ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND III HEFT 4

Umschlag Heft

MATHEMATISCHE HIMMELSKUNDE UND NIEDERE GEODÄSIE

AN DEN HÖHEREN SCHULEN

VON

PROF. DR. BERNHARD HOFFMANN
DIREKTOR DES KGL. GYMNASIUMS ZU RAWITSCH

MIT 9 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

SCHRIFTEN
DES DEUTSCHEN UNTERAUSSCHUSSES DER INTERNATIONALEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHTSKOMMISSION

Es handelt sich einerseits darum, das deutsche Publikum durch geeignete Mitteilungen und Übersetzungen über den allgemeinen Stand der Arbeiten der Kommission auf dem laufenden zu halten, andererseits aber die verschiedensten Seiten des deutschen mathematischen Unterrichts in ausführlichen Darlegungen zur Geltung zu bringen. Dieser Aufgabe dienen zwei Reihen von Veröffentlichungen:

A. Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. In zwanglosen Heften. gr. 8. Steif geh.

1. Fehr, H., Vorbericht über Organisation und Arbeitsplan der Kommission. Deutsche Übersetzung von W. Lietzmann. (S. 1—10.) 1909. M. —.30.
2. Noodt, G., Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen. (S. 11—32.) 1909. M. —.80.
3. Klein, F., und Fehr, H., Erstes Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. (S. 33—38.) 1909. M. —.20.
4. Klein, F., und Fehr, H., Zweites Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann, sowie Zühlke, P., Mathematiker und Zeichenlehrer im Linearzeichenunterricht der preußischen Realschulen. (S. 39 bis 54.) 1910. M. —.50.
5. Lietzmann, W., Die Versammlung in Brüssel. Nach dem von H. Fehr verfaßten dritten Rundschreiben des Hauptausschusses. (S. 55—74.) 1911. M. —.60.
6. Fehr, H., Viertes Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. (S. 75—88.) 1911. M. —.50.
7. Lietzmann, W., Der Kongreß in Mailand vom 18. bis 20. September 1911, sowie Schimmack, R., Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts. (S. 89—126.) 1912. M. 1.60.

B. Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. Herausgegeben von F. Klein. 5 Bände, in einzeln käuflichen Heften. gr. 8. Steif geh.

I. Band. Die höheren Schulen in Norddeutschland. Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Lietzmann, W., Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen. Auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. (XII u. 102 S.) 1909. M. 2.—
2. Lietzmann, W., Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höh. Knabenschulen in Preußen. Mit 18 Fig. (VIII u. 204 S.) 1910. M. 5.—
3. Lorey, W., Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preußen und in einigen norddeutschen Staaten. (VI u. 118 S.) 1911. M. 3.20.
4. Thaer, A., Geuther, N., Böttger, A., Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte, Mecklenburgs und Oldenburgs. (VI u. 93 S.) 1911. M. 2.—
5. Schröder, J., Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenschulen, insbes. in Norddeutschland. (In Vorber.)

II. Band. Die höheren Schulen in Süd- und Mitteldeutschland. Mit einem Einführungswort von P. Treutlein.

1. Wieleitner, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten, sowie Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte im Königreich Bayern. (XIV u. 85 S.) 1910. M. 2.40.
2. Witting, A., Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen. (XII u. 78 S.) 1910. M. 2.20.
3. Geck, E., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Württemberg. (IV u. 104 S.) 1910. M. 2.60.

4. Cramer, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Großherzogtum Baden. (IV u. 48 S.) 1910. M. 1.60.
5. Schnell, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Großherzogtum Hessen. (VI u. 51 S.) 1910. M. 1.60.
6. Hoßfeld, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen Thüringens. (In Vorbereitung.)
7. Wirz, Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen sowie die Ausbildung der Lehramtskandidaten in Elsaß-Lothringen. (IV u. 58 S.) 1911. M. 1.80.

III. Band. Einzelfragen des höheren mathematischen Unterrichts. Mit einem Einführungswort von F. Klein.
1. Schimmack, R., Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland. (VI u. 146 S.) 1911. M. 3.60.
2. Timerding, H. E., Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern. Mit 22 Figuren. (VI u. 112 S.) 1910. M. 2.80.
3. Zühlke, P., Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten. (IV u. 92 S.) 1911. M. 2.60.
4. Hoffmann, B., mathematische Himmelskunde und niedere Geodäsie an den höheren Schulen. Mit 9 Figuren. VI u. 68 S. 1912.
5. Timerding, H. E., Die kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. (IV u. 45 S.) 1911. M. 1.60.
6. Gebhardt, M., Geschichte der Mathematik an den höheren Schulen.
7. Wernicke, Mathematik und philosophische Propädeutik. (In Vorbereitung.)
8. Lorey, W., Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit 1870. (In Vorbereitung.)
9. Höckner, Die Mathematik in der Lebensversicherung. (In Vorbereitung.)

IV. Band. Die Mathematik an den technischen Schulen. Mit einem Einführungswort von P. Stäckel.
1. Grünbaum, H., Der mathematische Unterricht an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. (XVI u. 100 S.) 1910. M. 2.60.
2. Ott, C., Die angewandte Mathematik an den technischen Mittelschulen der Maschinenindustrie. (Unter der Presse.)
3. Girndt, M., Der mathematische Unterricht an den Baugewerkschulen. (In Vorb.)
4. Schilling, C., und Meldau, H., Der mathematische Unterricht an der deutschen Navigationsschulen. (VI u. 82 S.) 1912. M. 2.–
5. Haese, Die mathematischen Fächer an den gewerblichen Fortbildungsschulen. (In Vorbereitung.)
6. Penndorf, Die Mathematik an den kaufmännischen Lehranstalten. (Unter der Presse.)
7. Jahnke, E., Die Mathematik an Hochschulen für besondere Fachgebiete. (VI u. 56 S.) 1911. M. 1.80.
8. Furtwängler, Ph., Die mathemat. Ausbildung der Feldmesser. (In Vorb.)
9. Stäckel, P., Die mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker und Ingenieure an den deutschen technischen Hochschulen. (In Vorbereitung.)

V. Band. Der mathematische Elementarunterricht und die Mathematik an den Lehrerbildungsanstalten. Mit einem Einführungswort von F. Klein.
1. Lietzmann, W., Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht. Mit 20 Figuren. (VII u. 125 S.) 1912. M. 3.—
2. Lietzmann, W., Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht. (In Vorbereitung.)
3. Treutlein, P., Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Süddeutschland, mit Ausführungen von Hensing über Hessen, Cramer über Baden, Geck über Württemberg, Kerschensteiner und Bock über Bayern. (Unter der Presse.)
4. Umlauf, K., Der mathematische Unterricht an den Seminaren und Volksschulen der Hansestädte. (In Vorbereitung.)
5. Dreßler, H., Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Sachsen und Thüringen. (In Vorbereitung.)
6. Lietzmann, W., Die Organisation der Volksschulen, gehobenen Volksschulen, Präparandenanstalten, Seminare usw. in Preußen. (In Vorbereitung.)

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON **F. KLEIN**
BAND III HEFT 4

MATHEMATISCHE HIMMELSKUNDE UND NIEDERE GEODÄSIE
AN DEN HÖHEREN SCHULEN

VON

PROF. DR. BERNHARD HOFFMANN
DIREKTOR DES KGL. GYMNASIUMS ZU RAWITSCH

MIT 9 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

VORWORT.

„Der an sich idealen Forderung, den mathematischen Unterricht in dem Gebiete der Himmelskunde ausklingen zu lassen, in ihr noch einmal die auf allen Gebieten gewonnenen Kräfte einzusetzen und dem der Reifeprüfung nahestehenden Primaner zu zeigen, wie er sein Wissen und Können zur Erlangung sicherer Urteile auf dem naturwissenschaftlichen Erkenntnisfelde verwenden kann, von dem von jeher die Mathematik ihre fruchtbarsten Anregungen erhielt, stehen zwei Umstände hinderlich im Wege. Selten dürfte die Voraussetzung, daß der Primaner die Grundlagen der in Betracht kommenden Erscheinungen mit ihrem Anhang von Begriffsbestimmungen so kennt, daß man mit ihm sofort zur Tat schreiten könne, völlig erfüllt sein, denn das ist nur möglich, wenn im erdkundlichen und im mathematischen Unterricht planmäßig eine Erweiterung und Befestigung dieser Kenntnisse auf Grund von Beobachtungen vorgenommen wird. Ein solches stufenweises Fortschreiten kennen aber unsere Lehrpläne nicht, und die von ihnen vorgeschriebene Behandlung des Stoffes am Abschluß der mittleren Klassen bleibt, wie die leidige Erfahrung lehrt, vielfach frommer Wunsch. Kommt aber zu der Forderung, mathematische Himmelskunde zu treiben, noch die zweite hinzu, auch die Grundbegriffe erst durch Anschauung zu einiger Sicherheit zu bringen, dann ist der Anlaß zur Unlust größer als der zu erwartende Gewinn, und niemand darf sich wundern, wenn die Himmelskunde auch fernerhin das Aschenbrödel unter den Naturwissenschaften bleibt.“

Mit diesen Worten leitete ich im Jahre 1907 eine Programmschrift ein, die zwar sehr freundlich aufgenommen worden ist, aber auf die Gestaltung des Unterrichts nicht die erwartete Wirkung gehabt hat. Die Scheu vor den Launen der Meßinstrumente steht noch immer ihrem regelmäßigen Gebrauche hemmend im Wege; sie überwinden zu helfen ist das wichtigste Ziel dieser Abhandlung.

Diesem Gedanken zuliebe ist in den folgenden Untersuchungen mancherlei unbeachtet gelassen, was bei umfassender Behandlung der Grundfragen vielleicht hätte erwartet werden dürfen, vor allem eine eingehende Prüfung der gegenwärtigen Behandlung dieses Unterrichts an den deutschen höheren Lehranstalten und ihres geschichtlichen Wachstums. Das würde aber, wie auch die in nächster Zeit erscheinende Schrift des Herrn A. Höfler-Wien, Himmelskunde und astronomische

Geographie, beklagt, nicht ohne schmerzliche Erinnerungen an die Verhältnisse vergangener Zeiten möglich gewesen sein. Dagegen sind an einzelnen Stellen Beobachtungs- und Rechnungsgänge in vielleicht überflüssig erscheinender Breite aufgenommen, weil häufig an mich gerichtete Fragen erkennen ließen, daß damit manchem Fachgenossen, der sich ernstlich mit diesen Dingen beschäftigt, gedient sei.

Umfang und Wert des besprochenen photographischen Verfahrens sind mit den gegebenen Proben keineswegs erschöpft. Die Darstellung durch den Druck vermag jedoch die Feinheiten einer dem Sternenhimmel ausgesetzten Platte überhaupt nicht wiederzugeben; Aufnahmen der Auf- und Untergangsstellen der Sonne und des Mondes und ähnliche, die ich Schülern zu überlassen pflege, will ich hier nur erwähnen.

Den Mitgliedern und Mitarbeitern des deutschen Ausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission, die mich vor allem bei der Korrektur bereitwillig und freundlich unterstützt haben, danke ich herzlich für ihre Hilfe.

Rawitsch, im Februar 1912.

Bernhard Hoffmann.

INHALT.

I. Der Unterrichtsbetrieb der Trigonometrie.

Die folgenden Erörterungen sollten ursprünglich den Zweck haben, festzustellen, wie und in welchem Umfange der mathematische Unterricht in Deutschland, hauptsächlich in Preußen, der praktischen Seite seines Betriebes gerecht wird, und zwar unter Beschränkung auf die Gebiete der mathematischen Erd- und Himmelskunde und der niederen Geodäsie.

Es zeigte sich jedoch bald, daß eine in bescheidenen Grenzen gehaltene Umfrage nach der Art und dem Umfange der Darbietung dieses Unterrichtsgebietes nahezu ergebnislos blieb, und so mußte dieser Weg der Erkundung verlassen und, um einen Einblick in die bestehenden Verhältnisse zu gewinnen, Kennzeichen benutzt werden, deren Sicherheit erheblich geringer ist. Vor allen Dingen wurden in umfassender Weise die Reifeprüfungsaufgaben, soweit solche veröffentlicht werden, zur Beurteilung herangezogen, nicht minder die Abhandlungen in Jahresberichten und Zeitschriften und die Arbeiten in Buchform, die sich auf den Gegenstand beziehen, endlich wurde bei einer Reihe von Werkstätten, die sich mit der Herstellung von Meßinstrumenten für unser Lehrgebiet befassen, nach Art und Umfang des Absatzes gefragt. Auf die Ergebnisse soll später eingegangen werden.

Dies Schriftchen ist aber auch dazu bestimmt, die Sicherheit in der Bewegung auf diesen vielfach sehr vorsichtig und nicht ohne Scheu vor der Heimtücke der Meßwerkzeuge betretenen Gebieten zu erhöhen und dadurch einen größeren Kreis von Freunden und Anhängern für diese Lehrgegenstände zu gewinnen.

Der Verfasser beabsichtigt, sich bei seinen Erwägungen mit möglichster Strenge den preußischen Lehrplänen von 1901, mit denen die der anderen in Betracht kommenden Staaten ziemlich übereinstimmen, anzuschließen; er wird aber nicht umhin können, in einigen Punkten Unsicherheiten in den Bestimmungen in seinem Sinne auszulegen, aber auch abweichende Ansichten zu verfechten.

Wie auch die früheren Lehrpläne enthalten die von 1901 die sich auf angewandte Mathematik beziehenden Weisungen weniger im Wortlaut der Lehraufgaben als in den methodischen Bemerkungen. Sie gestatten dem Ermessen des Lehrers einen weiten Spielraum, lassen aber deutlich erkennen, daß Sicherheit der Kenntnisse und Gewandtheit in ihrer Anwendung wie überhaupt, so auch für die in Frage stehenden Gebiete als letztes wünschenswertes Ziel des Unterrichts anzusehen sind.

Die mathematische Erd- und Himmelskunde ist nun aber als das Gebiet naturwissenschaftlicher Erkenntnis aufzufassen, das die innigsten Berührungen mit der Mathematik hat und für ihre Entwicklung am fruchtbarsten gewesen ist. Es ist deshalb kein Zufall, wenn die Forderung, den Primaner in das Gebiet einzuführen, auch im Lehrplan der Physik wiederkehrt; damit wird bei aller Freiheit, die die Lehrpläne gewähren, der naturwissenschaftliche Charakter dieses Lehrabschnitts besonders hervorgehoben.

In der vielfach gänzlich verfehlten Auffassung seines Betriebes liegt eine offenkundige Schwäche des mathematisch-physikalischen Unterrichts der Prima unserer höheren Lehranstalten. Die Grundlagen dieser Naturerkenntnis dürfen nicht mit den bequemen, aber ganz erfolglosen Mitteln dogmatischer Herleitung der Begriffe gewonnen werden; trotz allen Sträubens und entgegen allen Bedenken muß auch hier der jeder Naturwissenschaft vorgeschriebene Weg der Induktion und der Erfahrung beschritten werden.

Die Hauptaufgabe der folgenden Untersuchung wird darin bestehen, diesen Weg aufzufinden und zu zeigen, wie ohne jede Mehrbelastung und innerhalb der Grenzen und Ziele, die die Lehrpläne dem mathematischen Unterricht stecken, die Himmelskunde auf Erfahrungen des Schülers aufgebaut und zu einem zusammenhängenden Ganzen verarbeitet werden kann. Dabei wird sich ergeben, daß eine Anzahl von Begriffen, die heute noch hier und da ohne eigentliche Begründung dem Primaner vorgetragen werden, als zu weitgehend von vornherein ausgeschaltet werden müssen.

Ehe aber mit diesen Erwägungen begonnen wird, scheint ein Wort über die jetzige Darbietungsform der Trigonometrie nicht überflüssig zu sein.

Im Anschluß an die Lehrpläne wird zurzeit die Goniometrie an den meisten höheren Lehranstalten an ein fest gedachtes rechtwinkliges Dreieck angeknüpft, und die Begriffe der gangbaren vier Winkelfunktionen werden als Quotienten der Maßzahlen seiner Seiten definiert. Dadurch wird zwar vielleicht die ausdrücklich gestellte Forderung, möglichst bald zur Berechnung von Dreiecken überzugehen, einigermaßen erleichtert, das Verständnis des Funktionsbegriffs aber um so mehr erschwert. Dem sogenannten funktionalen Denken trägt die beispielsweise in dem Lehrbuch von Kambly in seiner ursprünglichen Form vertretene Methode des Zentriwinkels im Einheitskreise besser Rechnung, birgt aber die Gefahr, daß der Begriff der Winkelfunktion als eines Quotienten zweier Streckenmaßzahlen nicht klar genug zum Ausdruck kommt, sie vielmehr selbst als Streckenmaßzahlen, also als benannt, aufgefaßt werden können. Dazu bietet der unglückliche Ausdruck Sinuslinie in der Begriffserklärung eine unerwünschte Handhabe. In den Neubearbeitungen des weitverbreiteten Buches sind diese zweifelhaften Bezeichnungen verschwunden, es ist aber durchaus nicht schwer festzustellen, daß sie auch heute noch von einer älteren Lehrergeneration gebraucht werden und Anlaß zu Schwierigkeiten in der Behandlung der Winkelfunktionen bieten, die auch, wie glaubwürdig versichert wird, Kambly selbst in seinem Trigonometrieunterricht gehabt hat.

Den ersten Erörterungen am rechtwinkligen Dreieck folgt dann die Einführung der Tafel mit den Logarithmen der Winkelfunktionen und die Berechnung zunächst der Stücke des rechtwinkligen Dreiecks selbst. Daß hier eine Lücke in der Begriffsentwicklung vorhanden und gewissenhaften Lehrern fühlbar ist, ergibt sich aus den mannigfachen Bestrebungen neuerer Lehrbücher, sie wenigstens einigermaßen zu überbrücken und der Berechnung der Funktionen einiger Winkel die Wege zu ebnen. Das gleiche Bestreben lassen auch die Reifeprüfungsarbeiten der Gymnasien erkennen, in denen öfter als früher die Aufgabe wiederkehrt, zu einem gegebenen Winkel die Funktionen zu berechnen. Die Aufgabe beschränkt sich jedoch auf eine ganz bestimmte, sofort näher zu besprechende Winkelgruppe, und es handelt sich nicht um Reihenentwicklungen zyklometrischer Funktionen, sondern um eine elementarplanimetrische Quelle der Herleitung.

Für die weitere Entwicklung des trigonometrischen Unterrichts ist, da leider die Fundgrube eigener, gerade für den Anfang überaus wichtiger schlichter Messungen in der nächsten Umgebung oder im Schulzimmer selbst noch vielfach verschmäht wird, die Aufgabensammlung bestimmend, in der, nach der Hinterlist der Schwierigkeiten geordnet, Tausende von Aufgaben die Funktionsformeln einzuüben bereit stehen. Es ist bedauerlich, in ihnen, wie auch in einer großen Zahl von Reifeprüfungsaufgaben, einem auffallenden Mangel an mathematischem Taktgefühl begegnen zu müssen, abgesehen davon, daß sie zum großen Teil recht zwecklos sind. Fehler gegen die Abhängigkeit der Größenordnungen reizen zu einem Rückschluß auf die Gewissenhaftigkeit der Aufgabestellung wie des Unterrichtsbetriebes überhaupt. Die vielen, gegen diese Unsitte ergangenen Warnungen haben, wie leicht nachzuweisen ist, bisher sehr wenig gewirkt. Die unkritische Art der Größenbehandlung, die gerade im trigonometrischen Unterricht am greifbarsten hervortritt, muß aufmerksame Schüler abstoßen und ist neben der unfruchtbaren Stoffwahl der Hauptgrund dafür, daß auch begabte und für den Unterrichtswert der Mathematik keineswegs verschlossene Gemüter der Trigonometrie und ihrer Aufgaben nur mit einem gelinden Gruseln gedenken.

Wer sich ernstlich um die Ursachen dieser Erscheinung bemüht, darf nicht übersehen, daß auch ein gewissenhafter Schüler an der erwähnten Lücke im logischen Ausbau des mathematischen Lehrgebäudes Anstoß nehmen muß, sofern er dem Unterricht mit dem nötigen Verständnis zu folgen vermag. Wie auf einer früheren Stufe die Logarithmen der Zahlen, so treten ihm jetzt die Winkelfunktionen und ihre Logarithmen wie eine Offenbarung gegenüber, er muß sie ohne jedwede

Bestätigung hinnehmen; herzlos und drohend schweben sie über seinem Haupte wie die ehernen Tafeln des Gesetzes. Es ist kaum verständlich, wie sich bei dem sonstigen Streben nach Vertiefung des Zusammenhanges dieser Zustand trotz aller Versuche, ihn zu beseitigen, bis auf den heutigen Tag hat behaupten, ja wie sogar ein Rückschritt hat eintreten können. Es scheint leider nicht allgemein bekannt zu sein, daß ein leicht mit der Wurzellehre zu verknüpfendes Verfahren, das von dem französischen Mathematiker Long herrührt (vgl. Baltzer, Elemente; Bardey, Aufgabensammlung, alte Ausgabe, Anhang 3), auf ganz einfacher Grundlage die Mantissen gegebener Zahlen zu berechnen gestattet. Auffallenderweise ist dies Verfahren in den Neubearbeitungen von Bardeys Aufgabensammlung nicht mehr zu finden, die Tafel von Schülke enthält zwar die 2^pten Wurzeln von 10, nicht aber, wie zu wünschen wäre, daneben auch die Logarithmen, so daß man genötigt ist, die Tafel nach dieser Seite hin zu vervollständigen.

Die vom Schüler zu berechnende Tabelle enthält die 2^pten Wurzeln aus 10 und ihre Logarithmen in folgender Form:

p	num	log
1	3,1623	0,5000
2	1,7783	0,2500
3	1,3335	0,1250

usw.

Durch fortgesetzte Division mit der nächstniedrigen Wurzel aus 10 kann die Zahl, deren Mantisse zu bestimmen ist, etwa 5,3217, in ein Produkt zerlegt werden, dessen Faktoren ziemlich rasch gegen 1,0000 konvergieren. Die Summe ihrer Mantissen ist die gesuchte.

Bei einiger Übung der Schüler im abgekürzten Radizieren und Dividieren dauert nach meinen in den letzten 15 Jahren gemachten Erfahrungen die Herstellung der Tabelle etwa 30 Minuten; die Berechnung einer Mantisse ist vom Zufall abhängig, meist aber genügen 20 Minuten. Als höchste Abweichung vom Tafellogarithmus darf eine solche von zwei Einheiten der letzten Stelle angesehen werden, oft stimmen beide überein. Die umgekehrte Berechnung des Numerus für einen gegebenen Logarithmus ist zwar nicht unbedingt nötig, aber als Hausarbeit für geübtere Schüler eine gute Gelegenheit zu zeigen, wie weit ihr Verständnis reicht. Erst nach dieser Vorbereitung haben die Logarithmentafeln das Recht erworben, als Hilfsmittel von mäßigem Gebrauchsumfange eingeführt zu werden. Für viele stereometrische und physikalische Rechnungen ist das abgekürzte Verfahren, weil es zuverlässigere Ergebnisse und größere Einsicht in die einzelnen Operationen bietet, vorzuziehen; die Flucht in die Logarithmentafel bemäntelt häufig mangelndes Verständnis. Aber auch sonst kann sie nicht selten entbehrt werden. So lassen sich viele Aufgaben der Zinseszins- und Rentenrechnung mit

Hilfe des binomischen Lehrsatzes für ganze positive Exponenten, der für das preußische Gymnasium vorgeschrieben ist, ohne Tafel leicht und sicher lösen. Leider lassen die Prüfungsaufgaben der Jahresberichte nicht erkennen, ob Lösungen auf diesem Wege in größerem Umfange gefordert werden.

Wie die Logarithmen, so pflegen auch die Winkelfunktionen vom Himmel zu fallen. Und doch ist auch ihre Berechnung auf ganz elementarem Wege leicht und lohnend, wenn nur die Ähnlichkeitslehre und die damit im engsten Zusammenhang stehende Lehre von den regelmäßigen Vielecken als Vorbereitung der Berechnung der Zahl π gewissenhaft und unter stetem Hinweis auf die künftigen goniometrischen Untersuchungen behandelt wird. Stellt man von vornherein klar, daß von den $(2n-4)$ Gleichungen, die zwischen zwei ähnlichen n-Ecken bestehen müssen, eine Winkelgleichung und eine Seitenproportion gleichberechtigt sind, daß also ein Winkel durch ein Seitenverhältnis ersetzt und die Form des Dreiecks durch zwei Winkel oder zwei Seitenverhältnisse bestimmt ist, dann ist das Verständnis der Winkelfunktionen um so erfolgreicher vorbereitet, je eingehender die Änderungen des Winkels mit denen des Seitenverhältnisses behandelt werden; das rechtwinklige Dreieck ist dabei zu bevorzugen.

Das Lehrgebiet erschließt zwei Eingangspforten in das der Berechnung der Winkelfunktionen. Zunächst können, da die Seiten der $2 \cdot 2^n$-, der $3 \cdot 2^n$- und der $5 \cdot 2^n$-Ecke bestimmbar sind, die Sinus der halben Zentriwinkel ihrer Bestimmungsdreiecke aus der Formel

$$\sin \frac{180^0}{n} = \frac{s_n}{2r},$$

mit ihnen also auch alle übrigen Winkelfunktionen hergeleitet werden. Bei diesen Untersuchungen tritt die Notwendigkeit, sie nicht in einem fest gedachten Dreieck zu definieren, ganz besonders klar hervor. Welche Lage man dem Bestimmungsdreieck im Kreise gibt, ist an sich gleichgültig; da man aber der positiven X-Achse des Koordinatensystems wohl stets dieselbe Lage gibt, so empfiehlt es sich auch hier, dem festen Radius dieselbe Lage zu geben und den beweglichen seine Drehung rechtläufig machen zu lassen, wie es wohl meist schon geschieht.

Derselbe Gedankengang, der den Schüler näherungsweise zur Bestimmung der Zahl π führt, gibt nun zu einer neuen Ableitung der Funktionen kleiner Winkel, in der Optik Nullwinkel genannt, erwünschten Anlaß. Wie dort gezeigt wird, daß mit steigendem n der Umfang des einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks sich immer mehr der Kreisperipherie anschmiegt, so daß das Verhältnis des Umfangs des regelmäßigen 192-Ecks zum Durchmesser bereits in den fünf ersten Stellen mit der Ziffernfolge $\pi = 3{,}14159\ldots$ übereinstimmt, so kann hier gefolgert werden, daß bis zu einer gewissen, genauer festzustellenden

Annäherung statt der Halbsehne der Bogen gesetzt werden kann. Für sin $4{,}50^0$ ergibt sich aus der Formel

$$\sin 4{,}500^0 = \frac{s_{40}}{2r}$$

der Wert 0,07845 bei abgekürzter Rechnung auf fünf Dezimalen, dagegen aus der Formel

$$\sin 4{,}500^0 \doteq \frac{\pi}{180} \cdot 4{,}500$$

der Wert 0,07853. Für die den Bedürfnissen der Schule angemessene Genauigkeit derartiger Rechnungen darf also der Bereich der Nullwinkel ohne Bedenken bis zu dieser Größe ausgedehnt werden, wenn man den Fehler 0,001 als zulässig erklärt. Für diese Winkel hat man also stets den Sinus als das Produkt ihrer Maßzahl mit 0,01745, dem Sinus von $1{,}000^0$, kennt also auch die übrigen Funktionen. Die oben angedeuteten Genauigkeitsprüfungen können nach Belieben ausgedehnt werden und bieten wertvollen Übungsstoff.

Vereint führen beide Wege zur Berechnung der Winkelfunktionen von $0{,}00^0$ bis $45{,}00^0$, also aller Winkel. Dazu ist freilich notwendig, die Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha - \beta)$ an einer Stelle zu entwickeln und anwenden zu lehren, wo sie im herrschenden Arbeitsplane nicht stehen. Allein die Erwägung, daß man sie da gibt, wo sie ihrer Natur nach hingehören und wo man das Verständnis wegen der nahen Verwandtschaft mit den bisher gebrauchten Vorstellungen besonders für die Ableitung empfänglich findet, sollte dies Bedenken um so mehr schwinden lassen, als auch geschichtliche Rücksichten für diese scheinbare Vorwegnahme sprechen. Selbstverständlich verbietet sich eine eingehende Erörterung der Begriffsentwicklung, wie sie v. Braunmühl in seinen Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie bietet. Aber bei der Einfachheit der Rechnungen und der Sicherheit, die sie dem Schüler bei der Empfangnahme der Tafel zunächst der Winkelfunktionen, dann ihrer Logarithmen gibt, sollte man diesen kleinen Umweg nicht von der Hand weisen und stets, ehe man sie einführt, eine beschränkte Anzahl von Winkelfunktionen berechnen lassen.

Hier wie bei den Logarithmen sei noch darauf hingewiesen, daß auch die Berechnung des Winkels zu einer gegebenen Funktion, am einfachsten des Sinus, möglich und für die Befestigung der Grundbegriffe empfehlenswert ist. Es erscheint mir zweckmäßig, an ein Beispiel anknüpfend, einige Bemerkungen zu dieser Berechnung zu machen. Es sei nach dem Winkel gefragt, dessen Sinus den Wert 0,5237 hat. Man setze

$$(1) \qquad \sin(30{,}00^0 + x) = 0{,}5237,$$

$$(2) \qquad \frac{\sqrt{1}}{2}\sqrt{1 - \sin^2 x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0{,}5237.$$

(3) $$1 - \sin x^2 = (1{,}0474 - \sqrt{3} \sin x)^2,$$

(4) $$\sin x^2 - 0{,}9071 \sin x + 0{,}0243 = 0,$$

wobei zu beachten ist, daß die beiden vierten Dezimalstellen bereits erhöht sind. Es ergibt sich

(5) $$\sin x = 0{,}4535 \pm 0{,}4260$$

und, da die Summe der gestellten Bedingung nicht genügen kann, so ist schließlich

(6) $$\sin x = 0{,}0275,$$

also nach Division durch 0,01745

(7) $$x = 1{,}58^0.$$

Bei der Nachprüfung mit einer Tafel von entsprechender Genauigkeit etwa der Schülkeschen, stellt sich heraus, daß in der Tat

$$\sin 31{,}58^0 = 0{,}5237$$

ist.

