

Verchel.

Bibliothek des kgl.  
Ministeriums der öff. ArbeitenHier.

Ausantwortlich Ihrer Anfrage v. 29/4  
 Herr Müller, Breslau, Vorlesungen  
 über Brückenbau dienen wir  
 hiermit mit der ergebenen Nachricht,  
 dass das Erscheinen des zweiten Theiles  
 lt. Mitteilung vom Verleger noch  
 ganz unbestimmt ist.

Hochachtungsvoll  
 Gropius'sche Buchhandlung  
 Wilhelm Ernst u. Sohn.





*Müller „ Breslau*  
**Vorlesungen über Brückenbau.**

*J. I.*      *1880*  
**Theorie und Berechnung**  
der  
**eisernen Bogenbrücken**

von  
**Heinrich F. B. Müller-Breslau,**

Civil-Ingenieur in Berlin.

Lehrer der Ingenieurwissenschaften und Mitarbeiter von „Ingenieurs Taschenbuch (Hütte)“.

Theil I.

**Die stabförmigen elastischen Bögen.**

Hierzu ein Atlas mit 29 Tafeln.

**Berlin, 1880.**

Polytechnische Buchhandlung

(A. Seydel).

*Unter der Presse: Theil II, Fachwerkbögen.*





# Vorlesungen über Brückenbau

von

**Heinrich F. B. Müller-Breslau,**

Civil-Ingenieur in Berlin,

Lehrer der Ingenieurwissenschaften und Mitarbeiter von „Ingenieurs Taschenbuch (Hütte)“.

Band I.

Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken.

Theil I.

**Die stabförmigen elastischen Bögen.**

---

Uebersetzungsrecht bleibt vorbehalten.

---

**Berlin, 1880.**

Polytechnische Buchhandlung

(A. Seydel).

Theorie und Berechnung  
der  
eisernen Bogenbrücken

VON

Heinrich F. B. Müller-Breslau,

Civil-Ingenieur in Berlin,

Lehrer der Ingenieurwissenschaften und Mitarbeiter von „Ingenieurs Taschenbuch (Hütte)“.

Theil I.

Die stabförmigen elastischen Bögen.

16061

VIII. C. 6

Hierzu ein Atlas mit 29 lithographirten Tafeln.



Berlin, 1880.

Polytechnische Buchhandlung

(A. Seydel).

Nachtrag

2.



~~II 6909~~



11-351765 + Dod.

Akc. Nr. ~~295~~ 151

3PK-3-91/2018

## Vorwort.

---

Durch Veröffentlichung der „Vorlesungen über Brückenbau“ erfülle ich den Wunsch vieler Hörer meines Privatcollegs, die nachgeschriebenen Vorträge in correcter und erweiterter Form zu besitzen.

Bei der Reichhaltigkeit des zu bearbeitenden Programms gab ich der selbstständigen Behandlung der verschiedenen Classen, in welche die Brückensysteme sich bringen lassen, den Vorzug, und enthält daher jedes Heft die Theorie der äusseren und inneren Kräfte, die Regeln für das Dimensioniren, die Berechnung der Horizontalverstrebung und der Pfeiler für eine Gruppe zusammengehöriger Systeme, während vollständig durchgeführte statische Berechnungen den Schluss bilden. Eine andere Form, die ja gewisse bei dem hier gewählten Verfahren nöthige Wiederholungen vermeidet, bringt, da eine erschöpfende Darstellung des Brückenbaus eine Arbeit mehrerer Jahre ist, den Käufer des Buches auf längere Zeit in den Besitz eines unvollständigen Werkes; auch erschwert sie die für den Praktiker so wichtige Recapitulation der Theorie eines bestimmten Systemes.

Weiter entschloss ich mich, mit den Bogenbrücken zu beginnen, da unsere Literatur reich an Publicationen über Balkenbrücken ist, während ein Werk, welches erstere im Zusammenhange und vollständig behandelt, bislang fehlt. Die einschlägige Literatur, bestehend aus einer grossen Zahl trefflicher — in Zeitschriften zerstreuten — Abhandlungen \*) (unter denen die Epoche machenden Arbeiten von Fränkel und Winkler besonders hervorzuheben sind) ist bei Abfassung dieses Buches selbstverständlich benutzt worden; doch sind die folgenden Blätter mehr als blosse Reproduction. Bei der ausführlichen Quellenangabe, durch welche ich die Rechte anderer Autoren gewahrt habe, sind die mir eigenthümlichen Untersuchungen leicht als solche zu erkennen, wie z. B. „die Berechnung der Momente und Transversalkräfte unter Voraussetzung concentrirter Lasten“; „die Theorie der gefährlichsten Belastung der Widerlager“, „Sätze über Influenzlinien“ etc.

---

\*) Von der Literatur des Auslandes sei — als durch eine eigenartige elegante Deduction sich auszeichnend — hervorgehoben: Gros de Pérodil „Résistance des routes et arcs métalliques“, Paris 1879.

Noch betone ich, als bezüglich der Behandlung des Stoffes principiell wichtig, dass ich das von einzelnen Autoren zur Erzielung einer recht durchsichtigen Darstellung gewählte Verfahren, alle Vernachlässigungen, welche später bei der Anwendung eines Problems zur Vereinfachung eingeführt werden, von vornherein zu machen, als durchaus zweckmässig anerkenne — jedoch nur unter der Voraussetzung, dass jede Vernachlässigung hervorgehoben wird, und eine nachträglich vorgetragene strengere Theorie — falls diese durchführbar ist — den Studirenden befähigt, die Zulässigkeit der Annäherung an der Hand numerischer Rechnungen selbstständig zu prüfen.

So sind z. B. in den für die Bögen aufgestellten Elasticitätsgleichungen alle Glieder, welche die relative Längenänderung der Bogenaxe berücksichtigen, von sehr geringem Einfluss auf die aus diesen Relationen abzuleitenden äusseren Kräfte, und hätte der erste Abschnitt dieses Werkes durch Weglassung jener Glieder vorbehaltlich nachträglicher Correctur der Resultate an Uebersichtlichkeit nur gewonnen. Wenn ich nun die in der Folge bei schwierigeren Untersuchungen beabsichtigte Voranstellung der Näherungstheorie hier unterlassen habe, so geschah dies, weil der Studirende diese Arbeit im vorliegenden Falle leicht selbst vornehmen kann, indem er sich an folgende Direktive hält:

Beim ersten Studium überschlage man die Seiten 5 bis 10, desgl. 26 bis 32 und setze in allen Entwicklungen der §§ 2, 4 und 5 die Werthe  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_0'$  gleich Null. Sind mit diesen Auslassungen die §§ 1 bis 5 durchgearbeitet, so gehe man zu § 8 über und schliesse hieran die Abschnitte III und IV unter gleichzeitiger Beachtung der Zahlenbeispiele im Abschnitt VIII.

Hat sich der Studirende so mit dem Stoffe vertraut gemacht und den Endzweck aller Untersuchungen d. i. die Anwendung der Theorie auf die Praxis übersehen, so werden die correcteren Deduktionen des ersten Abschnittes ihm keinerlei Schwierigkeiten mehr bereiten.

Die Methoden der graphischen Statik habe ich unberücksichtigt gelassen; dieselben werden — nach meiner Ueberzeugung — zweckmässig nicht als Zugabe zu analytischen Methoden, sondern als Theile einer rein geometrischen Wissenschaft im engen Anschluss an die Geometrie der Lage und in der hohen Auffassung von Culmann und Cremona studirt.

Die Elasticitäts- und Festigkeitslehre setze ich als bekannt voraus.

Berlin, im Mai 1880.

Der Verfasser.

## Inhalts-Verzeichniss.

	Seite
Disposition des Vortrages . . . . .	xi
<b>Abschnitt I. Biegeelasticität einfach gekrümmter Stäbe mit specieller Anwendung auf Brückenträger.</b>	
§ 1. Die Spannungen . . . . .	1
§ 2. Die Formänderungen . . . . .	11
§ 3. Die äusseren Kräfte . . . . .	14
§ 4. Die drei Elasticitätsgleichungen . . . . .	19
§ 5. Der Bogen mit 2 Kämpfergelenken . . . . .	23
§ 6. Der Bogen ohne Gelenke . . . . .	45
§ 7. Beanspruchung der Bogenträger durch Temperaturänderungen . . . . .	50
<b>Abschnitt II. Dimensionirung der Bogenträger.</b>	
§ 8. Blechbogenträger . . . . .	56
§ 9. Gitterträger . . . . .	69
<b>Abschnitt III. Specielle Behandlung des Bogenträgers mit 3 Gelenken.</b>	
§ 10. Die grössten Momente $M_o$ und $M_u$ . . . . .	79
§ 11. Die grössten Transversalkräfte . . . . .	89
§ 12. Deformationen . . . . .	94
§ 13. Vorläufige Bestimmung des Querschnittes; Abschätzung des Eigen- gewichtes . . . . .	98
<b>Abschnitt IV. Specielle Behandlung des Bogens mit 2 Gelenken.</b>	
§ 14. Die grössten Momente $M_o$ und $M_u$ . . . . .	102
§ 15. Die grössten Transversalkräfte . . . . .	109
§ 16. Deformationen . . . . .	113
§ 17. Vorläufige Berechnung des Querschnittes; Abschätzung des Eigen- gewichtes . . . . .	117
<b>Abschnitt V. Specielle Behandlung des Bogens ohne Gelenke.</b>	
§ 18. Die grössten Momente $M_o$ und $M_u$ . . . . .	119
§ 19. Die grössten Transversalkräfte . . . . .	124
§ 20. Deformationen . . . . .	125
§ 21. Vorläufige Berechnung des Querschnittes; Abschätzung des Eigen- gewichtes . . . . .	126

**Abschnitt VI. Die Horizontal-Verstrebung.**

	Seite
§ 22. Annahmen bezüglich der Belastung und der Zulässigkeit der Inanspruchnahme . . . . .	127
§ 23. Theorie der Horizontalverstrebung . . . . .	130

**Abschnitt VII. Berechnung der Widerlager und Pfeiler.**

§ 24. Fundamentalformeln . . . . .	140
§ 25. Die Berechnung des Landwiderlagers . . . . .	148
§ 26. Berechnung des Pfeilers . . . . .	154
§ 27. Festigkeit der Bausteine . . . . .	159

**Abschnitt VIII. Beispiele für die statische Berechnung der Blechbogenbrücken.**

§ 28. Eisenbahnbrücke von 14,8 <sup>m</sup> Stützweite. Bögen mit Kämpfergelenken und Scheitelgelenk . . . . .	161
§ 29. Eisenbahnbrücke von 24 <sup>m</sup> Stützweite. Bögen mit Kämpfergelenken ohne Scheitelgelenk . . . . .	180
Anhang . . . . .	209



## Quellenangabe,

soweit dieselbe nicht bereits im Text erfolgt ist.

ad § 1. Man vergl. Grashof „Theorie der Elasticität und Festigkeit“, Berlin 1873, pag. 251—259 und pag. 283—287; ferner Winkler „Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit“, 1867, pag. 268—272.

Die auf Seite 6 für  $T_{\xi}$  abgeleitete Differentialgleichung hat Grashof entwickelt; auf die Spannungen  $T_{\eta}$  wurde zuerst durch Winkler hingewiesen.

ad § 2. Grashof a. a. O.; Winkler a. a. O.

ad § 4. Die sehr übersichtliche und allgemeine Aufstellung der 3 Elasticitätsgleichungen in der hier gewählten Form zeigte Weyrauch „Theorie der elastischen Bogenträger“, München 1878. (Dagegen ist die Vereinfachung der Gleichungen für den Parabelbogen durch Einführung der constanten Näherungswerthe für  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_0'$  etc., Eigenthum des Verfassers.)

ad § 6 u. 7. Der Bogen ohne Gelenke wurde zuerst von Winkler allgemein behandelt, desgleichen der Einfluss der Temperaturänderungen auf Bogenträger. Vergl. Winkler a. a. O. pag. 328 bis 369.

Die gleichzeitige Beanspruchung der Bögen durch beliebig gerichtete in der Bogenebene wirkende Kräfte und durch Temperaturänderungen zeigt in allgemeiner Weise Weyrauch a. a. O.

ad § 8. Die Kernlinien hat zuerst Winkler a. a. O. eingeführt.

ad § 9. Die Elasticitätsgleichung für das Viereck mit zwei steifen Diagonalen entwickelte Winkler in den „Mittheilungen des Architekten- und Ingenieur-Vereins für Böhmen“, IV. Jahrgang 1869, pag. 1.

ad Abschnitt III bis IV. Die Bestimmung der Belastungsscheiden mit Hilfe der Kämpferdrucklinie zeigte für Bögen mit Kämpfergelenken Fränkel im „Civil-Ingenieur 1867“ pag. 57, ferner für Bögen mit oder ohne Gelenk Winkler a. a. O. — Arbeiten über Influenzlinien sind: Winkler, „Vortrag über die Berechnung der Bogenbrücken, Mittheil. des Archit.- u. Ing.-Ver. f. Böhmen“ 1868, pag. 6 u. f.; Weyrauch, „Theorie der Träger“, Leipzig 1873; Fränkel, „Civil-Ingenieur“ 1876; Müller-Breslau, „Des Ingenieurs Taschenbuch (Hütte)“ 1877\*); Stelzel, „Theorie der Brückenträger“, Wien 1880.

ad Abschnitt VI. Die Querconstructionen eiserner Brücken hat zuerst Winkler in den „Vorträgen über Brückenbau“, Heft IV, Wien 1879, im Zusammenhange und vollständig behandelt.

ad Abschnitt VIII. Bei Berechnung der Stossverbindungen wurden Schwedler's früher an der Bauakademie in Berlin gehaltene Vorträge benutzt.

---

\*) Diese Arbeit, welcher das in vorliegendem Werke befolgte Princip zu Grunde liegt, befand sich bereits 1875 in den Händen der Redaction des Taschenbuchs. Ich habe die Arbeiten über die Influenzlinien der Balken mit angeführt, weil es sich hier um Methoden handelt, die auf jedes System Anwendung finden.

## Berichtigungen und Nachträge.

Seite 8 Zeile 1 v. o. streiche man die Worte: und ausserdem  $r$  constant angenommen.

„ 22 in der ersten der Formeln 44 setze man:  $[q]_0^x$  statt  $[q]_0$ .

„ 27 Zeile 10 setze man:  $\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2$  statt:  $\left(\frac{dx'}{dy'}\right)^2$ .

„ 33 „ 11 v. o. setze man:  $\frac{Pab}{2}$  statt  $\frac{Pab}{2l}$ .

„ „ „ 12 v. u. „ „  $\frac{Pab}{2F_B}$  „  $\frac{Pab}{2lF_B}$ .

„ 35 „ 1 v. u. setze man im Nenner:  $2q_0 \cos^2 q_0$  statt:  $2q_0 \cos^2 q$ ; ferner fehlt am Ende des Zählers eine Klammer.

„ 36 Zeile 10 v. o. setze man: der Geraden statt: den Graden.

„ „ „ 3 v. u. fehlt hinter den Worten „zu klein gewählt“ das Zeichen: <sup>\*\*</sup>).

„ 45 „ 14 v. o. setze man:  $A$  statt:  $A_1$ .

„ 53 muss Formel 70 lauten: 
$$H = \frac{15 \varepsilon_l E l F}{15 \frac{l^2 - h^2}{l^2 + h^2} + 8 \frac{h^2}{q^2} \frac{l^2}{l^2 - 2h^2}}$$

„ 59 Zeile 5 und 6 v. u. ist  $q_0$  durch  $q$  zu ersetzen.

„ 65 ist in der Anmerkung 650<sup>k</sup> statt 500<sup>k</sup> zu setzen.

„ 80 Formel 116 muss heissen:  $vl - vc + \frac{vc^2}{4l}$  statt:  $vl + \frac{vc^2}{4l}$ .

„ 87 Zeile 11 v. o. setze man:  $(M_0)_{m-1}$  statt:  $(M_0)_m$ .

„ 90 „ 5 v. u. setze man:  $BG$  statt:  $AG$ .

„ 93 „ 15 v. o. streiche man: (Fig. 77).

„ 94 ist hinter Formel 140 Folgendes einzuschalten:

Fall II.  $E$  liegt rechts von  $S$ . Die Belastungsscheide  $E$  wird ohne Bedeutung und ist daher

$$(\min R_l)_v = - \frac{v \cos q (\operatorname{tg} q + h)}{4lh} x_{m-1} x_m,$$

so dass man in die vorstehenden Rechnungen

$$c = \frac{\cos q}{4lh} (\operatorname{tg} q + h) x_{m-1} x_m$$

zu setzen hat.

„ 111 Zeile 9 v. u. ist zu setzen:  $\frac{6,72 - 6,0}{4,0}$  statt:  $\frac{8,72 - 8,0}{4,0}$ .

„ 113 sind die Zeilen 10 und 11 zu streichen. Dafür ist zu setzen:

Ergibt sich  $\xi$  aus Formel 170 negativ, so ist in  $\Sigma P b$  und  $\Sigma P b^2$  der Werth  $\xi = 0$  einzuführen und folgt dann

$$(\max R_l)_v = \frac{\sin q}{16hl} \left\{ 2x_m^3 - 3\xi x_m^2 + 3\lambda x_m (x_m' - \xi) \right\} v.$$

„ 134 Zeile 6 schalte man hinter „Windträger“ ein: Fig. 124.

„ „ „ 10 setze man:  $A'$  und  $B'$  statt:  $A'B'$ .

Auf Tafel 8 fällt in Fig. 92 der Punkt  $E'$  nur zufällig mit dem Parabelscheitel zusammen.

## Disposition des Vortrages.

Classificirung der Bogenträger.

(Hierzu die Figurentafel *A* des Atlas.)

Die einfachste Form eines Bogenträgers ist:

der stabförmige elastische Bogen, d. i. ein prismatischer Stab, dessen Axe eine ebene Curve ist und der bei *A* und *B* (Fig. I) unterstützt wird. Das Gewicht der Fahrbahn *A'B'* und die auf diese wirkenden Lasten, werden zweckmässig durch verticale Stäbe auf den Bogen übertragen.

Es empfiehlt sich dieses System bis zu Stützweiten von etwa 35<sup>m</sup>. Darüber hinaus hat man ausser constructiven Schwierigkeiten auch einen zu grossen Materialaufwand zu gewärtigen. Man entscheidet sich dann besser für den

Fachwerkbogen. (Beispiele zeigen die Figuren II bis V.) Unter einem Fachwerk wird ein Stabsystem verstanden, dessen Theile in den Knotenpunkten durch je einen Gelenkbolzen mit einander verbunden sind. Legt man durch dasselbe einen Schnitt (Fig. VI) und bringt an den Trennungsstellen die in den geschnittenen Stäben wirkenden inneren Kräfte (Spannkkräfte) *S* als äussere Kräfte an, so müssen diese, falls die Belastungen nur in den Knotenpunkten angreifen, in die Richtungen der Stabaxen fallen, da im Gegenfalle die Stäbe um die Gelenke gedreht werden, mithin kein Gleichgewicht besteht. Es werden hiernach sämtliche Stäbe nur auf Normalfestigkeit beansprucht. Hervorzuheben bleibt allerdings, dass die festen Nietverbindungen, welche bei europäischen Brücken an Stelle der Gelenkbolzen in den Knotenpunkten treten, eine — wenn auch nur geringe — Anstrengung der Stäbe auf Biegefestigkeit zur Folge haben.

Eine dritte Categorie der Bogenträger bilden

die versteiften Bögen. Bei dem System in Figur VII ist der stabförmige elastische Bogen *ASB* mit einem Balken *A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>* fest verbunden, und wird sich die Belastung nach bestimmten Gesetzen auf Balken und Bogen vertheilen. Das System könnte man auch einen combinirten Balken- und Bogenträger nennen. Figur VIII zeigt einen stabförmigen elastischen Bogen, der mit einem Fachwerk combinirt ist.

In die hier angeführten drei Classen lassen sich sämtliche bisher ausgeführten Systeme schmiedeeiserner Bogenträger bringen, und zerlegen wir daher den Vortrag in drei Abtheilungen, so zwar dass

Theil I die stabförmigen elastischen Bögen,

- II die Fachwerkbögen,

- III die versteiften Bögen

behandelt. Als Beispiele sollen in diesen drei Theilen nur gerade Eisenbahnbrücken gewählt werden. Ein IV. Theil wird die Berechnung der Strassenbrücken mit Bogenträgern, ferner Beispiele für schiefe Bogenbrücken und schliesslich das Wichtigste über die — immer seltener zur Ausführung gelangenden — gusseisernen Bogenbrücken enthalten.

Hervorgehoben werde noch, dass bei Berechnung der Eisenbahnbrücken als Verkehrslast der in Fig. 19, 19a und 19b auf Tafel 2 dargestellte Normal-Zug, bestehend aus drei Maschinen und darauffolgenden Güterwagen, eingeführt wird. Die Wahl dieses Systems ist auf Seite 36 und 37 motivirt. Die permanente Last (Constructionslast) ist als eine gleichförmig vertheilte in Rechnung gestellt und =  $p$  pro Längeneinheit der Stützweite gesetzt worden. Als Verkehrslast darf man nur bei grösseren Stützweiten eine gleichmässig vertheilte substituiren; sie soll in solchem Falle mit  $v$  (pro Längeneinheit) bezeichnet werden.

Wenn eine innere oder eine äussere Kraft oder ein Moment nur von der permanenten oder nur von der veränderlichen Last abhängt, so erhält sie den Index  $p$  oder  $v$ .

Theil I.

**Die stabförmigen elastischen Bögen.**



## Abschnitt I.

### Biegeelasticität einfach gekrümmter Stäbe mit specieller Anwendung auf Brückenträger.

#### § 1.

#### Die Spannungen.

Ein elastischer stabförmiger Körper, dessen Schwerpunktsaxe eine Curve einfacher Krümmung ist, werde in der vertical gedachten Ebene dieser Curve durch irgend welche Kräfte ergriffen.

Die Stabaxe sei auf ein in der Bogenebene angenommenes System rechtwinkliger Coordinaten bezogen und möge concav gegen die nach „rechts“ positive horizontale  $x$ -Axe liegen. Die  $y$ -Axe ist nach „oben“ positiv.  $\varphi$  bedeutet den Neigungswinkel der im Punkte  $(x, y)$  an die Bogenaxe construirten Tangente gegen die  $x$ -Axe. (Fig. 1.)

Der „Querschnitt an der Stelle  $x, y$ “ (in der Folge kurz „Querschnitt  $(x, y)$ “ genannt), d. i. der durch den Punkt  $(x, y)$  normal zur Bogenaxe geführte Schnitt, wird auf die Gerade  $\overline{ab}$  (Fig. 2), in der die Bogenebene den Querschnitt schneidet, als  $\eta$ -Axe und die hierzu senkrechte Schwerlinie  $\overline{cd}$  als  $\xi$ -Axe bezogen.

Die Spannung, durch die das Element  $dF$  des Querschnittes in Folge der Belastung des Stabes afficirt wird, zerfällt in die „Normalspannung“  $N$  senkrecht zum Querschnitt (als Zugspannung positiv) und die „Schubspannung“  $T$  in der Ebene des Querschnittes. Letztere besitzt die Componenten  $T_\eta$  normal zur  $\eta$ -Axe und  $T_\xi$  normal zur  $\xi$ -Axe, von denen erstere im Sinne der positiven  $\xi$ -Axe, letztere im Sinne der negativen  $\eta$ -Axe positiv angenommen werde.

Nachdem der Bogen durch den Schnitt  $\overline{\alpha\beta}$  in zwei Fragmente zerlegt worden ist, seien sämmtliche am linken Fragmente angreifenden Kräfte zur Resultirenden  $R$  im Abstände  $s$  vom Punkte  $(x, y)$  vereinigt. Dieser Kraft  $R$  müssen die den Spannungen  $N$  und  $T$  im Querschnitte  $\overline{\alpha\beta}$  entsprechenden Kräfte  $NdF$  und  $TdF$  in ihrer Gesammtheit das Gleichgewicht halten.

Nachdem  $R$  in irgend einem Punkte seiner Richtung in die Componenten  $R_n$  (Axialkraft) normal zu  $\alpha\beta$  und  $R_t$  (Transversalkraft) parallel zu  $\alpha\beta$  zerlegt und hinsichtlich der Vorzeichen festgestellt worden ist:

$R_n$  ist „positiv“, wenn es im Querschnitt  $\alpha\beta$  Druckspannungen hervorruft,

$R_t$  ist „positiv“, sobald es nach der convexen Seite des Bogens zeigt,

das „Angriffsmoment“  $\mathfrak{M} = R_s$  ist „positiv“, wenn es den Krümmungsradius  $r$  der Bogenaxe zu vergrößern trachtet,

ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen:

$$1) \quad \mathfrak{M} + \int N dF \eta = 0$$

$$2) \quad R_n + \int N dF = 0$$

$$3) \quad R_t = \int T_{\xi} dF$$

$$4) \quad \int T_{\eta} dF = 0$$

$$5) \quad \int N dF \xi = 0,$$

deren letzte die Forderung ausspricht, dass die Kräfte  $N dF$  eine Drehung des Querschnittes um die  $\eta$ -Axe nicht erzeugen dürfen.

1) Die Normalspannung (Faserspannung). Bedeutet vor Einwirkung der Belastung

$ds = r(-d\varphi)$  die Länge des Elementes der Bogenaxe,

$ds_{\eta}$  die Länge des Faserelementes im Abstände  $\eta$  von der die Bogenaxe enthaltenden Faserschicht  $\overline{cd}$ ,

und sind weiter

$\Delta ds$  und  $\Delta ds_{\eta}$  die Aenderungen, welche diese Werthe erleiden, sobald sich der Stab unter Einwirkung der Belastung deformirt,

so folgt

$$ds_{\eta} = (r + \eta)(-d\varphi) = ds - \eta d\varphi,$$

$$ds_{\eta} + \Delta ds_{\eta} = ds + \Delta ds - \eta(d\varphi + \Delta d\varphi)$$

und nach Subtraction der ersten von der zweiten Gleichung

$$\Delta ds_{\eta} = \Delta ds - \eta \Delta d\varphi.$$

Hierbei ist von einer Aenderung der Querschnittsdimensionen, also auch von einer Aenderung des Werthes  $\eta$  abgesehen.

Die Faserspannung  $N$  ist, wenn  $E$  den Elasticitätsmodul bedeutet, bekanntlich durch die Relation

$$\frac{N}{E} = \frac{\Delta ds_{\eta}}{ds_{\eta}}$$

definiert, wird also

$$N = E \frac{\Delta ds - \eta \Delta d\varphi}{ds - \eta d\varphi} = E \frac{\frac{\Delta ds}{ds} + \frac{\eta}{r} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}}{1 + \frac{\eta}{r}}$$

oder, wenn

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \varepsilon_0 \quad (= \text{relative Längenänderung der Bogenaxe})$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \omega \quad (= \text{relative Aenderung des Contingenzwinkels})$$

gesetzt wird,

$$6) \quad N = E \left[ \varepsilon_0 + \frac{\eta}{r} \omega \right] \frac{r}{r + \eta} = E \left[ \varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0) \frac{\eta}{r + \eta} \right]$$

d. i.

$$N = E \left[ \varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0) \left( \frac{\eta}{r} - \frac{\eta^2}{r^2} + \frac{\eta^3}{r^3} - + \dots \right) \right]$$

Da zur Bestimmung der beiden Unbekannten  $\varepsilon_0$  und  $\omega$  aus den gegebenen äusseren Kräften die Gleichungen 1 und 2 genügen, ist es nicht nöthig, vorerst auf die Ermittlung der Schubspannungen  $T$  einzutreten. Die ebenfalls nur von den  $N$  abhängige Bedingung 5 wird eine bestimmte Forderung an die Gestalt des Querschnitts stellen.

Aus 1 und 2 ergibt sich mit Rücksicht auf 6

$$\begin{aligned} -\frac{\mathfrak{M}}{E} &= \varepsilon_0 \int \eta dF + (\omega - \varepsilon_0) r \left[ \int \frac{\eta^2}{r^2} dF - \int \frac{\eta^3}{r^3} dF + \int \frac{\eta^4}{r^4} dF - \dots \right] \\ -\frac{R_n}{E} &= \varepsilon_0 \int dF + (\omega - \varepsilon_0) \int \frac{\eta}{r} dF - (\omega - \varepsilon_0) \left[ \int \frac{\eta^2}{r^2} dF - \int \frac{\eta^3}{r^3} dF + \dots \right] \end{aligned}$$

oder, wenn

$$\int \frac{\eta^2}{r^2} dF - \int \frac{\eta^3}{r^3} dF + \dots = \mathfrak{D} F$$

gesetzt und beachtet wird, dass  $\int \eta dF$  als statisches Moment des Querschnitts in Bezug auf die Schwerlinie  $\overline{cd}$  gleich Null wird,

$$\begin{aligned} -\frac{\mathfrak{M}}{E F} &= (\omega - \varepsilon_0) r \mathfrak{D} \\ -\frac{R_n}{E F} &= \varepsilon_0 - (\omega - \varepsilon_0) \mathfrak{D}, \end{aligned}$$

woraus sich

$$\begin{aligned} 7) \quad \varepsilon_0 &= -\frac{1}{E F} \left[ R_n + \frac{\mathfrak{M}}{r} \right] \\ \omega &= \varepsilon_0 - \frac{\mathfrak{M}}{E F r \mathfrak{D}} = -\frac{1}{E F} \left[ R_n + \frac{\mathfrak{M}}{r} + \frac{\mathfrak{M}}{r \mathfrak{D}} \right] \end{aligned}$$

ergeben. Hierin ist  $\mathfrak{D}$  ein lediglich von der Querschnittsform abhängiger Werth, der, falls  $r$  im Vergleich mit den Querschnittsdimensionen sehr

gross ist (was bei den folgenden Anwendungen der hier vorgetragenen Theorie stets zutrifft), mit sehr geringem Fehler

$$= \frac{1}{F} \int \frac{\eta^2}{r^2} dF = \frac{J}{r^2 F}$$

gesetzt werden darf, wo  $J$  das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die  $\xi$ -Axe bedeutet.\*) Man erhält dann

$$8) \quad \omega = \varepsilon_0 - \frac{\mathfrak{M} r}{E J}$$

und die Faserspannung

$$N = - \frac{R_n}{F} - \frac{\mathfrak{M}}{r F} - \frac{\mathfrak{M} r \eta}{J(r + \eta)},$$

oder, wenn — was bei relativ grossem  $r$  ohne Bedenken geschehen darf —

$$\frac{r}{r + \eta} = 1$$

gesetzt wird,

$$9) \quad N = - \frac{R_n}{F} - \frac{\mathfrak{M}}{r F} - \frac{\mathfrak{M} \eta}{J}.$$

Speziell für die durch

$$\eta = a_o \text{ resp. } \eta = - a_u$$

gegebenen äussersten Fasern folgt:

$$10) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_o = - \frac{R_n}{F} - \frac{\mathfrak{M}}{r F} - \frac{\mathfrak{M} a_o}{J} \\ N_u = - \frac{R_n}{F} - \frac{\mathfrak{M}}{r F} + \frac{\mathfrak{M} a_u}{J} \end{array} \right.$$

[Bei Anwendung dieser Formeln auf die Berechnung der Brückenträger wurde bislang stets das Glied  $\frac{\mathfrak{M}}{r F}$  vernachlässigt. Wir werden dasselbe jedoch um so mehr berücksichtigen, als in dem bei weitem

\*) Für ein Rechteck von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  ist beispielsweise:

$$\int \eta^2 dF = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta^2 = \frac{b h^3}{12} = F \frac{h^2}{12}; \quad \int \eta^3 dF = 0$$

$$\int \eta^4 dF = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} \eta^4 d\eta = \frac{b h^5}{80} = F \frac{h^4}{80} \quad ; \quad \int \eta^5 dF = 0$$

daher:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{12} \frac{h^2}{r^2} + \frac{1}{80} \frac{h^4}{r^4} + \frac{1}{448} \frac{h^6}{r^6} + \dots$$

Diese Reihe convergirt bei kleinem  $\frac{h}{r}$  ausserordentlich schnell.

wichtigsten Falle kreisbogenförmiger Bogenaxe die correcte Berechnung der  $N$  einfacher wird als die genäherte.]

Setzt man schliesslich noch den Werth  $N$  aus 6 in die Gleichung 5 ein, und beachtet

$$\int \xi dF = 0,$$

so erhält man die Bedingung:

$$0 = \int \frac{\eta \xi dF}{r^2} - \int \frac{\eta^2 \xi dF}{r^3} + \int \frac{\eta^3 \xi dF}{r^4} - + \dots$$

welche nur erfüllt wird, wenn die Gerade  $\overline{ab}$  eine Symmetrieaxe ist.

Bei relativ grossem  $r$  darf man angenähert

$$0 = \int \eta \xi dF$$

schreiben, woraus dann folgen würde, dass die Axen  $\overline{ab}$  und  $\overline{cd}$  die Hauptaxen des Querschnittes sein müssen, d. h. diejenigen Axen, in Bezug auf welche die Trägheitsmomente Maxima werden.

2) Die Schubspannungen.\*) Die Ermittlung der  $T$  soll (ebenso wie die Berechnung der Schubspannungen in geraden Stäben) unter der Annahme durchgeführt werden, dass  $T_\xi$  unabhängig von  $\xi$  ist, dass also sämtlichen an der zu  $cd$  parallelen Geraden  $c'd'$  (Fig. 3) gelegenen Flächenelementen dasselbe  $T_\xi$  entspricht.

Das früher bezüglich der Vorzeichen Festgestellte bezog sich auf den Endquerschnitt  $\alpha\beta$  des „linken“ Bogenfragmentes, so dass im Endquerschnitt  $\alpha'\beta'$  (Fig. 3) des rechten Fragmentes die  $T_\xi$  im positiven Sinne der  $\eta$ , und  $T_\eta$  im negativen Sinne der  $\xi$  positiv einzuführen sind.

Durch einen weiteren Schnitt  $\alpha''\beta''$  im Abstände  $ds$  von  $\alpha'\beta'$  sei aus dem Stabe eine Scheibe und aus dieser wieder durch zwei Schnitte parallel zur Faserschicht  $\overline{cd}$  im Abstände  $\eta$  resp.  $\eta + d\eta$  von der  $\overline{cd}$  ein Körperelement heraus getrennt, dessen Seitenflächen  $AA'$  und  $AB$  (Fig. 4) die Abmessungen

$$d\eta \text{ und } \xi_1$$

$$\text{beziehungsweise } (r + \eta)(-d\varphi) \text{ und } \xi_1$$

haben, wo  $\xi_1$  die Breite der Faserschicht  $\overline{c'd'}$  bedeutet.

$AA'$  wird durch die Spannungen  $N$  und  $T_\xi$  afficirt und entsprechen diesen die Kräfte

$$P_1 = N \xi_1 d\eta$$

$$P_2 = T_\xi \xi_1 d\eta$$

\*) Bei Behandlung der Schubspannungen und Hauptspannungen ist die „allgemeine Elasticitätslehre“ als bekannt vorausgesetzt worden. Bemerket sei vorweg, dass die sub 2 und 3 durchgeführten Untersuchungen nur insofern von praktischem Interesse sind, als sie lehren, dass die Spannungen  $T$  bei flachen Bögen nach den für den Balken gültigen Formeln berechnet werden dürfen und bei der Querschnittsermittlung nicht in Betracht kommen.

während auf die gegenüber liegende Fläche  $BB'$  die Kräfte  $P_1 + dP_1$  und  $P_2 + dP_2$  wirken.

Die Fläche  $AB$  wird durch eine Tangentialspannung beansprucht, die, einem bekannten Satze der allgemeinen Elasticitätslehre zufolge, gleich der  $T_\xi$  in  $AA'$  ist und beträgt daher ihre Belastung

$$P_3 = T_\xi (r + \eta) (-d\varphi) \xi_1.$$

Dieser entspricht eine Kraft  $P_3 + dP_3$  in der gegenüber liegenden  $A'B'$ .

Setzt man die Summe der normal zu  $AA'$  gebildeten Componenten der hier aufgeführten Kräfte gleich Null, so folgt:

$$dP_3 \cos(-d\varphi) + (P_2 + dP_2) \sin(-d\varphi) - dP_1 \cos(-d\varphi) = 0$$

worin

$$\cos(-d\varphi) = 1$$

$$\sin(-d\varphi) = -d\varphi.$$

Nach Streichen der unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung:  $dP_2 d\varphi$  erhält man

$$+ dP_3 - P_2 d\varphi - dP_1 = 0.$$

Da nun

$$dP_1 = \frac{d(N\xi_1)}{d\varphi} d\varphi d\eta$$

$$dP_3 = (r + \eta) (-d\varphi) \frac{d(T_\xi \xi_1)}{d\eta} d\eta + T_\xi \xi_1 d\eta (-d\varphi)$$

ist, so wird

$$- \frac{d(T_\xi \xi_1)}{d\eta} d\eta d\varphi (r + \eta) - 2 T_\xi \xi_1 d\eta d\varphi - \frac{d(N\xi_1)}{d\varphi} d\varphi d\eta = 0$$

und nach Division durch  $d\eta d\varphi$ , ferner Einsetzen von  $d\varphi = -\frac{ds}{r}$

$$\frac{d(T_\xi \xi_1)}{d\eta} (r + \eta) + 2 T_\xi \xi_1 - \frac{d(N\xi_1)}{ds} r = 0,$$

wofür, wenn ein constanter Querschnitt vorausgesetzt, also angenommen wird, dass  $\xi_1$  nur mit  $\eta$ , nicht aber mit  $\varphi$  veränderlich ist,

$$\frac{d(T_\xi \xi_1)}{d\eta} + \frac{2}{r + \eta} T_\xi \xi_1 - \frac{r \xi_1}{r + \eta} \frac{dN}{ds} = 0$$

geschrieben werden darf. Diese Gleichung hat die Form

$$\frac{d(T_\xi \xi_1)}{d\eta} + F_1(\eta) (T_\xi \xi_1) + F_2(\eta) = 0,$$

mithin entspricht ihr das Integral

$$T_\xi \xi_1 = e^{-\int F_1(\eta) d\eta} \left[ C - \int F_2(\eta) e^{\int F_1(\eta) d\eta} d\eta \right]$$

Nun ist

$$\int F_1(\eta) d\eta = 2 \int \frac{d\eta}{r + \eta} = 2 \ln(r + \eta)$$

also

$$e^{\int F_1(\eta) d\eta} = (r + \eta)^2,$$

weiter

$$F_2(\eta) = - \frac{r \xi_1}{r + \eta} \frac{dN}{ds},$$

mithin:

$$T_{\xi} \xi_1 = \left[ C + \int (r + \eta) r \frac{dN}{ds} dF \right] \frac{1}{(r + \eta)^2}$$

wobei  $\xi_1 d\eta = dF$  gesetzt wurde.

Die Einführung von

$$N = - \frac{R_n}{F} - \frac{\mathfrak{M}}{rF} - \frac{\mathfrak{M} r \eta}{(r + \eta) J}$$

liefert

$$T_{\xi} \xi_1 = \frac{1}{(r + \eta)^2} \left\{ C - \frac{1}{F} \int (r + \eta) \left[ r \frac{dR_n}{ds} + \frac{d\mathfrak{M}}{ds} \right] dF - \frac{1}{J} \int \frac{d\mathfrak{M}}{ds} r^2 \eta dF \right\}$$

oder, wenn unter der Voraussetzung, dass der Querschnittsumfang bei  $a$  (Fig. 3) eine Tangente  $\bar{t}\bar{t}$  parallel der  $\bar{c}\bar{d}$  hat, die Constante  $C$  aus der Bedingung bestimmt wird, dass für  $\eta = a_0$  sich  $T_{\xi} = 0$  ergeben muss, (da im andern Falle die bei  $a$  den Umfang normal schneidende  $T_{\xi}$  eine gleich grosse in dem Mantel wirkende Spannung zur Folge haben würde, und sich diese wieder nur durch eine im Mantel wirkende, hier aber als nicht vorhanden angenommene äussere Kraft erklären liesse):

$$T_{\xi} \xi_1 = + \frac{1}{(r + \eta)^2} \left\{ \frac{1}{F} \int_{\eta}^{a_0} (r + \eta) \left[ r \frac{dR_n}{ds} + \frac{d\mathfrak{M}}{ds} \right] dF + \frac{1}{J} \int_{\eta}^{a_0} \frac{d\mathfrak{M}}{ds} \eta r^2 dF \right\}.$$

Wird die am linken Bogenfragment angreifende Kraft  $R$  in irgend einem Punkte  $(x_1 y_1)$  (Fig. 5) ihrer Richtung in die Componenten  $Y$  parallel  $y$  und  $X$  parallel  $x$  zerlegt und weiter angenommen, dass der Bogen unter anderem eine nach irgend welchem Gesetze über die Horizontalprojection vertheilte verticale Belastung trägt, so zwar, dass auf das Bogenelement der Antheil  $p dx$  entfällt, so hat man für den Querschnitt  $xy$

$$\mathfrak{M} = Y(x - x_1) - X(y - y_1)$$

$$R_n = Y \sin \varphi + X \cos \varphi$$

$$R_t = Y \cos \varphi - X \sin \varphi$$

daher:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{M}}{ds} &= \frac{Y dx}{ds} - \frac{X dy}{ds} = Y \cos \varphi - X \sin \varphi = R_t \\ \frac{dR_n}{ds} &= - \frac{Y \cos \varphi - X \sin \varphi}{r} - \frac{p dx}{ds} \sin \varphi \\ &= - \frac{R_t}{r} - \frac{p}{2} \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

weshalb sich

$$11) \quad T_{\xi} \xi_1 = \frac{R_t}{(r + \eta)^2} \left[ \frac{1}{J} \int_{\eta}^{a_0} r^2 \eta dF - \frac{p r}{2 F R_t} \sin 2\varphi \int_{\eta}^{a_0} dF (r + \eta) \right]$$

ergiebt. Ist  $\eta$  gegen  $r$  vernachlässigbar und ausserdem  $r$  constant angenommen, so folgt

$$12) \quad T_{\xi} = \frac{R_t}{\xi_1} \left[ \frac{\mathfrak{S}}{J} - \frac{p}{2R_t} \sin 2\varphi \frac{\mathfrak{F}}{F} \right],$$

wo  $\mathfrak{F}$  = Inhalt des oberhalb  $\overline{cd'}$  (Fig. 3) gelegenen Querschnittstheiles und  $\mathfrak{S}$  = statisches Moment dieses Theiles in Bezug auf die Axe  $\overline{cd}$ .

Streicht man noch das zweite der beiden in der Klammer stehenden Glieder, was bei flachen Bögen und grossem  $R_t$  um so eher geschehen darf, als die  $T_{\xi}$  nur für diejenigen Querschnitte in Betracht kommen, denen grosse Transversalkräfte  $R_t$  entsprechen, so findet man

$$13) \quad T_{\xi} = \frac{R_t \mathfrak{S}}{\xi_1 J},$$

welche Formel bekanntlich dem geraden Stabe entspricht.

Bei Ermittlung der  $T_{\eta}$  beachte man wieder, dass ein am Umfange des Querschnittes gelegenes Flächenelement durch eine tangential an den Umfang wirkende  $T$  beansprucht wird, da jedes anders gerichtete  $T$  eine Componente normal zum Umfange besitzt, und diese eine gleich grosse parallel zur Stabachse den Mantel afficirende Schubspannung zur Folge haben würde. Deshalb ist

$$14) \quad (T_{\eta})_1 = T_{\xi} \operatorname{tg} \psi$$

wo  $(T_{\eta})_1$  der Specialwerth von  $T_{\eta}$  an der Stelle  $\xi = \frac{\xi_1}{2}$  und  $\psi$  (Fig. 6) der spitze Neigungswinkel der Querschnittstangente gegen die  $\eta$ -Achse.

Es werde jetzt aus dem vorhin betrachteten Streifen mit den Abmessungen  $\xi_1$ ,  $d\eta$  und  $(r + \eta)$  ( $-d\varphi$ ) ein parallelepipedischer Körper (Fig. 7) von der Breite  $\frac{\xi_1}{2} - \xi$  herausgetrennt und die Summe der normal zum Querschnitt  $\alpha'\beta'$  gerichteten Componenten der die Seitenflächen dieses Körpers belastenden Kräfte gleich Null gesetzt. Die hierbei in Betracht kommenden Kräfte sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

Bezeichnung der Fläche.	Inhalt der Fläche.	Spannung.	Belastung.	Differentiale der Belastung.
$u w s r$	$(\frac{1}{2} \xi_1 - \xi) d\eta$	$\left\{ \begin{array}{l} N_x \\ T_{\xi} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = N_x d\eta (\frac{1}{2} \xi_1 - \xi) \\ P_2 = T_{\xi} d\eta (\frac{1}{2} \xi_1 - \xi) \end{array} \right.$	$dP_1 = \frac{dN_x}{d\varphi} d\varphi d\eta (\frac{1}{2} \xi_1 - \xi)$
$w w' s' s$	$d\eta (r + \eta) (-d\varphi)$	$(T_{\eta})_1$	$P_3 = - (T_{\eta})_1 d\eta d\varphi (r + \eta)$	
$u u' r' s$	$d\eta (r + \eta) (-d\varphi)$	$T_{\eta}$	$P_4 = - T_{\eta} d\eta d\varphi (r + \eta)$	
$r s s' r'$	$(\frac{1}{2} \xi_1 - \xi) (r + \eta) (-d\varphi)$	$T_{\xi}$	$P_5 = - T_{\xi} d\varphi (r + \eta) (\frac{1}{2} \xi_1 - \xi)$	$dP_5 = - \frac{dT_{\xi}}{d\eta} d\eta d\varphi (r + \eta) (\frac{1}{2} \xi_1 - \xi) - T_{\xi} (\frac{1}{2} \xi_1 - \xi) d\eta d\varphi$

Die Bedingung für Gleichgewicht lautet:

$$-dP_1 + P_4 - P_3 + dP_3 + (P_2 + dP_2) \sin d\varphi = 0$$

d. i. 
$$-dP_1 + P_4 - P_3 + dP_3 + P_2 d\varphi = 0,$$

oder nach Einsetzen der Werthe  $P$  und  $dP$

$$\begin{aligned} -\frac{dN_x}{d\varphi} d\varphi d\eta \left( \frac{\xi_1}{2} - \xi \right) - T_\eta (r + \eta) d\eta d\varphi + (T_\eta)_1 (r + \eta) d\eta d\varphi \\ - (r + \eta) \left( \frac{\xi_1}{2} - \xi \right) d\eta d\varphi \frac{dT_\xi}{d\eta} = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$T_\eta = (T_\eta)_1 + \mathfrak{G} \left( \frac{\xi_1}{2} - \xi \right) = 0$$

worin

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{r + \eta} \left[ r \frac{dN_x}{ds} - (r + \eta) \frac{dT_\xi}{d\eta} \right]$$

ein von  $\xi$  unabhängiger Werth ist, welcher mit Hilfe der durch die Symmetrie des Querschnittes motivirten Bedingung bestimmt wird, dass ein Wechsel des Zeichens von  $\xi$  lediglich eine Aenderung des Vorzeichens von  $T_\eta$  bewirkt, wofür man einfacher die Forderung substituirt, dass  $\xi = 0$  auch  $T_\eta = 0$  ergeben muss.

Man findet dann

$$\mathfrak{G} = \frac{2(T_\eta)_1}{\xi_1}$$

und

$$15) \quad T_\eta = 2(T_\eta)_1 \frac{\xi}{\xi_1}.$$

Stellt man hiernach die  $T_\eta$  als Ordinaten einer Curve dar, so erhält man eine gerade Linie  $\overline{OD}$  (Figur 6).

Weiter folgt, dass die Resultirenden  $T$  aus sämmtlichen, demselben  $\eta$  entsprechenden, zusammengehörigen  $T_\xi$  und  $T_\eta$  die  $\eta$ -Achse des Querschnittes in dem nämlichen Punkte  $S$  schneiden.

Da die  $T_\xi$  unabhängig von  $\xi$  sind und  $(T_\eta)_1$  der Maximalwerth der  $T_\eta$  ist, so werden die grössten resultirenden Spannungen  $T$  den am Umfang gelegenen Querschnittselementen entsprechen; dieselben sind durch

$$16) \quad T = \frac{T_\xi}{\cos \psi}$$

gegeben.

### 3. Die Hauptspannungen und ideellen Hauptspannungen.

In den Seitenflächen eines unmittelbar am Mantel des Stabes gelegenen Körperelementes, dessen Abmessungen  $a', b', c'$  (vergl. Fig. 8) beziehungsweise parallel der Stabachse, der Tangente und der Normale zum Querschnittsumfang sind, wirken nach Vorigem die Spannungen  $N$  und  $T$ , so zwar, dass Fläche  $(b'c')$  durch  $N$  und  $T$ , Fläche  $(a'c')$  nur

durch  $T$  beansprucht wird. Schneidet man aus diesem Körper unter  $\alpha$  ein Parallelepiped mit den Abmessungen  $a, b, c$  (Fig. 9) und wählt dabei

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2T}{N},$$

so werden die Seitenflächen des Körpers ( $abc$ ) nur durch Normalspannungen  $N_a$  und  $N_b$ , die gleichzeitig Maximalspannungen (Hauptspannungen) sind, afficirt. Dabei ist

$$N_a = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}\sqrt{N^2 + 4T^2}$$

$$N_b = \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}\sqrt{N^2 + 4T^2}.$$

In Folge der  $N_a$  wird  $a$  um

$$(\Delta a') = a \frac{N_a}{E}$$

verlängert, während der  $N_b$  die Contraction

$$(\Delta a'') = a \frac{N_b}{E} \mu$$

entspricht, unter  $\mu$  den für Metalle zwischen  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{1}{4}$  schwankenden Quercontractionscoefficienten verstanden. Die Gesamtänderung ist

$$\Delta a = \frac{a}{E} (N_a - \mu N_b)$$

und analog

$$\Delta b = \frac{b}{E} (N_b - \mu N_a).$$

Diejenige allein im Sinne  $a$  wirkende Spannung  $(N_a)_i$ , welche dieselbe Aenderung  $\Delta a$  erzeugt, wie die beiden Spannungen  $N_a$  und  $N_b$  zusammen, ist definirt durch die Bedingung

$$(N_a)_i = N_a - \mu N_b,$$

sie heisst ideelle Hauptspannung im Sinne  $a$ , während man

$$(N_b)_i = N_b - \mu N_a$$

die ideelle Hauptspannung im Sinne  $b$  nennt.

Bedeutet  $k$  diejenige Spannung, welcher die grösst zulässige relative Längenänderung entspricht, so sind die Dimensionen des Querschnittes so zu wählen, dass sowol  $\frac{\Delta a}{a}$  als auch  $\frac{\Delta b}{b}$  kleiner oder höchstens gleich  $\frac{k}{E}$  sind; d. h. dass

$$k \geq (N_a - \mu N_b)_{\max}$$

$$k \geq (N_b - \mu N_a)_{\max}.$$

Man erhält daher nach Einsetzen der für  $N_a$  und  $N_b$  oben angegebenen Werthe die Festigkeitsbedingung

$$17) \quad k \geq \left\{ \frac{1-\mu}{2} N \pm \frac{1+\mu}{2} \sqrt{N^2 + 4T^2} \right\}_{\max}^*.$$

\*) Vielfach wird noch immer der Fehler begangen, dass die grösste der „Hauptspannungen“ gleich der „zulässigen Spannung“ gesetzt wird, trotzdem bereits seit Jahren durch die classischen Werke über Elasticitätslehre von Grashof und Winkler der hier befolgte richtige Weg scharf vorgezeichnet worden ist.

Stellt sich heraus, dass die ideelle Hauptspannung für  $\eta = + a_o$  oder  $\eta = - a_u$  ein Maximum wird, so findet man, da an diesen Stellen  $T = 0$  ist, die Festigkeitsbedingungen (ohne Rücksichtnahme auf die Vorzeichen)

$$\begin{aligned} k &\geq N_o \\ k &\geq N_u, \end{aligned}$$

es kommen also in diesem Falle die Schubspannungen nicht in Betracht.

Während nun bei hohen Blechbalken in der Regel  $N_i$  an einer Stelle ein Maximum wird, an der eine Spannung  $T$  existirt, und dann nicht selten  $N_i$  von den Spannungen  $N_o$  und  $N_u$  so erheblich abweicht, dass aus der Nichtberücksichtigung der  $T$  ein merklicher Fehler resultirt, hat man bei Berechnung der Bogen träger nie nöthig, auf die Bestimmung der Spannungen  $T$  einzutreten; man darf vielmehr stets, wenn  $k_o$  resp.  $k_u$  die für die oberste, beziehungsweise unterste Faser als zulässig erachteten Spannungen sind, die Grenzbedingungen für die Festigkeit schreiben:

$$18) \quad \left\{ \begin{aligned} k_o &= -\frac{R_n}{F} - \frac{M}{rF} - \frac{M a_o}{J} \\ k_u &= -\frac{R_n}{F} - \frac{M}{rF} + \frac{M a_u}{J} \end{aligned} \right.$$

## § 2.

### Die Formänderungen.

Ändert der Bogen in Folge der Belastung seine Form, so gehen die Coordinaten  $x$  und  $y$  in  $(x + \Delta x)$  und  $(y + \Delta y)$  über. Aus

$$dx = ds \cos \varphi$$

folgt

$$\begin{aligned} d(x + \Delta x) &= d(s + \Delta s) \cos(\varphi + \Delta \varphi) \\ &= ds [\cos \varphi \cos(\Delta \varphi) - \sin \varphi \sin(\Delta \varphi)] \\ &\quad + d\Delta s [\cos \varphi \cos(\Delta \varphi) - \sin \varphi \sin(\Delta \varphi)] \end{aligned}$$

oder, wenn man, des sehr kleinen Winkels  $\Delta \varphi$  wegen,  $\cos(\Delta \varphi) = 1$  und  $\sin(\Delta \varphi) = \Delta \varphi$  setzt und die kleine Grösse zweiter Ordnung  $d(\Delta s) \Delta \varphi$  vernachlässigt:

$$d(\Delta x) = -\Delta \varphi dy + \frac{d(\Delta s)}{ds} dx.$$

Analog ergibt sich aus

$$dy = ds \sin \varphi,$$

$$d(\Delta y) = +\Delta \varphi dx + \frac{d(\Delta s)}{ds} dy,$$

so dass:

$$\begin{aligned} \Delta x &= -\int \Delta \varphi dy + \int \varepsilon_0 dx + \text{Const.}, \\ \Delta y &= +\int \Delta \varphi dx + \int \varepsilon_0 dy + \text{Const.} \end{aligned}$$

Hierin ist, wegen

$$\frac{A d\varphi}{d\varphi} = \frac{d(A\varphi)}{d\varphi} = \omega,$$

$$A\varphi = \int \omega d\varphi + \text{Const.},$$

so dass sich die Coordinatenänderungen:

$$\Delta x = -\iint \omega d\varphi dy + \int \varepsilon_0 dx + \text{Const.}$$

$$\Delta y = +\iint \omega d\varphi dx + \int \varepsilon_0 dy + \text{Const.}$$

aus den Werthen  $M$  und  $R_n$ , durch welche  $\omega$  und  $\varepsilon_0$  in § 1 ausgedrückt wurden, ermitteln lassen.

Wir werden diese allgemeinen Gleichungen speciell auf einen Bogen anzuwenden haben, der bei  $A$  und  $B$  (Fig. 10) derart gestützt wird, dass, wenn wir die Horizontale durch  $A$  zur  $x$ -Achse, die Verticale zur  $y$ -Achse wählen, für  $x=0$  und  $x=2l$  auch  $\Delta y=0$  und  $\Delta x=0$  sich ergeben, während die Neigungswinkel  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  der in  $A$  und  $B$  an die Bogenaxe construirten Tangenten im Allgemeinen die Aenderungen  $\Delta\varphi_0$  und  $\Delta\varphi_1$  erleiden. Es ist dann

$$19) \quad \Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \int_0^x \omega d\varphi,$$

(wo  $\Delta\varphi_0$  die aus der Bedingung:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 \text{ für } x=0$$

gefolgerte Integrationsconstante).

Weiter sind nach Weglassung der Integrationsconstanten die Integrale in den für  $\Delta x$  und  $\Delta y$  gewonnenen Ausdrücken zwischen den Grenzen 0 und  $x$  zu nehmen.

Da nun (durch partielle Integration)

$$\int_0^x \Delta\varphi dy = [\Delta\varphi y]_0^x - \int_0^x y d(\Delta\varphi) = \Delta\varphi y - \int_0^x y d(\Delta\varphi)$$

ist, weil  $\Delta\varphi y$  für die Grenze Null verschwindet, und ebenso

$$\int_0^x \Delta\varphi dx = \Delta\varphi x - \int_0^x x d(\Delta\varphi)$$

wird, so folgt nach Einführung von

$$d(\Delta\varphi) = \omega d\varphi,$$

$$20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = -y \Delta\varphi + \int_0^x y \omega d\varphi + \int_0^x \varepsilon_0 dx \\ \Delta y = +x \Delta\varphi - \int_0^x x \omega d\varphi + \int_0^x \varepsilon_0 dy \end{array} \right.$$

oder, da

$$\omega d\varphi = \left( \varepsilon_0 - \frac{\mathfrak{M} r}{EJ} \right) d\varphi = \varepsilon_0 d\varphi + \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ}$$

ist:

$$21) \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \int_0^x \varepsilon_0 d\varphi + \int_0^x \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \\ \Delta x = \int_0^x \varepsilon_0 (y d\varphi + dx) + \int_0^x \frac{\mathfrak{M} y ds}{EJ} - \Delta\varphi y \\ \Delta y = - \int_0^x \varepsilon_0 (x d\varphi - dy) - \int_0^x \frac{\mathfrak{M} x ds}{EJ} + \Delta\varphi x, \end{array} \right.$$

worin

$$\varepsilon_0 = - \frac{1}{EF} \left\{ R_n + \frac{\mathfrak{M}}{r} \right\}.$$

Trägt man von der horizontalen  $\overline{AB}$  aus, den Abscissen  $x$  entsprechend, die  $\Delta y$  und  $\Delta x$  als Ordinaten auf, so erhält man 2 Curven, welche „Curven der Vertical- resp. der Horizontal-Verschiebungen“ heissen mögen. Die erste beansprucht, da die  $\Delta y$  beträchtlich grösser als die  $\Delta x$  ausfallen, besonderes Interesse, und soll auch kurz „Biegungscurve“ des Bogens genannt werden.

Es ist für die Folge wichtig, die Differentialgleichungen dieser Curven in bequemer Weise zu bilden.

Zunächst folgt aus

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta y)}{dx} &= + \Delta\varphi + \varepsilon_0 \frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2(\Delta y)}{dx^2} &= \frac{d(\Delta\varphi)}{dx} + \frac{d\varepsilon_0}{dx} \frac{dy}{dx} + \varepsilon_0 \frac{d^2 y}{dx^2} \end{aligned}$$

oder, wegen

$$\begin{aligned} d(\Delta\varphi) &= \varepsilon_0 d\varphi - \frac{\mathfrak{M} r d\varphi}{EJ} = -\varepsilon_0 \frac{ds}{r} + \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ}, \\ \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} &= \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ dx} + \varepsilon_0 \left[ \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{ds}{r dx} \right] + \frac{d\varepsilon_0}{dx} \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

und, wenn schliesslich

$$\frac{1}{r} = - \frac{d^2 y}{dx^2} \left( \frac{dx}{ds} \right)^3$$

gesetzt wird:

$$22) \quad \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ dx} + \varepsilon_0 \frac{d^2 y}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 \right] + \frac{d\varepsilon_0}{dx} \frac{dy}{dx}.$$

Nach Bestimmung der Curve der Verticalverschiebungen wird man diejenige der Horizontalverschiebungen zweckmässig finden, indem man aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

die Beziehung

$$d(s + \Delta s)^2 = d(x + \Delta x)^2 + d(y + \Delta y)^2$$

oder nach Vernachlässigung der kleinen Grössen höherer Ordnung die Relation

$$23) \quad d(\Delta s) ds = d(\Delta x) dx + d(\Delta y) dy$$

ableitet und hieraus

$$d(\Delta x) = d(\Delta s) \frac{ds}{dx} - d(\Delta y) \frac{dy}{dx}$$

oder

$$24) \quad \frac{d(\Delta x)}{dx} = \varepsilon_0 \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] - \frac{d(\Delta y)}{dx} \frac{dy}{dx}$$

folgert.

Die in diesem Paragraphen abgeleiteten Gleichungen werden nicht allein bei Berechnung der Deformationen Verwendung finden, sondern auch dazu dienen, gewisse secundäre Kräfte (Reactionen der Stützen), welche ausser den gegebenen primären Kräften (Belastungen) in den Ausdrücken für  $R_n$  und  $\mathfrak{M}$  vorkommen, zu ermitteln, da sich deren Bestimmung in gewissen Fällen nur unter Rücksichtnahme auf die Formänderungen der Bogenaxe ermöglichen lässt. Dabei wird sich der Einfluss der mit  $\varepsilon_0$  behafteten Glieder auf die Endergebnisse so gering erweisen, dass diese Glieder füglich vernachlässigt werden können, um so eher, als die in der Folge zu behandelnden Constructionen die Vorbedingungen der exacten Theorie ohnehin nicht scharf erfüllen. Diese Erkenntniss darf aber nicht verleiten, auch bei Berechnung der Deformationen die Glieder mit  $\varepsilon_0$  zu vernachlässigen, und überzeugen numerische Rechnungen schnell von den hierbei begangenen, zuweilen sehr erheblichen Fehlern. Allerdings ist die mit  $\varepsilon_0 = 0$  für die Biegungscurve gewonnene Gleichung

$$25) \quad E J' \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = \mathfrak{M}, \quad *)$$

welche mit der Gleichung der elastischen Linie eines Balkens übereinstimmt, vermöge ihrer Einfachheit wol geeignet, zu dieser Vernachlässigung zu verleiten; ebenso die sehr bequeme Beziehung

$$26) \quad \frac{d(\Delta x)}{dx} = - \frac{d(\Delta y)}{dy} \frac{dy}{dx}$$

### § 3.

#### Die äusseren Kräfte.

Nachdem in den vorigen Paragraphen die Spannungen und Formänderungen als Functionen der Werthe  $\mathfrak{M}$ ,  $R_n$  und  $R_t$  dargestellt worden sind, sollen diese Werthe unter der Voraussetzung abgeleitet werden, dass auf den Bogen nur eine vertical gerichtete Kraft wirkt. Es ist dieser Belastungsfall insofern der fundamentale, als es sich in den folgenden Untersuchungen stets um die Beanspruchung durch verticale

---

\*) Unter  $J'$  ist der constante Mittelwerth von  $J \frac{dx}{ds}$  verstanden.

Lasten handeln wird, und der Einfluss eines Systems concentrirter Lasten durch eine Summation, der einer stetig wirkenden Belastung durch eine Integration aus dem Einfluss einer Einzellast wird ermittelt werden können.

Der Bogen sei bei  $A$  und  $B$  (Figur 11) irgendwie unterstützt. Die Widerstände der Stützen, welche der in den Entfernungen  $a$  resp.  $b$  von den Verticalen durch die Schwerpunkte  $m$  und  $m_1$  der Endquerschnitte wirkenden Kraft  $P$  das Gleichgewicht halten und „Kämpferdrücke“ heissen, seien  $K$  und  $K_1$ . Sie mögen in den Abständen  $e$  und  $e_1$  von  $m$  und  $m_1$  angreifen.

Werden im Punkte  $m$  zwei sich aufhebende Kräfte  $K$  addirt, so bildet die eine dieser beiden mit dem Kämpferdruck ein Kräftepaar; die andere sei in die Componenten  $A$  (vertical) und  $H_A$  (horizontal) zerlegt. Daraus geht hervor, dass der Kämpferdruck  $K$  sich ersetzen lässt durch zwei in  $m$  angreifende Kräfte  $A$  und  $H_A$ , ferner durch ein Kräftepaar, dessen Moment (Stützenmoment) =  $\mathfrak{M}_A$  gesetzt werden möge. Ebenso lässt sich  $K_1$  ersetzen durch die in  $m_1$  angreifenden Kräfte  $B$  und  $H_B$  und das Moment  $\mathfrak{M}_B$ .

Zur Bestimmung der Unbekannten  $A$ ,  $B$ ,  $H_A$ ,  $H_B$ ,  $\mathfrak{M}_A$ ,  $\mathfrak{M}_B$  stehen im Allgemeinen nur die drei Bedingungen zur Verfügung:

- 1) die Summe der vertical wirkenden Kräfte muss Null sein;
- 2) die Summe der horizontal wirkenden Kräfte muss Null sein (d. h.  $H_A = H_B = H$ );
- 3) die Summe der Momente in Bezug auf irgend welchen Drehpunkt muss Null sein.

Deshalb müssen, falls der Charakter des zu behandelnden Bogens zu weiteren statischen Beziehungen nicht führt, die fehlenden Gleichungen aus der Theorie der Deformationen abgeleitet werden. Ein System, das ein solches Vorgehen nöthig macht, heisst „statisch unbestimmt“. Die Gleichungen, welche ausdrücken, dass die Deformation der Bogenaxe an bestimmte Bedingungen gebunden ist, nennen wir „Elasticitätsgleichungen“.

Wir werden drei Gattungen von Bogenträgern zu behandeln haben.

1) Der Bogen mit drei Gelenken. Das eine Gelenk liegt an der beliebigen Stelle  $x = s$ ,  $y = h$  (Fig. 12); die beiden anderen befinden sich an den Kämpfern. Die Kämpferdrücke müssen durch die Gelenkaxen gehen, weshalb  $\mathfrak{M}_A = 0$ ,  $\mathfrak{M}_B = 0$  wird, worauf die für die Punkte  $B$  und  $A^*$ ) aufgestellten Momentengleichungen zu den Werthen

$$A = \frac{Pb}{2l} + \frac{Hc}{2l}$$

$$B = \frac{Pa}{2l} - \frac{Hc}{2l}$$

---

\*) Wir bezeichnen stets die Verticalreactionen und die Auflagerpunkte mit denselben Buchstaben.

führen. Weiter muss das Moment für das Gelenk  $S$  gleich Null werden, wesshalb bei links von  $S$  gelegener Last  $P$

$$As - Hh - P(s - a) = 0,$$

daher:

$$27 \left\{ \begin{aligned} H &= \frac{P[bs - 2l(s - a)]}{2hl - cs} = \frac{Pa(2l - s)}{2hl - cs} \\ A &= \frac{P}{l} \left[ \frac{b}{2} + \frac{ac(2l - s)}{2hl - cs} \right] \\ B &= \frac{P}{l} \left[ \frac{a}{2} - \frac{ac(2l - s)}{2hl - cs} \right]. \end{aligned} \right.$$

Liegt  $P$  rechts vom Scheitel, so folgt:

$$28 \left\{ \begin{aligned} H &= \frac{Pbs}{2lh - cs} \\ A &= \frac{P}{l} \left[ \frac{b}{2} + \frac{bcs}{2lh - cs} \right] \\ B &= \frac{P}{l} \left[ \frac{a}{2} - \frac{bcs}{2lh - cs} \right]. \end{aligned} \right.$$

2) Der Bogen mit zwei Kämpfergelenken. (Fig. 13.) Wie vorhin erhält man  $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_B = 0$  mithin:

$$29 \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{Pb}{2l} + \frac{Hc}{2l} \\ B &= \frac{Pa}{2l} - \frac{Hc}{2l}, \end{aligned} \right.$$

während zur Bestimmung von  $H$  eine Elasticitätsgleichung aufzustellen bleibt.

3) Der Bogen ohne Gelenke, auch Bogen mit eingespannten Enden genannt, da die Unterstützung bei  $A$  und  $B$  so zu bewerkstelligen ist, dass die in  $m$  und  $m_1$  an die Bogenaxe construirten Tangenten ihre Lage nicht ändern. Die Behandlung desselben ist an die Aufstellung von drei Elasticitätsgleichungen gebunden.

Ausser den drei angeführten Systemen liessen sich leicht noch mehrere bilden; so könnte man den Bogen bei  $B$  mit einem Gelenk versehen (Fig. 14) und den Auflagerpunkt  $A$  mittelst eines Rollenlagers (analog wie bei den Balkenbrücken) nöthigen, sich auf der Geraden  $A' A''$  zu bewegen. Der Kämpferdruck  $K$  ist dann, wenn von den geringen Reibungswiderständen abgesehen wird, normal zu der  $A' A''$  gerichtet, während  $K_1$  durch den Schnittpunkt  $C$  der  $K$  mit der  $P$  gehen muss, da drei in derselben Ebene gelegene Kräfte nur dann im Gleichgewicht sind, wenn sie sich in einem Punkte schneiden.

Weiter könnte man den bei  $A$  mit einem Rollenlager versehenen Bogen bei  $B$  einspannen, und würde so zu einem statisch unbestimmten Systeme gelangen, welches die Aufstellung einer Elasticitätsgleichung erheischt.

Wir halten es jedoch nicht für nöthig, auf die Behandlung aller dieser möglichen, bislang aber nicht zur Ausführung gelangten Anordnungen einzugehen, werden vielmehr nur die drei zuerst angeführten Systeme untersuchen.

Indem wir zunächst die an den Kämpfern angreifenden Kräfte gegeben annehmen, erhalten wir für einen Querschnitt links von der Last  $P$  das „Angriffsmoment“ (Fig. 11)

$$30) \quad \mathfrak{M} = Ax - Hy + \mathfrak{M}_A$$

und für einen Querschnitt rechts von  $P$

$$\mathfrak{M}' = Ax - Hy - P(x - a) + \mathfrak{M}_A,$$

wofür auch

$$31) \quad \mathfrak{M}' = Bx' - Hy' + \mathfrak{M}_B$$

gesetzt werden darf. Man beachte nämlich, dass diejenigen Momente positiv sind, welche den Krümmungsradius  $r$  der Bogenaxe vergrößern, dass also stets die verticalen Auflagerreactionen  $A$  und  $B$  als positiv drehend einzuführen sind.

Die „Axialkraft“ für den Querschnitt  $(xy)$ , d. i. die Summe der Componenten der am linken Fragment angreifenden Kräfte parallel der Tangente im Punkte  $(xy)$  an die Bogenaxe, ist mit Berücksichtigung des auf Seite 2 bezüglich des Vorzeichens dieser Kräfte Festgesetzten, jenachdem  $(xy)$  links oder rechts von  $P$  liegt:

$$32) \quad R_n = A \sin \varphi + H \cos \varphi,$$

beziehungsweise:

$$33) \quad R'_n = (A - P) \sin \varphi + H \cos \varphi = -B \sin \varphi + H \cos \varphi.$$

Für die Transversalkraft erhält man:

$$34) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_t = A \cos \varphi - H \sin \varphi, \\ \text{resp. } R'_t = (A - P) \cos \varphi - H \sin \varphi = -(B \cos \varphi + H \sin \varphi). \end{array} \right.$$

Bevor zur Ableitung der Elasticitätsgleichungen, die nach den früheren Ausführungen zur Bestimmung der in den Ausdrücken für  $\mathfrak{M}$ ,  $R_n$  und  $R_t$  vorkommenden unbekanntten Kräfte dienen sollen, übergegangen werde, möge noch eine Relation abgeleitet werden, die besonders geeignet ist, die folgenden Rechnungen zu vereinfachen.

Liegen die Kämpfermittelpunkte in der nämlichen Horizontalen und ist die Bogenaxe ein symmetrischer Kreisbogen mit dem Radius  $r$ , dann wird (Fig. 15)

$$x = r(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) \quad ; \quad x' = r(\sin \varphi_0 + \sin \varphi)$$

$$y = r(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

und man findet die relative Längenänderung der Bogenaxe, falls  $(xy)$  links von  $P$  liegt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= -\frac{1}{EF} \left[ R_n + \frac{\mathfrak{M}}{r} \right] \\ &= -\frac{1}{EF} \left\{ A \left( \sin \varphi + \frac{x}{r} \right) + H \left( \cos \varphi - \frac{y}{r} \right) + \frac{\mathfrak{M}_A}{r} \right\} \end{aligned}$$

d. i.:

$$35) \quad \varepsilon_0 = -\frac{1}{EF} \left\{ A \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0 + \frac{\mathfrak{M}_A}{r} \right\}$$

also constant, wenn der Querschnitt  $F$  unveränderlich gedacht ist.

Für den rechts von  $P$  gelegenen Querschnitt  $(xy)$  erhält man

$$\varepsilon_0' = -\frac{1}{EF} \left\{ B \left( -\sin \varphi + \frac{x'}{r} \right) + H \left( \cos \varphi - \frac{y}{r} \right) + \frac{\mathfrak{M}_B}{r} \right\}$$

$$36) \quad \varepsilon_0' = -\frac{1}{EF} \left\{ B \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0 + \frac{\mathfrak{M}_B}{r} \right\}$$

oder auch, wenn

$$R_n' = (A-P) \sin \varphi + H \cos \varphi$$

$$\mathfrak{M}' = Ax - P(x-a) - Hy = \mathfrak{M}_a$$

gesetzt wird,

$$37) \quad \varepsilon_0' = -\frac{1}{EF} \left\{ A \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0 - P \sin \beta + \frac{\mathfrak{M}_A}{r} \right\}.$$

Bei kleiner Pfeilhöhe  $h$  wird man auch bei parabolischen Bögen, wegen der geringen Abweichung dieser von den Kreisbögen, für  $\varepsilon_0$  so wenig von einander differirende Werthe erhalten, dass man unter Begehen eines nur sehr geringen Fehlers  $\varepsilon_0$  constant anzunehmen berechtigt ist. Für diese Annahme, durch welche die Elasticitätsgleichungen eine bedeutende Vereinfachung erfahren, spricht noch der Umstand, dass die mit  $\varepsilon_0$  behafteten Glieder von so geringem Einfluss auf die Endresultate sind, dass selbst durch gänzliches Weglassen derselben genügend genaue Ergebnisse gewonnen werden. Weiter möge bereits hier darauf hingewiesen werden, dass die Anwendung der Elasticitätsgleichungen auf die Berechnung der Brückenträger, deren Querschnitt durchaus nicht constant ist, stets an gewisse vorläufige Annahmen bezüglich des Gesetzes, nach welchem  $F$  sich ändert, gebunden ist, dass also ohnehin den Anforderungen der exacten Theorie nicht scharf entsprechen werden kann.

Die Annahme  $\varepsilon_0 = \text{Const.}$  ist beim Parabelbogen etwa von demselben Werth wie die Annahme  $F = \text{Const.}$  beim Kreisbogen.

Wird in die Gleichungen 35 und 36

$$r = \frac{l^2 + h^2}{2h}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{l}{r}, \quad \cos \varphi_0 = 1 - \frac{h}{r}$$

eingeführt, so folgt

$$38) \quad \varepsilon_0 = -\frac{2h}{EF(l^2 + h^2)} \left[ Al + \frac{H}{2h}(l^2 - h^2) + \mathfrak{M}_A \right]$$

$$\varepsilon_0' = -\frac{2h}{EF(l^2 + h^2)} \left[ Bl + \frac{H}{2h}(l^2 - h^2) + \mathfrak{M}_B \right],$$

welche Werthe bei Berechnung parabolischer Bögen benutzt werden sollen.

§ 4.

Die drei Elasticitätsgleichungen.

Die auf Seite 13 für die Deformationen  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta x$  und  $\Delta y$  abgeleiteten Gleichungen (21) gehen mit  $x = 2l$ ;  $y = c$ ;  $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1$  über in

$$39) \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_0 + \int_0^{2l} \varepsilon_0 d\varphi + \int_0^{2l} \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \\ 0 = \int_0^{2l} \varepsilon_0 (y d\varphi + dx) + \int_0^{2l} y \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} - c \Delta\varphi_1 \\ 0 = -\int_0^{2l} \varepsilon_0 (x d\varphi - dy) - \int_0^{2l} x \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} + 2l \Delta\varphi_1; \end{array} \right.$$

denn es entsprechen dem festen Punkte  $B$  die Coordinatenänderungen  $\Delta x = 0$  und  $\Delta y = 0$ .

Nach Einführen der im vorigen Paragraphen  $R_n$  und  $\mathfrak{M}$  gefundenen Werthe enthalten die Relationen (39) die Unbekannten  $\mathfrak{M}_A$ ,  $A$ ,  $H$ ,  $\Delta\varphi_0$  und  $\Delta\varphi_1$ , von denen stets zwei bekannt sind.

So hat man beim Bogen mit zwei Kämpfergelenken

$$\mathfrak{M}_A = 0; \quad A = \frac{Pb}{2l} + \frac{Hc}{2l}$$

und beim Bogen ohne Gelenke

$$\Delta\varphi_0 = 0; \quad \Delta\varphi_1 = 0,$$

so dass sich im ersten Falle  $\Delta\varphi_1$ ,  $\Delta\varphi_0$  und  $H$ , im zweiten  $A$ ,  $H$  und  $\mathfrak{M}_A$  berechnen lassen. Hiernach sind die Bedingungen (39) die gesuchten Elasticitätsgleichungen.

[Beim Bogen mit 3 Gelenken ist  $H$  bekannt, doch wäre die Schlussfolgerung, dass deshalb eine der drei Gleichungen No. 39 überflüssig wird, fehlerhaft. Vielmehr werden die Formeln 39 ungültig, da  $\Delta\varphi$  eine discontinuirliche Funktion ist, die sich dort, wo das Gelenk  $S$  (Fig. 12) liegt, sprungweise ändert. Die endliche Differenz zwischen den Neigungswinkeln der nach der Deformation unmittelbar links und rechts neben dem Scheitelgelenk construirten Tangenten tritt als dritte Unbekannte auf. (Vergl. § 12.)]

Will man mit Hilfe der Gleichungen (39) den Einfluss einer durch irgend welche Ausführungsfehler u. s. w. hervorgerufenen Aenderung  $\Delta(2l)$  der Stützweite  $2l$  oder  $\Delta c$  der Höhendifferenz  $c$  der Stützpunkte ermitteln, so ersetze man die beiden letzten Bedingungen durch

$$\begin{aligned} \Delta(2l) &= \int_0^{2l} \varepsilon_0 (y d\varphi + dx) + \int_0^{2l} y \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} - c \Delta\varphi_1 \\ \Delta c &= -\int_0^{2l} \varepsilon_0 (x d\varphi - dy) - \int_0^{2l} x \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} + 2l \Delta\varphi_1. \end{aligned}$$

Ebenso kann man auch beim beiderseits eingespannten Bogen, indem man  $\Delta\varphi_1$  und  $\Delta\varphi_0$  nicht gleich Null setzt, den Einfluss einer nicht beabsichtigten Aenderung der Neigungswinkel der Kämpfertangenten auf die Beanspruchung des Bogens feststellen.

Obleich solche Ermittlungen mathematischen Schwierigkeiten in keiner Weise begegnen, glauben wir doch auf deren Durchführung um so eher verzichten zu dürfen, als Erfahrungen, welche allein über die wahrscheinlichen Werthe von  $\Delta(2l)$ ,  $\Delta c$ ,  $\Delta\varphi_1$  und  $\Delta\varphi_0$  zu orientiren vermögen, zur Zeit nicht vorliegen. Weiter werden wir bei Auflösung der Gleichungen den Fall  $c=0$  annehmen.

Setzen wir noch

$$\int_u^o y d\varphi + dx = [S_1]_u^o ; \quad \int_u^o x d\varphi - dy = [S_2]_u^o ,$$

wo  $u$  und  $o$  beliebige Integrationsgrenzen sind und beachten, dass die relative Längenänderung der Bogenaxe bei Beanspruchung des Bogens durch eine concentrirte Last in den Intervallen

$$x = 0 \text{ bis } x = a \text{ und } x = a \text{ bis } x = 2l$$

die verschiedenen constanten Werthe  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_0'$  annimmt, so finden wir

$$40) \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_0 + \varepsilon_0 [\varphi]_0^a + \varepsilon_0' [\varphi]_a^{2l} + \int_0^{2l} \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \\ 0 = \varepsilon_0 [S_1]_0^a + \varepsilon_0' [S_1]_a^{2l} + \int_0^{2l} y \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \\ 0 = -\varepsilon_0 [S_2]_0^a - \varepsilon_0' [S_2]_a^{2l} - \int_0^{2l} x \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} + 2l\Delta\varphi_1 . \end{array} \right.$$

Hierin sind die Integrale  $[\varphi]$ ,  $[S_1]$  und  $[S_2]$  gegebene, von der Gleichung der Bogenaxe abhängige Werthe. Man erhält:

1) für den Kreisbogen mit Rücksicht auf die Bezeichnungen in Fig. 15:

$$41) \left\{ \begin{array}{l} [\varphi_0]_0^a = [\varphi_0]_{+\varphi_0}^{+\beta} = \beta - \varphi_0 \\ [\varphi_0]_a^{2l} = [\varphi_0]_{+\beta}^{-\varphi_0} = -\varphi_0 - \beta \\ [\varphi_0]_0^{2l} = [\varphi_0]_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} = -2\varphi_0 , \end{array} \right.$$

weiter:

$$y = r(\cos \varphi - \cos \varphi_0) ; \quad dy = -r \sin \varphi d\varphi ; \\ x = r(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) ; \quad dx = -r \cos \varphi d\varphi ;$$

$$\int y d\varphi + dx = -r \cos \varphi_0 \int d\varphi$$

$$\int x d\varphi - dy = +r \sin \varphi_0 \int d\varphi$$

also:

$$42) \left\{ \begin{array}{l} [S_1]_0^{2l} = 2r\varphi_0 \cos \varphi_0 \\ [S_1]_0^a = r(\varphi_0 - \beta) \cos \varphi_0 \\ [S_1]_a^{2l} = r(\varphi_0 + \beta) \cos \varphi_0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} [S_2]_0^{2l} = -2r\varphi_0 \sin \varphi_0 \\ [S_2]_0^a = -r(\varphi_0 - \beta) \sin \varphi_0 \\ [S_2]_a^{2l} = -r(\varphi_0 + \beta) \sin \varphi_0 \end{array} \right. .$$

2) Für den Parabelbogen hat man (Fig. 16)

$$y = \frac{hx(2l-x)}{l^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2h(l-x)}{l^2}$$

daher

$$x = l - \frac{l^2}{2h} \operatorname{tg} \varphi$$

$$y = h - \frac{l^2}{4h} \operatorname{tg}^2 \varphi$$

$$\int y \, d\varphi + dx = h\varphi - \frac{l^2}{4h} \int \operatorname{tg}^2 \varphi \, d\varphi + x$$

$$= \varphi \left[ h + \frac{l^2}{4h} \right] - \frac{l^2}{4h} \operatorname{tg} \varphi + x$$

$$= \left\{ \operatorname{arctang} \frac{2h(l-x)}{l^2} \right\} \left\{ h + \frac{l^2}{4h} \right\} - \frac{l^2}{4h} \left\{ \frac{2h(l-x)}{l^2} \right\} + x$$

$$\int x \, d\varphi - dy = \int \left( l - \frac{l^2}{2h} \operatorname{tg} \varphi \right) d\varphi - y$$

$$= l\varphi + \frac{l^2}{2h} \ln \cos \varphi - y$$

$$= l \operatorname{arctang} \frac{2h(l-x)}{l^2} + \frac{l^2}{2h} \ln \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \right\} - y .$$

Bei flachen Bögen darf man, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen, setzen:

$$\operatorname{arctang} \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2h(l-x)}{l^2} ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 \dots \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\ln \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] = -\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{2h^2(l-x)^2}{l^4}$$

und findet dann

$$\int y d\varphi + dx = \frac{2h^2(l-x)}{l^2} + x$$

$$\int x d\varphi - dy = \frac{h}{l}(l-2x)$$

mithin

$$43) \left\{ \begin{array}{l|l} [S_1]_0^{2l} = 2l \left(1 - 2\frac{h^2}{l^2}\right) & [S_2]_0^{2l} = -4h \\ [S_1]_0^a = a \left(1 - 2\frac{h^2}{l^2}\right) & [S_2]_0^a = -2a\frac{h}{l} \\ [S_1]_a^{2l} = [S_0]_0^{2l} - [S_1]_0^a & [S_2]_a^{2l} = [S_2]_0^{2l} - [S_2]_0^a \\ & = b \left(1 - 2\frac{h^2}{l^2}\right) & = -2b\frac{h}{l} \text{ *)} \end{array} \right.$$

Sind mit Hilfe der Gleichungen (40) die Unbekannten  $H$ ,  $A$ ,  $M_A$ ,  $\Delta\varphi_0$  und  $\Delta\varphi_1$  ermittelt, so ergeben sich die Deformationen

1) im Intervalle  $x = 0$  bis  $x = a$

$$44) \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \varepsilon_0 [\varphi]_0^x + \int_0^x \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \\ \Delta x = -y \Delta\varphi + \varepsilon_0 [S_1]_0^x + \int_0^x y \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \\ \Delta y = +x \Delta\varphi - \varepsilon_0 [S_2]_0^x - \int_0^x x \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \end{array} \right.$$

2) im Intervalle  $x = a$  bis  $x = 2l$

$$45) \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \varepsilon_0 [\varphi]_0^a + \varepsilon'_0 [\varphi]_a^x + \int_0^x \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \\ \Delta x = -y \Delta\varphi + \varepsilon_0 [S_1]_0^a + \varepsilon'_0 [S_1]_a^x + \int_0^x y \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \\ \Delta y = +x \Delta\varphi - \varepsilon_0 [S_2]_0^a - \varepsilon'_0 [S_2]_a^x - \int_0^x x \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \end{array} \right.$$

\*) Bei geringen Pfeilhöhen weichen die Werthe  $S$  für Kreisbögen und Parabelbögen nur wenig von einander ab. Ist z. B.  $2l = 40^m$ ;  $h = 4^m$ , so wird für den Kreisbogen  $r = 52^m$ ;  $\varphi_0 = 22^\circ 37' 12''$ ;  $\text{arcus } \varphi_0 = 0,395$ ; mithin

$$[S_1]_0^{2l} = 2 \cdot (52 - 4) \cdot 0,395 = 37,92$$

$$[S_2]_0^{2l} = -2(20) \cdot 0,395 = -15,80$$

während sich für die Parabel

$$[S_1]_0^{2l} = 40 \left[1 - 2\frac{1}{5}\right] = 36,80$$

$$[S_2]_0^{2l} = -4 \cdot 4 = -16,00$$

ergeben. Diese Uebereinstimmung überzeugt auch von der Brauchbarkeit der für die Parabel abgeleiteten Näherungsformeln.

