

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II

4376

L. inw.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000294599

Гоголь

СТРОИТЕЛЬНАЯ
МЕХАНИКА.

Часть II.

СТАТИКА СООРУЖЕНИЙ.

СТРОИТЕЛЬНАЯ
МЕХАНИКА.

Часть II.
СТАТИКА СООРУЖЕНІЙ.

Л. Проскуряковъ,
проф. Императорскаго Московскаго Инженернаго Училища.

ИЗДАНИЕ 5-е

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія А. Бенке,  Новый переулочъ № 2.
1912.



114376

ТЕОРИЯ ФЕРМЪ.

ВВЕДЕНИЕ.

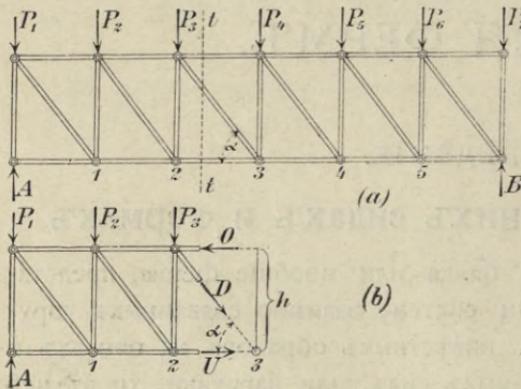
I. Понятія о внѣшнихъ силахъ и фермахъ.

1. Когда какая-нибудь балка или вообще ферма, представляющая собою одинъ или систему взаимно связанныхъ упругихъ стержней, закрѣплена извѣстнымъ образомъ на опорахъ и подвергается дѣйствию данныхъ силъ, или нагрузки, то въ ней вмѣстѣ съ нѣкоторымъ измѣненіемъ ея формы вызываются *внутреннія силы* или *напряженія* ея частей. Въ отличіе отъ этихъ силъ дѣйствующихъ на ферму силы, или *нагрузка*, вмѣстѣ съ *сопротивленіями опоръ* называются *внѣшними силами*.

Чтобы разсчитать ферму, т. е. найти напряженія въ ея частяхъ и провѣрить прочность ихъ, нужно прежде всего мысленно освободить ферму отъ опоръ, удаливъ послѣднія и замѣнивъ ихъ дѣйствіе соотвѣтственными силами, или *реакціями опоръ*. Когда ферма представлена такимъ образомъ какъ свободное твердое тѣло съ извѣстными взаимно уравновѣшенными на немъ внѣшними силами, то опредѣленіе внутреннихъ силъ дѣлается затѣмъ по общему способу (см. ч. I стр. 36). Отдѣляютъ воображаемымъ разрѣзомъ какую-нибудь часть фермы отъ остальной и прилагаютъ въ мѣстѣ разрѣза *внутреннія силы, представляющія дѣйствіе отнятой части на разсматриваемую*. Тогда изъ условій равновѣсія этой выдѣленной части фермы съ приложенными къ ней данными внѣшними силами и неизвѣстными внутренними находятъ величину послѣднихъ.

Пусть, напр., дана ферма *AB* (фиг. 1а) съ вертикальными внѣшними силами (нагрузкой P_1, P_2, P_3, \dots и опорными сопротивленіями

А и В), составленная изъ прямыхъ элементовъ, соединенныхъ между собою шарнирами. Раздѣливъ мысленно ферму какимъ-нибудь разрѣзомъ tt на двѣ части, отбросимъ правую (фиг. 1*b*) и ея дѣйствіе на лѣвую часть замѣнимъ внутренними силами O , U и D , относительно которыхъ ниже будетъ доказано, что онѣ дѣйствуютъ по направленіямъ пересѣченныхъ трехъ элементовъ фермы, т. е. силы O и U —



Фиг. 1.

горизонтальны, а D наклонена подъ даннымъ угломъ α къ горизонту. Такъ какъ лѣвая часть фермы съ находящимися на ней внѣшними силами и внутренними O , U и D должна оставаться въ состояніи равновѣсія, то изъ условія его $\Sigma Y = 0$ относительно вертикальной оси слѣдуетъ, что вертикальная проекція Q внѣшнихъ силъ лѣвой

отсѣченной части фермы, или поперечная сила, должна быть равна и противоположна проекціи внутреннихъ силъ ея $DSna$ (ибо проекціи O и $U =$ нулю), т. е. $DSna = Q$. Точно такъ же условіе равновѣсія $\Sigma M = 0$ требуетъ, чтобы моментъ M внѣшнихъ силъ лѣвой части фермы (изгибающій моментъ) относительно какой-нибудь точки, напр. точки (3) пересѣченія направленій силъ U и D , долженъ быть равенъ и противоположенъ моменту внутреннихъ силъ $O \cdot h$ (ибо моменты силъ U и D для точки 3 равны нулю), т. е. $O \cdot h = M$. Если же вмѣсто точки (3) возьмемъ моментъ M_2 тѣхъ же внѣшнихъ силъ лѣвой части фермы относительно точки (2) пересѣченія направленій внутреннихъ силъ O и D , то для равновѣсія необходимо приравнять его моменту усилія U , т. е. $U \cdot h = M_2$.

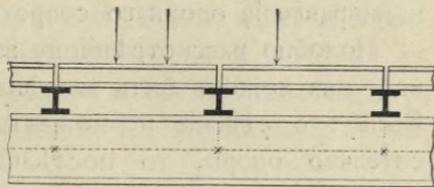
Такимъ образомъ внутреннія силы O , U и D вполне опредѣляются величинами M и Q внѣшнихъ силъ лѣвой части фермы относительно tt .

Очевидно, эти значенія Q и M внѣшнихъ силъ будутъ измѣняться въ зависимости отъ способа размѣщенія нагрузки на фермѣ, а съ ними будутъ измѣняться и значенія опредѣляемыхъ ими вну-

треннихъ силъ O , U и D , при чемъ наибольшія величины послѣднихъ соотвѣтствуютъ наибольшимъ значеніямъ Q и M первыхъ. Такъ какъ величины Q и M зависятъ отъ нагрузки и ея расположенія на фермѣ, то изученіе способовъ дѣйствія и распределенія нагрузки, дающихъ наибольшія значенія M и Q внѣшнихъ силъ, выдѣляется въ самостоятельный отдѣлъ — «теорію внѣшнихъ силъ», предварительное ознакомленіе съ которымъ значительно упрощаетъ изученіе второй части — теоріи внутреннихъ силъ фермъ.

Спротивленія опоръ опредѣляются нагрузкой и закрѣпленіемъ фермъ на опорахъ ¹⁾, поэтому съ видами нагрузки, опорныхъ закрѣпленій и фермъ необходимо прежде всего ознакомиться.

2. Нагрузка. По способу дѣйствія на ферму нагрузка бываетъ: *постоянная* (напр. вѣсъ моста) и *подвижная или временная* (вѣсъ поѣзда, давленіе вѣтра), смотря по тому, дѣйствуетъ ли она постоянно или періодически; *сосредоточенная*, когда она имѣетъ конечную величину и приложена въ одной точкѣ, и *сплошная или непрерывная*, когда она распределена по линіи или поверхности. Кромѣ того нагрузка можетъ непосредственно дѣйствовать на ферму и тогда называется *прямою*, или ея дѣйствіе передается фермѣ черезъ особыя вспомогательныя балочки въ опредѣленныя точки ея, или *узлы* (фиг. 2); такая нагрузка носить названіе *узловой*, а промежутокъ между двумя смежными узлами называется *панелью*.



Фиг. 2.

Нагрузка, или силы, дѣйствующія на ферму, предполагаются лежащими въ одной плоскости, совпадающей съ плоскостью оси фермы, если она — сплошная, или заключающей въ себѣ оси всѣхъ частей фермы, если она — сквозная, т. е. представляетъ систему взаимно связанныхъ стержней.

¹⁾ Только въ случаяхъ фермъ со *статически неопредѣлимыми* опорными сопротивленіями представляется необходимостью для нахождения величины послѣднихъ принимать въ расчетъ еще упругость фермы и условія ея деформаци.

Точно такъ же будетъ предполагаться, что дѣйствующая на ферму нагрузка производить настолько малыя измѣненія, или *деформации* ея частей, что ими при расчетахъ можно пренебрегать, принимая ферму какъ бы за абсолютно неизмѣняемую систему.

3. Опорныя закрѣпленія. Когда ферма на опорѣ закрѣплена одной своей точкой, вокругъ которой она можетъ вращаться, то такая опора называется *неподвижной шарнирной опорой* (опора *B* на фиг. 4). Очевидно, ея противодѣйствіе, или сопротивленіе, представляетъ силу, проходящую черезъ эту точку или шарниръ.

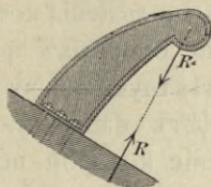
Если же точка закрѣпленія фермы на опорѣ при этомъ можетъ свободно (безъ тренія) перемѣщаться по нѣкоторой прямой, то противодѣйствіе такой опоры, называемой *подвижной шарнирной* (опора *A* фиг. 4 и 5) выразится силой, проходящей черезъ разсматриваемую точку, или шарниръ, и направленной нормально къ линіи движенія ея. Такимъ образомъ въ послѣднемъ случаѣ относительно опорнаго сопротивленія является неизвѣстнымъ *одна* величина ея, тогда какъ въ случаѣ неподвижной шарнирной опоры представляется *два* неизвѣстныхъ — величина и направленіе опорнаго сопротивленія.

Подобно разсмотрѣнному закрѣпленію фермы на опорѣ точкой, она можетъ быть закрѣплена по всей линіи или сѣченію ея. Если это сѣченіе не можетъ измѣнять своего положенія относительно опоры, то послѣдняя называется *неподвижной плоской опорой* (опора фиг. 3). При такомъ закрѣпленіи относительно опорнаго сопротивленія имѣется *три* неизвѣстныхъ — величина, направленіе ея и точка приложенія.

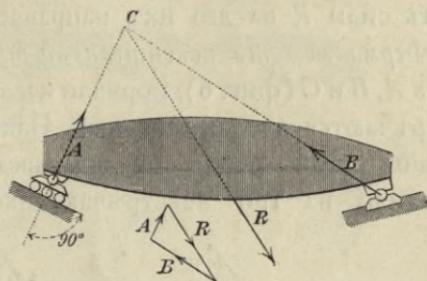
Если же сѣченіе фермы закрѣплено на опорѣ такъ, что оно можетъ относительно ея свободно скользить въ своей плоскости, то для такой *плоской подвижной* опоры будетъ извѣстно только направленіе опорнаго противодѣйствія, которое должно быть нормальнымъ къ пути скольженія сѣченія (опора *B* фиг. 5), такъ что относительно опорнаго сопротивленія будетъ *два* неизвѣстныхъ — величина ея и точка приложенія.

4. Простыя фермы. Такъ какъ для равновѣсія твердаго тѣла въ плоскости статика даетъ три условія, или уравненія [$\Sigma X=0$ $\Sigma Y=0$ и $\Sigma M=0$], то для фермъ со *статически опредѣленными реакціями* число неизвѣстныхъ въ опорныхъ сопротивле-

ніяхъ не должно превышать трехъ. Поэтому такія фермы въ отношеніи опоръ могутъ представить только одинъ изъ слѣдующихъ четырехъ типовъ:



Фиг. 3.

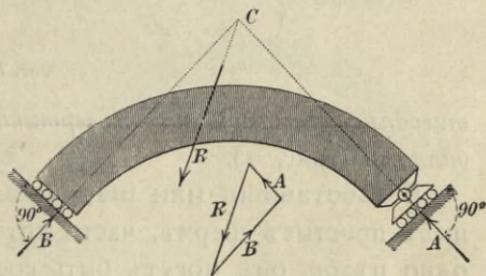


Фиг. 4.

1. Ферма можетъ имѣть одну неподвижную плоскую опору, сопротивленіе которой очевидно должно быть равно и направлено противоположно равнодѣйствующей R приложенной къ фермѣ нагрузки (фиг. 3).

2. Ферма можетъ быть расположена на двухъ шарнирныхъ опорахъ: подвижной A и неподвижной B (фиг. 4). Опорное сопротивленіе A , проходящее черезъ шарниръ A нормально къ пути скольженія послѣдняго, встрѣчаетъ равнодѣйствующую R нагрузки въ точкѣ C , черезъ которую должно пройти и противодѣйствіе другой опоры B , исходящее изъ шарнира B . По извѣстнымъ направленіямъ величина опорныхъ сопротивленій найдется разложеніемъ силы R на составляющія съ помощью треугольника силъ.

3. Ферма можетъ быть закреплена на двухъ подвижныхъ опорахъ: одной плоской B и другой шарнирной A (фиг. 5). Дѣйствительно, направленія опорныхъ сопротивленій, перпендикулярныхъ къ линіямъ скольженій,

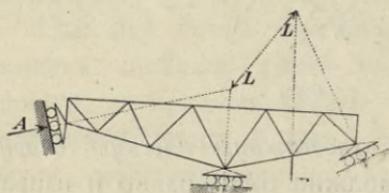


Фиг. 5.

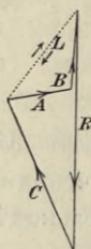
даны, а равно и точка приложенія противодѣйствія A ; слѣдовательно, точка C пересѣченія послѣдняго съ равнодѣйствующей R нагрузки опредѣлится. Такъ какъ черезъ эту точку должны проходить всѣ три силы, находящіяся между собою въ равновѣсіи,

то и сопротивление опоры B , какъ проходящее черезъ точку C и перпендикулярное къ линіи скольженія опоры B , также будетъ извѣстно. Величина сопротивленій опоръ A и B получится разложениемъ силы R на два ихъ направленія.

4. Ферма можетъ покоиться на трехъ подвижныхъ шарнирныхъ опорахъ A, B и C (фиг. 6), нормали къ линіямъ скольженія которыхъ не встрѣчаются въ одной точкѣ. Нахожденіе опорныхъ противодѣйствій такой фермы представляетъ извѣстную задачу разложенія силы на три невстрѣчающихся вмѣстѣ направленія, рѣшеніе которой показано на фиг. 6 (см. ч. I стр. 12).



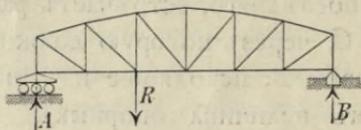
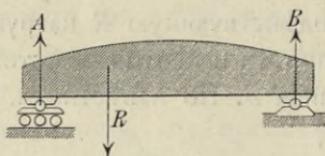
Фиг. 6.



Во всѣхъ четырехъ приведенныхъ типахъ фермъ число неизвѣстныхъ въ опорныхъ сопротивленіяхъ равно 3. Чаше всего встрѣчается въ практикѣ

второй типъ, при чемъ въ случаѣ горизонтальной линіи скольженія опоры A фермы при вертикальной нагрузкѣ имѣютъ про-

тиводѣйствія опоръ также вертикальныя и называются простыми балками (фиг. 7).



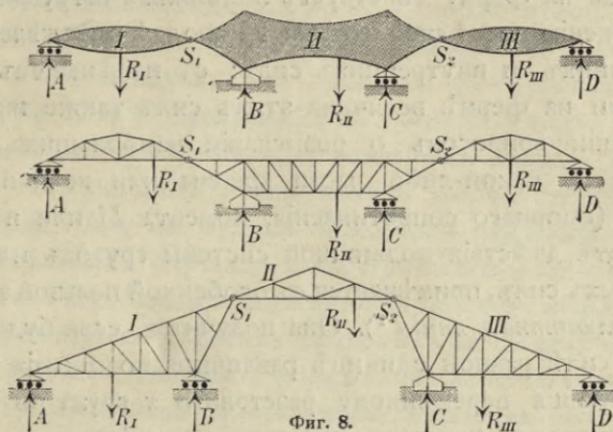
Фиг. 7.

тиводѣйствія опоръ также вертикальныя и называются простыми балками (фиг. 7).

5. Составныя или шарнирныя фермы. Кромѣ рассмотрѣнныхъ простыхъ фермъ, части которыхъ связаны неизмѣняемо въ одно цѣлое, онѣ могутъ быть составлены изъ двухъ или болѣе такихъ простыхъ фермъ, соединенныхъ между собою однимъ или болѣе промежуточныхъ шарнировъ, вокругъ которыхъ онѣ могутъ вращаться. Такія фермы называются *составными*, или *шарнирными* (фиг. 8 и 9).

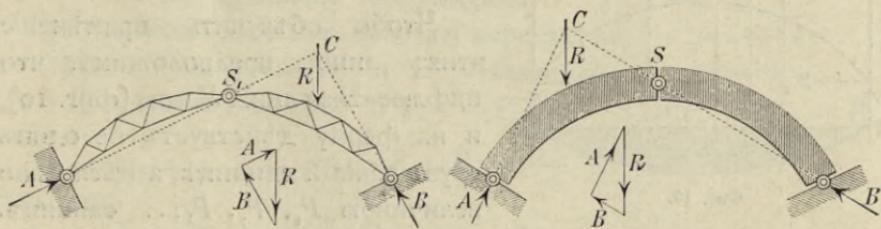
Чтобы онѣ были статически опредѣлимыми, необходимо, чтобы число промежуточныхъ шарнировъ было равно числу недостающихъ условій для опредѣленія неизвѣстныхъ въ опорныхъ со-

противленіяхъ. Напримѣръ, въ фермѣ, покоящейся на 4 шарнирныхъ опорахъ (фиг. 8), одной неподвижной (2 неизвѣстныхъ) и трехъ подвижныхъ (3 неизвѣстныхъ), число промежу-



Фиг. 8.

точныхъ шарнировъ должно быть $5 - 3 = 2$; а въ аркѣ на 2 неподвижныхъ шарнирныхъ опорахъ (2×2 неизвѣстныхъ) требуется для статической опредѣлимости $4 - 3 =$ одинъ промежуточный шарниръ (фиг. 9). Въ балкѣ на n шарнирныхъ опорахъ, изъ которыхъ одна только неподвижная, для статической опредѣлимости нужно помѣстить $n + 1 - 3 = n - 2$ промежуточныхъ шарнировъ.

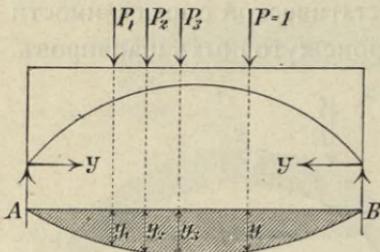


Фиг. 9.

Дѣйствительно, каждый промежуточный шарниръ позволяетъ написать новое условіе равновѣсія, состоящее въ томъ, что равнодѣйствующая вѣтъ внешнихъ силъ, приложенныхъ къ части фермы слева или справа промежуточнаго шарнира, должна проходить черезъ послѣдній, или что моментъ этихъ силъ относительно даннаго шарнира равенъ нулю; въ противномъ случаѣ рассматриваемая часть фермы вращалась бы вокругъ шарнира.

II. Общія свойства инфлюентныхъ линій.

6. Когда на ферму дѣйствуетъ подвижная нагрузка, то каждому положенію послѣдней отвѣчаютъ вполне опредѣленные значенія внѣшнихъ и внутреннихъ силъ; съ измѣненіемъ положенія нагрузки на фермѣ величина этихъ силъ также измѣняется. При рѣшеніи вопросовъ о розысканіи наибольшихъ значеній напряженія U какой-либо части фермы или величины внѣшнихъ силъ (опорнаго сопротивленія, момента M или поперечной силы Q) отъ дѣйствія подвижной системы грузовъ или вообще параллельныхъ силъ, примѣняется съ особенной пользой такъ называемая *инфлюентная линія*¹⁾. Она получится, если будемъ давать грузу или силѣ равной единицѣ различныя положенія на фермѣ, соотвѣтствующія переменному разстоянію x груза по оси x -овъ и, опредѣливъ для cadaго изъ нихъ соотвѣтственное значеніе одной и той же разсматриваемой величины U , отложимъ ихъ по направленію силы, какъ ординаты y отъ какой-нибудь прямой AB . Тогда линія, проходящая чрезъ концы ординатъ, и представитъ *инфлюентную линію* U , т. е. линію вліянія груза равнаго единицѣ на величину U разсматриваемой внѣшней или внутренней силы.



Фиг. 10.

Чтобы объяснить примѣненіе этихъ линій, предположимъ, что инфлюентная линія U дана (фиг. 10), и на ферму дѣйствуетъ не одинъ грузъ равный единицѣ, а нѣсколько величину P_1, P_2, P_3, \dots единицъ.

Если ординаты инфлюентной линіи, соотвѣтствующія положеніямъ этихъ грузовъ, обозначимъ черезъ y_1, y_2, y_3, \dots , то по закону независимости дѣйствій $P_1 y_1, P_2 y_2, P_3 y_3, \dots$ силъ P_1, P_2, P_3, \dots значеніе U выразится суммой

$$U = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots \quad (1)$$

¹⁾ Инфлюентныя линіи въ первый разъ были примѣнены Винклеромъ и Вейраухомъ къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ, но только послѣ подробнаго изложенія и развитія инфлюентныхъ линій, сдѣланнаго Френкелемъ въ «Civilingenieur» 1876, онѣ вошли во всеобщее употребленіе.

Давая подвижной системѣ данныхъ грузовъ на фермѣ рядъ положеній и опредѣляя каждый разъ соотвѣтственную величину U , можно найти для нея наибольшее или наименьшее значеніе.

Относительно измѣренія ординатъ y инфлюентной линіи слѣдуетъ замѣтить, что когда она принадлежитъ силѣ, то изъ выраженія $U = \sum Py$ слѣдуетъ, что ординаты y — нулеваго измѣренія, такъ какъ U и P выражаются въ единицахъ силъ. Для линіи момента ординаты измѣряются въ единицахъ длины; для линіи напряженія — въ единицѣ длины минусъ второй степени и т. д.

Но прежде чѣмъ мы будемъ опредѣлять видъ инфлюентныхъ линій въ отдѣльныхъ случаяхъ разсматриваемой величины U , будетъ весьма полезно показать здѣсь общія свойства инфлюентныхъ линій, знаніе которыхъ сократитъ выводы ихъ въ частныхъ случаяхъ.

7. При узломъ дѣйствіи нагрузки инфлюентная линія представляетъ многочленъ съ вершинами, лежащими подъ узлами.

Пусть грузъ P находится между n и $n - 1$ узлами фермы (фиг. 11) въ разстояніяхъ отъ нихъ x и $d - x$, и пусть y_n и y_{n-1} — ординаты искомой инфлюентной линіи U для этихъ узловъ, представляющія значенія U при положеніи груза единицы въ узлахъ n или $n - 1$, а y — ордината, соотвѣтствующая промежуточному положенію груза P ; ея величину найдемъ изъ слѣдующихъ соображеній.

Если вспомогательная балочка передаетъ отъ груза P на узлы $n - 1$ и n давленія P_{n-1} и P_n по закону рычага, то $P_n x = P_{n-1} (d - x)$ и $P_n + P_{n-1} = P$, откуда

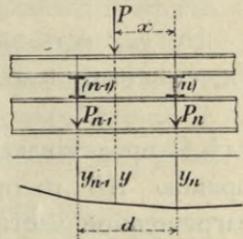
$$P_{n-1} = \frac{x}{d} P \text{ и } P_n = \frac{d-x}{d} P.$$

Такъ какъ

$$Py = P_{n-1} y_{n-1} + P_n y_n,$$

то подставляя сюда значенія P_{n-1} и P_n , получимъ

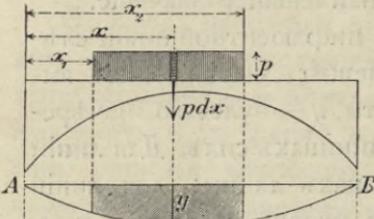
$$y = \frac{x}{d} y_{n-1} + \frac{d-x}{d} y_n,$$



Фиг. 11.

уравненіе для y первой степени относительно x , слѣд., между двумя смежными узлами инфлюентная линія представляетъ прямую, для построенія которой достаточно имѣть ординаты въ узловыхъ точкахъ. Такъ какъ эти ординаты соотвѣтствуютъ положеніямъ груза надъ узлами, когда дѣйствіе его на ферму не отличается

отъ непосредственнаго приложенія къ ней, то онѣ должны принадлежать также и инфлюентной линіи для случая прямого дѣйствія нагрузки на ферму, а потому



Фиг. 12.

первая линія, имѣющая видъ многочлена, является вписанной во вторую. Это свойство даетъ весьма простой способъ находить инфлюентную линію для узловой нагрузки, когда извѣстна она для прямой нагрузки.

8. Разсмотримъ теперь другое свойство инфлюентныхъ линій, относящееся къ дѣйствию *сплошной равномерной нагрузки*, величину которой на единицу длины фермы назовемъ черезъ p (фиг. 12). Такая нагрузка можетъ быть раздѣлена на элементарныя части pdx соотвѣтственно длинѣ фермы dx , которыя могутъ быть рассматриваемы какъ сосредоточенные грузы.

Дѣйствіе такого груза выразится произведеніемъ $pdx \cdot y$, а для всей нагрузки—суммой

$$U = \sum pydx = p \sum ydx.$$

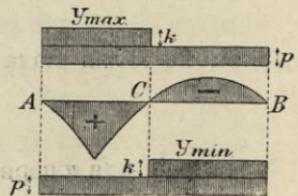
Но ydx есть элементъ площади инфлюентной линіи на длинѣ dx , слѣдовательно,

$$U = pQ, \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ Q представляетъ площадь инфлюентной линіи, ограниченную прямою AB и ординатами, соотвѣтствующими началу и концу загруженной части фермы. Поэтому:

Дѣйствіе равномерной нагрузки выражается соотвѣтственной площадью инфлюентной линіи, умноженной на величину p нагрузки на единицу длины фермы.

Когда всѣ ординаты инфлюентной линіи имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, то наибольшая величина U соотвѣтствуетъ загрузенію всей фермы и равна Qp , гдѣ Q —площадь всей инфлюентной линіи. Въ случаѣ ординатъ различныхъ знаковъ (фиг. 13) $\max U$ получается при загрузеніи части фермы съ положительными ординатами и равно kQ_1 , а $\min U$ при загрузеніи части фермы съ отрицательными ординатами и выражается черезъ $-kQ_2$, гдѣ Q_1 и Q_2 означаютъ площади положительной и отрицательной частей инфлюентной



Фиг. 13.

лині, а k — величину подвижной нагрузки. При загрузжені обѣихъ частей фермы нагрузкой p значеніе $Y = (\Omega_1 - \Omega_2)p$.

9. Система сосредоточенныхъ грузовъ. При розысканіи предѣльныхъ значеній Y отъ подвижной системы сосредоточенныхъ грузовъ съ помощью инфлюентной линіи, скорѣе всего можно найти соотвѣтственное невыгоднѣйшее положеніе системы грузовъ послѣдовательными пробами, давая системѣ какое-нибудь положеніе на фермѣ и опредѣляя затѣмъ для него не величину $Y = \Sigma Py$, а только знакъ приращенія ΔY , которое получить Y , если система изъ даннаго ей положенія будетъ сдвинута *вправо* на элементарную длину Δx , или знакъ производной $\Delta Y : \Delta x = Y'$.

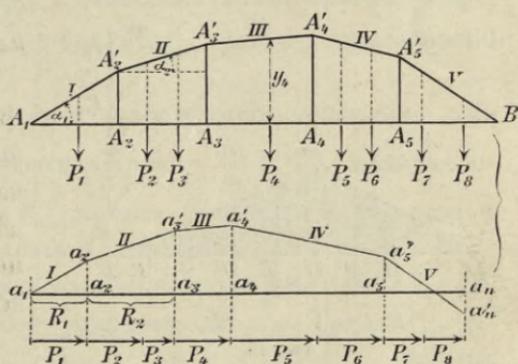
При опредѣленіи $\max Y$ положительный знакъ у приращенія ΔY показываетъ, что систему нужно перемѣщать вправо, а отрицательный — влѣво; когда же система займетъ положеніе, соотвѣтствующее $\max Y$, то знакъ у ΔY при сдвиженіи вправо и влѣво будетъ одинаково отрицательный. Для $\min Y$ знаки будутъ обратные разсмотрѣннымъ при $\max Y$.

Самое опредѣленіе знака и величины ΔY дѣлается графически слѣдующимъ образомъ въ случаѣ, когда инфлюентная линія представляетъ собою *многоугольникъ* (фиг. 14) съ прямыми сторонами $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ соотвѣтствующими частямъ фермы A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 (что всегда имѣетъ мѣсто для узловой нагрузки).