Als ich den Oberprimanern eines Gymnasiums, an das ich kurz vorher berufen war, zum ersten Male eine derartige Aufgabe stellte, wurde mir in vollem Ernste gesagt, solche Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten gäbe es gar nicht. Leider unterstützen unsere Aufgabensammlungen, allen voran die als Kopfrechenbuch sehr hoch einzuschätzende Bardeysche, diese kindliche Anschauung. Die Furcht vor der Dezimalzahl und die geradezu krankhafte Abneigung, sie richtig zu behandeln, behaupten auch in den Reifeprüfungsarbeiten meist noch ihre Herrschaft; beispielsweise findet man kaum jemals eine andere als die königlich preußische Staatsellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, die nur aus frommer Scheu manchmal in der Gewandung $16x^2 + 25y^2 = 400$ auftritt.

Erst wenn der Schüler die volle Herrschaft über den Zusammenhang zwischen Winkeln und Winkelfunktionen erlangt hat, sollte man zu den Anwendungen schreiten und dazu dieselben Dreiecke benutzen‘ deren man sich schon bei der Ähnlichkeitslehre zur näherungsweisen Bestimmung der Seiten und Winkel durch verkleinerte Abbildungen in einem bestimmten Maßstab bedient hat. In je weiterem Umfange das geschehen ist und je genauer diese Zeichnungen angelegt wurden, desto größer ist der Gewinn für die rechte mathematische Ausbildung. Dabei empfiehlt es sich, wie schon erwähnt wurde, zunächst nicht mit den Logarithmen der Winkelfunktionen zu rechnen, denn das führt leicht zu leerem Schematismus, sondern mit den Winkelfunktionen selbst, um immer wieder auf ihre wahre Natur als Streckenquotienten hinweisen zu können. Leider unterstützt aber die Mehrzahl der Logarithmentafeln dies Beginnen nicht. Viele verschmähen die Funktionstabellen überhaupt, was man für fehlerhaft halten muß (F. G. Gauß[1]), H. Müller u. a.), andere bringen sie meist von Grad zu Grad in einer nur für Sonderzwecke geeigneten Form und unter Bezeichnungen, die den Schüler zunächst stutzig machen müssen (Greve, natürliche trigonometrische Zahlen, siebenstellig, zur siebenstelligen Berechnung von Funktionen aller Winkel; Th. Albrecht, numerische Werte der trigonometrischen Funktionen, vierstellig; Rohrbach, goniometrische Funktionen, vierstellig; E. Schultz, die natürlichen (!) Werte der Sinus, vierstellig; H. Schubert, einstellig; August, die trigonometrischen Funktionen siebenstellig, zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen aller Winkel; endlich Schülke, trigonometrischen Funktionen von $0{,}0^0$ bis $9{,}9^0$ fünf- und vierstellig, von 0^0 bis 45^0 vier- und dreistellig, also dem Bedarf am besten angemessen).

Die größte Gefahr für den Primaunterricht liegt im Herabsinken des fortgesetzten logarithmischen Rechnens zur unverstandenen und nur mechanisch richtig durchgeführten Schreibarbeit. Wer oft Gelegenheit hat, in einer aus Bestandteilen verschiedener Herkunft zusammengesetzten Klasse die Tiefe des Verständnisses zu prüfen, wird zugestehen müssen, daß noch vielerlei zu wünschen übrig geblieben ist. Eine rein nach dem Rezept vorgenommene Rechnung ohne Verständnis, mag sie noch so sehr durch Schrift und klaren übersichtlichen Zahlenaufmarsch bestechen, steht an Wert doch nur der Leistung eines Kanzlisten gleich und ist des Geistes einer höheren Lehranstalt nicht recht würdig. Um Auswüchse dieser Art beseitigen zu helfen und die in dieser Beziehung früher gestellten Forderungen auf das ihnen gebührende Maß herabzudrücken, ist die vierstellige Tafel als für die Bedürfnisse des Gymnasiums, die fünfstellige als für Realanstalten ausreichend bezeichnet worden. Die Berechtigung dieser Ansichten soll hier nicht erörtert werden, ebensowenig die sich anschließende Frage nach der Winkelteilung. Wer praktisch mit diesen Dingen zu tun hat, springt ohne Bedenken von einer zur andern über, und wie der Nonius geteilt ist, auf den ja alles ankommt, ist ziemlich belanglos, wenn er nur richtig geteilt und auch für Ungeübte leicht verständlich ist. Unter allen Umständen ist aber für Schüler, die die Dezimalteilung des Winkels in der Tafel vorfinden, auch die des Meßinstrumentes zu fordern.

Die Entwicklung der Trigonometrie an den höheren Lehranstalten hat eigentümliche Wandlungen durchlaufen. Ursprünglich galt es lediglich, den aus dem praktischen Leben gewonnenen Aufgaben die trigonometrischen Formeln anzupassen, und es ist für die richtige Beurteilung der Frage nicht ohne Wert, den um die Wende des 18. Jahrhunderts, der Zeit der Einführung, bestehenden Unterrichtsrezepten, so darf man sie nennen, nachzugehen. Eine solche handschriftliche Aufgabensammlung eines David Bärchmann vom Jahre 1791 geht in der „Trigono-

1) Das Gesagte gilt nur für die kleinere Ausgabe.

metri", der „Landrechnung" und der „Astronomi" in der Aufeinanderfolge der Aufgaben zwar schrittweise vom Leichteren zum Schwierigen vor, von einer systematischen Behandlung ist aber nicht die Rede, alles wird dem augenblicklichen Bedürfnis angepaßt. Den umgekehrten Weg ging der Unterricht in den letzten Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts, und, wie die Reifeprüfungsaufgaben bezeugen, ist er heute noch der bevorzugte. Die Aufgaben werden der systematischen Entwicklung der Winkelfunktionslehre entsprechend gewählt, und damit werden die Teilung des Dreiecks, seiner Strecken und Winkel, die Radien seiner Kreise auf den Thron berufen, und die dem Leben dienenden und das Verständnis von Erd- und Himmelskunde stützenden Aufgaben verflüchtigen sich oder treten in Formen auf, die ohne weiteres erkennen lassen, daß sie nur der Einübung der Formeln dienen wollen. Kühne Kletterer messen ohne Rücksicht auf die knappen Mittel ihrer Sammlungen mit wertvollen Meßinstrumenten von Turmspitzen aus alle möglichen Winkel und legen unerschrocken den Maßstab an Strecken, die zu ermitteln noch nie einem Sterblichen vergönnt war. Leider finden solche Aufgaben auch ihren Weg in die Öffentlichkeit, und es gibt leider boshafte Menschen, die über sie lächeln.

Dieser Trigonometriebetrieb trägt die Hauptschuld an einer gewissen Eingenommenheit vieler verständiger Leute gegen die Mathematik. Es ist in der Tat nicht recht einzusehen, daß, wenn von einem Dreieck irgendwelche Strecken und Winkel gemessen sind, durch eine umständliche Rechnung irgendwelche andere, die ebensogut gemessen werden könnten, bestimmt werden sollen. Andere bemängeln nicht ganz mit Unrecht diese nur formal bildende Kleinarbeit, weil sie für die Behandlung von Fragen, die für die Naturerkenntnis wichtig erscheinen oder für den Ausbau des mathematischen Lehrgebäudes von Wert sind, keinen Raum lasse. Damit soll keineswegs der Wunsch ausgesprochen sein, daß trigonometrischen Rechnungen nur Stoffe zugrunde gelegt werden, für die durch vorsichtige Messungen vom Lehrer unter Mitwirkung der Schüler das Zahlenmaterial ermittelt worden ist. Das würde selbstverständlich an Zeit und Arbeitskraft beider viel zu hohe Anforderungen stellen. Aber es darf unter keinen Umständen nur mit erdichteten Größen gerechnet werden, weil sonst der Schüler Gefahr läuft, die wirklichen Dreiecke der praktischen Trigonometrie gar nicht zu sehen zu bekommen und grundfalsche Anschauungen vom wahren Gebrauch dieses Wissenschaftsgebietes mit ins Leben zu nehmen. Das erste Übel, von dem der Schüler gründlich befreit werden muß, ist die Dreiecksblindheit. Erst wenn er auf jeder Treppenstufe, an allen Flächen und Kanten des Klassenzimmers, zwischen den Bäumen des Schulhofs Dreiecke wirklich sieht, können die ersten Schritte zu einfachen Messungen getan werden. Aus der Höhe und Breite der Stufe ist die Neigung der Treppe, aus der Dicke eines Balkens, der Breite eines Fensters und der Entfernung des beobachtenden Auges die Winkel, unter denen sie erscheinen, zu bestimmen und dadurch das Schätzen von Winkeln auf eine richtige Grundlage zu stellen. Ganz von selbst entwickeln sich aus diesem Gebiete die ersten Anregungen zur Bildung fester Begriffe, und solche wenig Zeit beanspruchenden Übungen müssen der Ausbildung auf dem Gebiete der Trigonometrie als feste Stützen dienen; ohne sie bleibt das Verständnis schwierigerer Rechnungen ganz von selbst aus. Diese Behandlungsweise schmiegt sich völlig dem für die Goniometrie angegebenen Ausbildungsgange an; viele von den ersten Rechnungen können ohne Tafel ausgeführt werden, diese tritt erst in ihre Rechte, wenn einige Sicherheit gewonnen ist.

Gleichzeitig wird, und zwar zunächst nur zur Bestätigung der durch einfache Rechnung gefundenen Winkelergebnisse, das Winkelmeßinstrument eingeführt. Über seine Bedeutung für den Unterricht soll nur so viel gesagt werden, daß sich die Unterweisung in seinem Gebrauche, wenn das Ergebnis von vornherein feststeht, am Teilkreis also nur eine erwartete Zahl abzulesen ist, viel leichter gestaltet. Näher auf diesen Gegenstand einzugehen bleibt einem anderen Abschnitt vorbehalten. Erst auf diesen Grundlagen kann von einem erfolgreichen Verständnis trigonometrischer Aufgaben, insonderheit der in den folgenden Abschnitten zu behandelnden, die Rede sein.

II. Vorbegriffe der Himmelskunde.

Der der Prima zugewiesene Unterricht in der mathematischen Erd- und Himmelskunde fußt auf Vorbegriffen, die die Erdkunde dem Schüler auf den früheren Klassenstufen gegeben haben sollte. Von der Drehung der Erde, von ihrer Bewegung um die Sonne spricht jeder Gebildete unserer Tage, wenn auch meist in etwas unsicheren Ausdrücken, so doch als von etwas ganz Selbstverständlichem; wie von einer Tatsache, von der sich jeder ohne weiteres überzeugen kann. Daß der Weg zur richtigen Erkenntnis schwieriger ist, daß die Philosophen und Mathematiker des Altertums die Wahrheit nicht oder doch nur sehr bedingt gefunden haben, wird dabei ganz außer acht gelassen. Bei näherer Prüfung ergibt sich, daß die Zahl derer, die sie geistig ganz erfaßt haben, beschämend gering ist, so gering, daß nur wenige erdkundliche Lehrbücher völlig frei von groben Versehen auf diesem leider meist ganz dogmatisch behandelten Gebiete sind. Wie es unter diesen Umständen mit den Schülern, vielfach leider auch mit den Lehrern der Erdkunde steht, vermag nur der zu sagen, der jahrelang in Prima auf Grund von Beobachtungen der Schüler Wandel zu schaffen sich bemüht hat.

Seit langer Zeit wird von Fachleuten darauf hingewiesen, daß die Belehrung über diese Fragen der allgemeinen Erdkunde nur dann von Erfolg sein kann, wenn die Schüler von vornherein bei jeder sich darbietenden Gelegenheit und, was die Hauptsache ist, auf allen Klassenstufen im Zusammenhang zur eigenen Beobachtung von Vorgängen am Himmelsgewölbe angeleitet werden. Da das aber zumeist nicht geschieht, ja selbst in der Klasse, die nach den Lehrplänen berufen ist, die einleitenden Schritte zu tun, der Untersekunda, die elementare mathematische Erd- und Himmelskunde vielfach überhaupt gar nicht, meist aber ganz unzureichend, weil unfachmännisch, betrieben wird, so bleibt für die Prima viel zu tun übrig. Diese Beschränkung auf eine Klasse hat aber die Gefahr zur Folge, daß die mangelhafte Befestigung der Grundbegriffe zu schlimmen Verwirrungen aller Art und zu raschem Schwinden aus dem Gedächtnis führt.

Um von vornherein auch nichtfachmännischen Lesern dieser Schrift klipp und klar darzutun, um was für einfache Dinge es sich hierbei handelt, wähle ich ein Beispiel, von dem niemand behaupten wird, der Gegenstand sei zu hoch gegriffen. Für das Verständnis der scheinbaren Bewegung der Sonne am Himmelsgewölbe ist es notwendig, den Schüler zu schlichten Beobachtungen so weit anzuleiten, daß er ungefähr angeben kann, an welcher Stelle des Horizontes sie aufgeht, an welcher Stelle sie am wahren Mittag steht und welchen Bogen sie am Himmel beschreibt. Es ist doch wohl kaum von einem Primaner zu viel verlangt, wenn er diese Dinge wissen soll; sind sie doch die Grundlage einer Reihe von Erkenntnissen des täglichen Lebens, über die auch die Volksschule schon die nötigsten Aufklärungen zu geben verpflichtet ist. In Wirklichkeit werden sehr viele Primaner auf solche Fragen jede Antwort schuldig bleiben, wissen doch viele sehr gelehrte Herren davon auch nichts. In einem überaus glänzend beurteilten neueren Lehrbuch der Erdkunde steht neben vielen anderen bedenklichen Sachen auf der ersten Seite der klassische Satz, daß die Sonne gerade an der dem Aufgangspunkte entgegengesetzten Stelle des Horizontes untergeht. Wenn ein Reifeprüfling nur wenige Schnitzer ähnlichen Kalibers in der griechischen Grammatik macht, so ist sein Schicksal besiegelt, grobe Unwissenheit in Dingen, die man mit offenen Augen jeden Tag selbst sehen und erkennen kann, wird als selbstverständlich hingenommen. Was nützen unter diesen Umständen die vergeblichen Bemühungen der Direktorenkonferenzen, den Grundlagen der Erdkunde zu ihrem Rechte zu verhelfen, was alle Versuche einzelner tüchtiger Lehrer, hier eine Besserung herbeizuführen? Ehe nicht an unseren höheren Lehranstalten ein Lehrergeschlecht zur Geltung kommt, das wieder wie ein früheres mit diesen schlichten Dingen völlig vertraut ist und sich mit Erfolg der Mühe unterziehen kann, den Gegenstand von seiner dogmatischen und deshalb dem Schüler innerlich unverständlichen Lehrform zu befreien, ist nicht zu erwarten, daß die Himmelskunde befruchtend auf den Gesamtunterricht einwirken kann.

Die Aufgabe der folgenden Untersuchung ist, einigermaßen sicher festzustellen, was auf dem Gebiete der mathematischen Erd- und Himmelskunde geleistet wird, und ferner, was ohne unbescheidene Übergriffe und innerhalb der zu Gebote stehenden Zeit geleistet werden kann. In der Einleitung wurde bereits der Weg angedeutet, der in dieser Hinsicht betreten werden muß und über die Schwierigkeit eines vollgültigen Urteils das Nötige gesagt. Die folgenden Angaben haben also nur bedingten Wert, mehr zu sagen ist aber nicht wohl möglich.

Eine Anzahl von Schulgebäuden ist mit besonderen Einrichtungen zur Himmelsbeobachtung ausgestattet, wenige mit brauchbaren, die meisten mit ganz unzureichenden und deshalb überflüssigen. Solange eine Plattform, und darum handelt es sich zumeist, nur zur allgemeinen Orientierung dienen soll, mag es genügen, wenn sie ins Balkenwerk des Daches eingebaut ist; sollen aber Fernrohre oder gar Meßinstrumente aufgestellt werden, so versagen sie vollständig. Das gilt namentlich für die Untersuchungen, die für die oberste Klasse in Betracht kommen. Einige mit reichlichem Aufwand erbaute Häuser haben aufgemauerte und isolierte Tragepfeiler für die Instrumente, so das Reformrealgymnasium zu Charlottenburg. Doch ermutigt die Auskunft, die mir von dort über die Brauchbarkeit der Einrichtung gegeben worden ist, keineswegs zur Nachahmung. Die Anlage scheint über das gesteckte Ziel hinauszuschießen, und die Justierung der Instrumente erfordert erheblich mehr Arbeit, als für den Erfolg des Unterrichts zweckmäßig sein dürfte. Ähnlich lauten die Berichte von anderen Stellen. Das Urteil, daß die bisher getroffenen Einrichtungen nicht von erheblichem praktischen Werte sind, wird wohl als der Wahrheit nahekommend anzusehen sein.

Die Zahl der Abhandlungen in den Jahresberichten nimmt aus allgemein bekannten Gründen von Jahr zu Jahr ab, damit auch natürlich die derjenigen, die sich mit Himmelskunde beschäftigen. Während noch 1890 nicht weniger als acht Aufsätze über dieses und verwandte Gebiete erschienen, gibt das Teubnersche Programmverzeichnis für die letzten Jahre nur vereinzelt solche Schriften an; ein Teil derselben ist aus unbekannten Gründen überhaupt nicht veröffentlicht. Als besonders das Interesse fördernd sollen einzelne von ihnen hervorgehoben werden:

1901. Städt. Oberrealsch. zu Halle a. S. H. Edler, die Aneignung astronomischer Begriffe auf der Schule. Die aus der Lehrpraxis hervorgegangene Arbeit zeigt, wie ohne kostspielige Zutaten dem Sextaner wie dem Untersekundaner vor allem der scheinbare Sonnenlauf klargelegt werden kann. Mit ganz einfachen Mitteln werden schon von Anfängern im Gebiete der Trigonometrie die Beziehungen zwischen der Deklination der Sonne, ihrer Mittagshöhe, Tageslängen und Morgenweiten vorbildlich entwickelt und dadurch der eigentliche Unterricht in sehr dankenswerter Weise vorbereitet.

1907. Städt. Gymn. zu Sangerhausen. Gnau, Astronomie in der Schule. Allgemeinen Betrachtungen über Methode und Ziel des Unterrichts mit eingestreuten, zum Teil sehr beherzigenswerten Winken für die Praxis folgt ein allgemeiner Lehrgang, in dem der Gedanke ausdrücklich verfochten wird, daß der lehrplanmäßige Sprung des Unterrichts von Sexta nach Untersekunda und Prima nur verhängnisvoll für den Erfolg sein könne. In dem Wunsche, den Lehrstoff auf alle unteren und mittleren Klassen zu verteilen, begegnen sich die Gedanken Gnaus mit den von mir in einer Programmschrift des Kgl. Realgymnasiums zu Nordhausen 1890, „Über die Behandlung der mathematischen Geographie in den unteren und mittleren Klassen", ausgeführten Vorschlägen, die in Österreich anscheinend beifälliger aufgenommen sind als in der Heimat. Treffliche Bemerkungen Gnaus über die Verknüpfung des Lehrstoffs mit der klassischen Lektüre und mit Reisebeschreibungen alter und neuer Zeit leiten zu einem Lehrplane über, der allerdings nur als Vorbereitung für den eigentlichen mathematischen Unterricht zu gelten hat.

Gleichzeitig erschien im Jahresbericht des Kgl. Gymnasiums zu Bromberg ein Aufsatz von mir über die Gestaltung des Unterrichts in der mathematischen Himmelskunde, dessen Grundgedanken in der vorliegenden Schrift wiederkehren werden.

Die Frage, wie im allgemeinen der Unterricht in dem hier behandelten Lehrgebiet erteilt und inwieweit die in den genannten Schriften gegebenen Ratschläge und Weisungen befolgt werden, kann nicht allgemein beantwortet werden. Zur Begründung eines Urteils sind in erster Linie die Reifeprüfungsaufgaben heranzuziehen, soweit sie in den Jahresberichten veröffentlicht werden. Das geschieht in den norddeutschen Staaten noch fast allgemein, in Sachsen, Hessen und den süddeutschen Staaten aber nur ausnahmsweise.

Für das Jahr 1910 stellt sich das Ergebnis einer keineswegs als vollständig gelten wollenden Prüfung etwa so, daß von den Gymnasien kaum der vierte Teil, von Realgymnasien etwa die Hälfte, dagegen fast alle Oberrealschulen Aufgaben aus dem Gebiete der mathematischen Erd- und Himmelskunde aufweisen. Und da die Vermutung berechtigt ist, daß diese Aufgaben widerspiegeln, was in den einzelnen Anstalten auf der obersten Klassenstufe mit Vorliebe und Nachdruck getrieben worden ist, so könnte man zu dem Schluß kommen, daß sie im allgemeinen als für das Gymnasium zu schwierig erachtet und deshalb abgelehnt werden. An sich wäre ja möglich, daß bei der Zustimmung, die Anstaltsleiter und Aufsichtsbehörde den Aufgabenvorschlägen erteilen müssen, zufällig oder aus Abneigung gegen diese Aufgabenart ihre Zahl beschränkt würde, aber viele mündliche und schriftliche Mitteilungen von Fachgenossen lassen der Vermutung Raum, daß in der Tat von vielen Gymnasien das dankbare Lehrgebiet überhaupt abgelehnt wird. Die Gründe hierfür sind bei dem zähen Festhalten am Hergebrachten, das Kenner des preußischen Schulwesens ihm nachsagen, leicht zu finden.

Unter den Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie nehmen an allen drei Anstaltsarten die sich auf die Erde als Kugel beziehenden den breitesten Raum ein. Die Entfernung im größten Kreise wird bevorzugt, daneben kommt die Berechnung des Schnittpunktes eines solchen mit dem Äquator, Kursberechnungen, die Berechnung des nördlichsten Punktes eines größten Kreises vor, seltener und nur an der Wasserkante sind Aufgaben aus der Schiffahrtkunde heimisch.

Die Aufgaben aus der Himmelskunde beherrscht der tägliche Sonnenlauf, und es gibt kaum eine Form, die nicht vertreten wäre. Leider bezieht sich aber die Mehrzahl derselben nicht auf den Schulort und läßt dadurch erkennen, daß die Grundlagen dafür fehlten, daß also eigene Beobachtungen nicht angestellt worden sind. Gegen die Form der Aufgaben läßt sich nichts einwenden, nur fehlt hier und da die rechte Einsicht in den Grad der Genauigkeit und der Übereinstimmung, mit der einzelne Stücke gegeben sein müssen; dagegen haben sie für die örtliche Unterweisung in diesen Dingen keinen erheblichen Wert. Zeit und Azimut des Sonnenunterganges für einen gleichgültigen Tag des Jahres und eine unbedeutende Kleinstadt Italiens zu berechnen ist doch wohl erst dann zulässig, wenn die Heimatverhältnisse völlig beherrscht werden. Damit soll nicht verlangt werden, daß die heimische Beobachtungsstätte allein das Vorrecht habe, berücksichtigt zu werden; in den meisten Fällen erkennt man aber zu deutlich, daß die Koordinaten eines fremden Ortes eingesetzt werden, weil die eigenen unbekannt sind. Unstatthaft ist unter allen Umständen, die Länge und Breite einer Großstadt womöglich auf Sekunden genau anzugeben; schon die von den Verkehrsvereinen herausgegebenen Städteführer befleißigen sich neuerdings eines genaueren Ausdrucks. Zu erheblicheren Einwendungen geben die Zeitbestimmungen Anlaß. Der Zeitgleichung und der Längendifferenz gegen M. E. Z.[1]) ist nur in sehr wenigen Aufgaben gedacht, das nautische oder ein astronomisches Jahrbuch wird nur etwa sechsmal erwähnt. Daß eine Zeitbestimmung meistens nur zur Uhrverbesserung dient, ist fast immer übersehen worden. Die Nachprüfung der errechneten Ergebnisse macht die Aufgabe erst wertvoll, und läßt man für einen bestimmten Zeitpunkt etwa Azimut und Höhe der Sonne oder eines Fixsterns berechnen, so wäre es strafbar, wollte man sich des billigen Triumphs begeben, die Sonne dem Schüler zur angegebenen Zeit an der errechneten Stelle zu zeigen.

Ganz unzulässig ist eine in den Aufgaben häufig wiederkehrende Annahme, nämlich die, der Sonnendeklination am 21. März oder 23. September den Wert $0{,}00^0$ zu geben, während die übrigen Winkel und die Zeit mit größter Genauigkeit verzeichnet werden. An diesen Tagen ist die stündliche Änderung der Deklination nahezu gleich einer Bogenminute, also dürfte nicht einmal, wenn zufällig der wahre Ortsmittag mit dem Frühlingsanfang zusammenfiele, am Nachmittag die Deklination gleich $0{,}00^0$ gesetzt werden. Diese Verstöße berühren um so unangenehmer, je höher die Anforderungen an das Gedächtnis der Schüler

1) Mitteleuropäische Zeit.

für die zu erlernenden Zahlen sind. So gibt beispielsweise ein sonst recht brauchbares Lehrbuch die Länge des tropischen Jahres auf fünf Dezimalstellen des Tages, also auf acht Stellen genau an. Dabei wird gänzlich übersehen, daß mit den Hilfsmitteln der Schule schon eine vorkommende Abweichung in den Tausendsteln wahrgenommen werden kann, jene Zahl also nur als Mittel anzusehen ist und für die Zwecke des Unterrichts mit $365{,}24^d$ genau genug angegeben wird. Viel wertvoller als die Zahl selbst ist, worauf ich zurückkommen werde, die Einsicht in ihre Entstehung; sie sollte den Mittelpunkt der Erörterungen bilden. Phantasieaufgaben sollten gänzlich vermieden werden, weil sie zu ganz falschen Urteilen führen und von einem aufmerksamen Schüler leicht als solche erkannt werden. Als warnendes Beispiel führe ich folgende an: Am 16. Jan. (Jahr?), als die Sonne die Deklination $\delta = -22^0\,28'$ hatte, wurde $59^{min}\,52^{sec}$ nach ihrer Kulmination die Höhe des Sonnenmittelpunktes $h = 20^0\,50'$ beobachtet. Welche Breite hat der Beobachtungsort? Dagegen ist einzuwenden, daß, wie ein Primaner sehr leicht und rasch näherungsweise feststellen kann, die Deklination der Sonne am 16. Jan. nicht mehr die angegebene Größe haben kann, sondern nur noch rund -21^0; für die genauere Bestimmung ist natürlich die Jahresangabe nötig. Zum andern ist die Angabe der Breite $\varphi = 45^0\,21'\,26''$ in dieser Genauigkeit unter allen Umständen unzulässig, weil die nur auf Minuten gegebenen Winkel diese Genauigkeit von vornherein ausschließen.

Nach den preußischen Lehrplänen teilen sich Mathematik und Physik in den Unterricht der Himmelskunde. Sie sprechen die Erwartung aus, daß beide in derselben Hand liegen, und abgesehen von größeren Gymnasien und einigen Realanstalten ist das wohl auch im ganzen der Fall. Für den Erfolg ist das von großer Bedeutung, denn sind die beiden Lehrfächer in der Person des Lehrers getrennt, so wird sich ein Einsetzen der mathematisch-notwendigen Entwickelungen an der Stelle, wo sie in der Physik verwendbar werden, nur unter Rücksichtnahme aller Art und bei freundlichem Entgegenkommen der Lehrer durchführen lassen, in vielen Fällen aber eine Einbuße des einen oder andern Fachs bedeuten. Die der Physik zuzuweisende Gewinnung der grundlegenden Vorstellungen kann nämlich keineswegs in einem Zuge erfolgen, sondern muß sich notwendig dem Gange der Ereignisse am Himmel fügen. Das bedeutet aber auch für den mathematischen Unterricht ein Sichunterwerfen unter die Bedürfnisse des Augenblicks.

Es wurde schon einmal darauf hingewiesen, daß von einer gründlichen und vor allen Dingen erfolgreichen Behandlung dieses Lehrgebietes nur die Rede sein kann, wenn es auf streng naturwissenschaftlicher Grundlage aufgebaut und dem Schüler Gelegenheit geboten wird, nicht nur zu lernen, daß es so ist wie die mit größter Vorsicht zu brauchenden Lehrbücher sagen, sondern vor allen Dingen, weshalb es so und nicht anders sein kann. Ein solcher Lehrgang fordert selbstverständlich mehr Zeit und ist zudem allerlei üblen Zufälligkeiten unterworfen, muß sich also auf das Notwendigste beschränken. Aber er ist der einzige, der zum erwünschten Ziele führt, deshalb muß er eingeschlagen werden. Über dieses Ziel selbst sind die Meinungen geteilt. Mancher begnügt sich, wirkliche oder auch nur erträumte Erscheinungen an einem der sogenannten Universalapparate, Tellurien und wie diese Marterinstrumente heißen, vorzuführen, die meist zögernd erteilte Zustimmung seiner Hörer als Verständnis anzusehen, um dann die so gewonnenen Ergebnisse als mathematisches Bargeld in Umlauf zu setzen. Das ist ganz unfruchtbare Arbeit. Bei dem erfreulichen Aufschwunge der Methodik der naturwissenschaftlichen Lehrfächer ist eigentlich kaum glaublich, daß sich der Unterricht tatsächlich noch in solchen Formen gefällt, aber aus einer großen Reihe von Jahresberichten geht leider unzweifelhaft hervor, daß man sich noch vielfach mit diesen vergeblichen Bemühungen begnügt. Kein Botaniker wird das Erzeugnis der Natur einem dürftigen Modell an die Seite stellen, kein Physiker von bildlichen Darstellungen eines Versuchs einen Erfolg erwarten, nur für die Himmelskunde scheint ein Ersatz von gleichem Bildungs- und Erziehungswerte noch vielfach begehrenswert. Nur aus dem völligen Verkennen der Unmöglichkeit, auch hier zu greifbaren Werten zu gelangen, ist diese Zurückhaltung zu erklären, denn die liebe Bequemlichkeit verantwortlich machen zu wollen, wäre ein unberechtigter Akt der Geringschätzung.