Es sei schliesslich noch darauf hingewiesen, dass die Anwendung der abgeleiteten Gleichungen auf Bögen mit variablen Querschnitten namentlich dann auf mathematische Schwierigkeiten nicht stösst, wenn der Querschnitt sprunghaft veränderlich, d. h. innerhalb gewisser Intervalle constant ist, weil man in diesem Falle nur nöthig hat, die Integrationen für die einzelnen Intervalle gesondert auszuführen. Da aber sehr langwierige numerische Rechnungen aus dieser correcten Behandlung erwachsen, ist es zur Erzielung praktisch verwerthbarer Endresultate durchaus nöthig, vereinfachende Annahmen zu machen, und empfehlen sich als solche

1) für den Kreisbogen die Voraussetzung

$$J = \text{Const.}$$

2) für den Parabelbogen die Einführung eines constanten Mittelwerthes  $J'$  aus den variablen Werthen  $J \frac{dx}{ds} = J \cos \varphi$ . Es gehen im letzteren Falle die in den obigen Gleichungen enthaltenen Integrale

$$\int \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ}; \quad \int y \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ}; \quad \int x \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ}$$

über in

$$\frac{1}{EJ'} \int \mathfrak{M} dx; \quad \frac{1}{EJ'} \int \mathfrak{M} y dx; \quad \frac{1}{EJ'} \int \mathfrak{M} x dx.$$

Selbst dann wenn beim Parabelbogen, unter Beibehaltung der letzt aufgeführten Integrale,  $J'$  durch  $J$  ersetzt wird, ist ein nennenswerther Fehler nicht zu gewärtigen. Dass überhaupt durch die hinsichtlich des Aenderungsgesetzes der  $J$  gemachten Annahmen wesentliche Incorrectheiten nicht entstehen, geht bis zur Evidenz daraus hervor, dass nur wenig von einander abweichende Resultate sich ergeben, wenn die Elasticitätsgleichungen einmal unter Einführung des kleinsten der am Bogen vorkommenden Werthe  $J$  dann mit Einsetzen des Maximalwerthes aufgelöst werden.

## § 5.

### Der Bogen mit 2 Kämpfergelenken.

(Berechnung von  $H$ .)

#### 1) Parabelbogen.

a) Anwendung der Elasticitätsgleichungen des § 4.

Von den drei zur Verfügung stehenden Elasticitätsgleichungen dient zur Berechnung von  $H$  die von den beiden anderen Unbekannten  $\Delta \varphi_0$  und  $\Delta \varphi_1$  unabhängige Bedingung:

$$0 = \varepsilon_0 [S_1]_0^a + \varepsilon'_0 [S_1]_a^{2l} + \frac{1}{EJ'} \int_0^{2l} y \mathfrak{M} dx.$$

Wird, einer concentrirten Last  $P$  entsprechend, (Fig. 16)

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= -\frac{2h}{EF(l^2+h^2)} \left\{ Al + \frac{H}{2h}(l^2-h^2) \right\} \\ \varepsilon'_0 &= -\frac{2h}{EF(l^2+h^2)} \left\{ Bl + \frac{H}{2h}(l^2-h^2) \right\} \\ \mathfrak{M} &= Ax - Hy - P(x-a)\end{aligned}$$

gesetzt und beachtet, dass in dem Ausdruck für  $\mathfrak{M}$  das mit  $P$  behaftete Glied nur in dem Intervalle  $x = a$  bis  $x = 2l$  vorkommt, da für die links von  $P$  gelegenen Querschnitte

$$\mathfrak{M} = Ax - Hy$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned}\frac{J'}{F} \frac{2h}{l^2+h^2} \left\{ Al(S_1^a_0) + Bl(S_1^{2l}_a) + \frac{H}{2h}(l^2-h^2)(S_1^{2l}_0) \right\} \\ = A \int_0^{2l} xy \, dx - P \int_a^{2l} (x-a)y \, dx - H \int_0^{2l} y^2 \, dx\end{aligned}$$

und hieraus

$$H = \frac{A \int_0^{2l} xy \, dx - P \int_a^{2l} (x-a)y \, dx - \frac{J'}{F} \frac{2hl}{l^2+h^2} \left\{ A(S_1^a_0) + B(S_1^{2l}_a) \right\}}{\int_0^{2l} y^2 \, dx + \frac{J'}{F} \frac{l^2-h^2}{l^2+h^2} (S_1^{2l}_0)}$$

Gleichung der Parabel:

$$y = \frac{h}{l^2} x(2l-x);$$

mithin:

$$\begin{aligned}\int_0^{2l} xy \, dx &= \frac{4}{3} hl^2; \quad \int_0^{2l} y^2 \, dx = \frac{16}{15} h^2 l \\ \int_a^{2l} (x-a)y \, dx &= \frac{h}{3} \left\{ 4l^2 + \frac{a^3}{l} - 4la - \frac{a^4}{4l^2} \right\} \\ A &= \frac{P(2l-a)}{2l}; \quad B = \frac{Pa}{2l},\end{aligned}$$

und schliesslich:

$$H = P \frac{\frac{h}{12} \left[ 8al - 4 \frac{a^3}{l} + \frac{a^4}{l^2} \right] - \frac{J'}{F} \frac{2hl}{l^2+h^2} \left[ (S_1^a_0) + \frac{a}{2l} \left\{ (S_1^{2l}_a) - (S_1^a_0) \right\} \right]}{\frac{16}{15} h^2 l + \frac{J'}{F} \frac{l^2-h^2}{l^2+h^2} (S_1^{2l}_0)}$$

Werden, unter Voraussetzung eines flachen Bogens die auf Seite 22 angegebenen Näherungswerthe der Integrale  $(S_1)$  eingeführt, so ergibt sich

$$46) \quad H = P \frac{\frac{5}{64} \frac{(8l^3 - 4a^2l + a^3) a}{hl^3} - \frac{15 J'}{8 F} \frac{a(2l-a)(l^2-2h^2)}{hl^3(l^2+h^2)}}{1 + \frac{15 J'}{8 F} \frac{(l^2-h^2)(l^2-2h^2)}{l^2 h^2 (l^2+h^2)}}$$

Setzt man näherungsweise

$$\int_0^{2l} (y d\varphi + dx) = \int_0^{2l} dx = 2l$$

ferner

$$\varepsilon_0 = - \frac{H}{EF}$$

d. i. gleich der relativen Längenänderung der Axe eines geraden Stabes von der Länge  $2l$ , welcher durch  $H$  gedrückt wird, so erhält man die Gleichung

$$\frac{H2l}{EF} = \frac{1}{EJ'} \int_0^{2l} \mathfrak{M} y dx$$

und hieraus die von Fränkel abgeleitete Formel\*)

$$47) \quad H = \frac{5P}{64hl^3} \frac{a(8l^3 - 4a^2l + a^3)}{1 + \frac{15}{8} \frac{J'}{Fh^2}}$$

Winkler\*\*) vernachlässigt bei Parabelbögen die relative Längenänderung der Bogenaxe vollständig, setzt also  $\varepsilon_0 = 0$  und findet

$$48) \quad H = \frac{5P}{64} \frac{a(8l^3 - 4a^2l + a^3)}{hl^3}$$

Um diese 3 Werthe in einem speciellen Falle zu vergleichen, sei  $l = 15^m$ ,  $h = 5^m$ ,  $a = 12^m$ ,  $P = 12$  Tons gewählt und der Bogen aus zwei durch ein Gitterwerk verbundenen parallelen Gurten bestehend gedacht. Bedeutet dann  $f$  den Querschnitt einer Gurtung,  $h_1$  den Abstand der Gurtschwerpunkte, so darf  $J = f \frac{h_1^2}{2}$  und  $F = 2f$  gesetzt werden.

Wird jetzt  $\frac{J'}{F} = \frac{J}{F} = \frac{h_1^2}{4}$  angenommen und  $h_1 = 1,6^m$  gewählt, so folgt

$$\frac{J}{F} = 0,64 \text{ und}$$

$$\text{nach Formel 48) } H = 13,39'$$

$$\text{ - - - 47) } H = \frac{13,39}{1 + 0,048} = 12,78'$$

$$\text{ - - - 46) } H = \frac{13,39 - 0,01}{1 + 0,030} = 12,99'$$

\*) Fränkel, Berechnung eiserner Bogenbrücken, Civil-Ingenieur 1867, S. 57.

\*\*) Winkler, Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Prag 1867, S. 309. Formel 48 ist zuerst von Darcel in den Annales des ponts et chaussées, 1862, mittelst der Navier'schen Theorie abgeleitet worden.

Ersetzt man Formel 46) durch:

$$H = \frac{5}{64} \frac{Pa(8l^3 - 4a^2l + a^3)}{l^3h} \\ 1 + \frac{15}{8} \frac{J'}{F} \frac{(l^2 - h^2)(l^2 - 2h^2)}{l^2h^2(l^2 + h^2)}$$

so findet man im vorliegenden Falle  $H = 13,00'$ .

b) Genauere Berechnung von  $H$ .

Bei Berechnung der Angriffsmomente wurde bislang auf die durch die Deformation des Bogens bedingte Aenderung der Hebelarme der angreifenden Kräfte nicht gerücksichtigt, ebenso wie bei Bestimmung der  $R_n$  die Aenderung des Winkels  $\varphi$  vernachlässigt wurde. Genauer ist zu setzen, falls der Querschnitt links von der Last  $P$  liegt,

$$\mathfrak{M} = A(x + \Delta x) - H(y + \Delta y)$$

$$R_n = A \sin(\varphi + \Delta\varphi) + H \cos(\varphi + \Delta\varphi)$$

und, wenn er rechts von  $P$  sich befindet:

$$\mathfrak{M}' = B(x' + \Delta x') - H(y + \Delta y)$$

$$R'_n = -B \sin(\varphi + \Delta\varphi) + H \cos(\varphi + \Delta\varphi).$$

In gewissen Fällen ist zum mindesten eine „theilweise“ Berücksichtigung der Aenderungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta\varphi$  geradezu geboten. Es genügt, an die Biegefestigkeit der geradlinigen Stäbe zu erinnern und darauf hinzuweisen, dass bei Beanspruchung solcher Stäbe durch Transversalkräfte und eine parallel der Stabaxe wirkende Axialkraft die Angriffsmomente wesentlich dadurch geändert werden können, dass bei Eintreten der Deformation der Hebelarm der Axialkraft sich ändert. Weiter ist bekannt, dass die Discussion dieses Belastungsfalles schliesslich durch Specialisirung zu den wichtigen Lehren von der Knickfestigkeit führt.

Durch numerische Rechnungen überzeugt man sich, dass die Glieder  $H\Delta y$  keineswegs von verschwindendem Einfluss auf die Endresultate sind und, wenn man auch — mit Rücksicht auf die sehr langwierigen Rechnungsoperationen — sich wol kaum entschliessen dürfte, die Maximalmomente eines Bogenträgers in dieser exacten Weise zu berechnen, so ist es doch nicht uninteressant, den Einfluss dieser Glieder auf den Werth  $H$  zu verfolgen, umsomehr als das hierdurch gewonnene Resultat zur Bildung einer sehr einfachen Näherungsformel Veranlassung giebt. Die ganz unwesentlichen Glieder  $A\Delta x$  und  $B\Delta x'$  sollen vernachlässigt werden; weiter mögen die für  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_0'$  früher angenommenen constanten Ausdrücke beibehalten werden.

Unter dieser Voraussetzung geht die auf Seite 13 abgeleitete Differentialgleichung der Biegungcurve für den Curvenzweig zwischen  $x = 0$  und  $x = a$  (Figur 17) über in

$$\frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = \varepsilon_0 \left[ 1 + \cos^2 \varphi \right] \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\mathfrak{M}}{EJ}$$

und für den Curvenzweig zwischen  $x' = 0$  und  $x' = b$  in

$$\frac{d^2 \Delta y'}{d x'^2} = \varepsilon'_0 \left[ 1 + \cos^2 \varphi' \right] \frac{d^2 y'}{d x'^2} + \frac{\mathfrak{N}'}{E J'}$$

Darin ist

$$\mathfrak{N} = \frac{P b}{2 l} x - H (y + \Delta y)$$

$$\mathfrak{N}' = \frac{P a}{2 l} x' - H (y' + \Delta y')$$

Wird

$$1 + \cos^2 \varphi = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - + \dots$$

gesetzt, so folgt unter Vernachlässigung der  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$ ,  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^6$  . . . .

$$I. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \Delta y}{d x^2} = \varepsilon_0 \frac{d^2 y}{d x^2} \left[ 2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] + \frac{1}{E J'} \left[ \frac{P b}{2 l} x - H y - H \Delta y \right] \\ \frac{d^2 \Delta y'}{d x'^2} = \varepsilon_0 \frac{d^2 y'}{d x'^2} \left[ 2 - \left(\frac{dx'}{dy'}\right)^2 \right] + \frac{1}{E J'} \left[ \frac{P a}{2 l} x' - H y' - H \Delta y' \right] \end{array} \right. ^*)$$

Hat man die Verschiebung  $\Delta y$  bestimmt, so kann man aus der auf Seite 14 abgeleiteten Gleichung

$$d(\Delta x) = d(\Delta s) \frac{ds}{dx} - d(\Delta y) \frac{dy}{dx}$$

die Bedingung

$$\int_0^{2l} d(\Delta x) = \int_0^{2l} \left[ d(\Delta s) \frac{ds}{dx} - d(\Delta y) \frac{dy}{dx} \right] = 0$$

zur Ermittlung von  $H$  folgern.

\*) Mit Rücksichtnahme auf die  $\Delta x$  würde man erhalten:

$$\frac{d^2 \Delta y}{d x^2} = \varepsilon_0 (1 + \cos^2 \varphi) \frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{E J'} \left[ \frac{P b}{2 l} x - H y - H \Delta y \right] + \frac{1}{E J'} \frac{P b}{2 l} \Delta x$$

und hieraus

$$\frac{d^3 \Delta y}{d x^3} = \varepsilon_0 \frac{d \left[ \frac{d^2 y}{d x^2} (1 + \cos^2 \varphi) \right]}{d x} + \frac{1}{E J'} \left[ \frac{P b}{2 l} - H \frac{dy}{dx} - H \frac{d \Delta y}{d x} \right] + \frac{1}{E J'} \frac{P b}{2 l} \frac{d \Delta x}{d x},$$

in welche Gleichung aus:

$$d(\Delta x) dx = d(\Delta s) ds - d(\Delta y) dy$$

der Werth

$$\frac{d \Delta x}{d x} = \varepsilon_0 \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - \frac{d(\Delta y) dy}{d x dx}$$

einzuführen ist.

Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned} \int_0^{2l} d(\Delta y) \frac{dy}{dx} &= \left( \Delta y \frac{dy}{dx} \right)_0^{2l} - \int_0^{2l} \Delta y \frac{d^2y}{dx^2} dx \\ &= \frac{2h}{l^2} \int_0^{2l} \Delta y dx, \end{aligned}$$

denn es verschwindet  $\left( \Delta y \frac{dy}{dx} \right)$  für die obere wie für die untere Grenze und es ist weiter

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{2h}{l^2}.$$

Daher die Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned} \int_0^{2l} d(\Delta s) \frac{ds}{dx} &= \frac{2h}{l^2} \int_0^{2l} \Delta y dx \\ \int_0^{2l} \varepsilon_0 \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 dx &= \frac{2h}{l^2} \int_0^{2l} \Delta y dx \end{aligned}$$

oder, da  $\varepsilon_0$  ebenso wie  $\Delta y$  in den Intervallen  $x = 0$  bis  $x = a$  und  $x' = 0$  bis  $x' = b$  verschiedene Werthe annimmt,

$$\varepsilon_0 \int_0^a \left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right) dx + \varepsilon_0' \int_0^b \left( 1 + \left( \frac{dy'}{dx'} \right)^2 \right) dx' = \frac{2h}{l^2} \int_0^a \Delta y dx + \frac{2h}{l^2} \int_0^b \Delta y' dx'.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx &= \int \left( 1 + \frac{4h^2(l-x)^2}{l^4} \right) dx \\ &= x \left\{ 1 + \frac{4h^2}{3l^4} (3l^2 - 3lx + x^2) \right\} \end{aligned}$$

so dass, wenn

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{2h} \left\{ \varepsilon_0 a \left[ 1 + \frac{4h^2}{3l^4} (3l^2 - 3al + a^2) \right] \right. \\ \left. + \varepsilon_0' b \left[ 1 + \frac{4h^2}{3l^4} (3l^2 - 3bl + b^2) \right] \right\} = \mathfrak{B} \end{aligned}$$

gesetzt wird, die Relation zur Berechnung von  $H$  lautet

$$\mathfrak{B} = \int_0^a \Delta y dx + \int_0^b \Delta y' dx'.$$

Die Differentialgleichungen I gehen mit

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2h}{l^2} (l-x); & \frac{d^2y}{dx^2} &= - \frac{2h}{l^2} \\ \frac{H}{EJ'} &= \beta^2; & \frac{8h^3}{l^6} \varepsilon_0 \frac{EJ'}{H} &= D; & \frac{8h^3}{l^6} \varepsilon_0' \frac{EJ'}{H} &= D' \end{aligned}$$

über in

$$\frac{d^2 Ay}{dx^2} + \beta^2 Ay = \beta^2 \left\{ \frac{Pbx}{2lH} - y - D \left[ \frac{l^4}{2h^2} - l^2 - x^2 + 2xl \right] \right\}$$

$$\frac{d^2 Ay'}{dx'^2} + \beta^2 Ay' = \beta^2 \left\{ \frac{Pax'}{2lH} - y' - D' \left[ \frac{l^4}{2h^2} - l^2 - x'^2 + 2x'l \right] \right\}.$$

Ihrer allgemeinen Form

$$\frac{d^2 Ay}{dx^2} + \beta^2 Ay = f(x),$$

worin  $f(x)$  eine ganze algebraische Funktion von der Art

$$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots$$

(unter  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  constante Coëfficienten verstanden) entspricht das Integral:

$$Ay = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + \frac{f(x)}{\beta^2} - \frac{f''(x)}{\beta^4} + \frac{f''''(x)}{\beta^6} - + \dots$$

weshalb

$$Ay = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + \frac{Pbx}{2lH} - y - D(2xl - x^2) + \mathfrak{G}$$

$$Ay' = C_1' \cos \beta x' + C_2' \sin \beta x' + \frac{Pax'}{2lH} - y' - D'(2x'l - x'^2) + \mathfrak{G}'.$$

Dabei ist

$$\mathfrak{G} = D l^2 \left( 1 - \frac{l^2}{2h^2} \right) - \frac{2}{\beta^2} \left( \frac{h}{l^2} + D \right)$$

$$\mathfrak{G}' = D' l^2 \left( 1 - \frac{l^2}{2h^2} \right) - \frac{2}{\beta^2} \left( \frac{h}{l^2} + D' \right).$$

Die Integrationsconstanten  $C_1, C_2, C_1', C_2'$  ergeben sich aus den Bedingungen:

$$x = 0 \text{ muss liefern } Ay = 0 \quad (\text{und } y = 0)$$

$$x' = 0 \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad Ay' = 0 \quad (\text{ " } \quad y' = 0)$$

$$x = a \text{ u. } x' = b \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad Ay = Ay' \quad (\text{ " } \quad y = y')$$

ferner  $\frac{dAy}{dy} = -\frac{dAy'}{dx'} \left( \text{und } \frac{dy}{dx} = -\frac{dy'}{dx'} \right).$

Man findet die Gleichungen

$$C_1 = -\mathfrak{G}$$

$$C_1' = -\mathfrak{G}'$$

$$\text{II.} \begin{cases} C_2 \sin \beta a - C_2' \sin \beta b = \mathfrak{G}'(1 - \cos \beta b) - \mathfrak{G}(1 - \cos \beta a) + ab(D - D') \\ C_2 \cos \beta a + C_2' \cos \beta b = -\mathfrak{G} \sin \beta a - \mathfrak{G}' \sin \beta b - \frac{P}{H\beta} + \frac{2D[l-a] + 2D'(l-b)}{\beta} \end{cases}$$

und, nachdem man hieraus  $C_1, C_1', C_2, C_2'$  berechnet hat, die Bedingungs-  
gleichung

$$\mathfrak{B} = \int_0^a Ay \, dx + \int_0^b Ay' \, dx' = \int_0^a (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \, dx + \int_0^b (C_1' \cos \beta x' + C_2' \sin \beta x') \, dx' \\ + \frac{Pb}{4lH} a^2 + \frac{Pa}{4lH} b^2 - \int_0^{2l} y \, dx - D \int_0^a (2xl - x^2) \, dx - D' \int_0^b (2x'l - x'^2) \, dx' \\ + \mathfrak{C}a + \mathfrak{C}'b$$

zur Berechnung von  $H$ . Die Ausführung der Integrationen liefert:

$$\text{III.} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{C_1}{\beta} \sin \beta a - \frac{C_2}{\beta} (\cos \beta a - 1) + \frac{C_1'}{\beta} \sin \beta b - \frac{C_2'}{\beta} (\cos \beta b - 1) + \frac{Pba}{2H} \\ &\quad - \frac{4hl}{3} - Da^2 \left( l - \frac{a}{3} \right) - D'b^2 \left( l - \frac{b}{3} \right) + \mathfrak{C}a + \mathfrak{C}'b. \end{aligned} \right.$$

Da es hiernach nicht möglich ist, für  $H$  einen geschlossenen Ausdruck zu gewinnen, wird man — etwa mit Hilfe der Formeln 46, 47 oder 48 — einen Näherungswert wählen und zur Berechnung der  $\beta$ ,  $C_1$ ,  $C_1'$ ,  $C_2$ ,  $C_2'$ ,  $D$ ,  $D'$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{C}'$  verwenden, worauf sich Gleichung III leicht nach  $H$  auflösen lässt. Bei nicht genügender Uebereinstimmung des Resultates mit dem erst angenommenen Näherungswert ist die Rechnung in der Weise zu wiederholen, dass die Grössen  $\beta$ ,  $C_1$ ,  $C_1'$ , ... mit Hilfe des letztgefundenen  $H$  bestimmt werden.

Werden die Glieder mit  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_0'$  vernachlässigt, so erhält man eine Formel, welche, mit Formel 48 verglichen, über den Einfluss der  $HAy$  orientirt, da No. 48 ebenfalls aus der Vernachlässigung der  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_0'$  hervorging.

Mit  $\varepsilon_0 = 0$  und  $\varepsilon_0' = 0$  ergibt sich

$$\mathfrak{B} = 0; \quad D = 0; \quad D' = 0 \\ \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' = -\frac{2h}{\beta^2 l^2} = -C_1 = -C_1',$$

wonach die Gleichungen II übergehen in

$$C_2 \sin \beta a - C_2' \sin \beta b = \frac{2h}{\beta^2 l^2} (\cos \beta b - \cos \beta a) \\ C_2 \cos \beta a + C_2' \cos \beta b = \frac{2h}{\beta^2 l^2} (\sin \beta b + \sin \beta a) - \frac{P}{H\beta}.$$

Hieraus folgt

$$C_2 = \frac{\frac{2h}{\beta^2 l^2} (1 - \cos 2\beta l) - \frac{P}{H\beta} \sin \beta b}{\sin 2\beta l} \\ C_2' = \frac{\frac{2h}{\beta^2 l^2} (1 - \cos 2\beta l) - \frac{P}{H\beta} \sin \beta a}{\sin 2\beta l}.$$

Jetzt geht III über in

$$49) \quad 0 = \left\{ \mathfrak{A} - \frac{4h}{l} \right\} \frac{1}{\beta^2} + \frac{Pab}{2H} - \frac{4hl}{3},$$

worin

$$\mathfrak{A} = \frac{\frac{4h}{\beta^2 l^2} (1 - \cos 2\beta l) - \frac{P}{H\beta} (\sin \beta a + \sin \beta b - \sin 2\beta l)}{\frac{1}{\beta} \sin 2\beta l}$$

d. i.

$$\mathfrak{A} = \frac{4h}{\beta l^2} \operatorname{tg} \beta l - \frac{2P}{H} \frac{\sin \frac{\beta a}{2} \sin \frac{\beta b}{2}}{\cos \beta l}$$

Da die Werthe  $\beta l$  stets sehr klein ausfallen, \*) darf man

$$1 - \cos 2\beta l = 2\beta^2 l^2 - \frac{2}{3} \beta^4 l^4$$

also wegen  $\beta^2 = \frac{H}{EJ}$ ,

$$\frac{4h}{\beta^2 l^2} (1 - \cos 2\beta l) = 8h \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{H l^2}{EJ} \right]$$

setzen, ferner

$$\sin \beta a = \beta a - \frac{\beta^3 a^3}{6}$$

$$\sin \beta b = \beta b - \frac{\beta^3 b^3}{6}$$

$$\sin 2\beta l = 2\beta l - \frac{8\beta^3 l^3}{6}$$

$$\frac{\sin \beta a + \sin \beta b - \sin 2\beta l}{\beta} = \frac{H l a b}{EJ}$$

Man findet dann

$$\mathfrak{A} = \frac{4h}{l} \frac{1 - \frac{1}{3} \frac{Hl}{EJ} - \frac{Pab}{8EJh}}{1 - \frac{2}{3} \frac{Hl^2}{EJ}}$$

und gelangt zu der Gleichung:

$$0 = \left( \frac{Pab}{2H} - \frac{4lh}{3} \right) \frac{\frac{2}{3} \frac{Hl^2}{EJ}}{\frac{2}{3} \frac{Hl^2}{EJ} - 1},$$

deren Lösung

50)

$$H = \frac{3Pab}{8hl} \quad (\text{Clippin'sche Holz})$$

ist. Dieser Werth möge in einem speciellen Falle geprüft werden.

\*) In dem folgenden Zahlenbeispiele ist  $\beta l = 0,008551$ .

Es sei  $l = 15^m$ ,  $h = 4^m$ ,  $a = b = l$ ,  $P = 13^t$ . Der Träger bestehe aus 2 parallelen Gurten von je  $250 \square^{cm}$  Querschnitt, bei  $1,0^m$  Abstand der Gurtquerschnitte, so dass

$$J' = \frac{0,0250 \cdot 1,0^2}{2} = 0,0125 \text{ Meter}^4$$

und wegen  $E = 20\,000\,000^t$  pro  $\square^m$  (Material: Schmiedeeisen)

$$EJ' = 250\,000^t m^2.$$

Nach No. 50 wird

$$H = \frac{3Pl}{8h} = \frac{3 \cdot 13 \cdot 15}{8 \cdot 4} = 18,28^t.$$

$$(\beta l)^0 = l \sqrt{\frac{H}{EJ'}} = 7^\circ 20' 56'', 6279; \log \beta l = \log \sqrt{\frac{H}{EJ'}} = 0,9320181 - 3$$

$$\mathfrak{A} = \frac{4h}{\beta l^2} \operatorname{tg} \beta l - \frac{2P}{H} \sin^2 \frac{\frac{1}{2}\beta l}{\cos \beta l} = 1,0667002$$

$$\frac{4h}{l} = 1,0666667$$

$$\mathfrak{A} - \frac{4h}{l} = 0,0000335$$

$$\left(\mathfrak{A} - \frac{4h}{l}\right) EJ' = 8,375 \quad .$$

Die Gleichung 49 geht nach Multipliciren mit  $H$  über in

$$0 = \left(\mathfrak{A} - \frac{4h}{l}\right) EJ + \frac{Pab}{2} - \frac{4hl}{3} H$$

und nach Einführen der Zahlenwerthe in

$$0 = 8,375 + 13 \frac{15^2}{2} - \frac{4 \cdot 4 \cdot 15}{3} H$$

woraus

$$H = 18,38^t$$

welcher Werth von 18,28 so wenig abweicht, dass ein Corrigiren überflüssig ist.

Die Formel 48, welche ebenfalls unter Annahme von  $\varepsilon_0 = 0$  abgeleitet worden war, würde

$$H = \frac{25}{64} P \frac{l}{h} = \frac{25}{64} 13 \frac{15}{4} = 19,039^t$$

liefern, und lässt die nicht unbedeutende Differenz erkennen, dass die Rücksichtnahme auf die Glieder  $H\Delta y$  mit demselben Rechte gefordert werden könnte, wie die Beachtung der von  $\varepsilon_0$  abhängigen Glieder. Es lassen sich jedoch vom Standpunkte des „praktischen Brückenbaus“ aus eine Reihe von Gründen aufstellen, welche leicht überzeugen, dass die Anwendung so complicirter Formeln, wie sie sich aus Berücksichtigung

von  $H\Delta y$  und  $\varepsilon_0$  ergeben, eine sehr müssige Arbeit ist, und dass man gut thut, sich der einfachsten Formel zu bedienen. Wir verweisen in dieser Beziehung auf das diesem Paragraphen angehängte Resumé.

c) Andere Ableitung der Formel: 
$$H = \frac{3 P a b}{8 h l} .$$

Die erste der drei Elasticitätsgleichungen (Seite 20) geht mit  $\varepsilon_0 = 0$  und  $\varepsilon_0' = 0$  über in

$$\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_0 + \frac{1}{EJ'} \int_0^{2l} \mathfrak{M} dx$$

und wegen  $\mathfrak{M} = Ax - Hy - P(x - a)$  in

$$(\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_0) EJ' = A \int_0^{2l} x dx - H \int_0^{2l} y dx - P \int_a^{2l} (x - a) dx$$

woraus

$$H = \frac{\frac{Pab}{2l} - EJ'(\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_0)}{F_B} ,$$

unter  $F_B$  den Inhalt der von Bogenaxe und  $x$ -Axe eingeschlossenen Fläche verstanden.

Berechnet man nun  $EJ'(\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_0)$ , indem man  $H$  aus einer der Formeln (46), (47) oder (48) ermittelt, so ergeben sich stets so geringe Werthe, dass der Gedanke nahe gelegt wird, das Glied ganz zu streichen. Geschieht dies, so folgt

$$H = \frac{Pab}{2l F_B}$$

und speciell für den Parabelbogen wegen

$$F_B = \frac{4hl}{3}$$

$$H = \frac{3Pab}{8lh} .$$

Diese Ableitung lehrt, dass man die Formel (50) auch als Näherungsformel für flache Kreisbögen ansehen darf, denn, dass das Glied

$$FJ'(\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_0)$$

vernachlässigbar ist, beweist der Umstand, dass sich Formel (50) auf ganz anderem Wege aus einer exacteren Untersuchung ergeben hat. Speciell beim flachen Kreisbogen ist  $F_B$  so wenig von  $\frac{4hl}{3}$  verschieden, dass man ohne Bedenken Formel 50 anwenden darf. Wir werden noch zu zeigen haben, dass auch dann, wenn ein System verschiedener Lasten vorliegt,

die aus No. 50 berechneten  $H$  mit den auf anderem Wege für den Kreisbogen gewonnenen eine durchaus befriedigende Uebereinstimmung bekunden.

Man kann schliesslich noch die Formel 50) aus der Formel 48) ableiten, indem man letztere auf die Form

$$H = \frac{5}{64} \frac{Pab}{l^3 h} (4l^2 + 2la - a^2)$$

bringt und den Factor:  $4l^2 + 2la - a^2$ , welcher zwischen  $4l^2$  (für  $a = 0$ ) und  $5l^2$  (für  $a = l$ ) liegt, durch einen constanten Mittelwerth ersetzt. Dieser ist nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$\frac{1}{l} \int_0^l (4l^2 + 2la - a^2) da = \frac{14}{3} l^2,$$

so dass

$$H = \frac{5}{64} \frac{14}{3} \frac{Pab}{lh} = \frac{35}{12 \cdot 8} P \frac{ab}{lh}$$

wird, wofür

$$H = \frac{3}{8} P \frac{ab}{lh}$$

gesetzt werden darf.

In ähnlicher Weise wurde zuerst durch Fränkel nachgewiesen, dass No. 50) Näherungsformel von 48) ist, während zuerst von Engesser aus der Kleinheit der Differenz  $\mathcal{A}\varphi_1 - \mathcal{A}\varphi_0$  auf die Formel geschlossen wurde.

Die von uns gewählte Ableitung bezweckt darzuthun, dass man folgerichtiger No. 48) als Annäherungsergebnis der No. 50) aufzufassen hat, da bei Ableitung der ersteren sowol  $\varepsilon_0$  als auch  $H\mathcal{A}y$ , bei Bildung der No. 50) hingegen nur  $\varepsilon_0$  vernachlässigt worden ist. In Erwägung dessen dürfte es um so weniger schwer fallen, sich für Anwendung der einfachen Formel 50) zu entscheiden.

## 2. Kreisbogen.

Setzt man in die Elasticitätsgleichung

$$0 = \varepsilon_0 (S_1)_0^a + \varepsilon_0' (S_1)_a^{2l} + \frac{1}{EJ} \int_0^{2l} y \mathfrak{M} ds$$

die Werthe

$$\varepsilon_0 = - \frac{1}{EF} [A \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0]$$

$$\varepsilon_0' = - \frac{1}{EF} [B \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0],$$

so folgt analog wie für den Parabelbogen

$$H = \frac{A \int_0^{2l} x y ds - P \int_a^{2l} (x-a) y ds - \frac{J}{F} \sin \varphi_0 \left[ A (S_1)_0^a + B (S_1)_a^{2l} \right]}{\int_0^{2l} y^2 ds + \frac{J}{F} \cos \varphi_0 (S_1)_0^{2l}}$$

Darin ist (Fig. 15)

$$A = \frac{Pb}{2l} = \frac{P}{2} \frac{\sin \varphi_0 + \sin \beta}{\sin \varphi_0}; \quad B = \frac{P}{2} \frac{\sin \varphi_0 - \sin \beta}{\sin \varphi_0}$$

$$x = r (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$$

$$y = r (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

$$(x-a) = r (\sin \beta - \sin \varphi),$$

$$\int_0^{2l} x y ds = -r^3 \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi$$

$$= 2r^3 \sin \varphi_0 [\varphi_0 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0]$$

$$\int_0^{2l} y^2 ds = -r^3 \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)^2 d\varphi$$

$$= (3 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \varphi_0 - 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0) r^3$$

$$\int_a^{2l} (x-a) y ds = -r^3 \int_{\beta}^{-\varphi_0} (\sin \beta - \sin \varphi) (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi$$

$$= -r^3 [\sin \beta \cos \varphi_0 (\varphi_0 + \beta) + \cos \varphi_0 (\cos \beta - \cos \varphi_0) - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_0 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta - \sin \beta \sin \varphi_0]$$

so dass mit Berücksichtigung der auf Seite 22 angegebenen Werthe der Integrale [S]:

$$51) \quad H = \frac{P}{2} \frac{\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \beta + 2 \cos \varphi_0 (\cos \beta - \cos \varphi_0) - 2 \left[ 1 + \frac{J}{Fr^2} \right] \cos \varphi_0 [\varphi_0 \sin \varphi_0 - \beta \sin \beta]}{\varphi_0 - 3 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + 2 \left[ 1 + \frac{J}{Fr^2} \right] \varphi_0 \cos^2 \varphi_0}$$

wird. Bei Vernachlässigung der von  $\varepsilon_0$  abhängigen Glieder ergibt sich

$$52) \quad H = \frac{P}{2} \frac{\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \beta + 2 \cos \varphi_0 (\cos \beta - \cos \varphi_0) - 2 \cos \varphi_0 [\varphi_0 \sin \varphi_0 - \beta \sin \beta]}{\varphi_0 - 3 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0}$$

### 3. Bestimmung von $H$ für ein System concentrirter Lasten.

#### a) Der Kreisbogen.

Soll für verschiedene Stellungen eines über eine Bogenbrücke sich bewegenden Eisenbahntrains der Horizontalschub bestimmt werden, und bezeichnet:

$L$  die Belastung einer Lokomotivaxe,  
 $T$  - - - - - Tenderaxe,  
 $G$  - - - - - Güterwagenaxe,

so berechne man für verschiedene Lagen der Last  $L$  den Horizontalschub  $H_L$ , trage ihn unter der Last von den Graden  $AB$  (Fig. 18) aus als Ordinate auf und verbinde die Endpunkte dieser Ordinaten durch eine Curve. Ebenso zeichne man „Curve  $H_T$ “ für die Last  $T$  und „Curve  $H_G$ “ für die Last  $G$ . Diese 3 Curven sollen „die ersten Curven  $H$ “ genannt werden.

Jetzt lasse man den Zug von  $B$  aus bis zu irgend einer Stelle  $C$  vorrücken, berechne  $H$  durch Summirung der unter den Lasten gemessenen Ordinaten der entsprechenden „ersten Curven  $H$ “ und trage den so gewonnenen Werth  $H$  vertical unter  $C$  (also unter dem „Kopf“ des Zuges) von der  $AB$  aus als Ordinate  $CD$  auf. In  $D$  erhält man einen Punkt der „zweiten Curve  $H$  für Bewegung des Zuges von  $B$  nach  $A$ “. Die der Bewegung des Zuges von  $A$  nach  $B$  entsprechende „zweite Curve  $H$ “ ist das Spiegelbild (in der Figur punktirt).\*)

Die rechnerische Erledigung der beschriebenen Operationen wird besonders einfach, wenn sämtliche Radstände des Zuges durch dieselbe Strecke  $\lambda$  theilbar sind. Berechnet man nämlich in diesem Falle die Ordinaten der ersten Curven  $H$  in den Abständen  $\lambda, 2\lambda, 3\lambda \dots$  vom Scheitel, so werden, wenn man bei Bildung der zweiten Curve  $H$  eine Last über eine berechnete Ordinate setzt, sämtliche übrigen Lasten über berechneten Ordinaten stehen. Deshalb ist der in Figur 19 dargestellte, von drei Maschinen geführte Güterzug, welcher in seiner Wirkung den zur Zeit gebräuchlichen schwersten Betriebsmitteln gleichkommt, ganz besonders als Normalzug für die statische Berechnung der Bogenbrücken zu empfehlen. Der Abstand  $1,5^m$  des Buffers von der ersten Lokomotivaxe ist allerdings zu klein gewählt, doch liesse sich grade für Beibehaltung dieses Werthes durch die Bemerkung plaidiren, dass man durchaus gut thut, durch eine etwas ungünstige Anordnung des Lastensystems

\*) Wird ein Geleis durch zwei Bögen unterstützt, so sind die Werthe  $H$  selbstverständlich zu halbiren.

\*\*) Diese Abmessung beträgt mindestens  $2^m$ .

der schädlichen Wirkung der Stösse, dem Einflusse der Geschwindigkeit des Zuges etc. Rechnung zu tragen.

Das beschriebene Verfahren durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern, sei ein Bogen (Fig. 20) mit

$$l = 15^m ; h = 5^m ; r = \frac{15^2 + 5^2}{2 \cdot 5} = 25^m$$

gewählt. Dann ist

$$\begin{aligned} \cos \varphi_0 &= 0,6 ; \sin \varphi_0 = 0,8 \\ \varphi_0 &= 36^\circ 52' 11,64'' \quad \text{arcus } \varphi_0 = 0,6435011 ; \end{aligned}$$

mithin nach Formel 52

$$H = \frac{1,6 [\cos \beta + \beta \sin \beta] - 1,5377611 - \sin^2 \beta}{0,0543650} P.$$

Wird  $P$  der Reihe nach im Abstände  $1,5^m, 3,0^m, 4,5^m \dots$  vom Scheitel angenommen, so berechnen sich die zugehörigen Winkel  $\beta$  aus

$$\sin \beta_1 = \frac{1,5}{25} = 0,06 ; \sin \beta_2 = \frac{3,0}{25} = 0,12 \dots$$

Man erhält

Index.	$\beta$	$H$	
		für $P = 13^t$	für $P = 8^t$
0	$0^0$	14,884	9,159
1	$3^0 26' 23,33''$	14,712	9,054
2	$6^0 53' 31,56''$	14,195	8,735
3	$10^0 22' 11,14''$	13,373	8,230
4	$13^0 53' 11,54''$	12,206	7,511
5	$17^0 27' 27,31''$	10,694	6,581
6	$21^0 6' 0,70''$	8,991	5,533
7	$24^0 50' 4,53''$	6,919	4,258
8	$28^0 41' 7,43''$	4,783	2,943
9	$32^0 41' 1,10''$	2,430	1,495
10		0	0

und kann hiernach die in Fig. 21 dargestellten ersten Curven  $H$  zeichnen.

Jetzt findet man für die Zugstellung I

$$\begin{aligned} H_I &= (7,511 + 8,230 + 8,735) + (14,884 + 14,712 + 14,195) \\ &\quad + (12,206 + 10,694 + 8,991) + (2,943 + 1,495) = 104,60^t; \end{aligned}$$

für die Stellung II

$$\begin{aligned} H_{II} &= (5,333 + 6,581 + 7,511) + (14,195 + 14,712 + 14,884) \\ &\quad + (14,195 + 13,373 + 12,206) + (5,333 + 4,258 + 2,943) \\ &= 115,52^t; \end{aligned}$$

für die Stellung III

$$H_{III} = (14,884 + 14,712 + 14,195) + (7,511 + 6,581 + 5,533) + (4,783 + 2,430) = 70,63^t.$$

In dieser Weise lassen sich leicht beliebig viele Ordinaten der zweiten Curve  $H$  für Bewegung von  $B$  nach  $A$  finden, und wird es sich empfehlen, einmal die drei Maschinen vorwärts fahrend zu denken (wie bei Stellung III), dann die erste Maschine rückwärts fahrend anzunehmen (wie bei den Stellungen I und II).

b) Parabelbogen. (Fig. 22.)

Wirken die Lasten  $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$  in den Abständen  $b_1, b_2, b_3 \dots b_n$  von den Verticalen durch  $B$  auf den Bogen, so ist nach Formel (50)

$$H = \frac{3}{8lh} \sum_1^n P b (2l - b) = \frac{3}{8lh} \left\{ 2l \sum_1^n P b - \sum_1^n P b^2 \right\}.$$

Sind  $c_1, c_2, c_3 \dots$  die Abstände der Lasten  $P_1, P_2, P_3 \dots$  von der  $P_n$ , so folgt

$$53) \quad \sum_1^n P b^2 = \sum_1^n P (b + c)^2 = b^2 \sum_1^n P + 2b \sum_1^n P c + \sum_1^n P c^2,$$

mithin, wenn

$$\sum_1^n P = \mathfrak{P}_n$$

$$\sum_1^n P c = \mathfrak{C}_n \text{ (statisches Moment der auf dem Bogen liegenden Lasten in Bezug auf die } P_n)$$

$$\sum_1^n P c^2 = \mathfrak{S}_n \text{ (Trägheitsmoment der Lasten in Bezug auf die } P_n)$$

gesetzt wird,

$$54) \quad H = \frac{3}{8lh} \left\{ b_n (2l - b_n) \mathfrak{P}_n + 2(l - b_n) \mathfrak{C}_n - \mathfrak{S}_n \right\}.$$

Um für einen gegebenen Lastzug die Werthe  $\mathfrak{P}_n, \mathfrak{C}_n$  und  $\mathfrak{S}_n$  schnell berechnen zu können, beachte man, dass, wenn  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$  die Radstände bedeuten, die Gleichung 53) mit  $b_n = \lambda_n$  in

$$\mathfrak{S}_{n+1} = \lambda^2 \mathfrak{P}_n + 2\lambda_n \mathfrak{C}_n + \mathfrak{S}_n$$

übergeht, während weiter aus

$$\sum_1^n P b = \sum_1^n P (b + c) = b \sum_1^n P + \sum_1^n P c$$

mit  $b_n = \lambda_n$

$$\mathfrak{C}_{n+1} = \lambda \mathfrak{P}_n + \mathfrak{C}_n$$

wird, so dass man

$$\mathfrak{S}_{n+1} = \lambda (\mathfrak{C}_n - \mathfrak{C}_{n+1}) + 2\lambda \mathfrak{C}_n + \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n + \lambda (\mathfrak{C}_n + \mathfrak{C}_{n+1})$$

schreiben darf.

Man wird hiernach zuerst die  $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3 \dots$ , dann successive die  $\mathbb{S} = \lambda \mathbb{P} + \mathbb{S}$  und hierauf die

$$\mathbb{S} = \mathbb{S} + \lambda (\mathbb{S} + \mathbb{S})$$

berechnen.

So erhält man für das von uns adoptirte Lastensystem, falls die drei Maschinen vorwärts gehen,

$\mathbb{P}_1 = 13'$	$\mathbb{S}_1 = 0$		
$\mathbb{P}_2 = 26'$	$\mathbb{S}_2 = \lambda_1 \mathbb{P}_1 + \mathbb{S}_1 = 1,5 \cdot 13$	$= 19,5$	
$\mathbb{P}_3 = 39'$	$\mathbb{S}_3 = \lambda_2 \mathbb{P}_2 + \mathbb{S}_2 = 1,5 \cdot 26 + 19,5$	$= 58,5$	
$\mathbb{P}_4 = 47'$	$\mathbb{S}_4 = \lambda_3 \mathbb{P}_3 + \mathbb{S}_3 = 3,0 \cdot 39 + 58,5$	$= 175,5$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\mathbb{Z}_1 = 0$		
	$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_1 + \lambda_1 (\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) = 1,5 (0 + 19,5)$		$29,25$
	$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_2 + \lambda_2 (\mathbb{S}_2 + \mathbb{S}_3) = 1,5 (19,5 + 58,5) + 29,25$		$= 146,25$
	$\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_3 + \lambda_3 (\mathbb{S}_3 + \mathbb{S}_4) = 3,0 (58,5 + 175,5) + 146,25$		$= 848,25$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Hat man  $\mathbb{Z}_{19}$  und  $\mathbb{S}_{19}$  für die erste Güterwagenaxe (d. i. die 19te Last) bestimmt, so findet man für die  $(r+1)$ te Güterwagenaxe (wenn  $2P_g$  die Belastung eines Güterwagens bedeutet), (Fig. 19<sup>a</sup>)

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_{19} + r \lambda \mathbb{P}_{19} + P_g \left\{ \lambda + 2\lambda + \dots + (r-1)\lambda \right\}$$

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_{19} + r \lambda \mathbb{P}_{19} + \frac{r(r-1)}{2} P_g \lambda$$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{19} + 2 r \lambda \mathbb{S}_{19} + r^2 \lambda^2 \mathbb{P}_{19} + P_g \left\{ \lambda^2 + 4\lambda^2 + \dots + (r-1)^2 \lambda^2 \right\}$$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{19} + 2 r \lambda \mathbb{S}_{19} + r^2 \lambda^2 \mathbb{P}_{19} + \frac{(r-1)r(2r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} P_g \lambda^2$$

Wegen  $\mathbb{Z}_{19} = 97260,75$ ;  $\mathbb{S}_{19} = 3820,50$ ;  $\mathbb{P}_{19} = 198$ ;  $\lambda = 3^m$ ;  $P_g = 9^t$  ergibt sich:

$$\mathbb{S} = 3820,5 + 580,5 r + 13,5 r^2$$

$$\mathbb{Z} = 97260,75 + 22936,5 r + 1741,5 \cdot r^2 + 27 r^3$$

Setzt man hierin  $r = 1; 2; 3; \dots$

so erhält man  $\mathbb{S}_{20}; \mathbb{S}_{21}; \mathbb{S}_{22}; \dots$

und  $\mathbb{Z}_{20}; \mathbb{Z}_{21}; \mathbb{Z}_{22}; \dots$

Die für  $\mathbb{S}$  sich ergebenden Werthe bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, die Werthe  $\mathbb{Z}$  eine solche dritter Ordnung.

Die Resultate der Rechnung sind in der nachstehenden Tabelle (1) zusammengestellt. Tabelle (2) setzt voraus, dass die erste Maschine rückwärts fährt\*).

\*) Die in der Tabelle enthaltenen Werthe  $\frac{\mathbb{S}_n}{\mathbb{P}_n} = c_r$  werden später gebraucht.

Tabelle 1.

Güter-Zug mit drei vorwärtsfahrenden Maschinen an der Spitze.

(Anordnung Figur 19 a.)

$n$	$c_1$	$c_r = \frac{\mathcal{C}_n}{\mathfrak{P}_n}$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathcal{C}_n$	$\mathfrak{S}_n$
1	0	0	13	0	0
2	1,5	0,75	26	19,5	29,25
3	3	1,50	39	58,5	146,25
4	6	3,73	47	175,5	848,25
5	7,5	4,47	55	246,0	1 480,50
6	9	5,21	63	328,5	2 342,25
7	12	6,81	76	517,5	4 880,25
8	13,5	7,10	89	631,5	6 603,75
9	15	7,50	102	765,0	8 698,50
10	18	9,74	110	1 071,0	14 206,50
11	19,5	10,74	118	1 236,0	17 667,00
12	21	11,21	126	1 413,0	21 640,50
13	24	12,88	139	1 791,0	31 252,50
14	25,5	13,15	152	1 999,5	36 938,25
15	27	13,50	165	2 227,5	43 278,75
16	30	15,74	173	2 722,5	58 128,75
17	31,5	16,48	181	2 982,0	66 685,50
18	33	17,21	189	3 253,5	76 038,75
19	36	19,30	198	3 820,5	97 260,75
20	39	21,33	207	4 414,5	121 965,75
21	42	23,31	216	5 035,5	150 315,75
22	45	25,26	225	5 683,5	182 472,75
23	48	27,17	234	6 358,5	218 598,75
24	51	29,06	243	7 060,5	258 855,75
25	54	30,91	252	7 789,5	303 405,75
26	57	32,74	261	8 545,5	352 410,75
27	60	34,55	270	9 328,5	406 032,75
28	63	36,34	279	10 138,5	464 433,75
29	66	38,11	288	10 975,5	527 775,75
30	69	39,86	297	11 839,5	596 220,75

$n$	$c_1$	$c_r = \frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{P}_n}$	$\mathcal{P}_n$	$\mathcal{E}_n$	$\mathcal{I}_n$
31	72	41,60	306	12 730,5	669 930,75
32	75	43,33	315	13 648,5	749 067,75
33	78	45,04	324	14 593,5	833 793,75
34	81	46,74	333	15 565,5	924 270,75
35	84	48,43	342	16 564,5	1 020 660,75
36	87	50,12	351	17 590,5	1 123 125,75
37	90	51,79	360	18 643,5	1 231 827,75
38	93	53,45	369	19 723,5	1 346 928,75
39	96	55,11	378	20 830,5	1 468 590,75
40	99	56,76	387	21 964,5	1 596 975,75
41	102	58,40	396	23 125,5	1 732 245,75
42	105	60,03	405	24 313,5	1 874 562,75
43	108	61,66	414	25 528,5	2 024 088,75
44	111	63,29	423	26 770,5	2 180 985,75
45	114	64,91	432	28 039,5	2 345 415,75
46	117	66,52	441	29 335,5	2 517 540,75
47	120	68,13	450	30 658,5	2 697 522,75
48	123	69,74	459	32 008,5	2 885 523,75
49	126	71,34	468	33 385,5	3 081 705,75
50	129	72,93	477	34 789,5	3 286 230,75
51	132	74,53	486	36 220,5	3 499 260,75
52	135	76,12	495	37 678,5	3 720 957,75
53	138	77,71	504	39 163,5	3 951 483,75
54	141	79,29	513	40 675,5	4 191 000,75
55	144	80,87	522	42 214,5	4 439 670,75
56	147	82,45	531	43 780,5	4 697 655,75
57	150	84,02	540	45 373,5	4 965 117,75
58	153	85,60	549	46 993,5	5 242 218,75

Tabelle II.

Güterzug mit drei Maschinen an der Spitze. Die erste Maschine fährt rückwärts.

(Anordnung Fig. 19 b.)

$n$	$c_1$	$c_r = \frac{\mathfrak{C}_n}{\mathfrak{P}_n}$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{C}_n$	$\mathfrak{S}_n$
1	0	0	8	0	0
2	1,5	0,75	16	12	18
3	3,0	1,5	24	36	90
4	6,0	2,92	37	108	522
5	7,5	3,27	50	163,5	929,25
6	9,0	3,79	63	238,5	1 532,25
7	12	5,63	76	427,5	3 530,25
8	13,5	6,08	89	541,5	4 983,75
9	15,0	6,62	102	675,0	6 808,50
10	18,0	8,92	110	981,0	11 776,50
11	19,5	9,71	118	1 146,0	14 967,00
12	21	10,50	126	1 323,0	18 670,50
13	24	12,24	139	1 701,0	27 742,50
14	25,5	12,56	152	1 909,5	33 158,25
15	27	12,95	165	2 137,5	39 228,75
16	30	15,22	173	2 632,5	53 538,75
17	31,5	15,98	181	2 892,0	61 825,50
18	33	16,74	189	3 163,5	70 908,75
19	36	18,84	198	3 730,5	91 590,75
20	39	20,89	207	4 324,5	115 755,75
21	42	22,90	216	4 945,5	143 565,75
22	45	24,86	225	5 593,5	175 182,75
23	48	26,79	234	6 268,5	210 768,75
24	51	28,68	243	6 970,5	250 485,75
25	54	30,55	252	7 699,5	294 495,75
26	57	32,40	261	8 455,5	342 960,75
27	60	34,22	270	9 238,5	396 042,75
28	63	36,02	279	10 048,5	453 903,75
29	66	37,80	288	10 885,5	516 705,75
30	69	39,56	297	11 749,5	584 610,75

$n$	$c_1$	$c_i = \frac{\mathcal{S}_n}{\mathfrak{P}_n}$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathcal{S}_n$	$\mathfrak{S}_n$
31	72	41,31	306	12 640,5	657 780,75
32	75	43,04	315	13 558,5	736 377,75
33	78	44,76	324	14 503,5	820 563,75
34	81	46,47	333	15 475,5	910 500,75
35	84	48,17	342	16 474,5	1 006 350,75
36	87	49,86	351	17 500,5	1 108 275,75
37	90	51,54	360	18 553,5	1 216 437,75
38	93	53,21	369	19 633,5	1 330 998,75
39	96	54,87	378	20 740,5	1 452 120,75
40	99	56,52	387	21 874,5	1 579 965,75
41	102	58,17	396	23 035,5	1 714 695,75
42	105	59,81	405	24 223,5	1 856 472,75
43	108	61,45	414	25 438,5	2 005 458,75
44	111	63,07	423	26 680,5	2 161 815,75
45	114	64,70	432	27 949,5	2 325 705,75
46	117	66,32	441	29 245,5	2 497 290,75
47	120	67,93	450	30 568,5	2 676 732,75
48	123	69,54	459	31 918,5	2 864 193,75
49	126	71,14	468	33 295,5	3 059 835,75
50	129	72,74	477	34 699,5	3 263 820,75
51	132	74,34	486	36 130,5	3 476 310,75
52	135	75,94	495	37 588,5	3 697 467,75
53	138	77,53	504	39 073,5	3 927 453,75
54	141	79,11	513	40 585,5	4 166 430,75
55	144	80,70	522	42 124,5	4 414 560,75
56	147	82,28	531	43 690,5	4 672 005,75
57	150	83,86	540	45 283,5	4 938 927,75
58	153	85,43	549	46 903,5	5 215 488,75

Um die für Kreisbögen und Parabelbögen gewonnenen Werthe  $H$  mit einander zu vergleichen, wählen wir einen Parabelbogen mit den Abmessungen

$$l = 15^m \text{ und } h = 5^m$$

und berechnen  $H$  für die vorhin angenommenen Stellungen (Fig. 21). Da durchweg  $b_n = 0$  ist, wird

$$H = \frac{3}{8lh} (2l \mathfrak{S}_n - \mathfrak{S}_n)$$

und wegen 
$$\frac{3}{8lh} = \frac{1}{200},$$

$$H = \frac{30 \mathfrak{S}_n - \mathfrak{S}_n}{200}.$$

Für Stellung I und II folgt (Tabelle 2) beziehungsweise:

$$n = 12; \mathfrak{S}_n = 1323,0; \mathfrak{S}_n = 18670,50$$

$$n = 13; \mathfrak{S}_n = 1701,0; \mathfrak{S}_n = 27742,50,$$

während für Stellung III (Tabelle 1)

$$n = 9; \mathfrak{S}_n = 765; \mathfrak{S}_n = 8698,50$$

sich ergibt. Daher erhält man

$$H_I = 105,10' \text{ (um } 0,50' \text{ grösser als beim Kreisbogen)}$$

$$H_{II} = 116,44' \text{ ( - } 0,92' \text{ - - - - )}$$

$$H_{III} = 71,26' \text{ ( - } 0,63' \text{ - - - - )}.$$

Die sehr geringen Abweichungen zwischen den Resultaten für den Parabelbogen und den Kreisbogen dürfen insofern nicht überraschen, als früher nachgewiesen wurde, dass man die Formel 50) auch als Näherungsformel für den flachen Kreisbogen ansehen kann.

### Resumé.

Die vorstehenden Untersuchungen berechtigen zu folgenden Schlussfolgerungen:

1) Bei den im Brückenbau üblichen Verhältnissen zwischen Pfeilhöhe und Stützweite eines Bogenträgers, darf man den Horizontalschub für Parabel- und Kreisbögen nach derselben Formel berechnen.

2) Die exacten Formeln für  $H$  sind sehr complicirt; ihre Anwendung führt zu äusserst langwierigen Zahlenrechnungen und dürfte schon deshalb nicht geboten sein, als die zu behandelnden Systeme die Vorbedingungen der Theorie keineswegs scharf erfüllen. Weiter spricht ausser der durchaus befriedigenden Uebereinstimmung der genäherten und genaueren Resultate noch der Umstand, dass die Definition des Lastensystems auf mathematische Genauigkeit keinen Anspruch machen darf, da bei Eisenbahnbrücken die stets in Rechnung gestellten Lasten sich auf die ruhende, nicht aber auf die sich bewegende Maschine beziehen,

während bei Strassenbrücken die Belastung durch Menschengedränge einer sehr groben Schätzung unterliegt. Schliesslich kann noch geltend gemacht werden, dass eine correcte Bestimmung der durch Temperaturänderungen entstehenden Beanspruchungen — schon wegen der nicht vorauszu bestimmenden Montirungstemperatur — unmöglich ist, dass also eine exacte Bestimmung der gesammten Inanspruchnahme des Bogens ohnehin nicht ausführbar ist.

Es soll deshalb in der Folge bei Bogenträgern mit zwei Kämpfergelenken von der Formel

$$H = \frac{3 P a b}{8 h l}$$

*Liegt die volle Krümmung*

ausgegangen werden.

§ 6.

**Der Bogen ohne Gelenke.**

(Berechnung von  $A_1$ ,  $H$  und  $\mathfrak{M}_A$ .)

Die Elasticitätsgleichungen (40) auf Seite 20 gehen mit  $\Delta q_0 = 0$  und  $\Delta q_1 = 0$  über in

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon_0 [q]_0^a + \varepsilon_0' [q]_a^{2l} + \int_0^{2l} \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \\ 0 &= \varepsilon_0 [S_1]_0^a + \varepsilon_0' [S_1]_a^{2l} + \int_0^{2l} y \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \\ 0 &= -\varepsilon_0 [S_2]_0^a - \varepsilon_0' [S_2]_a^{2l} - \int_0^{2l} x \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \end{aligned}$$

und möge bei deren Auflösung von vornherein  $\varepsilon_0 = 0$  und  $\varepsilon_0' = 0$  gesetzt werden. Zu diesem Vorgehen, dessen Zulässigkeit beim Bogen mit zwei Gelenken hervorgehoben wurde, ist man bei dem vorliegenden Systeme um so mehr berechtigt, als eine absolut feste Einspannung der Bogenenden, wie die Theorie sie voraussetzt, in Wirklichkeit kaum hergestellt werden kann, während andererseits die thatsächlichen Aenderungen  $\Delta q_0$  und  $\Delta q_1$  nur durch Beobachtungen festzustellen sind. Deshalb werde gesetzt:

$$0 = \int_0^{2l} \mathfrak{M} ds \quad ; \quad 0 = \int_0^{2l} y \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} \quad ; \quad 0 = \int_0^{2l} x \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} .$$

Verlegt man (zur Vereinfachung der Rechnung) den Coordinatenanfangspunkt nach dem Scheitel (Fig. 23) und zählt die  $x_1$  nach links, die  $y_1$  nach unten positiv, so folgt

$$x = l - x_1; \quad y = h - y_1$$

und 
$$\int_0^{2l} y \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} = h \int_0^{2l} \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} - \int_0^{2l} y_1 \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ}$$

d. i. 
$$\int_0^{2l} y \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} = - \int_0^{2l} y_1 \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ}$$

ferner 
$$\int_0^{2l} x \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} = - \int_0^{2l} x_1 \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} .$$

a) Parabelbogen. Hier wird  $J \frac{dx_1}{ds} = J \cos \varphi$  durch den constanten Mittelwerth  $J'$  ersetzt, wesshalb die Bedingungen

$$\int_{-l}^{+l} \mathfrak{M} dx_1 = 0 ; \int_{-l}^{+l} x_1 \mathfrak{M} dx_1 = 0 ; \int_{-l}^{+l} y_1 \mathfrak{M} dx_1 = 0$$

zu erfüllen sind.

Einer concentrirten Last  $P$  im Abstände  $\xi$  vom Scheitel entspricht

$$\mathfrak{M} = A(l - x_1) - H(h - y_1) - P(\xi - x_1) + \mathfrak{M}_A,$$

so dass, da das Glied  $P(\xi - x_1)$  nur im Intervalle  $x_1 = \xi$  bis  $x_1 = -l$  vorkommt, sich die Gleichungen ergeben:

$$Al \int_{-l}^{+l} dx_1 - A \int_{-l}^{+l} x_1 dx_1 - Hh \int_{-l}^{+l} dx_1 + H \int_{-l}^{+l} y_1 dx_1 - P \int_{-l}^{+\xi} (\xi - x_1) dx_1 + \mathfrak{M}_A \int_{-l}^{+l} dx_1 = 0$$

$$Al \int_{-l}^{+l} x_1 dx_1 - A \int_{-l}^{+l} x_1^2 dx_1 - Hh \int_{-l}^{+l} x_1 dx_1 + H \int_{-l}^{+l} x_1 y_1 dx_1 - P \int_{-l}^{+\xi} (\xi - x_1) x_1 dx_1$$

$$+ \mathfrak{M}_A \int_{-l}^{+l} x_1 dx_1 = 0$$

$$Al \int_{-l}^{+l} y_1 dx_1 - A \int_{-l}^{+l} y_1 x_1 dx_1 - Hh \int_{-l}^{+l} y_1 dx_1 + H \int_{-l}^{+l} y_1^2 dx_1 - P \int_{-l}^{+\xi} (\xi - x_1) y_1 dx_1$$

$$+ \mathfrak{M}_A \int_{-l}^{+l} y_1 dx_1 = 0 .$$

Hierin wird  $\int_{-l}^{+l} x_1^n dx_1 = 0$ , wenn  $n$  eine ungerade Zahl ist,

und  $\int_{-l}^{+l} x_1^n dx_1 = 2 \int_0^l x_1^n dx_1$ , wenn  $n$  eine gerade Zahl, weiter  $\int_{-l}^{+l} y_1 x_1 dx_1 = 0$ ,

als statisches Moment der zwischen der  $x_1$ -Axe und der Parabel gelegenen Fläche in Bezug auf die  $y_1$ -Axe, schliesslich

$$\int_{-l}^{+l} y_1 dx_1 = 2 \int_0^{+l} y_1 dx_1 ,$$

weshalb die zweite der Elasticitätsgleichungen in

$$-2A \int_0^{\xi} x_1^2 dx_1 - P \int_{-l}^{\xi} x_1 (\xi - x_1) dx_1 = 0$$

übergeht. Hieraus folgt

$$A = \frac{P}{2} \frac{\int_{-l}^{\xi} x_1 (\xi - x_1) dx_1}{\int_0^{\xi} x_1^2 dx_1} . *)$$

Die beiden anderen Gleichungen gehen über in

$$2(A l + \mathfrak{M}_A) \int_0^l dx_1 - 2Hh \int_0^l dx_1 + 2H \int_0^l y_1 dx_1 - P \int_{-l}^{\xi} (\xi - x_1) dx_1 = 0$$

$$2(A l + \mathfrak{M}_A) \int_0^l y_1 dx_1 - 2Hh \int_0^l y_1 dx_1 + 2H \int_0^l y_1^2 dx_1 - P \int_{-l}^{\xi} (\xi - x_1) y_1 dx_1 = 0 .$$

Multipliziert man die obere mit  $\int_0^l y_1 dx_1$ , die untere mit  $\int_0^l dx_1$  und subtrahirt die obere von der unteren, so findet man:

$$H = P \frac{\int_0^l dx_1 \int_{-l}^{\xi} (\xi - x_1) y_1 dx_1 - \int_{-l}^{\xi} (\xi - x_1) dx_1 \int_0^l y_1 dx_1}{2 \left\{ \int_0^l y_1^2 dx_1 \int_0^l dx_1 - \left[ \int_0^l y_1 dx_1 \right]^2 \right\}} ;$$

während schliesslich das Stützenmoment:

$$\mathfrak{M}_A = H \left\{ h - \frac{\int_0^l y_1 dx_1}{\int_0^l dx_1} \right\} - A l + \frac{P}{2} \frac{\int_{-l}^{\xi} (\xi - x_1) dx_1}{\int_0^l dx_1}$$

sich ergibt.

\*) Die Integrationen sind mit Absicht unausgeführt geblieben, um die Ableitung der Formeln für den Kreisbogen zu erleichtern.

Wegen  $y = h \frac{x_1^2}{l^2}$  erhält man nach Ausführung der Integrationen

$$55) \quad A = \frac{P}{4} \left[ 2 + 3 \frac{\xi}{l} - \frac{\xi^3}{l^3} \right]$$

$$56) \quad H = \frac{15 P}{32} \frac{(l^2 - \xi^2)^2}{l^3 h}$$

$$57) \quad \mathfrak{M}_A = \frac{P}{16} \frac{(l^2 - \xi^2)(l + \xi)(l - 5\xi)}{l^3}$$

und, wenn die Abstände  $a$  und  $b$  der Last  $P$  von den Auflagerverticalen  $A$  und  $B$  eingeführt werden,

$$58) \quad A = \frac{P b^2 (l + a)}{4 l^3}$$

$$59) \quad H = \frac{15 P}{32} \frac{a^2 b^2}{l^3 h}$$

$$60) \quad \mathfrak{M}_A = \frac{P}{16} \frac{a b^2 (5a - 4l)}{l^3}$$

b) Kreisbogen. Es wird  $J$  constant angenommen und ergeben sich die Gleichungen (Fig. 23 a)

$$\int_{-l}^{+l} \mathfrak{M} ds = 0; \quad \int_{-l}^{+l} x_1 \mathfrak{M} ds = 0; \quad \int_{-l}^{+l} y_1 \mathfrak{M} ds = 0.$$

Ihnen entsprechen — analog wie beim Parabelbogen — die Lösungen

$$A = \frac{P \beta}{2} \frac{\int_{-\varphi_0}^{-\varphi_0} x_1 (\xi - x_1) ds}{\int_0^{\varphi_0} x_1^2 ds} = \frac{P}{2} \frac{\int_{\beta}^{-\varphi_0} (\sin \beta - \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi}{\int_0^{\varphi_0} \sin^2 \varphi d\varphi}$$

$$H = P \frac{\int_0^{\varphi_0} ds \int_{-\varphi_0}^{\beta} (\xi - x_1) y_1 ds - \int_{-\varphi_0}^{\beta} (\xi - x_1) ds \int_0^{\varphi_0} y_1 ds}{2 \left\{ \int_0^{\varphi_0} y_1^2 ds \int_0^{\varphi_0} ds - \int_0^{\varphi_0} y_1 ds \int_0^{\varphi_0} y_1 ds \right\}}$$

$$H = P \frac{\int_0^{\varphi_0} d\varphi \int_{-\varphi_0}^{\beta} (\sin \beta - \sin \varphi) (1 - \cos \varphi) d\varphi - \int_{-\varphi_0}^{\beta} (\sin \beta - \sin \varphi_0) d\varphi \int_{-\varphi_0}^{\beta} (1 - \cos \varphi) d\varphi}{2 \left\{ \int_0^{\varphi_0} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi \int_0^{\varphi_0} d\varphi - \left[ \int_0^{\varphi_0} (1 - \cos \varphi) d\varphi \right]^2 \right\}}$$

und

$$\mathfrak{M}_A = H \left\{ h - \frac{\int_0^{\varphi_0} y_1 ds}{\int_0^{\varphi_0} ds} \right\} - Al + \frac{\int_{-\varphi_0}^{\beta} (\xi - x_1) ds}{2 \int_0^{\varphi_0} ds}$$

d. i.

$$\mathfrak{M}_A = H \left\{ h - \frac{r \int_0^{\varphi_0} (1 - \cos \varphi) d\varphi}{\int_0^{\varphi_0} d\varphi} \right\} - Al + \frac{P}{2} \frac{r \int_{-\varphi_0}^{\beta} (\sin \beta - \sin \varphi) d\varphi}{\int_0^{\varphi_0} d\varphi}.$$

Nun ist:

$$\int_0^{\varphi_0} (1 - \cos \varphi) d\varphi = \varphi_0 - \sin \varphi_0$$

$$\int_0^{\varphi_0} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2} \varphi_0 - 2 \sin \varphi_0 + \frac{1}{2} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0$$

$$\int_{-\varphi_0}^{\beta} (\sin \beta - \sin \varphi) (1 - \cos \varphi) d\varphi = \sin \beta (\beta + \varphi_0) + \cos \beta - \cos \varphi_0 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_0 - \sin \beta \sin \varphi_0$$

$$\int_{-\varphi_0}^{\beta} (\sin \beta - \sin \varphi) d\varphi = \sin \beta (\beta + \varphi_0) + \cos \beta - \cos \varphi_0$$

$$\int_{\beta}^{-\varphi_0} (\sin \beta - \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} [\beta + \varphi_0 + \sin \beta \cos \beta - 2 \cos \varphi_0 \sin \beta - \cos \varphi_0 \sin \varphi_0]$$

$$\int_0^{\varphi_0} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} [\varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0],$$

desshalb erhält man:

$$61) \quad A = \frac{P}{2} \frac{\beta + \varphi_0 + \sin \beta \cos \beta - 2 \cos \varphi_0 \sin \beta - \cos \varphi_0 \sin \varphi_0}{\varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}$$

$$62) \quad H = \frac{P}{2} \frac{2 \sin \varphi_0 [\cos \beta - \cos \varphi_0 + \beta \sin \beta] - \varphi_0 [\sin^2 \beta + \sin^2 \varphi_0]}{\varphi_0 (\varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) - 2 \sin^2 \varphi_0}$$

$$63) \quad \mathfrak{M}_A = H \left[ h - r \left( 1 - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right) \right] - Ar \sin \varphi_0 + \frac{Pr}{2} \frac{\sin \beta (\beta + \varphi_0) + \cos \beta - \cos \varphi_0}{\varphi_0}.$$

Durch numerische Rechnungen überzeugt man sich leicht, dass, flache Bögen vorausgesetzt, ein nur sehr geringer Fehler begangen wird, wenn die für den Kreisbogen abgeleiteten unbequemen Formeln durch die bei weitem einfacheren dem Parabelbogen entsprechenden ersetzt werden.

§ 7.

**Beanspruchung der Bogenträger durch Temperaturänderungen.**

Im Folgenden werde vorausgesetzt, dass die Temperatur in allen Punkten eines Bogenträgers constant ist, und dass es eine bestimmte Temperatur  $t_0$  giebt, bei welcher die Spannungen im Bogen ausschliesslich von den auf den Bogen wirkenden Belastungen herrühren. Wird diese Temperatur um  $t$  erhöht, so besteht die relative Längenänderung

$\varepsilon = \frac{\Delta ds_\eta}{ds_\eta}$  aus zwei Theilen, deren erster

$$\left( \frac{\Delta ds_\eta}{ds_\eta} \right)_1 = \frac{N}{E}$$

von der Normalspannung herrührt, während der zweite

$$\left( \frac{\Delta ds_\eta}{ds_\eta} \right)_2 = \varepsilon_t t$$

eine Folge der Temperaturänderung ist. Dabei bedeutet  $\varepsilon_t$  die dem Temperaturunterschiede 1 entsprechende relative Längenänderung (auch Ausdehnungscoefficient genannt).

Aus

$$\frac{N}{E} + \varepsilon_t t = \frac{\Delta ds_\eta}{ds_\eta}$$

folgt

$$N = E \frac{\Delta ds_\eta}{ds_\eta} - \varepsilon_t t E$$

d. i. (vergl. Seite 3)

$$N = E \left[ \bar{\varepsilon}_0 + (\bar{\omega} - \bar{\varepsilon}_0) \frac{\eta}{\eta + r} \right] - \varepsilon_t t E$$

wo  $\bar{\varepsilon}_0$  und  $\bar{\omega}$  die mit Rücksicht auf die Temperaturänderung bestimmten Werthe  $\frac{\Delta ds}{ds}$  und  $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$  bedeuten.

Die Einführung von  $N$  in die Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathfrak{M} + \int N dF \eta = 0$$

$$R_n + \int N dF = 0$$

liefert, analog wie auf Seite 3

$$64) \quad \bar{\varepsilon}_0 = -\frac{1}{EF} \left( R_n + \frac{\mathfrak{M}}{r} \right) + \varepsilon_t t = \varepsilon_0 + \varepsilon_t t$$

$$65) \quad \bar{\omega} = -\frac{1}{EF} \left( R_n + \frac{\mathfrak{M}}{r} + \frac{\mathfrak{M}}{r\mathfrak{D}} \right) + \varepsilon_t t^* = \bar{\varepsilon}_0 - \frac{\mathfrak{M}}{EFr\mathfrak{D}}$$

und wenn  $\mathfrak{D} = \frac{J}{Fr^2}$  gesetzt wird,

$$\bar{\omega} = \varepsilon_0 - \frac{\mathfrak{M}r}{EJ} = \bar{\varepsilon}_0 + \frac{\mathfrak{M}ds}{FJd\varphi}.$$

Weiter findet man

$$N = -\frac{R_n}{F} - \frac{\mathfrak{M}}{rF} - \frac{\mathfrak{M}\eta}{J},$$

so dass  $N$  nur insofern von  $t$  abhängt, als beim statisch unbestimmten Systeme die aus den Elasticitätsgleichungen zu bestimmenden Kämpferdrücke Functionen von  $t$  sind.

Die Formeln 21) zur Berechnung der Deformationen gehen über in

$$66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \int_0^x \varepsilon_0 d\varphi + \int_0^x \frac{\mathfrak{M}ds}{EJ} + \varepsilon_t \int_0^x d\varphi \\ \Delta x = -y\Delta\varphi + \int_0^x (y d\varphi + dx) + \int_0^x y \frac{\mathfrak{M}ds}{EJ} + \varepsilon_t \int_0^x (y d\varphi + dx) \\ \Delta y = +x\Delta\varphi - \int_0^x (x d\varphi - dy) - \int_0^x x \frac{\mathfrak{M}ds}{EJ} - \varepsilon_t \int_0^x (x d\varphi - dy), \end{array} \right.$$

weshalb, wenn

$$\int y d\varphi + dx = S_1; \quad \int x d\varphi - dy = S_2$$

gesetzt wird, die Elasticitätsgleichungen folgen (vergl. No. 40):

$$67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_0 + \varepsilon_0 [\varphi_0^a] + \varepsilon_0' [\varphi_0^{2l}] + \int_0^{2l} \frac{\mathfrak{M}ds}{EJ} + \varepsilon_t [\varphi_0^{2l}] \\ 0 = \varepsilon_0 [S_1_0^a] + \varepsilon_0' [S_1_a^{2l}] + \int_0^{2l} y \frac{\mathfrak{M}ds}{EJ} + \varepsilon_t [S_1_0^{2l}] \\ 0 = -\varepsilon_0 [S_2_0^a] - \varepsilon_0' [S_2_a^{2l}] - \int_0^{2l} x \frac{\mathfrak{M}ds}{EJ} - \varepsilon_t [S_2_0^{2l}] + 2l\Delta\varphi_1, \end{array} \right.$$

\*) Winkler setzt (Elasticitätslehre, Seite 360):

$$\omega = -\frac{1}{EF} \left\{ R + \frac{\mathfrak{M}}{r} + \frac{\mathfrak{M}}{r\mathfrak{D}} \right\}$$

was, als den Gleichgewichtsbedingungen nicht entsprechend, unrichtig ist. Den-

Die Glieder mit  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_0'$  sollen berücksichtigt werden, da die Rechnungen sich leicht durchführen lassen.

1. Der Bogen mit zwei Gelenken.

a) Parabelbogen. Wird der Bogen unbelastet angenommen, also nur Beanspruchung durch Temperaturänderung vorausgesetzt, so ist  $A = 0$ . Der Horizontalschub, welcher  $H_t$  genannt werden möge, wird aus der zweiten Elasticitätsgleichung gefunden. Setzt man in diese

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0' = - \frac{H_t l^2 - h^2}{E F l^2 + h^2}$$

$$\mathfrak{M} = - H_t y$$

also

$$\int_0^{2l} y \frac{\mathfrak{M} ds}{E J} = + \frac{1}{E J'} \int_0^{2l} y \mathfrak{M} dx = - \frac{H_t}{E J'} \int_0^{2l} y^2 dx = - \frac{H_t}{E J'} \frac{16}{15} h^2 l$$

so folgt:

$$0 = - \frac{H_t l^2 - h^2}{E F l^2 + h^2} (S_1)_0^{2l} - \frac{H_t}{E J'} \frac{16}{15} h^2 l + \varepsilon_t t (S_1)_0^{2l}$$

und hieraus:

$$H_t = \frac{\varepsilon_t t}{\frac{1}{E F} \frac{l^2 - h^2}{l^2 + h^2} + \frac{16}{15} \frac{1}{E J'} \frac{h^2 l}{(S_1)_0^{2l}}}$$

Für flache Bögen findet man, wegen

$$(S_1)_0^{2l} = \frac{2(l^2 - 2h^2)}{l}$$

$$68) \quad H_t = \frac{15 \varepsilon_t E F t}{15 \frac{l^2 - h^2}{l^2 + h^2} + 8 \frac{F}{J'} \frac{h^2 l^2}{l^2 - 2h^2}} \quad *)$$

*Einpaß als Gult  
Kürzungs...*

Besteht der Bogen aus zwei durch Gitterwerk verbundenen parallelen Gurtungen, deren Schwerlinien von einander den Abstand  $h_1$  haben, so ist, unter  $f$  der Gurtquerschnitt verstanden,

$$J = f \frac{h_1^2}{2}$$

und  $J'$  gleich dem Mittelwerth aus den  $f \frac{h_1^2}{2} \cos \varphi$ .

selben Fehler begeht er auch in der Abhandlung: „Ueber den Einfluss der Temperatur bei Bogenbrücken“ (Civil-Ingenieur 1867). In Steiner's Abhandlung: „Ueber Theorie der Bogenbrücken“ (Allgemeine Bauzeitung 1874) sind die von Winkler auf Grund des unrichtigen Werthes  $\bar{\omega}$  abgeleiteten Formeln übergegangen.

\*) Ein gebräuchlicher Näherungswerth ist der von Winkler abgeleitete

$$H_t = \frac{15 \varepsilon_t E F t}{15 + 8 \frac{F}{J}}$$

Bedeutet also  $f'$  den Mittelwerth aus den verschiedenen  $f \cos \varphi$ , so hat man

$$J' = f' \frac{h_1^2}{2}$$

und findet wegen  $F = 2f$

$$69) \quad H_t = \frac{30 \varepsilon_t E t f}{15 \frac{l^2 - h^2}{l^2 + h^2} + 32 \frac{h^2}{h_1^2} \frac{f}{f'} \frac{l^2}{l^2 - 2h^2}}.$$

Bemerkt sei noch, dass man ohne Bedenken  $\frac{f}{f'} = 1$  setzen darf. — Für Blechbögen, d. h. Bögen, die aus einem Verticalblech, Winkeleisen und Kopfblechen bestehen, setze man

$$\sqrt{\frac{J'}{F}} = \varrho = \text{Trägheitsradius,}$$

$$70) \quad H_t = \frac{30 \varepsilon_t E t f}{15 \frac{l^2 - h^2}{l^2 + h^2} + 8 \frac{h^2}{\varrho^2} \frac{l^2}{l^2 - 2h^2}}.$$

Wie der Werth  $\varrho$  vor Ermittlung der Querschnittsdimensionen abzuschätzen ist, soll später gezeigt werden.

b) Der Kreisbogen. Hier wird

$$\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 = - \frac{H_t \cos \varphi_0}{EF}$$

$$\mathfrak{M} = - H_t y = - H_t r (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{EJ} \int_0^{2l} y \mathfrak{M} ds &= \frac{H_t r^3}{EJ} \int_0^{2l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)^2 d\varphi \\ &= - \frac{H_t r^3}{EJ} (\varphi_0 - 3 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0) \end{aligned}$$

$$(S_1)_0^{2l} = 2r \cos \varphi_0 \varphi_0 \quad (\text{vergl. Seite 21, No. 42}).$$

Desshalb geht die zweite der Gleichungen 67 über in

$$\left\{ \varepsilon_t t - \frac{H_t \cos \varphi_0}{EF} \right\} 2r \cos \varphi_0 \varphi_0 - \frac{H_t r^3}{EJ} (\varphi_0 - 3 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0)$$

woraus

$$71) \quad H_t = \frac{2 E F \varepsilon_t t \cos \varphi_0 \varphi_0}{2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 + \frac{r^2 F}{J} [\varphi_0 + 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 - 3 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0]}$$

## 2. Der Bogen ohne Gelenk.

Da, falls Belastungen auf den Bogen nicht wirken,  $A$  gleich Null wird, bleiben nur noch die Unbekannten  $H_t$  und  $(\mathfrak{M}_A)_t$  zu bestimmen. Die eine der drei Elasticitätsgleichungen (und zwar die dritte) erweist

sich als überflüssig; die beiden anderen gehen, da  $\Delta \varphi_1 = 0$  und  $\Delta \varphi_0 = 0$  werden, über in

$$0 = (\varepsilon_0 + \varepsilon_t t) [\varphi]_0^{2l} + \int_0^{2l} \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ}$$

$$0 = (\varepsilon_0 + \varepsilon_t t) [S_1]_0^{2l} + \int_0^{2l} y \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ}.$$

a) Für den Parabelbogen ist:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 = -\frac{H_t l^2 - h^2}{EF l^2 + h^2};$$

$$\mathfrak{M} = -H_t y + \mathfrak{M}_A$$

$$\int \frac{\mathfrak{M} ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int \mathfrak{M} dx$$

daher

$$0 = -H_t \frac{J l^2 - h^2}{F l^2 + h^2} [\varphi]_0^{2l} + \varepsilon_t t EJ [\varphi]_0^{2l} - H_t \int_0^{2l} y dx + \mathfrak{M}_A \int_0^{2l} dx$$

$$0 = -H_t \frac{J l^2 - h^2}{F l^2 + h^2} [S_1]_0^{2l} + \varepsilon_t t EJ [S_1]_0^{2l} - H_t \int_0^{2l} y^2 dx + \mathfrak{M}_A \int_0^{2l} y dx,$$

d. i. nach Ausführung der Integrationen

$$0 = -H_t \frac{J l^2 - h^2}{F l^2 + h^2} [\varphi]_0^{2l} + \varepsilon_t t EJ [\varphi]_0^{2l} - \frac{4hl}{3} H_t + 2l \mathfrak{M}_A$$

$$0 = -H_t \frac{J l^2 - h^2}{F l^2 + h^2} [S_1]_0^{2l} + \varepsilon_t t EJ [S_1]_0^{2l} - \frac{16}{15} h^2 l H_t + \frac{4lh}{3} \mathfrak{M}_A.$$

Hieraus folgt

$$H_t = \frac{45 \varepsilon_t E F t}{8 \frac{F h^2}{J} \frac{l}{[S_1]_0^{2l} - \frac{2h}{3} [\varphi]_0^{2l}} + 45 \frac{l^2 - h^2}{l^2 + h^2}},$$

und

$$(72) \quad (\mathfrak{M}_A)_t = H_t \frac{2h}{3} + \left[ H_t \frac{J l^2 - h^2}{F l^2 + h^2} - \varepsilon_t t EJ \right] \frac{[\varphi]_0^{2l}}{2l},$$

wofür man bei flachen Bögen genügend genau

$$(\mathfrak{M}_A)_t = H_t \frac{2h}{3}$$

setzen darf. Danach greift  $H_t$  annähernd in der Höhe  $\frac{2h}{3}$  über den Mittelpunkten der Kämpferquerschnitte an.