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ будутъ углы наклоненія послѣдовательныхъ сторонъ $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ къ прямой AB , а R_1, R_2, R_3, \dots — суммы, или равнодѣйствующія грузовъ, приложенныхъ къ соотвѣтственнымъ частямъ фермы $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$

При перемѣщеніи системы вправо на величину Δx ,

ординаты всѣхъ грузовъ 1-й части фермы получаютъ равныя приращенія $\Delta x \operatorname{tg} \alpha_1$, ординаты грузовъ 2-й части A_2A_3 — приращенія $\Delta x \operatorname{tg} \alpha_2$, для грузовъ 3-й части A_3A_4 — приращенія $\Delta x \operatorname{tg} \alpha_3$, и т. д., такъ что приращеніе $Y = \Sigma Py$ выразится черезъ



Фиг. 14.

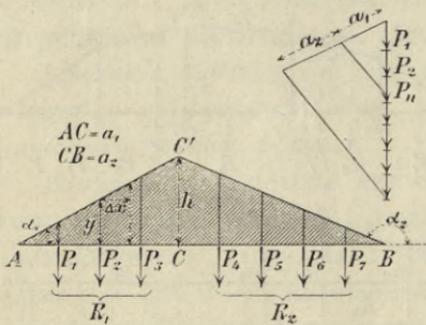
$$\Delta Y = [R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + \dots] \Delta x, \text{ откуда производная}$$

$$Y' = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + \dots \quad (3)$$

При положительном Δx (сдвигеніе вправо) знак ΔY обусловливается знакомъ выраженія въ скобкахъ или производной. Если на нѣкоторой прямой $a_1 a_n$ отложимъ послѣдовательно отрѣзки $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4, \dots$ равныя R_1, R_2, R_3, \dots , и изъ точки a_1 проведемъ многоугольникъ со сторонами $a_1 a'_2, a'_2 a'_3, a'_3 a'_4, \dots$, параллельными послѣдовательнымъ сторонамъ инфлюентной линіи $A_1 A'_2, A'_2 A'_3, A'_3 A'_4, \dots$ и вершинами на перпендикулярахъ $a_2 a'_2, a_3 a'_3, a_4 a'_4, \dots$ къ прямой $a_1 a_n$, то отрѣзокъ $a_n a'_n$, опредѣляемый послѣдней стороной на перпендикулярѣ изъ крайней точки a_n , представитъ графически величину $R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + R_4 \operatorname{tg} \alpha_4 + \dots$, знакъ которой будетъ положительнымъ, если отрѣзокъ $a_n a'_n$ окажется надъ прямою $a_1 a_n$, и отрицательнымъ въ обратномъ случаѣ.

Очевидно, производная $Y' = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + \dots$ съ постоянными множителями $\operatorname{tg} \alpha_1, \operatorname{tg} \alpha_2, \operatorname{tg} \alpha_3, \dots$ можетъ измѣнить свою величину или знакъ лишь при измѣненіи значеній R_1, R_2, R_3, \dots , т. е. при переходѣ какого-нибудь груза изъ одной части фермы въ другую, когда онъ совпадаетъ съ одной изъ вершинъ инфлюентной линіи. Подобное же положеніе системы очевидно будетъ имѣть мѣсто и для $\max Y$ или для $\min Y$.

10. Рассмотрим случай инфлюентной линіи въ видѣ треугольника, весьма часто встрѣчающійся въ практикѣ, и опредѣлимъ для ней невыгоднѣйшее положеніе системы грузовъ (фиг. 15).



Фиг. 15.

Примѣняя къ этой инфлюентной линіи вышеизложенный способъ опредѣленія $\max Y$ по приращенію ΔY , назовемъ сумму грузовъ въ лѣвой части AC черезъ R_1 и правой CB черезъ R_2 . При передвиженіи системы вправо производная отъ Y

$$Y' = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Если обозначимъ черезъ h высоту CC' треугольника и черезъ a_1 и a_2 длину частей AC и CB фермы, то

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h}{a_1} \text{ и } \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{h}{a_2},$$

и потому

$$Y' = h \left[\frac{R_1}{a_1} - \frac{R_2}{a_2} \right] \dots \dots \dots (4)$$

Знакъ производной Y' будетъ одинаковъ со знакомъ выраженія въ скобкахъ; слѣдовательно, пока $\frac{R_1}{a_1}$, т. е. средняя нагрузка на единицу длины лѣвой части AC фермы будетъ больше $\frac{R_2}{a_2}$ — средней нагрузки правой части, то передвиженіе системы вправо будетъ давать положительное приращеніе ΔY , и Y будетъ возрастать, пока наконецъ при этомъ передвиженіи не перейдетъ изъ лѣвой части въ правую такой грузъ P_n , при которомъ нагрузка лѣвой части $\frac{R_1}{a_1}$ сдѣлается меньше нагрузки правой $\frac{R_2}{a_2}$. Тогда наибольшее значеніе Y и будетъ соответствовать положенію этого груза P_n въ точкѣ C подъ вершиной треугольника, потому что при этомъ положеніи системы перемѣщенія ея вправо и влѣво даютъ отрицательныя приращенія ΔY , т. е. уменьшаютъ Y , вслѣдствіе отрицательнаго знака въ первомъ случаѣ у $\frac{R_1}{a_1} - \frac{R_2}{a_2}$, а во второмъ у величины Δx .

Въ случаѣ, когда $\frac{R_1}{a_1} < \frac{R_2}{a_2}$, нужно поступать обратно, — передвигать систему влѣво, пока не найдется грузъ P_n , измѣняющій знакъ неравенства. Поэтому:

При инфлюэнтной линіи въ видѣ треугольника наибольшее значеніе Y соответствуетъ равенству нагрузокъ $\frac{R_1}{a_1} = \frac{R_2}{a_2}$ лѣвой и правой части фермы, когда грузъ P_n станетъ въ точкѣ C на границѣ обѣихъ частей инфлюэнтной линіи.

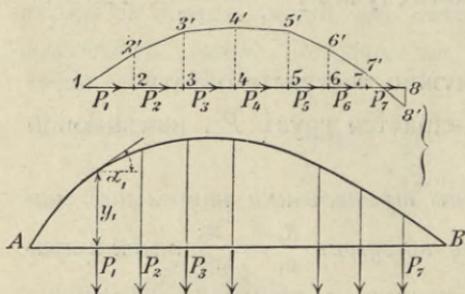
Чтобы найти грузъ P_n , необходимо всю нагрузку $R = R_1 + R_2$ раздѣлить на $a_1 + a_2$ и частное умножить на a_1 . Тогда P_n будетъ первый грузъ, дѣлающій сумму $P_1 + P_2 + P_3 + \dots$ больше найденной нагрузки $R \frac{a_1}{a_1 + a_2}$.

Очевидно, если отложить на нѣкоторой прямой (фиг. 15) послѣдовательно величины всѣхъ грузовъ, дѣйствующихъ на ферму, и раздѣлить эту сумму на двѣ части пропорціональныя отрѣзкамъ AC и CB , то точка дѣленія придется на искомомъ грузѣ P_n .

Этимъ свойствомъ для опредѣленія невыгоднѣйшаго положенія системы грузовъ можно приближенно пользоваться и въ томъ даже случаѣ, когда треугольная инфлюентная линія имѣетъ боковыя стороны *криволинейныя*. Когда онѣ состоятъ изъ двухъ параболъ $y = Cx^2$ и $y_1 = C_1x_1^2$, касательныхъ къ AB въ точкахъ A и B и имѣющихъ въ пересѣченіи C' общую ординату $h = Ca_1^2 = C_1a_2^2$, то для $\max. U = \Sigma Py + \Sigma Py_1$ производная $U' = \Sigma Py' - \Sigma Py'_1 = -2C\Sigma Px - 2C_1\Sigma Px_1 = 0$, или $\frac{\Sigma Px}{a_1^2} = \frac{\Sigma Px_1}{a_2^2}$, т. е. давленія $\frac{1}{a_1} \Sigma Px$ и $\frac{1}{a_2} \Sigma Px_1$, вспомогательныхъ балочекъ AC и CB на узелъ C пропорціональны ихъ длинѣ a_1 и a_2 , или эквивалентныя для этихъ давленій нагрузки лѣвыхъ и правыхъ грузовъ — равны.

Если же параболы AC' и $C'B$ $y = Cx^2$ и $y_1 = C_1x_1^2$ имѣютъ общую вершину и касательную $XC'X_1$ въ точкѣ C' началъ координатъ, такъ что $h = Ca_1^2 = C_1a_2^2$ и $U = \Sigma P(h - y) + \Sigma P(h - y_1)$, то для $\max U$ производная $U' = -\Sigma Py' + \Sigma Py'_1 = -2C\Sigma Px + 2C_1\Sigma Px_1 = 0$, или $\frac{1}{a_1} \Sigma Px = \frac{1}{a_2} \Sigma Px_1$, т. е. лѣвымъ и правымъ грузамъ для давленій на узлы A и B балочекъ $C'A$ и $C'B$ соотвѣтствуютъ равныя эквивалентныя нагрузки.

Если инфлюентная линія представляетъ собою одну *кривую*, то



Фиг. 16.

при розысканіи $\max U$ или $\min U$ можно замѣнить ее достаточно близкимъ къ ней многоугольникомъ, или же (фиг. 16) примѣнить предыдущее построеніе, отложивъ вмѣсто R_1, R_2, R_3, \dots на прямой $a_1 a_n$ самые грузы P_1, P_2, P_3, \dots и углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ принявъ равными угламъ касательныхъ

къ инфлюентной линіи въ точкахъ приложенія грузовъ. Дѣйствительно, если $U = \Sigma Py$, то приращеніе

$$\Delta U = \Sigma P dy = \Sigma Py' \Delta x = \Delta x \Sigma Py',$$

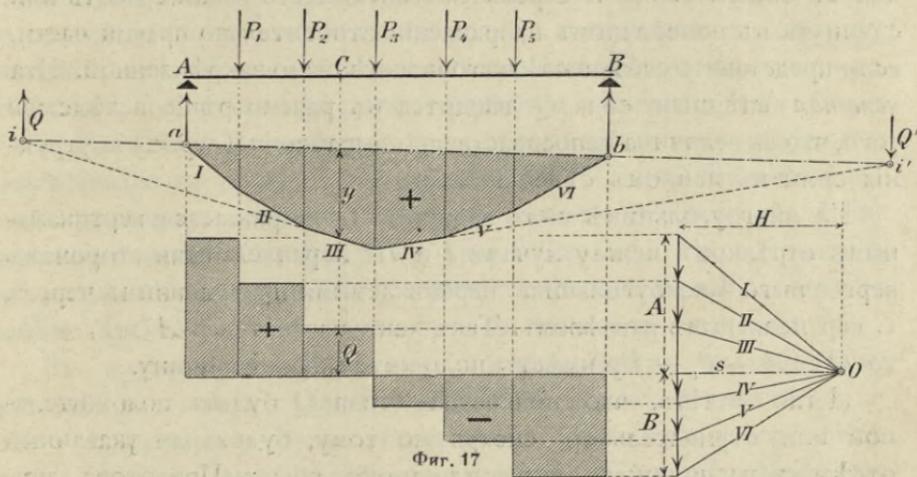
гдѣ y' означаетъ производную или tg угла касательной къ инфлюентной линіи въ соответственныхъ точкахъ приложенія грузовъ.

Предложенный мною аналитическій способъ опредѣленія величины $U = \Sigma Py$ съ помощью таблицы моментовъ грузовъ поѣзда см. дальше п. 65.

Внѣшнія силы фермъ.

III. Поперечныя силы и моменты въ простыхъ балкахъ.

11. Постоянная прямая нагрузка. Пусть на горизонтальную прямую балку AB (фиг. 17), лежащую на шарнирныхъ опорахъ A и B , дѣйствуютъ вертикальные грузы P_1, P_2, P_3, P_4 и



Фиг. 17

P_5 . Такъ какъ опорныя сопротивленія A и B уравниваются данными грузами, и одно изъ нихъ дѣйствуетъ вертикально, то и другое должно имѣть также вертикальное направленіе, въ противномъ случаѣ проекція всѣхъ взаимно уравновѣшенныхъ силъ на горизонтальную ось была бы неравна нулю.

Величина опорныхъ сопротивленій A и B опредѣлится разложениемъ нагрузки P_1, P_2, P_3, \dots или ея равнодѣйствующей на

двѣ вертикальныя составляющія, проходящія черезъ точки A и B , что легко дѣлается съ помощью веревочнаго многоугольника (фиг. 17 и ч. I, стр. 11).

Вычисленіемъ реакціи опоръ A и B опредѣляются, если взять моментъ M_B или M_A дѣйствующей на балку нагрузки $P_1, P_2, \dots P_5$ относительно опоры B или A и приравнять моменту реакціи опоръ A' или B' , откуда получимъ

$$A = \frac{M_B}{l} \text{ и } B = \frac{M_A}{l} \dots \dots \dots (5)$$

12. Поперечная сила. Если черезъ какую-нибудь точку C балки проведемъ вертикальный разрѣзъ, раздѣляющій ее на двѣ части, то равнодѣйствующая ¹⁾ внѣшнихъ силъ A, P_1, P_2 , приложенныхъ къ *левой* части AC балки, равна:

$$Q = A - P_1 - P_2, \dots \dots \dots (6)$$

если будемъ считать положительнымъ направленіе силы снизу вверхъ. Она называется *поперечной, вертикальной* или *перерѣзывающей силой* для сѣченія C балки и стремится лѣвую часть балки срѣзать или сдвинуть въ поперечномъ направленіи относительно правой части, если представить себѣ послѣднюю неизмѣняемо закрѣпленной. Эта *условная* внѣшняя сила Q вводится въ разсмотрѣніе вслѣдствіе того, что ея величина непосредственно выражаетъ (стр. 2) внутреннія силы въ данномъ сѣченіи балки.

На многоугольникѣ силъ величина Q выражается вертикальнымъ отрѣзкомъ между лучами s и III параллельными сторонамъ веревочнаго многоугольника, пересѣкаемыми проведеннымъ черезъ C вертикальнымъ разрѣзомъ. Такъ какъ на чертежѣ $A > P_1 + P_2$, то $Q = A - P_1 - P_2$ имѣетъ положительную величину.

Легко видѣть, что поперечная сила Q будетъ положительной или отрицательной, смотря по тому, будетъ ли указанный отрѣзокъ расположенъ выше или ниже луча s . При этомъ другой лучъ (III) будетъ проходить надъ лучемъ s или подъ нимъ, а параллельная ему сторона веревочнаго многоугольника будетъ имѣть восходящее или нисходящее направленіе относительно замыкающей стороны ab . Поэтому, когда поперечная сила *положительна*, ординаты у веревочнаго многоугольника относительно

1) Ср. ниже, стр. 40.

закрывающей стороны ab возрастаютъ, а когда Q — отрицательна, ординаты y убываютъ въ направленіи слѣва направо.

Очевидно, для всѣхъ сѣченій между двумя смежными грузами Q остается постоянной, такъ что *эюра* значеній поперечной силы Q представить горизонтальную прямую съ уступами, соответствующими точкамъ приложенія грузовъ. Крайнія значенія ея равны противодѣйствіямъ опоръ A и $-B$ (фиг. 17).

Иногда величину поперечной силы Q бываетъ легче найти изъ разсмотрѣнія внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ правой части балки. Въ такихъ случаяхъ нужно имѣть въ виду, что равнодѣйствующая, или сумма Q' этихъ силъ, равна и противоположна равнодѣйствующей Q силъ лѣвой части, такъ какъ онѣ взаимно уравниваются, т. е.

$$Q = -Q' = -B + P_3 + P_4 + P_5$$

13. Моментъ. Моментъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ лѣвой части балки, относительно точки C называется *моментомъ внѣшнихъ силъ, избегающимъ моментомъ* или просто *моментомъ для сѣченія C* балки. Онъ считается положительнымъ, если направленіе его вращенія совпадаетъ съ направленіемъ движенія часовой стрѣлки, и — отрицательнымъ, если оно противоположно. Величина его, какъ извѣстно, выражается произведеніемъ полюснаго разстоянія H многоугольника силъ на величину отрезка y , отсѣкаемаго на проведенной черезъ точку C вертикальной прямой крайними сторонами (III и ab) веревочнаго многоугольника рассматриваемыхъ силъ, т. е. произведеніемъ $H y$ ординаты y веревочнаго многоугольника, соответствующей точкѣ C , относительно замыкающей стороны ab , — на полюсное разстояніе H .

Въ простой балкѣ моментъ имѣетъ всегда *положительное* значеніе для всѣхъ сѣченій ея. Дѣйствительно, равнодѣйствующая Q внѣшнихъ силъ лѣвой части балки проходитъ черезъ точку i пересѣченія крайнихъ сторонъ III и ab веревочнаго многоугольника этихъ силъ. Когда Q имѣетъ положительную величину, т. е. направлена снизу вверхъ, сторона III , по предъидущему, будетъ восходящей относительно стороны ab и точка пересѣченія ихъ i будетъ лежать слѣва отъ сѣченія C ; при отрицательномъ значеніи Q пересѣкаемая сторона (IV) должна быть нисходящей относительно ab и встрѣтитъ послѣднюю въ точкѣ i' справа отъ C . Слѣдовательно, въ обоихъ случаяхъ направленіе

вращенія равнодѣйствующей Q силъ лѣвой части балки совпадаетъ съ направлениемъ часовой стрѣлки, и моментъ внѣшнихъ силъ остается всегда положительнымъ.

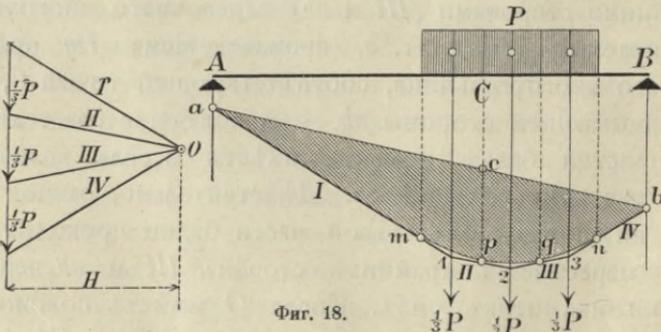
Знакъ момента можно различать еще тѣмъ, что при положительномъ моментѣ въ сѣченіи C ось балки изгибается въ этомъ мѣстѣ выпуклостью внизъ (\smile), а при отрицательномъ — вверхъ (\frown).

Очевидно, между двумя какими-нибудь смежными силами величина момента $Hу$ измѣняется одинаково съ $у$, т. е. по прямой.

Если оказывается въ какомъ-нибудь случаѣ легче опредѣлить знакъ или величину момента M внѣшнихъ силъ по моменту силъ *правой* части балки относительно того же сѣченія C , то нужно только помнить, что моменты M' и M силъ правой и лѣвой частей балки, вслѣдствіе ея равновѣсія, должны быть равны и противоположны, т. е. $M = -M'$.

Приложеніе веревочнаго многоугольника къ нахожденію момента M было дано въ первый разъ Кульманомъ.

14. Сплошная равномерная нагрузка. Когда на балку дѣйствуетъ сплошная нагрузка, то послѣднюю по длинѣ балки можно раздѣлить на элементарныя части и разсматривать ихъ, какъ сосредоточенные грузы. Построенный для нихъ веревочный многоугольникъ съ увеличеніемъ числа частей нагрузки и сторонъ его, при соответствующемъ уменьшеніи угла двухъ смежныхъ лучей и сторонъ многоугольника, переходитъ въ кривую, а эле-



Фиг. 18.

ментарныя стороны — въ касательныя къ ней, при чемъ построенный веревочный многоугольникъ оказывается описаннымъ около этой *веревочной кривой* (стр. 32 ч. I).

Дѣйствительно, пусть балка AB (фиг. 18) будетъ нагружена равномерно нагрузкой, общую величину которой назовемъ че-

резь P , и mn будетъ искомая веревочная кривая, крайнія стороны которой представляются касательными am и nb въ точкахъ m и n , параллельными крайнимъ лучамъ (I и IV) многоугольника силъ.

Если нагрузку P раздѣлимъ на три равныя элементарныя части, отложенныя на многоугольникѣ силъ, то лучи его I , II , III , IV будутъ параллельны касательнымъ къ веревочной кривой въ точкахъ m , p , q и n пересѣченія ея съ вертикальными прямыми, дѣлящими нагрузку на части.

Если отрѣзки веревочной кривой mp , pq и qn разсматривать отдѣльно, какъ веревочныя кривыя для соответственныхъ частей нагрузки, а касательныя къ ней въ точкахъ m , p , q и n — какъ крайнія стороны ихъ, то пересѣченіе двухъ смежныхъ касательныхъ опредѣлитъ точку, черезъ которую должна проходить равнодѣйствующая нагрузки соответствующей части, равная $\frac{1}{3} P$. Обозначимъ эти точки пересѣченія черезъ 1, 2, 3. Очевидно, полученный многоугольникъ $a123b$ представляетъ собою веревочный многоугольникъ, построенный для сосредоточенныхъ элементарныхъ грузовъ равныхъ $\frac{1}{3} P$, соответственно имѣющемуся многоугольнику силъ, и описанный около веревочной кривой, при чемъ точки касанія лежатъ на вертикальныхъ прямыхъ, раздѣляющихъ нагрузку на части.

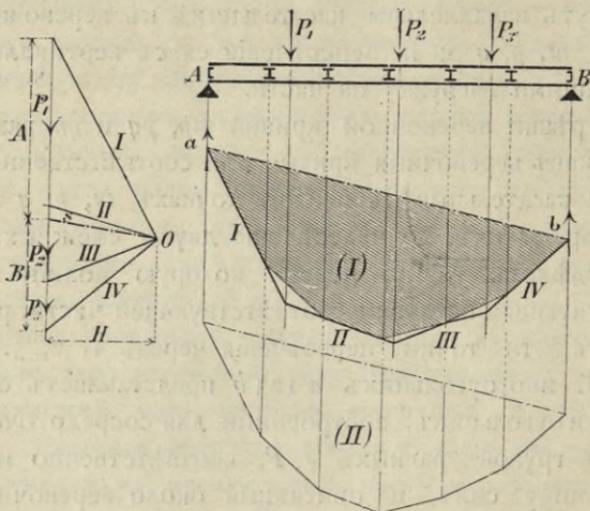
Поэтому, чтобы построить веревочную кривую, нагрузку раздѣляютъ на нѣсколько равныхъ частей и, замѣнивъ ихъ равными по величинѣ сосредоточенными грузами, приложенными въ срединѣ каждой части, строятъ для нихъ веревочный многоугольникъ; затѣмъ вписываютъ въ него веревочную кривую (параболу), касательную къ сторонамъ его въ точкахъ пересѣченія ихъ съ вертикальными прямыми, раздѣляющими нагрузку на части. Вписываніе можетъ быть сдѣлано приближенно съ помощью лекала.

Когда веревочная линія построена, сопротивленія опоръ, величина момента и поперечной силы могутъ быть опредѣлены подобно предыдущему.

15. Постоянная узловая нагрузка. Разсмотримъ теперь узловое дѣйствіе какой-нибудь нагрузки. Пусть P_1, P_2, P_3, \dots будутъ грузы, передающіе свое давленіе балкѣ AB при посредствѣ промежуточныхъ балочекъ на узлы ея (фиг. 19).

Если крайніе изъ послѣднихъ лежатъ на однѣхъ вертикальныхъ прямыхъ съ опорами A и B балки, то давленія этихъ опоръ

будутъ тѣ же, какъ и при прямомъ дѣйствиіи данныхъ грузовъ на балку. Дѣйствительно, давленіе опоры, напр. A , вообще опредѣляется изъ условія равновѣсія $A l - M_B = 0$ или $A = \frac{1}{l} M_B$, гдѣ M_B означаетъ моментъ всей нагрузки балки относительно другой опоры B .



Фиг. 19.

Поэтому для M_B получится то же самое значеніе, будетъ ли эта нагрузка $P_1, P_2, P_3 \dots$, какъ это имѣетъ мѣсто въ первомъ случаѣ, или ихъ узловая составляющія соотвѣтственно второму случаю дѣйствія нагрузки, такъ какъ моментъ составляющихъ силъ всегда равенъ моменту ихъ равнодѣйствующей.

По этой же причинѣ моментъ M внѣшнихъ силъ лѣвой части балки относительно какого-нибудь узла (напр. 3) будетъ одинаковъ въ обоихъ случаяхъ и не зависитъ отъ способа передачи нагрузки черезъ балочки. Слѣдовательно,

Для всѣхъ стѣнѣй, совпадающихъ съ узлами, значенія моментовъ при прямомъ и узловомъ дѣйствіяхъ нагрузки одинаковы.

Поэтому, если построимъ веревочный многоугольникъ для данной нагрузки $P_1, P_2, P_3 \dots$ въ предположеніе непосредственнаго ея дѣйствія на балку и проведемъ затѣмъ въ немъ замыкающую сторону ab и ординаты его въ узловыхъ точкахъ, то лучъ s параллельный сторонѣ ab опредѣлитъ на многоугольникѣ силъ величину опорныхъ сопротивленій A и B , а узловые орди-

наты по умноженіи на полюсное разстояніе H дадутъ величину моментовъ и для узлового дѣйствія нагрузки.

Кромѣ того, если соединимъ концы узловыхъ ординатъ прямыми, то полученный (заштрихованный на чертежѣ) многоугольникъ (I) представитъ собою въ то же время и веревочный многоугольникъ для узлового дѣйствія данной нагрузки, опредѣляющій моментъ для любого сѣченія балки.

Дѣйствительно, если узловые давленія отложить на томъ же многоугольникѣ силъ и отъ той же точки и построить затѣмъ веревочный многоугольникъ (II) , то при томъ же полюсѣ O крайніе лучи будутъ совпадать въ обоихъ многоугольникахъ по равенству суммы грузонъ и суммы ихъ узловыхъ составляющихъ. Точно такъ же совпадутъ и лучи s , параллельные замыкающимъ сторонамъ, такъ какъ отсѣкаемые ими отрѣзки, представляющіе давленія опоръ A и B , согласно доказанному должны быть одинаковы въ обоихъ случаяхъ. Поэтому, замыкающія стороны въ обоихъ веревочныхъ многоугольникахъ параллельны и равны между собою. Ординаты вершинъ многоугольниковъ, вслѣдствіе доказаннаго равенства моментовъ въ узловыхъ сѣченіяхъ при обоихъ способахъ дѣйствія нагрузки, также равны, а слѣдовательно, равны и многоугольники (I) и (II) . Такимъ образомъ, найденный выше многоугольникъ (I) , вписанный въ веревочный многоугольникъ для непосредственнаго дѣйствія данной нагрузки, представляетъ также и веревочный многоугольникъ для узловыхъ давленій данной нагрузки. Лучи, проведенные параллельно сторонамъ его на многоугольникѣ силъ, опредѣляютъ отрѣзки, соотвѣтствующіе узловымъ давленіямъ, которыя этимъ способомъ легко могутъ быть найдены.

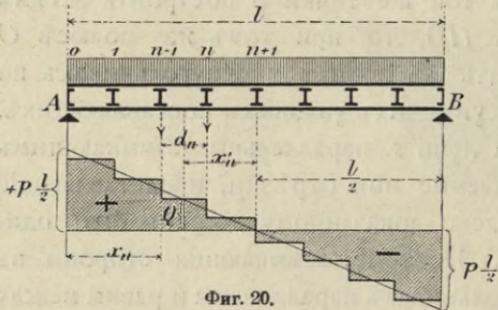
Изъ доказаннаго слѣдуетъ также, что моменты внѣшнихъ силъ балки, какъ пропорціональные ординатамъ веревочныхъ многоугольниковъ, будутъ при узловой нагрузкѣ всегда меньше или равны¹⁾ моментамъ при прямомъ дѣйствіи той же нагрузки, такъ что послѣднее представляется всегда болѣе невыгоднымъ для прочности балки.

16. При равномерной нагрузкѣ, занимающей всю длину балки и передающейся черезъ узлы, поперечная сила постоянная, какъ

¹⁾ Первое имѣетъ мѣсто для нагруженныхъ панелей, а второе для ненагруженныхъ.

известно, между двумя смежными узлами, может быть найдена без помощи веревочного многоугольника изъ слѣдующихъ простыхъ соотношеній.