Auffallend ist und bleibt, daß angesichts der ausdrücklichen Forderungen des Unterrichts und der auf allen naturwissenschaftlichen Gebieten zur Herrschaft gelangten methodischen Sicherheit in dieser Hinsicht das der mathematischen Himmelskunde der Oberstufe verhältnismäßig unfruchtbar geblieben ist. Die früher besprochenen Veröffentlichungen beziehen sich fast alle mehr auf die Vorbereitung durch die Unter- und Mittelstufe; die Lehrbücher von einem diesem Unterricht angemessenen Umfange gehen durchweg ganz dogmatisch zu Werke, ziehen die Mathematik zwar zu Rate, vermeiden aber meist näher auf die Verbindung von Beobachtungsstoff und Rechnung einzugehen, so daß der Anfänger durch sie nicht befriedigt oder auf Abwege geführt wird.

An den bestehenden Übelständen trägt die Ausbildung unseres jungen Mathematikernachwuchses nur zum Teil die Schuld insofern, als die sich darbietende Gelegenheit, auch diese Dinge kennen zu lernen, nicht mit dem nötigen Druck bekannt gegeben und vielleicht nicht streng auf die üblen Folgen dieser Unterlassung aufmerksam gemacht wird. Auf mehreren Sternwarten, die ich, um die Verhältnisse kennen zu lernen, aufgesucht habe, wurde mir mit dem größten Entgegenkommen jeder gewünschte Einblick gewährt, stets lief aber die Antwort darauf hinaus, daß trotz des Vorhandenseins der gerade von mir bevorzugten Instrumente selten ein Student sich eingehender Arbeit mit ihnen widme. Wer die Verhältnisse kennt, wird mir aber zugeben müssen, daß die Mehrzahl unserer jungen Lehrer vor einem Universal wie vor einem Rätsel steht. Ohne solche geht es nun einmal nicht. Die gelegentliche Benutzung der Sternwarteninstrumente bietet für den Unterrichtsbetrieb der Schule keine erheblichen Vorteile, weil sie für den Anfänger zu schwer zu übersehen sind und ihre Justierung viel Zeit erfordert und nur dem erfahrenen Fachmann überlassen werden kann. Die Schulinstrumente sind wesentlich kleiner, müssen auch anderen Zwecken dienen und der Fachlehrer muß sie innerhalb gewisser Grenzen gebrauchsfähig halten können. Dazu gehört neben genauer Kenntnis ihres Baues und besonders der Justierungsvorrichtungen einige Handgeschicklichkeit und theoretische Einsicht in diese Dinge; beide sollte ein Mathematiker haben. Für den Kundigen ergeben sich sogar aus der Notwendigkeit, den Gang einer Uhr, die Stellung eines Fadenkreuzes oder den Spiegel eines Sextanten berichtigen zu müssen, sehr fördernde, allerdings den hergebrachten Formen kaum entsprechende Aufgaben; alle diese Dinge vertragen eine elementarmathematische Behandlung sehr wohl und sollten nie ohne sie in Angriff genommen werden.

III. Die Hilfsmittel des Unterrichts.

Die sphärische Trigonometrie, derjenige Teil des der Schule zugewiesenen mathematischen Lehrgebiets, der in der Himmelskunde am meisten verwendet wird, rechnet mit Winkelfunktionen, bedarf also gemessener oder berechneter Winkel von einer durch den Zweck der Rechnung geforderten Genauigkeit und Darbietungsform; die letztere ist durch die benutzte Logarithmentafel bedingt.

Zur Bestimmung dieser Winkel, insbesondere derjenigen, die für die Grundlagen des naturwissenschaftlichen Unterrichtsbetriebes der Himmelskunde unerläßlich sind, dient ein W i n k e l m e ß i n s t r u m e n t, das dadurch z u m u n e n t b e h r l i c h e n Z u b e h ö r des Unterrichts überhaupt wird. Da unnötige Ausgaben vermieden werden müssen, dasselbe Instrument aber auch in der niederen Vermessungskunde verwendet werden soll, so ergibt sich ganz von selbst, daß ein Sextant nicht genügen kann, denn seine Verwendung ist nicht unbegrenzt, sondern hängt von gewissen Bedingungen ab. Die Theodolite alter Form sind zwar für geodätische Zwecke bequemer, für die Messung der für die Himmelskunde in Betracht kommenden Winkel jedoch ungeeignet, weil größere Höhen mit ihnen nicht genommen werden können und der Höhenkreis meist einen erheblich geringeren Teilwert hat als der Horizontalkreis. Beide sollen aber gleichen Teilwert haben. Da das Instrument überall, wo Winkel gemessen werden sollen, bei der Hand sein muß, ist selbstverständlich eine leicht zu tragende möglichst gedrängte Form vorzuziehen, und da es auch Schülerhänden, wenn auch nur unter den Augen des Lehrers, anvertraut werden soll, so gehöre zu seinen Vorzügen, daß es hinreichend fest und dauerhaft gebaut sei. Mit einem solchen Universal können alle hier in Betracht kommenden Arbeiten ausgeführt werden, insonderheit ist es als Durchgangsinstrument wohl brauchbar.

Während noch vor wenigen Jahrzehnten die Darbietung und Berechnung der Winkel auf Bruchteile der Sekunde notwendiges Erfordernis schien, haben Erwägungen über das erreichbare Verständnis und andere Gründe diese Genauigkeit und damit die Seitenzahl der Tafeln immer mehr eingeschränkt. Dem künftigen Fachastronomen und Landmesser überläßt die Schule, sich mit der genaueren Winkelmessung und Funktionenberechnung abzufinden, ohne ihre Pflicht damit im geringsten zu verletzen, denn das geht ohne Schwierigkeit, wenn nur die Grundlagen richtig verstanden sind. Für den Unterricht muß aus rein didaktischen Gründen eine übergroße Genauigkeit bestimmt von der Hand gewiesen und das Hauptgewicht auf das Verständnis der Dinge, um die es sich handelt, gelegt werden. Der Einführung der Winkelfunktionen gehen heute Winkelschätzungsübungen voraus und werden am zweckmäßigsten mit der früher besprochenen numerischen Berechnung der Winkelfunktionen verbunden. Dabei zeigt sich bald, daß die dem Schüler zugänglichen Maßeinheiten auch hier die Grenze bestimmen, bis zu der höchstens gegangen werden darf, größere Genauigkeit würde Streckenmessungen mit Hilfsmitteln voraussetzen, die über das Ziel hinausgehen. Im ganzen darf angenommen werden, daß ein Tausendstel Grad oder die Zehntelbogenminute diese Grenze bilden, meist wird man sich aber mit der nächstniedrigen Genauigkeitsstufe begnügen können. Im engsten Zusammenhange damit steht einerseits die von den Winkelmeßinstrumenten der Schule zu fordernde Genauigkeit und andererseits die Wahl der Logarithmentafel. Bei den langwierigen und offen herausgesagt oft herzlich langweiligen Erörterungen, ob vier- oder fünfstellig zu rechnen sei, ist der Kernpunkt der Frage, mit welcher Genauigkeit mißt die Schule, nur sehr zaghaft herangezogen und nicht so bewertet, wie er es verdient. Wenn jeder Vorkämpfer der fünfstelligen Tafel gezwungen würde, mit einer ihr entsprechenden Genauigkeit zu messen, würden diese Tafeln aus dem Schulgebrauch im Handumdrehen verschwinden. Von untergeordneter Bedeutung ist die Form der Nonienteilung der Instrumente. Solche mit Trommelablesung entsprechen den einfachen Zielen des Unterrichts überhaupt nicht, sie sind schwerer verständlich und viel unbequemer in der Handhabung. Es muß aber als selbstverständlich angesehen werden, daß für dezimales Rechnen auch dezimale Winkelteilung vorgesehen, also entweder der Kreis in halbe Grade, der Nonius in fünfzig Teile, oder der Kreis in viertel Grade, der Nonius in fünfundzwanzig Teile geteilt ist. Die Dreiteilung des Grades ist hier nicht zu empfehlen, weil die Prüfung des Nonius dadurch erschwert wird. Von zuverlässigen Werkstätten bekommt man heute Teilungen von winzigen Kreisen, die bei der oben erwähnten Einrichtung mit guten Lupen noch bequem Tausendstel Grad mit einem geringen Fehler schätzen lassen. Mit empfindlichen Libellen und leistungsfähiger

Optik ausgestattet sind Instrumente dieser Art den Bedürfnissen der Schule gerade angepaßt. Der von manchen Seiten gegen sie erhobene Vorwurf, daß sie zu klein seien, um aus einiger Entfernung von den Schülern richtig erfaßt und in ihrer Gliederung erkannt zu werden, ist allerdings den größeren Theodoliten gegenüber nicht unberechtigt, er verliert aber seine Kraft, wenn das Instrument oft gebraucht und dadurch jedem einzelnen Gelegenheit geboten wird, es in nächster Nähe zu sehen und, was die Hauptsache ist, zu gebrauchen.

Das von mir bevorzugte kleine Reiseuniversal Nr. 70 von Hildebrand in Freiberg i. S. (400 M.) ist nahezu unverwüstlich, weil seine wichtigsten Teile aus unter dem Druck von 10000 Atmosphären gepreßtem Messing bestehen. Dabei ist die Teilung so klar und übersichtlich, daß auch ungeschickte Schüler nach kurzer Zeit zuverlässige Ablesungen leisten. Der aus der Exzentrizität (6,0 cm) des scharf definierenden Fernrohrs entspringende Fehler der Winkelmessung kommt bei großen Zielentfernungen, wie später erörtert werden soll, kaum in Betracht, weil er unter die Einstellungs- und Ablesungsfehler fällt, für die Himmelskunde also überhaupt nicht.

Für den Bedarf der höheren Lehranstalten ist ein solches Universal völlig ausreichend. Es muß aber dafür gesorgt werden, daß es leicht und sicher immer wieder an derselben Stelle seinen Platz findet, an der die Beobachtungen vorgenommen werden sollen, und das Fernrohr muß hier rasch in bestimmten Ebenen feststellbar sein, vor allem in der Meridianebene. Zu den ersten Aufgaben der rechnenden Himmelskunde gehört also neben der Bestimmung der Breite die der Meridianlage. Soll das Instrument im Freien gebraucht werden, etwa an einer geeigneten Stelle des Schulhofs, so fixiert man seine Stellung durch drei für die Füße des mitgegebenen Stativs bestimmte, in die Erde eingetriebene Gasröhren und sucht ein geeignetes Meridianzeichen in möglichst großer Entfernung aus. Eine Gaslaterne empfiehlt sich dazu, weil sie auch bei Nacht brauchbar ist, sonst tut ein Blitzableiter oder eine dem Meridian nahe Turmspitze gute Dienste. Viel rascher und sicherer geht aber die Aufstellung mit Hilfe eines aus der Fig. 1 ersichtlichen Gestells vor sich, wenn letzteres durch eine im Mittelpunkt des Grundbretts eingezogene Schraube auf einer Fensterbank festgeklemmt wird. Hat man noch dazu die Füße des Holzgestells mit drei im gleichseitigen Dreieck stehenden Spitzen aus Metall versehen, die in die Nuten dreier in die Fensterbank eingezogener Messingschrauben passen, so ist die Vorbereitung zum Winkelmessen in wenigen Sekunden ausführbar. Auf Zenitbeobachtungen muß man dann freilich verzichten, aber man kann je nach der örtlichen Beschaffenheit noch Höhen bis 80^0 nehmen. Es ist ein schwerer Irrtum, zu meinen, daß brauchbare Winkelmessungen dieser Art nur in einem besonders dafür hergerichteten Raume vorgenommen werden könnten. Unter Benutzung der immer vorhandenen Fensteröffnungen kann, auch wenn unter dem Einfluß von Wärme und

2*

Feuchtigkeit kleine Veränderungen der Unterlage eintreten, der ganze Bedarf des Unterrichts an sicher bestimmten Winkeln ohne irgendwelche

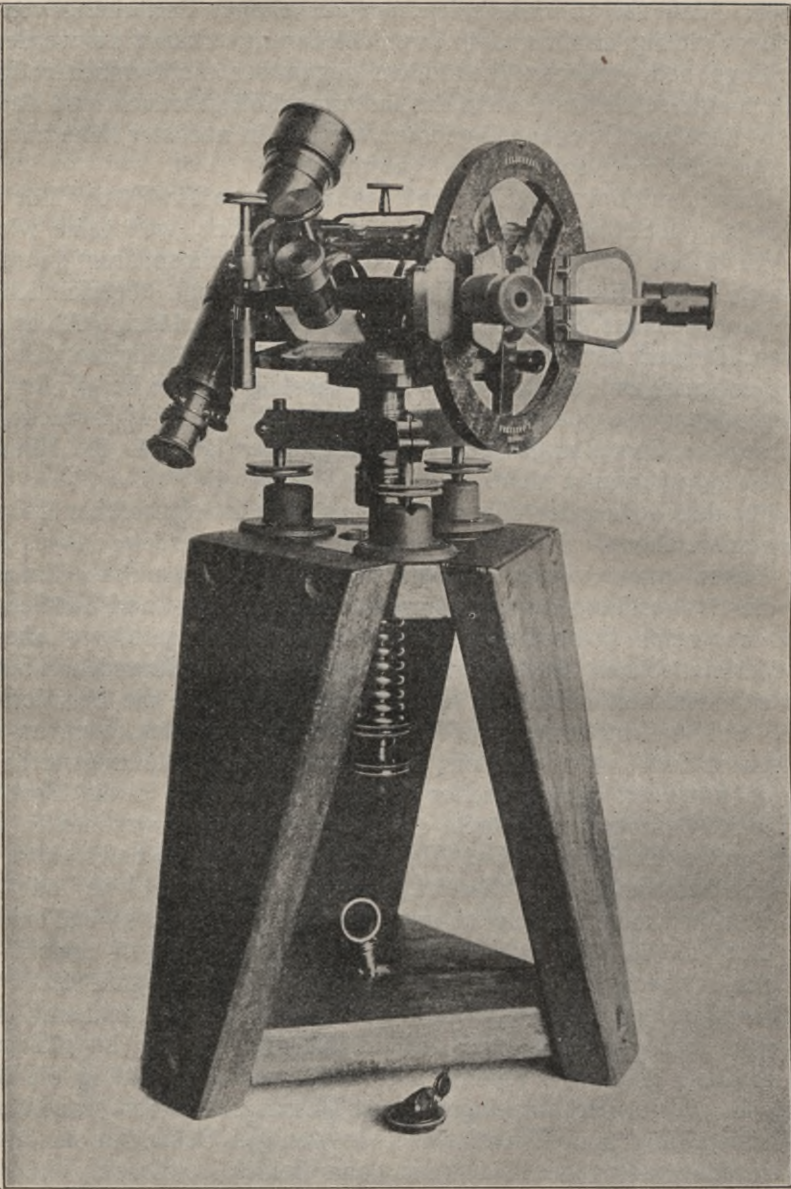

Fig. 1.

Kosten verursachende Bauten und Einrichtungen und ohne nennenswerte Schwierigkeiten gewonnen werden.

Wer über reichlichere Mittel verfügt, dem ist zunächst die Anschaffung eines einfachen Durchgangsinstrumentes mit gebrochenem Rohr und erst danach die eines Sextanten zu empfehlen. Das erstere sollte für den Schulgebrauch statt der üblichen sieben Fäden deren nur drei im Fadenkreuz haben, die große Zahl führt ungeübte Beobachter irre, und die Durchgänge erfolgen meist so rasch, daß ohne Chronographen die Zeiten gar nicht verzeichnet werden können. Bei der Wahl eines Sextanten sehe man weniger auf den niedrigen Preis; die sogenannten Modelle erweisen sich meist als ganz unbrauchbar, wesentlich für den Gebrauch ist auch die Zusammenstellung der Sonnengläser.

Das zweite notwendige Instrument ist eine gute Uhr. Es dürfte bekannt sein, daß die sogenannten Regulatoren bei sorgfältiger Behandlung die Zeit von allen in gleichem Preise stehenden Uhren am besten halten. Leider sind sie nicht immer mit einem Sekundenzeiger versehen, und da die Zifferblätter oft große Exzentrizitätsfehler haben, so kann unkritische Benutzung zu recht unangenehmen Irrtümern führen. Meist genügen zuverlässige Taschenuhren für die vorliegenden Zwecke, aber der Minutenzeiger muß mit dem für die Sekunden in Übereinstimmung, d. h. so gestellt sein, daß er die ganze Minute anzeigt, wenn jener auf 0^{sec} steht. Außerdem muß die Uhr im richtigen Tempo gehen, d. h. der Sekundenzeiger muß 1440 Umdrehungen in einem mittleren Sonnentage machen. Es ist nicht zweckmäßig, die Uhr stets auf die berechnete oder einer richtig gehenden Normaluhr entnommene M. E. Z. einzustellen, weil derartige Eingriffe der Gleichförmigkeit des Ganges nicht förderlich sind; besser behält man die Uhrverbesserung und erforderlichenfalls die tägliche Gangbeschleunigung im Gedächtnis oder notiert sie regelmäßig. Genaue Zeit erhält man, beiläufig gesagt, nur an sehr wenigen Stellen, den Bahntelegraphenämtern der von Berlin ausstrahlenden Hauptstrecken und den Normaluhren einiger mit zuverlässigem Zeitdienst ausgestatteter größerer Orte. Auf anderen Linien und den Posttelegraphenämtern kann man sehr erhebliche Verzögerungen des Zeitsignals erleben.

Mit dem oben erwähnten Universal genommene Höhen in günstiger Lage, d. h. in der Nähe des ersten Vertikals, lassen im allgemeinen die Zeit auf rund eine Sekunde genau ermitteln. Eine Prüfung dieser Genauigkeit nimmt man am besten vor, wenn die Breite und die Meridianlage genügend bestimmt sind, indem man die am Vor- und Nachmittage aus Sonnenhöhen errechnete Zeit mit der beim Durchgange durch den Meridian beobachteten vergleicht. Die Uhr darf im Verlaufe dieser Untersuchung keine erhebliche Abweichung haben.

Neben der M. E. Z. zeigenden Uhr ist eine Sternzeituhr für den Schulgebrauch von größtem Werte. Damit ist selbstverständlich kein teures Sternwarteninstrument gemeint, jede gewöhnliche Taschenuhr ist dazu verwendbar, nur muß ihr Tempo mit Hilfe der Gangregulierung so beschleunigt werden, daß zwei Drehungen des Stundenzeigers einer des Himmelsgewölbes entsprechen. Die Einstellung auf richtige Sternzeit und die Gangberichtigung erfolgt entweder durch Beobachtung von Sterndurchgängen durch den Meridian, am besten in der Dämmerung, so daß man die künstliche Gesichtsfeldbeleuchtung entbehren kann, oder man berechnet mit Hilfe des nautischen Jahrbuchs die Sternzeit für einen beliebigen Zeitpunkt nach M. E. Z. und stellt danach die Sternzeituhr. Über die Ausführung derartiger einfacher Aufgaben soll der nächste Abschnitt Auskunft geben.

Als sehr brauchbar erweist sich die im physikalischen Unterricht unentbehrliche Stechuhr mit zwei Zeigern, deren einer festgehalten werden kann, während der andere seinen Weg fortsetzt. Sie wird mit der Beobachtungsuhr übereinstimmend in Gang gesetzt und gestattet, die Zeit zu vermerken, ohne daß der Beobachter das Auge vom Okular des Beobachtungsinstrumentes entfernt.

In seiner Leistungsfähigkeit unterschätzt und meist in Formen dargestellt, die einen rechten nutzbringenden Gebrauch vollständig ausschließen, ist der Gnomon, eine für den Unterricht namentlich der Mittelstufe sehr wertvolle Vorrichtung. Die aus Fig. 2 sich ergebende Form ist zu empfehlen. Eine dreimal durchbohrte Spiegelglasplatte, die durch zwei Stellschrauben mit Hilfe einer Röhrenlibelle in den Nuten der vorhin erwähnten Messingschrauben des Beobachtungsfensters horizontiert werden kann, nimmt das als Zeichenfläche bestimmte Papierblatt auf, am Fuße des Senklotes ist die Glasplatte leicht angekörnt, um den Zirkel genau vertikal unter dem Mittelpunkte des Fadenkreuzes einsetzen zu können. Mit zwei Dioptern kann die ermittelte Meridianlage durch Visieren nach einem entfernten Festpunkt dauernd bestimmt werden. Die in Betracht kommenden Strecken können leicht mit einer Genauigkeit von 0,01 cm gemessen, die Zeiten auf Zehntelminuten verzeichnet werden. Die im Laufe eines Tages bestimmten Meridianlagen weisen im allgemeinen Abweichungen von $0{,}1^0$ auf.

Die korrespondierenden Zeiten waren in einem besonderen Falle:

1910. 8. 12. $\varphi = 51{,}62^0$.

	Vorm.	Nachm.	Wahrer Mittag
1)	$20^h 27{,}0^{min}$	$3^h 26{,}2^{min}$	$23^h 56{,}6^{min}$
2)	20 51,0	3 3,0	23 57,0
3)	21 16,0	2 38,1	23 57,1
4)	22 10,0	1 45,0	23 57,5
5)	22 33,0	1 23,1	23 58,1
6)	22 55,0	1 0,2	23 57,6
		Mittel:	23 57,4
		Wahrer Wert:	23 57,6.

Aus der Höhe des Fadenkreuzes $h = 10{,}49$ cm und der Schattenlänge des Lotes am wahren Mittag $p = 7{,}73$ cm ergab sich die Höhe der Sonne $h = 53{,}6^0$, also die Deklination $\delta = 15{,}2^0$, was von dem wahren Werte $\delta = 15{,}09^0$ nur unerheblich abweicht. Damit hat das kleine, leicht verständliche Instrument seine Brauchbarkeit für den Unterricht der Mittel-

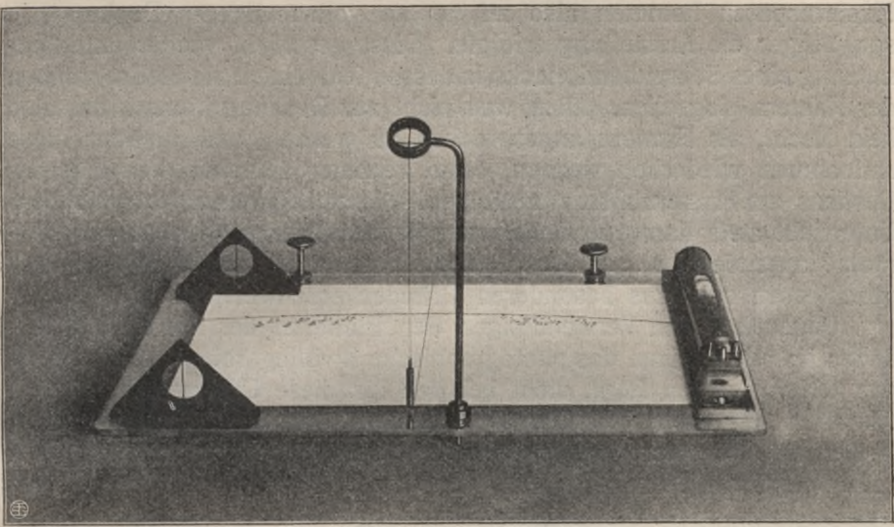

Fig. 2.

stufe erwiesen, für die Oberstufe ist es deshalb noch von besonderem Werte, weil es zur darstellenden Geometrie der Kegelschnitte einen jedermann sichtbaren Beitrag liefert. Gewöhnt man den Schüler von vornherein daran, daß er klar erkennt, daß infolge der Drehung des Himmelsgewölbes der Fahrstrahl vom Auge des Beobachters nach irgendeinem festen Punkte desselben, einem Fixstern, in einem Sterntage den vollen Mantel eines Kegels beschreibt, so kann ihm nicht entgehen, daß der Schatten des Fadenkreuzmittelpunktes den zugehörigen Scheitelkegel beschreiben muß, sein Schnitt mit der Zeichenebene des Gnomons also ein Kegelschnitt ist. Die Darstellung dieses Kegelschnitts etwa für den 21. Juni ist eine auch für die Gymnasialprima nicht zu schwierige aber sehr dankbare Aufgabe, weil die Richtigkeit der Lösung vom Schüler leicht nachgeprüft werden kann.

Neben diesen teilweise zur Winkel- und Zeitmessung unerläßlichen Vorrichtungen ist eine einfache photographische Kamera, bei der die Platte stets auf Unendlich steht und die man sich deshalb leicht selbst herstellen kann, von unschätzbarem Werte. Das Haupterfordernis ist, daß sie in jedem beliebigen Azimut und in jeder Höhe durch einen Teilkreis mit grober Teilung, einen Transporteur von einiger Festigkeit, eingestellt werden kann.

Für Sonnenaufnahmen muß ein Filter aus Rot- und Grünglas in den Strahlengang eingeschaltet werden. Dazu genügen ausgewählte möglichst planparallele Stücke der gewöhnlichen Handelsware, die nach Bequemlichkeit vor oder hinter der Linse angebracht werden. Stellt man diese Kamera stets zur selben Sternzeit auf dieselbe Stelle des Himmelsgewölbes ein, so bekommt man stets dieselbe Stelle auf die Platte, die

Fixsternspuren kommen also zu um so vollständigerer Deckung, je sorgfältiger die Aufstellung erfolgte. Diese geschieht wieder unter Benutzung eines Schraubendreiecks, in dessen feste Nuten die Stellschrauben der Kamera eingreifen. Alles, was nicht zur Deckung kommt, hat also kein Recht, als Fixstern angesprochen zu werden, und je öfter diese Aufnahmen wiederholt werden, desto genauer läßt sich der Weg des Gestirns am Fixsternhimmel verfolgen. Dieses Hilfsmittel tritt also dem Unterricht stets dann zur Seite, wenn Beobachtungen über längere Zeiträume auszudehnen und ihre Wiederholung vor der ganzen Klasse ausgeschlossen oder aus besonderen Gründen erschwert ist.

Gegenüber den Verwendungen der Platte in der Astronomie, bei denen im allgemeinen das photographische Zwillingsrohr der Bewegung des Objekts genau folgt, steht bei den für diese Unterweisungen bestimmten Aufnahmen die Kamera stets fest, und die Platte zeigt entweder die Spur des Objekts innerhalb derselben Sternzeitspanne bei seiner täglichen Bewegung oder, wenn die Belichtüngszeit kurz gewählt werden kann, seine Stellung am Himmelsgewölbe zu derselben Sternzeit, also seine Wanderung am Fixsternhimmel innerhalb der ganzen Beobachtungszeit. Das letztere ist nur bei der Sonne und beim Monde möglich, bei der Sonne belichte ich mit voller Öffnung (23 mm) eines Zeißobjektivs von 19,6 cm Brennweite 0,2 sec., die Mondaufnahmen werden noch scharf genug, wenn man 1 sec. belichtet. Die auf diesem Wege erhaltenen Platten, denn um diese handelt es sich im Unterricht, sind von größter Wichtigkeit, zeigen sie doch dem Schüler das im Zusammenhang, wovon er, auch wenn die Beobachtungen ausgedehnt werden, nur einen kurzen Ausschnitt zu sehen bekommt. Im Gange der Unterrichtsentwickelung wird öfters auf die Zweckmäßigkeit des Verfahrens hingewiesen werden.

Zur raschen und einigermaßen sichern Feststellung der Drehung des gesamten Fixsterngewölbes dient ein sogenanntes Schulfernrohr, dessen terrestrisches Okular zu diesem Zweck mit einem rohen Fadenkreuz versehen wird, während die Feldbeleuchtung vom Objektiv aus erfolgt. Das Instrument muß auch die großen Planeten und den Mond scharf geben, es ist aber nicht notwendig, zu seiner Beschaffung größere Mittel aufzuwenden, denn wenn auch die Betrachtung der erwähnten Himmelskörper von Wert für die Belebung des Unterrichts ist, die Hauptsache bleibt doch die Einsicht in die Grundlagen der Bewegung.

Unumgänglich notwendig nicht nur für einen auf Beobachtungen gegründeten Unterricht, sondern vor allem auch für richtige Aufgabenstellung ist ein astronomisches Jahrbuch, unter denen das Nautische, künftig kurz mit N. J. bezeichnet, herausgegeben vom Reichsamt des Innern (Berlin, Heymanns Verlag, 1,50 M.), seiner Einrichtung und seiner Billigkeit wegen den Vorzug verdient. Wenn auch nicht alle Teile für den Unterricht in Betracht kommen können, so sind Tafel I jedes Monats, die Fixsternephemeride, die Tafel der Jupitertrabantenverfinsterungen und einige Tafeln des Anhangs, vor allem 12 und 13, ganz unentbehrlich. Wie sie zu verwenden sind, soll an einzelnen Stellen nachgewiesen werden. Die Tafel gibt die Zeit in Sekunden, die Winkel in Zehntelminuten, also in der Genauigkeit, die mit dem Hildebrandschen Universal allenfalls noch zu erreichen ist, aber über die der Schule hinausgeht, denn hier wird man sich mit Zehntelzeitminuten und Hundertsteln des Bogengrades begnügen. Die von einigen Logarithmentafeln, vor allem der in dieser Beziehung sehr reichhaltigen von Schülke, gegebenen Tabellen veralten verhältnismäßig rasch, und es ist nicht immer möglich, alle Schüler zum Ankauf der neusten berichtigten Auflage zu veranlassen. Das nautische Jahrbuch rechnet mit dem mittleren Greenwicher Mittag, seine Angaben können also rasch und sicher auf M. E. Z. übergeführt werden, auch das Umrechnen in die dezimale Gradteilung verursacht keine Schwierigkeiten.