Weiter ist bei flachen Bögen genügend genau

$$[\varphi]_0^{2l} = -2\varphi_0 = -2 \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{4h}{l}$$

$$[S_1]_0^{2l} = 2l \left[ 1 - \frac{2h^2}{l^2} \right],$$

daher

$$73) \quad H_t = \frac{45 \varepsilon_t E F t}{4 \frac{F h^2}{J'} 3 l^2 - 2 h^2 + 45 \frac{l^2 - h^2}{l^2 + h^2}} \cdot *)$$

b) Für den Kreisbogen erhält man mit

$$\varepsilon_0 = - \frac{H_t}{E F} \cos \varphi_0 ; \quad [S_1]_0^{2l} = 2r \varphi_0 \cos \varphi_0$$

die Gleichungen

$$0 = H_t \frac{J}{F} \cos \varphi_0 2 \varphi_0 - 2 \varepsilon_t t E J \varphi_0 - H_t \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} y ds + (\mathfrak{M}_A)_t \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} ds$$

$$0 = - H_t \frac{J}{F} \cos \varphi_0 [2r \cos \varphi_0 \varphi_0] + \varepsilon_t t E J [2r \cos \varphi_0 \varphi_0]$$

$$- H_t \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} y^2 ds + (\mathfrak{M}_A)_t \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} y ds \cdot$$

Setzt man

$$y = r (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

$$ds = - r d\varphi$$

und führt die Integrationen aus, so folgt

$$0 = H_t \frac{J}{F} \cos \varphi_0 2 \varphi_0 - 2 \varepsilon_t t E J \varphi_0 - 2 H_t r^2 (\sin \varphi_0 - \cos \varphi_0 \varphi_0) + 2r \mathfrak{M}_A \varphi_0$$

$$0 = - H_t \frac{J}{F} 2r \cos^2 \varphi_0 \varphi_0 + 2 \varepsilon_t t E J r \varphi_0 \cos \varphi_0$$

$$- H_t r^3 [\varphi_0 - 3 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0] + 2 (\mathfrak{M}_A)_t r^2 (\sin \varphi_0 - \cos \varphi_0 \varphi_0)$$

und hieraus

$$74) \quad H_t = \frac{2 \varepsilon_t t E F \varphi_0 \sin \varphi_0}{2 \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{r^2 F}{J} [\varphi_0^2 + \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - 2 \sin^2 \varphi_0]}$$

worauf

$$75) \quad (\mathfrak{M}_A)_t = H_t \left[ r \frac{\sin \varphi_0 - \cos \varphi_0 \varphi_0}{\varphi_0} - \frac{J}{F r} \cos \varphi_0 \right] + \varepsilon_t t E \frac{J}{r}$$

sich ergibt.

\*) Setzt man hierfür angenähert  $H_t = \frac{45 \varepsilon_t E F t}{4 \frac{F h^2}{J} + 45}$ , so erhält man den von

Erfahrungswerthe. In die für  $H_t$  und  $(\mathfrak{M}_A)_t$  abgeleiteten Formeln setze man ( $E$  in Kilogrammen pro Quadratcentimeter und  $t$  in Celsius-Graden gegeben) für:

Holz . . . . .	$E = 110\,000^*)$ ,	$\varepsilon_t = 0,000004$ ,	$\varepsilon_t E = 0,44$ ,
Gusseisen. . .	$E = 1\,000\,000$ ,	$\varepsilon_t = 0,000011$ ,	$\varepsilon_t E = 11,00$ ,
Schmiedeeisen	$E = 2\,000\,000$ ,	$\varepsilon_t = 0,000012$ ,	$\varepsilon_t E = 24,00$ .

Bei einer mittleren Montirungstemperatur von  $10^0$  wird es sich empfehlen,  $t = \pm 30^0$  zu wählen.

## Abschnitt II.

### Dimensionirung der Bogenträger.

#### § 8.

#### Blechbogenträger.

##### 1. Von den Momentenpunkten und Kernpunkten.

Im vorigen Abschnitte wurden die Spannungen  $k_o$  und  $k_u$  in den äussersten Fasern eines stabförmigen Bogens als Funktionen des Angriffsmomentes  $\mathfrak{M}$  und der Axialkraft  $R_n$  dargestellt und die Werthe  $\mathfrak{M}$  und  $R_n$  für den fundamentalen Fall der Beanspruchung des Bogens durch eine concentrirte Last ermittelt. Aus diesen Resultaten lässt sich nun mit Hilfe einer Summation auf die Wirkung eines Systems concentrirter Lasten (z. B. eines Eisenbahnzuges) schliessen und darauf diejenige Stellung des Lastensystems finden, welcher die Maximalspannungen entsprechen. Bevor aber auf diese Untersuchungen eingetreten werde, sollen die Werthe  $k_o$  und  $k_u$  auf eine für die weitere Behandlung bequemere Form gebracht werden. Dazu sei normal zur Bogenaxe ein Schnitt  $\bar{c}\bar{c}$  (Fig. 24) geführt und die Resultirende  $R$  aus den am linken Bogenfragment angreifenden Kräften in ihrem Schnittpunkte  $s$  mit der  $\bar{c}\bar{c}$  in die Componenten  $R_n$  und  $R_t$  zerlegt.  $e$  bedeute den Abstand der  $R_n$  vom Schwerpunkte  $m$  des Querschnittes. Dann ist

$$k_o = -\frac{R_n}{F} - \frac{\mathfrak{M}}{F r} - \frac{\mathfrak{M} a_o}{J} = -\frac{R_n}{F} - \frac{R_n e}{F r} - \frac{R_n e a_o}{J}$$

$$k_u = -\frac{R_n}{F} - \frac{R_n e}{F r} + \frac{R_n e a_u}{J}$$

und, wenn man  $\frac{J}{a_o} = W_o$ ;  $\frac{J}{a_u} = W_u$  setzt,

\*) Durchschnittswerth.

$$k_o = - R_n \frac{1 + \frac{W_o}{Fr}}{W_o} \left\{ e + \frac{\frac{W_o}{F}}{1 + \frac{W_o}{Fr}} \right\}$$

$$k_u = + R_n \frac{1 - \frac{W_u}{Fr}}{W_u} \left\{ e - \frac{\frac{W_u}{F}}{1 - \frac{W_u}{Fr}} \right\}.$$

Wird  $\frac{W_o}{1 + \frac{W_o}{Fr}} = W_o'$  und  $\frac{W_u}{1 - \frac{W_u}{Fr}} = W_u'$  gesetzt, ferner:

$$\frac{W_o'}{F} = e_u'; \quad \frac{W_u'}{F} = e_o'$$

so folgt:

$$k_o = - R [e + e_u'] \cos \beta \frac{1}{W_o'}; \quad k_u = + R [e - e_o'] \cos \beta \frac{1}{W_u'}.$$

Sind  $o$  und  $u$  zwei Punkte des Schnittes  $\bar{c}\bar{c}$ , in den Abständen  $e_o'$  resp.  $e_u'$  vom Schwerpunkte  $m$  und zwar oberhalb, beziehungsweise unterhalb  $m$  gelegen, und bedeuten  $\eta_o$  und  $\eta_u$  die Abstände der  $R$  von  $o$  und  $u$ , so ist

$$\eta_u = (e + e_u') \cos \beta; \quad \eta_o = (e - e_o') \cos \beta$$

und es werden, wenn die Angriffsmomente in Bezug auf die Punkte  $o$  und  $u$  mit  $\mathfrak{M}_o$  resp.  $\mathfrak{M}_u$  bezeichnet werden, die Spannungen

$$76) \quad k_o = - \frac{\mathfrak{M}_u}{W_o'}; \quad k_u = + \frac{\mathfrak{M}_o}{W_u'}.$$

Die Punkte  $o$  und  $u$  sollen die Momentenpunkte des Querschnittes  $\bar{c}\bar{c}$  heissen. Das Moment für den oberen beziehungsweise den unteren Momentenpunkt liefert durch  $W_o'$  resp.  $W_u'$  dividirt, die Spannung in der untersten resp. obersten Faser.

Werden bei grossem  $r$  die Glieder  $\frac{W_o}{Fr}$  und  $\frac{W_u}{Fr}$  gegen 1 vernachlässigt, so wird

$$W_o' = W_o; \quad W_u' = W_u; \quad e_o' = \frac{W_u}{F} (= e_o \text{ gesetzt});$$

$$e_u' = \frac{W_o}{F} (= e_u \text{ gesetzt})$$

mithin:

$$77) \quad k_o = - \frac{\mathfrak{M}_u}{W_o}; \quad k_u = + \frac{\mathfrak{M}_o}{W_u}.$$

Die Punkte  $o$  und  $u$  im Abstände  $e_o$  resp.  $e_u$  vom Schwerpunkte  $m$  heissen Kernpunkte des Querschnittes. Der geometrische Ort von  $o$  wird die obere, der von  $u$  die untere Kernlinie genannt.

Beim Kreisbogen unterliegt die genauere Berechnung der Spannungen keinerlei Schwierigkeiten; sie wird sogar in einem später sehr oft zu behandelnden Specialfalle einfacher als die genäherte. Wird nämlich der Bogen nur rechts vom Schnitt  $\overline{cc}$  (Fig. 25) belastet, so hat man, da am linken Fragment (einen eingespannten Bogen voraussetzend) nur  $A$ ,  $H$  und das Kräftepaar mit dem Momente  $\mathfrak{M}_A$  angreift,

$$\mathfrak{M} = Ax - Hy + \mathfrak{M}_A,$$

$$R_n + \frac{\mathfrak{M}}{r} = A \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0 + \frac{\mathfrak{M}_A}{r} \text{ (vergl. S. 18),}$$

mithin

$$k_o = -\frac{1}{F} (A \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0) - \frac{1}{W_o} (Ax - Hy) - \frac{\mathfrak{M}_A}{rF} - \frac{\mathfrak{M}_A}{W_o}$$

$$k_o = -\frac{1}{W_o} \left\{ A(x + e_u \sin \varphi_0) - H(y - e_u \cos \varphi_0) \right\} - \frac{\mathfrak{M}_A}{W_o} \left( 1 + \frac{W_o}{Fr} \right)$$

und analog

$$k_u = +\frac{1}{W_u} \left\{ A(x - e_o \sin \varphi_0) - H(y + e_o \cos \varphi_0) \right\} + \frac{\mathfrak{M}_A}{W_u} \left( 1 - \frac{W_u}{Fr} \right).$$

Zieht man durch  $m$  (Fig. 25) eine Parallele zu dem linksseitigen Kämpferquerschnitt, bestimmt auf dieser die Punkte  $o$  und  $u$  in den Abständen  $\overline{om} = e_o$  und  $\overline{um} = e_u$  vom Schwerpunkte  $m$  und bezeichnet mit  $y_o$  und  $x_o$  resp.  $y_u$  und  $x_u$  die Coordinaten dieser Punkte, so folgt

$$x_o = x - e_o \sin \varphi_0; \quad y_o = y + e_o \cos \varphi_0;$$

$$x_u = x + e_u \sin \varphi_0; \quad y_u = y - e_u \cos \varphi_0,$$

weshalb, wenn  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$  die Momente der aus  $A$  und  $H$  resultirenden Kraft für die Punkte  $o$  und  $u$  sind,

$$k_o = -\frac{1}{W_o} \left\{ \overline{\mathfrak{M}}_o + \mathfrak{M}_A \left( 1 + \frac{W_o}{Fr} \right) \right\}$$

$$k_u = +\frac{1}{W_u} \left\{ \overline{\mathfrak{M}}_u + \mathfrak{M}_A \left( 1 - \frac{W_u}{Fr} \right) \right\}$$

oder genügend genau

$$78) \quad \begin{cases} k_o = -\frac{1}{W_o} \left\{ \overline{\mathfrak{M}}_o + \mathfrak{M}_A \right\} = -\frac{1}{W_o} \mathfrak{M}_o \\ k_u = +\frac{1}{W_u} \left\{ \overline{\mathfrak{M}}_u + \mathfrak{M}_A \right\} = +\frac{1}{W_u} \mathfrak{M}_u \end{cases}$$

sich ergibt. Dabei sind  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$  die „Angriffsmomente“ für die Punkte  $o$  und  $u$ , diese mithin die „Momentenpunkte“. Bei Bögen mit Kämpfergelenken sind die Formeln 78 correct, da hier  $\mathfrak{M}^A = 0$  ist.

Analog findet man, dass, falls der Bogen nur durch links vom Querschnitt  $\overline{cc}$  gelegene Lasten beansprucht wird, die Linie  $\overline{o'u'}$  (Fig. 26) parallel dem rechtsseitigen Kämpferquerschnitt zu ziehen und  $\overline{m o'} = e_o$ ,  $\overline{m u'} = e_u$  zu machen ist, um in  $o'$  und  $u'$  die Momentenpunkte zu erhalten.

Die zuletzt vorgetragene Methode wird bequemer als die erste, sobald nur das eine der beiden Bogenfragmente belastet ist und die Coordinaten der Momentenpunkte berechnet werden sollen. (Häufig wird man die Coordinaten auf einer genauen Zeichnung abgreifen.)

Zahlenbeispiel. Ein Kreisbogen mit 3 Gelenken ( $l = 10^m$ ,  $h = 5^m$  (Fig. 27)), habe den in Fig. 28 dargestellten Querschnitt und sei durch eine Lokomotive belastet, welche von  $B$  aus bis zum Scheitel aufgeföhren ist. Es soll die Spannung in der untersten Faser des Querschnittes  $cc$  im Abstände  $1,5^m$  vom Scheitel berechnet werden. Es ist

$$A = \frac{\Sigma P b}{2l} = \frac{24 \cdot 2,5 + 39 \cdot 8,5}{20} = 15,075'$$

$$Al = H h \text{ mithin } H = \frac{Al}{h} = 2A$$

und das Angriffsmoment für den oberen Momentenpunkt

$$\mathfrak{M}_o = Ax_o - Hy_o = A(x_o - 2y_o) = 15,075(x_o - 2y_o).$$

Mit Berücksichtigung der Schwächung des Querschnittes durch die  $2^{\text{cm}}$  starken Niete ist

$$J = \frac{1}{12} \left\{ (25 - 4) 80^3 - 8 \cdot 78^3 - 2(7 - 2) 76^3 - 2 \cdot 1,0 \cdot 62^3 \right\} = 174097,$$

$$W_o = W_u = \frac{J}{40} = 4352$$

$$F = 2(25 - 4) + (8 + 7 - 2)4 + 1,0 \cdot 78 = 172 \square^{\text{cm}}$$

$$e_o = e_u = \frac{4352}{172} = 25,3^{\text{cm}}.$$

Die Coordinaten des Querschnittsschwerpunktes sind

$$y = \sqrt{12,5^2 - 1,5^2} - 7,5 = 4,910^m; \quad x = 8,500^m, \text{ wesshalb}$$

$$x_o = x - e_o \sin \varphi_o = 8,500 - 0,253 \frac{10}{12,5} = 8,298$$

$$y_o = y + e_o \cos \varphi_o = 4,910 + 0,253 \frac{7,5}{12,5} = 5,062$$

$$\mathfrak{M}_o = 15,075(8,298 - 2 \cdot 5,062) = -27,53^{\text{tm}}$$

$$k_u = -\frac{2753000^{\text{kcm}}}{4352} = -633^{\text{k}} \text{ pro } \square^{\text{cm}}.$$

Die Coordinaten des oberen Kernpunktes ( $o'$  in Fig. 27) sind

$$x_o = x - e_o \sin \varphi_o = 8,500 - 0,253 \frac{1,5}{12,5} = 8,470$$

$$y_o = y + e_o \cos \varphi_o = 4,910 + 0,253 \frac{7,5 + 4,91}{12,5} = 5,161$$

$$\text{daher } \mathfrak{M}_o = 15,075(8,470 - 2 \cdot 5,161) = -27,86^{\text{tm}}$$

$$k_u = -\frac{2786000}{4352} = -640^{\text{k}} \text{ pro } \square^{\text{cm}}.$$

Die Differenz der beiden Werthe  $k_u$  ist hier (wie überhaupt stets) sehr gering, und sollen daher in der Folge die Momentenpunkte nur dann

an Stelle der Kernpunkte treten, wenn dadurch eine bequemere Rechnung erzielt wird.

## 2) Berechnung des Querschnittes.

Da im Allgemeinen die grössten Momente  $M_o$  und  $M_u$  verschieden sind, so wird der Querschnitt — falls die zulässigen Spannungen  $k_o$  und  $k_u$  an allen Stellen die zulässige Grenze erreichen sollen — nicht symmetrisch in Bezug auf die horizontale Schweraxe werden. Giebt man dem Verticalblech und den Winkeleisen durchweg dieselben Abmessungen, so muss durch Variiren der Kopfplattendimensionen die Bedingung gleicher Sicherheit in allen Querschnitten möglichst annähernd erfüllt werden. Wird nun bald der Obergurt, bald der Untergurt durch Kopfplatten von gleicher Breite und gleicher Dicke in höherem Maasse verstärkt, so wird die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Bogenaxe eine unregelmässige Curve, und zwar wird sie unstetig, da die Querschnitts-abmessungen sich sprungweise ändern. Hierauf wird aber bei der statischen Berechnung keine Rücksicht genommen; man setzt vielmehr bei Ermittlung der angreifenden Kräfte eine parabolische resp. kreisbogenförmige Axe (ideelle Axe genannt) voraus und construirt dann den Bogen so, dass der Schwerpunkt des gefährlichen (d. i. des stärkst beanspruchten) Querschnittes in der ideellen Bogenaxe liegt, oder aber man legt durchweg den Mittelpunkt des Verticalbleches in diese ideelle Axe. Die zweite Anordnung lässt sich durch die Thatsache motiviren, dass bei denjenigen Stützweiten, bei denen Blechbögen mit Vortheil angewendet werden, für die meisten Querschnitte die Differenz zwischen  $M_o$  und  $M_u$  so unerheblich ausfällt, dass — unter Annahme von  $k_o = k_u$  — Obergurt und Untergurt gleich stark construirt werden; es liegen sogar bei der zweiten Anordnung mehr Querschnittsschwerpunkte auf der ideellen Bogenaxe wie bei der ersten. Bei einer dritten Anordnung werden die Kopfplatten der oberen und der unteren Gurtung in verschiedenen Breiten  $b_o$  u.  $b_u$  und in verschiedenen Dicken  $\delta_o$  u.  $\delta_u$  disponirt und die Abmessungen des stärkst beanspruchten Querschnittes so gewählt, dass der Schwerpunkt dieses Querschnittes in der halben Höhe des Stehbleches liegt und weiter die Axe des Stehbleches ideelle Bogenaxe wird; hierauf wird der Untergurt durchweg aus Platten mit den Dimensionen  $b_u$  u.  $\delta_u$ , der Obergurt aus solchen mit den Dimensionen  $b_o$  u.  $\delta_o$  gebildet, und lässt sich hierbei durch geschickte Wahl aller Abmessungen unschwer erreichen, dass die Schwerpunkte der meisten Querschnitte mit grosser Annäherung auf der in die statische Berechnung eingeführten ideellen Bogenaxe liegen.

Die unter den hier hervorgehobenen drei verschiedenen Voraussetzungen berechneten Dimensionen des Trägers weichen so wenig von einander ab, dass die drei Anordnungen als gleichwerthig zu bezeichnen sind. Die dritte führt zu den einfachsten Rechnungen, möge daher in der Folge angenommen werden.

Es bezeichne (Fig. 29)

$J_s$  das Trägheitsmoment des Querschnittes des aus Stehblech und Winkelisen gebildeten Theiles in Bezug auf die eigene Schweraxe  $ss$ ,

$f_o$  Summe der Querschnitte der oberen Kopfplatten,

$f_u$  - - - - - unteren - - - ,

$a_o$  Abstand des Schwerpunktes der  $f_o$  von der  $ss$ ,

$a_u$  - - - - -  $f_u$  - - - ,

$h_1$  die Höhe des Stehbleches,

dann ist sehr angenähert:

$$\begin{aligned} J &= J_s + f_o a_o^2 + f_u a_u^2 \\ \text{I) } \quad a_o + a_u &= h_2 \\ \frac{Jk_o}{a_o} &= \mathfrak{M}_u; \quad \frac{Jk_u}{a_u} = \mathfrak{M}_o. \end{aligned}$$

Wird

$$\frac{a_o}{a_u} = \frac{\mathfrak{M}_o k_o}{\mathfrak{M}_u k_u} = c$$

gesetzt, so folgt durch Verbindung dieser Beziehung mit I)

$$a_o = \frac{h_2 c}{1 + c}; \quad a_u = \frac{h_2}{1 + c}$$

und

$$\frac{\mathfrak{M}_u a_o}{k_o} = \frac{\mathfrak{M}_u h_2 c}{k_o (1 + c)}.$$

Da die Axe  $ss$  Schweraxe des Querschnittes sein soll, ist

$$f_o a_o = f_u a_u,$$

$$J = J_s + f_o a_o h_2 = J_s + \frac{f_o h_2^2 c}{1 + c},$$

und schliesslich aus der Gleichung

$$\begin{aligned} J_s + \frac{f_o h_2^2 c}{1 + c} &= \frac{\mathfrak{M}_u h_2 c}{k_o (1 + c)} \\ f_o &= \frac{\mathfrak{M}_u}{k_o h_2} - \frac{J_s}{h_2^2} \left(1 + \frac{1}{c}\right), \end{aligned}$$

wofür genügend genau

$$\text{79) } \quad f_o = \frac{\mathfrak{M}_u}{k_o h_1} - \frac{J_s}{h_1^2} \left(1 + \frac{1}{c}\right)$$

gesetzt werden darf. Weiter findet man jetzt aus der Bedingung]

$$f_o : f_u = a_u : a_o = 1 : c$$

$$\text{80) } \quad f_u = c f_o = \frac{\mathfrak{M}_o}{k_u h_1} - \frac{J_s}{h_1^2} (c + 1).$$

Wird zum Beispiel bei Berechnung eines Bogenträgers, dessen Untergurt stärker angestrengt wird, als der Obergurt, nach Wahl der Abmessungen des Stehblechs und der Winkelisen die Zahl  $n_u$  der unteren

Kopfplatten (im gefährlichen Querschnitte) angenommen, so folgt bei der Stärke  $\delta_u$  derselben

$$b_u = \frac{f_u}{\delta_u n_u},$$

darauf aus

$$\frac{h_1 + \delta_o n_o}{h_1 + \delta_u n_u} = \frac{a_o}{a_u} = c$$

$$\delta_o = \frac{h_1}{n_o} (c - 1) + c \delta_u \frac{n_u}{n_o}$$

und schliesslich

$$b_o = \frac{f_o}{\delta_o n_o}.$$

Jetzt findet man dasjenige Angriffsmoment  $\mathfrak{M}'_o$ , das im Untergurt nicht  $n_u$  sondern nur  $n'_u$  Platten verlangt, aus der Gleichung

$$\delta_u b_u n'_u = \frac{\mathfrak{M}'_o}{k_u h_1} - \frac{J_s}{h_1^2} (c + 1),$$

welche zuerst unter der Annahme  $c = 1$  probeweise aufgelöst werden muss, da  $c$  von  $\mathfrak{M}'_o$  und  $\mathfrak{M}'_u$  für den fraglichen Querschnitt abhängt.

Ebenso dient die Gleichung 79) zur Entscheidung der Frage, an welcher Stelle die Zahl  $n_o$  der Platten des Obergurtes bis zu einer bestimmten Zahl  $n'_o$  herabgemindert werden darf, resp. an welcher Stelle eine Verstärkung des Obergurtes erwünscht ist.

Will man Obergurt und Untergurt gleich stark construiren, so verstehe man unter  $\mathfrak{M}$  das grössere der beiden Momente  $\mathfrak{M}_o$  u.  $\mathfrak{M}_u$ , ferner unter  $k$  den kleineren der Werthe  $k_o$  u.  $k_u$  und setze dann

$$f_o = f_u = \frac{\mathfrak{M}}{k h_1} - \frac{2J_s}{h_1^2}.$$

Die zulässige Spannung  $k$  richtet sich, wie die auf Wöhler's Versuche basirte neuere Dimensionenberechnung lehrt, in erster Linie nach dem Verhältniss der kleinsten zur grössten Inanspruchnahme. Indem wir hierbei das Launhardt-Weyrauch'sche (als das einfachste der im Uebrigen ziemlich gleichwerthigen) Verfahren adoptiren und mit  $P_{\min}$  die kleinste mit  $P_{\max}$  die grösste Inanspruchnahme eines Stabes bezeichnen, setzen wir

$$81) \quad k = k' \left\{ 1 \pm \frac{1}{2} \frac{P_{\min}}{P_{\max}} \right\}.$$

$k'$  bedeutet die „Ursprungsfestigkeit“ d. i. diejenige Spannung, welche dem Stabe zugemuthet werden darf, falls er wechselweise angestrengt und entlastet wird. Das Zeichen + oder - ist zu wählen, je nachdem der Stab nur auf Zug resp. Druck oder wechselweise auf Zug und Druck angestrengt wird. Die Spannung  $k'$  wird durch Versuche oder in der Weise ermittelt, dass Formel 81) auf die gefährlichen Querschnitte bewährter Brückenconstructions angewendet wird. Dass hierbei

die Wöhler'schen Versuche nicht unbedingt maassgebend sind, geht daraus hervor, dass bei diesen der Wechsel der Beanspruchung sehr schnell erfolgte, während die Anstrengungen  $P_{\min}$  und  $P_{\max}$  der Constructionstheile eines Brückenträgers in grösseren Zeiträumen auf einander folgen, und jedenfalls nicht nur die Zahl der Wiederholungen der Inanspruchnahme, sondern auch die Zeitintervalle zwischen den einzelnen Wiederholungen die Festigkeit beeinflussen. Ausserdem sind die Wöhler'schen Versuche nicht mit Brückenbaumaterial angestellt worden.

Auf ausreichende Sicherheit kann man rechnen, wenn man  $k' = 700$  bis  $800 \text{ kg pro } \square^{\text{cm}}$  setzt und den Hauptwerth auf die consequente Anwendung der Formel 81) legt \*), wobei allerdings vorausgesetzt wird, dass die statische Berechnung in rationeller Weise gehandhabt und die Construction so angeordnet wird, dass den Vorbedingungen der exacten Theorie möglichst vollständig Genüge geleistet ist. Wenn letzteres nicht der Fall ist, dann ist selbstverständlich die allzu subtile Dimensionirung eine sehr überflüssige Arbeit. In dieser Beziehung das richtige Maass zu halten, kann nur durch viele Uebung erlangt werden. Dem Anfänger bleibt immerhin zu empfehlen, eher etwas zu genau zu rechnen, als sich durch das „aut Caesar aut nihil“ verleiten zu lassen, Vernachlässigung an Vernachlässigung zu reihen. Das Vertrauen zu dem kürzeren Verfahren des Praktikers kann überhaupt nur dadurch erworben werden, dass man sich durch Zahlenrechnungen von den geringen Differenzen der Resultate der genäherten und genaueren Rechnung überzeugt und dann in Erwägung zieht, wie gegenstandslos solche Unterschiede durch den Umstand werden, dass der Werth der exacteren Untersuchung bei den in Rede stehenden Systemen ein zweifelhafter ist.

Die Spannung  $k_o = - \frac{\mathfrak{M}_u}{W_o}$  ist eine Druck- resp. Zugspannung, je nachdem  $\mathfrak{M}_u$  positiv oder negativ ist. Bezeichnen wir, unter Weglassung der Vorzeichen, mit  $(\mathfrak{M}_u)_{\max}$  das grösste positive, mit  $(\mathfrak{M}_u)_{\min}$  das grösste negative  $\mathfrak{M}_u$ , so wird, da stets  $(\mathfrak{M}_u)_{\max} > (\mathfrak{M}_u)_{\min}$  ist, die zulässige Spannung in der obersten Faser

$$82) \quad k_o = k' \left\{ 1 \pm \frac{1}{2} \frac{(\mathfrak{M}_u)_{\min}}{(\mathfrak{M}_u)_{\max}} \right\}.$$

Ebenso folgt aus  $k_u = + \frac{\mathfrak{M}_o}{W_u}$ , dass  $(\mathfrak{M}_o)_{\max}$  die grösste Zugspannung und  $(\mathfrak{M}_o)_{\min}$  die grösste Druckspannung in der untersten Faser erzeugt. Dabei ist stets  $(\mathfrak{M}_o)_{\min} > (\mathfrak{M}_o)_{\max}$ , mithin zulässig:

\*) Der Vorzug der neueren vor der älteren Dimensionenberechnung muss hauptsächlich darin erblickt werden, dass erstere einen constanten Sicherheitsgrad für alle Constructionstheile garantirt, während die Einführung ein und desselben  $k$  zur Folge hat, dass diejenigen Constructionstheile, welche stets in demselben Sinne beansprucht werden, zu stark ausfallen, während für die wechselweise auf Zug und Druck angestregten zu geringe Abmessungen gewonnen werden.

$$83) \quad k_u = k' \left\{ 1 \pm \frac{1}{2} \frac{(\mathfrak{M}_o)_{\max}}{(\mathfrak{M}_o)_{\min}} \right\} .$$

Dabei ist das Zeichen + oder - zu wählen, jenachdem die Momente  $(\mathfrak{M}_u)_{\min}$  und  $(\mathfrak{M}_u)_{\max}$  resp.  $(\mathfrak{M}_o)_{\min}$  und  $(\mathfrak{M}_o)_{\max}$  gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. In die Formeln 79 und 80 sind die Momente  $(\mathfrak{M}_o)_{\min}$  und  $(\mathfrak{M}_u)_{\max}$  einzuführen, so dass

$$84) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{k_o (\mathfrak{M}_o)_{\min}}{k_u (\mathfrak{M}_u)_{\max}} \\ f_o = \frac{(\mathfrak{M}_u)_{\max}}{k_o h_1} - \frac{J_s}{h_1^2} \left( 1 + \frac{1}{c} \right) \\ f_u = \frac{(\mathfrak{M}_o)_{\min}}{k_u h_1} - \frac{J_s}{h_1^2} (c + 1). \end{array} \right.$$

sich ergeben.

Die Anwendung der abgeleiteten Formeln setzt voraus, dass die Momentenpunkte resp. die Kernpunkte des Querschnitts gegeben, dass also  $e_o = \frac{W_o}{F}$  und  $e_u = \frac{W_u}{F}$  bekannt sind. Deshalb muss die statische Berechnung eines neu zu projektirenden Bogens durch eine Abschätzung der Querschnittsdimensionen eingeleitet werden. Dabei wird man vorerst  $f_o = f_u$  und  $k_o = k_u$  mithin  $c = 1$  setzen, also von der Formel

$$85) \quad f = \frac{\mathfrak{M}}{k h_1} - \frac{2 J_s}{h_1^2}$$

ausgehen, in der  $\mathfrak{M}$  das grössere der Momente  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$  bedeutet. Für ein positives  $\mathfrak{M}_u$  liegt die Resultirende  $R$  der am linken Fragmente wirkenden Kräfte oberhalb  $u$ , und erhält man mit Rücksicht auf Fig. 30

$$\mathfrak{M}_u = R_n (\eta + e_u) = \mathfrak{M}_b + R_n \frac{W_o}{F} ,$$

wo  $\mathfrak{M}_b$  das Angriffsmoment für den in der Bogenaxe angenommenen Querschnittsschwerpunkt. Ebenso ergibt sich (Fig. 31) für ein negatives Moment  $\mathfrak{M}_o$  (absolut genommen)

$$\mathfrak{M}_o = R_n (\eta + e_o) = \mathfrak{M}_b + R_n \frac{W_u}{F} ,$$

so dass wegen

$$86) \quad \frac{W_o}{F} = \frac{W_u}{F} = e$$

$$f = \frac{\mathfrak{M}_b + R_n e}{k h_1} - \frac{2 J_s}{h_1^2}$$

geschrieben werden darf, in welcher Formel man  $\mathfrak{M}_b$  und  $R_n$  für sich zum Maximum machen wird, da der Maximalwerth von  $(\mathfrak{M}_b + R_n e)$  wieder eine Function der unbekanntenen Querschnittsabmessungen ist. Beim statisch bestimmten Bogenträger mit drei Gelenken kann man  $(R_n)_{\max}$  und  $(\mathfrak{M}_b)_{\max}$  von vornherein berechnen; hierauf werden die Dimensionen

von Stehblech und Winkleisen gewählt,  $J$ , bestimmt, desgleichen  $W_s = \frac{2J_s}{h_1}$  und der Gesamthalt  $f_s$  der Querschnitte der Winkleisen und des Stehbleches. Nun wird in die Formel 86  $e$  etwas grösser als  $\frac{W_s}{f_s}$  eingeführt und  $f$  berechnet.\*)

Hat man jetzt für den so gefundenen Querschnitt

$$J = J_s + 2fa^2 ; \quad F = f_s + 2f ; \quad W = \frac{2J}{h}$$

und  $e = \frac{W}{F}$  gefunden, so führt man diesen Werth von Neuem in Gleichung 86 ein und wiederholt die Ermittlung von  $f$  und  $e$ , worauf die Verzeichnung der Kernlinien, die Berechnung der  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$  und schliesslich die correcte Bestimmung der verschiedenen Gurtquerschnitte erfolgen kann.

Bei den statisch unbestimmten Bogenträgern sind  $(R_n)$  und  $\mathfrak{M}_b$  insofern von den Querschnittsabmessungen abhängig, als die in Folge von Temperaturänderungen entstehenden Stützenwiderstände Functionen von  $J$  und  $F$  sind. Man ermittle wie vorhin  $(R_n)_{\max}$  und  $(\mathfrak{M}_b)_{\max}$  ohne Rücksichtnahme auf Temperaturänderungen, wähle aber bei Berechnung von  $f$  eine kleinere zulässige Spannung  $k$ . Hierauf werden bei der zweiten Berechnung von  $f$  die Werthe  $(R_n)_{\max}$  und  $(\mathfrak{M}_b)_{\max}$  um die durch Temperaturänderungen bedingten vergrössert, wobei  $J$  und  $F$  unter zu Grundelegung des erst gewonnenen  $f$  zu gewinnen sind. Bei ungenügender Uebereinstimmung des ersten und zweiten Resultates wird eine dritte Berechnung von  $f$  nöthig.

### 3) Niettheilung.

Es seien  $\overline{cd}$  und  $\overline{c'd'}$  (Fig. 32) zwei unendlich nahe Querschnitte. Ein Flächenelement des Obergurtes wird im Schnitt  $\overline{cd}$  durch

$$Ndf = \left( -\frac{R_n}{F} - \frac{\mathfrak{M}}{rF} - \frac{\mathfrak{M}\eta}{J} \right) df$$

belastet. Die Belastung des Querschnittes der oberen Gurtung (bestehend aus zwei Winkleisen und Kopfplatten) beträgt hiernach

$$\begin{aligned} Q &= \int Ndf = - \left( \frac{R_n}{F} + \frac{\mathfrak{M}}{Fr} \right) \int df - \frac{\mathfrak{M}}{J} \int \eta df \\ &= - \left( R_n + \frac{\mathfrak{M}}{r} \right) \mathfrak{F} - \mathfrak{M} \mathfrak{S}, \end{aligned}$$

unter  $\mathfrak{F}$  den Inhalt und unter  $\mathfrak{S}$  das statische Moment des Gurtquerschnittes in Bezug auf die horizontale Schweraxe des ganzen Querschnittes  $\overline{cd}$  verstanden.

\*) Dabei wähle man etwa  $k = 500 \text{ kg pro } \square \text{cm}$ .

Im Schnitte  $\overline{c'd'}$  wird die Belastung des Gurtquerschnittes  $= Q + dQ$  und zwar ist, wenn  $F$ ,  $J$  und  $r$  constant angenommen werden,

$$\frac{dQ}{ds} = -\frac{\mathfrak{F}}{F} \left\{ \frac{dR_n}{ds} + \frac{d\mathfrak{M}}{r ds} \right\} - \frac{\mathfrak{S}}{J} \frac{d\mathfrak{M}}{ds}.$$

Greift zwischen beiden Querschnitten eine concentrirte Last  $P$  an, so ist nach Seite 7

$$\frac{dR_n}{ds} = -\frac{R_t}{r} - \frac{P \sin \varphi}{ds} *); \quad \frac{d\mathfrak{M}}{ds} = + R_t$$

$$dQ = P \sin \varphi \frac{\mathfrak{F}}{F} - \frac{\mathfrak{S}}{J} ds R_t,$$

welche Relation auch annähernd gültig bleibt, sobald  $ds$  durch die endliche aber kleine Abmessung  $e$  ersetzt wird. Wir schreiben dann

$$87) \quad \Delta Q = P \sin \varphi \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}} - \frac{\mathfrak{S}}{J} e R_t$$

und nennen  $\Delta Q$  die axiale Schubkraft auf der Strecke  $e$ . Bedeutet nun  $\mathfrak{N}$  die Tragfähigkeit eines Nietbolzens und  $e$  die Niettheilung (Fig. 33), so folgt, da es der Zweck der Niete ist, die axialen Kräfte  $\Delta Q$  aufzunehmen,

$$88) \quad \mathfrak{N} = P \sin \varphi \frac{\mathfrak{F}}{F} - \frac{\mathfrak{S}}{J} e R_t$$

als Formel zur Berechnung der Niettheilung.

Da die Belastung eines Blechbogensträgers, wegen der zwischen die Fahrbahnconstruction und den Tragbogen eingeschalteten Verticalen, stets aus Einzelkräften besteht\*\*), so wird für die meisten Querschnitte das erste Glied der Formel 88) in Wegfall kommen; es ergibt sich dann (analog wie beim Balken)

$$89) \quad e = \frac{J\mathfrak{N}}{\mathfrak{S}R_t}$$

worin  $R_t$  den absoluten Werth der grössten Transversalkraft bedeutet.

An der Angriffsstelle der Verticalen (Fig. 34) wird bei positivem  $R_t$  die Schubkraft durch die Belastung  $P$  der Verticalen verkleinert und bei negativem  $R_t$  vergrössert. Wird im ersten Falle die Verminderung der Schubkraft vernachlässigt, so folgt:

$$90) \quad e = \frac{J\mathfrak{N}}{\mathfrak{S}(R_t)_{\max}}; \quad e = \frac{J \left( \mathfrak{N} - \frac{P}{n} \sin \varphi \frac{\mathfrak{F}}{F} \right)}{\mathfrak{S}(R_t)_{\min}}.$$

Dabei ist unter  $(R_t)_{\max}$  resp.  $(R_t)_{\min}$  die grösste positive resp. grösste negative Transversalkraft (beide absolut genommen) verstanden, weiter ist vorausgesetzt, dass an der Anschlussstelle der Verticalen  $n$

\*) Man ersetze  $p dx$  durch  $P$ .

\*\*) Von dem Eigengewicht des Tragbogens darf bei der Berechnung der Niettheilungen ganz abgesehen werden.

Niete angeordnet sind und  $P \sin \varphi \frac{\mathfrak{F}}{F}$  sich gleichmässig über diese  $n$  Niete vertheilt (Fig. 34). Man könnte auch die Niettheilung ohne Rücksichtnahme auf die  $P$  berechnen und an der Angriffsstelle der Verticalen so viele Niete einschalten, als zur Uebertragung von  $P \sin \varphi \frac{\mathfrak{F}}{F}$  erforderlich sind.

Die Niete, welche die Winkeleisen mit dem Stehblech verbinden, sind zweischnittig. Ist  $d$  der Nietdurchmesser, so ist  $\frac{2\pi d^2}{4}$  der beanspruchte Querschnitt und bei der Belastung  $\mathfrak{N}$  des Nietes

$$T = \frac{\mathfrak{N}}{\frac{1}{2} \pi d^2}$$

die Schubspannung. Aus der Festigkeitsbedingung (vergl. Formel 17)

$$k = \frac{1 + \mu}{2} \sqrt{4T^2} = (1 + \mu) T = (1 + \mu) \frac{2\mathfrak{N}}{\pi d^2}$$

folgt mit  $\mu = \frac{1}{4}$  die Tragfähigkeit eines Nietes

$$91) \quad \mathfrak{N} = \frac{2}{5} \pi d^2 k$$

und bleibt noch nachzusehen, ob diese Belastung eine Ueberanstrengung der Lochwand zur Folge hat. Wird angenommen, es vertheile sich  $\mathfrak{N}$  gleichmässig über die Projektion  $d\delta$  der Lochwand (unter  $\delta$  die Stärke des Stehbleches verstanden) und bedeutet  $\mathfrak{p}$  die zulässige Belastung der Flächeneinheit, so muss

$$\mathfrak{N} \leq \mathfrak{p} d \delta$$

sein. Versuche von Gerber\*) überzeugen, dass die Annahme  $\mathfrak{p} = 2k$  ausreichende Sicherheit garantirt, so dass

$$92) \quad \mathfrak{N} = 2k d \delta$$

folgt. Ist nun  $\frac{2}{5} \pi d^2 k > 2k d \delta$ , d. i.  $d > 1,6 \delta$ , so muss die Tragkraft des Nietbolzens nach Formel 92 bestimmt werden, im Gegenfalle nach Formel 91. Es empfiehlt sich, ungefähr  $d = 2\delta$  und die Niettheilung nicht weiter als  $e = 6d$  zu wählen (auch dann, wenn die Anwendung der Formeln 90 zu weiteren Theilungen führt).

Die Niete II, welche die Kopfplatten mit den Winkeleisen befestigen (Fig. 33), erhalten bei geringerer Beanspruchung dieselbe Theilung wie die horizontalen Niete I, da man die Niete I und II wechselweise anordnet, um den Querschnitt des Bogens möglichst wenig zu schwächen. (Unter  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{F}$  würde bei Berechnung der Theilung der Niete II das

\*) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1865, S. 48. Vergl. auch Weyrauch, Dimensionenberechnung 1876, S. 74.

statische Moment resp. der Inhalt des Querschnittes der anzuschliessenden Kopfplatten zu verstehen sein, während für jeden einschnittigen Niet  $\mathfrak{R} = \frac{1}{2} \pi a^2 k$  zu setzen wäre.)

4) Das Verticalblech.

Die auf Seite 8 nachgewiesenen Schubspannungen

$$T_{\xi} = T = \frac{R_t \mathfrak{S}}{J \xi_1}$$

werden bei constantem  $\xi_1$  ein Maximum, wenn  $\mathfrak{S} = \int_{\eta}^{a_o} \eta dF$  ein Maximum wird, und dies geschieht für  $\eta = 0$ ; desshalb ist

$$93) \quad T_{\max} = \frac{R_t \mathfrak{S}_{\max}}{J \delta}$$

Bedeutet  $h_o$  den Abstand der Gurtschwerpunkte,  $f = f_o = f_u$  den Inhalt des Gurtquerschnittes (Obergurt und Untergurt gleich angenommen), so ist — ohne Rücksichtnahme auf das Stehblech — angenähert

$$J = \frac{f h_o^3}{2}; \quad \mathfrak{S}_{\max} = \frac{f h_o}{2}; \quad T_{\max} = \frac{R_t}{\delta h_o}$$

wofür

$$T_{\max} = \frac{R_t}{\delta h_1}$$

geschrieben werden möge. Es liefert diese Formel etwas zu grosse Schubspannungen. Die Festigkeitsbedingung

$$k = (1 + \mu) T = (1 + \mu) \frac{R_t}{\delta h_1}$$

ergibt mit  $\mu = \frac{1}{4}$  die Minimalstärke des Stehblechs:

$$94) \quad \delta = \frac{5 R_t}{4 h_1 k}$$

Aus dieser Formel resultiren sehr geringe Abmessungen; man gehe aber, wegen des leichten Durchrostens dünner Platten und um enge Niettheilungen zu vermeiden, nicht unter 0,8 bis 1,0<sup>cm</sup>. In der Regel wird  $\delta = 1,0^{\text{cm}}$  gewählt.

**Nachtrag.** Bei Ermittlung der Tragfähigkeit eines Nietes (Formel 91) wurde die bisher allgemein übliche Annahme gemacht, dass die Elemente des Nietquerschnittes durch eine constante Schubspannung  $T$  afficirt werden. Es steht dieselbe aber insofern mit der „allgemeinen Elasticitätslehre“ in Widerspruch, als sie für die am Umfange des Querschnittes gelegenen Flächenelemente Tangentialspannungen  $T$  liefert, die nicht tangential an den Umfang gerichtet sind, mithin Componenten normal zum Umfange besitzen. Dies kann aber, wie auf Seite 7 und 8 wiederholt hervorgehoben wurde, nur der Fall sein, wenn auf den Mantel des Nietschaftes äussere Schubkräfte wirken. Richtiger ist es, von den

Formeln 13 und 16 auszugehen, da bei deren Ableitung über die Grösse des Momentes  $\mathfrak{M}$ , welches neben der Schubkraft  $R_t$  vorausgesetzt war, keinerlei Annahme gemacht wurde, so dass Formel 13 auch gilt, wenn  $\mathfrak{M} = 0$  ist. Speciell für den Kreisquerschnitt folgt (Figur 3a) wegen

$$\xi_1 = d \cos \psi; \quad \eta = \frac{d}{2} \sin \psi; \quad J = \frac{\pi d^4}{64}; \quad F = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$T_\xi = \frac{R_t}{\xi_1 J} \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \eta dF = \frac{R_t}{\xi_1 J} \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \eta \xi_1 d\eta = \frac{4}{3} \frac{R_t}{F} \cos^2 \psi$$

$$T = \frac{T_\xi}{\cos \psi} = \frac{4 R_t}{3 F} \cos \psi; \quad T_{\max} = \frac{4 R_t}{3 F},$$

daher mit  $R_t = \mathfrak{N}$  die Festigkeitsbedingung für den einschnittigen Niet:

$$k = (1 + \mu) T_{\max} = \frac{5}{4} \frac{4}{3} \frac{\mathfrak{N}}{F} \text{ und hieraus:}$$

$$\mathfrak{N} = \frac{3}{5} k F \left( \text{anstatt } \mathfrak{N} = \frac{4}{5} k F \right).$$

Sobald  $\frac{3}{5} k \frac{\pi d^2}{4} > 2 k d \delta$  d. i.  $d > 4,24 \delta$  ist, muss Formel 92 gewählt werden. Analog folgt für den zweischnittigen Niet

$$\mathfrak{N} = \frac{3}{40} \pi d^2 k$$

so lange  $d < 2,12 \delta$  ist, während im Gegenfalle Formel 92 gilt.

Es ist das Verdienst Grashof's, auf die bisher bei Berechnung der Niete geübte Inconsequenz aufmerksam gemacht zu haben\*).

## § 9.

### Gitterträger.

Besteht der Bogen aus zwei durch ein Stabsystem verbundenen Gurtungen, so begegnet die „correcte“ Ermittlung der Inanspruchnahme erheblichen Schwierigkeiten.

Sind nämlich die Gurtungen aus einzelnen geraden Stäben gebildet, und wird die Befestigung sämmtlicher in einem Knotenpunkte zusammen treffenden Stäbe durch ein Gelenk vermittelt, so liegt nach den in der Einleitung gegebenen Definitionen ein „Bogenfachwerk“ vor, und auf dieses sind die im § 4 zur Berechnung der Stützenwiderstände beim statisch unbestimmten Systeme abgeleiteten Elasticitätsgleichungen streng genommen nicht anwendbar, obgleich andererseits hervorgehoben werden muss, dass nennenswerthe Fehler aus dieser Anwendung „in den hier in Betracht kommenden Fällen“ nicht erwachsen. Die exacten Elasticitätsgleichungen

\*) Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit, Berlin 1878. S. 126.

statisch unbestimmter Bogenfachwerke sind von den Querschnittsdimensionen jedes einzelnen Stabes abhängig und führt ihre Anwendung auf specielle Fälle zu sehr langwierigen Zahlenrechnungen. \*)

Wenn weiter die Gurte continuirlich gekrümmt werden und die Befestigung der Gitterstäbe durch Nieten erfolgt, nähert sich das System sehr dem im vorigen Abschnitte vorausgesetzten stabförmigen Bogen und lassen sich gegen die Benutzung der früher für die äusseren Kräfte gegebenen Formeln Einwände nicht erheben; es wird aber die Bestimmung der Inanspruchnahme der Gitterstäbe unsicher.

In beiden Fällen lassen sich — ohne vereinfachende Annahmen — praktisch verwertbare Endresultate nicht geben, und dürfte man sich zu solchen Annahmen um so eher verstehen, als — wie schon öfters hervorgehoben wurde — die Vorbedingungen einer exacten Theorie im Brückenbau nie erfüllt werden.

Annahmen, welche ohne Bedenken gemacht werden dürfen, sind — zunächst für die in Fig. 35—42 dargestellten weitmaschigen Gitterwerke —:

- 1) Bei Berechnung der Stützenwiderstände soll der Gitterbogen als Stabbogen behandelt werden, dessen Querschnitt das Trägheitsmoment  $J = \frac{1}{2} f h_1^2$  besitzt, unter  $f$  den Querschnitt der Gurtung und unter  $h_1$  den Abstand der Gurtschwerpunkte verstanden.
- 2) Bei Berechnung der Anstrengung der Gurte und Gitterstäbe werden in den Knotenpunkten gelenkartige Verbindungen vorausgesetzt.

Bei dem in Fig. 43 dargestellten (übrigens unvortheilhaften) engmaschigen Gitterwerk, dessen Stäbe an den Kreuzungsstellen fest mit einander vernietet werden, ist es am richtigsten, das Gitterwerk als durchbrochenes Verticalblech aufzufassen und in Folge dessen die Gurtungen genau in derselben Weise zu berechnen, wie die der Blechbögen. In die hierzu im vorigen Paragraphen gegebenen Formeln ist  $J_s = 0$  und  $f_s = 0$  einzuführen.

In der Folge wird noch vorausgesetzt, dass die auf den Bogengitterträger wirkenden Lasten sämmtlich in den Knotenpunkten angreifen.

#### 1) Weitmaschiges Gitterwerk.

Es sollen die statisch bestimmten Systeme I und II (Fig. 35 u. 36), ferner die statisch unbestimmten Systeme III und IV (Fig. 37 u. 42) untersucht werden. Durch die Systeme I und II lassen sich stets Schnitte

\*) Wir werden im zweiten Theile unseres Werkes diesen Untersuchungen näher zu treten haben, schicken aber bereits voraus, dass der Fehler, welchen man begeht, wenn man ein Bogenfachwerk mit parallelen Gurtungen mit Hilfe der in den §§ 5 bis 7 für die äusseren Kräfte abgeleiteten Formeln behandelt, ungleich kleiner ist, als der aus der Anwendung der ebenfalls nur für stabförmige Balken geltenden Clapeyron'schen Relationen auf das continuirliche Balkenfachwerk erwachsende.

führen, welche nur 3 Stäbe schneiden, so dass sich die 3 Spannkkräfte dieser 3 Stäbe aus den 3 Gleichgewichtsbedingungen ermitteln lassen, dagegen ist die Berechnung der Systeme III und IV an die Aufstellung von Elasticitätsgleichungen gebunden.

System I. Es bedeutet

$O_m$  die Spannkraft in der oberen Gurtung des  $m^{\text{ten}}$  Feldes,  
 $U_m$  „ „ „ „ unteren „ „ „ „  
 $D_m$  „ „ „ „ Diagonale „ „ „  
 $N_m$  „ „ „ „ Normalen „ „ „  
 $\mathfrak{M}_m^u$  das Angriffsmoment für den Knotenpunkt  $m$  des Untergurts,  
 $\mathfrak{M}_m^o$  „ „ „ „ „ „ „ „ Obergurts,  
 $\alpha$  den Neigungswinkel der Diagonale gegen die Gurtung.

Wird das System durch den Schnitt  $cc$  (Fig. 35) in zwei Fragmente zerlegt, so sind die Gleichgewichtsbedingungen für das linke Fragment

$$95) \quad \begin{cases} O_m h_1 + \mathfrak{M}_m^u = 0; & -U_m h_1 + \mathfrak{M}_{m-1}^o = 0 \\ & -D_m \sin \alpha + (R_t)_m = 0, \\ & O_m = -\frac{\mathfrak{M}_m^u}{h_1}; & U_m = +\frac{\mathfrak{M}_{m-1}^o}{h_1} \\ & D_m = +\frac{(R_t)_m}{\sin \alpha}, \end{cases}$$

wo  $(R_t)_m$  die Summe der normal zu  $O_m$  und  $U_m$  gebildeten Componenten der am linken Fragment angreifenden Kräfte, d. i. die früher als „Transversalkraft“ definirte Kraft, bedeutet.

Damit die an dem unteren „unbelastet angenommenen“ Knotenpunkte  $(m-1)$  angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sind, muss

$N_{m-1} + D_{m-1} \cos \gamma - (U_{m-1} + U_m) \cos \beta$   
 sein, woraus, da  $\beta$  nahezu  $= 90^\circ$  und  $\gamma$  sehr annähernd  $= 90^\circ - \alpha$  ist, genügend genau folgt:

$$96) \quad N_{m-1} = -D_{m-1} \sin \alpha = -(R_t)_{m-1}.$$

System II. Analog wie vorhin wird:

$$97) \quad \begin{cases} O_m = -\frac{\mathfrak{M}_{m-1}^u}{h_1}; & U_m = +\frac{\mathfrak{M}_m^o}{h_1} \\ & D_m = -\frac{(R_t)_m}{\sin \alpha}; & N_{m-1} = + (R_t)_m. \end{cases}$$

System III. Das Gitterwerk besteht aus verticalen Stäben und sich kreuzenden zug- und druckwiderstandsfähigen Diagonalen. Es bezeichnen (Fig. 37)

$O_m$  und  $U_m$  die Gurtspannkkräfte,  
 $D_m$  und  $D_m'$  die Anstrengungen der links- resp. rechtssteigenden Diagonalen,  
 $V_{m-1}$  und  $V_m$  die Anstrengungen der Verticalen,  
 $s_m, d_m, d_m', n$  (vergl. Fig. 39) die Stablängen,  
 $\alpha_m$  und  $\alpha_m'$  die Winkel der  $D_m$  und  $D_m'$  gegen die Gurtungen,  
 $\varphi_m$  den Neigungswinkel der Gurtung gegen die Horizontale.

Ist in den folgenden Rechnungen der Index fortgelassen, so bezieht sich der betreffende Ausdruck stets auf das  $m^{\text{te}}$  Feld.

Durch den Kreuzungspunkt  $J$  der Diagonale wird normal zu  $O_m$  und  $U_m$  ein Schnitt  $\overline{cc}$  geführt, der durch die am linken Fragment angreifende Resultirende  $R$  in  $a$  geschnitten wird.  $R$  wird in die Componenten  $R_n$  normal zu  $\overline{cc}$  und  $R_t$  in der Richtung  $\overline{cc}$  zerlegt; erstere wirke in Bezug auf den Drehpunkt  $J$  am Hebelarme  $\eta$ . Dann ist

$$\begin{aligned} a) & \quad O \frac{h_1}{2} - U \frac{h_1}{2} + R_n \eta = 0 ; \\ b) & \quad O + U + R_n + D \cos \alpha + D' \cos \alpha' = 0 \\ c) & \quad D \sin \alpha - D' \sin \alpha' = R_t . \end{aligned}$$

Die zur Berechnung von  $O$ ,  $U$ ,  $D$  und  $D'$  fehlende vierte Gleichung ist aus der Formänderung abzuleiten. Dazu sei allgemein ein Viereck (Fig. 38) untersucht, in dessen Seiten  $s_o$  und  $s_u$ ,  $n$  und  $n'$  die Axialkräfte  $S_o$ ,  $S_u$ ,  $N$  und  $N'$  wirken, während in den Diagonalen  $d$  und  $d'$  die Kräfte  $D$  und  $D'$  auftreten.  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ,  $\gamma_4$  sind die Umfangswinkel;  $f_o$ ,  $f_u$ ,  $f_n$ ,  $f_n'$ ,  $f_d$ ,  $f_d'$ , die Querschnitte der Stäbe  $s_o$ ,  $s_u$ ,  $n$ ,  $n'$ ,  $d$ ,  $d'$ , mithin die Längenänderungen der Stäbe:

$$\begin{aligned} \Delta s_o &= \frac{S_o s_o}{f_o E} ; & \Delta d &= \frac{D d}{f_d E} ; & \Delta n &= \frac{N n}{f_n E} \\ \Delta s_u &= \frac{S_u s_u}{f_u E} ; & \Delta d' &= \frac{D' d'}{f_d' E} ; & \Delta n' &= \frac{N' n'}{f_n' E} . \end{aligned}$$

Nun ist vor, beziehungsweise nach der Deformation

$$\begin{aligned} d) & \quad d^2 = s_o^2 + n^2 - 2 s_o n \cos \gamma_1 \\ e) & \quad (d + \Delta d)^2 = (s_o + \Delta s_o)^2 + (n + \Delta n)^2 - 2(s_o + \Delta s_o)(n + \Delta n) \cos(\gamma_1 + \Delta \gamma_1), \end{aligned}$$

so dass mit  $\cos(\gamma_1 + \Delta \gamma_1) = \cos \gamma_1 - \Delta \gamma_1 \sin \gamma_1$  und unter Vernachlässigung der kleinen Grössen höherer Ordnung  $(\Delta d)^2$ ,  $(\Delta s_o)^2$ ,  $(\Delta n)^2$ ,  $(\Delta s_o)(\Delta \gamma_1)$ ,  $(\Delta n)(\Delta \gamma_1)$ ,  $(\Delta s_o)(\Delta n)(\Delta \gamma_1)$ , sich ergibt:

$$\Delta d d = \Delta s_o s_o + \Delta n n' - (s_o \Delta n' + n' \Delta s_o) \cos \gamma_1 + s_o n' \sin \gamma_1 \Delta \gamma_1$$

und hieraus (und analog)

$$\Delta \gamma_1 = \frac{\Delta d d - \Delta s_o s_o - \Delta n n' + \cos \gamma_1 (s_o \Delta n' + n' \Delta s_o)}{s_o n' \sin \gamma_1}$$

$$\Delta \gamma_2 = \frac{\Delta d d - \Delta s_u s_u - \Delta n n + \cos \gamma_2 (s_u \Delta n + n \Delta s_u)}{s_u n \sin \gamma_2}$$

$$\Delta \gamma_3 = \frac{\Delta d' d' - \Delta s_u s_u - \Delta n' n' + \cos \gamma_3 (s_u \Delta n' + n' \Delta s_u)}{s_u n' \sin \gamma_3}$$

$$\Delta \gamma_4 = \frac{\Delta d' d' - \Delta s_o s_o - \Delta n n + \cos \gamma_4 (s_o \Delta n + n \Delta s_o)}{s_o n \sin \gamma_4} .$$

Da nun nach wie vor der Deformation die Summe der Umfangswinkel des Vierecks gleich 4 Rechte sein muss, folgt die Elasticitätsgleichung:

$$\Delta \gamma_1 + \Delta \gamma_2 + \Delta \gamma_3 + \Delta \gamma_4 = 0 .$$

Die specielle Anwendung auf das Parallelogramm (Fig. 39) des Systems III liefert wegen  $\gamma_1 = \gamma_2$ ;  $\gamma_3 = \gamma_4 = 2R - \gamma_1$ ;  $s_o = s_u = s$ ;  $n = n'$  die Beziehung:

$$f) \quad \Delta d d + \Delta d' d' = (\Delta s_o + \Delta s_u)s + (\Delta n + \Delta n')n,$$

worin

$$\Delta d = \frac{D d}{f_a E}; \quad \Delta d' = \frac{D' d'}{f'_a E}; \quad \Delta s_o = \frac{O s}{f_o E}; \quad \Delta s_u = \frac{U s}{f_u E}$$

$$\Delta n = \frac{V_{m-1} n}{f_{m-1} E}; \quad \Delta n' = \frac{V_m n}{f_m E},$$

und  $f_a, f'_a$  die Querschnitte der Diagonalen,  
 $f_o, f'_o$  „ „ „ Gurte,  
 $f_{m-1}, f_m$  „ „ „ Verticalen.

Beachtet man noch die Bedingungen für Gleichgewicht der an den unteren (unbelasteten) Knotenpunkten  $(m-1)$  und  $m$  angreifenden Kräfte:

$$V_{m-1} + D' \sin(\alpha' + \varphi) + D \sin(\alpha - \varphi) + U \sin \varphi - U \sin \varphi = 0$$

$$V_m + D' \sin(\alpha' + \varphi) + D \sin(\alpha - \varphi) + U \sin \varphi - U \sin \varphi = 0,$$

so erhält man (unter Fortlassung des Index  $m$ ) die Elasticitätsgleichung:

$$g) \quad \frac{D}{f_a} d^2 + \frac{D'}{f'_a} d'^2 = \left\{ \frac{O}{f_o} + \frac{U}{f_u} \right\} s^2 + \left\{ \frac{1}{f_{m-1}} \left[ U \sin \varphi - U \sin \varphi \right. \right.$$

$$\left. - D' \sin(\alpha' + \varphi) - \frac{D \sin(\alpha - \varphi)}{m-1} \right] + \frac{1}{f_m} \left[ U \sin \varphi - \frac{U \sin \varphi}{m+1} \right. \right.$$

$$\left. \left. - D' \sin(\alpha' + \varphi) - \frac{D \sin(\alpha - \varphi)}{m+1} \right] \right\} n^2,$$

in der nur Spannkkräfte  $O, U, D, D'$  vorkommen. Besteht das System aus  $r$  Vierecken und stellt man für jedes Viereck die Gleichungen a) b) c) g) auf, so erhält man  $4r$  Bedingungen zur Berechnung der  $4r$  Unbekannten  $O, U, D, D'$ . Es wird aber diese Rechnung dadurch sehr complicirt, dass es unmöglich ist, die Spannkkräfte für jedes Feld gesondert zu bestimmen, vielmehr jede Spannkraft von den Querschnitten sämtlicher Stäbe abhängt.

Eine bedeutende Vereinfachung wird durch die Thatsache ermöglicht, dass die Spannkkräfte  $V$  stets so klein ausfallen, dass bei der übermässigen Stärke, welche die Verticalen aus constructiven Gründen erhalten, sich für die Formänderungen  $\Delta n$  und  $\Delta n'$  vernachlässigbar kleine Werthe ergeben. Desshalb darf, ohne dass merkliche Fehler in den Endresultaten zu erwarten sind, Gleichung (f) ersetzt werden durch:

$$\Delta d d + \Delta d' d' = \Delta s_o s + \Delta s_u s.$$

Dann findet man

$$98) \quad \frac{D}{f_a} d^2 + \frac{D'}{f'_a} d'^2 = \left\{ \frac{O}{f_o} + \frac{U}{f_u} \right\} s^2,$$

welche Gleichung in Verbindung mit (c) zu den Formeln:

$$99) \left\{ \begin{aligned} D &= \frac{R_t \frac{d'^2}{f_a'} + \left\{ \frac{O}{f_o} + \frac{U}{f_u} \right\} s^2 \sin \alpha'}{\frac{d'^2}{f_a'} \sin \alpha + \frac{d^2}{f_a} \sin \alpha'} \\ D' &= \frac{-R_t \frac{d^2}{f_a} + \left\{ \frac{O}{f_o} + \frac{U}{f_u} \right\} s^2 \sin \alpha}{\frac{d'^2}{f_a'} \sin \alpha + \frac{d^2}{f_a} \sin \alpha'} \end{aligned} \right.$$

führt. Bei denjenigen Laststellungen, welche die grössten Spannkkräfte  $D$  und  $D'$  ergeben, sind die specifischen Gurtspannungen sehr gering und darf man daher das Glied  $\left( \frac{O}{f_o} + \frac{U}{f_u} \right) s^2 \sin \alpha$  vernachlässigen, wesshalb

$$100) \left\{ \begin{aligned} D &= + R_t \frac{\frac{d'^2}{f_a}}{\frac{d'^2}{f_a'} \sin \alpha + \frac{d^2}{f_a} \sin \alpha'} \\ D' &= - R_t \frac{\frac{d^2}{f_a}}{\frac{d'^2}{f_a'} \sin \alpha + \frac{d^2}{f_a} \sin \alpha'} \end{aligned} \right.$$

sich ergibt. Giebt man den Diagonalen gleiche Querschnitte, so folgt

$$101) \left\{ \begin{aligned} D &= + R_t \frac{d'^2}{d'^2 \sin \alpha + d^2 \sin \alpha'} \\ D' &= - R_t \frac{d^2}{d'^2 \sin \alpha + d^2 \sin \alpha'} \end{aligned} \right.$$

$(R_t)_{\max}$  liefert hiernach für die Diagonale  $D$  den grössten Zug, für  $D'$  den grössten Druck, hingegen das negative  $(R_t)_{\min}$  für  $D$  den grössten Druck und für  $D'$  den grössten Zug. Bei parabolischer Bogenaxe (und angenähert auch bei flachen Kreisbögen) erhält man — wie später nachzuweisen bleibt — unter Voraussetzung einer gleichförmigen Verkehrslast

$$(R_t)_{\max} = - (R_t)_{\min}$$

und findet, dass auch bei Beanspruchung durch ein System concentrirter Lasten die vorstehende Gleichung annähernd besteht. Es folgt daraus das Verhältniss der grössten Drücke in den Diagonalen:  $\frac{D}{D'} = \frac{d'^2}{d^2}$ .

Da nun die Diagonalen in erster Linie auf Zerknicken zu berechnen sind und bei gleichen Querschnitten sich ihre Tragfähigkeiten umgekehrt wie die Quadrate der Längen verhalten, ist die Voraussetzung  $f_a = f_a'$  vollkommen am Platz, und lassen sich jetzt die Spannungen  $D$  und  $D'$  berechnen, ohne dass es nöthig wird, die Querschnitte  $f_a$  und  $f_a'$  vorher abzuschätzen.

Führt man  $U$  aus Gleichung  $b$  in Gleichung  $a$  ein, so folgt

$$O = - \frac{R_n(\eta + \frac{1}{2}h_1)}{h_1} - \frac{1}{2} (D \cos \alpha + D' \cos \alpha')$$

und wenn  $R_n(\eta + \frac{1}{2}h_1) = \mathfrak{M}_u$  gesetzt wird, als Angriffsmoment für den Schnittpunkt der  $cc$  (Figur 37) mit der unteren Gurtung,

$$O = - \frac{\mathfrak{M}_u}{h_1} - \frac{1}{2} (D \cos \alpha + D' \cos \alpha').$$

Analog ergibt sich

$$U = + \frac{\mathfrak{M}_o}{h_1} - \frac{1}{2} (D \cos \alpha + D' \cos \alpha'),$$

worin  $\mathfrak{M}_o$  das Angriffsmoment für den Punkt  $o$  bedeutet. Führt man hierin die Werthe  $D$  und  $D'$  aus den Formeln 99) und setzt

$$\frac{1}{2} \frac{\frac{d'^2}{f_d'} \cos \alpha - \frac{d^2}{f_d} \cos \alpha'}{\frac{d'^2}{f_d'} \sin \alpha + \frac{d^2}{f_d} \sin \alpha} = c_1$$

$$\frac{1}{2} \frac{s^2 \sin(\alpha + \alpha')}{\frac{d'^2}{f_d'} \sin \alpha + \frac{d^2}{f_d} \sin \alpha'} = c_2,$$

so erhält man:

$$O = - \frac{\mathfrak{M}_u}{h_1} - c_1 R_t - c_2 \frac{O}{f_o} - c_2 \frac{U}{f_u}$$

$$U = + \frac{\mathfrak{M}_o}{h_1} - c_1 R_t - c_2 \frac{O}{f_o} - c_2 \frac{U}{f_u}$$

$$102) \left\{ \begin{aligned} O &= - \frac{\mathfrak{M}_u + \frac{c_2}{f_u h_1} [\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u]}{1 + \frac{c_2}{f_o} + \frac{c_2}{f_u}} + c_1 R_t \\ U &= + \frac{\mathfrak{M}_o + \frac{c_2}{f_o h_1} [\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u]}{1 + \frac{c_2}{f_o} + \frac{c_2}{f_u}} - c_1 R_t \end{aligned} \right.$$

Bei denjenigen Laststellungen, welchen die grössten Spannungen  $U$  und  $O$  entsprechen, sind die mit  $c_1$  und  $c_2$  behafteten Glieder von so geringem Einfluss auf das Endresultat, dass genügend genau

$$103) \quad O = - \frac{\mathfrak{M}_u}{h_1}; \quad U = + \frac{\mathfrak{M}_o}{h_1}$$

gesetzt werden darf.

Für die Anwendung der Näherungsformeln 101 und 103 spricht in erster Linie der Umstand, dass die festen Nietverbindungen in den Knotenpunkten die ganze hier vorgetragene Rechnung als Annäherung charakterisieren.

**Beispiel.** Ein Bogenträger von 30<sup>m</sup> Stützweite (Fig. 40) sei nach System III mit 20 Feldern zu 1,5<sup>m</sup> Breite und Verticalen von 1,4<sup>m</sup> Höhe derart ausgeführt, dass die Mittelpunkte der Verticalen auf einem Kreisbogen von 5<sup>m</sup> Pfeilhöhe liegen. Es soll für die in der Figur dargestellte Zugstellung die Anstrengung  $U_5$  berechnet werden. Die Stellung ist so gewählt, dass ihr der grösste Druck  $U_5$  entspricht.\*) Die Querschnitte der Stäbe des 5. Feldes seien  $f_o = 230$ ,  $f_u = 240$ ,  $f_a = 50 \square \text{cm}$ .

Der Radius der Bogenaxe ist  $r = 25^m$ , daher werden die Ordinaten der Mittelpunkte der 4. und 5. Verticalen

$$y_5 = \sqrt{25^2 - 7,5^2} - 20 = 3,85^m$$

$$y_4 = \sqrt{25^2 - 9,0^2} - 20 = 3,32^m$$

worauf (vergleiche Figur 41)

$$d' = \sqrt{1,93^2 + 1,50^2} = 2,44^m; \quad d = \sqrt{0,87^2 + 1,5^2} = 1,73^m$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{0,53}{1,5} = 0,35333; \quad \varphi = 19^\circ 28'$$

$$\text{tg } (\alpha - \varphi) = \frac{0,87}{1,5} = 0,58000; \quad \alpha = 49^\circ 35'$$

$$\text{tg } (\alpha' + \varphi) = \frac{1,93}{1,5} = 1,28667; \quad \alpha' = 32^\circ 41'$$

gefunden werden. Die Coordinaten der Punkte  $o$  und  $u$  sind:

$$y_u = 2,62 + \left(\frac{1}{2} d' \cos \alpha'\right) \sin \varphi = 2,96^m$$

$$x_u = 6,00 + \left(\frac{1}{2} d' \cos \alpha'\right) \cos \varphi = 6,97^m$$

$$y_o = 4,02 + \left(\frac{1}{2} d \cos \alpha\right) \sin \varphi = 4,21^m$$

$$x_o = 6,00 + \left(\frac{1}{2} d \cos \alpha\right) \cos \varphi = 6,53^m$$

weiter wird  $h_1 = 1,4 \cos \varphi = 1,32^m$ .

Für die Laststellung wird mit der Bezeichnungsweise auf Seite 38

$$A = \frac{\sum P b}{2l} = \frac{1}{30} \left\{ \mathfrak{P}_n 0,12 + \mathfrak{S}_n \right\}$$

$$H = \frac{3}{8lh} \left\{ 0,12 (2l - 0,12) \mathfrak{P}_n + 2 (l - 0,12) \mathfrak{S}_n - \mathfrak{S}_n \right\}$$

und nach Einsetzen der dem Index  $n = 11$  entsprechenden Werthe der Tabelle 2 (Seite 42)

$$A = 38,67'; \quad H = 97,81',$$

so dass  $\mathfrak{M}_o = A x_o - H y_o = - 159,265^m$

$$\mathfrak{M}_u = A x_u - H y_u = - 19,988^m$$

und  $R_t = A \cos \varphi - H \sin \varphi = 3,85'$

werden. Nach Formel 103 wird jetzt

$$U = - \frac{159,265}{1,32} = - 120,66'.$$

\*) Die Auffindung dieser Zugstellungen ist die Hauptaufgabe der folgenden Abschnitte unseres Werkes.

Um diesen Werth mit dem aus Formel 102 sich ergebenden zu vergleichen, wird

$$c_1 = \frac{d'^2 \cos \alpha - d^2 \cos \alpha'}{d'^2 \sin \alpha + d^2 \sin \alpha'} \frac{1}{2} = \frac{1,3406}{2 \cdot 5,9492} = 0,113$$

$$c_2 = \frac{s^2 \sin (\alpha + \alpha') f_a}{d'^2 \sin \alpha + d^2 \sin \alpha'} \frac{1}{2} = \frac{(0,53^2 + 1,5^2) \cdot 0,9909 \cdot 50}{2 \cdot 5,9492} = 10,539$$

berechnet und

$$U = \frac{-120,66 - \frac{10,54}{230} \frac{159,265 + 19,988}{1,32} - 0,113 \cdot 3,85}{1 + \frac{10,54}{230} + \frac{10,54}{240}}$$

$$= -116,65^{\text{tons}} \text{ gefunden.}$$

System IV. Dasselbe besteht aus normal zur Bogenaxe gerichteten Stäben und sich kreuzenden steifen Diagonalen. Wird bei Aufstellung der Elasticitätsgleichung jedes der Vierecke, in welche das System zerfällt, als Rechteck behandelt, so bleibt die Gleichung (98) bestehen. In die für System III abgeleiteten Formeln hat man nur

$$\alpha = \alpha' \quad \text{und} \quad d = d'$$

einzuführen; man findet

$$104) \left\{ \begin{aligned} D &= \frac{R_t}{2 \sin \alpha} + \frac{1}{2} \left[ \frac{O}{f_o} + \frac{U}{f_u} \right] \frac{s^2}{d^2} f_a \\ D' &= -\frac{R_t}{2 \sin \alpha} + \frac{1}{2} \left[ \frac{O}{f_o} + \frac{U}{f_u} \right] \frac{s^2}{d^2} f_a \\ O &= -\frac{\mathfrak{M}_u}{h_1} + \frac{c}{f_u h_1} [\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u] \\ &\quad \frac{1 + \frac{c}{f_o} + \frac{c}{f_u}}{1 + \frac{c}{f_o} + \frac{c}{f_u}} \\ U &= +\frac{\mathfrak{M}_o}{h_1} + \frac{c}{f_o h_1} [\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u] \\ &\quad \frac{1 + \frac{c}{f_o} + \frac{c}{f_u}}{1 + \frac{c}{f_o} + \frac{c}{f_u}} \\ c &= \frac{1}{2} \frac{s^2}{d^2} f_a \cos \alpha . \end{aligned} \right.$$

Die Näherungsformeln lauten

$$105) \quad D = \frac{R_t}{2 \sin \alpha} = -D'$$

$$106) \quad O = -\frac{\mathfrak{M}_u}{h_1} ; \quad U = \frac{\mathfrak{M}_o}{h_1} .$$

Eine Berechnung der Anstrengungen in den Normalen kann füglich unterbleiben, da diese Stäbe stets beträchtlich stärker construiert werden, als die Theorie es erheischt. Bei kleineren Stützweiten lasse man die

Normalen fort; bei grösseren empfiehlt sich die Beibehaltung derselben, um den Verticalverband der nebeneinander stehenden Bögen gut durchbilden zu können.

2) Engmaschiges Gitterwerk. (Fig. 43.)

Die Gurtungen werden in derselben Weise berechnet wie die der Blechbögen; man setze in die im § 8 abgeleiteten Formeln  $f_t = 0$ . Die Anstrengungen in den Gitterstäben lassen sich nur sehr angenähert bestimmen. Handelt es sich um den links steigenden Stab  $AB$ , so führe man durch die Mitte desselben parallel der anderen Stablage einen Schnitt  $\bar{c}c$ , bilde die Componente  $R_t$  der Resultirenden aus den links von  $\bar{c}c$  angreifenden Kräften normal zur Gurtung und vertheile dieselbe gleichmässig auf die durch  $\bar{c}c$  getroffenen Stäbe. Ist dann  $n$  die Anzahl dieser Stäbe,  $S$  die Belastung von  $AB$  und  $\alpha$  der Neigungswinkel der  $AB$  gegen die Gurtung, so folgt

$$107) \quad S = + \frac{R_t}{n \sin \alpha}$$

und analog für einen rechts steigenden Stab

$$108) \quad S = - \frac{R_t}{n \sin \alpha} .$$

3) Berechnung der Querschnittsabmessungen.

Die Stäbe der hier behandelten Bogenfachwerke (sowol Gurtungen als Diagonalen) werden wechselweise gezogen und gedrückt. Bedeutet also, absolut genommen,

$P_{\min}$  die kleinste Belastung eines Stabes,

$P_{\max}$  die grösste " " "

$k'$  die Ursprungsfestigkeit (vergl. Seite 62),

so ist der erforderliche Querschnitt

$$109) \quad f = \frac{P_{\max}}{k' \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{P_{\min}}{P_{\max}} \right\}} .$$

Bei richtig angeordnetem Vertical- und Horizontalverband dürfen für die Berechnung der Knickfestigkeit die Knotenpunkte als feste Punkte angesehen werden, so dass, wenn

$l$  die Stablänge,

$i$  das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes,

$P$  den grössten Druck,

$z$  den Sicherheitscoefficienten

bedeutet, die Formel

110)

$$i = \frac{z Pl^2}{\pi^2 E} = \frac{z Pl^2}{10 E}^*)$$

angewendet werden darf. Dabei setze man (Material: Schmiedeeisen)  $z = 5$  und  $E = 2000000$  Kilogr. pro  $\square^{\text{cm}}$ .

### Abschnitt III.

#### Specielle Behandlung des Bogenträgers mit 3 Gelenken.

##### § 10.

Die grössten Momente  $M_o$  und  $M_u$ .

1) **Auflagerdrücke; Kämpferdrucklinie.** Einer concentrirten Last  $P$ , welche rechts von dem in der Mitte angenommenen Scheitelgelenke angreift, entsprechen (Fig. 44) am linken Auflager die Reactionen:

$$111) \quad A = \frac{Pb}{2l}; \quad H = \frac{Pb}{2h};$$

erstere folgt aus der Momentengleichung  $A2l = Pb$  für den Drehpunkt  $B$ , die zweite aus der Bedingung  $Al = Hh$ . Wird der Werth  $H$  von der Horizontalen  $AB$  aus als Ordinate  $N'N$  aufgetragen, so ist der geometrische Ort des Punktes  $N$  die „erste Curve  $H^a$ “ (vergl. Seite 36). Diese Curve ist eine gerade Linie, welche für  $b = l$  die Ordinate  $\frac{D'D}{2} = \frac{Pl}{2h}$  besitzt. Liegt  $P$  links vom Scheitel im Abstände  $a$  von  $A$ , so folgt analog

\*) Vielfach wird bei Bestimmung der Knickfestigkeit von der empirischen Formel

$$P = \frac{kF}{1 + C \frac{Fl^2}{J}}$$

ausgegangen, in der  $C$  ein von der Befestigungsweise der Stabenden abhängiger Coefficient ist, und ergibt sich hiernach die Belastung der Flächeneinheit grösser als  $\frac{P}{F}$ . Da aber die Construction so sein soll, dass eine Durchbiegung nicht entsteht, dass also das Einknicken verhindert wird, so kann eine Mehrbelastung der Flächeneinheit nicht stattfinden. (Man vergl. übrigens Winkler: „Die Gitterträger und Lager gerader Träger“, Wien 1875, Seite 123, welcher Autor derselben Ansicht ist).

$$112) \quad H = \frac{Pa}{2h};$$

die „erste Curve  $H$ “ ist hier die Gerade  $AD$ .

Die Kämpferdrücke  $K$  und  $K'$  müssen  $P$  in dem nämlichen Punkte  $C$  schneiden, denn drei Kräfte sind nur dann im Gleichgewicht, wenn sie durch denselben Punkt gehen. Die Curve, auf der sich  $C$  bewegt, während  $P$  alle möglichen Lagen annimmt, nennen wir die Kämpferdrucklinie. So lange sich  $P$  rechts von  $S$  befindet, muss  $K$  durch  $S$  gehen, weil das Moment für  $S$  Null sein muss und folgt hieraus, dass die Gerade  $ASA'$  die Kämpferdrucklinie für alle rechts von  $S$  angreifenden Lasten ist, während die Gerade  $BSB'$  den links gelegenen Lasten entspricht.

Für eine gleichförmige Belastung ( $v$  pro Längeneinheit), welche von  $B$  aus die Strecke  $\overline{BC} = c$  bedeckt (Fig. 45 a), folgt, wenn  $C$  rechts von  $S$  liegt:

$$113) \quad \begin{aligned} A2l - vc \frac{c}{2} &= 0; & Al - Hh &= 0 \\ A &= \frac{vc^2}{4l}; & H &= \frac{vc^2}{4h}. \end{aligned}$$

Die Belastung der Bogenhälfte erzeugt (Fig. 45 b)

$$114) \quad A = \frac{vl}{4}; \quad H = \frac{vl^2}{4h}$$

des des ganzen Bogens (Fig. 45 c)

$$115) \quad A = vl; \quad H = \frac{vl^2}{2h}.$$

Für die Laststellung Fig. 45 d erhält man

$$116) \quad A = vl - \frac{vc^2}{4l}; \quad H = \frac{vl^2}{2h} - \frac{vc^2}{4h}.$$

Die Lasten wurden bislang direct auf den Bogen wirkend angenommen, während in Wirklichkeit zwischen die Fahrbahn und den Tragbogen eine Reihe von Verticalen eingeschaltet werden. Liegt  $P$  zwischen den Verticalen  $F_1$  und  $F_2$  (Fig. 46), so zerfällt es in die Componenten

$$P_1 = P \frac{\xi}{\lambda} \quad \text{und} \quad P_2 = P \frac{\lambda - \xi}{\lambda}.$$

Sind  $\eta_1$  und  $\eta_2$  die unter  $F_1$  und  $F_2$  gemessenen Ordinaten der für  $P = 1$  gezeichneten ersten Curve  $H$ ,  $\eta$  die unter  $P$  gemessene, so folgt

$$\begin{aligned} P\eta &= P_1\eta_1 + P_2\eta_2 \\ \eta &= \eta_1 \frac{\xi}{\lambda} + \eta_2 \frac{\lambda - \xi}{\lambda}. \end{aligned}$$

Da  $\eta$  in Bezug auf  $\xi$  vom ersten Grade ist, so folgt, dass die Endpunkte von  $\eta_1$  und  $\eta_2$  durch eine Gerade zu verbinden sind, so dass die Rücksichtnahme auf die Uebertragung der Last  $P$  durch die die Verticalen verbindenden Zwischenträger nur geboten ist, wenn im

Scheitel und an den Enden keine Verticalen angeordnet sind. In diesem Falle besteht die erste Curve  $H$  aus den 3 Geraden  $AD'$ ,  $D'D''$ ,  $D''B$  (Fig. 46). Bei fehlenden Endverticalen ist die erste Curve  $H$  die in Fig. 47 dargestellte.  $A'$  und  $B'$  liegen vertical unter den Auflagern der letzten Zwischenträger.

Bei Berechnung der Reaction  $A$  ist auf die Zwischenträger keine Rücksicht zu nehmen, sobald an den Bogenenden Verticalen angeordnet sind; denn das Moment der beiden Componenten  $P_1$  und  $P_2$ , in welche  $P$  zerfällt, ist in Bezug auf  $B$  dasselbe, wie das der Resultirenden  $P$ , und es wurde  $A$  aus der Momentengleichung für  $B$  gewonnen. Fehlen aber bei  $A$  und  $B$  die Verticalen (Fig. 48) und wird der letzte Zwischenträger bei  $A'$  gelagert, so bleibt zu beachten, dass von einer im letzten Felde liegenden  $P$  nur die Componente  $P_2$  auf den Bogen kommt. Macht man den Horizontalabstand  $l'$  der Lager  $A'$  und  $A$  gleich Null (mittelst Auskrägung), so ist die Wirkung dieselbe, wie bei Anordnung der Endverticalen.

In der Folge sollen im Scheitel zwei dicht neben einander gelegene Verticalen (Fig. 49) ferner  $l' = 0$  oder Endverticalen vorausgesetzt werden; dann ist bei Berechnung von  $A$  und  $H$  auf die Uebertragung der Lasten durch die Zwischenträger nicht zu rücksichtigen.

**2) Die gefährlichste Belastung.** Es seien  $o$  und  $u$  in Fig. 50 die Kernpunkte (oder die Momentenpunkte) eines Querschnittes. Von  $A$  werde durch  $o$  eine Gerade gezogen, welche die Kämpferdrucklinie  $BS$  in  $E$  schneidet. Einer durch  $E$  gehenden Last  $P$  entspricht am linken Fragment nur ein durch  $o$  gehender Kämpferdruck als angreifende Kraft, mithin  $\mathfrak{M}_o = 0$ . Bewegt sich  $P$  nach rechts in die Lage  $P'$ , so entsteht ein links um  $o$  drehender Kämpferdruck  $K'$ , in Folge Bewegung von  $P$  nach links ein rechtsdrehender  $K''$ . Im ersten Falle ist  $\mathfrak{M}_o$  negativ,\*) im zweiten positiv.

Tritt  $P$  auf das linke Fragment über, so wirkt auf das rechte Fragment (Fig. 51) in der Richtung  $BS$  der Kämpferdruck  $K'''$ ; demselben entspricht ein positives  $\mathfrak{M}_o$ , sobald  $o$  unterhalb der  $BS$  liegt.