Пусть p — величина нагрузки на погонную единицу длины $n - 1$, n — рассматриваемая панель, x_{n-1} и d_n — расстоянія узла $n - 1$ отъ лѣвой опоры A и отъ узла n (фиг. 20). Сопротивленіе каждой опоры A и B равно $\frac{1}{2} pl$. Дѣйствіе нагрузки, занимающей



Фиг. 20.

щей n -ую панель между узлами $n - 1$ и n , выражается передающимися на нихъ давленіями равными каждое $\frac{1}{2} pd_n$. Поэтому, приложивъ въ этихъ узлахъ по грузу $\frac{1}{2} pd_n$, можно будетъ удалить находящуюся между ними нагрузку и

тогда, отдѣливъ вертикальнымъ разрѣзомъ между рассматриваемыми узлами лѣвую часть балки, можно будетъ написать, что поперечная сила, равная суммѣ внѣшнихъ силъ лѣвой части балки,

$$Q = \frac{1}{2} pl - px_{n-1} - \frac{1}{2} pd_n = px'_n \dots \dots \dots (7)$$

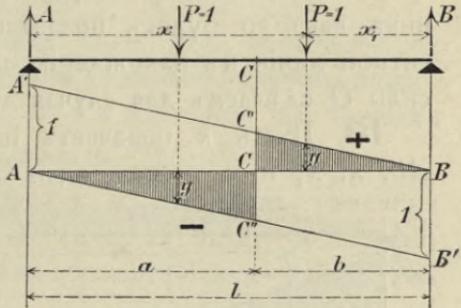
гдѣ x'_n означаетъ расстояніе середины рассматриваемой n -ой панели отъ середины O балки, считаемое положительнымъ влѣво и отрицательнымъ вправо отъ точки O .

Это выраженіе силы Q представляетъ относительно расстоянія x' прямую, проходящую черезъ середину ($x' = 0$), и потому для построенія поперечной силы стоитъ только провести эту прямую, отложивъ на опорахъ ея ординаты $\frac{1}{2} pl$ и $-\frac{1}{2} pl$; тогда ординаты этой прямой подъ серединами панелей дадутъ для послѣднихъ значенія поперечной силы, а проведенная черезъ концы ихъ горизонтальная уступчатая линия представитъ эпюру силы Q для всей балки (фиг. 20).

17. Инфлюэнтная линия Q . Опредѣленіе момента M и поперечной силы Q отъ подвижной нагрузки легче всего дѣлается съ помощью инфлюэнтной линіи. Начнемъ съ изслѣдованія ин-

флюентной линіи поперечной силы въ какомъ-нибудь сѣченіи C балки при прямомъ дѣйствии нагрузки (фиг. 21).

Пусть грузъ равный единицѣ будетъ приложенъ къ балкѣ на разстояніи x и x_1 отъ соответственныхъ опоръ A и B . Сопротивленіе этихъ опоръ, напр. A , найдется изъ условія равновѣсія $Al - 1 \cdot x_1 = 0$ или $A = \frac{1 \cdot x_1}{l}$. При передвиженіи груза оно измѣняется вмѣстѣ съ x_1 по прямой, имѣющей для $x_1 = 0$ и $x_1 = l$ ординаты 0 и 1, которыми она и опредѣляется. Такимъ образомъ, если отложимъ на опорахъ ординаты AA' и BB' равныя единицѣ¹⁾, то прямая BA' и AB' представляютъ инфлюентныя линіи для опорныхъ противодѣйствій A и B , отъ которыхъ легко перейти къ инфлюентной линіи поперечной силы Q .



Фиг. 21.

Дѣйствительно, пока грузъ находится въ правой части CB балки, поперечная сила Q , какъ равнодѣйствующая силъ лѣвой части AC , равна давленію опоры A , а потому инфлюентная линія послѣдняго для части CB является инфлюентной линіей поперечной силы Q на томъ же протяженіи балки.

Когда грузъ перейдетъ въ лѣвую часть AC относительно даннаго сѣченія C , то поперечная сила равная $A - 1$ можетъ быть выражена (стр. 17) равнодѣйствующей силъ правой части съ обратнымъ знакомъ, т. е. отрицательной величиной опорнаго давленія B . Поэтому инфлюентная линія этого сопротивленія, построенная съ противоположной стороны прямой AB , представитъ инфлюентную линію Q для лѣвой части AC .

Такимъ образомъ для всей балки инфлюентная линія силы Q состоитъ изъ двухъ параллельныхъ наклонныхъ прямыхъ BC' и AC'' съ вертикальнымъ уступомъ въ сѣченіи C , отдѣляющимъ положительную часть BC' линіи отъ отрицательной AC'' .

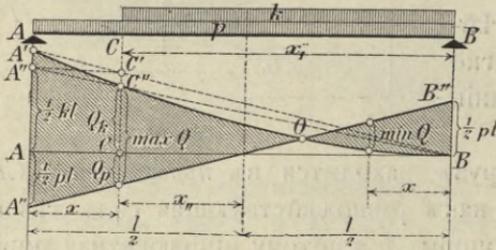
Изъ нея видно, что одинъ грузъ вызываетъ въ сѣченіи C балки наибольшую положительную или отрицательную силу, когда она станетъ непосредственно за или передъ рассматривае-

¹⁾ Отвлеченной величинѣ, слѣд. въ произвольномъ масштабѣ (см. стр. 9 ч. II).

мымъ сѣченіемъ, а подвижная система грузовъ, — когда наиболь- шій изъ нихъ станетъ надъ сѣченіемъ C , а остальные располо- жатся по возможности въ порядкѣ убывающей ихъ величины справа и слѣва C соотвѣтственно $\max Q$ или $\min Q$.

Этимъ замѣчаніемъ мы ограничимъ примѣненіе инфлюентной линіи поперечной силы къ дѣйствию сосредоточенныхъ подвиж- ныхъ грузовъ, такъ какъ отъ нихъ наибольшая поперечная сила легче опредѣляется непосредственно изъ веревочнаго многоуголь- ника, какъ то будетъ показано ниже. Примѣненіе же инфлю- ентной линіи къ нахожденію предѣльныхъ значеній поперечной силы Q сдѣлаемъ для случая дѣйствія равномерной нагрузки.

18. Пусть k означаетъ нагрузку на единицу длины балки AB , x , x_1 и x_2 , — разстоянія разсматриваемаго сѣченія C отъ



Фиг. 22.

опоръ A и B и отъ сре- дины балки, и l — разсто- яніе между опорами, или пролетъ ея (фиг. 22). Наи- большая положительная поперечная сила, или $\max Q$ соотвѣтствуетъ загрузе- нію правой части CB , а

$\min Q$ — загрузенію лѣвой части AC , и выражаются первая произ- веденіемъ $\Omega_1 k$, а вторая черезъ $-\Omega_2 k$, гдѣ Ω_1 и Ω_2 представляютъ (фиг. 21) площади BCC' и ACC'' положительной и отрица- тельной частей инфлюентной линіи.

Но $\Omega_1 = \frac{b}{2} CC' = \frac{b^2}{2l}$ и $\Omega_2 = \frac{a}{2} CC'' = \frac{a^2}{2l}$, или, переходя къ обозначеніямъ фигуры 22, $\Omega_1 = \frac{x_1^2}{2l}$ и $\Omega_2 = \frac{x_2^2}{2l}$, слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \max Q &= \frac{x_1^2}{2l} k \text{ и} \\ \min Q &= -\frac{x_2^2}{2l} k \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

Эти формулы могутъ быть выведены и безъ инфлюентныхъ линій. Дѣйствительно поперечная сила $\max. Q$ соотвѣтствуетъ загрузенію части CB и равна реакціи опоры $A = \frac{M_B}{l} = kx_1 \cdot \frac{x_1}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{kx_1^2}{2l}$, а $\min Q$ равна отрицательной реакціи опоры B отъ на- грузки kx , т. е. $\min Q = -kx \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{l} = -\frac{kx^2}{2l}$.

При одновременномъ загрузеніи обѣихъ частей балки нагрузкой p на единицу длины

$$Q = (Q_1 + Q_2) p = \frac{x_1^2 - x^2}{2l} p = \frac{(x_1 - x)l}{2l} p,$$

или

$$Q = px_{11}.$$

Дѣйствительно, равнодѣйствующія внѣшнихъ силъ лѣвой части балки длиною x равна разности опорной реакціи $A = \frac{1}{2}pl$ и нагрузки px , т. е. $Q = p \left(\frac{1}{2}l - x \right) = px_{11}$.

Послѣднее выраженіе поперечной силы отъ постоянной нагрузки, покрывающей всю балку, есть уравненіе прямой, проходящей черезъ середину балки ($x_{11} = 0$) и имѣющей на опорахъ A и B ($x_{11} = \frac{1}{2}l$ и $x_{11} = -\frac{1}{2}l$) ординаты $\frac{1}{2}pl$ и $-\frac{1}{2}pl$.

Поэтому, отложивъ ихъ на опорахъ и соединивъ конечныя точки ихъ прямой $A''B''$, получимъ (фиг. 22) эпюру Q , представляющую измѣненіе поперечной силы по длинѣ балки отъ постоянной нагрузки.

Что же касается предѣльныхъ значеній поперечной силы отъ подвижной нагрузки $\max Q = \frac{kx_1^2}{2l}$ и $\min Q = -\frac{kx^2}{2l}$, то онѣ, рассматриваемыя какъ ординаты въ соответственныхъ сѣченіяхъ C балки относительно прямой AB , представляютъ собою двѣ равныя параболы, касающіяся вершинами прямой AB въ точкахъ A и B и имѣющія въ нихъ, соответственно $x_1 = l$ и $x = l$, ординаты $\frac{1}{2}kl$ и $-\frac{1}{2}kl$.

По этимъ даннымъ параболы могутъ быть построены какимъ-нибудь изъ извѣстныхъ способовъ. Напримѣръ, для $\max Q = \frac{1}{2}kl$. $\frac{x_1}{l} \cdot \frac{x_1}{l}$ въ какомъ-нибудь сѣченіи C откладываютъ (фиг. 22) на опорѣ A ординату $AA' = \frac{1}{2}kl$, проводятъ прямую BA ; ея ордината CC' въ сѣченіи C относительно крайней $\frac{1}{2}kl$ уменьшена въ отношеніи $\frac{x_1}{l}$, т. е. равна $\frac{1}{2}kl \cdot \frac{x_1}{l}$. Если уменьшить CC' въ томъ же отношеніи $\frac{x_1}{l}$, отложивъ на опорѣ $AA'' = CC'$ и взявъ ординату CC' прямой BA' для сѣченія C , то величина CC'' выразитъ искомую величину $\max Q$ для сѣченія C .

Въ случаѣ совмѣстнаго дѣйствія на балку постоянной нагрузки p и подвижной k , наибольшія значенія поперечной силы получатся

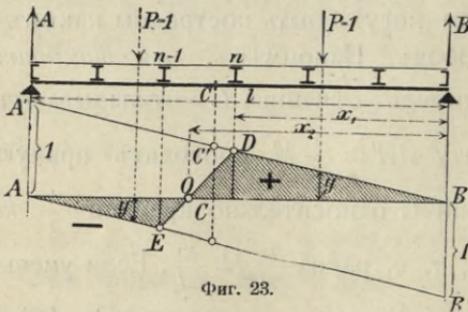
сложениемъ соответственныхъ ординатъ параболы $BC''A$ и прямой $A''B''$, имѣющей на опорахъ ординаты $AA'' = BB'' = \frac{1}{2} pl$. Въ этомъ случаѣ искомаго значенія поперечной силы Q выразятся ординатами параболы (фиг. 22) относительно прямой $A''B''$. Точка O пересѣченія параболы въ этой прямой раздѣляетъ положительныя значенія $max Q$ при совмѣстномъ дѣйствіи обѣихъ нагрузокъ отъ отрицательныхъ.

$Min Q$ представляетъ ту же эпюру только въ обратномъ положеніи, повернутую на 180° , поэтому значеніе $min Q$ можетъ быть найдено изъ эпюры $max Q$, взявъ на ней ординату на томъ же разстояніи x отъ опоры B (фиг. 22).

19. Узловая нагрузка. Найдемъ теперь инфлюентную линію поперечной силы Q при узловомъ дѣйствіи нагрузки для сѣченія C балки между двумя какими-нибудь узлами $(n-1)$ и (n) въ n -ой панели (фиг. 23).

Извѣстно, что опорныя сопротивленія A и B при узловомъ дѣйствіи будутъ тѣ же, что и при прямомъ дѣйствіи нагрузки. Поэтому, когда грузъ равный единицѣ будетъ помѣщенъ справа узла n , то приложенное къ лѣвой части AC давленіе опоры A и его инфлюентная линія BD представятъ поперечную силу и ея инфлюентную линію для сѣченія C . Точно такъ же при положеніи груза слѣва отъ узла $(n-1)$ отрицательное сопротивленіе опоры B и его инфлюентная линія AE выражаютъ поперечную силу и ея инфлюентную линію при дѣйствіи груза на лѣвую

часть балки отъ узла $(n-1)$ до лѣвой опоры. Наконецъ, часть инфлюентной линіи для положеній груза въ рассматриваемой панели между узлами $(n-1)$ и (n) представляетъ—по общему свойству инфлюентныхъ линій и узловой нагрузки—прямую

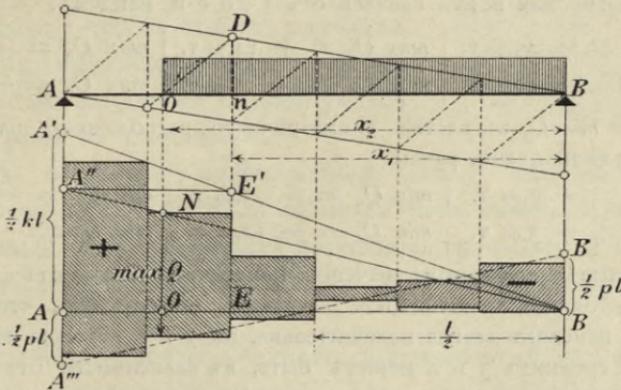


Фиг. 23.

линію, проходящую черезъ точки D и E , такъ что вся инфлюентная линія Q будетъ состоять изъ двухъ наклонныхъ линій BD и AE , соединенныхъ прямою DE . Пересѣченіе послѣдней съ прямою AB даетъ точку O , отдѣляющую положительную часть инфлюентной линіи BDO отъ отрицательной AEO .

Очевидно, найденная инфлюентная линия Q может быть прямо получена из инфлюентной линии $AC'C'B$ для непосредственной нагрузки, исходя из того общего свойства, что первая линия представляет собою многоугольник, вписанный во вторую и имѣющій вершины подъ узлами.

Мы примѣнимъ ее также къ случаю равномерной нагрузки для нахождения предѣльныхъ значеній поперечной силы.



Фиг. 24.

Для $\max Q$ въ какой-нибудь панели нужно расположить нагрузку отъ правой опоры до сѣченія, соответствующаго нулевой точкѣ O (фиг. 24).

Если разстояніе этой точки и смежнаго съ ней праваго узла отъ опоры B назовемъ черезъ x_2 и x_1 , то

$$\max Q = Q_1 k = k \Delta ODB = \frac{1}{2} k x_2 \frac{x_1}{l}, \dots \dots (9)$$

или

$$\max Q = \frac{k x_1 x_2}{2l} = \frac{1}{2} kl \cdot \frac{x_1}{l} \cdot \frac{x_2}{l}.$$

Слѣдовательно, величину $\max Q$ получимъ построениемъ подобнымъ предыдущему, если отложимъ въ точкѣ A (фиг. 24) ординату $AA_1 = \frac{1}{2} kl$ и уменьшимъ ее сперва въ отношеніи $\frac{x_1}{l}$, взявъ ординату EE' прямой BA' подъ угломъ n , а затѣмъ EE' тѣмъ же путемъ снова уменьшимъ въ отношеніи $\frac{x_2}{l}$, засѣкая въ точкѣ N ординату изъ точки O прямой BA'' , для которой $AA' = EE'$. Тогда ON представитъ собою $\max Q$ для сѣченія n -ой панели.

При совмѣстномъ дѣйствіи постоянной и подвижной нагрузокъ къ значеніямъ $\max Q$ отъ послѣдней нужно присоединить

соотвѣтственныя значенія отъ первой нагрузки, такъ что эпюра наибольшихъ значеній Q отъ обѣихъ нагрузокъ будетъ имѣть видъ, показанный на фигурѣ 24.

Численный примѣръ. Допустимъ для балки, представленной на черт. 23, что $l = 18$ м., $d = 3$ м., $p = 1,2$ тон. и $k = 4,8$ тон. Отложивъ $AA' = \frac{1}{2}kl = 43,2$ тон., $AA''' = BB' = \frac{1}{2}pl = 10,8$ тон. и выполнивъ описанное построеніе $\max Q$ послѣдовательно для всѣхъ панелей отъ 1 до 6-й, найдемъ:

$$\begin{array}{l|l|l} \max Q_1 = + 45,00 \text{ т.} & \max Q_2 = + 14,76 \text{ т.} & \max Q_5 = - 3,96 \text{ т.} \\ \max Q_3 = + 28,44 \text{ т.} & \max Q_4 = + 3,96 \text{ т.} & \max Q_6 = - 9,00 \text{ т.} \end{array}$$

Значеніе $\min Q$, вслѣдствіе симметричнаго расположенія панелей относительно середины балки, равны

$$\begin{array}{l|l|l} \min Q_1 = + 9,00 \text{ т.} & \min Q_3 = - 3,96 \text{ т.} & \min Q_5 = - 28,44 \text{ т.} \\ \min Q_2 = + 3,96 \text{ т.} & \min Q_4 = - 14,76 \text{ т.} & \min Q_6 = - 45,00 \text{ т.} \end{array}$$

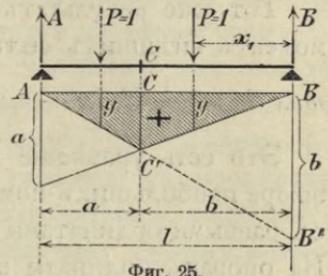
Найденныя предѣльныя значенія поперечной силы отъ совмѣстнаго дѣйствія постоянной и подвижной нагрузокъ показываютъ, что Q въ первыхъ двухъ панеляхъ всегда положительна, въ 5 и 6 — всегда отрицательна, а въ двухъ среднихъ 3 и 4 можетъ быть, въ зависимости отъ загрузенія балки, какъ положительной, такъ и отрицательной.

20. Инфлюэнтная линія M . Опредѣлимъ теперь инфлюэнтную линію момента M для какого-нибудь сѣченія C балки, подвергающейся непосредственному дѣйствию нагрузки.

Если a и b — разстоянія сѣченія C отъ опоръ A и B балки, l — пролеть ея, то грузъ единица, помѣщенный въ правой части CB на разстояніи x и x_1 отъ A и B , дастъ моментъ внѣшнихъ силъ, равный моменту опорнаго давленія Aa . Такъ какъ a остается постояннымъ, то инфлюэнтная линія момента получится изъ инфлюэнтной линіи A , откладывая на опорѣ вмѣсто l длину $AA' = a = AC$ и соединяя точку A' съ B прямою $A'B$. Ея ординаты на протяженіи CB выражаютъ собою величину момента въ сѣченіи C отъ груза единицы, помѣщеннаго непосредственно надъ разсматриваемой ординатой, или точнѣе: эти ординаты выражаютъ въ масштабѣ длинъ плечи, на которыя нужно умножить грузъ единицы, чтобы получить соотвѣтствующую инфлюэнтной линіи величину момента.

Если грузъ находится въ лѣвой части балки AC , то моментъ внѣшнихъ силъ удобнѣе выражается черезъ моментъ силъ, приложенныхъ къ правой части, который равенъ произведенію Bb

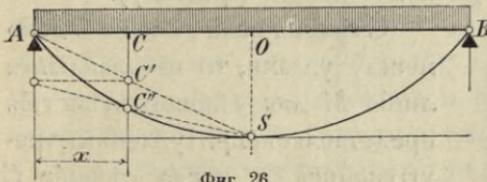
опорнаго давленія B на постоянную длину b . Онъ имѣетъ, какъ было доказано выше, тотъ же положительный знакъ. Слѣдовательно, вторая часть инфлюентной линіи можетъ быть построена подобно первой, если на правой опорѣ отложить ординату $BB' = b = BC$ и провести прямую AB' . Последняя отсѣкаетъ на проходящей черезъ C вертикальной прямой ту же ординату CC' , какъ и прямая $V'A$, потому что въ обоихъ случаяхъ эта ордината выражаетъ одну и ту же величину момента, соответствующую положенію груза въ сѣченіи C .



Фиг. 25.

Такимъ образомъ инфлюентная линія момента представляетъ треугольникъ $AC'B$ съ вершиной подъ даннымъ сѣченіемъ C . Онъ получится, если на опорахъ построить ординаты $AA' = CA = a$ и $V'B = BC = b$ и привести прямыя VA' и AB' , пересѣкающіяся въ C .

Изъ нея видно, что отъ одного подвижнаго груза P наибольшее значеніе момента получается при совпаденіи груза съ даннымъ сѣченіемъ C и выражается черезъ $P \cdot \frac{ab}{l}$, а отъ системы грузовъ, — когда они займутъ всю балку и расположатся отъ сѣченія C къ опорамъ въ порядкѣ убывающей своей величины, при чемъ въ сѣченіи C долженъ стать грузъ, опредѣляемый условіемъ равенства нагрузокъ $\frac{R_1}{a}$ и $\frac{R_2}{b}$ правой и лѣвой частей AC и CB балки AB (см. п. 10).



Фиг. 26.

Розысканіе наибольшихъ моментовъ отъ подвижной системы сосредоточенныхъ грузовъ составитъ предметъ особаго изслѣдованія; въ настоящемъ же случаѣ инфлюентную линію момента мы примѣнимъ къ дѣйствию равномерной нагрузки.

Такъ какъ всѣ ординаты инфлюентной линіи положительны, то наибольшее значеніе момента $\max M$ въ какомъ-нибудь сѣченіи соответствуетъ полному загрузенію балки. Если черезъ x и x_1 обозначить разстояніе сѣченія C отъ опоръ A и B , то инфлюент-

ная площадь момента выразится через $\Omega = \frac{1}{2} l \cdot \frac{xx_1}{l} = \frac{xx_1}{2}$, а потому $\max M = \frac{xx_1}{2} k = \frac{x(l-x)}{2} k$.

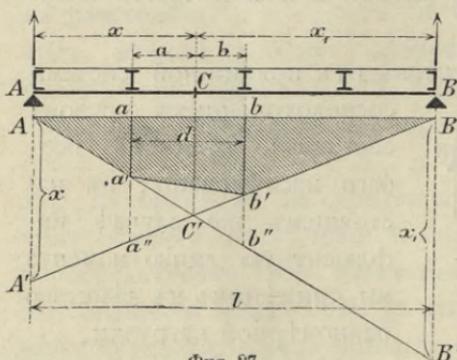
Тотъ же результатъ получимъ, если возьмемъ непосредственно моментъ внѣшнихъ силъ лѣвой части балки A и нагрузки kx

$$\max M = \frac{1}{2} kl \cdot x - kx \cdot \frac{x}{2} = \frac{kx(l-x)}{2} \dots \dots \dots (10)$$

Это есть уравненіе параболы съ вертикальной осью, слѣдов. эпюра наибольшихъ моментовъ представляетъ отрѣзокъ параболы съ равными ординатами для сѣченій, равно удаленныхъ отъ опоръ. На опорахъ ординаты параболы обращаются въ нули, а наибольшее значеніе $\frac{kl^2}{8}$ получается для ординаты посрединѣ балки, при $x = x_1 = \frac{l}{2}$.

Если изъ середины O балки AB отложить вертикально ординату $OS = \frac{kl^2}{8}$ и провести черезъ конецъ ея S горизонтальную прямую, касательную къ параболѣ въ ея вершинѣ, то для построения параболы будемъ имѣть положеніе вершины S , касательной въ ней и величину крайней ординаты, слѣдов., она можетъ быть построена способомъ, даннымъ на стр. 24.

21. При узловомъ дѣйствіи нагрузки инфлюентная линия момента получится изъ инфлюентной линіи его для прямой нагрузки



Фиг. 27.

вписываніемъ въ послѣднюю линію многоугольника, имѣющаго съ ней общія точки и вершины подъ узлами (фиг. 27).

Слѣдов., если сѣченіе C дано между узлами, то инфлюентная линія M для узлового дѣйствія представляетъ притупленный треугольникъ, а когда сѣченіе C совпадаетъ съ однимъ изъ узловъ, то инфлюентная ли-

нія для обоихъ способовъ дѣйствія нагрузки также совпадаетъ одна съ другой, а слѣдов., и самыя значенія моментовъ, какъ то было уже доказано выше (стр. 20).

Для случая, когда сѣченія S взято между двумя узлами, можно доказать общую теорему, что моментъ при узловомъ дѣйствии какой-нибудь нагрузки разнится отъ момента при прямомъ ея дѣйствии на величину, равную моменту вспомогательной балочки рассматриваемой панели отъ расположенныхъ на ней грузовъ ¹⁾.

Дѣйствительно, грузы, приложенные къ балкѣ внѣ данной панели ab , имѣютъ однѣ и тѣ же ординаты въ обоихъ случаяхъ дѣйствія грузовъ и даютъ тотъ же моментъ для сѣченія S . Остается рассмотреть только дѣйствіе грузовъ въ предѣлахъ панели ab . Для этой части балки ординаты обѣихъ инфлюентныхъ линій разнятся между собою на величину ординатъ треугольника $a'Sb'$. Продолжимъ его стороны $a'C'$ и $b'C'$ до пересѣченія въ точкахъ b'' и a'' съ вертикалями bb' и aa' . Δ -къ $C'a'a''$ подобенъ Δ -ку $C'AA'$, въ которомъ основаніе AA' и высота равны между собою; точно такъ же изъ подобія Δ Δ -ковъ $C'Bb''$ и $C'b'b''$ слѣдуетъ равенство основанія $b'b''$ и высоты въ $\Delta C'b'b''$. Такимъ образомъ вертикальныя ординаты треугольники $a'Sb'$ относительно $a'b'$ представляютъ ординаты инфлюентной линіи момента въ сѣченіи S балки ab , что и требовалось доказать (стр. 50).

22. Графическое опредѣленіе $\max Q$. Наибольшія значенія моментовъ и поперечныхъ силъ отъ подвижной системы грузовъ могутъ быть найдены съ помощью инфлюентной линіи, но опредѣленіе ихъ успѣшнѣе дѣлается по особому способу, который будетъ объясненъ на слѣдующемъ численномъ примѣрѣ, относящемся къ узловому дѣйствию нагрузки.

Возьмемъ желѣзнодорожный мостъ съ 2 фермами, о двухъ путяхъ. Разстояніе l между двумя смежными опорами, или пролетъ балки, пусть равенъ 36 метр. и раздѣленъ поперечными балками на 10 равныхъ панелей, каждая по 3,4 м. Постоянная нагрузка на пог. м. = 1.74 тон., а временная дана въ видѣ поѣзда изъ двухъ паровозовъ и ряда груженыхъ вагоновъ. Давленія на оси и ихъ взаимныя разстоянія показаны на фиг. 28.

Изъ самого треугольнаго вида инфлюентной линіи поперечной силы для узлового дѣйствія нагрузки слѣдуетъ, что

¹⁾ Эта теорема была доказана мною аналогически въ 1887 г., въ статьѣ «Исслѣдованіе значеній момента внѣшнихъ силъ», и приведена ниже въ главѣ IV; здѣсь же дается ея графическое доказательство.

$\max Q$ для какой-нибудь панели, напр. 5-й, получится при загрузении правой части балки отъ правой опоры до 5-го узла поѣздомъ съ паровозами впереди его, при чемъ одинъ изъ грузовъ долженъ совпадать съ узломъ 5, по доказанному на стр. 13 свойству инфлюентной линіи. Хотя этотъ грузъ можетъ быть предварительно опредѣленъ указаннымъ тамъ же способомъ, но величину $\max Q$ обыкновенно находятъ непосредственнымъ сравненіемъ значеній поперечной силы, соотвѣтствующихъ поочередно совпаденію перваго груза поѣзда, затѣмъ второго и иногда третьяго съ правымъ узломъ (5) данной панели. Въ большинствѣ случаевъ $\max Q$ получается при положеніе перваго груза паровоза въ правомъ узлѣ данной панели. Такое положеніе поѣзда для $\max Q$ называется *основнымъ* — $\text{Max} Q$ съ расположеніемъ второго груза поѣзда надъ правымъ узломъ встрѣчается рѣже, а съ установкой 3-го груза приходится имѣть дѣло въ исключительныхъ случаяхъ.

