EMDK$ einander gleich sind. **b)** Welches Parallelogramm ist gleich $ABLK$, welches gleich $BCMJ$?
Ergebnis: Zusammenfassung B 5.
- 10.** (9.) Parallelogramm aus F (gegebenes Parallelogramm) und:
a) $a b$ **e)** $b e$ **i)** $f \alpha$ **n)** $b h_a$ **r)** $h_a \angle b f$
b) $a \alpha$ **f)** $e \angle a e$ **k)** $e \alpha$ **o)** $h_a \alpha$ **s)** $h_a h_b$
c) $b \alpha$ **g)** $e f$ **l)** $e \angle b f$ **p)** $e h_b$ **t)** $a \angle e f$
d) $a \angle a e$ **h)** $e \angle e f$ **m)** $f \angle a e$ **q)** $h_a \angle a e$ **u)** $h_b \angle e f$
- 11.** Halbiere im Rechteck $ABCD$ den Winkel B ; die Winkelhalbierende treffe die Diagonale AC in E . Ziehe dann durch E (wie in 9) $KL \parallel AB$, $JM \parallel BC$, trage $EM = JO$ auf JB ab und ziehe EO . **a)** Warum ist $\triangle EJO \cong \triangle CME$?
b) Warum ist $\angle AEO = 1 R$?
Ergebnis: Zusammenfassung B 7.
- *12.** (10.) Wie gestaltet sich die Figur zu 9, wenn $ABCD$ ein Quadrat ist? Wie groß sind die einzelnen Teile der Figur, wenn
a) $AJ = a$, $JB = b$ — Formel für $(a + b)^2$,
b) $AB = a$, $JB = b$ — Formel für $(a - b)^2$,
c) $AB = a$, $AJ = b$ — Formel für $(a^2 - b^2)$?
- 13.** (11.) Entwirf das geometrische Bild für die Formel **a)** $(a + b + c)^2$,
b) $(a + b + c + d)^2$.
- *14.** (Satz des Pappus.) Errichte über zwei Seiten eines Dreiecks ABC nach außen die (beliebigen) Parallelogramme $BCDE$ und $ACFG$; verlängere ED und GF bis zum Schnittpunkt M , ziehe CM und durch B und A zu CM die Parallelen. Sie mögen ED und GF in O und P schneiden;

MC schneide PO in Q , AB in K . **a)** Warum ist Parallelogramm $BCDE = BCMO = BOQK$? **b)** Wie groß ist die Summe der Parallelogramme über BC und AC ?

Ergebnis: Zusammenfassung B 6.

15. Wie gestaltet sich die Figur zu 14, wenn die Parallelogramme $BCDE$ und $ACFG$ **a)** nach innen, **b)** nach verschiedenen Seiten errichtet werden?
16. Verwandle **a)** die Summe, **b)** den Unterschied zweier Parallelogramme in ein Parallelogramm mit gegebenem Winkel.

Verwandlung von Vielecken in Dreiecke, Rechtecke, Quadrate.

- *17. (12.) (Verwandlung eines Vierecks in ein Dreieck.) Ziehe im Viereck $ABCD$ die Diagonale BD und verwandle $\triangle BCD$ unter Beibehaltung der Seite BD in ein anderes, dessen dritte Ecke C_1 auf der Verlängerung von AD liegt. In welches Dreieck ist dann das Viereck $ABCD$ verwandelt?
18. (13.) Verwandle in ein Dreieck und dann in ein Rechteck: **a)** ein Fünfeck, **b)** ein Sechseck, **c)** ein Viereck mit einspringender Ecke, **d)** ein Sechseck mit zwei einspringenden Ecken, **e)** die Summe, **f)** den Unterschied zweier Dreiecke.
19. (14.) (Vorbereitung des pythagoreischen Lehrsatzes.) Fig. 22. In Fig. 22 ist das Quadrat $BCDE$ erst in ein Parallelogramm $BCGH$, dann in ein Rechteck $BKLH$ mit gegebener Seite ($BH = a$) verwandelt worden. **a)** Beschreibe die Konstruktion. **b)** Wenn BK und DC bis zum Durchschnitt A verlängert werden, warum ist dann $BA = BH$? **c)** Welches sind die Örter für C , wenn das Rechteck $BKLH$ gegeben ist? **d)** Verwandle hiernach ein Rechteck in ein Quadrat.

Der pythagoreische Lehrsatz.

- *20. (15.) (Satz des Euklid.) Über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ist das Quadrat $BCDE$ und über ihrer Projektion BK das Rechteck BKL_1H_1 ($BH_1 = BA$) errichtet. Warum ist Quadrat $BCDE =$ Rechteck BKL_1H_1 ? (Klappe in Fig. 22 das Rechteck $BKLH$ um BK um.) Fig. 22.
Ergebnis: Zusammenfassung B 8.
- *21. (16b.) (Satz des Pythagoras, Euklidischer Beweis.) Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC sind die Quadrate $BCDE$, $ACFG$, $ABHJ$ errichtet. Die Verlängerung der Höhe CK schneide HJ in L . Ziehe AE und Fig. 23.

CH. a) Warum ist $\triangle ABE \cong \triangle HBC$, Quadrat $BCDE = 2 \cdot \triangle ABE$ (B 2), Rechteck $HBKL = 2 \cdot \triangle HBC$, Quadrat $BCDE =$ Rechteck $HBKL$? — b) Beweise ebenso, daß Quadrat $ACFG =$ Rechteck $JAKL$.

Ergebnis: Zusammenfassung B 9.

22. (16.) Andere Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes:

a) Ziehe in Fig. 23 $EM \parallel BA$ und drehe das Parallelogramm $BEMA$ um B , bis A auf H fällt.

b) Verschiebungsbeweis nach Fig. 24.

c/d) Algebraischer Beweis nach Fig. 25/26.

e) Nach Pappus (B 6).

Fig. 24.

Fig. 25/26.

Anwendungen des pythagoreischen Lehrsatzes.¹⁾

23. (17.) Q_1, Q_2, Q_3 seien gegebene Quadrate von a_1, a_2, a_3 mm Seitenlänge. Konstruiere das Quadrat, welches gleich ist:

a) $Q_1 + Q_2$ c) $Q_1 + Q_2 + Q_3$ e) $2 Q_1$ g) $5 Q_1$

b) $Q_1 - Q_2$ d) $Q_1 + Q_2 - Q_3$ f) $3 Q_1$ h) $8 Q_1$

24. (18.) Wie groß ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten folgende Längen haben:

a) 5 und 12 m i) 0,045 und 0,07 m

b) 24 „ 7 „ k) 0,028 „ 0,015 „

c) 0,3 „ 0,4 „ l) 0,072 „ 0,153 „

d) 0,8 „ 1,5 „ m) 0,403 „ 0,301 „

e) 38,5 „ 18 „ n) 0,305 „ 0,09 „

f) 3,6 „ 3,57 „ o) 0,123 „ 0,095 „

g) 1,1 „ 0,6 „ p) 0,404 „ 0,606 „

h) 5,5 „ 14,63 „ q) a „ b „

25. (19.) Berechne die Seiten eines Dreiecks aus:

	a)	b)	c)	d)	e)	
$h_a = 60$	21	20,4	67,3	h_a	I. wenn $a = p_a^b + p_a^c$ II. wenn $a = p_a^b - p_a^c$	
$p_a^c = 25$	20	7,25	35,8	p_a^c		
$p_a^b = 45$	72	25,3	81,2	p_a^b		

	f)	g)	h)	i)	k)	
$h_b = 12$	11	62	198,7	h_b	I. wenn $b = p_b^a + p_b^c$ II. wenn $b = p_b^a - p_b^c$	
$p_b^a = 18,2$	60	49	231,6	p_b^a		
$p_b^c = 2,2$	29,25	31	85,4	p_b^c		

1) Siehe auch XV, 16—37.

Teilung von Figuren.

26. (24.) Teile ein Parallelogramm durch Parallele zu einer Seite in **a)** 3, **b)** 5, **c)** 6, **d)** n gleiche Teile. (V, Aufg. 17.)¹⁾ Desgl. in zwei Teile, die sich verhalten wie **e)** 3:1, **f)** 2:5, **g)** 4:9, **h)** $m:n$.
27. (26.) Teile ein Dreieck von einer Ecke aus in **a)** 5, **b)** 6, **c)** 9, **d)** n gleiche Teile; ferner im Verhältnis **e)** 2:1, **f)** 9:2, **g)** $m:n$, **h)** 3:5:7, **i)** 2:6:3, **k)** $m:n:p$.
28. (25.) Ein Parallelogramm soll durch Strahlen, die von einer Ecke ausgehen, in **a)** 6, **b)** 8, **c)** 10, **d)** $2n$ gleiche Teile geteilt werden. Desgl. in **e)** 3, **f)** 5, **g)** 7, **h)** $(2n+1)$ gleiche Teile. Desgl. im Verhältnis **i)** 1:3, **k)** 3:5, **l)** 7:3, **m)** 1:2, **n)** 6:5, **o)** 2:3:4, **p)** $m:n:p$.
29. (27.) Teile ein Trapez in **a)** 3, **b)** 4, **c)** 7, **d)** n gleiche Teile; ferner im Verhältnis **e)** 2:3, **f)** 3:5, **g)** 9:4, **h)** $m:n$, **i)** 1:2:3, **k)** $m:n:p$.
30. (28.) Teile in der Figur zu 17 das Dreieck ABC_1 von B aus in 5 gleiche Teile und verwandle dann die zwischen BD und BC_1 liegenden Teildreiecke unter Beibehaltung der Grundlinie BD so, daß ihre Spitzen auf DC liegen.
Teile hiernach ein Viereck in **a)** 3, **b)** 4, **c)** 7 gleiche Teile; ferner im Verhältnis **d)** 3:2, **e)** 2:5, **f)** 1:3:2.
31. (29.) Teile ein Dreieck von einem Punkte einer Seite aus in **a)** 3, **b)** 5, **c)** 6, **d)** 7 gleiche Teile; ferner im Verhältnis **e)** 4:1, **f)** 2:5, **g)** 3:8, **h)** 2:3:5, **i)** 7:9:4.
32. (30.) Teile ein Dreieck von einem innerhalb desselben liegenden Punkte aus in **a)** 3, **b)** 4, **c)** 5 gleiche Teile; ferner im Verhältnis **d)** 1:2, **e)** 2:7, **f)** 11:3, **g)** 9:5, **h)** 4:7:2.
33. (31.) Im Fünfeck $ABCDE$ sind zwei Punkte der Seiten AB und CD durch die gebrochene Linie FHG verbunden. Diese gebrochene Teilungslinie soll durch eine gerade ersetzt werden, die **a)** von F , **b)** von G ausgeht.
34. (32.) Teile ein Viereck von zwei Gegenecken aus in **a)** 3, **b)** 5, **c)** 6 gleiche Teile, **d)** im Verhältnis 1:3, **e)** im Verhältnis 3:4, und ersetze dann die gebrochenen Teilungslinien durch gerade, die sämtlich von einer Ecke ausgehen.

1) Nach einer Wiederholung der Methode kann zur ferneren Streckenteilung der Maßstab benutzt werden. — Vergl. auch Anm. Seite 24.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

1. Figuren sind gleich, wenn sie gleichen Flächeninhalt haben.
2. Eine Figur verwandeln heißt, ihr eine andere Form geben, ohne den Flächeninhalt zu ändern.

B. Lehrsätze.

1. Parallelelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich. (1)
2. Ein Dreieck ist halb so groß wie ein Parallelelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe. (1)
3. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich. (1)
4. Der Ort für die Spitzen aller gleichen Dreiecke auf gemeinschaftlicher Grundlinie ist die durch die Spitze des einen von ihnen zur Grundlinie gezogene Parallele. (1)
5. Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelelogramms die Parallelen zu den Seiten, so sind die von der Diagonale nicht geschnittenen Teilparallelogramme (Ergänzungsparallelogramme) einander gleich. (9)
6. Satz des Pappus: Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks Parallelelogramme so, daß die Ecken des einen auf den Seiten der beiden anderen liegen, so ist die Summe der beiden nach außen oder nach innen gerichteten Parallelelogramme gleich dem dritten. (14)
7. Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den Projektionen der Katheten:

$$h_c^2 = p_c^a \cdot p_c^b \quad (11; \text{vergl. auch XII B, 9.})$$

8. Satz des Euklid: Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus ihrer Projektion auf die Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse:

$$a^2 = c \cdot p_c^a \quad (20; \text{vergl. auch XII B, 8.})$$

9. Satz des Pythagoras: Die Summe der Kathetenquadrate eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Hypotenusenquadrat:

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (21, 22)$$

X. (VI). Inhaltsberechnung.

Das metrische Flächenmaß.

- *1. (Die Einheit des Flächenmaßes.) Zeichne (an die Wandtafel) ein Quadrat von 1 m Seitenlänge, teile zwei Gegenseiten in je 10 dm, und verbinde die entsprechenden Teilpunkte. In wieviel Rechtecke wird das Meterquadrat dadurch zerlegt? Wie lang und wie breit ist jedes von ihnen? In wieviel Decimeterquadrate kann jedes geteilt werden? Wieviel qdm hat 1 qm? Der wievielte Teil eines qm ist ein qdm? Ergebnis: Zusammenfassung A 1, 2.
- *2. (Einteilung der Flächenmaße.) Erörtere nach 1 an einer Figur im Zeichenheft die Beziehungen zwischen a) qdm und qcm, b) qcm und qmm, c) qdm und qmm.
- *3. Wie nennt man ein Quadrat, dessen Seite 10 m, 100 m, 1000 m lang ist? Wie wird 1 a, 1 ha, 1 qkm eingeteilt? Ergebnis: Zusammenfassung A 3.
4. Welches Flächenmaß benutzt man zur Angabe der Größe
- | | |
|------------------------|----------------------------|
| a) eines Landes, | i) eines Zeitungsblattes, |
| b) eines Gutsbezirkes, | k) einer Provinz, |
| c) eines Gartens, | l) einer Fensterscheibe, |
| d) einer Wandfläche, | m) eines Ackers, |
| e) einer Fensterbank, | n) einer Tischplatte, |
| f) einer Postkarte, | o) eines Teppichs, |
| g) einer Briefmarke, | p) einer Schiefertafel, |
| h) eines Bauplatzes, | q) eines Uhrzifferblattes? |
5. Nach welcher Maßeinheit bestimmt man den Querschnitt
- | | |
|-----------------------|--------------------------------|
| a) eines Balkens, | f) eines Gewehrlaufes, |
| b) eines Bleistiftes, | g) eines Grabens, |
| c) eines Brotes, | h) einer Wagenachse, |
| d) eines Drahtes, | i) eines Wasserleitungsrohres, |
| e) eines Brunnens, | k) eines Erdwalles (Deiches)? |

Das Rechteck.

- *6. (Inhaltsformel.) a) Zeichne ein Rechteck $ABCD$, in welchem $AB = 12$ cm, $BC = 7$ cm, und teile es in qcm. Bestimme ebenso den Inhalt eines Rechtecks von der Seitenlänge
- | | | |
|------------------|-------------------|---------------------|
| b) 5 cm und 8 cm | d) 14 cm und 7 cm | f) 13 cm und 6 cm |
| c) 9 cm „ 6 cm | e) 11 cm „ 9 cm | g) a cm „ b cm. |
- Ergebnis: Zusammenfassung B 1.

7. Wie groß ist ein Rechteck von der Seitenlänge:

- | | |
|----------------------|-----------------------------------|
| a) 9 mm und 7 mm | m) 3,7 m und 5,2 m |
| b) 5 mm „ 11 mm | n) 118 m „ 219 m |
| c) 8 mm „ 6 mm | o) 31,5 m „ 70,4 m |
| d) 15 mm „ 24 mm | p) 576,3 m „ 612,6 m |
| e) 18 mm „ 25 mm | q) 0,72 m „ 0,85 m |
| f) 7,2 cm „ 3 cm | r) 0,315 m „ 0,089 m |
| g) 8 cm „ 9,7 cm | s) 0,007 m „ 0,035 m |
| h) 15,3 cm „ 6,9 cm | t) 4,26 m „ 0,27 m |
| i) 20,8 cm „ 11,4 cm | u) 0,857 m „ 3,18 m |
| k) 30,3 cm „ 20,5 cm | v) 4,053 m „ 0,807 m |
| l) 11 m „ 25 m | w) 18,07 m „ 10,09 m ² |

*8. Wie groß ist ein Quadrat von der Seitenlänge

- | | | | | |
|----------|-----------|------------|------------|---------------------|
| a) 9 cm | d) 18 mm | g) 34,8 cm | k) 0,59 m | n) 208,4 m |
| b) 13 cm | e) 7,5 cm | h) 66,4 cm | l) 77,03 m | o) 513,7 m |
| c) 7 mm | f) 5,2 cm | i) 7,21 m | m) 54,95 m | p) a m ² |

9. Berechne die Fläche

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| a) eines Heftdeckels, | g) des Fußbodens, |
| b) eines Heftschildes, | h) deiner Tischplatte, |
| c) dieses Buches, | i) eines Zeitungsblattes, |
| d) der Wandtafel, | k) einer Postkarte, |
| e) einer Fensterscheibe, | l) einer Briefmarke, |
| f) der Stubentür, | m) einer Postpaketadresse. |

10. Wie groß ist

- eine Wiese von 125 (76) m Länge und 378 (207) m Breite,
- ein Bauplatz von 25,4 (19,3) m Breite und 32,6 (25,1) m Tiefe,
- der Fußboden eines Zimmers von 5,73 (4,18) m Länge und 3,21 (7,04) m Breite?

11. a) Wieviel hl sät man auf einen rechteckigen Acker von 157 (120,5) m Länge und 73 (89,3) m Breite, wenn man auf 1 ha 3,18 hl Aussaat rechnet?

- Wieviel Pacht zahlt man für eine Weide von 451 (328) m Länge und 763 (507) m Breite, 1 ha zu 72,80 (61,50) \mathcal{M} ?
- Was kostet ein Bauplatz von 21,3 (17,7) m Breite und 19,8 (24,8) m Tiefe, 1 qm zu 31,80 (28,60) \mathcal{M} ?
- Was kostet das Tapezieren eines Zimmers von 4,87 (7,13) m Länge, 5,21 (6,08) m Breite und 3,62 (4,31) m Höhe, 1 qm zu 0,38 (0,42) \mathcal{M} ?
- Was kostet das Pflastern eines Platzes von 33,6 (124,8) m Länge und 59,4 (70,6) m Breite, 1 qm zu 6,67 (7,62) \mathcal{M} ?
- Wie hoch stellt sich bei gleichem Preise das Pflastern des laufenden Meters einer Straße von 8,4 (9,7) m Breite?

- 12.** a) Wieviel Bäume kann man in einen Obstgarten von 22,5 (38,3) m Länge und 54,8 (75,4) m Tiefe pflanzen, wenn jeder Baum einen Platz von 60 qm beansprucht?
 b) Wieviel quadratische Platten von 0,6 (0,54) m Länge braucht man zum Belegen eines Hausflurs von 2,4 (2,7) m Breite und 9,6 (10,8) m Länge?
 c) Wieviel Dielen von 0,25 (0,31) m Breite und 6 (5,8) m Länge braucht man zum Decken eines Saales von 12,5 (18,6) m Breite und 18 (23,2) m Tiefe?
- 13.** a) Wieviel Kopfsteine von 15 cm Breite und 18 cm Länge sind zum Pflastern des Platzes in 11e erforderlich, wenn der Abstand zwischen je zwei Steinen 1 cm beträgt?
 b) Wieviel Schieferplatten von 22 cm Länge und 18 cm Breite braucht man zum Decken der beiden Seiten eines rechteckigen Daches von 12,6 (15,1) m Länge und 9,8 (8,7) m Höhe, wenn die Ränder der Platten immer 4 (3,5) cm weit überstehen sollen?
 c) Ein Ölgemälde ist 1,19 (1,57) m breit und 0,81 (1,04) m hoch; es soll einen 15 (23,4) cm breiten Rahmen erhalten. Wieviel Goldbronze ist zum Vergolden dieses Rahmens erforderlich, wenn 1 g Bronze zum Vergolden von 11,5 qcm ausreicht?

Das Parallelogramm und das Dreieck.

- * **14.** (Inhaltsformeln.) a) Verwandle ein Parallelogramm von a m Grundlinie und h_a m Höhe in ein Rechteck und berechne danach seinen Inhalt. b) Wie groß ist der Inhalt eines Dreiecks von a m Grundlinie und h_a m Höhe? (IX B, 2.)
 Ergebnis: Zusammenfassung B 2, 3.

- 15.** (16.) Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks ABC , wenn: Fig. 5.

	$BC =$	$AD =$		$BC =$	$AD =$
a)	24 m	15 m	g)	697,25 m	815,04 m
b)	39 „	42 „	h)	301,07 „	520,3 „
c)	5,8 „	9 „	i)	0,78 „	0,52 „
d)	3,5 „	2,4 „	k)	0,083 „	0,009 „
e)	15,75 „	11,31 „	l)	0,008 „	0,103 „
f)	328,6 „	181,3 „	m)	0,203 „	0,07 „

- 16.** (17.) Berechne für die in 15 genannten Dreiecke die Höhe BE , wenn $AC =$ Fig. 5.

a) 20,	d) 4,2,	g) 910,04,	k) 0,045,
b) 91,	e) 20,	h) 620,14,	l) 0,127,
c) 11,6,	f) 205,3,	i) 0,64,	m) 0,097 m.

17. (18.) Berechne für die in 15 genannten Dreiecke die Seite AB , wenn die zugehörige Höhe $CF =$

- a) 18, d) 3, g) 370,05, k) 0,063,
 b) 26, e) 9,07, h) 204,03, l) 0,005,
 c) 2,9, f) 250,4, i) 0,69, m) 0,08 m.

Fig. 4. *18. (19.) (Rechtwinkliges Dreieck.) Auf wieviel verschiedene Arten kann man den Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen? Welches ist die einfachere?

Ergebnis: Zusammenfassung B 4.

19. (20.) Berechne den Inhalt der in IX, Aufg. 24 genannten rechtwinkligen Dreiecke.

20. (21.) Ein rechteckiger Acker $MPQS$ wird an der Ecke M von einer neuanzulegenden Straße AB schräg durchschnitten, und zwar ist $MA = 73$ (95,7) m, $MB = 136$ (106,5) m. Welche Entschädigung muß für das abgeschnittene Dreieck gezahlt werden, wenn 1 ha zu 2150 (1870) \mathcal{M} . abgeschätzt ist?

Das Trapez.

Fig. 12. *21. (22.) (Inhaltsformel.) Trapez $ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$. Wie groß ist der Inhalt eines Trapezes mit:

	den Grundlinien		und der Höhe		
a)	18	cm, 12	cm	7	cm
b)	23	" 15	"	11	"
c)	3,5	m, 5,4	m	2,8	m
d)	0,073	" 0,041	"	0,054	"
e)	18,06	" 27,3	"	53,01	"
f)	0,305	" 0,206	"	0,42	"
g)	30,17	" 20,08	"	61,03	"
h)	a	" c	"	h_a	"

Ergebnis: Zusammenfassung B 5.

22. (23.) Berechne die Länge der Schenkelhalbierenden (QQ_1 in Fig. 12) für die in 21 genannten Trapeze. (Vergl. V B, 15.)

23. (24.) a) Wie groß ist eine Fensterbank, die vorn 1,63 (1,47) m, hinten 1,49 (1,29) m lang und 0,39 (0,28) m breit ist?

b) Wie groß ist der Querschnitt eines Grabens, der oben 1,06 (1,85) m, unten 0,57 (0,72) m breit und 2,08 (0,96) m tief ist?

c) Was kostet der Schiefer zum Bedecken einer Dachseite, welche unten 16,08 (11,49) m, oben 5,73 (3,07) m lang und 8,07 (6,92) m hoch ist, 1 qm zu 2,35 (2,67) \mathcal{M} .?

d) Berechne die Fläche des Rahmens in 13c als Summe von vier Trapezen.

Das n -Eck.

24. (25.) **a)** In dem ungleichseitigen Viereck $ABCD$ ist die Diagonale AC gezogen, auf sie sind von B und D die Lote BE , DF gefällt. Wie groß ist das Viereck, wenn
- | | a) | b) | c) | d) | e) | f) |
|--------------|--------|--------|--------|--------|-------|----|
| $AC = 12$ cm | 0,53 m | 3,04 m | 28,7 m | 7,45 m | e | |
| $BE = 4$ „ | 0,32 „ | 0,85 „ | 15,2 „ | 3,21 „ | l_1 | |
| $DF = 5$ „ | 0,28 „ | 0,73 „ | 37,8 „ | 4,89 „ | l_2 | |
25. (26.) Berechne den Inhalt des Fünfecks $ABCDE$, wenn:
- a)** $BD = 11$ cm, $BE = 13$ cm, $CF (\perp BD) = 5$ cm,
 $DG (\perp BE) = 7$ cm, $AH (\perp BE) = 3$ cm;
- b)** $BD = 4,08$ m, $BE = 7,52$ m, $CF = 0,52$ m, $DG = 2,04$ m,
 $AH = 1,5$ m.
26. (27.) **a)** Zeichne ein Sechseck mit den zur Berechnung seines Inhalts nötigen Hilfslinien. Desgleichen **b)** ein Siebeneck, **c)** ein Achteck, **d)** ein Neuneck, **e)** ein Zehneck. Beschreibe für jede dieser Figuren das Verfahren der Inhaltsberechnung.
27. (Tangentenvielecke.) Verbinde den Inkreismittelpunkt eines Tangenten- n -Ecks mit den Ecken und berechne den Inhalt als Summe von n Dreiecken.
 Ergebnis: Zusammenfassung B 6.
28. Wie viele Diagonalen kann man von einer Ecke aus ziehen
a) im Fünfeck, **b)** im Sechseck, **c)** im Zehneck, **d)** im Fünfzehneck, **e)** im n -Eck?
29. Wie viele Diagonalen haben die in 28 genannten Vielecke?
 Ergebnis: Ein n -Eck hat $\frac{1}{2}n(n-3)$ Diagonalen.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

1. Flächen werden mit Quadraten gemessen. Die Einheit des Flächenmaßes ist das Quadratmeter.
2. Ein Quadratmeter (richtiger wäre „Meterquadrat“) ist ein Quadrat, dessen Seite 1 m lang ist.
3. $1 \text{ qm} = 100 \text{ qdm}$; $1 \text{ qdm} = 100 \text{ qcm}$; $1 \text{ qcm} = 100 \text{ qmm}$;
 $100 \text{ qm} = 1 \text{ a}$; $100 \text{ a} = 1 \text{ ha}$; $100 \text{ ha} = 1 \text{ qkm.}^1)$

1) Auch rückwärts zu lesen!

B. Inhaltsformeln.

1. Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt aus den Maßzahlen zweier Nachbarseiten: $F = ab$. (6)
2. Parallelogramm: $F = ah_a = bh_b$. (14)
3. Dreieck: $F = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$. (14)
4. Rechtwinkliges Dreieck: $F = \frac{1}{2}ab$. (18)
5. Trapez: $F = \frac{1}{2}(a + c)h_a$. (21)
6. Tangenten- n -Eck: $F = s \cdot \rho$; $(a + b + c + \dots = 2s)$. (27)

XI. Streckenverhältnisse.

Innenteilung einer Strecke.

1. (Begriff des Teilverhältnisses.) Ein Bote geht von A auf geradliniger Straße nach dem 3 km entfernten Orte B (Zeichnung im Maßstabe 1 : 20 000). Er ist beim Kilometerstein 1,2 angelangt. In welchem Verhältnis steht der zurückgelegte Weg **a)** zu dem noch zurückzulegenden, **b)** zur ganzen Strecke? **c)** Wie verhält sich die ganze Strecke zu dem noch zurückzulegenden Wege?
2. Teile eine Strecke $AB = 120$ mm durch die Punkte C_1, C_2, \dots in einzelne cm und gib für jeden Teilpunkt den Wert der Verhältnisse $\frac{CA}{CB}, \frac{AC}{AB}, \frac{BA}{BC}$ an.
- *3. (Beziehung zwischen Teilpunkt und Teilverhältnis.) In welcher Weise ändert sich das Teilverhältnis $\frac{CA}{CB}$, wenn C sich von A nach B (von B nach A) bewegt? Kann ein Teilverhältnis verschiedenen Teilpunkten entsprechen?
Ergebnis: Zusammenfassung A, 1, 2; B, 1a.
- *4. (Eindeutigkeit eines inneren Teilverhältnisses.) Bestimme auf $AB = 120$ mm diejenigen Punkte C , die AB teilen im Verhältnis **a)** $\frac{3}{5}$, **b)** $\frac{11}{13}$, **c)** $\frac{19}{21}$, **d)** $\frac{8}{7}$, **e)** $\frac{7}{3}$, **f)** $\frac{4}{1}$, **g)** $\frac{23}{1}$, **h)** $\frac{2}{5}$, **i)** $\frac{10}{13}$, **k)** $\frac{12}{7}$, **l)** $\frac{10}{1}$. — Gibt es ein Teilverhältnis, für welches kein Teilpunkt bestimmt werden kann?
Ergebnis: Zusammenfassung B 2.
5. In welchem Verhältnis wird eine Celsius-Skala geteilt durch den Teilpunkt von **a)** 30^0 , **b)** 45^0 , **c)** 64^0 , **d)** 72^0 ? Welche Punkte haben das Teilverhältnis **e)** $\frac{2}{3}$, **f)** $\frac{3}{2}$, **g)** $\frac{1}{4}$, **h)** $\frac{4}{1}$, **i)** $\frac{1}{1}$, **k)** $\frac{9}{11}$, **l)** $\frac{11}{9}$?

Geometrische Verhältnisleichungen.

- *6. (Übertragung eines Teilverhältnisses.) Teile eine Strecke OR mittels eines von O aus gezogenen Strahles in 8 gleiche Teile (V, Aufg. 17). Die Teilpunkte des Strahles seien D_1, D_2, \dots , die der Strecke F_1, F_2, \dots . Welches ist das Teilverhältnis von F_2 ? Welcher Punkt des Strahles hat das gleiche Teilverhältnis? Welche Verhältnisleichung ergibt sich daraus?

Vervollständige folgende Verhältnisleichungen:

- | | |
|------------------------|-------------------------------|
| a) $F_4O : F_4R = ?$ | e) $F_2O : F_2F_5 = ?$ |
| b) $F_5O : F_5R = ?$ | f) $F_5F_2 : F_5R = ?$ |
| c) $D_3O : D_3D_8 = ?$ | g) $OF_1 : F_1F_3 : F_3R = ?$ |
| d) $D_1O : D_1D_5 = ?$ | h) $OF_2 : F_2F_3 : F_3R = ?$ |

Ergebnis: Zusammenfassung A 4—7; B 3, 8.

7. Teile eine gegebene Strecke AB im Verhältnis **a)** 5 : 2, **b)** 2 : 5, **c)** 7 : 3, **d)** 4 : 5, **e)** 1 : 2, **f)** $m : p$, **g)** 1 : 2 : 3, **h)** 2 : 5 : 4, **i)** 3 : 4 : 5 : 6, **k)** $m : n : p$, **l)** $m : n : p : q$.

8. Teile AB durch C und D so, daß sich verhält:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a) $AC : CD = 3 : 5$ | d) $AC : CB = 2 : 7$ |
| $CD : DB = 10 : 7$ | $CD : CB = 1 : 2$ |
| b) $AC : CD = 2 : 3$ | e) $AC : CD = 4 : 5$ |
| $AC : DB = 6 : 7$ | $AC : DB = 6 : 7$ |
| c) $AC : CD = 4 : 3$ | f) $AD : DB = 6 : 5$ |
| $CD : DB = 5 : 3$ | $AC : AD = 2 : 9$ |

9. Teile AB durch C, D, E so, daß sich verhält:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $AC : CD : DE = 3 : 4 : 5$ | d) $AD : DE : DB = 5 : 6 : 7$ |
| $DE : EB = 3 : 2$ | $CD : DE = 1 : 2$ |
| b) $AC : CD = 2 : 3$ | e) $AC : CE = 1 : 2$ |
| $CD : DE = 9 : 10$ | $CD : DB = 3 : 2$ |
| $DE : EB = 5 : 4$ | $CE : DB = 5 : 3$ |
| c) $AC : CD = 2 : 5$ | f) $AD : DB = 6 : 5$ |
| $AC : DE = 3 : 4$ | $CE : EB = 8 : 3$ |
| $AC : EB = 4 : 3$ | $AD : CE = 9 : 10$ |

Winkel mit Parallelen.

- *10. (Produktsatz.) Im Dreieck OLD ist $EN \parallel LD$. Bilde die Fig. 27. Gleichung für $\frac{EO}{EL}$, und multipliziere sie mit dem Hauptnenner. Dividiere die erhaltene Produktgleichung durch $NO \cdot ND$. Ergebnis: Zusammenfassung B 6, 7.

- *11. (Satz von der Parallelprojektion.) Die Schenkel eines Winkels S werden durch die Parallelen A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 geschnitten. Bilde 15 Verhältnisgleichungen.

Ergebnis: Zusammenfassung B 5 a.

- Fig. 27. *12. (Umkehrung.) Warum muß in Fig. 27 $EN \parallel LD$ sein, sobald $EO:EL = NO:ND$? (vergl. 3). Aus welchen anderen Bedingungsgleichungen folgt ebenfalls, daß $EN \parallel LD$?

Ergebnis: Zusammenfassung B 4.

- Fig. 27. *13. (Verhältnis der projizierenden Parallelen.) Verschiebe in Fig. 27 EN längs OL so, daß E auf L fällt. Was für eine Linie beschreibt N ? Wo liegt ihr Endpunkt N_1 ? Wie lang ist LN_1 ? Welche Verhältnisse sind gleich $ON:OD$? Welche Verhältnisgleichungen gelten in der Figur zu 11 für $A_1B_1:A_2B_2$, $A_2B_2:A_3B_3$, $A_3B_3:A_1B_1$?

Ergebnis: Zusammenfassung B 3.

14. Gegeben sind ein Winkel A , zwischen seinen Schenkeln ein Punkt P , sowie zwei Strecken m und n . Ziehe durch P die Gerade, die von den Schenkeln in B und C so geschnitten wird, daß:

a) $PB:PC = m:n$

d) $BA:BC = m:n$

b) $BP:BC = m:n$

e) $CA:CB = m:n$

c) $CP:CB = m:n$

f) $AB:AC = m:n$

15. Löse folgende Gleichungen geometrisch:

a) $3:5 = 4:x$

d) $a:(a+b) = c:x$

g) $ax = bc$

b) $7:2 = 9:x$

e) $a:(a-b) = c:x$

h) $ax = b^2$

c) $a:b = c:x$

f) $bx = ac$

i) $6x = 35$

- k) Verwandle ein Rechteck in ein anderes, von welchem eine Seite gegeben ist (vergl. f, g).

- *16. Konstruiere die vierte Proportionale zu

a) $a b c$

d) $a b b$

g) $(a+b) a b$

b) $a c b$

e) $b a a$

h) $(a-b) b a$

c) $b a c$

f) $(a+b) a c$

i) $c(a+b)(a-b)$

Außenteilung einer Strecke.¹⁾

17. (Begriff des äußeren Teilverhältnisses.) Ein Bote soll von A nach dem 3 km östlich gelegenen Orte B gehen.

1) Der Übergang von der inneren zur äußeren Teilung läßt sich an der Wandtafel mittels einer in ihren Enden befestigten Gummischnur veranschaulichen.

Er schlägt jedoch irrtümlich die westliche Richtung ein und wird sein Versehen erst gewahr, als er 1,2 km zurückgelegt hat. In welchem Verhältnis steht jetzt der zurückgelegte Weg **a)** zu dem noch zurückzulegenden, **b)** zu der Strecke AB , **c)** der noch zurückzulegende Weg zur Strecke AB ? **d)** Beantworte die Fragen a—c für den Fall, daß der Bote zwar die vorgeschriebene Richtung eingeschlagen hat, aber irrtümlich 1,2 km über B hinausgegangen ist.

- *18. (Erweiterte Beziehung zwischen Teilpunkt und Teilverhältnis.) Teile eine Strecke $AB = 40$ mm in einzelne cm, setze diese Teilung beiderseits um je 5 cm fort und gib für jeden äußeren Teilpunkt C den Wert des Teilverhältnisses $\frac{CA}{CB}$ an. — Welches ist der Ort für die äußeren Teilpunkte, deren Teilverhältnis ein echter — ein unechter — Bruch ist? Kann ein Teilverhältnis verschiedenen äußeren Teilpunkten entsprechen?
 Ergebnis: Zusammenfassung B 1b.

- *19. (Eindeutigkeit eines äußeren Teilverhältnisses.) Bestimme auf den Verlängerungen von $AB = 40$ mm die Punkte, welche AB außen teilen im Verhältnis **a)** 2 : 7, **b)** 7 : 2, **c)** 3 : 8, **d)** 8 : 3, **e)** 3 : 13, **f)** 13 : 3, **g)** 1 : 5, **h)** 5 : 1. — Gibt es ein Teilverhältnis, für welches kein äußerer Teilpunkt gefunden werden kann? — Wo liegt der Punkt, der eine Strecke außen im Verhältnis 1 : 1 teilt?
 Ergebnis: Zusammenfassung B 2.

- 20. In welchen Fällen werden außen geteilt: **a)** eine Dreiecksseite durch die zugehörige Höhe, **b)** eine Vierecksdiagonale durch die andere, **c)** eine Sehne durch eine andere, **d)** zwei Dreiecksseiten durch eine Parallele zur dritten?