Es wird hiernach das grösste positive Moment  $\mathfrak{M}_o$ , d. i.  $\max \mathfrak{M}_o$ , durch ausschliessliche Belastung der Strecke  $AE$  und das grösste negative Moment  $\mathfrak{M}_o$ , d. i.  $\min \mathfrak{M}_o$ , durch ausschliessliche Belastung der Strecke  $BE$  gewonnen.

Liegt  $o$  oberhalb der  $BS$  (Fig. 52), so ist  $\mathfrak{M}_o$  bei jeder Lage von  $P$  negativ, und erhält man das grösste Moment bei voller Belastung des Bogens.

Analog lässt sich folgern: Zieht man von  $A$  durch  $u$  (Fig. 53) eine Gerade, welche die  $BS$  in  $E_1$  schneidet, so erhält man

\*) Bezüglich der Vorzeichen der Momente vergl. man Seite 17.

bei ausschliesslicher Belastung der Strecken  $BE_1$  beziehungsweise  $AE_1$  die Momente  $\min \mathfrak{M}_u$  resp.  $\max \mathfrak{M}_u$ .

Liegen die Punkte  $u$  unterhalb der  $BS$ , so entstehen nur positive  $\mathfrak{M}_u$ , die bei voller Belastung des Bogens am grössten ausfallen.

Die Verticalen durch  $E$  und  $E_1$  heissen Belastungsscheiden; die Strecken  $BE$  und  $BE_1$  werden die negativen Beitragsstrecken für die Momente  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$ , die Strecken  $AE$  und  $AE_1$  die positiven Beitragsstrecken für  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$  genannt.

**3) Graphische Ermittlung der grössten und kleinsten  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$ .**  
Zunächst soll angenommen werden, dass ein System concentrirter Lasten sich über den Bogenträger bewegt. Einer Last  $P$  rechts vom fraglichen Querschnitte entspricht für den Punkt  $o$  das Moment (Fig. 54)

$$\mathfrak{M}_o = Ax_o - Hy_o = y_o \left\{ \frac{x_o}{y_o} A - H \right\} = H_i y_o,$$

worin  $H_i$  denjenigen Horizontalschub bedeutet, welcher, allein in  $A$  angreifend, dasselbe Moment erzeugt, wie die thatsächlich wirkenden Kräfte. Der „ideelle Horizontalschub“  $H_i$  wird durch Subtraktion der Ordinate der ersten Curve  $H$  (bestehend aus  $AD$  und  $DB$ ) von dem Werthe

$$z = \frac{Ax_o}{y_o} = \frac{Pb x_o}{2ly_o}$$

erhalten. Macht man vertical unter  $o$ ,  $\overline{C'C} = \frac{Px_o' x_o}{2ly_o}$  und zieht  $BC$ , so schneidet diese auf der Verticalen  $P$  die Strecke  $\overline{N'N''} = z$  ab, und erhält man  $\overline{N''N} = H_i$ . Den Lasten rechts vom Schnittpunkte  $E'$  der  $CB$  mit der  $AD$  entsprechen, wegen  $H > z$ , negative  $H_i$  also auch negative  $\mathfrak{M}_o$ ; eine durch  $E'$  gehende  $P$  wird  $\mathfrak{M}_o = 0$  erzeugen, während die Lasten links von  $E'$  positive  $\mathfrak{M}_o$  hervorrufen. Desshalb muss  $E'$  vertical unter dem Schnittpunkte  $E$  der  $AO$  mit der  $BS$  liegen. Tritt  $P$  auf das linke Fragment über, so tritt an Stelle der Geraden  $BC$  die Gerade  $AC$ .

Die Berechnung der grössten Momente ist jetzt folgende.

Man construirt für  $P = 1$  die erste Curve  $H$  (Fig. 55), indem man  $\overline{D'D} = \frac{l}{2h} \cdot 1$  macht, bestimme die Belastungsscheide  $E$ , hierauf vertical unter  $E$  auf der  $AD$  den Punkt  $E'$  und zeichne das Dreieck  $ACB$ . Um  $\min \mathfrak{M}_o$  zu ermitteln, stelle man über die negative Beitragsstrecke das Lastensystem so, dass die schwersten Lasten in der Nähe des Scheitels liegen und messe unter den Lasten die ideellen Schübe  $H_i$ . Bedeutet dann, unter Voraussetzung eines Eisenbahntrains,

$L$	-	-	-	die Belastung einer Lokomotivaxe,
$T$	-	-	-	Tenderaxe,
$G$	-	-	-	Güterwagenaxe,

und werden die unter den Lasten  $L$ ,  $T$  und  $G$  gemessenen  $H_i$  beziehungsweise mit  $(H_i)_L$ ,  $(H_i)_T$  und  $(H_i)_G$  bezeichnet, so folgt

$$\mathfrak{M}_o = -y_o \left\{ L\Sigma(H_i)_L + T\Sigma(H_i)_T + G\Sigma(H_i)_G \right\}$$

und kann man durch Vergleichung der Wirkung mehrerer Stellungen schnell  $\min \mathfrak{M}_o$  finden.

Jetzt wird die positive Beitragsstrecke  $AE$  belastet und analog  $\max \mathfrak{M}_o$  bestimmt.

Zur Erzielung einer übersichtlichen Darstellung empfiehlt es sich, von der Horizontalen  $A'B'$  aus (Fig. 56), vertical unter  $o$  und  $S$  die Strecken  $CC''$  und  $D''D$  als Ordinaten aufzutragen und  $A'C$ ,  $CD$ ,  $DB'$  zu ziehen. Die gebrochene Linie  $A'CDB'$ , welche den Einfluss jeder einzelnen Last auf das Moment  $\mathfrak{M}_o$  zu ermitteln gestattet, nennen wir die „Influenzlinie“ für das Moment  $\mathfrak{M}_o$ , die von ihr und der  $A'B'$  eingeschlossene Fläche die Influenzfläche. Der Werth  $y_o$  heisst „Multiplicator der Influenzlinie“.

Die in Fig. 56 dargestellte Influenzlinie ist insofern nicht exact, als bislang angenommen wurde, dass jede Last rechts resp. links von  $o$  auf das rechte, beziehungsweise linke Bogenfragment wirkt, während, wenn  $o'$  und  $u'$  (Fig. 57) die auf der oberen resp. unteren Begrenzungslinie des Bogens liegenden Punkte des Querschnittes sind, Lasten zwischen  $o'$  und  $o$  zwar links von  $o$ , aber noch auf dem rechten Fragment liegen. Desshalb ist richtiger die Linie  $BC$  bis zum Schnittpunkte  $F$  mit der Verticalen durch  $o'$  zu verlängern, so dass die Influenzlinie — wie in Fig. 58 — unstetig wird. Es ist aber nicht nöthig, hierauf bei Berechnung der  $\mathfrak{M}_o$  zu rücksichtigen.

Wird die Last durch Zwischenträger auf den Bogen übertragen (Fig. 59) und liegt  $o$  zwischen zwei Verticalen  $F_1$  und  $F_2$ , so muss  $H_i$  von  $F_1$  bis  $F_2$  eine lineare Funktion sein, so dass nach Ziehen von  $F_1'F_2'$  in der in Fig. 59 schraffirten Fläche die Influenzfläche gewonnen wird. Um dies einzusehen, hat man nur nöthig, in der auf Seite 80 bezüglich der  $H$  durchgeführten Untersuchung an Stelle der Ordinaten  $\eta$  der ersten Curve  $H$  die Influenzlinienordinaten  $H_i$  zu setzen.

Liegt  $o$  in einer die Fahrbahn stützenden Verticalen, so ist die Influenzlinie identisch mit derjenigen, welche ohne Rücksichtnahme auf Zwischenträger in Fig. 55 dargestellt wurde.

Ganz analog werden die Influenzlinien für die Momente  $\mathfrak{M}_u$  gewonnen. In Fig. 60 ist direkte Belastung des Bogens angenommen. Die Gerade  $Au$  schneidet die  $BS$  in der Belastungsscheide  $E_1$ ; vertical unter dieser wird  $E_1'$  auf der  $AD$  bestimmt; hierauf ist  $BE_1'$  bis zur Verticalen durch  $o'$  zu ziehen, während  $A$  mit dem Schnittpunkt  $C$  der  $BR$  mit der Verticalen durch  $u$  zu verbinden ist.

In Fig. 61 ist der Fall dargestellt, in welchem, unter Voraussetzung von Zwischenträgern, zwischen  $o$  und  $u$  eine Verticale liegt.

Soll der Einfluss einer auf der Strecke  $b_2 - b_1$  (Fig. 62) aufgebrachten gleichförmigen Belastung auf das Moment  $\mathfrak{M}_o$  mit Hilfe der Influenzlinie

ermittelt werden, und bedeutet  $v$  die Belastung pro Längeneinheit, so behandelt man das Lastelement  $v db$  als concentrirte Last, misst das entsprechende  $H_i$  und findet

$$d\mathfrak{M}_o = \pm (y_o H_i) v db$$

$$\mathfrak{M}_o = \pm y_o v \int_{b_2}^{b_1} H_i db$$

$$\mathfrak{M}_o = \pm y_o v f,$$

wo  $f$  den Inhalt der (in der Figur schraffirten) Influenzfläche zwischen  $b_1$  und  $b_2$  bedeutet.

Bezeichnet man mit  $f_1$  und  $f_2$  den Inhalt des positiven resp. negativen Theiles der Influenzfläche (beide Werthe absolut angenommen), so erhält man die grössten Momente

$$(\max \mathfrak{M}_o)_v = + v y_o f_1 ; \quad (\min \mathfrak{M}_o)_v = - v y_o f_2.$$

Hierbei soll der Index  $v$  darauf hinweisen, dass die vorberechneten Momente lediglich eine Folge der auf den Bogen wirkenden Verkehrslast (auch variable oder mobile Last genannt) ist. Ausser derselben wirkt noch die Constructionslast (permanente Last), welche mit  $p$  bezeichnet und gleichförmig über den ganzen Bogen vertheilt angenommen werden möge. Ihr entspricht

$$(\mathfrak{M}_o)_p = p y_o (f_1 - f_2).$$

Werden die  $(\mathfrak{M}_o)_v$  und  $(\mathfrak{M}_o)_p$  addirt, und setzt man

$$p + v = q,$$

so folgen die grössten Momente

$$117) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \mathfrak{M}_o = y_o \left\{ q f_1 - p f_2 \right\} \\ \min \mathfrak{M}_o = y_o \left\{ p f_1 - q f_2 \right\} \end{array} \right.$$

Diese Formeln finden Anwendung bei Berechnung der nicht allein durch Wagen, sondern auch durch Menschengedränge belasteten Strassenbrücken.

Die  $\mathfrak{M}_u$  werden ganz analog berechnet.

**4) Analytische Berechnung der Momente  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$  unter Annahme concentrirter Lasten.** Es werde vorausgesetzt, dass die Punkte  $o$  und  $u$ , für welche die Momente berechnet werden sollen, in den die Last auf den Bogen übertragenden Verticalen liegen, so dass auf die vertheilende Wirkung der Zwischenträger keine Rücksicht zu nehmen ist.

Der Abstand  $\xi$  der Belastungsscheide  $E$  vom Scheitel  $S$  bestimmt sich aus (Fig. 63):

$$(l + \xi) \operatorname{tg} \alpha_1 = (l - \xi) \operatorname{tg} \alpha$$

$$(l + \xi) \frac{h}{l} = (l - \xi) \frac{y_o}{x_o}.$$

Man findet:

$$118) \quad \xi = l \frac{y_0 l - h x_0}{y_0 l + h x_0}$$

ferner die für die Folge wichtigen Formeln:

$$119) \quad \left\{ \begin{array}{l} l + \xi = l \frac{2y_0 l}{y_0 l + h x_0} ; \quad l - \xi = l \frac{2h x_0}{y_0 l + h x_0} = \xi_1 \\ l - \xi - x_0 = x_0 \frac{h x'_0 - y_0 l}{y_0 l + h x_0} = \xi_2 \\ \frac{\xi}{l + \xi} = \frac{y_0 l - h x_0}{2y_0 l} ; \quad \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{h x'_0 - y_0 l}{2h l} . \end{array} \right.$$

Um  $\min \mathfrak{M}_0$  zu erhalten, sei das Lastensystem von  $B$  aus bis in die Nähe von  $E$  vorgeschoben. Jede Last wird mit  $P$  bezeichnet, ihr Abstand von  $B$  mit  $b$ , jede links vom Scheitel gelegene Last wird ausserdem durch den Apostroph gekennzeichnet, ihr Abstand von  $S$  wird  $b'$  genannt. Es bezieht sich also  $\Sigma P$  auf „alle“ Lasten. Aus der Bedingung:

$$Al - Hh - \Sigma P' b' = 0$$

folgt:

$$H = \frac{Al}{h} - \frac{\Sigma P' b'}{h}$$

weshalb:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_0 &= Ax_0 - Hy_0 \\ &= Ax_0 - \frac{Al y_0}{h} + \frac{\Sigma P' b'}{h} y_0 . \end{aligned}$$

Wegen

$$A = \frac{\Sigma P b}{2l}$$

folgt das (nach früherem negative) Moment:

$$- \mathfrak{M}_0 = \frac{y_0}{h} \left\{ \frac{y_0 l - h x_0}{2y_0 l} \Sigma P b - \Sigma P' b' \right\}$$

und mit Berücksichtigung der Formeln 119):

$$120) \quad - \min(\mathfrak{M}_0) = \frac{y_0}{h} \left\{ \frac{\xi}{l + \xi} \Sigma P b - \Sigma P' b' \right\} .$$

Soll die Stellung die gefährlichste sein, so muss jeder Verschiebung des Lastensystems eine Verkleinerung von  $\mathfrak{M}_0$  entsprechen. Verschiebt man den Zug um  $\Delta b$  nach links, so zwar, dass keine Last auf das linke Fragment übertritt, keine neue auf den Träger kommt, und höchstens die vor der Verschiebung im Scheitel angreifende den Scheitel passirt, so ändert sich  $b$  in  $b + \Delta b$ ,  $b'$  in  $b' + \Delta b$  und das Moment ( $-\mathfrak{M}_0$ ) ändert sich um

$$\frac{y_0}{h} \Delta b \left\{ \frac{\xi}{l + \xi} \Sigma P - \Sigma P' \right\} .$$

Soll dieser Ausdruck negativ sein, so muss sich

$$121) \quad \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} > \frac{\xi}{l + \xi}$$

ergeben. Analog findet man, dass in Folge einer Verschiebung nach rechts werden muss

$$122) \quad \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} < \frac{\xi}{l + \xi} .$$

Den vorhin aufgeführten, die Grösse der Verschiebungen einschränken- den Bedingungen wird durch ein unendlich kleines  $\Delta b$  genügt, so dass man, da andererseits aus der Gestalt der früher gezeichneten Influenz- curve hervorgeht, dass die schwersten Lasten in der Nähe des Scheitels liegen müssen, die Regel erhält:

Man stelle das Lastensystem so auf den Bogen, dass eine der schwersten Lasten über  $S$  liegt; hierauf verschiebe man es unendlich wenig nach links, dann nach rechts, so dass die über  $S$  stehende Last einmal zur  $\Sigma P'$  zählt, das anderemal nicht. Im ersten Falle muss  $\frac{\Sigma P'}{\Sigma P} > \frac{\xi}{l + \xi}$  im zweiten  $\frac{\Sigma P'}{\Sigma P} < \frac{\xi}{l + \xi}$  werden, falls die Stellung das Moment  $\min \mathfrak{M}_o$  erzeugen soll.

Um das Moment  $\max \mathfrak{M}_o$  zu erhalten, wird das Lastensystem von  $A$  bis in die Nähe von  $E$  (Fig. 64) vorgeschoben.  $\Sigma P$  erstreckt sich auf „alle“ Lasten,  $\Sigma P'$  nur auf die rechts von  $o$  gelegenen.  $a$  und  $a'$  bedeuten die Abstände der Lasten von  $A$  resp. von  $o$ . Man findet

$$\mathfrak{M}_o = Bx'_o - Hy_o - \Sigma P'a'$$

oder wegen  $Bh = Hh$  und  $B = \frac{\Sigma Pa}{2l}$

$$\mathfrak{M}_o = \frac{hx'_o - y_ol}{2hl} \Sigma Pa - \Sigma P'a' .$$

Hierfür kann mit Rücksicht auf die Formeln 119 geschrieben werden

$$123) \quad \mathfrak{M}_o = \frac{\xi_2}{\xi_1} \Sigma Pa - \Sigma P'a' .$$

Der Zug wird so aufgestellt, dass eine schwere Last über  $o$  liegt, hierauf unendlich wenig nach rechts resp. links verschoben, so dass die in  $o$  angreifende Last einmal zur  $\Sigma P'$  zählt, das anderemal nicht. Im ersten Falle muss sich  $\frac{\Sigma P'}{\Sigma P} > \frac{\xi_2}{\xi_1}$ , im zweiten  $\frac{\Sigma P'}{\Sigma P} < \frac{\xi_2}{\xi_1}$  ergeben.

Die Strecken  $\xi$ ,  $l + \xi$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  greife man auf einer genauen Zeichnung ab.

Die Berechnung der Momente  $\mathfrak{M}_u$  ist analog; an Stelle von  $x_o$  und  $y_o$  treten  $x_u$  und  $y_u$ .

Hervorzuheben bleibt noch, dass die in derselben Verticalen gelegenen Punkte  $o$  und  $u$  verschiedenen Querschnitten angehören, dass also, wenn in Fig. 65  $o_m$  und  $u_m$  die Schnittpunkte der  $m^{\text{ten}}$  Verticalen mit den Kernlinien sind, aus  $(\mathfrak{M}_o)_m$  die Spannung  $k_u$  im Querschnitte  $\bar{c}\bar{c}$  und aus  $(\mathfrak{M}_u)_m$  die  $k_o$  im Querschnitte  $\bar{c}'\bar{c}'$  zu berechnen ist.

Nunmehr dazu übergehend, die Momente für die zwischen den Verticalen gelegenen Punkte  $o$  und  $u$  zu bestimmen, setzen wir zunächst voraus, es liege die  $(m-1)^{\text{te}}$  Verticale links, die  $m^{\text{te}}$  rechts von dem  $o$  und  $u$  enthaltenden\* Schnitte. Mit der aus Fig. 65 ersichtlichen Bezeichnung wird, wenn  $P_o, P_1, P_2, P_3 \dots$  die Belastungen der Verticalen bedeuten, für den Punkt  $o$ :

$$\mathfrak{M}_o = (A - P_o)x - Hy_o - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) \dots - P_{m-1}(x - a_{m-1}).$$

Dieser Ausdruck ist bei flachem Bogen sehr annähernd vom ersten Grade, da das Stück  $\overline{o_{m-1}o_m}$  der oberen Kernlinie als Gerade aufgefasst werden darf. Trägt man daher vertical unter  $o_{m-1}$  resp.  $o_m$  von der  $AB$  aus  $\overline{CD} = (\mathfrak{M}_o)_{m-1}$  und  $\overline{EF} = (\mathfrak{M}_o)_m$  auf und zieht  $DF$ , so ist die unter  $o$  gemessene Ordinate  $JG$  dieser Geraden ein Näherungswerth für  $\mathfrak{M}_o$ . Es folgt dann bei der Feldweite  $\lambda_m$

$$124 a) \quad \mathfrak{M}_o = (\mathfrak{M}_o)_{m-1} + \left[ (\mathfrak{M}_o)_m - (\mathfrak{M}_o)_{m-1} \right] \frac{x - x_{m-1}}{\lambda_m}.$$

Die Momente  $(\mathfrak{M}_o)_{m-1}$  und  $(\mathfrak{M}_o)_m$  werden bei verschiedenen Laststellungen ihre grössten positiven resp. negativen Werthe annehmen; man begeht aber durch gleichzeitiges Einführen dieser grössten Werthe in die Formel 124 einen die Dimensionen nur wenig beeinflussenden Fehler. Es kann derselbe um so eher zugelassen werden, als die so erhaltenen  $\mathfrak{M}_o$  etwas zu gross sind, und man überhaupt nicht im Stande ist, bei Variiren des Bogenquerschnittes dem strengen Laufe der Momentencurve zu folgen.

Für die Momente  $\mathfrak{M}_u$  folgt analog:

$$124 b) \quad \mathfrak{M}_u = (\mathfrak{M}_u)_{m-1} + \left\{ (\mathfrak{M}_u)_m - (\mathfrak{M}_u)_{m-1} \right\} \frac{x - x_{m-1}}{\lambda_m}.$$

Die Formeln 124 dürfen auch dann ohne Bedenken angewendet werden, wenn die Lage des Querschnittes zur Folge hat, dass eine Verticale zwar links von  $o$  resp. von  $u$  liegt, aber noch zu dem rechten Fragmente zählt. Bei Blechbogenträgern ist die Kernhöhe zu klein, als dass nennenswerthe Differenzen zu gewärtigen wären, während beim statisch unbestimmten Fachwerk, wegen der Unsicherheit in der Bestimmung der Stabspannungen, der Werth eines allzusubtilen Vorgehens zum mindesten zweifelhaft ist. Kommt hierzu noch, dass der Bogen zur Ueberführung einer Eisenbahn mit Querschwellen-Oberbau dient, so tritt als neuer Grund für das einfachere Verfahren hinzu, dass die Schwellen nicht über den Verticalen liegen (Fig. 66), mithin gewissermaassen ein secundäres System von Zwischenträgern bilden, durch welches einzelne Lasten, die zwischen den Verticalen  $(m-1)$ ,  $m$  und  $(m+1)$  liegen, auf die drei Verticalen  $(m-1)$ ,  $m$  und  $(m+1)$  übertragen werden. Diese vertheilende Wirkung der Querschwellen wird aber bei der statischen Berechnung zweckmässig ausser Acht gelassen.

Man wird nach Vorstehendem beim Fachwerksystem mit Verticalen und sich kreuzenden steifen Diagonalen (Fig. 67) die Momente für die Knotenpunkte  $o_{m-1}$ ,  $u_{m-1}$ ,  $o_m$  und  $u_m$  berechnen und die den Momentenpunkten  $o$  und  $u$  entsprechenden Werthe  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$  nach den Formeln 124 oder wie in Fig. 67 angedeutet, graphisch ermitteln. Ebenso wird man beim System mit radial gestellten Stäben in der in Fig. 68 skizzirten Weise vorgehen und aus den Momenten  $(\mathfrak{M})_{m-1}$  und  $(\mathfrak{M})_m$  für die Schnittpunkte der Verticalen mit der unteren Gurtung die Momente  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$  construiren.

Höchstens könnte man beim statisch bestimmten Fachwerk eine strenge Ermittlung fordern. Es liegen hier (Fig. 69) die Knotenpunkte  $o$  des Obergurts in den Verticalen, so dass die vorigen Ermittlungen correct sind. Weiter sind die Momente  $\min(\mathfrak{M}_u)_m$  in der früheren Weise zu berechnen, da (wie deutlich aus der Gestalt der Influenzlinie hervorgeht) nur dann auf die Wirkung der Zwischenträger zu achten ist, wenn Lasten im  $m^{\text{ten}}$  Felde liegen und dies bei der das Moment  $\min(\mathfrak{M}_u)_m$  erzeugenden Laststellung nicht der Fall ist. Bei derjenigen Stellung hingegen, welcher  $\max(\mathfrak{M}_u)_m$  entspricht, ist zu beachten, dass auf das Fragment rechts vom Schnitt  $\alpha\beta$  nicht nur die rechts von der  $m^{\text{ten}}$  Verticalen gelegenen Lasten  $P'$  wirken, sondern noch der in  $o_m$  angreifende Druck des  $m^{\text{ten}}$  Zwischenträgers. Dieser ist, wenn die im  $m^{\text{ten}}$  Felde gelegenen Lasten mit  $P''$  bezeichnet werden, während  $\alpha''$  ihre Abstände von  $o_{m-1}$  sind:

$$\frac{\sum P'' \alpha''}{\lambda_m},$$

wesshalb das Moment der am rechten Fragment angreifenden Kräfte

$$(\mathfrak{M}_u)_m = B(x_u)_m - H(y_u)_m - \sum P' a' + \frac{\sum P'' \alpha''}{\lambda_m} [(x_u)_m - (x_o)_m]$$

oder nach Fortlassung des Index  $m$  wird

$$125) \quad \max \mathfrak{M}_u = \sum_{\xi_1}^{\xi_2} P a - \left\{ \sum P' a' - \sum P'' \alpha'' \frac{x_u - x_o}{\lambda} \right\}.$$

Die Stellung des Lastensystems ist hierbei dann am gefährlichsten, wenn in Folge einer Verschiebung des Zuges nach rechts oder links beziehungsweise

$$126) \quad \frac{\sum P' - \sum P'' \frac{x_u - x_o}{\lambda}}{\sum P} > \frac{\xi_2}{\xi_1}$$

sich herausstellt. Dabei muss eine schwere Last über  $o_m$  stehen.

**5) Die grössten Momente bei gleichförmiger Verkehrslast** lassen sich mit Hilfe der Formeln 120 und 123 ermitteln. In Formel 120 bedeuten  $\sum P b$  und  $\sum P' b'$  die statischen Momente beziehungsweise sämtlicher Lasten und der Lasten links vom Scheitel für die Verticalen durch  $B$  resp. durch  $S$ . Bedeckt nun die mobile gleichförmige

Last ( $v$  pro Längeneinheit) die negative Beitragsstrecke  $BE$  (Fig. 70) so wird:

$$\Sigma P b = v(l + \xi) \frac{l + \xi}{2}; \quad \Sigma P' b' = v \xi \frac{\xi}{2}$$

und es geht Formel 120 über in

$$\min (\mathfrak{M}_o)_v = - \frac{v y_o l \xi}{2h}.$$

Entsprechend der Belastung der positiven Beitragsstrecke  $AE$  ist in Formel 123 einzuführen

$$\Sigma P a = \frac{v \xi_1^2}{2}; \quad \Sigma P' a' = \frac{v \xi_2^2}{2}$$

und erhält man dann

$$(\max \mathfrak{M}_o)_v = + \frac{v \xi_2 x}{2}.$$

In derselben Weise werden die  $\mathfrak{M}_u$  berechnet.

**6) Die Momente in Folge der Constructionslast** ( $p$  pro Längeneinheit) werden (Fig. 70 b)

$$127) \quad \begin{cases} (\mathfrak{M}_o)_p = p l x - p x \frac{x}{2} - \frac{p l^2}{2h} y_o \\ (\mathfrak{M}_u)_p = p l x - p x \frac{x}{2} - \frac{p l^2}{2h} y_u \end{cases}$$

denn nach Formel 115 ist  $A = pl$ ;  $H = \frac{pl^2}{2h}$ .

Besteht die Verkehrslast aus einem Systeme concentrirter Lasten, so werden die Momente ( $\mathfrak{M}_p$ ) zu den mit Hilfe von 120 und 123 berechneten addirt. Liegt dagegen eine gleichförmige mobile Belastung vor, so ist es zweckmässiger, zur Abkürzung

$$\frac{y_o l \xi}{2h} = c; \quad \frac{x \xi_2}{2} = c'$$

zu setzen und

$$\min (\mathfrak{M}_o)_v = - v c; \quad \max (\mathfrak{M}_o)_v = + v c'$$

$$(\mathfrak{M}_o)_p = p(c' - c)$$

zu schreiben, worauf durch Addition, mit Rücksichtnahme auf die Bezeichnung:

$p + v = q =$  Gesamtlast pro Längeneinheit  
die Gesamtmomente werden:

$$128) \quad \max \mathfrak{M}_o = q c' - p c; \quad \min \mathfrak{M}_o = p c' - q c.$$

Man vergleiche übrigens Seite 84.

## § 11.

### Die grössten Transversalkräfte.

**1) Belastungsscheiden und Influenzflächen.** Es sollen bei Berechnung der  $R_i$  von vornherein Zwischenträger vorausgesetzt werden. Bedeuten

dann  $P_0, P_1, P_2 \dots$  die Belastungen der Verticalen (Fig. 71), so folgt für einen zwischen der  $(m-1)^{\text{ten}}$  und  $m^{\text{ten}}$  Verticalen geführten Schnitt  $cc$ :

$$R_i = \left\{ A - \sum_0^{m-1} P \right\} \cos \varphi - H \sin \varphi .$$

Dieser Ausdruck ist annähernd constant, da sich  $\varphi$  innerhalb des  $m^{\text{ten}}$  Feldes nur wenig ändert. Man begeht nur einen sehr geringen Fehler, wenn man unter  $\varphi$  den Neigungswinkel der Verbindungslinie  $F_1 F_2$  der Schnittpunkte der Verticalen mit der Bogenaxe versteht und  $R_i$  innerhalb eines Feldes constant annimmt (Fig. 72).

Zieht man von  $A$  aus zu der  $F_1 F_2$  eine Parallele, welche die Kämpferdrucklinie  $BS$  in einem Punkte  $E$  oberhalb  $S$  schneidet, so erhält man in der Verticalen durch  $E$  eine Belastungsscheide; denn es entspricht einer durch  $E$  gehenden  $P$  am linken Fragment ein parallel der  $F_1 F_2$  wirkender Kämpferdruck  $K$  als alleinige angreifende Kraft, und es besitzt diese Kraft  $K$  keine Componente normal zu  $F_1 F_2$ . Rückt  $P$  aus der Lage  $E$  nach rechts, so erzeugt es ein negatives  $R_i$ , weil der zugehörige Kämpferdruck  $K'$  eine abwärts gerichtete Componente normal zu  $F_1 F_2$  hat. Rückt dagegen  $P$  nach links, so entsteht ein positives  $R_i$ . Sämmtlichen rechts von  $S$  gelegenen Lasten entspricht ein durch  $S$  gehender Kämpferdruck, so dass, falls  $E$  unterhalb  $S$  gefunden wird, sämmtliche auf dem rechten Fragment aufgebrauchten Lasten ein positives  $R_i$  verursachen (Fig. 73). Liegt die Last  $P$  auf dem linken Fragment, so erhält man (vergl. No. 34)

$$R_i = - B \cos \varphi - H \sin \varphi$$

also einen negativen Werth. Lasten zwischen  $F_1$  und  $F_2$  werden je nach ihrer Lage ein positives oder negatives  $R_i$  erzeugen. Um die im Felde  $F_1 F_2$  liegende Belastungsscheide — zunächst graphisch — zu bestimmen, werde die Influenzfläche construirt.

Liegt  $P$  rechts von  $F_2$  im Abstände  $b$  von  $B$ , so wird

$$R_i = A \cos \varphi - H \sin \varphi = \sin \varphi \left\{ A \cotg \varphi - H \right\} = \sin \varphi H_i ,$$

worin  $H_i$  den ideellen Horizontalschub bezüglich der Transversalkraft bedeutet. Er wird erhalten durch Subtraction der Ordinate der ersten Curve  $H$  von der Ordinate der Geraden:

$$z = A \cotg \varphi = \frac{Pb}{2l} \cotg \varphi ,$$

welche letztere für  $b = 2l$  die Ordinate  $\overline{AG} = P \cotg \varphi$  hat. (Dabei sei wieder  $P = 1^{\text{tons}}$  angenommen). Die Gerade  $AG$  kann auch aus der Bedingung construirt werden, dass einer durch  $E$  gehenden  $P$  der Werth  $H_i = 0$  entsprechen muss, dass also  $BG$  durch den Schnittpunkt  $E'$  der  $AD$  mit der Verticalen durch  $E$  geht. Rechts resp. links von  $E'$  ist  $H_i$  negativ resp. positiv. Die Gerade  $BG$  gilt von  $B$  bis zum Schnitt-

punkt  $F_2'$  mit der Verticalen  $F_2$ . Liegt die Last  $P$  auf dem linken Fragment, so folgt

$$H_i = (A - P) \cotg \varphi - H;$$

es ist also von dem wie vorstehend construirten  $H_i$  der Werth  $P \cotg \varphi$  zu subtrahiren. Daraus folgt, dass man  $AF_1'$  parallel der  $BF_2'$  ziehen und die  $H_i$  als Verticalabstände der  $AF_1'$  und der ersten Curve  $H$  erhalten wird. Um schliesslich für die zwischen  $F_1$  und  $F_2$  gelegenen Lasten die  $H_i$  zu erhalten, wird  $F_1'$  mit  $F_2'$  durch eine Gerade verbunden; denn es ist  $H_i$  zwischen zwei Querträgern (ebenso wie  $H_i$  bezüglich der Momente) eine lineare Funktion.\*) Die in Fig. 72 schraffierte Fläche stellt die gesuchte Influenzfläche dar; ihr Multiplicator ist  $\sin \varphi$ . Will man mit Hilfe derselben beispielsweise  $\max R_i$  finden, so stellt man das Lastensystem so über die positive Beitragsstrecke  $CE'$ , dass die schwersten Lasten in der Nähe von  $F_2'$  liegen. Wird hierbei speciell eine Eisenbahnbrücke vorausgesetzt, so ergibt sich mit der auf Seite 82 eingeführten Bezeichnung

$$R_i = \sin \varphi \left\{ L \Sigma(H_i)_L + T \Sigma(H_i)_T + G \Sigma(H_i)_G \right\}.$$

Durch Vergleichen der Wirkungen verschiedener Stellungen findet man  $\max R_i$ .

Figur 73 zeigt die Influenzfläche für den Fall, dass  $E$  unterhalb  $S$  gefunden wird. Auf der  $AD$  ergibt sich  $E'$  rechts von  $D$ , so dass nur eine Belastungsscheide existirt. (In unmittelbarer Nähe des Scheitels wird die Construction unpraktisch, da  $\cotg \varphi$  bei kleinem Winkel sehr gross ist. Desshalb empfiehlt es sich hier,  $R_i$  durch Rechnung zu ermitteln.)

## 2) Analytische Bestimmung von $R_i$ . Voraussetzung concentrirter Lasten.

Fall I. Die Belastungsscheide  $E$  liegt links im Abstände  $\xi$  von  $S$ . Um  $\min R_i$  zu ermitteln, wird das Lastensystem von  $B$  aus bis in die Nähe von  $E$  vorgeschoben (Fig. 74). Mit der auf Seite 85 u. 86 bei Berechnung von  $\mathfrak{M}$  eingeführten Bezeichnungsweise erhält man

$$R_i = A \cos \varphi - H \sin \varphi; \quad A = \frac{\Sigma P b}{2l}; \quad H = \frac{\Sigma P b}{2h} - \frac{\Sigma P' b'}{h}$$

$$129 a) \quad \min R_i = - \frac{\sin \varphi}{h} \left\{ \frac{l - h \cotg \varphi}{2l} \Sigma P b - \Sigma P' b' \right\}.$$

Weiter findet man leicht

$$130) \quad \xi = l \frac{l - h \cotg \varphi}{l + h \cotg \varphi}; \quad \frac{\xi}{l + \xi} = \frac{l - h \cotg \varphi}{2l},$$

so dass man auch schreiben kann:

$$129 b) \quad \min R_i = - \frac{\sin \varphi}{h} \left\{ \frac{\xi}{l + \xi} \Sigma P b - \Sigma P' b' \right\}.$$

\*) Die Verticale durch den Punkt  $C$  ist die im Felde  $F_1 F_2$  gelegene Belastungsscheide.

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem für  $\min \mathfrak{M}$  auf Seite 85 (No. 120) abgeleiteten nur durch den vor der Klammer stehenden Multiplikator, so dass die dort für die Aufsuchung der gefährlichsten Laststellung gegebenen Regeln auch hier gültig sind. Zieht man  $SC$  parallel  $AE$ , so ist  $\overline{AC} = l - h \cotg \varphi$  ( $= d$  gesetzt), wesshalb man auch schreiben kann

$$131) \quad \min R_t = -\frac{\sin \varphi}{h} \left\{ \frac{d}{2l} \Sigma P b - \Sigma P' b' \right\}.$$

Die grösste negative Transversalkraft erfährt eine Vergrösserung, sobald von  $A$  aus ein Lastensystem bis in das Feld  $F_1 F_2$  vorrückt (Fig. 75). Indem wir hierbei  $\Sigma P$  auf „alle“ Lasten beziehen,  $\Sigma P'$  nur auf die im Felde  $F_1 F_2$  gelegenen Lasten und beachten, dass von den Lasten  $P$  der Theil  $\frac{\Sigma P' a'}{\lambda}$  durch den Zwischenträger auf das rechte Fragment übertragen wird, erhalten wir

$$R_t = -\left( B - \frac{\Sigma P' a'}{\lambda} \right) \cos \varphi - H \sin \varphi$$

und wegen

$$B = \frac{\Sigma P a}{2l}; \quad H = \frac{\Sigma P a}{2h}$$

$$132) \quad \min R_t = -\frac{\cos \varphi}{\lambda} \left[ \frac{\lambda (l \operatorname{tg} \varphi + h)}{2lh} \Sigma P a - \Sigma P' a' \right].$$

Zuerst wird man Last  $P_1$  über  $F_1$  stellen und nachsehen, ob

$$133) \quad \frac{P_1}{\Sigma P} > \frac{\lambda (l \operatorname{tg} \varphi + h)}{2lh}$$

ist. Im Gegenfalle wird  $P_2$  über  $F_1$  gestellt und die Ungleichung

$$\frac{P_1 + P_2}{\Sigma P} > \frac{\lambda (l \operatorname{tg} \varphi + h)}{2lh}$$

untersucht. Wird auch diese Bedingung nicht erfüllt, so stellt man  $P_3$  über  $F_1$  u. s. w. Man wird aber — mit sehr seltenen Ausnahmen — finden, dass Rad  $P_1$  über  $F_1$  zu stellen ist. \*) Aus diesem Grunde soll in der Folge die Aufstellung der Kriterien für die gefährlichste Laststellung unterbleiben und stets angenommen werden, es befinde sich die erste Last über dem Querträger; allenfalls wird man dann noch für die in der Nähe der Stütze gelegenen Felder nachsehen, wie gross  $R_t$  wird, wenn Last  $P_2$  über dem Querträger liegt. Man erwäge übrigens, dass die Belastung eines Trägers durch einen in zwei Theile zerlegten Lastenzug, wie er hier bei Berechnung von  $\min R_t$  vorausgesetzt wurde, sehr unwahrscheinlich ist.

\*) Es liegt dies daran, dass man bei Bogenbrücken die Feldlängen  $\lambda$  kleiner wählt wie bei den Balkenbrücken. Bei letzteren werden die gefährlichsten Anstrengungen in den Diagonalen und Verticalen bekanntlich häufig dann erzeugt, wenn die zweite Last über dem fraglichen Querträger steht.

Um  $\max R_t$  zu erhalten, wird links vom Scheitel ein Zug aufgestellt, dessen erste Last über  $F_2$  steht, während der Bogen rechts von  $E$  wenn möglich unbelastet bleibt. Mit  $b'$  werden die Abstände der Lasten vom Scheitel, mit  $b$  die von  $B$  bezeichnet. Dann ist (Fig. 76 [vgl. Formel 129 a]):

$$134) \quad \max R_t = + \frac{\sin \varphi}{h} \left\{ \Sigma P b' - \frac{l-h \cotg \varphi}{2l} \Sigma P b \right\}.$$

Fall II. Es liegt  $E$  unterhalb  $S$ . Die grösste positive resp. grösste negative Transversalkraft wird erhalten, je nachdem ein Zug von  $B$  oder von  $A$  aus bis  $F_2$  beziehungsweise  $F_1$  avancirt. Man erhält

$$135) \quad \max R_t = + \frac{\sin \varphi}{h} \left\{ \Sigma P' b' - \frac{l-h \cotg \varphi}{2l} \Sigma P b \right\}$$

$$136) \quad \min R_t = - \frac{\cos \varphi [l \operatorname{tg} \varphi + h]}{2lh} \Sigma P a.$$

### 3) Berechnung von $R_t$ unter Annahme einer gleichförmigen mobilen Verkehrslast. Einfluss der permanenten Last.

Fall I.  $E$  liegt links von  $S$ . Wird die negative Beitragsstrecke  $BE$  mit  $v$  pro Längeneinheit belastet, so folgt (vergl. Berechnung von  $\mathfrak{M}$  auf Seite 89)  $\Sigma P b = \frac{1}{2} v (l + \xi)^2$ ,  $\Sigma P' b' = \frac{1}{2} v \xi^2$  (Fig. 77), mithin

$$a) \quad (\min R_t)_v = - \frac{v \sin \varphi \xi l}{2h}.$$

Ausserdem ist noch der Bogen links von der durch das Feld  $F_1 F_2$  gehenden Belastungsscheide zu belasten. Ein hinlänglich genaues und zwar etwas zu grosses  $R_t$  erhält man hierbei, sobald man Strecke  $AF_1$  belastet (Fig. 77) und in  $F_1$  die concentrirte Last  $\frac{v \lambda}{2}$  hinzufügt, also gewissermaassen annimmt, es rücke die Last bis  $F_2$  vor, es werde aber der auf  $F_2$  durch den Zwischenträger  $F_1 F_2$  übertragene Druck vernachlässigt. In Formel 132 ist (wenn Feld  $F_1 F_2$  das  $m^{\text{te}}$  ist) zu setzen:

$$\Sigma P' a' = 0; \quad \Sigma P a = \frac{v \lambda}{2} x_{m-1} + v x_{m-1} \frac{x_{m-1}}{2} = \frac{v x_{m-1} x_m}{2}$$

und erhält man

$$b) \quad (\min R_t)_v = - \frac{v \cos \varphi [l \operatorname{tg} \varphi + h]}{4lh} x_{m-1} x_m.$$

Die Addition der sub  $a$  und  $b$  gewonnenen Resultate liefert

$$137) \quad (\min R_t)_v = - \frac{v \cos \varphi}{2h} \left[ \frac{l^2 (l \operatorname{tg} \varphi - h) \operatorname{tg} \varphi}{l \operatorname{tg} \varphi + h} + \frac{l \operatorname{tg} \varphi + h}{2l} x_{m-1} x_m \right] \\ (= -c v \text{ gesetzt}).$$

Der Belastung des ganzen Trägers entspricht (Fig. 78)

$$138) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{total } (R_t)_v &= \left( v l - v x_{m-1} - \frac{v \lambda_m}{2} \right) \cos \varphi - \frac{v l^2}{2h} \sin \varphi \\ &= v x_m'' \cos \varphi - \frac{v l^2}{2h} \sin \varphi (= c_v v \text{ gesetzt}), \end{aligned} \right.$$

worin  $x_m$  den Abstand der Mitte des  $m^{\text{ten}}$  Feldes vom Scheitel bedeutet. Da sich nun die Stellungen für  $\max R_t$  und für  $\min R_t$  zur vollen Belastung ergänzen, muss

$$\max (R_t)_v = \text{total} (R_t)_v - \min (R_t)_v$$

sein, wesshalb

$$\max (R_t)_v = (c_o + c) v.$$

Mit Rücksichtnahme auf die permanente Belastung folgt (vgl. S. 89)

$$139) \quad \begin{cases} \max R_t = q(c_o + c) - pc = qc_o + vc \\ \min R_t = p(c_o + c) - qc = pc_o - vc \end{cases}$$

Der Einfluss der permanenten Last für sich allein wird

$$(R_t)_p = pc_o.$$

Bei parabolischer Bogenaxe wird die Ordinate des Schnittpunktes der Axe mit der  $m^{\text{ten}}$  Verticalen

$$y_m = \frac{hx_m(2l - x_m)}{l^2}$$

$$\begin{aligned} \text{daher } \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y_m - y_{m-1}}{\lambda} = \frac{h}{\lambda l^2} \left\{ x_m(2l - x_m) - x_{m-1}(2l - x_{m-1}) \right\} \\ &= \frac{h}{\lambda l^2} \left\{ 2l\lambda - (x_m + x_{m-1})(x_m - x_{m-1}) \right\} = \frac{h}{l^2} \left\{ 2l - 2x_{m-1} - \lambda \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{Nun wird } \text{total} (R_t)_v = \frac{v \cos \varphi}{2} \left\{ 2l - 2x_{m-1} - \lambda - \frac{l^2}{h} \operatorname{tg} \varphi \right\} = 0$$

mithin:

$$140) \quad \min (R_t)_v = -\max (R_t)_v \quad \text{und} \quad (R_t)_p = 0.$$

Diese Relationen sind auch sehr angenähert für flache Kreisbögen gültig.

## § 12.

### Deformationen.

1) **Beanspruchung durch eine concentrirte Last.** Die auf Seite 22 zur Berechnung von  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  abgeleiteten Gleichungen 44 und 45 sind beim Bogen mit 3 Gelenken nur so lange gültig, als der Punkt  $(xy)$  links vom Scheitелgelenk liegt; denn es ist  $\Delta \varphi$  bei  $x = l$  unstetig. Deshalb können auch die Gleichungen 39 nicht zur Ermittlung von  $\Delta \varphi_0$  und  $\Delta \varphi_1$  dienen. Indem wir nun mit  $\Delta \varphi_s$  den Neigungswinkel der Tangente an die Bogenaxe  $AS$  (Fig. 79) nach der Deformation bezeichnen und die Verrückungen des Scheitels  $\Delta l$  und  $\Delta h$  nennen, erhalten wir, eine parabolische Bogenaxe voraussetzend, unter der Annahme, dass  $P$  links von  $S$  angreift:

$$141) \left\{ \begin{aligned} \Delta \varphi_s &= \Delta \varphi_0 + \varepsilon_0 [\varphi]_0^a + \varepsilon_0' [\varphi]_a^l + \int_0^l \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'} = (\Delta \varphi_0 + \mathfrak{A} \text{ gesetzt}) \\ \Delta l &= -h \Delta \varphi_s + \varepsilon_0 [S_1]_0^a + \varepsilon_0' [S_1]_a^l + \int_0^l y \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'} (= -h \Delta \varphi_s + \mathfrak{B} \text{ ges.}) \\ \Delta h &= +l \Delta \varphi_s - \varepsilon_0 [S_2]_0^a - \varepsilon_0' [S_2]_a^l - \int_0^l x \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'} (= l \Delta \varphi_s + \mathfrak{C} \text{ ges.}). \end{aligned} \right.$$

Hierauf wenden wir dieselben Formeln 45 auf das Spiegelbild Fig. 80 an, setzen die relative Längenänderung der Bogenaxe =  $\varepsilon_0''$ , ferner das Moment  $Bx - Hy = \mathfrak{M}'$  und finden, wenn  $\Delta \varphi_s'$  nach der Deformation den Neigungswinkel der Tangente an die Bogenaxe  $BS$  bedeutet

$$142) \left\{ \begin{aligned} \Delta \varphi_s' &= \Delta \varphi_1 + \varepsilon_0'' [\varphi]_0^l + \int_0^l \frac{\mathfrak{M}' dx}{EJ'} (= \Delta \varphi_1 + \mathfrak{A}' \text{ gesetzt}) \\ -\Delta l &= -h \Delta \varphi_s' + \varepsilon_0'' [S_1]_0^l + \int_0^l y \frac{\mathfrak{M}' dx}{EJ'} (= -h \Delta \varphi_s' + \mathfrak{B}' \text{ ges.}) \\ \Delta h &= +l \Delta \varphi_s' - \varepsilon_0'' [S_2]_0^l - \int_0^l x \frac{\mathfrak{M}' dx}{EJ'} (= l \Delta \varphi_s' + \mathfrak{C}' \text{ gesetzt}). \end{aligned} \right.$$

Die so erhaltenen 6 Gleichungen dienen zur Berechnung von  $\Delta \varphi_s$ ,  $\Delta \varphi_s'$ ,  $\Delta \varphi_1$ ,  $\Delta \varphi_0$ ,  $\Delta l$ ,  $\Delta h$ , worauf durch Anwendung der Gleichungen 44 und 45 auf den Theil  $AS$  (Ursprung  $A$ ) und den Theil  $BS$  (Ursprung  $B$ ) die Deformationen an irgend welcher Stelle gewonnen werden.

Zu einer bedeutenden Vereinfachung der Rechnung führt die Ueberlegung, dass zwei in Bezug auf den Scheitel symmetrisch liegende Lasten  $P$  (Fig. 81) die Aenderung  $2\Delta h$  erzeugen, während sie keine Horizontalverschiebung des Scheitels hervorrufen, so dass, wenn die Bezeichnungen  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_0'$  für die Aenderungen  $\frac{\Delta ds}{ds}$  in den Intervallen  $x = 0$  bis  $x = a$  und  $x = a$  bis  $x = l$  beibehalten werden, die Gleichungen resultiren:

$$0 = -h \Delta \varphi_s + \mathfrak{B} \quad ; \quad 2\Delta h = l \Delta \varphi_s + \mathfrak{C}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} 2\Delta h &= \mathfrak{C} + \frac{l}{h} \mathfrak{B} \\ 2\Delta h EJ' &= EJ' \varepsilon_0 \left\{ \frac{l}{h} [S_1]_0^a - [S_2]_0^a \right\} + EJ' \varepsilon_0' \left\{ \frac{l}{h} [S_1]_a^l - [S_2]_a^l \right\} \\ &\quad - \int_0^l \mathfrak{M} x dx + \frac{l}{h} \int_0^l \mathfrak{M} y dx . \end{aligned}$$

Nun entspricht: 1) der Last  $P$  links von  $S$

$$(\varepsilon_0)_1 = -\frac{2h}{EF(l^2+h^2)} \left[ \frac{Pb}{2l} l + \frac{H_1(l^2-h^2)}{2h} \right]$$

$$(\varepsilon'_0)_2 = -\frac{2h}{EF(l^2+h^2)} \left[ \frac{Pa}{2l} l + \frac{H_1(l^2-h^2)}{2h} \right]$$

2) der Last  $P$  rechts von  $S$ :

$$(\varepsilon_0)_2 = (\varepsilon'_0)_2 = -\frac{2h}{EF(l^2+h^2)} \left[ \frac{Pa}{2l} l + \frac{H_2(l^2-h^2)}{2h} \right],$$

weshalb sich, da  $H_1 = \frac{Pa}{2h} = H_2$  ist, für beide Lasten

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_0)_1 + (\varepsilon_0)_2 = -\frac{2h}{EF(l^2+h^2)} \left[ Pl + \frac{Pa}{h} \frac{l^2-h^2}{2h} \right]$$

$$\varepsilon'_0 = (\varepsilon'_0)_1 + (\varepsilon'_0)_2 = -\frac{2h}{EF(l^2+h^2)} \left[ Pa + \frac{Pa}{h} \frac{l^2-h^2}{2h} \right]$$

ergiebt. Weiter ist wegen  $A = P$ :

$$\int_0^l \mathfrak{M} x dx = P \int_0^l x^2 dx - H \int_0^l xy dx - P \int_a^l (x-a) x dx$$

$$\int_0^l \mathfrak{M} y dx = P \int_0^l xy dx - H \int_0^l y^2 dx - P \int_a^l (x-a) y dx,$$

so dass nach Einsetzen der Werthe  $S_1$  und  $S_2$  und nach Ausführung der Integrationen sich

$$143) \quad \Delta h = -\frac{Pa}{EF} \frac{l^2}{l^2+h^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{a}{l} + \frac{l^2}{2h^2} \right) + \frac{Pal^2}{120EJ} \left( 3 - 10 \frac{a^2}{l^2} + 5 \frac{a^3}{l^3} \right)$$

als Senkung des Scheitels in Folge einer concentrirten Last  $P$  ergibt.

Indem wir weiter nur eine Last  $P$  voraussetzen, eliminiren wir aus den Gleichungen

$$\Delta l = -h \Delta \varphi_s + \mathfrak{B} \quad ; \quad \Delta h = l \Delta \varphi_s + \mathfrak{C}$$

den Werth  $\Delta \varphi_s$  und folgern

$$\Delta l = \frac{h}{l} \left\{ \mathfrak{B} \frac{l}{h} + \mathfrak{C} \right\} - \Delta h \frac{h}{l}$$

$$\Delta l E J = \frac{h}{l} \left\{ \varepsilon_0 \left[ \frac{l}{h} (S_1)_0^a - (S_2)_0^a \right] + \varepsilon'_0 \left[ \frac{l}{h} (S_1)_a^l - (S_2)_a^l \right] \right\} E J$$

$$- \frac{h}{l} \int_0^l \mathfrak{M} x dx + \int_0^l \mathfrak{M} y dx - \frac{h}{l} \Delta h E J.$$

Hierin sind  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon'_0$  gleich den in den Formeln 38 ( $\mathfrak{M}_A = 0$ ) angegebenen Werthen, ferner ist

$$\mathfrak{M} = Ax - Hy - P(x-a)$$

$$A = \frac{Pb}{2l}; \quad H = \frac{Pa}{2h},$$

so dass man nach Durchführung der leichten Rechnungen

$$144) \quad \Delta l = -\frac{P a h}{E F l} \cdot \frac{l^2}{l^2 + h^2} \left(1 - \frac{a}{l}\right) + \frac{P a h l}{120 E J} \left(5 - 10 \frac{a^2}{l^2} + 5 \frac{a^3}{l^3}\right)$$

erhält. Nach Ermittlung von  $\Delta h$  und  $\Delta l$  kann man

$$\Delta \varphi_s = \frac{\Delta h}{l} - \frac{\mathfrak{G}}{l}; \quad \Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_s - \mathfrak{A}$$

$$\Delta \varphi'_s = \frac{\Delta h}{l} - \frac{\mathfrak{G}'}{l}; \quad \Delta \varphi_1 = \Delta \varphi'_s - \mathfrak{A}'$$

finden und die Werthe  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  für beliebige Punkte der Bogenaxe bestimmen, worauf sich diejenigen Laststellungen angeben lassen, denen die grössten Deformationen entsprechen. Da sich hierbei hinlänglich einfache Formeln nicht erzielen lassen, und die ganze Untersuchung von untergeordneter Bedeutung ist, beschränken wir uns auf Angabe der grössten Werthe  $\Delta h$  und  $\Delta l$ .

**2) Maximalverschiebungen des Scheitels.** Trägt man unter der an der Stelle  $a$  aufgebrachten Last  $P = 1$  den aus Formel 143 berechneten Werth  $\Delta h$  von der Horizontalen  $AB$  (Fig. 82) aus als Ordinate auf und verbindet die Endpunkte dieser Ordinaten durch eine Curve, so findet man die „Influenzcurve für  $\Delta h$ “, welche gestattet, für jede beliebige Stellung eines Lastensystems  $\Delta h$  durch Summirung der den einzelnen Lasten entsprechenden Ordinaten zu berechnen. Einer Last in der Nähe des Scheitels wird eine Senkung desselben d. i. ein negatives  $\Delta h$  entsprechen, hingegen Lasten nahe den Stützen ein positives  $\Delta h$ . Die Lage der Belastungsscheide wird aus der Gleichung

$$145) \quad -\frac{1}{F} \frac{l^2}{l^2 + h^2} \left(\frac{3}{2} - \frac{a}{l} + \frac{l^2}{2h^2}\right) + \frac{l^2}{120 J} \left(3 - 10 \frac{a^2}{l^2} + \frac{5a^3}{l^3}\right) = 0$$

gefunden. Die Lösung dieser Gleichung sei  $a_1$ . (Wenn die relative Längenänderung der Bogenaxe vernachlässigt wird, also das erste Glied in No. 145 gestrichen wird, ist  $a_1 = 0,672 l$ .) Werden ausschliesslich die Strecken  $a_1$  links und rechts vom Scheitel belastet, so ergibt sich  $(\Delta h)_{\max}$ , während die alleinige Belastung der Strecken  $(l - a_1)$  den Werth  $(\Delta h)_{\min}$ , d. i. die grösste Senkung  $\Delta h$  liefert. Die Maximal-Horizontalverschiebung des Scheitels erhält man bei Belastung der einen Bogenhälfte.

Liegt eine gleichförmige Verkehrslast vor ( $v$  pro Längeneinheit), so ersetze man in der Formel 143 die Last  $P$  durch das Lastdifferential  $v da$  und integriere den überdies mit 2 zu multiplicirenden Ausdruck zwischen den Grenzen 0 bis  $a_1$  resp.  $a_1$  bis  $l$ ; man erhält dann

$$146) \quad \begin{cases} \max(\Delta h)_v = \frac{v a_1^3 l^2}{60 E J} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{5 a_1^2}{l^2} + \frac{a_1^3}{l^3} \right\} - \frac{2 v l^2}{E F l^2 + h^2} \left\{ \frac{3}{2} a_1^2 - \frac{1}{3} \frac{a_1^3}{l} + \frac{1}{4} \frac{a_1^2 l^2}{h^2} \right\} \\ \min(\Delta h)_v = -\frac{v a_1^3 l^2}{60 E J} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{5 a_1^2}{l^2} + \frac{a_1^3}{l^3} \right\} - \frac{2 v l^2}{E F l^2 + h^2} \left\{ \frac{3}{2} (l^2 - a_1^2) - \frac{1}{3} \frac{l^3 - a_1^3}{l} + \frac{1}{4} \frac{l^4 - a_1^2 l^2}{h^2} \right\} \end{cases}$$

Schreibt man hierfür abgekürzt

$$\max(\Delta h)_v = c v; \quad \min(\Delta h)_v = -c' v,$$

wo  $c$  und  $c'$  Zahlen bedeuten, so findet man unter Berücksichtigung der

permanenten Last — mit Beachtung der Bezeichnung  $p + v = q$  — die Verschiebungen:

$$147) \quad \begin{cases} \max(\Delta h) = cq - c'p \\ \min(\Delta h) = cp - c'q. \end{cases}$$

Die Verschiebung  $(\Delta l)_{\max}$  wird analog gefunden. Bei Beanspruchung durch concentrirte Lasten construirt man die Influenzcurve. Liegt nur gleichförmig vertheilte Belastung vor, so führe man in Formel 144 das Differentiale  $v da$  an Stelle von  $P$  ein und integriere von 0 bis  $l$ . Man findet

$$148) \quad (\Delta l)_{\max} = \frac{v h l^3}{120 E J'} \left\{ 1 - 20 \frac{J'}{F(l^2 + h^2)} \right\}.$$

Dieser Werth erfährt durch die permanente Last keine Aenderung.

**3) Einfluss der Temperaturänderungen.** Da beim Bogen mit 3 Gelenken Aenderungen der Temperatur die Reactionen der Stützen nur insofern beeinflussen, als bei Hebung resp. Senkung des Scheitelgelenkes andere Kämpferdrucklinien entstehen, so gehen, wenn hierauf keine Rücksicht genommen wird, bei unbelastet gedachtem Bogen die Gleichungen 66 über in.

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_0 + \varepsilon_t t (\varphi_0^z); \quad \Delta x = \varepsilon_t t [S_1^z]_0 - y \Delta \varphi; \quad \Delta y = -\varepsilon_t t [S_2^z]_0 + x \Delta \varphi$$

und erhält man speciell für  $x = l$

$$\Delta l = \varepsilon_t t [S_1^l]_0 - h \Delta \varphi_s = 0$$

$$\Delta h = -\varepsilon_t t [S_2^l]_0 + l \Delta \varphi_s$$

mithin

$$\Delta h = \varepsilon_t t \left\{ (S_1^l)_0 \frac{l}{h} - (S_2^l)_0 \right\}$$

und für den flachen Parabelbogen

$$149) \quad \Delta h = \varepsilon_t t \frac{l^2}{h}.$$

Einer Temperaturniedrigung um  $t$  entspricht eine gleich grosse Senkung  $\Delta h$ .

### § 13.

#### Vorläufige Bestimmung des Querschnittes; Abschätzung des Eigengewichtes.

1) **Blechbogenträger.** Auf Seite 64 wurde für die vorläufige Bestimmung des Querschnittes der Kopfplatten einer Gurtung die Formel

$$86) \quad f = \frac{\mathfrak{M}_b + R_n e}{k h_1} - \frac{2 J_s}{h_1^2}$$

abgeleitet, in welcher  $\mathfrak{M}_b$  das grösste Angriffsmoment für den in der

Bogenaxe angenommenen Querschnittsschwerpunkt  $m$  und  $R_n$  die grösste Axialkraft bedeutet. Bei voller Belastung des Bogens ist unter Voraussetzung parabolischer Axe

$$\mathfrak{M}_b = p l x - \frac{p x^2}{2} - \frac{p l^2}{2h} y = 0$$

weil  $y = \frac{hx(2l-x)}{l^2}$  ist; deshalb wird, da die Stellungen für  $\max \mathfrak{M}_b$  und  $\min \mathfrak{M}_b$  sich zur vollen Belastung ergänzen, und der Einfluss der permanenten Last Null ist, bei Annahme gleichförmiger Verkehrslast:

$$\max \mathfrak{M}_b = - \min \mathfrak{M}_b = + \frac{v y \xi l}{2h} \text{ (vergl. Seite 89)}$$

worin  $\xi = l \frac{y l - h x}{y l + h x}$  (vergl. No. 118).

Wird  $y = \frac{hx(2l-x)}{l^2}$  gesetzt, so folgt:

$$150) \quad \max \mathfrak{M}_b = \frac{v x(2l-x)(l-x)}{2(3l-x)}$$

Dieser Werth wird für  $x = 0,468 l$  ein Maximum, so dass in die Formel 86

$$151) \quad \mathfrak{M}_b = 0,075 v l^2$$

einzuführen ist, um das grösste  $f$  zu erhalten. Auch dann, wenn concentrirte Lasten vorliegen, ergibt sich das grösste Moment  $\mathfrak{M}_b$  sehr nahe bei  $x = 0,5 l$ ; man ermittle mit Hilfe der Formel 120 das Moment  $\min \mathfrak{M}_b$  und setze in die zur Berechnung von  $f$  dienende Formel

$$v = \frac{\min \mathfrak{M}_b}{0,075 l^2}$$

$R_n$  wird ein Maximum bei voller Belastung. Hierbei ist, da sich für jeden Querschnitt  $R_t = 0$  ergibt,  $R_n = R$  und tangential an die Bogenaxe. Die Horizontalcomponente von  $R$  ist  $H$ , mithin

$$R = \frac{H}{\cos \varphi}$$

und  $R_{\max} = \frac{H}{\cos \varphi_0} = H \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}$

$$152) \quad R_{\max} = \frac{(p+v) l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2}$$

In dieser Formel ist  $p$  abzuschätzen. Bezeichnet  $p_f$  das Gewicht der Fahrbahn\*) pro Längeneinheit der Stützweite,  $p_s$  „ „ von Winkeleisen und Stehblech,  $p_g$  „ „ der Gurtungen,  $b_a$  die Länge der Bogenaxe,  $\gamma$  das Gewicht pro Volumeneinheit des Materiales,

\*) Incl. Horizontal- und Vertical-Verband sowie des Gewichtes der zwischen Fahrbahn und Bogen eingeschalteten Verticalen.

so wird, unter der Annahme, dass der Bogen constanten Querschnitt hat:

$$p_s = \frac{2\gamma f b_a}{2l}$$

153)

$$p = p_f + p_s + \frac{2\gamma f b_a}{2l}$$

worin

$$p_s = \frac{\gamma f_s b_a}{2l}$$

Werden die für  $\mathfrak{M}_b$ ,  $R_{\max}$  und  $p$  gefundenen Werthe in No. 86 eingeführt, so folgt aus dieser

$$154) \quad f = \frac{0,075 v l^2 + e \left\{ p_f + p_s + v \right\} \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2} - 2 \frac{J_s k}{h_1}}{k h_1 - e \left(\frac{2\gamma b_a}{2l}\right) \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2}}$$

Das Gewicht  $p_f$  kann man auf Grund eines vorläufigen Projectes für die Fahrbahn und den Vertical- und Horizontal-Verband ziemlich genau angeben. Bei Eisenbahnbrücken kleinerer und mittlerer Stützweite führe man in die statische Berechnung etwa

$$p_f = 800^k \text{ pro meter Geleis ein.}$$

Die abgeleitete Formel ist auch für flache Kreisbögen brauchbar.

**Beispiel.** Eine zweigeleisige Eisenbahn soll mit Hilfe von Bögen mit 3 Gelenken über eine 14,8<sup>m</sup> (Fig. 83) weite Oeffnung geführt werden. Jedes Geleis wird durch 2 Bögen gestützt.  $l = 7,4^m$ ;  $h = 2,5^m$ . Die Bogenaxe ist ein Kreisbogen. Für  $x = 3,7^m (= 0,5 l)$  erhält man, wegen  $r = 12,20^m$

$$y = \sqrt{12,20^2 - 3,70^2} - 9,70 = 1,93^m$$

$$\xi = l \frac{y l - h x}{y l + h x} = 1,58^m ; \quad \frac{\xi}{l + \xi} = 0,176.$$

Wir wählen das in Fig. 19a dargestellte Lastensystem, und stellen Rad 1 über den Scheitel (Fig. 83); es ist dann

$$\frac{P_1}{\Sigma P} = \frac{13}{39 + 8} > 0,176$$

mithin nach No. 121 die Stellung die gefährlichste. Da weiter

$$\Sigma P b = 8 \cdot 1,4 + 39 \cdot 5,9 = 241,3 \text{ und } \Sigma P' b' = 0$$

ist, folgt nach No. 120

$$\mathfrak{M}_b = \frac{y}{h} \left\{ \frac{\xi}{l + \xi} \Sigma P b \right\} = \frac{1,93}{2,50} \left\{ 0,176 \cdot 241,3 \right\} = 32,79$$

und

$$v = \frac{32,79^{\text{tm}}}{0,075 l^2} = 8^{\text{tons}} \text{ pro meter Geleis,}$$

$$(\text{=} 4^{\text{tons}} \text{ pro meter Träger}).$$

Die Lage der Schienenoberkante gegen die Horizontale durch die Kämpfergelenke lasse ein Stehblech von circa 40<sup>cm</sup> wünschenswerth erscheinen. Es wird dann bei 8<sup>cm</sup> Schenkellänge, 1<sup>cm</sup> Eisenstärke der

Winkel und 2<sup>cm</sup> Nietdurchmesser der Querschnitt Figur 84 gewählt. Ihm entspricht

$$J_s = \frac{1}{12} \left\{ 13 \cdot 40^3 - 10 \cdot 38^3 - 2 \cdot 24^3 \right\} = 21300 \text{cm}^4$$

$$f_s \text{ (ohne Abzug)} = 40 + 4(8 + 7) 1,0 = 100 \square \text{cm.}$$

Weiter ist die Länge der Bogenaxe angenähert

$$b_a = 2l \left\{ 1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2} \right\} = 1,08(2l),$$

mithin, wenn für die folgende Rechnung das Decimeter und das Kilogramm zu Einheiten gewählt und  $\gamma = 7,6^*$  gesetzt wird:

$$p_s = \gamma f_s \frac{b_a}{2l} = 8,21^k \text{ pro Decimeter}$$

$$k = 6500^k \text{ pro } \square \text{cm} = 65000^k \text{ pro } \square \text{dm}$$

$$v = 400^k \text{ pro Decim.}; p_f = 40^k \text{ pro Decim.}$$

$$\frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left( \frac{2h}{l} \right)^2} = 13,2^m = 132^{\text{dm}}$$

$$J_s = 2,13; \frac{2J_s k}{h_1} = 69225$$

$$f = \frac{0,075 \cdot 400(74)^2 + e \left\{ 40 + 8,21 + 400 \left\{ 132 - 69225 \right. \right.}{65000 \cdot 4,0 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1,08 \cdot 132 \cdot e}$$

$$= \frac{95055 + 59160 e}{260000 - 2170 e}$$

Nun ist für den Querschnitt Figur 84

$$W_s = \frac{2J_s}{h_1} = 1065 \text{cm}^3$$

$$f_s \text{ (nach Abzug der Nietlöcher)} = 100 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 92 \square \text{cm}$$

$$e = \frac{W_s}{f_s} = 11,6 \text{cm} = 1,16^{\text{dm}}.$$

Hierfür wird in den für  $f$  gewonnenen Ausdruck  $e = 1,5$  gesetzt und  $f = \frac{183795}{256745} = 0,72 \square \text{dm}$  erhalten, wonach 3 Kopfplatten mit den Abmessungen  $28 \text{cm} \times 1,0 \text{cm}$ , deren jede einen Querschnitt  $(28 - 4) 1,0 = 26 \square \text{cm}$  hat, genügen. Dem so gefundenen Querschnitte Figur 85 entspricht

$$J = 21300 + \frac{1}{12} (46^3 - 40^3) 24 = 87972 \text{cm}^4$$

$$W = \frac{87972}{23} = 3825; \quad \frac{W}{F} = \frac{3825}{92 + 2 \cdot 7,2} = 16,2 \text{cm},$$

welcher letztere Werth so wenig von  $15,0 \text{cm}$  abweicht, dass die Neuberechnung von  $f$  überflüssig ist. In die statische Berechnung des Bogens wird man den Kernhalbmesser  $e = 0,16^m$  einführen. Weiter wird man

\*) Spezifisches Gewicht des Schmiedeeisens.

$$\begin{aligned}
 p &= p_f + p_s + 2\gamma f \frac{b_a}{2l} = 40 + 8,21 + 2 \cdot 7,6 \cdot 3 \cdot 28 \cdot 1,08 \\
 &= 48,21 + 13,79 = 62^k \text{ pro decim.} \\
 &= 0,62^t \text{ pro meter}
 \end{aligned}$$

annehmen.

**2) Gitterträger.** Hier hat die vorläufige Querschnittsermittlung nur den Zweck, die Abschätzung der in die statische Berechnung einzuführenden permanenten Last  $p$  zu ermöglichen. In No. 154 ist  $J_s = 0$  zu setzen und unter  $p_s$  das Gewicht des Gitterwerks pro Längeneinheit der Stützweite zu verstehen. Bei parabolischer Bogenaxe erzeugt die permanente Belastung keine Transversalkräfte und bei flachen Kreisbögen sind die  $(R_t)_p$  so klein, dass sie füglich vernachlässigt werden dürfen, so dass man in beiden Fällen im Stande ist, Anstrengungen und Querschnitts-abmessungen für die Gitterstäbe von vornherein zu ermitteln und hierauf das Gewicht  $p_s$  festzustellen. Nun wird man nach No. 154 den Gurtquerschnitt  $f$  abschätzen und

$$p = p_f + p_s + \frac{2f\gamma b_a}{2l}$$

berechnen.

## Abschnitt IV.

### Specielle Behandlung des Bogens mit 2 Gelenken.

#### § 14.

#### Die grössten Momente $M_o$ und $M_u$ .

**1) Auflagerdrücke; Kämpferdrucklinie.** (Fig. 86.) Die Componenten der durch eine concentrirte Last  $P$  erzeugten Kämpferreactionen sind (vergl. No. 29 und 50) für den Parabelbogen und den flachen Kreisbogen

$$A = \frac{Pb}{2l}; \quad B = \frac{Pa}{2l}; \quad H = \frac{3Pab}{8hl},$$

und ist hiernach die erste Curve  $H$  eine Parabel mit den Scheitelcoordinaten  $l$  und  $\frac{3Pl}{8h}$ . Der Schnittpunkt  $C$  der Kämpferdrücke  $K$  und  $K_1$  mit der Last  $P$  ist gegeben durch

$$\eta : A = a : H \quad \text{d. i.} \quad \eta = \frac{Pba}{2lH}$$

woraus:

$$\eta = \frac{4h}{3}.$$

Hiernach ist die Kämpferdrucklinie eine horizontale Gerade. Die Anwendung der auf Seite 33 abgeleiteten Formel

$$H = \frac{Pab}{2F_B},$$

in welcher  $F_B$  den Inhalt der von Bogenaxe und Linie  $AB$  eingeschlossenen Fläche bedeutet, führt analog zu

$$\eta = \frac{F_B}{l}$$

und folgt der für minder flache Kreisbögen brauchbare Satz:

Hat Rechteck  $AA'B'B$  den doppelten Inhalt der von der Bogenaxe und der  $AB$  begrenzten Fläche, so ist die Gerade  $A'B'$  die Kämpferdrucklinie.

(Interessant ist, dass Formel 52 für den Halbkreis zu demselben Ergebniss führt. Mit  $\varphi_0 = 90^\circ$  geht dieser Ausdruck in  $H = \frac{P \cos^2 \beta}{\pi}$  über,

und folgt  $\eta = \frac{\pi ab}{2l \cos^2 \beta}$  oder wegen (Fig. 87)  $a = r(1 - \sin \beta)$ ,  $b = r(1 + \sin \beta)$ ,  $l = r$ ,  $\eta = 0,5 \pi r$  also constant. Inhalt des Rechtecks  $AA'B'B$  ist  $\eta 2r = \pi r^2$  d. i. gleich dem doppelten Inhalte des Halbkreises.)

Wird die Belastung durch Zwischenträger auf den Bogen übertragen (Fig. 88), so besteht die erste Curve  $H$  aus einer Reihe gerader Linien (vergl. Seite 80) und die Kämpferdrucklinie aus einzelnen Curven; sie darf aber, da sie nur zur Ermittlung der Belastungsscheiden dient, ohne Bedenken durch die Gerade  $A'B'$  ersetzt werden.

Einer gleichförmigen Verkehrslast ( $v$  pro Längeneinheit), die von  $B$  aus die Strecke  $c$  bedeckt, entspricht (Fig. 89):

$$155) \quad H = \int_0^c \frac{3vdb}{8hl} b(2l-b) = \frac{vc^2}{8hl} (3l-c).$$

Für volle Belastung d. i.  $c = 2l$  erhält man

$$156) \quad H = \frac{vl^2}{2h} \cdot \text{(Chapman'sche Formel)}$$

**2) Belastungsscheiden.** Zieht man (Fig. 90) von  $A$  durch den Kernpunkt (resp. Momentenpunkt  $o$ ) eine Gerade, welche die Kämpferdrucklinie in  $E$  schneidet, so entspricht einer durch  $E$  gehenden Last  $P$  das Moment  $\mathfrak{M}_o = 0$ , weil am linken Fragment nur ein durch  $o$  gehender Kämpferdruck angreift (vergl. Seite 81). Analog folgt, dass die Verticale durch den Schnittpunkt  $E_1$  der  $Bo$  mit der  $A'B'$  eine Belastungsscheide ist. Die Strecken  $A'E_1$  und  $B'E$  sind die negativen Beitragsstrecken;  $E_1E$  ist positive Beitragsstrecke.

In derselben Weise findet man die Belastungsscheiden bezüglich  $\mathfrak{M}_u$  (Fig. 91). Für viele der Punkte  $o$  und  $u$  ergibt sich nur eine Belastungsscheide.

**3) Influenzlinien.** Die in § 10 sub 3 durchgeführten Untersuchungen sind auch für den Bogen mit 2 Kämpfergelenken ohne Scheitelgelenk brauchbar; man hat nur nöthig, die diesem Systeme entsprechende erste Curve  $H$  an Stelle der Linie  $ADB$  in den Figuren 54 bis 61 einzuführen und die Kämpferdrucklinie entsprechend zu ändern. Unter Voraussetzung direkter Belastung des Bogens und mit Vernachlässigung der auf Seite 83 hervorgehobenen Thatsache, dass es Lasten giebt, welche zwar links von  $o$ , aber auf dem rechten Bogenfragment liegen, erhält man die in Fig. 92 dargestellte Influenzfläche für  $\mathfrak{M}_o$ . Man zeichnet die  $A'B'$ , ferner die Parabel  $ADB$  mit dem Pfeil  $\frac{3}{8} \frac{l}{h} 1^{\text{tons}}$ , zieht  $AoE$ , hierauf  $EE'$  vertical, ferner  $BE'$  bis zum Schnittpunkt  $C$  mit der Verticalen durch  $o$  und schliesslich  $AC$ . Der Multiplicator der Influenzfläche ist  $y_o$ .

Soll die Uebertragung der Lasten durch Zwischenträger berücksichtigt werden, so ist die erste Curve  $H$  ein in die Parabel mit dem Pfeil  $\frac{3}{8} \frac{l}{h} 1^{\text{tons}}$  eingeschriebenes Polygon (Fig. 93). Anstatt die aus verschiedenen Curven bestehende Kämpferdrucklinie zu zeichnen, mache man vertical unter  $o$ ,  $\overline{CC'} = \frac{x_o x'_o}{2ly_o} 1^{\text{tons}} = z_o$  und ziehe  $AC$  und  $CB$ , um in der in der Figur schraffirten Fläche die Influenzfläche zu erhalten. Die Punkte  $C$ , welche den verschiedenen  $o$  entsprechen, liegen auf einer Curve, die wir kurz „Curve  $z_o$ “ nennen. Dieselbe lässt sich leicht construiren. Man ziehe die Verticale  $\mathfrak{S}\mathfrak{S}$  (Fig. 94) im Abstände  $1^{\text{tons}}$  von  $A$ , verbinde  $o$  mit  $A$ , mache  $AR$  senkrecht  $Ao$ , ziehe  $RG$  parallel  $AB$  bis zur Verticalen durch  $A$  und bringe  $BG$  mit der Verticalen durch  $o$  in  $C$  zum Schnitt. Es ist dann  $C$  ein Punkt der „Curve  $z_o$ “.

Analog construirt man „Curve  $z_u = \frac{x_u x'_u}{2ly_u} 1^{\text{t}}$ “ (Fig. 95), zieht  $uC$  vertical, verbindet  $C$  mit  $A$  und  $B$  und erhält die Influenzfläche für  $\mathfrak{M}_u$ . Der Multiplicator ist  $y_u$ .

**4) Analytische Berechnung der  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$  unter Annahme concentrirter Lasten.** Die Lasten sollen direkt auf den Bogen wirkend angenommen werden. Liegen dann die Momentenpunkte  $o$  und  $u$  in den die Zwischenträger stützenden Verticalen, so sind die für  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$  gewonnenen Resultate nur insofern fehlerhaft, als der Einfluss der Zwischenträger auf  $H$  unberücksichtigt geblieben ist. Es ist aber die Annahme direkter Belastung bei Ermittlung der Momente auf analytischem Wege nöthig, wenn man nicht anders sehr langwierige Rechnungen, deren Resultate schliesslich von den genäherten nur wenig differiren, gewärtigen will. Durch die Influenzlinien ist übrigens ein leicht zu handhabendes Mittel gegeben, den Werth der Näherungstheorie zu beurtheilen.

Bestimmung von  $\min \mathfrak{M}_o$ . Es soll nur die rechts von  $o$  gelegene negative Beitragsstrecke belastet, dafür aber  $\min \mathfrak{M}_o$  für alle links von dem Schnittpunkte  $o'$  (Fig. 96) der  $AB'$  mit der oberen Kernlinie gelegenen Punkte  $o$  berechnet werden. Trägt man dann die  $\min \mathfrak{M}_o$  von der  $AB$  aus unter den  $o$  als Ordinaten einer Curve auf und zeichnet deren Spiegelbild, so hat man zwischen den Punkten  $o'$  und  $o''$  die Ordinaten beider Curven zu addiren. Es stellen nämlich  $DD'$  und  $DD''$  beziehungsweise den Einfluss der Belastung der rechts resp. links von  $o$  gelegenen negativen Beitragsstrecke dar, und liefert  $DD''' = DD' + DD''$  das der gleichzeitigen Belastung beider Strecken entsprechende  $\mathfrak{M}_o$ . Das Lastensystem rücke von  $B$  aus bis in die Nähe von  $E$  vor. Ihm entspricht

$$\mathfrak{M}_o = Ax_o - Hy_o,$$

wo mit der Bezeichnungswise in den Figuren 96 und 22 (vergl. auch Seite 38)

$$A = \frac{\Sigma Pb}{2l}; \quad H = \frac{3}{8hl} \Sigma Pb(2l - b) = \frac{3\Sigma Pb}{4h} - \frac{3\Sigma Pb^2}{8hl},$$

weshalb 
$$\mathfrak{M}_o = \frac{1}{2l} \left\{ x_o - \frac{3l}{2h} y_o \right\} \Sigma Pb + \frac{3y_o}{8hl} \Sigma Pb^2.$$

Für die Entfernung der Belastungsscheide  $E$  von der Stütze  $B$  findet man leicht

$$157) \quad \xi = 2 \frac{3ly_o - 2hx_o}{3y_o},$$

so dass  $\frac{1}{2l} \left\{ x_o - \frac{3l}{2h} y_o \right\} = -\frac{3y_o \xi}{8lh}$  wird, und man

$$I) \quad -\mathfrak{M}_o = \frac{3y_o}{8hl} \left\{ \xi \Sigma Pb - \Sigma Pb^2 \right\}$$

erhält. Dieser Werth wird ein Maximum, sobald

$$\frac{d(-\mathfrak{M}_o)}{db} = \frac{3y_o}{8hl} \left\{ \xi \Sigma P - 2\Sigma Pb \right\} = 0$$

wird, d. h. für 
$$\frac{\Sigma Pb}{\Sigma P} = \frac{\xi}{2}.$$

Da nun

$$\frac{\Sigma Pb}{\Sigma P} = b_r$$

den Abstand der Resultirenden  $\Sigma P$  von der Stütze  $B$  bedeutet, so folgt der Satz:

Das Moment „ $\min \mathfrak{M}_o$ “ wird erhalten, sobald die rechts von  $o$  gelegene negative Beitragsstrecke durch die Resultirende aus den von  $B$  aus vorrückenden Lasten halbirt wird.

Wir setzen jetzt (vergl. Seite 38 und Fig. 22)

$$\sum_1^n Pb = b_n \mathfrak{P}_n + \mathfrak{C}_n$$

$$\sum_1^n Pb^2 = b_n^2 \mathfrak{P}_n + 2b_n \mathfrak{C}_n + \mathfrak{S}_n$$

und erhalten

$$\text{II) } \min \mathfrak{M}_o = - \frac{3y_o}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n b_n (\xi - b_n) + \mathfrak{S}_n (\xi - 2b_n) - \mathfrak{Z}_n \right\}.$$

Nun bedeutet  $\frac{\mathfrak{S}_n}{\mathfrak{P}_n} = c_r$  den Abstand der Resultirenden  $\Sigma P = \mathfrak{P}_n$  von der  $n^{\text{ten}}$  Last, mithin  $c_r + b_n$  den Abstand der  $\Sigma P$  von  $B$ . Dieser letztere soll aber  $= \frac{1}{2} \xi$  sein, wesshalb  $b_n = \frac{1}{2} \xi - c_r$  wird, und der Ausdruck für  $\mathfrak{M}_o$  übergeht in

$$\min \mathfrak{M}_o = - \frac{3y_o}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n \left( \frac{\xi^2}{4} - c_r^2 \right) + 2 \mathfrak{S}_n c_r - \mathfrak{Z}_n \right\}$$

oder, wenn  $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{P}_n c_r$  gesetzt wird, in

$$158) \quad \min \mathfrak{M}_o = - \frac{3y_o}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n \left[ \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 + c_r^2 \right] - \mathfrak{Z}_n \right\}.$$

Mit Hilfe dieser Formel und der auf Seite 40 bis 43 gegebenen Tabelle, die ausser  $\mathfrak{P}_n$  und  $\mathfrak{Z}_n$  auch  $c_r$  enthält, kann man für Eisenbahnbrücken die Momente  $\min \mathfrak{M}_o$  berechnen, ohne die Zugstellungen überhaupt darzustellen. Man ermittle  $\frac{1}{2} \xi$  mit Hilfe von No. 157, suche in der Tabelle den nächst kleineren Werth  $c_r$  auf und setze die zu diesem  $c_r$  gehörigen  $\mathfrak{P}_n$  und  $\mathfrak{Z}_n$  in Formel 158 ein.

Die Berechnung der  $\mathfrak{M}_u$  ist ganz analog.

Zahlenbeispiel. Die Mittelpunkte der Verticalen des Gitterträgers (Fig. 97) liegen auf einer Parabel.  $l = 40\text{m}$ ,  $h = 8\text{m}$ .  $x = 20\text{m}$  entspricht  $y = \frac{hx(2l-x)}{l^2} = 6\text{m}$  und bei 4<sup>m</sup> Höhe der Verticalen  $y_o = 6,0 + 2,0 = 8,0\text{m}$ .

Soll  $\min \mathfrak{M}_o$  bestimmt werden, so berechnet man  $\frac{\xi}{2} = \frac{3 \cdot 40 \cdot 8 - 2 \cdot 8 \cdot 20}{3 \cdot 8}$

$= 26,67\text{m}$ , findet hierauf unter Annahme der Zusanordnung Figur 19b\*) aus Tabelle 2 (Seite 42) das zugehörige  $c_r = 24,86$  und ersieht hieraus, dass das 22<sup>te</sup> Rad im Abstände  $26,67 - 24,86 = 1,81\text{m}$  von  $B$  liegen muss. Weiter erhält man laut Tabelle für diese Zugstellung

$$\mathfrak{P}_n = 225; \quad \mathfrak{Z}_n = 175182,75$$

$$\min \mathfrak{M}_o = - \frac{3 \cdot 8}{8 \cdot 8 \cdot 40} \left\{ 225 [26,67^2 + 24,86^2] - 175182,75 \right\} = -1161,7\text{tm}.$$

Bei Annahme der Zugstellung Fig. 19a erhält man aus Tabelle 1, Seite 40,  $c_r = 25,26$ ,  $\mathfrak{P}_n = 225$ ,  $\mathfrak{Z}_n = 182472,75$  und  $\min \mathfrak{M}_o = -1136,6\text{tm}$ .

Bestimmung von  $\max \mathfrak{M}_o$ . Fig. 98. Nach Aufsuchen der beiden Belastungsscheiden  $E$  und  $E_1$  wird das Lastensystem so aufgestellt, dass die schwersten Lasten in der Nähe des Punktes  $o$  liegen und, wenn möglich, die negativen Beitragsstrecken unbelastet bleiben.  $\Sigma P$  bezieht sich auf alle Lasten, dagegen  $\Sigma P'$  nur auf die Lasten rechts von  $o$ .