Einige Sternkarten, vor allem eine drehbare (Ravensberg, Otto Maier) und ein sogenannter Induktionsglobus, eine schwarze Holzkugel mit verstellbarer Achse und Bohrungen zur Aufnahme von Aufsteckhorizonten und einige weitere einfache Vorrichtungen ergänzen den Bestand dessen, was zu einer Einführung in das Wesen der Himmelskunde notwendig erscheint.

IV. Der Unterricht in der Himmelskunde.

Kein Unterricht, und sei er noch so einfach und bedingungslos, kann ohne wohlerwogene Stoffverteilung und Gliederung auf einen nennenswerten Erfolg rechnen. In ganz besonderem Maße gilt das von der mathematischen Himmelskunde, die auf der obersten Stufe der höheren Lehranstalten das Gebäude des mathematischen Unterrichts zu krönen und abzuschließen berufen ist. Weil neben den rein mathematischen Forderungen der Aufgabe auch die der naturwissenschaftlichen Ausbildung hergehen muß, und die Würde des Gegenstandes besonders sorgfältige Arbeit erfordert, wenn die Belehrung nicht in ganz wertlose dogmatische Schnörkeleien ausarten soll, so ist die denkbar größte Gewissenhaftigkeit vor allem auch in der Beschränkung des Umfangs der Aufgabe vonnöten. Ein Jüngling, der mit dem Reifezeugnis ins Leben tritt, sollte auf Grund eigner Wahrnehmungen wissen, welchen Weg die Sonne am Fixsternhimmel durchläuft, und erkannt haben, auf welchen mechanischen Grundlagen der Vorgang beruht. Sein räumliches Vorstellungsvermögen sollte so weit ausgebildet sein, daß er die Lage des Tierkreises am Firmament wenigstens annähernd richtig zu jeder Zeit anzugeben vermag, um daraus zu entnehmen, daß sich Mond und Planeten nur wenig von ihm entfernen. Auch ist wohl nicht zuviel verlangt, wenn er die Grundbegriffe der Zeitbestimmung sich so weit zu eigen gemacht hat, daß er über diese für das bürgerliche Leben so wichtigen Dinge klar und bestimmt Rechenschaft ablegen kann.

Sollen diese Erkenntnisse wie ein festgefügter Bau im innigsten Zusammenhange mit einander stehen, nicht aber in losem Nebeneinander, die eine lässiger, die andere mit Sorgfalt behandelt werden, so ergibt sich für die Reihenfolge der Beobachtungsepisoden wenigstens die Disposition des Unterrichts ganz von selbst. Sie folgt den Ereignissen des tropischen Jahres einerseits, zum andern ist sie an die steigende Entwickelung der mathematischen Ausbildung gebunden. Mit Rücksicht auf diese Notwendigkeiten ist der Stoff zu teilen und die Zeit in Ansatz zu bringen, die innerhalb des ganzen Unterrichts der Himmelskunde gewidmet werden soll. Denn nichts wäre verkehrter, als auf Kosten dieses den Schüler vielleicht in höherem Maße fesselnden Gegenstandes andere Lehraufgaben vernachlässigen zu wollen. Dagegen wird sich ergeben, wie außerordentlich fruchtbar dieses Gebiet auch für die Entwickelung und Bewertung anderer im Rahmen der Schulmathematik gestaltet werden kann.

Die in diesem Abschnitte zu besprechende Einteilung des Unterrichts und die Art, einzelne Gegenstände zu behandeln und miteinander zu verknüpfen, haben sich in einer Reihe von Jahren bewährt; daß sie Allgemeingut geworden wären, kann nicht behauptet werden. Es wäre völlig verfehlt, sie als die herrschende Methode des Unterrichtsabschnittes hinstellen zu wollen, ausdrücklichen Wünschen entsprechend werden sie aber hier mitgeteilt.

Als Vorläufer der eigentlichen Belehrung erfolgt um die Zeit des Frühlingsanfangs in Gegenwart der künftigen Mitglieder der Prima, für die der Stoff vorbereitet wird, die Bestimmung einer S o n n e n h ö h e in der Art, daß man vor den Augen der Schüler objektiv den oberen oder unteren Sonnenrand auf dem Mittelfaden des nur in der Meridianebene beweglichen Fernrohrs des Universales entlang gleiten läßt. Die abgelesene Höhe (Zenitabstand) wird, um einen möglichst genauen Wert zu erhalten, unter Rücksichtnahme auf Refraktion (ϱ), Parallaxe (π)[1]) und Sonnenradius (r), die dem nautischen Jahrbuch entnommen werden, erst zu einer Zeit verbessert, zu der das Verständnis für diese Dinge erwachsen ist. Man erhält etwa folgendes Beispiel.

Beobachtungsort: Rawitsch, $\varphi = 51{,}617^0$; Instrument: Universal 70 von Hildebrand.

1911. 3. 21. $0^h\, 0^{min}\, 7^{sec}$. M. E. Z.

$$\begin{aligned} \text{Beobachtet: } h\underline{\bigcirc} &= \;38{,}017^0 \\ \varrho &= -\;\;\;0{,}021^0 \\ \pi &= +\;\;\;0{,}002^0 \\ r &= +\;\;\;0{,}268^0 \\ \hline \text{Berichtigt: } h\odot &= \;38{,}266^0. \end{aligned}$$

1) Siehe N. J. Tafel 2 oder Bremiker, logarithmisch-trigonometrische Tafeln (10. Aufl. Berlin, Weidmann) Seite 155.

Daraus und aus dem Komplement der Breite ergibt sich die Deklination

$$\delta\odot = -0{,}117.$$

Neben dieser Winkelmessung geht eine erste photographische Aufnahmenreihe her, bei der täglich etwa von Mitte März an um 0^h Sternzeit mit der nach dem höchsten Punkte des Himmelsäquators gerichteten Kamera eine Sonnenaufnahme gemacht wird. Je genauer und vollständiger diese Reihe ausfällt und je mehr Tage sie umfaßt, desto beweiskräftiger ist die Platte für die Klarstellung der ersten Grundbegriffe, die erst nach Beginn des neuen Schuljahres erfolgen kann, wenn die ersten Sätze der sphärischen Trigonometrie eingeübt und an den beiden ersten Beobachtungstagen weitere Einsichten vermittelt worden sind.

Die abgebildete Aufnahme (Fig. 3) zeigt den Weg der Sonne am Himmelsgewölbe vom 13. März bis 5. April 1911. Infolge der Unvorsichtigkeit des ausführenden Schülers beim Aufstellen der Kamera sind die beiden Sonnenbildchen des 14. und leider gerade des 21. März nicht an die ihnen vorgeschriebene Stelle gekommen, die Aufnahmen vom 15., 17. bis 19., 25. bis 27., 29. März und 1. bis 4. April fielen aus, weil der Himmel bedeckt war, andere sind unscharf, weil die Sonnenstrahlen sich ihren Weg durch Nebelmassen bahnen mußten. Das zweite 1908. 9. 16, 17, 19, 23, 26 (Mittelreihe), und zwar um $23^h\,30^{min}$, $0^h\,0^{min}$, $0^h\,30^{min}$ aufgenommene Bild (Fig. 4), bei dem die Platte außerdem einige Stunden dem Fixsternhimmel ausgesetzt wurde, zeigt, wie aus einer solchen Aufnahme ohne weiteres Schlüsse auf die Geschwindigkeit des Fortschreitens der Sonne in ihrer Bahn gezogen werden können, indem man die nahezu gleichschenkligen Dreiecke der zwei Reihen angehörenden Sonnenbildchen benutzt.

Gleichviel zu welcher Zeit des Jahres man eine solche Aufnahmenreihe macht, stets stehen die Sonnenmittelpunkte in einer Geraden, also ist die Bahn der Sonne am Himmelsgewölbe ein größter Kugelkreis. Dieser unanfechtbare Beweis überrascht auch Sachkenner. Prüft man nach, welche Formen die Fixsternspuren auf der Platte annehmen müssen, so ergibt sich ebenso wie beim Gnomon, daß sie nur Kegelschnitte sein können. Und zwar erhält man alle Formen der Kegelschnitte, wenn die optische Achse der Kamera vom Pol zum Äquator wandert. In der Polarstellung beschreiben alle Sterne Kreise, in der Äquatorialstellung die Äquatorsterne Gerade, alle andern Hyperbeln. Auch in diesem Falle ist die Darstellung der Kegelschnitte nicht schwierig; selbst die Gleichung aufzustellen ist allerdings nur in einzelnen Fällen so leicht, daß der Gymnasialprimaner die Aufgabe zu lösen vermag; es soll aber auf diesen Weg, auch hier die Ergebnisse rein mathematisch zu deuten und auszunutzen, nur hingewiesen werden. Jedenfalls erkennt man sofort, daß alle Punkte, die auf der Platte einer Geraden angehören, in einer

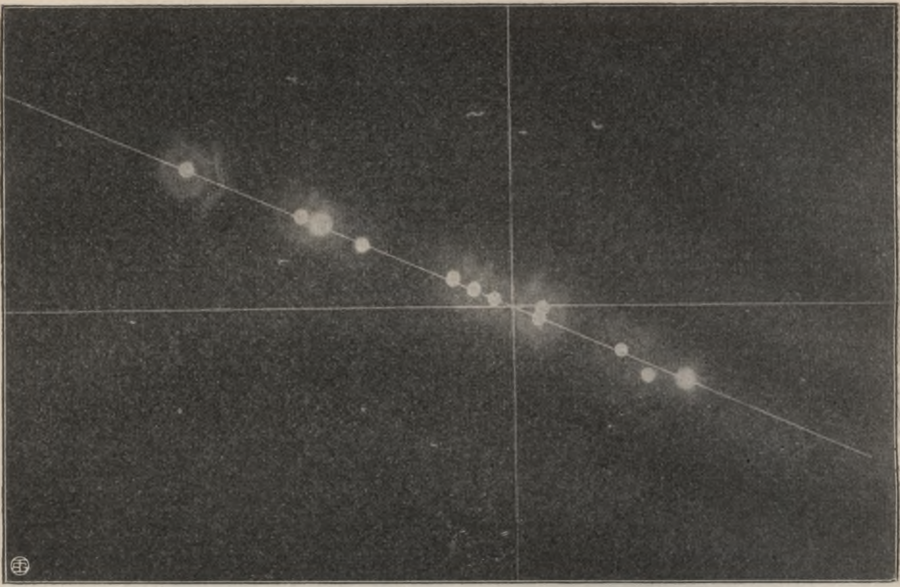

Fig. 3.

Ebene liegen, also am Himmelsgewölbe sich nur in einem größten Kreise bewegen können.

Der eigentliche Unterricht beginnt mit einer Erörterung des Horizontalkoordinatensystems mit Zuhilfenahme des Universals, womöglich in einem allseitig geschlossenen Raume, der auch die Erinnerung an die Meridianrichtung ausschließt. Es ist streng zu zeigen, daß dieses System lediglich von der Richtung der Schwere abhängt und daß jeder Punkt der Oberfläche des Unterrichtsraumes durch zwei Winkel- oder Bogengrößen, Azimut und Höhe, seiner Lage nach eindeutig bestimmt ist, wenn die durch die zufällige Stellung des Universals bedingte Nulllage des Horizontalkreises als Ausgangsrichtung gewählt wird. Es ist durchaus notwendig, die völlige Unabhängigkeit dieses Systems vom Vorhandensein eines Himmelsgewölbes streng zu betonen, die Begriffe Zenit, Vertikale, Vertikalebene und was damit zusammenhängt, Azimutal- und Höhenkreise, sind scharf hervorzuheben. Erst dann wird unter Aufgabe des bisherigen Beobachtungspunktes an einem Südfenster die durch das Gnomon bestimmte bevorzugte Lage einer dieser Vertikalebenen, die der Meridianebene, vorläufig erläutert und damit werden die ersten messenden Beobachtungen eingeleitet. Die Azimute zähle man von Süden, die Zeiten ununterbrochen von Mittag zu Mittag.

Erst jetzt ist der Zeitpunkt gekommen, wo man möglichst an zwei aufeinanderfolgenden, sicheres Wetter verheißenden Tagen die Grundlagen der Himmelskunde so umfassend bietet, daß nicht nur die ersten Rechnungen mit vollem Verständnis ausgeführt, sondern alle künftigen

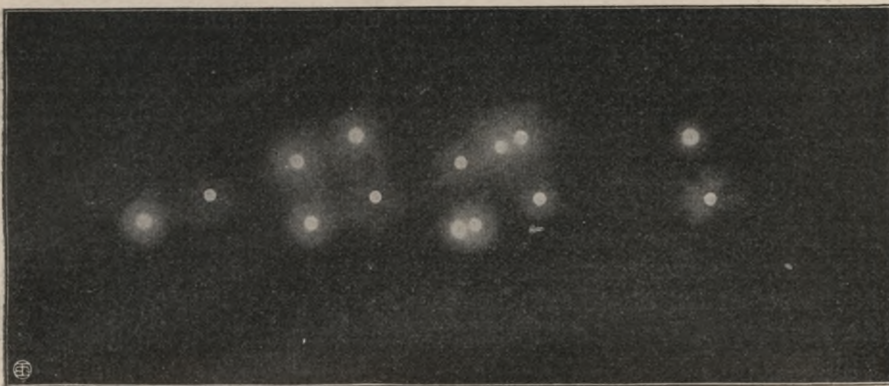

Fig. 4

Beobachtungen vom Schüler nur als eine notwendige Ergänzung und Erweiterung der ersten angesehen werden. Diese für den ganzen künftigen Ausbau grundlegende Beobachtungsreihe beginnt damit, daß man am wahren Mittage des ersten Tages entweder mit dem als Durchgangsinstrument benutzten Universal oder mit dem eigentlichen Werkzeug die Zeit des Sonnendurchgangs durch die Meridianebene nach einer guten, M. E. Z. zeigenden Uhr genau vermerkt und diese Beobachtung ebenso wie eine am Abend vorgenommene Durchgangsbeobachtung eines Fixsterns am anderen Tage wiederholt. Die Fädenberührungen werden von einem geschickten Schüler mit der Stechuhr aufgenommen und durch einen zweiten an der Beobachtungsuhr nachgeprüft, die Zahlen von allen vermerkt und nach der Beobachtung rasch die Mittel berechnet. Für die Vorbereitung befähigter Schüler zu solchen Ehrenämtern leisten die Schülerübungen wertvolle Dienste. Die Zeit der Fädenberührungen durch die Sonnenränder gibt folgendes Schema:

Rawitsch, 1911. 4. 20. 23^h. Kleines Durchgangsinstrument von Heyde, Dresden.

Rechter Rand.	Linker Rand.	$\odot$
1) 50^{min} 4^{sec}	4) 53^{min} 6^{sec}	51^{min} 35^{sec}
2) 50 31	5) 52 40	51 36
3) 50 58	6) 52 14	51 36
		51 36.

Die Durchgänge von $\odot$ und α leonis erfolgten:

$\odot$	1911. 4. 20.	23^h	51^{min}	36^{sec}
α leonis	4. 21.	8	1	25
$\odot$	4. 21.	23	51	20
α leonis	4. 22.	7	57	28.

Demnach kehrte die Sonne nach 23^h 59^{min} 44^{sec} zur Meridianebene zurück, der Fixstern aber schon nach 23^h 56^{min} 3^{sec}.

Mit dem Universal hätte man auch die Höhen der Durchgänge mitbeobachten und zeigen können, daß die der Sonne wächst, während die von α leonis sich nicht verändert. Das ist aber bei der Fülle der neuen Eindrücke nicht ratsam, und man spart sich eine derartige Beobachtung für einen kleineren Schülerkreis, der sich besonders eifrig bewährt, für eine Zeit auf, in der die Zeitgleichung wächst. Die Zunahme der Sonnendeklination wird greifbarer auf anderem Wege gezeigt.

Die umfangreiche und wohlvorbereitete Abendbeobachtung gilt vor allem der Drehung des Himmelsgewölbes und den damit im Zusammenhange stehenden Begriffen. Gearbeitet wird mit zwei Fernrohren, von denen das größere, das eigentliche Schulfernrohr, in der schon angedeuteten Weise mit terrestrischem Okular und Fadenkreuz ausgestattet ist; die Beleuchtung erfolgt durch eine Fahrradlaterne. Das andere, etwa das des Universals, wird auf α ursae min. eingestellt. Gleichzeitig wird die Kamera der Erdachse parallel aufgestellt und zweimal je eine Stunde mit einer Zwischenzeit von 5 Minuten belichtet. Es gibt kein Mittel, die scheinbare Drehung des Himmelsgewölbes in kürzester Zeit so handgreiflich darzustellen als dieses. Während jeder Schüler die Bewegung an den verschiedensten Stellen des Himmelsgewölbes stehender Fixsterne beobachtet und Richtung und vergleichsweise die Geschwindigkeit ihres Fortschreitens angibt, werden alle durch die Achsendrehung der Erde bedingten Begriffe erläutert und eingeübt. Wenn, was ich hier wiederhole, die Schüler von vornherein daran gewöhnt werden, einzusehen, daß der Fahrstrahl vom Auge des Beobachters nach einem Fixstern einen Kegelmantel beschreibt, und die verschiedenen Formen dieser Oberflächen schon im Laufe des ersten Abends zur Kenntnis gebracht werden, so ist für das Raumvorstellungsvermögen mehr gewonnen, als wenn man ihnen sagt, die Fixsterne beschreiben Parallelkreise am halbkugelig gedachten Himmelsgewölbe. Die Einsicht in die Abhängigkeit des Azimuts der Auf- und Untergangspunkte lediglich von der Deklination für unveränderte Breite wird dem Anfänger durch diese Betrachtungsweise wesentlich erleichtert; verfügt man über ein parallaktisch aufgebautes Fernrohr, so ist der Sachverhalt noch leichter aufzuklären. Auch für den Sonnenlauf ist das Entstehen des Kegelmantels besonders augenfällig zu machen. Man befestige auf einer horizontalen Fläche eine Korkhalbkugel von einigen Zentimetern Durchmesser und stecke in diese Kugel von Stunde zu Stunde lange Nadeln, Hutnadeln mit runden Knöpfen, die auch sonst in Verbindung mit Korken für die sphärische Trigonometrie gute Dienste tun, so, daß der Schatten des Knopfes ungefähr die Mitte der Kugel trifft, dann tritt die Gestalt des Kegelmantels sehr bald klar hervor. Die Wiederholung dieser von den Schülern mit großem Eifer betriebenen Aufgabe an den Anfängen der Jahreszeiten liefert, wenn man nur die jeweilig gebrauchte Nadelreihe herausnehmen läßt, ein sehr anschauliches Bild der verschiedenen Auf- und Untergangspunkte und der Mittagshöhen. Die Vorrichtung stellt sich der von Herrn Böttcher-Leipzig vorgeschlagenen Drahtgazehalbkugel zur Seite, hat aber einige Vorzüge, die hier nicht weiter erörtert werden sollen.

Die Lage des Himmelspols, die bekannte Art, ihn mit Hilfe des Sternbildes des Großen Bären rasch zu finden, die des Himmelsäquators und seiner Schnittgeraden mit der Horizontalebene, die Meridianebene, das äquatoriale Koordinatensystem und schließlich auch das nautische Dreieck [1]) sind Begriffe, deren man in Zukunft dauernd bedarf, die also an diesen beiden Beobachtungsabenden ganz zuverlässig, und zwar durch Aufsuchen am Himmelsgewölbe selbst, nicht an einem Modell, einzuüben sind, nötigenfalls unter Verwendung ganz einfacher Hilfsmittel. Die Verarbeitung dieser Erfahrungen und neu gewonnenen Vorstellungen in den nächsten Unterrichtsstunden hat mit größter Vorsicht und sehr langsam zu geschehen. Der gestirnte Himmel und seine Bewegung sind meist dem Primaner keineswegs so vertraut, daß er ohne weiteres den von dem Fahrstrahl beschriebenen Kegelmantel auch nur annähernd richtig anzuschauen vermag; das ist also vor allen Dingen einzuüben. Die entwickelte Platte zeigt, daß die Drehung des Himmelsgewölbes gleichförmig ist, denn in gleichen Zeiten werden gleiche Bogen von jedem einzelnen Fixstern zurückgelegt. Die vollständige Drehung des Himmelsgewölbes dauert rund $23^{h}\,56^{min}$, genauer noch $2{,}08^{sec}$ mehr, das ist also die Zeitdauer einer vollen Drehung der Erde. Beschleunigt man den Gang einer Uhr so, daß der Minutenzeiger in dieser Zeit 24 volle Drehungen macht, so zeigt sie Sternzeit, und jeder Fixstern muß nach einem Sterntage im feststehenden Fernrohr wieder durch das Fadenkreuz gehen.

Kehrt ein Gestirn nicht nach 24 Sternstunden zum Fadenkreuz des Durchgangsinstrumentes zurück, so kann es kein Fixstern sein, sondern es hat am Himmel Eigenbewegung. Also ist auch nach der grundlegenden Beobachtung die Sonne kein Fixstern, denn sie braucht zu ihrer Wiederkehr rund vier Minuten mehr als einen Sterntag. Diese Erkenntnis kann nicht scharf genug eingeprägt werden, und es muß geradezu als grober Unfug, als logischer Fehler schlimmster Art und die Quelle verhängnisvollster Mißverständnisse bezeichnet werden, wenn heute noch in dieser Hinsicht unklare Ausdrücke gebraucht werden. Den wirklichen Weg der Sonne am Himmelsgewölbe zeigt nun die für die letzte Hälfte des März aufgenommene Beobachtungsreihe. Aus der Platte entnimmt der Schüler, daß die Sonne im Laufe des 21. März den Äquator, der entsprechend der beobachteten Mittagsdeklination eingezeichnet ist, überschritten hat und daß der größte Kreis, in dem sie sich bewegt, der Tierkreis, mit dem Äquator einen Winkel von nahezu $23{,}5^{0}$ bildet. Er sieht ferner, daß ihre Tagesschritte etwa den doppelten Durchmesser betragen, und der Vergleich mit der im vorigen Jahre erhaltenen Aufnahme und weitere Erörterungen auch über den ebenfalls

1) Das sphärische Dreieck Pol — Zenit — Stern.

verzeichneten Herbstdurchgang geben ihm die Gewißheit, daß die Sonne zum Durchlaufen ihrer scheinbaren Bahn rund $365^1/_4$ Tage braucht, unter der Voraussetzung, daß sie sich gleichförmig bewegt, also mit einer Geschwindigkeit von $0{,}9856 \frac{0}{d}$. Nun erst kann rechnerisch zur genaueren Bestimmung der Zeit des Übertritts auf die nördliche Halbkugel geschritten werden, für die die grundlegende Beobachtung vorausgeschickt wurde, ohne sofort benutzt zu werden.

Das in Betracht kommende rechtwinklige sphärische Dreieck kann, da $\delta = -0{,}117^0$ ist, als eben betrachtet und das Sinusverhältnis Deklination/Länge in der Ekliptik durch das der Bogen ersetzt werden; die Rechnung ist sogar ohne Tafel durchführbar, da sin $23{,}5^0$ leicht aus sin $22{,}5^0$ bestimmt werden kann. Aus $l = \frac{\delta}{\sin \epsilon}$ und der oben genannten Geschwindigkeit erhält man für die zum Durchlaufen des Ekliptikbogens nötige Zeit $0{,}298^d$, demnach ist der Frühlingsanfang 11. 3. 21. $7^h\, 9^{min}$. Im vorigen Jahre wurde die Zahl $0{,}054^d$ gefunden, demnach verlaufen von einem Durchgang des Sonnenmittelpunktes bis zum entsprechenden $365{,}244^d$, eine Zahl, die genauer wird, wenn eine größere Anzahl von Jahren verflossen sind und die als Länge des tropischen Jahres dem Gedächtnis einzuprägen ist. Es genügt, wie schon erwähnt worden ist, bei vierstelliger Tafel $365{,}24^d$ merken zu lassen.

Wie diese Fundamentalzahl, so wird auch die Schiefe der Ekliptik mit ausreichender Genauigkeit ($23{,}45^0$) den entsprechenden Beobachtungen am Sommers- und Wintersanfang entnommen; aus der Herbstbeobachtung ist zu folgern, daß das Sommerhalbjahr länger ist als das Winterhalbjahr. Es ist selbstverständlich, daß bei diesen Berechnungen von den Beobachtungsergebnissen einer früheren, meist noch vertretenen Schülergeneration Gebrauch gemacht werden muß; eine nähere Besprechung erheischen sie nicht, weil ihre Einzelheiten aus dem Gesagten hervorgehen.

Von den Fundamentalzahlen der Breite und Länge wird die erstere am zweckmäßigsten an einem der beiden Beobachtungstage gewonnen, und zwar beim unteren Meridiandurchgang des Polarsterns, dessen Rektaszension und Deklination dem nautischen Jahrbuche entnommen werden. Ob man sich dessen Sprachgebrauch anschließen und gerade Aufsteigung und Abweichung sagen will, ist gänzlich Geschmackssache. Die Mitte des Mai ist für diese Bestimmung am günstigsten, da die untere Kulmination von α ursae min. dann gerade in die Zeit fällt, in der man die Schüler um sich zu versammeln pflegt. Aus dem N. J. entnimmt man, und es ist gut, diese Rechnung später mit den Schülern nachzuprüfen, daß die Sternzeit am Mittag etwa des 19. Mai in Greenwich am m. Gr. Mittag $3^h\, 44^{min}\, 9^{sec}$ ist. Rawitsch liegt $1^h\, 7^{min}\, 26^{sec}$ östlich, hat also zur gleichen Zeit eine um diesen Betrag größere Sternzeit, also am M. E. Mittag, eine Stunde mittlerer Zeit früher, $1^h\, 0^{min}\, 10^{sec}$ weniger. Man erhält also für Rawitsch und nach derselben Vorschrift für jeden beliebigen anderen Ort die Sternzeit für den M. E. Mittag, wenn man zu der Greenwichs $7^{min}\,16^{sec}$ addiert. Der Polarstern hat nach dem Sonderverzeichnis am 19. Mai die Rektaszension $1^h\,26^{min}\,16^{sec}$; also ist die Sternzeit bei seiner unteren Kulmination

$$\theta_1 = 13^h\,26^{min}\,16^{sec}.$$

Die Sternzeit am M. E. Mittag in Rawitsch ist

$$\theta_0 = 3^h\,51^{min}\,25^{sec}.$$

Die Differenz $\theta_1 - \theta_0 = 9^h\,34^{min}\,51^{sec}$ ist Sternzeit, nach Tafel 13 des Anhangs ist also $1^{min}\,34^{sec}$ abzuziehen, man erhält als Zeit der u. Kulm.: $9^h\,33^{min}\,17^{sec}$ M. E. Z.

Um diese Zeit ist also das auf α ursae min. gerichtete Fernrohr des Universals genau einzustellen, nachdem man zuvor die Libellen noch einmal nachgeprüft hat; die abgelesene Höhe ist für die Strahlenbrechung und den Polabstand zu verbessern und ergibt so die geographische Breite des Beobachtungsortes.

Die hier bereits gebrauchte Länge ist früheren Beobachtungen entnommen. Ist sie nicht bekannt, so bleibt zunächst nichts übrig, als sie aus dem Meßtischblatt berechnen zu lassen; für die Schülerübungen ist das eine sehr brauchbare Aufgabe, ebenso die Nachprüfung der gefundenen Breite. Wie auch die Länge durch Beobachtung gefunden werden kann, soll erst später besprochen werden.

Nach diesen Vorarbeiten treten die sphärischen Dreiecke und ihre Berechnung in ihre Rechte, und die künftigen Aufgaben dienen dazu, entweder getroffene Bestimmungen zu befestigen oder zu verbessern, vor allem aber neue Ausblicke zu eröffnen. Bei der Rücksicht, die auf die zu Gebote stehende Zeit genommen werden muß, ist die Auswahl nicht übermäßig schwierig; man tut wohl, Aufgaben von vornherein auszuschließen, die nur der Übung im Rechnen dienen und deren Unzweckmäßigkeit auch der Schüler einsehen muß; der verbleibende Rest ist immer noch recht groß und wächst, wenn man berücksichtigt, wie veränderlich dieselbe Aufgabe ist, wenn sich die gegebenen Stücke ändern.

Von den rechtwinkligen Dreiecken tritt dasjenige besonders hervor, dessen Seiten die Länge der Sonne in der Ekliptik, ihre Deklination und Rektaszension sind. Da namentlich von der Deklination eine Reihe von Vorgängen im Jahreslaufe abhängen, die einer sorgfältigen Erklärung bedürfen, so ist ihre Abhängigkeit von dem Fortschreiten der Sonne im Tierkreis besonders hervorzuheben.