Когда поѣздъ занимаетъ на балкѣ *основное* положеніе относительно поперечной силы Q_5 въ 5-й панели, т. е. первый грузъ его совпадаетъ съ узломъ 5, то проводя черезъ послѣднюю вертикальный разрѣзъ ss , найдемъ, что къ лѣвой части балки приложена одна только сила — опорное сопротивленіе A_5 ; поэтому

$$Q_5 = A_5.$$

Величина опорнаго давленія, какъ извѣстно, найдется, если сумму моментовъ дѣйствующихъ на балку грузовъ $\sum_1^9 P b$ относительно правой опоры B приравнять моменту давленія лѣвой опоры, т. е.

$$\sum_1^9 P b = A_5 l \text{ или } A_5 = \frac{1}{l} \sum_1^9 P b. \dots \dots (II)$$

Графически сопротивленіе опоры A опредѣляется чрезвычайно просто построеніемъ веревочнаго многоугольника, принадлежащимъ Винклеру.

Извѣстно, что моментъ какихъ-нибудь вертикальныхъ силъ относительно точки выражается произведеніемъ Hu полюснаго разстоянія H на величину вертикальнаго отрѣзка u , заключеннаго между крайними сторонами веревочнаго многоугольника. Если при этомъ взять полюсное разстояніе равнымъ l , то сила A_5 выразится непосредственно отрѣзкомъ u . Для построенія такого много-

угольника, поѣздъ располагаютъ такимъ образомъ на балкѣ, чтобы первый грузъ его P_1 сталъ надъ опорой B , а остальные P_2, P_3, \dots слѣдовали бы въ направленіи къ лѣвой опорѣ A ; затѣмъ откладываютъ на опорѣ по вертикальной прямой отъ точки A послѣдовательно величину грузовъ P_1, P_2, P_3, \dots , проводятъ лучи изъ полюса O и строятъ веревочный многоугольникъ, въ которомъ первая сторона будетъ совпадать съ направле-



Фиг. 28.

ніемъ самой балки. Ордината этого веревочнаго многоугольника, называемаго *многоугольникомъ опорнаго давленія A* , для какого-нибудь сѣченія (напр. SS) даетъ величину опорнаго давленія A_5 , соответствующую загрузенію I (фиг 28) правой части балки поѣздомъ, котораго первый грузъ совпадаетъ съ этимъ сѣченіемъ.

Дѣйствительно, эта ордината y представляетъ отрѣзокъ между крайними сторонами I и X построеннаго веревочнаго многоугольника грузовъ P_1, P_2, \dots, P_9 , и потому произведеніе ея на полюсное разстояніе l даетъ моментъ ly тѣхъ же 9 грузовъ относительно сѣченія, взятаго отъ пераго груза P_1 на разстояніи равномъ s B , т. е. вышеприведенный моментъ $\sum_1^9 P_i b_i$ грузовъ поѣзда въ обратномъ положеніи (I) относительно опоры B , нахо-

тогда, когда вспомогательныя линіи 54' или тп 4^m будутъ составлять съ направлениемъ балки уголъ меньшій, чѣмъ линія опорнаго давленія *A* въ предѣлахъ разсматриваемой панели, что представляется тѣмъ болѣе возможнымъ, чѣмъ ближе разсматриваемая панель къ лѣвой опортѣ.

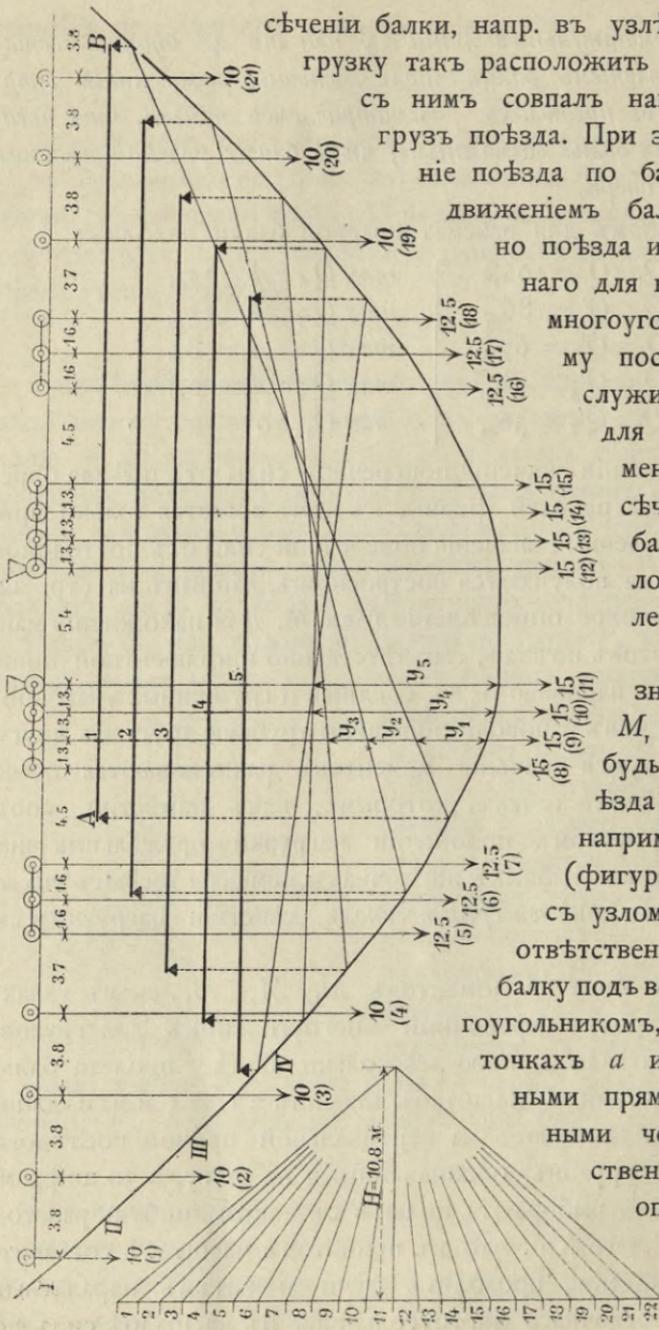
Такимъ образомъ для разсматриваемой балки находимъ:

$$\begin{array}{l|l} \text{max } Q_1 = Q'_1 = 106,8 & \text{max } Q_6 = A_6 = 25,3 \\ \text{max } Q_2 = Q'_2 = 86,7 & \text{max } Q_7 = A_7 = 15,9 \\ \text{max } Q_3 = Q'_3 = 67,6 & \text{max } Q_8 = A_8 = 8,8 \\ \text{max } Q_4 = Q'_4 = 51,0 & \text{max } Q_9 = A_9 = 2,9 \text{ тн.} \\ \text{max } Q_5 = Q'_5 = 36,1 & \text{max } Q_{10} = 0 \quad \text{»} \end{array}$$

Когда наибольшія значенія поперечной силы отъ поѣзда опредѣлены для всѣхъ панелей фермы, къ нимъ остается только прибавить соотвѣтственныя значенія поперечной силы отъ постоянной нагрузки, которыя получаютъ построениемъ, даннымъ на стр. 22.

23. Графическое опредѣленіе max. M. Для нахождения наибольшихъ моментовъ поѣздъ, соотвѣтственно инфлюентной линіи, составляютъ изъ 2 паровозовъ въ срединѣ и груженныхъ вагоновъ по бокамъ, при чемъ паровозы обращены трубами другъ къ другу. При *узловой* нагрузкѣ значенія моментовъ разыскиваются обыкновенно для *узловыхъ* точекъ, которымъ, какъ извѣстно, соотвѣтствуютъ при всякомъ положеніи нагрузки предѣльныя значенія моментовъ; въ узловыхъ же точкахъ моменты имѣютъ *тѣ же* величины, какъ и при *непосредственномъ* дѣйствіи нагрузки (см. стр. 20).

Чтобы найти значенія моментовъ $M_1, M_2, M_3 \dots$ въ узлахъ 1, 2, 3 . . . , строятъ веревочный многоугольникъ для грузовъ средней части поѣзда длиною нѣсколько болѣе пролета балки 36 м. Для этого, принявъ масштабъ для силъ 2 т. = 1 м.м. и длинъ 1 м. = 4 м.м., откладываютъ на вертикальной прямой послѣдовательно величину грузовъ, обозначенныхъ на фигурѣ 30 цифрами 1, 2, 3 . . . 21 . . . , выбираютъ полюсъ съ какимъ-нибудь разстояніемъ $H = 3 \times 3,6 = 10,8$ м., что въ принятомъ масштабѣ составитъ $H = 10,8 \times 4 = 43,2$ м.м., проводятъ лучи и затѣмъ параллельно имъ стороны веревочнаго многоугольника. Въ масштабѣ силъ полюсное разстояніе выражаетъ силу $43,2 \times 2 = 86,4$ т. Изъ предыдущаго извѣстно, что для полученія *max M* въ какомъ-нибудь



Фиг. 30.

слѣдней вертикальная ордината многоугольника подъ узломъ 1,

сѣченіи балки, напр. въ узлѣ 1, нужно на-
 грузку такъ расположить на балкѣ, чтобы
 съ нимъ совпалъ наиболѣе тяжелый
 грузъ поѣзда. При этомъ перемѣще-
 ніе поѣзда по балкѣ замѣняется
 движеніемъ балки относитель-
 но поѣзда и разъ построена-
 го для него веревочнаго
 многоугольника; поэто-
 му послѣдній можетъ
 служить не только
 для разысканія мо-
 ментовъ во всѣхъ
 сѣченіяхъ данной
 балки, но и для ба-
 локъ другихъ про-
 летовъ.

Чтобы найти
 значеніе момента
 M , при какомъ-ни-
 будь положеніи по-
 ѣзда на балкѣ, когда
 напримѣръ 9-й грузъ
 (фигура 30) совпадаетъ
 съ узломъ 1, нужно со-
 отвѣтственно расположить
 балку подъ веревочнымъ мно-
 гоугольникомъ, засѣчь его въ
 точкахъ a и b вертикаль-
 ными прямыми, проведен-
 ными черезъ соответ-
 ственныя положенія
 опоръ A и B , и
 провести замы-
 кающую ли-
 нію ab . Отно-
 сительно по-

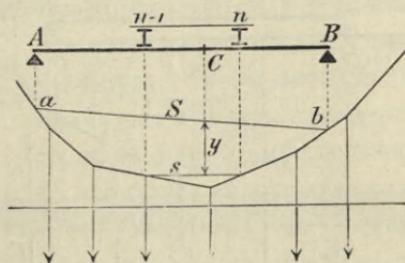
по умноженіи на H , дасть величину момента M при избранномъ положеніи поѣзда.

Выше было доказано (стр. 13) для треугольной инфлюентной линіи, что наибольшее значеніе отъ системы грузовъ величина U получаетъ при совпаденіи того груза P_n съ вершиной треугольника, который первый даетъ сумму $P_1 + P_2 + P_3 + \dots$ больше $R \frac{a}{a+b}$. Графически это дѣлается построеніемъ, показаннымъ на фигурѣ 15.

Къ опредѣленнымъ такимъ способомъ величинамъ моментовъ въ узлахъ отъ дѣйствія поѣзда нужно прибавить еще значенія моментовъ отъ постоянной нагрузки, которая, какъ извѣстно, представляются ординатами параболы, изъ которыхъ наибольшая по срединѣ балки равна $\frac{1}{8}pl^2$. Если выражать H въ масштабѣ силъ, то эта ордината $y = \frac{1}{8} \frac{pl^2}{H} = \frac{1,74 \cdot 36^2}{8 \cdot 86,4} = 3,26$ м. Отложивъ ее, построивъ остальные ординаты для узловыхъ точекъ и сложивъ ихъ съ ординатами отъ подвижной нагрузки, получимъ наибольшія значенія моментовъ въ узлахъ отъ совмѣстнаго дѣйствія нагрузокъ. Онѣ оказались равными:

$$\begin{aligned} y_1 &= 5,52 \text{ м.} & M_1 &= 86,4 \times 5,52 = 476,9 \text{ тм.} \\ y_2 &= 9,66 \text{ »} & M_2 &= 86,4 \times 9,66 = 834,6 \text{ »} \\ y_3 &= 12,84 \text{ »} & M_3 &= 86,4 \times 12,84 = 1009,4 \text{ »} \\ y_4 &= 14,60 \text{ »} & M_4 &= 86,4 \times 14,60 = 1261,4 \text{ »} \\ y_5 &= 15,00 \text{ »} & M_5 &= 86,4 \times 15,00 = 1296,0 \text{ »} \end{aligned}$$

Если бы встрѣтилась надобность опредѣлить $\max M$ для сѣченія C , взятаго между двумя узлами $n-1$ и n -ымъ, то балку AB нужно такъ расположить подъ веревочнымъ многоугольникомъ, чтобы (п. 9, стр. 12) наиболѣе тяжелый грузъ совпалъ съ узломъ n или $n-1$ -ымъ, затѣмъ проводятъ замыкающую линію S (фиг. 31).



Фиг. 31.

Такъ какъ при узловой нагрузкѣ значеніе момента между узлами измѣняется по прямой, которая проходитъ черезъ концы ординатъ веревочнаго многоугольника, соответствующихъ этимъ

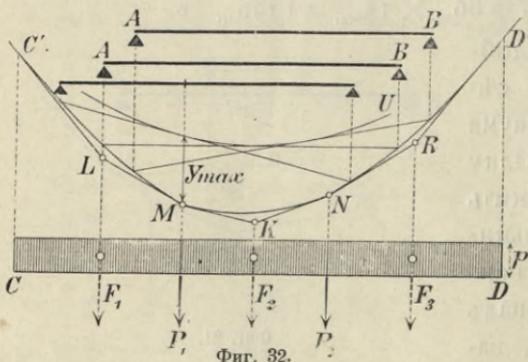
узламъ, т. е. по прямой s (фиг. 31), то величина момента въ сѣченіи C выразится отрѣзкомъ y проходящей черезъ C вертикальной прямой, опредѣляемымъ пересѣченіями съ линиями S и s . Наибольшее значеніе момента найдется непосредственнымъ сравненіемъ найденныхъ такимъ образомъ значеній.

24. Прямое дѣйствіе подвижной системы сосредоточенныхъ грузовъ имѣетъ мѣсто въ практикѣ только при балкахъ небольшого пролета.

Наибольшая поперечная сила Q при этомъ получается тогда, когда двигающійся справа налѣво поѣздъ станетъ первымъ колесомъ въ данномъ сѣченіи, и опредѣляется ординатой многоугольника опорнаго давленія A подъ разсматриваемымъ сѣченіемъ.

Наибольшій моментъ въ какомъ-нибудь сѣченіи находится также, какъ это было показано для момента въ узловыхъ точкахъ. Остается объяснить теперь способъ, какъ найти сѣченіе съ наибольшимъ изъ $maxM$ на всей балкѣ, или такъ называемый абсолютный $maxM$ при прямомъ дѣйствіи постоянной равномерной нагрузки и системы подвижныхъ грузовъ. Для этого возьмемъ балку AB небольшого пролета, подверженную прямому дѣйствію постоянной нагрузки и системы изъ двухъ подвижныхъ сосредоточенныхъ грузовъ P_1 и P_2 .

Чтобы построить веревочный многоугольникъ для постоянной и подвижной нагрузки, возьмемъ первую на длинѣ CD большей

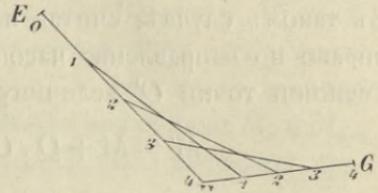


пролета балки (фиг. 32).

Пусть грузы P_1 и P_2 раздѣляютъ нагрузку CD на три части, равнодѣйствующія которымъ F_1 , F_2 и F_3 приложены по срединѣ каждой части. Для грузовъ F_1 , P_1 , F_2 , P_2 , F_3 строимъ веревочный многоугольникъ $CLMKNRD'$. При равно-

мѣрной нагрузкѣ части веревочнаго многоугольника CLM , MKN и NRD' должны представлять отрѣзки кривой (параболы), касательныя къ сторонамъ CL и LM , MK и KN , NR и RD' въ со-

ответственных точках C , M , N и D' . Вписавъ эти кривыя (по фиг. 33), получимъ искомый веревочный многоугольникъ съ криволинейными сторонами и точками перелома подъ грузами. Давая относительно его различныя положенія балкѣ AB и проводя каждый разъ соответственную замыкающую сторону, найдемъ линію, объемлющую послѣднихъ. Наибольшее вертикальное разстояніе y_{max} между этой кривой и кривой веревочнаго многоугольника дасть абсолютный $\max M = Hy_{max}$; касательная, проведенная къ объемлющей въ пересѣченіи ея съ y_{max} , опредѣлитъ соответствующую замыкающую сторону, а слѣдовательно, положеніе балки и ея сѣченіе, для котораго имѣетъ мѣсто абсолютный наибольшій моментъ.

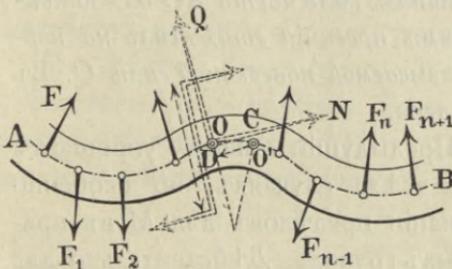


Фиг. 33.

IV. Аналитическій способъ опредѣленія $\max M$.

25. Теорема Шведлера. Сначала мы изложимъ доказательство теоремы Шведлера въ общемъ случаѣ, затѣмъ, пользуясь ею, рассмотримъ измѣненіе момента въ балкѣ при постоянной нагрузкѣ и потомъ перейдемъ къ подвижной системѣ грузовъ, представляя ея движеніе въ видѣ непрерывнаго ряда отдѣльныхъ положеній.

Пусть AB представляетъ (фиг. 34) какой-либо плоскій брусъ, $F, F_1, F_2 \dots$ — дѣйствующія на него внѣшнія силы, и p — сплошная нагрузка на единицу длины бруса.



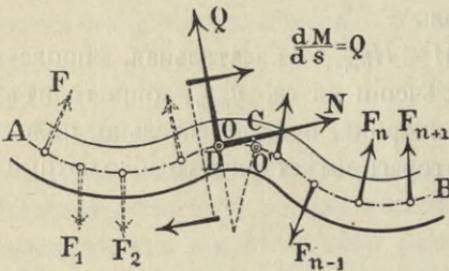
Фиг. 34.

нагрузка на единицу длины бруса. Чтобы опредѣлить измѣненіе момента внѣшнихъ силъ въ какой-нибудь точкѣ O оси бруса между двумя силами, замѣнимъ всѣ силы, приложенныя къ лѣвой части AO , двумя силами: Q — по направленію нормали и N — по касательной въ точкѣ O

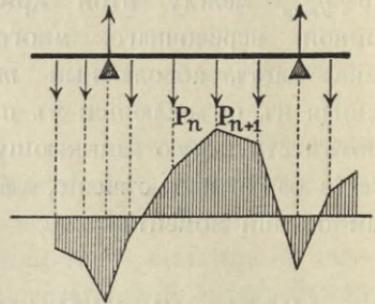
оси бруса, и еще парю силъ въ плоскости этой оси. Отъ такой замѣны величина момента въ части OB и вообще состояніе ея ни-

сколько не изменяется, если только Q равна суммѣ проекцій внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ лѣвой части AO , на нормаль, а N —суммѣ проекцій ихъ на касательную въ точкѣ O , и моментъ этихъ силъ относительно той же точки равенъ моменту M пары. Въ такомъ случаѣ, считая положительными моменты, вращающіе вправо по направленію часовой стрѣлки, имѣемъ (фиг. 35) для смежной точки O' величину момента M' внѣшнихъ силъ ¹⁾

$$M' = M + Q \cdot O'D + N \cdot O'C - \frac{pds^2 Cs \varphi}{2}$$



Фиг. 35.



Фиг. 36.

обозначая через $pCs\varphi$ составляющую сплошной нагрузки нормальную къ оси бруса и принимая во вниманіе, что пара сил сохраняетъ одинъ и тотъ же моментъ для всѣхъ точекъ плоскости.

Откуда
$$\Delta M = QdsCs \frac{\theta}{2} + Nds Sn \frac{\theta}{2} - \frac{pds^2 Cs \varphi}{2}$$

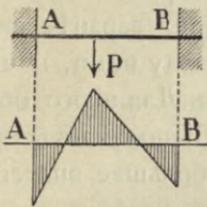
и
$$\frac{dM}{ds} = \text{предѣлу} \left[QCs \frac{\theta}{2} + NSn \frac{\theta}{2} - \frac{pdsCs\varphi}{2} \right]_{\theta=0} = Q \quad (12).$$

т. е. производная отъ момента внѣшнихъ силъ части AO для какой-либо точки O оси бруса равна суммѣ проекцій этихъ силъ на нормаль въ этой точкѣ, или такъ называемой поперечной силъ Q . Въ этомъ и состоитъ теорема Шведлера.

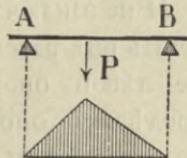
26. Постоянная нагрузка. Предыдущій выводъ упрощаетъ изслѣдованія значенія момента въ всѣхъ случаяхъ, но особенно оказывается полезнымъ при отысканіи предѣловъ для M въ прямыхъ балкахъ отъ сосредоточенныхъ грузовъ. Дѣйствительно для

¹⁾ По извѣстному изъ статики общему свойству момента системы силъ при переходѣ отъ точки A къ B : $M_A = M_B + \text{моментъ для точки } B \text{ равнодѣйствующей перенесенной въ } A, \text{ или ея составляющихъ } Q \text{ и } N.$

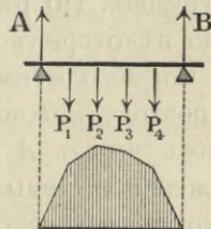
каждаго сѣченія такой балки, будетъ ли она горизонтальная или наклонная, простая или неразрѣзная, величина $\frac{dM}{ds} = Q$ между двумя грузами (фиг. 36) остается постоянной, слѣдовательно, M есть линейная функція отъ x вида $Cx + D$. Величина M измѣняется между смежными грузами по прямой и либо возрастаетъ, если $Q > 0$, либо убываетъ, если $Q < 0$, а потому во всякомъ случаѣ заключается между крайними своими значеніями M_n и M_{n+1} для точекъ приложенія грузовъ P_n и P_{n+1} . Отсюда вытекаетъ пра-



Фиг. 37.



Фиг. 38.



Фиг. 39.

вило: во всякой прямой балкѣ какъ наибольшія, такъ и наименьшія значенія момента слѣдуетъ искать только между значеніями его для точекъ приложенія силъ, т. е. на опорахъ и подъ грузами, при чемъ эпюра моментовъ представляется въ видѣ многоугольника, котораго вершины соотвѣтствуютъ точкамъ приложенія грузовъ (фиг. 36).

Напримѣръ въ балкѣ съ задрѣванными концами при одномъ грузѣ (фиг. 37) *max. M* и *min. M* должны находиться на опорахъ и подъ грузами, а такъ какъ для опоръ $M < 0$ (выгибъ вверхъ), то имъ соотвѣтствуютъ два *minimut'a*, а *maximut*, слѣдовательно находится подъ грузомъ.

Для простой балки (фиг. 38) моменты на опорахъ равны нулю, а *maximut* — подъ грузомъ. Если на такой балкѣ находится нѣсколько грузовъ (фиг. 39), то обозначивъ черезъ A и B давленія правой и лѣвой опоры, имѣемъ значеніе

$$\frac{dM}{dx} = Q = A - P_1 - P_2 - \dots \quad (13)$$

измѣняющимся отъ $+A$ до $-B$; слѣдовательно, M сперва возрастаетъ отъ нуля у лѣвой опоры до нѣкоторой наибольшей величины, а затѣмъ убываетъ до нуля у правой опоры, а потому M всегда положительно.

27. Подвижная нагрузка. Теперь приступимъ къ вопросу—опредѣлить наибольшее значеніе момента въ простой балкѣ, подверженной дѣйствию системы грузовъ $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m$, неизмѣнно связанныхъ между собою и перемѣщающихся по пролету.

Такъ какъ только что доказано, что это значеніе въ каждомъ *отдѣльномъ положеніи* подвижной системы соотвѣтствуетъ моменту подъ однимъ изъ грузовъ, то его для *всѣхъ ея положеній* слѣдуетъ искать только между $\max. M_1, \max. M_2, \max. M_3$ и $\max. M_m$, т. е. между наибольшими его значеніями подъ каждымъ изъ грузовъ. Но рѣшеніе вопроса дѣлается еще проще. Относительно нѣкоторыхъ изъ M_1, M_2, \dots, M_m можно заранее сказать, что абсолютный $\max. M$ не заключается между ними, и что ихъ поэтому можно исключить изъ разсмотрѣнія. Для этого обозначимъ черезъ A давленіе лѣвой опоры; оно получаетъ при положеніи системы въ предѣлахъ опоръ наибольшее значеніе A_0 , когда система сдвинута къ лѣвой опорѣ и крайній лѣвый грузъ станетъ надъ нею, а наименьшее значеніе A_1 получится при положеніи крайняго праваго груза на правой опорѣ, и потому при всякомъ положеніи системы въ предѣлахъ опоръ

$$\max. A > A > \min. A \text{ или } A_0 > A > A_1.$$

Изъ предыдущаго извѣстно, что наибольшее значеніе M для какого-нибудь положенія системы на балкѣ, или частный $\max. M$, будетъ подъ тѣмъ изъ грузовъ, гдѣ производная

$$\frac{dM}{dx} = A - P_1 - P_2 - \dots \quad (14)$$

перемѣняетъ знакъ. Отсюда слѣдуетъ, что при подвижной системѣ абсолютный $\max. M$ не можетъ находиться подъ тѣми изъ грузовъ, для которыхъ при всѣхъ положеніяхъ системы грузовъ величина

$$\frac{dM}{dx} = A - P_1 - P_2 -$$

сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ. Эти грузы подъ которыми не бываетъ и частный $\max. M$ данной системы, не трудно выдѣлить. Положимъ, напр., что для нѣкотораго груза P_n имѣемъ:

$$\min. A > P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} \dots \quad (14)$$

$$\text{но } \min. A < P_1 + P_2 \dots + P_{n-1} + P_n \quad (15)$$

Отсюда мы прямо заключаемъ, что поперечная сила

$$Q = A - P_1 - P_2 - P_3 -$$

для части балки отъ лѣвой опоры и до груза P_n не можетъ пере-

мѣнить положительнаго знака $+$, какъ бы данная система грузовъ ни была расположена въ пролетѣ, а слѣдовательно, всегда для этой части балки $dM:dx > 0$,

функция M возрастаетъ до груза P_n , т. е. всегда

$$M_1 < M_2 < M_3 < \dots < M_{n-1} < M_n,$$

и потому наибольшее значеніе M слѣдуетъ искать между M_n , $M_{n+1} \dots$

Съ другой стороны, если для какого-либо груза P_s

$$\text{max. } A < P_1 + P_2 + \dots + P_s \dots (16)$$

$$\text{но max. } A > P_1 + P_2 + \dots + P_{s-1} \dots (17)$$

$$\text{то } \frac{dM}{dx} = Q$$

всегда отрицательна для части балки отъ P_s до правой опоры, и потому всегда

$$M_s > M_{s+1} > M_{s+2} \dots > M_m,$$

такъ что при розысканіи моменты

$$M_{s+1}, M_{s+2} \dots M_m$$

также исключаются, и остается только изслѣдовать

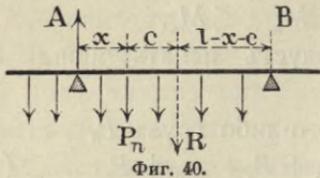
$$M_n, M_{n+1}, \dots M_s.$$

Такимъ образомъ; *первый грузъ P_n , подъ которымъ возможенъ абсолютный max. M , будетъ тотъ, который первый дѣлаетъ сумму $P_1 + P_2 + \dots + P_n$ большей min. A , а послѣдній грузъ P_s тотъ, который первый даетъ сумму $P_1 + P_2 + \dots + P_s$ большую max. A .*

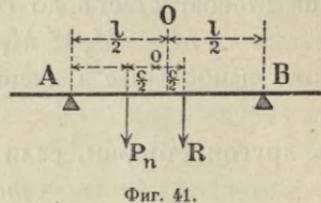
Напр., если система состоитъ изъ 9 грузовъ по одной тоннѣ, связанныхъ разстояніями въ одинъ метръ, а пролетъ балки 10 м., то $\text{min. } A = 3,6$ и $\text{max. } A = 5,4$ тн., слѣдовательно, четвертый грузъ первый даетъ сумму $P_1 + P_2 + \dots$ большую $\text{min. } A$, а шестой — сумму большую $\text{max. } A$, такъ что $\text{max. } M$ можетъ находиться только между M_4 , M_5 и M_6 .