\*) Es wird angenommen, dass 2 Geleise durch zwei Bögen gestützt werden.

Sind  $a$  und  $a'$  die Abstände der  $P$  und  $P'$  von  $A$  resp.  $o$ , so folgt:

$$\mathfrak{M}_o = Bx_o' - Hy_o - \Sigma P' a'$$

und da, analog wie vorhin (vergl. das Zwischenresultat I):

$$Bx_o' - Hy_o = -\frac{3y_o}{8hl} \left\{ \xi' \Sigma Pa - \Sigma Pa^2 \right\}$$

ist, worin (vergl. Fig. 98 und Formel 157)

$$159) \quad \xi' = 2 \frac{3ly_o - 2hx_o'}{3y_o},$$

$$\mathfrak{M}_o = \frac{3y_o}{8hl} \left\{ \Sigma Pa^2 - \xi' \Sigma Pa \right\} - \Sigma P' a'.$$

Verschiebt man den Zug um  $da$  nach rechts und setzt zur Abkürzung

$$160) \quad \frac{8hl}{3y_o} = s$$

so wächst  $\mathfrak{M}_o$  um

$$da \left\{ \frac{1}{s} [2\Sigma Pa - \xi' \Sigma P] - \Sigma P' \right\}.$$

Dieser Werth muss — soll die vorhin angenommene Stellung die gefährlichste sein — negativ werden, d. h. es muss sich

$$161) \quad \frac{\Sigma P}{\Sigma P'} < \frac{s}{2 \frac{\Sigma Pa}{\Sigma P} - \xi'}$$

ergeben. Ebenso folgt, dass in Folge einer unendlich kleinen Verschiebung nach links

$$162) \quad \frac{\Sigma P}{\Sigma P'} > \frac{s}{2 \frac{\Sigma Pa}{\Sigma P} - \xi'}$$

sein muss. Den Zug wird man so aufstellen, dass die schwersten Lasten in der Nähe von  $o$  und eine derselben über  $o$  steht, dann wird man ihn unendlich wenig nach rechts und nach links verschieben, damit die in  $o$  angreifende  $P$ , die wir in der Folge durch den Index  $m$  kennzeichnen, einmal zur  $\Sigma P'$  zählt, das anderemal nicht. Im ersten Falle muss Ungleichung 161, im anderen Ungleichung 162 erfüllt werden. Beachtet man, dass

$$\frac{\Sigma Pa}{\Sigma P} = a_n + c_r$$

ist, so kann man die Kriterien auch schreiben:

$$163) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Verschiebung nach rechts: } \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_m} < \frac{s}{2a_n - \xi' + 2c_r} \\ \text{Verschiebung nach links: } \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_{m-1}} > \frac{s}{2a_n - \xi' + 2c_r} \end{array} \right.$$

weiter kann man den Ausdruck für  $\mathfrak{M}_o$  umformen in (vergl. No. II auf Seite 106)

$$164) \quad \max \mathfrak{M}_o = \frac{1}{s} \left\{ \mathfrak{S}_n + \mathfrak{P}_n a_n (a_n - \xi') + \mathfrak{S}_n (2a_n - \xi') \right\} - \mathfrak{S}_m.$$

Schliesslich werde noch hervorgehoben, dass bei negativem  $\xi'$  die Lastscheide  $E_1$ , als ausserhalb der Stützweite gelegen, bedeutungslos ist.

Zahlenbeispiel. Es sei wieder der vorhin behandelte Gitterträger (Fig. 99) gewählt und  $\max \mathfrak{M}_o$  für  $x = 24^m$  bestimmt.  $y = \frac{hxx'}{l^2} = \frac{8 \cdot 24 \cdot 56}{40^2} = 6,72^m$ ;  $y_o = 6,72 + 2,0 = 8,72^m$  mithin nach No. 160 resp. 159

$$s = \frac{8 \cdot 8 \cdot 40}{3 \cdot 8,72} = 97,86^m ; \quad \xi' = \frac{3 \cdot 40 \cdot 8,72 - 2 \cdot 8 \cdot 56}{3 \cdot 8,72} \cdot 2 = 11,50^m .$$

Wird die in Fig. 99 gezeichnete Laststellung gewählt, so ist  $a_n = 10,5^m$ ;  $n = 12$ ;  $c_r = 10,50^m$  (laut Tabelle 2 Seite 42) ferner

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_{12} = 126 ; \quad \mathfrak{P}_m = \mathfrak{P}_5 = 50 ; \quad \mathfrak{P}_{m-1} = \mathfrak{P}_4 = 37 .$$

Das Einsetzen dieser Werthe in die Ungleichungen 163 liefert:

$$\frac{126}{50} < \frac{97,86}{2 \cdot 10,5 - 11,50 + 2 \cdot 10,5} = 3,21$$

$$\frac{126}{37} > 3,21$$

woraus folgt, dass die angegebene Zugstellung die gefährlichste ist. Da nun

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_{12} = 18670,5 ; \quad \mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}_{12} = 1323 ; \quad \mathfrak{C}_m = \mathfrak{C}_5 = 163,5$$

wird, so erhält man nach No. 164

$$\max \mathfrak{M}_o = \frac{1}{97,86} \left\{ + 18670,50 + 126 \cdot 10,5 (10,5 - 11,50) + 1323 (2 \cdot 10,5 - 11,50) \right\} - 163,5 = 169,2^m .$$

**5) Momente in Folge gleichförmiger mobiler Belastung und Constructionslast.** Um  $\min \mathfrak{M}_o$  zunächst ohne Rücksichtnahme auf die etwa links vom Querschnitte gelegene Belastungsscheide zu ermitteln, wird die Strecke  $\xi$  belastet und Formel

$$- \mathfrak{M}_o = \frac{3}{8} \frac{y_o}{hl} \left\{ \xi \Sigma P b - \Sigma P b^2 \right\}$$

angewendet. Es wird in dieselbe (vergl. Fig. 96)

$$\Sigma P b = \int_0^{\xi} v \cdot db \cdot b = \frac{\xi^2}{2} v ; \quad \Sigma P b^2 = \int_0^{\xi} v \cdot db \cdot b^2 = \frac{\xi^3}{3} v$$

eingeführt, so dass:

$$165) \quad (\min \mathfrak{M}_o)_v = - \frac{v y_o \xi^3}{16 hl} = (-cv \text{ gesetzt}) .$$

Dieser Werth wird — wie auf Seite 105 auseinandergesetzt — für die zwischen  $A$  und  $o'$  (Fig. 96) gelegenen Kernpunkte  $o$  berechnet und als Ordinate einer Curve dargestellt. Nach Zeichnen des Spiegelbildes dieser Curve werden zwischen den Punkten  $o'$  und  $o''$  die Ordinaten beider Curven addirt.

Für volle Belastung ist nach No. 156

$$A = vl ; \quad H = \frac{vl^2}{2h}$$

mithin erhält man

$$166) \quad \text{total } (\mathfrak{M}_o)_v = vlx_o - \frac{vx_o^2}{2} - \frac{vl^2}{2h} y_o = c_o v$$

und hierauf (vergl. Seite 94)

$$\max (\mathfrak{M}_o)_v = (c_o + c)v.$$

Das Moment in Folge der permanenten Last ist

$$167) \quad (\mathfrak{M}_o)_p = c_o p$$

und erhält man daher nach Addiren der Momente  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_p$  die Gesamtmomente

$$168) \quad \begin{cases} \min \mathfrak{M}_o = -cv + c_o p \\ \max \mathfrak{M}_o = +cv + c_o q \end{cases}$$

worin  $q = v + p$ .

**6) Einfluss der Temperaturänderungen.** Der nach Formel 68 zu berechnende Horizontalschub  $H_t$  erzeugt das Moment:

$$169) \quad (\mathfrak{M}_o)_t = \pm H_t y_o.$$

Dabei entspricht einer Temperaturerhöhung ein negatives, einer Temperaturerniedrigung ein positives Moment.

## § 15.

### Die grössten Transversalkräfte $R_t$ .

**1) Belastungsscheiden und Influenzlinien.** Es sollen — wie beim Bogen mit 3 Gelenken (Seite 89) — die Zwischenträger berücksichtigt werden.  $F_1$  und  $F_2$  sind (Fig. 100) die Schnittpunkte der die Zwischenträger stützenden Verticalen mit der Bogenaxe;  $\varphi$  bedeutet den Neigungswinkel der  $F_1 F_2$ . Macht man  $AG = P \cotg \varphi$  (wobei  $P = 1^t$  anzunehmen ist) und verbindet  $G$  mit  $B$  durch eine Gerade, so schneidet diese die erste Curve  $H$  in der Belastungsscheide  $E'$ . Nachdem man noch  $AF_1'$  parallel  $BG$  und die Gerade  $F_1' F_2'$  gezogen hat, erhält man in der schraffirten Fläche die Influenzfläche für die Kraft  $R_t$  des Feldes  $F_1 F_2$ . Der Multiplicator ist  $\sin \varphi$ . Der mittlere Theil der Fläche ist positiv.

Wird bei Bestimmung von  $H$  die Wirkung der Zwischenträger vernachlässigt, d. h. die erste Curve  $H$  als Parabel und die Kämpferdrucklinie als horizontale Gerade eingeführt, so erhält man die Belastungsscheide  $E$  als Schnittpunkt der von  $A$  zu der  $F_1 F_2$  gezogenen Parallelen mit der Kämpferdrucklinie (Fig. 101).  $E$  wird bedeutungslos, sobald es ausserhalb der Stützweite  $AB$  liegt.

**2) Analytische Bestimmung von  $R_t$  unter Annahme concentrirter Lasten.** Es soll bei Berechnung von  $H$  auf die Zwischenträger keine Rücksicht genommen werden.

Fall I. Der Schnittpunkt  $E$  der zu  $F_1 F_2$  gezogenen Parallelen  $AE$  mit der Kämpferdrucklinie liegt links von  $B$ . Sein Abstand  $\xi$  von  $B$  bestimmt sich aus (Fig. 101)

$$170) \quad \xi = 2l - \frac{4}{3} h \cotg \varphi.$$

Um  $\min R_t$  zu ermitteln, wird das Lastensystem von  $B$  aus bis in die Nähe von  $E$  vorgeschoben und

$$R_t = A \cos \varphi - H \sin \varphi = \sin \varphi \left\{ A \cotg \varphi - H \right\}$$

erhalten, woraus mit

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Sigma P b}{2l}; \quad H = \frac{3}{4h} \Sigma P b - \frac{3}{8hl} \Sigma P b^2 \\ R_t &= \frac{3}{8hl} \sin \varphi \left\{ \left( \frac{4h}{3} \cotg \varphi - 2l \right) \Sigma P b + \Sigma P b^2 \right\} \\ R_t &= - \frac{3 \sin \varphi}{8hl} \left\{ \xi \Sigma P b - \Sigma P b^2 \right\} \end{aligned}$$

sich ergibt. Hierfür kann man (vergl. Berechnung von  $\min \mathfrak{M}$ ) schreiben:

$$171) \quad \min R_t = - \frac{3 \sin \varphi}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n \left[ \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 + c_n^2 \right] - \mathfrak{S}_n \right\}$$

und nun mit Hilfe der Tabellen Seite 40 bis 43 schnell  $\min R_t$  berechnen. Eine Vergrößerung erfährt dieser Werth durch einen Zug, welcher von  $A$  aus bis zum Querträger  $F_1$  vorrückt. Es folgt dann mit der Bezeichnungsweise in Figur 101

$$\begin{aligned} \min R_t &= - B \cos \varphi - H \sin \varphi = - \sin \varphi \left\{ B \cotg \varphi + H \right\} \\ A &= \frac{\Sigma P a}{2l}; \quad H = \frac{3}{4h} \Sigma P a - \frac{3}{8hl} \Sigma P a^2 \\ \min R_t &= - \frac{3 \sin \varphi}{8lh} \left\{ \left( \frac{4h}{3} \cotg \varphi + 2l \right) \Sigma P a - \Sigma P a^2 \right\} \end{aligned}$$

oder wenn

$$172) \quad 2l + \frac{4h}{3} \cotg \varphi = \xi'$$

gesetzt wird (vergl. II auf Seite 106)

$$173) \quad \min R_t = - \frac{3 \sin \varphi}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n a_n (\xi' - a_n) + \mathfrak{S}_n (\xi' - 2a_n) - \mathfrak{S}_n \right\}.$$

Wenn einzelne Lasten in dem Felde  $F_1 F_2$  liegen würden (Fig. 101a), so hätte man

$$\min R_t = - \left( B - \frac{\Sigma P' a'}{\lambda_m} \right) \cos \varphi - H \sin \varphi,$$

hätte also zu dem in Formel 173 gegebenen Ausdrucke  $\frac{\Sigma P' a'}{\lambda_m} \cos \varphi$  zu addiren. Als Kriterium der gefährlichsten Laststellung findet man leicht (vergl. Berechnung von  $\max \mathfrak{M}$ ), dass in Folge

$$174) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Verschiebung nach rechts} \\ \text{— — — links} \end{array} \right\} \begin{cases} \Sigma P < \frac{8hl}{3\lambda_m} \cotg \varphi \\ \Sigma P' > \frac{\Sigma Pa}{\xi' - 2} \end{cases}$$

sein muss, worin  $\frac{\Sigma Pa}{\Sigma P} = c_r + a_n$  ist.

Um  $\max R_t$  zu bestimmen, wird rechts von  $F_2$  ein Zug aufgestellt — in der Regel mit der ersten Last über  $F_2$  — und dabei auf die negative Beitragsstrecke  $BF_2$  wenn möglich keine Last gebracht. Man erhält für die Stellung Fig. 102

$$175) \quad \max R_t = \frac{3 \sin \varphi}{8hl} \left\{ \mathfrak{S}_n - \mathfrak{S}_n(\xi - 2b_n) - \mathfrak{P}_n b_n (\xi - b_n) \right\}.$$

Allgemeiner ergibt sich, sobald Lasten in das Feld  $F_1 F_2$  treten

$$176) \quad \max R_t = \frac{3 \sin \varphi}{8lh} \left\{ \mathfrak{S}_n - \mathfrak{S}_n(\xi - 2b_n) - \mathfrak{P}_n b_n (\xi - b_n) \right\} - \frac{\Sigma P' b'}{\lambda_m} \cos \varphi$$

und als Kriterium für die gefährlichste Stellung: es muss liefern:

$$177) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Verschiebung nach links} \\ \text{— — — rechts} \end{array} \right\} \begin{cases} \Sigma P < \frac{8hl}{3\lambda_m} \cotg \varphi \\ \Sigma P' > \frac{2c_r + 2b_n - \xi'}{2} \end{cases}$$

Hervorzuheben ist, dass man ohne Bedenken die Laststellungen Fig. 101 und 102 voraussetzen, also die Formeln 173 und 175 anwenden darf; denn bei Blechbögen sind die  $R_t$  von untergeordneter Bedeutung, und bei den Gitterträgern ist wegen der unsicheren Bestimmung der Stabspannungen eine strenge Ermittlung der angreifenden Kräfte überflüssig.

Fall II. Es liegt  $E$  ausserhalb der Stützweite, d. h. es wird  $\xi$  (No. 170) negativ. Man berechne  $\min R_t$  nach Formel 173 und  $\max R_t$  nach No. 175.

Beispiel. Für das 6<sup>te</sup> Feld des in Figur 103 dargestellten Bogenträgers soll  $\max R_t$  und  $\min R_t$  berechnet werden. (Vergl. die Beispiele auf Seite 106 und 108.) Es ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{8,72 - 8,0}{4,0} = 0,18; \quad \sin \varphi = 0,177; \quad \cotg \varphi = 5,556$$

$$\xi = 80 - \frac{4}{3} \cdot 8 \cdot 5,556 = 20,74^m \text{ (nach No. 170).}$$

Länge der Strecke  $F_2 E$  ist  $56 - 20,74 = 35,26^m$ ; um  $\max R_t$  zu erzeugen, stellen wir auf dieselbe einen Zug vorwärtsgehender Maschinen und entnehmen aus Tabelle I (Seite 40)  $c_1 = 33^m$  als am nächsten an  $35,26^m$  liegend. Danach kommen 18 Lasten auf den Träger; Abstand der letzten von  $B$  ist  $b_n = 56 - 33 = 23^m$ , weiter ist  $c_r = 17,21^m$ ,  $\Sigma P = 189$ . Da nun

$$\frac{8lh}{3\lambda_m} \cotg \varphi = \frac{8 \cdot 40 \cdot 8}{3 \cdot 4} \cdot 5,556 = 1185$$

so lautet, da in Folge Verschiebung des Zuges nach links ein Rad in das Feld  $F_1 F_2$  tritt (No. 177),

$$\frac{\Sigma P}{\Sigma P'} = \frac{189}{13} < \frac{1185}{2 \cdot 17,21 + 2 \cdot 23 - 20,74}$$

Es ist also die gewählte Stellung die gefährlichste. Dem Index  $n=18$  entspricht laut Tabelle I (Seite 40)

$$\mathfrak{S}_n = 76038,75; \mathfrak{C}_n = 3253,5; \mathfrak{P}_n = 189,$$

mithin nach No. 175

$$\max R_t = \frac{3 \cdot 0,177}{8 \cdot 40 \cdot 8} \left\{ 76038,75 - 3253,5 (20,74 - 2 \cdot 23) - 189 \cdot 23 (20,74 - 23) \right\} = 36,27^t.$$

Um  $\min R_t$  zu erzeugen, wird der Zug von  $A$  bis  $F_1$  vorgerückt.  $A F_1 = 20^m$ ; dazu gehört (nach Tabelle I)  $c_1 = 19,5^m$ , so dass 11 Lasten auf die Brücke kommen.  $a_n = 20 - 19,5^m = 0,5^m$ ,  $c_t = 10,74$ ,  $\Sigma P = 118$ ,  $\xi' = 80 + \frac{4}{3} \cdot 8 \cdot 5,556 = 139,26$  (nach No. 172).

Das Kriterium No. 174 wird erfüllt, denn in Folge Verschiebung des Zuges nach rechts tritt ein Rad in Feld  $F_1 F_2$  und erhält man dann

$$\frac{\Sigma P}{\Sigma P'} = \frac{118}{13} < \frac{1185}{139,26 - 2 \cdot 10,74 - 2 \cdot 0,5}$$

Nun wird nach No. 173

$$\min R_t = - \frac{3 \cdot 0,177}{8 \cdot 40 \cdot 8} \left\{ 118 \cdot 0,5 (139,26 - 0,5) + 1236 (139,26 - 2 \cdot 0,5) - 17667,00 \right\} = - 34,74^t.$$

Die Belastung der Strecke  $EB$  erzeugt ebenfalls ein negatives  $R_t$ . Dasselbe wird nach No. 171 berechnet. Unter Annahme der Zuganordnung Fig. 19 *b* gehört nach Tabelle 2 zu  $\frac{1}{2} \xi = 10,37^m$ ,  $c_t = 9,71^m$ . Es liegen hiernach 11 Lasten auf dem Träger, die letzte hat von  $B$  den Abstand  $10,37 - 9,71 = 0,66^m$ . Nach No. 171 wird, da für  $n = 11$  aus Tabelle 2  $\mathfrak{P}_n = 118$ ;  $\mathfrak{S}_n = 14967,0$

folgt:

$$\min R_t = - \frac{3 \cdot 0,177}{8 \cdot 40 \cdot 8} \left\{ 118 (10,37^2 + 9,71^2) - 14967,00 \right\} = - 1,90^t.$$

Es wird hiernach  $\min R_t = - (34,74 + 1,90) = - 36,64^t$ , wenn man nicht anders die Belastung durch 2 getrennte Züge als unwahrscheinlich ausschliessen will. (Die Rechnung überzeugt, dass, wie bereits auf Seite 74 hervorgehoben wurde, annähernd  $\min R_t = - \max R_t$  ist. Es empfiehlt sich, namentlich bei grossen Brücken, nur den einen der beiden Werthe zu berechnen. Am schnellsten findet man  $\min R_t$ , da hier die Laststellungen von vornherein gegeben sind.)

**3) Einfluss der gleichförmigen Verkehrslast und des Eigengewichtes auf die  $R_t$ .** Um  $\max R_t$  zu erhalten, wird die Strecke  $F_2 E$  (Fig. 104)

belastet und ausserdem in  $F_2$  die concentrirte Last  $\frac{v\lambda}{2}$  aufgebracht. Das Feld  $F_1F_2$  sei das  $m^{\text{te}}$ , und seien die Abscissen von  $F_2$  mit  $x_m$  und  $x'_m$  bezeichnet; es ist dann

$$\Sigma P b = \int_{\xi}^{x'_m} v db \cdot b + \frac{v\lambda}{2} \cdot x'_m = \frac{v}{2} (x'^2_m - \xi^2) + \frac{v\lambda x'_m}{2}$$

$$\Sigma P b^2 = \int_{\xi}^{x'_m} v db \cdot b^2 + \frac{v\lambda}{2} \cdot x'^2_m = \frac{v}{3} (x'^3_m - \xi^3) + \frac{v\lambda x'^2_m}{2}$$

Die Einsetzung dieser Werthe in die Formel

$$R_t = + \frac{3 \sin \varphi}{8hl} \left\{ \Sigma P b^2 - \xi \Sigma P b \right\}$$

liefert

$$178) \quad (\max R_t)_v = \frac{\sin \varphi}{16hl} \left\{ 2x'^3_m + \xi^3 - 3\xi x'^2_m + 3\lambda x'_m (x'_m - \xi) \right\} v.$$

Ergiebt sich  $\xi$  aus Formel 170 negativ, so ist in No. 178,  $\xi = 0$  einzuführen.

Beim parabolischen Bogen und sehr angenähert beim flachen Kreisbogen ist (vergl. Seite 94)

$$\begin{aligned} (\text{total } R_t)_v &= 0, & \text{mithin} \\ (\min R_t)_v &= -(\max R_t)_v. \end{aligned}$$

Weiter folgt der Einfluss der permanenten Last

$$(R_t)_p = 0.$$

4) **Aenderung der Temperatur** erzeugt:

$$179) \quad R_t = \pm \frac{H_t \sin \varphi}{l}$$

Das Zeichen + gilt für Temperaturerniedrigung.

## § 16.

### Deformationen.

1) **Einfluss einer concentrirten Last.** Es soll eine parabolische Bogenaxe, also

$$y = \frac{hx(2l-x)}{l^2}$$

vorausgesetzt werden. Zunächst folgt aus den Elasticitätsgleichungen (vergl. No. 40)

$$\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_0 + \varepsilon_0 \left[ \varphi \right]_0^a + \varepsilon'_0 \left[ \varphi \right]_0^{2l} + \frac{1}{EJ} \int_0^{2l} \mathfrak{M} dx$$

$$0 = -\varepsilon_0 [S_2]_0^a - \varepsilon_0' [S_2]_a^{2l} - \frac{1}{EJ'} \int_0^{2l} x \mathfrak{M} dx + 2l \Delta \varphi_1,$$

$$2l \Delta \varphi_0 = \varepsilon_0 [S_2 - 2l \varphi]_0^a + \varepsilon_0' [S_2 - 2l \varphi]_a^{2l} - \frac{1}{EJ'} \int_0^{2l} (2l - x) \mathfrak{M} dx.$$

Unter Beachtung des Näherungswerthes  $\varphi = \frac{2h}{l^2} (l - x)$ , d. i.  $(\varphi)_0^a = -\frac{2h}{l^2} a$  und  $2l(\varphi)_0^a = 2(S_2)_0^a$  findet man

$$2l \Delta \varphi_0 = -\varepsilon_0 [S_2]_0^a - \varepsilon_0' [S_2]_a^{2l} \frac{1}{EJ'} - \int_0^{2l} x' \mathfrak{M} dx,$$

worin  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_0'$  die in No. 38 angegebenen Werthe ( $\mathfrak{M}_A = 0$ ) sind, und wegen  $A = \frac{Pb}{2l}$ :

$$\int_0^{2l} x' \mathfrak{M} dx' = A \int_0^{2l} x' x dx - H \int_0^{2l} x' y dx - P \int_a^{2l} (x - a) x' dx = \frac{Pab(2l+b)}{6} - \frac{4Hh^2}{3}$$

wird. Nach Einsetzen der auf Seite 22 berechneten Werthe  $S_2$  folgt

$$180) \Delta \varphi_0 = -\frac{1}{2lEJ'} \left\{ \frac{4J'h}{F(l^2+h^2)} \left[ \frac{Pabh}{l} + H(l^2-h^2) \right] + \frac{Pab(2l+b)}{6} - \frac{4Hh^2}{3} \right\}.$$

$$181) \Delta \varphi_1 = +\frac{1}{2lEJ'} \left\{ \frac{4J'h}{F(l^2+h^2)} \left[ \frac{Pabh}{l} + H(l^2-h^2) \right] + \frac{Pab(2l+a)}{6} - \frac{4Hh^2}{3} \right\}^*)$$

Für eine Last  $P$  rechts vom Querschnitt  $(xy)$  wird

$$\Delta y = x \Delta \varphi - \varepsilon_0 (S_2)_0^x - \int_0^x \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'}$$

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_0 + \varepsilon_0 (\varphi)_0^x + \int_0^x \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'}$$

$$\Delta y = x \Delta \varphi_0 + x \int_0^x \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'} - \int_0^x \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'} + \varepsilon_0 \frac{2hx(l-x)}{l^2}$$

$$\int_0^x \mathfrak{M} dx = A \int_0^x x dx - H \int_0^x y dx = \frac{Ax^2}{2} - H \frac{h}{l} \left( x^2 - \frac{x^3}{3l} \right)$$

\*) Aus No. 180 und 181 folgt:

$$EJ'(\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_0) = \frac{1}{2l} \left\{ \frac{8J'h}{F(l^2+h^2)} \left[ \frac{Pabh}{l} + H(l^2-h^2) \right] + Pabl - \frac{8Hh^2}{3} \right\}.$$

Wenn man rechts das Glied mit  $J'$ , als von geringem Einfluss, streicht (d. h.  $\varepsilon_0 = 0$  setzt) und  $H = \frac{3Pab}{8lh}$  einführt, so folgt  $\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_0 = 0$ . Auf Seite 33 wurde der Werth  $H = \frac{3Pab}{8lh}$  ebenfalls aus der Bedingung  $\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_0 = 0$  gefolgert

$$\int_0^x x \mathfrak{M} dx = A \int_0^x x^2 dx - H \int_0^x xy dx = \frac{Ax^3}{3} - \frac{Hh}{l} \left\{ \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4l} \right\}$$

$$Ay = x \Delta \varphi_0 + \frac{x^3}{12 EJ'} \left\{ 2A - H \frac{h}{l} \left( 4 - \frac{x}{l} \right) \right\} + \varepsilon_0 \frac{2hx(l-x)}{l^2}$$

worin  $A = \frac{Pb}{2l}$ ;  $H = \frac{3Pab}{8hl}$ ;  $\varepsilon_0 = -\frac{2h}{EF(l^2+h^2)} \left[ \frac{Pb}{2} + \frac{H}{2h}(l^2-h^2) \right]$ .

Für  $x=l$  erhält man die Verticalverschiebung des Scheitels in Folge einer rechts von demselben gelegenen Last

$$182) \quad \Delta h = -\frac{Pab h}{4EF(l^2+h^2)} \left[ 5 \frac{h}{l} + 3 \frac{l}{h} \right] + \frac{Pb}{96EJ'} [6l^2 + 8b^2 - 15bl]$$

und wenn man

$$\frac{1}{l^2+h^2} \left( 5 \frac{h}{l} + 3 \frac{l}{h} \right) = \frac{3}{lh} \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2} - \frac{2}{3} \frac{h^4}{l^4} + \dots \right]$$

oder angenähert  $= \frac{3}{lh}$  setzt,

$$183) \quad \Delta h = -\frac{3Pab}{4EF l} + \frac{Pb}{96EJ'} [6l^2 + 8b^2 - 15bl].$$

Der Abstand  $b_1$ , in welchem  $P$  von  $B$  angreifen muss, um  $\Delta h = 0$  zu erzeugen, ist

$$184) \quad b_1 = \frac{15}{16} l - \frac{u^2}{2l} - \sqrt{\frac{33}{16^2} l^2 + \frac{17}{16} u^2 + \frac{1}{4} \frac{u^4}{l^2}}$$

worin  $u = 3 \sqrt{\frac{J'}{F}}$ . Für  $b < b_1$  wird  $\Delta h$  positiv, für  $b > b_1$  wird es negativ, also eine Senkung. Numerische Rechnungen überzeugen, dass  $b_1$  sehr wenig von  $u$  abhängt und  $u=0$ , also  $b_1 = 0,57 l$  gesetzt werden darf. Für dieses Verfahren spricht noch der Umstand, dass in der Nähe der Belastungsscheiden der Einfluss von  $P$  ein nur sehr geringer ist.

Die Horizontalverschiebung  $\Delta x$  in Folge einer rechts von  $(xy)$  gelegenen Last ist (vergl. No. 44)

$$\Delta x = -y \Delta \varphi + \varepsilon_0 (S_1)_0^x + \int_0^x y \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'}$$

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_0 + \varepsilon_0 (\varphi)_0^x + \int_0^x \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'}$$

$$\Delta x = -y \Delta \varphi_0 + \varepsilon_0 \left\{ (S_1)_0^x - y (\varphi)_0^x \right\} - y \int_0^x \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'} + \int_0^x y \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'}$$

Speziell für  $x=l$  ergibt sich die Horizontalverschiebung des Scheitels

$$\Delta l = -h \Delta \varphi_0 + \varepsilon_0 l - h \int_0^l \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'} + \int_0^l y \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'}$$

Wegen  $\mathfrak{M} = Ax - Hy$  folgt

$$\int_0^l \mathfrak{M} dx = \frac{Al^2}{2} - \frac{2Hhl}{3}$$

$$\int_0^l \mathfrak{M}y dx = \frac{5Ah^2l^2}{12} - \frac{8H}{15} h^2l$$

$$185) \quad \Delta l = -\frac{2hl}{EF(l^2 + h^2)} \left[ \frac{Pb}{2} + \frac{H}{2h}(l^2 - h^2) \right] + \frac{2h^2}{EF l(l^2 + h^2)} \left[ \frac{Pab}{l} h \right. \\ \left. + H(l^2 - h^2) \right] + \frac{Pabh(2l + b)}{12lEJ'} - \frac{Plhb}{24EJ'} - \frac{8}{15} \cdot \frac{Hh^2l}{EJ'}$$

Die Einführung von  $H$  aus No. 50 liefert für  $\Delta l$  einen Ausdruck, der für  $b = l$  nicht Null wird, und hat dieses Resultat darin seinen Grund, dass No. 50 nicht aus der zweiten der Elasticitätsgleichungen No. 40 erhalten worden ist. Setzt man  $H$  aus No. 46 in No. 185, so wird sich auch für jede, in Bezug auf den Scheitel symmetrische, Belastung  $\Delta l = 0$  ergeben. Doch verfährt man genügend genau, wenn man in No. 185 die Glieder mit  $F$  fortlässt und  $H$  aus No. 48 berechnet. Es wird dann:

$$186) \quad \Delta l = \frac{Pbh(2b^2l - b^3 - l^3)}{24l^2EJ'}$$

Ein negatives Resultat bedeutet eine Verschiebung des Scheitels nach  $A$  hin. Die grösste Verschiebung ergiebt sich bei Belastung der einen Bogenhälfte.

**2) Maximalverschiebungen des Scheitels.** Soll der grösste positive Werth  $\Delta h$  für eine gleichförmige Verkehrslast gefunden werden, so setze man in No. 183,  $vdb$  an Stelle von  $P$ , integriere den Ausdruck von  $b = 0$  bis  $b_1 = 0,57l$  und multiplicire das Resultat mit 2. Man erhält dann, entsprechend der Belastung der beiden positiven Beitragsstrecken (Fig. 105)

$$\max(\Delta h)_v = -0,3948 \frac{vl^2}{EF} + 0,0054 \frac{vl^4}{EJ'}$$

Integrirt man von  $b = 0$  bis  $b = l$ , so erhält man nach Multipliciren mit 2, entsprechend derselben Belastung,

$$\text{total } (\Delta h)_v = -\frac{vl^2}{EF},$$

mithin

$$\min(\Delta h)_v = \text{total } (\Delta h)_v - \max(\Delta h)_v \\ = -0,6052 \frac{vl^2}{EF} - 0,0054 \frac{vl^4}{EJ'}$$

und mit Rücksichtnahme auf die permanente Belastung

$$\max \Delta h = \max(\Delta h)_v - \frac{pl^2}{EF}$$

$$\min \Delta h = \min(\Delta h)_v - \frac{pl^2}{EF}$$

$$187) \quad \begin{cases} \max Ah = -\frac{l^2}{EF} (0,3948 v + p) + 0,0054 \frac{v l^4}{EJ} \\ \min Ah = -\frac{l^2}{EF} (0,6052 v + p) - 0,0054 \frac{v l^4}{EJ} \end{cases}$$

Die grösste Horizontalverschiebung des Scheitels wird unter Voraussetzung der Belastung der einen Bogenhälfte

$$188) \quad \max Al = \frac{v l^3 h}{120 EJ}$$

erhalten; sie ist unabhängig von der permanenten Last.

**Einfluss der Temperaturänderungen.** Einer Temperaturerhöhung um  $t$  entspricht für den Scheitel  $A\varphi = 0$  und  $Al = 0$ , mithin nach No. 66

$$Ah = -(\varepsilon_0 + \varepsilon_t) (S_2)_0^l - \int_0^l \frac{x \mathfrak{M} dx}{EJ'}$$

Nach Einsetzen von:  $(S_2)_0^l = -2h$ ;  $\mathfrak{M} = -H_t y$

$$\varepsilon_0 = -\frac{H_t}{EF} \frac{l^2 - h^2}{l^2 + h^2}$$

und nach Ausführung der Integration folgt

$$189) \quad Ah = 2\varepsilon_t th - 2 \frac{H_t}{EF} \frac{l^2 - h^2}{l^2 + h^2} h + \frac{5}{12} \frac{H_t}{EJ'} h l^2.$$

In diese Formel ist  $H_t$  aus No. 68 zu setzen.

### § 17.

#### Vorläufige Berechnung des Querschnittes. Abschätzung des Eigengewichtes.

1) **Blechbogenträger.** Die vorläufige Berechnung des Querschnittes der Kopfplatten soll in derselben Weise durchgeführt werden, wie dies auf Seite 98 beim Bogenträger mit 3 Gelenken geschehen ist. Für den Punkt  $xy$  der Bogenaxe wird das grösste Moment — mit Rücksichtnahme auf Temperaturänderungen —

$$\mathfrak{M}_b = \frac{vy\xi^3}{16hl} + H_t y,$$

worin  $\xi = 2 \frac{3ly - 2hx}{3y}$ ,  $y = \frac{hx(2l-x)}{l^2}$  zu setzen ist. Man findet

$$\mathfrak{M}_b = \frac{vx(4l-3x)^3}{54(2l-x)^2} + H_t y.$$

Das erste Glied wird in der Nähe von  $x = \frac{1}{2}l$  ein Maximum, das zweite für  $x = l$ . Wir setzen, da es sich nur um eine Abschätzung des Querschnittes handelt,  $x = \frac{1}{2}l$  und  $y = h$  und erhalten

$$\mathfrak{M}_b = 0,064 v l^2 + H_t h.$$

Die Axialkraft setzen wir

$$R_n = \frac{p+v}{2h} l^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2} + H_t.$$

Hierin ist nach No. 70 
$$H_t = \frac{15 \varepsilon_t E F t}{15 \frac{l^2 - h^2}{l^2 + h^2} + 8 \frac{h^2}{\varrho^2} \frac{l^2}{l^2 + h^2}},$$

wofür 
$$H_t = \frac{15}{8} \varepsilon_t E F t \frac{\varrho^2}{h^2}$$

gesetzt werden möge. Dabei bedeutet  $\varrho = \sqrt{\frac{J}{F}}$  den Trägheitsradius des Querschnittes. Bei der Höhe  $h'$  des Querschnittes folgt

$$e = \frac{W}{F} = \frac{2J}{h'F} = \frac{2\varrho^2}{h'},$$

mithin  $\varrho^2 = \frac{h'e}{2}$  oder angenähert  $\varrho^2 = \frac{h_1 e^*}{2}$ , so dass

$$H_t = c_t F e, \text{ worin } c_t = \frac{15}{16} \varepsilon_t E t \frac{h_1}{h^2}.$$

Für Moment und Axialkraft ergibt sich

$$\mathfrak{M}_b = 0,064 v l^2 + c_t e (f_s + 2f) h$$

$$R_n = (p+v) \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2} + c_t e (f_s + 2f)$$

und nach Einsetzen dieser Werthe in Formel 86

$$190) f = \frac{0,064 v l^2 + e(p_f + p_s + v) \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2} + c_t f_s h e + c_t f_s e^2 - \frac{2J_s k}{h_1}}{k h_1 - e \left(\frac{2\gamma b_a}{2l}\right) \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2} - 2h c_t e - 2e^2 c_t}.$$

Die permanente Belastung findet man jetzt

$$p = p_f + p_s + \frac{\gamma f b_a}{l} \text{ .**})$$

**2) Gitterträger.** Beim Bogen mit 3 Gelenken liessen sich die Anstrengungen in den Gitterstäben berechnen, ohne dass es nöthig wurde, die Gurtquerschnitte vorerst abzuschätzen; in Folge dessen war es auch möglich das Gewicht  $p_s$  der Gitterstäbe vorweg festzustellen. Fehlt aber das Scheitelgelenk, so wird  $R_t$  von  $H_t$  und somit auch von  $f$  abhängig, mithin wird  $p_s$  eine Function von  $f$  werden. Durch numerische Rechnungen überzeugt man sich aber leicht, dass  $p_s$  den Querschnitt  $f$  sehr wenig beeinflusst und ohne Bedenken  $p_s = 0$  gesetzt werden darf; es ergibt sich dann für den Gitterträger, da hier  $e = \frac{h_1}{2}$  ist,

\*)  $h_1$  = Stehblechhöhe.

\*\*\*) Die Bezeichnungen sind auf Seite 99 und 100 angegeben.

$$191) f = \frac{0,064 v l^2 + \frac{h_1}{2} (p_f + v) \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2}}{kh_1 - \frac{h_1}{2} \left(\frac{2\gamma b_a}{2l}\right) \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2} - hc_1 h_1 - \frac{h_1^2 c_1}{2}}$$

worauf man  $p$  etwas grösser als

$$192) p = p_f + \frac{\gamma f b_a}{l}$$

annehmen, während man

$$193) H_t = c_1 \frac{h_1}{2} F$$

setzen wird. Es sei noch besonders darauf hingewiesen, dass das Gewicht  $p$ , auf die Dimensionen des Bogenträgers fast ohne Einfluss bleibt, sobald die Axe eine Parabel ist oder wenig von dieser abweicht.

## Abschnitt V.

### Specielle Behandlung des Bogens ohne Gelenke.

#### § 18.

#### Die grössten Momente $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{M}_A$ .

1) **Aeusserere Kräfte; Kämpferdrucklinie.** Einer concentrirten Last  $P$  in den Abständen  $a$  und  $b$  von  $A$  und  $B$  entspricht (vergl. S. 48) bei parabolischer Axe und bei flachem Kreisbogen:

$$194) \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{Pb^2(l+a)}{4l^3} = \frac{Pb^2(3l-b)}{4l^3} \\ H = \frac{15Pa^2b^2}{32l^3h} = \frac{15Pb^2}{32l^3h} (4l^2 - 4lb + b^2) \\ \mathfrak{M}_A = \frac{Pab^2(5a-4l)}{16l^3} = \frac{Pb^2}{16l^3} (12l^2 - 16lb + 5b^2). \end{array} \right.$$

Es mögen diese Werthe unter der Last  $P$  als Ordinaten von Curven dargestellt werden, welche beziehungsweise die „ersten Curven  $A, H, \mathfrak{M}_A$ “ genannt werden sollen (Fig. 106);\*) dieselben gestatten, wenn  $P=1$  angenommen wird, die einem Lastensysteme in beliebiger Stellung entsprechenden  $A, H, \mathfrak{M}_A$  durch Summiren zu ermitteln. (Vergl. Seite 36 und 37.)

\*) Die negativen  $\mathfrak{M}_A$  sind nach oben aufgetragen.

Die Werthe  $B$  und  $\mathfrak{M}_B$  für das rechtsseitige Auflager ergeben sich, wenn in den Ausdrücken für  $A$  und  $\mathfrak{M}_A$  die Abstände  $a$  und  $b$  mit einander vertauscht werden, so dass man erhält:

$$B = \frac{Pa^2(3l - a)}{4l^3}; \quad \mathfrak{M}_B = \frac{Pba^2(5b - 4l)}{16l^3}.$$

Eine gleichförmig vertheilte mobile Belastung ( $v$  pro Längeneinheit), die von  $B$  aus die Strecke  $\xi$  bedeckt, erzeugt

$$A = \int_0^{\xi} \frac{v db}{4l^3} b^2(3l - b)$$

$$195) \quad A = \frac{v \xi^3(4l - \xi)}{16l^3}.$$

Ebenso findet man für diese Belastung

$$196) \quad H = \frac{v \xi^3(20l^2 - 15l\xi + 3\xi^2)}{32l^3h}$$

$$197) \quad \mathfrak{M}_A = \frac{v \xi^3(2l - \xi)^2}{16l^3}.$$

Die aus No. 195, 196, 197 berechneten Werthe werden unter dem Kopf des Zuges als Ordinaten aufgetragen (Fig. 107), deren Endpunkte die „zweiten Curven  $A, H, \mathfrak{M}_A$ “ bilden.

Für volle Belastung, d. i.  $\xi = 2l$  folgen

$$198) \quad A = vl; \quad H = \frac{vl^2}{2h}; \quad \mathfrak{M}_A = 0$$

also dieselben Werthe, wie für den Bogen mit Kämpfergelenken.

Die einer concentrirten Last  $P$  entsprechenden Kämpferdrücke  $K$  und  $K_1$  (Fig. 108) mögen in den Schnittpunkten  $i$  und  $i_1$  mit den Verticalen durch die Schwerpunkte  $m$  und  $m_1$  der Kämpferquerschnitte in  $A$  und  $H$  resp. in  $B$  und  $H$  zerlegt werden. Sind dann  $z$  und  $z_1$  die Abstände der Punkte  $i$  resp.  $i_1$  von  $m$  resp.  $m_1$ , so folgt aus

$$Hz = \mathfrak{M}_A \quad \text{und} \quad Hz_1 = \mathfrak{M}_B$$

$$199) \quad z = \frac{2h}{15} \frac{5a - 4l}{a}; \quad z_1 = \frac{2h}{15} \frac{5b - 4l}{b}.$$

Wird  $z$  resp.  $z_1$  negativ, so liegt  $i$  resp.  $i_1$  unterhalb der Geraden  $m m_1$ .

Die Ordinate  $\eta$  des Schnittpunktes  $C$  der drei Kräfte  $P, K$  und  $K_1$  ergibt sich aus

$$\frac{\eta - z}{a} = \frac{A}{H}$$

$$200) \quad \eta = \frac{6h}{5}.$$

Hiernach ist die Kämpferdrucklinie eine horizontale Gerade.

**2) Kämpferdruckumhüllungslinie.** Nach Bestimmung des Schnittpunktes der Last  $P$  mit der Kämpferdrucklinie kann man die Richtungen der Kämpferdrücke  $K$  und  $K_1$  durch Berechnung von  $z$  und  $z_1$  bestimmen,

oder aber man ermittelt die Gestalt derjenigen Curve, welche von den Kämpferdrücken umhüllt wird (Fig. 109). Einen Punkt  $s$  dieser Curve (Fig. 110) kann man als den Schnittpunkt zweier unendlich nahe aufeinanderfolgenden Kämpferdrücke definiren und erhält, wenn  $u$  und  $w$  die Coordinaten bedeuten,

$$u = z + w \operatorname{tg} \alpha ; \quad u = z + dz + w (\operatorname{tg} \alpha + d \operatorname{tg} \alpha)$$

$$w = \frac{dz}{-d \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{dz}{da} = \frac{8h}{15a^2} \cdot l \text{ (vergl. No. 199)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A}{H} = \frac{8h}{15} \left( \frac{l}{a^2} + \frac{1}{a} \right)$$

$$- \frac{d(\operatorname{tg} \alpha)}{da} = \frac{8h}{15a^2} \cdot \frac{2l+a}{a}, \text{ mithin}$$

$$201) \quad w = \frac{al}{2l+a}; \quad u = \frac{2h}{15} \frac{10al + 5a^2 - 4l^2}{a(2l+a)}.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen  $a$ , so folgt

$$202) \quad u = \frac{2h}{15lw} (7lw - w^2 - l^2).$$

Hiernach ist die Kämpferdruckumhüllungslinie eine Hyperbel. Sie wird, da für  $a = 2l$  sich  $w = \frac{l}{2}$  ergibt, nur bis zu  $w = \frac{l}{2}$  gebraucht. Die Umhüllungslinie der Drücke  $K_1$  ist das Spiegelbild der Umhüllungslinie der  $K$ .

**3) Influenzlinien.** Liegt rechts vom fraglichen Querschnitte eine Last  $P$ , so folgt für die oberen Kernpunkte  $o$

$$203) \quad \mathfrak{M}_o = Ax_o - Hy_o + \mathfrak{M}_A = y_o \left\{ \frac{Ax_o}{y_o} - H + \frac{\mathfrak{M}_A}{l} \cdot \frac{l}{y_o} \right\},$$

während einer Last links von dem Querschnitte

$$204) \quad \mathfrak{M}_o = y_o \left\{ \frac{Bx_o'}{y_o} - H + \frac{\mathfrak{M}_B}{l} \cdot \frac{l}{y_o} \right\}$$

entspricht. Werden die in Klammer stehenden Werthe unter der Last  $P$  von der  $AB$  aus als Ordinaten aufgetragen, so gelangt man zu der Influenzlinie. Der Multiplikator derselben ist  $y_o$ . In den Fig. 111 bis 113 ist die Influenzlinie für den in der 3<sup>ten</sup> Verticalen gelegenen Punkt  $o$  eines Trägers mit 10 Feldern dargestellt. Die Feldweiten sind gleich gedacht.

Man berechne mit Hilfe der Gleichungen 194 der Reihe nach für  $b = \frac{9}{10} 2l$ ,

$\frac{8}{10} 2l, \frac{7}{10} 2l, \dots \dots \frac{1}{10} 2l$  die Werthe:

$$\begin{array}{ccccccc} A_1, & A_2, & A_3 & \dots & A_9 \\ H_1, & H_2, & H_3, & \dots & H_9 \\ (\mathfrak{M}_A)_1, & (\mathfrak{M}_A)_2, & (\mathfrak{M}_A)_3 & \dots & (\mathfrak{M}_A)_9 \end{array}$$

unter Annahme von  $P = 1^t$ . Dieselben entsprechen den über den Verticalen angenommenen Lasten  $1^t$ . Weiter werden

$$B_1 = A_9, \quad B_2 = A_8 \dots \dots$$

$$(\mathfrak{M}_B)_1 = (\mathfrak{M}_A)_9, \quad (\mathfrak{M}_B)_2 = (\mathfrak{M}_B)_8 \dots \dots$$

ermittelt und nun auf den Verticalen  $cd$  (Fig. 112) resp.  $rs$  (Fig. 113) die Strecken

$$\overline{cd}_1 = A_1; \quad \overline{cd}_2 = A_2 \dots \dots$$

$$\overline{rs}_1 = n \left( \frac{\mathfrak{M}_A}{l} \right)_1; \quad \overline{rs}_2 = n \left( \frac{\mathfrak{M}_A}{l} \right)_2 \dots$$

aufgetragen. Neben den Theilpunkten  $s$  ist in der Figur das Vorzeichen des Momentes angegeben. Das Moment  $(\mathfrak{M}_A)_4$  ist gleich Null. Auf den Verticalen  $c'd'$  und  $r's'$  sind die  $B$  und  $n \left( \frac{\mathfrak{M}_B}{l} \right)$  in gleicher Weise aufgetragen. ( $n$  ist eine beliebige Zahl.)

Durch die Punkte  $d_1, d_2, d_3 \dots \dots$  sind Horizontalen gezogen, auf denen

$$\overline{d_9 e_9} = H_9; \quad \overline{d_8 e_8} = H_8 \dots \dots$$

gemacht ist; während ebenso

$$\overline{d'_9 e'_9} = H_9; \quad \overline{d'_8 e'_8} = H_8 \dots \dots$$

aufgetragen wird.

Soll nun nach Erledigung dieser Vorarbeiten die Influenzlinie für  $(\mathfrak{M}_o)_3$  construirt werden, so verbindet man  $o_3$  mit  $A$  und  $B$ , macht  $\overline{CD} = \frac{1}{n} l$ , zieht  $o_3 D$  und hierauf  $cf \parallel o_3 A$ ,  $c'f' \parallel o_3 B$ ,  $rn \parallel o_3 D$  und  $r'n' \parallel o_3 D$ . Die  $cf$  und  $c'f'$  schneiden die Horizontalen durch die Punkte  $d$  resp.  $d'$  in den Punkten  $f_9, f_8 \dots \dots$  resp.  $f'_9, f'_8 \dots \dots$  und folgt:

$$\overline{d_9 f_9} = A_9 \frac{x_o}{y_o}; \quad \overline{d_8 f_8} = A_8 \frac{x_o}{y_o} \dots \dots$$

$$\overline{e_9 f_9} = A_9 \frac{x_o}{y_o} - H_9; \quad \overline{e_8 f_8} = A_8 \frac{x_o}{y_o} - H_8 \dots \dots$$

weiter wird Fig. 113

$$\overline{s_9 r_9} = \frac{+(\mathfrak{M}_A)_9}{l} \cdot \frac{l}{y_o}; \quad \overline{s_8 r_8} = \frac{+(\mathfrak{M}_A)_8}{l} \cdot \frac{l}{y_o} \dots \dots$$

so dass man für die rechts vom Punkte ( $o_3$ ) über den Verticalen 9 bis 3 angreifenden Lasten  $1^t$  die Influenzlinienordinaten (nach Formel 203)\*)

$$\eta_9 = \overline{e_9 f_9} + \overline{s_9 r_9}; \quad \eta_8 = \overline{e_8 f_8} + \overline{s_8 r_8}; \quad \eta_7 = \overline{e_7 f_7} + \overline{s_7 r_7}$$

$$\eta_6 = \overline{e_6 f_6} + \overline{s_6 r_6}; \quad \eta_5 = \overline{e_5 f_5} + \overline{s_5 r_5}; \quad \eta_4 = \overline{e_4 f_4}^{**})$$

erhält. Den Lasten links von ( $o_3$ ) entspricht (nach Formel 204)

\*) Die nachstehenden Additionen sind mit Rücksichtnahme auf die Vorzeichen durchzuführen.

\*\*\*) Hier ist  $\mathfrak{M}_A = 0$ .

$$\eta_3 = e_3' f_3' + s_3' r_3' = B_3 \frac{x_o'}{y_o} - H_3 + \frac{(\mathfrak{M}_B)_3}{l} \cdot \frac{l}{y_o}$$

$$\eta_2 = e_2' f_2' + s_2' r_2' = B_2 \frac{x_o'}{y_o} - H_2 + \frac{(\mathfrak{M}_B)_2}{l} \cdot \frac{l}{y_o}$$

$$\eta_1 = e_1' f_1' + s_1' r_1'$$

Die Influenzlinie besteht aus geraden Linien.

Die vorstehende Methode empfiehlt sich stets, wenn die Beanspruchung durch ein System concentrirter Lasten vorliegt. Man vergleiche S. 82. Die Bestimmung der Momente  $\mathfrak{M}_u$  ist analog.

4) **Ermittlung der Momente in Folge einer gleichförmigen Verkehrs- last. Einfluss der Constructionslast.** Nachdem die Kämpferdrucklinie, die Kämpferdruckumhüllungslinie (No. 202) und mit Hülfe von No. 195 bis 197 die „zweiten Curven  $A, H, \mathfrak{M}_A$ “ gezeichnet sind (Fig. 114), ziehe man, um  $\mathfrak{M}_o$  zu bestimmen, durch den Punkt  $o$  zwei Tangenten an die Kämpferdruckumhüllungslinie, um in deren Schnittpunkten  $E$  und  $E_1$  (von denen wieder der eine ausserhalb der Stützweite  $AB$  liegen kann) die Belastungsscheiden zu erhalten. Die unter  $E$  gemessenen Ordinaten  $A, H$  und  $\mathfrak{M}_A$  entsprechen der Belastung der negativen Beitragsstrecke  $BE$ , so dass

$$\min(\mathfrak{M}_o)_v = Ax_o - Hy_o + \mathfrak{M}_A$$

gewonnen wird. Der hierzu zu addirende Einfluss einer etwa links von  $o$  liegenden negativen Beitragsstrecke  $AE_1$  wird wieder durch Untersuchung des Spiegelbildes gewonnen. Man vergleiche das auf Seite 105 beim Bogen mit 2 Gelenken auseinandergesetzte Verfahren. Ebenso wird man, wie bei diesem Systeme auf Seite 109 geschehen, die Momente  $\max(\mathfrak{M}_o)_v$  aus denen für volle Belastung und den Momenten  $\min(\mathfrak{M}_o)_v$  berechnen. Bei voller Belastung des Bogens ohne Gelenke gilt Formel 160, denn die Werthe  $A, H$  und  $\mathfrak{M}_A$  sind (nach No. 198) dieselben, wie für den Bogen mit 2 Gelenken. Ebenso sind auch die Momente für die permanente Belastung dieselben, wie bei Vorhandensein von Kämpfergelenken. Allerdings ist hierbei parabolische Bogenaxe vorausgesetzt. Für Kreisbögen sind alle hier vorgetragenen Rechnungen nur Annäherungen.

5) **Einfluss der Temperaturänderung.** Der nach Formel 73 zu berechnende Horizontalschub  $H_t$  greift sehr angenähert in der Höhe  $\frac{2h}{3}$  über dem Schwerpunkte des Kämpferquerschnittes an, so dass in Folge einer Temperaturänderung

$$205) \quad \mathfrak{M}_o = -H_t \left( y_o - \frac{2h}{3} \right); \quad \mathfrak{M}_u = -H_t \left( y_u - \frac{2h}{3} \right)$$

entsteht. Dabei ist  $H_t$  positiv oder negativ, je nachdem Temperaturerhöhung oder Temperaturerniedrigung stattfindet.

**Die grössten Transversalkräfte.**

1) **Influenzlinien.** Die Transversalkraft für einen zwischen zwei Verticalen  $F_1$  und  $F_2$  geführten Schnitt ist, wenn rechts von  $F_2$  eine Last  $P$  angreift, und  $\varphi$  den Neigungswinkel der Geraden  $F_1 F_2$  bedeutet,

$$R_t = A \cos \varphi - H \sin \varphi = \sin \varphi \left\{ A \cotg \varphi - H \right\},$$

während einer links von  $F_1$  gelegenen Last

$$R_t = \sin \varphi \left\{ A \cotg \varphi - H - P \cotg \varphi \right\}$$

entspricht. Handelt es sich um ein System concentrirter Lasten, so empfiehlt sich die Construction der Influenzlinie. Dieselbe ist für das 4<sup>te</sup> Feld eines Trägers mit 10 Feldern in Fig. 115 dargestellt. Auf der Verticalen  $cd$  (Fig. 116) sind die Werthe  $A_1, A_2, A_3 \dots$ , ferner auf den Horizontalen durch  $d_1, d_2, d_3 \dots$  die Werthe  $H_1, H_2, H_3 \dots$  aufgetragen (vergl. die Construction der Influenzlinie für  $\mathfrak{M}_o$  auf Seite 122); dann ist  $cf$  und  $d_0 f'$  parallel zu  $F_1 F_2$  gezogen. Die Ordinaten der Influenzlinie sind jetzt, entsprechend den Verticalen rechts von  $F_2$ :

$$\eta_9 = e_9 f_9 = A_9 \cotg \varphi - H_9$$

$$\eta_8 = e_8 f_8; e_7 = e_7 f_7 \dots \dots \dots \eta_4 = e_4 f_4$$

ferner für die Verticalen links von  $F_1$ :

$$\eta_3 = e_3 f_3' = A_3 \cotg \varphi - H_3 - P \cotg \varphi$$

$$\eta_2 = e_2 f_2'; \eta_1 = e_1 f_1'.$$

Der Multiplicator der Influenzlinie ist  $\sin \varphi$ .

2) **Ermittelung der  $R_t$  für gleichförmige Verkehrslast. Einfluss der Constructionslast.** Man zeichne die „zweiten Curven  $A$  und  $H^u$ , die Kämpferdrucklinie und die Kämpferdruckumhüllungslinie und construire parallel der  $F_1 F_2$  an die Umhüllungslinie eine Tangente, welche die Kämpferdrucklinie in der Belastungsscheide  $E$  schneidet. Eine zweite Belastungsscheide liegt zwischen  $F_1$  und  $F_2$ , und kann man ihre Lage schnell durch Construction der den Verticalen  $F_1$  und  $F_2$  entsprechenden Influenzlinienordinaten bestimmen. Genügend genau verfährt man aber, wenn man, um  $\max R_t$  zu erhalten, den Träger zwischen  $E$  und der Mitte des Feldes  $F_1 F_2$  belastet (Fig. 117) und auf die Uebertragung der Last durch Zwischenträger keine Rücksicht nimmt. Man misst dann unter den Lastenden  $A_1$  und  $A_2$ , ferner  $H_1$  und  $H_2$  und findet

$$206) \quad \max (R_t)_v = (A_1 - A_2) \cos \varphi - (H_1 - H_2) \sin \varphi.$$

Für volle Belastung gelten die Formeln 138 auf Seite 93, da  $A = 0$  und  $H = \frac{v l^2}{2h}$  wird; ebenso findet man  $\min (R_t)_v$  wie auf Seite 94 angegeben. Bei parabolischer Axe oder flachem Kreisbogen ist wieder

$$\text{total } R_t = 0,$$

ebenso

$$(R_t)_p = 0,$$

so dass man hier aus Formel 206 die gesammte positive Transversalkraft erhält, während

$$\min R_t = - \max R_t$$

sich ergibt.

3) In Folge einer Temperaturänderung entsteht

$$207) \quad R_t = \mp H_t \sin \varphi$$

und zwar entspricht einer Erhöhung beziehungsweise einer Erniedrigung der Temperatur eine negative resp. positive Transversalkraft.

### § 20.

#### Deformationen.

Wir beschränken uns darauf, die Verschiebung  $\Delta h$  des Scheitels festzustellen. Aus No. 44 folgt für eine auf der rechten Bogenhälfte liegende Last und für  $x = l$ :

$$\Delta \varphi = \varepsilon_0 [\varphi]_0^l + \int_0^l \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'}$$

$$\Delta h = l \varepsilon_0 [\varphi]_0^l + l \int_0^l \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'} - \varepsilon_0 [S]_0^l - \int_0^l x \frac{\mathfrak{M} dx}{EJ'}$$

Bei Wahl des Näherungswerthes aus 43 wird

$$[S_2]_0^l = l [\varphi]_0^l$$

so dass  $\Delta h$  annähernd unabhängig von  $\varepsilon_0$  ist. Wird

$$\mathfrak{M} = Ax - Hy + \mathfrak{M}_A$$

eingeführt und hierbei  $A$ ,  $H$  und  $\mathfrak{M}_A$  aus No. 194 berechnet, so ergibt sich nach Ansführung der Integrationen

$$208) \quad \Delta h = \frac{Pb^2}{384EJ'l} [12l^2 - 28bl + 15b^2].$$

Dieser Werth wird Null für  $b = \frac{2l}{3}$ , positiv für  $b < \frac{2l}{3}$  und negativ für  $b > \frac{2l}{3}$ .

Ersetzt man  $P$  durch  $v db$  ( $v =$  Verkehrslast pro Längeneinheit) und integriert den Werth  $\Delta h$  von 0 bis  $\frac{2l}{3}$ , so erhält man, nach Multipliciren mit 2:

$$\max (\Delta h)_v = \frac{vl^4}{972EJ'}$$

Für die volle Belastung ergibt sich  $\Delta h = 0$ , ein Resultat, das von Einführung des Näherungswerthes von  $(S)_2$  herrührt, immerhin aber beweist, dass bei Berechnung von  $\Delta h$  der Einfluss des Eigengewichtes vernachlässigt, also

$$209) \quad \max \Delta h = \frac{v l^4}{972 E J'} = - \min \Delta h$$

gesetzt werden darf.

Hierzu ist noch der einer Temperaturänderung entsprechende Werth zu addiren. Da — bei unbelastet vorausgesetztem Bogen — im Scheitel  $\Delta \varphi = 0$  ist, folgt (aus No. 66) für  $x = l$

$$\Delta h = - (\varepsilon_0 + \varepsilon_t) \left[ S_0^l - \int_0^l \frac{x \mathfrak{M} dx}{E J'} \right],$$

$$\left[ S_2^l \right] = - 2h; \quad \mathfrak{M} = H_t \left( \frac{2h}{3} - y \right); \quad \mathfrak{M}_A = H_t \frac{2h}{3}$$

$$\varepsilon_0 = - \frac{2h}{E F (l^2 + h^2)} \left[ \frac{H_t}{2h} (l^2 - h^2) + \mathfrak{M}_A \right] = - \frac{H_t (3l^2 + h^2)}{3 E F (l^2 + h^2)}$$

und wenn, genügend genau,  $\varepsilon_0 = \frac{-H_t}{E F}$  gesetzt wird, nach Ausführung der Integrationen:

$$210) \quad \Delta h = 2 \varepsilon_t l h - \frac{2 H_t h}{E F} + \frac{H_t h l^2}{12 E J'}$$

$H_t$  ist aus No. 73 zu berechnen.

### § 21.

#### Vorläufige Berechnung des Querschnittes; Abschätzung des Eigengewichtes.

1) **Blechbogenträger.** Das in Formel 86 einzuführende Moment  $\mathfrak{M}_b$  wird am grössten für  $x = 0$ . Nun folgt aus No. 194, dass alle Lasten  $P$  in Abständen  $a < \frac{4l}{5}$  negative resp. positive Momente  $\mathfrak{M}_A$  erzeugen, dass

also durch Einführung von  $\xi = \frac{6}{5} l$  in No. 197

$$\max \mathfrak{M}_A = 0,069 v l^2$$

erhalten wird. Für volle Belastung ist  $\mathfrak{M}_A = 0$ , wesshalb

$$\min \mathfrak{M}_A = - \max \mathfrak{M}_A$$

sich ergibt. In Gleichung 86 ist daher mit Rücksichtnahme auf Temperaturänderungen zu setzen

$$211) \quad \mathfrak{M}_b = 0,069 v l^2 + H_t \frac{2h}{3}$$

Dann wird nach No. 73 angenähert:

$$H_t = \frac{45 \varepsilon_t E F t J}{4 F h^2} = \frac{45 \varepsilon_t E F t \rho^2}{4 h^2}$$

und wegen  $e^2 = \frac{h_1 e}{2}$  (vergl. Seite 118) und  $F = f_s + 2f$

$$H_t = c_t(f_s + 2f)e$$

worin

$$c_t = \frac{45}{8} \varepsilon_t E t \frac{h_1}{h^2}$$

Jetzt folgt analog wie auf Seite 118 für den Bogen mit 2 Kämpfergelenken ohne Scheitelgelenk

$$212) f = \frac{0,069 v l^2 + e(p_f + p_s + v) \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2} + c_t f_s \frac{2h}{3} e + c_t f_s e^2 - \frac{2 J_s k}{h_1}}{k h_1 - e \left(\frac{\gamma b_a}{l}\right) \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2} - 2 \frac{2h}{3} c_t e - 2 e^2 c_t} \quad *)$$

2) Für den Gitterträger erhält man (vergl. Seite 119) wegen  $e = \frac{h_1}{2}$ :

$$213) f = \frac{0,069 v l^2 + \frac{h_1}{2} (p_f + v) \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2}}{k h_1 - \frac{h_1}{2} \left(\frac{\gamma b_a}{l}\right) \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2} - \frac{2h}{3} c_t h_1 - \frac{h_1^2 c_t}{2}}$$

Auf das Gewicht  $p_s$  der Gitterstäbe wird man bei der statischen Berechnung keine Rücksicht nehmen, und  $p$  etwas grösser als

$$p = p_f + \frac{\gamma b_a}{l} f$$

einführen.

## Abschnitt VI.

### Die Horizontal-Verstrebung.

#### § 22.

#### Annahmen bezüglich der Belastung und der Zulässigkeit der Inanspruchnahme.

Mit dem Namen Horizontalverstrebung hat man die Gesamtheit derjenigen Constructionen belegt, welche zur Aufnahme der auf eine Brücke wirkenden Horizontalkräfte dienen. Es sind dies in erster Linie der Winddruck, ferner die Seitendrucke der Fahrzeuge und bei in Curven liegenden Brücken die Centrifugalkraft. Die Bestimmung dieser Kräfte ist in noch höherem Grade unsicher als die der verticalen Belastungen und sind daher die folgenden Untersuchungen nur

\*) Die Bezeichnungen sind auf Seite 99 und 100 zusammengestellt.

als Annäherungen aufzufassen. Dieselben basiren auf dem in neuerer Zeit immer mehr in den Vordergrund gestellten Princip: bezüglich der nicht scharf zu ermittelnden angreifenden Kräfte die denkbar ungünstigsten Annahmen zu machen, hingegen durch Zulassung einer grösseren Inanspruchnahme einer Verschwendung des Materiales und somit einer Vergrösserung der Constructionslast vorzubeugen. Die Befolgung dieses Principis sichert Dimensionen, welche selbst in abnormen Fällen die Nichterreicherung der Elasticitätsgrenze gewährleisten.

1) **Der Winddruck.** Trifft ein Luftstrom mit der Geschwindigkeit  $v$  (Meter pro Secunde) auf eine ruhende Fläche  $F$  ( $\square^m$ ) so übt er auf dieselbe den Druck

$$P = 0,12248 F v^2 \cos^2 \alpha$$

aus. Dabei ist  $\alpha$  der Winkel, den  $v$  mit der Normalen zu  $F$  bildet. Für  $\alpha = 0$  ergibt sich

$$P = w F$$

worin

$$w = 0,12248 v^2 \text{ klgr pro } \square^m$$

der Winddruck auf die Flächeneinheit.

Den stärksten Orkanen entspricht in Mitteleuropa  $v = 50^m$ , mithin  $w = 300^k$  pro  $\square^m$ , während der Betrieb auf einer Bahnstrecke bei  $w = 150$  als unmöglich anzusehen ist, da bereits bei  $w = 100$  unbeladene gedeckte Güterwagen von circa  $3,8^m$  Höhe umgeworfen werden. Man darf daher behaupten, dass die Einführung von

$$w = 300 \text{ für die unbelastete Brücke}$$

und  $w = 150$  „ „ belastete „

zu abnormen Anstrengungen der Horizontalverstrebung führt. Die letztere Annahme entspricht der Voraussetzung, dass der Eisenbahntrain auf der Brücke durch einen starken Sturm überrascht wird.

Die zulässige Inanspruchnahme soll — im Anschluss an das Eingangs erwähnte Princip — für Stäbe, welche nur auf Zug oder nur auf Druck beansprucht sind, auf  $k = 1000^k$  pro  $\square^{cm}$  und für wechselweise auf Zug und Druck (und zwar mit gleicher Intensität nach beiden Richtungen hin) angestrengte auf  $k = 750$  festgesetzt werden und ist bei Würdigung dieser Daten nicht nur an die abnorme Windbelastung, sondern auch daran zu denken, dass die Anstrengung der Windverstrebung durch einen Winddruck von  $w = 150$  sehr selten ist, mithin schon desshalb nach dem Wöhler'schen Gesetze, welches  $k$  von der Zahl der Wiederholungen der Inanspruchnahme abhängig macht, grössere Spannungen statthaft sind.

Die Belastung durch den Winddruck sehen wir in der Folge mit hinreichender Genauigkeit als gleichförmig über die Stützweite  $2l$  resp. einen Theil derselben vertheilt an und bezeichnen mit

$w_p$  die permanente Windlast

$w_v$  die variable (mobile) Windlast

pro Meter der Stützweite. Indem wir dann unter  $F_b$  die dem Winde Seitens der Brücke dargebotene Fläche und unter  $h'$  die Höhe des die Brücke bedeckenden Wagenzuges verstehen, erhalten wir

$$214) \quad w_p = w \frac{F_b}{2l}; \quad w_v = wh'.$$

Es ist hierbei auf die Oeffnungen unter und zwischen den Wagenkästen nicht geachtet.

Schliesslich bezeichnen wir noch mit  $w_b$  denjenigen Theil von  $w_p$ , der auf den Tragbogen selbst wirkt und empfehlen mit Rücksicht auf die Schwierigkeit der exacten Bestimmung von  $F_b$  die Werthe:

$$215) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_b = wh_1 \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2} \right) \\ w_p = \frac{1}{3} wh \end{array} \right\} \text{für Blechbogenbrücken}$$

$$216) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_b = 0,5 wh_1 \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2} \right) \\ w_p = 2w_b \end{array} \right\} \text{für Gitterbogenbrücken.}$$

Die Höhe des Wagenzuges beträgt etwa

$$h' = 3,8^m \text{ bei Eisenbahnbrücken,}$$

$$h' = 3,0^m \text{ bei Strassenbrücken.}$$

In den Formeln 215 u. 216 bedeutet  $h_1$  bei Blechbögen und Gitterbögen beziehungsweise die Höhe des Stehbleches oder den Abstand der Gurtschwerpunkte und  $h$  den Pfeil der Bogenaxe.

**2) Seitendrucke der Fahrzeuge.** Noch weit schwieriger als die Bestimmung der Winddrücke ist die Angabe der von den Fahrzeugen ausgeübten horizontalen Seitendrucke, welche in der Unregelmässigkeit der Bewegung ihren Grund haben, und namentlich bei den Lokomotiven ganz beträchtlich werden können. So sollen nach Wöhler (Erbkam 1858) die Seitendrucke der Lokomotivräder bis zu  $\frac{2}{3}$  der Axenbelastung beobachtet worden sein. Die meisten Constructeure lassen bei Berechnung der Horizontalversteifung diese Kräfte ganz unberücksichtigt, einestheils, weil selbst eine annähernde Bestimmung derselben zur Zeit nicht möglich ist, andererseits, weil sie sich in ihrer Wirkung auf den Brückenträger theilweise aufheben. Es erscheint uns aber rationeller, dem Vorgehen Winkler's zu folgen und an jeder Axe der Lokomotive einen Seitendruck gleich  $\frac{1}{10}$  der Axenbelastung anzunehmen. Befinden sich mehrere Lokomotiven auf der Brücke, so setzen wir nur an den Axen der einen Horizontalkräfte voraus.\*)

\*) Bei Strassenbrücken halten wir die Berücksichtigung der Seitendrucke der Fahrzeuge für überflüssig.

3) **Centrifugalkraft.** Liegt eine Eisenbahnbrücke in einer Curve vom Radius  $r$ , so ist an jeder durch  $P$  belasteten Axe eine Horizontalkraft

$$217) \quad P_1 = \frac{P c^2}{g r}$$

anzunehmen, wobei  $c$  die Geschwindigkeit des Zuges und  $g$  die Beschleunigung der Schwerkraft bedeutet.

§ 23.

**Theorie der Horizontalverstrebung.**

Der Hauptbestandtheil der Windverstrebung ist ein „horizontaler Fachwerkträger“ — Windträger genannt — der zweckmässig unmittelbar unter die Fahrbahn, also in möglichste Nähe der Angriffspunkte der auf den Wagenzug wirkenden Winddrücke gelegt, häufig aber auch in der Weise gebildet wird, dass die Tragbögen durch ein Stabsystem mit einander verbunden werden. Die nicht auf den Windträger wirkenden Horizontalkräfte werden demselben durch „Verticalversteifungen“ übermittlelt unter gleichzeitiger Erzeugung verticaler Belastungen für die Haupttragbögen. Die folgenden Untersuchungen sollen sich daher nicht allein mit Ermittlung der Inanspruchnahme der Horizontalverstrebung befassen, sondern auch die Spannungen nachweisen, die in den Tragbögen durch die Horizontalkräfte hervorgerufen werden.

Je nach der Lage des Windträgers lassen sich die folgenden Anordnungen unterscheiden.

**Anordnung I.** (Fig. 118.)

Der Windträger  $A' A'' B'' B'$  liegt unmittelbar unter der Fahrbahn. Die Verticalen  $CE$  und  $C'E'$ , welche die Belastung der Fahrbahn den Tragbögen übermittlelt, sind durch ein Stabsystem verbunden, welches den Namen „Verticalversteifung“ führt.

Indem wir die Knotenpunkte des Windträgers mit  $0, 1, 2, \dots m$  resp. mit  $0', 1', 2' \dots m'$  bezeichnen, nennen wir:

$O_m$  und  $U_m$  die Spannkkräfte in den Gurten des Windträgers,

$D_m$  die Spannkraft in der Diagonale des Windträgers,

$D_m'$  „ „ „ „ „ der Verticalversteifung,

$N_m$  „ „ „ „ „ Normalen  $CC'$ ,

$N_m'$  „ „ „ „ „  $EE'$ ,

$V_m$  und  $V_m'$  die Spannkkräfte in den Verticalen,

$\lambda$  die Feldweite des Windträgers,

$d_m$  die Länge der Diagonale  $D_m$ ,

$d_m'$  „ „ „ „ „  $D_m'$ ,

$b$  „ „ „ „ Normalen,

$h_m$  „ „ „ „ Verticalen.

Es wird angenommen, dass sämtliche auf den Windträger wirkenden Horizontalkräfte in den Knotenpunkten angreifen; sie bestehen aus den Winddrücken  $w_v$  und  $w_p - w_b$  pro Längeneinheit\*) und den Seitendrücken der Fahrzeuge und werden theils in den Punkten  $C$ , theils in den  $C'$  angreifen. Es sei jedoch der Einfachheit wegen — vorbehaltlich späterer Motivirung — vorausgesetzt, dass nur die Punkte  $C$  Angriffspunkte der Kräfte sind.

1) **Die Verticalversteifung.** Durch den auf den Tragbogen  $AB$  wirkenden Winddruck wird dieser in horizontalem Sinne auf Biegung beansprucht. Beseitigt man zunächst die Verticalversteifung, verbindet die beiden Bögen  $AB$  nur durch die Querstäbe  $E'E$  und nimmt an, dass der Winddruck ausschliesslich auf den Bogen  $AB$  wirkt, dass er also normal zur Bogenebene gerichtet ist und ein Bogen den anderen deckt, so greifen an dem Bogen  $A_1B_1$  die horizontalen Drücke  $N'$  an, während  $AB$  durch den Winddruck belastet und durch die Kräfte  $N'$  entlastet wird. Letztere lassen sich aus den Bedingungen ermitteln, dass die Verrückungen zweier durch einen Querstab  $EE'$  verbundenen Punkte des Bogens in der Richtung  $EE'$  um die Verkürzung dieses Querstabes sich unterscheiden müssen. Die bedeutenden Schwierigkeiten, mit denen die Lösung dieser Aufgabe zu kämpfen hat, werden noch vergrössert, sobald die Verticalen  $CE$  und  $C'E$  durch ein Fachwerk verbunden werden, da nunmehr Horizontalverschiebungen der Punkte  $E$  und  $E'$  nicht möglich sind, ohne dass die Verticalversteifung und der Windträger beansprucht wird, mithin die Dimensionen jedes einzelnen Stabes der Horizontalverstrebung von Einfluss auf sämtliche Inanspruchnahmen werden.

Indem wir desshalb von der Fähigkeit der Tragbögen, horizontale Kräfte aufzunehmen, vollständig absehen und die Länge der Sehne  $EE$  mit  $s_m$  bezeichnen, nehmen wir im Punkte  $E$  (Fig. 119) auf die Verticalversteifung wirkend den Winddruck

$$W_u = \frac{1}{2} w_b (s_m + s_{m+1})$$

an. Da weiter der Windträger nur horizontalen Kräften zu widerstehen vermag, fügen wir in der Richtung  $CC'$  zwei sich aufhebende Kräfte  $W_u$  hinzu, von denen die eine durch den Windträger aufgenommen wird, während die andere mit der in  $E$  angreifenden  $W_u$  ein rechtsdrehendes Kräftepaar erzeugt. Dem Momente desselben wirken die „Reactionen  $R$  der Tragbögen gegen die Versteifung“ entgegen und zwar folgt aus

$$Rb = W_u h_m$$

$$218) \quad R = W_u \frac{h_m}{b}.$$

Der Tragbogen  $AB$  wird hiernach durch eine Reihe abwärts wirkender Kräfte  $R$  und der Bogen  $A_1B_1$  durch ebenso grosse aufwärts wirkende

\*) Vergl. § 22.

belastet. Man hat aber nicht nöthig, bei Berechnung der Querschnittsdimensionen der Hauptträger hierauf Rücksicht zu nehmen, da die Kräfte  $R$  zu geringfügig sind und ihre Vernachlässigung insofern etwas zu grosse Querschnitte liefert, als, bei im Sinne  $CC'$  wirkendem Winddrucke, Bogen  $A_1B_1$  der stärker belastete der beiden Tragbögen ist.

Häufiger angewandte Verticalversteifungen sind folgende:

1) Das einfache Andreaskreuz (Fig. 119). Man erhält  $V_m = -R$ ;  $V_m' = 0$ ;  $N_m' = -W_u$  und aus der Gleichung  $D_m' \cos \gamma_m + N_m' = 0$

$$219) \quad D_m' = + \frac{W_u}{\cos \gamma_m}.$$

Wird im Punkte  $C$  die Kraft  $D'$  in die verticale und die horizontale Componente zerlegt, so wird, da letztere  $= W_u$  ist, ersichtlich, dass der Windträger die auf den Tragbogen wirkenden Horizontalkräfte in den Punkten  $C$  aufnimmt. \*)

Wirkt der Wind in der Richtung  $C'C$ , so folgt:

$$220) \quad D_m' = - \frac{W_u}{\cos \gamma_m}; \quad V_m = +R; \quad N_m' = -W_u; \quad V_m' = 0.$$

Empfehlenswerth ist die Anordnung von zwei sich kreuzenden Flacheisendiagonalen, von denen die  $CE'$  oder die  $C'E$  gespannt wird, je nachdem der Wind in der Richtung  $CC'$  oder  $C'C$  wirkt.

Die Anstrengungen  $V$  kommen bei der Querschnittsermittlung der Verticalen nicht in Betracht.

2) Andreaskreuz mit 2 steifen Diagonalen (Fig. 120). Aus den Bedingungen für Gleichgewicht an den Punkten  $E$  und  $E'$  folgt

$$D_m' \cos \gamma_m + N_m' = 0 \quad ; \quad D_m' \sin \gamma_m + V_m' - R = 0$$

$$D_m'' \cos \gamma_m + N_m' + W_u = 0; \quad D_m'' \sin \gamma_m + V_m + R = 0$$

Hierzu tritt die auf Seite 73 für das Viereck abgeleitete Elasticitätsgleichung. Dieselbe lautet, wenn  $\Delta b$  die Längenänderung der Normalen  $CC'$  des Windträgers ist und

$f_a$  den Querschnitt der Diagonalen  $CE'$  und  $C'E$ ,  
 $f_v$  " " " " Verticalen  $CE$  und  $C'E'$ ,  
 $f_n$  " " " " Normalen  $E'E'$

bedeutet,

$$(D_m' + D_m'') \frac{d_m'^2}{f_a} = \left( \frac{N_m' b}{f_a} + \Delta b E \right) b + (V_m + V_m') \frac{h_m^2}{f_v}$$

und wird zweckmässig durch Einführung von  $\Delta b = 0$  vereinfacht. Abgesehen von Erhöhung der Unsicherheit in Bestimmung der Inanspruchnahme sind steife Diagonalen schon deshalb wenig zu empfehlen, weil sie mehr Material erfordern als schlaife Diagonalen.

\*) Ausgenommen ist die Belastung  $\frac{1}{2} w_b s_1$  des Endfeldes des Tragbogens, da dieselbe durch die Stütze  $A$  aufgenommen wird; doch sei hierauf nicht weiter gerücksichtigt.

\*\*) Genügend genau ist  $D_m' = - D_m'' = \frac{W_u}{2 \cos \gamma_m}$ .

3) Ueber einander liegende Andreaskreuze (Fig. 121) werden sich bei hohen Verticalen und relativ geringem Abstände der Tragbögen empfehlen. Schlaaffe Diagonalen verdienen unter allen Umständen den Vorzug. Die in Figur 121 punktirten Diagonalen werden gespannt, sobald der Wind in der Richtung  $C'C$  wirkt.

Führt man durch irgend ein Feld einen Schnitt  $cc$  und setzt die Summe der auf das untere Fragment normal zu  $CE$  wirkenden Kräfte gleich Null, so findet man

$$221) \quad D_m' = + \frac{W_u}{\cos \gamma_m};$$

es werden sonach sämtliche Diagonalen gleich stark beansprucht. Die Momentengleichungen in Bezug auf die Punkte  $S$  und  $S'$  werden, wenn, wie in Figur 121, bei 3 Feldern der Schnitt durch das Mittelfeld geführt ist,

$$W_u \frac{2h_m}{3} - Rb + V'b = 0$$

$$W_u \frac{h_m}{3} - Rb - Vb = 0$$

woraus, wegen  $R = W_u \frac{h_m}{b}$ , sich

$$V' = \frac{R}{3}; \quad V = - \frac{2R}{3}$$

ergiebt. Auf diese Weise findet man, dass in den drei Abschnitten der Verticalen  $EC$  (Fig. 122) der Reihe nach von  $E$  nach  $C$  hin die Drücke  $R, \frac{2R}{3}, \frac{R}{3}$  und in denen der  $E'C'$  die Zugkräfte  $\frac{2R}{3}, \frac{R}{3}, 0$  auftreten. Bei vier übereinander liegenden Feldern wird man für  $EC$  die Werthe  $R, \frac{3R}{4}, \frac{R}{2}, \frac{R}{4}$  und für  $E'C'$  die Werthe  $\frac{3R}{4}, \frac{R}{2}, \frac{R}{4}, 0$  erhalten etc.

Für sämtliche Normalen ergiebt sich

$$N_m' = - W_u.$$

4) Neben einander liegende Andreaskreuze (Fig. 123) sind bei niedrigen Verticalen und relativ grossem Abstände der Hauptträger vortheilhaft. Führt man durch irgend ein Feld einen Verticalschnitt und setzt die Summe der auf das linke Fragment wirkenden Verticalkräfte gleich Null, so erhält man

$$222) \quad D_m' = + \frac{R}{\sin \gamma_m} = + \frac{W_u h_m}{b \sin \gamma}.$$

Danach sind sämtliche Diagonalen gleich stark beansprucht. Für die Verticalen wird

$$V_m = - R \quad \text{und} \quad V_m' = 0.$$

Die Momentengleichung in Bezug auf Punkt  $S$  liefert für das zweite Feld

$$N'_2 h_m + R \frac{2b}{n} = 0$$

$$N'_2 = -R \frac{2b}{n h_m} = -\frac{2W_u}{n}$$

wo  $n =$  Anzahl der Felder. Man findet analog:

$$223) \quad N'_1 = -\frac{W_u}{n}; \quad N'_3 = -\frac{3W_u}{n} \text{ u. s. w.}$$

**2) Der Windträger.** Auf die Inanspruchnahme des Windträgers sind die verticalen Kräfte  $V_m$ ,  $V'_m$  und  $D'_m \sin \gamma$  ohne Einfluss, da sie in den nachher aufzustellenden Gleichgewichtsbedingungen nicht vorkommen. Um die Kräfte  $O_m$ ,  $U_m$ ,  $D_m$  und  $N_m$  zu berechnen, sei vorausgesetzt, dass der Windträger nur bei  $A'B'$  gestützt ist, so zwar, dass das Lager  $A'$  auf einer Geraden  $\bar{a}\bar{a} \parallel A'B'$  gleiten kann. Es sind dann die Reactionen  $A'$  und  $B'$  normal zu  $A'B'$  und ist der Windträger als Balken zu behandeln. Allerdings wird diese Bedingung in Wirklichkeit nur näherungsweise erfüllt, so dass auch die folgenden Rechnungen nur Annäherungen sind. Sehr häufig findet man, dass die Endverticalen als Unterstützungen des Windverbandes ausgebildet und zu diesem Zwecke durch eine kräftige Verticalversteifung, Endversteifung genannt, verbunden werden. Diese Anordnung dürfte die hier bezüglich der Lagerung des Windträgers gemachte Voraussetzung noch am ehesten erfüllen; sie würde ihr vollständig genügen, wenn am Fusse der Endverticalen ein Gelenk die widerstandslose Drehung in der Ebene des Tragbogens gestattete, da in diesem Falle nur eine Reaction  $A'$  normal zu  $A'B'$  möglich wäre.