21. Teile geometrisch eine gegebene Strecke außen im Verhältnis **a)** 5 : 2, **b)** 7 : 3, **c)** 4 : 1, **d)** $m : p$ ($m > p$), **e)** 2 : 5, **f)** 3 : 7, **g)** 1 : 4, **h)** $m : p$ ($m < p$).

22. Trage auf den einen Schenkel eines Winkels A die Strecke $AB_1 = m$, auf seinen Gegenstrahl $AB_2 = p$ ab und ziehe $B_1C_1 \parallel B_2C_2$. Wie heißen die Verhältnisgleichungen für **a)** $AB_1 : AB_2$, **b)** $B_1A : B_1B_2$, **c)** $B_2B_1 : B_2A$, **d)** $AB_1 : AC_1$, **e)** $B_1C_1 : B_2C_2$? (Vergl. 13.)

23. Löse Aufgabe 14 für den Fall, daß P zwischen den Schenkeln des einen Nebenwinkels liegt.

Strahlenbüschel und Parallelenscharen.

- * 24. (23.) (Übertragung eines Teilverhältnisses durch Scheitelprojektion.) Die Gerade g_1 sei Träger der Punkte $J_1 J_2 J_3$. Ein durch $J_1 J_2 J_3$ gehendes Strahlenbüschel $s_1 s_2 s_3$ mit dem Scheitel O schneide eine zu g_1 gezogene Parallele g_2 in $M_1 M_2 M_3$. Bilde die Gleichungen für $J_1 J_2 : M_1 M_2$, $J_2 J_3 : M_2 M_3$ und durch Division derselben die Gleichung für $J_1 J_2 : J_2 J_3$. Wie heißen die Gleichungen für $J_1 J_3 : J_1 J_2$, $J_3 J_2 : J_3 J_1$?

Ergebnis: Zusammenfassung A 8, B 5b.

25. (24.) Wiederhole die Aufgabe 24 für den Fall, daß g_2 die Gegenstrahlen von $s_1 s_2 s_3$ schneidet.
26. (25.) Übertrage das laufende Verhältnis $m : n : p : q$ **a)** durch Parallelprojektion auf die Strahlen eines Büschels, **b)** durch Scheitelprojektion auf eine Schar von Parallelen.
27. Teile eine gegebene Strecke AB durch Scheitelprojektion **a)** in 5, **b)** in 7, **c)** in n gleiche Teile.
- * 28. (Harmonische Teilung.) Teile AB innen und außen im Verhältnis **a)** 5 : 3, **b)** 3 : 5, **c)** 7 : 4, **d)** 4 : 7, **e)** $m : n$, und zwar I. durch Parallelprojektion, II. durch Scheitelprojektion.

Ergebnis: Zusammenfassung A 9.

29. (26.) Zeichne

- a)** einen Dreistrahl mit vier ihn schneidenden Parallelen,
b) „ Vierstrahl „ drei „ „ „ „
c) „ Dreistrahl „ fünf „ „ „ „
d) „ Fünfstrahl „ vier „ „ „ „

und bilde je 10 einfache Verhältnisgleichungen, ferner 6 mehrgliedrige und 6 laufende.

30. (27.) Gegeben ist ein Dreistrahl $S(s_1 s_2 s_3)$ und ein Punkt P . Ziehe durch P die Gerade, die s_1 in A_1 , s_2 in A_2 , s_3 in A_3 so schneidet, daß **a)** $A_2 A_1 : A_2 A_3 = m : n$; **b)** $A_1 A_2 : A_1 A_3 = m : n$; **c)** $A_3 A_2 : A_3 A_1 = m : n$ (vergl. VII, Aufg. 34 a).
31. (28.) Gegeben ist k und darin eine Sehne AB . **a)** Ziehe eine zweite Sehne so, daß sie durch KA und KB in drei gleiche Teile geteilt wird. **b)** Bestimme auf den Verlängerungen von KA und KB die Punkte C und D so, daß CD durch den Bogen AB in drei gleiche Teile geteilt wird.

Irrationale Verhältnisse.

- 32.** (29.) Trage vom Scheitel eines Winkels A auf den einen Schenkel erst die Seite, dann die Diagonale eines Quadrats ab und übertrage das Teilverhältnis durch Parallelprojektion auf den anderen Schenkel. Welchen Wert hat das Teilverhältnis? Gib für dieses irrationale Verhältnis einen bis auf drei Dezimalen genauen Näherungswert an.
Ergebnis: Zusammenfassung A 3.
- 33.** (30.) Teile eine Strecke AB **a)** innen, **b)** außen nach dem Verhältnis der Seite eines gleichseitigen Dreiecks zu seiner Höhe.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

1. Zwei oder mehrere Strecken stehen stets in einem bestimmten Verhältnis.
2. Ein Verhältnis ist der geometrische Ausdruck für einen Bruch.
3. Ein irrationales Verhältnis ist das Verhältnis zweier Strecken, die kein gemeinschaftliches Maß haben; es entspricht einem unendlichen nichtperiodischen Dezimalbruch, kann also durch Zahlen nur näherungsweise angegeben werden.
4. Man unterscheidet einfache, laufende und mehrgliedrige Verhältnisgleichungen (Proportionen).
5. Eine einfache Verhältnisgleichung hat vier Glieder (Proportionalen); ihre Form ist $a:b = c:d$; a und c sind die Vorder-, b und d die Hinterglieder; a und d sind die äußeren, b und c die inneren Glieder.
6. Eine laufende Verhältnisgleichung besteht aus mehreren gleichen Verhältnissen: $a:b = c:d = e:f = \dots$
7. Eine mehrgliedrige Verhältnisgleichung besteht aus laufenden Verhältnissen: $a_1:b_1:c_1 \dots = a_2:b_2:c_2 = \dots$
8. Liegen mehrere Punkte auf einer Geraden, so bilden sie eine Punktreihe. Die Gerade heißt Träger der Reihe.
— Vergl. VII A, 14.
9. Eine Strecke harmonisch teilen heißt, sie innen und außen in demselben Verhältnis teilen. (Vergl. B 1.)

B. Lehrsätze.

1. Eine Strecke wird durch jeden Punkt zwischen ihren Endpunkten auf ihren Verlängerungen in einem bestimmten, diesem Punkte eigentümlichen Verhältnis
- | | | |
|-------|----------|-------|
| innen | | außen |
| (3) | geteilt. | (18) |
2. Zu jedem Teilverhältnis einer Strecke gehört ein und nur ein innerer, sowie ein und nur ein äußerer Teilpunkt. (4, 19)
3. Werden die Schenkel eines Winkels durch parallele Gerade geschnitten, so stehen je zwei entsprechende Schenkelabschnitte in gleichem Verhältnis, und je zwei Parallelstrecken verhalten sich wie zwei zugehörige, vom Scheitel aus gemessene Schenkelabschnitte. (6, 13)
4. Linien, welche entsprechende Teilpunkte zweier Strahlen verbinden, sind parallel. (12)
5. Teilverhältnisse können übertragen werden:
- a) durch Parallele auf jede Gerade, (11)
- b) durch Strahlen auf jede Parallele. (24)
6. In jeder einfachen Verhältnisgleichung ist das Produkt der inneren Glieder gleich dem Produkt der äußeren. (10)
7. In jeder einfachen Verhältnisgleichung darf man die inneren Glieder miteinander vertauschen, ebenso die äußeren Glieder miteinander, die beiden inneren mit den beiden äußeren. — Man darf aber nie ein äußeres mit einem inneren Gliede vertauschen. (10)
8. Eine einfache Verhältnisgleichung kann durch Addition oder Subtraktion der beiden Vorderglieder und der beiden Hinterglieder in eine laufende verwandelt werden:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

Ebenso kann eine laufende Verhältnisgleichung weitergeführt werden:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{a \pm c \pm e \pm \dots}{b \pm d \pm f \pm \dots}. \quad (6)$$

XII. Verhältnisse am Dreieck und am Kreise.¹⁾

Teilverhältnis der Mittellinien eines Dreiecks.

*1. (Vierter merkwürdiger Punkt des Dreiecks.) Im Fig. 28.

Dreieck ABC schneiden die Mittellinien BE und CF einander in S . Warum ist $FE \parallel BC$? Welchen Wert hat das Verhältnis $FE : BC$? Warum ist $SE : SB = SF : SC = 1 : 2$? (XI B, 3.) Warum muß auch die dritte Mittellinie durch S gehen? (XI B, 2.)

Ergebnis: Zusammenfassung B 1.

2. Dreieck aus:

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------|------------------------------------|
| a) $a m_b m_c$ | h) $a m_b \angle a m_a$ | p) $b m_b \angle a m_c$ |
| b) $m_a m_b \angle c m_a$ | i) $m_a m_c \angle c m_c$ | q) $m_a \angle a m_c \angle b m_c$ |
| e) $a \angle a m_b \angle a m_c$ | k) $a m_a \angle a m_b$ | r) $m_b \alpha \angle b m_a$ |
| d) $m_c \angle b m_a \angle b m_c$ | l) $b m_b \angle m_a m_b$ | s) $m_b m_c \gamma$ |
| e) $a m_b \angle a m_c$ | m) $c m_a \angle m_a m_c$ | t) $m_a m_b m_c$ |
| f) $m_a m_c \angle m_a m_c$ | n) $h_a m_a m_b$ | u) $h_a m_b \angle b m_c$ |
| g) $b m_a m_b$ | o) $a m_a \angle m_b m_c$ | v) $m_a m_b \gamma$ |

Gleichschenkliges Dreieck aus:

- | | | |
|--------------|-----------------------|-----------------------|
| w) $h_a m_b$ | x) $h_a \angle a m_b$ | y) $m_b \angle a m_b$ |
|--------------|-----------------------|-----------------------|

*3. (Der Schwerpunkt.) Ziehe in Fig. 28 die dritte Mittellinie AD . Warum ist $\triangle ABD = \triangle ACD$, $\triangle SBD = \triangle SCD$, $\triangle ABS = \triangle ACS$? Beweise ebenso: $\triangle ABS = \triangle BCS$, $\triangle BCS = \triangle ACS$.

Ergebnis: Zusammenfassung B 2.

4. Ziehe von den Ecken, von den Seitenmitten und vom Schwerpunkt eines Dreiecks Parallele bis zu einer außerhalb des Dreiecks liegenden Geraden g . Beweise: a) die Summe der von den Seitenmitten ausgehenden Parallelen ist gleich der Summe der von den Ecken ausgehenden, b) die vom Schwerpunkt ausgehende Parallele ist das arithmetische Mittel der von den Ecken ausgehenden. — Wie gestalten sich diese Sätze, wenn g c) zwei Seiten des Dreiecks schneidet, d) durch eine Ecke, e) durch den Schwerpunkt geht?

1) Falls die Behandlung dieses Abschnittes auf Grund der Ähnlichkeitslehre vorgezogen wird, ist Abschnitt XIII, 1—21 voranzustellen, was ohne Störung des Zusammenhanges geschehen kann.

Teilung einer Dreiecksseite durch die Winkelhalbierenden.

Fig. 29. *5. (Satz des Apollonius.) **a)** Im Dreieck ABC ist der Winkel A durch AF_1 halbiert. Das Teilverhältnis $F_1B:F_1C$ soll festgestellt werden und wird deshalb durch $BG_1 \parallel F_1A$ auf die (verlängerte) Seite CA übertragen. Warum ist $AG_1 = AB$? (IV B, 2.) Welches ist der Wert des Teilverhältnisses $F_1B:F_1C$? **b)** Bestimme ebenso das Verhältnis $F_2B:F_2C$, wenn AF_2 den Außenwinkel bei A halbiert. **c)** Welches ist der Ort für A , wenn F_1 und F_2 bestimmt sind? (II B, 3; VII B, 27.)

Ergebnis: Zusammenfassung B 3.

Fig. 29. *6. (Der Apolloniuskreis.) Teile eine Strecke BC durch F_1 und F_2 harmonisch im Verhältnis $m:n$, schlage über F_1F_2 den Apolloniuskreis, verbinde einen Punkt A desselben mit B, C, F_1, F_2 und ziehe $BG_1 \parallel F_1A, BG_2 \parallel F_2A$. Warum ist **a)** $AG_1:AC = AG_2:AC$, **b)** $\angle G_1BG_2 = 90^\circ$, **c)** $AG_1 = AG_2 = AB$? (VII B, 27.) **d)** Welchen Wert hat das Entfernungsverhältnis $AB:AC$ für jeden Punkt A des Apolloniuskreises? **e)** Beweise, daß für einen Punkt P außerhalb oder innerhalb des Apolloniuskreises $PB:PC \geq m:n$. (PB schneide k in A_1 ; dann ist $A_1B:A_1C = PB:?$)

Ergebnis: Zusammenfassung B 4.

7. (6.) Dreieck aus:¹⁾

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| a) $a \ r \ b:c$ | h) $u_b \ v_b \ \gamma$ | p) $c \ h_c \ u_c$ |
| b) $c \ \gamma \ a:b$ | i) $a \ w_a \ b:c$ | q) $F \ b \ a:c$ |
| c) $r \ \beta \ a:c$ | k) $c \ v_c \ w_\gamma$ | r) $a \ h_b \ b:c$ |
| d) $b \ u_a \ v_a$ | l) $b \ m_b \ a:c$ | s) $h_a \ u_b \ v_b$ |
| e) $b \ c \ v_b$ | m) $m_a \ u_a \ v_a$ | t) $h_a \ m_a \ b:c$ |
| f) $a \ \beta \ b:c$ | n) $c \ p_c^b \ a:b$ | u) $h_a \ m_b \ a:c$ |
| g) $u_c \ \alpha \ a:b$ | o) $p_a^b \ u_a \ v_a$ | v) $m_a \ m_c \ a:b$ |

w) w_α und den von B und C auf AF_1 ($= w_\alpha$) gefällten Loten,
x) b, h_a und dem Punkte, in welchem h_a von w_β geschnitten wird.

8. (7.)
- | | | | | | | |
|------------------------|---|-----------------------------------|----------------|---|-------------------------------|--|
| Parallelogramm
aus: | { | a) $e \ f \ a:b$ | Trapez
aus: | { | f) $a \ c \ h_a \ b:d$ | |
| | | b) $e \ \angle \ ef \ a:b$ | | | g) $a \ c \ e \ b:d$ | |
| | | c) $f \ \angle \ af \ a:b$ | | | h) $a \ c \ h_a \ c:f$ | |
| | | d) $e \ \alpha \ a:b$ | | | Viereck
aus: | i) $a \ f \ \alpha \ \angle \ ef \ b:c$ |
| | | e) $a \ \angle \ ef \ c:f$ | | | | k) $b \ e \ \beta \ \angle \ ef \ c:d$ |

1) Die Strecken, welche die gegebenen Verhältnisse darstellen sollen, müssen von möglichst ungleicher Länge sein, ebenso die gegebenen u und v ; sonst überschreitet die Figur nicht nur den zur Verfügung stehenden Raum, sondern wird auch wegen der unverhältnismäßigen Ausdehnung des Apollonischen Kreises leicht ungenau.

l) Sehnenviereck aus $e \beta c:d$ und dem von B auf AC gefällten Lote. m) Viereck, in und um welches ein Kreis beschrieben werden kann, aus $e \beta a:b$.

9. (8.) Bestimme die Punkte, deren Entfernungen von P_1 und P_2 sich wie $m:n$ verhalten und die a) von P_3 die Entfernung r , b) von g den Abstand h , c) von k den Abstand d , d) von P_2 und P_3 gleiche Entfernung, e) von g_1 und g_2 gleichen Abstand, f) von P_2 und P_3 das Entfernungsverhältnis $p:q$, g) von zwei parallelen Geraden g_1 und g_2 das Abstandsverhältnis $p:q$ haben.
10. (9.) Bestimme a) auf den Seiten eines Vierecks die Punkte, von denen aus die Abschnitte der einen Diagonale, b) auf zwei Seiten eines Dreiecks die Punkte, von denen aus die durch die Höhe auf der dritten Seite gebildeten Abschnitte, c) auf dem Umfang eines Kreises die Punkte, von denen zwei Abschnitte einer Sehne, d) die Punkte, von denen aus drei aufeinanderfolgende Abschnitte einer Geraden unter gleichen Winkeln erscheinen.

Verhältnis der Höhen eines Dreiecks.

* 11. (10.) (Höhensatz.) Im Dreieck ABC sind die Höhen AD Fig. 5. und BE gefällt. Klappe $\triangle EBC$ um w_1 : warum ist dann $B_1E_1 \parallel AD$? Welche Verhältnisgleichung folgt für $h_a:h_b$? Ergebnis: Zusammenfassung B 5.

12. (11.) Beweise den Höhensatz a) für $h_a:h_c$, b) für $h_b:h_c$, c) für $h_a:h_b$, wenn $\angle C > 90^\circ$, d) mittels der Formeln X B, 3.

13. (12.) Dreieck aus:

- | | | |
|---------------------------|-----------------------|--------------------------|
| a) $a \propto h_a:h_b$ | g) $a m_a b:h_a$ | n) $b w_\beta h_a:h_c$ |
| b) $c r h_a:h_c$ | h) $b \beta a:h_b$ | o) $h_a v_a h_b:h_c$ |
| c) $a h_b h_a:h_c$ | i) $c m_b b:h_c$ | p) $r \gamma h_a:h_b$ |
| d) $p_a^b \gamma h_b:h_c$ | k) $a m_c h_a:h_b$ | q) $(b + c) h_a h_b:h_c$ |
| e) $h_c \beta h_a:h_b$ | l) $a \alpha h_b:h_c$ | r) $(a - b) m_b h_a:h_b$ |
| f) $r \alpha h_a:h_c$ | m) $c h_c h_a:h_b$ | s) $(b - c) m_a h_b:h_c$ |

14. Beweise folgende Sätze:

- a) Die oberen Abschnitte zweier Dreieckshöhen verhalten sich umgekehrt wie die unteren. (Bezeichne in Fig. 5 den Höhenpunkt mit H und klappe $\triangle AHE$ um die Winkelhalbierende von H . Warum ist dann $E_1A_1 \parallel BC$?)
- b) Eine Seitenprojektion verhält sich zur zugehörigen Höhe wie deren unterer Abschnitt zur anderen. (Drehe in Fig. 5 $\triangle BDH$ um D , bis H in die Richtung DC fällt. Warum ist dann $B_1H_1 \parallel AC$?)

- * 15. (XV, 59.) Fälle im Sehnendreieck ABC (Mittelpunkt U) $UZ \perp AC$, $AD \perp BC$ und drehe $\triangle AUZ$ um A , bis AU in die Richtung AB fällt. a) Warum fällt dann AZ in die Richtung AD ? b) Warum ist $U_1Z_1 \parallel BD$? c) Welche Verhältnissgleichung ergibt sich für $h_a : c$? d) Wie gestaltet sich die Formel $F = \frac{1}{2} a h_a$, wenn für h_a der aus c berechnete Wert eingesetzt wird?

Ergebnis: Zusammenfassung B 6, 7.

Mittlere Proportionalen im rechtwinkligen Dreieck.

- Fig. 4. * 16. (15.) (Die Kathete als mittlere Proportionale.) Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist die Höhe CD gefällt. a) Klappe $\triangle ADC$ um w_a : warum ist dann $C_1D_1 \parallel BC$? Welche Verhältnissgleichung folgt für $AD : AC$? b) Bilde die entsprechende Verhältnissgleichung für $BD : BC$.

Ergebnis: Zusammenfassung A 1, 2; B 8.

- Fig. 4. * 17. (16.) (Die Höhe als mittlere Proportionale.) Drehe in Fig. 4 $\triangle ADC$ um D , bis DA in die Richtung DC fällt. Warum ist $A_1C_1 \parallel CB$? Welche Verhältnissgleichung folgt für $DA : DC$?

Ergebnis: Zusammenfassung B 9.

18. (17.) Beweise folgende Sätze:

- Den pythagoreischen Lehrsatz durch Addition der aus 16 gefundenen Werte für a^2 und b^2 .
- Verlängert man die Katheten BC und AC bis zu den Durchschnitten D und E mit den auf AB in A und B errichteten Senkrechten, so ist $AC \cdot CE + BC \cdot CD = AB^2$.
- Der Halbmesser des Inkreises eines Tangententrapezes ist mittlere Proportionale zwischen den durch die Berührungspunkte gebildeten Abschnitten eines Schenkels.
- Das geometrische Mittel zweier ungleichen Strecken ist kleiner als das arithmetische. (Vergl. A 2.)
- Die Umkehrung des in 16 gefundenen Satzes. Wortlaut?
- Desgl. für den in 17 gefundenen Satz.

19. (18.) Konstruiere die mittlere Proportionale zwischen

- | | | |
|-----------------|--------------------------|----------------------------|
| a) a und b | c) $3a$ und $5a$ | e) a und $\frac{2a}{5}$ |
| b) a und $2a$ | d) a und $\frac{a}{3}$ | f) $(a + b)$ und $(a - b)$ |

20. (19.) Löse folgende Gleichungen geometrisch:

$$\text{a) } x^2 = ab \quad \text{d) } x = a\sqrt{5} \quad \text{g) } x = \frac{a}{\sqrt{5}} \quad \text{k) } \frac{x}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{b) } x^2 = 2b^2 \quad \text{e) } x = \frac{a}{2}\sqrt{15} \quad \text{h) } x^2 = \frac{2}{5}a^2 \quad \text{l) } x^2 = a^2 - b^2$$

$$\text{c) } x^2 = 6a^2 \quad \text{f) } x^2 = \frac{1}{2}a^2 \quad \text{i) } \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{m) } x^2 = 2a^2 - b^2$$

Verhältnis der Flächen zweier Dreiecke.

*21. (20.) (Dreiecke mit einer gleichen Seite.) Zeichne auf $BC = a$ zwei Dreiecke von verschiedener Höhe $A_1D_1 = h_1$, $A_2D_2 = h_2$, und berechne die Flächeninhalte, sowie deren Verhältnis.

Ergebnis: Zusammenfassung B 10.

*22. (21.) (Dreiecke mit einer gleichen Höhe.) Bestimme das Inhaltsverhältnis zweier Dreiecke, die in einer Höhe übereinstimmen.

Ergebnis: Zusammenfassung B 11.

*23. (22.) (Dreiecke mit einem gleichen Winkel.) Schneide die Schenkel eines Winkels A durch zwei (nicht parallele) Gerade B_1C_1 und B_2C_2 . Bestimme (nach 22) den Wert der Flächenverhältnisse $\frac{\Delta AB_1C_1}{\Delta AB_2C_1}$, $\frac{\Delta AB_2C_1}{\Delta AB_2C_2}$ und durch Multiplikation beider die Verhältnisgleichung für $\frac{\Delta AB_1C_1}{\Delta AB_2C_2}$.

Ergebnis: Zusammenfassung B 12.

24. (23.) Beweise, daß der in 23 gefundene Satz auch für zwei Dreiecke gilt, wenn ein Winkel des einen durch einen Winkel des anderen zu 180° ergänzt wird.

25. Beweise nach 22—24 den Satz des Apollonius (B 3).

Verhältnisse am Kreise.

*26. (XVI, 1.) (Sehnensatz.) a) Zwei Sehnen AB und CD Fig. 30. schneiden einander in P . Klappe $\triangle APC$ um die Winkelhalbierende von P : warum ist dann $A_1C_1 \parallel BD$? (VII B, 14.) Welche Gleichungen folgen für $PA : PD$ und für $PA \cdot PB$? (XI B, 6.) b) In welchem Falle wird das Rechteck aus den Abschnitten der Sehne AB ein Quadrat? c) Welche Form erhält der Satz, wenn CD ein Durchmesser ist und AB darauf senkrecht steht? (Vergl. B 9.) d) Wiederhole die Fig. 31.

Erörterung a für den Fall, daß die Verlängerungen von AB und CD einander in P schneiden.

Ergebnis: Zusammenfassung B 13.

- * 27. (Die Tangente als mittlere Proportionale.) **a)** Welcher Grenzfall tritt ein, wenn in Fig. 31 CD um P gedreht wird? (Zeichne die Figur!) **b)** Welche Form erhält der Satz, wenn PC Tangente und AC Durchmesser ist? (Vergl. B 8.)

Ergebnis: Zusammenfassung B 15.

28. (XVI, 2.) Verwandle nach 26/27 auf zwei Arten: **a)** ein Rechteck in ein anderes mit gegebener Seite, **b)** ein Quadrat in ein Rechteck mit gegebener Seite, **c)** ein Rechteck in ein Quadrat.

- * 29. (XVI, 3.) (Umkehrung.) **a)** Die Diagonalen des Vierecks $EFGH$ schneiden einander in O ; der Umkreis des Dreiecks EFG schneide FH in H_1 . Welche Gleichung ergibt sich für $OE \cdot OG$? Unter welcher Bedingung allein kann $OE \cdot OG = OF \cdot OH$ sein? **b)** Beweise ebenso die Umkehrung von 26 d.

Ergebnis: Zusammenfassung B 14.

30. **a)** Trägt man auf den Strahlen eines Dreistrahls vom Scheitel aus die Seiten eines Dreiecks und auf den Gegenstrahlen die zugehörigen Höhen ab, so liegen die erhaltenen sechs Punkte auf einem Kreise. **b)** Wie gestaltet sich die Figur, wenn man Seiten und Höhen nach derselben Richtung abträgt?

31. (XVI, 5.) Konstruiere den Kreis, der g_1 berührt und **a)** durch P_1 und P_2 geht, **b)** k in P und unter der Sehne s schneidet, **c)** zwei gleichgroße Kreise k_1 und k_2 berührt, **d)** durch P_1 geht und seinen Mittelpunkt auf g_2 hat, **e)** durch P_1 geht und g_2 berührt.

32. (XVI, 6.) Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck. Konstruiere die drei Kreise, von denen jeder die beiden anderen und zwei Dreiecksseiten berührt, und zwar soll die Grundlinie **a)** von innen, **b)** von außen berührt werden.

- * 33. (XVI, 7.) (Der goldene Schnitt.) Gegeben ist die Strecke $AB = a$. Konstruiere den Kreis, der AB in A berührt und dessen Durchmesser gleich a ist; ziehe von B aus den Durchmesser CD und trage BC auf BA ab (bis E) und an AB an (bis F). Beweise: **a)** $AF : AB = AB : BF$, **b)** $AB : BE = BE : AE$. **c)** Berechne den goldenen Abschnitt BE der Strecke $AB = a$ (vergl. IX, Aufg. 24). **d)** Welches ist der goldene Abschnitt von AF ?

Ergebnis: Zusammenfassung A 3; B 16—18.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

1. Eine stetige Verhältnisgleichung ist eine solche, deren innere Glieder einander gleich sind.
2. In $a : b = b : c$ ist b die mittlere Proportionale zwischen a und c ; m. a. W.: das geometrische Mittel zweier Größen ist die Quadratwurzel aus ihrem Produkt¹⁾.
3. Der goldene Abschnitt einer Strecke ist die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem anderen Abschnitt. (Stetige Teilung, vergl. B 18.)

B. Lehrsätze.

1. Die Mittellinien eines Dreiecks teilen einander im Verhältnis 1 : 2 und schneiden einander in einem Punkte (vierter merkwürdiger Punkt des Dreiecks; vergl. VIII B, 2—4). (1)
2. Der Schnittpunkt der Mittellinien ist der Schwerpunkt des Dreiecks. (3)
3. Satz des Apollonius: Die Halbierungslinien eines Innenwinkels im Dreieck und seines Außenwinkels teilen die Gegenseite harmonisch im Verhältnis der beiden Anseiten. (5)
4. Der Ort für alle Punkte, deren Entfernungen von zwei festen Punkten P_1, P_2 in einem bestimmten Verhältnis stehen, ist der „Apolloniuskreis“. Sein Durchmesser wird durch die Punkte bestimmt, welche die Strecke $P_1 P_2$ in dem gegebenen Verhältnis harmonisch teilen. (6)
5. Die Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten:

$$h_a : h_b = b : a; \quad h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}. \quad (11)$$

6. Das Rechteck aus zwei Seiten eines Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der nichtzugehörigen Höhe und dem Durchmesser des Umkreises: $bc = 2r h_a$. (15)
7. Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem Produkt aus seinen Seiten dividiert durch den vierfachen Umkreisradius: $F = \frac{abc}{4r}$. (15)

1) Das arithmetische Mittel zweier Größen ist ihre halbe Summe.

8. Jede Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zwischen ihrer Projektion auf die Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse. (16)

9. Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zwischen den Projektionen der beiden Katheten. (17)

10/12. Wenn zwei Dreiecke übereinstimmen in:

einer Seite	einer Höhe	einem Winkel,
so verhalten sich ihre Flächen wie die		
zugehörigen	zugehörigen	Rechtecke aus
Höhen. (21)	Seiten. (22)	seinen An-
		seiten. (23)

13. Schneiden zwei Sehnen einander innerhalb (außerhalb) eines Kreises, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen. (26)

14. Sind die Rechtecke aus den inneren (äußeren) Abschnitten zweier einander schneidenden Strecken gleich, so liegen die Endpunkte dieser Strecken auf einem Kreise. (29)

15. Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Sekante und die Tangente, so ist die Tangente mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem außerhalb des Kreises liegenden Abschnitt. (27)

16. Der goldene Abschnitt der Strecke a hat die Länge $\frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$. (33)

17. Verlängert man eine Strecke um ihren goldenen Abschnitt, so ist sie selbst der goldene Abschnitt der verlängerten Strecke. (33)

18. (Regel.) Um eine Strecke nach dem goldenen Schnitt zu teilen, macht man sie in dem einen ihrer Endpunkte zur Tangente eines Kreises von gleichem Durchmesser, zieht die Zentrale des anderen Endpunktes und trägt deren äußeren Abschnitt auf die Tangente ab. (33)

XIII. Ähnlichkeit.

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke.

- *1. (Begriff der Ähnlichkeit.) Welche Gleichungen bestehen Fig. 27. in Fig. 27 zwischen den Seiten und den Winkeln der Dreiecke OLD und OEN ?

Ergebnis: Zusammenfassung A 1, 2; B 1.

- *2. (Die vier Ähnlichkeitssätze.) Welche Beziehungen be- Fig. 32. stehen zwischen entsprechenden Winkeln und zwischen entsprechenden Seiten **a)** kongruenter, **b)** ähnlicher Figuren? **c)** Welche Ähnlichkeitssätze für Dreiecke ergeben sich hier nach aus den Kongruenzsätzen? (VI B, 2.)

Ergebnis: Zusammenfassung B 2.

- *3. Beweise die Ähnlichkeitssätze unter folgenden Voraussetzungen: Fig. 32.

a) $A_1 B_1 : A_2 B_2 = A_1 C_1 : A_2 C_2 = B_1 C_1 : B_2 C_2$

b) $A_1 B_1 : A_2 B_2 = A_1 C_1 : A_2 C_2; \angle A_1 = \angle A_2$

c) $\angle A_1 = \angle A_2; \angle B_1 = \angle B_2$

d) $A_1 B_1 : A_2 B_2 = A_1 C_1 : A_2 C_2; \angle B_1 = \angle B_2; A_1 C_1 > A_1 B_1$

(Trage auf die Seite $A_1 B_1$ die entsprechende Seite $A_2 B_2 = A_1 D$ ab und ziehe $DE \parallel B_1 C_1$. Beweise nach dem entsprechenden Kongruenzsatz: $\triangle A_2 B_2 C_2 \cong \triangle A_1 D E$, und nach B 1: $\triangle A_1 D E \sim A_1 B_1 C_1$.)

- *4. Stelle Ähnlichkeitssätze auf **a)** für rechtwinklige, **b)** für gleichschenklige, **c)** für rechtwinklig-gleichschenklige, **d)** für gleichseitige Dreiecke.

Ergebnis: Zusammenfassung B 3—5.

- *5. Beweise, daß zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn die Seiten des einen den Seiten des anderen **a)** gleichgerichtet parallel, **b)** gegengerichtet parallel sind, **c)** wenn die Seiten des einen auf denen des anderen senkrecht stehen, **d)** wenn ihre Höhen, **e)** wenn ihre Mittellinien in gleichem Verhältnis stehen.

Anwendung ähnlicher Dreiecke.

- *6. Beweise mittels ähnlicher Dreiecke folgende Sätze aus Abschnitt XII: **a)** B 3, **b)** B 5, **c)** B 6, **d)** B 8, **e)** B 9, **f)** B 13, **g)** B 15, **h/i)** Aufg. 14 a/b.

- *7. (Verhältnis entsprechender Transversalen.) **a)** Ziehe in zwei ähnlichen Dreiecken ein Paar entsprechende Mittel-

linien und beweise die Ähnlichkeit der entstandenen Teildreiecke. Wie verhalten sich entsprechende Mittellinien ähnlicher Dreiecke?

Beweise ebenso, daß in ähnlichen Dreiecken dem regierenden Verhältnis gehorchen: **b)** entsprechende Winkelhalbierende und die durch sie gebildeten Seitenabschnitte, **c)** entsprechende Höhen und entsprechende Seitenprojektionen, **d)** die Halbmesser der Umkreise, **e)** die Halbmesser der Inkreise, **f)** die Halbmesser entsprechender Ankreise; ferner entsprechende Abschnitte gebildet **g)** von Mittellinien miteinander, **h)** von Winkelhalbierenden, **i)** von Höhen, **k)** von einer Mittellinie mit einer Winkelhalbierenden, **l)** von einer Höhe mit einer Winkelhalbierenden, **m)** von einer Höhe mit einer Mittellinie.
Ergebnis: Zusammenfassung B 7.

Fig. 33. 8. (9.) Im gleichschenkligen Dreieck ABC ($AB = AC$) ist Winkel ABC durch BD halbiert. Unter welcher Bedingung ist $\triangle BDC \sim \triangle ABC$? Wie viele gleichschenklige Dreiecke enthält die Figur alsdann?

9. (10.) Dreieck aus:

a) m_a	$a:b:c$	e) q	$b:c$	$h_a:h_c$	i) w_β	$m_a:m_b:m_c$
b) m_c	$a:b:m_a$	f) c	$a:b:m_c$		k) a	$h_a:h_b:h_c$
c) w_β	$a:b:m_b$	g) w_γ	$b:c:m_a$		l) w_β	$h_a:h_b:h_c$
d) r	$a:b$	h) a	$m_a:m_b:m_c$		m) h_a	h_b
	$h_b:h_c$					h_c

10. (11.) Dreieck aus:

a) w_α	α	$b:c$	e) m_b	β	$a:w_\beta$	i) m_b	β	$h_a:h_c$
b) u_a	β	$a:c$	f) m_b	$\angle m_a m_c$	$m_a:m_c$	k) w_γ	γ	$h_a:h_b$
c) c	$\angle b m_a$	$b:m_a$	g) w_α	$\angle m_a m_b$	$m_a:m_b$	l) q	β	$h_a:h_c$
d) a	α	$b:w_\alpha$	h) a	α	$h_b:h_c$	m) h_a	α	$a:m_a$

11. (12.) Dreieck aus:

a) m_a	α	β	e) w_β	β	$\angle c m_a$	i) p_b^a	β	$\angle c m_c$
b) b	β	$\angle c m_a$	f) h_a	α	$\angle b m_c$	k) q_a	α	$\angle b m_b$
c) c	$\angle b m_b$	$\angle a m_b$	g) r	β	$\angle a m_c$	l) h_c	$\angle a m_a$	$\angle b m_a$
d) w_α	γ	$\angle b m_a$	h) q	γ	$\angle a m_b$	m) m_a	β	$a:r$

12. (13.) Dreieck aus:

a) m_a	β	$b:c$	e) h_c	β	$a:u_b$	i) w_α	$r:b$	$u_b:v_b$
b) h_b	γ	$a:c$	f) q_b	γ	$v_c:a$	k) h_a	$c:r$	$w_\gamma:v_c$
c) q	β	$a:m_a$	g) r	α	$c:u_a$	l) h_a	$\angle a m_b$	$b:c$
d) p_b^a	α	$m_c:c$	h) m_c	$a:r$	$b:v_a$	m) q	α	$a:m_b$

13. (XV, 70.) Dreieck aus:

- | | |
|---|--|
| a) $(a + m_a) \beta \gamma$ | l) $h_a \alpha b : w_\alpha$ |
| b) $(w_\gamma - m_b) \angle am_c \angle cm_c$ | m) $r (p_a^b - p_a^c) h_a : m_a$ |
| c) $(r + \rho) \alpha \angle cm_b$ | n) $(a - b) \gamma c : m_c$ |
| d) $(h_a + h_b + h_c) \beta \angle am_a$ | o) $r (\alpha - \beta) (a - b) : h_b$ |
| e) $(b - w_a) \beta a : c$ | p) $w_\gamma (\beta - \gamma) (b + c) : a$ |
| f) $(a + b) \alpha h_b : h_c$ | q) $c \alpha \rho : \rho_b$ |
| g) $(a + b + c) \gamma h_a : h_b$ | r) $a (\beta - \gamma) \rho : (s - a)$ |
| h) $p_b^c (\alpha - \beta) a : b$ | s) $(a + c) \beta b : \rho$ |
| i) $h_a (\beta - \gamma) b : c$ | t) $h_a (b - c) : a h_b : h_c$ |
| k) $b (\alpha - \gamma) h_a : h_c$ | u) $m_c (a + b) : c h_a : h_b$ |

14. (XV, 71.) Dreieck aus:

- | | |
|--|------------------------------|
| a) $h_a (p_a^b - p_a^c) b : c$ | g) $a m_a c : m_c$ |
| b) $(p_b^a - p_b^c) (\alpha - \gamma) a : c$ | h) $b a : m_a c : m_c$ |
| c) $(p_c^a - p_c^b) r a : b$ | i) $a h_a m_b : m_c$ |
| d) $h_a (p_a^b - p_a^c) m_b : m_c$ | k) $b h_a m_a : m_c$ |
| e) $m_c u_a v_a$ | l) $a \alpha \angle m_b m_c$ |
| f) $a \angle am_b b : c$ | m) $c \angle m_a m_b a : b$ |

15. (14.) Einem gegebenen Kreise soll umgeschrieben werden: **a)** das Dreieck, dessen Seiten sich verhalten wie $m:n:p$, **b)** der Rhombus, dessen Seite sich zu einer Diagonale verhält wie $m:n$. — Einem gegebenen Kreise soll eingeschrieben werden: **c)** das gleichschenklige Dreieck, dessen Schenkel sich zur Grundlinie verhält wie $m:n$, **d)** das Rechteck, dessen Seiten sich verhalten wie $m:n$.