28. Опредѣленіе max. M . подъ грузомъ подвижной системы. Итакъ всегда можно ограничить число значеній M_1 , $M_2, \dots M_m$, между которыми разыскивается абсолютный $\text{max. } M$. Покажемъ теперь, какъ находить $\text{max. } M_n$, $\text{max. } M_{n+1} \dots$, т. е. наибольшее значеніе момента подъ какимъ-нибудь грузомъ P_n . Пусть R — равнодѣйствующая грузовъ равная изъ суммѣ, s — разстояніе ея до разсматриваемаго груза P_n , при чемъ s положительно для грузовъ влѣво отъ равнодѣйствующей R и отрицательно для грузовъ вправо отъ нея, и N — моментъ грузовъ $P_1, P_2, \dots P_{n-1}$, предшествующихъ P_n , относительно точки при-

положенія P_n ; всѣ эти величины не зависятъ отъ положенія системы на балкѣ. Для удобства изслѣдованія кромѣ того мы будемъ представлять себѣ балку продолженную свѣшивающимися



Фиг. 40.



Фиг. 41.

концами за опоры, и дѣйствіе на нее грузовъ не прекращающимся съ переходомъ нѣкоторыхъ изъ нихъ за опору.

Вслѣдствіе этого, *будутъ ли всѣ грузы на пролетѣ или нѣкоторые изъ нихъ внѣ его на свѣшивающихся концахъ* (фиг. 40), вообще имѣемъ:

$$A = \frac{R}{l} (l - x - c) \dots \dots \dots (18)$$

$$M = Ax - N = \frac{R}{l} (l - x - c) x - N, \dots \dots (19)$$

гдѣ x означаетъ разстояніе груза P_n до лѣвой опоры, A —ея реакцію и l —величину пролета балки или разстояніе между ея опорами. Дифференцируя M_n по x , находимъ

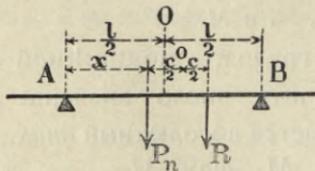
$$\frac{dM_n}{dx} = \frac{R}{l} (l - c - 2x).$$

Слѣдовательно, пока

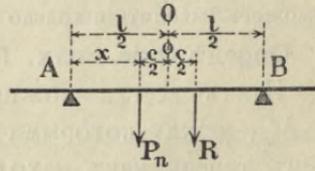
$$x + \frac{c}{2} < \frac{l}{2}$$

всякое передвиженіе системы вправо (фиг. 41), или пока

$$x + \frac{c}{2} > \frac{l}{2},$$



Фиг. 42.



Фиг. 43.

всякое перемѣщеніе ея влѣво (фиг. 42) увеличиваютъ значеніе M_n , и наибольшее значеніе его получается при

$$x = \frac{l - c}{2},$$

или при

$$x + \frac{c}{2} = \frac{l}{2},$$

когда, слѣдовательно, o середина разстоянія c совпадаетъ съ O — серединой пролета (фиг. 43). Тогда

$$x_n = \frac{l-c}{2} \text{ и } \text{max. } M_n = \frac{R}{l} \left(\frac{l-c}{2} \right)^2 - N \dots \dots (20)$$

или

$$\text{max. } M_n = \frac{R}{l} x_n^2 - N \dots \dots \dots (21)$$

29. Значеніе схода грузовъ съ пролета. Можетъ при

$$x = \frac{l-c}{2}$$

случиться, что s грузовъ стануть внѣ пролета. Въ этомъ случаѣ можно доказать, что $\text{max. } M_n$ при полной системѣ будетъ меньше соотвѣтственнаго $\text{max. } M_n$ при неполной системѣ изъ оставшихся на пролетѣ $m-s$ грузовъ, т. е. когда всѣ s грузовъ, перешедшіе за опору, совсѣмъ удалены изъ системы.

Замѣтимъ прежде всего, что при

$$x = \frac{l-c}{2}$$

значеніе M_n имѣетъ наибольшую величину изъ всѣхъ возможныхъ при полной системѣ, и при томъ величину положительную, потому что значеніе M_n , когда всѣ грузы были еще въ пролетѣ, было положительно, а такъ какъ во все время движенія было

$$\frac{dM}{dx} > 0,$$

то величина M_n возрастала и при

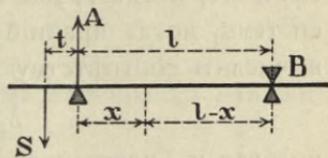
$$x = \frac{l-c}{2}$$

также положительна. Пусть теперь S означаетъ сумму всѣхъ s грузовъ,

ставшихъ, напр., за лѣвой опорой, или ихъ равнодѣйствующую, и t — ея разстояніе до этой опоры. Чтобы опредѣлить влияние этихъ грузовъ на величину M_n , представимъ себѣ, что другихъ грузовъ совсѣмъ нѣтъ на балкѣ (фиг. 44). Моментъ для какого-либо сѣченія между опорами

$$Ax - S(t+x) = \frac{S(t+l)x}{l} - Sx - St = - \frac{St(l-x)}{l}$$

величина отрицательная (выгибъ вверхъ), а такъ какъ общій моментъ есть сумма двухъ моментовъ отъ грузовъ, стоящихъ на пролетѣ и стоящихъ внѣ его, то очевидно величина M вездѣ возрастеть и M_n получитъ значеніе больше предшествовавшаго $\text{max. } M_n$, когда всѣ стоящіе внѣ опоръ s грузовъ совсѣмъ уда-



Фиг. 44.

лимъ изъ системы. Но можетъ возникнуть вопросъ: нужно ли всѣ s грузовъ удалить и не можетъ ли $\max. M_n$ получить большаго значенія, когда только нѣкоторые грузы сняты съ балки. Для разрѣшенія его стоитъ лишь себѣ представить удаление одного изъ нихъ. Отъ этого равнодѣйствующая R , системы оставшихся грузовъ на всей балкѣ удалится отъ лѣвой опоры; слѣдовательно, середина разстоянія c сдвинется со середины пролета вправо, и потому значеніе M_n еще болѣе увеличится, когда система будетъ перемѣщаться влѣво, пока не достигнетъ M_n своего *maximum'a*, при совпаденіи середины c со серединой пролета. Такъ какъ при этомъ остальные $s-1$ грузовъ продолжаютъ находиться внѣ пролета, то рассуждая точно такъ же относительно каждаго изъ остальныхъ грузовъ, заключаемъ, что $\max. M_n$, все возрастая, при послѣдней неполной системѣ изъ $m-s$ грузовъ будетъ болѣе всѣхъ $\max. M_n$ предшествовавшихъ системъ. Итакъ, когда при $x = \frac{l-c}{2}$ s грузовъ переходятъ за опору, ихъ слѣдуетъ удалить изъ системы и искать $\max. M_n$ при оставшихся грузахъ.

Но если бы насъ интересовали возможныя наибольшія значенія M при полной системѣ изъ m грузовъ, то нужно въ такихъ случаяхъ, когда грузы сходятъ, взять крайнее положеніе полной системы, когда крайній грузъ только что дойдетъ до опоры, и вычислить соотвѣтствующую величину

$$M_n = \frac{R}{l} (l - c - x) x - N, \quad \dots \quad (19)$$

которая и будетъ $\max. M_n$ при m грузахъ, потому что во все время перемѣщенія системы $\frac{dM}{dx} > 0$ и M_n возрастала.

30. Скажемъ нѣсколько словъ о тѣхъ пріемахъ, которые сокращаютъ вычисленіе данныхъ $\max. A$, $\min. A$ и величинъ c .

Система ставится въ крайнее положеніе на пролетѣ, когда крайній правый грузъ стоитъ на правой опорѣ; разстояніе крайняго лѣваго при этомъ отъ лѣвой опоры назовемъ черезъ d . Вычисляются сумма R всѣхъ грузовъ и моментъ M системы въ этомъ положеніи относительно правой опоры. Тогда $\frac{M}{R} = r$ есть разстояніе равнодѣйствующей R отъ крайняго праваго груза; разстояніе до R другихъ грузовъ, или величины c , легко получить уже теперь. Кромѣ того $\frac{M}{l} = \min. A$. Для $\max. A$ система сдви-

гается влѣво на величину d ; моментъ ея относительно той же правой опоры

$$M' = R(r + d) = M + Rd \text{ и } \max. A = \frac{M'}{l} = \frac{M}{l} + \frac{Rd}{l},$$

или

$$\max. A = \min. A + \frac{Rd}{l}, \quad \dots \dots \dots (22)$$

Обыкновенно абсолютный $\max. M$ получается подъ грузомъ ближайшимъ къ равнодѣйствующей R , т. е. съ наименьшимъ значеніемъ c .

31. Мах. M въ данномъ сѣченіи. Отъ вопроса о нахожденіи абсолютнаго $\max. M$ переходимъ теперь къ другому вопросу, каково должно быть положеніе системы грузовъ на балкѣ для того, чтобы моментъ въ опредѣленномъ сѣченіи на разстояніи x отъ лѣвой опоры былъ наибольшій.

Пусть m означаетъ переменное разстояніе перваго груза P_1 отъ лѣвой опоры, R и S —сумму всѣхъ грузовъ системы и сумму тѣхъ изъ нихъ, которые находятся влѣво отъ разсматриваемаго сѣченія X , c и e —разстояніе ихъ равнодѣйствующихъ отъ того же груза P_1 и l —величину пролета.

Представляя себѣ пока балку продолженной концами за опору, можемъ давленіе лѣвой опоры всегда положить

$$A = \frac{R}{l}(l - m - c)$$

независимо отъ того, будутъ ли всѣ грузы въ пролетѣ или нѣкоторые внѣ его на свѣшенныхъ концахъ.

Моментъ въ данномъ сѣченіи

$$M = \frac{R}{l}(l - c - m)x - S(x - e - m).$$

Это выраженіе первой степени отъ m , слѣдовательно, значеніе M измѣняется при движеніи системы прямолинейно. Производная отъ M по m

$$\frac{dM}{dm} = S - \frac{R}{l}x$$

величина постоянная и измѣняющаяся только съ величиною S , т. е. съ переходомъ груза черезъ разсматриваемое сѣченіе.

Во всякомъ случаѣ величина момента M будетъ возрастать при движеніи системы вправо и влѣво, смотря по знаку $+$ или $-$ у производной $S - \frac{R}{l}x$, пока не станетъ наконецъ въ данномъ сѣченіи такой грузъ P_n , съ переходомъ котораго черезъ

это сѣченіе измѣняется знакъ производной $S - kx$, гдѣ постоянная величина $\frac{R}{l}$ замѣнена черезъ k .

Поэтому наибольшее значеніе момента въ какомъ-нибудь сѣченіи балки на разстояніи x отъ лѣвой опоры будетъ подѣ тѣмъ изъ грузовъ P_n , совпадающимъ съ этимъ сѣченіемъ, который опредѣлится изъ условія

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n > kx \quad \dots \dots \dots (23)$$

$$\text{и } P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} < kx \quad \dots \dots \dots (24)$$

Соотвѣтствующее этому положенію значеніе $max. M$ опредѣляется по формулѣ (19), въ которой s и N относятся къ тому грузу P_n , который совпадаетъ съ даннымъ сѣченіемъ.

Если при этомъ нѣкоторые грузы оказались внѣ прѣлета на свѣшенныхъ концахъ, то это только покажетъ намъ (п. 29), что ихъ, какъ отрицательно вліяющихъ на величину момента, нужно удалить изъ системы, отчего величина M при неполной системѣ всегда увеличится. Для полной же системы наибольшее значеніе момента соотвѣтствуетъ крайнему ея положенію въ пролетѣ.

Если измѣнять непрерывно величину x , то грузъ P_n , проходя черезъ соотвѣтствующія сѣченія балки, будетъ вызывать въ нихъ при этомъ наибольшія значенія момента, пока наконецъ x не достигнетъ до такой величины x_n , при которой выраженіе (23) обращается въ равенство. Начиная съ этого сѣченія X_n , грузъ P_n долженъ быть замѣненъ слѣдующимъ грузомъ P_{n+1} , при чемъ для этого сѣченія X_n значеніе M остается постояннымъ, будетъ ли это сѣченіе занимать грузъ P_n , или P_{n+1} , или система будетъ въ какомъ-нибудь промежуточномъ положеніи изъ этихъ двухъ, такъ какъ для этого значенія x_n производная отъ M обращается въ нуль.

Точки $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, раздѣляющія балку на части $AX_1, X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_{n-1}X_n$ соотвѣтственно грузамъ $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, вызывающимъ въ нихъ наибольшія значенія момента при переходѣ черезъ ихъ сѣченія, могутъ быть опредѣлены изъ уравненій

$$kx_1 = P_1$$

$$kx_2 = P_1 + P_2$$

$$kx_3 = P_1 + P_2 + P_3$$

$$\dots \dots \dots$$

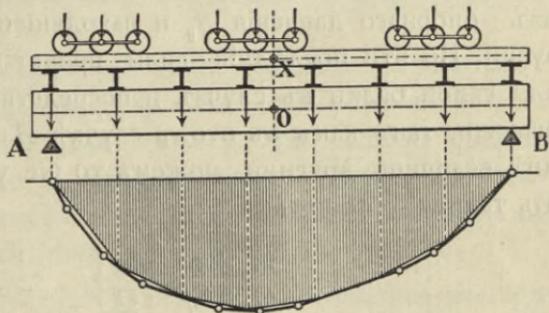
$$kx_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n \quad \dots \dots \dots (25)$$

Такимъ образомъ кривая наибольшихъ значений момента отъ данной системы грузовъ для всѣхъ стѣнй балки представляется составленной по частямъ изъ отръзковъ кривой момента подъ каждымъ изъ грузовъ, выражаемой (ур. 19) общимъ для всѣхъ грузовъ уравненіемъ параболы $y = -\frac{R}{l} x^2$ за исключеніемъ тѣхъ стѣнй, въ которыхъ наибольшія значенія момента соответствуютъ неполной системѣ грузовъ.

32. Зависимость между значеніями M и Q при прямой и узловой нагрузкахъ. Нагрузка обыкновенно дѣйствуетъ не прямо на балку, а передается въ нѣкоторыя ея точки, или узлы, съ помощью особыхъ балочекъ. Поэтому не бесполезно будетъ показать здѣсь, какая существуетъ разница для какого-нибудь стѣненія балки между моментомъ M и вертикальной проекціей Q внѣшнихъ силъ при непосредственномъ дѣйствіи нагрузки сравнительно съ моментомъ M_y и вертикальной проекціей Q_y внѣшнихъ силъ, когда та же самая нагрузка передается на балку помощью вспомогательныхъ балочекъ. Внѣшними силами являются въ первомъ случаѣ данная нагрузка и вызываемая ею опорныя реакціи балки, во второмъ случаѣ — узловыя давленія отъ нагрузки и соответствующія имъ опорныя реакціи.

Представимъ себѣ балку, свободно лежащую на двухъ опорахъ, и произвольную нагрузку въ видѣ сосредоточенныхъ грузовъ или сплошную, какъ-нибудь расположенную на пролетѣ и передающуюся въ узлы посредствомъ особыхъ балочекъ (фиг. 45), при чемъ крайніе узлы совпадаютъ съ опорами балокъ.

Разсматривая балочки, какъ свободно лежащія на двухъ опорахъ, и слѣдовательно, находящуюся на нихъ



Фиг. 45.

нагрузку передающуюся на узлы по закону статики, находимъ, что равнодѣйствующая всей нагрузки балки и равнодѣйствующая всѣхъ узловыхъ ея давленій должны совпадать по величинѣ и по-

ложенію, а потому и давленіе на опору будетъ одинаково въ обоихъ случаяхъ, будетъ ли передача непосредственная или узловая; или называя давленія на лѣвую опору соотвѣтственно обоимъ случаямъ черезъ A и A_y , имѣемъ, слѣд., $A = A_y$.

Раздѣлимъ мысленно вертикальнымъ разрѣзомъ OX данную балку вмѣстѣ съ вспомогательной балочкой на двѣ части, пересѣкая оси балки и балочки въ точкахъ O и X , и условимся обозначать черезъ M и Q моментъ и вертикальную проекцію внѣшнихъ силъ (поперечную силу) *лѣвой* отсѣченной части балки и черезъ t и q — для вспомогательной балочки.

Для равновѣсія лѣвой части балочки необходимо, чтобы значенія момента и вертикальной проекціи ея внутреннихъ силъ въ сѣченіи OX были равны значеніямъ t и q внѣшнихъ силъ ея отъ находящейся на ней нагрузки. Точно также и для балки значенія M и Q внутреннихъ силъ ея въ сѣченіи OX должны быть равны значеніямъ соотвѣтствующихъ ей внѣшнихъ силъ отъ узловыхъ давленій, т. е. значеніямъ M_y и Q_y . Поэтому для отсѣченныхъ лѣвыхъ частей балки и балочки *вмѣстѣ* величины $M_y + t$ и $Q_y + q$ внѣшнихъ силъ могутъ замѣнять моментъ и вертикальную проекцію ихъ внутреннихъ силъ.

Съ другой стороны, рассматривая отдѣленную лѣвую часть балки вмѣстѣ съ вспомогательными балочками какъ *одну* систему, изъ равновѣсія ея находимъ, что моментъ и вертикальная проекція внутреннихъ силъ балки и балочки для сѣченія OX должны равняться значеніямъ M и Q дѣйствующихъ на систему внѣшнихъ силъ—опорнаго давленія A_y и находящейся въ лѣвой части нагрузки. Но эти послѣднія силы представляютъ собою внѣшнія силы самой балки въ случаѣ непосредственнаго дѣйствія той же нагрузки, такъ какъ въ этомъ случаѣ $A = A_y$. Поэтому, замѣняя однѣ величины другими, можемъ то же условіе равновѣсія выразить такимъ образомъ:

$$\left. \begin{aligned} M_y + t &= M \\ Q_y + q &= Q \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

т. е. при узловомъ дѣйствіи какой-нибудь нагрузки на балку, моментъ M_y и вертикальная проекція Q_y внѣшнихъ силъ для даннаго сѣченія OX балки меньше значеній M и Q внѣшнихъ силъ, соотвѣтствующихъ непосредственному дѣйствію той же нагрузки,

на величину момента m и вертикальной проекции q внешнихъ силъ вспомогательной балочки отъ находящейся на ней нагрузки.

Отсюда можно вывести, напимѣрь, такія слѣдствія:

а) Для узловъ при всякой нагрузкѣ значенія M и M_y равны (стр. 20), а такъ какъ этимъ сѣченіямъ при вліяніи вспомогательныхъ балочекъ соотвѣтствуютъ (стр. 41) наибольшія значенія момента, то послѣднія могутъ быть опредѣлены независимо отъ балочекъ по непосредственному дѣйствию нагрузки на балку, для чего, какъ извѣстно, нужно всегда такъ расположить систему на пролетѣ, чтобы съ даннымъ узломъ совпалъ тотъ грузъ P_n , который опредѣляется неравенствомъ

$$P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} < \frac{k}{l} x < P_1 + P_2 + \dots + P_n,$$

гдѣ x представляетъ разстояніе узла до лѣвой опоры, а остальные обозначенія — тѣ же, что и выше (стр. 48).

б) Для всѣхъ другихъ сѣченій кромѣ узловъ значеніе M болѣе или равно M_y , смотря по тому, имѣется или не имѣется на балочкѣ нагрузка. Поэтому кривая момента M_y , представляющая собою многоугольникъ съ вершинами, соотвѣтствующими узламъ балки, оказывается *вписанной* въ кривую момента M , которой служитъ парабола для сплошной и многоугольникъ для сосредоточенной нагрузки, при чемъ вершины послѣдняго соотвѣтствуютъ точкамъ приложенія грузовъ, такъ что кривую M_y легко получить, стоитъ только провести перпендикуляры изъ узловъ и точки ихъ пересѣченія съ кривой M соединить прямыми (см. стр. 20).

Подобныя же соотношенія не трудно вывести и относительно поперечныхъ силъ. Напимѣрь, въ балкѣ отъ равномерной нагрузки, распределенной по всему пролету, при узловой передачѣ значенія поперечной силы $Q_y = Q$ для всѣхъ сѣченій, проведенныхъ черезъ середины вспомогательныхъ балочекъ, такъ какъ для нихъ $q = 0$, что уже намъ извѣстно изъ стр. 22.

Численный примѣръ. Для примѣра опредѣлимъ абсолютный *max.* M въ балкѣ, пролетомъ $l = 18,5$ м., отъ нагрузки въ видѣ нормального желѣзнодорожнаго поѣзда.

1) Возьмемъ сперва типъ I поѣзда и выберемъ изъ него систему 8 грузовъ: 4 груза по 15 тоннъ въ срединѣ и 4 по 12,5 тоннъ съ обѣихъ сторонъ, всего $R = 4 \cdot 15 + 4 \cdot 12,5 = 110$ т. Разстояніе между крайними грузами $1,6 + 4,5 + 1,3 + 1,3 + 1,3 + 4,5 + 1,6 = 16,1$ м.; величина $d = 18,5$ —

$16,1 = 2,4$ м. Вследствие симметрии системы равнодействующая находится на расстоянии $r = \frac{1}{2} \cdot 16,1 = 8,05$ м. отъ каждого изъ крайнихъ грузовъ.

Поэтому

$$\min. A = \frac{Rr}{l} = \frac{110 \cdot 8,05}{18,05} = 47,86 \text{ т.}$$

$$\max. A = \min. A + \frac{110 \cdot 2,4}{18,5} = 62,3 \text{ т.}$$

Сумма первыхъ 3 грузовъ

$$2 \cdot 12,5 + 15 = 40 < \min. A,$$

а сумма грузовъ

$$2 \cdot 12,5 + 2 \cdot 15 = 55 > \min. A;$$

слѣд. подъ первыми 3 грузами не можетъ быть абсолютный *max. M*. Далѣе

$$\text{сумма 4 грузовъ} = 55 < \max. A,$$

$$\text{но сумма 5 грузовъ} = 70 > \max. A;$$

слѣд., 6, 7 и 8-й грузы также исключаются изъ разсмотрѣнія. Изъ оставшихся двухъ среднихъ грузовъ 4 и 5 достаточно опредѣлить *max. M* для одного изъ нихъ, напр., для P_4 , такъ какъ вследствие симметрии системы, значенія *max. M*

должны быть попарно равны между собою. Въ данномъ случаѣ $c = \frac{1}{2} \cdot 1,3 =$

$$= 0,65, \quad x = \frac{1}{2} (l - c) = 8,925 \text{ и } N = 15 \cdot 1,3 + 12,5 (5,8 + 7,4) = 184,5 \text{ т. м.}$$

Расстояніе перваго груза отъ лѣвой опоры $m = x - 7,4 = 1,525 < d$; слѣд., всѣ 8 грузовъ остаются въ пролетѣ;

$$\max M_4 + \frac{R(l-c)^2}{4l} - N = \frac{110 \cdot 17,85^2}{4 \cdot 18,5} - 184,5 = 289,128 \text{ т. м.}$$

2) Возьмемъ теперь типъ II поѣзда и выдѣлимъ изъ него систему 8 грузовъ по 15 т. и одного груза съ лѣвой стороны въ 12,5 т., всего $R = 8 \cdot 15 + 12,5 = 132,5$ т. длиною $3,9 + 5,4 + 3,9 + 4,5 = 17,7$ м. Расстояніе равнодействующей системы отъ крайняго праваго груза найдется изъ уравненія

$$Rr = M = 8 \cdot 15 \cdot 6,6 + 12,5 \cdot 17,7 = 1013,25, \text{ откуда}$$

$$r = \frac{1013,25}{132,5} = 7,647 \text{ м., } d = 18,5 - 17,7 = 0,8 \text{ м.}$$

$$\min. A = \frac{1013,25}{l} = \frac{1013,25}{18,5} = 54,77 \text{ т.}$$

$$\max. A = 54,77 + \frac{132,5 \cdot 0,8}{18,5} = 60,50 \text{ т.}$$

Сумма первыхъ 4 грузовъ $57,5 > \min. A$,

и сумма первыхъ 5 грузовъ $72,5 > \max. A$,

слѣд., разсмотрѣнію подлежатъ грузы P_4 и P_5 .

Для 4-го груза: $c = 10,6 - 7,647 = 2,953$; $x = \frac{1}{2} (18,5 - 2,953) = 7,7735$

и $N = 15 \cdot 3 \cdot 1,3 + 12,5 \cdot 7,1 = 147,25$ т. м. Расстояніе крайняго груза отъ лѣвой опоры $m = 7,7735 - 7,1 = 0,6735 < d$; слѣд., всѣ грузы остаются въ пролетѣ.

$$\max. M_4 = \frac{132,5}{4 \cdot 18,5} (15,547)^2 - 147,25 = 285,540 \text{ т. м.}$$

Для 5-го груза $c = 9,3 - 7,647 = 1,653$; $x = \frac{1}{2} (18,5 - 1,653) = 8,4235$ и

$N = 15(1,3 + 2,6 + 3,9) + 12,5 \cdot 8,4 = 222$ т. м. Расстояние первого груза от лѣвой опоры $m = x - 8,4 = 0,0235$ м. $< d$.

$$\text{max. } M_3 = \frac{132,5}{4 \cdot 18,5} (16,847)^2 - 222 = 286,194 \text{ т. м.}$$

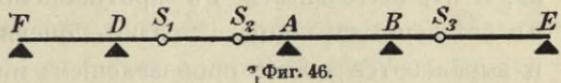
3) Если бы мы выбрали симметричную систему только из 8 грузовъ по 15 т., то имѣли бы для 4-го груза $c = \frac{1}{2} \cdot 5,4 = 2,7$; $x = \frac{1}{2} (l - c) = 7,9$, расстояние первого груза от лѣвой опоры $x - 3,9 = 4,0$; слѣд., первое колесо тендера остается внѣ пролета. Поэтому

$$\text{max. } M_4 = \frac{120}{4 \cdot 18,5} \cdot 15,8^2 - 117 = 287,821 \text{ т. м.}$$

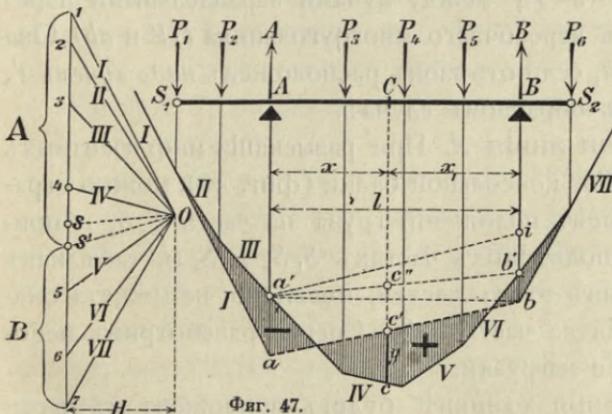
Такимъ образомъ абсолютный *max. M* соответствуетъ системѣ изъ 8 грузовъ поѣзда I и равенъ = 289,128 т. м.

V. Консольныя балки.

33. Постоянная нагрузка. Въ началѣ (стр. 7) было показано, что каждая балка на n шарнирныхъ опорахъ, изъ которыхъ одна неподвижная, можетъ быть обращена въ статически опредѣлимую, если помѣстить въ ней $n - 2$ промежуточныхъ шарнира. Одна изъ такихъ шарнирныхъ балокъ, называемыхъ также *уравновѣшенными, консольными или балками Гербера*, представлена на фиг. 46.



Она состоитъ изъ частей FDS_1 , и S_2ABS_3 , называемыхъ *балками съ консолями*, и изъ *подвѣсныхъ* частей S_1S_2 и S_3E .