Dabei genügt es zunächst, die Annahme zugrunde zu legen, daß die Sonne mit gleichen Tagesschritten ihren Weg wandle und daraus ihre Mittagshöhe zu bestimmen; die Aufgabe kann aber vielfach verändert werden. Nicht unwesentlich ist auch der Nachweis, daß sich die Deklination nach dem Frühlingsanfang rasch, gegen den 21. Juni aber sehr langsam ändert, mit ihr auch die Tageslänge. Ebenso wichtig ist es, schon in den ersten Übungen zu zeigen, daß die in der Ekliptik gleichförmig aufsteigende Sonne der mittleren Äquatorsonne, die für die Uhrgangregulierung in Betracht kommt, beim Durchgang durch den Meridian vorauseilt, was bei den beiden Beobachtungen dadurch zum Ausdruck kam, daß nicht volle 24 Stunden zwischen beiden Zeitpunkten lagen. Es kann berechnet und der Betrag in Zeit angegeben werden, wie groß diese Differenz zwischen α und l ist. Dadurch wird dem Verständnis der Zeitgleichung vorgearbeitet. Mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke ist das Azimut und die Zeit des Auf- und Untergangs bestimmbar, kurz es fehlt durchaus nicht an Möglichkeiten, auch diesen einfacheren Verhältnissen gerecht zu werden.

Die Deklinationstabelle des Sonnenmittelpunktes gehört unter allen Umständen zum eisernen Bestande einer Logarithmentafel; die wichtigsten Rechnungen gelten dem Tagesgestirn, und es ist durchaus notwendig, in die Aufgaben die Deklination mit einer den übrigen Größen entsprechenden Genauigkeit einzusetzen. Das nautische Jahrbuch, dem sie entnommen werden könnte, gehört aber nicht zu den Schulbüchern. Die für die Bestimmung der Deklination für einen nach M. E. Z. gegebenen Zeitpunkt in Betracht kommenden Nebenrechnungen, Interpolationen, Umsetzungen von Zeit in Bogen usw. weichen von den gangbaren Aufgaben der Übungsbücher wesentlich ab und verursachen einige Schwierigkeiten, ehe sie völlig verstanden werden, sind aber von nicht zu unterschätzendem Werte, weil sie nie gedankenlos ausgeführt werden können, was bei vielen anderen Regel ist.

Die erste für die Benutzung des allgemeinen sphärischen Dreiecks in Betracht kommende Aufgabe ist die der Bestimmung der Meridianlage aus der Breite und der beobachteten Höhe eines Fixsterns für das südliche Beobachtungsfenster.

Das Fernrohr des richtig eingestellten und gut befestigten Instruments wird zunächst auf die künftige Meridianmarke eingestellt und der zugehörige Winkel der Horizontalteilung A_1 vermerkt, dann wird es möglichst genau auf einen je nach der Lage des Fensters und den Verhältnissen der Beobachtungsstelle etwa $50-60^0$ westlicher oder östlicher stehenden Fixstern eingestellt und nach der Beobachtung seines Durchgangs durch die Mitte des Fadenkreuzes die Höhe (Zenitabstand) und der zugehörige Horizontalwinkel A_2 abgelesen. Zur Sicherung stellt man dann noch einmal auf die Meridianmarke ein; die neue Ablesung muß mit der ersten übereinstimmen. Aus h, φ und δ kann das Azimut A des Sterns im Augenblick der Beobachtung, also auch der Punkt der Teilung A_0 ermittelt werden, der der Meridianlage entspricht, also auch das Azimut der Meridianmarke.

Rechenbeispiel. Meridianmarke: Blitzableiter eines Hauses in 400 m Entfernung.

Rawitsch, Gymnasium, 09. 5. 20. $\varphi = 51{,}62^0$, α leonis : $\delta = +12{,}41^0$.
Beobachtet: $A_1 = 299{,}63^0$, $A_2 = 347{,}00^0$, $h = 38{,}19^0$ (berichtigt).

Die einem bei der Zeitbestimmung zu gebenden Schema entsprechend durchgeführte Rechnung ergab:

Es ist $A_2 = 347{,}00^0$
aus der Rechnung $A = 56{,}44^0$.
Also hat der Meridian $A_1 = 290{,}56^0$, und das Meridianzeichen hat das Azimut $A_3 = 9{,}07^0$.

Es empfiehlt sich durchaus, dieselbe Beobachtung und Berechnung zu wiederholen, auch wenn mit anderen Methoden die Meridianlage noch sicherer festgestellt werden kann. Erst durch die Übereinstimmung der neuen Werte mit den früher ermittelten gewinnt der Schüler Einsicht in die Zuverlässigkeit derartiger Messungen und ihres Geltungsbereichs.

Reichhaltiger an Einzelaufgaben wird die Meridianbestimmung, wenn die Methode der korrespondierenden Sternhöhen mit während der Beobachtung veränderten Höhenlagen des Fernrohrs angewendet und durch gleichzeitige Notierung der Durchgangszeiten des betreffenden Fixsterns die Aufgabe zu einer überbestimmten wird. Dann kann vor allem die Breite des Beobachtungsortes mit ziemlicher Genauigkeit festgestellt werden. Bedingung für das Gelingen einer solchen Beobachtungsreihe, die Anfängern nicht gerade zu empfehlen ist, ist richtiger Uhrgang und sicherer Stand des Instruments während der ganzen Zeit.

Als Beispiel einer solchen Meridianbestimmung und ihrer Ergebnisse führe ich folgende Zahlen an (Theodolit von Fennel-Kassel).

Nordhausen, Osterstr. 12, 93. 11. 9. α aquarii; $\delta = -0^0\,48',9$.

Nr.	Zeit			Höhe	Abgel. Azim.	Azim. d. Mer.	Breite
1	5^h	32^{min}	43^{sec}	$34^0\,30',0$	$51^0\,39',2$	$78^0\,34',3$	$51^0\,30',5$
2	5	40	11	35 0,0	53 49,4	78 34,5	51 30,6
3	5	48	8	35 30,0	56 12,3	78 34,1	51 30,5
3	8	12	18	35 30,0	100 55,8		
2	8	20	22	35 0,0	103 19,5		
1	8	27	17	34 30,0	105 29,3		

Wenn das Universalinstrument in der oben angedeuteten Weise im Beobachtungsfenster befestigt wurde, dann ist nun seine Verwendung auch als Durchgangsinstrument sehr einfach, die Auf- und Einstellung in die Meridianebene kann in weniger als einer Minute erfolgen.

Zu den weiteren Fundamentalaufgaben gehören die Bestimmung der Zeit aus einer beobachteten Sonnen- oder Sternhöhe und die umgekehrte, für eine gegebene Zeit den Ort eines Fixsterns oder des Sonnenmittelpunktes am Himmelsgewölbe nach Azimut und Höhe zu bestimmen.

Die Genauigkeit der Uhrverbesserung ΔU, denn das ist die Zeitbestimmung im Grunde, hängt von der Genauigkeit der abgelesenen Höhe und der gleichzeitig vorzunehmenden Uhrbeobachtung ab. Unter einigermaßen günstigen Umständen gibt das Hildebrandsche Universal bei 0,001^0 Ablesung unter Benutzung der Stechuhr die Zeit auf eine Sekunde genau; für die hier vorliegenden Zwecke ist bei 0,01^0 Ablesung und entsprechender Tafel die Genauigkeit 0,1 Minute zu erwarten.

Von Rechts wegen dürfte die Aufgabe erst angeschnitten werden, nachdem das Problem der Zeitgleichung vollständig gelöst ist, und es wird meine weitere Aufgabe sein, zu zeigen, daß das bis zu einem gewissen Grade von Genauigkeit möglich ist. Meist wird man sich aber damit begnügen, diese in manchen Lehrbüchern recht oberflächlich behandelte Größe den Tafeln zu entnehmen, ebenso wie das auch bei der Berechnung der Zeit aus Sternhöhen mit der Sternzeit am mittleren Mittag zu geschehen pflegt.

Wie sich eine Zeitaufnahme vorteilhaft zu gestalten hat, wird ein Beispiel besser erläutern als lange Auseinandersetzungen:

Am 11. 8. 14. wurden in Rawitsch ($\varphi = 51{,}62^0$; $\lambda = 1^h\ 7^{min}\ 26^{sec}$) nach den Angaben einer Taschenuhr (A. Lange u. Söhne, Glashütte) mit dem Hildebrandschen Universal vier Sonnenhöhen in verschiedenen Kreislagen (Kr.) und mit Beobachtung der Berührung des unteren und oberen Sonnenrandes nach folgendem Schema samt den Rechnungsergebnissen verzeichnet.

	Uhrzeit	Kr.	Sonnenrd.	Beob. H.	Verb. H.	Wahre M.E.Z.	ΔU
(1)	$19^h\ 5{,}2^{min}$	l.	$\overline{\odot}$	$22{,}04^0$	$21{,}74^0$	$19^h\ 5{,}0^{min}$	$-0{,}2^{min}$
(2)	19 8,3	l.	$\underline{\odot}$	21,98	22,20	19 8,0	$-0{,}3$
(3)	19 12,7	r.	$\overline{\odot}$	23,19	22,89	19 12,4	$-0{,}3$
(4)	19 14,5	r.	$\underline{\odot}$	22,94	23,16	19 14,2	$-0{,}3$

Rechenschema für (1) (kann vereinfacht werden).

$$
\begin{array}{llll}
 & \lg\cos & \lg\sin & \\
h: & & n \lg 9{,}5687 & = 0{,}3704 \\
\delta: & 9{,}9861 & 9{,}3960 & \\
\varphi: & \underline{9{,}7930} & \underline{9{,}8942} & \\
 & 9{,}7791 & n \lg 9{,}2902 & = \underline{0{,}1951} \\
 & & \lg 0{,}1753 & = 9{,}2438 \\
 & & & \quad\ \underline{9{,}7791} \\
 & & \mathrm{arc}\, l \sin 9{,}4647 & = 16{,}95^0 \\
 & & & = 19^h\ 7{,}8^{min} \\
 & & \text{Längendiff.} & \quad -7{,}4 \\
 & & \text{Ztgl.} & \quad +4{,}6 \\
 & & \text{M. E. Z.} & = 19^h\ 5{,}0^{min}.
\end{array}
$$

Tatsächlich wurde die Zeit auf Sekunden, die Winkel auf 0,001^0 abgelesen, die sich daraus ergebenden Uhrverbesserungen sind -17^{sec}, -17, -19, -18. Für die Zwecke des Unterrichts genügt aber die angegebene und in der Rechnung beobachtete Genauigkeit vollständig und steht im Einklang mit der Schülkeschen Tafel. Statt den Stundenwinkel vom Mittag ab zurückzurechnen, wie das wohl hin und wieder geschieht, wurde von 18^h ab gerechnet und dementsprechend arc log sin statt arc log cos eingesetzt. Der Nachweis der Richtigkeit führt auf Betrachtungen über die Winkelfunktionen im vierten Quadranten. Es entspricht nicht nur den Weisungen der Lehrpläne, hier den Kosinussatz in seiner ursprünglichen Form anzuwenden, sondern erleichtert auch die Rechnung in den drei folgenden Fällen sehr wesentlich, weil ein großer Teil der Zahlen unter der hier zulässigen Annahme, daß die Deklination während der Beobachtungszeit unverändert geblieben sei, wiederkehrt Das trifft stets zu, wenn in möglichst rascher Folge beobachtet wird.

Es mag nicht unerwähnt bleiben, daß größere Unterschiede in der Uhrverbesserung in den beiden Kreislagen darauf hinweisen, daß die Fernrohrachse gegen die der Teilung verschoben ist, ein Fehler, der durch Umstellen der vier Halteschrauben des Fadenkreuzrahmens zu verbessern ist. Die Hildebrandschen Instrumente haben, wenn nichts anderes verlangt wird, fortlaufende Bezifferung, so daß bei Kreis links 0^0 am Nonius A bei vertikaler Stellung des Fernrohrs, in jeder anderen aber Zenitdistanzen abgelesen werden. Das hat die Umrechnung in Höhen zur Folge, an die man sich aber rasch gewöhnt. Wird der erwähnte Fehler vermutet, so ist er leicht festzustellen, indem man ein möglichst fernes und scharf einstellbares Ziel aufsucht und die Höhen in beiden Kreislagen vergleicht. Stimmen sie nicht überein, dann ist jene Verbesserung vorzunehmen, deren Betrag man von vornherein aus der Brennweite des Objektivs, der Ganghöhe der Schrauben, die das Fadenkreuz tragen, und der Fehlergröße berechnen kann.

Die Berechnung der Uhrverbesserung aus Sternhöhen gibt meist weil die Einstellung genauer erfolgen kann, genauere Zahlen. Die für diese Aufgabe nötigen Zahlen für die Sternzeit am mittleren Mittag des Beobachtungsortes und die Umrechnung von Sternzeit in mittlere Zeit entnimmt man dem nautischen Jahrbuch, erstere unter den oben erörterten Erwägungen.

In dem früher gegebenen Rechenschema ändert sich der Schluß in folgender Weise:

Beobachtet wurde in R. am 11. 8. 19. $8^h\,43{,}4^{min}$, α Bootis ($\alpha = 14^h\,11{,}6^{min}$; $\delta = +\,19{,}65^0$), $h = 29{,}58^0$.

Die Rechnung ergab	$t =$	$66{,}84^0$
	$t =$	$4^h\,27{,}4^{min}$
	$\alpha =$	14 11,6
	$\theta_1 =$	18 39,0
die Sternzeit am Rawitscher Mittag	$\theta_0 =$	9 54,1
verflossene Sternzeit	$\theta_1 - \theta_0 =$	8 44,9
zur Umwandlung in mittl. Zeit		– 1,4
M. E. Z.	$=$	8 43,5.

Von gleichem Werte, aber viel größerem Reize für die Schüler ist die umgekehrte Aufgabe, die Stellung eines nach Rektaszension und Deklination gegebenen Gestirns am Himmelsgewölbe nach Azimut und Höhe aufzusuchen, wenn ihnen gezeigt wird, wie genau die Ergebnisse mit der Rechnung übereinstimmen. Dazu gehört einige Übung und Sicherheit der Meridianlage. Als Objekte empfehlen sich die großen Planeten, von denen später gesprochen werden soll, vor allem aber Fixsterne erster Größe, weil diese Objekte auch schon für kleinere Instrumente am Tage, am besten in der Dämmerung, sichtbar sind. Für den Anfänger hat der Marsch des Sternchens durch das Fadenkreuz auf dem hellen Himmelsgrunde ganz besonderen Reiz; der künstlichen Gesichtsfeldbeleuchtung, die bei dem Hildebrandschen Universal durch ein der Horizontalachse gegenüber eingelassenes kleines Prisma erfolgt, bedarf es nicht.

Auch hier soll ein Rechenbeispiel den Vorgang erläutern. Die Aufgabe lautete: Wo steht am 11. 8. 28. $7^h\, 0{,}0^{min}$ M. E. Z. in Rawitsch α aquilae? ($\delta = +\,8{,}63^0$; $\alpha = 19^h\, 46{,}5^{min}$.)

Die Sternzeit am M.E. Mittag in R.	$\theta_0 =$	$10^h\, 29{,}6^{min}$
also um 7^h M. E. Z.	$\theta_1 =$	$17\;\; 30{,}8$
aus der Gleichung $\theta = \alpha + t$ also	$t = -$	$2\;\; 15{,}7$
	$= -$	$33{,}93^0$.

Der Stern ist also im vierten Quadranten zu suchen.

Rechenschema:

$$\begin{array}{llll}
 & \lg\sin & \lg\cos & \\
\varphi & 9{,}8942 & 9{,}7930 & \\
\delta & \underline{9{,}1762} & 9{,}9951 & \\
t & n\lg 9{,}0704 = \cdots & \underline{9{,}9189} \ldots & 0{,}1176 \\
 & & n\log 9{,}7070 = & \underline{0{,}5093} \\
 & & & \lg 0{,}6269 = 9{,}7972
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{Unberichtigt: } h &= 38{,}82^0 \\
\rho &= \underline{\;\;0{,}02} \\
\text{scheinbare Höhe } h_1 &= 38{,}84
\end{aligned}$$

und daraus nach dem Sinussatze $A = -\,45{,}11^0$.

Bei dem Aufsuchen des Sterns stand das Meridianzeichen, dessen Azimut $A_1 = 9{,}08^0$ ist, bei dem Teilstrich $60{,}02^0$ der Horizontalteilung, also das Azimut des Sterns bei $5{,}83^0$. Der Stern ging aus durch die Rechnungsungenauigkeit bedingten Gründen $0{,}1^{min}$ zu früh durch die Mitte des Fadenkreuzes.

Die Bestimmung der Zeitgleichung ist ein Problem der allgemeinen Theorie der Planetenbewegung, also eigentlich den Lehrzielen unserer höheren Lehranstalten kaum erreichbar. Es wird in einigen für die Hand des Schülers bestimmten Lehrbüchern, beispielsweise der astronomischen Erdkunde von O. Hartmann (Stuttgart, Fr. Grub), besprochen und sehr anschaulich dargestellt, daß aber die angenäherte Berechnung der Zeitgleichung eine sehr dankbare, weil vielseitige Aufgabe für die oberste Klassenstufe ist, scheint wenig bekannt zu sein.

Zum Verständnis ist eine möglichst klare Einführung des Primaners in das Zeitproblem überhaupt erwünscht. Er muß wissen, daß das für die Zeitmessung und Zählung notwendige Instrument, die Uhr, in ihrem Gange entweder durch ein Schwere- oder durch ein Elastizitätspendel geregelt, daß dieses Pendel durch die Schwere oder Elastizität der Triebfeder in andauernd gleichen Schwingungen erhalten wird und das Räderwerk durch die Zeiger diese Schwingungen zählt und dadurch einzelne Zeitabschnitte angibt. Die Zahl dieser Schwingungen ist $n \cdot 86400$ entweder in einem mittleren bürgerlichen Tage oder in einem Sterntage. Für das Sekundenpendel ist $n = 1$, für unsere gewöhnlichen Taschenuhren $n = 5$, so daß man Sekunden zweckmäßig so zählt, daß man dem Ticken der Uhr entsprechend die Zahlenreihe 0, 1, 2, 3, 4, 1, 1, 2, 3, 4, 2, 1, 2, 3, 4, 3 ... so ausspricht, daß die Anfänge der Sekunden betont werden. Die Stellung der Uhren nach mittlerer bürgerlicher Zeit hat in Deutschland erst 1810 begonnen, bis dahin wurden die Uhren nach wahrer Sonnenzeit gestellt. Es ist nicht unzweckmäßig, auf die große Unsicherheit und die Nachteile dieser letzteren Maßregel für das öffentliche Leben hinzuweisen; ebenso ist die Notwendigkeit der Einführung der M. E. Z. (1893) klarzulegen.

Verständlich wird die Zeitgleichungsaufgabe erst, wenn man neben der wahren Sonne, die mit S bezeichnet werden soll und die mit ungleichen Tagesschritten den Tierkreis durchläuft, zwei andere am Himmelsgewölbe hergehen läßt; die eine S_1 durchschreite den Tierkreis mit gleichen Tagesschritten von $0{,}9856^0$, die dritte S_2 den Äquator ebenfalls mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Diese dritte Sonne gibt den mittleren Ortsmittag an und bestimmt den Gang der Uhr. Hätten, was ja möglich ist, am Frühlingsanfang, der am 21. März für den betreffenden Ort um 0^h stattfinden soll, alle drei Sonnen im Frühlingspunkte gestanden, so ist leicht zu zeigen, daß die mittlere Ekliptiksonne S_1 am folgenden Tage eher durch den Meridian geht als S_2, also auch ehe eine richtig nach mittlerer Sonnenzeit gehende Uhr $0^h\,0^{min}\,0^{sec}$ aufweist, weil ihre Rektaszension nur $0{,}9856^0 \cos \epsilon$ ist. Also würde die Mittagsverbesserung gleich der in Zeit ausgedrückten Differenz der beiden Bogen, nämlich $0{,}9856^0 (\cos \epsilon - 1) = -19^{sec}$ sein. Die mittlere Ekliptiksonne erscheint also um 19^{sec} zu früh im Fadenkreuz des Durchgangsinstrumentes; die durch diese Beobachtung festgelegte wahre Ortszeit $0^h\,0^{min}\,0^{sec}$ geht durch Abzug von 19^{sec} in $23^h\,59^{min}\,41^{sec}$ mittlere Ortszeit über.

Dieser auf die Rektaszensionsdifferenz der beiden Sonnen S_1 und S_2 zurückzuführende Anteil der Zeitgleichung nimmt bis zu einem gewissen Tage zu, um am 21. Juni wieder den Wert 0 zu haben. Um diese Zeit schmiegt sich der Tierkreis dem Wendekreise so innig an, daß man den auf dem ersteren von der Sonne am folgenden Tage durchlaufenen Bogen als auf dem Wendekreise liegend ansehen kann; also geht die Sonne am 22. Juni um den Bogen $0{,}9856^0\left(\frac{1}{\cos\epsilon}-1\right)=+21^{\text{sec}}$ zu spät durch die Meridianebene.

Für den vollen Betrag der Zeitgleichung kommt aber nicht die mittlere Ekliptiksonne, sondern die wahre Sonne S in Betracht, die im Winter mit größeren, im Sommer mit kleineren Schritten den Tierkreis durchläuft. Der Beweis dafür, daß die Erde die Sonne nicht in gleichbleibendem Abstande umkreist, sondern ihre Bahn eine dem Kreise allerdings sehr nahekommende Ellipse ist, bedarf besonders sorgfältiger Erwägungen. Könnte man die früher erwähnte Aufnahmereihe der Sonne das ganze Jahr hindurch fortsetzen, so würde sich finden, daß die Sonnenbildchen im Winter größer sind und in größeren Abständen voneinander stehen als im Sommer. Das letztere ist in der Tat möglich nachzuweisen, das erstere gestattet die Kleinheit der Bilder nicht. Dagegen ist es möglich, mit einem Fernrohr als Objektiv der Kamera Sonnenbilder von solchem Umfange und so großer Umrißschärfe zu erhalten, daß der Unterschied der Durchmesser genau genug ermittelt werden kann. Vier solcher an den Vierteljahrsanfängen aufgenommenen Bilder, die zweckmäßig mit einer Millimeterteilung überdeckt werden, lassen die Größenverhältnisse so genau erkennen, daß mit einiger Annäherung die Formzahl[1]) der Erdbahnellipse aus ihnen entnommen werden kann. Aus brieflichen Mitteilungen entnehme ich, daß dieses Verfahren Anhänger gefunden hat.

Sicherer führt die Benutzung des Universals als Durchgangsinstrument oder die eines solchen zur Bestimmung des Sonnenradius. Das Schema einer solchen Beobachtung gestaltet sich folgendermaßen:

11. 7. 3. 23^{h} ⊙ $\delta = 23{,}05^0$ Durchgang. Kl. Durchgangsinstr. von Heyde, Dresden. (Mit gebrochenem Okular ca. 240 M.)

Zeiten der Fädenberührungen				Durchgangs- Zeit	Durchgangs- Dauer
1)	54^{min} $36{,}2^{\text{sec}}$	6)	57 59,8	56 13,0	2^{min} $17{,}6^{\text{sec}}$
2)	55 4,4	5)	57 22,0	56 13,2	2 17,6
3)	55 33,0	4)	56 53,8	56 13,4	2 16,8
				Mittel:	2 17,3 = $137{,}3^{\text{sec}}$.

Denkt man sich den dem Sonnendurchmesser entsprechenden Bogen des Deklinationskreises $23{,}04^0$ auf den Äquator versetzt, so würde diese Strecke nur 137,3 cos 23,04 Sekunden zum Durchlaufen der Meridianebene brauchen, und da 1^0 dazu 480^{sec} gebraucht, so hat der schein-

1) Numerische Exzentrizität.

bare Sonnenradius die Größe $r_2 = 0{,}263^0$ (N. J.: $r = 15' \, 45''$). Die entsprechende Beobachtung am 11. 1. 3. konnte, weil der Himmel ganz bedeckt war, nicht ausgeführt werden, dagegen wurde am 10. 12. 31. der Wert $r_1 = 0{,}272^0$ gefunden. Für die Reifeprüfung am Ostertermin 1911 wurde am hiesigen Gymnasium die Aufgabe gestellt: Am 1. Jan. 1910 erfolgte in Rawitsch der Durchgang der Sonne durch die Meridianebene so, daß die Berührungen des West- und Ostrandes der Sonne im Mittel um $23^h \, 53^{min} \, 55{,}0^{sec}$ und um $23^h \, 56^{min} \, 17{,}1^{sec}$ erfolgten; die Deklination der Sonne betrug $\delta_1 = -23^0{,}06$. Am 1. Juli 1910 erfolgten die Berührungen um $23^h \, 55^{min} \, 15{,}3^{sec}$ und $23^h \, 57^{min} \, 32{,}1^{sec}$ bei einer Deklination $\delta_2 = +23^0{,}17^0$. Wie groß ist die kleine Achse der Erdbahnellipse zu zeichnen, wenn die große die Länge $\alpha_1 = 100{,}00^{cm}$ hat?

Für die Anschaulichkeit der wahren Gestalt der Erdbahnellipse ist eine Zeichnung von Wert, die man erhält, wenn man mit einem Radius von 20,000 cm einen Kreis mit einer Reißfederöffnung von 0,003 cm beschreibt, wohl dem Äußersten, was sie zu leisten vermag. Eine der Erdbahn ähnliche Ellipse berührt mit den Enden der großen Achse diese Reißfederspur außen, mit denen der kleinen innen; die Brennpunkte liegen je 0,336 cm rechts und links vom Mittelpunkte. Es ist zweckmäßig, auf die rein zufällige angenäherte Übereinstimmung von $\sin 1^0 = 0{,}017$ und der numerischen Exzentrizität hinzuweisen.

Nach diesen Erörterungen wird auch der zweite Teil der Zeitgleichung einer Näherungsrechnung zugänglich, die die Kenntnis der in der Mechanik zu besprechenden Keplerschen Gesetze als bekannt annimmt.

Bezeichnet man die Längen in der Ekliptik der oben erwähnten Sonnen mit l und l_1, die zugehörigen Rektaszensionen mit α, α_1, α_2, die Stundenwinkel mit t, t_1, t_2, so ist offenbar die Zeitgleichung

$$\begin{aligned} \text{Zeitgl.:} \; &= t_2 - t \\ &= \alpha - \alpha_2 \\ &= (\alpha - l) + (l - \alpha_2), \end{aligned}$$

und da die beiden Sonnen S_1 und S_2 sich gleichförmig die eine auf dem Tierkreis, die zweite auf dem Äquator vom Frühlingspunkte aus bewegen sollen, so ist $\alpha_2 = l_1$, also schließlich

$$\text{Zeitgl.} = (\alpha - l) + (l - l_1).$$

Das erste Glied dieser Summe stellt für die wahre Sonne denselben Wert dar, der eben für die mittlere Ekliptiksonne des weiteren besprochen wurde. Er hat unter den gleichen Umständen den Anfangswert 0 für $l = 0^0$, wird dann negativ, um für $l = 90^0$ wieder 0 und später positiv zu werden. Zwischen $l = 0^0$ und $l = 90^0$ muß also ein Wert $y = \alpha - l$ liegen, in dem dieser Teil der Zeitgleichung seinen kleinsten Wert hat, für den also einem kleinen Zuwachs von l ein ebensogroßer von α entspricht. Nun ist aber $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} l \cos \epsilon$, worin ϵ die bereits besprochene Schiefe der Ekliptik bedeutet. Also ist

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log \operatorname{tg} l + \log \operatorname{tg} \epsilon.$$

und für das Minimum

$$\log \operatorname{tg} (\alpha + \Delta \alpha) = \log \operatorname{tg} (l + \Delta l) + \log \operatorname{tg} \epsilon,$$

also

$$\log \operatorname{tg} (\alpha + \Delta \alpha) - \log \operatorname{tg} \alpha = \log \operatorname{tg} (l + \Delta l) - \log \operatorname{tg} l.$$

Diese Gleichung sagt aber, daß α und l Komplemente sein müssen, also ist

$$\operatorname{tg} l = \frac{1}{\sqrt{\cos \epsilon}},$$

und der zugehörige Funktionswert ist $y = -9{,}8^{\text{min}}$.