Geodätische Anwendungen.

- 16. Zu derselben Zeit, wo der Schatten eines senkrecht stehenden Pfahles von 1,23 (2,07) m Höhe 1,85 (1,92) m lang ist, wirft ein Turm einen Schatten von 85 (61) m Länge. Wie hoch ist er?
- 17. 12,3 (11,5) m vom Fuß eines Flaggenmastes entfernt steckt man einen Stab senkrecht in den Boden und schiebt daran

1) Verlängere im Musterdreieck ABC die Seite BC um sich selbst bis C_1 und stelle für das Dreieck ABC_1 die Maßzahlen fest. (Ziehe zum Vergleich die Mittellinie CG .) — Vergl. auch die Anmerkung Seite 70. (Beispiel für q : $a = 36$, $b : c = 15 : 8$, $m_b : m_c = 5 : 21$.)

ein rechtwinklig-gleichschenkliges Winkelscheit so weit in die Höhe, daß man beim Visieren über dessen Hypotenuse die Mastspitze erblickt. In diesem Augenblicke befindet sich die obere Ecke des Winkelscheites 1,57 (1,62) m über dem Boden. Wie hoch ist der Mast?

18. Um die Höhe eines Wasserturmes zu bestimmen, stellt man 150 (93) m von seinem Fuße entfernt einen Stab von 1,82 (1,65) m Höhe auf und 2,6 (1,8) m entfernt davon in der Richtung auf den Turm einen zweiten Stab, an welchem sich eine Visierlatte auf- und abschieben läßt. Wenn die Spitze dieser Latte 2,76 (3,24) m über dem Erdboden ist, so erblickt ein hinter dem ersten Stabe stehender Beobachter die Spitze dieses Stabes, das obere Ende der Visierlatte und die Krönung des Turmes in einer Geraden. Wie hoch ist der Turm?
19. Die Entfernung zweier Punkte A und B soll bestimmt werden. Da man aber B von A aus weder erreichen noch sehen kann, so mißt man von einem dritten Punkte C aus die Entfernungen $CA = 64$ (384) m, $CB = 42$ (232) m und bestimmt auf CA den Punkt A_1 , auf CB den Punkt B_1 so, daß $CA_1 = 3,2$ (9,6) m, $CB_1 = 2,1$ (5,8) m ist. Wenn nun A_1B_1 4,52 (13,08) m lang ist, wie groß ist dann AB ?
20. Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, steckt man im Abstand von 2,5 (1,2) m von dem einen Ufer parallel zu diesem eine Standlinie BC von 195 (151) m Länge ab. Von den Punkten B und C visiert man nach einem hart am jenseitigen Ufer stehenden Pfahle; die Visierlinien begrenzen am diesseitigen Ufer eine Strecke von 187,3 (145,4) m Länge. Wie breit ist der Fluß?
21. Um die Länge einer unzugänglichen Strecke AB zu ermitteln, bestimmt man durch Visieren auf ihrer Verlängerung einen Punkt C und errichtet mittels des Winkelspiegels¹⁾ auf AC in C die Senkrechte $CD = 216$ (58,4) m. In einem Punkte C_1 zwischen C und D errichtet man auf CD eine zweite Senkrechte; diese schneide DB in B_1 , DA in A_1 . Wenn nun $DC_1 = 46,7$ (17,5) m und $A_1B_1 = 31,8$ (29,7) m gemessen wird, wie lang ist dann AB ? (Nach Bieler.)

1) (XV, 4.) In Fig. 19 seien J_1J_2 und J_1J_3 zwei um δ° gegeneinander geneigte Spiegel. Welches ist der Gang eines Lichtstrahls, der von F_2 kommend den Spiegel J_1J_3 in B trifft? Wie groß ist die Gesamt- ablenkung ($\angle BAE_3$)? (Sextant.) Wie müssen die Spiegel gestellt werden, damit die Gesamtablenkung 90° sei? (Winkelspiegel.)

Der Flächeninhalt ähnlicher Dreiecke.

- *22. (15.) (Flächensatz.) Die entsprechenden Seiten zweier ähnlichen Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ stehen im Verhältnis $5:3$ ($m:p$). Wie lang sind B_2C_2 und die Höhe A_2D_2 , wenn $B_1C_1 = 70$ (a) mm, $A_1D_1 = 60$ (h_a) mm? Wie groß sind die Inhalte der Dreiecke, und welches ist ihr Verhältnis?
Ergebnis: Zusammenfassung B 8. Fig. 32.
23. Verlängere in Fig. 28 SE um sich selbst bis G , und ziehe CG . Wie verhält sich Dreieck ABC zum Dreieck ACS , zum Dreieck SCG und zu dem Dreieck, das aus seinen Mittellinien konstruiert werden kann?
24. (16.) Von einem Dreieck OLD ist durch $EN \parallel LD$ ein ähnliches Dreieck OEN abgeschnitten. Welches ist das Verhältnis ihrer Flächeninhalte, wenn $OL:OE =$ **a)** $3:2$, **b)** $4:5$, **c)** $p:q$? Welchen Wert muß das Verhältnis $OL:OE$ erhalten, wenn sich verhalten soll $\triangle OLD:\triangle OEN =$ **d)** $25:4$, **e)** $9:49$, **f)** $5:4$, **g)** $3:4$, **h)** $1:2$, **i)** $m:n$? Fig. 27.
25. (17.) Gegeben ist ein Dreieck ABC . Ziehe zu BC die Parallele DE so, daß $\triangle ADE =$ **a)** $\frac{1}{9}ABC$, **b)** $\frac{1}{16}ABC$, **c)** $\frac{9}{25}ABC$, **d)** $\frac{1}{3}ABC$, **e)** $\frac{2}{3}ABC$ (vergl. XII, Aufg. 20).
26. (18.) Teile ein gegebenes Dreieck durch Parallele zu einer Seite
a) in 3 gleiche Teile (Fig. 34) **d)** im Verhältnis $2:5$ Fig. 31.
b) „ 4 „ „ **e)** „ „ $m:n$
c) „ 5 „ „ **f)** „ „ $m:n:p$
27. (19.) Teile $\triangle ABC$ durch Parallele zu einer gegebenen Geraden
a) in 3 gleiche Teile **c)** im Verhältnis $3:4$ Fig. 35.
b) „ 5 „ „ (Fig. 35) **d)** „ „ $m:n$
28. (20.) Bilde nach Fig. 36 die Verhältnisgleichungen für $\frac{\triangle ABC}{\triangle DBC}$ Fig. 36.
(XII B, 10), für $\frac{\triangle DBC}{\triangle KLC}$ (B 8) und berechne durch Multiplikation derselben den Wert des Verhältnisses $\frac{\triangle ABC}{\triangle KLC}$. Verwandle hiernach ein gegebenes Dreieck **a)** in ein anderes, von welchem zwei Winkel (α, β) gegeben sind, **b)** in ein gleichseitiges, **c)** in ein rechtwinklig-gleichschenkliges; desgl. **d)** ein Viereck unter Beibehaltung von a, α, β in ein Trapez. **e)** Löse Aufgabe a durch Antragen der gegebenen Winkel nach entgegengesetzter Richtung.

Ähnliche Vielecke.

Fig. 37. *29. (23a.) (Ähnlichkeitssatz für n -Ecke; vergl. VI, Aufg. 18.) Gegeben ist ein Fünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$. **a)** Zeichne ein zweites Fünfeck A_2/E_2 so, daß $A_2B_2 = \frac{2}{3}A_1B_1$, $\angle B_2 = \angle B_1$, $B_2C_2 = \frac{2}{3}B_1C_1$, $\angle C_2 = \angle C_1$, $C_2D_2 = \frac{2}{3}C_1D_1$, $\angle D_2 = \angle D_1$, $D_2E_2 = \frac{2}{3}D_1E_1$. Warum ist $\triangle B_2C_2D_2 \sim \triangle B_1C_1D_1$, $\triangle A_2B_2D_2 \sim \triangle A_1B_1D_1$, $\triangle A_2D_2E_2 \sim \triangle A_1D_1E_1$? **b)** Beweise, daß zwei Fünfecke ähnlich sind, wenn sie in dem Verhältnis von drei Seitenpaaren und den vier Anwinkeln übereinstimmen.

Stelle Ähnlichkeitssätze auf für **c)** Sechsecke, **d)** Zehnecke, **e)** Zwölfecke, **f)** n -Ecke.

Ergebnis: Zusammenfassung B 6.

30. (24.) Beweise, daß bei ähnlichen Vielecken das regierende Verhältnis auch gilt für **a)** entsprechende Diagonalen, **b)** entsprechende Diagonalenabschnitte, **c)** die Umfänge. (XI B, 8.)
Ergebnis: Zusammenfassung B 7.

Fig. 37. *31. (23b/c.) (Flächenverhältnis ähnlicher Vielecke.) Beweise, daß **a)** entsprechende Teildreiecke ähnlicher Vielecke, **b)** die ähnlichen Vielecke selbst sich verhalten wie die Quadrate über entsprechenden Seiten.

Ergebnis: Zusammenfassung B 8.

32. (21.) Stelle Ähnlichkeitssätze auf **a)** für Vierecke, **b)** für Parallelogramme, **c)** für Rechtecke, **d)** für Rhomben, **e)** für Quadrate.

33. (22.) Von einem gegebenen Parallelogramm soll durch eine Gerade ein ähnliches Parallelogramm abgeschnitten werden.

Ähnlichkeit der Kreise.

*34. (8.) (Ähnlichkeitsbeweis.) Beweise, daß das Verhältnis der Halbmesser zweier Kreise als regierendes Verhältnis gilt **a)** für Sehnen von gleichem Mittelpunktswinkel, **b)** für die Mittelpunktsabstände derselben, **c)** für Tangentenpaare, die gleiche Winkel einschließen, **d)** für deren Berührungssehnen, **e)** für die Zentralen ihrer Schnittpunkte, **f)** für die Umfänge. **g)** Wie verhalten sich die Flächen zweier Kreise?

Ergebnis: Zusammenfassung B 9—11.

35. (26.) Gegeben sind die Kreise K_1, K_2 . Konstruiere den Kreis, dessen Fläche gleich:

- a) $2K_1$ c) $\frac{1}{2}K_1$ e) $\frac{m}{n}K_1$ g) $2K_1 + \frac{1}{3}K_2$ i) $K_1 - K_2$
 b) $3K_1$ d) $\frac{2}{3}K_1$ f) $K_1 + K_2$ h) $\frac{2}{5}K_1 + \frac{3}{5}K_2$ k) $\frac{1}{2}K_1 - \frac{1}{5}K_2$

36. (27.) Teile einen gegebenen Kreis durch Ringkreise a) in 2, b) in 3, c) in 5 gleiche Teile; desgl. im Verhältnis d) 2:5, e) 3:7, f) 8:3, g) $m:n$, h) 1:2:3, i) $m:n:p$.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

1. Dreiecke (Vielecke) heißen ähnlich, wenn ihre Winkel der Reihe nach gleich sind und ihre Seiten in derselben Reihenfolge in gleichem Verhältnis stehen.
2. Das Verhältnis je zweier entsprechenden Seiten ähnlicher Figuren heißt regierendes Verhältnis.

B. Lehrsätze.

1. Eine Parallele zu einer Dreiecksseite schneidet (innen oder außen) ein ähnliches Dreieck ab. (1)
2. Dreiecke sind ähnlich, sobald sie übereinstimmen (vergl. VI B, 2):
 - a) in dem Verhältnis der drei Seiten,
 - b) in dem Verhältnis zweier Seiten und dem Zwischenwinkel,
 - c) in zwei Winkeln,
 - d) in dem Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren. (2, 3)
3. Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, sobald sie übereinstimmen:
 - a) in einem spitzen Winkel,
 - b) in dem Verhältnis der Katheten,
 - c) in dem Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse. (4)
4. Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, sobald sie übereinstimmen:
 - a) in dem Winkel an der Spitze,
 - b) in dem Grundwinkel,
 - c) in dem Verhältnis der Grundlinie zum Schenkel. (4)
5. Alle gleichseitigen und alle rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke sind einander ähnlich. (4)

6. Vielecke sind ähnlich, sobald sie in so vielen Seitenverhältnissen und Winkeln übereinstimmen, als Seiten und Winkel zu ihrer Kongruenz erforderlich sind. (23)
7. In ähnlichen Figuren gehorchen dem regierenden Verhältnisse alle unter gleichen Bedingungen gezogenen Linien und deren Abschnitte. (7, 30)
- + 8. Die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate über entsprechenden Seiten (Höhen u. s. w.). (22, 31)
- X 9. Kreise sind einander stets ähnlich. (34)
10. Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie die Halbmesser. (34)
- X 11. Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate über den Halbmessern. (34)

XIV. Regelmäßige Figuren, Kreisberechnung.

Konstruktion regelmäßiger Vielecke aus dem Halbmesser des Umkreises.

- * 1. (Die Winkel eines regelmäßigen Vielecks.) Wie groß ist jeder Außenwinkel und wie groß jeder Innenwinkel eines regelmäßigen **a)** Vierecks, **b)** Fünfecks, **c)** Achtecks, **d)** Zehnecks, **e)** Fünfzehnecks, **f)** n -Ecks?
Ergebnis: Zusammenfassung A; B 1.
2. Unter welchem Winkel muß der Tischler Leisten abschneiden, die zum Besetzen einer **a)** vieleckigen, **b)** sechseckigen, **c)** achteckigen Tischplatte dienen sollen?
- Fig. 38. * 3. (1.) (Zentrische Beziehungen.) Die Mittelsenkrechten zweier Nachbarseiten eines regelmäßigen Vielecks schneiden einander in K . **a)** Beweise durch Umklappen des Vierecks $MKNB$ um KN , daß auch die Mittelsenkrechte von CD durch K geht. **b)** Beweise (nach IV B, 7), daß KB den Winkel B halbiert.
Ergebnis: Zusammenfassung B 2.
- * 4. (2.) Regelmäßiges Sechseck.) Wie groß ist jeder Mittelpunktswinkel eines regelmäßigen Sechsecks? Welche Eigenschaft hat das Mittelpunktsdreieck? Zeichne hiernach in k ein regelmäßiges **a)** Sechseck, **b)** Dreieck, **c)** Zwölfeck, **d)** Vierundzwanzigeck.
Ergebnis: Zusammenfassung B 3.

- * 5. (3.) (Regelmäßiges Viereck.) Zeichne in k ein regelmäßiges **a)** Viereck, **b)** Achteck, **c)** Sechzehneck.
- * 6. (4, 5.) (Regelmäßiges Zehneck.) $\triangle ABC$ sei das Mittel- Fig. 33.
 punktsdreieck eines regelmäßigen Zehnecks. **a)** Wie groß sind seine Winkel? **b)** Wie wird es durch die Halbierungslinie eines Grundwinkels geteilt? (XIII, Aufg. 8.) **c)** Beweise durch die Verhältnisgleichung für $DC:CB$, daß AC in D stetig geteilt ist (XII A, 1). **d)** Zeichne hiernach in k ein regelmäßiges Zehneck (XII B, 18). Desgl. ein regelmäßiges **e)** Fünfeck, **f)** Zwanzigeck, **g)** Fünfzehneck ($24^\circ = 60^\circ - 36^\circ$).
 Ergebnis: Zusammenfassung B 4.

Konstruktion regelmäßiger Vielecke aus Seiten und Diagonalen.

7. (6.) Konstruiere das regelmäßige **a)** Sechseck, **b)** Viereck, **c)** Dreieck, **d)** Achteck, **e)** Zwölfeck, **f)** Sechzehneck, dessen Seite a ist.
8. (7.) Zeichne ein regelmäßiges
- | | | | |
|---|---|---|-----------------|
| a) Zwölfeck,
b) Sechzehneck, | } | zu welchem gegeben
ist die Diagonale zwischen der ersten und | I. dritten Ecke |
| | | | II. vierten " |
| | | | III. fünften " |
| | | | IV. sechsten " |
| | | | V. siebten " |
| | | | VI. achten " |
9. Zur Konstruktion eines regelmäßigen Zehnecks ist gegeben: **a)** die Seite, **b)** die Diagonale zwischen der ersten und dritten, **c)** zwischen der ersten und vierten, **d)** zwischen der ersten und fünften Ecke.
10. Ziehe in einem regelmäßigen Fünfeck zwei Diagonalen von verschiedenen Ecken aus. **a)** Bestimme in der erhaltenen Figur zwei gleichschenklige Trapeze (VII B, 7), einen Rhombus und fünf gleichschenklige Dreiecke. **b)** Beweise, daß die beiden Diagonalen einander stetig teilen. **c)** Konstruiere hiernach das regelmäßige Fünfeck, dessen Diagonale d ist. **d)** Desgl. das regelmäßige Fünfeck, dessen Seite a ist.

Berechnung der Seiten regelmäßiger Vielecke.

- * 11. (Beziehungen zwischen n - und $2n$ -Eck.) $AB = s_n$ sei Fig. 39.
 die Seite eines regelmäßigen n -Ecks, $KA = KB = KC = r$
 der Halbmesser seines Umkreises. Berechne nach Pythagoras:

a) aus $\triangle KAD$ den Halbmesser des Inkreises, **b)** aus $\triangle CAD$ die Seite des regelmäßigen $2n$ -Ecks mit dem Umkreishalbmesser r .

Ergebnis: Zusammenfassung B 5 a, d.

- * **12.** Berechne aus dem Halbmesser des Umkreises die Seite und den Umfang des regelmäßigen **a)** Zwölfecks, **b)** Vierundzwanzigecks, **c)** Vierecks, **d)** Achtecks, **e)** Sechzehnecks, **f)** Zehnecks (XII B, 16), **g)** Zwanzigecks.

Ergebnis: Zusammenfassung B 7.

Fig. 39. **13.** In Fig. 39 sei $KA = r$, $AC = a$, $AD = x$. Berechne nach Pythagoras KD und DC und dann aus $KD + DC = KA$ die Strecke x .

- * **14.** Berechne Seite und Umfang des dem Kreise vom Halbmesser r eingeschriebenen regelmäßigen **a)** Dreiecks, **b)** Fünfecks.

Ergebnis: Zusammenfassung B 7.

- 15.** Ziehe in k einen Durchmesser AB , errichte $KC \perp AB$, halbiere KB durch D und trage $DC = DE$ auf DA ab. Beweise, **a)** daß KE die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks, **b)** daß CE die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Fünfecks ist.

Berechnung der Diagonalen, Halbmesser und Inhalte.

- 16.** Berechne aus dem Halbmesser r des Umkreises die Diagonalen eines regelmäßigen **a)** Fünfecks, **b)** Sechsecks, **c)** Achtecks, **d)** Zehnecks, **e)** Zwölfecks.

- 17.** Berechne den Halbmesser des Umkreises aus der Seite a eines regelmäßigen **a)** Dreiecks, **b)** Vierecks, **c)** Achtecks, **d)** Zehnecks, **e)** Zwölfecks.

- 18.** Beweise, daß der Halbmesser des Inkreises für das regelmäßige $2n$ -Eck die mittlere Proportionale zwischen dem Halbmesser des Umkreises und dem arithmetischen Mittel aus diesem und dem Inkreishalbmesser des regelmäßigen n -Ecks ist. (Fälle in Fig. 39 $KE \perp AC$ und $EF \perp CD$.)

- 19.** Berechne nach 18 den Inkreishalbmesser für das regelmäßige **a)** Achteck, **b)** Sechzehneck, **c)** Sechseck, **d)** Zwölfeck, **e)** Vierundzwanzigeck, wenn der Umkreishalbmesser r gegeben ist.

- 20.** Warum ist in Fig. 39 $\triangle KAC = \frac{1}{4} AB \cdot KC$? Berechne hiernach aus dem Umkreishalbmesser r den Inhalt eines Mittelpunktsdreiecks und dann den Gesamtinhalt eines regel-

mäßigen **a)** Vierecks, **b)** Sechsecks, **c)** Achtecks, **d)** Zwölfecks, **e)** Sechzehneckes, **f)** Vierundzwanzigecks, **g)** Zehneckes, **h)** Fünfecks.

Ergebnis: Zusammenfassung B 5 b, e; 7.

- 21.** Berechne für das regelmäßige Fünfeck mit der Seite **a)** den Umkreishalbmesser, **b)** den Inkreishalbmesser, **c)** die Diagonale, **d)** den Inhalt.

Ergebnis: Zusammenfassung B 6.

Regelmäßige Tangentenvielecke.

- ***22.** (21.) (Berechnung einer Seite.) Die Seite des dem Kreise Fig. 40. vom Halbmesser r eingeschriebenen regelmäßigen n -Ecks sei $AB = s_n$, der Halbmesser seines Inkreises $KD = \rho_n$. Berechne CE .

Ergebnis: Zusammenfassung B 5 c.

- ***23.** (22.) Berechne die Seite und den Umfang des dem Kreise vom Halbmesser r umgeschriebenen regelmäßigen **a)** Dreiecks, **b)** Vierecks, **c)** Fünfecks, **d)** Sechsecks, **e)** Achtecks, **f)** Zehneckes, **g)** Zwölfecks, **h)** Sechzehneckes, **i)** Vierundzwanzigecks.
- Ergebnis: Zusammenfassung B 7.

Berechnung des Kreisumfangs.

- 24.** (23.) Der Bogen eines Kreisabschnittes sei b mm lang; die zugehörige Sehne habe die Länge s . Welchem Grenzwert nähert sich das (irrationale) Verhältnis $\frac{s}{b}$ bei fortgesetzter Verkleinerung des Mittelpunktwinkels? Welches ist der Grenzwert des vom Mittelpunkt auf die Sehne gefällten Lotes?
- ***25.** (26.) (Berechnung der Zahl π .) **a)** Warum ist der Umfang eines Kreises größer als der jedes Sehnenvielecks? **b)** Warum ist er kleiner als der jedes Tangentenvielecks? (Vergleiche nach X B, 6 ein regelmäßiges Tangenten- n -Eck mit dem demselben Kreise umgeschriebenen Tangenten- $2n$ -Eck.)
- ***26.** Welche Grenzwerte ergeben sich für den Umfang eines Kreises beim Vergleich der Umfänge des ein- und des umgeschriebenen regelmäßigen **a)** Sechsecks, **b)** Zwölfecks, **c)** Vierundzwanzigecks? (Siehe Tafel B 7.) — Wie läßt sich hiernach der Umfang eines Kreises bis zu jeder erforderlichen Genauigkeit berechnen?
- Ergebnis: Zusammenfassung B 8.

27. Berechne den Umfang eines Kreises vom Durchmesser:

- 4 Weg. a) 36 cm c) 4,85 m e) 0,728 m g) 0,025 m
 b) 29 „ d) 11,27 „ f) 0,319 „ h) d

28. Der Durchmesser eines kreisrunden Teppichbeetes ist 2,94 (2,45) m. a) Wieviel Schieferplatten von 12 (14) cm Breite sind zur Einfassung erforderlich? b) Wieviel Blumenpflanzen braucht man, um dieses Beet in einem Abstände von 0,28 (0,21) m vom Rande mit einem Kranze lebender Blumen zu umgeben, so daß je zwei Pflanzen 11 cm voneinander entfernt bleiben?

29. (28.) a) Der Minutenzeiger einer Taschenuhr ist 18 mm lang. Welchen Weg legt seine Spitze in einer Stunde, in einer Minute, in einem Tage zurück? Beantworte dieselben Fragen b) für den um 6 mm kürzeren Stundenzeiger, c) für die Zeiger einer Wanduhr von 7,1 und 5,7 cm Länge, d) für die Zeiger einer Turmuhr von 1,05 und 0,87 m Länge.

30. Eine kreisförmige Fahrbahn hat einen Durchmesser von 83,3 (105) m. a) In welcher Zeit legt ein Radfahrer diese Bahn zurück, wenn er in einer Sekunde 9 (10) m fährt? b) Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Radfahrers, der in 15 (12) Minuten 28 (19) Runden macht?

31. a) Wieviel m Nähseide befinden sich auf einer Holzrolle von 25 (20,5) mm Durchmesser und 36 (30) mm Länge, wenn die Fäden nur einfach aufgewickelt sind und 9 (25) nebeneinanderliegende Fäden eine Breite von 2 (6) mm einnehmen? b) Ein stabförmiger Elektromagnet von 12,3 (8,2) mm Durchmesser ist mit einer 51,6 (39,5) mm langen und 2,1 (1,8) mm dicken Holzrolle verkleidet. Diese ist mit überspannenem Kupferdraht von 0,6 (0,5) mm Dicke dreifach bewickelt. Wie lang sind die einzelnen Lagen?

32. Wie schwer ist der eiserne Reifen eines Rades vom

	a)	b)	c)	d)
Durchmesser	1,25 m	0,86 m	1,09 m	1,48 m,
I. wenn 1 laufendes Meter des Reifens	8,570 kg wiegt,			
II. wenn	a)	b)	c)	d)
seine Dicke	10 mm	7,5 mm	8,2 mm	5,2 mm
„ Breite	12 cm	8 cm	7,5 cm	6,5 cm
beträgt?	(1 ccm Schmiedeeisen wiegt 7,79 g.)			

33. (29.) Wie groß ist der Durchmesser eines Baumstammes von a) 0,75, b) 1,38, c) 2,09, d) 3,72 m Umfang?

Berechnung der Kreisfläche.

34. (24, 27.) (Inhaltsformeln.) Teile den Bogen $AB = b$ des Fig. 41. Kreisausschnittes KAB durch eine möglichst enge Punkteihe in die Abschnitte $AC_1 = b_1$, $C_1C_2 = b_2$, $C_2C_3 = b_3$ u. s. w. Welches ist der Grenzwert für den Inhalt der Dreiecke KAC_1 , KC_1C_2 , KC_2C_3 u. s. w.? a) Wie groß ist der Kreisausschnitt? b) Wie groß ist die Fläche des Kreises mit dem Halbmesser r ? c) Wie groß ist die Fläche eines Kreisringes mit den Halbmessern r_1 und r_2 ?
Ergebnis: Zusammenfassung B 9, 10.
35. Berechne die Fläche der Kreise in 27.
36. (30.) Wie groß ist ein kreisförmiger Rasenplatz von a) 7,31, b) 5,64, c) 9,17 m Durchmesser? d—g) Welchen Querschnitt haben die in 33 berechneten Baumstämme?
37. Das in 28 genannte Teppichbeet soll in acht Ausschnitte geteilt werden. Vier davon haben Mittelpunktswinkel von je 20° (15°) und bilden ein Kreuz. a) Wie groß ist der Mittelpunktswinkel jedes der vier anderen? b) Wie groß sind die einzelnen Ausschnitte?

Zusammenfassung.

A. Erklärung.

Ein Vieleck heißt regelmäßig, wenn es lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel hat.

B. Lehrsätze.

1. Der Außenwinkel eines regelmäßigen n -Ecks ist $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$, der Innenwinkel $\left(\frac{n-2}{n} \cdot 180\right)^\circ$. (1)
2. Jedes regelmäßige Vieleck hat einen Umkreis und einen Inkreis. Diese sind Ringkreise; denn die Mittelsenkrechten der Seiten und die Halbierungslinien der Winkel schneiden einander sämtlich in einem Punkte. (3)
3. Die Seite eines regelmäßigen Sechsecks ist gleich dem Halbmesser seines Umkreises. (4)
4. Die Seite eines regelmäßigen Zehnecks ist gleich dem goldenen Abschnitt seines Umkreishalbmessers. (6)

5. Ist die Seite eines regelmäßigen n -Ecks s_n und der Halbmesser seines Umkreises r , so ist

a) der Halbmesser seines Inkreises: $\varrho_n = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - s_n^2}$; (11)

b) sein Flächeninhalt:

$$F_n = \frac{n}{2} \cdot s_n \cdot \varrho_n = \frac{n}{4} \cdot s_n \sqrt{4r^2 - s_n^2}; \quad (20)$$

c) die Seite des zugehörigen Tangenten- n -Ecks:

$$t_n = \frac{r \cdot s_n}{\varrho_n} = \frac{2rs_n}{\sqrt{4r^2 - s_n^2}}; \quad (22)$$

d) die Seite des zugehörigen Sehnen- $2n$ -Ecks:

$$s_{2n} = \sqrt{2r(r - \varrho_n)} = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - s_n^2})}; \quad (11)$$

e) der Flächeninhalt des zugehörigen Sehnen- $2n$ -Ecks:

$$F_{2n} = \frac{n}{2} \cdot r \cdot s_n. \quad (20)$$

6. Für das regelmäßige Fünfeck mit der Seite a ist:

a) der Umkreishalbmesser $r = \frac{1}{10} a \sqrt{10(5 + \sqrt{5})}$;

b) der Inkreishalbmesser $\varrho = \frac{1}{10} a \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$;

c) die Diagonale $d = \frac{1}{2} a (\sqrt{5} + 1)$;

d) der Inhalt $F = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$. (21)

7. Siehe Tabelle S. 91. (12, 14, 20, 23)
8. Der Umfang eines Kreises kann durch Vergleichung der Umfänge eines Sehnen- und des zugehörigen Tangentenvielecks bis zu jedem Grade der Genauigkeit berechnet werden; er ist annähernd 3,1416mal so groß wie der Durchmesser: $k = 2\pi r$. (26)
9. Die Fläche eines Kreisausschnittes ist gleich dem halben Produkt aus Bogen und Halbmesser. (34)
10. Die Fläche eines Kreises ist das π fache des Quadrats über dem Halbmesser: $K = \pi r^2$. (34)

7. Tafel regelmäßiger Vielecke.

n	S_n	Q_n	F_n	t_n	$n \cdot S_n$	$n \cdot t_n$
3	$r\sqrt{3}$	$\frac{r}{2}$	$\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$	$2r\sqrt{3}$	$2,5981 \cdot d$	$5,1962 \cdot d$
4	$r\sqrt{2}$	$\frac{r}{2}\sqrt{2}$	$2r^2$	$2r$	$2,8284 \cdot d$	$4,0000 \cdot d$
5	$\frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$\frac{r}{4}(\sqrt{5} + 1)$	$\frac{5}{8}r^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$2r\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$	$2,9389 \cdot d$	$3,6327 \cdot d$
6	r	$\frac{r}{2}\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}r\sqrt{3}$	$3,0000 \cdot d$	$3,4641 \cdot d$
8	$r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$\frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$	$2r^2\sqrt{2}$	$2r(\sqrt{2} - 1)$	$3,0614 \cdot d$	$3,3137 \cdot d$
10	$\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$	$\frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{4}r^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$\frac{2}{5}r\sqrt{5}(5 - 2\sqrt{5})$	$3,0902 \cdot d$	$3,2491 \cdot d$
12	$r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	$\frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	$3r^2$	$2r(2 - \sqrt{3})$	$3,1058 \cdot d$	$3,2154 \cdot d$
16	$r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	$\frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	$4r^2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$r\{2\sqrt{2 + \sqrt{2}} - (2 + \sqrt{2})\} \cdot \sqrt{2}$	$3,1214 \cdot d$	$3,1826 \cdot d$
24	$r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	$\frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	$6r^2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	$2r\{2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - (2 + \sqrt{3})\}$	$3,1326 \cdot d$	$3,1597 \cdot d$

XV. Anwendungen der Algebra auf die Geometrie.

Algebraische Summen von Strecken.

1. (8.) Gleichschenkliges Dreieck ($AB = AC$) aus:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| a) $(a + b) \beta$ | d) $(b + h_b) \alpha$ | g) $(b - p_b^b) \beta$ |
| b) $(b - h_a) \beta$ | e) $(b - h_b) \beta$ | h) $(a + 2b) \alpha$ |
| c) $(a - p_b^a) \alpha$ | f) $(b + p_b^b) \alpha$ | i) $(2b - a) \beta$ |

Rechtwinkliges Dreieck ($\angle C = 90^\circ$) aus:

- | | | |
|---------------------|-------------------------|-------------------------|
| k) $a(c - b)$ | m) $(b + h_c) \alpha$ | o) $(a + p_c^a) \alpha$ |
| l) $(b + c) \alpha$ | n) $(a - p_c^a) \alpha$ | p) $(b - p_c^b) \alpha$ |

Gleichseitiges Dreieck aus:

- | | | | |
|--------------|--------------|---------------|----------------|
| q) $(a + h)$ | r) $(a - h)$ | s) $(a + 2h)$ | t) $(3a + 2h)$ |
|--------------|--------------|---------------|----------------|

2. (9.) Dreieck aus:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) $a(b + h_c) \alpha$ | n) $(a + m_c) \beta \angle cm_c$ |
| b) $(a - h_b) p_b^c \gamma$ | o) $(m_c - c) \angle am_a \angle cm_a$ |
| c) $(c + h_a) p_a^c \gamma$ | p) $(a + w_\beta) u_b \beta$ |
| d) $a(b + p_b^c) \alpha$ | q) $(b - w_a) v_a \gamma$ |
| e) $(c - p_b^c) p_b^a \alpha$ | r) $(b + v_a) w_a \gamma$ |
| f) $(a - p_c^a) \beta \gamma$ | s) $(c - v_b) w_\beta \beta$ |
| g) $a(h_b + p_b^c) \alpha$ | t) $a(w_\gamma + v_c) \gamma$ |
| h) $ab(h_b - p_b^a)$ | u) $b(u_c - w_\gamma) \alpha$ |
| i) $a(b + m_a) \gamma$ | v) $(m_a + h_a) \beta \angle am_a$ |
| k) $b(c - m_b) \angle bm_b$ | w) $a(m_b - h_b) \angle bm_b$ |
| l) $c(b + m_c) \angle bm_c$ | x) $(w_\gamma + h_c) \alpha \beta$ |
| m) $(b - m_c) \alpha \angle bm_c$ | y) $(w_a - h_a) \alpha \gamma$ |

3. (10.) Parallelogramm aus:

- | | |
|---------------------------|----------------------------------|
| a) $a(b + h_a) \alpha$ | g) $(e + a) b \angle be$ |
| b) $e(b + h_a) \alpha$ | h) $(a - f) \alpha \angle bf$ |
| c) $b(a - h_b) p_b^a$ | i) $a(e + f) \angle ef$ |
| d) $a(f + h_a) \angle af$ | k) $b(e - f) \angle bf$ |
| e) $b(e - h_b) \angle be$ | l) $(e + f) \angle ae \angle ef$ |
| f) $(a - b) f \alpha$ | m) $(e - f) \angle bf \angle ef$ |

Rechteck aus:

- | |
|------------------------|
| n) $(a + b) e$ |
| o) $(a - b) \angle ae$ |
| p) $a(e + b)$ |
| q) $(e - a) \angle be$ |

Rhombus aus:

- | |
|------------------------|
| r) $a(e + f)$ |
| s) $(f - a) \angle ae$ |
| t) $(e - h) \angle ae$ |
| u) $(f + h) \alpha$ |

v) Quadrat aus: $(e - a)$

4. (11.) Dreieck aus:

$$\underbrace{(a + b - c)} \text{ und: } \underbrace{(a + c - b)} \text{ und: } \underbrace{(b + c - a)} \text{ und:}$$

a) $\alpha \beta$	c) $h_b \gamma$	e) $\beta \gamma$	g) $h_c \beta$
b) $h_a \beta$	d) $h_c \alpha$	f) $h_b \alpha$	h) $h_a \gamma$
			i) $\alpha \gamma$
			l) $h_b \gamma$
			k) $h_a \beta$
			m) $h_c \beta$

5. (12.) Dreieck aus:

a) $(b + h_a + p_a^b) \beta \gamma$	i) $(h_a + p_a^b - b) a \gamma$
b) $(c + h_a + p_a^c) \alpha \gamma$	k) $(h_c + a - p_c^a) b \beta$
c) $(a + h_b - p_b^a) \alpha \beta$	l) $(a + h_b + p_b^a) c \gamma$
d) $(b + h_c - p_c^b) \alpha \beta$	m) $(h_c + b - p_c^b) a \alpha$
e) $(a + p_c^a - h_c) \beta \gamma$	n) $(b + w_a + v_a) \alpha \beta$
f) $(c + p_a^c - h_a) \alpha \gamma$	o) $(c + w_a - u_a) \beta \gamma$
g) $(c + p_a^c - h_a) a \beta$	p) $(a + u_b - w_\beta) \alpha \gamma$
h) $(a + h_b - p_b^a) b \gamma$	q) $(w_\gamma + u_c - b) \alpha \beta$

6. (78.) Einem Quadrat (Seite a) soll das Quadrat umgeschrieben werden, dessen Seiten **a)** die Länge b haben, **b)** von den Ecken des ersten in je zwei Abschnitte geteilt werden, deren Unterschied d ist, **c)** von den Ecken des ersten im Verhältnis $m : n$ geteilt werden.

7. (79.) Einem gleichseitigen Dreieck soll das gleichseitige Dreieck

a) umgeschrieben	}	werden,	{	I. die Länge a haben,
b) eingeschrieben				II. auf denen des ersten senkrecht stehen.

Darstellung des Unterschiedes zweier Dreieckswinkel.