Последнія рассчитываются какъ простые балки на двухъ опорахъ, и при этомъ опредѣляются опорныя давленія, передающіяся на шарниры S_1 , S_2 и S_3 . Такимъ образомъ изслѣдованіе уравновѣшенныхъ балокъ приводится къ

рассмотрѣнію балокъ со свѣшенными концами, покоющихся на двухъ опорахъ и подверженныхъ дѣйствию данныхъ грузовъ и

приложенныхъ къ шарнирамъ давленій. Если для этихъ силъ, которыя мы будемъ принимать дѣйствующими въ вертикальномъ направленіи, построить веревочный многоугольникъ $I, II, III \dots$ и провести замыкающую сторону, какъ для простой балки, черезъ точки пересѣченія a и b крайнихъ сторонъ его (I и VII) съ направленіями опорныхъ реакцій A и B , то лучъ s' параллельный линіи ab отсѣчетъ на многоугольникѣ силъ два вертикальныхъ отрѣзка, представляющихъ давленія опоръ A и B . Первое изъ нихъ уравнивается въ точкѣ a съ силами сторонъ I и ba , а второе въ точкѣ b съ силами VII и ab .

Точно также для какого-нибудь сѣченія C балки между опорами A и B отрѣзокъ y проведенной черезъ C вертикальной прямой Ccc' , опредѣляемый пересѣченіями ея со сторонами замкнутого веревочнаго многоугольника, даетъ моментъ внѣшнихъ силъ $M = Hy$ для сѣченія C балки. Моментъ будетъ положительнымъ, если отрѣзокъ, или ордината y расположена подъ замыкающей стороной ab , и отрицательнымъ въ противоположномъ случаѣ. Моменты въ свѣшенныхъ концахъ балки, очевидно, всегда отрицательны и выражаются также произведеніемъ изъ полюснаго разстоянія H на соотвѣтственный отрѣзокъ вертикальной прямой, проведенной черезъ разсматриваемое сѣченіе.

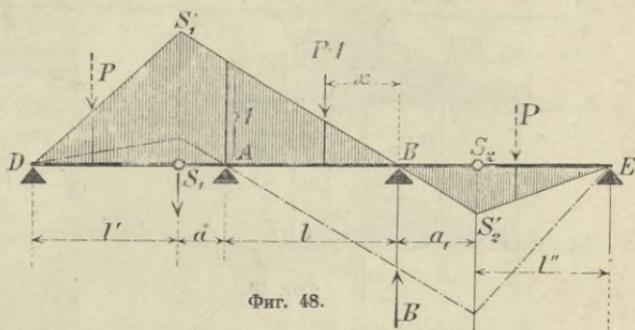
Легко убѣдиться, что поперечная сила Q , или равнодѣйствующая $A - P_1 - P_2 - P_3$ силъ лѣвой части балки относительно даннаго сѣченія C , выражается на многоугольникѣ силъ также вертикальнымъ отрѣзкомъ s_4 между лучами параллельными пересѣкаемымъ сторонамъ веревочнаго многоугольника (IV и ab). Она будетъ положительной, если отрѣзокъ расположенъ надъ лучемъ s' , и отрицательный — въ обратномъ случаѣ.

34. Инфлюентная линія A . При разысканіи инфлюентныхъ линій для части $S_2 ABS_3$ консольной балки (фиг. 46), можно ограничиться разсмотрѣніемъ положеній груза на части $S_2 S_3$ и примыкающихъ къ ней подвѣсныхъ частяхъ $S_1 S_2$ и $S_3 E$, такъ какъ расположеніе груза внѣ этихъ частей, очевидно, не можетъ оказывать никакого вліянія на часть $S_2 S_3$. Сперва разсмотримъ непосредственное дѣйствіе нагрузки.

Пусть грузъ равный единицѣ будетъ приложенъ къ части $S_1 S_2$ (фиг. 48) на разстояніи x отъ опоры B , при чемъ x будетъ считаться положительнымъ влѣво отъ B и отрицательнымъ вправо.

Давленіе опоры A , какъ и въ случаѣ простой балки AB , опредѣляется изъ условія равновѣсія $Al - 1 \cdot x = 0$, или $A = \frac{1 \cdot x}{l}$, т. е. выражается тою же прямою, имѣющей на опорахъ A и B ординаты 1 и 0 . Ея ординаты въ точкахъ S_1 и S_2 ($x = l + a$ и $x = -a_1$) соотвѣтственно равны $\frac{l+a}{l}$ и $-\frac{a_1}{l}$, гдѣ a и a_1 обозначаютъ длину частей S_1A и S_2B .

Когда грузъ единица будетъ помѣщенъ на части S_1D или ES_2 , то его дѣйствіе на балку S_1S_2 выразится давленіемъ, передающимся отъ него въ точку S_1 или S_2 ; слѣ-



Фиг. 48.

довательно, въ этомъ случаѣ будетъ имѣть мѣсто узловое дѣйствіе нагрузки. Поэтому инфлюентная линия опорнаго сопротивленія A между точками D и S_1 или E и S_2 должна состоять изъ прямыхъ DS'_1 и ES'_2 , опредѣляемыхъ ординатами $S_1S'_1$ и $S_2S'_2$ въ узлахъ S_1 и S_2 и нулевыми ординатами въ точкахъ D и E , гдѣ положеніе груза даетъ сопротивленіе опоры $A = 0$.

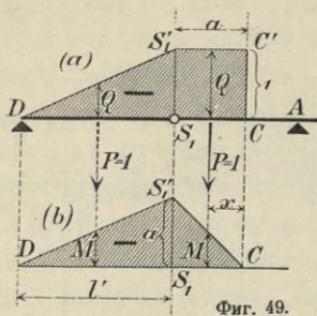
Такимъ образомъ инфлюентная линия опорнаго давленія A получится, если прямую BA' съ ординатами 0 и 1 на опорахъ B и A продолжить до пересѣченія въ точкахъ S'_1 и S'_2 съ вертикальными прямыми, проведенными черезъ шарниры S_1 и S_2 , и соединить S'_1 и S'_2 прямыми съ опорами D и E .

Части DB соотвѣтствуютъ положительныя значенія A , а части BE — отрицательныя.

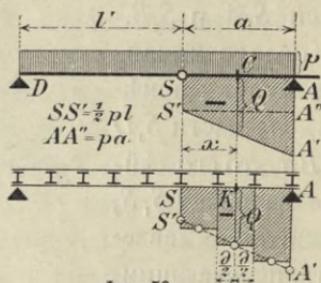
Инфлюентная линия опорнаго сопротивленія B строится подобнымъ же способомъ и показана на чертежѣ пунктиромъ.

35. Инфлюентная линия Q для сѣченія консоли. Возьмемъ какое-нибудь сѣченіе C въ консоли S_1A балки (фиг. 49) на разстояніи a отъ шарнира S_1 . Поперечная сила Q отъ груза единицы, какъ равнодѣйствующая силъ лѣвой части S_1C , будетъ равна единицѣ, пока грузъ находится на части S_1C , или передающемуся въ точку S_1 опорному давленію балки DS_1 , если грузъ займетъ на ней положеніе. Слѣдовательно, во второмъ случаѣ искомая инфлюент-

ная линия состоитъ изъ прямой DS , имѣющей въ опорныхъ точкахъ D и S_1 ординаты 0 и 1 , а въ первомъ случаѣ — изъ горизонтальной прямой S_1C' съ ординатами равными единицѣ. Въ обоихъ случаяхъ сила Q направлена внизъ, слѣдовательно, имѣетъ отрицательную величину. На фигурѣ 50 показаны эпюры наиболь-



Фиг. 49.



Фиг. 50.

шихъ значеній поперечной силы Q въ различныхъ сѣченіяхъ C отъ равномерной нагрузки p , дѣйствующей непосредственно и на узлы.

Что касается момента M внѣшнихъ силъ, то онъ при положеніи груза на части S_1C въ разстояніи x отъ данного сѣченія C равенъ моменту груза $= 1 \cdot x = x$ т. е. измѣняется по прямой, имѣющей въ точкахъ C и S_1 (при $x=0$ и $x=a$) ординаты 0 и a . Когда грузъ приложенъ къ части DS_1 , то моментъ M равенъ передающемуся въ S_1 давленію, умноженному на постоянную длину a . Такъ какъ это давленіе при движеніи груза измѣняется по прямой отъ 0 до 1 , то и значеніе момента въ сѣченіи C также слѣдуетъ закону прямой. Последняя опредѣляется двумя точками D и S_1 , такъ какъ грузъ единица при положеніи на опорѣ D даетъ моментъ $M=0$, а при положеніи въ точкѣ S_1 моментъ $M=a=S_1S_1'$.

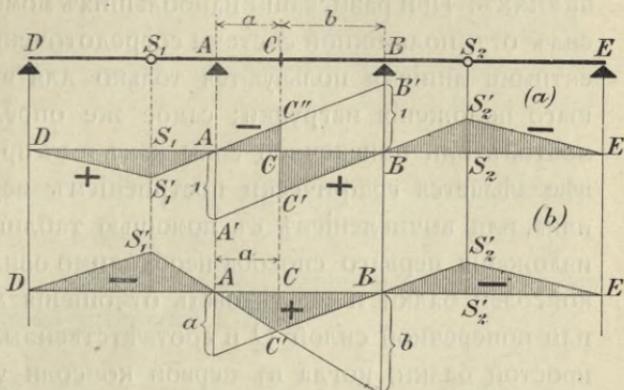
Слѣдовательно, инфлюентная линия момента въ сѣченіи C представляетъ треугольникъ съ основаніемъ DC и вершиной S_1' надъ шарниромъ S_1 на высотѣ $S_1S_1'=S_1C$. Онъ имѣетъ, очевидно, отрицательную величину.

36. Инфлюентная линия Q въ сѣченіи C междуопорной части AB . Если грузъ приложенъ справа отъ сѣченія C , то поперечная сила $Q=A$, такъ какъ въ лѣвой части S_1C балки дѣйствуетъ одна сила A . Поэтому для части CE инфлюентная линия Q совпадаетъ съ линіей опорнаго сопротивленія A . Если грузъ займетъ

положеніе въ лѣвой части балки DC , то сила $Q = -B$; слѣдов., для части DC инфлюентная линия Q совпадаетъ съ линіей $(-B)$.

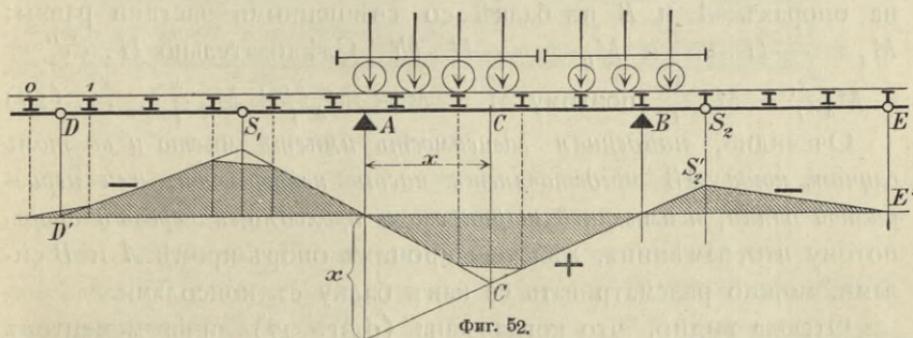
Такимъ образомъ инфлюентная линия поперечной силы Q для сѣченія C при дѣйствіи груза между опорами совпадаетъ съ инфлюентной линіей

Q для простой балки. Продолживъ обѣ прямыя, составляющія эту линію, за опоры A и B до пересѣченія ихъ въ точкахъ S'_1 и S'_2 съ вертикальными прямыми, проходящими через смежные шарниры S_1 и S_2 , и соединивъ точки S'_1 и S'_2 съ опорами E и D , получимъ инфлюентную линію для частей балки за предѣлами ея опоръ A и B (фиг. 51 а).



Фиг. 51.

37. Моментъ для сѣченія C междуопорной части $M = Aa$ или $M = Bb$, смотря по тому, дѣйствуетъ ли грузъ справа или слѣва сѣченія C . Слѣдовательно, инфлюентная линію для правой части CE будетъ подобна линію A и получится умноженіемъ ординатъ A на длину a , а для лѣвой части DC —умноженіемъ на b орди-



Фиг. 52.

натъ линію B . Такъ какъ положеніе груза между опорами A и B даетъ ту же инфлюентную линію, какъ и для простой балки AB , то построивъ эту часть ACB инфлюентной линію, легко дополнить и остальныя AS'_1D и BS'_2E (фиг. 51 б).

Въ случаѣ *узловой* дѣйствія нагрузки инфлюентныя линіи получаются изъ найденныхъ линій для прямой нагрузки вписываніемъ многоугольниковъ по извѣстному способу (фиг. 52).

38. Зависимость между M и Q въ консольной и простой балкахъ. При разысканіи наибольшихъ моментовъ и поперечныхъ силъ отъ подвижной системы сосредоточенныхъ грузовъ, инфлюентными линіями пользуются только для выясненія невыгоднѣйшаго положенія нагрузки; самое же опредѣленіе величины моментовъ или поперечной силы, какъ и въ простыхъ балкахъ, удобнѣе дѣлается графически построеніемъ веревочнаго многоугольника, или вычисленіемъ съ помощью таблицы моментовъ. Но для изложенія перваго способа необходимо ознакомиться съ вліяніемъ консолей балки и изслѣдовать отношенія между ея моментомъ M или поперечной силой Q и соотвѣтственными значеніями ихъ для простой балки, когда въ первой консоли уничтожены.

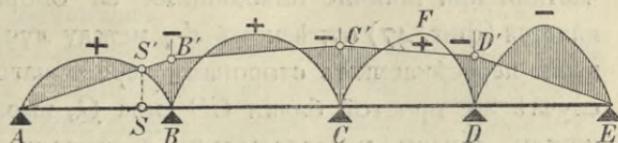
Искомыя соотношенія найдемъ по фигурѣ 47. Изъ нея видно, что въ случаѣ отсутствія консолей S_1A и BS_2 моментъ M_0 для простой балки AB выразится ординатой cc'' веревочнаго многоугольника относительно замыкающей линіи $a'b'$, гдѣ точки a' и b' представляютъ пересѣченія соотвѣтственныхъ крайнихъ сторонъ III и VI многоугольника съ направленіями опорныхъ противодѣйствій A и B . Поэтому $M = H(cc'' - c'c'') = M_0 - H.c'c''$. Величина $c'c''$ опредѣляется изъ треугольниковъ $aa'b$ и $bb'a'$; изъ нихъ находимъ $c'c'' = aa' \frac{x_1}{l} + bb' \frac{x}{l}$. Моменты на опорахъ A и B въ балкѣ со свѣшенными частями равны: $M_A = -H \cdot aa'$ и $M_B = -H \cdot bb'$. Слѣдовательно $H \cdot c'c'' = -M_A \frac{x_1}{l} - M_B \frac{x}{l}$, поэтому $M = M_0 + M_A \frac{x_1}{l} + M_B \frac{x}{l} \dots$ (27)

Очевидно, найденная зависимость имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда AB представляетъ часть непрерывной, или неразрѣзной балки, неимѣющей шарнировъ и проходящей черезъ n опоръ, потому что, замѣнивъ, дѣйствіе прочихъ опоръ кромѣ A и B силами, можно разсматривать ее какъ балку съ консолями.

Отсюда видно, что когда дана (фиг. 47) линія моментовъ $a'cb'$ простой балки AB , и извѣстны опорные моменты M_A и M_B балки консольной или вообще продолжающейся за опоры A и B , то значеніе моментовъ въ послѣдней балкѣ легко могутъ быть найдены или изъ ур. (27), или по ординатамъ данной линіи

$a'cb'$ относительно замыкающей стороны ab . Последняя определяется относительно линии $a'b'$ ординатами aa' и bb' , соответствующими опорным моментам M_A и M_B .

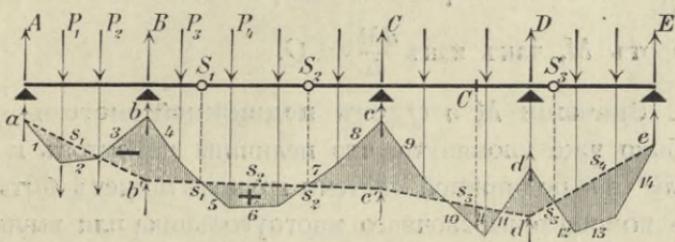
Напр., для части CD балки, представленной на фиг. 53, ординаты момента получаются из ординат моментной



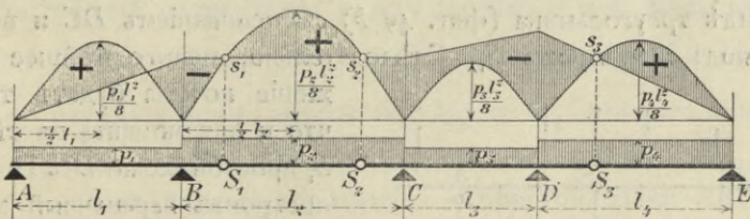
Фиг. 53.

линии CFD простой балки CD прибавлением отрицательных ординат прямой $C'D'$, для которой $CC' = -\frac{M_C}{H}$ и $DD' = -\frac{M_D}{H}$.

Нулевые значения M соответствуют точкам пересечения линии CFD с замыкающей стороной CD .



Фиг. 54.



Фиг. 55.

Такия точки должны получиться между прочимъ и надъ шарнирами балки, т. е. на вертикальныхъ прямыхъ, проведенныхъ черезъ шарниры. Этимъ свойствомъ можно пользоваться для опредѣленія положенія замыкающей линии CD' , какъ это сдѣлано, напр., въ части балки AB , гдѣ замыкающая $AS'B'$ проведена черезъ точки A и S' , для которыхъ $M=0$.

Другой примѣръ представляетъ шарнирныя балки $ABCDE$ (фиг. 54 и 55), гдѣ по даннымъ линиямъ моментовъ для отдѣльныхъ частей балки AB , BC , CD и DE (построеннымъ при различ-

ныхъ полюсахъ, но съ равными полюсными разстояніями) найдены замыкающія линіи $b's_1s_2c'$ и es_3d' , а затѣмъ $c'd'$ и ab' .

Поперечная сила Q въ сѣченіи C балки съ консольными частями или вообще выходящими за опоры A и B , представляется (фиг. 47) отрѣзкомъ $s'4$ между лучами IV и s' параллельными пересѣкаемымъ сторонамъ веревочнаго многоугольника; въ случаѣ же простой балки CD сила Q_0 выражается отрѣзкомъ $s4$ между лучами параллельными сторонамъ IV и $a'b'$; поэтому $Q - Q_0 = ss'$.

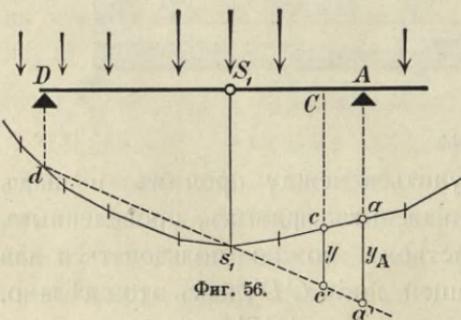
Проведя $a'i \parallel ab$, изъ подобія треугольниковъ Oss' и $a'bi$ найдемъ $ss' : b'i = H : l$, и такъ какъ $ss' = Q - Q_0$, а $b'i = aa' - bb' = -\frac{M_A}{H} + \frac{M_B}{H}$, то окончательно имѣемъ $Q = Q_0 + \frac{M_B - M_A}{l}$. Тоже выраженіе получимъ, если возьмемъ производную отъ M , такъ какъ $\frac{dM}{dx} = Q$.

39. Значенія M и Q отъ подвижной системы грузовъ.

Выше было уже упомянуто, что величина моментовъ и поперечной силы отъ подвижной системы грузовъ можетъ быть опредѣлена съ помощью веревочнаго многоугольника или вычисленіемъ.

Для сѣченія C консоли моментъ имѣетъ инфлюэнтную линію въ видѣ треугольника (фиг. 49 *b*) съ основаніемъ DC и вершиной подъ шарниромъ S_1 . Слѣдовательно, невыгоднѣйшее положеніе поѣзда будетъ то же,

что и для момента въ сѣченіи S_1 простой балки DC . Поэтому построивъ веревочный многоугольникъ для поѣзда типа II съ паровозами по срединѣ и вагонами по бокамъ, дадутъ балкѣ DS_1 такія положенія, чтобы сѣченіе S_1 (фиг. 56) совпадало съ наиболѣе тяжелымъ

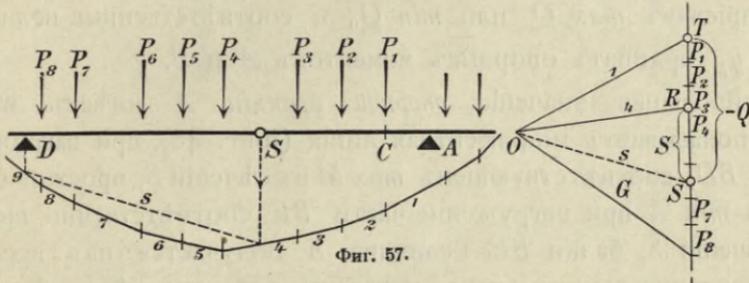


грузомъ поѣзда, и черезъ точки d и s_1 подъ опорой D и шарниромъ S_1 проводятъ замыкающую сторону $ds_1c'a'$ для балки DS_1 . Ордината y многоугольника относительно линіи ds_1 представитъ ординату искомага момента. Опредѣливъ наибольшую ея вели-

чину y_{max} , получимъ $max . M = -Hy_{max}$. Точно также для сѣченія A на опорѣ $max M_A = -Hy_A$.

Вычисленіемъ моментъ опредѣляется по инфлюентной линіи съ помощью таблицы моментовъ.

Для полученія наибольшей величины *поперечной силы* Q въ сѣченіи C отъ поѣзда помѣщаютъ балку такъ подъ послѣднимъ (фиг. 57), чтобы возможно большее число наиболѣе тяжелыхъ грузовъ его расположилось на части SC , соотвѣтственно инфлюентной линіи Q (фиг. 49 *a*), и далѣе на части AB грузы уменьшались бы въ величинѣ по направленію къ опорѣ D . Затѣмъ опредѣляютъ положеніе замыкающей линіи s , проводятъ параллельно послѣдней лучъ OS и находятъ какъ давленіе S балки DS на точку S , такъ и искомую величину $Q = -P_1 - P_2 - P_3 - S$.



Фиг. 57.

Для средней части балки между опорами A и B , какъ показываетъ инфлюентная линія (фиг. 51 *b*) и формула $M = M_0 + M_A \frac{x_1}{l} + M_B \frac{x}{l}$ съ отрицательными моментами M_A и M_B , моментъ M въ сѣченіи C имѣетъ тоже наибольшее положительное значеніе и опредѣляется также, какъ и для сѣченія C простой балки AB .

Наибольшее отрицательное значеніе момента M получается, согласно инфлюентной линіи M , при загрузеніи частей балки DA и BE , соотвѣтствующемъ наибольшимъ моментамъ въ сѣченіяхъ S_1 и S_2 простыхъ балокъ DA и BE ; величина же момента $M = M_A \frac{x_1}{l} + M_B \frac{x}{l}$ опредѣлится, когда будутъ найдены однимъ изъ указанныхъ выше способовъ соотвѣтствующіе опорные моменты M_A и M_B , затѣмъ будетъ построена по нимъ замыкающая сторона $A'B'$ и взята ордината CC' послѣдней, представляющая величину искомага момента $\frac{M}{H}$.

Изъ сравненія найденныхъ такимъ образомъ ординатъ выяснится величина $\min M = -Hy_{\max}$.

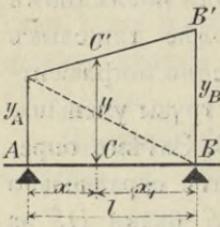
Поперечная сила

$$Q = Q_0 + \frac{M_B}{l} - \frac{M_A}{l} = Q_0 + H \frac{y_A}{l} - H \frac{y_B}{l} \quad (28)$$

Поэтому

$$\max Q = \max Q_0 + H \frac{y_A}{l}$$

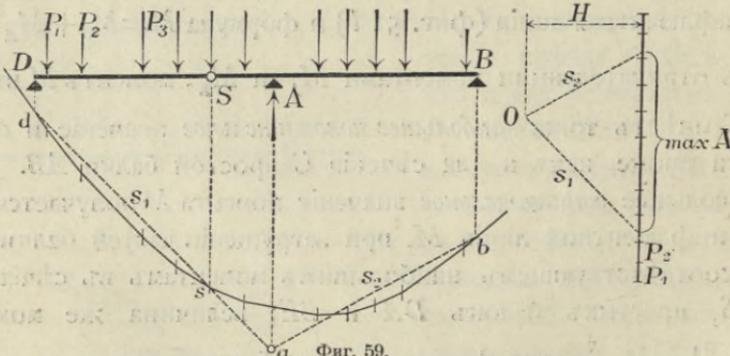
$$\min Q = \min Q_0 - H \frac{y_B}{l}$$



Фиг. 58.

Невыгоднѣйшее положеніе нагрузки выбирается пробными установками сообразно съ инфлюентной линіей Q , опредѣляя по извѣстнымъ уже приемамъ $\max Q_0$ или $\min Q_0$ и соответственныя величины y_A и y_B ординатъ опорныхъ моментовъ A и B .

Наибольшее значеніе опорной реакціи A имѣетъ мѣсто, какъ показываетъ инфлюентная линія (фиг. 48), при загрузеніи части BD , соответствующемъ $\max M$ въ сѣченіи S_1 простой балки BD , а $\min A$ при загрузеніи части BF соответственнно $\max M$ въ сѣченіи S_2 балки BE . Величина A получается изъ веревочнаго многоугольника (какъ показано для $\max A$ на фиг. 59)



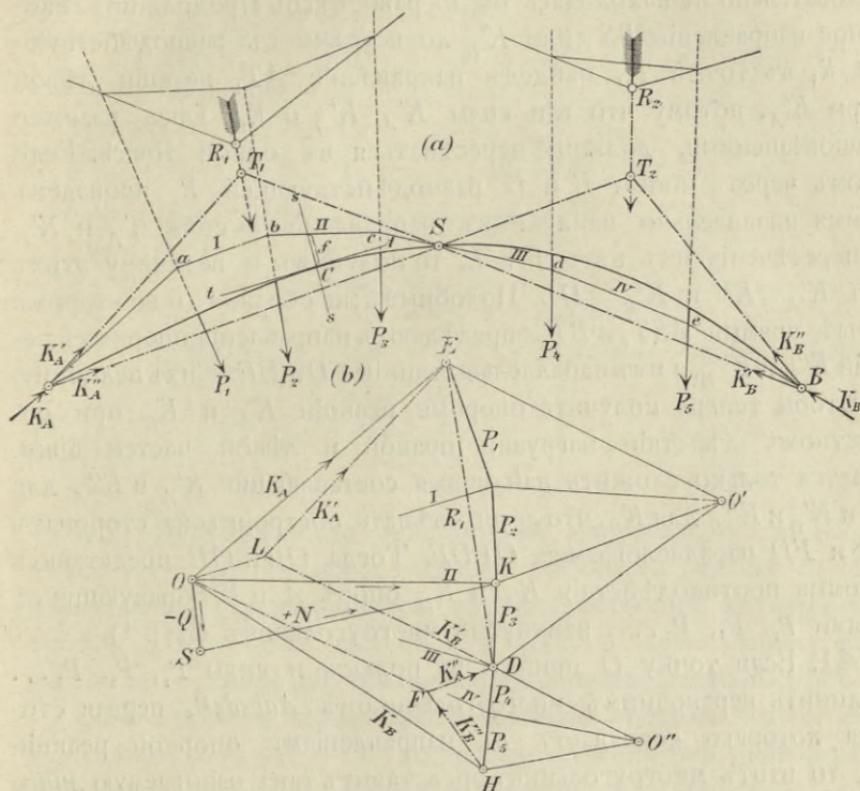
Фиг. 59.

въ видѣ отръзка между лучами параллельными замыкающимъ сторонамъ s_1 и s_2 .

Отъ подвижной равномерной нагрузки значенія внѣшнихъ силъ могутъ быть найдены по площадямъ инфлюентныхъ линій.

VI. Простыя трехшарнирные арки.

40. Произвольная нагрузка. Рассмотрим сперва общий случай дѣйствія на плоскую арку съ 3 шарнирами какихъ-нибудь силъ P_1, P_2, P_3, \dots , лежащихъ въ плоскости арки (фиг. 60 а).