Zur näherungsweisen Berechnung des zweiten Teiles der Zeitgleichung $(l - \alpha_2)$ ist die oben erwähnte Darstellung der Erdbahnellipse in ihrer wahren Form heranzuziehen. In der Fig. 5 sei A das am 11. 1. 3. 4^h von der Erde durchlaufene Perihel, E die wahre, E_1 die mittlere Ekliptikerde. Der Flächensatz sagt, daß die Fläche $EF_1A = E_1OA$ ist. Der kleine Bogen EE_1 kann nahezu als Strecke angesehen werden, also ist E_1F_1 nahezu parallel EO, und zieht man noch zu E_1O die Parallele durch E, so schneidet sie die Hauptachse aus den angegebenen Gründen so nahe bei F_2, daß sie durch EF_2 ersetzt werden kann. Die mittlere Erde E_1 sähe die mittlere Sonne bei O, die wahre Erde E erwartet sie also in F_2, während sie in Wirklichkeit in F_1 steht. Bezeichnet man die von A aus gerechneten Längen mit l' und l_1', so ist

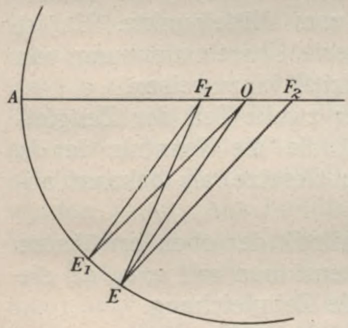

Fig. 5.

$$l' - l_1' = F_1EF_2.$$

Dieser in Zeitmaß auszudrückende Winkel wächst mit zunehmendem l_1 und zwar wie der Sinus dieses Winkels bis $l_1' = 90^0$, um dann wieder abzunehmen. Für $l_1' = 90^0$ ist nahezu $\sin(l' - l_1') = 2 \cdot 0{,}0168$, worin die Zahl die numerische Exzentrizität bedeutet. Also ist für diesen Wert

$$\begin{aligned} l' - l_1' &= \frac{0{,}0336}{0{,}0175} \\ &= 1{,}92^0 \\ &= 7{,}7^{\text{min}}. \end{aligned}$$

Allgemein kann näherungsweise gesetzt werden

$$l' - l_1' = 1{,}92^0 \sin l_1'.$$

Nun werden aber die Längen nicht vom Perihel, sondern vom Frühlingspunkte aus gezählt. 1911 erfolgte der Durchgang durch diesen Punkt, wie oben festgestellt ist, nach M. E. Z.:

$$\begin{array}{ll} \text{Frühlingsanf.} & 11.\ 3.\ 21.\ 7^h \\ \text{Periheldurchg.} & 11.\ 1.\ \ 3.\ 4^h \\ \hline & 2^{mon}\ 18^d\ 3^h \\ & -\quad 1\ \ 0 \\ \hline & 2^{mon}\ 17^d\ 3^h \\ & = 77{,}1^d. \end{array}$$

Also ist für den Frühlingsanfang

$$\begin{aligned} l' - l_1' &= 1{,}92^0 \sin (77{,}1 \cdot 0{,}9856^0) \\ &= 1{,}92^0 \sin 75{,}99^0 \\ &= 1{,}86^0 \\ &= 7{,}4^{min} \end{aligned}$$

und für einen beliebigen Zeitpunkt des Jahres

$$l' - l_1' = l - l_1 + 1{,}86^0 \quad \text{und}$$
$$\sin l_1' = \sin (l_1 + 75{,}99^0),$$

also endlich die Länge der Sonne in der Ekliptik

$$l = l_1 + 1{,}92^0 \sin (l_1 + 75{,}99^0) - 1{,}86^0,$$

und die Zeitgleichung

$$\text{Zeitgl.} = (\alpha - l) + 1{,}92^0 \sin (l_1 + 75{,}99^0)$$

mit Rücksicht darauf, daß sie am Anfangspunkt der Zählung schon den Wert $+ 1{,}86^0$ hatte.

Als Rechenbeispiel wähle ich die Bestimmung der Deklination, die jetzt auch möglich ist, und der Zeitgleichung für die schon oben ausgeführte Zeitaufnahme vom 11. 8. 14. 19^h.

$$\begin{array}{ll} \text{Zeit der Aufnahme:} & 11.\ 8.\ \ 14.\ 19^h \\ \text{Frühlingsanfang:} & 11.\ 3.\ \ 21.\ \ 7^h \\ \hline & 4^{mon}\ 23^d\ 12^h \\ & +\quad 3 \\ \hline & 4\quad 26\quad 12 \\ & = 146{,}50^d. \end{array}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= 146{,}50 \cdot 0{,}9856^0 \\ &= 144{,}38^0 \\ l &= 144{,}38^0 + 1{,}92^0 \sin 220{,}37^0 - 1{,}86^0 \\ &= 141{,}28^0. \end{aligned}$$

Aus $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} l \cos \epsilon$: $\quad \alpha = 143{,}67^0$

$$= 9^h\ 34{,}7^{min}$$

übereinstimmend mit dem durch Interpolation aus dem N. J. gefundenen Werte, ebenso aus $\sin \delta = \sin l \sin \epsilon$, $\delta = 14{,}41^0$ und die Zeitgleichung

$$\begin{aligned} \text{Ztgl.} &= 143{,}67^0 - 141{,}28^0 - 1{,}24^0 \\ &= 1{,}15^0 \\ &= 4{,}6^{\text{min}} \quad \text{wie oben.} \end{aligned}$$

Nunmehr kann auch die Sternzeit am mittleren Mittage eines beliebigen Tages für jeden beliebigen Ort berechnet werden; diese Größe ist identisch mit der Rektaszension der mittleren Sonne S_2. Nach den obigen Bestimmungen ist die Rektaszension der mittleren Sonne am Frühlingsanfang $23^h\ 52{,}6^{\text{min}}$. Die Sternzeit wächst täglich um den in Zeit umzurechnenden Betrag von $0{,}9856^0$. Soll also für das Beispiel der Zeitbestimmung aus Sternhöhen die Sternzeit am mittleren und davon ausgehend am M. E. Mittag berechnet werden, so ist folgendes Rechenschema zugrunde zu legen:

$$\begin{array}{ll} \text{Mittl. Mittag der Beob.:} & 11.\ 8.\ 19.\ \ 0^h \\ \text{Frühlingsanfang:} & \underline{11.\ 3.\ 21.\ \ 7^h} \\ & \quad\ \ 4\ \ 27\ \ 17 \\ & = 150{,}7^d. \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} & & 150{,}7 \cdot 0{,}9856 \\ & & = 148{,}53^0 \\ & & = \quad 9^h\ 54{,}1^{\text{min}} \\ & & \underline{+ \quad 23\ \ 52{,}6} \\ \text{Sternz. am mittl. Rw. Mittag:} & & \quad\ 9^h\ 46{,}7^{\text{min}} \\ & & \quad + \ \ 7{,}4 \\ \text{also Sternz. am M. E. Mittag:} & & \theta_0 = 9^h\ 54{,}1^{\text{min}} \end{array}$$

übereinstimmend mit dem aus dem N. J. entnommenen Werte der früheren Rechnung.

Die Bestimmung der Zeit mit Hilfe der Sonnenuhren hat nur noch geschichtliche Bedeutung. Es wäre aber unrecht, im Unterricht an ihr vorübergehen zu wollen, und in der Tat bezieht sich eine Anzahl von Reifeprüfungsaufgaben auf die Darstellung des Zifferblattes einer Sonnenuhr für gegebene Breite und die Vertikal- oder Horizontalebene. Die Aufgabe wird auch in manchen Lehrbüchern sehr geschickt eingeführt und ist für die darstellende Geometrie ebenso von Bedeutung wie die der gnomonischen Kurve, auf die neuerdings W. Grosse-Bremen in Poskes Zeitschrift f. d. physikalischen und chemischen Unterricht (1911, S. 267) hingewiesen hat.

Mit größeren Schwierigkeiten als die Breitenbestimmung ist die der Länge des Beobachtungsortes, namentlich für kleinere an Nebenbahnen liegende Städte verbunden.

Zunächst wird man sich damit begnügen müssen, die Länge der Beobachtungsstätte aus den Meßtischblättern mit möglichster Schärfe zu entnehmen, eine Aufgabe, die namentlich für die Schülerübungen sehr anregend ist, wenn man die Primaner selbständig arbeiten läßt. Sie ist auch besonders berufen, über die Genauigkeit von Längen- und Breitenangaben klare Vorstellungen zu schaffen. So sagt beispielsweise die Angabe $\varphi = 51{,}617^0$, $\lambda = 1^h\,7^{min}\,26^{sec}$, daß der hiesige Beobachtungsort in einer nahezu rechteckigen Fläche von 111 m nordsüdlicher und 187 m westöstlicher Ausdehnung liegt. Schreitet man um diese Längen nördlich oder westlich weiter, so ändert sich die Breite um $0{,}001^0$, die Länge um 1^{sec}.

Von den Methoden der Längenbestimmung kommen für die Zwecke des Unterrichts nur zwei ernstlich in Betracht, die sich auf die telegraphische Weitergabe eines Zeitsignals gründende und die mittels der Verfinsterungen der Jupitermonde. An den von Berlin ausstrahlenden Hauptbahnstrecken kann nach meinen vielfachen Erfahrungen vom Bahnhofstelegraphenamt, aber auch nur von diesem, das Zeitsignal zuverlässig bezogen werden, in geringerem Maße ist das bei Nebenstrecken der Fall. Dagegen haben die mit den Postämtern verbundenen Telegraphenämter eine Verspätung, die 2 Minuten erreichen kann, aufzuweisen, so daß diese Zeitsignale nicht zu gebrauchen sind. Den Schwierigkeiten kommt neuerdings die Sternwarte zu Hamburg entgegen, die ein nach meinen Erfahrungen zuverlässiges Zeitsignal telephonisch übermittelt. Das Signal, unter Gruppe 4 Nr. 10000 an das Fernsprechnetz von Hamburg angeschlossen, ist automatisch, und nach einer freundlichen Mitteilung des Direktors, Herrn Schorr, soll es stets die M. E. Zeit innerhalb $0{,}5^{sec}$ genau angeben, ist aber meist viel genauer. Näheres ist durch eine Anweisung, die die Telegraphenämter ausgeben, zu erfahren.

Für die Längenbestimmung unter Mitwirkung der Schüler empfiehlt es sich, das Zeitsignal mit der Stechuhr, deren Gang man prüfen und berichtigen muß, aufzunehmen und möglichst rasch im Anschluß an dieses Signal Sonnen- oder besser Sternhöhen zu messen. Der Unterschied zwischer der Uhrzeit und der aus der Beobachtung errechneten ist der Längenunterschied zwischen dem Beobachtungsort und $15^0{,}000$ östlich von Greenwich. Nach meinen Erfahrungen ist die Längenbestimmung auf diesem Wege auf etwa eine Zeitsekunde genau, wenn auf die Beobachtungen die größte Sorgfalt verwendet wird.

Von größerem Gewicht für den Unterricht, aber viel ungenauer ist die Längenbestimmung aus den Verfinsterungen der Jupitermonde. Die Zeit der Ein- und Austritte gab das nautische Jahrbuch bis zu diesem Jahre in mittlerer Greenw. Zeit; leider wird die Ephemeride von 1912 ab nicht mehr aufgenommen werden, die notwendigen Zeiten sind also einem anderen astronomischen Jahrbuche zu entnehmen.

Die Beobachtung des Jupiters und seiner Monde gehört wohl zum regelmäßigen Bestande der astronomischen Abende jeder Schule, aber nicht immer wird ihre Zeit soweit ausgedehnt, daß auch von ungeübten Schülern Veränderungen in der gegenseitigen Stellung der Trabanten wahrgenommen werden können. Um auch diese zu zeigen, empfiehlt es sich, die am Anfang eines Beobachtungsabends vorgenommene Betrachtung am Ende desselben, nach etwa $1\frac{1}{2}$—2 Stunden, zu wiederholen; die genaue Zeichnung der ersten Stellung oder das Verhältnis der Durchgangszeit-Differenzen durch das Fadenkreuz des Okulars zeigen dann meist schon beträchtliche Änderungen. Die Erörterungen über die Richtung des Jupiterschattens, die Frage, ob Eintritt oder Austritt oder keiner von beiden beobachtet werden kann, und der Bewegungsrichtung des betreffenden Mondes sind auch ohne näheres Eingehen auf die rechnerischen Einzelheiten des Problems schon für die Entwicklung der Raumvorstellungen von großem Wert; daß bei dieser Gelegenheit auch der Methode der Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit von Olaf Römer und ihrer oft recht ungeschickten Darstellung in manchen Lehrbüchern der Physik gedacht wird, ist selbstverständlich. Läßt man vom Schüler vor der Beobachtung die Zeit zwischen der äußeren und inneren Berührung des der Verfinsterung entgegengehenden Mondes mit dem Schattenkegel des Jupiters näherungsweise berechnen, so zeigt sich, daß sie viel kleiner ist als beim Erdmond, immer aber noch groß genug, um auch einer größeren Zahl von Beobachtern das ganz allmähliche Erlöschen der Lichtstärke des Mondes in einem Fernrohr von etwa fünfzigfacher Vergrößerung deutlich zu zeigen. Der Zeitpunkt des letzten Verglimmens — manchmal erfolgen Unterbrechungen in der Regelmäßigkeit des Vorgangs — wird mit der Stechuhr gleich dem Zeitsignal aufgenommen und sofort zu einer Zeitbestimmung aus Sternhöhen geschritten. Dadurch ist eine weitere Beobachtungsuhr ausgeschaltet und Anfang oder Ende der Verfinsterung, deren mittlere Greenwicher Zeit man kennt, unmittelbar mit der Bestimmung der mittleren Ortszeit verknüpft.

Es ist klar, daß eine solche Längenbestimmung von vornherein ungenauer ausfallen muß als die mit Hilfe des Zeitsignals, hängt sie doch wesentlich von der sehr unsicheren Beobachtung des Verlöschens einer Lichtquelle ab, die mit einem großen Objektiv noch lange gesehen werden kann, während ein kleineres Fernrohr das lichtschwache Objekt nicht mehr zu zeigen vermag. Aber auch die Berechnung der Zeiten des N. J., die dem von der Britischen Admiralität herausgegebenen Werke „The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris etc." entnommen wird, ist nicht genügend sicher, sonst wäre es unmöglich, daß man den dritten und vierten Trabanten oft noch sieht, wenn er bereits längst verfinstert sein sollte. Aber um der begleitenden Nebenumstände willen glaube ich trotzdem diese Art der Längenbestimmung empfehlen zu dürfen. Dagegen sind aus denselben Gründen die Methode der Sternbedeckungen und der Monddistanzen für den Unterricht nicht zu bewerten, weil die Nebenrechnungen dem Schüler entweder unverständlich bleiben oder mehr Zeit beanspruchen, als ihnen ihrer Bedeutung nach gebührt.

Die Einführung des Schülers in die Lehre von den scheinbaren und wirklichen Bewegungen des Mondes und der Planeten ist schwierig und stellt für die letzteren, wenn sie der obersten Klassenstufe allein vorbehalten bleibt, fast unerfüllbare Bedingungen, weil jede Erfahrung fehlt. Von den mechanischen Grundlagen, die in neuerer Zeit namentlich in Poskes Zeitschrift vielfach recht gründlich behandelt worden sind, soll hier überhaupt ganz abgesehen werden, weil diese Dinge wohl überall in angemessenem Umfange im physikalischen Unterricht der Oberstufe erörtert werden.

Um die Bewegung des Mondes erfassen zu lehren, ist es durchaus notwendig, auf diesen Himmelskörper nicht nur bei den doch immerhin seltenen gemeinsamen Beobachtungsabenden hinzuweisen, seine Gestalt und Stellung zur Sonne zu erklären, sondern vor allem die täglichen Änderungen so verfolgen zu lassen und durch wiederholte kurze Fragen im Unterricht die Erfahrungen richtigzustellen und zusammenzutragen, daß möglichst nach einem Umlaufe aus den Wahrnehmungen der Schüler, die durch die Ergebnisse der photographischen Mitbeobachtung unterstützt werden, ein einigermaßen richtiges Bild der Vorgänge entsteht. Die Vormittagsstunden können bald nach dem Vollmond, namentlich im Winterhalbjahre durch Hinweis auf die sichtbare Mondsichel und sofortiges Verflechten des Gesehenen in den Verlauf des Unterrichts besonders fruchtbar werden.

Inwiefern die Kamera dienstbar gemacht werden kann, zeigt die Fig. 6. Die vier Reihen von je vier Mondbildchen sind im Meridian am 8., 9., 10. und 11. Mai 1911 um 12^{30}, 12^{45}, 1^{0}, 1^{15} Sternzeit aufgenommen, Äquator, Ekliptik und Mondbahn sind nach der ersten Erörterung der Platte eingetragen. Auch ohne diese Hilfen sieht der Schüler ohne weiteres, daß der Mond eine der Sonne ähnliche Bewegung am Fixsternhimmel hat, nur daß seine Tagesschritte viel länger sind. Ihre Größe läßt sich aus den nahezu rechtwinkligen sphärischen Dreiecken mit Rücksicht darauf schätzen, daß man in der 45 Sternzeitminuten entsprechenden größeren Kathete einen Maßstab für die anderen Seiten hat. Die anfängliche Vermutung, daß auch der Mond in der Ekliptik fortschreite, wird sofort dadurch widerlegt, daß wenn man die Sonnenbahn der am Frühlingsanfang erhaltenen Aufnahme Schicht auf Schicht mit der Mondbahn zur Deckung bringt, die Kanten der Platten nicht parallel sind, was doch der Fall sein müßte, wenn beide Bewegungen in der Ekliptik erfolgten; sie bilden vielmehr einen leicht meßbaren Winkel von rund 5^{0}. Hat man vor Beginn der ersten Aufnahme eine Mondhöhe genommen, so kann unter der zulässigen Voraussetzung, daß sich bis dahin die Deklination des Mondes nur unerheblich geändert hat, der Äquator eingetragen werden, der beiläufig bei genauer Einstellung die Höhe der Platte halbiert; aus der verzeichneten Zeit der Aufnahme ergibt sich die Lage der Ekliptik, die den Äquator unter $23{,}5^{0}$ schneidet, und nun kann aus der einen Platte ge-

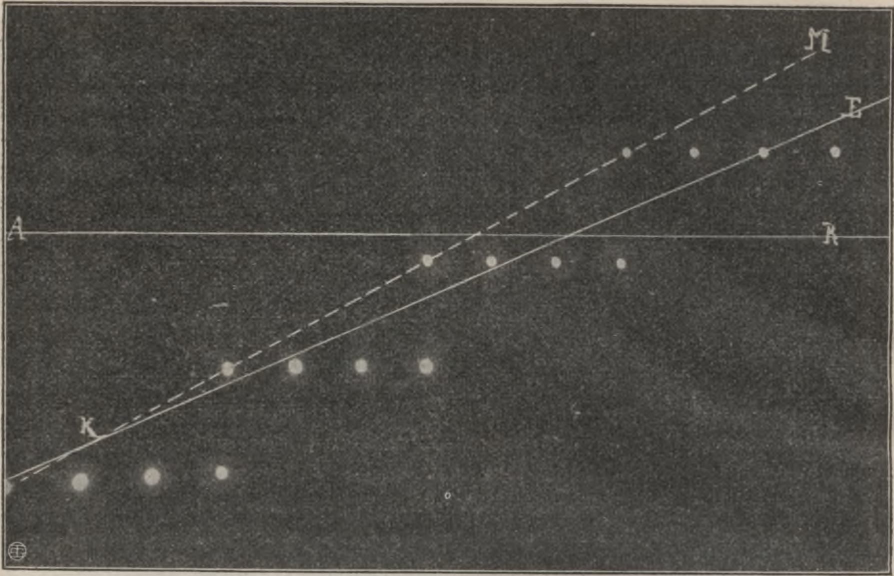

Fig. 6.

folgert werden, daß die Ebene der Mondbahn nicht mit der der Erde zusammenfällt, sondern mit ihr den meßbaren Winkel *MKE* bildet *K* ist dabei der absteigende Knoten. Gewiß sind diese Ergebnisse fehlerhaft, denn die Winkel sind nicht auf den Erdmittelpunkt zurückgeführt und nur ungenau berechnet; für die Zwecke des Unterrichts dürfte aber gerade die Anschaulichkeit der Verhältnisse von nicht zu unterschätzender Bedeutung sein. Das Zunehmen der Mondsichel zeigt Fig. 7 noch deutlicher.

Erst wenn auf diese Weise eine Unterlage für Berechnungen geschaffen ist, kann dazu geschritten werden, unter gewissen Einschränkungen der Bewegung des Mondes und dem Wechsel seiner Lichtgestalten näherzutreten. Hier wie bei den Planeten wird man sich damit begnügen müssen, sich den Mond als in der Ekliptik mit der mittleren Geschwindigkeit $13{,}176 \frac{o}{d}$ fortschreitend zu denken, siderische und synodische Umlaufszeit sind dann leicht verständlich zu machende Begriffe; aber auch der Umstand, daß nicht bei jeder Konjunktion eine Sonnenfinsternis und bei jeder Opposition eine Mondfinsternis eintreten kann, muß aus dem Winkel der Bahnebenen und der Größe der beiden Körper gefolgert werden können. Das Wichtigste für die Rechnung und Darstellung sind nicht die vielfach übermäßig bevorzugten Finsternisse, sondern die Beantwortung der einfachen Frage: an welcher Stelle des Himmelsgewölbes steht ungefähr zu einem bestimmten Zeitpunkte der Mond, wenn die Zeit eines vorangehenden Neumondes gegeben ist, welchen Abstand von der Sonne hat er, welche Phase zeigt er also,

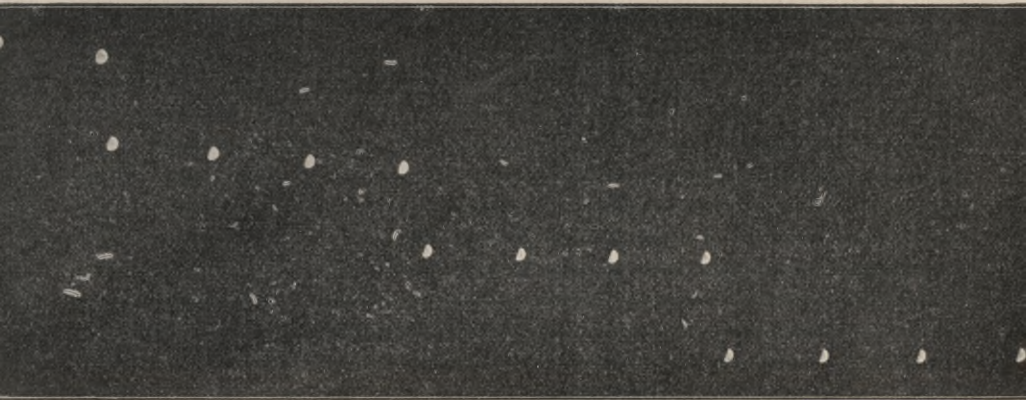

Fig. 7.

und wohin ist seine beleuchtete Seite gerichtet. Wie wenig bekannt diese einfachen Dinge sind, beweist die Verlegenheit, in die auch schlagfertige Fachleute durch einfache Fragen etwa von der Art: Welche Höhe hat der Vollmond am 21. Dezember um Mitternacht, Wo und wann geht erstes Viertel am 21. Juni (März) auf, gesetzt werden.

Da es sich hier um Näherungsrechnungen handelt, so kann für den Zeitpunkt des Neumondes die mittlere Länge der Sonne in der Ekliptik, die früher mit l_1 bezeichnet wurde, in der angegebenen Weise berechnet werden, dann ist die Länge des Mondes beispielsweise 5,3 Tage später $(l_1 + 5{,}3 \cdot 13{,}2)^0$. Damit sind auch die Deklination und Rektaszension durch Benutzung der Funktionentabelle, nicht der Logarithmen, bestimmbar, der Abstand von der Sonne gibt eine einfache Bewegungsgleichung, damit auch den Neigungswinkel für die Darstellung der Mondphase.

Trotzdem derartige das räumliche Anschauungsvermögen stark beanspruchende Aufgaben vielfach empfohlen werden und auch in die Sammlung des gerade um diese Bestrebungen sehr verdienten Herrn Schülke-Tilsit aufgenommen worden sind, scheinen sie die ihnen gebührende Wertschätzung noch nicht gefunden zu haben. Auch für ihre Verwendung ist selbstverständliche Pflicht des Lehrers nach der Durchführung der Aufgabe das Ergebnis nachzuprüfen. Wer sich daran gewöhnt, wird über die geringe Abweichung von der Wirklichkeit erstaunt sein. Unsere Schüler haben ein Recht auf solche Aufgaben, deren Lösung ihnen, wenn auch in sehr bescheidenen Grenzen, die voraussagende Kraft der Mathematik offenbart. Es ist gewiß sehr schön, wenn ein Primaner aus irgendwelchen gegebenen Dreiecksstücken einen unteren Höhenabschnitt oder den Radius eines Ankreises mit mehr als astronomischer Genauigkeit berechnen lernt, aber es gibt auch unter ihnen viele kritische Gemüter, die der stillen Vermutung Raum geben, daß eine einfache Messung der betreffenden Strecke alle Mühen erspart hätte. Alle gegen diese Näherungsrechnungen gemachten Einwände treffen wohl kaum den Kern der Sache.

Für die Finsternisse, die als bemerkenswerte Einzelerscheinungen im Mittelpunkte des Laieninteresses stehen, und die merkwürdigerweise auch dann dem Schüler gelegentlich erklärt werden, wenn sonst der ganzen Himmelskunde auch nicht eine Spur von Teilnahme zugewendet wird, dürfte eine theoretische Behandlung unter Zuhilfenahme strenger und deshalb für den Primaner unbeweisbarer Formeln weit über das Ziel hinausschießen; die Forderung wird aber vereinzelt gestellt. Hier scheint eine Einschränkung dahin geboten zu sein, daß man im voraus die Koordinaten des Sonnen- und Mondmittelpunktes nebst den Halbmessern von Stunde zu Stunde aus dem N. J. in Koordinatenpapier eintragen und durch ein Näherungsverfahren den Verlauf der Finsternis durch die Schüler aufsuchen läßt. Derartige Darstellungen finden, wenn sie auf das künftige Ereignis vorbereiten, stets einen großen Kreis von teilnehmenden Beschauern.

Für die Einführung in die Planetenbewegung ist die Venus wohl das geeignetste Objekt, weil aus ihren rasch wechselnden Abständen von der Sonne, der im Fernrohr zu zeigenden Größenänderung, ihren Phasen und der Leichtigkeit, sie schon vor Sonnenuntergang aufzufinden, zwingende Schlüsse ohne Schwierigkeiten zu ziehen sind. Die Kamera versagt freilich hier als Mitbeobachterin, weil die Dunkelheit meist nicht groß genug ist, um ohne Gefahr der Schwärzung die Platte längere Zeit auszusetzen. Zudem sind Aufnahmen in der Nähe des Horizontes oft sehr verschleiert, in beiden Fällen erhält man auch keine klaren Fixsternspuren, was zum Auffinden des Planetenorts in einer Sternkarte notwendig ist. Dagegen ist sie sehr wertvoll für die Verfolgung der Bahn der äußeren Planeten. Verfährt man nach dem Grundsatze, in angemessenen Zeitabständen ein bis zwei Monate lang stets zur selben Sternzeit die in der bekannten Weise aufzustellende Kamera auf dieselbe Stelle des Himmels zu richten und je eine Viertelstunde mit gewissen die Nummer der Aufnahme und damit ihr Datum bezeichnenden Unterbrechungen zu belichten, so zeichnet der an der betreffenden Stelle des Himmelsgewölbes stehende Planet meist recht gut sichtbar den in der Zwischenzeit durchlaufenen Teil seiner scheinbaren Bahn als Verbindung der Anfangspunkte seiner Bogen auf der Platte ein, die Fixsterne (auch Nebel) dagegen je nach der Genauigkeit der Aufstellung sich deckende Bogen. Es ist dann kaum noch nötig, die Eintragung in eine Sternkarte mit Hilfe der Platte zu vollziehen, diese selbst ist urkundliches Material.

Für die Berechnung der Länge eines Planeten in der Ekliptik unter den erwähnten Einschränkungen und damit auch seines Azimuts und seiner Höhe für einen gegebenen Zeitpunkt enthält der weitverbreitete Kunzesche Kalender auf Seite 3 die von Schülke gegebenen heliozentrischen Längen und die mittlere Tagesgeschwindigkeit für die großen

Planeten. Auch hier soll die nur angedeutete Entwickelung der Einzelrechnungen an ein Beispiel angeknüpft werden.

Es sei die Frage zu beantworten: An welcher Stelle des Himmelsgewölbes sieht man in Rawitsch den Jupiter am 11. 9. 1. 6^h M. E. Z. Die Tageszeit war absichtlich gewählt, um zu zeigen, daß man den Planeten auch schon sehen könne, ehe die Sonne untergegangen ist. Das nächste Ziel ist, die Länge des Planeten in der Ekliptik zu finden. Die Stellung der Planeten Erde und Jupiter wird in der Figur entsprechend ihren heliozentrischen Längen am Jahresanfang eingezeichnet ($\lambda_e = 99{,}0^0$, $\lambda_i = 212{,}0^0$). Vom 11. 1. 0. 0^h bis zum 11. 9. 1. 6^h verfließen 244,3 Tage, also ergibt sich aus der Bewegungsgleichung für den gewählten Zeitpunkt die heliozentrische Längendifferenz:

$$E_1 S . J_1 = (99{,}0 - 212{,}0 + [0{,}9856 - 0{,}0831]\, 244{,}3)^0$$
$$= 107{,}5^0.$$

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß diese Gleichung auch dazu dient, die Zeit zu berechnen, zu der der Planet von der Erde aus unter einem gegebenen Winkelabstand von der Sonne erscheint. Unter Zuhilfenahme der der Logarithmentafel zu entlehnenden mittleren Entfernungen der beiden Planeten von der Sonne erhält man mittels des Tangentensatzes:

$$SE_1J_1 = 62{,}6^0.$$

Um diesen Winkel ist, wie die Zeichnung lehrt, die Länge des Jupiter in der Ekliptik größer als die der Sonne. Ist nun die Lage dieses Kreises am Himmelsgewölbe dem Schüler geläufig, so ist er jetzt schon imstande, die erwartete Stellung des Planeten ungefähr anzugeben. Als rohe Näherung würde die Länge der Sonne als Supplement des Produkts aus der mittleren Geschwindigkeit und der bis zum Herbstesanfang verfließenden Zeit erscheinen, die oben durchgeführte genauere Berechnung gibt $l = 158{,}18^0$, also ist die Länge des Jupiter $l_i = 220{,}8^0$. Diesem Werte entsprechen $\delta = -15{,}0^0$, $\alpha = 14^h 33{,}6^{min}$ für die Deklination und Rektaszension. Das N. J. gibt die Werte $\delta = -13{,}9^0$, $\alpha = 14^h 30{,}0^{min}$, aus deren Vergleichung mit den durch die Näherungsrechnung gefundenen ein Urteil über den Wert derartiger Aufgaben gewonnen werden kann. Es ist mir in den meisten Fällen gelungen, das Objekt innerhalb des $2{,}7^0$ im Durchmesser fassenden Gesichtsfeldes des richtig nach Azimut und Höhe aufgestellten Hildebrandschen Universals zu finden. Der Gewinn dieser Berechnungen wird weniger durch ihre Genauigkeit als durch ihre Vielseitigkeit und die für das Verständnis der Einzelergebnisse notwendige Klarheit des Erfassens der Grundvorstellungen bedingt.