Durch das  $m^{\text{te}}$  Feld des Windträgers (Fig. 124) werde ein Schnitt geführt und die Summe der Momente der am linken Fragmente angreifenden Kräfte in Bezug auf  $m'$  gleich Null gesetzt. Bedeutet  $\mathfrak{M}_m$  das Moment der äusseren Kräfte, so folgt  $\mathfrak{M}_m + O_m b = 0$  mithin

$$224) \quad O_m = -\frac{\mathfrak{M}_m}{b} \text{ und analog } U_m = +\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{b}.$$

Die Momente, für deren Berechnung es gleichgültig ist, ob die auf den Windträger wirkenden Kräfte in den Punkten  $C$  oder  $C'$  angreifen, werden am grössten bei voller Belastung des Trägers. Ausserdem empfiehlt es sich (nach § 22), drei Lasten  $0,10 P$  anzunehmen, von denen die mittelste in  $m$  angreift. Die gleichförmige Belastung ist  $w_v + w_p$  pro Längeneinheit, mithin wird die Auflagerreaction (Fig. 124)

$$A' = (w_v + w_p) l + \frac{3 \cdot 0,10 P}{2l} x'_m$$

und  $\mathfrak{M}_m = A' x_m - (w_v + w_p) \frac{x_m^2}{2} - 0,10 P a$ , d. i.

$$225) \quad \mathfrak{M}_m = \left[ w_v + w_p + 0,15 \frac{P}{l} \right] x_m x'_m - 0,10 P a.$$

Bedeutet weiter  $\mathfrak{H}_m$  die Resultierende aus den auf das linke Fragment wirkenden äusseren Kräften<sup>\*)</sup> und wird  $\mathfrak{H}_m$  positiv angenommen, sobald es dem Winde entgegenwirkt, so folgt  $\mathfrak{H}_m - D_m \sin \beta = 0$  und hieraus

$$226) \quad D_m = + \mathfrak{H}_m \frac{d_m}{b} = \mathfrak{H}_m \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{b^2}}.$$

Für die Bestimmung der „Horizontalkraft“  $\mathfrak{H}_m$  ist es wieder gleichgiltig, an welchem der beiden Gurte die Belastungen angreifen. Man findet  $\mathfrak{H}_m$  positiv oder negativ, je nachdem der Träger rechts oder links von dem Schnitte belastet wird. Wir berechnen  $\max \mathfrak{H}_m$  unter Voraussetzung der Laststellung in Fig. 125. Der permanente Winddruck  $w_p$  wirkt auf die ganze Länge des Trägers, dagegen  $w_v$  nur auf die Strecke  $x_m'$ ; von den 3 Lasten  $0,10 P$  liegt die erste bei  $m$ . Von der Beantwortung der Frage, ob durch eine Verschiebung der mobilen Last nach  $A'$  hin  $D_m$  vergrössert wird, glauben wir um so eher absehen zu dürfen, als die hier vorgetragene Rechnung ohnehin nur Näherungsergebnisse liefert und unter sehr ungünstigen Voraussetzungen durchgeführt wird. Der gewählten Stellung entspricht

$$A' = 3 \cdot 0,10 \frac{P}{2l} (x_m' - a) + w_p l + \frac{w_v x_m'^2}{4l}$$

$$\mathfrak{H}_m = A' - w_p x_{m-1} - w_p \frac{\lambda_m}{2},$$

denn die Hälfte der Belastung  $w_p \lambda_m$  des  $m^{\text{ten}}$  Feldes wirkt im Knotenpunkte  $m - 1$ , gehört also zum linken Fragment. Man findet nach Reduktion

$$227) \quad \max \mathfrak{H}_m = w_p x_m'' + \frac{w_v x_m'^2}{4l} + 0,15 \frac{P(x_m' - a)}{l},$$

worin  $x''$  den Abstand der Mitte des  $m^{\text{ten}}$  Feldes von der Mitte des Trägers bedeutet.

Analog findet man für die Laststellung Fig. 126

$$228) \quad \min \mathfrak{H}_m = - w_p x_m'' - \frac{w_v x_{m-1}^2}{4l} - 0,15 \frac{P(x_{m-1} - a)}{l}$$

und zwar entspricht dieser Stellung ein Druck  $D_m$ . Es wird aber unter der Voraussetzung, dass die fragliche Diagonale auf der linken Hälfte des Windträgers liegt, ein grösserer Druck erzeugt, sobald der Wind von der anderen Seite kommt und der Wagenzug die Strecke  $x_m'$  bedeckt (Fig. 127). Man findet dann  $\min \mathfrak{H}_m = - \max \mathfrak{H}_m$  aus Gleichung 227 und wird hiernach die Diagonale gleich stark auf Zug und auf Druck beansprucht. Es ist deshalb vortheilhaft, zwei sich kreuzende Zugbänder anzuordnen, die je nach der Windrichtung wechselweise angestrengt und entlastet werden.

<sup>\*)</sup> (genannt Transversalkraft)

Die Anstrengung in der Normalen ergibt sich, jenachdem die Belastungen des Windträgers nur in den Punkten  $m$  (Fig. 128) oder nur in den  $m'$  (Fig. 129) angreifen, aus den Bedingungen

$$N_m = - D_m \sin \beta = - \mathfrak{S}_m$$

resp.

$$N_m = - D_{m+1} \sin \beta = - \mathfrak{S}_{m+1}.$$

In beiden Fällen findet man, dass die Normalen nur auf Druck beansprucht werden, sobald die Diagonalen ausschliesslich gezogen sind. Da nun  $\mathfrak{S}_m \max > \mathfrak{S}_{m+1} \max$  ist und sich nicht genau ermitteln lässt, wie sich die Windbelastungen auf die Punkte  $m$  und  $m'$  vertheilen, setzen wir

$$229) \quad \min N_m = - \max \mathfrak{S}_m,$$

indem wir annehmen, dass sämtliche Lasten in den Punkten  $m$  angreifen.

In dem sehr häufigen Falle, dass bei Ueberführung einer zweigeleisigen Bahn jedes Geleis durch zwei Bögen unterstützt wird, liegen zwei Windträger nebeneinander und werden diese zweckmässig durch Normalen verbunden (Fig. 130). Greifen dann in den Knotenpunkten  $a$  auf der Windseite die Kräfte  $W$  an und sind  $N_1'', N_2'' \dots N_n$  die Drücke in den die beiden Systeme verbindenden Normalen, so wirken auf den Träger I ausser den belastenden Kräften  $W$  noch die entlastenden  $N''$  und auf II die Kräfte  $N''$ . Da nun die Verschiebungen der Knotenpunkte  $b$  und  $b'$  (im Sinne der Windrichtung) um die Zusammendrückung der Normalen  $b b'$  differiren müssen, erhält man bei  $n$  Normalen  $n$  Bedingungen zur Berechnung der  $n$  Kräfte  $N''$ . Die Zusammendrückung der Normalen kann füglich vernachlässigt werden, weil diese Stäbe in Anbetracht der erforderlichen Knickfestigkeit stärker construiert werden müssen, als es die Druckfestigkeit erheischt, so dass die Bedingungen zur Berechnung der  $N$  lauten:

„es müssen die Verschiebungen der Punkte  $b$  gleich denen der Punkte  $b'$  sein.“

Werden zunächst die beiden Fachwerkträger durch zwei stabförmige Träger ersetzt und die Normalen unendlich nahe gedacht, so müssen die elastischen Linien der beiden Träger übereinstimmen. Sind  $J_1$  und  $J_2$  die Trägheitsmomente der Querschnitte,  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  die Angriffsmomente für irgend einen Schnitt,  $y$  die Ordinate der elastischen Linie, so folgt

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}_1}{E J_1} = \frac{\mathfrak{M}_2}{E J_2}$$

mithin

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{J_1} = \frac{\mathfrak{M}_2}{J_2}$$

und bei gleichen Querschnitten

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2.$$

Nun ist  $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$  das den Kräften  $W$  entsprechende Moment; denn die in den Ausdrücken für  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  vorkommenden von den  $N''$  abhängigen Glieder unterscheiden sich nur durch die Vorzeichen, weil die Kräfte

$N''$  auf den Träger I entlastend, auf den Träger II belastend wirken. Mithin erhält man

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \frac{1}{2} \mathfrak{M}.$$

Da man weiter die Transversalkräfte durch die Gleichungen

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{d\mathfrak{M}_1}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\mathfrak{M}}{dx}; \quad \mathfrak{S}_2 = \frac{d\mathfrak{M}_2}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\mathfrak{M}}{dx}$$

erhält, wird ersichtlich, dass sich bei Combination zweier gleich starken Fachwerkträger annähernd halb so grosse Anstrengungen ergeben werden, wie sie vorhin für das eine System gewonnen wurden.\*) Es ist diese Berechnung etwa mit demselben Rechte zuzulassen, mit dem man mehrfache Fachwerke bei der Berechnung in einfache zerlegt.

3) Die Endversteifung bildet häufig das Widerlager des Windträgers; sie hat — unter Voraussetzung der in Fig. 131 dargestellten Belastung — die Horizontalkraft

$$230) \quad \mathfrak{H} = (w_v + w_p) l + 3 \frac{0,10 P(2l - a)}{2l}$$

aufzunehmen und besteht zweckmässig aus zwei sich kreuzenden Flacheisendiagonalen (Fig. 132), welche durch

$$231) \quad D_o' = \mathfrak{H} \frac{d_o}{b}$$

gespannt werden. Die Endverticalen sind durch die Kraft

$$232) \quad V_o = - \mathfrak{H} \operatorname{tg} \gamma_o = - \mathfrak{H} \frac{h_o}{b}$$

beansprucht; hierzu tritt noch der Einfluss der verticalen Belastung und des Gewichtes der Fahrbahn.

Werden zwei sich kreuzende steife Diagonalen (Fig. 133) angeordnet, so ist das System statisch unbestimmt. Als Stützpunkt des Windträgers ist  $A''$  (Fig. 131) aufzufassen, da die Gurtspannung  $U_1$  gleich Null ist. Bedeutet nun  $N_o$  die Spannkraft im Querstabe  $A'A''$  und sind  $P_o$  und  $P_o'$  die von dem Gewichte der Fahrbahn und den durch die Fahrbahn gestützten Lasten herrührenden Drücke auf die Endverticalen, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} V_o + P_o + D_o'' \sin \gamma_o &= 0; & N_o + D_o' \cos \gamma_o &= 0 \\ V_o' + P_o' + D_o' \sin \gamma_o &= 0; & N_o + D_o'' \cos \gamma_o + \mathfrak{H} &= 0, \end{aligned}$$

zu welchen die Bedingung

$$(D_o' + D_o'') \frac{d_o'^2}{f_a} = \frac{N_o}{f_n} b^2 + (V_o + V_o') \frac{h_o}{f_v}$$

\*) Es ist hier wieder ein für stabförmige Balken gültiger Satz ohne Weiteres auf Fachwerkträger angewendet worden, wie dies zur Erzielung einfacherer Rechnungen in der Statik der Bauconstructions vielfach geschehen. Man vergleiche die Anmerkung auf Seite 70. Einem späteren Theile unseres Werkes bleibt es vorbehalten, die Zulässigkeit derartiger Untersuchungen zu prüfen.

tritt, wo  $f_d =$  Querschnitt der Diagonale,

$f_v =$  „ „ „ Verticale,

$f_n =$  „ „ des Stabes  $A'A''$

bedeutet. Die 5 Gleichungen genügen zur Berechnung von  $V_0, V_0', D_0', D_0''$  und  $N_0$ .

Die Anordnung von  $n$  über einander liegenden Verticalkreuzen (Fig. 134) empfiehlt sich bei kleinem  $b$  und grossem  $h_0$ . Führt man den Horizontalschnitt  $cc$  und setzt die Summe der an dem Fragment oberhalb des Scheitels angreifenden horizontalen Kräfte gleich Null, so findet man

$$233) \quad D' = \frac{\wp}{\cos \gamma_0} = \wp \frac{d}{b}.$$

Diese Formel gilt für sämtliche Diagonalen. Die Spannkkräfte in den Normalen sind

$$N' = - \wp.$$

Ist  $\bar{cc}$  speciell durch das zweite Feld geführt, so lautet die Momentengleichung für den Punkt  $S'$

$$\wp 2 \frac{h}{n} + V_2 b = 0,$$

woraus  $V_2 = - \wp \frac{2h}{nb}$ . Auf diese Weise findet man

$$234) \quad V_1 = - \wp \frac{h}{nb}; \quad V_3 = - \wp \frac{3h}{nb} \dots \text{u. s. w.}$$

und ganz analog aus den Momentengleichungen für die Punkte  $S$ :

$$235) \quad V_1' = 0; \quad V_2' = - V_1; \quad V_3' = - V_2; \text{u. s. w.}$$

Eine gute Endversteifung zeigt für den Fall eines relativ grossen  $b$  die Fig. 135. Da der Stab  $AA_1$  (wie in allen früheren Fällen) theoretisch überflüssig ist und die Reaction des Stützpunktes  $A_1$  durch den Punkt  $m$  gehen muss, da sich im Gegenfalle das Dreieck  $A_1C'M$  um den Punkt  $M$  dreht, folgen die Spannkkräfte in den Stäben  $A_1C'$  und  $C'M$  gleich Null, und man erhält für den Stab  $MC$

$$N = - \wp$$

ferner durch Zerlegung von  $\wp$  in  $D'$  und  $D''$

$$236) \quad D' = - D'' = + \frac{\wp d}{b}.$$

#### Anordnung II (Fig. 136).

Es wird wie bei Anordnung I unmittelbar unter die Fahrbahn ein horizontaler Windträger gelegt. Die Verticalversteifungen fehlen; dafür sind aber die beiden Tragbögen nicht nur durch Normalstäbe  $N'$ , sondern auch durch Diagonalen  $D'$  verbunden.

Die Berechnung des Windträgers erfolgt nach den vorhin abgeleiteten Formeln (No. 224 bis 229); man ersetze  $w_p$  durch  $w_p - w_b$ , weil der auf die Tragbögen wirkende Winddruck  $w_b$  durch diese selbst aufgenommen wird.

Die Diagonalen  $D'$  werden zunächst so berechnet, als gehörten sie einem durch  $w_b$  gleichmässig über die ganze Länge belasteten horizontalen Fachwerkbalken an; dann wird das Resultat mit  $\sec \tau$  multiplicirt, wo  $\tau$  den Neigungswinkel der Diagonale  $D'$  gegen die Horizontale bedeutet. Ist  $s_m$  die Länge der Sehne des Tragbogens zwischen den Verticalen  $m-1$  und  $m$ ,  $d_m'$  die Länge der Diagonale  $D'$  und  $b$  der Abstand der beiden Tragbögen, so folgt

$$\sec \tau = \sqrt{\frac{s_m^2 + b^2}{\lambda^2 + b^2}}$$

und da nach Formel 227 für einen gleichmässig über die ganze Stützweite mit  $w_b$  pro Längeneinheit belasteten Träger

$$\mathfrak{H}_m = w_b x_m''$$

ist, die gesuchte Spannkraft

$$237) \quad D_m' = w_b x_m'' \sqrt{\frac{s_m^2 + b^2}{\lambda_m^2 + b^2}} \frac{\sqrt{\lambda_m^2 + b^2}}{b} = w_b x_m'' \sqrt{1 + \frac{s_m^2}{b^2}}.$$

Für die Normalen hat man

$$238) \quad N_m' = -w_b x_m''.$$

Die Rechnung ist wieder insofern unexact, als die Tragbögen durch die Kräfte  $w_b$  auf Biegung beansprucht werden, während bei Berechnung der  $D'$  und  $N'$  an den Angriffsstellen der verticalen Gelenke mit verticalen Axen angenommen wurden.

Die eventuell an den Enden angeordneten Versteifungen sind nach den Formeln 231 bis 235 zu berechnen; in diese setze man

$$239) \quad \mathfrak{H} = (w_v + w_p - w_b) l + 3 \frac{0,10 P (2l - a)}{2l}.$$

### Anordnung III (Fig. 137).

Hier fehlt der sub I und II unter der Fahrbahn liegende Windträger. Die Tragbögen sind wie vorhin durch ein Fachwerk verbunden, welchem die bei den früheren Anordnungen durch den oberen Windträger aufgenommenen Horizontalkräfte durch Verticalversteifungen übermittelt werden. Diese letzteren werden nach den für die Endversteifung aufgestellten Formeln 231 bis 235 berechnet, man setze

$$240) \quad \mathfrak{H} = 3 \cdot 0,10 P - \frac{2 \cdot 0,10 P a}{\lambda} + (w_p - w_b + w_v) \lambda,$$

indem man über der Versteifung die Mittelaxe der Lokomotive annimmt (Fig. 138).

Für die Diagonalen  $D'$  und die Normalen  $N'$  findet man

$$241) \quad D_m' = \left\{ w_p x_m'' + \frac{w_v x_m'^2}{4l} + 0,15 \frac{P(x_m' - a)}{l} \right\} \sqrt{1 + \frac{s_m^2}{b^2}}$$

$$242) \quad N_m' = - \left\{ w_p x_m'' + \frac{w_v x_m'^2}{4l} + 0,15 \frac{P(x_m' - a)}{l} \right\}.$$

Die Tragbögen werden als Gurte des Windverbandes durch Axialkräfte beansprucht, welche man durch Multipliciren der aus 224 und 225 für einen horizontalen Fachwerkträger gewonnenen Werthe mit  $\frac{s_m}{\lambda_m}$  erhält. Thatsächlich werden aber die Tragbögen in horizontalem Sinne auf Biegung beansprucht, doch begegnet die Ermittlung der Biegungsspannungen sowie des Einflusses der Continuität der Tragbögen auf die  $D'$  und  $N'$  grossen Schwierigkeiten. Da weiter die Tragbögen bei der Anordnung III eine wesentliche Mehrbelastung noch dadurch erfahren, dass die Versteifungen verticale Kräfte  $R = \mathfrak{S} \frac{h_m}{b}$  auf dieselben übertragen, so ist diese Anordnung unter allen Umständen zu verwerfen.

## Abschnitt VII.

### Berechnung der Widerlager und Pfeiler.

#### § 24.

#### Fundamentalformeln.

Wirkt auf einen Pfeiler von der Breite  $b$  und der Tiefe 1 (Figur 139) irgend eine Kraft  $R$ , deren Componenten in horizontaler und verticaler Richtung beziehungsweise  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{B}$  sind, so wird das Element eines Pfeilerquerschnittes durch eine Normalspannung  $N$  und eine Tangentialspannung (Schubspannung)  $T$  afficirt. Der Abstand  $z$  dieses Elementes vom Mittelpunkt  $m$  des Querschnittes wird im Sinne von  $\mathfrak{S}$  positiv gezählt; die Spannungen  $N$  und  $T$  werden positiv angenommen, sobald sie den Kräften  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{S}$  entgegenwirken.  $\mathfrak{B}$  ist abwärts gerichtet positiv.

Wird mit  $\gamma_m$  das Gewicht pro Volumeneinheit Mauerwerk bezeichnet\*), so lauten die Bedingungen für Gleichgewicht zwischen den inneren und äusseren Kräften:

$$\int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} T dF = \mathfrak{S}; \quad \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} N dF = \mathfrak{R}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} N z dF = \mathfrak{M}$$

wo  $\mathfrak{R} = \gamma_m b y + \mathfrak{B}$  den Normaldruck

und  $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}(y - \eta) - \mathfrak{B} \frac{b}{2}$  das Angriffsmoment bedeutet.

\*) Später wird mit  $\gamma_e$  das Gewicht der Erde bezeichnet werden.

1) Die Normalspannung  $N$ . Bezüglich des Gesetzes, nach welchem sich  $N$  mit  $z$  ändert, wird zur Zeit allgemein dieselbe Hypothese gemacht, welche seit Navier der Theorie der Biegungsfestigkeit gerader Stäbe zu Grunde gelegt worden ist. Es ist dies die — für Mauerwerkkörper allerdings nicht einwandfreie, weil durch Versuche bislang nicht bestätigte — Annahme, dass  $N$  eine lineare Function von  $z$  ist, also unter der Form

$$N = \alpha + \beta z$$

erscheint. Die von  $N$  abhängigen Gleichgewichtsbedingungen gehen dann über in

$$\alpha \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} dF + \beta \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} z dF = \mathfrak{N}$$

$$\alpha \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} z dF + \beta \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} z^2 dF = \mathfrak{M}$$

und folgt aus denselben, da  $\int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} z dF = 0$  und  $\int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} z^2 dF = \frac{1}{12} b^3$  ist,

$$\alpha + \frac{\mathfrak{N}}{b}; \quad \beta = \frac{12 \mathfrak{M}}{b^3}.$$

Die Normalspannung wird

$$243) \quad N = \frac{\mathfrak{N}}{b} + \frac{12 \mathfrak{M} z}{b^3}$$

und erhält man speciell für  $z = \pm \frac{1}{2} b$

$$244) \quad \begin{cases} k = \frac{\mathfrak{N}}{b} \left( 1 + \frac{6 \mathfrak{M}}{b \mathfrak{N}} \right) \text{ resp.} \\ k_1 = \frac{\mathfrak{N}}{b} \left( 1 - \frac{6 \mathfrak{M}}{b \mathfrak{N}} \right) \end{cases}$$

Ein negatives Resultat bedeutet eine Zugspannung.

Wird  $N = f(z)$  als Curve dargestellt, so erhält man — der Hypothese gemäss — eine Gerade, deren Endordinaten  $k$  und  $k_1$  sind. Je nachdem  $k_1$  positiv, Null oder negativ ist, ergeben sich die Darstellungen in Fig. 140. Die in dieser Figur schraffirten Flächen nennt man zuweilen Drucktrapeze.

Es werde jetzt das Gewicht  $\gamma_m y b$  des Pfeilers Fig. 141 oberhalb der betrachteten Fuge mit der auf den Pfeiler wirkenden Kraft  $R$  zu der Resultirenden  $D$  (Fugendruck) zusammengesetzt. Der Schnittpunkt  $s$  der Kraft  $D$  mit der Fuge heisst der Stützpunkt der Fuge; sein geometrischer Ort wird die Stützlinie des Pfeilers genannt. Der Abstand des Stützpunktes vom Fugenmittelpunkt sei  $e$  (Druckexcentricität). Dann findet man, nachdem man  $D$  im Punkte  $s$  in  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{S}$  zerlegt hat,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N} e$$

mithin

$$245) \quad k = \frac{\mathfrak{N}}{b} \left\{ 1 + \frac{6e}{b} \right\}; \quad k_1 = \frac{\mathfrak{N}}{b} \left\{ 1 - \frac{6e}{b} \right\}.$$

Soll  $k_1$  nicht negativ werden, so muss  $e < \frac{b}{6}$  sein.

Die Punkte  $L$  und  $R$  (Fig. 142) im Abstände  $\frac{b}{6}$  vom Mittelpunkte der Fuge heissen die Kernpunkte der Fuge, ihren geometrischen Ort nennt man die Kernlinie und die Fläche zwischen den Kernlinien den Kern des Pfeilerprofils, oder kurz den Kern des Pfeilers, indem man hierbei die Tiefe = Null denkt. Ist  $e = \frac{1}{6}b$ , so folgt:

$$246) \quad k = \frac{2\mathfrak{N}}{b}; \quad k_1 = 0.$$

Diejenige Pfeilerbreite  $b$ , bei welcher  $k_1 = 0$  wird, bestimmt sich aus der Gleichung

$$\frac{b}{6} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = \frac{\mathfrak{S}(y-\eta) - \mathfrak{B} \frac{b}{2}}{\gamma_m b y + \mathfrak{B}}$$

und zwar wird

$$247) \quad b = \frac{-2\mathfrak{B} + \sqrt{6\mathfrak{S}(y-\eta)\gamma_m y + 4\mathfrak{B}^2}}{\gamma_m y}.$$

Soll eine bestimmte Pressung  $k$  sich ergeben, so muss  $b$  aus der Gleichung

$$k = \frac{\mathfrak{N}}{b} \left\{ 1 + \frac{6\mathfrak{M}}{b\mathfrak{N}} \right\}$$

berechnet werden. Man findet nach Einführen der Werthe  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$

$$248) \quad b = \frac{-\mathfrak{B} + \sqrt{6\mathfrak{S}(y-\eta)(k - \gamma_m y) + \mathfrak{B}^2}}{k - \gamma_m y}$$

Vielfach wird, wenn der Stützpunkt ausserhalb des Kerns im Abstände  $\xi$  (Fig. 143) von der stärkst gepressten Kante liegt, die Annahme gemacht, es vertheile sich der Normaldruck nur auf den Theil  $3\xi$  der Fuge und deshalb

$$249) \quad k = \frac{2\mathfrak{N}}{3\xi}$$

gesetzt. Da nun  $\xi = \frac{b}{2} - e = \frac{b}{2} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$  ist, folgt

$$3k \left( \frac{b}{2} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} \right) = 2\mathfrak{N}$$

und nach Einsetzen der Werthe für  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$

$$250) \quad b = \frac{-\mathfrak{B}}{\gamma_m y} + \sqrt{\frac{6k\mathfrak{S}(y-\eta) + 4\mathfrak{B}^2}{\gamma_m y(3k - 4y\gamma_m)} + \frac{\mathfrak{B}^2}{\gamma_m^2 y^2}}$$

Es darf dieses Verfahren mit demselben Rechte zugelassen werden, mit dem man bei Berechnung der Spannung  $N$  von der Navier'schen Hypothese ausgeht.

**2) Die Schubspannungen.** In den Seitenflächen eines an der Stelle  $yz$  herausgetrennten Elementarparallelepipeds (Fig. 144) mit den Abmessungen  $dz$ ,  $dy$  und 1 wirken die Spannungen

$$\begin{aligned} N &; & N + \frac{dN}{dy} dy \\ T &; & T + \frac{dT}{dy} dy \\ T' &; & T' + \frac{dT'}{dz} dz. \end{aligned}$$

Das Gewicht des Elementes ist  $\gamma_m dz dy$ . Bei Aufstellung der Momentengleichung für eine durch den Schwerpunkt normal zur Ebene ( $zy$ ) gelegte Axe dürfen die Differentialien der Spannungen, als an unendlich kleinen Hebelarmen wirkend, vernachlässigt werden, so dass sich die Bedingung

$$T'(dy1) dz = T(dz1) dy *$$

d. i. 
$$T' = T$$

ergiebt. Weiter muss sein

$$\frac{dT}{dy} dy = 0$$

$$\frac{dT'}{dz} dz(dy1) + \frac{dN}{dy} dy(dz1) = \gamma_m dz dy$$

woraus

$$\frac{dT'}{dz} = \frac{dT}{dz} = -\left(\frac{dN}{dy} - \gamma_m\right).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} N &= \frac{12Mz}{b^3} + \frac{N}{b} \\ &= \frac{12z}{b^3} \left\{ \mathfrak{S}(y - \eta) - \mathfrak{B} \frac{b}{2} \right\} + \gamma_m \frac{yb + \mathfrak{B}}{b} \end{aligned}$$

$$\frac{dN}{dy} - \gamma_m = \frac{12z \mathfrak{S}}{b^3}$$

$$T = -\frac{6\mathfrak{S}}{b^3} z^2 + C,$$

und die Integrationsconstante  $C = \frac{6\mathfrak{S}}{b^3} \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ; denn es muss  $T = 0$  werden für  $z = \frac{b}{2}$ . Man erhält also:

$$251) \quad T = \frac{3\mathfrak{S}}{2b} \left(1 + 4 \frac{z^2}{b^2}\right).$$

Werden die Werthe  $T$ , den Abscissen  $z$  entsprechend, als Ordinaten aufgetragen, so liegen deren Endpunkte auf einer Parabel, deren Pfeil

$$252) \quad T_{\max} = \frac{3\mathfrak{S}}{2b} \text{ ist.}$$

\*) Neben die Spannungen sind in Klammer die Flächen gesetzt, in welchen die Spannungen wirken.

3) **Hauptspannungen, Gleitflächen.** Von dem Elementarkörper, in dessen Seitenflächen die Spannungen  $N$  und  $T$  wirken, wird durch einen unter  $\alpha$  gegen die  $z$ -Axe geführten Schnitt ein dreiseitiges Prisma Fig. 145 mit den Seitenflächen  $f_z$ ,  $f_y$  und  $f$  losgetrennt und  $\alpha$  so gewählt, dass in der Fläche  $f$  eine Hauptspannung  $S$  wirkt, d. h. dass Fläche  $f$  nur durch eine Normalspannung afficirt wird. Dann wird die Summe der parallel zu  $f$  resp. der normal zu  $f$  wirkenden Kräfte gleich Null gesetzt. Man erhält

$$Nf_z \sin \alpha + Tf_y \sin \alpha = Tf_z \cos \alpha$$

$$S = Nf_z \cos \alpha + Tf_y \cos \alpha + Tf_z \sin \alpha$$

und wegen  $f_z = f \cos \alpha$ ;  $f_y = f \sin \alpha$

$$\text{I} \quad \frac{N}{2} \sin 2\alpha = T(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$S = N \cos^2 \alpha + 2T \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{d. i.}$$

$$\text{II} \quad S = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N \cos 2\alpha \left(1 + \frac{2T}{N} \operatorname{tg} 2\alpha\right).$$

Aus I folgt

$$253) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2T}{N}$$

und zwar entsprechen, da  $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(180^\circ + 2\alpha)$  ist, dieser Gleichung zwei um  $90^\circ$  differirende Winkel  $\alpha$ , so dass die beiden durch Hauptspannungen afficirten Flächen auf einander senkrecht stehen. Die Gleichung II geht nun über in

$$S = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N \sec 2\alpha = \frac{1}{2}N \pm \frac{1}{2}\sqrt{N^2 + 4T^2}.$$

In der Folge mögen die Hauptspannungen mit  $A$  und  $B$  bezeichnet werden, so zwar dass

$$254) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}\sqrt{N^2 + 4T^2} = A \\ \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}\sqrt{N^2 + 4T^2} = B \end{cases}$$

gesetzt wird.  $A$  ist stets eine Druckspannung,  $B$  stets eine Zugspannung.

Hätte man den Winkel  $\alpha$  beliebig gewählt und die Spannung  $S$  in der Schnittfläche  $f$  als Function von  $\alpha$  dargestellt, so hätte sich die grösste Spannung aus der Bedingung

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0$$

ergeben. Da nun  $\frac{dA}{d\alpha} = 0$  und  $\frac{dB}{d\alpha} = 0$  ist, folgt der Satz:

Die Hauptspannungen  $A$  und  $B$  sind die Maximalspannungen.

Um nun die Spannungen für ein beliebiges Flächenelement zu bestimmen, gehen wir von dem Parallelepipedon aus, dessen Seitenflächen durch  $A$  und  $B$  afficirt werden und trennen wieder durch einen

unter  $\beta$  geführten Schnitt ein dreiseitiges Prisma Fig. 146 heraus, dessen Seitenflächen  $f_a$ ,  $f_b$  und  $f$  sind. Die Spannungen in  $f$  seien  $N_\beta$  und  $T_\beta$ . Es folgt dann

$$N_\beta f = A f_a \cos \beta + B f_b \sin \beta$$

$$T_\beta f = A f_a \sin \beta - B f_b \cos \beta$$

woraus, wegen  $f_a = f \cos \beta$  und  $f_b = f \sin \beta$

$$N_\beta = A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta$$

$$T_\beta = \frac{1}{2}(A - B) \sin 2\beta$$

sich ergibt. Die grösste Schubspannung (Hauptschubspannung genannt) entspricht  $\beta = 45^\circ$  und wird

$$255) \quad T_{\max} = \frac{1}{2}(A - B).$$

Die zugehörige Normalspannung ist

$$256) \quad N = \frac{1}{2}(A + B).$$

Die Normalspannung  $N_\beta$  wird Null, sobald

$$257) \quad \cotg \beta = \sqrt{\frac{-B}{A}}$$

ist. Dieser Werth ist reell, da  $B$  stets negativ ist. Die durch Gleichung 257 der Lage nach bestimmte Fläche heisst Gleitfläche. Die Spannung in derselben ist, wegen

$$\begin{aligned} \sin 2\beta &= \frac{2 \cotg \beta}{1 + \cotg^2 \beta} = \frac{2\sqrt{-BA}}{A - B}, \\ T_\beta &= \sqrt{-BA} = T. \end{aligned}$$

Auf einfachere Weise gelangt man zu der Lage der Gleitfläche, wenn man den Winkel  $\beta'$  derselben gegen die Richtung  $z$  bestimmt und an dem dreiseitigen Prisma Fig. 147 die Gleichgewichtsbedingungen aufstellt:

$$N f_z \cos \beta' = T f_z \sin \beta' + T f_y \cos \beta'$$

$$T_\beta f = N f_z \sin \beta' + T f_z \cos \beta' - T f_y \sin \beta'.$$

Die erste Gleichung liefert

$$258) \quad \tg \beta' = \frac{N}{2T},$$

und die zweite

$$\begin{aligned} T_\beta &= N \sin \beta' \cos \beta' + T \cos^2 \beta' - T \sin^2 \beta' \\ &= \frac{N \tg \beta' + T - T \tg^2 \beta'}{1 + \tg^2 \beta'}. \end{aligned}$$

Setzt man hierin  $N = 2T \tg \beta'$ , so folgt

$$259) \quad T_\beta = T.$$

**4) Zahlenbeispiel.** (Fig. 148.) Ein Pfeiler aus Backsteinen in Cementmörtel ist 8<sup>m</sup> hoch, 1<sup>m</sup> tief und wird durch  $\mathfrak{S} = 80000^k$ ,  $\mathfrak{B} = 60800^k$  beansprucht. Die zulässige Druckspannung betrage 70000<sup>k</sup> pro  $\square^m = 7,0^k$  pro  $\square^{cm}$ , die Zugfestigkeit des Steines und des Mörtels

sei gleich gross. Die Breite  $b$  soll zunächst so bestimmt werden, dass die Spannungen  $N$  sämtlich Pressungen sind; es ist dann nach No. 247 wegen  $\gamma_m = 1600^k$  pro Cubikmeter für  $y = 8^m$

$$b = \frac{-2 \cdot 60800 + \sqrt{6 \cdot 80000 \cdot 4 \cdot 1600 \cdot 8 + 60800^2 \cdot 4}}{1600 \cdot 8} = 6^m.$$

Die Normalspannung in der Sohle ist in Kilogr. pro  $\square^{cm}$

$$N = \frac{\mathfrak{N}}{100b} + \frac{12\mathfrak{M}z}{100b^3}$$

worin

$$\mathfrak{N} = 60800 + 1600 \cdot 6 \cdot 8 = 137600^k$$

$$\mathfrak{M} = 80000 \cdot 4 - 60800 \cdot 3 = 137600^{km*})$$

Die Schubspannung in der Sohle und in jeder Fuge unterhalb der Kraft  $\mathfrak{S}$  ist

$$T = \frac{3\mathfrak{S}}{200b} \left\{ 1 - \frac{4z^2}{b^2} \right\}$$

und ebenso gross ist nach 259 die Schubspannung in den nur auf Abschreibung beanspruchten Gleitflächen.

Aus  $N$  und  $T$  kann man mit Hilfe der Formeln 254 die Hauptspannungen  $A$  und  $B$  berechnen, und sind die Resultate dieser Ermittlungen in folgender Tabelle zusammengestellt. Die graphischen Darstellungen zeigt Figur 149.

$z$	$N$	$T$	$A$	$B$
+ 0,500 <i>b</i>	4,59	0,00	4,59	— 0,00
+ 0,375 <i>b</i>	4,01	0,88	4,20	— 0,38
+ 0,250 <i>b</i>	3,44	1,50	4,00	— 1,12
+ 0,125 <i>b</i>	2,87	1,88	3,80	— 1,76
0	2,29	2,00	3,45	— 2,32
— 0,125 <i>b</i>	1,72	1,88	2,93	— 2,41
— 0,250 <i>b</i>	1,15	1,50	2,18	— 2,06
— 0,375 <i>b</i>	0,57	0,88	1,21	— 1,28
— 0,500 <i>b</i>	0,00	0,00	0,00	— 0,00

Es entstehen hiernach Zugspannungen, welche die in der Regel als zulässig erachteten bedeutend überschreiten. So wird vielfach für Mauerwerk die zulässige Zugspannung nur  $1^k$  pro  $\square^{cm}$  angegeben, während zuverlässige Angaben für die zu gestattenden Schubspannungen fehlen.\*\*)

\*)  $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = 1^m = \frac{1}{6} b$ .

\*\*\*) Namentlich bleibt — wenn die vorstehenden Rechnungen praktisch verwendet werden sollen — anzugeben, wie gross  $T$  werden darf, wenn die durch  $T$  afficirte Fläche gleichzeitig durch eine bestimmte Zug- oder eine Druckspannung beansprucht wird.

Wird  $b = 5^m$  gewählt, so findet man

$$\mathfrak{N} = 60800 + 1600 \cdot 5 \cdot 8 = 124800$$

$$\mathfrak{M} = 80000 \cdot 4 - 60800 \cdot 2,5 = 168000$$

und erhält die folgenden Werthe (Fig. 150).

$z$	$N$	$T$	$A$	$B$
+ 0,500 $b$	6,63	0,00	6,63	— 0,00
+ 0,375 $b$	5,62	1,05	5,83	— 0,19
+ 0,250 $b$	4,61	1,80	5,23	— 0,62
+ 0,125 $b$	3,60	2,25	4,68	— 1,08
0	2,60	2,40	4,03	— 1,43
— 0,125 $b$	1,59	2,25	3,17	— 1,58
— 0,250 $b$	0,58	1,80	2,11	— 1,53
— 0,375 $b$	— 0,43	1,05	0,86	— 1,29
— 0,500 $b$	— 1,44	0,00	0,00	— 1,44

Es sind also die Zugspannungen in diesem schwächeren Pfeiler kleiner als in dem 6<sup>m</sup> starken. Die Schubspannungen haben eine Vergrößerung erfahren. Der Abstand des Stützpunktes von der stärkst gepressten Kante ist

$$\xi = \frac{b}{2} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = 2,5 - \frac{168000}{124800} = 1,21^m$$

und würde aus der Annahme, dass sich  $\mathfrak{N}$  nur über den Theil  $3\xi$  der Fuge vertheilt, nach No. 249 eine Pressung

$$k = \frac{2\mathfrak{N}}{3\xi} = \frac{2 \cdot 124800}{3 \cdot 1,21} = 68760^k \text{ pro } \square^m \\ = 6,88^k \text{ pro } \square^{cm}$$

sich ergeben.

**5) Praktisches Verfahren.** Die vorstehenden Untersuchungen sollten darlegen, wie die Schubspannungen  $T$  und die Hauptspannungen  $A$  und  $B$  berechnet werden können, sobald das Gesetz bestimmt ist, nach welchem sich  $N$  mit  $z$  ändert. Vorläufig erscheint es aber gewagt, auf ein so unsicheres Fundament, wie dies die Navier'sche Hypothese in ihrer Anwendung auf den vorliegenden Fall ist, eine consequente Ermittlung aller Spannungen zu bauen, und ziehen wir es vor — unter Berufung auf die durch die Praxis erwiesene Zulässigkeit dieses bislang allgemein gebräuchlichen Verfahrens — die Abmessungen eines Pfeilers so zu bemessen, dass die grösste Pressung  $k$  innerhalb der gestatteten Grenzen bleibt. Es wird hierbei in der Regel von der Formel 245 oder 249 ausgegangen, je nachdem der Stützpunkt im Kern liegt oder nicht. Weiter wird der Pfeiler so stark gemacht, dass selbst dann ein Gleiten auf der unmittelbar unter  $\mathfrak{S}$  gelegenen Fuge nicht eintritt, sobald der

Mörtel beseitigt gedacht wird, also nur die Reibungswiderstände der Kraft  $\mathfrak{G}$  entgegenwirken. Die Bedingung hierfür lautet:

$$260) \quad \mathfrak{G} \leq f \left\{ \mathfrak{B} + \gamma_m b \eta \right\} .$$

Darin ist  $f$  der Reibungscoefficient. Derselbe darf = 0,7 gesetzt werden.

Ein nach diesen Grundsätzen berechneter Pfeiler ist, den bis jetzt vorliegenden Erfahrungen gemäss, ausreichend und zweckmässig.

Der späteren Anwendung der hier vorgetragenen Theorie wegen, bringen wir noch die Gleichung No. 245 auf die Form

$$261) \quad k = \frac{6}{b^2} \left\{ \frac{b}{6} + e \right\} \mathfrak{M} = \frac{6 \mathfrak{M}_R}{b^2}$$

worin

$$262) \quad \mathfrak{M}_R = \mathfrak{R} \left( \frac{b}{6} + e \right)$$

das Angriffsmoment für den Kernpunkt  $R$  ist.

Liegt der Stützpunkt  $s$  ausserhalb des Kerns und will man die Annahme machen (vergl. No. 249 und Fig. 143), es vertheile sich  $\mathfrak{R}$  nur auf das Stück  $3\xi$  der Fuge, so verstehe man unter  $\mathfrak{M}_R'$  das Moment für den Kernpunkt  $R'$  der Fuge  $3\xi$ , setze in Formel No. 261  $b = 3\xi$  und

$$263) \quad k = \frac{2 \mathfrak{M}_R'}{3 \xi^2} .$$

## § 25.

### Die Berechnung des Landwiderlagers.

Auf das Landwiderlager einer Bogenbrücke wirken ausser dem eigenen Gewichte des Widerlagers:

- 1) der Kämpferdruck  $K$  mit den Componenten  $A$  und  $H$  (Fig. 151),
- 2) der Erddruck  $E$  mit den Componenten  $E_v$  und  $E_h$ .

Die Kräfte  $A$  und  $H$  setzen sich zusammen aus  $A_p$  und  $H_p$ , herrührend von der permanenten Belastung des Bogens, und aus  $A_v$  und  $H_v$ , entsprechend der mobilen Belastung. Es sei  $H$  so gross, dass, trotz dem Erddruck, der Stützpunkt der an der Stelle  $y$  angenommenen Fuge  $CC_1$  zwischen  $C$  und dem Mittelpunkte der Fuge liegt, so dass die grösste Pressung bei  $C$  auftritt. Dieselbe ist bei der Tiefe 1\*) des Widerlagers:

$$N = \frac{6 \mathfrak{M}_R}{b^2} ,$$

wo  $\mathfrak{M}_R$  das Angriffsmoment in Bezug auf den Kernpunkt  $R$  ist. Der bei hohen Widerlagern, bei belasteter Hinterfüllungserde und unbelastetem Bogen vorkommende Fall, dass die grösste Pressung bei  $C_1$  entsteht, soll später behandelt werden.

\*) Tiefe des Widerlagers bedeutet die Abmessung normal zur Brückenaxe.

Bedeutet  $G$  das Gewicht der oberhalb  $CC_1$  befindlichen Mauer einschliesslich des Gewichtes der auf den Absätzen im Rücken der Mauer lagernden Erde, so wird mit Bezugnahme auf die in Fig. 151 angegebenen Bezeichnungen:

$$\mathfrak{M}_R = (H_p + H_v)z - E_h \frac{y}{3} + Gd + E_v \frac{2b}{3} - (A_p + A_v)c.$$

Den von der mobilen Belastung des Bogens unabhängigen Theil dieses Ausdruckes bezeichnen wir mit  $\mathfrak{M}_p$ , den davon abhängigen mit  $\mathfrak{M}_v$ , schreiben also:

$$\begin{aligned} H_p z - E_h \frac{y}{3} + Gd - A_p c + E_v \frac{2b}{3} &= \mathfrak{M}_p, \\ H_v z - A_v c &= \mathfrak{M}_v, \\ k &= \frac{6\{\mathfrak{M}_p + \mathfrak{M}_v\}}{b^2} \end{aligned}$$

und untersuchen, wann dieser Werth ein Maximum wird.

**Ermittlung von max  $\mathfrak{M}_v$ .** Es soll ein analoges Verfahren gewählt werden, wie bei Bestimmung der grössten Momente  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$  in Bezug auf die Kernpunkte der Bogenquerschnitte.

1) Der Bogen hat Kämpfergelenke und ein Scheitelgelenk Fig. 152. Es ist  $z = y - h_2$ , weil die Kämpferdrücke durch die Gelenke gehen. Zieht man die Kämpferdrucklinie  $BS$  und von  $R$  durch  $A$  eine Gerade bis zum Schnittpunkte  $E$  mit der  $BS$ , so entspricht einer durch  $E$  gehenden Last  $P$  das Moment  $\mathfrak{M}_v = 0$ , während eine Last  $P'$  rechts von  $E$  ein positives und eine Last  $P''$  links von  $E$  ein negatives  $\mathfrak{M}_v$  erzeugt. Das grösste positive  $\mathfrak{M}_v$  und mithin die grösste Pressung  $k$  entsteht bei ausschliesslicher Belastung der Strecke  $BE$ .

Um die Influenzlinie für das Moment zu erhalten, beachte man, dass

$$\mathfrak{M}_v = Hz - Ac = z \left\{ H - \frac{Ac}{z} \right\} = zH_i$$

ist, und der ideelle Horizontalschub  $H_i$  durch Subtraction des Werthes  $\frac{Ac}{z}$  von der Ordinate der ersten Curve  $H$  gefunden wird. Letztere besteht aus den Geraden  $AD$  und  $BD$ , so zwar, dass  $D_1D = \frac{l}{2h}$  ist, während  $\frac{Ac}{z} = \frac{Pb}{2l}z$  durch eine Gerade dargestellt wird, die durch den Schnittpunkt  $E'$  der Belastungsscheide mit der ersten Curve  $H$  gehen muss\*). Es ist also die in Fig. 152 schraffierte Fläche die Influenzfläche für  $\mathfrak{M}_v$ ; der Multiplikator ist  $z$ ; die Fläche rechts von  $E'$  ist positiv. Wie nun mit Hilfe dieser Fläche der Einfluss eines Systemes concentrirter Lasten auf das Moment  $\mathfrak{M}_v$  ermittelt wird, kann als bekannt vorausgesetzt werden.

\*) Vergl. die Construction der Influenzfläche für  $\mathfrak{M}_o$  auf Seite 82.

Soll  $\mathfrak{M}_v$  durch Rechnung bestimmt werden, so ermittle man (Fig. 153)

$$264) \quad \xi = l \frac{zl - hc}{zl + hc},$$

rücke von  $B$  aus einen Zug bis in die Nähe von  $E$  vor, so zwar, dass eine schwere Last über dem Scheitel steht und eine Verschiebung des Zuges nach links resp. rechts beziehungsweise\*)

$$265) \quad \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} > \frac{\xi}{l + \xi} \text{ und } \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} < \frac{\xi}{l + \xi}$$

liefert und berechne schliesslich

$$266) \quad \max \mathfrak{M}_v = \frac{z}{h} \left\{ \frac{\xi}{l + \xi} \Sigma P b - \Sigma P' b' \right\}.$$

Zu beachten bleibt, dass die Pfeiltiefe gleich 1 gesetzt wurde. (Wird z. B. eine zweigeleisige Eisenbahnbrücke durch ein 8<sup>m</sup> tiefes Widerlager gestützt und sind  $P$  die Axenbelastungen, so ist das aus No. 266 berechnete  $\max \mathfrak{M}_v$  durch 4 zu dividiren.)

Liegt eine gleichmässig vertheilte Verkehrslast vor, so wird

$$267) \quad \max \mathfrak{M}_v = \frac{vzl\xi}{2h}.$$

2) Der Bogen hat Kämpfergelenke, aber kein Scheitelgelenk (Fig. 154). Es ist wie vorhin  $z = y - h_2$ . Die Kämpferdrucklinie ist eine horizontale Gerade\*\*) im Abstände  $\frac{4h}{3}$  vom Kämpfer; die erste Curve  $H$  ist eine Parabel mit dem Pfeil  $\frac{3}{8} \frac{l}{h} 1^{\text{tonn}}$ , oder wenn Uebertragung der Last durch Querträger vorliegt, ein in diese Parabel einbeschriebenes Polygon. Man zieht nun die Gerade  $RAE$  bis zur Kämpferdrucklinie, hierauf  $EE'$  vertical bis zur ersten Curve  $H$  und schliesslich  $BE'F$ , um in der schraffirten Fläche die Influenzfläche zu erhalten. Der Multiplicator ist  $z$ .

Durch Rechnung findet man (vergl. Seite 105 und 106)

$$268) \quad \xi = 2 \frac{3lz - 2hc}{3z},$$

$$269) \quad \max \mathfrak{M}_v = \frac{3z}{8hl} \left\{ \mathfrak{F}_n \left[ \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 + c_t^2 \right] - \mathfrak{F}_n \right\},$$

welcher Ausdruck mit Hülfe der Tabellen auf Seite 40 bis 43 in der auf Seite 106 erörterten und dort durch ein Zahlenbeispiel erläuterten Weise behandelt wird.

\*) Vergl. Berechnung von  $\min \mathfrak{M}_v$  auf Seite 85.

\*\*) Auch wenn die Uebertragung der Last durch Zwischenträger berücksichtigt werden soll, liefert die Beibehaltung dieser Geraden als Kämpferdrucklinie genügend scharfe Resultate.

Ist der Bogen durch eine gleichmässige Verkehrslast beansprucht, so folgt

$$270) \quad \max \mathfrak{M}_v = \frac{vz\xi^3}{16hl}.$$

Das Moment  $\mathfrak{M}_v$  muss schliesslich noch um  $H_t z$  vergrössert werden, wo  $H_t$  der Horizontalschub des Bogens bei Erhöhung der Temperatur ist. (Vergl. Formel 68.)

3) Beim Bogen ohne Gelenk (Fig. 155) empfiehlt es sich, eine gleichmässige mobile Belastung vorauszusetzen, da hier der Werth einer jeden subtileren Rechnung sehr zweifelhaft ist. Man zeichne die Kämpferdrucklinie, die Kämpferdruckumhüllungslinie, die zweiten Curven  $A$ ,  $H$  und  $\mathfrak{M}_A$  (vergl. Seite 119, 120 und 123) und ziehe von  $B$  aus eine Tangente an die Umhüllungslinie, um in deren Schnittpunkte  $E$  mit der Kämpferdrucklinie die Belastungsscheide zu erhalten. Dann nehme man den Theil  $BE$  belastet an, messe unter  $E$  die Werthe  $A$ ,  $H$  und  $\mathfrak{M}_A$ , berechne  $z' = \frac{\mathfrak{M}_A}{H}$  (Fig. 155), hierauf  $z'' = z + z'$  und

$$\max \mathfrak{M}_v = H z'' - A c.$$

Sollen concentrirte Lasten auf dem Bogen angenommen werden, so wird die Influenzcurve für  $\mathfrak{M}_v$  ganz analog so construirt, wie auf Seite 122 und in Fig. 111 die Influenzcurve für  $\mathfrak{M}_v$  gewonnen wurde.

Einer Erhöhung der Temperatur des Bogens entspricht

$$\mathfrak{M}_v = H_t \left\{ \frac{2h}{3} + z \right\}.$$

$H_t$  ist aus Formel 73 zu berechnen.

**Bestimmung von  $\mathfrak{M}_p$ .** Es bedeute  $p$  die permanente Belastung der ganzen Brücke pro Längeneinheit der Stützweite und  $t$  die Tiefe des Widerlagers; weiter sei die Bogenaxe parabolisch gedacht. Dann ist —

$$\text{mit } p' = \frac{p}{t} —$$

$$H_p = \frac{p'l^2}{2h}; \quad A_p = p'l; \quad \mathfrak{M}_A = 0;$$

weiter  $z = y - h_2$  und

$$\mathfrak{M}_p = \frac{p'l^2}{2h} (y - h_2) + Gd - p'lc - E_h \frac{y}{3} + E_v \frac{2b}{3}.$$

Darein setzen wir — genügend genau\*) —

$$271) \quad E_v = 0; \quad E_h = \frac{1}{2} \gamma_c h^2 \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\rho}{2} \right);$$

$$G = \gamma_m b y; \quad d = \frac{b}{6}; \quad c = \frac{b}{3},$$

\*) Bezüglich Berechnung von  $E$  verweisen wir auf den später erscheinenden Band: Theorie des Erddruckes, der Futtermauern und Brückenwiderlager. Bei Berechnung von  $G$  ist die Differenz der Gewichte  $\gamma_c$  und  $\gamma_m$  vernachlässigt und angenommen, dass das Gewicht des Theiles  $FJST$  (Fig. 151) vom Auflagerdruck  $A$  in Abzug gebracht wird.

wobei  $\varrho$  den natürlichen Böschungswinkel und  $\gamma_e$  das Gewicht der Volumeneinheit der Erde bedeutet. Es ist dann

$$\mathfrak{M}_p = \frac{p' l^2}{2h} (y - h_2) + \gamma_m \frac{b^2 y}{6} - p' \frac{l b}{3} - \frac{1}{6} \gamma_e h^3 \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varrho}{2} \right).$$

Durchschnittlich ist  $\varrho = 37^\circ$  und erhält man dann

$$272) \quad E_h = \frac{1}{8} \gamma_e h^2$$

$$\mathfrak{M}_p = \frac{p' l^2}{2h} (y - h_2) + \gamma_m \frac{b^2 y}{6} - p' \frac{l b}{3} - \frac{\gamma_e h^3}{24}.$$

**Lage des Stützpunktes.** Aus dem Momente

$$\mathfrak{M}_R = \mathfrak{M}_v + \mathfrak{M}_p$$

und dem Normaldrucke

$$\mathfrak{N} = A_p + A_v + G$$

auf die Fuge kann man die Entfernung  $e_R$  des Stützpunktes von dem Kernpunkte  $R$  mit Hilfe der Relation

$$\mathfrak{N} e_R = \mathfrak{M}_R$$

ermitteln. Ergiebt sich hieraus  $e_R > \frac{b}{3}$ , so liegt  $s$  ausserhalb des Kerns.

Wird in diesem Falle im Anschluss an die Ausführungen des § 24 die Annahme gemacht, es vertheile sich  $\mathfrak{N}$  nur über den Theil der Fuge von der Länge  $3\xi'$  (Fig. 156), so rückt der Kernpunkt nach  $R'$  in den Abstand  $2\xi'$  von  $C$  und es wäre  $\max \mathfrak{M}_R'$  und hierauf

$$k = \frac{6 \mathfrak{M}_R'}{9 \xi'^2}$$

zu berechnen. Man darf hierbei die für  $\max \mathfrak{M}_R$  gefundene gefährlichste Laststellung auch der Berechnung von  $\mathfrak{M}_R'$  zu Grunde legen und hat nur

$$c = b - 2\xi' \text{ statt } \frac{b}{3}$$

$$\text{und} \quad d = 2\xi' - \frac{b}{2} \text{ statt } \frac{b}{6}$$

zu setzen.

**Vorläufige Berechnung des Widerlagers.** Die hier vorgetragene Berechnung der grössten Pressung  $k$  setzt voraus, dass die Dimensionen des Widerlagers bereits bekannt sind, so dass dieselbe durch eine approximative Bestimmung der Abmessungen eingeleitet werden muss. Bei Durchführung dieser vorläufigen Ermittlungen gehe man von derjenigen Belastung des Bogens aus, welche  $H_{\max}$  erzeugt.

Bedeutet:

$$\mathfrak{M}_h = H(y - h_2) - E \frac{y}{3} = H(y - h_2) - \frac{1}{24} \gamma_e y^3$$

das Moment der Horizontalkräfte in Bezug auf irgend einen Punkt der fraglichen Fuge, und setzt man Fig. 157

$$\mathfrak{M}_R = \mathfrak{M}_h + G \frac{b}{6} - A \frac{b}{3} = \mathfrak{M}_h + \gamma_m \frac{b^2 y}{6} - A \frac{b}{3}$$

in die Formel

$$k = \frac{6 \mathfrak{M}}{b^2}$$

ein, so findet man

$$273) \quad b = \frac{-A + \sqrt{6 \mathfrak{M}_h (k - \gamma_m y) + A^2}}{k - \gamma_m y},$$

woraus für jedes  $y$  das zugehörige  $b$  folgt. Nach Berechnung von  $b$ , das in der Regel für  $y = h_1$  ein Maximum wird, kann man diejenige Fuge ermitteln, welcher die grösste Pressung  $k$  entspricht. Dazu hat man

$$\mathfrak{M}_R = H(y - h_2) - \gamma_c \frac{y^3}{24} - A \frac{b}{3} + \gamma_m b y \frac{b}{6}$$

zu einem Maximum zu machen, erhält also die Bedingung

$$H - \gamma_c \frac{y^2}{8} + \frac{\gamma_m b^2}{6} = 0$$

und hieraus

$$274) \quad y = 2 \sqrt{\frac{6H + \gamma_m b^2}{3\gamma_c}} \quad (= y_1 \text{ gesetzt}).$$

Ist dieser Werth grösser als  $h_1$ , so berechne man aus No. 273  $b$  für  $y = y_1$  und hierauf  $y_1$  von Neuem aus No. 274. \*)

Jetzt hat man, der auf Seite 150 hervorgehobenen Bedingung gemäss, dass ein Gleiten auf der Lagerfuge unmittelbar unter dem Bogenkämpfer selbst dann nicht eintreten darf, wenn der Mörtel beseitigt gedacht wird,  $b$  aus der Gleichung

$$H - \frac{1}{8} \gamma_c h_2^2 = f \left\{ G + A \right\} = f \left\{ \gamma_m b h_2 + A \right\}$$

zu bestimmen und erhält

$$275) \quad b = \frac{[H - fA]_{\max} - \frac{1}{8} \gamma_c h_2^2}{f \gamma_m h_2}.$$

Zur Berechnung von  $[H - fA]_{\max}$  kann man die auf Seite 150 für  $\max \mathfrak{M}_v$  aufgestellten Formeln benutzen und hat nur nöthig, in diese  $z = 1$  und  $c = f$  einzuführen.

Schliesslich ist die Breite  $b$  noch unter der Voraussetzung zu berechnen, dass das Widerlager nur dem Erddrucke zu widerstehen hat (Fig. 158). Die Hinterfüllungserde soll hierbei mit  $v'$  pro  $\square^m$  der Terrainfläche belastet angenommen werden, und entspricht dann dieser Belastung, in der Höhe  $\frac{1}{2} h_1$  angreifend, ein Erddruck

$$E_1 = v' h_1 \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\rho}{2} \right)$$

und speciell für  $\rho = 37^\circ$

$$E_1 = \frac{1}{4} v' h_1.$$

\*) Eine weitere Correctur ist in der Regel überflüssig.

Das Angriffsmoment für den Kernpunkt  $L$  ist

$$\mathfrak{M}_L = E_1 \frac{h_1}{2} + E \frac{h_1}{3} + \gamma_m b h_1 \frac{b}{6}$$

und die Pressung an der Stelle  $C_1$

$$k = \frac{6 \mathfrak{M}_L}{b^2}.$$

Setzt man wieder das Moment der Horizontalkräfte

$$E_1 \frac{h_1}{2} + E \frac{h_1}{3} = \mathfrak{M}_h,$$

so erhält man die Formel

$$276) \quad b = \sqrt{\frac{6 \mathfrak{M}_h}{k - \gamma_m h_1}}.$$

Die Formeln 273 und 276 entsprechen der Formel 248, d. h. sie sind unter der Annahme abgeleitet, dass der Stützpunkt im Kern liegt, dass also die Spannung  $k$  aus Formel 245 berechnet wird. Liegt  $s$  ausserhalb des Kerns, so wird man besser eine der No. 250 entsprechende Formel bilden. In dieser ist  $\wp(y - \eta) = \mathfrak{M}_h$  gleich dem Moment der Horizontalkraft für irgend einen Punkt der Fuge zu setzen, ferner  $\mathfrak{B} = A$  und ergibt sich dann

$$273*) \quad b = \frac{-A}{\gamma_m y} + \sqrt{\frac{6k \mathfrak{M}_h + 4A^2}{\gamma_m y(3k - 4\gamma_m y)} + \frac{A^2}{\gamma_m^2 y^2}},$$

welcher Werth mit dem aus 273 gefundenen zu vergleichen ist. Ebenso wird man der Formel 276 die Formel:

$$276*) \quad b = \sqrt{\frac{6 \mathfrak{M}_h k}{\gamma_m h_1(3k - 4\gamma_m h_1)}}$$

gegenüberstellen.

Die Berechnung der Fundamentbreite ist der Ermittlung von  $b$  ganz analog. Unter  $k$  hat man hier die für den Baugrund zulässige Pressung zu verstehen\*).

Zahlenbeispiele zu den hier vorgetragenen Rechnungen finden sich im folgenden Abschnitte.

## § 26.

### Berechnung des Pfeilers.

Es mögen die Pressungen in einem Pfeiler unter der Voraussetzung berechnet werden, dass die beiden durch denselben unterstützten Bögen von verschiedener Stützweite sind, und bedeuten (Fig. 159)

$l$  die halbe Stützweite } des grösseren Bogens,  
 $h$  die Pfeilhöhe }

$l'$  und  $h'$  die entsprechenden Werthe für den kleineren Bogen. Der erstere

\*) Auf die statische Berechnung anderer Fundirungen soll in einem besonderen Bande dieses Werkes speciell eingegangen werden.

möge vertical resp. horizontal auf den Pfeiler die Drücke  $A$  und  $H$  ausüben, der andere die Drücke  $B'$  und  $H'$ .  $G$  sei das Gewicht des Pfeilers oberhalb Fuge  $C_1C$  und wirke im Abstände  $d$  vom Kernpunkte  $R$  dieser Fuge.

Bei parabolischer Bogenaxe (und auch annähernd bei den im Brückenbau vorkommenden flachen Kreisbögen) sind die von der permanenten Last herrührenden Horizontalschübe stets:

$$H_p = \frac{p'l^2}{2h}; \quad H_p' = \frac{p'l'^2}{2h'},$$

während  $A_p = p'l$  und  $B' = p'l'$  sind, unter  $p'$  die durch die Pfeilertiefe  $t$  dividirte permanente Belastung der Längeneinheit der Stützweite der Brücke verstanden. Desshalb wird das Moment für den Kernpunkt  $R$  bei „unbelastet gedachten Bögen“

$$(\mathfrak{M}_p)_R = \frac{p'l^2}{2h} z - \frac{p'l'^2}{2h'} z' + p'l'c' - p'lc + Gd,$$

und zwar gilt dieser Ausdruck für Bögen mit Kämpfergelenken und Scheitelgelenk, für solche mit Kämpfergelenken ohne Scheitelgelenk und für Bögen ohne Gelenke; denn auch bei letzteren gehen die Kämpferdrücke durch die Mittelpunkte der Kämpferquerschnitte, sobald nur eine gleichförmig über die Stützweite vertheilte Belastung vorliegt, und als solche wird die Constructionslast stets in Rechnung gestellt.

Der von der Verkehrslast zu dem Momente  $\mathfrak{M}_R$  gelieferte Beitrag sei  $(\mathfrak{M}_v)_R$ , mithin

$$\mathfrak{M}_R = (\mathfrak{M}_p)_R + (\mathfrak{M}_v)_R$$

und die Pressung bei  $C$

$$277) \quad k = \frac{6[(\mathfrak{M}_p)_R + (\mathfrak{M}_v)_R]}{b^2}.$$

### Bestimmung von $\max(\mathfrak{M}_R)_R$ .

1) Bögen mit Kämpfergelenken und Scheitelgelenk (Fig. 159).

Um zunächst die gefährlichste Belastung zu ermitteln, ziehen wir die Kämpferdrucklinie  $BS$ , hierauf von  $R$  aus durch  $A$  eine Gerade, welche die  $BS$  in  $E$  schneidet und finden (wie beim Landwiderlager auf Seite 149), dass jeder Last rechts von  $E$  ein positives, jeder Last links von  $E$  ein negatives Moment  $\mathfrak{M}_R$  entspricht. Eine zweite Belastungsscheide liefert der Schnitt  $E'$  einer von  $R$  durch  $B'$  gezogenen Geraden mit der Kämpferdrucklinie  $AS'$ . Lasten rechts von  $E'$  erzeugen Kämpferdrücke, welche die Fuge  $CC_1$  zwischen  $C$  und  $R$  schneiden, mithin die Pressung  $k$  bei  $C$  vergrössern, während die durch Lasten links von  $E'$  hervorgerufenen Kämpferdrücke ein negatives Moment  $\mathfrak{M}_R$ , mithin bei  $C$  eine Zugspannung erzeugen. Es entspricht demnach der in Fig. 159 dargestellten Laststellung das Moment  $\max \mathfrak{M}_R$  und die grösste Druckspannung  $k$ .

Die Influenzlinie für das Moment  $\mathfrak{M}_R$  kann jetzt in derselben Weise construirt werden, wie auf Seite 149 bei Berechnung des Landwiderlagers.

Man mache  $D_1D = \frac{l}{2h} 1^{\text{tons}}$ ,  $D_1'D' = \frac{l'}{2h'} 1^{\text{tons}}$ , verbinde  $D$  mit  $A$  und  $B$ ,  $D'$  mit  $A'$  und  $B'$  und bestimme auf  $AD$  den Punkt  $F$  vertical unter  $E$ , dann auf  $D'B'$  den Punkt  $F'$  vertical unter  $E'$ , um schliesslich  $BJ$  und  $A'J'$  zu ziehen. Die in der Figur schraffierte Fläche ist die gesuchte Influenzfläche. Die Theile  $J'B'N'$  und  $JAN$  entsprechen den auf dem Widerlager selbst liegenden Lasten  $P$ , denn es ist für eine solche Last

$$\mathfrak{M}_R = Px,$$

also eine lineare Funktion und es entspricht einer durch  $R$  gehenden Last  $P$  das Moment  $\mathfrak{M}_R = 0$ . Zu beachten bleibt, dass zur Influenzfläche über dem kleineren Bogen der Multiplicator  $z$ , zu der über dem grösseren Bogen der Multiplicator  $z'$  gehört.

Soll  $\mathfrak{M}_R$  analytisch bestimmt werden, so berechne man für den Bogen rechts (Fig. 160)

$$278) \quad \xi = l \frac{zl - hc}{zl + hc}^*)$$

$$279) \quad \max \mathfrak{M}_R = \frac{z}{h} \left\{ \frac{\xi}{l + \xi} \Sigma P b - \Sigma P' b' \right\},$$

wobei die Laststellung so gewählt werden muss, dass eine schwere Last über dem Scheitel liegt und eine unendlich kleine Verschiebung nach links oder nach rechts beziehungsweise liefert:

$$280) \quad \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} > \frac{\xi}{l + \xi}.$$

Weiter werden noch Lasten zwischen  $E'$  und der Verticalen durch  $R$  aufgebracht und mit der aus Fig. 160 ersichtlichen Bezeichnungweise erhalten:

$$\mathfrak{M}_R = B'c' - H'z' + \Sigma P''b''.$$

Dann ist

$$H' = \frac{\Sigma P''b''}{2h'} \quad B' = \Sigma P'' - \frac{\Sigma P''b''}{2l'}$$

mithin

$$281) \quad \mathfrak{M}_R = c' \Sigma P'' - \frac{c'h' + z'l'}{2l'h'} \Sigma P''b'' + \Sigma P'''b'''.$$

Die Stellung wird die gefährlichste, wenn eine schwere Last über  $A$  steht und eine Verschiebung nach links oder rechts beziehungsweise liefert

$$\frac{c'h' + z'l'}{2l'h'} \Sigma P'' \geq \Sigma P'''.$$

Nach Addition der Resultate No. 279 und 281 und Division durch die Tiefe des Pfeilers erhält man  $(\max \mathfrak{M}_R)_R$  und hierauf

$$k = \frac{6}{b^2} [(\mathfrak{M}_P)_R + (\mathfrak{M}_V)_R].$$

\*) Vergl. Berechnung des Landwiderlagers.

Es erscheint jedoch zweckmässig, wegen der Unwahrscheinlichkeit der Laststellung in Fig. 160 — wenigstens bei Eisenbahnbrücken — auf die Lasten  $P''$  und  $P'''$  nicht zu rücksichtigen.

2) Bögen mit Kämpfergelenken ohne Scheitelgelenk. Die Belastungsscheiden und Influenzflächen werden wie vorhin bestimmt, und sind die betreffenden Constructionen ohne Weiteres aus Fig. 161 ersichtlich.

Um  $\mathfrak{M}_R$  für die gefährlichste Belastung zu berechnen, ermittle man für den Bogen rechter Hand

$$282) \quad \xi = 2 \frac{3lz - 2hc}{3z}$$

$$283) \quad \max \mathfrak{M}_R = \frac{3z}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n \left[ \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 + c_r^2 \right] - \mathfrak{S}_n \right\},$$

welcher letzterer Ausdruck in der auf Seite 106 erläuterten Weise behandelt wird.

Den Lasten  $P'$  und  $P''$  zwischen  $E'$  und  $R$  entspricht

$$\mathfrak{M}_R = B'c' - Hz' + \Sigma P''b'',$$

worin

$$B' = \Sigma P' - \frac{\Sigma P'b'}{2l}$$

$$H = \frac{3}{8hl} \{ 2l \Sigma P'b' - \Sigma P'b'^2 \}$$

ist, so dass

$$284) \quad \mathfrak{M}_R = \Sigma P'c' - \frac{3lz' + 2hc'}{4lh} \Sigma P'b' + \frac{3z'}{8hl} \Sigma P'b'^2 + \Sigma P''b''$$

wird. Bedingung ist, dass eine schwere Last über  $A$  steht und eine Verschiebung nach links resp. nach rechts liefern muss:

$$285) \quad \frac{3lz' + 2hc'}{4lh} \Sigma P' \geq \frac{3z'}{4hl} \Sigma P'b' + \Sigma P''.$$

Es empfiehlt sich aber, auf die Lasten  $P'$  und  $P''$  der Unwahrscheinlichkeit der Laststellung wegen nicht zu achten. Will man dies thun, so zeichnet man zweckmässig die Influenzlinie.

3) Bögen ohne Gelenke. Es sei eine gleichförmig vertheilte Verkehrslast angenommen. Für den rechts gelegenen Bogen werden die zweiten Curven  $A$ ,  $H$  und  $\mathfrak{M}_A$  für Bewegung der Last von  $B$  nach  $A$  gezeichnet (vergl. Seite 123) und für den anderen Bogen die zweiten Curven  $B''$ ,  $H''$  und  $\mathfrak{M}_B''$ , für Bewegung von  $A'$  nach  $B'$ . Die von  $R$  aus an die Kämpferdruckumhüllungslinien gezogenen Tangenten schneiden die Kämpferdrucklinien in den Belastungsscheiden  $E$  und  $E'$  und erzeugt die in Fig. 162 gezeichnete Laststellung das Moment  $\max \mathfrak{M}_R$ . Unter  $E$  misst man die Drücke  $A$  und  $H$  des Bögens rechter Hand, ferner  $\mathfrak{M}_A$  und findet dann

$$\eta = \frac{\mathfrak{M}_A}{H}.$$

Die unter  $E'$  gemessenen  $B''$ ,  $H''$  und  $M_B''$  entsprechen einer von  $A$  bis  $E'$  vorrückenden Last. Subtrahirt man dieselben von denjenigen,

welche volle Belastung erzeugt, so erhält man für die Belastung der Strecke  $E'B'$ :

$$B' = v l' - B''$$

$$H' = \frac{v l'^2}{2 h'} - H''$$

$$M_B' = 0 - M_B''.$$

Da hiernach das Moment für den Kämpferquerschnitt negativ ist, greift  $H'$  unterhalb des Kämpfermittelpunktes und zwar im Abstände

$$\eta' = \frac{M_B'}{H'}$$

von diesem an und wird hiernach

$$\max \mathfrak{M}_R = H(z + \eta) - Ac - H'(z' - \eta') + B'c',$$

welcher Werth durch die Tiefe des Pfeilers dividirt, das in Formel 277 einzuführende Moment ( $\max \mathfrak{M}_v$ )<sub>R</sub> liefert.

**Vorläufige Berechnung des Pfeilers.** Die vorstehenden Untersuchungen setzten wieder voraus, dass die Pfeilerstärke  $b$  auf Grundlage einer Näherungsrechnung angenommen ist. Diese auszuführen, setze man (Fig. 163)  $c = \frac{b}{3}$ ,  $c' = \frac{2b}{3}$ ,  $d = \frac{b}{6}$ ,  $G = \gamma_m b h_1$ , nehme den kleineren

Bogen unbelastet und den grösseren derart belastet an, dass er mit  $H_{\max}$  auf den Pfeiler wirkt und setze

$$\mathfrak{M}_R = Hz - H'z' - A \frac{b}{3} + B' \frac{2b}{3} + \gamma_m b h_1 \frac{b}{6}$$

$$k = \frac{6 \mathfrak{M}_R}{b^2}.$$

Man erhält dann

$$286) \quad b = \frac{-(A - 2B') + \sqrt{6(Hz - H'z')(k - \gamma_m h_1) + (A - 2B')^2}}{k - \gamma_m h_1}.$$

Ist  $b'$  die Breite der Fundamentsohle,  $h_f$  die Fundirungstiefe, so folgt für den Kernpunkt  $R'$  (Fig. 163)

$$\mathfrak{M}_{R'} = \mathfrak{M}_h - A \left\{ \frac{b'}{3} - \frac{b' - b}{2} \right\} + B' \left\{ \frac{2b'}{3} - \frac{b' - b}{2} \right\} + (\gamma_m b h_1 + \gamma_m b' h_f) \frac{b'}{6}$$

worin

$$\mathfrak{M}_h = H(z + h_f) - H'(z' + h_f)$$

das Moment der horizontalen Kräfte bedeutet. Aus der Bedingung

$$k' = \frac{6 \mathfrak{M}_{R'}}{b'^2}$$

folgt

$$287) \quad b = \frac{\frac{1}{2}(\gamma_m b h_1 + A + B') + \sqrt{6 \mathfrak{M}_h - 3h(A + B') \{k' - \gamma_m h_f\} + \frac{1}{4}(\gamma_m b h_1 + A + B')^2}}{k' - \gamma_m h_f}.$$

In diese Formel ist für  $k'$  die zulässige Pressung der Flächeneinheit des Baugrundes zu setzen.

Die Formeln 286 und 287 setzen voraus, dass der Stützpunkt im Kern liegt. In der Regel führt Abschätzung der Pfeilerdimensionen schneller zum Ziele als die vorläufige Berechnung.

Ein Zahlenbeispiel für die Berechnung eines Pfeilers findet sich in § 29.

§ 27.

**Festigkeit der Bausteine.\*)**

Die zulässige Druckspannung beträgt in Kilogrammen pro  $\square^{\text{cm}}$  für:

Gewöhnliche Ziegelsteine in Kalkmörtel . . . . .	$k =$	7
Hartgebrannte Ziegelsteine in Cementmörtel . . . . .		10
Beste Rathenower Ziegelsteine in Cementmörtel . . . . .		14
Klinker, Hegemühler . . . . .		25
Kalkstein, Rüdersdorfer . . . . .		23
Jurakalk von Tegernsee, Oberbayern . . . . .		49
Nebraer Sandstein (rother) . . . . .		16
„ „ (heller) . . . . .		26
Hallescher „ (rother) . . . . .		30
Seeberger „ (weisser) . . . . .		36
Rackwitzer „ . . . . .		20
Heilbronner „ . . . . .		27
Sandstein von Udelfangen bei Trier . . . . .		55
„ „ Durlach, Baden, dunkelroth . . . . .		42
„ „ Lindenberg, Rheinpfalz, roth . . . . .		28
„ „ Anweiler, Rheinpfalz . . . . .		23
„ „ Trebgast, Oberfranken . . . . .		13
„ „ Kronach, Oberfranken . . . . .		17
Brohler Tuffstein . . . . .		6
Trachyt vom Drachenfels . . . . .		20
Basaltlava von Niedermendig . . . . .		30 — 60
Grauwacke von Ludwigstadt, Oberfranken . . . . .		72
Granit, Schwedischer . . . . .		100 — 150
„ Schottischer . . . . .		50 — 75
„ Schlesischer und Oesterreichischer . . . . .		40 — 80
Syenit . . . . .		60 — 75
Serpentin . . . . .		50 — 60

\*) Vergl. „Beigabe zum deutschen Baukalender“. „Heinzerling, die angreifenden und widerstehenden Kräfte etc.“ „Wittmann, Statik der Hochbauconstr.“ „Mittheilungen von Bauschinger in der Zeitschr. des bayr. Arch.- u. Ing.-Ver. 1874“.

Basalt . . . . .	$k =$	75
Oolith . . . . .		45
Diorit . . . . .		44
Dolerit . . . . .		44
Labrador . . . . .		44
Gneis . . . . .		43
Glimmerschiefer . . . . .		41
Hornblende . . . . .		37
Porphyr . . . . .		37
Dolomit . . . . .		30
Beton . . . . .		6 — 7
Reiner Cement*) . . . . .		12
Portland - Cement*) bestehend aus	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Theil Cement und } 1 \text{ Theil Sand} \\ 1 \text{ " " " } 2 \text{ Theile " } \\ 1 \text{ " " " } 3 \text{ " " } \\ 1 \text{ " " " } 4 \text{ " " } \end{array} \right.$	11
		10
		9
		8
Luftmörtel, gut erhärtet . . . . .		1,8 — 4,0
Guter Baugrund . . . . .		4,0 — 5,0

Die Zugfestigkeit kann man bei 10facher Sicherheit setzen für:

Granit . . . . .	$k =$	4
Sandstein . . . . .		0,5
Ziegelmauerwerk in Kalkmörtel . . . . .		0,7
„ „ in Cementmörtel . . . . .		1,0 — 1,5
Klinker . . . . .		2,0 — 2,5

Die Schubfestigkeit ist bei 10 facher Sicherheit für:

Granit . . . . .	I zum Lager	$T =$	6 — 7
„ . . . . .	II „ „		10
Ziegelmauerwerk, hart gebrannt . . . . .			6
Portland - Cement*) bestehend aus:	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Theil Cement und } 1 \text{ Theil Sand} \\ 1 \text{ " " " } 2 \text{ Theile " } \\ 1 \text{ " " " } 3 \text{ " " } \\ 1 \text{ " " " } 4 \text{ " " } \end{array} \right.$		2,8
			2,6
			2,5
			2,2
Reiner Cement*) . . . . .			1,8.

\*) Nach 60-tägiger Erhärtung.

## Abschnitt VIII.

### Beispiele für die statische Berechnung der Blehbogenbrücken.\*)

#### § 28.

**Eisenbahnbrücke. Träger mit Kämpfergelenken und Scheitelgelenk.** (Tafel 16 bis 20.)

1) **Anordnung.** Eine zweigeleisige Eisenbahn (Querschwellenoberbau) soll mit Hilfe von Bögen mit 3 Gelenken über eine Strasse geführt werden, so zwar, dass jedes Geleis durch 2 Bögen unterstützt wird. Die Stützweite beträgt  $2l = 14,8^m$  (Fig. 164), die Pfeilhöhe  $h = 2,5^m$ . Die Bogenaxe ist ein Kreisbogen mit dem Radius

$$r = \frac{7,4^2 + 2,5^2}{2 \cdot 2,5} = 12,20^m.$$

Die Schwellenträger sind gewalzte Doppel-T-Eisen und bilden gleichzeitig die Gurte des unmittelbar unter der Fahrbahn liegenden Windträgers. Deshalb sind die beiden ein Geleis stützenden Bögen im Abstände  $1,6^m$  von einander angeordnet.

Die Fahrbahn wird durch Verticalen unterstützt, die in Entfernungen  $1,85^m$  von einander liegen, so dass jeder Schwellenträger durch 2 Querschwellen belastet wird.

2) **Vorläufige Querschnittsermittlung; Abschätzung des Eigengewichtes; Bestimmung der Kernlinien.** Diese Rechnungen sind auf Seite 100 bis 102 durchgeführt und ergeben für den stärkst beanspruchten Querschnitt

- 1 Stehblech von  $40^m$  Höhe,  $1,0^m$  Stärke,
- 4 Winkel von  $8^m$  Schenkellänge,  $1,0^m$  Stärke,
- $2 \times 3$  Kopfplatten von  $28^m$  Breite,  $1,0^m$  Stärke.

Mit Rücksicht auf die Schwächung durch $2^m$ starke Niete ergab sich:	
Querschnitt von Stehblech und Winkeleisen . . . . .	$f_s = 92 \square^m$ ,
Trägheitsmoment " " " . . . . .	$J_s = 21300 \text{ cm}^4$ ,
Querschnitt der 3 Kopfplatten . . . . .	$f = 72 \square^m$ ,
Kernhalbmesser . . . . .	$e = 0,16^m$ ,
Radius der oberen Kernlinie . . . . .	$r_o = 12,36^m$ ,
" " unteren " . . . . .	$r_u = 12,04^m$ .

\*) In den folgenden Beispielen ist, wie dies gewöhnlich geschieht, die zulässige Belastung eines Nietquerschnittes  $= \frac{1}{2} \pi d^2 k$  gesetzt worden. Dies entspricht mit Berücksichtigung des „Nachtrages“ auf Seite 68 der Annahme, dass die Festigkeit des Nieteiseis  $= \frac{1}{2}$  mal der des gewöhnlichen Walzeiseis ist.

Die in den Mittellinien der Verticalen liegenden Punkte der oberen resp. unteren Kernlinie haben die Ordinaten (Fig. 164)

$$\begin{aligned} \text{für } x &= 1,85^m; \quad 2 \cdot 1,85^m; \quad 3 \cdot 1,85^m; \quad 4 \cdot 1,85^m \\ \text{„ } y_o &= 1,34^m; \quad 2,09^m; \quad 2,52^m; \quad 2,66^m \\ \text{„ } y_u &= 0,98^m; \quad 1,77^m; \quad 2,20^m; \quad 2,34^m. \end{aligned}$$

Die permanente Belastung eines Tragbogens ergab sich

$$p = 0,62^{\text{tons}} \text{ pro Meter.}$$

Berechnung der Tragbögen.

3) Die Momente  $\min \mathfrak{M}_o$  und  $\min \mathfrak{M}_u$ , herrührend von der Belastung durch den Eisenbahntrain.

Das grösste negative Moment in Bezug auf einen Punkt der oberen Kernlinie ergab sich mit Rücksicht auf die Bezeichnung in Figur 63 Tafel 5, auf Seite 85

$$\min \mathfrak{M}_o = -\frac{y_o}{h} \left\{ \frac{\xi}{l+\xi} \Sigma P b - \Sigma P' b' \right\}$$

und ist hierbei die Zugstellung so zu wählen, dass eine schwere Last über dem Scheitel steht, und in Folge einer unendlich kleinen Verschiebung nach links resp. nach rechts

$$\frac{\Sigma P'}{\Sigma P} < \frac{\xi}{l+\xi}$$

wird. Die Last über dem Scheitel zählt nach Verschiebung nach links zur  $\Sigma P'$ . Das Analoge gilt für die Momente  $\min \mathfrak{M}_u$ .  $\xi$  ist zu berechnen aus

$$\xi = l \frac{y_o l - h x_o}{y_o l + h x_o} \text{ resp. aus } \xi = l \frac{y_u l - h x_u}{y_u l + h x_u}.$$

Man findet im vorliegenden Falle:

Kernpunkt	$x_o = x_u$	$y_o$ resp. $y_u$	$\frac{\xi}{l+\xi}$
$o_1$	1,85	1,34	0,2668
$o_2$	3,70	2,09	0,2010
$o_3$	5,55	2,52	0,1280
$u_1$	1,85	0,98	0,1811
$u_2$	3,70	1,77	0,1468
$u_3$	5,55	2,20	0,0739

Wird nun ein nach Fig. 19a Tafel 2 angeordneter Zug — von B auffahrend — mit der ersten Axe über S gestellt (Stellung I, Fig. 164), so ergibt eine Verschiebung nach links

$$\frac{\Sigma P'}{\Sigma P} = \frac{13}{39+8} = 0,277$$

und folgt hieraus, dass dieser Stellung die Minimalmomente für sämtliche Kernpunkte entsprechen, da durchweg  $\frac{\xi}{l+\xi} < 0,277$  ist. Allerdings kann manchmal noch eine andere Laststellung etwas gefährlicher werden, da sich bei Verschiebung des Zuges um eine endliche Strecke die Lastensummen ändern. Stellt man z. B. die zweite Axe über den Scheitel, so folgt nach Verschiebung nach links resp. rechts

$$\frac{\Sigma P'}{\Sigma P} = \frac{2 \cdot 13}{39 + 2 \cdot 8} = 0,47 > 0,2668 \text{ und } \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} = \frac{13}{39 + 2 \cdot 8} = 0,233 < 0,2668,$$

so dass dieser Stellung ebenfalls  $(\min \mathfrak{M}_o)_1$  entspricht. In einem solchen Falle müssen die Momente für beide Stellungen verglichen werden; man wird aber aus den sehr wenig von einander abweichenden Resultaten stets erkennen, dass der Fehler, den man eventuell durch das Untersuchen nur des einen Falles begeht, sehr geringfügig ist.