Фиг. 60.

Пусть R_1 и R_2 будутъ равнодѣйствующія этихъ силъ, приложенныхъ къ лѣвой и правой частямъ арки AS и SB , найденныя посредствомъ веревочныхъ многоугольниковъ съ произвольными полюсами O' и O'' (фиг. 60 б).

На основаніи закона независимости дѣйствія силъ, величина опорныхъ сопротивленій можетъ быть опредѣлена, если сперва рассмотримъ отдѣльно дѣйствіе нагрузки лѣвой части арки, когда $R_2=0$, потомъ правой части, когда $R_1=0$, и полученныя результаты сложимъ. Пусть K'_A и K'_B означаютъ реакціи опоръ

A и B въ первомъ случаѣ, когда правая часть арки не нагружена и K''_A и K''_B — значенія ихъ, когда нагрузки нѣтъ на лѣвой части. Очевидно, въ первомъ случаѣ направленіе силы K'_B должно проходить черезъ шарниръ S , иначе правая часть арки SB подѣ дѣйствию одной силы K'_B вращалась бы вокругъ S и слѣдовательно не находилась бы въ равновѣсіи. Продолживъ найденное направленіе BS силы K'_B до встрѣчи съ равнодѣйствующей R_1 въ точкѣ T_1 , найдемъ направленіе AT_1 реакціи лѣвой опоры K'_A , потому что три силы K'_A , K'_B и R_1 , какъ взаимно уравновѣшенные, должны пересѣкаться въ одной точкѣ. Если потомъ черезъ концы E и D равнодѣйствующей R_1 проведемъ прямыя параллельно найденнымъ направленіямъ силъ K'_A и K'_B до пересѣченія ихъ въ точкѣ L , то получимъ и величину этихъ силъ $K'_A = LE$ и $K'_B = DL$. Подобнымъ же образомъ и во второмъ случаѣ прямыя AST_2 и BT_2 опредѣляютъ направленія опорныхъ реакцій K''_A и K''_B , а имъ параллельныя линіи FD и HF — ихъ величину.

Чтобы теперь получить опорныя реакціи K_A и K_B при совмѣстномъ дѣйствіи нагрузки правой и лѣвой частей арки, остается только сложить найденныя составляющія K'_A и K''_A для K_A и K'_B и K''_B для K_B , что легко сдѣлать, построивъ на сторонахъ LD и FD параллелограммъ $OLDF$. Тогда OE и OH представляютъ искомыя противодѣйствія K_A и K_B опоръ A и B , образующія съ силами P_1, P_2, P_3, \dots замкнутый многоугольникъ силъ ¹⁾.

41. Если точку O принять за полюсъ и силы P_1, P_2, P_3, \dots соединить веревочнымъ многоугольникомъ $AabcdeB$, первая сторона котораго совпадаетъ съ направленіемъ опорной реакціи K_A , то этотъ многоугольникъ представитъ такъ называемую *лінію равнодѣйствующихъ или кривую давленій*. Каждая сторона его, напр. bc , параллельная лучу OK , замыкающему многоугольникъ силъ K_A, P_1 и P_2 , очевидно совпадаетъ съ положеніемъ равнодѣйствующей этихъ силъ, т. е. внѣшнихъ силъ арки относительно какого-нибудь сѣченія ss , проведеннаго нормально къ ея оси въ точкѣ C . Разложимъ эту силу на составляющія SK параллельную касательной къ оси арки въ точкѣ C и OS нормальную къ ней. Тогда OS представитъ *поперечную силу* Q для даннаго сѣченія ss арки (см. стр. 40), а $SK = N$ такъ называемую *продольную силу*. Моментъ внѣшнихъ силъ для точки C арки $M = Nf$,

¹⁾ Новый способъ проводить верев. мног. черезъ 3 точки A, S и B .

Величина $H = H' C \alpha$ распора арки найдется, если приравнять нулю моментъ внѣшнихъ силъ лѣвой половины арки относительно шарнира S , т. е.

$$M_{oS} - Hf = 0,$$

гдѣ M_{oS} представляетъ моментъ внѣшнихъ силъ простой балки AB относительно сѣченія, проведеннаго черезъ S , и f — вертикальное разстояніе шарнира S отъ прямой AB ; поэтому

$$H = \frac{M_{oS}}{f}. \quad \dots \quad (28)$$

43. Моментъ M_K внѣшнихъ силъ арки относительно какой-нибудь точки K сѣченія ss нормального къ оси арки можетъ быть выраженъ подобнымъ же образомъ черезъ моментъ M_{oK} простой балки AB' относительно той же точки K , а именно:

$$M_K = M_{oK} - Hy_K, \quad \dots \quad (29)$$

гдѣ y_K означаетъ вертикальное разстояніе точки K отъ прямой AB . Построивъ веревочный многоугольникъ для нагрузки арки съ полюснымъ разстояніемъ H_o и проведя замыкающую сторону его ab , соответствующую простой балкѣ AB' (фиг. 61), имѣемъ:

$$M_{oK} = H_o \cdot sn \text{ и } M_{oS} = H_o h$$

гдѣ h и sn означаютъ вертикальныя ординаты веревочнаго многоугольника подъ точками S и K . Откуда

$$H = \frac{1}{f} M_{oS} = \frac{H_o h}{f}$$

и

$$M_K = H_o \cdot sn - \frac{H_o h}{f} y_K = H_o \left(sn - \frac{h}{f} y_K \right)$$

Если продолжимъ прямыя AK и BS до встрѣчи ихъ въ точкѣ E , проведемъ вертикальную прямую $Ee'e$ до пересѣченія съ прямой bs въ точкѣ e и затѣмъ a и e соединимъ прямою ae , то изъ подобія треугольниковъ имѣемъ:

$$\frac{sn'}{h} = \frac{y_K}{f} \text{ или } sn' = \frac{h}{f} y_K,$$

слѣдовательно,

$$M_K = H_o (sn - sn') = -H_o \cdot nn' = H_o \chi.$$

Такимъ образомъ моментъ внѣшнихъ силъ арки для точки K выражается произведеніемъ полюснаго разстоянія H_o на вертикальную ординату χ веревочнаго многоугольника относительно прямой ae . Эта ордината отрицательна, когда она расположена подъ веревочнымъ многоугольникомъ, и положительна, когда

находится надъ нимъ. Очевидно, для другой какой-нибудь точки K прямая AK и ae будутъ имѣть иное положеніе, такъ что это построеніе опредѣляетъ моментъ только въ точкѣ K .

Весьма интересно будетъ разсмотрѣть здѣсь частный случай, когда нагрузка будетъ расположена только между опорой A и вертикальной прямой Ee . Въ этомъ случаѣ точка b займетъ положеніе b' , и точка s положеніе s' , прямая bse совпадаетъ съ $b's'e'$, и сторона ae перейдетъ въ положеніе ae' . Слѣдовательно, ордината $\chi = m''$ будетъ имѣть положительный знакъ и при томъ ту же величину, какъ и для момента простой балки AE' , въ которой одна опора совпадаетъ съ точкой A , а другая E' находится на вертикальной прямой Ee . Поэтому моменты въ точкахъ K , лежащихъ на прямой AE , для арки и балки AE' совпадаютъ.

44. Поперечную силу Q для какого-нибудь сѣченія ss арки найдемъ, если разложимъ (фиг. 61) равнодѣйствующую OD силъ A , H' , P_1 и P_2 лѣвой части арки относительно ss на составляющія: $N = ED$ параллельно касательной tt къ оси арки въ точкѣ C , и $Q = OE$ — перпендикулярную къ ED . Но величину Q будетъ удобнѣе выразить черезъ поперечную силу Q_0 простой балки AB для вертикальнаго сѣченія ea , проведеннаго черезъ K . Проектируя внѣшнія силы лѣвой части арки на нормаль ss къ оси арки, или къ ея касательной tt , составляющей уголъ φ съ горизонтальной прямой, имѣемъ

$$Q = Q_0 C_s \varphi - H' S_n (\varphi - \alpha)$$

или

$$Q = Q_0 C_s \varphi - H \frac{S_n (\varphi - \alpha)}{C_s \alpha}, \dots \dots \dots (30)$$

такъ какъ равнодѣйствующая вертикальныхъ силъ представляетъ поперечную силу Q_0 простой балки.

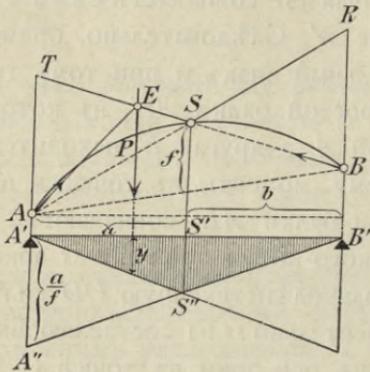
45. Подвижная вертикальная нагрузка. Вертикальныя составляющія опорныхъ реакцій, какъ было (п. 42) показано, имѣютъ тѣ же значенія и опредѣляются такъ же, какъ и для простой балки AB' . Величина составляющей по линіи опоръ арки $H' = H'' = \frac{H}{C_s \alpha}$ выводится изъ уравненія

$$H = \frac{1}{f} M_{0s}.$$

Отсюда видно, что инфлюэнтная линія H (фиг. 62) будетъ подобна линіи момента M_{0s} простой балки $A'B'$ и получится, еслина

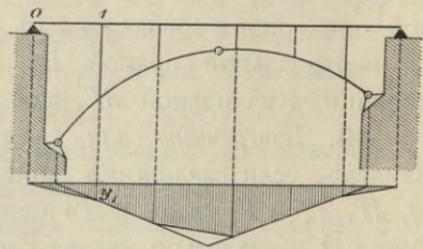
ея опорѣ A' вмѣсто a отложимъ ординату $A'A'' = \frac{a}{f}$ и точку S'' пересѣченія прямой $B'A''$ съ вертикальною линіею SS' соединимъ съ A' . Линія $A'S'B'$ будетъ искомою.

Въ случаѣ узловой нагрузки соотвѣтственная инфлюентная линія получается изъ найденной вписываніемъ въ нее многоугольника по общему способу (фиг. 63).



Фиг. 62.

При движеніи груза P по аркѣ точка E пересѣченія его направленія и опорныхъ реакцій



Фиг. 63.

описываетъ кривую, называемую *линіею опорныхъ сопротивленій*. Для арки съ тремя шарнирами она представляетъ ломанную линію TSR , образуемую продолженіями хордъ арки AS и BS (фиг. 62).

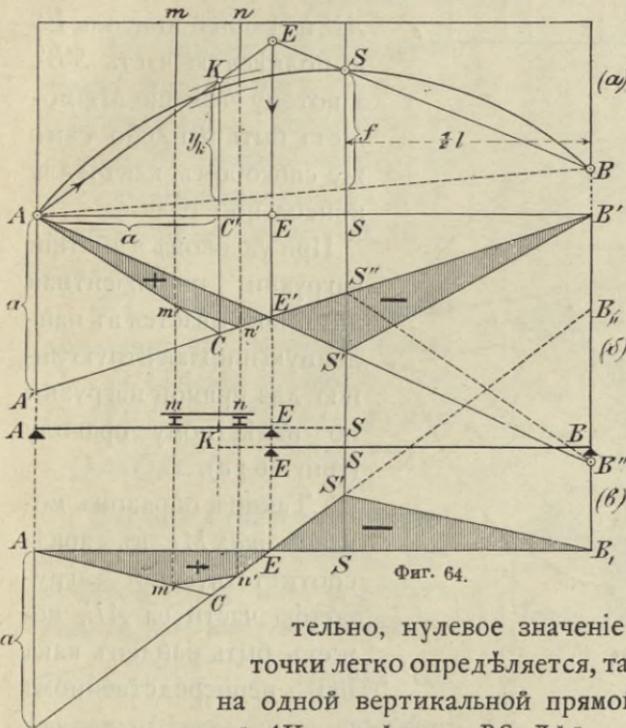
Изъ вида инфлюентной линіи H слѣдуетъ, что $\max H$ получается при полномъ загрузеніи арки равномерной нагрузкой, а подвижною системою грузовъ—при такомъ положеніи ея, какъ и для $\max M_{OS}$ простой балки. Величина M_{OS} найдется или вычисленіемъ съ помощью таблицы моментовъ, или изъ веревочнаго многоугольника въ видѣ $H_0 h$, а значеніе H распора арки—построеніемъ четвертой пропорціальной къ даннымъ значеніямъ H_0 , h_s и f (фиг. 61).

46. Моментъ M_K въ какой-нибудь точкѣ K сѣченія арки выражается формулою 29

$$M_K = M_{OK} - H y_K.$$

При перемѣщеніи по аркѣ груза единицы значеніе M_{OK} , какъ извѣстно, измѣняется по инфлюентной линіи ACB' (фиг. 64), имѣющей видъ треугольника съ основаніемъ AB' и вершиной C подъ точкой K , при чемъ отрѣзки AA' и $B'B'$ соотвѣтственно равны разстояніямъ a и b опоръ арки до сѣченія KC . Значеніе

$Hу_K = M_{0S} \frac{y_K}{f}$ при этомъ будетъ измѣняться пропорціонально (въ отношеніи $у_K : f$) ординатамъ инфлюентной линіи момента M_{0S} простой балки и потому представится также ординатами нѣкотораго треугольника $AS'B'$ съ вершиной S' подъ шарниромъ



Фиг. 64.

S арки, при чемъ ордината $B'B''$ не будетъ равна $B'S$, но $B'S \frac{y_K}{f}$. Разность ординатъ обоихъ треугольниковъ опредѣляетъ инфлюентную линію M_K въ видѣ четырехугольника $ACB'S'$ съ положительною частью ACE' и отрицательною $E'S'B'$. Точкѣ E соответствуетъ нулевая ордината и, слѣдова-

тельно, нулевое значеніе M_K ; положеніе этой точки легко опредѣляется, такъ какъ она находится на одной вертикальной прямой съ точкой E , въ которой AK пересѣкаетъ BS . Дѣйствительно грузъ, приложенный въ точкѣ E , вызываетъ реакціи опоръ арки, направленные по прямымъ AKE и BSE . Поэтому моментъ M_K внѣшнихъ силъ лѣвой части арки относительно точки K , равный моменту реакціи опоры A , приводится къ нулю; слѣдовательно, точкѣ E' инфлюентной линіи момента M_K соответствуетъ точка E арки.

Ординаты инфлюентной линіи $ACB'S'$ равны ординатамъ линіи $ACS''B''$; ихъ можно перенести по своему направленію и отложить вмѣсто AB' отъ горизонтальной прямой AB_1 (фиг. 64 в). Тогда инфлюентная линія получитъ видъ $ACS''B_1$. Ее легко построить, имѣя точку E съ нулевой ординатой и положеніе прямой ECA' съ ординатой на опорѣ $AA' = a$.

Отсюда становится понятно, что при тождествѣ инфлюентныхъ линій момента въ точкѣ K простой балки AE и арки на

момента M_K въ аркѣ получимъ, умноживъ $H_0 \zeta'$ на отношеніе $y_K : f$, т. е.

$$\min M_K = -H_0 \zeta' \cdot \frac{y_K}{f}, \text{ а такъ какъ по чертежу } 65$$

$$\frac{\zeta}{y_K} = \frac{\zeta'}{f}, \text{ или } \zeta = \zeta' \frac{y_K}{f}, \text{ то } \min M_K = -H_0 \zeta.$$

Не трудно видѣть, что этотъ выводъ могъ быть непосредственно написанъ на основаніи даннаго на стр. 66 построенія момента M_K . Дѣйствительно $\min M_K = -H_0 n n' = -H_0 \zeta$.

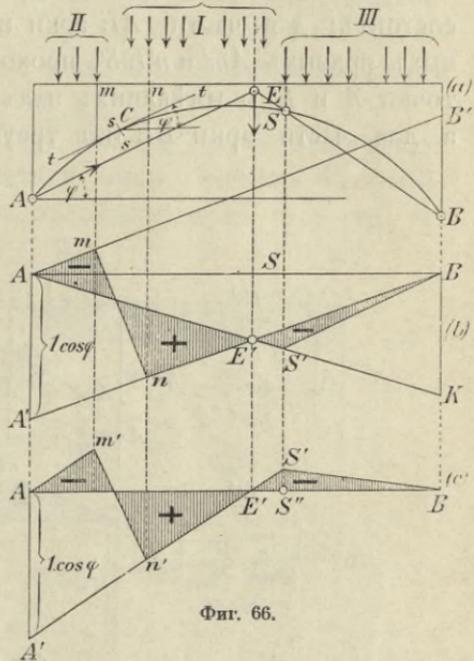
47. Выше (п. 44) было доказано, что поперечная сила Q для сѣченія ss арки.

$$Q = Q_0 C s \varphi - H' S n (\varphi - \alpha) \text{ или } Q = Q_0 C s \varphi - H \frac{S n (\varphi - \alpha)}{C s \alpha}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что инфлюентная линия силы Q получится, если изъ ординатъ линіи $Q_0 C s \varphi$ вычтемъ ординаты линіи $H \frac{S n (\varphi - \alpha)}{C s \alpha}$. Первая состоитъ (фиг. 66 в), подобно

инфлюентной линіи Q_0 простой балки AB , изъ двухъ отрезковъ параллельныхъ прямыхъ $A'B$ и $B'A$, проходящихъ черезъ одну изъ опоръ и имѣющихъ на другой опорѣ ординату $= 1 \cdot C s \varphi$. Вторая линія измѣняется пропорціонально H и, слѣдовательно, представляетъ собою нѣкоторый треугольникъ съ основаніемъ AB и вершиной S' подъ шарниромъ S .

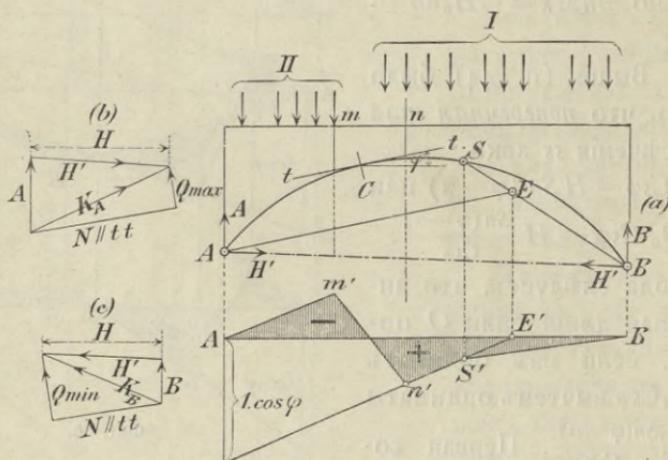
Поэтому искомая инфлюентная линія Q въ аркѣ для узловой нагрузки будетъ имѣть видъ $AmnBS'$, или — по отложеніи ея ординатъ отъ горизонтальной прямой AB — видъ $Am'n'S'B$, гдѣ $Am' \parallel n'S'$ и $AA' = 1 \cdot C s \varphi$. Положеніе точки E' съ нулевой ординатой инфлюентной линіи легко опредѣлится: она находится на одной вертикальной прямой съ точкой E пересѣченія хорды BS арки съ прямою AE параллельной касательной tt къ оси арки въ



Фиг. 66.

разсматриваемомъ сѣченіи ss . Дѣйствительно, приложенный въ точкѣ E грузъ вызываетъ на опорѣ A реакцію, направленную по $AE \parallel tt$ и представляющую собою единственную внѣшнюю силу лѣвой части арки относительно сѣченія ss ; поэтому ея проекція на нормаль къ tt равна нулю.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что инфлюентная линия Q состоитъ: для части AE арки изъ отрѣзковъ двухъ параллельныхъ прямыхъ Am' и $n'E'S'$, проходящихъ соответственно черезъ точки A и E' и имѣющихъ надъ ними ординаты равныя 1. $Cs\varphi$, а для части арки BE изъ треугольника съ основаніемъ BE' и



Фиг. 67.

вершиною S' подъ шарниромъ S , при чемъ точка S' лежитъ на продолженіи прямой $n'E'$.

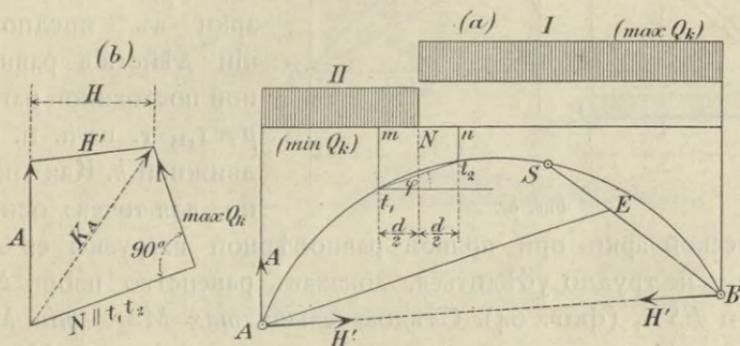
Не трудно замѣтить (фиг. 66 c), что инфлюентная линия силы Q въ аркѣ подобна инфлюентной линіи поперечной силы Q_0 въ консольной балкѣ пролетомъ AE' съ консолью $E'S''$ и примыкающей къ ней подвѣсной частью BS'' , при чемъ ординаты первой линіи равны ординатамъ второй, умноженнымъ на постоянную величину $Cs\varphi$. Поэтому изложенное тамъ относительно нахождения предѣльныхъ значеній поперечной силы примѣнимо и къ данному случаю.

Сѣченіе C можетъ быть взято близъ середины арки такъ, что прямая AE параллельная касательной tt пересѣчетъ (фиг. 67) хорду BS между точками B и S , и точка S' будетъ слѣва точки E' .

Тогда инфлюэнтная линия Q представится въ видѣ $Am'n'S'B$ съ одной нулевой точкой и будетъ состоять изъ двухъ только частей: одной положительной и другой отрицательной.

При *узловой нагрузкѣ* значеніе силы Q для различныхъ сѣченій одной и той же панели остается почти постояннымъ, такъ какъ уголъ φ измѣняется незначительно. Поэтому для опредѣленія величины Q въ какой нибудь панели можно принять значеніе φ равное величинѣ угла хорды, соединяющей точки арки подъ узлами данной панели.

Отъ *подвижной* нагрузки значеніе *max. Q*, соответствующее тому или другому виду инфлюэнтной линіи, можетъ быть найдено съ помощью общаго приѣма, изложеннаго въ п. 9 стр. 11.



Фиг. 68.

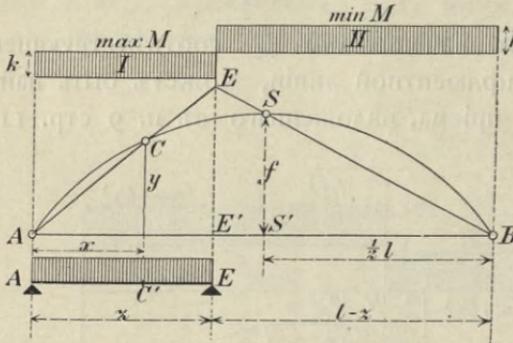
Но можно пользоваться и слѣдующимъ способомъ. Для *max. Q* загружается часть арки съ положительной инфлюэнтной линіей, т. е. поѣздъ надвигается отъ правой опоры B до праваго узла n разсматриваемой панели, если точка E оказывается справа шарнира S (фиг. 67 I и 68), или же поѣздомъ загружается часть арки между точкой E и узломъ n , если E будетъ слѣва шарнира S (фиг. 66 I). Затѣмъ съ помощью веревочнаго многоугольника опредѣляются составляющія A и H реакции K_A лѣвой опоры, представляющей въ то же время единственную внѣшнюю силу въ лѣвой части арки. Поэтому, разложивъ ее на составляющія N параллельную tt и Q къ ней перпендикулярную, найдемъ въ послѣдней искомую поперечную силу арки (фиг. 67 b и 68 b).

Когда разыскивается значеніе *min. Q*, и инфлюэнтная линія имѣетъ одну отрицательную часть, то нагрузка располагается на

соответственной лѣвой части арки; затѣмъ опредѣляютъ реакцію K_B правой опоры и подобнымъ же разложеніемъ обратной его величины находятъ значеніе силы Q (фиг. 67 II и с).

Если же инфлюентная линия Q состоитъ изъ двухъ отрицательныхъ частей (фиг. 66), то загружаютъ сперва правую часть арки, затѣмъ лѣвую и, поступая подобно рассмотрѣннымъ случаямъ, находятъ соответственные значенія силы Q и берутъ ихъ сумму.

Примѣръ. Возьмемъ параболическую симметрическую арку съ



Фиг. 69.

3 шарнирами, пролетомъ $l=20$ м. и подъемомъ $f=2,5$ м. и найдемъ для нея наибольшее значеніе момента въ точкѣ C оси арки въ предположеніи дѣйствія равномерной постоянной нагрузки $p=1,25$ т. на п. м. и подвижной k . Какъ извѣстно, для точекъ оси параболической арки при полной равномерной нагрузкѣ ея $M=0$,

въ чемъ не трудно убѣдиться, доказавъ равенство площ. Δ -ковъ ACE и ESB , (фиг. 64). Слѣдовательно, $\max M = -\min M$.

Опредѣлимъ сперва аналитическое выраженіе $\max M$.

Длина загруженной части $AE' = \xi$ найдется изъ пропорцій:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{EE'}{y} \text{ и } \frac{EE'}{f} = \frac{l-\xi}{\frac{1}{2}l} = \frac{2(l-\xi)}{l}, \text{ и такъ какъ}$$

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x), \text{ то } \xi = \frac{l^2}{3l-2x}.$$

Согласно доказанному, моментъ въ сѣченіи C арки отъ нагрузки части AE имѣетъ ту же величину, что и для сѣченія C въ простой балкѣ AE , слѣд. (стр. 29)

$$\max M = \frac{k(\xi-x)x}{2} = \frac{kx(l^2-3lx+2x^2)}{2(3l-2x)}$$

Это выраженіе имѣетъ наибольшее значеніе для $x=0,234 l$, равное $M=0,019 kl^2$.

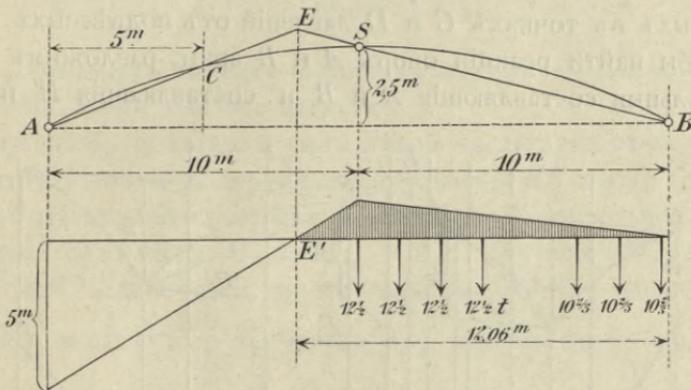
$\min M = -\max M = -0,019 kl^2$ и получается при загруженіи

остальной части арки BE . Соответствующая этому нагружению (II) величина распора H выразится

$$H = \frac{M_{os}}{f} = \frac{k l^2}{8f} = \frac{k \chi^2}{4f}$$

Если на арку будетъ дѣйствовать система сосредоточенныхъ грузовъ (фиг. 70) въ видѣ железнодорожнаго поѣзда, то $\min M$ получимъ, если величину $\max M_0$ для сѣченія S простой балки BE' умножимъ на отношеніе $\frac{y_c}{f} = \frac{4fx(1-x)}{f l^2} = \frac{4x(1-x)}{l^2} = 0,717$.

Для $x = 0,234 l$ длина $\chi = \frac{l^2}{3l - 0,468l} = 0,395 l$, длина балки $BE' = 0,605 l = 12,10$ м., и разстояніе сѣченія S отъ ея опоры



Фиг. 70.

$E' = 2,1$ м. Наибольшій моментъ въ сѣченіи S получится при нагруженіи балки BE' паровозомъ и тендеромъ, когда первое колесо паровоза совпадаетъ съ даннымъ сѣченіемъ S . Тогда $\max M_0 = 72,6$ т. м. Слѣдовательно $\min M = -0,717 \times 72,6 = -52$ т. м. Равнозначущая поѣзду равномерная нагрузка k относительно $\min M$ найдется изъ условія

$0,019 (20)^2 k = 52,0$ т. м., откуда $k = 6,84$ т. на п. м.