*8. (17.) In Fig. 29 sei $\angle G_2 BC = x^0$. Welche Maßzahlen ergeben sich dann für $\angle ABG_2$ und $\angle AG_2 B$? Welcher Wert für x folgt aus der Gleichsetzung dieser Werte? (IV B, 1.) Wie groß ist $\angle G_1 BG_2$? (VII B, 16.) Wie groß ist $\angle G_1 BC$?
Ergebnis: Zusammenfassung B 1, 2.¹⁾

9. (18.) Dreieck aus:

a) $c(a - b)(\alpha - \beta)$	c) $a(b + c)(\beta - \gamma)$
b) $(a - c)h_c(\alpha - \gamma)$	d) $(a + b)h_a(\alpha - \beta)$

*10. (19.) Fälle im Dreieck ABC ($AC > AB$) $AD \perp BC$ und klappe $\triangle ABD$ um AD . Wie groß sind die Seiten und

1) Der Beweis kann auch nach IV, Aufg. 24 geführt werden, wenn in Fig. 7 BB_1 gezogen wird. (Vergl. IV B, 3.)

Winkel des Dreiecks AB_1C : **a)** wenn $\angle ABC < 90^\circ$,
b) wenn $\angle ABC > 90^\circ$?

Ergebnis: Zusammenfassung B 3.

11. (20.) Dreieck aus:

- | | |
|--|---|
| a) $b c (\beta - \gamma)$ | f) $b (p_a^b - p_a^c) \beta$ |
| b) $p_c^\alpha p_c^b (\alpha - \beta)$ | g) $h_b (p_b^\alpha - p_b^c) (\alpha - \gamma)$ |
| c) $a c (p_b^\alpha - p_b^c)$ | h) $c (p_a^b + p_a^c) \beta (\beta > 90^\circ)$ |
| d) $b (p_a^b - p_a^c) (\beta - \gamma)$ | i) $(p_b^b + p_b^c) \alpha \gamma (\alpha > 90^\circ)$ |
| e) $a (p_c^\alpha - p_c^b) \beta$ | k) $a (p_a^b + p_a^c) \alpha (\alpha > 90^\circ)$ |

* 12. (21.) Fälle im Dreieck ABC ($AC > AB$) die Höhe AD und ziehe

- | | |
|---|---|
| a) die Mittellinie AF . Wenn nun $DF = x$, welche Maßzahlen ergeben sich dann für FB und für FC ? (Berücksichtige III, Aufg. 12). | b) die Winkelhalbierende AE . Wenn nun $\angle DAE = x^\circ$, welche Maßzahlen ergeben sich dann für $\angle EAB$ und für $\angle EAC$? |
|---|---|

Welcher Wert für x folgt aus der Gleichsetzung der erhaltenen Werte?

Ergebnis: Zusammenfassung B 4, 5.

13. (22.) Dreieck aus:

- | | | |
|--|--|---|
| a) $h_a r (p_a^b - p_a^c)$ | e) $h_a \varrho (\beta - \gamma)$ | i) $h_a \varrho_a (\beta - \gamma)$ |
| b) $m_c r (p_c^b - p_c^a)$ | f) $w_\gamma \varrho (\alpha - \beta)$ | k) $h_b \varrho_a (\alpha - \gamma)$ |
| c) $m_b m_c (p_b^\alpha - p_b^c)$ | g) $p_c^\alpha w_\gamma (\alpha - \beta)$ | l) $w_\gamma \varrho_b (\alpha - \beta)$ |
| d) $h_c m_a (p_c^\alpha - p_c^b)$ | h) $h_b u_b (\gamma - \alpha)$ | m) $w_a \varrho_a (\beta - \gamma)$ |

* 14. (25.) Fälle im Sehnendreieck ABC (Mittelpunkt U) $AD \perp BC$, $UZ \perp CA$. Wie groß ist: $\angle AUZ$, $\angle UAZ$, $\angle BAD$, $\angle DAU$? Warum wird auch $\angle DAU$ durch w_α halbiert?

Ergebnis: Zusammenfassung B 5, 6.

15. (26.) Dreieck aus:

- | | |
|---|--|
| a) $h_a r w_\alpha$ | g) $c p_a^c (\beta - \gamma)$ |
| b) $r w_\beta (\alpha - \gamma)$ | h) $m_b (p_b^\alpha - p_b^c) (\alpha - \gamma)$ |
| c) $h_c m_c w_\gamma$ | i) $m_a w_\alpha (p_a^\alpha - p_a^b)$ |
| d) $h_b r (\alpha - \gamma)$ | k) $h_b w_\beta (p_b^b - p_b^c)$ |
| e) $h_a m_a (\beta - \gamma)$ | l) $r w_\gamma (p_c^b - p_c^a)$ |
| f) $a h_c (\alpha - \beta)$ | m) $h_c \gamma (p_c^\alpha - p_c^b)$ |

Algebraische Anwendungen des pythagoreischen Lehrsatzes.

16. (29.) Berechne die Diagonalen der Rechtecke in X, Aufg. 7.

17. (30.) **a)** Berechne die Länge der zweiten Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $c = 25$ und dessen eine Kathete $a = 24$ mm ist. Desgl.:

	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
$c =$	58	22,6	85	49	11,9	79,2	104	c
$a =$	40	3	83,2	33	8,8	61	70,8	a

18. (31.) Eine Leiter reicht bis zur Höhe $h = 9$ (6,3) m, wenn ihr Fuß $d = 1,65$ (1,6) m von der Wand entfernt ist. **a)** Wie lang ist sie? **b)** Wie hoch reicht sie empor, wenn ihr Fuß $e = 3$ (2,5) m von der Wand entfernt wird?

19. (32.) In einem Teiche steht 2,85 (2,64) m vom Ufer entfernt ein Schilf und ragt 0,45 (0,55) m über die Wasseroberfläche empor. Zieht man es jedoch bis an den Rand des Teiches herüber, so wird es gerade vom Wasser bedeckt. Wie tief ist der Teich? (Nach Heis.)

20. (33.) Um die Länge einer unzugänglichen Strecke MQ festzustellen, bestimmt man mittels des Winkelspiegels (siehe Anm. zu S. 80) einen Punkt P , von dem sie unter einem rechten Winkel erscheint, und mißt $PM = 208$ (317) m, $PQ = 43,5$ (183,5) m. Wie lang ist MQ ?

21. (34.) Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich zwei Punkte vom Scheitel fort (nach dem Scheitel hin) mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 4$ (12) cm und $c_2 = 3$ (5) cm. Sie sind jetzt $a_1 = 16$ (169) und $a_2 = 27$ (130) cm vom Scheitel entfernt. **a)** Wie groß ist ihre gegenseitige Entfernung? **b)** Wie groß wird sie nach $t = 5$ (8)^s sein? **c)** Wie groß war sie vor $t = 2$ (3)^s? **d)** Wann wird sie $d = 90,4$ (73) cm betragen?

22. (35.) Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich zwei Punkte, der eine nach dem Scheitel hin mit der Geschwindigkeit $c_1 = 3$ (5) cm, der andere vom Scheitel fort mit der Geschwindigkeit $c_2 = 5$ (4) cm. Sie sind jetzt $a_1 = 61$ (72) und $a_2 = 24$ (17) cm vom Scheitelpunkte entfernt. **a)** Wie groß ist ihre gegenseitige Entfernung? **b)** Wie groß wird sie nach $t = 11$ (9)^s sein? **c)** Wie groß war sie vor $t = 18$ (24)^s? **d)** Wann wird sie $d = 120$ (130) cm betragen?

- 23.** (36.) Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Halbmessern $r_1 = 81$ (42,5), $r_2 = 6$ (22,5) cm mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 24$ (3), $c_2 = 7$ (4) cm nach dem Scheitel hin. Sie sind von ihm jetzt $a_1 = 108$ (26) und $a_2 = 94$ (8) cm entfernt.
a) Wann werden die Kreise einander von außen berühren?
b) Wann wird die einschließende Berührung eintreten?
c/d) Beantworte dieselben Fragen für den Fall, daß der Mittelpunkt des zweiten Kreises jetzt $a_2 = 40$ (6) cm vom Scheitel entfernt ist und sich mit $c_2 = 7$ (2) cm Geschwindigkeit von ihm fortbewegt.

- 24.** (37.) Berechne für das gleichschenklige Dreieck ABC ($AB = AC$) h_a und F aus:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	*g)
$BC = 114$	12	6,32	11,52	23,07	a	a	
$CA = 185$	8,7	5,07	13,4	40,54	b	a	

Ergebnis von g: Zusammenfassung B 13.

- 25.** (38.) **a)** Wie lang müssen die Sparren eines Giebeldaches gemacht werden, dessen Breite 24 (18,7) und dessen Höhe 11,9 (12,5) m betragen soll? **b)** Bis zu welcher Höhe reicht eine Doppelleiter von 3,05 (4,13) m Länge empor, wenn ihre Fußpunkte 1,1 (1,35) m von einander entfernt sind? **c)** Wie weit darf diese Leiter gespreizt werden, wenn sie bis zu einer Höhe von 2,95 (4,03) m emporreichen soll?

- 26.** (39.) Berechne die Diagonale des Quadrats $ABCD$ aus $AB =$
a) 408, **b)** 16,9, **c)** 25,1, **d)** 11,07, **e)** 8,504, **f)** a . Berechne die Seite und den Inhalt aus $AC =$ **g)** 288,5, **h)** 9,9, **i)** 17,03, **k)** 53,72, **l)** 10,41, **m)** e .

- Fig. 42. **27.** (40.) Wie lang ist die Strecke MN , wenn die Koordinaten ihrer Endpunkte sind:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
für M $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 13 \\ y_1 = 10 \end{array} \right.$	5,2	71	23,7	4,08	x_1	x_1
	14	71	11,2	7,14	y_1	y_1
für N $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 37 \\ y_2 = 17 \end{array} \right.$	9,6	51	34,9	2,31	x_2	x_2
	2,3	50	18,5	0,97	y_2	y_2

Ergebnis: Zusammenfassung A 1.

- 28.** (41.) Berechne die Seiten des Dreiecks ABC aus den Koordinaten seiner Ecken:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
A	$\begin{cases} x_1 = 12 \\ y_1 = 45 \end{cases}$	$\begin{cases} 140 \\ 23 \end{cases}$	$\begin{cases} 45 \\ 46 \end{cases}$	$\begin{cases} 10 \\ 43 \end{cases}$	$\begin{cases} 70 \\ 58 \end{cases}$	$\begin{cases} 32 \\ 46 \end{cases}$	$\begin{cases} 7 \\ 45 \end{cases}$	$\begin{cases} 50 \\ 57 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$
B	$\begin{cases} x_2 = 32 \\ y_2 = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} 20 \\ 45 \end{cases}$	$\begin{cases} 10 \\ 25 \end{cases}$	$\begin{cases} 87 \\ 7 \end{cases}$	$\begin{cases} 15 \\ 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 32 \\ 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 127 \\ 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 38 \\ 10 \end{cases}$	$\begin{cases} x_2 \\ y_2 \end{cases}$
C	$\begin{cases} x_3 = 138 \\ y_3 = 13 \end{cases}$	$\begin{cases} 97 \\ 9 \end{cases}$	$\begin{cases} 122 \\ 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 102 \\ 43 \end{cases}$	$\begin{cases} 134 \\ 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 92 \\ 21 \end{cases}$	$\begin{cases} 127 \\ 23 \end{cases}$	$\begin{cases} 98 \\ 21 \end{cases}$	$\begin{cases} x_3 \\ y_3 \end{cases}$

Erweiterung des pythagoreischen Lehrsatzes.

- * 29. (X, 21.) **a)** Warum ist in Fig. 43: $\triangle ABE \cong \triangle HBC$, Fig. 43. Rechteck $BOQE =$ Rechteck $HBKL$, und wie lautet diese Gleichung in Maßzahlen des Dreiecks ABC ? Beweise ferner: **b)** $a \cdot p_a^b = b \cdot p_b^a$, **c)** $b \cdot p_b^c = c \cdot p_c^b$, **d)** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bp_b^c$, **e)** $b^2 = ?$, **f)** $c^2 = ?$

- * 30. (X, 21.) Wiederhole die Erörterung in 29 für Fig. 44. Fig. 44.
Ergebnis von 29 und 30: Zusammenfassung B 7.

- * 31. (X, 22.) (Umkehrung des pythagoreischen Lehrsatzes.) Zwei Seiten eines Dreiecks sind 5 und 12 cm lang. **a)** Wie groß muß die dritte Seite sein, wenn ihr Gegenwinkel 90° beträgt? **b)** Zwischen welchen Grenzen muß sie liegen, wenn ihr Gegenwinkel spitz, **c)** wenn er stumpf ist? (Vergl. auch VI B, 1.)

Ergebnis: Zusammenfassung B 8.

32. (X, 23.) Von welcher Art sind die in III, 2 h—1 genannten Dreiecke?

- * 33. (42.) (Der Dreiecksinhalt aus den Seiten.) Berechne für das Dreieck ABC erst eine Seitenprojektion, dann die zugehörige Höhe und dann den Inhalt, wenn:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$BC = 100$	14,5	83	74,2	37,8	a	
$CA = 105$	37,5	95	63,7	45,2	b	
$AB = 65$	26	103	21,4	29,8	c	

Ergebnis: Zusammenfassung A 2; B 10.

34. (43.) Ziehe durch eine Ecke des Trapezes $ABCD$ ($AB \parallel CD$) die Parallele zum gegenüberliegenden Schenkel, berechne aus dem erhaltenen Dreieck die Höhe des Trapezes und dann dessen Inhalt (X B, 5), wenn:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$AB =$	77,6	11,3	24,1	65,2	88,9	a
$BC =$	22,5	18,5	8,7	77,4	41,7	b
$CD =$	50	7,09	37,4	124,1	14,5	c
$DA =$	8,7	20,1	7,08	52,3	35,8	d

Ergebnis: Zusammenfassung B 16.

- 35.** (44.) (Der Transversalensatz.) Ziehe im Dreieck ABC die Mittellinie AF , fälle die Höhe AD , und berechne nach B 7: b^2 aus $\triangle AFC$, c^2 aus $\triangle AFB$. Was ergibt sich dann für **a)** $(b^2 + c^2)$, **b)** $(a^2 + c^2)$, **c)** $(a^2 + b^2)$?

Ergebnis: Zusammenfassung B 9.

- 36.** (45.) Berechne die Mittellinien der in 33 genannten Dreiecke.

- 37.** (46.) Berechne die Seiten des Dreiecks ABC aus den Maßzahlen der Mittellinien:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$AE =$	75	93	18,2	40,4	25,1	m_a
$BL =$	72	78	15,9	50,5	52,7	m_b
$CM =$	21	66	12,4	60,6	30,8	m_c

(Berechne nach B 9a die Summe $4m_b^2 + 4m_c^2 - 2m_a^2$ und daraus a .)

Ergebnis: Zusammenfassung B 9 b.

Die Ankreise des Dreiecks.

- Fig. 19. 38.** (13.) In Fig. 19 ist $AF_1 + AE_1 = (AB + BD_1) + (AC + CD_1) = (a + b + c) = 2s$; folglich $AF_1 = AE_1 = s$.

(15.) Dreieck aus s und:

a) $w_\alpha \alpha$ **b)** $h_\alpha \alpha$ **c)** $q \ q_\alpha$ **d)** $w_\beta \ q_\beta$ **e)** $h_c \ q_c$

- Fig. 19. 39.** (13.) In Fig. 19 ist $AF + AE = (AB - BD) + (AC - CD) = (b + c - a)$; folglich $AF = AE = (s - a)$; ferner ist $BD_3 = BF_3 = CD_2 = CE_2 = (s - a)$.

(15.) Dreieck aus:

$(s - a)$ und **a)** $w_\alpha \ q$ **b)** $h_\alpha \ \alpha$ **e)** $q_\beta \ q_c$
 $(s - b)$ und **d)** $q_\alpha \ \beta$ **e)** $q \ \gamma$ **f)** $w_\alpha \ q_c$
 $(s - c)$ und **g)** $q_c \ \gamma$ **h)** $w_\alpha \ \alpha$ **i)** $h_b \ \beta$

- Fig. 19. 40.** (13, 15.) In Fig. 19 ist $FF_1 = EE_1 = s - (s - a) = a$ ebenso $F_2 F_3 = E_2 E_3 = a$.

Dreieck aus:

- | | | |
|----------------------------|----------------------------------|-------------------------|
| a) $a \varrho \varrho_a$ | d) $(a + b) \varrho_a \varrho_b$ | g) $b(a + c) \varrho_a$ |
| b) $b \varrho_a \varrho_c$ | e) $(a - c) \varrho \varrho_b$ | h) $c(a - b) \varrho$ |
| c) $c \varrho_b \gamma$ | f) $a(b + c) \varrho$ | i) $a(b - c) \varrho_b$ |

41. (16.) Beweise für ein rechtwinkliges Dreieck ($\angle C = 90^\circ$):

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) $2\varrho = (a + b - c)$ | g) $\varrho + \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = (a + b + c)$ |
| b) $2\varrho_a = (a + c - b)$ | h) $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 2c$ |
| c) $2\varrho_b = ?$ | i) $\varrho + \varrho_b + \varrho_c - \varrho_a = ?$ |
| d) $2\varrho_c = ?$ | k) $\varrho + \varrho_a + \varrho_c - \varrho_b = ?$ |
| e) $\varrho_a + \varrho_b = c$ | l) $\varrho_a + \varrho_b = 2r$ |
| f) $\varrho_a - \varrho_b = ?$ | m) $\varrho_a - \varrho = ?$ |

42. (23.) a) Ziehe in Fig. 19 $JL \parallel FF_1$. Welches sind die Maßzahlen für die Katheten und für die Winkel des Dreiecks JLJ_1 ? — Erörtere ebenso das Dreieck, welches dadurch entsteht, daß b) die durch J_3 zu F_3F_2 gezogene Parallele die Verlängerung von J_2F_2 schneidet, c) die durch J_1 zu D_1D gezogene Parallele die Verlängerung von JD schneidet, d) die durch J_3 zu D_3D_2 gezogene Parallele J_2D_2 schneidet.

43. (24.) Dreieck aus:

- | | |
|--|---|
| a) $a(\varrho_a - \varrho) \beta$ | m) $a(\varrho_b - \varrho_c) \alpha$ |
| b) $a b (\varrho_b - \varrho)$ | n) $r(\varrho_a - \varrho_b) \gamma$ |
| c) $c m_c (\varrho_c - \varrho)$ | o) $b r (\varrho_a - \varrho_c)$ |
| d) $a u_a (\varrho_a - \varrho)$ | p) $(a - c) (\varrho_b + \varrho) \beta$ |
| e) $h_b (\varrho_b - \varrho) \beta$ | q) $(a + b) (\varrho_a - \varrho_b) \gamma$ |
| f) $(a + b) (\varrho_c - \varrho) \gamma$ | r) $a(\varrho_a + \varrho) (\beta - \gamma)$ |
| g) $(\varrho_b + \varrho_c) \alpha \beta$ | s) $b(\varrho_a - \varrho_c) (\alpha - \gamma)$ |
| h) $m_a (\varrho_b + \varrho_c) \alpha$ | t) $(b - c) h_c (\varrho_a + \varrho)$ |
| i) $c h_c (\varrho_a + \varrho_b)$ | u) $h_b (\varrho_b - \varrho_c) (\beta - \gamma)$ |
| k) $c m_a (\varrho_a + \varrho_b)$ | v) $b(\varrho_c + \varrho) (\alpha - \beta)$ |
| l) $(\varrho_b - \varrho) (u_b - v_b) \beta$ | w) $c(\varrho_a - \varrho_c) (\alpha - \gamma)$ |

44. (47.) Berechne nach Fig. 19 den Inhalt des Dreiecks ABC aus: Fig 19

- a) $F = \triangle JBC + \triangle JAC + \triangle JAB$
 b) $F = \triangle J_1AC + \triangle J_1AB - \triangle J_1BC.$

Ergebnis: Zusammenfassung B 11.

45. (49.) Berechne (nach B 10 und 11) auf doppelte Weise den Inhalt des Dreiecks ABC und dadurch die Länge von ϱ , ϱ_a , ϱ_b , ϱ_c . — Anwendung auf Aufg. 33!

Ergebnis: Zusammenfassung B 12.

46. Berechne:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \rho \cdot q_a \cdot q_b \cdot q_c & \text{c)} (q_b + \rho) \cdot (q_a + q_c) & \text{e)} (q_a - \rho) \cdot (q_b + q_c) \\ \text{b)} \rho \cdot q_a + q_b \cdot q_c & \text{d)} (q_c - \rho) \cdot (q_a - q_b) & \text{f)} \frac{1}{q_a} + \frac{1}{q_b} + \frac{1}{q_c} \end{array}$$

Der Satz des Ptolemäus.

Fig. 45. 47. (62.) In dem Sehnenviereck $ABCD$ sind die Diagonalen gezogen, und es sind die Dreiecke ABC und ACD um A gedreht, bis AC in die Richtung AD bzw. AB gefallen ist. Warum ist dann $B_1C_1 \parallel BD$, $C_2D_2 \parallel BD$? Welches ist die vierte Proportionale zu AC_1 , AD , B_1C_1 ? Desgl. zu AC_2 , AB , C_2D_2 ? Beweise hiernach $ef = ac + bd$.

Ergebnis: Zusammenfassung B 14.

48. (63.) Berechne nach XII B, 7 auf zwei Arten den Inhalt des Sehnenvierecks $ABCD$ ($ABC + ADC = ABD + CBD$) und aus dieser Gleichung den Wert des Verhältnisses $e : f$.

Berechne ferner aus ef (B 14) und $\frac{e}{f}$ die Länge der Diagonalen eines Sehnenvierecks.

Ergebnis: Zusammenfassung B 15.

49. (64.) Berechne den Inhalt eines Sehnenvierecks, in welchem die Nachbarseiten paarweise gleich sind, **a)** aus der Länge der Seiten, **b)** aus der Länge der Diagonalen.

50. Welche Form nimmt der Satz des Ptolemäus an, wenn er angewandt wird **a)** auf ein Rechteck, **b)** auf ein gleichschenkliges Trapez?

51. (65.) Beweise, daß von den Linien, die einen Punkt des Umkreises eines gleichseitigen Dreiecks mit den drei Ecken verbinden, die eine gleich der Summe der beiden anderen ist.

Regelmäßige Vielecke und Sternfiguren.

52. (83.) Die Halbierungspunkte der Seiten des regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$ seien A_1 (für AB) $B_1C_1D_1E_1F_1$. Wie verhält sich der Inhalt des Sechsecks zu dem des Dreiecks: **a)** AA_1F_1 , **b)** AB_1E_1 , zu dem des Trapezes: **c)** ABB_1F_1 , **d)** B_1F_1FC , **e)** A_1F_1FB , **f)** zu dem des Rechtecks $A_1B_1D_1E_1$, **g)** zu dem des Sechsecks $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$?

53. (84.) **a)** Wie verhalten sich die Dreiecke, in die ein regelmäßiges Sechseck durch die von einer Ecke ausgehenden Diagonalen geteilt wird? Desgl. die entsprechenden Teildreiecke eines regelmäßigen **b)** Achtecks, **c)** Zwölfecks, **d)** Fünfecks, **e)** Zehnecks.

54. (81.) Zeichne das regelmäßige n -Eck, das **a)** gleich der Summe, **b)** gleich dem Unterschied zweier gegebenen regelmäßigen n -Ecke ist.
55. (72.) Zeichne in den Kreis mit dem Halbmesser r ein regelmäßiges **a)** Sechseck, **b)** Viereck, **c)** Achteck, **d)** Zehneck, **e)** Fünfeck. Errichte auf den Seiten gleichseitige Dreiecke, und berechne den Umkreishalbmesser und den Inhalt der entstehenden Sternfigur.
56. Zeichne in k (Halbmesser r) **a)** zwei gleichseitige Dreiecke mit gegengerichtet parallelen Seiten, **b)** zwei Quadrate, von denen die Diagonalen des einen mit denen des anderen Winkel von 45° bilden, **c)** die Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks. Berechne den Halbmesser des Kreises, der durch die einspringenden Ecken der entstehenden Sternfigur geht, sowie deren Inhalt.
57. (73.) **a)** Innerhalb k ist P gegeben. Bestimme durch Konstruktion den Punkt des Umfangs, nach welchem eine elastische Kugel gestoßen werden muß, damit sie nach dreimaligem Anprall nach P zurücklaufe; zeichne und berechne ihre Bahn. Konstruiere und berechne ebenso die Bahn für **b)** viermaligen, **c)** sechsmaligen, **d)** fünfmaligen Anprall. (Verschiedene Fälle!)

Orts-Ringkreise und Ortsparallelen.

58. **a)** Ziehe durch P_1 innerhalb k die Sehne von der Länge $2s$.
b) Bestimme auf der Verlängerung des durch P_1 gehenden Durchmessers den Punkt P_2 so, daß die von P_2 an k gelegten Tangenten die Länge t haben.

Ergebnis: Zusammenfassung B 17, 18.

59. (VIII, 6a.) Konstruiere den Kreis, der den Halbmesser r_1 hat, k_2 berührt und **a)** durch P innerhalb k_2 geht, **b)** durch P außerhalb k_2 geht, **c)** eine Gerade g berührt, die von k_2 geschnitten wird, **d)** eine Gerade g berührt, die von k_2 nicht geschnitten wird. Die Berührung des gesuchten Kreises mit k_2 soll in den Aufgaben b—d I. ausschließend, II. einschließend erfolgen.

Ergebnis: Zusammenfassung B 20.

60. (VIII, 6b.) Konstruiere den Kreis, der den Halbmesser r_1 hat und k_2 und k_3
- | | | | | |
|-------------------------|---|---------------|---|---------------------------|
| a) gleichartig | } | berührt, wenn | { | I. ausgeschlossen wird, |
| b) ungleichartig | | | | II. geschnitten wird, |
| | | | | III. eingeschlossen wird. |
- k_3 von k_2

61. (VIII, 7.) Konstruiere den Kreis, der zwei Ringkreise k_1 und k_2

a) ungleichartig } berührt und $\left\{ \begin{array}{l} \text{I. durch } P \text{ geht,} \\ \text{II. auch } g \text{ berührt,} \\ \text{III. auch } k_3 \text{ berührt.} \end{array} \right.$

Ergebnis: Zusammenfassung B 19.

62. (90.) Konstruiere den Kreis, der g und k berührt, und zwar

a) k in P , b) g in P .

63. (91.) Konstruiere den Kreis, der den Halbmesser r_1 hat,

a) k_2 halbiert, } und $\left\{ \begin{array}{l} \text{I. durch } P \text{ geht,} \\ \text{II. } g \text{ berührt,} \\ \text{III. } k_3 \text{ berührt,} \\ \text{IV. } k_3 \text{ unter der Sehne } s_3 \text{ schneidet.} \end{array} \right.$

Ergebnis: Zusammenfassung B 21, 22.

64. (92.) Konstruiere den Kreis, der den Halbmesser r_1 hat, g_1 unter der Sehne s_1 schneidet und a) durch P geht, b) g_2 berührt, c) g_2 unter der Sehne s_2 schneidet, d) k_2 berührt, e) k_2 halbiert, f) k_2 unter der Sehne s_2 schneidet.

Ergebnis: Zusammenfassung B 23.

65. (93a.) (Rechtwinkliger Schnitt zweier Kreise.) Lege an k_1 in T die Tangente, bezeichne auf ihr einen Punkt K_2 , und schlage um K_2 mit K_2T den Kreis. Konstruiere nach dieser Musterfigur den Kreis, der k_1 rechtwinklig schneidet, und dessen Mittelpunkt P ist.

Ergebnis: Zusammenfassung A 3, B 24.

66. (93b/f.) Konstruiere den Kreis, der den Halbmesser r_1 hat, k_2 rechtwinklig schneidet und a) durch P geht, b) g berührt, c) k_3 berührt, d) g unter der Sehne s schneidet, e) k_3 unter der Sehne s schneidet.

67. (94.)¹⁾ Konstruiere den Kreis, der k_1 und k_2 berührt ($r_1 > r_2$), und zwar:

a) k_1 in P , } wenn $\left\{ \begin{array}{l} \text{I. } k_1 \text{ und } k_2 \text{ einander ausschließen,} \\ \text{II. } k_1 \text{ und } k_2 \text{ einander ausschließend berühren,} \\ \text{III. } k_1 \text{ und } k_2 \text{ einander schneiden,} \\ \text{IV. } k_2 \text{ von } k_1 \text{ einschließend berührt wird,} \\ \text{V. } k_2 \text{ von } k_1 \text{ eingeschlossen wird.} \end{array} \right.$

68. (95.) Ziehe die Gerade, die k_1 unter der Sehne s_1 schneidet und

a) k_2 berührt, } Fälle I—V wie in 67.
b) k_2 unter der Sehne s_2 schneidet.

1) Vergl. hierzu XVII, Aufg. 22.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

1. Die Koordinaten eines Punktes sind die von ihm auf die Schenkel eines rechten Winkels gefällten Lote. Die Schenkel des rechten Winkels heißen Koordinatenachsen, sein Schenkel heißt Koordinatenanfang.
2. Bezeichnet man die Seitensumme eines Dreiecks mit $2s$, so ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a + b + c) &= s & \frac{1}{2}(a + c - b) &= (s - b) \\ \frac{1}{2}(b + c - a) &= (s - a) & \frac{1}{2}(a + b - c) &= (s - c) \end{aligned}$$
3. Zwei Kreise schneiden einander rechtwinklig, wenn die nach den Schnittpunkten gezogenen Halbmesser des einen Tangenten des anderen sind.

B. Lehrsätze.

- 1/2. Wenn man von zwei Dreiecksseiten (b, c) die eine (c) von der gemeinschaftlichen Ecke aus auf b abträgt, so liegt dem dadurch dargestellten Seitenunterschiede ($b - c$) ein Winkel von $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)^0$ gegenüber. (8)

an b anträgt, so liegt der	an b anträgt, so liegt der
dadurch dargestellten Seitenunterschiede ($b - c$) ein Winkel von $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)^0$ gegenüber. (8)	dadurch dargestellten Seitensumme ($b + c$) ein Winkel von $[90 + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)]^0$ gegenüber. (8)

3. Wenn man die eine von zwei Seitenprojektionen vom Höhenfußpunkte aus auf die andere abträgt oder (beim stumpfwinkligen Dreieck) an die andere anträgt, so liegt dem dadurch dargestellten Unterschiede ($p_a^b - p_a^c$) bzw. der Summe ($p_a^b + p_a^c$) in jedem Falle ein Winkel von $(\beta - \gamma)^0$ gegenüber. (10)
4. Die Projektion einer Mittellinie auf die zugehörige Seite ist gleich dem halben Unterschied oder der halben Summe der Projektionen der beiden anderen Seiten, je nachdem der Höhenfußpunkt auf der Seite selbst oder auf ihrer Verlängerung liegt:

$$p_a^m = \frac{1}{2}(p_a^b - p_a^c), \text{ wenn } \gamma < \beta < 90^0,$$

$$p_a^m = \frac{1}{2}(p_a^b + p_a^c), \text{ wenn } \beta > 90^0 \text{ oder } \gamma > 90^0. \quad (12)$$
5. Der Winkel zwischen dem von einer Ecke aus gezogenen Umkreishalbmesser und der zugehörigen Höhe ist gleich

dem Unterschied der beiden nicht zugehörigen Winkel und wird durch die Winkelhalbierende des zugehörigen Winkels halbiert: $\angle rh_a = (\beta - \gamma)$; $\angle h_a w_a = \angle r w_a = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. (12, 14)

6. In dem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete p_a^m und dessen Hypotenuse r ist, liegt der ersteren ein Winkel von $(\beta - \gamma)^0$ gegenüber. (14)

7. (Erweiterter pythagoreischer Lehrsatz.) Das Quadrat einer Dreiecksseite mit spitzem (stumpfen) Gegenwinkel ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermindert (vermehrt) um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie. (29, 30)

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2bp_b^c (\mp 2cp_b^c).$$

8. (Umkehrung.) Wenn die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten größer (kleiner) ist, als das Quadrat der dritten Seite, so hat diese einen spitzen (stumpfen) Gegenwinkel. (31)

9. Transversalensatz: Die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist gleich dem doppelten Quadrat der halben dritten Seite vermehrt um das doppelte Quadrat ihrer Mittellinie:

$$a) \quad b^2 + c^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2m_a^2, \quad (35)$$

$$b) \quad a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}. \quad (37)$$

10/12. Andere Dreiecksformeln:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (33)$$

$$F = s \cdot \varrho = (s-a)\varrho_a = (s-b)\varrho_b = (s-c)\varrho_c \quad (44)$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}; \quad \varrho_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}. \quad (45)$$

$$13. \text{ Gleichseitiges Dreieck: } F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}. \quad (24)$$

14. Satz des Ptolemäus: Das Rechteck aus den Diagonalen eines Sehnenvierecks ist gleich der Summe der Rechtecke aus je zwei Gegenseiten: $ef = ac + bd$. (47)

15. Formeln für die Diagonalen eines Sehnenvierecks:

$$e = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}; \quad f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}. \quad (48)$$

16. Trapez:

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{a+c}{a-c} \sqrt{[(a-c) + (b-d)][(a-c) - (b-d)] \cdot [(b+d) + (a-c)] \cdot [(b+d) - (a-c)]}. \quad (49)$$

17. Der Ort für die Mittelpunkte aller Sehnen von der Länge $2s$ ist der Ringkreis mit dem Halbmesser $\sqrt{r^2 - s^2}$. (58)

18. Der Ort für die Endpunkte aller Tangentenabschnitte von der Länge t ist der Ringkreis mit dem Halbmesser $\sqrt{r^2 + t^2}$. (58)

19. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei Ringkreise k_1 und k_2 gleichartig [ungleichartig] berühren, ist ein dritter Ringkreis mit dem Halbmesser

$$\frac{1}{2}(r_1 - r_2) \left[\frac{1}{2}(r_1 + r_2) \right]. \quad (61)$$

20/24. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die den Halbmesser r_1 haben und

k_2 ausschließend [einschließend] berühren, ist der Ringkreis um K_2 mit dem Halbmesser

$$(r_1 + r_2) [(r_1 - r_2) \text{ bzw. } (r_2 - r_1)], \quad (59)$$

k_2 halbieren, ist der Ringkreis um K_2 mit dem Halbmesser $\sqrt{r_1^2 - r_2^2}$, (63)

k_2 unter der Sehne $2s$ schneiden, ist jeder der beiden Ringkreise um K_2 mit den Halbmessern

$$\sqrt{r_1^2 - s^2} \pm \sqrt{r_2^2 - s^2}, \quad (63)$$

g unter der Sehne $2s$ schneiden, ist jede der beiden Parallelen im Abstände $\sqrt{r_1^2 - s^2}$, (64)

k_2 rechtwinklig schneiden, ist der Ringkreis um K_2 mit dem Halbmesser $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. (65)

XVI. Konstruktionsaufgaben mit algebraischer Analysis.

Gleichungen ersten Grades.

1. (XV, 1.) Zeichne **a)** zwei Strecken, deren Summe a und deren Unterschied b ist, **b)** zwei Winkel, deren Summe α^0 und deren Unterschied β^0 beträgt, **c)** zwei Nebenwinkel, die sich um α^0 unterscheiden.
2. (XV, 5.) Die Seiten eines Dreiecks, dessen Umfang $2s$ ist, sind nach folgenden Angaben darzustellen: **a)** Das Dreieck ist gleichschenkelig; jeder Schenkel ist um d länger als die Grundlinie. **b)** Die Seiten bilden eine arithmetische Reihe mit der Differenz d . **c)** Eine Seite ist um d länger als die zweite und um e kürzer als die dritte.
3. (XV, 6.) Die Seiten eines Vierecks, dessen Umfang $2s$ ist, sind nach folgenden Angaben darzustellen: **a)** Das Viereck ist ein Rechteck, zwei Nachbarseiten unterscheiden sich um $2d$. **b)** Das Viereck hat einen Inkreis; zwei Nachbarseiten sind a und b .
4. (XV, 2.) Die Winkel eines Dreiecks sind nach folgenden Angaben zu konstruieren: **a)** Der eine ist α^0 , die beiden anderen unterscheiden sich um δ^0 . **b)** Sie bilden eine arithmetische Reihe mit der Differenz δ . **c/d)** Das Dreieck ist gleichschenkelig, und die Hälfte des Winkels an der Spitze ist um δ^0 größer (kleiner) als jeder Grundwinkel. **e)** Das Dreieck ist rechtwinklig, und der eine spitze Winkel ist um δ^0 größer als der dritte Teil des anderen.
5. (XV, 3.) Die Winkel eines Vierecks sind nach folgenden Angaben zu konstruieren: **a)** Wenn man den einen Winkel eines Parallelogramms um δ^0 vermehrt, so verhält er sich zu seinem (früheren) Nachbarwinkel wie $3 : 5$. **b)** Wenn man den einen von zwei Gegenwinkeln eines Sehnenvierecks um α^0 vermehrt, den anderen um β^0 vermindert, so verhalten sich die dadurch entstandenen Winkel wie $5 : 3$.
6. (XV, 87.) Konstruiere den Kreis, dessen Umfang von einem gegebenen Punkte P die längste Entfernung a und die kürzeste Entfernung b hat; K soll auf einer gegebenen Geraden g liegen und P **a)** einschließen, **b)** ausschließen.