Es entspricht der Stellung I beziehungsweise II:

$$\Sigma P b = 8 \cdot 1,4 + 39 \cdot 5,9 = 241,3^{\text{tm}} \quad ; \quad \Sigma P' b' = 0$$

$$\text{und } \Sigma P b = 8(1,4 + 2,9) + 39 \cdot 7,4 = 323^{\text{tm}}; \quad \Sigma P' b' = 13 \cdot 1,5 = 19,5^{\text{tm}},$$

mithin erhält man, da jeder Bogen nur die Hälfte der Belastung eines Geleises zu tragen hat:

$$\min (\mathfrak{M}_o)_1 = - \frac{1,34}{2,5} \left[ 0,2668 \cdot 323,0 - 19,5 \right] \frac{1}{2} = - 17,87^{\text{tm}} *$$

$$\min (\mathfrak{M}_o)_2 = - \frac{2,09}{2,5} \left[ 0,2010 \cdot 241,3 \right] \frac{1}{2} = - 20,27^{\text{tm}}$$

$$\min (\mathfrak{M}_o)_3 = - \frac{2,52}{2,5} \left[ 0,1280 \cdot 241,3 \right] \frac{1}{2} = - 15,57^{\text{tm}}$$

$$\min (\mathfrak{M}_u)_1 = - \frac{0,98}{2,5} \left[ 0,1811 \cdot 241,3 \right] \frac{1}{2} = - 8,57^{\text{tm}}$$

$$\min (\mathfrak{M}_u)_2 = - \frac{1,77}{2,5} \left[ 0,1468 \cdot 241,3 \right] \frac{1}{2} = - 12,54^{\text{tm}}$$

$$\min (\mathfrak{M}_u)_3 = - \frac{2,20}{2,5} \left[ 0,0739 \cdot 241,3 \right] \frac{1}{2} = - 7,85^{\text{tm}}.$$

**4) Die Maximalmomente.** Mit den Bezeichnungen in Figur 64 ist nach Formel 123 (Seite 86)

$$\max \mathfrak{M} = \frac{\xi_2}{\xi_1} \Sigma P a - \Sigma P' a',$$

worin für den oberen beziehungsweise unteren Kernpunkt

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{h x' - y_o l}{2 h l} \quad \text{resp.} \quad \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{h x' - y_u l}{2 h l}$$

ist. Der Zug ist — von A aus vorrückend — mit einer schweren Last

\*) Für Stellung I folgt  $(\min \mathfrak{M}_o)_1 = - \frac{1,34}{2,5} \left[ 0,2668 \cdot 241,3 \right] \frac{1}{2} = - 17,25^{\text{tm}}.$

über dem fraglichen Kernpunkte so aufzustellen, dass in Folge einer unendlich kleinen Verschiebung nach rechts oder nach links beziehungsweise

$$\frac{\Sigma P'}{\Sigma P} > \frac{\xi_2}{\xi_1} \quad \text{und} \quad \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} < \frac{\xi_2}{\xi_1}$$

wird. Man findet für

$$\begin{aligned} \text{Kernpunkt } o_1: \frac{\xi_2}{\xi_1} &= 0,6070; & \text{Kernpunkt } u_1: \frac{\xi_2}{\xi_1} &= 0,6790 \\ \text{„ } o_2: \text{ „} &= 0,3320; & \text{„ } u_2: \text{ „} &= 0,3960 \\ \text{„ } o_3: \text{ „} &= 0,1210; & \text{„ } u_3: \text{ „} &= 0,1850. \end{aligned}$$

Die Zugstellungen sind in Figur 164 angegeben. Kennzeichnet man die Richtung der Verschiebungen durch vorgesetzte Pfeile, so erhält man für

$$\begin{aligned} \text{Stellung III, } (o_1) \rightsquigarrow \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} &= \frac{2 \cdot 13}{3 \cdot 13} > 0,607; \quad \leftarrow \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} = \frac{13}{3 \cdot 13} < 0,607 \\ \text{„ IV, } (u_1) \rightsquigarrow \text{ „} &= \frac{3 \cdot 13}{3 \cdot 13} > 0,679; \quad \leftarrow \text{ „} = \frac{2 \cdot 13}{3 \cdot 13} < 0,679 \\ \text{„ V, } (o_2) \rightsquigarrow \text{ „} &= \frac{1}{3} > 0,332; \quad \leftarrow \text{ „} = 0 < 0,332 \\ \text{„ VI, } (u_2) \rightsquigarrow \text{ „} &= \frac{2}{3} > 0,396; \quad \leftarrow \text{ „} = \frac{1}{3} < 0,396 \\ \text{„ VII, } \left\{ \begin{matrix} o_3 \\ u_3 \end{matrix} \right\} \rightsquigarrow \text{ „} &= \frac{1}{3} > \left\{ \begin{matrix} 0,121 \\ 0,185 \end{matrix} \right\}; \quad \leftarrow \text{ „} = 0 < \left\{ \begin{matrix} 0,121 \\ 0,185 \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

und es werden die Momente, nach Division der Axenbelastungen durch 2:

$$\begin{aligned} (\max \mathfrak{M}_o)_1 &= \left\{ 0,6070 \cdot [39 \cdot 1,85] - 13 \cdot 1,5 \right\} \frac{1}{2} = + 15,15^{\text{tm}} \\ (\max \mathfrak{M}_o)_2 &= \left\{ 0,3320 \cdot [39 \cdot 2,20] \right\} \frac{1}{2} = + 14,24^{\text{tm}} \\ (\max \mathfrak{M}_o)_3 &= \left\{ 0,1210 \cdot [39 \cdot 4,05] \right\} \frac{1}{2} = + 9,56^{\text{tm}} \\ (\max \mathfrak{M}_u)_1 &= \left\{ 0,6790 \cdot [39 \cdot 3,35] - 13 (1,5 + 3,0) \right\} \frac{1}{2} = + 15,11^{\text{tm}} \\ (\max \mathfrak{M}_u)_2 &= \left\{ 0,3960 \cdot [39 \cdot 3,70] - 13 \cdot 1,5 \right\} \frac{1}{2} = + 18,82^{\text{tm}} \\ (\max \mathfrak{M}_u)_3 &= \left\{ 0,1850 \cdot [39 \cdot 4,05] \right\} \frac{1}{2} = + 14,61^{\text{tm}}. \end{aligned}$$

**5) Momente in Folge des Eigengewichtes.** Der permanenten Belastung entspricht nach No. 127 (Seite 89)

$$(\mathfrak{M}_o)_p = plx - px \frac{x}{2} - \frac{pl^2}{2h} y_o$$

$$(\mathfrak{M}_u)_p = plx - px \frac{x}{2} - \frac{pl^2}{2h} y_u$$

Mit  $p = 0,62$  ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}_{o1})_p &= -1,67^{\text{tm}} & (\mathfrak{M}_{u1})_p &= +0,77^{\text{tm}} \\ (\mathfrak{M}_{o2})_p &= -1,46^{\text{tm}} & (\mathfrak{M}_{u2})_p &= +0,71^{\text{tm}} \\ (\mathfrak{M}_{o3})_p &= -1,20^{\text{tm}} & (\mathfrak{M}_{u3})_p &= +0,98^{\text{tm}}. \end{aligned}$$

**6) Gesamtmomente.** Addirt man die Momente, welche der Eisenbahntrain erzeugt, zu den dem Eigengewichte entsprechenden, so ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe:

Kernpunkt:	$o_1$	$o_2$	$o_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
+ max $\mathfrak{M}$	= 13,48	12,78	8,36	15,88	19,53	15,59
— min $\mathfrak{M}$	= 19,54	21,73	16,77	7,80	11,83	6,87
$\varepsilon = \frac{\text{Kleinstes Moment}^*)}{\text{Grösstes Moment}}$	= 0,69	0,59	0,50	0,49	0,61	0,44

**7) Berechnung der Gurtquerschnitte.** Die zulässige Spannung wird nach Seite 63 für den Obergurt resp. den Untergurt

$$k_o = 0,8 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\text{Kleinstes Moment } \mathfrak{M}_u}{\text{Grösstes Moment } \mathfrak{M}_o} \right) \text{ beziehungsweise}$$

$$k_u = 0,8 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\text{Kleinstes Moment } \mathfrak{M}_o}{\text{Grösstes Moment } \mathfrak{M}_u} \right) \text{ tons pro } \square \text{cm}$$

mithin für den Querschnitt 1

$$(k_{o1}) = 0,8 \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,49 \right) = 0,604 ; \quad (k_{u1}) = 0,8 \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,69 \right) = 0,524 .$$

Man findet

für Querschnitt:	1	2	3
$k_o =$	0,604	0,556	0,624
$k_u =$	0,524	0,564	0,600

Da die beiden dem stärkst beanspruchten Querschnitte No. 2 entsprechenden grössten Momente  $\mathfrak{M}_o = 21,73$  und  $\mathfrak{M}_u = 19,53$  nur wenig von einander abweichen und ebenso die zulässigen Anstrengungen  $k_o$  und  $k_u$  nahezu übereinstimmen, so sollen Obergurt und Untergurt gleich stark construirt werden. Es ist deshalb in die auf Seite 61 etc. abgeleiteten Formeln

$$c = \frac{a_o}{a_u} = 1$$

zu setzen und ergeben sich die Querschnitte der Kopfplatten:

$$\begin{aligned} \text{für den Obergurt } f_o &= \frac{\mathfrak{M}_u}{k_o h_1} - \frac{2J_s}{h_1^2} \\ \text{„ „ „ Untergurt } f_u &= \frac{\mathfrak{M}_o}{k_u h_1} - \frac{2J_s}{h_1^2} . \end{aligned}$$

\*) Bei Bildung des Verhältnisses  $\varepsilon$  sind die Momente „absolut“ zu verstehen.

Für den Querschnitt 2 erhält man

$$(f_o)_2 = \frac{19,53}{0,556 \cdot 0,40} - \frac{2 \cdot 21300}{(40)^2} = 61,2 \square \text{ cm}$$

$$(f_u)_2 = \frac{21,73}{0,564 \cdot 0,40} - \frac{2 \cdot 21300}{(40)^2} = 69,7 \square \text{ cm}$$

wählt also  $f_o = f_u = 70 \square \text{ cm}$ . Analog ergeben sich aus den Momenten  $\mathfrak{M}_o$ :

$$f_1 = \frac{19,54}{0,524 \cdot 0,40} - \frac{2 \cdot 21300}{(40)^2} = 67 \square \text{ cm}$$

$$f_3 = \frac{16,77}{0,600 \cdot 0,40} - \frac{2 \cdot 21300}{(40)^2} = 43 \square \text{ cm}.$$

Für einen Querschnitt in der Mitte zwischen 2 und 3 ist nach Seite 87:

$$\max \mathfrak{M}_o = \frac{1}{2}(12,78 + 8,36) = 10,57$$

$$\min \mathfrak{M}_o = \frac{1}{2}(21,73 + 16,77) = 19,25$$

$$\varepsilon = \frac{10,57}{19,25} = 0,55; \quad k_u = 0,8(1 - \frac{1}{2} \cdot 0,55) = 0,580$$

$$f = \frac{19,25}{0,580 \cdot 40} - \frac{2 \cdot 21300}{(40)^2} = 56,3 \square \text{ cm}$$

d. i. annähernd  $f = (f_2 + f_3) \frac{1}{2}$ . Da nun die Momente für die Querschnitte zwischen den Verticalen nach den auf Seite 87 entwickelten Regeln ohnehin nicht ganz correct gefunden werden, sei angenommen, dass die Querschnitte  $f$  sich zwischen zwei Verticalen ebenso wie die Momente linear ändern. Die den verschiedenen Abscissen  $x$  entsprechenden  $f$  sollen als Ordinaten einer Curve (Querschnittscurve) dargestellt werden, die nach vorigem aus geraden Linien besteht und zu deren Verzeichnung noch die Werthe  $f$  für  $x = 0$  und  $x = l$  anzugeben sind.

Wird (Fig. 165) jede Last rechts und links vom Scheitel beziehungsweise mit  $P_b$  und  $P_a$  bezeichnet, so ist der Horizontalschub

$$H = \frac{\sum P_b b}{2h} + \frac{\sum P_a a}{2h};$$

derselbe wird ein Maximum, sobald eine Verschiebung des Zuges nach links liefert:

$$\frac{\sum P_b}{\sum P_a} < 1$$

und eine solche nach rechts

$$\frac{\sum P_b}{\sum P_a} > 1.$$

Bei der Stellung Fig. 165 *a* erhält man

im ersten Falle 
$$\frac{\sum P_b}{\sum P_a} = \frac{13 + 16}{4 \cdot 13} < 1$$

im zweiten Falle 
$$\frac{\sum P_b}{\sum P_a} = \frac{26 + 16}{3 \cdot 13} > 1$$

$$H_{\max} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{8(1,4 + 2,9) + 13(1,4 + 2,9) + 39 \cdot 7,4}{2 \cdot 2,5} \right\} = 37,89$$

Der permanenten Belastung entspricht

$$H = \frac{pl^2}{2h} = \frac{0,62 \cdot 7,4^2}{2 \cdot 2,5} = 6,79^t,$$

daher in Summa  $H_{\max} = 37,89 + 6,79 = 44,68^t$ .

Der Minimalquerschnitt im Scheitel ergibt sich aus

$$F = \frac{H_{\max}}{k} \text{ worin } k = 0,8 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{H_{\min}}{H_{\max}} \right) \\ = 0,8 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{6,79}{44,68} \right) = 0,86$$

so dass  $F = \frac{44,68}{0,86} = 52 \square \text{ cm}$  wird.

Nun ist für Stehblech und 4 Winkel

$$f_s = 92 \square \text{ cm},$$

so dass man für  $x = l$  setzen darf:  $f = 0$ .

Ebenso findet man für den Kämpferquerschnitt  $f = 0$ . Trotzdem soll aber die erste Kopfplatte bis zum Scheitелgelenk und zum Kämpfergelenk durchgeführt und der Berechnung der Längen der anderen Platten die Querschnittscurve Fig. 166 zu Grunde gelegt werden.

Den Maximalquerschnitt  $f = 70 \square \text{ cm}$  erzielen wir durch 3 Platten von 1<sup>cm</sup> Stärke mit  $\frac{70}{3} + 2 \cdot 2 = 27,3 \text{ cm}$  Breite, und entspricht dann jeder Platte ein nutzbarer Querschnitt von  $23,3 \square \text{ cm}$ . Man findet leicht, dass die Ordinaten der Querschnittscurve

den Werth  $f = 23,3$  bei  $x = 0,64^m$  und  $x'' = 1,00^m$

und „ „ „  $f = 46,6$  „ „  $x = 1,29^m$  „ „  $x'' = 2,08^m$

annehmen, aus welchen Angaben die theoretischen Längen der Platten sich ergeben; dieselben werden mit Rücksicht auf die Regelmässigkeit der Niettheilung entsprechend geändert.

**8) Niettheilung.** Die Minimaltransversalkraft wird analog wie das Minimalmoment berechnet (Seite 91). Es ist

$$\min R_t = - \frac{\sin \varphi}{h} \left\{ \frac{\xi}{l + \xi} \Sigma P b - \Sigma P' b' \right\}$$

$$\xi = l \frac{l - h \cotg \varphi}{l + h \cotg \varphi}.$$

Man findet für das erste Feld (Fig. 167)

$$\cotg \varphi = \frac{1,85}{1,16} = 1,6; \quad \varphi = 32^\circ 10'; \quad \sin \varphi = 0,53$$

$$\xi = 7,4 \frac{7,4 - 2,5 \cdot 1,6}{7,4 + 2,5 \cdot 1,6} = 2,21^m; \quad \frac{\xi}{l + \xi} = 0,230,$$

so dass  $\min R_t$  entsteht, sobald die erste Axe über dem Scheitel liegt.

(Dieser Stellung entspricht  $\frac{\sum P'}{\sum P} = 0,277 > 0,230$ )\*. Es wird

$$\min R_i = -\frac{0,53}{2,5} \left\{ 0,23 \cdot 323 - 19,5 \right\} \frac{1}{2} = -5,81^t.$$

Der Laststellung Fig. 167 entspricht  $\max R_i$ ; dieses wird nach Formel 134

$$\begin{aligned} \max R_i &= + \frac{\sin \varphi}{h} \left\{ \sum P b' - \frac{\xi}{l + \xi} \sum P b \right\} \\ &= + \frac{0,53}{2,5} \left\{ 39 \cdot 4,05 - 0,23 \cdot 39 \cdot 11,45 \right\} \frac{1}{2} = 5,87^t. \end{aligned}$$

Der Einfluss der permanenten Last auf die Kräfte  $R_i$  ist vernachlässigbar; bei parabolischer Bogenaxe würde er Null werden. Nun ist für das erste Feld die Niettheilung

$$e = \frac{J \mathfrak{N}^{**}}{\mathfrak{S} R_i}$$

worin  $R_i = 5870 \text{ kg}$ ,

$$J = \frac{1}{12} \left\{ (27,3 - 4)46^3 - 10,3 \cdot 40^3 - 2(7 - 2)38^3 - 2 \cdot 24^3 \right\} = 86030 \text{ cm}^4$$

(vergl. Fig. 168) und  $\mathfrak{S}$  das statische Moment einer Gurtung in Bezug auf die horizontale Schweraxe ist. Da der Hälfte eines Rechtecks mit den Abmessungen  $b$  und  $h$  (Fig. 169)

$$\mathfrak{S} = b \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

entspricht, folgt

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{8} \left\{ (27,3 - 4)46^2 - (10,3 + 1,0)^{***} 40^2 - 2(7 - 2)38^2 - 2 \cdot 24^2 \right\} = 1954 \text{ cm}^3$$

$$\text{mithin} \quad e = \frac{86030 \mathfrak{N}}{1954 \cdot 5870} = 0,0075 \mathfrak{N}.$$

Setzt man  $\mathfrak{N} = p d \delta$ , wo  $p$  die Belastung der Flächeneinheit des Lochmantels bedeutet (vergl. Seite 67), so erhält man

$$p = \frac{e}{0,0075 d \delta}$$

und mit  $\delta = 1 \text{ cm}$  und  $e = 6 d$

$$p = 800^k \text{ pro } \square \text{ cm.}$$

Dies ist zulässig. †)

\*) Vergl. die sub 3 durchgeführte Berechnung der Minimalmomente.

\*\*) Vergl. Formel 90 auf Seite 66. In diese ist bei der Stellung, welche  $\min R_i$  erzeugt,  $P = 0$  einzuführen, so dass an den Anschlussstellen der Verticalen eine engere Theilung nicht nöthig ist.

\*\*\*) Das Stehblech ist hier in Abzug zu bringen.

†) Ist nur eine oder Kopfplatte vorhanden, so sind die Niete schwächer beansprucht, da  $\frac{J}{\mathfrak{S}}$  kleiner wird.

Dieselbe Theilung erhalten die Niete, welche die Kopfplatten mit den Winkeleisen befestigen. Für die anderen Felder des Tragbogens wird die theoretische Theilung weiter als  $e = 6d$ .

**9) Berechnung der Gelenke.** I. Das Kämpfergelenk. Der grösste Kämpferdruck entsteht im vorliegenden Falle bei derselben Laststellung, welche  $H_{\max} = 45^t$  erzeugt (Stellung in Fig. 165a); für diese ist mit Rücksicht auf die permanente Last

$$A = \frac{8(1,4 + 2,9) + 39 \cdot 7,4 + 13(11,9 + 13,4)}{2 \cdot 14,8} + 0,62 \cdot 7,4 = 27^t.$$

weshalb  $K = \sqrt{45^2 + 27^2} = 52^t$  sich ergibt.

Dieser Druck ist normal zur Lagerfläche gerichtet gedacht. Der Bogen wird am unteren Ende (Fig. 194) durch Platten verstärkt und nach Einlegen der gussstählernen Schale  $s$  auf den gusseisernen Zapfen gelagert, welcher letzterer unten mit einem Anzuge versehen ist, um eine Correctur der Höhenlage zu ermöglichen. Zur Regulirung der seitlichen Lage dienen die Keile  $k$ . Der Radius des Zapfens berechnet sich bei der (belasteten) Länge  $l' = 27,3^{\text{cm}}$  und der Belastung  $D$  aus

$$\mathfrak{N}) \quad r = \frac{D}{kl' [\cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + \varphi_0]}, \quad *)$$

worin zweckmässig  $\varphi_0 = 45^0$  resp.  $= \frac{\pi}{4}$  und  $k = 0,5^{\text{tons}}$  pro  $\square^{\text{cm}}$  gesetzt wird; es wird dann

$$r = \frac{1,6D}{l'} = 1,6 \frac{52}{27,3} = 3,1^{\text{cm}}$$

wofür  $r = 3,5^{\text{cm}}$  gewählt werden möge.

Der Lagerstuhl (Fig. 170) bezweckt die gleichmässige Vertheilung der Belastung  $D$  über eine grössere Fläche des Werksteines. Wir wählen  $b$  ungefähr gleich der 1,5fachen Breite der Gurtung des Trägers d. i.  $40^{\text{cm}}$  und  $a = 50^{\text{cm}}$ , so dass die Pressung für den Werkstein sich

$$\frac{52000}{40 \cdot 50} = 26^k \text{ pro } \square^{\text{cm}}$$

ergiebt, während für Granit — allerdings bei ruhiger Belastung —  $k$  bis  $45^k$  gestattet wird.

Um die Stärke  $\delta'$  der Seitenrippen zu bestimmen, werden diese als Consol von der Ausladung  $e$  (Fig. 170) und der Höhe  $h$  behandelt. Der Querschnitt (Fig. 170a) soll so disponirt werden, dass die neutrale Axe in  $\frac{1}{3}$  der Höhe liegt, und ist dann (vergl. Anhang) das Widerstandsmoment

$$W = 0,22z\delta'h^2.$$

Die Belastung  $D \frac{e}{a}$  erzeugt das Moment

$$\mathfrak{M} = \frac{De e}{a 2}$$

\*) Vergl. Anhang.

mithin muss  $k' 0,22 z \delta' h^2 = \frac{D e^2}{2 a}$

sein, wo  $k'$  die zulässige Druckspannung für Gusseisen. Setzt man  $D = 52^t$ ,  $e = 14,5^{\text{cm}}$  (Fig. 194),  $a = 50^{\text{cm}}$ ,  $h = 15^{\text{cm}}$ ,  $k' = 0,5^t$  pro  $\square^{\text{cm}}$ , so erhält man

$$z \delta' = 4,4^{\text{cm}},$$

weshalb 2 Rippen von  $5^{\text{cm}}$  Stärke mehr als ausreichende Sicherheit bieten. Damit nun die neutrale Axe des Querschnittes (Fig. 170 a) in  $\frac{1}{3}$  der Höhe liegt, muss

$$\delta = \frac{h}{3} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{b - 4 \delta' z}{b - \delta' z}} \right\}$$

sein, welche Gleichung die Bedingung  $\delta' < \frac{b}{4z}$  liefert. Im vorliegenden Falle ist  $\delta' z = 10$  und  $b = 40$ , mithin  $\delta = \frac{1}{3} h = 5^{\text{cm}}$ .

II. Das Scheitelgelenk (Fig. 186—189). Der Zapfen wird aus Stahl hergestellt, desgleichen der Balancier (Zapfenlager). In Formel 9 darf dann  $k = 1,00^t$  pro  $\square^{\text{cm}}$  eingeführt werden, so dass

$$r = \frac{0,8 D}{l'} = 0,8 \frac{H_{\text{max}}}{l'} = \frac{0,8 \cdot 45}{27,3} = 1,3^{\text{cm}}$$

bereits genügt. Es ist dafür  $r = 3,0^{\text{cm}}$  gewählt worden. Für den gefährlichen Querschnitt des gleichförmig belastet gedachten Balanciers wird bei der Zapfenlänge  $l'$  (Fig. 171)

$$\mathfrak{M} = \frac{D a}{8} \text{ und } W = \frac{l' h^2}{6},$$

so dass die Bedingung  $\frac{k l' h^2}{6} = \frac{D a}{8}$  zu

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 D a}{k l'}}$$

führt. Für Stahl ist  $k = 1,0^t$  pro  $\square^{\text{cm}}$  zu setzen, während  $a = 40^{\text{cm}}$ ,  $l' = 27,3^{\text{cm}}$  ist, so dass sich  $h = 7^{\text{cm}}$  ergibt.

Der Bolzen ist gegen Verschieben normal zur Brückenaxe durch Anläufe gesichert. Die Schwellenträger, welche gleichzeitig die Gurte des Windträgers bilden, sind über dem Scheitelgelenk unterbrochen und durch eine horizontale Platte verbunden; letztere dient gleichzeitig als Anschlussblech für die mittelsten Winddiagonalen und setzt der Hebung und Senkung des Scheitels einen nur sehr geringen Widerstand, welcher übrigens durch eine leichte Wellung der Platte herabgemindert werden kann, entgegen.

#### Berechnung der Quereconstruction.

10) Der Windträger. Wird die Höhe des Wagenzuges  $3,8^{\text{m}}$  angenommen und der Winddruck pro  $\square^{\text{m}}$  gleich  $0,15^t$  gesetzt, so ist die mobile Belastung pro Meter

$$w_m = 0,15 \cdot 3,8 = 0,57^t.$$

Die permanente Last berechnet sich bei der Pfeilhöhe  $h = 2,5^m$  des Tragbogens angenähert auf

$$w_p = 0,15 \frac{h}{2} = 0,188^t.$$

Die Transversalkraft für das  $m^{\text{te}}$  Feld des Windträgers ist mit der Bezeichnungsweise Fig. 172 (nach Formel 227 Seite 135)

$$\mathfrak{G}_m = \frac{w_p x_m'^2}{4l} + w_p x_m'' + 0,15 \frac{P}{l} (x_m' - 1,5).$$

Mit  $P = 13^t$  erhält man für:

Feld 4	$x_m' = 4 \cdot 1,85$	$x_m'' = 0,5 \cdot 1,85$	$\mathfrak{G}_m = 2,79^t$
„ 3	$= 5 \cdot 1,85$	$= 1,5 \cdot 1,85$	$= 4,21^t$
„ 2	$= 6 \cdot 1,85$	$= 2,5 \cdot 1,85$	$= 5,77^t$
„ 1	$= 7 \cdot 1,85$	$= 3,5 \cdot 1,85$	$= 7,45^t$

Die beiden neben einander liegenden Windträger sind durch Winkel-eisen  $W$  (Fig. 184) mit einander verbunden, und sind daher (vergl. Seite 137) die Kräfte  $\mathfrak{G}_m$  zu halbieren. Desshalb findet man für die Diagonale

$$D_m = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{G}_m}{\sin \varphi} = \frac{1}{2} \mathfrak{G}_m \frac{2,45}{1,6} \text{ und zwar:}$$

$D_1 = 5,70^t$	$D_3 = 3,22^t$
$D_2 = 4,42^t$	$D_4 = 2,13^t$

Die zulässige Inanspruchnahme (Seite 128) ist  $k = 1,0^t$  pro  $\square^{cm}$ , so dass bei  $1,0^{cm}$  Stärke und mit Rücksicht auf die Schwächung durch  $2,0^{cm}$  starke Niete die Breite der ersten Diagonale

$$b = \frac{5,70}{1,0 \cdot 1,0} + 2,0 = 7,7^{cm} \text{ wird.}$$

Ebenso wird Diagonale No. 2 gewählt. Im 3<sup>ten</sup> und 4<sup>ten</sup> Felde sind  $5,2^{cm}$  starke Diagonalen anzuordnen.

Ein  $2,0^{cm}$  starker Niet hat  $3,14 \square^{cm}$  Querschnitt, und genügen, um eine Diagonale mit dem Querschnitt  $f$  anzuschliessen,

$$n = \frac{5}{4} \frac{f}{3,14} = 0,4 f \text{ Niete.}$$

Die ersten beiden Diagonalen werden durch  $n = 0,4 \cdot 5,70 = 3$  Niete, die anderen beiden durch  $n = 0,4 \cdot 3,22 = 2$  Niete befestigt.

Die Normale  $N_1$  (Fig. 172) des Windträgers ist durch  $\mathfrak{E}_1 = \frac{1}{2} \cdot 7,45 = 3,73^t = 3730^k$  belastet. Das erforderliche Trägheitsmoment ist (bei der Länge  $160^{cm}$ )

$$J = \frac{3730 \cdot 160^2}{4000000} = 23,87^{cm^4} \text{ *)}$$

Ein Winkel mit der Schenkellänge  $7^{cm}$  und der Stärke  $1^{cm}$  besitzt  $J_{\min} = 23,73, \text{**})$  genügt also für sämtliche Normalen. Die End-

\*) Nach Formel 110 Seite 79. Es ist  $z = 5$ ,  $E = 2000000^k$  pro  $\square^{cm}$ .

\*\*\*) Nach Tabelle 2 des Anhanges ist für  $m = 7$  und  $\delta = 1$

$$J = 23,73.$$

normale  $N_0$  hat die grösste Auflagerreaction des horizontalen Windträgers aufzunehmen; diese wird (Fig. 173)

$$A_0 = (w_p + w_v)l + \frac{3 \cdot 0,10 P(2l - 1,5)}{2l} = 9,18^t,$$

mithin = 4,59<sup>t</sup> pro Windträger.

Erforderlich ist hiernach

$$J = \frac{4590 \cdot 160^2}{4000000} = 29,38\text{cm}^4.$$

Einem Winkel mit der Eisenstärke  $\delta$  und der Schenkellänge  $6\delta$  entspricht (Anhang, Tabelle 2)

$$J = 14,48\delta^4,$$

so dass für  $\delta = 1,25\text{cm}$  und Schenkellänge  $6 \cdot 1,25 = 7,5\text{cm}$

$$J = 28,28\text{cm}^4$$

wird. Wird die Endnormale durch 2 Niete von 2,0<sup>cm</sup> Stärke an die Anschlussplatte befestigt, so ist die Inanspruchnahme des Nietes

$$k = \frac{4590}{2 \cdot 3,14} < 700^k \text{ pro } \square\text{cm}, \text{ so dass die Verbindung genügend stark ist.}$$

Ueberhaupt werden sämtliche Normalen des Windträgers durch je zwei Niete an die Anschlussplatten befestigt.

Die Normalen, welche die beiden Windträger verbinden, erhalten das Caliber  $7,0 \times 7,0 \times 1,0\text{cm}$  und werden ebenfalls durch zwei Niete befestigt. Sämtliche Anschlussbleche sind 1,2<sup>cm</sup> stark.

Das Maximal-Angriffsmoment in Bezug auf die Mitte des Windträgers wird bei der in Figur 174 dargestellten Belastung

$$\max \mathfrak{M} = (w_m + w_p) \frac{l^2}{2} + 0,15 Pl - 0,10 P 1,5 = 33,23^t$$

und kommt hiervon auf jedes der beiden Systeme  $\frac{1}{2} \cdot 33,23^{\text{tm}}$ , wesshalb bei dem Abstände 1,6<sup>m</sup> der Tragbögen die grösste Belastung der Gurtung

$$\frac{16,67}{1,6} = 10,4^t$$

beträgt. Wird die Platte, welche die Schwellenträger über dem Scheitel miteinander verbindet, durch 6 Niete von 2<sup>cm</sup> Stärke befestigt, so ist die Spannung im Niet

$$k = \frac{10400}{6 \cdot 3,14} < 700^k \text{ pro } \square\text{cm}.$$

**II) Der Schwellenträger.** Die grösste Inanspruchnahme erfolgt, sobald die Axe einer Eilzug-Maschine über der einen Querschwelle liegt. Der Raddruck beträgt in maximo 9<sup>t</sup>, so dass (Fig. 175)

$$\max \mathfrak{M} = \frac{3 P \lambda}{4 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 1,85}{16} = 3,122^{\text{tm}}$$

$$= 312200^k \text{ pro Centimeter.}^*)$$

\*) Es wird zweckmässig darauf nicht gerücksichtigt, dass der Schwellenträger continuirlich ist.

Ist  $W$  das Widerstandsmoment des Querschnittes,  
 $F$  der Inhalt „ „  
 so ist die Spannung

$$k = \frac{312\,200}{W} + \frac{10\,400}{F}$$

woraus

$$W = \frac{1}{k} \left\{ 312\,200 + 10\,400 \frac{W}{F} \right\} .$$

Auf diese Form empfiehlt es sich stets, die Gleichung zu bringen, da der Kernradius  $\frac{W}{F}$  innerhalb gewisser Grenzen annähernd constant ist. So liegt er für die hier in Betracht kommenden Profile zwischen 7 und 9. Wird  $\frac{W}{F} = 8^{\text{cm}}$  und  $k = 750$  gesetzt (wobei sowol auf die ungünstige Anstrengung durch Stösse als auch darauf gerücksichtigt wurde, dass bezüglich der Belastung sehr ungünstige Annahmen gemacht worden sind) so ergibt sich

$$W = 527$$

und genügt das Profil No. 36 der Tabelle 1 des Anhanges mit  $W = 553$  und  $\frac{W}{F} = \text{rot } 8,1^{\text{cm}}$ .

**12) Verticalen zur Unterstützung der Fahrbahn.** Die grösste Belastung erfährt die Verticale, sobald das Mittelrad einer Maschine über derselben liegt. Man erhält für eine Eilzugmaschine (Fig. 176)

$$V = 9 + 2 \cdot 3 \frac{1,85 - 1,4}{1,85} = 10,5^{\text{t}},$$

für eine Güterzugmaschine (Fig. 177)

$$V = 6,5 + 2 \cdot 6,5 \frac{1,85 - 1,5}{1,85} = 9,0^{\text{t}}.$$

Die Belastung durch die Fahrbahn beträgt ( $400^{\text{k}}$  pro Meter Träger)

$$0,400 \cdot 1,85 = 0,74^{\text{t}},$$

so dass die Gesamtbelastung:

$$10,5 + 0,7 = 11,2^{\text{t}}.$$

Die erste Verticale ist circa  $1,3^{\text{m}}$  lang und wird daher das erforderliche Minimalträgheitsmoment

$$J = \frac{11\,200 \cdot 130^2}{4\,000\,000} = 47,32 .$$

Die Verticale besteht aus 2 Winkeleisen mit dem Caliber  $7^{\text{cm}} \times 7^{\text{cm}} \times 1,0^{\text{cm}}$  und hat Kreuzquerschnitt; diesem entspricht zwar (Tabelle 2 des Anhanges)

$$J_{\text{min}} = 2 \cdot 92,09 = 184,18 ;$$

doch sind geringere Abmessungen durch die Nothwendigkeit einer soliden Befestigung der Theile miteinander ausgeschlossen.

**13) Die Endversteifung.** Unter der Voraussetzung, dass eine Güterzugmaschine\*) die in Fig. 178 dargestellte Stellung hat, ist der Druck auf die Endverticale

$$V_0' = \left\{ 13 + \frac{13 \cdot (1,85 - 1,5)}{1,85} \right\} \frac{1}{2} = 7,73^t.$$

Hierzu ist zu addiren: a) Belastung durch das Eigengewicht der Fahrbahn (800<sup>k</sup> pro Meter Geleis) mit

$$V_0'' = \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,85 = 0,37^t;$$

b) derjenige Druck, welchen die Endverticale als Constructionsglied der Endversteifung aufzunehmen hat, und der nach Seite 137

$$V_0''' = \frac{4,59 \cdot 2,5}{1,6} = 7,17^t$$

wird, worin 4,59 den durch die Versteifung aufzunehmenden Druck des Windträgers,

2,5 =  $h$  die Höhe der Endverticalen,

1,6 den Abstand der Tragbögen bedeutet.

Man erhält im Ganzen

$$V_0 = 7,73 + 0,37 + 7,17 = 15,27^t$$

und findet das erforderliche Minimalträgheitsmoment

$$J_{\min} = \frac{15270 \cdot 250^2}{4000000} = 238,6.$$

Die Verticale ist derartig aus 2 Winkeleisen gebildet, dass der Querschnitt kreuzförmig ist. Bei dem Winkeleisen-caliber 7,2<sup>cm</sup> × 7,2<sup>cm</sup> × 1,2<sup>cm</sup> ist dann (wegen  $m = 6$ , Tabelle 2 des Anhanges)

$$J_{\min} = 2 \cdot 55,92 \delta^4 = 2 \cdot 55,92 \cdot 1,2^4 = 232,11.$$

Die Diagonale der Endversteifung ist (bei einer Länge von  $\sqrt{1,6^2 + 2,5^2}$  m) belastet durch

$$D = \frac{4,59 \cdot \sqrt{1,6^2 + 2,5^2}}{1,6} = 8,32^t,$$

so dass der erforderliche Querschnitt 8,32 □<sup>cm</sup> und die zum Anschluss nöthige Nietzahl  $n = 0,4 \cdot 8,32 = 4$  beträgt. Bei einer Stärke von 1,2<sup>cm</sup>

wird die Breite der Diagonale  $\frac{8,32}{1,2} + 2,0 = 8,9$  cm.

**14) Die Versteifungen,** welche dazu bestimmt sind, den auf die Tragbögen wirkenden Winddruck dem oberen Windträger zu übermitteln, be-

\*) Es wird nur die Einwirkung einer Güterzugmaschine untersucht, da die Endverticale zugleich einen Bestandtheil der Endversteifung bildet und als solcher besonders stark durch die Stellung Fig. 15 unter gleichzeitiger Annahme eines grossen Winddruckes beansprucht wird.

stehen aus 2 sich kreuzenden Flacheisen (Fig. 191), die bei der Neigung  $\varphi$  und unter Voraussetzung eines starken Orkanes durch die Kraft

$$D = \frac{W_u}{\cos \varphi}$$

angestrengt werden, wo

$$W_u = 0,3 \cdot 1,85 \cdot 0,46^*) = 0,255^*$$

den Winddruck auf ein Feld des Tragbogens bedeutet. Eine Diagonale mit den Abmessungen  $5^{\text{cm}} \times 1,0^{\text{cm}}$ , welche durch einen  $2^{\text{cm}}$  starken Niet befestigt wird, ist mehr als ausreichend.

**15) Stabilität der Brücke gegen Kanten durch Winddruck.** Bedeutet (Fig. 179)  $h'$  den Abstand der Schienenoberkante von der Horizontalen

durch die Kämpfergelenke,

$h''$  die Höhe des Wagenzuges,

$W_p$  den Winddruck auf die Brücke,

$W_v$  „ „ „ den Wagenzug,

$h_p$  die Angriffshöhe von  $W_p$ ,

$v$  die gleichförmig vertheilt gedachte Verkehrslast pro Längeneinheit,

$b'$  den erforderlichen Minimal-Abstand der Tragbögen von einander,

so ist, wenn die Ueberführungen der beiden Geleise von einander unabhängig construirt werden, die Bedingung für die Stabilität

$$I) \quad W_p h_p + W_v \left( h' + \frac{h''}{2} \right) = (v + p) 2l \cdot \frac{b'}{2}.$$

Setzt man  $W_p = \frac{1}{3} h \cdot 2lw$ ,  $h_p = \frac{7h}{10}$ ,  $W_v = wh''2l$ , so folgt

$$b' = \frac{2w}{v + p} \left\{ h'' \left( h' + \frac{1}{2} h'' \right) + \frac{7h^2}{30} \right\}.$$

Soll nun der  $3,8^{\text{m}}$  hohe Wagenzug  $n$ fache Sicherheit gegen Kanten bieten, so folgt (bei  $1,5^{\text{m}}$  Spurweite)

$$v \frac{1,5}{2} = w 3,8 \frac{3,8}{2} n$$

$$v = n 9,63 w \text{ und}$$

$$b' = \frac{2w}{9,63 nw + p} \left\{ h'' \left( h' + \frac{1}{2} h'' \right) + \frac{7h^2}{30} \right\}.$$

Der von  $w$  abhängige Theil wird mit  $w$  ein Maximum, und möge, um dem denkbar ungünstigsten Falle Rechnung zu tragen (da die Gleichung I labiles Gleichgewicht liefert),  $w = 0,2^{\text{t}}$  pro  $\square^{\text{m}}$  und  $n$  nur  $1,2$  gesetzt werden. Es folgt dann mit  $h'' = 3,8$

$$b' = \frac{0,4}{p + 2,3} \left\{ 3,8 \left( h' + 1,9 \right) + \frac{7h^2}{30} \right\} \text{ meter.}$$

\*) Höhe des Bogenträgers  $40^{\text{cm}} + 6 \cdot 1 = 46^{\text{cm}}$ .

Im vorliegenden Falle ist  $h = 2,5^m$  und  $h' = 3,25^m$ , somit  $b' = \frac{0,4}{0,6 + 2,3} 21 = 2,9^m$ , während  $b = 1,6^m$  gewählt ist. Da nun nach Gleichung I das Angriffsmoment des Winddruckes  $= (v + p) 2 l b'$  ist, sucht, des kleiner gewählten Abstandes  $b$  wegen, der Wind die Brücke mit dem Momente  $(v + p) 2 l \left( \frac{b' - b}{2} \right) = (9,63 n w + p) l (b' - b) = (9,63 \cdot 1,2 \cdot 0,2 + 0,6) \cdot 7,4 (2,9 - 1,6) = 27,90^m$  zu kanten. Um dies zu hindern, werden die beiden eingelegigen Brücken an den Enden durch Verticalkreuze verbunden, und ist ein Kanten (nach Fig. 180) nunmehr erst dann möglich, wenn dieses Verticalkreuz überanstrengt wird. Mit Rücksicht auf die der Figur 181 eingeschriebenen Bezeichnungen findet man, wenn  $\mathfrak{M} = 27,90$  zu gleichen Theilen auf die beiden Versteifungen vertheilt wird,

$$\begin{aligned} - N h &= \frac{1}{2} \mathfrak{M} \\ - N h - D c &= p l \frac{b}{2} \end{aligned}$$

woraus mit  $h = 2,5^m$ ;  $c = 2,88^m$ ;  $b = 1,6^m$ ;  $p = 0,6^t$

$$N = 5,58^t \text{ (Druck)}$$

$$D = 3,6^t.$$

Der Querstab  $N$  besteht aus zwei Winkeleisen mit den Abmessungen  $7^m \times 7^m \times 1^m$ . Dem Querschnitte eines jeden Winkels entspricht  $J = 57,91$ , während erforderlich ist für beide:

$$J = \frac{5580 \cdot 240^2}{4000000} = 80.$$

Zur Befestigung des Stabes genügen 2 Niete von  $2^m$  Stärke. Der Lochmanteldruck wird nämlich bei  $1,2^m$  Stärke des Anschlussbleches

$$= \frac{5500}{2 d \delta} = \frac{5500}{2 \cdot 2 \cdot 1,2} = 1146^k \text{ pro } \square^m,$$

Für die Diagonale genügt ein Querschnitt von  $3,6 \square^m$ , wesshalb bei  $1,0^m$  Stärke und  $2^m$  Nietdurchmesser die Breite  $= \frac{3,6}{1,0} + 2,0 = 5,6^m$  wird. Die Befestigung erfolgt durch  $0,40 \cdot 3,6 = 2$  Niete.

#### Berechnung des Widerlagers.

Das Widerlager (Fig. 182) besitzt einschliesslich  $1^m$  Fundirungstiefe eine Höhe von rot.  $7,2^m$  und eine Tiefe von  $8^m$ . Damit auf der Fuge  $EE_1$  selbst bei fehlendem Mörtel Gleiten unmöglich ist, muss

$$\delta = \frac{(H - fA) - \frac{1}{8} \gamma_e h_2^2}{f \gamma_m h_2}$$

sein. Darin ist rot.  $h_2 = 3,7^m$ ,  $\gamma_e = 1,6^t$  das Gewicht der Erde und  $\gamma_m = 1,6^t$  das Gewicht des Mauerwerks pro Cubikmeter,  $f = 0,7$  der

Reibungscoefficient. Das Gewicht  $G'$  des Theiles  $E_1LOS$  muss von  $A$  abgezogen werden und beträgt rot.  $0,6 \cdot 3,5 \cdot 1,6 = 3,36^t$ , so dass (vergl. Seite 153):

$$\max(H-fA) = \frac{1}{h} \left\{ \frac{\xi}{l+\xi} \Sigma P b - \Sigma P' b' \right\} + \frac{p l^2}{2h} - f(pl - 3,36)$$

wird. Hierin ist

$$\xi = l \frac{l-fh}{l+fh}; \quad \frac{\xi}{l+\xi} = \frac{1}{2} - \frac{fh}{2l},$$

während die Zugstellung so zu wählen ist, dass eine Verschiebung des Lastensystems nach links oder nach rechts

$$\frac{\Sigma P'}{\Sigma P} > \frac{\xi}{l+\xi} \quad \text{resp.} \quad \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} < \frac{\xi}{l+\xi}$$

zur Folge hat. Die Axenbelastungen  $P$  und ebenso die permanente Belastung  $p = 1,24$  der Brücke pro Meter Geleis sind hierbei durch die halbe Tiefe des Widerlagers, d. i. durch 4 zu dividiren.

Es ist  $\frac{\xi}{l+\xi} = \frac{1}{2} - \frac{0,7 \cdot 2,5}{2 \cdot 7,4} = 0,382$ , und entspricht der in Fig. 182 angegebenen Stellung I bei Verschiebung nach links oder rechts

$$\frac{\Sigma P'}{\Sigma P} = \frac{2 \cdot 13}{3 \cdot 13 + 2 \cdot 8} > 0,382 \quad \text{resp.} \quad \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} = \frac{13}{3 \cdot 13 + 2 \cdot 8} < 0,382,$$

ferner  $\Sigma P b = \left( 8(1,4 + 2,9) + 39 \cdot 7,4 \right) \frac{1}{4} = 80,75^{\text{tm}}$

$$\Sigma P' b' = (13 \cdot 1,5) \frac{1}{4} = 4,88^{\text{tm}}.$$

Da nun weiter  $\frac{p l^2}{2h} = \frac{1,24}{4} \cdot \frac{7,4^2}{2 \cdot 2,5} = 3,40$

und  $pl = \frac{1,24}{4} \cdot 7,4 = 2,29$  ist, so folgt

$$\max(H-fA) = \frac{1}{2,5} [0,382 \cdot 80,75 - 4,88] + 3,40 - 0,7(2,29 - 3,36) = 14,53^t$$

$$b = \frac{14,53 - \frac{1}{8} \cdot 1,6 \cdot 3,7^2}{0,7 \cdot 1,6 \cdot 3,7} = 2,85^{\text{m}}.$$

Es soll nun berechnet werden, wie gross die Beanspruchung des Mauerwerks bei  $C$  ist, wenn die Breite  $b = 2,85^{\text{m}}$  bis zur Fuge  $CC_1$  beibehalten wird. Das grösste Moment, welches die Kräfte  $A$  und  $H$  in Bezug auf den Kernpunkt  $R$  ausüben, ist, mit Berücksichtigung der permanenten Belastung des Bogens (vergl. Seite 153):

$$\mathfrak{M}_R = \frac{z}{h} \left\{ \frac{\xi}{l+\xi} \Sigma P b - \Sigma P' b' \right\} + \frac{p l^2}{2h} z - p l c$$

Darin ist  $\frac{\xi}{l+\xi} = \frac{zl - hc}{2zl} = \frac{1}{2} - \frac{hc}{2zl}$

ferner  $z = 3,0^{\text{m}}$  und  $c = 0,95^{\text{m}}$ , mithin

$$\frac{\xi}{l+\xi} = 0,45.$$

Die gefährlichste Zugstellung ist die Stellung II\*) in Fig. 182, denn eine Verschiebung nach links resp. rechts liefert

$$\frac{\Sigma P'}{\Sigma P} = \frac{39}{39 + 24} > 0,45 \quad \text{resp.} \quad \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} = \frac{26}{39 + 24} < 0,45.$$

Da nun  $\Sigma P b = (24 \cdot 2,9 + 39 \cdot 8,9) \frac{1}{4} = 104,18^{\text{tm}}$

$$\Sigma P' b' = 39 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{4} = 14,63^{\text{tm}}$$

$$\frac{p l^2}{2h} = 3,40 \quad \text{und} \quad p l = 2,29 \quad \text{ist, so folgt}$$

$$\mathfrak{M}_R = \frac{3,0}{2,5} \left\{ 0,45 \cdot 104,18 - 14,63 \right\} + 3,40 \cdot 3 - 2,29 \cdot 0,95 = 46,73^{\text{tm}}.$$

Das Gewicht des Widerlagers einschliesslich  $G'$  ist

$$G = 1,6 \cdot 2,85 \cdot 6,2 = 28,27^{\text{t}};$$

der Erddruck wird

$$E = \frac{1}{8} \gamma_e h_1^2 = \frac{1}{8} \cdot 1,6 \cdot 6,2^2 = 7,69^{\text{t}},$$

mithin das Gesamtmoment für den Punkt  $R$  (mit Berücksichtigung von  $G' = 3,36^{\text{t}}$ , welches von  $G$  abzuziehen ist und deshalb als aufwärts wirkende Kraft in Rechnung gestellt wird)

$$\mathfrak{M}_R = 46,73 + 28,27 \cdot \frac{0,95}{2} + 3,36 \left( 0,95 - \frac{0,6}{2} \right) - 7,69 \cdot \frac{6,2}{3} = 46,45.$$

Der Normaldruck wird

$$\mathfrak{N} = G - G' + A$$

worin  $A = p l + \frac{\Sigma P b}{2l} = 2,29 + \frac{104,18}{14,8} = 9,33^{\text{t}}$ , so dass

$$\mathfrak{N} = 28,27 - 3,36 + 9,33 = 34,34^{\text{tm}}.$$

Der Abstand des Stützpunktes  $s$  vom Punkte  $R$  ist:

$$e_R = \frac{\mathfrak{M}_R}{\mathfrak{N}} = \frac{46,45}{34,34} = 1,35^{\text{m}}$$

und von der stärkst gedrückten Kante  $C$

$$\xi' = 2 \cdot 0,95 - 1,35 = 0,55^{\text{m}}.$$

Es liegt nämlich  $s$  ausserhalb des Kerns, und wird daher die Beanspruchung:

$$k = \frac{2\mathfrak{N}}{3\xi'} = \frac{2 \cdot 34,34}{3 \cdot 0,55} = 41,6^{\text{t}} \text{ pro } \square^{\text{cm}},$$

während für gewöhnliches Backsteinmauerwerk  $k = 70$  statthaft ist.

\*) Für die Stellung I wird ebenfalls bei einer Verschiebung nach links beziehungsweise nach rechts

$$\frac{\Sigma P'}{\Sigma P} = \frac{26}{39 + 16} > 0,45 \quad \text{und} \quad \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} = \frac{13}{39 + 16} < 0,45,$$

doch ist  $0,45 \cdot 104,18 - 14,63$  grösser als  $0,45 \cdot 80,75 - 4,88$ .

Nach der Formel

$$k = \frac{6\mathfrak{M}_R}{b^2}$$

hätte man erhalten

$$k = \frac{6 \cdot 46,45}{2,85^2} = 34,3^t \text{ pro } \square \text{ cm.}$$

Die Lage derjenigen Fuge, für welche  $k$  ein Maximum wird, ist nach Formel 274 durch

$$y = 2 \sqrt{\frac{6H + \gamma_m b^2}{3\gamma_e}}$$

gegeben. Setzt man hierin

$$\begin{aligned} H &= \frac{\Sigma P b}{2h} - \frac{\Sigma P' b'}{h} + p l \\ &= \frac{104,18}{2 \cdot 2,5} - \frac{14,63}{2,5} + 3,4 = 18,4^t, \end{aligned}$$

so folgt

$$y = 2 \sqrt{\frac{6 \cdot 18,4 + 1,6 \cdot 2,85^2}{3 \cdot 1,6}}$$

d. i. grösser als  $7,2^m$ .

Für das Fundament wird die Breite

$$b' = b + 0,51 = 2,85 + 0,51 = 3,36^m$$

gewählt. Es entspricht dann dem Kernpunkte  $R'$  der Fundamentsohle  $c' = 0,87$ ,  $z' = 4^m$ , mithin

$$\frac{\xi}{l + \xi} = \frac{1}{2} - \frac{h c'}{2 z' l} = 0,46,$$

woraus folgt, dass das grösste Moment  $\mathfrak{M}_{R'}$ , ebenso wie  $\mathfrak{M}_R$  durch die Laststellung II erzeugt wird. Die Beanspruchung des Baugrundes findet man am bequemsten wie folgt:

$$\text{Es ist } A = 9,33^t, H = 18,4^t, E = \frac{1}{8} \gamma_e h_s^2 = \frac{1}{8} \cdot 1,6 \cdot 7,2^2 = 10,37^t,$$

mithin, da  $E$  in der Höhe  $\frac{1}{3} 7,2 = 2,4^m$  angreift, das Angriffsmoment für den Mittelpunkt der Sohle:

$$\mathfrak{M}_{R'} = 18,4 \cdot 4 - 9,33 \frac{2,85}{2} + 3,36 \left( \frac{2,85}{2} - \frac{0,6}{2} \right) - 10,37 \cdot 2,4 = 39,2^m,$$

ferner der Normaldruck

$$\mathfrak{N}' = 28,27 - 3,36 + 9,33 + 3,36 \cdot 1,6 \cdot 1,0^*) = 39,6^t,$$

mithin die Druckexcentricität

$$e' = \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{N}'} = 1^m > \frac{b'}{6}$$

\*)  $G'' = 3,36 \cdot 1,6 \cdot 1,0 =$  Gewicht des Fundaments.

weshalb — da der Stützpunkt ausserhalb des Kerns liegt — die Beanspruchung des Baugrundes

$$k' = \frac{2\mathfrak{M}'}{3(\frac{1}{2}b' - c')} = \frac{2 \cdot 39,6}{3 \cdot (1,68 - 1,0)} = 38^t \text{ pro } \square^m$$

beträgt, während  $k' = 45$  zulässig ist.

Schliesslich bleibt noch nachzusehen, wie gross  $k'$  vor Aufstellung der Bögen ist. Die Hinterfüllungserde wird man für diese Untersuchung etwa mit  $v'' = 1000^k$  pro  $\square^m$  der Oberfläche belastet annehmen. Es

greift dann in der Höhe  $\frac{1}{2} \cdot 7,2 = 3,6^m$  der Erddruck\*)

$$E_1 = \frac{v''h_1}{4} = \frac{1,0 \cdot 7,2}{4} = 1,8^t$$

an und in der Höhe  $\frac{1}{3} \cdot 7,2 = 2,4^m$  wie vorhin

$$E = 10,37^t.$$

Das Angriffsmoment für den Mittelpunkt der Sohle ist

$$\mathfrak{M}' = 10,37 \cdot 2,4 + 1,8 \cdot 3,6 - 3,36 \left( \frac{2,85}{2} - \frac{0,6}{2} \right) = 27,59^tm,$$

also kleiner als das vorhingefundene. Da auch der Normaldruck sich um  $A$  kleiner herausstellt als bei belasteten Bögen und unbelasteter Hinterfüllungserde, so wird  $k' < 38^t$  werden, so dass das Widerlager in jeder Hinsicht als genügend stark zu erachten ist.

## § 29.

### Eisenbahnbrücke von 24<sup>m</sup> Stützweite. Bögen mit Kämpfergelenken ohne Scheitelgelenk. (Tafel 21—27.)

1) **Anordnung.** Eine zweigeleisige Bahn mit Langschwellen-Oberbau soll über einen Fluss geführt werden. Die Stützweite beträgt 24<sup>m</sup>, die Pfeilhöhe der Bogenaxe 3,2<sup>m</sup> (Fig. 227). Jedes Geleis wird durch zwei Bögen unterstützt, die im Abstände 1,8<sup>m</sup> von einander aufgestellt werden. Es liegen dann die Langschwellen beinahe über den Tragbögen, und werden die Querträger, welche gleichzeitig die Normalen des unmittelbar unter den Schwellen liegenden Windverbandes bilden, nur wenig auf Biegung beansprucht. Ausserdem bieten die Knotenbleche des Windverbandes den Schwellen eine grosse Auflagerfläche und machen die sonst anzuempfehlenden besonderen Unterlegeplatten überflüssig. Die Querträger sind zur Aufnahme eines nur für den Bahnwärter bestimmten Fussweges

\*) Vergl. Seite 153.

verlängert und in 2<sup>m</sup> Entfernung von einander angeordnet; dieser Abstand ist so bemessen, dass eine Unterstützung der Schwellen durch besondere Längsträger, welche von Querträger zu Querträger gehen würden, entbehrt werden kann. Es ist dies aus folgender Rechnung ersichtlich:

Das Angriffsmoment  $\mathfrak{M}$ , welches auf Schwelle und Eisenbahnschiene wirkt, vertheilt sich mit  $\mathfrak{M}_1$  auf die Schwelle und mit  $\mathfrak{M}_2$  auf die Schiene.  $J_1$  und  $J_2$  seien die Trägheitsmomente der Querschnitte von Schwelle und Schiene,  $E_1$  und  $E_2$  die Elasticitätsmodel. Aus der Bedingung der Uebereinstimmung der elastischen Linien beider Träger folgt

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{E_1 J_1} = \frac{\mathfrak{M}_2}{E_2 J_2}; \quad \mathfrak{M}_1 = \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} \cdot \mathfrak{M}_2$$

Der Schwelle (Fig. 201) entspricht:  $J_1 = \frac{30^4}{12} = 67500 \text{ cm}^4$ ,

$$W_1 = \frac{30^3}{6} = 4500 \text{ cm}^3,$$

und der 13<sup>cm</sup> hohen Eisenbahnschiene:  $J_2 = 919 \text{ cm}^4$ , \*)

$$W_2 = 140 \text{ cm}^3;$$

ferner ist  $E_1 = 110000^k$  pro  $\square\text{cm}$ ,  $E_2 = 2000000^k$  pro  $\square\text{cm}$ , mithin

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2} = \frac{110000 \cdot 67500}{2000000 \cdot 919} = 4.$$

Das Maximalmoment, welches der Raddruck  $P$  bei der Stützweite  $\lambda$  erzeugt, ist nach der Theorie der continuirlichen Träger\*\*)

$$\mathfrak{M} = 0,214 P \lambda,$$

so dass, wenn  $P = 9000^k$  als Raddruck für eine Eilzugmaschine angenommen wird, sich

$$\mathfrak{M} = 0,214 \cdot 9000 \cdot 200 = 385200^{\text{kcm}}$$

ergiebt. Nun wird

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{4}{5} \cdot 385200 = 308160^{\text{kcm}},$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{1}{5} \cdot 385200 = 77040^{\text{kcm}},$$

wesshalb die Anstrengungen

$$k_1 = \frac{308160}{4500} = 68,5^k \text{ pro } \square\text{cm} \text{ für die Schwelle,}$$

$$k_2 = \frac{77040}{140} = 553^k \text{ pro } \square\text{cm} \text{ für die Schiene}$$

werden. Beide Werthe sind als zulässig zu erachten.

**2) Vorläufige Berechnung des Bogenquerschnitts.** Die Bogenaxe ist ein Kreisbogen mit dem Radius (Fig. 227)

$$r = \frac{12^2 + 3,2^2}{2 \cdot 3,2} = 24,1^m.$$

\*) Vergl. Anhang.

\*\*) Winkler, Theorie der Brücken (1873), Heft I, Seite 144.

Die Ordinate wird für  $x = \frac{1}{2}l = 6^m$

$$y = \sqrt{24,1^2 - 6^2} = 20,9 = 2,44^m.$$

Um nach den Ausführungen des § 17 für den Querschnitt bei  $x = 6^m$  das grösste Moment zu berechnen, wird (vergl. S. 105)

$$\frac{\xi}{2} = \frac{3ly - 2hx}{3y} = \frac{3 \cdot 12 \cdot 2,44 - 2 \cdot 3,2 \cdot 6}{3 \cdot 2,44} = 6,75^m$$

bestimmt, dann aus Tabelle II (Seite 42)

$$c_r = 6,62^m; \mathfrak{P}_n = 102; \mathfrak{S}_n = 6808,50$$

gefunden und hierauf Formel

$$\mathfrak{M} = \frac{3y}{8lh} \left\{ \mathfrak{P}_n \left[ c_r + \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 \right] - \mathfrak{S}_n \right\}$$

angewendet. Man findet

$$\mathfrak{M} = \frac{3 \cdot 2,44}{8 \cdot 12 \cdot 3,2} \left\{ 102 [6,62^2 + 6,75^2] - 6808,5 \right\} = 55,02^{\text{tm}}.$$

Einer gleichförmigen Verkehrslast ( $v$  pro Längeneinheit) entspricht nach § 17

$$\mathfrak{M} = 0,064 v l^2,$$

daher folgt die äquivalente mobile Belastung

$$v = \frac{55,02}{0,064 \cdot l^2} = 6,0^{\text{tons}} \text{ pro Meter Geleis,}$$

d. i.  $v = 3,0^{\text{tons}}$  pro Meter Träger.

Das Stehblech wird  $= \frac{1}{2}l = 60^{\text{cm}}$  hoch und  $1,0^{\text{cm}}$  stark gewählt. Die Gurtwinkel erhalten das Caliber  $12^{\text{cm}} \times 12^{\text{cm}} \times 1,2^{\text{cm}}$  und entspricht deshalb dem Querschnitt von Stehblech und Winkeln (Fig. 205 a) ohne Rücksichtnahme auf die Schwächung durch  $2,5^{\text{cm}}$  starke Niete \*)

$$J_s = \frac{1}{12} \left\{ 25 \cdot 60^3 - 2 \cdot 10,8 \cdot 57,6^3 - 2,4 \cdot 36^3 \right\} = 96684^{\text{cm}^4},$$

$$f_s = 60 \cdot 1,0 + (12 + 10,8) 1,2 \cdot 4 = 169,4 \text{ cm}.$$

Für die weitere Rechnung werden das Kilogramm und das Decimeter als Einheiten gewählt.

Länge der Bogenaxe:

$$b_a = 2l \left\{ 1 + \frac{2h^2}{3l^2} \right\} = 24 \left\{ 1 + \frac{2 \cdot 3,2^2}{3 \cdot 12^2} \right\} = 2l \cdot 1,05;$$

\*) Es wird hier auf die Schwächung durch Niete keine Rücksicht genommen, weil die durch Belastung und durch Temperaturänderung erzeugten Angriffsmomente addirt und in die Formel  $k_u = k' \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\max \mathfrak{M}_o}{\min \mathfrak{M}_o} \right]$  eingeführt werden sollen; während die grössten Momente in Folge der Temperaturänderung seltener auftreten als die der Belastung entsprechenden, und somit nach dem Wöhler'schen Gesetze eine grössere Inanspruchnahme zulässig wäre.

Gewicht von Stehblech und Winkelisen pro Längeneinheit der Stützweite:

$$p_s = 7,6 f_s \frac{b_a}{2l} = 7,6 \cdot 1,694 \cdot 1,05 = 13,52^k \text{ pro Decim.};$$

Gewicht der Fahrbahn:  $p_f = 40^k$  pro Decim.;

Verkehrslast:  $v = 300^k$  pro Decim.;

erforderlicher Querschnitt der Kopfplatten einer Gurtung:

$$f = \frac{0,064 v l^2 + e \left\{ p_f + p_s + v \right\} \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left( \frac{2h}{l} \right)^2} + c_i f_s h e + c_i f_s e^2 - \frac{2 J_s k}{h_1}}{k h_1 - e \left( \frac{2 \gamma b_a}{2l} \right) \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left( \frac{2h}{l} \right)^2} - 2 h c_i e - 2 e^2 c_i}$$

Darin ist  $h_1 = 6^{\text{dm}} =$  Stehblechhöhe

$$c_i = \frac{15}{16} \varepsilon_i E t \frac{h_1}{h_2}$$

$$\varepsilon_i = 0,000012 \text{ (Seite 56); } E = 2000000^k \text{ pro } \square^{\text{cm}}$$

$$= 200000000^k \text{ pro } \square^{\text{dm}}$$

$$\varepsilon_i E = 2400;$$

$$h = 32^{\text{dm}};$$

$t = 30^{\circ}$  Cels. der Temperaturunterschied;

$$c_i = 396; c_i f_s h = 21466; c_i f_s = 671; 2 h c_i e = 25344;$$

$$J_s = 9,6684^{\text{dm}^4}; k = 65000^k \text{ pro } \square^{\text{dm}};$$

$$\frac{2 J_s k}{h_1} = 209482; \frac{l^2}{2h} \sqrt{1 + \left( \frac{2h}{l} \right)^2} = 279;$$

$$f = \frac{0,064 \cdot 300 \cdot 120^2 + (40 + 13,52 + 300) \cdot 279 e + 21466 e + 671 e^2 - 209482}{650000 \cdot 6 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1,05 \cdot 279 e - 25344 e - 2 \cdot 396 e^2}$$

$$f = \frac{66998 + 120098 e + 671 e^2}{390000 - 29797 e - 792 e^2}$$

Wird  $e = 2,5^{\text{dm}}$  abgeschätzt, so folgt

$$f = 1,19 \square^{\text{dm}}$$

und genügen hiernach 3 Platten von  $1,2^{\text{cm}}$  Stärke und  $33,1^{\text{cm}}$  Breite. Dem so erhaltenen Querschnitte (Fig. 206) entspricht:

$$J = 96684 + \frac{33,1}{12} (67,2^3 - 60^3) = 337940$$

$$W = \frac{337940}{33,6} = 10060; F = 169,4 + 2 \cdot 119 = 407,4$$

$$e = \frac{W}{F} = 2,47^{\text{dm}},$$

welcher Werth von  $e = 2,5$  so wenig abweicht, dass ein Corrigiren überflüssig ist.

In die statische Berechnung wird  $e = 0,25^{\text{m}}$  eingeführt.

**3) Abschätzung des Eigengewichtes.** Es ist

$$p = p_f + p_s + 2 \gamma f \frac{b_a}{2l} = 40 + 13,52 + 2 \cdot 7,6 \cdot 1,19 \cdot 1,05 = 0,73^t \text{ pro Meter.}$$

In die statische Berechnung wird  
 $p = 0,75^t$  pro Meter  
 eingeführt.

4) **Horizontalschub in Folge von Temperaturänderungen.** Nach Formel 70 ist

$$H_t = \frac{15 \varepsilon_t E F t}{15 \frac{l^2 - h^2}{l^2 + h^2} + 8 \frac{h^2}{\varrho^2} \frac{l^2}{l^2 + h^2}},$$

worin zu setzen:

$$\varrho^2 = \frac{J}{F} = \frac{337940}{407} = 830 \text{ cm}^2; \quad \varepsilon_t E = 0,24; \quad F = 410 \text{ cm}^2.$$

Man erhält

$$H_t = 4436^k = \text{rot. } 4,44^{\text{tons}}.$$

Berechnung der Hauptträger.

5) **Coordinates der Kernpunkte.** Der Radius der oberen Kernlinie ist  $R_o = 24,1 + 0,25 = 24,35^m$ ; der unteren entspricht  $R_u = 24,1 - 0,25 = 23,85^m$ . Die Ordinaten der Schnittpunkte der Verticalen mit den Kernlinien (Fig. 209) sind gegeben durch

$$y_o = \sqrt{24,35^2 - x^2} - 20,90$$

$$y_u = \sqrt{23,85^2 - x^2} - 20,90.$$

*r = 24,1  
f = 2,2  
20,9*

Man findet für die Kernpunkte  $o_1, o_2, \dots, o_6$  und  $u_1, u_2, \dots, u_6$ :

$(y_o)_1 = 1,30^m;$	$(y_o)_4 = 3,12^m$	$(y_u)_1 = 0,76^m;$	$(y_u)_4 = 2,62^m$
$(y_o)_2 = 2,10^m;$	$(y_o)_5 = 3,37^m$	$(y_u)_2 = 1,56^m;$	$(y_u)_5 = 2,87^m$
$(y_o)_3 = 2,69^m;$	$(y_o)_6 = 3,45^m$	$(y_u)_3 = 2,19^m;$	$(y_u)_6 = 2,95^m.$

6) **Momente  $\min \mathfrak{M}_o$  und  $\min \mathfrak{M}_u$  entsprechend der mobilen Belastung.** Um das Moment  $\min \mathfrak{M}_o$  zu berechnen, bestimmt man

$$\frac{\xi}{2} = l - \frac{2hx}{3y_o}, \quad \left( \text{L'après la grille d'acier} \right)$$

sucht aus Tabelle I resp. II auf Seite 40 und 42 den nächst kleineren Werth  $c_r$  und führt diesen, sowie die zugehörigen  $\mathfrak{P}_n$  und  $\mathfrak{S}_n$  in die Formel

$$\min \mathfrak{M}_o = - \frac{3y_o}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n \left[ c_r^2 + \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 \right] - \mathfrak{S}_n \right\}$$

ein. Analog ist

$$\min \mathfrak{M}_u = - \frac{3y_u}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n \left[ c_r^2 + \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 \right] - \mathfrak{S}_n \right\},$$

$$\frac{\xi}{2} = l - \frac{2hx}{3y_u}.$$

Die Rechnung ist für alle die Punkte  $o$  und  $u$  durchzuführen, denen ein positives  $\xi$  entspricht. Es ist dies Letztere der Fall bei den Punkten

$o_1$  bis  $o_8$  und  $u_1$  bis  $u_8$ . Die Resultate sind wie folgt zusammengestellt:\*)

Tabelle der  $\min \mathcal{M}_o$ .

Kernpunkt	$\frac{1}{2} \xi$	$c_r$	$n$	$\mathcal{P}_n$	$\mathcal{S}_n$	$\min \mathcal{M}_o$
$o_1$	8,72	6,62*	9	102	6808,50	— 68,78
$o_2$	7,94	6,62*	9	102	6808,50	— 83,92
$o_3$	7,24	6,62*	9	102	6808,50	— 79,02
$o_4$	6,53	6,08*	8	89	4983,75	— 64,02
$o_5$	5,67	5,21	6	63	2342,25	— 45,85
$o_6$	4,58	4,47	5	55	1480,50	— 26,01
$o_7$	3,14	1,50	3	39	146,25	— 10,73
$o_8$	1,06	0,75	2	26	29,25	vernachlässigbar.

Tabelle der  $\min \mathcal{M}_u$ .

Kernpunkt	$\frac{1}{2} \xi$	$c_r$	$\mathcal{P}_n$	$\mathcal{S}_n$	$\min \mathcal{M}_u$
$u_1$	6,39	6,08*	89	4983,75	— 14,40
$u_2$	6,53	6,08*	89	4983,75	— 32,01
$u_3$	6,16	6,08*	89	4983,75	— 36,00
$u_4$	5,49	5,21	63	2342,25	— 32,41
$u_5$	4,57	4,47	55	1480,50	— 21,50
$u_6$	3,32	1,50	26	29,25	— 9,10
$u_7$	1,59	1,50	26	29,25	vernachlässigbar.

Die gefährlichsten Laststellungen lassen sich — obgleich dies nicht weiter erforderlich ist — leicht angeben. So entsteht z. B.  $\min(\mathcal{M}_o)_2$ , wenn das 9te Rad des nach Fig. 19 b angeordneten Zuges im Abstände  $\frac{1}{2} \xi - c_r = 1,32^m$  von der Stütze B liegt, also bei der in Fig. 207 dargestellten Stellung.

Zu  $\min(\mathcal{M}_o)_5$  ist  $\min(\mathcal{M}_o)_7$  zu addieren. Es wird hier ein nach Fig. 19 a angeordneter Zug von B aus vorrücken, bis Rad 6 im Abstände  $5,67 - 5,21 = 0,46^m$  von B liegt und ein ebensolcher Zug von A aus bis Rad 3 im Abstände  $3,14 - 1,50 = 1,64^m$  von A entfernt ist. Diese Stellung ist in Fig. 208 dargestellt; sie könnte allerdings als unwahrscheinlich ausgeschlossen werden. Sieht man aber die Belastung der beiden negativen Beitragsstrecken als möglich an, so folgt

$$\min(\mathcal{M}_o)_5 = -45,85 - 10,73 = -56,58$$

$$\min(\mathcal{M}_o)_6 = -26,01 \cdot 2 = -52,02$$

und ebenso  $\min(\mathcal{M}_u)_6 = -9,10 \cdot 2 = -18,20$ .

\*) Die in den nachstehenden Tabellen mit einem \* versehenen  $c_r$  sind der Tabelle II entnommen, die anderen der Tabelle I, Seite 42 resp. 40.

Da in die vorstehenden Rechnungen die Axenbelastungen eingeführt wurden, während jedes Geleis durch 2 Bögen gestützt wird, so sind die Momente zu halbiren.

**7) Momente max  $\mathfrak{M}_o$  und max  $\mathfrak{M}_n$  für die mobile Belastung.** Nach No. 164 auf Seite 107 (vergl. auch Fig. 98) ist

$$\max \mathfrak{M}_o = \frac{1}{s} \left\{ \mathfrak{S}_n + \mathfrak{P}_n a_n (a_n - \xi') + \mathfrak{S}_n (2a_n - \xi') \right\} - \mathfrak{S}_m$$

$$s = \frac{8hl}{3y_o}; \quad \xi' = 2 \left( l - \frac{2hx'}{3y_o} \right).$$

Der Zug ist — von  $A$  aus auffahrend — mit einer schweren Last über  $o$  so aufzustellen, dass

$$\frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_m} < \frac{s}{2a_n - \xi' + 2c_r}$$

$$\frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_{m-1}} > \frac{s}{2a_n - \xi' + 2c_r}$$

ist.  $m$  bedeutet den Index der Last über  $o$ ,  $n$  den Index der letzten Last,  $a_n$  den Abstand dieser Last von  $A$ . Wenn möglich, sollen nur zwischen den Belastungsscheiden  $E'$  und  $E$  (Fig. 208) in den Abständen  $\xi'$  von  $A$  resp.  $\xi$  von  $B$  Lasten liegen. Ist  $\xi'$  negativ, so ist Belastungsscheide  $E'$  ohne Bedeutung.

Die hiernach gefundenen Laststellungen zeigt Fig. 209\*). Die Resultate der Rechnung sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Momente max  $\mathfrak{M}_o$ \*\*)

Kernpunkt	$s$	$\xi'$	$a_n$	$n$	$c_r$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{P}_m$	$\mathfrak{P}_{m-1}$	$\frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_{m-1}} > \frac{s}{2a_n - \xi' + 2c_r} > \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_m}$
$o_1$	78,77	-48,11	2,0	3	1,5	39	39	26	$1,5 > 1,43 > 1,0$
$o_2$	48,76	-16,63	2,5	3	1,5	39	26	13	$3 > 1,90 > 1,5$
$o_3$	38,07	- 4,55	$\left. \begin{array}{l} 0,0 \\ 1,5 \dagger \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 5 \\ 4 \dagger \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 4,47 \\ 3,73 \dagger \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 55 \\ 47 \dagger \end{array} \right\}$	26	13	$\left\{ \begin{array}{l} 2,85 > \frac{5}{2} \\ 4 \frac{2}{3} \dagger > 2,54 \dagger \end{array} \right\}$
$o_4$	32,82	+ 2,12 †)	0,5	6	5,21	63	26	13	$4,8 > 3,53 > 2,4$
$o_5$	30,39	+ 6,28	2,5	6	5,21	63	26	13	$4,8 > 3,32 > 2,4$
$o_6$	29,68	+ 9,16	4,5	6	5,21	63	26	13	$4,8 > 2,89 > 2,4$

\*) Zur Erleichterung der Uebersicht ist in Fig. 209 die Nummer der Last  $P_m$  unterstrichen.

\*\*) Die nachstehenden Werthe  $c_r$ ,  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{Z}$  sind aus Tabelle I Seite 40 entnommen. Bei Untersuchung der Kriterien für die gefährlichste Laststellung bezüglich max  $(\mathfrak{M}_o)_3$  sind die mit † bezeichneten Werthe zu nehmen, sobald der Zug nach links verschoben wird, da dann die gerade über  $A$  stehende Last 8<sup>t</sup> die Brücke verlässt.

†) Bei positivem  $\xi'$  wurde die Belastung durch eine Lokomotive und einen Tender selbst dann gewählt, wenn dabei einzelne Lasten auf der linken negativen Beitragsstrecke liegen.

	$\mathfrak{S}_o$	$\mathfrak{I}_n$	$\mathfrak{S}_m$	max $\mathfrak{M}_o$
$o_1$	58,5	146,25	$\mathfrak{S}_3 = 58,5$	31,68
$o_2$	58,5	146,25	$\mathfrak{S}_2 = 19,5$	47,70
$o_3$	246,0	1480,50	19,5	48,79
$o_4$	328,5	2342,25	19,5	38,67
$o_5$	328,5	2342,25	19,5	24,15
$o_6$	328,5	2342,25	19,5	13,13

Bei Berechnung der Momente  $\mathfrak{M}_u$  hat man nur  $y_o$  durch  $y_u$  zu ersetzen. Die Resultate giebt folgende Tabelle. Die Zugstellungen zeigt Fig. 209.

Momente max  $\mathfrak{M}_u$ .

Kernpunkt	$s$	$\xi'$	$a_n$	$n$	$c_r$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{P}_m$	$\mathfrak{P}_{m-1}$	$\frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_{m-1}} > \frac{s}{2a_n - \xi' + 2c_r} > \frac{\mathfrak{P}_m}{\mathfrak{P}_{m-1}}$
$u_1$	134,79	-99,51	2,0	3	1,5	39	39	26	1,27
$u_2$	65,64	-30,70	1,0	4	3,73	47	39	26	1,63
$u_3$	46,76	-11,07	$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1,5 \dagger \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 4 \dagger \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 4,47 \\ 3,73 \dagger \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 55 \\ 47 \dagger \end{matrix} \right\}$	26	13	$\left\{ \begin{matrix} 2,34 > \frac{5,5}{8} \\ 4,7 \dagger > 2,17 \end{matrix} \right\}$
$u_4$	39,08	- 2,06	0,5	6	5,21	63	26	13	$4,8 > 2,90 > 2,4$
$u_5$	35,68	+ 3,19	4,0	6	5,21	63	39	26	$2,4 > 2,34 > 1,6$
$u_6$	34,71	+ 6,64	6,0	7	5,21	63	39	26	$2,4 > 2,20 > 1,6$

	$\mathfrak{S}_n$	$\mathfrak{I}_n$	$\mathfrak{S}_m$	max $\mathfrak{M}_o$
$u_1$	58,5	146,25	$\mathfrak{S}_3 = 58,5$	46,25
$u_2$	175,5	848,25	58,5	64,55
$u_3$	246,0	1480,50	$\mathfrak{S}_2 = 19,5$	70,40
$u_4$	328,5	2342,25	19,5	68,22
$u_5$	328,5	2342,25	$\mathfrak{S}_3 = 58,5$	57,15
$u_6$	328,5	2342,25	58,5	52,74

Die vorstehend berechneten Momente sind noch durch 2 zu dividiren.

**8) Momente in Folge der permanenten Belastung.** Die Eigenlast beträgt  $0,75^t$  pro meter. Ihr entsprechen die Reactionen

$$A_p = 0,75 \cdot 12 = 9,0^t$$

$$H_p = \frac{p l^2}{2h} = \frac{0,75 \cdot 12^2}{2 \cdot 3,2} = 16,875^t$$

und die Momente

$$(\mathfrak{M}_p)_o = Ax - Hy_o - \frac{p x^2}{2}$$

$$(\mathfrak{M}_p)_u = Ax - Hy_u - \frac{p x^2}{2}$$

Man findet

Kernpunkt	$(\mathfrak{M}_p)_o$	Kernpunkt	$(\mathfrak{M}_p)_u$
$o_1$	-5,44	$u_1$	+3,68
$o_2$	-5,44	$u_2$	+3,68
$o_3$	-4,89	$u_3$	+3,54
$o_4$	-4,65	$u_4$	+3,79
$o_5$	-4,37	$u_5$	+4,07
$o_6$	-4,22	$u_6$	+4,22

**9) Momente in Folge von Temperaturänderungen.** Einer Erhöhung oder Erniedrigung der Temperatur um  $30^0$  Celsius über die auf etwa  $10^0$  abgeschätzte Montirungstemperatur erzeugt den Horizontalschub

$$H_t = \pm 4,44^{\text{tons}}$$

und die Momente

$$(\mathfrak{M}_o)_t = \mp H_t y_o ; \quad \mathfrak{M}_u = \mp H_t y_u.$$

Man findet

Kernpunkt	$\mp (\mathfrak{M}_o)_t$	Kernpunkt	$\mp (\mathfrak{M}_u)_t$
$o_1$	5,77	$u_1$	3,37
$o_2$	9,32	$u_2$	6,93
$o_3$	11,94	$u_3$	9,72
$o_4$	13,85	$u_4$	11,63
$o_5$	14,96	$u_5$	12,74
$o_6$	15,32	$u_6$	13,10

**10) Gesamt-Momente.** Addirt man zu den sub 6 und 7 berechneten Momenten — nachdem man sie durch 2 dividirt hat — die vom Eigengewichte und der Temperaturänderung herrührenden, so erhält man die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellten Resultate.

Kernpunkt	- min $\mathfrak{M}_o$	+max $\mathfrak{M}_o$	Kernpunkt	- min $\mathfrak{M}_u$	+max $\mathfrak{M}_u$
$o_1$	45,60	16,17	$u_1$	30,18	6,89
$o_2$	56,72	27,73	$u_2$	42,89	19,26
$o_3$	56,34	31,45	$u_3$	48,46	24,18
$o_4$	50,51	28,54	$u_4$	49,53	24,05
$o_5$	47,62	22,67	$u_5$	45,39	19,42
$o_6$	45,55	17,67	$u_6$	43,69	17,98

**II) Berechnung der Gurtquerschnitte.** Es sollen Obergurt und Untergurt gleich stark construiert werden, da für den grösseren Theil des

Trägers die Momente  $\mathfrak{M}_o$  und  $\mathfrak{M}_u$  nicht erheblich differiren. Der erforderliche Querschnitt der Kopfplatten einer Gurtung ist

$$f = \frac{\mathfrak{M}_o}{kh_1} - \frac{2J_s}{h_1^3} = \frac{\mathfrak{M}_o}{k \cdot 60} - \frac{2 \cdot 96683}{60^2},$$

da durchweg  $\mathfrak{M}_o > \mathfrak{M}_u$ . Dabei ist

$$k = 0,8 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{(\max \mathfrak{M}_o)}{(-\min \mathfrak{M}_o)} \right\} \text{tons pro } \square \text{cm.}$$

Man findet für den Querschnitt No. 1:

$$k_1 = 0,8 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{16,17}{45,60} \right\} = 0,658^t \text{ pro } \square \text{cm}$$

$$f_1 = \frac{45,60}{0,658 \cdot 60} - 53,7 = 62 \square \text{cm}$$

und analog für

$$\text{Querschnitt 2: } k_2 = 0,604; \quad f_2 = 103 \square \text{cm}$$

$$,, \quad 3: k_3 = 0,577; \quad f_3 = 109 \square \text{cm}$$

$$,, \quad 4: k_4 = 0,574; \quad f_4 = 93 \square \text{cm}$$

$$,, \quad 5: k_5 = 0,610; \quad f_5 = 76 \square \text{cm}$$

$$,, \quad 6: k_6 = 0,645; \quad f_6 = 64 \square \text{cm.}$$

Den Maximalquerschnitt  $109 \square \text{cm}$  erreichen wir durch 3 Kopfplatten von  $1,2 \text{cm}$  Stärke und  $\frac{109}{3 \cdot 1,2} = 30,3 \text{cm}$  Breite, so dass der in Fig. 205 d dargestellte Querschnitt resultirt.

Die eine Kopfplatte wird bis zum Kämpfer beibehalten; die Längen der anderen ergeben sich aus der Querschnittscurve Fig. 210 (vergl. das auf Seite 167 Gesagte). Zu beachten ist, dass eine hinzutretende Platte nicht schon an ihrem Ende voll in Rechnung gestellt werden darf, sondern erst dann, nachdem sie durch so viele Niete befestigt ist, dass die Summe der Nietquerschnitte gleich  $\frac{5}{4}$  mal dem Querschnitte der Platte ist. Dieser beträgt rot.  $36 \square \text{cm}$ . Werden also  $2,5 \text{cm}$  starke Niete mit  $4,91 \text{cm}$  Querschnitt angewendet, so wird die zur „Endbefestigung einer Lamelle“ erforderliche Nietzahl

$$\frac{5 \cdot 36}{4 \cdot 4,91} = 9,$$

wofür 10 gesetzt werden möge. Ein Blick auf die Querschnittscurve lehrt z. B., dass bei  $x_2 = 2,53 \text{m}$  zwei Platten nöthig sind, und bei  $x_1 < 1,16 \text{m}$  eine Platte bereits nicht mehr genügt. Wenn nun in Fig. 211 bei  $x_1$  der erste der 10 zur Endbefestigung erforderlichen Niete steht, so wird vom Querschnitte  $\overline{\alpha\beta}$  ab die zweite Kopfplatte voll gerechnet werden dürfen, so dass also bereits für  $x < x_2$ ,  $f = 73 \square \text{cm}$  vorhanden ist. Es empfiehlt sich, die Niete zur Endbefestigung möglichst eng zu setzen, damit der Anschluss der neu hinzutretenden Platte möglichst bald erzielt wird. Die Werthe  $x_1 x_2 \dots$  werden selbstverständlich der regelmässigen Niettheilung angepasst.

Die Blechwand ist durch Winkel  $w$  (Fig. 196) mit dem Caliber  $7 \times 7 \times 1,0^{\text{cm}}$  versteift. Als weitere Versteifungen dürfen die Lachen für die Stösse angesehen werden.

**12) Die Transversalkräfte.** Die Ordinaten der Schnittpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 der Verticalen mit der Bogenaxe sind (Fig. 212)

$$\begin{array}{l|l|l} y_1 = 1,03^{\text{m}} & y_3 = 2,44^{\text{m}} & y_5 = 3,12^{\text{m}} \\ y_2 = 1,83^{\text{m}} & y_4 = 2,87^{\text{m}} & y_6 = 3,20^{\text{m}} (= h). \end{array}$$

Die Functionen sinus und cotang. der Neigungswinkel  $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \dots$  der Sehnen  $\overline{01}, \overline{12}, \overline{23} \dots$  sowie die Werthe

$$\xi = 2l - \frac{4h}{3} \cotg \varphi ; \quad \xi' = 2l + \frac{4h}{3} \cotg \varphi$$

sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Feld No.	cotg $\varphi$	sin $\varphi$	$\xi$	$\xi'$
1	1,942	0,458	+15,71	32,29
2	2,500	0,371	+13,33	34,67
3	3,279	0,292	+10,01	37,99
4	4,651	0,210	+ 4,16	43,84
5	8,000	0,124	-10,13	58,13
6	25,000	0,040	-82,77	130,77

Es bedeutet (vergl. Seite 109 und 110, ferner Fig. 101)  $\xi$  den Abstand der Lastscheide  $E$  von der Verticalen durch  $B$ , und es ist dabei  $E$  der Schnittpunkt einer von  $A$  unter  $\varphi$  gegen die  $AB$  gezogenen Geraden mit der Kämpferdrucklinie. Sobald  $\xi$  negativ ist, wird die Lastscheide  $E$  bedeutungslos.