Reifeprüfungsaufgaben aus dem Gebiete können ohne Zwang so gestaltet werden, daß sie einerseits den Ansprüchen der geltenden (preußischen) Prüfungsordnung genügen, andererseits den Forderungen derjenigen Fachmänner entsprechen dürften, die die vier jetzt gebräuchlichen Einzelaufgaben einheitlich zu einem mathematischen Aufsatze umgestalten möchten, der imstande sein soll, die mathematische Durchbildung ebenso sicher nachzuweisen wie jene. Unter meinen eigenen Aufgabenvorschlägen findet sich auch seit geraumer Zeit fast stets ein solches Thema, es ist indessen erst ein einziges Mal gewählt worden. In der Tat liegt die Befürchtung nahe, daß eine unrichtige Lösung der ersten Teilaufgabe die nachfolgenden Berechnungen und Darstellungen so ungünstig beeinflussen könne, daß darin ein Nachteil derartiger Forderungen für die Reifeprüflinge zu erkennen ist. Wenn beispielsweise für eine gegebene Zeit die Stellung der Venus am Himmelsgewölbe nach Azimut und Höhe berechnet und ihre Phase dargestellt werden soll, so zerfällt die Aufgabe ohne weiteres in eine durch planimetrische Zeichnung zu unterstüzende algebraische für das Aufsuchen der heliozentrischen Längendifferenz und eine zweite aus der ebenen Trigonometrie für die Berechnung der Längendifferenz in der Ekliptik mit den Unteraufgaben, die Deklination und Rektaszension aufzusuchen. Daran reiht sich die Feststellung der Höhe und des Azimuts aus dem nautischen Dreieck, die letzte Teilaufgabe gehört der darstellenden Geometrie zu. Es versteht sich von selbst, daß die Lösung aller gefährdet oder unmöglich ist, wenn der Prüfling die erste Aufgabe nicht bewältigt oder Fehler begeht. Es gibt indessen Aufgabengruppen in großer Zahl, bei denen diese Gefahr geringer ist, außerdem kann sie auf anderem Wege ganz beseitigt werden, wenn unabhängig vom Ergebnis der ersten Berechnung die für die folgenden nötigen Größen gegeben werden.

Dabei darf nie aus dem Auge gelassen werden, daß viele von diesen und auch von den scheinbar unwesentlichen Nebenaufgaben dem Primaner manchmal ganz erhebliche Schwierigkeiten machen, weil neben der leichten algebraischen oder trigonometrischen Rechnung eine Kette räumlicher Vorstellungen herläuft, an die er nur schwer zu gewöhnen ist. So habe ich stets die Erfahrung gemacht, daß die einfache Interpolation der Sonnenabweichung auf Seite 20 der Tafel von Schülke selbst Seminarkandidaten nicht ohne weiteres verständlich ist und gründliche Durcharbeitung erfordert. Kommt dann dem Betreffenden eine Tafel in die Hand, die nicht auf den mittleren Greenwicher Mittag von 1900 bezogen ist, dann ist die Verblüffung groß.

Wie weit an einzelnen Anstalten in der Behandlung des bisher besprochenen Gebietes gegangen wird, entzieht sich, wie schon erwähnt, meiner Beurteilung, doch kann als sicher angesehen werden, daß, wo überhaupt Himmelskunde getrieben wird, die scheinbare Bewegung der Sonne im Mittelpunkte steht. Dafür spricht auch der Umstand, daß die Mehrzahl der Reifeprüfungsaufgaben diesem Gebiete entstammt, ja daß vielfach die Refraktion für die Auf- und Untergangszeiten und die Azimute in Betracht gezogen und Dämmerungslängen für einzelne Tage des Jahres gefordert werden. Vielfach werden für die gnomonische

Sonnenbeobachtung einfache, aber zum Nachdenken anregende und für Aufgaben aus der darstellenden Geometrie fruchtbare Einrichtungen getroffen. So teilt mir Herr M. Koppe-Berlin, dessen Verdienste um die Förderung der Himmelskunde allgemein bekannt sind, mit, daß auf dem Beobachtungssöller des Luisenstädtischen Realgymnasiums durch seine viele Jahre fortgesetzten Eintragungen sogar eine Darstellung der Zeitgleichungskurve (vgl. Martus, Astr. Erdk. S. 97, 98; auch Hartmann, Astr. Erdk. S. 24) entstanden sei, die man beiläufig auch sehr schön auf die photographische Platte bannen kann, wenn man nach einer gutgehenden Uhr, am besten täglich, am mittleren Ortsmittag oder ohne erheblichen Fehler auch am M. E. Mittag in der bekannten Weise eine Sonnenaufnahme macht. Die Bilder decken sich teilweise, den Aufnahmetag kann man aus den zahlreichen, durch die Witterungsungunst entstehenden Lücken leicht abzählen, wenn nur richtig vermerkt wird, an welchen Tagen eine Aufnahme gemacht wurde. Die Arbeit gelingt auch mit einer größeren, gut geschwärzten Lochkamera, kann also auch Schülern mit einigem Geschick überlassen werden.

Mit Rücksicht auf die zur Verfügung stehende Zeit und die Fülle von neuen Vorstellungen und Erkenntnissen, die auf dem bisher behandelten Gebiete vom Primaner aufzunehmen oder doch zu erneuern und erweitern sind, dürfte das Verlangen, über dies Ziel hinauszugehen, bedenklich erscheinen, ja es wird sogar oft nicht möglich sein, alles aufzunehmen. Weiteres Eindringen in das manchen eifrigen Jüngling aufs höchste fesselnde Gebiet muß dem privaten Studium überlassen bleiben, allenfalls kann der Lehrer diesem Streben dadurch entgegenkommen, daß er einem kleineren Kreise zuverlässiger Schüler Gelegenheit zu weiteren Beobachtungen und Übungen gibt und vor allen Dingen dafür sorgt, daß die Klassenbücherei gute und anregende Werke über diese Dinge enthält. Neben dem trefflichen Buche von Diesterweg, dem wohl ein gewisser Vorrang einzuräumen ist, und der mathematischen Erdkunde von Martus kommen auch neuere Schriften in Betracht, unter denen das frisch geschriebene und anregende Buch von Franz Rusch, Himmelsbeobachtungen, genannt zu werden verdient (Bastian Schmidts naturw. Schülerbibliothek Nr. 5, Lpz., Teubner 1911). Wie schon in einer Programmschrift: Über das Schulfernrohr und was man damit sieht (Realgymn. Goldap 1909), gibt der Verfasser eine Fülle praktischer Anregungen zum selbständigen Beobachten der Schüler und behandelt fast alle Fragen der Himmelskunde, auf die der Unterricht nicht oder nur nebenher eingehen kann, in verständlicher Form und mit warmer Begeisterung für seine Aufgabe.

Es sei mir gestattet, am Schlusse dieses Abschnittes noch auf einige Dinge hinzuweisen, die für ein weiteres Eindringen in die Himmelskunde praktisch von Wert sind. Gelegentlich der Besprechung der wechselnden Größe des scheinbaren Sonnendurchmessers wurde erwähnt, daß man ein mit Sucher versehenes Fernrohr als zusammengesetztes Objektiv zu größeren Sonnenaufnahmen benutzen könne. Zu diesem Zweck wird eine leichte Kamera mit Schienen so am Okularende befestigt, daß kein störendes Nebenlicht eintreten kann, das Fernrohrobjektiv erhält einen gewöhnlichen Momentverschluß, der keineswegs seine ganze Fläche zu decken braucht. Die richtige Einstellung auf die Sonne wird durch ein reelles Sonnenbildchen des Suchers und sein Fadenkreuz bewirkt. Ein Farbenfilter ist bei genügend kurzer Belichtung überflüssig. Mit dieser Vorrichtung kann man leicht Sonnenbilder bis zu 10 cm Durchmesser von solcher Schärfe erhalten, daß Sonnenflecken deutlich sichtbar sind und sogar Kern und Penumbra erkennen lassen, die also wohl den üblichen Handzeichnungen des reellen Sonnenbildes deshalb überlegen sind, weil bei deren Herstellung die Sonne allzurasch über die Papierfläche wegschreitet. Mehrere derartige in einer Folge von Tagen zur selben Zeit und in derselben Stellung des Apparates aufgenommene Bilder zeigen sehr deutlich die Wanderung eines Flecks; auf Pauspapier zu einem vereinigt lassen sie die Lage des Parallelkreises des Flecks so genau erkennen, daß die Rotationsdauer der Sonne mit großer Sicherheit berechnet werden kann. Das Verfahren ist auch sehr geeignet, bei Sonnenfinsternissen in gleichen Zeitabständen einzelne Phasen so aufzunehmen, daß sie später zu einem Gesamtbilde des Vorgangs vereinigt werden können. Für die Mondfinsternisse ist es von Wert, dem Verlaufe mit der gewöhnlichen Kamera zu folgen. Bei voller Öffnung genügt für den noch ganz sichtbaren Mond eine Sekunde, mit dem Wachsen der Verfinsterung ist diese Belichtungszeit etwas zu erhöhen.

Als selbstverständlich darf angesehen werden, daß gelegentlich der Beobachtungsabende wichtige Erscheinungen am Himmelsgewölbe, etwa sichtbare Kometen, Doppelsterne, größere Nebel, vor allem aber die Planeten und der Mond gezeigt werden, soweit die Kraft des Schulfernrohrs oder die der etwa mitgebrachten Gläser reicht. Dabei ist aber nicht zu vergessen, daß ein Übermaß auch hier vom Übel ist. Begreifliche Schaulust treibt die Jugend dazu, wichtige Dinge zu unterschätzen und im Anblick fesselnder Gegenstände, der Mondoberfläche oder der Jupiterwelt, größeren Reiz zu finden, als der Sache selbst dienlich ist. Für den wissenschaftlichen Ernst, mit dem auch die Himmelskunde betrieben werden sollte, ist das Universal wichtiger als das Fernrohr und den Messungen größerer Wert beizulegen als der Befriedigung der oft auch durch öffentliche Vorführungen und Vorträge entfesselten Neugier, einen Blick in die Sternenwelt zu tun, der nur zu häufig sehr enttäuscht. Eine eingehende Besprechung dieser Dinge ist nicht nötig, dauernde Beobachtungen, etwa von Veränderlichen, verbieten sich dem Schüler von selbst, wogegen nichts einzuwenden ist, wenn einzelne gelegentlich ohne Schädigung ihrer Arbeitszeit und Kraft für andere Lehrfächer der Beobachtung des gestirnten Himmels mit bloßem Auge oder einfachen Hilfsmitteln ihre Mußestunden opfern.

Gegen die geschilderte Art der Behandlung des Unterrichtsstoffes ist öfter der Einwand erhoben worden, daß auch der gewissenhafteste Lehrer hier in ein Abhängigkeitsverhältnis von des Wetters Gunst und Ungunst komme, das ihm Lust und Liebe zur Arbeit rauben könne. Der bewährte Rat: Mensch! ärgere dich nicht! ist allerdings bei Himmelsbeobachtungen nötiger als sonst. Aber man muß auch zu trotzen und vorzubeugen verstehen. Der Vorsichtige mißt seine Sonnenhöhe schon, möglichst vor einigen Zeugen, am 20. März, denn am 21. könnte sie mißlingen, auch der 22. bietet noch Gelegenheit, aber sie darf nicht versäumt werden. Tritt im entscheidenden Augenblick des Durchgangs eine neidische Wolke vor die Sonne, dann hilft man sich unter Umständen damit, daß man, wie das Bild 4 zeigt, auch in gleichen Zeitabständen vor und nach der Haupthandlung Aufnahmen macht, die die fehlenden ergänzen. Gelingt der Versuch gar nicht, dann greift man zu den Akten des Vorjahrs, vorausgesetzt, daß solche vorhanden sind, und leitet den Fall aus ihnen ab. Ein Weg findet sich stets, wo guter Wille vorhanden ist.

V. Niedere Geodäsie.

Seltener als astronomische Aufgaben erscheinen in den Jahresberichten solche aus der mathematischen Erdkunde, insonderheit der niederen Geodäsie. Auch die Abhandlungen aus diesem Gebiete sind der Zahl nach seltener als die über die Himmelskunde. Zwei von ihnen verdienen unter anderen hervorgehoben zu werden: die auch im Buchhandel erschienene Schrift von G. Degenhardt (Progr. des Kaiser-Friedrichsgymn. zu Frankfurt a. M., O. 1896; Hermannsche Buchh. Frkf.) mit dem Titel: Praktische Geometrie auf dem Gymnasium, und A. Schwarz: Der geodätische Kursus an der Oberrealschule an der Waitzstraße zu Kiel (Progr. d. gen. Anst. O. 1907).

Die Reifeprüfungsaufgaben lassen, wie schon früher erwähnt wurde, meist nicht erkennen, daß sie aus der Praxis hervorgegangen sind, ja viele von ihnen stellen sich sogar als Unmöglichkeiten dar, weil ganz unausführbare Winkel- und Streckenmessungen zugrunde gelegt wurden. Andere sind, wenn sie auch nicht wahren Verhältnissen entsprechen können, in ihrem Entwurfe so originell, daß sie ernste Beachtung verdienen, sehr wenige schöpfen aus der Wirklichkeit. Wollte man aus den Aufgaben einen Rückschluß auf den Umfang des praktischen Betriebes ziehen, so wäre er keineswegs erfreulich. Eine Ausnahme machen die Aufgaben einiger Anstalten an der Wasserkante, die nach den Büchern von F. Bolte, die Nautik (Stuttgart, Jul. Maier) und J. Möller, Nautik (Lpz. Teubner), vor allem nach dem zuerstgenannten, sachliche und dem Bedürfnis der Wirklichkeit entsprechende Verhältnisse zugrunde legen.

Selbstverständlich schafft hier die engere Berührung mit den Notwendigkeiten des Lebens zur See eine größere Empfänglichkeit gegenüber den in Frage stehenden Aufgaben, als besonders erfreulich darf aber angesehen werden, daß die Erkenntnis des Wertes praktischer Übungen hier auch zu weiteren Schritten anspornt. Die bisher veröffentlichten Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland geben meist über derartige Anwendungen keine eingehende Auskunft, nur von Hamburg berichtet Herr Thaer (Bd. I, Heft 4), daß an zwei Dritteilen aller Anstalten Versuche mit gutem Erfolg gemacht werden und vor allem, daß die Umfrage nach diesen Übungen auch ein Sporn zur Nacheiferung für andere geworden ist.

Den unausgesetzten Bemühungen des Herrn Richter-Wandsbeck ist es wohl zuzuschreiben, wenn diesen Dingen auch im Binnenlande größere Aufmerksamkeit zugewendet wird, ob aber die von ihm herausgegebene Sammlung trigonometrischer Aufgaben (Leipzig, Teubner), die verdiente Beachtung gefunden hat, scheint mir angesichts der bei den Reifeprüfungen gestellten sehr zweifelhaft. Auch die Aufgabensammlung von Schülke, die im gleichen Verlage erschienen ist, hat eine große Zahl solcher aus der Nautik.

So selbstverständlich an sich der Gedanke ist, daß die Aufgabe des mathematischen Unterrichts sich unmöglich darauf beschränken kann, den Schüler in rein systematischer Weise von Erkenntnis zu Erkenntnis abstrakter Dinge zu führen, ohne ihm den reichen Inhalt von Bestätigungen dessen, was er lernen soll, in seiner nächsten Umgebung zu zeigen, so gering ist, vielfach aus reiner Bequemlichkeit, die Neigung, ihn stets und immer wieder auf diese Dinge zu verweisen. Es ist wohl zweifellos, daß der Schüler für den ihm fremdartig gegenübertretenden Lehrstoff der elementaren Mathematik ein ganz anderes Verständnis und größere Freudigkeit gewinnt, wenn man ihm von Anfang an seinen praktischen Wert vor Augen führt und ihm über die Notwendigkeit seiner Behandlung die unerläßlichen Winke gibt. Deshalb ist es auch falsch, für eine bestimmte Klassenstufe, etwa die Obersekunda, einen besonderen Kursus der niederen Geodäsie einführen zu wollen, der würde der Unfähigkeit vieler Schüler, den mathematischen Inhalt der Dinge der Umgebung zu sehen, viel zu spät zu Hilfe kommen. Wer die Dreiecks- und Vierecksformen im Bepflanzungsplane des Schulhofs erst auf dieser Klassenstufe zu erkennen vermag, dem sind die Augen nicht zu rechter Zeit geöffnet worden.

Einwände gegen ein solches Verfahren im Unterricht sind wohl ernstlich nicht erhoben worden, der Wert und Erfolg einer solchen Durchdringung des Lehrstoffs mit Dingen, die auf das Verständnis nur klärend und befruchtend wirken können, ist so einleuchtend, daß ihm wohl kaum Gegner entstehen dürften. Wohl aber wird vor einem Zuviel gewarnt und in manchen Beziehungen gewünscht, man möge sich beschränken. Das gilt vor allem von der Genauigkeit der Winkelmessung, die in der

Tat aus rein unbegreiflichen Gründen auch in den erwähnten Arbeiten gegenüber der der Streckenmessung nicht unerheblich zurücksteht.

Die Ursachen hierfür sind vor allem in der Unzulänglichkeit der bisher gebrauchten Hilfsmittel und der Unbekanntschaft mit dem, was die neuere Technik bietet, zu suchen. Trumpf ist in unserer Zeit die Elektrizität, und was mit ihr zu tun hat, dringt in breite Kreise der Öffentlichkeit. Die Stätten, in denen unsere hochentwickelte Feinmechanik ihre stillen Siege vorbereitet, sind auch dem Fachmann unbekannt. Besucher sind so selten wie die Bestellungen höherer Lehranstalten, die lieber zehn „Modelle“ kaufen statt eines einzigen brauchbaren Kunstwerks. Und doch legt sich jeder eine Fessel an, der mit einer für praktische Messungen vorbereiteten Klasse ins Freie tritt, um zu zeigen, wie in Wirklichkeit das Erlernte zur Bestimmung ungemessener Größen und zur Bestätigung dessen, was an Wissensstoff dem Schüler übermittelt ist, verwendet werden kann und nun von vornherein erklären muß, daß die Übereinstimmung des Errechneten mit dem Gemessenen nur in Grenzen stattfinde, die für das Rechnen als sträflich ungenau anzusehen sind. Für die ersten Schritte auf dem Gebiete der Winkelfunktionen und ihrer Anwendungen ist der Genauigkeitsgrad der Übereinstimmung beider eine geradezu notwendige Bedingung und für die zweifelsfrohen Schüler ein kräftiger Hinweis auf die unabänderliche Sicherheit der mathematischen Herleitung. Als selbstverständlich gilt hierbei, daß man bei diesen ersten Versuchen nur Größen zu bestimmen sucht, deren Messung ohne Schwierigkeiten ausgeführt werden kann. Um auch hier durch ein ganz einfaches Beispiel die Vielseitigkeit des Verfahrens zu kennzeichnen, seien folgende Zahlen genannt.

AB bedeute einen Türeingang mit scharfen Kanten, senkrecht zu ihm stehe in A eine zu messende Strecke AC, in C steht das Winkelmeßinstrument. Die Abhängigkeit der beiden Katheten und des Gegenwinkels der kleineren von einander und der Genauigkeitsgrad ihrer durch Rechnung gefundenen Größen ist Gegenstand der Erörterungen. Ohne den Schülern das Ergebnis bekannt zu geben, wurde von vornherein der Winkel bei C zu $3{,}815^0$ bestimmt. Für die Einführung in das Wesen der Winkelfunktionen empfiehlt es sich hier, nachdem die Größe des Winkels von einzelnen Schülern auf Grund ihrer bisherigen Erfahrungen geschätzt ist, zunächst die beiden Katheten zu messen und den Winkel zu berechnen. Man fand $AC = 34{,}09$ m, $AB = 2{,}273$ m,

also ohne Tafel $$tg\, x = \frac{2{,}273}{34{,}09}$$
$$= 0{,}0667,$$

also, da $$tg\, 1^0 = 0{,}01746 \quad \text{ist},$$
$$x = 3{,}82^0,$$

während die logarithmische Berechnung $3{,}814^0$ ergibt.

Nach Angabe des messenden Schülers stellte sich die eine Kante fast genau auf den Teilstrich 69,72°, die andere nahezu auf 73,53° der Horizontalkreisteilung ein, nach seiner Bekundung hatte also der Winkel die Größe 3,81°. Legt man diesen Wert und den ebenfalls gemessenen von AB der Berechnung von AC zugrunde, so ist $AC = \frac{2,273}{3,81 \cdot 0,01746}$ nämlich 34,18 m, wenn ohne Tafel gerechnet wird, und $AC = 34,13$ m sowohl wenn mit den Winkelfunktionen selbst wie auch wenn logarithmisch gerechnet wird. Ein Vergleich dieser Ergebnisse zeigt, daß $tg\, 3,81^0$ größer sein muß als $3,81 \cdot 0,01746$ und deutet an, von welcher Größenordnung der begangene Fehler ist. Den richtigen Wert von AC erhält man erst, wenn der Winkel mit größerer Genauigkeit gemessen wird. Dem vierstellig bestimmten Winkel entsprechen also ebensoviel Stellen der Streckengenauigkeit.

Eine für die Wertschätzung trigonometrischer Ermittelungen seitens des Schülers überaus wichtige und oft zu wiederholende Untersuchung wie diese in wenigen Minuten erörterte ist mit den vielgebrauchten Winkelmessern, mögen sie heißen wie sie wollen, überhaupt undenkbar, weil stets der Genauigkeitsgrad der Winkelmessung so erheblich hinter dem der Streckenmessung zurückbleibt, daß ein Vergleich unmöglich ist. Die Forderung, den Winkel ebenfalls auf zwei Dezimalen oder, was dasselbe ist, auf halbe Minuten genau zu messen, erscheint also hier durch andere Rücksichten geboten als die auf die vierstellige Tafel; die letzte Ursache ist natürlich dieselbe.

Für die Wahl des Instrumentes kommen hier noch einige Eigenschaften in Betracht, die für seinen astronomischen Gebrauch gleichgültig sind. Es muß leicht sein, rasch für den Transport sicher verpackt werden und der Kasten, der es birgt, muß bequem getragen werden können. Auch das Stativ muß bei großer Standsicherheit gleiche Eigenschaften haben. Früher mußte stets ein Träger angeworben werden, wenn die schweren Breithauptschen Theodolite eine Wanderung über Land antreten sollten, und es waren besondere Verhaltungsmaßregeln notwendig, um die kostbare Last nicht zu gefährden. Heute belastet beispielsweise das oft genannte Hildebrandsche Universal, mit allem Zubehör in einen fast kubischen Kasten von 16 cm Seite verpackt, nur mit 3,0 kg; auch das Stativ ist leicht und dauerhaft. Bei einer Entfernung der Fernrohrachsen in den beiden Lagen rechts und links von etwa 12 cm ist die Exzentrizität bei Entfernungen von mehr als 300 m überhaupt belanglos, weil sie unter die Einstellungsfehler sinkt; für nähere Ziele kann der Fehler durch Doppelmessung in beiden Kreislagen völlig ausgeglichen werden. Es läßt sich nämlich einfach und streng nachweisen, daß, wenn die Vertikalachse des Instruments in A steht und die Punkte B und C derselben Horizontalebene angehören, der Winkel BAC das arithmetische Mittel der in beiden Kreislagen mit dem exzentrischen Fernrohr gemessenen Winkel ist, gleichviel wo B und C liegen. Der Beweis geht über die Fähigkeiten eines Schülers der Oberstufe nicht hinaus und gibt unter Anwendung elementarer Kreissätze gute Einblicke in die Theorie des Instrumentes. Die Doppelmessung in beiden Kreislagen empfiehlt sich überhaupt bei allen geodätischen Messungen auch einfachster Art, weil die am häufigsten vorkommenden Ablesungsfehler dadurch leicht kenntlich werden. Unter Umständen können bei einfacher Messung die Exzentrizitätsfehler auch dadurch vermieden werden, daß man die Zielpunkte durch Kugeln oder Zylinder von einem Durchmesser gleich dem Abstand der parallelen Fernrohrlagen (12 cm) markiert und diese Körper in der Tangente anzielt. Benutzt man, was ich empfehlen kann, zur Festlegung der Dreieckspunkte im Gelände kurze zugespitzte Gasrohrstücke, so kann man diese Zielkörper mit einem in die Rohre passenden Zapfen versehen, die Arbeit ist dann sehr leicht, und bei einiger Vorsicht in der Wahl der Punkte kann man in der Folgezeit von ihnen wieder Gebrauch machen und das Netz weiterführen. Ich habe solche Punkte nach 20 Jahren noch ziemlich unversehrt wieder auffinden können.

Die Hildebrandschen Universale haben, wie die meisten neueren Feldmeßinstrumente, auch die zum Nivellieren, sogenannte Distanzfäden, die dem Horizontalfaden des Hauptkreuzes in gleichen Abständen nach oben und unten parallel eingezogen sind. Für den Anfänger können diese insofern verhängnisvoll werden, als bei der Objektivdarstellung des Sonnenbildes bei Höhenaufnahmen leicht Verwechslungen der Fäden eintreten, die natürlich zur Ablesung falscher Winkel führen müssen. Hier ist also Vorsicht geboten; beim subjektiven Einstellen kommen derartige Verwechslungen kaum vor. In Verbindung mit der Meßlatte gestatten diese Distanzfäden ein rasches, wenn auch nicht sehr genaues Bestimmen von Entfernungen auf der Erdoberfläche. Die Kenntnis dieses als tachymetrisch bezeichneten Verfahrens ist für die Schulpraxis nicht ohne Wert, weil es die optischen Verhältnisse des Fernrohrs mit einbezieht und solche Aufgaben immer als erwünscht denen gegenüber bezeichnet werden müssen, die mit der Wirklichkeit nichts zu tun haben. Bei der Anwendung stellt man die Latte stets genau vertikal dem Fernrohr gegenüber und liest die der Fadenentfernung entsprechende der Lattenteilung (l) ab. Die letztere ist, um dem Schüler das richtige Halten zu erleichtern, mit kleinen Libellen auszustatten, die überall billig zu haben und leicht in Kreuzlage anzubringen sind. Die Grundlagen des Verfahrens sind folgende: In der Zeichnung (Fig. 8) bedeute L den Mittelpunkt des Objektivs, $CD = d$ den festen Fadenabstand, $EF = l$ die entsprechende abgelesene Länge auf der Latte in Zentimetern, $AL = a$ und $BL = b$ seien Gegenstands- und Bildwerte für die Linse L mit der Brennweite $\mathfrak{F}$. Bezeichnet man noch den gesuchten Abstand des Punktes A der Latte von der Vertikalachse O des Instrumentes mit x und OL mit e, so bestehen folgende Gleichungen:

$$(1) \qquad x = a + e,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\mathfrak{f}},$$

$$(3) \qquad \frac{a}{b} = \frac{l}{d}.$$

Daraus ergibt sich

$$a = \mathfrak{f} + \frac{\mathfrak{f}}{d} l \quad \text{und} \quad x = \frac{\mathfrak{f}}{d} l + e + \mathfrak{f}.$$

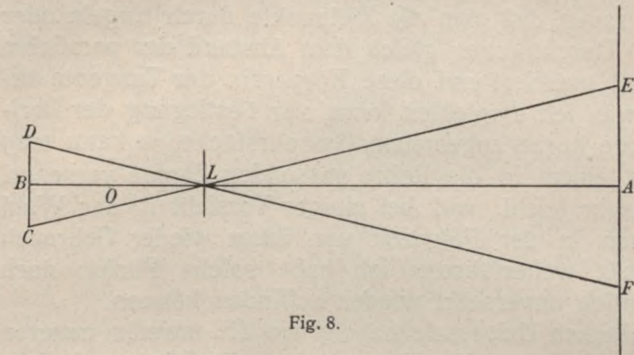

Fig. 8.

Der Fadenabstand ist nun stets gleich $0{,}01 \cdot \mathfrak{f}$, also die Multiplikationskonstante stets gleich 100; die Additionskonstante $(l + \mathfrak{f})$ wird meist viel zu genau auf Bruchteile eines Millimeters angegeben, die Angabe $l + \mathfrak{f} = 0{,}24^{\mathrm{m}}$ würde genügen. Die Formel stellt sich schließlich in der Gestalt dar:

$$x = (100\,d + 0{,}24)^{\mathrm{m}},$$

d. h. die gesuchte Horizontalentfernung ist in Metern gleich der Anzahl der auf der Latte abgelesenen Zentimeter vermehrt um die Additionskonstante. Da nun in der Entfernung von 100 m die Millimeter kaum noch mit einiger Sicherheit geschätzt werden können, weil neben der Kleinheit der Zentimeterfelder die Fadendicke störend wirkt, so ist die zweite Dezimale in der Additionskonstanten meist schon von Übel, weil sie zu einer scheinbaren Genauigkeit verführt, die von der tachymetrischen Messung von vornherein gar nicht zu erwarten ist. In geneigtem Gelände ist die Latte ebenfalls vertikal zu stellen, die Horizontalprojektion des Abstandes ist dann, wie leicht gezeigt werden kann

$$x = (100\,d + 0{,}24) \cos^2 \epsilon$$

worin ϵ die Elevation der Fernrohrachse ist.

Beim Nivellieren ist, da dies Instrument durch größere Strecken auf dem Stativ getragen werden muß, die Reitlibelle der Horizontalachse gefährdet und wird deshalb abgenommen.

Von weiterem Zubehör zu einfachen geodätischen Messungen sind eine Anzahl von Fluchtstäben, wie sie auch im Turnunterricht gebraucht werden, ein Meßband von 20 m Länge mit Markierstäben, die ich oft durch große Nägel ersetze, und ein Winkelspiegel unentbehrlich, wünschenswert ist ein Meßtisch mit einfacher Kippregel. Die meisten dieser Dinge pflegen in den Sammlungen vorhanden zu sein.