7. (XV, 76, 75.) **a)** Einem gleichschenkligen Dreieck (Grundlinie a , Höhe h) soll das Quadrat eingeschrieben werden, dessen eine Seite in die Grundlinie des Dreiecks fällt. **b)** Dem Quadrat mit der Seite a soll das regelmäßige Sechseck eingeschrieben werden, von welchem zwei Seiten einer Diagonale des Quadrats parallel sind. **c)** Von einem Quadrat sollen vier gleichschenklige Dreiecke abgeschnitten werden, so daß ein regelmäßiges Achteck übrigbleibt. **d)** Einem Quadrat soll das Rechteck eingeschrieben werden, dessen Seiten sich wie $m : n$ verhalten, und von welchem je eine Ecke auf einer Quadratseite liegt.
8. (XV, 69.) Zeichne in ein Viereck **a)** den Rhombus, dessen Seiten den Vierecksdiagonalen parallel sind, **b)** das Parallelogramm, dessen Seiten sich verhalten wie $m : n$.
9. Einem Kreisabschnitt mit dem Mittelpunktswinkel 60° soll der Berührungskreis **a)** eingeschrieben, **b)** angeschrieben werden. **c/d)** Desgl. einem Viertelkreis.
10. (XV, 88.) Bestimme auf einer Tangente von k den Punkt, dessen Abstand von k **a)** um d kleiner ist, als seine Entfernung vom Berührungspunkt, **b)** sich zu dieser verhält wie $m : n$.
11. (XV, 67.) Ziehe zu einer Seite eines gegebenen Dreiecks die Parallele so, daß **a)** ein Tangententrapez abgeschnitten wird, **b)** in dem abgeschnittenen Trapez die Summe der Schenkel gleich der größeren Grundlinie ist.
12. Ziehe im Dreieck OLD (Fig. 27) zur Seite LD die Parallele EN so, daß sie mittlere Proportionale wird zwischen **a)** einer zweiten Seite und deren oberem Abschnitt, **b)** einer zweiten Seite und dem oberen Abschnitt der dritten, **c)** den Abschnitten einer zweiten Seite.

Dreieckskonstruktionen durch vierte Proportionale.

13. (XV, 51.) Bestimme (durch Gleichsetzung zweier Inhaltsformeln) die vierte Proportionale zu:

a) $q \ a \ h_a$	f) $c \ (s - c) \ q_c$	l) $a \ q_a \ (b + c)$
b) $b \ s \ q$	g) $b \ (s - a) \ q_a$	m) $a \ q \ (s - a)$
c) $s \ c \ h_c$	h) $q_a \ b \ h_b$	n) $b \ s \ q_b$
d) $q_a \ h_a \ a$	i) $a \ q \ (b + c)$	o) $q \ b \ (h_b - 2q)$
e) $(s - b) \ b \ h_b$	k) $a \ (b - c) \ q_c$	p) $q_c \ c \ (h_c + 2q_c)$

14. (XV, 52.)

Dreieck aus:

- | | | |
|----------------------|------------------------|----------------------|
| a) $a h_a q$ | g) $(s - c) h_c q$ | n) $s h_c \gamma$ |
| b) $s h_b q$ | h) $(s - b) h_b \beta$ | o) $h_b q_b \beta$ |
| c) $c h_c q_c$ | i) $h_a q \alpha$ | p) $a h_a q_b$ |
| d) $a (b + c) h_a$ | k) $(b + c) h_a q_a$ | q) $(s - b) h_c q_b$ |
| e) $b (a + c) q_b$ | l) $(a + b) h_c q$ | r) $(b - c) h_a q_c$ |
| f) $(s - c) h_c q_c$ | m) $s h_a q_a$ | s) $b (a - c) h_b$ |

15. (XV, 68.) Dreieck aus F^1) und:

- | | | | |
|--------------|---------------------|---------------|------------------|
| a) $a q$ | e) $(s - b) h_b$ | i) $q \alpha$ | n) $(b + c) q$ |
| b) $h_b q$ | f) $(s - a) \alpha$ | k) $c q_c$ | o) $(s - c) q$ |
| c) $s h_c$ | g) $(s - c) h_a$ | l) $a q_b$ | p) $(a + c) q_b$ |
| d) $h_a q_a$ | h) $(s - b) \alpha$ | m) $h_b q_a$ | q) $s q_c$ |

16. (XV, 59.) Welches ist nach XII B, 6 die vierte Proportionale zu:

- | | | |
|---------------|--------------|-----------------------|
| a) $c h_a r$ | c) $h_a b c$ | e) $a 2r (h_c + h_b)$ |
| b) $a h_b 2r$ | d) $2r b a$ | f) $2r (b - c) a$ |

17. (XV, 60.) Dreieck¹⁾ aus:

- | | | |
|--------------------|-----------------------------|---|
| a) $bc a h_a$ | g) $ac p_b^c r$ | n) $ab r w_\gamma$ |
| b) $ab c r$ | h) $bc h_a m_a$ | o) $ac h_b (\alpha - \gamma)$ |
| c) $bc h_a \alpha$ | i) $ab h_c (p_c^a - p_b^c)$ | p) $bc r (\beta - \gamma)$ |
| d) $ac r \beta$ | k) $bc (p_a^b - p_a^c) r$ | q) $ab w_\gamma (\alpha - \beta)$ |
| e) $ab c \gamma$ | l) $ac m_b (p_b^a - p_b^c)$ | r) $ac (p_b^a - p_b^c) (\alpha - \gamma)$ |
| f) $bc h_a p_a^b$ | m) $bc h_a w_\alpha$ | s) $bc m_a \alpha$ |

18. (XV, 53.) Berechne nach XV, Aufg. 35: a) $(b^2 - c^2)$, b) $(a^2 - c^2)$, c) $(a^2 - b^2)$. d) Was ergibt sich aus a für $DE = p_a^m$? e) Welches ist der Ort für A , wenn a und $(b^2 - c^2)$ unverändert bleiben?

Ergebnis: Zusammenfassung B 1.

19. (XV, 54.)

Dreieck¹⁾ aus:

- | | | |
|--------------------------|--|-----------------------------------|
| $(b^2 - c^2)$ und: | $(a^2 - c^2)$ und: | $(a^2 - b^2)$ und: |
| a) $a \beta$ | h) $b h_b$ | p) $c m_c$ |
| b) $a r$ | i) $b \angle b m_b$ | q) $c h_a$ |
| c) $a \alpha$ | k) $b \angle a m_b$ | r) $c m_a$ |
| d) $(p_a^b - p_a^c) m_a$ | l) $b \angle b m_a$ | s) $c u_c$ |
| e) $(p_a^b - p_a^c) h_a$ | m) $(p_b^a - p_b^c) \alpha$ | t) $(p_c^a - p_c^b) \angle c m_c$ |
| f) $(p_a^b - p_a^c) h_b$ | n) $(p_b^a - p_b^c) (\alpha - \gamma)$ | u) $(p_c^a - p_c^b) \angle b m_c$ |
| g) $(p_a^b - p_a^c) m_c$ | o) $(p_b^a - p_b^c) \beta$ | v) $(p_c^a - p_c^b) \angle c m_a$ |

1) Die Flächen F , bc , $(b^2 + c^2)$, $(b^2 - c^2)$ u. s. w. erscheinen unter den Bestimmungsstücken als Quadrate von gegebener Seitenlänge d .

20. Gleichschenkliges Trapez aus:

a) $a c (e + b)$ b) $a c (e - b)$ (Vergl. XV, Aufg. 50b.)

Dreieckskonstruktionen durch mittlere Proportionale.

(Hierzu auch XIII, 24—28.)

21. (XV, 55.) (Vorübungen.) Stelle folgende Quadratwurzeln geometrisch dar: a) $\sqrt{35}$, b) $\sqrt{91}$, c) $\sqrt{33}$, d) $\sqrt{2}$, e) $\sqrt{5}$, f) $\sqrt{7}$, g) $\sqrt{2\sqrt{2}}$, h) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, i) $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

22. (XV, 56.) Zeichne Strecken von der Länge

a) $\frac{5a^2}{b}$	e) $\frac{a}{2}\sqrt{3 - \sqrt{5}}$
b) $\frac{a^2}{2b}\sqrt{15}$	f) $\sqrt{a^2 + 3b^2}$
c) $a(\sqrt{5} - 1)$	g) $\sqrt{2a^2 + 3ab - 5b^2}$
d) $a\sqrt{2\sqrt{5}}$	h) $\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$

23. (XV, 57.) Berechne m_a durch den Transversalensatz (XV B, 9). Welches ist der Ort für A , wenn a und $(b^2 + c^2)$ unverändert bleiben?

Ergebnis: Zusammenfassung B 2.

24. (XV, 58.)

Dreieck¹⁾ aus:

$(b^2 + c^2)$ und:

$(a^2 + c^2)$ und:

$(a^2 + b^2)$ und:

a) a β	i) p_b^a p_b^c	r) h_a β
b) a h_a	k) b h_c	s) c γ
c) a $\angle b m_a$	l) m_a m_b	t) h_a m_c
d) m_a $\angle c m_a$	m) m_b $\angle b m_b$	u) h_c m_c
e) m_a $(p_a^b - p_a^c)$	n) m_b $\angle b m_a$	v) m_c γ
f) m_a β	o) b $\angle m_a m_c$	w) c $\angle c m_a$
g) a m_b	p) h_b $(p_b^a - p_b^c)$	x) m_c u_c
h) u_a v_a	q) m_b r	y) m_c p_c^a

Gleichungen zweiten Grades.

25. Ziehe im Dreieck OLD (Fig. 27) zur Seite LD die Parallele EN so, daß sie mittlere Proportionale wird zwischen einer zweiten Seite und a) deren unterem Abschnitt, b) dem unteren Abschnitt der dritten.

1) Siehe Anm. S. 108.

26. (XV, 67.) Halbiere das Dreieck ABC durch eine Gerade so, daß **a**) auch die Umfänge beider Hälften gleich sind, **b**) daß der eine Teil ein gleichschenkliges Dreieck ist, dessen Spitze auf AC liegt.
27. Ziehe zu einer Seite des Dreiecks ABC die Parallele so, daß das abgeschnittene Dreieck gleich ist **a**) dem abgeschnittenen Trapez, **b**) dem von der einen Trapezdiagonale abgeschnittenen unteren Teildreieck des Trapezes.
28. (XV, 85.) Verwandle ein regelmäßiges Sechseck (Seite a) **a**) in ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie gleich dem halben Umfang des Sechsecks ist. Desgl. in ein regelmäßiges **b**) Dreieck, **c**) Viereck, **d**) Zwölfeck, **e**) Achteck.
29. (XV, 86.) Verwandle ein regelmäßiges Achteck (Umkreishalbmesser r) in ein Rechteck, von welchem gegeben ist **a**) $a : b$, **b**) $(a + b)$, **c**) $(a - b)$, **d**) $(a^2 + b^2)$, **e**) $(a^2 - b^2)$, **f**) $(e^2 + a^2)$, **g**) $(e^2 - a^2)$.
30. (XV, 76.) **a**) Einem Halbkreis (Halbmesser r), **b**) einem Kreisabschnitt (Sehne $2s$, Pfeilhöhe h) soll das Quadrat eingeschrieben werden.
Ergebnis: Zusammenfassung A.
31. Dem Quadrat mit der Seite a soll eingeschrieben werden **a**) das Quadrat mit der Seite b , **b**) das Parallelogramm, dessen Nachbarseiten sich wie $m : n$ ($1 : 2$) verhalten, und von welchem zwei Ecken auf Gegenseiten, die beiden anderen in Gegenecken des Quadrats liegen, **c**) das gleichschenklige Dreieck, dessen Grundlinie sich zum Schenkel verhält wie $m : n$ ($2 : 3$), und dessen Spitze in einer Ecke des Quadrats liegt.
32. (XV, 66.) Zur Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks ist gegeben: **a**) die Hypotenuse und die Bedingung, daß die eine Kathete mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und der anderen Kathete sein soll, **b**) die Summe der Katheten und der Unterschied zwischen der Hypotenuse und einer Kathete, **c**) die Summe der drei Seiten und das Verhältnis der Katheten.
33. (XV, 61.) Gleichschenkliges Dreieck aus:
- | | | |
|--------------------------|------------------------------|------------------------------------|
| a) $(b + h_a) r$ | i) $(b^2 + h_a^2) a$ | r) $(a^2 + b^2 + r^2) h_a$ |
| b) $(b - h_a) r$ | k) $(b^2 + h_a^2) r$ | s) $(a^2 + b^2 - r^2) h_a$ |
| c) $(a + b) h_a$ | l) $(h_a^2 + a^2) b$ | t) $(a^2 + r^2 - b^2) h_a$ |
| d) $(h_a + a) b$ | m) $(h_a^2 - a^2) b$ | u) $(b^2 + r^2 - a^2) h_a$ |
| e) $(h_a - a) b$ | n) $(b^2 + a^2) r$ | v) $(a^2 + b^2 + h_a^2) r$ |
| f) $(a + h_a) r$ | o) $(b^2 - a^2) r$ | w) $(a^2 + b^2 - h_a^2) r$ |
| g) $(h_a - a) r$ | p) $(a^2 + r^2) b$ | x) $(a^2 + h_a^2 - b^2) r$ |
| h) $(h_a + r) a$ | q) $(a^2 - r^2) b$ | y) $(b^2 + h_a^2 - a^2) r$ |

- 34.** (XVI, 4.) Ziehe durch P **a)** innerhalb, **b)** außerhalb k die Sehne, deren Abschnitte sich verhalten wie $m : n$ ($3 : 5$).
c/d) Zwei Ringkreise sollen durch eine von P ausgehende Gerade so geschnitten werden, daß die entstehenden Sehnen sich verhalten wie $m : n$ ($7 : 3$).
- 35.** (XVI, 8.) **a)** Lege in k einen Ringkreis so, daß der vom äußeren Kreise begrenzte Abschnitt einer Tangente des inneren Kreises mittlere Proportionale zwischen den beiden Durchmessern ist. **b)** Lege zwischen zwei parallele Tangenten von k eine dritte so, daß sie im Berührungspunkte stetig geteilt ist.
- 36.** Zeichne in einen gegebenen Kreisabschnitt (Sehne $2s$, Pfeilhöhe h) zwei gleichgroße einander berührende Kreise.
- 37.** (XV, 82.) **a)** Einem Viertelkreis (Halbmesser r) **b)** Einem Kreisabschnitt (Halbmesser r , Sehne s)
- | | | | |
|---|----------------|---|------------------------|
| } | soll das | { | I. eine Ecke auf dem |
| | Quadrat | | begrenzenden Bogen, |
| } | eingeschrieben | } | drei auf den begren- |
| | werden, | | zenden Halbmessern, |
| } | von | } | II. zwei Ecken auf dem |
| | welchem | | Bogen, zwei auf den |
| | | | Halbmessern liegen. |

Zusammenfassung.

A. Erklärung.

Die Pfeilhöhe eines Bogens ist das von seiner Mitte auf die Sehne gefällte Lot.

B. Lehrsätze.

1/2. Der Ort für die Spitzen aller Dreiecke auf der Grundlinie a , für welche

der Unterschied		die Summe
der beiden anderen Seiten		gleich d^2 ist, ist
die Senkrechte auf a , deren Fußpunkt von der Mitte		der Kreis um die Mitte
von a die Entfernung $\frac{d^2}{2a}$		von a mit dem Halbmesser
hat.		$\frac{1}{2} \sqrt{2d^2 - a^2}$. (23)
(18)		

XVII. (XVI.) Potenzlinien und Potenzpunkte.

Die Potenz eines Punktes.

- *1. (Die Potenz eines inneren Punktes.) Schlage um K den Kreis mit dem Halbmesser r (30 mm), ziehe einen Durchmesser AB , und bezeichne auf ihm P ; es sei $KP = c$ (18 mm). **a)** Wie groß sind die Abschnitte PA und PB ? **b)** Wie groß ist das Rechteck aus den Abschnitten jeder Sehne des Büschels P ? (XII B, 13.) **c)** Wie lang ist die kleinste Sehne dieses Büschels?

Ergebnis: Zusammenfassung A 1.

- *2. (Die Potenz eines äußeren Punktes.) Bezeichne in der zu 1 gezeichneten Figur P auf der Verlängerung von AB ; es sei $KP = c$ (50 mm). **a)** Welches ist der Zahlwert der Potenz des Punktes P ? **b)** Wie lang ist die von P an k gelegte Tangente?

Ergebnis: Zusammenfassung A 2.

3. (9.) Welches ist in Bezug auf einen Kreis mit dem Halbmesser $r = 30$ der geometrische Ausdruck und der Zahlwert für die Potenz eines Punktes mit der Zentrale $c =$ **a)** 0, **b)** 3, **c)** 10, **d)** 24, **e)** 30, **f)** 34, **g)** 68?

4. (10.) Wie ändert sich die Potenz eines Punktes, wenn er sich vom Mittelpunkte nach dem Umfange hin bewegt? Welches sind die Grenzwerte für die innere Potenz? Wie ändert sich die Potenz eines Punktes, der sich außerhalb des Kreises bewegt? Welches sind die Grenzwerte für die äußere Potenz? Welches ist der Ort für alle Punkte, die in Bezug auf einen Kreis dieselbe innere (äußere) Potenz haben?

Ergebnis: Zusammenfassung B 1.

Die Potenzlinie zweier Kreise.

5. (11.) Zwei Kreise k_1 und k_2 schließen einander aus ($c = 100$, $r_1 = 40$, $r_2 = 20$). Teile die Zentrale in einzelne cm, und bestimme **a)** für jeden Teilpunkt die Art und die Größe seiner Potenzen in Bezug auf die gegebenen Kreise, **b)** den Punkt der Zentrale, der in Bezug auf beide Kreise gleiche Potenzen hat, **c)** die Punkte, deren äußere Potenz in Bezug auf beide Kreise $t^2 = 40^2, 45^2, 50^2, 60^2, 70^2$ ist.

6. (12.) k_1 möge k_2 einschließen ($c = 10$, $r_1 = 40$, $r_2 = 20$). Trage auf die verlängerte Zentrale einzelne cm ab, und be-

stimme **a)** die Potenzen der Teilpunkte in Bezug auf beide Kreise, **b)** den Punkt der Zentrale, der in Bezug auf beide Kreise gleiche Potenzen hat, **c)** die Punkte, deren äußere Potenz in Bezug auf beide Kreise $t^2 = 55^2, 60^2, 70^2$ ist.

- *7. (13.) (Die Potenzlinie.) Der Punkt P habe in Bezug auf k_1 und k_2 gleiche Potenz. Welche Gleichung gilt dann für $PK_1^2 - PK_2^2$? Welches ist der Ort für alle Punkte, die in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenz haben? (XVI B, 1.) Wie werden die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise von der Potenzlinie geteilt?

Ergebnis: Zusammenfassung A 3; B 2.

- *8. (14.) (Die gemeinschaftliche Sehne als Potenzlinie.) Welche Potenz haben die Schnittpunkte zweier Kreise in Bezug auf jeden von ihnen? Welches ist die Potenzlinie zweier einander schneidenden Kreise? (Bestätigung durch Betrachtung eines Punktes auf der gemeinschaftlichen Sehne.) Welches ist die Potenzlinie zweier einander (ausschließend oder einschließend) berührenden Kreise?

Ergebnis: Zusammenfassung B 3, 4.

9. (15.) Wo liegt die Potenzlinie zweier einander ausschließenden Kreise? Wie bewegt sie sich, während der eine Kreis sich dem anderen nähert? Verfolge die Lagenveränderungen der Potenzlinie bis zu dem Augenblicke, wo die beiden Kreise Ringkreise geworden sind.
10. (16.) Beweise, daß die Potenzlinie **a)** dem Mittelpunkte des kleineren Kreises näher liegt, als dem Mittelpunkte des größeren, **b)** dem Umfange des größeren Kreises näher liegt, als dem Umfange des kleineren, **c)** daß die Potenzlinie eines Kreises und eines Punktes den Kreis in keinem Falle schneidet.

Der Potenzpunkt dreier Kreise.

11. (17.) Ziehe von einem Punkte P der Potenzlinie zweier Kreise
- durch jeden von ihnen eine Sekante; beweise, daß die Endpunkte der entstehenden Sehnen auf einem Kreise liegen müssen (XII B, 14), und bestimme den Mittelpunkt dieses Kreises;
 - an jeden von ihnen die Tangenten und bestimme die Mittelpunkte der Kreise, die mit den gegebenen je zwei dieser Tangenten gemein haben.
 - Beweise, daß P in Bezug auf die gegebenen und alle in a) und b) gefundenen Kreise gleiche Potenz hat.

Fig. 46. *12. (18.) (Konstruktion der Potenzlinie mittels eines Hilfskreises.) k_1 und k_2 werden von k_3 in A_1D_1 und A_2D_2 geschnitten; die Sehnen A_1D_1 und A_2D_2 schneiden einander (verlängert) in O . Welches sind die Potenzen von O in Bezug auf jeden der drei Kreise? Warum muß auch die Potenzlinie von k_1 und k_2 durch O gehen?

Ergebnis: Zusammenfassung A 4; B 8, 17.

*13. (19.) k_2 wird von k_1 **a)** ausgeschlossen, **b)** eingeschlossen. Bestimme die Potenzlinie mittels eines Hilfskreises, der I. k_1 und k_2 schneidet, II. k_1 schneidet und k_2 berührt, III. k_1 berührt und k_2 schneidet.

14. (21.) Bestimme den Potenzpunkt für $k_1k_2k_3$, wenn **a)** $k_1k_2k_3$ einander ausschließen, **b)** $k_1k_2k_3$ einander schneiden, **c)** k_1k_2 ein-, k_3 ausschließt, **d)** k_2 und k_3 einander schneiden und von k_1 eingeschlossen werden, **e)** k_1 von k_2 und von k_3 geschnitten wird, **f)** k_3 von k_2 , k_2 von k_1 eingeschlossen wird.

Gegeben¹⁾ sind

	a)		b)		c)		d)		e)		f)	
K_1	K_2	K_3	K_2	K_3	K_2	K_3	K_2	K_3	K_2	K_3	K_2	K_3
$x = 65$	115	115	65	78	58	23	58	50	78	78	52	50
$y = 56$	30	84	30	22	60	22	60	56	25	80	56	54
$r = 30$	15	10	15	10	15	10	15	10	15	10	15	10

Sonderfälle der Potenzlinie und des Potenzpunktes.

15. (20.) (Die Potenzlinie für einen Kreis und einen Punkt.) Bestimme die Potenzlinie **a)** für k und P außerhalb k , **b)** für k und P innerhalb k , **c)** für k und P auf k , ***d)** für P_1 und P_2 .

Ergebnis von d: Zusammenfassung B 7.

*16. (45.) (Die Potenzlinie für einen Kreis und eine Gerade.) Inwiefern kann eine Gerade als Teil einer Kreislinie angesehen werden? In welcher Richtung ist der Mittelpunkt dieses Kreises zu suchen? Welche Linie gilt als Zentrale für k und g ? Welches ist die Potenzlinie für k und g ? für P und g ?

Ergebnis: Zusammenfassung B 5.

1) Für Aufgaben, die eine vorsichtige Ausnutzung der Zeichenfläche (halbseitig 160×105 mm, ganzseitig 160×210 mm) erforderlich machen, sind Koordinaten und andere Bestimmungsstücke in bestimmten Zahlen (mm) gegeben. Als Koordinatenanfang gilt hierbei die untere linke Ecke der Zeichenfläche. Für Gerade sind entweder zwei Bestimmungspunkte (28 b) oder ein Punkt auf einer Achse und die Richtung (36 b) angegeben.

- *17. (47.) (Die Potenzlinie für zwei Gerade.) Zwei gleichgroße Kreise ($c = 36$, $r = 20$) k_1 und k_2 schneiden einander in A und B . Warum halbiert ihre Potenzlinie den Winkel K_1AK_2 ? Verschiebe K_1 und K_2 auf AK_1 und AK_2 um gleiche Strecken ($d_1 = 10$, $d_2 = 25$, $d_3 = 45$) und schlage um die erhaltenen Punkte mit $(r + d_1)$, $(r + d_2)$, $(r + d_3)$ die Kreise. Wie bewegt sich B , wenn k_1 und k_2 gleichmäßig wachsen? Welches ist die Potenzlinie für die beiden Schenkel eines Winkels? Welches ist die Potenzlinie für die Schenkel seines Nebenwinkels? Wie viele und welche Potenzlinien haben zwei einander schneidende Gerade? Desgl. zwei Parallele?

Ergebnis: Zusammenfassung B 6.

18. (22.) Bestimme den Potenzpunkt für k_1, k_2, P , wenn **a)** k_1k_2 einander und P ausschließen, **b)** k_1P ein-, k_2 ausschließt, **c)** k_1P aus-, k_2 einschließt, **d)** k_2P ausschließt, beide aber von k_1 eingeschlossen werden, **e)** P von k_2 und k_2 von k_1 eingeschlossen wird.

19. (23.) Bestimme den Potenzpunkt für k, P_1, P_2 , wenn P_1 und P_2 von k **a)** ausgeschlossen, **b)** eingeschlossen werden, **c)** wenn k P_1 ein-, P_2 ausschließt. ***d)** Welches ist der Potenzpunkt für P_1, P_2, P_3 ?

Ergebnis von d: Zusammenfassung B 9.

20. (48.) Bestimme den Potenzpunkt **a)** für einen Kreis und zwei Gerade, **b)** für einen Punkt und zwei Gerade, **c)** für die drei Mittellinien eines Dreiecks, ***d)** für die drei Seiten eines Dreiecks, **e)** für zwei parallele und eine sie schneidende Gerade. Ergebnis von d und e: Zusammenfassung B 10.

Die Potenzlinie als Ort.

- *21. (24.) (Berührung zweier Kreise.) k_1 und k_2 berühren einander in A ausschließend (einschließend); k_3 schneidet k_1 in C_1D_1 , k_2 in C_2D_2 . Welches ist der Potenzpunkt für k_1, k_2, k_3 ?

Konstruiere hiernach den Kreis, der k berührt und durch P_1 und P_2 **a)** außerhalb k , **b)** innerhalb k geht. Gegeben ist:

		a)		b)	
K		P_1	P_2	P_1	P_2
$x = 60$	$r = 21$	$x = 95$	105	62	69
$y = 41$		$y = 43$	25	35	47

22. (25.) k_1 wird von k_2 in P_2 , von k_3 in P_3 **a)** ausschließend, **b)** einschließend, **c)** ungleichartig berührt. Die durch die

Berührungspunkte gelegten Tangenten schneiden einander in M . Warum muß M auf der Potenzlinie von k_2 und k_3 liegen? Löse hiernach die Aufgabe XV, 67.

- 23.** (26.) (Halbierung eines Kreises durch einen anderen.) Welches ist die Potenzlinie zweier Kreise, von denen der eine den (Umfang des) anderen halbiert? Konstruiere (unter Benutzung eines Hilfskreises, wie in 21) den Kreis, der durch P_1 und P_2 geht und **a)** k halbiert, **b)** von k halbiert wird, **c)** k unter der Sehne s schneidet. Gegeben sind:

		I.		II.		III.	
K		P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2
a)	$\left. \begin{array}{l} x = 60 \\ y = 54 \end{array} \right\} r = 20$	$\left. \begin{array}{l} x = 90 \\ y = 67 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 115 \\ 36 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 51 \\ 53 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 90 \\ 67 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 51 \\ 53 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 70 \\ 65 \end{array} \right\}$
b)	$\left. \begin{array}{l} x = 70 \\ y = 42 \end{array} \right\} r = 32$	$\left. \begin{array}{l} x = 106 \\ y = 44 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 106 \\ 64 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 56 \\ 55 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 95 \\ 33 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 95 \\ 50 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 84 \\ 72 \end{array} \right\}$
c)	$\left. \begin{array}{l} x = 60 \\ y = 50 \end{array} \right\} \begin{array}{l} r = 30; \\ s = 48 \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} x = 104 \\ y = 65 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 120 \\ 28 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 65 \\ 27 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 70 \\ 56 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 104 \\ 65 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 65 \\ 27 \end{array} \right\}$

- *24.** (27.) k_3 wird von k_1 und von k_2 halbiert. Welches ist der Potenzpunkt für die drei Kreise? Welches ist der Ort für K_3 , wenn k_1 und k_2 gegeben sind? Konstruiere hiernach den Kreis, der von k_1 und k_2 halbiert wird und **a)** seinen Mittelpunkt auf g hat, **b)** durch P auf k_1 geht, **c)** den Halbmesser r hat, **d)** auch von k_3 halbiert wird.

Ergebnis: Zusammenfassung B 14.

- *25.** (28.) (Rechtwinkliger Schnitt zweier Kreise.) Lege von einem Punkte P der Potenzlinie zweier Kreise k_1 und k_2 an letztere die Tangenten PT_1 , PT_2 und schlage um P mit PT_1 den Kreis. In welcher Beziehung stehen die Linien K_1T_1 , K_2T_2 , PT_1 , PT_2 zu den vorhandenen Kreisen?

Ergebnis: Zusammenfassung B 13.

- 26.** (29.) Konstruiere den Kreis, der k_1 und k_2 rechtwinklig schneidet und **a)** den Halbmesser r hat, **b)** durch P auf k_1 geht, **c)** auch k_3 rechtwinklig schneidet, **d)** durch P außerhalb k_1 , **e)** durch P innerhalb k_1 geht. Gegeben sind:

		I.	II.	III.		
K_1	K_2	K_2	K_2			
$x = 55$	$\left. \begin{array}{l} 98 \\ 79 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 84 \\ 59 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 70 \\ 39 \end{array} \right\}$	a)	$r = 25$	d)
$y = 45$	$\left. \begin{array}{l} 98 \\ 79 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 84 \\ 59 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 70 \\ 39 \end{array} \right\}$	b)	$\left. \begin{array}{l} x = 55 \\ y = 75 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} x = 93 \\ y = 56 \end{array} \right\}$
$r_1 = 30$	$\left. \begin{array}{l} 98 \\ 79 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 84 \\ 59 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 70 \\ 39 \end{array} \right\}$	c)	$\left. \begin{array}{l} x = 89 \\ y = 57 \\ r_3 = 20 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 129 \\ 38 \\ 20 \end{array} \right\}$
	$r_2 = 12$			e)		$\left. \begin{array}{l} x = 69 \\ y = 37 \end{array} \right\}$

27. (46.) Konstruiere den Kreis, der k_1 , k_2 und g rechtwinklig schneidet, wenn

a) k_2 von k_1 ausgeschlossen } wird { I. g weder k_1 noch k_2 schneidet,
 b) k_2 von k_1 geschnitten } und { II. g nur k_1 schneidet,
 c) k_2 von k_1 eingeschlossen } III. g k_1 und k_2 schneidet.

Gegeben: a) b) c) I. II. III.
 für K_1 } K_2 K_2 K_2 { und für g } P_1 und P_2 P_2 P_2
 $x = 76$ } 133 109 82 { die Bestim- } $x = 148$ { 0 0 52
 $y = 32$ } 70 54 36 { mungs- } $y = 102$ { 43 5 0
 $r_1 = 30$ } $r_2 = 13$ { punkte }

28. (30.) Konstruiere den Kreis, der k_1 ($x = 50, y = 45, r_1 = 36$) rechtwinklig schneidet und a) k_2 in P berührt, b) g in P berührt, c) durch P_1 und P_2 geht. Gegeben sind:

a)	I.	II.	III.	IV.	V.
	$\overbrace{K_2 \quad P}$	$\overbrace{K_2 \quad P}$	$\overbrace{K_2 \quad P}$	$\overbrace{K_2 \quad P}$	$\overbrace{K_2 \quad P}$
$x = 138$	118	130 146	73 73	50 70	30 42
$y = 30$	30	62 74	67 87	45 45	45 61
$r_2 = 20$		20	20	20	20

b) für g der Richtungspunkt P_1 ($x = 86, y = 0$) und der Berührungspunkt P :
 c) P_1 ($x = 93, y = 56$) und P_2 :

	I.	II.	III.	IV.	V.		I.	II.
$x = 110$	72	86	86	50		$x = 118$	69	
$y = 70$	42	80	45	45		$y = 35$	43	

29. (31.) Konstruiere den Kreis, der durch P geht, k rechtwinklig schneidet und a) g berührt, b) g unter der Sehne s schneidet.

30. (32.) a) Konstruiere den Kreis mit dem Halbmesser r , an den sich von P_1 und P_2 die Tangenten t_1 und t_2 legen lassen. b) Bestimme den Punkt, dessen Entfernungen von P_1 und P_2 einander gleich und gleich der von ihm an k gelegten Tangente sind. c) Bestimme den Punkt, von dem aus an k_1 die Tangente t_1 und an k_2 und k_3 gleichlange Tangenten gelegt werden können.

31. (33.) Konstruiere den Kreis, dessen Potenzlinie mit k_1 die Gerade g_1 ist und der a) durch P geht, b) den Halbmesser r hat, c) g_2 berührt, d) k_2 berührt.

32. (34.) Konstruiere den Kreis, der von k_1 und k_2 halbiert wird und durch P geht.

33. (35.) Konstruiere den Kreis, der k_1 halbiert und a) g in P , b) k_2 in P berührt. (Benutze einen beliebigen Berührungskreis als Hilfskreis, wie in 21.)

- Fig. 47. **34.** (36.) Zeichne ein Kreisbündel mit der gemeinschaftlichen Sehne NS und ein zweites, welches das erste rechtwinklig schneidet. Erörtere die Beziehungen der entstandenen Figur, namentlich mit Rücksicht auf den Kreis, dessen Durchmesser NS ist, sowie auf die Kreise, deren Zentralen auf NS fallen. (Erdkarten.)

Ergebnis: Zusammenfassung A 5; B 11, 12.

Andere Potenzörter.

- ***35.** (37.) (Halbierung zweier Kreise durch einen dritten.) Ziehe in k (Halbmesser r) zwei Sehnen D_1M_1 , D_2M_2 , und schlage um ihre Mitten K_1 , K_2 mit $K_1D_1 = r_1$ und $K_2D_2 = r_2$ die Kreise. Bestimme nach Pythagoras die Größe der Quadrate über den Zentralen KK_2 und KK_1 , sowie ihren Unterschied. Welches ist der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Kreise halbieren? (XVI B, 1.)

Ergebnis: Zusammenfassung B 15.

- 36.** (38.) Konstruiere den Kreis, der k_1 und k_2 halbiert und **a)** den Halbmesser r hat, **b)** dessen Mittelpunkt von g den Abstand d , **c)** von k_3 den Abstand d hat, **d)** der durch P auf k_1 , **e)** durch P außerhalb k_1 , **f)** durch P innerhalb k_1 geht. Berücksichtige die möglichen Lagen von k_1 und k_2 , z. B.:

	I.	II.	III.	IV.	V.	
	K_1	K_2	K_2	K_2	K_2	
$x = 60$	}	122	96	80	56	57
$y = 43$		37	70	23	46	43
$r_1 = 25$				$r_2 = 20$		

Dazu:

a) $r = 42$;	b) $x = 100$	c) $x = 80$	d) $x = 45$	e) 120	f) 50
	$g \perp OX$	$y = 40$	$x = 63$	30	45
	$d = 10$	$r_3 = 18$	$y = 63$		
		$d = 6$			

- 37.** (39.) Konstruiere den Kreis, der $k_1k_2k_3$ halbiert (K_1 , K_2 , K_3 nach 14).

- 38.** (40.) Konstruiere den Kreis, der k halbiert und durch P_1 und P_2 **a)** außerhalb k , **b)** innerhalb k , **c)** auf verschiedenen Seiten von k geht. Gegeben sind:

		a)		b)		c)	
	K	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2
$x = 65$	}	$x = 100$	110	50	60	50	100
$y = 56$		$y = 24$	81	46	82	46	24

*39. (41.) (Halbierung eines Kreises und rechtwinkliger Schnitt eines zweiten.) Ziehe in k (Halbmesser r) eine Sehne D_1M_1 und lege an k eine Tangente T_2K_2 . Schlage den Kreis k_1 , dessen Durchmesser $D_1M_1 = 2r_1$, und den Kreis k_2 , dessen Halbmesser $K_2T_2 = r_2$ ist. Bestimme den Unterschied der Quadrate über KK_2 und KK_1 (vergl. 35).
Ergebnis: Zusammenfassung B 16.

40. (42.) Konstruiere den Kreis, der k_1 halbiert, k_2 rechtwinklig schneidet und **a)** den Halbmesser r hat, **b)** dessen Mittelpunkt von g den Abstand d , **c)** von k_3 den Abstand d hat, **d)** dessen Umfang durch P auf k_2 , **e)** durch P auf k_1 , **f)** durch P außerhalb k_1 , **g)** durch P innerhalb k_1 geht, **h)** k_3 rechtwinklig schneidet, **i)** k_3 halbiert.

Gegeben sind K_1 und K_2 I—III, wie in 36, ferner:

$$\begin{array}{rcc}
 & K_2 & \\
 \text{IV.} & \text{V.} & \\
 x = 51 & 53 & \left. \begin{array}{l} \text{a) } r = 42 \\ \text{b) } x = 80 \\ g \perp OX \\ r_2 = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{c) } \left. \begin{array}{l} x = 62 \\ y = 77 \\ r_3 = 21 \end{array} \right\} \text{e) } \\ \text{d) } = 5 & \text{f) } & \left. \begin{array}{l} x = 62 \\ y = 77 \\ r_3 = 21 \end{array} \right\} \text{g) } \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wie in} \\ 36 \text{ d. e. f.} \end{array}
 \end{array}$$

(Für d bleibt eine geeignete Wahl überlassen.)