Berechnung von  $\min R_t$ . Den Einfluss der Belastung der negativen Beitragsstrecke  $BE$  (ein positives  $\xi$  vorausgesetzt) ist (No. 171)

$$\min R_t = - \frac{3 \sin \varphi}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n \left[ \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 + c_r^2 \right] - \mathfrak{S}_n \right\}$$

und durch folgende Tabelle gegeben:\*)

Feld No.	$\frac{1}{2} \xi$	$c_r$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	$\min R_t$	
					pro Geleis	pro Träger
1	7,86	6,62*	102*	6808,50*	-17,72	- 8,86
2	6,67	6,62*	102*	6808,50*	- 7,97	- 3,98
3	5,00	4,47	55	1480,50	- 2,83	- 1,42
4	2,08	1,50	39	146,25	vernachlässigbar	

\*) Die nachstehenden mit \* bezeichneten Werthe sind aus Tabelle II, Seite 42, die anderen aus Tabelle I, Seite 40.

Die Belastung des Bogens links vom fraglichen Felde erzeugt ebenfalls ein negatives  $R_t$  und zwar wird dieses mit der Bezeichnungsweise in Fig. 101 (vergl. Seite 110, Formel 173)

$$\min R_t = -\frac{3 \sin \varphi}{8 h l} \left\{ \mathfrak{P}_n a_n (\xi' - a_n) + \mathfrak{S}_n (\xi' - 2 a_n) - \mathfrak{Z}_n \right\}.$$

Den in Fig. 212 dargestellten Zugstellungen I, II . . . V entsprechen die Werthe (Tabelle I, Seite 40)

Feld	Stellung	$a_n$	$n$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	$\mathfrak{Z}_n$	$\min R_t$	
							pro Geleis	pro Träger
2	I	0,5	2	26	19,5	29,25	- 3,89	+ 1,95
3	II	1,0	3	39	58,5	146,25	- 9,70	+ 4,85
4	III	0	4	47	175,5	846,25	-14,04	+ 7,02
5	IV	0,5	5	55	246,0	1486,50	-17,14	+ 8,57
6	V	1,0	6	63	328,5	2342,25	-18,80	+ 9,40

Durch Temperaturänderung entsteht, wegen  $H_t = 4,44^t$

$$R_t = -H_t \sin \varphi = -4,44 \cdot \sin \varphi$$

d. i. für Feld: 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ;

$$-R_t = 2,03 ; 1,65 ; 1,28 ; 0,93 ; 0,55 ; 0,18.$$

Die Addition der verschiedenen  $R_t$  liefert

$$\begin{aligned} \text{für Feld 1 : } \min R_t &= -8,86 - 2,03 = -10,89^t \\ \text{„ „ 2 : } & \text{„ „} = -3,98 - 1,65 - 1,95 = -7,58^t \\ \text{„ „ 3 : } & \text{„ „} = -1,42 - 1,28 - 4,85 = -7,55^t \\ \text{„ „ 4 : } & \text{„ „} = \quad \quad - 0,93 - 7,02 = -7,95^t \\ \text{„ „ 5 : } & \text{„ „} = \quad \quad - 0,55 - 8,57 = -9,12^t \\ \text{„ „ 6 : } & \text{„ „} = \quad \quad - 0,18 - 9,40 = -9,58^t. \end{aligned}$$

Berechnung von  $\max R_t$ . Der Träger wird rechts vom fraglichen Felde so belastet, dass — wenn möglich — keine Last über der negativen Beitragsstrecke  $EB$  (Fig. 102) liegt. Es ist nach Formel 175:

$$\max R_t = \frac{3 \sin \varphi}{8 h l} \left\{ \mathfrak{Z}_n + \mathfrak{S}_n (2 b_n - \xi) + \mathfrak{P}_n b_n (b_n - \xi) \right\}$$

und zwar erhält man für die Stellungen I' bis VI' (Fig. 213)

Feld	Stellung	$b_n$	$n$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	$\mathfrak{Z}_n$	$\max R_t$	
							pro Geleis	pro Träger
1	I'	19	3	39	58,5	146,25	17,08	8,70
2	II'	17	3	39	58,5	146,25	13,72	6,86
3	III'	9	6	63	328,5	2342,25	12,53	6,27
4	IV'	7	6	63	328,5	2342,25	14,00	7,00
5	V'	0,5	8	89	631,5	6603,75	17,08	8,54
6	VI'	0	7	76	517,5	4880,25	18,64	9,32

Durch Temperaturänderung entsteht

$$R_t = + 4,44 \sin \varphi,$$

so dass nach Addiren dieses Werthes zu den vorhin berechneten Resultaten sich ergibt:

Feld 1 :	max $R_t$ =	8,70 + 2,03 =	10,73
" 2 :	"   " =	6,86 + 1,65 =	8,51
" 3 :	"   " =	6,27 + 1,28 =	7,55
" 4 :	"   " =	7,00 + 0,93 =	7,93
" 5 :	"   " =	8,54 + 0,55 =	9,09
" 6 :	"   " =	9,32 + 0,18 =	9,50.

13) Die Niettheilung ist  $e = \frac{J\mathfrak{N}}{\mathfrak{S}R_t}$  (vergl. Seite 168), worin  $\mathfrak{N}$  die Tragfähigkeit eines Nietes bedeutet. Den Querschnitten Fig. 205 entspricht der Reihe nach:

Keine Kopfplatte	{	$J_s = \frac{1}{12} \{ (2 \cdot 12 + 1) 60^3 - 2 (10,8) 57,6^3 - 2,4 \cdot 36^3 \} = 96 684$
		$\mathfrak{S}_s = \frac{1}{8} \{ (2 \cdot 12) 60^2 - 2 (10,8) 57,6^2 - 2,4 \cdot 36^2 \} = 1453$

Eine Kopfplatte	{	$J_1 = 96 684 + \frac{1}{12} (62,4^3 - 60^3) \cdot 30,3 = 164 785$
		$\mathfrak{S}_1 = 1453 + \frac{1}{8} (62,4^2 - 60^2) \cdot 30,3 = 2565$

Zwei Kopfplatten	{	$J_2 = 96 684 + \frac{1}{12} (64,8^3 - 60^3) \cdot 30,3 = 238 331$
		$\mathfrak{S}_2 = 1453 + \frac{1}{8} (64,8^2 - 60^2) \cdot 30,3 = 3722$

Drei Kopfplatten	{	$J_3 = 96 684 + \frac{1}{12} (67,2^3 - 60^3) \cdot 30,3 = 317 532$
		$\mathfrak{S}_3 = 1453 + \frac{1}{8} (67,2^2 - 60^2) \cdot 30,3 = 4922$

und erhält man

$$\frac{J_1}{\mathfrak{S}_1} = 64,2; \quad \frac{J_2}{\mathfrak{S}_2} = 64,0; \quad \frac{J_3}{\mathfrak{S}_3} = 64,2.$$

Der kleinste Werth  $\frac{J_2}{\mathfrak{S}_2}$  wird hiernach bei 2 Kopfplatten erhalten und folgt, da im ersten Felde  $R_t$  am grössten ist, dass sich zwischen  $x_1 = 1,16$  und  $x = 2,0^m$  (vergl. die Querschnittcurve in Fig. 210) die engste Niettheilung ergibt. Dieselbe wird wegen  $R_t = 10,89$

$$e = \frac{64,0 \mathfrak{N}}{10,89} = 5,87 \mathfrak{N}.$$

Da die Niete doppelschnittig sind, ist

$$\mathfrak{N} = 2 \frac{\pi d^2}{5} k \text{ resp. } \mathfrak{N} = p d \delta^*$$

und folgt, wegen  $d = 2,5^{\text{cm}}$  und  $\delta = 1,0^{\text{cm}}$

$$e = 74,2 k \text{ resp. } e = 14,7 p.$$

---

\*)  $p$  bedeutet die zulässige Belastung der Flächeneinheit der Wandung des Nietloches.

Wird  $e = 6d = 15^{\text{cm}}$  gewählt, so erhält man

$$k = 0,20^t \text{ pro } \square^{\text{cm}}; \quad \gamma = 1,03^t \text{ pro } \square^{\text{cm}},$$

während  $k = 0,8 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{+ \max R_i}{- \min R_i} \right) = 0,4^t$  und etwa  $\gamma = 1,1^t$  zulässig sind.

**14) Stossverbindungen.** Die Lage der Stösse ist aus der Skizze Fig. 214 ersichtlich. Im Scheitel sind sämtliche Lamellen gestossen, weil es sich empfehlen wird, die beiden Bogenhälften getrennt zu montieren und nach Aufstellung im Scheitel zu verbinden. Ausserdem wird jeder Winkel und jede Kopfplatte noch zweimal gestossen, während das Stehblech aus 6 Theilen besteht.

Stösse in den Kopfplatten. Werden zwei Flacheisen-Stäbe vom Querschnitte  $f$  (Fig. 215) gestossen, und wird der Stoss durch eine

Lasche „einseitig“ gedeckt, so sind auf jeder Seite der Stossfuge  $n = \frac{4}{5} \frac{f_n}{f}$

Niete nöthig, wo  $f_n$  den Nietquerschnitt bedeutet. Liegt zwischen dem Stoss und der Lasche ein zweiter Stab (Fig. 216), so betrachte man — nach Schwedler — den Theil  $ii$  dieses Stabes als Lasche für den Stoss  $s$  und decke dann die beiden Stösse  $ii$  durch die Lasche  $cc$ . Auf jeder Seite der Fuge  $s$  sind  $2n$  Niete nöthig. Empfehlenswerth ist es, den einen oder beide der ideellen Stösse auszuführen, da dann die lange Lasche zur Deckung mehrerer Stösse ausgenutzt wird. Wenn zwischen der Stossfuge und der Lasche zwei Platten durchlaufen, so ist die Nietzahl  $3n$  u. s. w.

Im vorliegenden Falle ist, bei  $2,5^{\text{cm}}$  Nietdurchmesser,  $f_n = 4,91 \square^{\text{cm}}$ ; weiter ist  $f = 36 \square^{\text{cm}}$ , mithin

$$n = \frac{5}{4} \cdot \frac{36}{4,91} = 9,$$

wofür 10 gewählt wird, so dass 5 Niete in jede der beiden Reihen zu setzen sind. Bei der vierten Verticalen (Fig. 214 u. 217) liegen im Untergurt sowie im Obergurt 3 Kopfplattenstösse. Die Niettheilung ist an der Stossstelle  $3d$ . Im Scheitel (Fig. 204) ist die obere Kopfplatte zwei mal gestossen worden, um die Verbindung der beiden Bogenhälften nach der Aufstellung zu erleichtern.

Stoss im Winkeleisen. Die Winkeleisen ein und derselben Gurtung sind stets an der nämlichen Stelle gestossen. Die Stösse sind durch Flacheisenlaschen (Fig. 218) von  $1,4^{\text{cm}}$  Stärke gedeckt. Der Querschnitt eines Winkels ist

$$f_w = (12 + 10,8) 1,2 = 27,36 \square^{\text{cm}};$$

den beiden Laschen entspricht

$$f_l = (10,8 + 9,4) 1,4 = 28,28 \square^{\text{cm}}.$$

Nietzahl:  $n = \frac{5}{4} \cdot \frac{27,36}{4,91} = 7$ . Es werden 4 Niete in den verticalen und

3 Niete in den horizontalen Schenkel gesetzt. Die Winkeleisenstösse zeigen die Figuren 217, 219 und 204; man vergl. auch Fig. 214.

Stoss im Verticalblech. Bei Berechnung der Querschnitte der Kopfplatten wurde von der Formel

$$f = \frac{\mathfrak{M}_o}{k_u h_1} - \frac{2J_s}{h_1^2}$$

ausgegangen, worin

$$J_s = J_w + \frac{\delta h_1^2}{12}$$

ist, unter  $J_w$  das Trägheitsmoment der 4 Winkeleisen verstanden. An der Stossstelle ist das dem Stehblech entsprechende Trägheitsmoment  $\frac{1}{12} \delta h_1^2$  durch den Werth  $J_n$ , welcher der Nietverbindung beziehungsweise den Laschen entspricht, zu ersetzen, so dass

$$J_s = J_w + J_n = J_s - \frac{\delta h_1^2}{12} + J_n$$

wird, wesshalb sich

$$f = \frac{\mathfrak{M}_o}{k_u h_1} - \frac{2}{h_1} \left\{ J_s - \frac{\delta h_1^2}{12} + J_n \right\}$$

ergiebt. Hieraus folgt

$$J_n = \frac{\mathfrak{M}_o h_1}{2 k_u} - \frac{f_o h_1^2}{2} - J_s + \frac{\delta h_1^2}{12}.$$

Da nun die Niete zweischnittig sind (weil zu beiden Seiten des Stehbleches Laschen angeordnet werden), folgt mit der Bezeichnung in Fig. 220 für eine verticale Nietreihe

$$J'_n = \frac{2\pi d^2}{4} \left\{ \left( \frac{e_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{e_2}{2} \right)^2 + \dots \right\} 2.$$

Ist  $n$  die Anzahl der Niete in der Verticalreihe, und wird  $n - 1 = n_1$  gesetzt, so ist

$$e_2 = e_1 - 2 \frac{e_1}{n_1}; \quad e_3 = e_1 - 4 \frac{e_1}{n_1} \dots \dots,$$

und man erhält

$$J'_n = \frac{\pi d^2 e_1^2}{4 n_1^2} \left\{ n_1^2 + (n_1 - 2)^2 + (n_1 - 4)^2 + \dots \right\}$$

oder, nach Summirung dieser Progression,

$$J'_n = \frac{\pi d^2 e_1^2}{4} \frac{n(n+1)}{6 n-1}.$$

Aus der Bedingung

$$\Sigma J'_n \geq J_n$$

findet man die Nietzahl.

Bedeutet weiter  $\delta'$  die Stärke und  $h'$  die Höhe der Lasche, so muss

$$2 \left( \frac{\delta' h'^3}{12} \right) = J_n \text{ sein.}$$

Für den bei der dritten Verticalen angeordneten Stoss ist:

$$\mathfrak{M}_o = 56,72^{\text{tm}} = 5672^{\text{cm}}$$

$$f_o = 109 \square^{\text{cm}} \text{ (weil 3 Kopfplatten vorhanden sind)}$$

$$k_u = 0,604^{\text{k}} \text{ pro } \square^{\text{cm}}, \text{ mithin wird}$$

$$J_n = \frac{5672 \cdot 60}{2 \cdot 0,604} - \frac{109 \cdot 60^2}{2} - 96684 + \frac{1,0 \cdot 60^3}{12} = 8767^{\text{cm}^4}.$$

Der Stoss (Fig. 219 u. 221) erhält auf jeder Seite der Fuge 3 Nietreihen; für die beiden äusseren ist  $e = 30^{\text{cm}}$  und  $n = 5$ ; für die innere ist  $e = 22,5^{\text{cm}}$  und  $n = 4$ ; weiter ist  $d = 2^{\text{cm}}$ , also  $\frac{1}{4} \pi d^2 = 3,14 \square^{\text{cm}}$ , so dass

$$\Sigma J = 2 \left[ 3,14 \frac{30^2}{6} \cdot \frac{5 \cdot 6}{4} \right] + 1 \left[ 3,14 \frac{22,5^2}{6} \frac{4 \cdot 5}{3} \right] = 8831 > J_n$$

wird. Die Höhe der Lasche ist  $h' = 36^{\text{cm}}$ , mithin

$$2 \left( \frac{\delta' 36^3}{12} \right) = 8767 \quad \text{und} \quad \delta' = 1,2^{\text{cm}}.$$

Die Niete werden gleichzeitig durch das Moment, durch die Axialkraft und die Transversalkraft angestrengt. Um die Beanspruchung festzustellen, berechnen wir für die in Figur 207 dargestellte, das Moment  $\min(\mathfrak{M}_o)_2 = 56,72^{\text{tm}}$  erzeugende Laststellung den Horizontalschub (vergl. Formel 54 und Tabelle II Seite 42):

$$\begin{aligned} H &= \frac{3}{8 l h} \left\{ b_n (2l - b_n) \mathfrak{P}_n + 2(l - b_n) \mathfrak{S}_n - \mathfrak{S}_n \right\} \\ &= \frac{3}{8 \cdot 12 \cdot 3,2} \left\{ 1,32(24 - 1,32) 102 + 2(12 - 1,32) 675 \right. \\ &\quad \left. - 6808,50 \right\} \frac{1}{2} = 5207^{\text{t}}, \end{aligned}$$

$$\text{ferner} \quad A = \frac{\mathfrak{S}_n + \mathfrak{P}_n b_n}{2l} = \frac{675 + 102 \cdot 1,32}{24} \frac{1}{2} = 16,87^{\text{t}}$$

und hierauf für den unteren Kernpunkt ( $x = 4,0^{\text{m}}$ ,  $y_u = 1,56^{\text{m}}$ \*)

$$\mathfrak{M}_u' = 16,87 \cdot 4 - 52,07 \cdot 1,56 = -23,7^{\text{tm}}.$$

Der Temperaturerhöhung entspricht  $\mathfrak{M}_u'' = -6,93$ ,

der permanenten Belastung  $\mathfrak{M}_u''' = +3,68$ , so dass

$$\mathfrak{M}_u = -23,7 - 6,93 + 3,68 = -26,95^{\text{tm}}$$

sich ergibt. Die Spannung (Zugspannung) in der obersten Faser ist jetzt gegeben durch

$$k_o : k_u = \mathfrak{M}_u : \mathfrak{M}_o = 26,95 : 56,72,$$

$$\text{woraus} \quad k_u = 604 \cdot \frac{26,95}{56,72} = 287^{\text{k}} \text{ pro } \square^{\text{cm}}.$$

Die Normalspannungen sind für den fraglichen Querschnitt in Fig. 221 dargestellt. Für den äussersten Niet erhält man eine Spannung von  $350^{\text{k}}$

\*) Hierbei wird darauf keine Rücksicht genommen, dass dieser Kernpunkt vertical unter  $o$  und nicht mit  $o$  in demselben Querschnitte liegt.

pro  $\square^{\text{cm}}$  und, bei dem Querschnitt  $2 \cdot 3,14$ , eine Belastung von  $350 \cdot 2 \cdot 3,14 = 2148^{\text{k}}$ . Dieselbe wirkt normal zum Querschnitt. An Stelle der Transversalkraft für die in Fig. 207 dargestellte Stellung führen wir — um recht ungünstig zu rechnen — die grösste Transversalkraft ein, trotzdem diese bei einer anderen Laststellung entsteht und vertheilen  $R_t = 8,51^{\text{t}}$  gleichmässig auf die 14 Niete, welche auf der einen Seite des Stosses angeordnet sind. Es entfällt dann auf jeden Niet die parallel dem Querschnitt wirkende Belastung

$$\frac{8510}{14} = 608^{\text{k}}.$$

Die Gesamtbelastung des untersten Nietes wird  $\sqrt{608^2 + 2148^2} = 2232$ , so dass die Lochmantelpressung pro Flächeneinheit nur

$$p = \frac{2232}{d\delta} = \frac{2232}{2 \cdot 1} = 1116^{\text{k}}$$

beträgt. Man darf hier mindestens  $p = 1200^{\text{k}}$  (nämlich etwa das Doppelte der Spannung  $k_u$ ) gestatten.

**15) Berechnung des Kämpfergelenkes.** Aus den Componenten  $A$  und  $H$  des Kämpferdruckes  $K$  findet man den Druck  $D$  normal zum Auflager (Fig. 222)

$$D = A \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0 = \cos \varphi_0 \left\{ A \operatorname{tg} \varphi_0 + H \right\}$$

oder, wegen  $A = \frac{\Sigma P b}{2l}$ ;  $H = \frac{3}{8hl} \Sigma P b (2l - b)$

$$D = \frac{3 \cos \varphi_0}{8hl} \left\{ \xi \Sigma P b - \Sigma P b^2 \right\}$$

worin  $\xi = 2l + \frac{8h}{3} \operatorname{tg} \varphi_0$  ist.

Das Maximum von  $D$  weicht sehr wenig von dem grössten Kämpferdrucke ab und soll als grösste Belastung des Zapfens angesehen werden. Der für  $D$  gefundene Ausdruck hat dieselbe Form wie ( $-\mathfrak{M}_o$ ) auf Seite 105 (Formel I) und lässt sich, analog wie dort, in

$$\max D = \frac{3 \cos \varphi_0}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n \left[ \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 + c_r^2 \right] - \mathfrak{S}_n \right\}$$

umformen (vergl. Formel 158). Es wird nun

$$\cos \varphi_0 = \frac{r - h}{r} = \frac{24,1 - 3,2}{24,1} = \frac{20,9}{24,1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{l}{r - h} = \frac{12}{20,9},$$

$$\frac{\xi}{2} = l + \frac{4h}{3} \operatorname{tg} \varphi_0 = 12 + \frac{4 \cdot 3,2 \cdot 12}{3 \cdot 20,9} = 14,45,$$

$$c_r = 12,95 \text{ (Tabelle II Seite 42)}, \quad \mathfrak{P}_n = 162, \quad \mathfrak{S}_n = 39228,75,$$

$$\max D = \frac{3 \cdot 20,9}{8 \cdot 3,2 \cdot 12} \left\{ 165 [14,45^2 + 12,95^2] - 39228,75 \right\} \frac{1}{2} = 97^{\text{t}},$$

während der permanenten Last

$$D_p = p l \sin \varphi_0 + \frac{p l^2}{2h} \cos \varphi_0 = 0,75 \cdot 12 \frac{12}{24,1} + 0,75 \frac{12^2}{2 \cdot 3,2} \cdot \frac{20,9}{24,1} = 19^t$$

und einer Aenderung der Temperatur

$$D_t = H_t \cos \varphi_0 = 4,44 \frac{20,9}{24,1} = 4^t$$

entspricht, so dass

$$D = 97 + 19 + 4 = 120^t$$

sich ergibt.

Der Radius des 35<sup>cm</sup> langen Zapfens (Fig. 199) folgt nun (Seite 169)

$$r = \frac{1,6 D}{l'} = \frac{1,6 \cdot 120}{35} = 5,5^{\text{cm}}.$$

Die Lagerplatte erhält die Abmessungen 62<sup>cm</sup> × 68<sup>cm</sup> — bei einer Stärke von 6<sup>cm</sup> — so dass der Werkstein mit

$$\frac{120000}{62 \cdot 68} = 28^k \text{ pro } \square^{\text{cm}}$$

belastet ist, während für Granit bis 45<sup>k</sup> zulässig sind.

Der Querschnitt  $\alpha$  (dessen Höhe  $h_1$  ist), wird durch das Moment

$$\frac{D e_1^2}{2a} = \frac{120 \cdot 27,5^2}{2 \cdot 68} = 667^{\text{tcm}}$$

beansprucht; seine Abmessungen sind aus Fig. 202a ersichtlich. Die Lage der Neutral-Axe folgt aus der Momentengleichung bezüglich  $\bar{c}\bar{c}$ :

$$48 \cdot 16 \cdot \frac{16}{2} + (62 - 48) \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = \left\{ 48 \cdot 16 + (62 - 48) \cdot 6 \right\} x$$

$$x = 7,5^{\text{cm}}.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Neutral-Axe ist

$$J = \frac{1}{3} \left\{ 62 \cdot 7,5^3 - 14 \cdot 1,5^3 + 48 \cdot 8,5^3 \right\} = 18529,$$

mithin

$$W = \frac{J}{7,5} = 2470$$

und die Spannung in der stärkst gezogenen Faser

$$k' = \frac{667}{2470} = 0,26^{\text{tons}} \text{ pro } \square^{\text{cm}}.$$

Dieser Werth ist zulässig.

Die Rippen, deren Stärke  $\delta' = 4,8^{\text{cm}}$  und deren Zahl  $z = 3$  ist, werden durch das Moment

$$\mathfrak{M} = \frac{D e_2^2}{2a} = \frac{120 \cdot 20,2^2}{2 \cdot 68} = 360^{\text{tcm}}$$

beansprucht. Aus der Festigkeitsbedingung (vergl. S. 170)

$$k 0,22 z \delta' h_2^2 = \frac{D e_2^2}{2a}$$

folgt mit  $k = 0,5^t$  pro  $\square^{cm}$  und  $e_2 = 20,2^{cm}$

$$h_2 = 15^{cm},$$

während, mit Rücksicht auf die Abmessungen der Keile,  $h_2 = 25^{cm}$  gewählt wurde. Die Stärke der Lagerplatte ist (vergl. S. 170)

$$\delta = \frac{h}{3} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{b - 4\delta'z}{b - \delta'z}} \right\} = \frac{25}{3} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{62 - 4 \cdot 3 \cdot 4,8}{62 - 4 \cdot 4,8}} \right\} = 6^{cm}$$

gewählt.

Der Balancier wird bei der hier angeordneten besonders kräftigen Verstärkung des Bogenfusses durch aufgeschraubte Platten nicht auf Biegung beansprucht. Wir wählen die Abmessung  $c$  (Fig. 199) gleich dem Zapfenradius, also gleich  $5,5^{cm}$ .

Die Lage des Zapfens kann, wie aus Figur 199 hervorgeht, durch einen darunter gelegten und zwei seitliche Keile regulirt werden.

#### Berechnung der Querconstruction.

**16) Der Windträger** (Fig. 197). (Für das Folgende vergleiche man die auf Seite 170 etc. durchgeführten Rechnungen.)

Die mobile Belastung beträgt  $w_v = 0,15 \cdot 3,8 = 0,57^t$  pro Meter

„ permanente „ „  $w_p = 0,15 \cdot \frac{h}{2} = 0,15 \cdot \frac{3,2}{2} = 0,24^t$  „ .

Die Transversalkraft ist für das  $m$ te Feld

$$\mathfrak{G}_m = \frac{w_v x_m'^2}{4l} + w_p x_m'' + 0,15 \frac{P}{l} (x_m' - 1,5)$$

und erhält man mit  $P = 13^t$  für:

Feld 6	$x_m' = 6 \cdot 2^m$	$x_m'' = 0,5 \cdot 2^m$	$\mathfrak{G}_m = 3,66$
„ 5	$= 7 \cdot 2$	$= 1,5 \cdot 2$	$= 5,08$
„ 4	$= 8 \cdot 2$	$= 2,5 \cdot 2$	$= 6,60$
„ 3	$= 9 \cdot 2$	$= 3,5 \cdot 2$	$= 8,21$
„ 2	$= 10 \cdot 2$	$= 4,5 \cdot 2$	$= 9,92$
„ 1	$= 11 \cdot 2$	$= 5,5 \cdot 2$	$= 11,72$

Da zwei durch Querstäbe mit einander verbundene Windträger angeordnet sind, ergibt sich die Spannkraft für die (2,69<sup>m</sup> lange) Diagonale

$$D_m = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{G}_m}{\sin \varphi} = \frac{1}{2} \mathfrak{G}_m \frac{2,69}{1,8}$$

Bei der zulässigen Spannung  $k = 1,0^t$  pro  $\square^{cm}$  und der Stärke  $1,0^{cm}$  wird bei Anwendung  $2^{cm}$  starker Niete die Breite des Flacheisens

$$= \frac{D_m}{1,0 \cdot 1,0} + 2,0 = \left( \frac{\mathfrak{G}_m \cdot 2,69}{3,6} + 2 \right)^{cm} = (0,75 \mathfrak{G}_m + 2)^{cm}.$$

Der Nietquerschnitt ist  $3,14 \square^{cm}$ , die Tragfähigkeit eines Nietes  $\frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 3,14 = 2,5^{\text{tons}}$  und die für die Befestigung einer Diagonale erforderliche Nietzahl

$$= \frac{D_m}{2,5} = 0,3 \mathfrak{G}_m.$$

Man findet:

Feld	Breite der Diagonale	Nietzahl
6	4,8 <sup>cm</sup> wofür 5,0 <sup>cm</sup>	2
5	5,9 <sup>cm</sup>	2
4	7,0 <sup>cm</sup>	2
3	8,2 <sup>cm</sup>	3
2	9,4 <sup>cm</sup>	3
1	10,8 <sup>cm</sup>	4

Die Beanspruchungen in den Normalen Fig. 197, welche gleichzeitig Schwellenträger sind, werden

$$N_m = \frac{1}{2} \mathfrak{G}_m$$

$$\begin{array}{l|l|l} N_1 = 5,86^t & N_3 = 4,10^t & N_5 = 2,54^t \\ N_2 = 4,96^t & N_4 = 3,30^t & N_6 = 1,83^t. \end{array}$$

Das Maximalangriffsmoment in Bezug auf die Mitte des Windträgers wird

$$\begin{aligned} \max \mathfrak{M} &= (w_v + w_p) \frac{l^2}{2} + 0,15 Pl - 0,10 P \cdot 1,5 \\ &= (0,57 + 0,24) \frac{12^2}{2} + 13 (0,15 \cdot 12 - 0,10 \cdot 1,5) = 79,77^{\text{tm}}. \end{aligned}$$

Auf jeden der beiden Windträger entfällt  $\frac{1}{2} \cdot 79,77 = 39,88^{\text{tm}}$ , wesshalb — bei 1,8<sup>m</sup> Höhe des Windträgers — die Gurtspannkraft

$$\frac{39,88}{1,8} = 25,16^t$$

wird. Der erforderliche Querschnitt ist mit  $k = 0,75$

$$f = \frac{22,16}{0,75} = 30 \square^{\text{cm}}$$

und das erforderliche Trägheitsmoment bei 200<sup>cm</sup> Feldweite

$$J = \frac{22160 \cdot 200^2}{4000000} = 222.$$

Zwei fest miteinander verbundenen Winkeln mit dem Caliber 8,4 · 8,4 · 1,2 entspricht nach Tabelle 2 des Anhanges ( $m = 7$ )

$$J = 2(57,91)\delta^4 = 2(57,91)1,2^4 = 240;$$

dieselben genügen also. Den Anschluss der Gurtung an die horizontalen 1,2<sup>cm</sup> starken Knotenbleche des Windverbandes bewirken 2,5<sup>cm</sup> starke Niete mit 4,91  $\square^{\text{cm}}$  Querschnitt. Die erforderliche Zahl derselben ist

$$\frac{22,16}{\frac{4}{5}f} = \frac{22,16}{\frac{4}{5} \cdot 4,91} = 6.$$

Die Endnormale  $N_0$  wird durch die Kraft

$$\frac{1}{2} A_w = \left\{ (w_p + w_v) l + \frac{3 \cdot 0,1 P(2l - 1,5)}{2l} \right\} \frac{1}{2}$$

$$= \left\{ (0,57 + 0,24) 12 + \frac{3 \cdot 0,1 \cdot 13 \cdot 22,5}{24} \right\} \frac{1}{2} = 7,29^t$$

auf Druck beansprucht.

**17) Der Querträger.** Die Träger zur Unterstützung der Langschwellen bilden die Normalen des Windträgers und sind zu Consolträgern verlängert. Die Belastung des Consols beträgt (bei 2<sup>m</sup> Abstand der Consolen und 1,45<sup>m</sup> Ausladung derselben):

$$\text{Bohlenbelag (6<sup>cm</sup> stark) } 54 \cdot 1,45 \cdot 2,0 = 157^k$$

$$\text{mobile Belastung } 100^k \text{ am Ende wirkend. *)}$$

Bei der in Fig. 223 skizzirten Stellung einer Eilzugmaschine ist — ohne Rücksichtnahme auf die Continuität der Langschwelle — der Druck der Schwelle auf den Querträger

$$9,0 + 2 \frac{3,0 \cdot 0,6}{2,0} = 10,8^t.$$

Die Belastung durch Bohlenbelag beträgt für den mittleren Theil des Trägers

$$54 \cdot 1,8 \cdot 2,0 = 194^k,$$

so dass sich die in Fig. 224 dargestellte Angriffsweise ergibt. Das Moment über der Stütze ist

$$\mathfrak{M} = 0,1 \cdot 145 + 0,13 \cdot 14\frac{1}{2} = 24^{\text{tem}}$$

und das bei C — unter Voraussetzung entlasteten Consols —

$$\mathfrak{M} = 10,8 \cdot 15 + \frac{0,194 \cdot 180}{8} = 166^{\text{tem}}.$$

Das Letztere ist also das gefährlichere.

Der Träger besteht aus zwei Winkeleisen. Dicke des Schenkels =  $\delta$ , Länge desselben = 10 $\delta$ ; mithin nach Tabelle 2 des Anhanges

$$J = 2 \cdot 180 \delta^4 = 360 \delta^4; \quad W = \frac{360 \delta^4}{2,87 \delta} = 125 \delta^3; \quad F = 2 \cdot 19 \delta^2.$$

Die grösste Spannung ist, da der Träger nicht nur durch  $\mathfrak{M} = 166$  auf Biegung, sondern ausserdem noch durch  $N_1 = 5,86^t$  auf Druck beansprucht wird,

$$k = \frac{5,86}{2 \cdot 19 \delta^2} + \frac{166}{125 \delta^3} = \frac{0,154}{\delta^2} + \frac{1,328}{\delta^3}.$$

Für  $\delta = 1,3^{\text{cm}}$  ergibt sich  $k = 0,70^t$  pro  $\square^{\text{cm}}$ . Der Endquerträger wird bei demselben Querschnitte etwas weniger beansprucht, weil das Biegemoment kleiner ist; er erfährt allerdings einen grösseren Druck, ( $N_0 > N_1$ ); jedoch ist die durch den Druck erzeugte Spannung beträchtlich kleiner als die durch das Moment hervorgerufene.

\*) Diese mobile Belastung führe man bei Consolen ein, die nur für Bahnwärter bestimmt sind.

18) Die Verticale wird am stärksten belastet, sobald eine Eilzugmaschine die Stellung in Fig. 223 hat. Es wird

$$V = 9 + 2 \cdot 3 \frac{0,6}{2,0} = 10,8^t$$

und nach Zuzählung des Gewichtes  $0,400 \cdot 2,0 = 0,8^t$  eines halben Feldes der Fahrbahn

$$V = 11,6^t.$$

Die Verticale  $V$  (Fig. 196) ist circa 210<sup>cm</sup> lang, mithin ist

$$J = \frac{11600 \cdot 210^2}{4000000} = 124.$$

Es sind zwei Winkeleisen mit dem Kaliber  $7^{\text{cm}} \times 7^{\text{cm}} \times 1,0^{\text{cm}}$  gewählt. Der Querschnitt ist kreuzförmig, daher nach Tabelle 2 des Anhanges

$$J = 2 \cdot 92,09 = 184,18.$$

Die Verticale wird durch einschnittige Niete von 2<sup>cm</sup> Durchmesser befestigt. Tragkraft pro Niet

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{4}{5} k = 3,14 \cdot \frac{4}{5} \cdot 700 = 1758^k,$$

$$\text{Nietzahl} \frac{11600}{1758} = 6.$$

19) Die Endversteifung. Wenn eine Güterzugmaschine die Stellung Fig. 225 hat (vergl. Seite 174), so ist der Druck auf die Endverticale

$$V_0' = \left\{ 13 + \frac{13(2,0 - 1,5)}{2,0} \right\} \frac{1}{2} = 8,125^t.$$

Hierzu kommt: a) Belastung durch die Eigenlast der Fahrbahn (800<sup>k</sup> pro meter Geleis) mit

$$V_0'' = \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,0 = 0,40^t,$$

b) derjenige Druck, welchen die Endverticale als Glied der Endversteifung aufzunehmen hat und der nach Seite 137

$$V_0''' = 7,29 \frac{3,2}{1,8} = 12,96$$

wird, unter 7,29 den durch die Versteifung aufzunehmenden Druck des Windträgers,

$3,2 = h$  die Höhe der Verticalen,

$1,8 = b$  den Abstand der Tragbögen

verstanden. Im Ganzen erhält man

$$V_0 = V_0' + V_0'' + V_0''' = 21,5^t$$

und

$$J = \frac{21500 \cdot 320^2}{4000000} = 534.$$

Die Verticale hat Kreuzquerschnitt und besteht aus 4 Winkeleisen mit dem Kaliber  $7^{\text{cm}} \times 7^{\text{cm}} \times 1^{\text{cm}}$  (Fig. 226); es entspricht ihr

$$J = 2 \cdot \frac{1}{12} [1,0(15,2^3 - 1,2^3) + 6(3,2^3 - 1,2^3)] = 616.$$

Zur Befestigung der Verticalen sind 2,0<sup>cm</sup> starke zweischnittige Niete angewendet. Die Tragkraft des Nietes ist  $2kd\delta = 2 \cdot 700 \cdot 2,0 \cdot 1,2 = 3360^k$ , mithin die Nietzahl  $= \frac{21500}{3360} = 6$  erforderlich.

Die Diagonale der Endversteifung ist circa 3,6<sup>m</sup> lang und wird durch

$$D = 7,29 \frac{3,6}{1,8} = 14,58^t$$

belastet.

Der erforderliche Querschnitt ist 14,6 □<sup>cm</sup>, mithin bei 1,2<sup>cm</sup> Stärke und 2,5<sup>cm</sup> Nietdurchmesser die Breite des Flacheisens  $= \frac{14,6}{1,2} + 2,5 = 14,7^{\text{cm}}$ .

Die zur Befestigung der Diagonale erforderliche Nietzahl beträgt (wegen 4,91 □<sup>cm</sup> Nietquerschnitt)

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{14,6}{49,1} = 4.$$

**20) Die Versteifungen** Fig. 201a, welche den auf den Bogen wirkenden Winddruck auf den Windträger übertragen, bestehen zwischen den Verticalen *C* (Fig. 196) aus 2 sich kreuzenden Diagonalen mit den Abmessungen 5<sup>cm</sup> × 1,0<sup>cm</sup> und sind durch je einen Niet von 2,0<sup>cm</sup> Stärke befestigt. Dieselben sind mehr als ausreichend (vergl. Seite 174). Die Versteifung im Scheitel zeigt Fig. 204.

**21) Stabilität der Brücke gegen Kanten durch Winddruck.** Für den erforderlichen Abstand der Tragbögen wurde auf Seite 175 die Formel

$$b' = \frac{0,4}{p + 2,3} \left\{ 3,8 (h' + 1,9) + \frac{7h^2}{30} \right\}$$

abgeleitet und nachgewiesen dass, falls der gewählte Abstand *b* kleiner als *b'* ist, der Wind die Brücke mit dem Momente

$$\mathfrak{M} = (9,63nw + p)l(b' - b)$$

zu kanten strebt. Für die Diagonalen des Verticalkreuzes, durch welches an jedem Ende die beiden eingelegigen Ueberführungen verbunden sind, ergab sich dann (Fig. 181)

$$D = \frac{1}{2c} \left\{ \mathfrak{M} - pbl \right\}$$

und für den Querstab

$$N = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}}{h}.$$

Es ist in vorstehenden Formeln

*w* = 0,2<sup>t</sup> der Winddruck pro □<sup>m</sup>,

*h'* = 4,1<sup>m</sup> der Abstand der Schienenoberkante von der Horizontalen durch die Kämpfergelenke,

*n* = 1,2,

*c* = 2,50<sup>m</sup> (Bedeutung aus Fig. 181 ersichtlich),

mithin wird, wegen *p* = 0,75

$$b' = \frac{0,4}{0,75 + 2,3} \left\{ 3,8 (4,1 + 1,9) + \frac{7 \cdot 3,2^2}{30} \right\} = 3,30^{\text{m}},$$

während  $b = 1,8^m$  gewählt wurde. Es ist daher

$$\mathfrak{M} = (9,63 \cdot 1,2 \cdot 0,2 + 0,75) 12(3,3 - 1,8) = 55^{\text{tm}}$$

$$D = \frac{1}{2 \cdot 2,5} \left\{ 55 - 0,75 \cdot 12 \cdot 1,8 \right\} = 7,8^{\text{t}}$$

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{55}{3,2} = 8,6^{\text{t}}$$

Es sind zwei sich kreuzende Flacheisendiagonalen mit je  $7,8^{\text{cm}}$  Querschnitt angewendet und durch  $2,4^{\text{cm}}$  starke Niete (mit  $4,52^{\text{cm}}$  Querschnitt) befestigt. Nietzahl:

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{7,8}{4,52} = 3;$$

Stärke des Flacheisens  $1,2^{\text{cm}}$ , Breite desselben

$$\frac{7,8}{1,2} + 2,4 = 8,9^{\text{cm}}.$$

Für den Querstab  $N$  (Fig. 197) ist bei  $2,2^m$  Länge erforderlich

$$J = \frac{8600 \cdot 220^2}{4000000} = 104;$$

er besteht aus 2 Winkeln mit dem Caliber  $7^{\text{cm}} \times 7^{\text{cm}} \times 1^{\text{cm}}$  und entspricht dann demselben nach Tabelle 2 des Anhanges

$$J = 2 \cdot 57,91 = 116.$$

Der Anschluss erfolgt durch zweischnittige Niete an  $1,2^{\text{cm}}$  starke Knotenbleche, und ist daher die Tragkraft eines Nietes  $= 2kd\delta = 2 \cdot 750 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = 4320^{\text{k}}$ , mithin die Nietzahl

$$\frac{8600}{4320} = 2.$$

#### Berechnung von Landwiderlager und Mittelpfeiler.

**22) Das Landwiderlager** ist ebenso wie der Mittelpfeiler auf Beton gegründet. Unter dem Betonbett befindet sich guter Baugrund, welcher mit  $45^{\text{t}}$  pro  $\square^m$  belastet werden darf, während die für den Beton zulässige Inanspruchnahme auf  $60^{\text{t}}$  pro  $\square^m$  normirt sei. Das Material von Widerlager und Pfeiler ist Haustein mit einem Gewichte von  $2200^{\text{kg}}$  pro Cubikmeter.

Die Abmessungen des Landwiderlagers sind aus Fig. 227 ersichtlich; die in die statische Berechnung eingeführte Tiefe (Abmessung normal zur Bahnaxe) beträgt  $8^m$ . (Wegen der Unsicherheit in der Bestimmung des Erddruckes führen wir die Breite des Widerlagers kleiner ein, als sie in Wirklichkeit ist).

a) Sicherheit gegen Gleiten auf der Fuge  $FF_1$  verlangt eine Stärke (vergl. § 25)

$$b = \frac{H - fA + fG' - \frac{1}{8}\gamma_e h_2^2}{f\gamma_m h_2}$$

worin  $G' = 2,2 \cdot 0,42 \cdot 3,6 = 3,33^{\text{t}}$  das Gewicht des Theiles  $F_1 J D S$ ,  $h_2 = 4,2^m$ ;  $f = 0,7$ ;  $\gamma_e = 1,6^{\text{t}}$  (Gewicht pro Cubikmeter Erde);  $\gamma_m = 2,2^{\text{t}}$ .

Der mobilen Belastung des Bogens (vergl. Seite 153) entspricht

$$\max(H - fA)_v = \frac{3}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n \left[ \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 + c_r^2 \right] - \mathfrak{S}_n \right\}$$

Darin ist  $\frac{\xi}{2} = l - \frac{2h}{3}f = 12 - \frac{2 \cdot 3,2 \cdot 0,7}{3} = 10,51^m$  und gehört

hierzu nach Tabelle II, Seite 42

$$c_r = 10,50^m; \mathfrak{P}_n = 126^t; \mathfrak{S}_n = 18670,50; n = 12,$$

so dass die 12<sup>te</sup> Last des Eisenbahntrains im Abstände 10,51 — 10,50 = 0,01<sup>m</sup> von der Stütze *B* entfernt ist. (Stellung I in Fig. 227).

Es wird nun

$$\max(H - fA)_v = \frac{3}{8 \cdot 3,2 \cdot 12} \left\{ 126 [10,51^2 + 10,50^2] - 18670,50 \right\} \frac{1^*)}{4} = 22,31^t$$

während der permanenten Last

$$A_p = pl = \frac{1,50}{4} \cdot 12 = 4,5^t$$

$$H_p = \frac{pl^2}{2h} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1,50 \cdot 12^2}{2 \cdot 3,2} = 8,44^t$$

und einer Temperaturerhöhung  $H_t = \frac{1}{2} \cdot 4,44^{**})$  entspricht, so dass sich ergibt:

$$H - fA = 22,31 + 8,44 + \frac{1}{2} \cdot 4,44 - 0,7 \cdot 4,5 = 29,82^t.$$

Jetzt erhält man

$$b = \frac{29,82 + 0,7 \cdot 3,33 - \frac{1}{8} \cdot 1,6 \cdot 4,2^2}{0,7 \cdot 2,2 \cdot 4,2} = 4,43^m,$$

wofür 4,5<sup>m</sup> gewählt werden möge.

b) Die Beanspruchung des Betons zu ermitteln, bilden wir für den Kernpunkt *R* der Fuge  $CC_1$  das der mobilen Belastung des Bogens entsprechende Moment

$$\mathfrak{M}_R = \frac{3z}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n \left[ \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 - c_r^2 \right] - \mathfrak{S}_n \right\}.$$

Es wird  $\frac{\xi}{2} = l - \frac{2hc}{3z} = 12 - \frac{2 \cdot 3,2 \cdot 1,5}{3 \cdot 4,1} = 11,22^m$ , und gehört

hierzu (Tabelle II, Seite 42)

$$c_r = 10,50; \mathfrak{P}_n = 126; \mathfrak{S}_n = 18670,5; n = 12$$

so dass die 12<sup>te</sup> Last im Abstände 11,22 — 10,50 = 0,72<sup>m</sup> von Stütze *B* liegen muss. (Stellung II, Fig. 227).

Man findet

$$\mathfrak{M}_R = \frac{3 \cdot 4,1}{8 \cdot 3,2 \cdot 12} \left\{ 126 [11,22^2 + 10,50^2] - 18670,50 \right\} \frac{1}{4} = 110,94^t.$$

\*) Die Axenlasten sowie später die permanente Last  $p = 2 \cdot 0,75 = 1,50^t$  pro Meter Geleis sind durch die halbe Widerlagertiefe, d. i. durch 4 zu dividieren.

\*\*\*)  $H_t = 4,44^t$  entspricht einem Träger, ist also nur durch 2 zu dividieren.

Das Gewicht des Widerlagers ist  $G = 2,2 \cdot 4,5 \cdot 7,8 = 77,22^t$ \*) und der Erddruck  $E = \frac{1}{8} \cdot 1,6 \cdot 7,8^2 = 12,17^t$ , mithin erhält man

$$\mathfrak{M}_R = 110,94 + 77,22 \cdot \frac{1,5}{2} + 3,33 \left( 1,5 - \frac{0,42}{2} \right) + \left( 8,44 + \frac{1}{2} \cdot 4,44 \right) 4,1 - 4,5 \cdot 1,5 - 12,17 \frac{7,8}{3} = 178^{\text{tm}}$$

Der Normaldruck auf Fuge  $CC_1$  ist  $N = A + G - G'$ .

Die Resultierende  $\mathfrak{P}_n$  aus den auf dem Bogen befindlichen concentrirten Lasten liegt im Abstände  $\frac{1}{2}\xi$  vom Auflager  $B$ , so dass

$$A = \frac{\mathfrak{P}_n \xi}{2l} + pl = \frac{126 \cdot 11,22}{24} \cdot \frac{1}{4} + 4,5 = 19,23^t$$

und  $N = 63,40 + 77,22 - 3,33 = 93^t$

wird. Der Abstand des Stützpunktes  $s$  von  $R$  ist

$$e_R = \frac{\mathfrak{M}_R}{N} = \frac{178}{93} = 1,91^{\text{m}}$$

Wegen  $1,91 > 1,50$  liegt  $s$  ausserhalb des Kerns im Abstände  $2 \cdot 1,5 - 1,91 = 1,09^{\text{m}}$  von der stärkst gepressten Kante. Die grösste Beanspruchung wird

$$k = \frac{2N}{3 \cdot 1,09} = \frac{2 \cdot 93}{3 \cdot 1,09} = 57^t \text{ pro } \square^{\text{m}}$$

während  $k = 60^t$  zulässig ist.

c) Die Beanspruchung des Baugrundes wird ganz analog aus dem Momente  $\mathfrak{M}_R'$  für den Kernpunkt  $R'$  der Sohle  $C'C_1$  berechnet. Die Breite des Betonbettes wird  $= 9^{\text{m}}$  in Rechnung gestellt, so dass die Axenbelastungen so wie  $p = 1,5$  durch  $4,5$  zu dividiren sind, hingegen  $H_t = 4,44$  durch  $2,25$ .

Es ist  $c' = 1,25^{\text{m}}$ ,  $z' = 6,1^{\text{m}}$ , mithin

$$\frac{\xi}{2} = l - \frac{2hc'}{3z'} = 12 - \frac{2 \cdot 3,2 \cdot 1,25}{3 \cdot 6,1} = 11,56; c_t = 10,50; n = 12; \mathfrak{P}_n = 126; \mathfrak{S}_n = 18670,50;$$

$$(\mathfrak{M}_R)_v = \frac{3z'}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n \left[ \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 + c_t^2 \right] - \mathfrak{S}_n \right\} = \frac{3 \cdot 6,1}{8 \cdot 3,2 \cdot 12} \left\{ 126 [11,53^2 + 10,50^2] - 18670,50 \right\} \frac{1}{4,5} = 159,63^{\text{tm}}$$

Das Gewicht des Betonbettes ist  $G'' = 2,0 \cdot 6,0 \cdot 2,0^{**}) = 24$ .

Der Erddruck wird  $E = \frac{1}{8} \cdot 1,6 \cdot 9,8^2 = 19,21$ .

Der permanenten Last entspricht  $\left\{ \begin{array}{l} A_p = pl = \frac{1}{4,5} \cdot 1,5 \cdot 12 = 4,0^t \\ H_p = \frac{pl^2}{2h} = \frac{1}{4,5} \cdot \frac{1,5 \cdot 12^2}{2 \cdot 3,2} = 7,5^t \end{array} \right.$

Einer Temperaturerhöhung entspricht  $H_t = \frac{1}{2,25} \cdot 4,44 = 1,97^t$ .

\*) Es ist die Gewichts-differenz von Mauerwerk und der auf den Absätzen der Rückwand lagernden Erde vernachlässigt.

\*\*\*) Der Cubikmeter Beton wiegt  $2,0^t$ .

Desshalb wird

$$\mathfrak{M}_R = 159,63 + (77,22 + 24,0)1,0 + 3,33 \left( 1,25 - \frac{0,42}{2} \right) + (7,50 + 1,97)6,1 - 4,0 \cdot 1,25 - 19,21 \cdot \frac{9,8}{3} = 254,33 \text{tm.}$$

Der verticale Auflagerdruck ist

$$A = \frac{\mathfrak{P}_n}{2l} \frac{\xi}{2} + pl = \frac{126 \cdot 11,56}{24} \cdot \frac{1}{4,5} + 4,0 = 17,49 \text{t}$$

mithin der Normaldruck auf die Sohle des Widerlagers:

$$N = 17,49 + 77,22 + 24,0 - 3,33 = 115,38 \text{t.}$$

Der Stützpunkt  $s'$  hat von  $R'$  den Abstand

$$e_R' = \frac{254,33}{115,38} = 2,20 \text{m,}$$

liegt also ausserhalb des Kerns im Abstände  $4 - 2,20 = 1,8 \text{m}$  von der Kante  $C'$ , so dass die grösste Pressung des Baugrundes

$$k = \frac{2 \cdot 115,38}{3 \cdot 1,8} = 43 \text{t pro } \square \text{m,}$$

während  $k = 45$  zulässig ist.

d) Vor Aufstellung der Bögen und unter der Voraussetzung, dass die Hinterfüllungserde mit  $v'' = 1 \text{t pro } \square \text{m}$  belastet wird, wirkt auf die Rückwand

$$E = 19,21 \text{t in der Höhe } \frac{1}{2} \cdot 9,8 \text{t}$$

$$E_1 = \frac{v'' h_1}{4} = \frac{1,0 \cdot 9,8}{4} = 2,45 \text{t in der Höhe } \frac{1}{2} \cdot 9,8$$

und es wird das Moment für den Mittelpunkt der Sohle

$$\mathfrak{M}_o = 19,21 \frac{9,8}{3} + 2,45 \cdot \frac{9,8}{2} - 3,33 \left( \frac{4,5}{2} - \frac{0,42}{2} \right) = 68 \text{tm,}$$

während der Normaldruck

$$N = G + G'' - G' = 77,22 + 24,00 - 3,33 = 98 \text{t}$$

ist, so dass sich die Druckexcentricität

$$e = \frac{\mathfrak{M}_o}{N} = 0,7 \text{m}$$

ergiebt. Hiernach liegt der Stützpunkt im Kern; ferner ist der Normaldruck kleiner als in dem vorhin behandelten Falle belasteten Bogens, wesshalb sich  $k'$  kleiner als vorhin herausstellt.

**23) Der Mittelpfeiler** (Fig. 227). Da der Pfeiler zwei symmetrische Bögen unterstützt, so heben sich die der permanenten Belastung entsprechenden Horizontalschübe  $H_p$  ferner die durch Temperaturerhöhung erzeugten  $H_t$  gegenseitig auf. Die Verticalreactionen  $A_p$  besitzen eine mit der Mittellinie des Pfeilers zusammenfallende Resultante  $2A_p$ , ebenso die aufwärts wirkend in Rechnung zu stellenden  $G' = 3,33 \text{t}$  eine Resultante

2G'. In der Folge ist der rechts vom Pfeiler gelegene Bogen belastet, der andere unbelastet gedacht.

a) Sicherheit gegen Gleiten auf der Fuge  $FF_1$  verlangt

$$\delta = \frac{H - fA + 2fG'}{f\gamma_m h_2}$$

Wird die Breite des Pfeilers = 8 m gesetzt, so folgt wie vorhin

$$\max(H - fA)_v = 22,31^t; \quad A_p = 4,5$$

also  $H - fA = 22,31 - 2 \cdot 0,7 \cdot 4,5 = 16,01^t$  und

$$\delta = \frac{16,01 + 2,0 \cdot 0,7 \cdot 3,33}{0,7 \cdot 2,2 \cdot 4,2} = 3,12^m.$$

Diese Abmessung könnte kleiner gewählt werden, da der Pfeiler (vergl. die Grundrisskizze Fig. 228) oben 9,5 m breit ist, doch empfiehlt es sich, im vorliegenden Falle  $\delta$  etwas grösser, nämlich 3,3 m anzunehmen.

b) Beanspruchung des Betons. Bei Berechnung der grössten Pressung in der Fuge  $CC_1$  sollen die Axenbelastungen durch  $\frac{1}{2} \cdot 9,5 = 4,75$  dividirt werden, ebenso die permanente Belastung  $p = 1,50^t$  pro meter Geleis. Das Moment für den Kernpunkt  $R$  — soweit es von der Verkehrslast des rechts gelegenen Bogens abhängt — ist

$$(\mathfrak{M}_R)_v = \frac{3z}{8hl} \left\{ \mathfrak{P}_n \left[ \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 + c_r^2 \right] - J_n \right\}.$$

Der Pfeiler ist am Fusse 4,2 m stark, mithin ist  $c = 0,95^m$ ,  $z = 4,1^m$

$$\frac{\xi}{2} = l - \frac{2hc}{3z} = 11,51^m, \quad c_r = 10,50^m,$$

$$\mathfrak{P}_n = 126, \quad J_n = 18670,50,$$

$$(\mathfrak{M}_R)_v = \frac{3 \cdot 4,1}{8 \cdot 3,2 \cdot 12} \left\{ 126 [11,51^2 + 10,50^2] - 18670,50 \right\} \frac{1}{4,75} = 100,24.$$

Weiter ist das Gewicht des Pfeilers

$$G = 2,2 \left\{ 3,3 \cdot 4,2 + \frac{3,3 + 4,2}{2} \cdot 3,6 \right\} - 2 \cdot 3,33 = 53,53^t$$

ferner  $2A_p = 2pl = \frac{2}{4,75} \cdot 1,50 \cdot 12 = 7,58^t$  mithin

$$\mathfrak{M}_R = 100,24 + (53,53 + 7,58) \cdot 0,7 = 143,02^m.$$

Der Normaldruck auf die Fuge  $CC_1$  wird

$$N = \frac{126 \cdot 11,51}{24} \cdot \frac{1}{4,75} + 53,53 + 7,58 = 77,22^t,$$

so dass der Stützpunkt  $s$  im Abstände

$$\frac{\mathfrak{M}_R}{N} = \frac{143,02}{77,22} = 1,85^m$$

vom Punkte  $R$  und (ausserhalb des Kerns) im Abstände

$$2,8 - 1,85 = 0,95^m$$

\*) Dieses Glied bedeutet den Auflagerdruck  $A$  entsprechend der Verkehrslast.

von der Kante liegt. Die grösste Pressung wird

$$k = \frac{2 \cdot 77,22}{3 \cdot 0,95} = 54^t \text{ pro } \square^m,$$

während  $k = 60$  zulässig ist.

c) Beanspruchung des Baugrundes. Die Tiefe des Betonbettes darf mindestens mit  $11^m$  in Rechnung gestellt werden (Fig. 228), und sind dann die Axenbelastungen und die Belastung  $p$  durch  $\frac{1}{2}11$  zu dividieren.

Es ist  $c' = 0,75^m$ ;  $z' = 6,1^m$ ;  $\frac{\xi}{2} = l - \frac{2hc'}{3z'} = 11,74^m$ ;  $c_r = 10,5^m$ ;

$\mathfrak{P}_n = 126$ ;  $J_n = 18670,5$ , mithin

$$(\mathfrak{M}_R)_p = \frac{3 \cdot 6,1}{8 \cdot 3,2 \cdot 12} \left\{ 126 [11,74^2 + 10,50^2] - 18670,50 \right\} \frac{2}{11} = 136,3^{\text{tm}},$$

und  $2A_p = 2pl = 2 \cdot \frac{2}{11} \cdot 1,5 \cdot 12 = 6,54^t$ .

Das Gewicht des Betonbettes ist

$$G'' = 5,4 \cdot 2 \cdot 2,0 = 21,6^{\text{tm}}, \text{ mithin}$$

$$\mathfrak{M}_R = 136,3 + \left\{ 21,6 + 53,53 + 6,54 \right\} 0,9 = 209,8^{\text{tm}},$$

während der Normaldruck

$$N = 53,53 + 21,6 + 6,54 + \frac{126 \cdot 11,74}{24} \cdot \frac{2}{11} = 92,88^t$$

beträgt, so dass

$$\frac{\mathfrak{M}_R}{N} = \frac{209,8}{92,88} = 2,26^m$$

wird. Daraus ergibt sich der Abstand des ausserhalb des Kerns liegenden Stützpunktes  $s$  von der Kante  $= 1,34^m$  und die grösste Beanspruchung

$$k' = \frac{2N}{3 \cdot 1,34} = 46^t \text{ pro } \square^m.$$

Es wurde zwar nur  $k' = 45$  als zulässig angegeben, doch ist die vorstehende Rechnung sehr ungünstig durchgeführt worden, so dass die gewählten Abmessungen genügen.

## Anhang.

(Zu den Zahlenbeispielen in Abschnitt VIII.)

1) **I-Eisen-Tabelle.** Es bezeichnet (Fig. 229)  $h$  die Trägerhöhe,  $\delta$  die Stegstärke,  $\delta_1$  die mittlere Flanschstärke,  $b$  die Flanschbreite in Millimetern,  $J$  das Trägheitsmoment für die horizontale Schweraxe,  $W = \frac{2J}{h}$  das Widerstandsmoment,  $F$  den Querschnittsinhalt,  $e = \frac{W}{F}$  den Kernhalbmesser,  $G$  das Gewicht in Kilogrammen.

Tabelle 1.

Profile der Luxemburger Bergwerks- und Saarbrücker Eisenhütten-Actien-Gesellschaft  
Burbacher Hütte bei Saarbrücken.

No.	$h$	$\delta$	$b$	$\delta_1$	$G$	$F$	$W$	$e = \frac{W}{F}$
1	100	5	50	7	9	11,50	35,629	3,10
2	98,5	5,5	49,5	8	9,75	12,66	38,238	3,02
3	97	7	53	10	12,5	16,35	47,029	2,88
4	95	10	59	13	17,5	22,60	60,505	2,68
5	125	6	75	8	14,5	18,78	76,169	4,06
6	123,5	7,5	74,5	10	16,5	22,90	89,133	3,89
7	121,5	8,5	82	12	21,75	28,27	108,302	3,83
8	150	7	80	9,5	18,5	24,24	117,654	4,85
9	148	7,5	79	10,25	20	25,99	121,515	4,68
10	119,5	11	90	14	27,5	35,66	129,798	3,64
11	146	9	84	11	23	29,94	135,185	4,52
12	176	8,5	91,5	9,5	24	31,13	168,216	5,40
13	144	11	90	15	30,75	39,94	175,574	4,40
14	174	9	91	11	26,25	34,10	183,354	5,38
15	172	10,5	96	13	31,25	40,70	210,172	5,16
16	200	9	100	11	29,5	38,42	238,985	6,22
17	198	9,5	99	12,5	32	41,58	256,793	6,13
18	235	10	93	9,25	30	38,94	258,632	6,64
19	170	12	103	16	38,5	50,02	261,651	5,23
20	196	11	104	14,5	37,75	48,93	297,557	6,08

No.	$h$	$\delta$	$b$	$\delta_1$	$G$	$F$	$W$	$e = \frac{W}{F}$
21	235	10	96	12	33,75	44,54	310,636	6,97
22	233,5	11	95	13	37,25	47,92	327,601	6,84
23	235	13	91,5	14	40,5	52,62	348,369	6,62
24	194	14	112	17,5	47,5	61,86	364,112	5,89
25	232	12,5	102	14,75	43	55,85	381,109	6,82
26	262	9,5	96	14	38	49,11	393,268	8,01
27	262	11,5	98	14	42	54,65	416,149	7,62
28	250	11	115	13,5	43,25	56,18	429,040	7,64
29	260	12,5	97,75	15	45	58,37	436,421	7,48
30	230	15	108	17,25	51,5	67,08	448,648	6,69
31	248	12	114	14,75	46,5	60,45	453,501	7,50
32	258	14,5	105	17	52,75	68,40	505,582	7,39
33	246	13	119	16,75	52,5	68,14	511,111	7,50
34	235	20	105	20	62,75	81,50	519,441	6,37
35	250	10	140	14,75	49	63,85	529,200	8,29
36	248,5	11	139	15,75	52,5	68,15	553,368	8,12
37	244	15	125	19	61	79,10	583,502	7,38
38	256	17	114	19,5	63,5	82,35	599,880	7,28
39	247	12	146	18,5	61,25	79,72	647,188	8,12
40	300	13	125	15,5	57,75	74,92	663,837	8,86
41	298	14	126	17	62,5	81,00	712,327	8,79
42	245	13	150	21,5	70,25	91,26	732,455	8,02
43	296	15	130	19	68,75	89,40	786,323	8,80
44	320	16	136	19	75,5	98,00	919,456	9,38
45	293	17	139	23	82,5	107,23	943,075	8,79
46	317,5	17	135	20,75	80,25	104,14	965,831	9,27
47	315	20	142	23,5	93,75	121,64	1105,807	9,09
48	400	16	140	17	82,75	107,36	1200,225	11,18
49	398	17	139	18,5	87,75	114,00	1266,176	11,11
50	396	18	150	21,25	99	128,58	1466,280	11,40

**2) L-Eisen-Tabelle.** Wird irgend ein ebener Querschnitt (Fig. 230) auf das rechtwinkelige Coordinatensystem  $xy$  bezogen, und bedeutet  $dF$  das Flächenelement, so nennt man

$$\int y^2 dF = J_x; \quad \int x^2 dF = J_y; \quad \int xy dF = Z$$

die Querschnittsmomente zweiter Ordnung in Bezug auf die fraglichen Axen.  $J_x$  und  $J_y$  heissen auch Trägheitsmomente,  $Z$  Centrifugalmoment. Dreht man das Coordinatensystem um den Winkel  $\alpha$  in die Lage  $x_1y_1$ , so werden die neuen Coordinaten

$$y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha; \quad x_1 = y \sin \alpha + x \cos \alpha$$

und man erhält

$$J_{x_1} = \int y_1^2 dF = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - Z \sin 2 \alpha,$$

$$J_{y_1} = \int x_1^2 dF = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha - Z \sin 2 \alpha,$$

$$Z_1 = \int x_1 y_1 dF = \frac{1}{2} \cos 2 \alpha (J_y - J_x) \left\{ \frac{2Z}{J_y - J_x} - \operatorname{tg} 2 \alpha \right\}.$$

Der Werth  $J_{x_1}$  wird ein Maximum für

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2Z}{J_y - J_x}$$

und zwar entsprechen dieser Gleichung zwei um  $90^\circ$  differirende Lösungen, so dass die beiden „Hauptaxen“ des Querschnittes auf einander senkrecht stehen. Man findet

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} J_{\max} \\ J_{\min} \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{2} (J_x + J_y) \pm \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sec 2 \alpha \\ &= \frac{1}{2} (J_x + J_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4Z^2}. \end{aligned}$$

Der für  $Z_1$  gefundene Ausdruck lehrt, dass für die Hauptaxen das Centrifugalmoment Null ist, und ergibt sich hieraus leicht, dass jede Symmetrieaxe sowie jede Axe normal zu einer Symmetrieaxe eine Hauptaxe ist.

Hinzugefügt werde, dass man aus den Werthen  $J_x$ ,  $J_y$  und  $Z$  in Bezug auf eine Schweraxe die Werthe  $J'_x$ ,  $J'_y$  und  $Z'$  für parallele Axen (Fig. 230) mittelst der Formeln findet

$$J'_x = J_x + F\eta^2; \quad J'_y = J_y + F\xi^2; \quad Z' = Z + F\eta\xi.$$

Beachtet man schliesslich noch, dass einem Rechteck mit den Abmessungen  $b$  und  $h$  (Fig. 231) in Bezug auf die Axen  $x'$  und  $y'$  die Werthe entsprechen

$$J'_x = \frac{bh^3}{3}; \quad J'_y = \frac{hb^3}{3}; \quad Z' = \frac{b^2h^2}{4},$$

so ist man im Besitze des Materiales, welches die Berechnung der Querschnittsmomente für ein Winkeleisen ermöglicht.

[Aus den Hauptträgheitsmomenten  $J_{x_1}$  und  $J_{y_1}$  (Fig. 232) kann man übrigens die Werthe  $J$  für beliebige (durch  $o$  gehende) Axen construiren.

Man mache  $\overline{oA} = \frac{1}{\varrho_{x_1}}$  und  $oB = \frac{1}{\varrho_{y_1}}$ , unter  $\varrho_{x_1} = \sqrt{\frac{J_{x_1}}{F}}$ ,  $\varrho_{y_1} = \sqrt{\frac{J_{y_1}}{F}}$  die

Trägheitsradien bezüglich der Axen  $x_1$  und  $y_1$  verstanden, und zeichne eine Ellipse mit den Halbhaxen  $\overline{oA}$  und  $\overline{oB}$ . Auf der Axe  $cc$  wird die Strecke  $\overline{oC} = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{F}{J}}$  abgeschnitten, so dass sich  $J = F\rho^2 = F \cdot \overline{oC}^2$  ergibt.]\*)

a) Formeln für das ungleichschenklige Winkeleisen Fig. 233 ( $m_1 > m$ ). Für den Querschnitt Fig. 233, dessen Abmessungen als Vielfache der Eisenstärke  $\delta$  angegeben sind, findet man leicht

$$n = \frac{m_1^2 + m - 1}{2(m_1 + m - 1)} \quad n_1 = \frac{m^2 + m_1 - 1}{2(m_1 + m - 1)},$$

ferner in Bezug auf die Axen  $x', y'$

$$J'_x = \frac{m_1^3 + m - 1}{3} \delta^4; \quad J'_y = \frac{m^3 + m_1 - 1}{3} \delta^4; \quad Z' = \frac{m_1^2 + m^2 - 1}{4} \delta^4$$

und in Bezug auf die Axen  $xy$

$$\begin{aligned} \frac{J_x}{\delta^4} &= \frac{1}{3} (m_1^3 + m - 1) - (m + m_1 - 1) n^2 \\ \frac{J_y}{\delta^4} &= \frac{1}{3} (m^3 + m_1 - 1) - (m + m_1 - 1) n_1^2 \\ \frac{Z}{\delta^4} &= \frac{1}{4} (m_1^2 + m^2 - 1) - (m + m_1 - 1) n n_1. \end{aligned}$$

Die Hauptträgheitsmomente lassen sich jetzt nach den Formeln

$$\begin{aligned} J_{\max} &= \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 Z^2} \\ J_{\min} &= \frac{1}{2} (J_x + J_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 Z^2} \end{aligned}$$

berechnen.

b) Tabellen für gleichschenklige Winkeleisen (Fig. 234). Mit  $m_1 = m$  erhält man

$$n = \frac{m^2 + m - 1}{2(2m - 1)}$$

wofür man genügend genau setzen darf:

$$n = \frac{1}{4} (m + 1,5).$$

Weiter folgt:

$$\begin{aligned} J_y = J_x &= \left\{ \frac{1}{3} (m^3 + m - 1) - (2m - 1) n^2 \right\} \delta^4 \\ Z &= \left\{ \frac{1}{4} (2m^2 - 1) - (2m - 1) n^2 \right\} \delta^4 \\ \begin{aligned} J_{\max} &= J_x - Z \\ J_{\min} &= J_x + Z \end{aligned} & \left\{ (Z \text{ ist negativ}). \right. \end{aligned}$$

Die Hauptaxe liegt unter  $45^\circ$  gegen die  $x$ -Axe. Die Werthe  $n$ ,  $J_x$ ,  $Z$ ,  $J_{\max}$  und  $J_{\min}$  sind für verschiedene  $m$  in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

\*) Vergl. Winkler's Elasticitätslehre, pag. 53. Eine andere Construction findet sich in Culmann's Graphischer Statik.

Tabelle 2.

<i>m</i>	<i>n</i>	$J_x$	$Z$	$J_{\max}$	$J_{\min}$
6	1,87	35,20 $\delta^4$	20,72 $\delta^4$	55,92 $\delta^4$	14,48 $\delta^4$
7	2,12	57,91 "	34,18 "	92,09 "	23,73 "
8	2,37	88,75 "	52,50 "	141,25 "	36,25 "
9	2,62	128,97 "	76,44 "	205,41 "	52,53 "
10	2,87	179,83 "	106,75 "	286,58 "	73,08 "
11	3,12	242,58 "	144,17 "	386,75 "	98,41 "
12	3,37	318,46 "	189,46 "	507,92 "	129,00 "

In die Formel für die Knickfestigkeit eines Winkeleisens ist  $J_{\min}$  einzuführen. Man findet bei der freien Länge  $l$  und bei 5 facher Sicherheit (unter Voraussetzung loser Enden) die Tragfähigkeit

$$P = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{5l^2} = \frac{3 E J_{\min}}{l^2} = 4000000 \frac{J_{\min}}{l^2} \cdot *)$$

Werden 2 Winkeleisen miteinander nach Art der Fig. 235 verbunden, so ist das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts =  $2J_x$ , wo  $J_x$  der vorstehenden Tabelle zu entnehmen ist. Man erhält

$$P = 8000000 \frac{J_x}{l^2} \cdot$$

Ist der Querschnitt kreuzförmig (Fig. 236), so ist das kleinste Trägheitsmoment =  $2J_{\max}$ , wo wieder  $J_{\max}$  aus der vorstehenden Tabelle zu entnehmen ist. Es wird

$$P = 8000000 \frac{J_{\max}}{l^2} \cdot$$

c) Biegefestigkeit der Winkeleisen. Das gleichschenklige Winkeleisen (Fig. 237) sei bei horizontaler Lage des einen Schenkels durch verticale Kräfte auf Biegung beansprucht. Ist dann  $\alpha_1$  der Winkel zwischen der Kraftlinie und der Hauptaxe, so bildet die neutrale Axe mit der Hauptaxe einen Winkel  $\beta$ , welcher sich aus der Formel

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_{\max}}{J_{\min}} \operatorname{cotg} \alpha_1$$

berechnet. Bedeutet  $\alpha$  den Abstand der stärkst gespannten Faser von der neutralen Axe, so wird das zulässige Angriffsmoment (nach den bekannten Sätzen der Elasticitäts- und Festigkeitslehre)

$$\mathfrak{M} = \frac{k J_{\max} \cos \beta}{a \sin \alpha_1} \cdot$$

$k$  bedeutet die zulässige Spannung. Beim gleichschenkligen Winkel ist  $\alpha_1 = 45^\circ$ , mithin

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{J_{\max}}{J_{\min}} \cdot$$

\*) Die Werthe sind in Kilogrammen und Centimetern auszudrücken.

Weiter findet man  $\frac{a}{\delta} = \frac{m-1}{\sqrt{2}} \cos \beta + \left[ \frac{m-1}{\sqrt{2}} + (n-1) \sqrt{2} \right] \sin \beta$

d. i.  $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ (m-1)(1 + \operatorname{tg} \beta) - 2(n-1) \operatorname{tg} \beta \right\} \delta \cos \beta$ , mithin

$$\frac{a \sin \alpha_1}{\cos \beta} = \frac{a}{\sqrt{2} \cos \beta} = \frac{1}{2} \left\{ (m-1)(1 + \operatorname{tg} \beta) - 2(n-1) \operatorname{tg} \beta \right\} \delta$$

und schliesslich — wegen  $n = \frac{1}{4}(m+1,5)$  —

$$\mathfrak{M} = \frac{2k J_{\max}}{\left\{ m-1 + \frac{2m+1}{4} \operatorname{tg} \beta \right\} \delta}$$

Für sämtliche in der Tabelle enthaltenen Profile ist — abgerundet

$$\operatorname{tg} \beta = 4$$

daher

$$\mathfrak{M} = \frac{2k J_{\max}}{3m\delta}$$

Für ein **L**-Eisen mit den Abmessungen in Fig. 238 erhält man:

$$\mathfrak{M} = \frac{k J_x}{n\delta}$$

Wenn z. B. ein Winkeleisen an beiden Enden frei aufliegt und in der Mitte durch  $P$  belastet wird, so ist bei der Stützweite  $l$  das Moment

$$\mathfrak{M} = \frac{Pl}{4}$$

Ist nun  $l = 100 \text{ cm}$ ,  $\delta = 1 \text{ cm}$ ,  $m = 10$ , so folgt mit  $J_{\max} = 286,58 \delta^4$  und  $k = 750^k \text{ pro } \square \text{ cm}$

$$\frac{P \cdot 100}{4} = 2 \cdot \frac{750 \cdot 286,58 \delta^4}{3 \cdot 10 \delta}$$

$$P = 573^k.$$

Für das **L**-Eisen hingegen erhält man ( $n = 2,87$ ),  $J_x = 179,83 \delta^4$ ,

$$\frac{P \cdot 100}{4} = \frac{750 \cdot 179,83 \delta^4}{2,87 \delta}$$

$$P = 1880^k.$$

Werden zwei Winkeleisen nach Art der Fig. 235 miteinander verbunden, so wird  $P = 2 \cdot 1880 = 3760^k$ .

**3) Eisenbahnschienen.** (Breite der Basis  $9,15 \text{ cm}$ , des Kopfes  $5,5 \text{ cm}$ ).  
Tabelle 3.\*)

Höhe der Schiene in Centimeter	Querschnitt Quadratcentim.	Gewicht pro Meter Kilogr.	Trägheitsmoment bezogen auf:		W
			horizontale Schweraxe	verticale Schweraxe	
13,08	42,75	32,66	919,00	149,37	140,4
11,80	39,00	29,80	691,59	140,36	117,5
10,46	34,20	26,10	470,26	121,66	90

\*) Vergl. Des Ingenieurs Taschenbuch (Hütte). 1877 pag. 249.

4) **L-Träger aus Gusseisen** (Fig. 239). Da für Gusseisen der Tragmodul (d. i. die Spannung an der Elasticitätsgrenze) für Druck doppelt so gross ist wie für Zug, so wählt man die Abmessungen des Profils zweckmässig so, dass die neutrale Axe die Höhe des Profils im Verhältniss 1:2 theilt. Der Flansch muss die gezogenen Fasern enthalten. Mit der Bezeichnung in Fig. 239 lautet die Bedingung für die zweckmässige Lage der neutralen Axe

$$(b - \delta_1) \delta \frac{\delta}{2} + \delta_1 h \frac{h}{2} = [(b - \delta_1) \delta + \delta_1 h] \frac{h}{3}, \text{ woraus}$$

$$I) \quad b - \delta_1 = \frac{\delta_1 h^2}{\delta(h - 3\delta)}.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die neutrale Axe wird

$$J = \frac{b - \delta_1}{3} \left[ \left( \frac{h}{3} \right)^3 - \left( \frac{h}{3} - \delta \right)^3 \right] + \frac{\delta_1}{3} \left( \frac{h}{3} \right)^3 + \frac{\delta_1}{3} \left( \frac{2h}{3} \right)^3$$

$$J = \frac{\delta_1 h^2 [h^2 - 3h\delta + 3\delta^2]}{9(2h - 3\delta)} + \frac{\delta_1 h^3}{9}.$$

Versteht man unter  $k$  die zulässige Druckspannung, so ist das Widerstandsmoment  $W = \frac{J}{\frac{2}{3}h}$ . Man erhält

$$W = \frac{\delta_1 h^2}{6} \left\{ 1 + \frac{\left( \frac{h}{\delta} \right)^2 - 3 \left( \frac{h}{\delta} \right) + 3}{2 \left( \frac{h}{\delta} \right)^2 - 3 \left( \frac{h}{\delta} \right)} \right\}.$$

Hiernach ergeben sich folgende Werthe

Tabelle 4.

$\frac{h}{\delta}$	$W$	$\frac{h}{\delta}$	$W$
3	0,2222 $\delta h^2$	8	0,2356 $\delta h^2$
4	0,2250 „	9	0,2370 „
5	0,2286 „	10	0,2382 „
6	0,2315 „	11	0,2392 „
7	0,2338 „	12	0,2401 „

Es finden die vorstehenden Formeln namentlich bei Berechnung der Lagerstühle Fig. 170 und 170a auf Tafel 16 Anwendung. Ist  $\delta'$  die Stärke der Seitenrippen und  $z$  deren Zahl, so ist der Querschnitt Fig. 170a dem in Fig. 240 gleichwerthig, und rechnet man auf alle Fälle sicher, wenn man

$$W = 0,22z \delta' h^2$$

setzt. Aus dem Angriffsmoment  $\mathfrak{M}$  kann man mittels der Formel

$$\mathfrak{M} = 0,22z \delta' h^2 k$$

bei angenommenem  $z$  und  $\delta'$  den Werth  $h$  finden. Die Abmessung  $b$  ist in der Regel gegeben. Man bestimmt dann (aus Gleichung I)

$$\delta = \frac{h}{3} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{b - 4z\delta'}{b - z\delta'}} \right\}.$$

Bedingung ist:  $4z\delta' < b$ .

Für  $b = 4z\delta'$  wird  $\delta = \frac{h}{3}$ .

**5) Beanspruchung eines cylindrischen Zapfens** (Fig. 241). Die Berechnung der bei Bögen mit Gelenken vorkommenden Zapfen basiert auf der Annahme, dass an irgend einer Stelle die verticale Zusammenrückung des Zapfens den constanten Werth  $\eta$  annimmt. Es ist dann die radiale Zusammenrückung  $= \eta \cos \varphi$  und die Spannung

$$N = C\eta \cos \varphi,$$

wo  $C$  eine Constante.  $\varphi = 0$  liefert die grösste Spannung, nämlich  $k = C\eta$ , so dass

$$N = k \cos \varphi$$

wird. Bedeutet  $l'$  die Länge des Zapfens,  $r$  den Radius, so ist

$r d\varphi l'$  das Element des Mantels,

$k \cos \varphi r d\varphi l'$  die Belastung dieses Elementes,

$kr l' \cos^2 \varphi d\varphi$  die verticale Componente dieser Kraft.

Wird der Zapfen durch  $D$  belastet, so muss sein:

$$D = 2 \int_0^{\varphi_0} kr l' \cos^2 \varphi d\varphi = kr l' \left\{ \varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \right\}.$$

Dabei bedeutet  $\varphi_0$  den Winkel bis zu welchem der Zapfen genau in das Lager passt. In die Formel

$$r = \frac{D}{kl' \left\{ \varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \right\}}$$

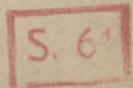
setze man — um den Herstellungsfehlern Rechnung zu tragen — für  $\varphi_0$  eher einen etwas zu kleinen Werth. Nach den bis jetzt vorliegenden Erfahrungen geht man sicher, wenn man  $\varphi_0 = 45^\circ$  annimmt und für gusseiserne oder stählerne Zapfen in gusseisernem Lager  $k = 0,5^t$  pro  $\square^{cm}$  zulässt. Es wird dann

$$r = \frac{1,6 D}{l'}$$

Für Stahlzapfen in Stahllager darf  $k = 1,0^t$  gestattet werden und folgt dann

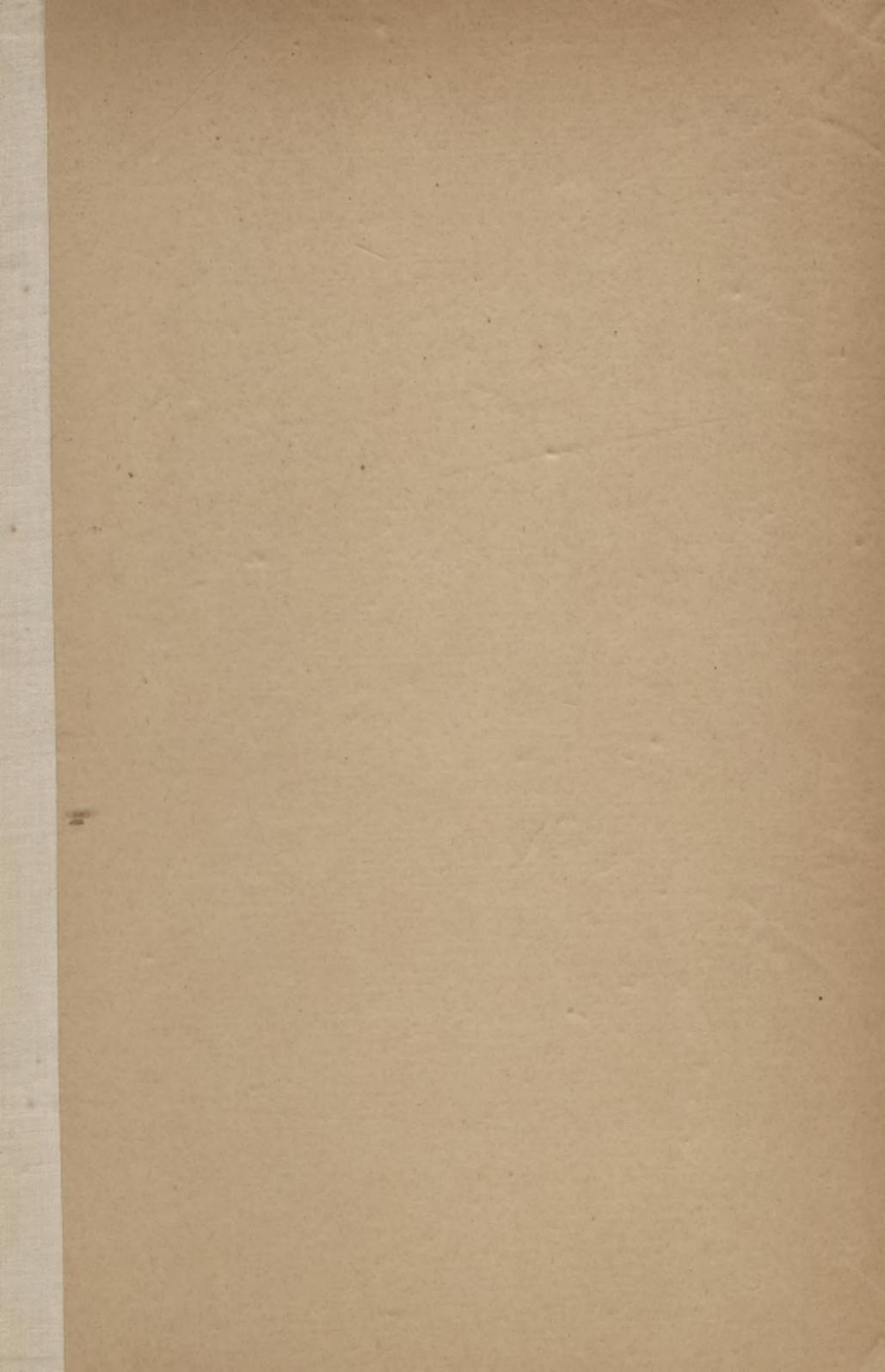
$$r = \frac{0,8 D}{l'}$$

$$r = \frac{0,8 D}{\sigma \cdot l'}$$









Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-351765

Dod.

L. inw. 090

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000262697