Größere Bedenken bietet die Frage nach der Arbeitsstätte. Großstädtische Lehranstalten sind auf den Schulhof und, wenn sie über einen solchen verfügen, den Spiel- und Turnplatz angewiesen, Vermessungen in belebten Straßen und auf anderen Stellen verbieten sich von selbst und die Erreichung eines abgelegenen Geländes ist mit Schwierigkeiten aller Art verbunden. An kleineren Orten ist die Durchführung auch umfangreicherer Aufgaben dann besonders leicht, wenn die trigonometrischen Punkte der Landesvermessung noch weithin sichtbar markiert sind. Das Fehlen eines größeren Übungsgebietes ist indessen leicht zu verschmerzen, denn wie die schon erwähnte Schrift von Degenhardt vorbildlich nachweist, ist der Schulhof mit seiner nächsten Umgebung das bequemste Arbeitsfeld. Die Hauptsache ist, daß der den Unterricht erteilende Lehrer für Aufgaben, die die lebendige Teilnahme des Schülers wachzurufen geeignet sind, offene Augen hat. Ist dies der Fall, so wird ihm nicht verborgen bleiben, daß auch das Innere des Schulgebäudes, Dachraum, Aula und Turnhalle vielseitig zu Messungen und Aufgaben aller Art benutzt werden können. Dem Unterricht würde ein schlechter Dienst geleistet, wollte man sie von der Hand weisen. Werden solche Übungen in regelmäßiger Steigerung vorgenommen und durch den trigonometrischen Unterricht ergänzt und erweitert, dann lohnt es sich, die im Laufe der Zeit und auf verschiedenen Wegen gewonnenen Ergebnisse zusammenzutragen und unter sich und mit den vorhandenen Plänen des Schulgrundstücks, seiner Gebäude und ihrer Aufrisse zu vergleichen, nicht nur um erläutern zu können, wie Lagepläne und alle diese Darstellungen entstehen, sondern auch, um das Maß der Übereinstimmung einzelner Ergebnisse festzustellen.

Hätte man beispielsweise im Schulhofe ein horizontales Dreieck in der oben angegebenen Weise festgelegt, so können seine Seiten durch Abschreiten oder durch Anlegung des Meßbandes bestimmt werden. Es ist durchaus nicht überflüssig, die auf die erste Art unter Feststellung einer Schrittlänge aus der Länge einer Seite gewonnenen Größen der Winkel und der Fläche mit denen, die der genauere Weg ergibt, zu vergleichen. Man wird bald finden, daß bei gleichmäßigem Schreiten und genauer Schätzung des letzten Schritteils die Winkel auf etwa einen Grad festgestellt werden können. Ebensowenig darf man verabsäumen, den aus einer Seite und der mit dem Winkelspiegel ihre Lage und dem Bandmaß ihrer Länge nach bestimmten Höhe berechneten Inhalt dem aus anderen Stücken gewonnenen gegenüberzustellen.

Unter Beibehaltung derselben gut befestigten und genau zu messenden Basis läßt sich im Laufe der Jahre lediglich aus den Errungenschaften der einzelnen Klassen ein Lageplan des Schulgrundstücks zusammenstellen, der an Genauigkeit die von den Kataster- und Bauämtern weit übertrifft. Welchen Wert die Arbeit für das Verständnis der Koordinatengeometrie hat und wie sie das Verständnis der Kartierung fördert, bedarf keines Wortes.

Den früher ausgesprochenen Grundanschauungen würde es zuwiderlaufen, wenn auch für den geodätischen Unterricht eine bestimmte Aufgabenfolge und ein einheitlicher Plan für die Behandlung des Lehrstoffes vorgeschlagen würde, wie er sich für die Himmelskunde, bedingt durch die Ereignisse des Jahres, ergab. Hier geht die praktische Belehrung Hand in Hand mit dem steigenden Verständnis der Raumlehre und der Trigonometrie, als wünschenswert darf vielleicht nur eins erscheinen, nämlich die Aufgaben so fruchtbar zu gestalten, daß sie an verschiedenen Stellen des Ausbildungsganges eingreifen und auch anderen Unterrichtsgegenständen dienstbar gemacht werden.

Als Beispiel einer solchen sehr umfangreichen Aufgabe möchte ich eine größere Vermessung anführen, die im Anschluß an andere Aufgaben teilweise in einer Programmschrift des Königl. Realgymnasiums zu Nordhausen 1894 veröffentlicht wurde und das Ziel hatte, die Lage und Höhe des damals neuerbauten Aussichtsturmes auf dem Poppenberge am Südrande des Harzes zu bestimmen. Zunächst wurden durch Anschluß an ein Dreiecksnetz, dessen Basis im oberen Flur des Schulgebäudes mehrmals genau gemessen wurde, die Koordinaten der Turmachse berechnet und auf den Petriturmknopf in Nordhausen, einen (nebenbei sehr unsicheren) Punkt zweiter Ordnung der in den Jahren 1851 bis 1855 ausgeführten Triangulation Thüringens bezogen. Zur Sicherung der gefundenen Werte wurde eine neue Koordinatenberechnung durch Rückwärtseinschneiden auf drei andere Punkte der Triangulation Thüringens vorgenommen, die zu einem unerwarteten Zwiespalt führte. Die Schlußergebnisse wichen nämlich in dem auch schon bei anderen Doppelbestimmungen wahrgenommenen Sinne so beträchtlich voneinander ab, daß die Vermutung nahegelegt wurde, der zur Basismessung benutzte dreiseitig-prismatische Halbmeteretalon der Anstalt sei fehlerhaft. In der Tat erwies der Vergleich mit dem städtischen Normalmeter eine sehr beträchtliche Ungleichheit, so daß die Basis auf Grundlage des inzwischen beschafften Normaletalons von Bamberg-Berlin aufs neue gemessen werden mußte. Das führte die erwartete Übereinstimmung herbei.

Aus diesen Koordinaten ($x_1 = +9754^m$; $y_1 = +2146^m$) und denen eines zweiten im Zeichensaale der genannten Anstalt ($x_2 = -45^m$; $y_2 = +359^m$) ergab sich ihr Horizontalabstand BC $= 9961^m$. In beiden Punkten wurden nun je zwölfmal mit einem Repsoldschen Höhenkreis meiner Sammlung die Elevation und Depression des anderen gemessen und von den Refraktionsfehlern befreit. Es ergab sich in A (Aussichtsturm, oberer Rand der Brüstung) $\delta = -2{,}237^0$ in C (Zeichensaal, $+232{,}0^m$ über NN) $\epsilon = +2{,}248^0$. Das Dreieck ABC (Fig. 9) ist nun zu eingehenden Betrachtungen über Winkelfunktionen und andere wichtige Dinge sehr geeignet. Der Anfänger ist im Anschluß an bisher behandelte Aufgaben zunächst geneigt, es für rechtwinklig zu halten und setzt $AB = a \operatorname{tg} \epsilon$. Erst der Hinweis darauf, daß ϵ nicht gleich δ sei, führt ihn zur richtigen Anschauung und zeigt ihm die Möglichkeit, die Differenz $0{,}089^0$ mit einer der Genauigkeit dieser Zahl entsprechenden zur Berechnung des Erdradius zu verwenden, denn diese Zahl ist nichts anderes als der zum Bogen BC gehörige Zentriwinkel der Erde.

Damit ist also das erste Problem der Erdmessung, das der *Berechnung des Erdradius* in einfacher Weise angeschnitten, und wenn sich auch hier nur $r = 64 \cdot 10^2$ km ergibt, so ist der wahre in den künftigen Rechnungen zu benutzende Wert doch wenigstens in seinen ersten Stellen richtig abgeleitet und, was die Hauptsache ist, der mitarbeitende Schüler hat eine klare Vorstellung gewonnen, wie derartige Bestimmungen ausgeführt werden. Durch Erweiterung des Dreiecknetzes bis zum Possenturm bei Sondershausen konnte damals auch die dritte Stelle noch nahezu richtig berechnet werden, nebenbei wurden selbständige Breitenbestimmungen an beiden Ausgangspunkten gemacht. Dasselbe Recht, möglichst genau aus unter Beihilfe der Schüler gemachten Messungen abgeleitet zu werden, wie die Fundamentalzahlen der Himmelskunde, hat auch der Erdradius, wenn auch die Schwierigkeiten hier größer sind.

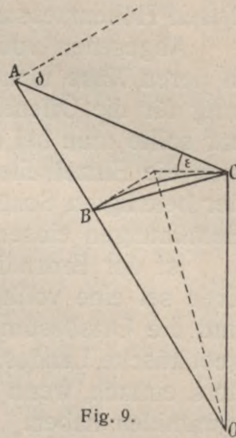

Fig. 9.

Das Dreieck ABC hat unter Rücksicht auf die notwendige Verbesserung die Winkel $\alpha = 87{,}663^0$, $\beta = 2{,}293^0$, $\gamma = 90{,}044^0$. Erst jetzt kann es als nahezu rechtwinklig angesehen werden und gibt als Näherungszahl für AB, wenn ohne Tafel gerechnet wird:

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= 9961 \cdot 2{,}293 \cdot 0{,}01746\,^{\mathrm{m}} \\ &= 398{,}7\,^{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

aus $AB = a\,\mathrm{tg}\,\gamma$, dagegen $AB = 398{,}8\,^{\mathrm{m}}$. Der Sinussatz gibt $398{,}9\,^{\mathrm{m}}$.

Für die Praxis derartiger gar nicht seltener trigonometrischer Höhenmessungen, bei denen die Elevation klein ist, und die Lage der Punkte auch den Meßtischblättern entnommen werden können, ergibt sich also daraus die Regel, daß, wenn nicht große Genauigkeit gefordert wird, die gemessene Elevation um den halben Zentriwinkel der Entfernung vermehrt, das Dreieck als rechtwinklig behandelt und je nach der Größe der Elevation mit oder ohne Tafel gerechnet wird. Zu Untersuchungen, welchen Einfluß die Messungsfehler auf das Ergebnis haben, fordern die vorkommenden Zahlen förmlich heraus.

Mit Rücksicht auf die Höhe $232{,}0\,^{\mathrm{m}}$ über NN des Ausgangspunktes C und die Instrumenthöhe $1{,}4\,^{\mathrm{m}}$ in A hat also die Ebene der oberen Turmplattform $629{,}5\,^{\mathrm{m}}$, und die Berghöhe ist, da die des Turms bis zu dieser Stelle durch Kleintriangulation auf $30{,}2\,^{\mathrm{m}}$ ermittelt wurde, $599{,}3\,^{\mathrm{m}}$. Da das zwar mit den Angaben der Landesvermessung (1 : 100000; $599\,^{\mathrm{m}}$) übereinstimmt, andere aber noch unter sich Unterschiede bis zu $80\,^{\mathrm{m}}$ aufwiesen, so wurde noch ein barometrisches Schleifennivellement so vorgenommen, daß die erste und letzte Barometerablesung am Nivellementsbolzen des Bahnhofs in Ilfeld erfolgte und die inzwischen ausgeführten Ablesungen mit Hilfe der Schlußbeobachtung auf die erste interpoliert wurden. Alle Ablesungen der Thermometer und der beiden Heberbarometer wurden von Schülern gemacht und ergaben 631,6 ^{m} und für den Fuß des Turmes 601,4 ^{m}, also eine Abweichung, auf die bei diesen Höhenmessungen immer gerechnet werden muß.

Abgesehen von den Großstädten gibt es wohl wenig Schulorte, in deren Nähe nicht ähnliche Aufgaben, die auch eine gewisse Bedeutung für die Öffentlichkeit haben, durchgeführt werden könnten. Darauf sollte man bei der Auswahl schon deshalb Rücksicht nehmen, weil sich die Einzelheiten besser dem Gedächtnis einprägen und der Eifer der beteiligten Schüler größer zu sein pflegt, wenn sie den Zweck ihrer Bemühungen einsehen.

Ist der Erdradius bekannt, so kann, stets unter der Annahme, die Erde sei eine vollkommene Kugel, das geographische Koordinatennetz und die Ortsbestimmung im Anschluß an die Himmelskunde und die geodätische Landesaufnahme behandelt werden; das letztere ist besonders einfach, wenn zufällig die Punkte dritter Ordnung noch ihre Holzpyramiden haben. Ist das nicht der Fall, so kann man von jedem Katasteramt die Koordinaten anderer eingeschnittener Punkte vierter Ordnung erhalten, die freilich vielfach, weil die Meßinstrumente nicht oder nur unter Schwierigkeiten und mit beschränkter Sicht in ihnen aufstellbar sind, lediglich von anderen Punkten anvisiert und deshalb nur zum Rückwärtseinschneiden gebraucht werden können. Die Pothenotsche Aufgabe erfordert zu ihrer scharfen Durchführung auch in ebenen Koordinaten viel Rechnerei, und ich zweifle, ob die aufgewendete Mühe zum Erfolge im richtigen Verhältnis steht. Für das Gymnasium und seine Ziele dürfte sie kaum ernstlich in Betracht zu ziehen sein. Dagegen ist das Vorwärtseinschneiden und die Umrechnung der Werte in Koordinaten für das zugrundegelegte System eine immerwiederkehrende Aufgabe auch schon für einfache Übungen auf dem Schulhofe.

Für die Beobachtungsstätte im Schulgebäude sind neben den astronomischen Koordinaten auch die geodätischen und die Höhe über NN[1]) von Bedeutung. Es ist durchaus nicht nötig, bei deren Feststellung immer nur die Rezepte des Landmessers zu benutzen, sie lassen sich vielfach auf andere Weise bestimmen, die unter Umständen für den Unterricht fruchtbarer ist. So habe ich die Koordinaten meines jetzigen Beobachtungspunktes durch Polarkoordinaten vom Turm der hiesigen evangelischen Kirche aus durch eine Art tachymetrischer Messung mittels der Fahnenstange des Gymnasialgebäudes bestimmt. Das Azimut der Strecke wurde durch eine Sternhöhe berechnet, ein Verfahren, das dem Geodäten im allgemeinen fremd ist; die Länge der Fahnenstange, 9,741 ^{m} bei 17^{0}, ist mehrfach durch Kleintriangulation festgestellt.

Derselbe Turm trägt an seinem Fuße den Nivellementsbolzen der Landesvermessung, es lag also nahe, die Höhe zunächst durch Anschluß an diesen Punkt auf den Beobachtungspunkt in der Turmachse

1) Normalnullpunkt der deutschen Höhenangaben.

und von da auf die Spitze der Fahnenstange zu übertragen, deren Höhe über den Nullpunkt des Gymnasiums auch schon mehrfach bestimmt ist. Dieses trigonometrische Nivellement, von dem ich allerdings nur eine Zentimetergenauigkeit erwarte, harrt noch seiner Ausführung. Dagegen wurde der auch im Lageplan des Gymnasiums als solcher von der Bauleitung bezeichnete Nullpunkt der Höhen, eine nicht betretene Stelle einer granitnen Treppenschwelle, auf den Nivellementsbolzen des Stationsgebäudes durch Lattennivellement aus der Mitte bezogen, die Vorübungen dazu werden im Schulhofe gemacht.

Es scheint mir durchaus nicht nötig zu sein, den Schüler stets durch Ausführung einer größeren Arbeit mit dieser verhältnismäßig einfachen Aufgabe vertraut zu machen. Hier genügen wenige Stationen, aber es sollte immer in einer Schleife und aus der Mitte nivelliert werden, damit er die darin liegende Sicherheit der Ergebnisse kennen lernt. Viel wichtiger als allzuhäufige Wiederholung derselben Operation ist auch hier für ihn, das Maß der erreichbaren Genauigkeit kennen zu lernen und ihm die Wege zu zeigen, wie er Höhenunterschiede auf verschiedene Arten, durch Lattennivellement, trigonometrisches und barometrisches feststellen kann.

Das schematische Arbeiten nach den Vorschriften des Landmessers legt, was auch in den beiden im Anfang dieses Abschnitts erwähnten Arbeiten deutlich zutage tritt, die Gefahr nahe, daß zu sehr nach diesen Vorschriften und nur im Rahmen ihrer Aufgaben gearbeitet wird. Das ist für den Unterricht von Nachteil. Der Besitz eines guten Winkelmeßinstruments bedeutet für den mit seinem Gebrauch und seinen Sondereigenschaften vertrauten viel mehr, das Universal ersetzt ihm ein Stück Bücherei, es ist ihm ein treuer Gefährte, der bei jeder passenden Gelegenheit zu Rate gezogen wird und der ihn nie im Stich läßt, wenn er nur richtig verstanden und angemessen behandelt wird.

Für die Vielseitigkeit der für die Schule in Frage kommenden Messungen und Berechnungen möchte ich noch einige Winke geben, die mehr als viele Worte die Brauchbarkeit und Notwendigkeit eines guten Winkelmeßinstrumentes zu belegen imstande sind.

Es waren Zweifel entstanden, ob der sorgfältig gemessene Widerstand der Blitzableiteranlage des Gymnasialgebäudes mit dem aus der Drahtlänge und -dicke zu erwartenden Werte im Einklang sei. Das wurde von dem mit der Prüfung beauftragten technischen Beamten bestritten, obwohl seine Messung nur ziemlich oberflächlich war. Die Teilstrecken der Leitung waren alle unzugänglich und lagen, was in den gewöhnlichen Aufgaben nicht der Fall zu sein pflegt, in allen möglichen und nur zum Teil in einer Horizontalebene. Sie folgten den Kanten des Bauwerks aber so, daß alle von den Endpunkten einer Strecke im Schulhofe sichtbar waren. Die ganzen Messungen und Berechnungen wurden von Schülergruppen der Obersekunda ausgeführt und stellen an das räumliche Anschauungsvermögen dieser Stufe schon recht beträchtliche Anforderungen. Der ebenfalls von den Schülern nach der

Nullmethode mit einer Brücke mit gleichen Widerstandspaaren bestimmte Widerstand war unerheblich größer als sein berechneter Wert.

In einem anderen Falle handelte es sich darum, entgegen der Meinung des Bauaufsichtsbeamten nachzuweisen, daß die Balkendecke der neuerbauten Aula ein gefährliches Anwachsen der Durchbiegung zeige. Da auch der Fußboden bei gleicher Neigung schon wiederholt der Schauplatz von Nivellierübungen gewesen war, so lag die Schwierigkeit der den Primanern zur Beurteilung vorgelegten Aufgabe mehr darin, den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht zu finden. Es wurde richtig dahin entschieden, die Höhen der Endpunkte der Grundstrecke gleich von vornherein auf einen Festpunkt der Wand zu beziehen, die beiden anzuschneidenden Punkte der Decke, den einen in ihrer Mitte, den andern an der Auflagestelle des Balkens aber, da sich sonst kein scharf bestimmtes Ziel fand, durch zwei Blasrohrpfeile festzulegen, mit deren Hilfe im nächsten Jahre die Vermutung in vollem Umfange gerechtfertigt wurde.

Das für die Bestimmung der Schwerebeschleunigung dienende Pendel, im einfachsten Falle ein Seidenfaden mit Messingkugel, verändert seine Länge im Laufe der Zeit oft so, daß eine erneute Messung nötig wird. Auch hier ist der trigonometrische Weg sehr zweckmäßig. Wie genau gearbeitet werden kann, zeigt eine Programmschrift von A. Lehnebach (Gewerbeschule in Mühlhausen i. E. 1888), die auch, wie die schon erwähnte des Kgl. Realgymnasiums in Nordhausen (1894) die Elemente des Erdmagnetismus mit geodätischen Messungen in Verbindung bringt.

Den Anstaltsleitern und der Bauaufsicht kann eine zuverlässige Mitwirkung der Schüler unter fachmännischer Führung nur willkommen sein, aber es lassen sich noch zahlreiche andere Arbeiten bewältigen, die zur Heimatskunde und dem Schutze der Naturdenkmäler in Beziehung stehen und deshalb für den Schüler nicht nur rechnerischen Wert haben. Dahin zähle ich neben den Höhenmessungen auch kleinere Gelände- und Grundrißaufnahmen von Ruinen, Ringwällen, Gräberfeldern und ähnlichen der Vermessung harrenden Gegenständen, die ein ungestörtes Arbeiten einer größeren Schülerzahl gestatten.

Ob die von Herrn Schilling-Danzig in seinen Vorträgen im Ferienkursus 1900[1]) und in dem selbständigen Werke über die Anwendungen der darstellenden Geometrie (Teubner, Leipzig 1904) gegebenen Anregungen über Photogrammetrie auf den höheren Schulen schon Eingang gefunden haben, und ob sie für die eben erwähnten Aufnahmen benutzt werden, ist mir nach den gegebenen Auskünften nicht wahrscheinlich. Ich selbst habe, trotzdem ich die Kamera für eine noch lange nicht nach Gebühr geschätzte Fundgrube sehr wertvoller Aufgaben halte, noch keine Erfahrungen gemacht und befürchte, daß ohne eine billige Vorrichtung zum genauen Ausmessen der Platten das Verfahren für den Unterricht vorläufig noch Schwierigkeiten bietet.

1) Klein und Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. (Teubner, Leipzig 1900.)

Anhang.

Verzeichnis der erwähnten Bücher, Abhandlungen und Tafeln.

1. Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen. II. Bd. Himmelskunde u. astronomische Geographie v. A. Höfler in Wien. Leipzig, B. G. Teubner. 1912
2. Kambly, Ebene und sphärische Trigonometrie. 24. Aufl. Breslau, Ferd. Hirt. 1897.
3. Kambly-Roeder, Trigonometrie, neu bearbeitet v. A. Thaer. Derselbe Verlag. 1910.
4. Baltzer, Die Elemente der Mathematik. 3. Aufl. Leipzig. 1870.
5. Bardey, Aufgabensammlung. 22. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. 1896.
6. Bardey, Aufgabensammlung, bearbeitet v. Pietzker und Presler. Leipzig, B. G. Teubner. 1900.
7. Schülke, Vierstellige Logarithmentafel. 6. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. 1907.
8. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Leipzig, B. G. Teubner. 1900.
9. F. G. Gauß, Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Schulausgabe. 3. Aufl. Halle a. S., E. Strien.
10. H. Müller, Vierstellige Logarithmentafeln. Leipzig, B. G. Teubner. 1906.
11. Greve, Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 5. Aufl. Bielefeld und Leipzig, Velhagen und Klasing. 1893.
12. Th. Albrecht, Vierstellige Logarithmentafel. Leipzig, W. Engelmann. 1894.
13. Rohrbach, Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 3. Aufl. Gotha, Thienemann. 1902.
14. E. Schultz, Vierstellige Logarithmen. Essen, Baedeker. 1902.
15. H. Schubert, Vierstellige Tafeln und Gegentafeln. Leipzig, Göschen. 1908.
16. August, Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 24. Aufl. Leipzig, Veit u. Komp. 1901.
17. Edler, Die Aneignung astronomischer Begriffe auf der Schule. Programm der Städtischen Oberrealschule zu Halle a. S. 1901.
18. Gnau, Astronomie in der Schule. Programm des Gymnasiums zu Sangerhausen. 1907 und 1908.
19. B. Hoffmann, Über d. Behandlung d. mathematischen Geographie in den unteren u. mittleren Klassen. Programm des Kgl. Realgymnasiums zu Nordhausen. 1890.
20. B. Hoffmann, Zur Gestaltung des Unterrichts in der mathematischen Himmelskunde. Programm des Kgl. Gymnasiums zu Bromberg. 1907.
21. Nautisches Jahrbuch, herausgegeben vom Reichsamte des Innern. Berlin, Heymann.
22. O. Hartmann, Astronomische Erdkunde. 2 Aufl. Stuttgart, Grub. 1907.
23. Schülke, Aufgabensammlung. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. 1909.
24. Martus, Astronomische Erdkunde. Große Ausgabe. 3. Aufl. Dresden und Leipzig, C. A. Koch. 1904.
25. Diesterweg, Populäre Himmelskunde u. mathematische Geographie. Hamburg, Grand.
26. F. Rusch, Himmelsbeobachtung mit bloßem Auge. Leipzig, B. G. Teubner. 1911.
27. F. Rusch, Das Schulfernrohr und was man damit sieht. Programm des Kgl. Realgymnasiums zu Goldap. 1909.

28. G. Degenhardt, Praktische Geometrie auf dem Gymnasium. Programm des Kgl. Kaiser Friedrich-Gymnasiums zu Frankfurt a. M. 1896.
29. A. Schwarz, Der geodätische Kursus usw. Programm der Oberrealschule an der Waitzstraße zu Kiel. 1907.
30. F. Bolte, Die Nautik. Stuttgart, J. Maier. 1900.
31. J. Möller, Nautik. Leipzig, B. G. Teubner. 1909.
32. A. Richter, Trigonometrische Aufgaben. Leipzig, B. G. Teubner. 1898.
33. B. Hoffmann, Die geodätischen Konstanten usw. Programm des Kgl. Realgymnasiums zu Nordhausen. 1894.
34. A. Lehnebach, Bestimmung von einigen auf Mühlhausen i. E. bezüglichen physikalischen Konstanten. Programm der Gewerbeschule zu Mühlhausen i. E. 1888.
35. F. Klein u. E. Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Leipzig, B. G. Teubner. 1900.
36. Fr. Schilling, Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Leipzig, B. G. Teubner. 1904. Diese selbständig erschienene Schrift bildet zugleich ein Stück des Werkes: F. Klein und E. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Leipzig, B. G. Teubner. 1904.]

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Keferstein, Direktor Professor Dr. H. in Hamburg, große Physiker. Bilder aus der Geschichte der Astronomie und Physik. [IV u. 233 S.] gr. 8. 1911. In Leinw. geb. M. 3.—

Keplers, J., Traum oder nachgelassenes Werk über die Astronomie des Mondes. Übersetzt und kommentiert von L. Günther. Mit dem Bildnis Keplers, dem Faksimile-Titel der Original-Ausgabe, 24 Abbildungen und 2 Tafeln. [XXII u. 186 S.] gr. 8. 1898. Geh. M. 8.—

Meißner, O., Hilfsrechner am Geodätischen Institut zu Potsdam, die meteorologischen Elemente und ihre Beobachtung. Mit Ausblicken auf Witterungskunde und Klimalehre. Unterlagen für schulgemäße Behandlung, sowie zum Selbstunterricht. Mit 33 Abbildungen. [VI u. 94 S.] Lex.-8. 1906. Geh. M. 2.60.

Pringsheim, E., Professor an der Universität Breslau, Physik der Sonne. Mit 235 Abbildungen und 7 Tafeln. [VIII u. 436 S.] gr. 8. 1910. Geh. M. 16.—, in Leinwand geb. M. 18.—

Rusch, F., Oberlehrer in Dillenburg, Himmelsbeobachtung mit bloßem Auge. Mit 30 Textfiguren und 1 Sternkarte als Doppeltafel. [IV u. 223 S.] 8. 1911. In Leinwand geb. M. 3.50.

Scheiner, Dr. J., Professor der Astrophysik an der Universität Berlin, Hauptobservator am Astrophysikalischen Observatorium bei Potsdam, populäre Astrophysik. 2. Auflage. Mit 30 Tafeln und 210 Figuren. [VI u. 723 S.] gr. 8. 1912. In Leinwand geb. M. 14.—

Schlee, P., Oberlehrer a. d. Oberrealschule a. d. Uhlenhorst zu Hamburg, Schülerübungen in der elementaren Astronomie. Mit 2 Figuren. [15 S.] Lex.-8. 1903. Geh. M. —.50.

Schoy, K., Oberlehrer am Städt. Gymnasium zu Essen, Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben. Mit 3 Figuren und 8 Tafeln. [VIII u. 40 S.] gr. 8. 1910. Geh. M. 1.60.

Schulze, Bruno, Generalmajor und Chef der Topographischen Abteilung der Landesaufnahme, Gr.-Lichterfelde, das militärische Aufnehmen. Mit 129 Abbildungen. [XIII u. 305 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. M. 8.—

Schwarzschild, Dr. Karl, Professor an der Universität Göttingen, Astrophysik. A. u. d. T.: Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen. gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung.]

——— über das System der Fixsterne. Aus populären Vorträgen. Mit 13 Fig. [44 S.] gr. 8. 1909. Geh. M. 1.—

Trabert, Dr. W., ord. Professor an der Universität Wien, Lehrbuch der kosmischen Physik. Mit 149 Figuren und 1 Tafel. [X u. 662 S.] gr. 8. 1911. Geh. M. 20.—, in Leinwand geb. M. 22.—

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung von zahlreichen Fachgenossen herausgegeben von F. Auerbach und R. Rothe. II. Jahrgang 1911/12. Mit einem Bildnis H. Minkowskis. [IX u. 567 S.] 8. In Leinwand geb. M. 7.— III. Jahrgang erscheint im November 1912.

Zondervan, Dr. H., in Groningen, allgemeine Kartenkunde. Mit 32 Figuren und 5 Tafeln. [X u. 210 S.] gr. 8. 1901. Geh. M. 4.60, in Leinw. geb. M 5.20.

Zöppritz, Dr. K., weil. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Leitfaden der Kartenentwurfslehre. Für Studierende der Erdkunde und deren Lehrer. 2. Auflage von Dr. A. Bludau, Professor am Gymnasium zu Coesfeld. In 2 Teilen. gr. 8.

I. Teil. Die Kartenprojektionslehre. Mit 100 Figuren und zahlreichen Tabellen. [X u. 178 S.] 1899. Geh. M. 4.80, in Leinwand geb. M. 5.80.

II. — Kartographie und Kartometrie. Mit 12 Figuren und 2 Tabellen sowie 2 Tafeln. [VIII u. 109 S.] 1908. Geh. M. 3.60, in Leinwand geb. M. 4.40.