41. (43.) Konstruiere den Kreis, der g berührt, k halbiert und durch P **a)** außerhalb k , **b)** innerhalb k geht. Gegeben sind:

$$\begin{array}{rcc}
 g & K & P_1 \quad P_2 \\
 \parallel OX & x = 40 & r = 20 \left\{ \begin{array}{l} x = 66 \\ y = 25 \end{array} \right. \begin{array}{l} 37 \\ 70 \end{array} \\
 y = 10 & y = 63 &
 \end{array}$$

42. (44.) Bestimme den Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die den einen von zwei Ringkreisen berühren und den anderen **a)** rechtwinklig schneiden, **b)** halbieren, **c)** von ihm halbiert werden.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

1/2. Die Potenz eines Punktes

innerhalb eines Kreises | außerhalb eines Kreises
ist

- a) das Quadrat über der durch ihn gezogenen halben kleinsten Sehne, | Tangente,
b) der Unterschied zwischen dem Quadrat seiner Zentrale und dem Quadrat des Halbmessers:

$$p^2 = (r^2 - c^2) \quad | \quad p^2 = (c^2 - r^2).$$

3. Die Potenzlinie zweier Kreise ist die Linie, deren sämtliche Punkte für beide Kreise gleiche Potenzen haben.
4. Der Potenzpunkt dreier Kreise ist der Punkt, welcher für die drei Kreise gleiche Potenzen hat. (Vergl. B 8.)
5. Ein Kreisbüschel ist die Gesamtheit der Kreise, die eine gemeinschaftliche Potenzlinie haben.

B. Lehrsätze.

1. Der Ort für alle Punkte, die für einen Kreis dieselbe innere (äußere) Potenz p^2 haben, ist der Ringkreis mit dem Halbmesser $\sqrt{r^2 + p^2}$. (4)
2. Der Ort für alle Punkte, die für zwei Kreise gleiche Potenzen haben, ist eine Gerade. Sie steht senkrecht auf der Centrale; ihr Durchschnittspunkt O mit der Centrale $K_1 K_2 = c$ ergibt sich aus

$$OK_1 - OK_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{c}. \quad (7)$$

- 3/7. Die Potenzlinie für:
 - zwei einander schneidende Kreise ist die gemeinschaftliche Sehne, (8)
 - zwei einander berührende Kreise ist die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte, (8)
 - einen Kreis und eine Gerade ist die Gerade selbst, (16)
 - zwei Gerade ist jede ihrer Winkelhalbierenden, (17)
 - zwei Punkte ist die Mittelsenkrechte ihrer Verbindungslinie. (15d)
8. Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden einander in einem Punkte. (12)
9. Der Potenzpunkt dreier Punkte ist der Umkreismittelpunkt des durch sie bestimmten Dreiecks. (19d)
10. Drei Gerade haben vier Potenzpunkte: die Mittelpunkte des Inkreises und der Ankreise des von ihnen gebildeten Dreiecks. (20d)
11. Wenn zwei Kreise einander weder schneiden noch berühren, so werden weder sie noch andere Kreise desselben Büschels von der Potenzlinie geschnitten oder berührt. (34)
12. Schneiden die Kreise zweier Büschel einander rechtwinklig, so ist die Centrale des einen Büschels Potenzlinie des anderen. (34)

13/16. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneiden, ist deren Potenzlinie; (25)

von zwei gegebenen Kreisen halbiert werden, ist deren Potenzlinie; (24)

zwei gegebene Kreise halbieren, ist die Senkrechte auf der Centrale, die der Potenzlinie in Bezug auf die Mitte der Centrale zentrisch zugeordnet ist;

$$OK_1 - OK_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{c}; \quad (35)$$

den einen von zwei gegebenen Kreisen rechtwinklig schneiden, den anderen halbieren, ist je eine Senkrechte auf der Centrale;

$$OK_1 - OK_2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{c}; \quad OK_2 - OK_1 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{c}. \quad (39)$$

17. (Regel.) Soll man für zwei einander weder schneidende noch berührende Kreise die Potenzlinie bestimmen, so sucht man zunächst den Potenzpunkt für die gegebenen und einen Hilfskreis, der die gegebenen beide schneidet, oder den einen berührt, den anderen schneidet. (12, 13)

XVIII. (XVII.) Harmonische Punkte und Strahlen.

Harmonische Punkte.

*1. (Harmonische Teilung.) Teile eine Strecke AB harmonisch¹⁾ im Verhältnis **a)** $5:2$, **b)** $5:3$, **c)** $3:1$, **d)** $2:7$, **e)** $1:4$, **f)** $m:n$, **g)** $n:m$ (XI, Aufg. 28).

*2. (Zugeordnete Punkte.) Gib auf AB einen Punkt C an, und bestimme den zugeordneten Teilpunkt. C möge liegen: **a)** zwischen A und der Mitte von AB , **b)** zwischen B und der Mitte von AB , **c)** auf der Verlängerung von AB , **d)** auf der Verlängerung von BA .

Ergebnis: Zusammenfassung A 3; B 1.

*3. Wo liegen die harmonischen Teilpunkte, deren Teilverhältnis ein echter — ein unechter — Bruch ist? Wie bewegt sich der äußere Teilpunkt, wenn der innere vom Anfangspunkt

1) Die Einführung des Vorzeichens bleibt dem Lehrer überlassen; notwendig ist sie vorläufig noch nicht.

nach der Mitte und wenn er von der Mitte nach dem Endpunkt fortrückt? Welcher Punkt ist der Mitte einer Strecke harmonisch zugeordnet?

Ergebnis: Zusammenfassung B 2.

4. AB sei 48 mm lang. Berechne die Lage der harmonischen Teilpunkte für das Teilverhältnis **a)** $\frac{7}{5}$, **b)** $\frac{11}{5}$, **c)** $\frac{19}{5}$, **d)** 5, **e)** $\frac{5}{7}$, **f)** $\frac{1}{2}$, **g)** $\frac{7}{17}$.
5. Teile $AB = a$ harmonisch so, daß ein innerer Abschnitt **a)** gleich einem äußeren, **b)** gleich der Hälfte des ihm entsprechenden äußeren, **c)** gleich der Hälfte des ihm nicht entsprechenden äußeren wird, **d)** daß die Summe eines inneren und des ihm nicht entsprechenden äußeren sich zum zweiten inneren verhält wie $m : n$ ($5 : 1$), **e)** daß der innere Teilpunkt AB stetig teilt. **f)** Trage auf g die Strecken a , b so ab, daß a durch b harmonisch geteilt wird.
- *6. $AB = 2a$ sei in M halbiert und in C und D im Verhältnis $p : q$ harmonisch geteilt. Berechne MC , MD , sowie das Rechteck aus diesen Strecken.
Ergebnis: Zusammenfassung B 3.
7. Verwandle ein gegebenes Quadrat (Seite a) in ein Rechteck mit der Seite c , wenn **a)** $c < \frac{1}{2}a$, **b)** $c > \frac{1}{2}a$.
- *8. (Harmonische Punktpaare.) AB sei durch C und D im Verhältnis $m : n$ harmonisch geteilt. Berechne das Verhältnis, in welchem CD durch A und durch B geteilt wird.
Ergebnis: Zusammenfassung A 1; B 4.

Harmonische Vierstrahlen.

- *9. (Zugeordnete Strahlen.) Ziehe durch drei Punkte ABC einer Punktreihe (XI A, 8) von einem Punkte S aus Strahlen, und bestimme den vierten Strahl, der SB harmonisch zugeordnet ist. Warum ist er eindeutig bestimmt?
Ergebnis: Zusammenfassung A 2, 3; B 1.
- *10. (Die Mittellinie als harmonischer Strahl.) Zwei Seiten eines Dreiecks und die Mittellinie der dritten bilden einen Dreistrahl. Welche Linie ist der Mittellinie harmonisch zugeordnet? (Vergl. B 2.) Bestimme hiernach den Strahl, der **a)** dem inneren, **b)** einem äußeren von drei gegebenen Strahlen harmonisch zugeordnet ist. Wie wird jede Parallele zu einem harmonischen Strahl durch den zugeordneten geteilt? (XI B, 5b.)
Ergebnis: Zusammenfassung B 6, 9a.

- * 11. (Die Winkelhalbierenden als harmonische Strahlen.) Welche Linie ist der Halbierungslinie eines Winkels harmonisch zugeordnet? (XII B, 3.) In welchem Falle stehen **a)** zwei zugeordnete Strahlen, **b)** je zwei zugeordnete Strahlen aufeinander senkrecht? (II B, 3.)
Ergebnis: Zusammenfassung B 5, 8a, 9b.
- * 12. (Teilung einer Geraden durch einen harmonischen Vierstrahl.) *S* ($s_1 s_2 s_3 s_4$) sei ein harmonischer Vierstrahl, *g* eine beliebige Gerade. Wenn nun $P_2 P_4 \parallel s_1$ gezogen wird: warum ist dann $M_3 P_2 = M_3 P_4$? (Vergl. B 6.) Welche Abschnitte von *g* verhalten sich wie $M_3 P_2 : M_1 S$, welche wie $M_3 P_4 : M_1 S$? Welche Verhältnisgleichung findet auf *g* statt?
Ergebnis: Zusammenfassung B 7.
13. Beweise den in 12 gefundenen Satz mittelst der Parallelen: **a)** durch M_2 zu s_4 , **b)** durch M_1 zu s_3 , **c)** durch M_4 zu s_2 .
14. Beweise, daß harmonisch geteilt wird: **a)** die Halbierungslinie eines Innenwinkels im Dreieck durch die Mittelpunkte des In- und des zugehörigen Ankreises, **b)** die Halbierungslinie eines Außenwinkels durch ?, **c)** die Strecke einer Dreiecksseite zwischen den Berührungspunkten des In- und des zugehörigen Ankreises durch die Fußpunkte der Höhe und der Winkelhalbierenden, **d)** die Strecke einer Dreiecksseite zwischen den Berührungspunkten der nicht zugehörigen Ankreise durch ?, **e)** eine Sehne, wenn man die Endpunkte des auf ihr senkrecht stehenden Durchmessers mit einem Punkte des Umfangs verbindet, **f)** ein Durchmesser, wenn man die Endpunkte einer auf ihm senkrecht stehenden Sehne mit einem Punkte des Umfangs verbindet, **g)** ein Durchmesser, wenn man senkrecht zu ihm eine Sehne und durch den einen Endpunkt derselben die Tangente zieht, **h)** jeder Durchmesser des einen von zwei einander rechtwinklig schneidenden Kreisen durch den Umfang des anderen, **i)** eine Tangente durch zwei andere Tangenten, deren Berührungssehne und ihren eigenen Berührungspunkt. **k)** Beweise, daß die im Scheitel eines harmonischen Vierstrahls errichteten Senkrechten wieder einen harmonischen Vierstrahl bilden.

Der Satz des Menelaus.

15. Gegeben ist eine Strecke *AB* und außerhalb derselben *P*. Ziehe durch *P* die Gerade, deren Abstände von *A* und *B* sich verhalten wie **a)** 5 : 3, **b)** 7 : 2, **c)** 3 : 4, **d)** $m : n$.

16. Gegeben ist $\triangle ABC$. Ziehe die Gerade, die BC im Verhältnis $2 : 3$, CA im Verhältnis $3 : 5$ teilt, und zwar **a)** beide innen, **b)** beide außen, **c)** BC innen, CA außen, **d)** BC außen, CA innen. In welchem laufenden Verhältnis stehen die Abstände der Ecken von den einzelnen Transversalen? Wie und in welchem Verhältnis teilen sie die Seite AB ?¹⁾

- Fig. 49. *17. (Satz des Menelaus.) Die Verhältnisse, in denen die Dreiecksseiten CA und AB von der (beliebig gezogenen) Transversale g geteilt werden, seien $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{m}{n}$, $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{p}{q}$. Welchen Wert hat das Teilverhältnis der dritten Seite? Wie groß ist das Produkt der drei aufeinanderfolgenden Teilverhältnisse $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A}$?
Ergebnis: Zusammenfassung A 4; B 10.

- Fig. 50. 18. Beweise den Satz des Menelaus für eine Transversale, welche teilt: **a)** AB und CA außen (Fig. 50); **b)** AB außen, CA innen; **c)** AB innen, CA außen.

19. Eine Transversale L_1O_1 teilt zwei Seiten des Dreiecks ODL so, daß **a)** **b)** **c)** **d)** **e)** **f)** **g)** **h)**
- | | | | | | | | | |
|-----------------------|---------------|---------------|---------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|---------------|
| $\frac{OL_1}{L_1D} =$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{8}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | $\frac{14}{15}$ | $\frac{8}{9}$ | 2 | $\frac{p}{q}$ | $\frac{p}{q}$ |
| $\frac{DO_1}{O_1L} =$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{10}{7}$ | $\frac{15}{16}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{x}{y}$ | $\frac{q}{x}$ |

Welches ist das Teilverhältnis von LO ? — Inwiefern ist XIII B, 1 ein Sonderfall des Satzes des Menelaus?

20. Wie lang ist in Figur 49 der Abschnitt A_1B , wenn

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$CB_1 =$	95	68	36,5	123	38	72,8	a
$B_1A =$	44	78	20,3	92	115	147,5	b
$AC_1 =$	55	65	31,1	148	46	93,2	c
$C_1B =$	57	51	14,6	87	95	83,4	d
$BC =$	100	124	49,7	105	75	57,6	e

(Berechnung der Entfernung eines unzugänglichen Punktes.)

Der Satz des Ceva.

- Fig. 51. *21. Im Dreieck ABC sind durch einen Punkt O drei Ecktransversalen AA_1 , BB_1 , CC_1 gezogen. Wende den


1) Vergl. Ann. Seite 121.

Satz des Menelaus auf $\triangle ABA_1$ (Transversale C_1C) und $\triangle AA_1C$ (Transversale BB_1) an, und multipliziere die erhaltenen Gleichungen.

Ergebnis: Zusammenfassung A 5; B 11.

22. Beweise den Satz des Ceva unter Benutzung der Dreiecke **a)** BCB_1 und BB_1A , **b)** CAC_1 , CC_1B ; **c)** für den Fall, daß O auf der Verlängerung von AA_1 , **d)** von BB_1 , **e)** von A_1A , **f)** von C_1C liegt.
23. Bestimme auf der gegebenen Ecktransversalen AA_1 des Dreiecks ABC den Punkt O so, daß die beiden anderen Ecktransversalen auf den zugehörigen Seiten **a)** gleiche obere, **b)** gleiche untere Abschnitte liefern, **c)** daß der eine obere Abschnitt das Doppelte, **d)** das n -fache des anderen oberen Abschnitts ist, **e)** daß der obere Abschnitt der einen Seite gleich dem unteren der anderen wird.
- *24. Beweise die Umkehrung **a)** des Satzes des Menelaus, **b)** des Satzes des Ceva. (Vergl. XI B, 2.)
Ergebnis: Zusammenfassung B 12.
25. Beweise nach Menelaus, daß auf einer Geraden liegen: **a)** die Fußpunkte der Halbierungslinien der Außenwinkel eines Dreiecks, **b)** die Fußpunkte der Halbierungslinien zweier Innenwinkel und des nichtzugehörigen Außenwinkels, **c)** die Fußpunkte der von einem Punkte des Umkreises auf die Seiten gefällten Lote. (Vergl. VIII, Aufg. 26.)
26. Beweise nach Ceva, daß folgende Dreieckslinien einander in einem Punkte schneiden: **a)** die Mittellinien, **b)** die Winkelhalbierenden, **c)** die Halbierungslinien zweier Außenwinkel mit der des dritten Innenwinkels, **d)** die Höhen (berechne nach XV B, 7 die sechs Projektionen), **e)** die drei Mittelsenkrechten (benutze das Dreieck der Seitenmitten), **f)** die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten des Inkreises, **g)** je eines Ankreises, ***h)** der drei Ankreise mit den (nicht verlängerten) Seiten, **i)** die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Verbindungslinien der Endpunkte der Hypotenuse und der Ecken der gegenüberliegenden Kathetenquadrate.
Ergebnis von h: Zusammenfassung B 13.

Das Vierseit.

- *27. (Satz vom Vierseit.) Verlängere die Gegenseiten eines Vierecks $ABCD$ bis zu den Schnittpunkten E und F , und ziehe in dem entstandenen Vierseit die Diagonalen AC ,  Fig. 52.

BD, EF ; ihre Schnittpunkte seien G, H, J . Welchen Wert haben die Produkte

$$\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EH}{HF} \cdot \frac{FD}{DA} \quad \text{und} \quad \frac{AB}{BE} \cdot \frac{EJ}{JF} \cdot \frac{FD}{DA},$$

(nach Menelaus) (nach Ceva)

und was folgt aus der Gleichsetzung beider?

Ergebnis: Zusammenfassung A 6; B 8b, 9d.

28. Beweise den Satz vom Vierseit mittels folgender Dreiecke:

a) $\triangle ABC$ (Seitentransversale EH , Ecktransversalen AD, BD, CD)

b) $\triangle ABD$ d) ACE f) BCD h) BDF k) CEF

c) $\triangle ACD$ e) ACF g) BDE i) BEF l) DEF

29. Welches sind in Fig. 52 die Nebenecken und welches die Diagonalen des Vierseits, das entsteht aus dem Viereck

a) $BEFD$, b) $CJFD$, c) $BEJC$, d) $ACBD$, e) $ABDC$, f) $BEDF$, g) $BFED$, h) $BEJC$, i) $BJEC$?

30. Beweise, daß jede Seite eines Dreiecks durch ihre Höhe und die Verbindungslinie der beiden anderen Höhenfußpunkte harmonisch geteilt wird: a) für ein spitzwinkliges, b) für ein stumpfwinkliges, c) für ein rechtwinkliges, d) für ein gleichschenkliges Dreieck.

31. Gegeben sind drei Punkte einer Geraden, z. B. (Fig. 52):

I.	II.	III.	IV.	V.
a) BGH	EJH	AGJ	ECD	FCB
b) BGD	EJF	AGC	ECD	FCB
c) BDH	EFH	ACJ	ABE	ADF

Bestimme nur mit Hilfe des Lineals denjenigen Punkt, der a) dem ersten, b) dem zweiten, c) dem dritten harmonisch zugeordnet ist.¹⁾

32. Gegeben sind drei Strahlen eines Büschels, z. B. (Fig. 52):

I.	II.	III.	IV.	V.
a) $A(bgh)$	$C(abe)$	$D(bcf)$	$E(hdb)$	$F(ica)$
b) $A(bgd)$	$B(adf)$	$C(eif)$	$D(abe)$	$F(iceg)$
c) $A(bdh)$	$B(ced)$	$D(efh)$	$F(abe)$	$C(fda)$

Ziehe den Strahl, der a) dem ersten, b) dem zweiten, c) dem dritten harmonisch zugeordnet ist.

1) Zu weiterer Übung kann hier XII, Aufg. 7/8 wiederholt werden.

- 33.** Ziehe **a)** von einer Ecke eines Vierecks die Transversale, die durch die Ecke, ihre Gegendiagonale und die beiden Gegenseiten, **b)** von einem Punkte einer Seite aus die Transversale, die durch die vier Seiten harmonisch geteilt wird.
- 34.** **a)** Ziehe nur mit Hilfe des Lineals zu einer in J halbierten Strecke EF durch B die Parallele. **b)** Bestimme einen Punkt (H) auf der Verlängerung einer Strecke (EF), ohne an diese das Lineal anzulegen. **c)** Ziehe von einem gegebenen Punkte aus die Gerade in der Richtung auf den unzugänglichen Schnittpunkt zweier gegebenen Geraden.
- 35.** Zur Konstruktion eines Vierseits sind gegeben: **a)** eine Hauptecke und die drei Nebenecken, **b)** zwei benachbarte Hauptecken und die beiden mit ihnen nicht auf derselben Seite liegenden Nebenecken, **c)** eine Hauptecke, zwei Nebenecken und die durch eine zweite Hauptecke und die dritte Nebenecke gehende Gerade.

Der Satz des Pascal.

- * **36.** Zeichne in k ($x = 90, y = 125, r = 20$) von A ($x = 90, y = 145$) aus ein Sehnensechseck ($AB = a = 30, b = 20, c = 21, d = 18, e = 11$), und verlängere jede Seite, bis sie alle anderen geschnitten hat. a schneide c, d, e in G, H, J ; b schneide d, e, f in L, M, N ; c schneide e, f in O, P ; d schneide f in Q . Welches Dreieck wird von a, c, e gebildet? Welche Transversalen hat es? Bilde unter genauer Beibehaltung der eingeschlagenen Richtung für jede dieser drei Transversalen die Gleichung des Menelaus, multipliziere die erhaltenen Gleichungen und kürze den erhaltenen Bruch durch die Potenzen von G, J, O . Was folgt aus der verbleibenden Gleichung für die Lage der Punkte HPM ?
Ergebnis: Zusammenfassung B 14.
- 37.** Beweise den Pascalschen Satz **a)** mittels des Dreiecks aus $bd f$ und seiner Transversalen, **b)** für ein einfach überschlagenes, **c)** für ein mehrfach überschlagenes Sechseck (vergl. A 7).
- 38.** Was wird in der Figur zu 36 aus der verlängerten Sehne f , wenn A und F unendlich nahe aneinander rücken? Beweise, daß ein Sehnenfünfeck fünf Pascalsche Gerade besitzt. ($K: x = 80, y = 114, r = 11$; $A: x = 80, y = 125, a = 20, b = 12, c = 8, d = 6$.)
- 39.** Lege an k in P nur mit Hilfe des Lineals die Tangente.

- * 40. (Beziehungen zwischen Sehnen- und Tangentenviereck.) Zeichne in k ($x = 136$, $y = 75$, $r = 24$) von A aus ($x = 160$, $y = 75$) ein Sehnenviereck $ABCD$ ($a = 45$, $b = 24$, $c = 31$), und lege in seinen Ecken an k die Tangenten $a_1 b_1 c_1 d_1$; sie bilden das Tangentenviereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ ($a_1 \times b_1 = A_1^1$) u. s. w.) Vervollständige beide Vierecke zu Vierseiten ($a \times c = E$, $b \times d = F$, $a_1 \times c_1 = E_1$, $b_1 \times d_1 = F_1$), und wende den Pascalschen Satz auf die Sehnensechsecke aus $ab_1 b c d_1 d$ und $a_1 a b c_1 c d$ an.
Ergebnis: Zusammenfassung B 16.

- * 41. a) Betrachte in der Figur zu 40 das Sehnenviereck als ein überschlagenes mit der Eckenfolge $ACBD$ ($AC = e$, $BD = f$, $e \times f = O$), und wende den Pascalschen Satz auf die Sehnensechsecke aus $ec_1 b f d_1 d$ und $a_1 e b b_1 f d$ an. b) Beweise ebenso, daß $B_1 D_1 E O$ auf einer Geraden liegen. Was folgt daraus für die Diagonalschnittpunkte des Sehnen- und des Tangentenvierecks?
Ergebnis: Zusammenfassung B 16, 17.

42. Wende den Satz des Pascal auf ein Sehnen- und sein Tangendendreieck an.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

1. Die Endpunkte und die Teilpunkte einer harmonisch geteilten Strecke bilden eine Gruppe von vier harmonischen Punkten — vergl. B 4.
2. Ein durch vier harmonische Punkte gehender Vierstrahl heißt ein harmonischer Vierstrahl.
3. Von vier harmonischen Punkten (Strahlen) sind immer je zwei getrennt liegende einander zugeordnet — vergl. B 4.
4. Jede Gerade, die mit den (nötigenfalls verlängerten) Seiten eines Dreiecks zum Durchschnitt gebracht wird, heißt Transversale.
5. Eine Ecktransversale ist eine Transversale, die durch eine Ecke eines Dreiecks geht, z. B. sind Höhen, Winkelhalbierende und Mittellinien Ecktransversalen.
6. Ein Vierseit entsteht, wenn alle Seiten eines (einfachen oder überschlagenen) Vierecks bis zum Durchschnitt

1) lies: „ a_1 und b_1 schneiden einander in A_1 “.

verlängert und alle Ecken verbunden werden; es hat 4 Hauptecken, 3 Nebenecken und 3 Diagonalen.

7. Ein Vieleck heißt einfach oder mehrfach überschlagen, wenn ein oder mehrere Paare von Gegenseiten einander schneiden.

B. Lehrsätze.

1. Durch drei Punkte (Strahlen) ist der jedem einzelnen von ihnen harmonisch zugeordnete vierte eindeutig bestimmt. (2, 9)
2. Der Mitte einer Strecke ist ihr unendlich ferner Punkt harmonisch zugeordnet. (3)
3. Die Hälfte einer harmonisch geteilten Strecke ist mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen der Mitte von den harmonischen Teilpunkten. (6)
4. Wenn AC durch B, D harmonisch geteilt ist $\left(\frac{m}{n}\right)$, so ist auch BD durch A, C harmonisch geteilt $\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$. (8)
5. Halbiert der eine von vier harmonischen Strahlen den Winkel der beiden ihm nicht zugeordneten, so halbiert der zugeordnete den Nebenwinkel. Vergl. auch II B, 3. (11)
6. Ist eine Gerade einem von vier harmonischen Strahlen parallel, so wird ihre von den beiden nicht zugeordneten Strahlen begrenzte Strecke durch den zugeordneten Strahl halbiert. (10)
7. Ein harmonischer Vierstrahl teilt jede ihn (oder seine Gegenstrahlen) schneidende Gerade harmonisch. (12)
8. Harmonische Gruppen bilden (siehe auch XIX, Aufg. 21):
 - a) die Endpunkte einer Dreiecksseite und die Fußpunkte der Halbierungslinien des Gegenwinkels und seines Außenwinkels, (11)
 - b) die Endpunkte einer Vierseitsdiagonale und die Punkte, in denen sie von den beiden anderen geschnitten wird. (27)
9. Einen harmonischen Vierstrahl bilden (siehe auch XIX, Aufg. 21):
 - a) zwei Seiten eines Dreiecks, die Mittellinie und die Parallele zur dritten, (10)
 - b) zwei Gerade und ihre Winkelhalbierenden, (11)

- c) die im Scheitel eines harmonischen Vierstrahls errichteten Senkrechten, (14k)
- d) je zwei Seiten eines Vierseits und die von ihrem Schnittpunkte ausgehenden Ecktransversalen seines Diagonalendreiecks. (27)
- 10/11. Satz des Menelaus: Jede Dreieckstransversale schneidet
- | |
|--|
| Satz des Ceva: Je drei durch einen Punkt gehende Ecktransversalen eines Dreiecks schneiden |
|--|
- die Seiten so, daß das Produkt der Teilverhältnisse der Seiten gleich 1 ist. (17, 21)
12. Umkehrung: Findet man auf den drei Seiten eines Dreiecks oder ihren Verlängerungen drei Punkte von der Eigenschaft, daß das Produkt ihrer Teilverhältnisse gleich 1 ist, so liegen entweder die drei Punkte auf einer Geraden oder ihre Ecktransversalen gehen durch einen Punkt, je nachdem die äußeren oder die inneren Teilverhältnisse in ungerader Zahl vorhanden sind. (24)
13. Die Ecktransversalen eines Dreiecks nach den inneren Berührungspunkten der Ankreise schneiden einander in einem Punkte (fünfter merkwürdiger Punkt des Dreiecks). (26)
14. Satz des Pascal: Die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten eines (einfachen oder überschlagenen) Sehnensechsecks liegen auf einer Geraden. (Vergl. XIX B, 12.) (36)
15. Der Pascalsche Satz gilt auch für Sehnenfünfecke, -Vierecke und -Dreiecke, wenn man die fehlenden Seiten durch die Tangenten in den als Doppelpunkte auftretenden Ecken ersetzt. (38—42)
16. Je zwei Nebenecken eines Sehnenvierecks liegen mit zwei Haupt- oder mit zwei Nebenecken des zugehörigen Tangentenvierecks auf einer Geraden. (40—41)
17. Der Diagonalenschnittpunkt eines Sehnenvierecks fällt mit dem Diagonalenschnittpunkt des zugehörigen Tangentenvierecks zusammen. (41)

XIX. (XVIII.) Pole und Polaren.

Die Polare eines Punktes und der Pol einer Geraden.

- *1. (Die Polare als Ort.) Von einem Punkte P auf der Verlängerung eines Durchmessers AB ist eine Sehne CD gezogen; das Viereck $ABCD$ ist zum Vierseit ergänzt. Welche Punkte bilden harmonische Gruppen? Warum ist $EG \perp AB$? (VIII B, 4.) Wie bewegt sich H , wenn CD um P gedreht wird? (XVIII B, 1.) Grenzfall?
 Ergebnis: Zusammenfassung A 1, 2; B 1—4. Fig. 53
2. a) Konstruiere die Polare von P ohne Benutzung des Durchmessers mittels zweier beliebigen Sehnen des Büschels P .
 b) Ziehe nur mit Hilfe des Lineals von P an k die Tangente. Fig. 54
3. Wiederhole die Aufgabe 1 für einen Pol P innerhalb k .
- *4. (Sonderfälle.) Welches sind a) die Polaren der Ecken eines Tangentenvierecks, b) die Pole der Seiten eines Sehnenvierecks, c) die Pole seiner Diagonalen? Welches ist d) der Pol einer Tangente, e) eines Durchmessers, f) die Polare eines Punktes auf dem Umfang, g) des Mittelpunktes?
 Ergebnis: Zusammenfassung B 5—6.
- *5. (Grenzfälle.) Wie bewegt sich die Polare eines Punktes a) außerhalb, b) innerhalb des Kreises, wenn sein Abstand vom Umfang unverändert bleibt, der Halbmesser aber ab- oder zunimmt? Welches ist c) die Polare eines Punktes, d) der Pol einer Geraden } in Bezug auf { I. einen Punkt, II. eine Gerade?
 Ergebnis: Zusammenfassung B 7—8.
6. Konstruiere den Kreis, zu welchem P und p Pol und Polare sind und der a) durch P_1 auf p , b) durch P_1 zwischen P und p , c) durch P_1 jenseit p , d) durch P_1 jenseit P geht, e) den Halbmesser r hat.
7. Bestimme für k den Pol, dessen Polare die Zentrale des Pols a) halbiert, b) im Verhältnis $4:5$ ($m:n$), c) nach dem goldenen Schnitt teilt.

Die Polaren einer Punktreihe und die Pole eines Büschels.

- *8. (Die Polaren einer Punktreihe.) Gegeben sind k , eine Sehne s und ihr Pol S . Verbinde die Punktreihe $P_1 P_2 P_3 \dots$,

deren Träger s ist, mit S , und nenne die dadurch entstehenden Sehnen $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 \dots$. Welche Punkte bilden harmonische Gruppen? Durch welchen Punkt müssen die Polaren von $P_1P_2P_3 \dots$ gehen?

Ergebnis: Zusammenfassung B 9, 18—19.

9. Beweise, daß auch die Polaren einer außerhalb k liegenden Punktreihe einander im Pol ihres Trägers schneiden.
- *10. (Die Pole eines Büschels.) a) Welches ist der Ort für die Pole eines Büschels (nach 8 und 9)? b) Wie findet man die Polare eines Punktes, wenn man die Pole zweier seiner Strahlen kennt? c) Wie findet man den Pol einer Geraden, wenn man die Polaren zweier ihrer Punkte kennt? Ergebnis: Zusammenfassung B 10, 16—17.
11. Bestimme nur mit Hilfe des Lineals den Pol einer gegebenen Geraden, die a) k schneidet, b) k nicht schneidet.

Polare Beziehungen zwischen Sehnen- und Tangentenviereck.

12. Bestimme in der Figur zu XVIII, Aufg. 40 a) die Pole von a und c und daraus die Polare von $a \times c = E$, ebenso die Polare von b) F , c) E_1 , d) F_1 . Inwiefern ergibt sich hierdurch eine Bestätigung von XVIII B, 17?
13. Bestimme in der Figur zu XVIII, Aufg. 40 die Polaren der Punkte:
- | | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| a) $a \times c_1$ | e) $b \times a_1$ | i) $c \times a_1$ | n) $d \times b_1$ | r) $e \times b_1$ |
| b) $a \times d_1$ | f) $b \times d_1$ | k) $c \times b_1$ | o) $d \times c_1$ | s) $e \times d_1$ |
| c) $a \times e_1$ | g) $b \times e_1$ | l) $c \times e_1$ | p) $d \times e_1$ | t) $f \times a_1$ |
| d) $a \times f_1$ | h) $b \times f_1$ | m) $c \times f_1$ | q) $d \times f_1$ | u) $f \times c_1$ |
14. Bestimme in der Figur zu XVIII, Aufg. 40 die Pole der Geraden:
- | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| a) AB_1 | d) BC_1 | g) CA_1 | k) DA_1 | n) EA_1 | q) ED_1 |
| b) AC_1 | e) BD_1 | h) CD_1 | l) DB_1 | o) EB_1 | r) FA_1 |
| c) AF_1 | f) BE_1 | i) CF_1 | m) DE_1 | p) EC_1 | s) FB_1 |
| | t) FC_1 | u) FD_1 | v) EF | | |
- *15. (Das Polardreieck.) Welches sind in der Figur zu XVIII, Aufg. 40/41 die Polaren von E, F, O ? Welches sind die Pole von EO, OF, FE ? Welche Eigenschaften hat $\triangle EFO$? Ergebnis: Zusammenfassung B 11.

Der Satz des Brianchon.

- *16. Lege an k in $ABCDEF$ (Zeichnung nach XVIII, Aufg. 36) die Tangenten; sie bilden das Tangentensechseck $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

Ziehe ferner die Pascalsche Gerade des zugehörigen Sehnensechsecks A/F , und bestimme die Polaren der drei Pascalschen Punkte.

Ergebnis: Zusammenfassung B 12.

17. Beweise den Satz des Brianchon für ein Tangentensechseck, wenn das zugehörige Sehnensechseck **a)** einfach, **b)** mehrfach überschlagen ist.
18. Was wird aus dem Tangentensechseck A_1/F_1 , wenn $\angle F_1 = 180^\circ$? Wohin fällt F_1 ? Wieviel Brianchonsche Punkte besitzt ein Tangentenfünfeck?
19. Wende den Satz des Brianchon auf ein Tangentenviereck an, und beweise hiernach XVIII B, 17.
20. Erörtere ein Tangentendreieck nach Brianchon.

Polare Figuren.

- * 21. Beweise, **a)** daß die Polaren von vier harmonischen Punkten einen harmonischen Vierstrahl bilden (XVIII B, 9c), **b)** daß die Pole eines harmonischen Vierstrahls eine harmonische Gruppe bilden.
22. (21.) Zeichne ein Dreieck ABC und einen Kreis, der **a)** das Dreieck ausschließt, **b)** einschließt, **c)** eine Ecke einschließt, **d)** zwei Ecken einschließt. Zeichne zu ABC die Polaren $a_1 b_1 c_1$, und bestimme die Pole $A_1 B_1 C_1$ der Seiten abc des Dreiecks ABC . Ziehe ferner eine Transversale, die abc in D, E, F teilt, und zwar I. a außen, b und c innen; II. a, b und c außen. Welche Linien der Polarfigur entsprechen den Teilpunkten D, E, F ? Welches ist die Polarfigur der Polarfigur? Wie folgt hiernach der Satz des Ceva aus dem des Menelaus?

Zur Zeichnung:	a)	b)	c)	d)	I.	II.	
A	B	C	K	K	K	K	
$x =$	56	38	80	96	61	32	81
$y =$	126	95	95	50	105	130	120
$r =$				30	30	30	30
							$\left. \begin{array}{l} \overline{BD} \\ \overline{DC} \\ \overline{CE} \\ \overline{EA} \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \frac{10}{3} \\ = \frac{5}{8} \end{array}$

Ergebnis: Zusammenfassung A 3, 4.

Beziehungen zwischen Polaren und Potenzlinien.

- * 23. (22.) (Der Pol einer Potenzlinie.) k_1 wird von k_2 in P_2 , von k_3 in P_3 berührt; die Tangenten in den Berührungspunkten schneiden einander in M . Welches ist die Potenzlinie

von k_2 und k_3 ? Welches ist in Bezug auf k_1 die Polare von M ? Bestimme durch diese Polare den Pol der Potenzlinie. Ergebnis: Zusammenfassung B 14.

24. (23.) k_1 und k_2 schneiden einander rechtwinklig. **a)** Welches ist die Polare von K_1 in Bezug auf k_2 , **b)** von K_2 in Bezug auf k_1 ? **c)** Welches ist der Pol der Potenzlinie in Bezug auf k_1 , **d)** in Bezug auf k_2 ?
25. (24.) k_1 wird von k_2 und von k_3 rechtwinklig geschnitten. Welches ist in Bezug auf k_1 die Polare des Potenzpunktes? Ergebnis: Zusammenfassung B 15.
26. (25.) k_1 wird von k_2 und von k_3 rechtwinklig geschnitten. **a)** Bestimme für einen Punkt A auf k_1 die Polaren in Bezug auf k_2 und k_3 , und beweise, daß ihr Schnittpunkt auf k_1 und zwar auf dem von A aus gezogenen Durchmesser liegt (XVIII, Aufg. 14h). Bestimme hiernach **b)** auf g , **c)** auf k den Punkt P so, daß die ihm an k_1, k_2, k_3 zugeordneten Polaren einander in einem Punkte schneiden.

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

1. Zwei Punkte, die einen Kreisdurchmesser harmonisch teilen, heißen Pole des Kreises.
2. Die in einem Pol auf dem Durchmesser errichtete Senkrechte heißt Polare des anderen Pols.
3. Polare Vielecke sind zwei Vielecke, von denen jede Seite des einen Polare einer Ecke des anderen, jede Ecke des einen Pol einer Seite des anderen ist.
4. In polaren Vielecken ist jeder Transversalen des einen (als Polaren) ein Punkt (innerhalb oder außerhalb) des anderen als Pol zugeordnet.

B. Lehrsätze.

- | | |
|--|--|
| <p>1/2. Die Polare teilt jede durch den Pol gezogene Sehne harmonisch. (1)</p> | <p>Der Ort für den vierten harmonischen Punkt eines Sehnenbüschels ist die Polare seines Scheitels. (1)</p> |
| <p>3/4. Die Polare des Schnittpunktes zweier Tangenten ist ihre Berührungssehne. (1)</p> | <p>Der Pol einer Sehne ist der Schnittpunkt der in ihren Endpunkten an den Kreis gelegten Tangenten. (1)</p> |

- 5/6. Die Polare | Der Pol
 a) eines Punktes auf | a) einer Tangente ist ihr
 dem Umfang ist | Berührungspunkt.
 seine Tangente,
 b) des Mittelpunktes | b) eines Durchmessers
 liegt im Unendlichen. (4)
- 7/8. Die Polare eines Punktes | Der Pol einer Geraden
 a) in Bezug auf einen Punkt
 ist die in letzterem auf | ist der Punkt selbst;
 der Verbindungslinie er-
 richtete Senkrechte;
 b) in Bezug auf eine Gerade
 ist die Gerade selbst; | ist ein beliebiger Punkt
 der letzteren. (5)
- 9/10. Die Polaren einer Punkt- | Die Pole eines Büschels lie-
 reihe gehen sämtlich durch | gen sämtlich auf der Polaren
 den Pol ihres Trägers. (8) | seines Scheitels. (10)
11. Die Nebenecken eines Sehnenvierecks sind die Ecken
 eines Dreiecks, in welchem jede Seite Polare ihrer
 Gegenecke, jede Ecke Pol ihrer Gegenseite ist. (15)
12. Satz des Brianchon: Die Verbindungslinien je zweier
 Gegenecken eines Tangentensechsecks schneiden einander
 in einem Punkte. (Vergl. XVIII B, 14.) (16)
13. Der Satz des Brianchon ist auch auf Tangenten-
 fünfecke, -Vierecke und -Dreiecke anwendbar.
 (18—20)
14. Werden zwei Kreise von einem dritten berührt,
 so geht die Berührungssehne durch denjenigen
 Pol des berührenden Kreises, dessen Polare die
 Potenzlinie der berührten ist. (23)
15. Werden zwei Kreise von einem dritten rechtwinklig ge-
 schnitten, so ist die Zentrale der geschnittenen Kreise
 Polare des Potenzpunktes in Bezug auf den schneidenden
 Kreis. (25)
- 16/17. (Regel.) Um zu bestimmen
 den Pol einer Geraden, | die Polare eines Punktes,
 sucht man den Schnitt- | sucht man die Verbin-
 punkt der Polaren für | dungslinie der Pole für
 zwei ihrer Punkte. (10) | zweiseiner Strahlen. (10)

18/19 (Regel)	Um festzustellen,
ob drei (oder mehr) Gerade durch <i>einen</i> Punkt gehen, untersucht man, ob ihre Pole auf einer Geraden liegen.	ob drei (oder mehr) Punkte auf <i>einer</i> Geraden liegen, untersucht man, ob ihre Polaren durch <i>einen</i> Punkt gehen.
(8)	(8)

XX. (XIX.) Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsachsen.

Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsstrahlen.

Fig. 55. *1. (Ähnliche Lage mit äußerem Ähnlichkeitspunkt.) Verbinde die Ecken eines Dreiecks $B_1C_1D_1$ mit einem Punkte A . Teile AB_1 durch B_2 so, daß $AB_1:AB_2 = 7:3$ und übertrage das Teilverhältnis durch Parallelprojektion auf AC_1 und AD_1 . Warum ist: **a)** $C_2D_2 \parallel C_1D_1$ (XI B, 4), **b)** $\triangle B_2C_2D_2 \sim \triangle B_1C_1D_1$? **c)** Welches ist das regierende Verhältnis?

Fig. 56. *2. (Ähnliche Lage mit innerem Ähnlichkeitspunkt.) Erörtere nach Aufg. 1 die Entstehung und die Beziehungen der Fig. 56.

Ergebnis von 1/2: Zusammenfassung A 1—3; B 1.

3. Zeichne zu einem gegebenen Dreieck ein perspektivisch ähnliches nach dem Verhältnis 5 : 2; der Ähnlichkeitspunkt sei

a) ein äußerer	} und soll	} liegen	I. außerhalb	des gegebenen Dreiecks.
			II. auf einer Seite	„ „ „
b) ein innerer	} und soll	} liegen	III. auf einer Ecke	„ „ „
			IV. innerhalb	„ „ „

4. Zeichne zu einem gegebenen **a)** Viereck, **b)** Fünfeck, **c)** Sechseck ein perspektivisch ähnliches nach dem Verhältnis 3 : 1. Der Ähnlichkeitspunkt sei

I.	ein äußerer	und liege	außerhalb,
II.	„ „	„ „	innerhalb,
III.	„ innerer	„ „	außerhalb,
IV.	„ „	„ „	innerhalb.

Fig. 55. *5. (4, 5.) (Umkehrung.) **a)** Zeichne zwei Dreiecke $B_1C_1D_1$ und $B_2C_2D_2$ mit gleichgerichtet parallelen Seiten; ziehe B_1B_2 ,

$C_1 C_2$, verlängere diese Linien bis zum Schnittpunkt A und verbinde A mit D_1 . Wenn nun $B_2 C_2 : B_1 C_1 = m : n$, welchen Wert haben dann die Verhältnisse $AB_2 : AB_1$, $AC_2 : AC_1$, $B_2 D_2 : B_1 D_1$, $C_2 D_2 : C_1 D_1$? Welche Verhältnissgleichung müßte stattfinden, wenn $B_2 D_2$ von AD_1 nicht in D_2 , sondern in X geschnitten würde? Welche Bedeutung hat A ? **b)** Beweise ebenso, daß zwei Dreiecke mit gegengerichtet parallelen Seiten einen inneren Ähnlichkeitspunkt haben. **c/d)** Beweise, daß zwei ähnliche Vierecke einen äußeren (inneren) Ähnlichkeitspunkt haben, sobald ein entsprechendes Seitenpaar gleichgerichtet (gegengerichtet) parallel ist. Fig. 56.

Ergebnis: Zusammenfassung B 2, 3.

6. Wo liegt der Ähnlichkeitspunkt zweier kongruenten Dreiecke **a)** bei gleichgerichtet, **b)** bei gegengerichtet parallelen Seiten?

Perspektivische Transversalen.

- * 7. (Entsprechende Winkelhalbierende.) Zwei perspektivisch ähnliche Dreiecke $B_1 C_1 D_1$, $B_2 C_2 D_2$ haben den äußeren Ähnlichkeitspunkt A ; das regierende Verhältnis sei $m : n$. Halbiere den Winkel $C_1 B_1 D_1$ durch $B_1 E_1$ und ziehe $A E_1$; dieser Ähnlichkeitsstrahl schneide $C_2 D_2$ in E_2 . Warum ist **a)** $A E_1 : A E_2 = m : n$, **b)** $B_1 E_1 \parallel B_2 E_2$, **c)** $B_1 E_1 : B_2 E_2 = m : n$, **d)** $\angle E_2 B_2 C_2 = \angle E_2 B_2 D_2$? Fig. 55.

Ergebnis: Zusammenfassung B 1.

8. Erörtere in zwei perspektivisch ähnlichen Dreiecken mit
- | | | | | |
|-------------------|---|--|---|-----------------------------|
| a) äußerem | } | Ähnlichkeitspunkt
die Beziehungen
entsprechender | { | I. Mittellinien, |
| b) innerem | | | | II. Höhen und Projektionen. |
- (Vergl. XIII, Aufg. 7.)
9. Erörtere nach Aufgabe 7 die Beziehungen **a)** entsprechender Ecktransversalen zweier Dreiecke mit innerem Ähnlichkeitspunkt, **b)** entsprechender Seitentransversalen zweier Dreiecke mit äußerem, **c)** mit innerem Ähnlichkeitspunkt.
10. Erörtere für zwei perspektivisch ähnliche Dreiecke die Lage I. der Höhenpunkte, II. der Schwerpunkte.
11. Erörtere für zwei perspektivisch ähnliche **a)** Vierecke, **b)** Fünfecke die Beziehungen und die Lage entsprechender Diagonalen, ihrer Schnittpunkte, ihrer Abschnitte und der an ihnen liegenden Winkel.

- 12.** Konstruiere mittels perspektivisch ähnlicher Dreiecke (a) bzw. Vierecke (b—d) die Gerade, die den unzugänglichen Schnittpunkt von g_1 und g_2 **a)** mit P , **b)** mit dem ebenfalls unzugänglichen Schnittpunkt von g_3 und g_4 verbindet, wenn die Schnittpunkte von g_2 und g_3 und von g_1 und g_4 zugänglich sind, **c)** wenn nur einer davon, **d)** wenn keiner davon zugänglich ist.
- 13.** Zeichne in einen gegebenen Kreisabschnitt **a)** das Quadrat, **b)** das gleichseitige Dreieck, dessen eine Seite einer gegebenen Geraden parallel ist. **c)** Zeichne in ein gegebenes Dreieck das Rechteck, dessen eine Seite in der Grundlinie liegt und sich zur zweiten verhält wie $p : q$ ($2 : 3$).¹⁾

Die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise.

- * **14.** (Ähnliche Lage zentrischer Figuren.) **a)** Zeichne zwei perspektivisch ähnliche Parallelogramme mit äußerem Ähnlichkeitspunkt, und beweise, daß sie auch einen inneren Ähnlichkeitspunkt haben. **b)** Welche Figuren haben bei ähnlicher Lage stets zwei Ähnlichkeitspunkte? **c)** Wie wird die Zentrale zweier ähnlich liegenden zentrischen Figuren durch die beiden Ähnlichkeitspunkte geteilt?

Ergebnis: Zusammenfassung B 4.

- * **15.** Unter welcher Bedingung befinden sich zwei Quadrate in ähnlicher Lage? Um wieviel Grad muß man das eine drehen, bis wieder ähnliche Lage eintritt? Wie oft wiederholt sich die ähnliche Lage zweier regelmäßigen Fünf-, Sechs-, n -Ecke, während das eine um 360° gedreht wird? Welche Figuren befinden sich stets in ähnlicher Lage?

Ergebnis: Zusammenfassung B 4, 5.

- Fig. 57 u 58. * **16.** (Perspektivische Beziehungen zweier Kreise.) Bestimme für k_1 und k_2 ($c = 65$, $r_1 = 36$, $r_2 = 16$ mm):

- | | | |
|---|---|--|
| a) den äußeren Ähnlichkeitspunkt A mittels zweier gleichgerichtet parallelen | Halbmesser K_1P_1 , K_2P_2 , ziehe einen zweiten Ähnlichkeitsstrahl und fälle auf die entstehenden Sehnen M_1Q_1 und M_2Q_2 die Lote K_1S_1 , K_2S_2 . Welches ist der Zahlwert folgender Verhältnisse: $AP_1 : AP_2$ ($JP_1 : JP_2$), $AK_1 : AK_2$ ($JK_1 : JK_2$), $K_1S_1 : K_2S_2$? Beweise ferner die Giltigkeit des regierenden Verhältnisses $r_1 : r_2$ für $M_1Q_1 : M_2Q_2$, $P_1Q_1 : P_2Q_2$, $M_1P_1 : M_2P_2$. | b) den inneren Ähnlichkeitspunkt J mittels zweier gegengerichtet parallelen |
|---|---|--|
- Ergebnis: Zusammenfassung B 5, 6.

1) Weitere Beispiele bieten die Aufgaben XIII, 9—15; XVI, 36—37.

- *17. Beweise, **a)** daß die in entsprechenden Punkten an zwei Kreise gelegten Tangenten parallel sind, **b)** daß die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Sehnen auf einem Ähnlichkeitsstrahl liegen, **c)** desgl. die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Tangenten, **d)** desgl. die Schnittpunkte je einer entsprechenden Sekante und Tangente.
18. Lege an k_1 und k_2 unter Benutzung der Ähnlichkeitspunkte die gemeinschaftlichen Tangenten.
19. Zeichne in k das einem gegebenen ähnlich liegende **a)** Dreieck, **b)** Rechteck, **c)** gleichschenklige Trapez. Desgl. um k **d)** das einem gegebenen ähnlich liegende Dreieck, **e)** den einem gegebenen ähnlich liegenden Rhombus.
20. Von welchen Punkten der Zentrale erscheinen zwei Kreise unter gleichen Winkeln? Welches ist der Ort für alle Punkte, von denen aus zwei Kreise unter gleichen Winkeln erscheinen? (XII B, 4.) Bestimme **a)** auf g , **b)** auf k_3 den Punkt, von dem aus k_1 und k_2 unter gleichen Winkeln erscheinen. **c)** Bestimme den Punkt, von dem aus k_1 , k_2 , k_3 unter gleichen Winkeln erscheinen.
Ergebnis: Zusammenfassung B 15.
21. (Sonderfälle.) Bestimme die Ähnlichkeitspunkte für k_1 und k_2 , wenn k_2 von k_1 **a)** ausschließend berührt, **b)** geschnitten, **c)** einschließend berührt, **d)** eingeschlossen wird. Welche Bedeutung hat der Berührungspunkt zweier Kreise? (2 Fälle.)
Ergebnis: Zusammenfassung B 7.
22. Konstruiere den Kreis, der k_1 und g_1 berührt, und zwar: **a)** k_1 in P (ein Rundfenster in römischem Bogen), **b)** g_1 in P (ein Rundfenster in römischem oder in gotischem Bogen), **c)** auch g_2 berührt (zwei Rundfenster in römischem oder in gotischem Bogen), **d)** seinen Mittelpunkt auf g_2 hat (zwei Rundfenster in gotischem Bogen). **e)** Zeichne in einen gegebenen Kreis drei, **f)** vier, **g)** sieben gleichgroße einander berührende Kreise. (Verzierung eines Rundfensters.)
23. Bestimme die Ähnlichkeitspunkte für **a)** zwei gleichgroße Kreise, **b)** zwei Ringkreise, **c)** k und P , **d)** P_1 und P_2 , **e)** k und g , **f)** P und g , **g)** g_1 und g_2 . (Vergl. XVII, Aufg. 16/17.)
Ergebnis: Zusammenfassung B 8—11.

Die Ähnlichkeitspunkte des Umkreises und des Feuerbachkreises.

24. Zeichne **a)** ein spitzwinkliges, **b)** ein stumpfwinkliges Dreieck ABC , halbiere BC durch M_a , CA durch M_b , AB durch

M_c , und verbinde die Teilpunkte. Warum sind die Dreiecke ABC und $M_a M_b M_c$ perspektivisch ähnlich? Welches ist ihr Ähnlichkeitspunkt? Welchen Wert hat das regierende Verhältnis? Bestimmungsstücke zur Zeichnung:

	a)	A	B	C	b)	A	B	C
$x =$		63	32	132		126	10	160
$y =$		175	45	45		123	85	85

- *25. Beweise in den Figuren zu Aufg. 24: **a)** daß die Mittellinien eines Dreiecks einander in einem Punkte schneiden und im Verhältnis 1:2 teilen, **b)** daß die Höhen eines Dreiecks einander in einem Punkte schneiden, **c)** daß der Schwerpunkt S und der Höhenpunkt H die Ähnlichkeitspunkte für den Umkreis (U) und den Feuerbachkreis (F) sind (Eulers Satz), **d)** daß der Feuerbachkreis die oberen Höhenabschnitte halbiert, **e)** daß er durch die Höhenfußpunkte geht. **f)** Bestimme die Teilverhältnisse der Geraden, auf der S, H, U, F liegen.

Ergebnis: Zusammenfassung B 16a.¹⁾

26. In Fig. 19 schneide AD_1 die Verlängerung von DJ in G . Welches ist das regierende Verhältnis für die Dreiecke AJG und AJ_1D_1 ? Warum muß G auf dem Inkreis liegen? Warum ist JM_a ²⁾ $\parallel AD_1$, $JM_b \parallel BE_2$? Warum ist, wenn V der fünfte merkwürdige Punkt des Dreiecks ABC ist (XVIII B, 13), $\triangle JM_a M_b \sim \triangle VAB$? Welches ist das regierende Verhältnis, welches der innere Ähnlichkeitspunkt für diese Dreiecke? Warum ist $JU \parallel VH$?

Ergebnis: Zusammenfassung B 16b, c.

27. Dreieck aus:²⁾

a) $A H U$	f) $C S U$	l) $H H_b U$	q) $A H_b S$
b) $B H S$	g) $M_a S U$	m) $F H H_c$	r) $F M_a U$
c) $C F H$	h) $F H M_b$	n) $F O_a U$	s) $H_a J M_a$
d) $A F S$	i) $H M_c S$	o) $H O_b S$	t) $A H W_a$
e) $B F U$	k) $H H_a S$	p) $F H O_c$	u) $A J S$

v) Konstruiere das Dreieck, dessen Schwerpunkt P , dessen Umkreis k und dessen eine Seite parallel g ist.

1) Eine umfassende Zusammenstellung der Sätze über den Feuerbachkreis gibt Lange im J.-B. der Fr.-W. ORS. (Berlin, O. 94).

2) Wegen der Bezeichnungen vergl. S. 48, Anm. Ferner bedeutet: S den Schwerpunkt, U den Umkreismittelpunkt, F den Mittelpunkt des Feuerbachkreises, W_a den Schnittpunkt von AJ mit BC .

Die Berührungsaufgabe des Apollonius.

- *28. (Das Rechteck inverser Abschnitte.) Die Halbmesser von k_1 und k_2 seien r_1 und r_2 , die vom äußeren Ähnlichkeitspunkt A an k_2 gelegte Tangente sei $AT = t$. Welchen Zahlwert hat **a)** das Rechteck $AE_2 \cdot AF_2$ (XVII A, 2 a), **b)** das Verhältnis $AF_1 : AF_2$, **c)** das Rechteck $AF_1 \cdot AE_2$? (Durch Multiplikation der beiden ersten Gleichungen.) **d)** Berechne ebenso das Rechteck $AD_1 \cdot AC_2$.
- Ergebnis: Zusammenfassung B 12.

29. **a)** Beweise, daß in Fig. 59 die Punkte $C_1 E_1 F_2 D_2$ auf einem Kreise liegen. **b)** Wiederhole die Erörterungen in Aufg. 28 unter Benutzung des inneren Ähnlichkeitspunktes.

- *30. (Lage der Berührungspunkte.) **a)** In welchem Falle werden die Kreise k_1 und k_2 (Fig. 59) von dem durch $C_2 D_1 F_1 E_2$ gehenden Kreise berührt? **b)** Welches ist die Potenz des äußeren Ähnlichkeitspunktes zweier Kreise in Bezug auf jeden dritten, der die beiden ersten gleichartig berührt? **c)** Desgl. für den inneren Ähnlichkeitspunkt bei ungleichartiger Berührung?
- Ergebnis: Zusammenfassung B 13.

31. Konstruiere den Kreis, der

- | | | | | | | |
|---|---|---------|-----|---|--------------------|----------------------------------|
| a) k_1 und k_2 ausschließend | } | berührt | und | { | I. durch P geht, | |
| b) k_1 aus-, k_2 einschließend | | | | | | II. die Berührungsehne $2s$ hat. |
| c) k_1 ein-, k_2 ausschließend | | | | | | |
| d) k_1 und k_2 einschließend | | | | | | |
| e) k ausschließend und g | | | | | | |
| f) k einschließend und g | | | | | | |

Gegeben:

	a—d		e—f		Ia—d	Ie—f	II	
	K_1	K_2	K	g	P	P	$2s =$	
$x =$	130	117	52	10	15	29	a) 50	d) 80
$y =$	130	65	67	$\perp OX$	113	75	b) 50	e) 48
$r =$	22	7	10				c) 66	f) 60

- *32. k (Halbmesser r) wird von k_1, k_2, k_3 ($r_1 > r_2 > r_3$) in T_1, T_2, T_3 ausschließend berührt. Wie groß ist der Halbmesser des Ringkreises um K , der durch K_3 geht? Um wieviel müssen die Halbmesser r_1 und r_2 vermindert werden, damit die mit ihnen geschlagenen Ringkreise von dem durch K_3 gehenden Ringkreise berührt werden?

33. (Apollonius-Aufgabe.) Konstruiere den Kreis, der drei gegebene Kreise berührt, und zwar:

- a) $k_1 k_2 k_3$ ausschließend, e) $k_2 k_3$ aus-, k_1 einschließend,
 b) $k_1 k_2 k_3$ einschließend, f) $k_2 k_3$ ein-, k_1 ausschließend,
 c) $k_1 k_2$ aus-, k_3 einschließend, g) $k_1 k_3$ aus-, k_2 einschließend,
 d) $k_1 k_2$ ein-, k_3 ausschließend, h) $k_1 k_3$ ein-, k_2 ausschließend.

Gegeben:	K_1	K_2	K_3
	$x = 117$	100	15
	$y = 150$	80	130
	$r = 33$	13	7

34. Konstruiere den Kreis, der g_1 und a) $k_1 k_2$ ausschließend, b) $k_1 k_2$ einschließend, c) k_1 aus-, k_2 einschließend, d) k_1 ein-, k_2 ausschließend, e) k_1 ausschließend und g_2 , f) k_1 einschließend und g_2 berührt.

Gegeben:	K_1	K_2	g_1	für g_2
	$x = 65$	115	20	0 165
	$y = 130$	85	$\perp OX$	0 165
	$r = 26$	10		

Ähnlichkeitsachsen.

* **35.** (Satz des Monge.) Schlage um jede Ecke eines Dreiecks $K_1 K_2 K_3$ ($x_1 = 73$, $y_1 = 155$; $x_2 = 105$, $y_2 = 100$; $x_3 = 60$, $y_3 = 95$) einen Kreis ($r_1 = 32$, $r_2 = 18$, $r_3 = 9$), und bestimme für k_2 und k_3 die Ähnlichkeitspunkte A_1, J_1 ; entsprechend A_2, J_2 für k_1 und k_3 ; A_3, J_3 für k_1 und k_2 . a) Warum müssen $A_1 A_2 A_3$ auf einer Geraden liegen? (XVIII B, 12.) b) Desgl. $A_1 J_2 J_3$? c) Wie viele Ähnlichkeitsachsen haben drei Kreise? d) Welche Ecktransversalen des Dreiecks $K_1 K_2 K_3$ gehen durch einen Punkt? (Ähnlichkeitsmittelpunkte.)

Ergebnis: Zusammenfassung A 4; B 14.

36. Bestimme die Ähnlichkeitsachsen für:

- | | | |
|----------------|----------------|------------------|
| a) $k_1 k_2 g$ | d) $k g P$ | g) $g_1 g_2 P$ |
| b) $k_1 k_2 P$ | e) $k P_1 P_2$ | h) $g_1 g_2 g_3$ |
| c) $k g_1 g_2$ | f) $g P_1 P_2$ | i) $P_1 P_2 P_3$ |

37. Bestimme die Ähnlichkeitsachsen für $k_1 k_2 k_3$, wenn k_1 die beiden anderen a) ausschließend, b) einschließend, c) ungleichartig berührt. — Wie läßt sich hiernach der zweite Berührungspunkt bestimmen, wenn der erste gefunden ist?

38. Beweise folgende Sätze:

- a) Die äußere Ähnlichkeitsachse von $k_1 k_2 k_3$ ist Potenzlinie der beiden Kreise, von denen der eine $k_1 k_2 k_3$ einschließend, der andere $k_1 k_2 k_3$ ausschließend berührt. (Nach Aufg. 30b.)
- b) Die Ähnlichkeitsachse, die k_1 und k_2 von k_3 trennt, ist Potenzlinie der beiden Kreise, die k_1 und k_2 gleichartig, k_3 aber im entgegengesetzten Sinne berühren. (Nach 30c.)
- c) Die Pole der Berührungsehnen der drei berührten Kreise liegen auf der in a) bzw. b) genannten Ähnlichkeitsachse. (XIX B, 4.)
- d) Die Pole der in a) und b) genannten Ähnlichkeitsachse in Bezug auf die berührten Kreise liegen auf deren Berührungsehnen. (XIX B, 10.)
- e) Der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden berührenden Kreise ist Potenzpunkt der drei berührten. (Nach 30c.)

39. Konstruiere nach Aufg. 38 die Berührungskreise für

- a) $k_1 k_2 k_3$ (vergl. die Bestimmungsstücke in Aufg. 33),
 b) $k_1 k_2 g$ (desgl. Aufg. 34), d) $k_1 k_2 P$ (Aufg. 31, a—d I).
 c) $k g_1 g_2$ (Aufg. 34), e) $k P_1 P_2$ (XVII, Aufg. 21).

Zusammenfassung.

A. Erklärungen.

- Zwei Figuren sind perspektivisch ähnlich (befinden sich in ähnlicher Lage), wenn ihre Punkte paarweise auf den Strahlen eines Büschels liegen und die Abschnitte dieser Strahlen paarweise in gleichem Verhältnis stehen.
- Die Strahlen eines Büschels, die entsprechende Punkte ähnlich liegender Figuren verbinden, heißen Ähnlichkeitsstrahlen; ihr Scheitel heißt Ähnlichkeitspunkt.
- Der Ähnlichkeitspunkt ist ein äußerer oder ein innerer, je nachdem er die Verbindungslinien entsprechender Punkte außen oder innen teilt.
- Liegen mehrere Ähnlichkeitspunkte auf einer Geraden, so heißt diese Ähnlichkeitsachse.
- Die Berührungsaufgabe des Apollonius ist die Aufgabe, zu drei Kreisen die (acht) Berührungskreise zu finden.

B. Lehrsätze.

1. In perspektivisch ähnlichen Figuren sind je zwei entsprechende Strecken parallel und verhalten sich wie die vom Ähnlichkeitspunkt aus gemessenen Abschnitte eines Ähnlichkeitsstrahles; je zwei entsprechende Winkel sind gleich, und je zwei entsprechende Punkte liegen auf einem Ähnlichkeitsstrahl. (1—2, 7—11)
2. Ist ein entsprechendes Seitenpaar zweier ähnlichen Figuren parallel, so sind sie perspektivisch ähnlich. (5)
3. Zwei Dreiecke mit gleichgerichtet (gegengerichtet) parallelen Seiten haben stets einen äußeren (inneren) Ähnlichkeitspunkt. (5)
4. Zwei ähnlich liegende zentrische Figuren haben einen äußeren und einen inneren Ähnlichkeitspunkt. (14—15)
5. Zwei Kreise haben stets zwei Ähnlichkeitspunkte. (15—16)
6. Die Zentrale zweier Kreise wird durch die beiden Ähnlichkeitspunkte harmonisch im Verhältnis der Halbmesser geteilt. (16)
7. Der äußere (innere) Ähnlichkeitspunkt zweier einander einschließend (ausschließend) berührenden Kreise fällt mit dem Berührungspunkt zusammen. (21)
8. Für zwei gleichgroße Kreise (zwei Punkte) liegt der äußere Ähnlichkeitspunkt im Unendlichen, der innere halbiert die Zentrale. (23a, d)
9. Für einen Kreis (eine Gerade) und einen Punkt ist dieser zugleich innerer und äußerer Ähnlichkeitspunkt. (23e, f)
10. Die Ähnlichkeitspunkte eines Kreises und einer Geraden sind die Endpunkte des die Gerade rechtwinklig schneidenden Durchmessers. (23e)
11. Die Ähnlichkeitspunkte zweier Geraden liegen beide im Unendlichen. (23g)
12. Die Rechtecke aus je zwei nicht entsprechenden Abschnitten eines Ähnlichkeitsstrahles zweier Kreise sind einander gleich. (28, 29)
13. Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig (ungleichartig) berührt, so liegen die Berührungspunkte auf einem äußeren (inneren) Ähnlichkeitsstrahl der berührten Kreise. (30)

14. Satz des Monge: Drei Kreise haben vier Ähnlichkeitsachsen; auf jeder liegen drei Ähnlichkeitspunkte, und zwar die äußeren in ungerader Zahl. (35)
15. Der Ort für alle Punkte, von denen aus zwei Kreise unter gleichen Winkeln erscheinen, ist der Kreis, dessen Durchmesser die Strecke zwischen den Ähnlichkeitspunkten der gegebenen ist. (20)
16. Bezeichnet man die fünf merkwürdigen Punkte des Dreiecks mit U, J, H, S, V und den Mittelpunkt des Feuerbachkreises mit F , so gilt:
- a) $HFSU$ liegen auf einer Geraden (Eulersche Gerade), und es verhält sich $HF:FS:SU = 3:1:2$, (25)
- b) JSV liegen auf einer Geraden, und es verhält sich $JS:SV = 1:2$, (26)
- c) $HJUV$ bilden ein Trapez, und S ist sein Diagonalschnittpunkt. (26)

Maßzahlen und Lagenbezeichnungen.

1. Zur Konstruktion von Dreiecken.¹⁾

Maßzahlen.	Bedeutung.	Fig.	Beispiel.
$a \quad b \quad c$	Längen der Seiten	5	$BC = a \text{ mm}, CA = b \text{ mm}$
$2s$	Summe der Seiten	19	$a + b + c = 2s; AF_1 = AE_1$ $= BD_2 = BF_2 = CD_3$ $= CE_3 = s; AE = (s - a)$ u. s. w.
$\alpha \quad \beta \quad \gamma$	Gradzahl der Winkel	5	$\angle BAC = \alpha^0, \angle C = \gamma^0$
$h_a \quad h_b \quad h_c$	Längen der Höhen	5	$AD = h_a \text{ mm}, BE = h_b \text{ mm}$
$m_a \quad m_b \quad m_c$	Längen der Mittellinien	28	$BE = m_b \text{ mm}, CF = m_c \text{ mm}$
$am_a \quad bm_a \quad cm_a$ $bm_b \quad cm_b \quad am_b$ $cm_c \quad am_c \quad bm_c$	Gradzahl der von Mittellinien und Seiten eingeschlossenen Winkel	28	$\angle EBC = am_b^0$ $\angle BEC = bm_b^0$ $\angle BEA = (180 - bm_b)^0$
$m_a m_b$ $m_b m_c$ $m_a m_c$			Gradzahl der von den Mittellinien eingeschlossenen Winkel
$p_a^b \quad p_a^c$ $p_b^c \quad p_b^a$ $p_c^a \quad p_c^b$	Längen der (durch die Höhen abgeschnittenen) Seitenprojektionen	5	$BD = p_a^c \text{ mm}$ $DC = p_a^b \text{ mm}$ $CE = p_a^b \text{ mm}$
r			Länge des Umkreishalbmessers
ϱ	Länge des Inkreishalbmessers	19	$JD = JE = JF = \varrho \text{ mm}$
$\varrho_a \quad \varrho_b \quad \varrho_c$	Längen der Ankreishalbmessers	19	$J_1 D_1 = J_1 E_1 = J_1 F_1 = \varrho_a \text{ mm}$
$u_a \quad v_a$ $u_b \quad v_b$ $u_c \quad v_c$	Längen der durch die Winkelhalbierenden auf den Seiten gebildeten Abschnitte	7	$BF = u_a \text{ mm}$ $FC = v_a \text{ mm}$ $(CG = u_b \text{ mm})$
$w_\alpha \quad w_\beta \quad w_\gamma$			Längen der Winkelhalbierenden

Im rechtwinkligen Dreieck (Fig. 4) ist $\angle C = 90^0, \angle A = \alpha^0, \angle B = (90 - \alpha)^0, CD = h \text{ mm}$.

Im gleichschenkligen Dreieck (Fig. 6) ist $BC = a, AB = AC = b$, also $\angle B = \angle C = \beta^0$.

1) Wegen der Lagenbezeichnungen vergl. die Anmerkungen zu S. 48 und 140.

2. Zur Konstruktion von Vierecken.

Maßzahlen.	Bedeutung.	Fig.	Beispiel.
$a \ b \ c \ d$	Längen der Seiten	20	$AB = a \text{ mm}, BC = b \text{ mm}$
$\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta$	Gradzahl der Winkel	20	$\angle A = \alpha^\circ, \angle B = \beta^\circ$
$e \ f$	Längen der Diagonalen	52	$AC = e \text{ mm}, BD = f \text{ mm}$
$ae \ af$ $be \ bf$ $ce \ cf$ $de \ df$	Gradzahl der von Seiten und Diagonalen gebildeten Winkel	52	$\angle BAC = ae^\circ$
			$\angle DAC = de^\circ$
			$\angle ABD = af^\circ$
			$\angle CBD = bf^\circ$
$ef \ (180 - ef)$	Gradzahl der Diagonalenwinkel	52	$\angle AGB = ef^\circ$
r	Länge des Umkreishalbmessers im Sehnenviereck	45	$KA = KB = KC = KD = r \text{ mm}$
ρ	Länge des Inkreishalbmessers im Tangentenviereck	20	$KM = KN = KO = KP = \rho \text{ mm}$

Im Trapez (Fig. 12) ist $AB \parallel CD$, folglich $\angle C = (180 - \beta)^\circ$, $\angle D = (180 - \alpha)^\circ$.

3. Zur Konstruktion von Kreisen und Kreisvierecken.

Lagenbezeichnungen.	Bedeutung.	Maßzahlen.	Bedeutung.
$K_1 \ K_2$ $k_1 \ k_2$	Mittelpunkte } gegebener Umfänge } Kreise	$r_1 \ r_2$	Halbmesser gegebener Kreise
$g_1 \ g_2$ $P_1 \ P_2$	gegebene Gerade gegebene Punkte	$s_1 \ s_2$	gegebene Strecken (Sehnen).



Sachverzeichnis.

A.

- A* als Lagenbezeichnung VIII, Aufg. 24.
a als Maßzahl III, A 1; V, Aufg. 12, 27, 32.
a = *Ar* X, A 3.
 α (Alpha) als Maßzahl III, A 1; V, Aufg. 12, 27, 32.
Abstand paralleler Geraden V, B 6.
— eines Punktes von einer Geraden IV, A 5; B 10.
Ähnlichkeit XIII, A 1.
— perspektivische XX, A 1; B 1—2.
Ähnlichkeitsachsen XX, A 4; B 14.
—mittelpunkt XX, Aufg. 35.
—punkt XX, A 2, 3; B 3—11.
—sätze für das Dreieck XIII, B 1—5.
— — für Vielecke XIII, B 6.
—strahlen XX, A 2; B 1, 12, 13.
— —, nicht entsprechende Abschnitte XX, B 12.
Ähnlich liegende Figuren XX, A 1; B 1—2.
Analysis = Zergliederung.
Ankreise VIII, A 3.
— des Dreiecks VIII, B 1; XV, B 11—12.
Apollonius, Berührungsaufgabe XX, A 5; Aufg. 33, 39.
—, Kreis des XII, B 4; XX, B 15.
—, Satz des XII, B 3.
Ausdehnungen I, A 3—4; Aufg. 9.
Außenwinkel III, A 6.
— des Dreiecks III, B 3.
— an der Spitze eines gleichschenkl. Dreiecks IV, B 3.
— des *n*-Ecks III, B 1.
— des regelmäßigen *n*-Ecks XIV, B 1.

B.

- B* als Lagenbezeichnung VIII, Aufg. 24.
b als Maßzahl III, A 1; V, Aufg. 12, 27, 32.

- β (Beta) als Maßzahl III, A 1; V, Aufg. 27, 32.
Basis = Grundlinie (Grundfläche).
Berührung eines Kreises durch Gerade VII, A 5; B 4, 20, 23, 24.
— zweier Kreise VII, B 5 b d; XVII, B 4; XX, B 7.
— zweier Kreise durch einen dritten XIX, B 14; XX, B 13.
— dreier Kreise durch einen vierten XX, Aufg. 33, 38.
Berührungssehne VII, A 8; B 12; XIX, B 3, 14.
Bogen II, A 2; VII, B 7—8.
— als Ort VII, B 28.
Brianchon, Satz des XIX, B 12, 13.
Büschel VII, A 14; B 26; XIX, B 10.
— von Kreisen XVII, A 5; B 12, 13.

C. (siehe auch K)

- C* als Lagenbezeichnung VIII, Aufg. 24.
c als Maßzahl III, A 1; V, Aufg. 27, 32.
 γ (Gamma) als Maßzahl III, A 1; V, Aufg. 32.
cm = Centimeter.
Centimeterquadrat s. *qcm*.
Ceva, Satz des XVIII, B 11.
Chordale = Potenzlinie.

D.

- d* als Maßzahl V, Aufg. 27, 32.
 δ (Delta) als Maßzahl V, Aufg. 32.
dm = Decimeter.
Decimeterquadrat s. *qdm*.
Determination = Grenzbestimmung.
Diagonalen I, Aufg. 21.
— des *n*-Ecks X, Aufg. 29.
— des Parallelogramms V, B 10 c, 11 d.
— des Quadrats V, B 14.

Diagonalen des Rechtecks V, B 12.
 — des Rhombus V, B 13.
 — des Sehnenvierecks XV, B 14, 15.
 — des gleichschenkligen Trapezes V, B 16.
 Diagonalenparallelogramm V, B 18.
 Differenz = Unterschied.
 Dreieck, ähnlich liegende XX, B 3.
 — Ähnlichkeitssätze XIII, B 1—5.
 — Ankreise VIII, B 1; XV, B 11—12.
 — Außenwinkel III, B 3; IV, B 3.
 — Einteilung nach den Seiten IV, A 1.
 — Einteilung nach den Winkeln III, A 7.
 — Ergänzung zum Parallelogramm V, Aufg. 13.
 — Flächenverhältnisse XII, B 10 bis 12; XIII, B 8.
 — Gleichheit IX, B 3, 4.
 — gleichschenkliges IV, A 1, 2; B 1—7; XIII, B 4.
 — gleichseitiges IV, A 1; B 12; XIII, B 5; XIV, B 7; XV, B 13.
 — Höhen III, A 4; VIII, B 4; XII, B 5.
 — der Höhenfußpunkte VIII, Aufg. 23.
 — Inhalt X, B 3, 4; XV, B 10, 11, 13.
 — Inkreis VIII, B 3; XV, B 11, 12.
 — Kongruenzsätze VI, B 2—4.
 — Lagenbezeichnungen VIII, Aufg. 24; XX, Aufg. 27.
 — Maßzahlen III, A 1—5; VIII, Aufg. 2, 7, 9.
 — merkwürdige Punkte VIII, B 2—4; XII, B 1; XVIII, B 13; XX, B 16.
 — Mittellinien III, A 2; V, Aufg. 13; XII, B 1; XVIII, B 9a.
 — Mittelsenkrechte VIII, B 2.
 — Polardreieck eines Sehnenvierecks XIX, B 11.
 — Projektionen der Seiten III, A 5; IV, Aufg. 27; IX, B 7, 8; XII, B 8, 9; XV, B 3, 4.
 — rechtwinkliges III, A 7, 8; B 4; VI, B 4; X, B 4; IX, B 7, 8; XII, B 8, 9; XIII, B 3.
 — Schwerlinien = Mittellinien.
 — Schwerpunkt XII, B 2.
 — Seitenhalbierende = Mittellinien.
 —, Summe von Seiten IV, Aufg. 17, 18, 22; VI, B 1; XV, B 2.
 — Teilung IX, Aufg. 27, 30—32; XIII, Aufg. 26, 27.
 —, Transversalen XVIII, A 4, 5; B 10—13.

Dreieck, Umkreis VIII, B 2, 5, 6.
 —, ungleichseitiges IV, A 1; B 8, 9.
 —, Unterschied zweier Seiten IV, Aufg. 20, 25; VI, B 1; XV, B 1.
 —, Unterschied zweier Winkel IV, Aufg. 25; XV, B 1—3, 5—6.
 —, unvollständige Kongruenz VI, B 6, 7.
 — Verwandlung IX, Aufg. 1—8; XIII, Aufg. 28.
 —, Winkelhalbierende III, A 3; VIII, B 3; XII, B 3.
 Durchmesser VII, A 7; B. 25; XIX, B 6b.

E.

e als Maßzahl V, Aufg. 12, 27, 32.
 Ecken, Haupt- und Nebenecken XVIII, A 6.
 Ecktransversalen XVIII, A 5; B 11, 12.
 Ergänzungsparallelogramme IX, B 5.
 Errichten einer Senkrechten IV, Aufg. 14 d, 16.
 Euklid, Satz des IX, B 8.
 Eulers Satz XX, Aufg. 25 c; B 16a.

F.

F als Lagenbezeichnung XX, Aufg. 27.
f als Maßzahl V, Aufg. 12, 27, 32.
 Feuerbachkreis VIII, B 8; XX, B 16.
 Fläche I, A 2—5, 8—9.
 — Inhaltsformeln X, B 1—6; XII, B 7; XIV, B 7; XV, B 10, 11, 13, 16.
 — Messung X, A 1—3.
 — Teilung IX, Aufg. 26—34.
 — Verhältnisse XII, B 10—12; XIII, B 8, 11.
 — Verwandlung IX, A 2; Aufg. 1—19.
 Fünfeck, regelmäßiges XIV, B 6, 7.
 Fünfzack, regelmäßiges XIV, Aufg. 6g.

G.

g als Lagenbezeichnung VI, Aufg. 1.
 Gegenpunkt IV, Aufg. 2; VIII, B 6.
 Gegenseite III, A 1; IV, B 2, 9; V, B 10a, 11a, c.
 Gegenwinkel III, A 1; IV, B 1, 8; V, B 10b, 11b.
 Gerade I, A 6, 7; VI, Aufg. 1.
 — Abstand eines Punktes von derselben IV, A 5; B 10.
 — Eulersche XX, B 16a.

Gerade, parallele s. Parallele.
 — schneidende V, A 2.
 — Simonsche VIII, B 7.
 Gleichheit von Dreiecken IX, B 3, 4.
 — von Parallelogrammen IX, B 1, 5, 6.
 Goldener Schnitt XII, A 3; B 16—18; XIV, B 4.
 Grad II, A 7.
 Grenzbestimmung VI, Aufg. 2, 3 ff.
 Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks IV, A 2; B 7.
 Grundlinien eines Trapezes V, A 6.
 Grundwinkel IV, A 2; B 1, 3.

H.

H , H_a , H_b , H_c als Lagenbezeichnung VIII, Aufg. 24.
 h als Maßzahl III, A 4; V, Aufg. 12, 25, 28, 31.
 ha = Hektar X, A 3.
 Halbieren eines Kreises durch einen anderen XV, B 21; XVII, B 14—16.
 — einer Strecke IV, Aufg. 14; V, Aufg. 17.
 — eines Winkels IV, Aufg. 14.
 Halbierungslinien zweier Nebenwinkel II, B 3.
 — zweier Scheitelwinkel II, B 6.
 Halbmesser VI, Aufg. 1.
 Harmonische Teilung XI, A 9; XVIII, B 1—4, 8, 9; XX, B 6.
 Höhen eines Dreiecks III, A 4; VIII, B 4; IX, B 2, 3; XII, B 5, 6.
 — eines rechtwinkligen Dreiecks III, A 9; IX, B 7; XII, B 9.
 — eines Parallelogramms V, Aufg. 12; IX, B 1, 2.
 — eines Rhombus V, Aufg. 23, 25.
 — eines Trapezes V, Aufg. 28, 31.
 Höhenfußpunktsdreieck VIII, Aufg. 23.
 Höhenpunkt eines Dreiecks VIII, B 4, 6.
 Homolog = entsprechend.
 Hypotenuse III, A 8; B 4; IV, B 11.
 — Quadrat derselben IX, B 9.

I.

J , J_1 , J_2 , J_3 als Lagenbezeichnung VIII, Aufg. 24.
 Inhaltsformeln X, B 1—6; XII, B 7; XIV, B 5—7, 9—10; XV, B 10, 11, 13, 16.
 Inkreis VIII, A 2.

Inkreis eines Dreiecks VIII, B 3; XV, B 11, 12.
 — eines Vierecks VIII, B 12.
 Inverse Abschnitte = nicht entsprechende Abschnitte (s. Ähnlichkeitsstrahlen).
 Irrationale Verhältnisse XI, A 3.

K.

K , k als Lagenbezeichnung VI, Aufg. 1.
 Kante I, Aufg. 1.
 Kathete III, A 8. Quadrate derselben IX, B 8, 9.
 Komplementwinkel = Winkel, die zusammen 90° betragen.
 Kongruenz VI, A 3.
 Kongruenzsätze für Dreiecke VI, B 2—4.
 — für Vielecke VI, B 5.
 Konjugiert = zugeordnet.
 Konstruktion = mathematisch begründete Zeichnung.
 Konzentrische Kreise = Ringkreise.
 Koordinaten XV, A 1.
 Körper I, A 1—4, 8, 9.
 Kreis VI, A 2.
 —abschnitt VII, A 12.
 — Ähnlichkeit XIII, B 9.
 — Ähnlichkeitsachsen, -punkt, -mittelpunkt s. Ähnlichkeit.
 — des Apollonius XII, B 4; XX, B 15.
 —ausschnitt VII, A 13; XIV, B 9.
 — Berührung durch Gerade und Kreise s. Berührung.
 — im und am Dreieck VIII, B 1—3, 5—8.
 — Feuerbachscher VIII, B 8; XX, B 16.
 — Fläche XIII, B 11; XIV, B 10.
 — Halbierung durch einen anderen XV, B 21; XVII, B 14—16.
 — Lage eines Punktes, einer Geraden, eines Kreises zu einem Kreise VII, B 1—5.
 — als Maß des Winkels II, A 3, 4, 6—8; VII, A 9; B 13—17.
 — als Ort VI, A 2; B 8; VII, B 18, 26, 27, 28; VIII, B 5; XII, B 4; XV, B 17—22, 24; XVI, B 2; XVII, B 1; XX, B 15.
 — rechtwinkliger Schnitt zweier Kreise XV, A 3, B 24; XVII, B 12, 13, 16; XIX, B 15.
 — des Thales VII, B 27.
 — Umfang XIII, B 10; XIV, B 8.

L.

Lage, ähnliche XX, A 1.
 Lagenbezeichnungen VI, Aufg. 1;
 VIII, Aufg. 24; XX, Aufg. 27.
 Linealaufgaben XVIII, Aufg. 31—35,
 39; XIX, Aufg. 2 b, 11.
 Linie I, A 1—9; IV, B 10.
 Lot II, A 4, 5; IV, B 10; Aufg. 14.

M.

M_a , M_b , M_c als Lagenbezeichnung
 VIII, Aufg. 24.
 m als Maßzahl III, A 2.
 m = Meter.
 Maßkreis II, Aufg. 9—11.
 Menelaus, Satz des XVIII, B 10.
 Meter, laufendes X, Aufg. 11 f;
 XIV, Aufg. 32.
 Meterquadrat s. qm.
 Millimeterquadrat s. qmm.
 Mittel, geometrisches und arith-
 metisches XII, A 2.
 Mittellinien des Dreiecks III, A 2;
 V, Aufg. 13; XII, B 1; XVIII, B 9 a.
 Mittelpunkt V, A 11.
 Mittelpunktswinkel VII, A 9; B 13, 14.
 Mittelsenkrechte des Dreiecks VIII,
 B 2.
 — als Ort VI, B 10; VII, B 22.
 mm = Millimeter.
 Modulus = regierendes Verhältnis.
 Monge, Satz des XX, B 14.

N.

n -Eck, Diagonalen X, Aufg. 29.
 — Inhalt X, B 6; Aufg. 25—26.
 — regelmäßiges XIV, A; B 1, 2, 5, 7.
 — Summe der Außenwinkel III, B 1.
 — Summe der Innenwinkel III, B 6.
 Nebenecken des Vierseits XVIII, A 6;
 XIX, B 11.
 Nebenwinkel II, A 9; B 1—3.

O.

O_a , O_b , O_c als Lagenbezeichnung
 VIII, Aufg. 24.
 Ort VI, A 1.
 Ortsbogen VII, B 28.
 Örter VI, A 2; B 8—12; VII, B 18—28;
 VIII, B 5; IX, B 4; XII, B 4; XV,
 B 17—24; XVI, B 1, 2; XVII,
 B 1, 2, 13—16; XIX, B 2; XX, B 15.

P.

P als Lagenbezeichnung VI, Aufg. 1.
 p als Maßzahl III, A 5.
 π (Pi) als Maßzahl XIV, B 8, 10.
 Pappus, Satz des IX, B 6.
 Parallele V, A 1; B 1—9; Aufg. 5,
 21; XI, B 4.
 — Konstruktion V, Aufg. 4, 5 b, c,
 10.
 — als Ort VI, B 9, 12; VII, B 19,
 24; IX, B 4; XV, B 23.
 — zu harmonischen Strahlen XVIII,
 B 6.
 Parallelogramm V, A 7; B 10, 11.
 — der Diagonalen eines Vierecks
 V, B 18.
 — Gleichheit IX, B 1, 5, 6.
 — Inhalt X, B 2.
 — der Seitenmitten eines Vierecks
 V, B 17.
 Parallelprojektion XI, B 5 a; Aufg. 26.
 Pascal, Satz des XVIII, B 14.
 Peripherie = Umfang.
 Perpendikel = Lot.
 Pfeilhöhe XVI, A.
 Pol und Polare XIX, A 1, 2; B 1—11.
 Polardreieck eines Sehnenvierecks
 XIX, B 11.
 Polare Vielecke XIX, A 3, 4.
 Polygon = Vieleck.
 Potenz XVII, A 1, 2.
 Potenzlinie XVII, A 3; B 2—8; als
 Ort XVII, B 2, 13, 14.
 Potenzpunkt XVII, A 4; B 8—10.
 Projektion III, A 5; XI, Aufg. 26.
 Proportion = Verhältnisgleichung.
 Proportionale = Glied einer Ver-
 hältnisgleichung.
 — mittlere XII, A 2, 3; B 8, 9, 15;
 XVI, Aufg. 21—29; XVIII, B 3.
 — vierte XI, Aufg. 15, 16; XII, B 6;
 XVI, B 1; Aufg. 13—20.
 Ptolemäus, Satz des XV, B 14.
 Punkt I, A 2, 8, 9.
 — Abstand von einer Geraden IV,
 A 5; B 10.
 — Bestimmung eines unzugäng-
 lichen Punktes V, Aufg. 16 c;
 XVIII, Aufg. 20; XX, Aufg. 12.
 — harmonische XVIII, A 1; B 1, 8.
 — Kreis der neun Punkte VIII, B 8;
 XX, B 16.
 — merkwürdige des Dreiecks s.
 Dreieck.
 Punktreihe XI, A 8; XIX, B 9.

Pythagoras, Satz des IX, B 9.
 — — — Anwendungen IX, Aufg.
 23—25; XIV, Aufg. 11—21; XV,
 B 9—13, 16—18, 20—24, Aufg.
 16—28.
 — — — Erweiterung XV, B 7.
 — — — Umkehrung XV, B 8.

Q.

qdm, qcm, qmm, qkm } X, A 1—3.
 qm = Quadratmeter }
 Quadrant = Viertelkreis.
 Quadrat V, A 10; B 14; XVII, A 1, 2.
 Quadrate über Dreiecksseiten IX,
 B 7—9; XVI, B 1, 2.
 Querschnitt X, Aufg. 5; XIV, Aufg.
 36.

R.

r als Maßzahl VI, Aufg. 1; VIII,
 Aufg. 2, 10.
ρ (Rho) als Maßzahl VIII, Aufg. 7,
 9, 19.
 Radius = Halbmesser.
 Raumgrößen I, A 1—3.
 Rechteck V, A 8; B 12; IX, B 7, 8;
 X, B 1; XII, B 6, 12—14; XX, B 12.
 Rechtwinkliges Dreieck, s. Dreieck.
 Rechtwinkliger Schnitt zweier Krei-
 se s. Kreis.
 Regelmäßige Figuren XIV, A 1;
 B 1—7.
 Rhombus V, A 9; B 13.
 Ringkreise VII, A 3; als Ort XV,
 B 17—22, 24; XVII, B 1.

S.

S als Lagenbezeichnung XX, Aufg.
 27.
s als Maßzahl XV, A 2.
 Schar VII, A 15; B 25.
 Scheitel II, A 1; VII, A 14.
 Scheitelprojektion XI, B 5b; Aufg.
 26.
 Scheitelwinkel II, A 10; B 5—7.
 Schenkel II, A 1; IV, A 2; V, A 6.
 Schwerpunkt des Dreiecks XII, B 2.
 Sechseck, regelmäßiges XIV, B 3.
 —, Sehnensechseck VIII, Aufg. 16,
 27b; XVIII, B 14.
 —, Tangentensechseck VIII, Aufg.
 20; XIX, B 12.
 Sehne VII, A 6—8; B 6—11; XIX,
 B 1—4, 14.
 Sehnenbüschel VII, B 26; XIX, B 2.

Sehnenschar VII, B 25.
 —tangentialwinkel VII, A 10; B 13,
 14.
 —viereck VIII, A 1; B 13; XVIII,
 B 14, 15.
 —viereck s. Viereck.
 Seitenhalbierende = Mittellinie.
 Sekante VII, A 4.
 Senkrechte II, A 4, 5; IV, Aufg. 14,
 16; V, B 1, 2.
 — als Ort VI, B 10; VII, B 20, 22,
 25; XVI, B 1; XVII, B 2, 13—16.
 Spitze des gleichschenkligen Drei-
 ecks IV, A 2.
 —, Ort für die Spitzen gleicher
 Dreiecke IX, B 4.
 Strahl I, A 7; XVIII, A 2, 3.
 Strahlenbüschel VII, A 14; XI,
 Aufg. 24; XIX, B 2, 10.
 Strecke I, A 7.
 — Halbieren einer III, Aufg. 6; IV,
 Aufg. 14.
 — Teilung einer I, A 9; V, Aufg.
 17, 18, 21 (s. auch harmonische
 Teilung).
 Stufenwinkel V, A 2, 3; B 3, 5.
 Supplementwinkel = Winkel, die
 zusammen 180° betragen.
 Symmetrie IV, A 3, 4.
 — des gleichschenkligen Dreiecks
 IV, B 1, 2, 4, 6, 7.
 — des Kreises VII, B 6—9, 12.
 — des Rechtecks V, B 12.
 — des Rhombus V, B 13.
 — des Quadrats V, B 14.
 — des gleichschenkligen Trapezes
 V, B 16.

T.

Tactionsproblem = Berührungsauf-
 gabe.
 Tangente VII, A 5; Aufg. 5, 25;
 XVIII, Aufg. 39; XIX, B 5, 6;
 Aufg. 2b.
 — als mittlere Proportionale XII,
 B 15.
 — gemeinschaftliche VII, Aufg. 29;
 XX, Aufg. 18.
 Tangentenviereck VIII, A 2; B 14;
 X, B 6; XIX, B 12—13.
 —viereck s. Viereck.
 Teilung einer Strecke s. Strecke.
 — von Figuren IX, Aufg. 26—34.
 — harmonische XI, A 9; B 1, 2;
 XVIII, B 1—4, 8, 9; XX, B 6.
 — stetige XII, A 3; B 18.

- Teilverhältnis einer Strecke XI, B 1, 2.
 — der Mittellinien eines Dreiecks XII, B 1.
 Thales, Kreis des VII, B 27.
 —, Satz des VII, B 16.
 Träger XI, A 8.
 Transporteur = Maßkreis.
 Transversale XVIII, A 4, 5; B 10—13.
 Transversalensatz XV, B 9.
 Trapez V, A 6; B 15, 16; X, B 5; XV, B 16.
 — gleichschenkliges V, B 16.
 — der merkwürdigen Dreieckspunkte XX, B 16 c.

U.

- U als Lagenbezeichnung XX, Aufg. 27.
u als Maßzahl III, A 3.
 Uhrzeiger, Winkel derselben II, Aufg. 8, 13—16.
 Umfang XIII, B 10; XIV, B 8.
 Umfangswinkel VII, A 11; B 14—16.
 Umkreis VIII, A 1.
 — eines Dreiecks VIII, B 2.
 — eines Vierecks VIII, B 11.
 — eines regelmäßigen Vielecks XIV, B 2.

V.

- V als Lagenbezeichnung XX, Aufg. 26.
v als Maßzahl III, A 3.
 Verhältnis XI, A 1—3; B 1—3, 5.
 — regierendes XIII, A 2; B 7; XX, B 1, 6.
 —gleichung XI, A 4—7; B 6—8.
 — —, stetige XII, A 1.
 Verhältnisteilung einer Figur IX, Aufg. 26—32; XIII, Aufg. 26, 27, 36.
 — einer Strecke V, Aufg. 17; XI, B 1—5.
 Verwandlung IX, A 2.
 — eines Dreiecks IX, Aufg. 1—8; XIII, Aufg. 28.
 — eines Parallelogramms IX, Aufg. 9, 10, 16; XI, Aufg. 15.
 — eines Rechtecks in ein Quadrat IX, Aufg. 19; XII, Aufg. 28.
 — eines Vielecks IX, Aufg. 17, 18.
 Vieleck, Ähnlichkeit XIII, A 1; B 6.
 — Inhalt X, Aufg. 24—27.
 — Kongruenz VI, B 5.

- Vieleck, regelmäßiges XIV, A 1; B 1—7.
 — Sehnenvieleck VIII, A 1; B 13; XVIII, B 14, 15.
 — Tangentenvieleck VIII, A 2; B 14; XIX, B 12, 13.
 — Teilung IX, Aufg. 33.
 — überschlagenes XVIII, A 7.
 — Verwandlung IX, Aufg. 17, 18.
 Viereck, Arten V, A 5.
 — Inhalt X, B 1, 2, 5; XV, B 16.
 — Kongruenz VI, B 5.
 — Maßzahlen V, Aufg. 12, 27, 32.
 — Sehnenviereck VIII, B 9, 11; XV, B 14, 15; XVIII, B 15—17; XIX, B 11.
 — Tangentenviereck VIII, B 10, 12; XVIII, B 16, 17; XIX, B 13.
 — Teilung IX, Aufg. 26, 28, 29, 34.
 — Verwandlung IX, Aufg. 17, 18.
 Vierseit XVIII, A 6; B 8b, 9d, 16—17; XIX, B 11.
 Vollwinkel II, A 7.

W.

- W als Lagenbezeichnung XX, Aufg. 27.
w als Maßzahl III, A 3.
 Wechselwinkel V, A 2, 4; B 4, 5.
 Windrose II, Aufg. 17, 18.
 Winkel, Arten II, A 4, 6, 8.
 — Entstehung II, A 1, 2.
 — am Kreise VII, A 9—11; B 12 bis 17.
 — Messung II, A 2—4, 6—8.
 — an Parallelen V, A 2; B 3, 4.
 — mit parallelen Schenkeln V, B 7, 8.
 — mit senkrechten Schenkeln III, B 7.
 Winkelhalbierende des Dreiecks III, A 3; VIII, B 3; XII, B 3.
 — von Nebenwinkeln II, B 3, 4.
 — als Ort VI, B 11; VII, B 23.
 — von Scheitelwinkeln II, B 6, 7.
 — als harmonische Strahlen XVIII, B 5, 9b.
 Winkelscheit, Gebrauch desselben II, Aufg. 6; V, Aufg. 4.
 Winkelsumme des Dreiecks III, B 2.
 — des *n*-Ecks III, B 6.
 — des Vierecks III, B 5.
 Wurzeln, geometrische Darstellung XVI, Aufg. 21, 22.

Z.

Zehneck, regelmäßiges XIV, B 4.
 Zentrale eines Punktes VII, A 1;
 als Ort VII, B 21.
 — zweier Kreise VII, A 2; B 5;
 XX, B 6.
 Zentralprojektion = Scheitelprojek-
 tion.
 Zentrische Figuren V, A 11; ähnlich
 liegende XX, B 4.
 Zentrische Vierecke V, B 10, 12—14.

Zentriwinkel = Mittelpunktswinkel.
 Zentrum = Mittelpunkt.
 Zuordnung, zentrische V, A 11;
 XX, B 4.
 — harmonische XI, A 9; B 1; XVIII,
 B 1—9; XIX, B 1, 2.
 — polare XIX, A 1—4; B 1—11,
 14—19.
 — symmetrische IV, A 3, 4; B 1, 2,
 4, 6, 7; V, B 12—14, 16; VII,
 B 5—9, 12.
 Zweideutige Aufgaben VI, Aufg. 2 ff.

S-96

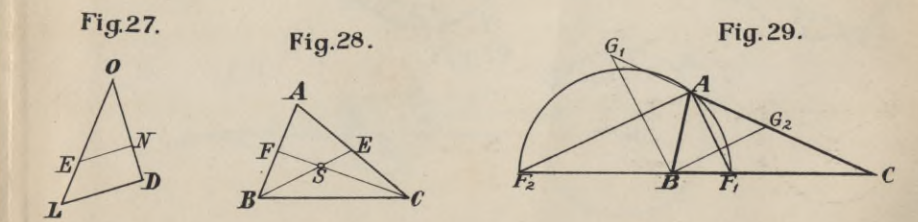
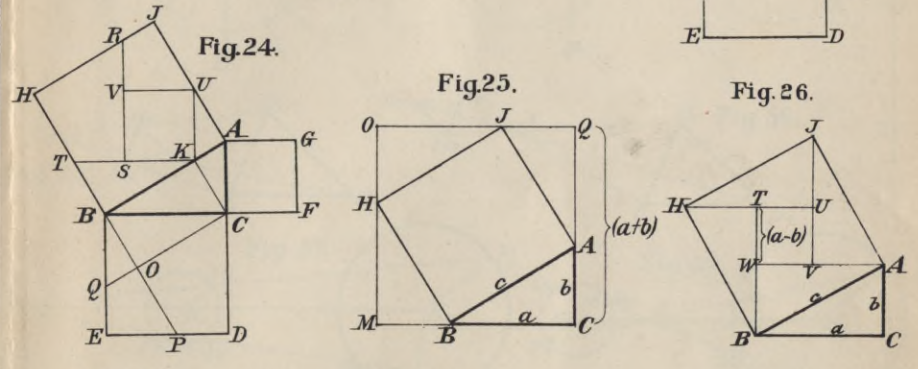
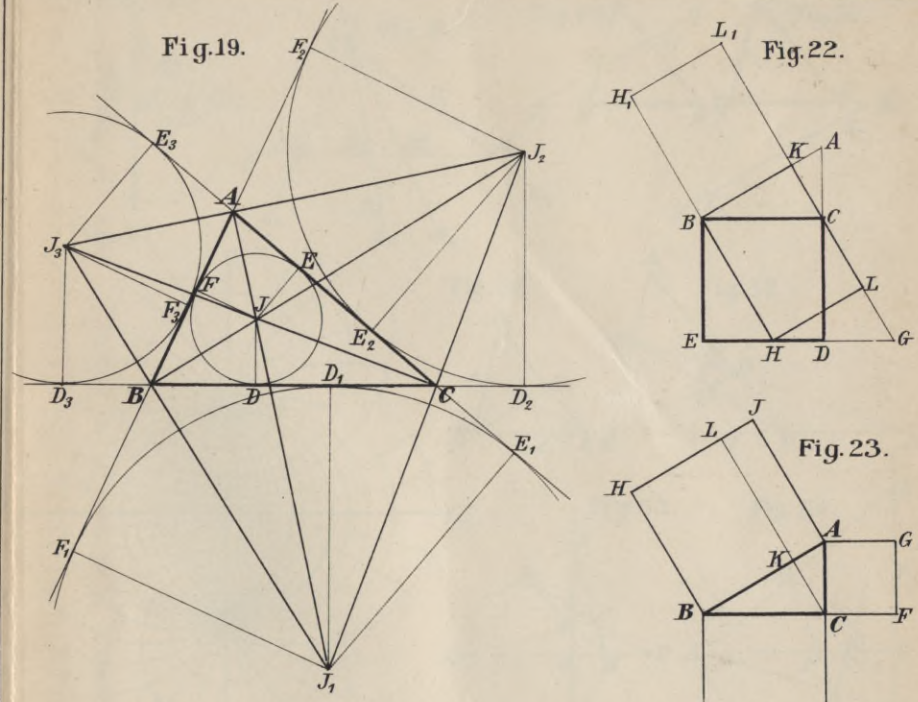
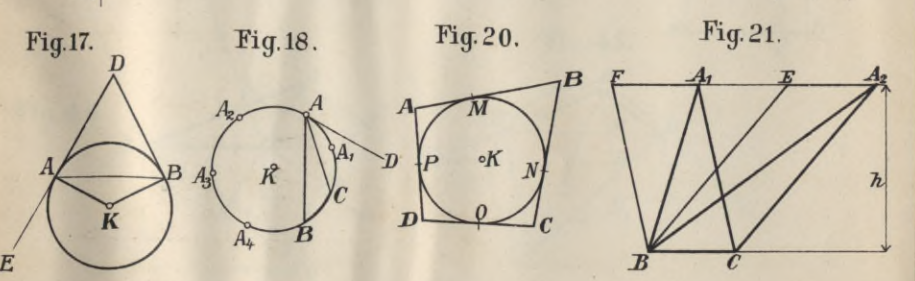
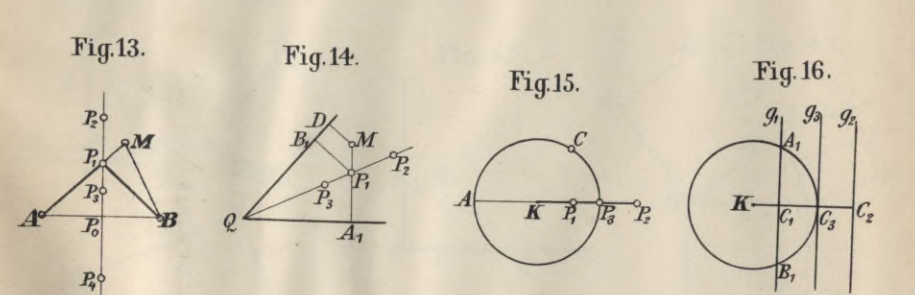
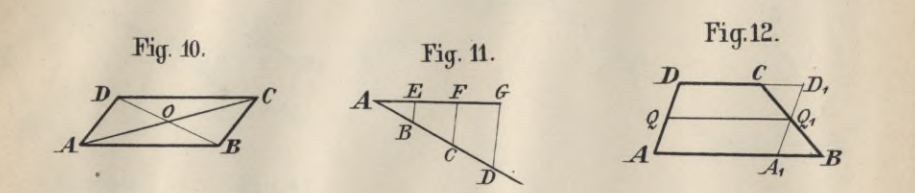
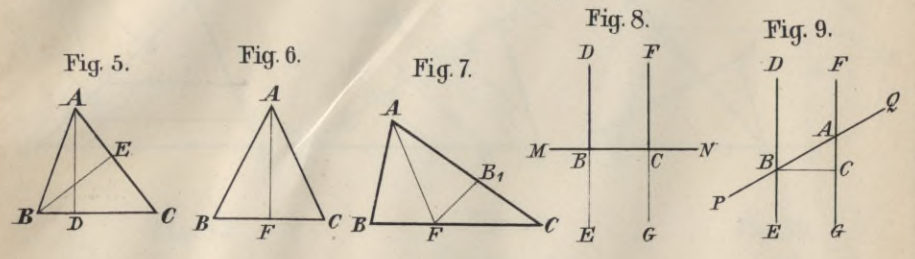
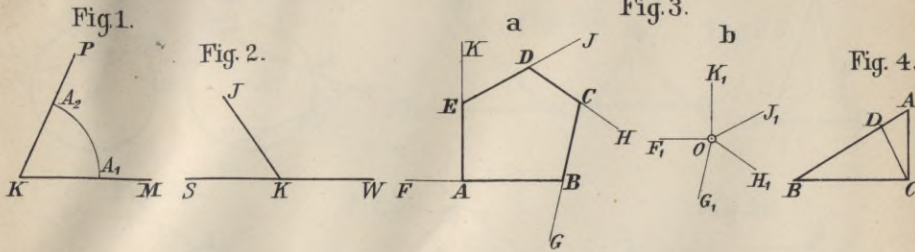


Fig. 30.

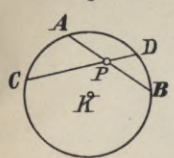


Fig. 31.

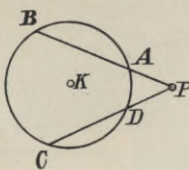


Fig. 32.

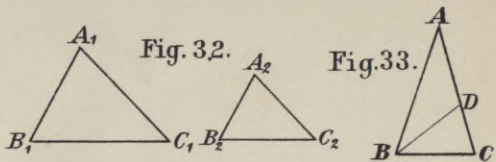


Fig. 33.

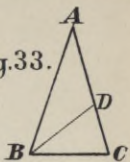


Fig. 34.

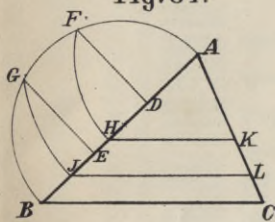


Fig. 35. g

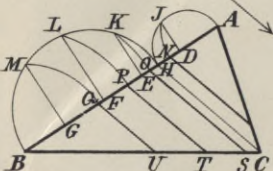


Fig. 36.

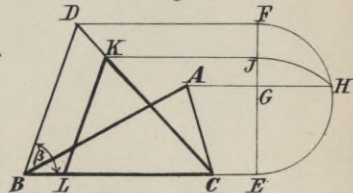


Fig. 37.

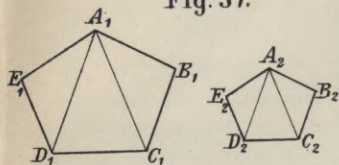


Fig. 38.

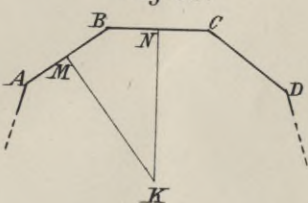


Fig. 39.



Fig. 40.

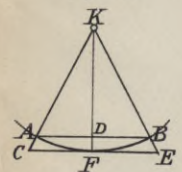


Fig. 41.

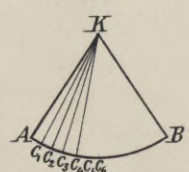


Fig. 42.

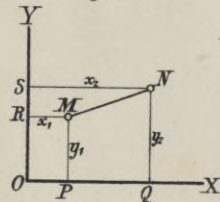


Fig. 43.

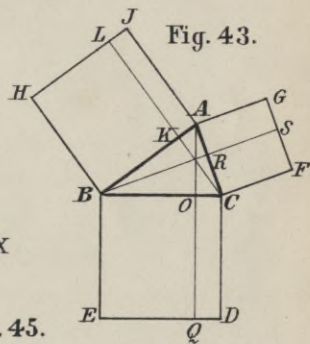


Fig. 45.

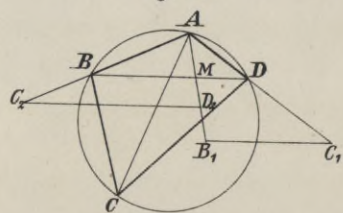


Fig. 44.

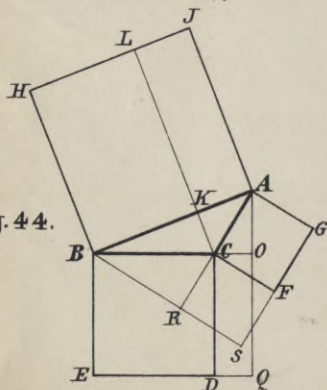


Fig. 46.

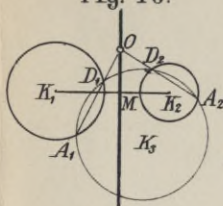


Fig. 48.

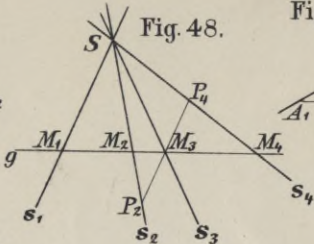


Fig. 49.

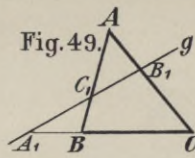


Fig. 50.

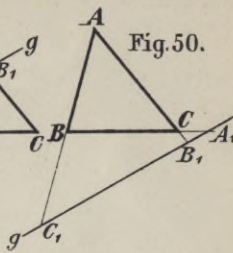


Fig. 47.

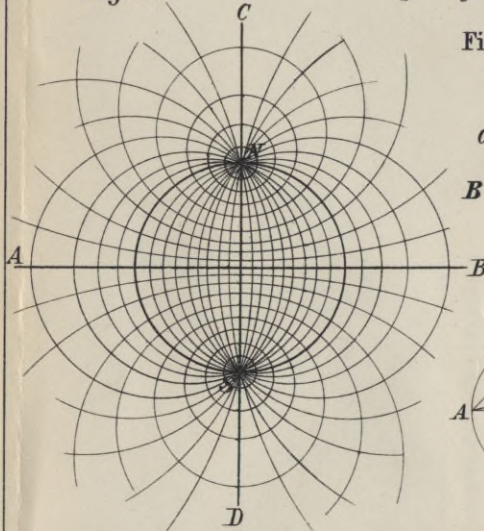


Fig. 51.

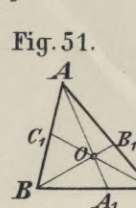


Fig. 52.

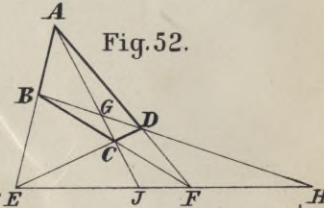


Fig. 53.

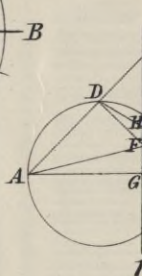


Fig. 54.

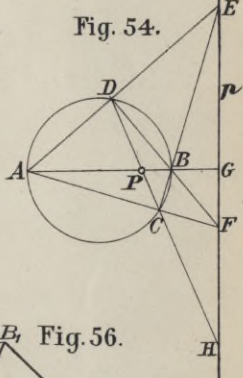


Fig. 55.

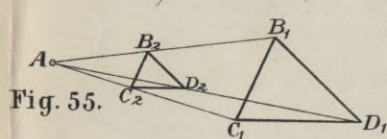


Fig. 56.

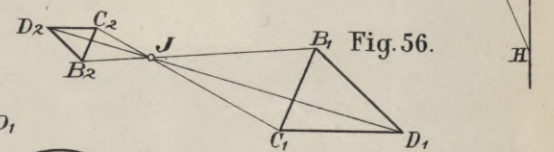


Fig. 57.

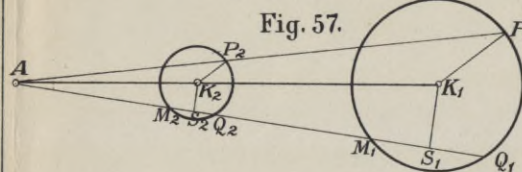


Fig. 58.

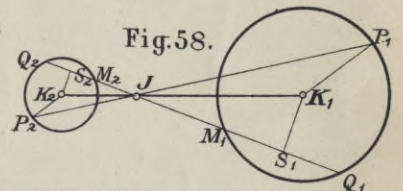
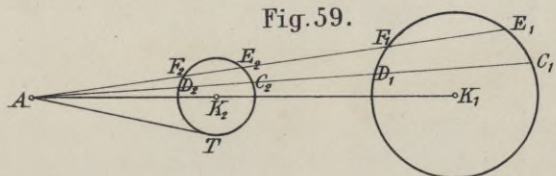
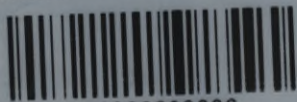


Fig. 59.



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299006