VII. Консольныя трехшарнирныя арки.

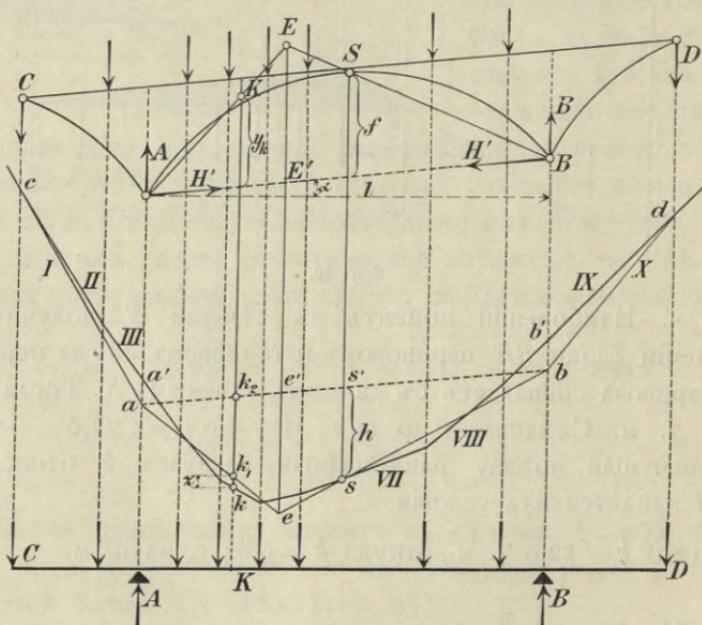
48. Постоянная нагрузка. Если обыкновенную арку съ тремя шарнирами продолжимъ въ видѣ консолей за опоры, то такая арка съ консольными частями, подобно рассмотрѣннымъ выше консольнымъ балкамъ, получаетъ названіе *уравновѣшенной* или *кон-*

сольной. Консоли соединяются обыкновенно съ *подвѣсными* частями въ видѣ простыхъ балокъ, опирающихся на консоли двухъ смежныхъ арокъ.

Мы рассмотримъ консольныя арки подѣйствию вертикальныхъ силъ, при чемъ сперва изложимъ способъ опредѣленія внѣшнихъ силъ отъ *постоянной* нагрузки. Для подвижной же нагрузки выведемъ соотвѣтственныя инфлюентныя линіи, позволяющія найти наивыгоднѣйшее расположеніе нагрузки и затѣмъ опредѣлить искомое значеніе внѣшнихъ силъ однимъ изъ способовъ, какъ и для постоянной нагрузки.

Пусть $CABD$ (фиг. 71) представляетъ уравновѣшенную арку, подерженную дѣйствию вертикальныхъ силъ — нагрузки и приложенныхъ въ точкахъ C и D давленій отъ подвѣсныхъ балокъ.

Чтобы найти реакціи опоръ A и B арки, разложимъ ихъ на вертикальныя составляющія A и B и составляющія H' и H'' по



Фиг. 71.

линіи опоръ AB . Изъ условія равновѣсія дѣйствующихъ на арку внѣшнихъ силъ слѣдуетъ, что $H' = -H''$, и что вертикальныя составляющія A и B имѣютъ тѣ же величины, какъ и для консольной балки, когда $H' = H'' = 0$, такъ какъ въ обоихъ слу-

чаяхъ A и B выражаются одними и тѣми же уравненіями: $A = \frac{1}{l} M_B$ и $B = \frac{1}{l} M_A$, гдѣ M_B и M_A означаютъ моменты дѣйствующей на арку или балку нагрузки относительно опорныхъ точекъ A и B , а l представляетъ горизонтальное разстояніе между опорами A и B . Поэтому, построивъ для нагрузки арки веревочный многоугольникъ, замкнувъ его прямою ab и проведя параллельно ab лучъ въ многоугольникѣ силъ, получимъ величину составляющихъ A и B .

Распоръ арки $H = H' C s \alpha$, найдемъ какъ и для простой арки, приравнявъ нулю моментъ внѣшнихъ силъ лѣвой части ея относительно средняго шарнира S , т. е. $M_{os} - S f = 0$, откуда

$$H = \frac{1}{f} M_{so} = \frac{h}{f} H_o, \dots \dots \dots (31)$$

гдѣ M_{os} означаетъ моментъ внѣшнихъ силъ въ консольной балкѣ для сѣченія S при той же нагрузкѣ.

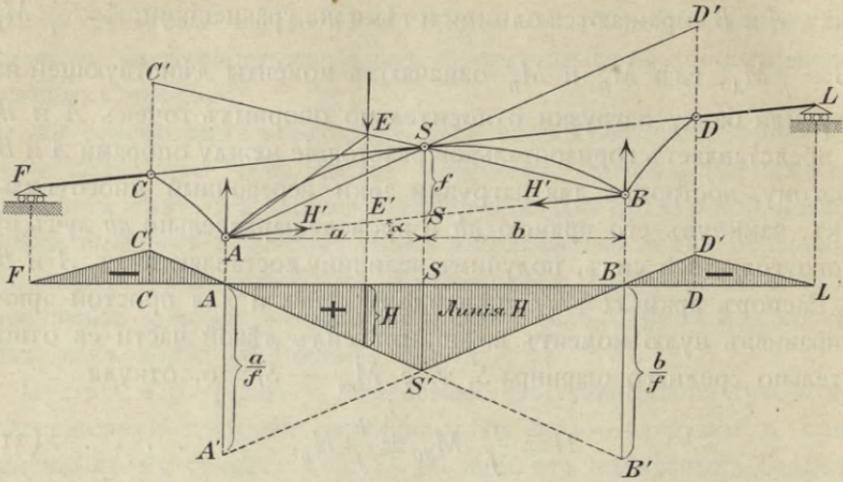
Моментъ M_K внѣшнихъ силъ лѣвой части арки относительно какой-нибудь точки K вертикальнаго сѣченія KK также (стр. 66) можетъ быть выраженъ черезъ моментъ M_{oK} консольной балки и представится въ видѣ: $M_K = M_{oK} - H y_K$. Замѣнивъ M_{oK} его значеніемъ изъ веревочнаго многоугольника $H_o \cdot k k_2$, величину Q черезъ $\frac{H_o h}{f}$ и затѣмъ $\frac{h}{f} y_K$ черезъ $k_1 k_2$, окончательно получимъ

$$M_K = H_o (k k_2 - k_1 k_2) = H_o \chi,$$

гдѣ χ представляетъ ординату веревочнаго многоугольника для точки k относительно ae , считаемую положительной, когда она находится подъ прямою ae и отрицательной въ обратномъ случаѣ.

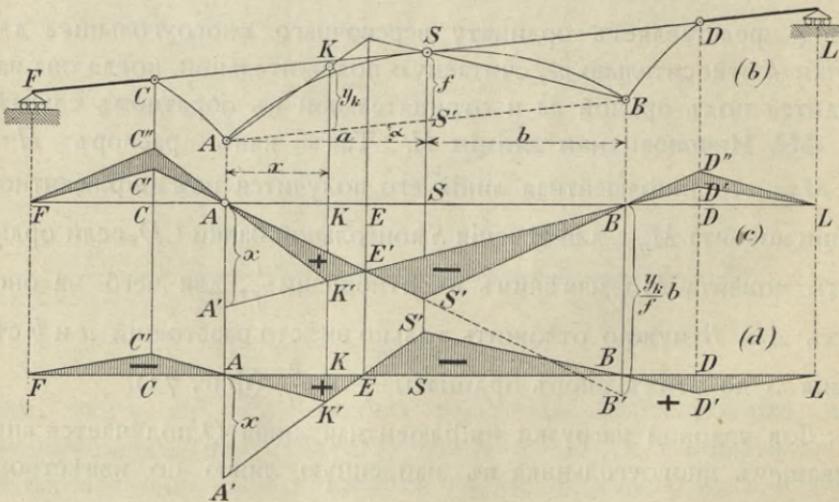
49. Инфлюэнтная линия H . Такъ какъ распоръ $H = \frac{1}{f} M_{os}$, то инфлюэнтная линия его получится изъ инфлюэнтной линіи момента M_{os} для сѣченія S консольной балки CD , если ординаты момента M_{os} измѣнимъ въ отношеніи $\frac{1}{f}$, для чего на опорахъ A и B нужно отложить только вмѣсто разстояній a и b сѣченія S до этихъ опоръ ординаты $\frac{a}{f}$ и $\frac{b}{f}$ (фиг. 72).

Для узловой нагрузки инфлюэнтная линия Q получается вписываніемъ многоугольника въ найденную линію по извѣстному правилу.



Фиг. 72.

50. Линія опорныхъ сопротивленийъ. Когда какой-нибудь грузъ P перемѣщается по аркѣ, то для каждого его положенія точка E пересѣченія реакцій опоръ A и B (фиг. 72) находится на направленіи дѣйствія груза P и при движеніи его чертитъ такъ называемую *линію опорныхъ сопротивленийъ*. Она состоитъ изъ отрѣзковъ двухъ прямыхъ SC' и SD' , соединяющихъ средній шарниръ S съ опорными A и B .



Фиг. 73.

51. Инфлюэнтная линия M_K . Моментъ M_K внѣшнихъ силъ консольной арки для точки K выражается уравненіемъ

$$M_K = M_{OK} - Hy_K \dots \dots \dots (32)$$

или

$$M_K = M_{OK} - \frac{y_K}{f} M_{OS}.$$

Поэтому инфлюэнтная линия M_K получится, если изъ ординатъ линіи момента M_{OK} консольной балки $FC''K'D'L$ (фиг. 73 *c*) вычтемъ ординаты линіи $FC'SD''L$ момента M_{OS} для сѣченія S балки, измененныя въ отношеніи $\frac{y_K}{f}$. Такъ какъ инфлюэнтная линія M_K между опорами A и B должна совпадать (фиг. 73 *d*) съ инфлюэнтной линіей $AK'SB$ момента простой арки, то построивъ послѣднюю линію по извѣстному уже способу, остается для консольной арки только продолжить крайнія стороны $K'A$ и $S'B$ до встрѣчи съ вертикальными прямыми CC' и DD' и точки ихъ пересѣченія $C' D'$ соединить прямыми съ точками F и L .

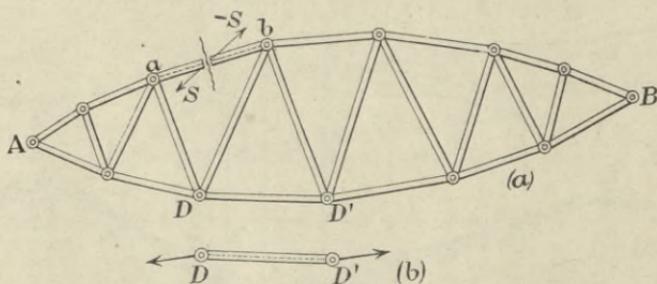
Что касается консолей арки, то для нихъ внѣшнія силы, очевидно, имѣютъ тѣ же значенія, какъ и для консолей уравновѣшенной балки.

Внутреннія силы сквозныхъ фермъ.

VIII. Обще способы опредѣленія усилій фермъ.

52. Введеніе. Сквозныя фермы состоятъ изъ нѣсколькихъ обыкновенно прямыхъ упругихъ стержней или элементовъ, соединенныхъ между собою концами и образующихъ систему въ видѣ нѣкотораго многоугольника. Соединеніе ихъ предполагается сдѣланнымъ при помощи шарнировъ свободныхъ отъ тренія, вслѣдствіе чего взаимодѣйствіе между шарниромъ и связаннымъ съ нимъ элементомъ представляетъ силу, проходящую черезъ центръ разсматриваемаго шарнира.

Если къ какому-нибудь элементу DD' непосредственно не приложена нагрузка, то равновѣсіе его подѣ дѣйствіемъ двухъ да-



Фиг. 74 а и б.

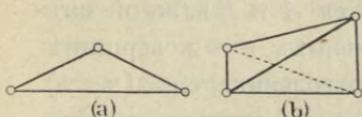
вленій шарнировъ D и D' (фиг. 74 б) требуетъ, чтобы эти силы были равны и противоположны, т. е. направлены по прямой, проходящей черезъ центры шарнировъ D и D' , сжимающая или растягивающая этотъ элементъ. То же можетъ быть доказано, если, разрывъ мысленно элементъ ab на двѣ части, разсмотримъ равновѣсіе

каждой изъ нихъ подѣйствию нѣкоторой силы S или $-S$, представляющей *взаимодействие обѣихъ частей*, или *внутреннее усиліе* въ элементѣ. Направленіе этой силы S или $-S$ должно проходить черезъ соотвѣтственные шарниры; въ противномъ случаѣ рассматриваемая часть элемента не могла бы находиться въ равновѣсїи, а вращалась бы вокругъ шарнира a или b . Слѣдовательно, усиліе S элемента совпадаетъ съ прямой ab , соединяющей центры шарнировъ.

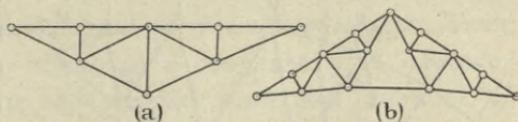
Поэтому въ фермѣ съ прямыми элементами, подверженной дѣйствию внѣшнихъ силъ, приложенныхъ въ центрахъ шарнировъ, или такъ называемыхъ узлахъ ея, внутреннія силы или усилія элементовъ совпадаютъ съ направлениемъ соотвѣтственныхъ элементовъ.

Кромѣ того будетъ предполагаться, что оси всѣхъ элементовъ фермы лежатъ въ одной плоскости съ внѣшними силами, и что измѣненія длины частей и вида фермъ (деформація), происходящая вслѣдствіе дѣйствія нагрузки и упругости матеріала, настолько малы, что ими при выраженіи условій равновѣсія силъ можно пренебрегать.

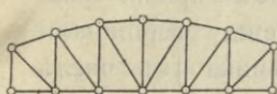
Когда число элементовъ въ сквозной фермѣ таково, что представляемый ею многоугольникъ будетъ ими вполне опредѣленъ



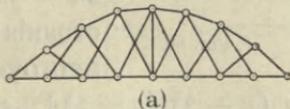
Фиг. 75.



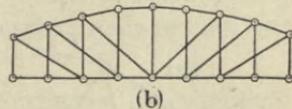
Фиг. 76.



Фиг. 77.



(a)

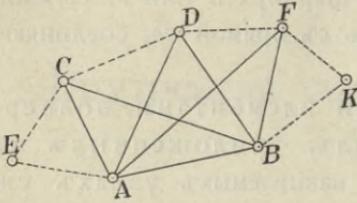


(b)

Фиг. 78.

во всѣхъ своихъ частяхъ и углахъ и перестаетъ быть такимъ, какъ только какой-нибудь элементъ фермы будетъ удаленъ изъ нея, то такія фермы могутъ быть рассчитаны съ помощью однихъ условій равновѣсія статики твердаго тѣла и называются *статически опредѣлимыми* относительно внутреннихъ силъ. Въ нихъ длина каждаго элемента не зависитъ отъ длины остальныхъ, и потому она можетъ измѣняться, не вызывая измѣненій въ длинѣ

прочих элементовъ, вслѣдствіе чего при расчетахъ такихъ фермъ элементы могутъ быть принимаемы за тѣла неизмѣняемая, или абсолютно твердыя. Таковы фермы, имѣющія видъ треугольника, четырехугольника съ одной діагональю (фиг. 75), или фермы, представленныя на чертежахъ 76, 77 и 78. Добавленіе къ нимъ



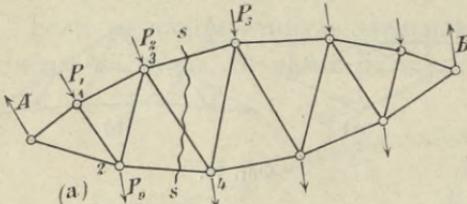
Фиг. 79.

излишнихъ элементовъ между ихъ узлами (напр. второй діагонали въ четырехугольникѣ) дѣлаетъ фермы *статически неопредѣлимыми*. Для нахождения въ такихъ фермахъ внутреннихъ силъ, или усилій элементовъ, оказывается уже недостаточнымъ однихъ условій равновѣсія

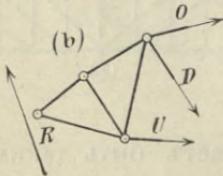
твердаго тѣла, а нужно принять въ расчетъ еще условія деформации фермы. Здѣсь будутъ разсматриваться только первыя, статически опредѣлимыя фермы. Въ нихъ между числомъ n узловъ и числомъ m элементовъ существуетъ простая зависимость

$$m = 2n - 3.$$

Дѣйствительно, представляемый фермою n -угольникъ (фиг. 79) будетъ вполне опредѣленъ, если будутъ даны *одна* изъ сторонъ



Фиг. 80.



его AB и разстоянія до концовъ ея A и B каждой изъ остальныхъ $n-2$ вершинъ многоугольника, т. е. $2(n-2)$ новыхъ элементовъ, а всего $2n-3$. Всѣ прочія разстоянія между вершинами многоугольника [въ числѣ $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$] могутъ быть выражены черезъ данныя $2n-3$ элемента и, слѣдовательно, обратно—вмѣсто послѣднихъ можно дать такое же число первыхъ,

не нарушая геометрической опредѣленности фигуры фермы.

Простѣйшій и наиболѣе употребительный способъ образованія фермъ представляютъ фермы съ треугольной рѣшеткой, получаемаыя послѣдовательнымъ соединеніемъ треугольниковъ, изъ которыхъ каждый съ предыдущимъ и послѣдующимъ имѣетъ по

одной только общей сторонѣ. Такія фермы мы будемъ называть *треугольно-рѣшетчатыми* (фиг. 74, 75, 76 и 77, кромѣ 78).

Внѣшніе элементы, ограничивающіе ферму сверху и снизу, образуютъ *верхній* и *нижній пояса*; остальные же элементы составляютъ *рѣшетку* фермы и называются *стойками* или *раскосами* въ зависимости отъ того, имѣютъ ли они вертикальное или наклонное положеніе. Фермы со стойками называются иногда *раскосными*.

Мы изложимъ сперва общіе способы опредѣленія усилій въ фермахъ, а затѣмъ покажемъ, какъ выбрать для какого-нибудь элемента невыгоднѣйшее расположеніе подвижной нагрузки, при которомъ усиліе элемента достигаетъ наибольшаго значенія.

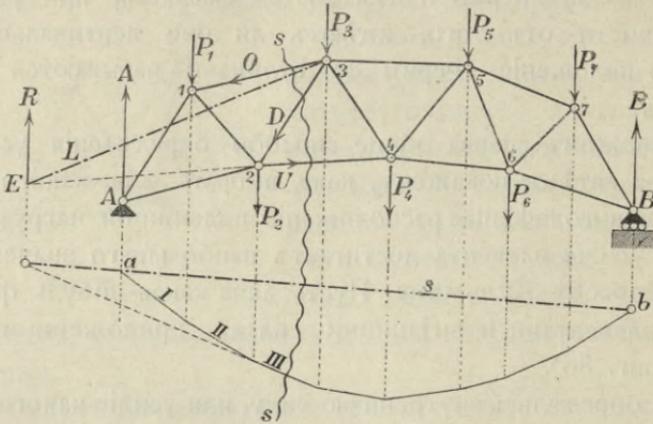
53. Способъ Кульмана. Пусть дана какая-нибудь ферма съ прямыми элементами и внѣшними силами, приложенными въ ея узлахъ (фиг. 80).

Чтобы опредѣлить внутреннюю силу, или усиліе какого-нибудь элемента 34 , представимъ себѣ, что лѣвая часть фермы отдѣлена отъ остальной разрѣзомъ ss , проведеннымъ черезъ разсматриваемый элементъ и два другихъ. Отдѣленная часть фермы (фиг. 80 *b*) должна оставаться въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ приложенныхъ къ ней внѣшнихъ силъ—или ихъ равнодѣйствующей R —и внутреннихъ усилій разрѣзанныхъ элементовъ O , U и D , *выражающихъ дѣйствіе отнятой части фермы на разсматриваемую*. Такъ какъ положеніе этихъ силъ извѣстно и совпадаетъ съ положеніемъ самихъ элементовъ, то опредѣленіе величины силъ O , U и D сводится къ рѣшенію извѣстной задачи о разложеніи силы на три направленія (ч. I стр. 18). Рѣшеніе ея всегда возможно, если только направленія трехъ пересѣченныхъ элементовъ не встрѣчаются въ одной точкѣ.

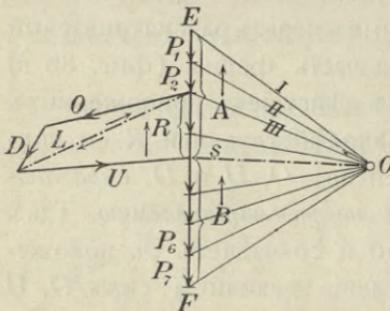
Для примѣра возьмемъ простую балочную ферму съ узловой нагрузкой (фиг. 81) и проведемъ черезъ нее разрѣзъ ss . Равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ лѣвой части $R = A - P_1 - P_2$ находится изъ многоугольника силъ, а ея положеніе дается пересѣченіемъ сторонъ ab и III веревочнаго многоугольника. Усилія O , U и D разрѣзанныхъ элементовъ найдутся, если направленіе одного изъ нихъ, напр. U , продолжимъ до пересѣченія съ равнодѣйствующей R внѣшнихъ силъ, соединимъ точку E ихъ встрѣчи съ точкой пересѣченія 3 двухъ другихъ силъ прямою L и разло-

жимъ силу R на направлѣнія L и U , а составляющую L на направлѣнія D и O .

Такъ какъ силы R , O , U и D должны составлять замкнутый четырехугольникъ, то направлѣніе силы R опредѣлить и направле-

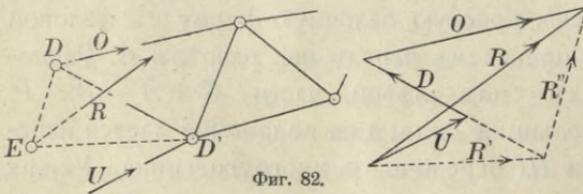


Фиг. 81.



нія остальныхъ силъ въ четырехугольникѣ. Если ихъ обозначимъ стрѣлками и перенесемъ послѣднія на соответственные элементы лѣвой части фермы, то увидимъ, что усилія элементовъ O и D соответствуетъ сжатію ихъ, а усиліе элемента U —растяженію его.

Графическій способъ Кульмана замѣчательнъ своею простотою и точностью и особенно удобенъ при разысканіи усилія какаго-нибудь элемента рѣшетки фермы отъ дѣйствія подвижной нагрузки.



Фиг. 82.

Когда точка пересѣченія E силъ получается за предѣлами чертежа, то силу R слѣдуетъ замѣнить двумя ея составляющими R' и

R'' , проходящими черезъ концы D и D' пересѣкаемаго раскоса; каждую изъ нихъ нужно отдѣльно разложить на направлѣніе O , U и D и результаты сложить, какъ это сдѣлано на фиг. 82. Такой

Такъ какъ веревочный многоугольникъ даетъ $M = Hy$, то

$$U = H \frac{y}{u},$$

откуда величина U можетъ быть найдена и графически, какъ четвертая пропорціональная, построениемъ, показаннымъ на чертежѣ.

Для опредѣленія усилія O верхняго пояса нужно взять моментъ силъ относительно точки 2:

$$M + O \cdot o = 0 \text{ или } O = -\frac{M}{o} = -H \frac{y}{o}, \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

гдѣ черезъ M и o обозначены соотвѣтственно моментъ внѣшнихъ силъ и плечо усилія O относительно узла 3.

Такъ какъ въ простой балкѣ моментъ внѣшнихъ силъ имѣетъ всегда положительное значеніе, то найденныя выраженія для O и U показываютъ, что въ простой балочной фермѣ нижній поясъ всегда вытянутъ, а верхній — сжатъ.

Усиліе D раскоса получится, если возьмемъ моментъ всѣхъ силъ лѣвой части фермы относительно точки E пересѣченія усилій O и U и приравняемъ его нулю, т. е.

$$M - Dd = 0.$$

Такъ какъ въ данномъ случаѣ $M = -Hy$, то усиліе

$$D = \frac{M}{d} = -H \frac{y}{d} \quad . \quad (35)$$

отвѣчаетъ сжатію раскоса.

55. Способъ Циммермана представляетъ видоизмѣненіе графическаго способа Кульмана и отличается только тѣмъ, что вмѣсто равнодѣйствующей R внѣшнихъ силъ разсматриваются двѣ параллельныя ей составляющія P и P' , проходящія черезъ концы 4 и 5 пересѣкаемаго раскоса (фиг. 84). Величины силъ P и P' , какъ извѣстно, могутъ быть найдены изъ условій равнодѣйствующей

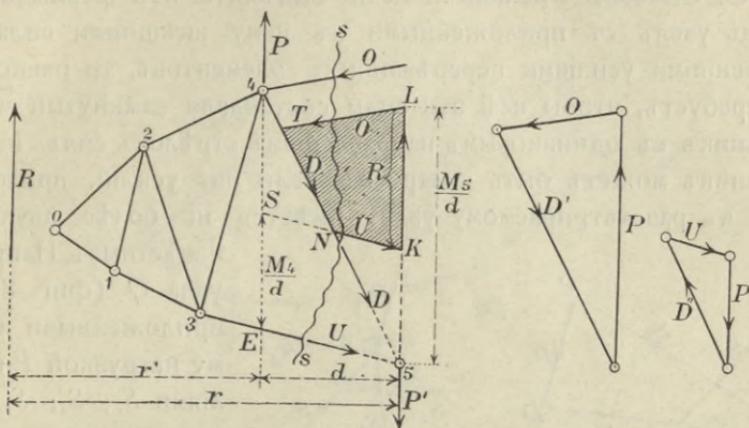
$$P - P' = R \text{ и } P'd = Rr' \text{ или } Pd = Rr.$$

Такъ какъ Rr' и Rr выражаютъ моменты M_4 и M_5 внѣшнихъ силъ для точекъ 4 и 5, то, слѣдовательно,

$$P' = \frac{M_4}{d} \text{ и } P = \frac{M_5}{d}.$$

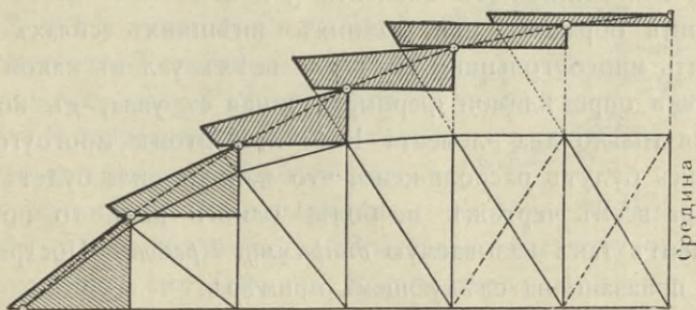
Если примемъ при построеніи веревочнаго многоугольника для внѣшнихъ силъ фермы полюсное разстояніе H равнымъ

длинѣ d или кратнымъ ей, то силы P и P' непосредственно представляются ординатами многоугольника или кратными имъ величинами.



Фиг. 84.

Разложениа каждой изъ силъ P и P' на направленiя O , U и D сдѣланы отдѣльно, и результаты соединены вмѣстѣ на чертѣ самой фермы, при этомъ сила P даетъ составляющую равную нулю на направленiи U , а сила P' такую же составляющую на направленiи O .



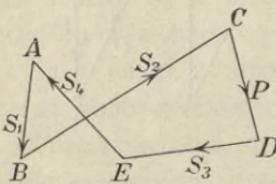
Фиг. 85.

Такимъ образомъ по этому способу усилiя O , U и D найдутся изъ четырехугольника силъ $KLTN$, который получится, если на прямыхъ $5L$ и $4E$ параллельныхъ R отложимъ отрѣзки $\frac{M_5}{d}$ и $\frac{M_4}{d}$ и проведемъ $LT \parallel O$ и $SK \parallel U$.

На фиг. 85 представлена диаграмма усилiй въ фермѣ Шведлера, найденная по способу Циммермана для случая полного за-

груженія фермы. Диаграмма даетъ усилія въ поясахъ и раскосахъ. (Усилія стоекъ получаютъ вычитаніемъ изъ вертикальныхъ проекцій усилій раскосовъ нагрузки нижняго узла).

56. Способъ Кремоны. Если выдѣлить изъ фермы какой-нибудь узелъ съ приложенными къ нему внѣшними силами и внутренними усиліями перерѣзанныхъ элементовъ, то равновѣсіе его требуетъ, чтобы всѣ эти силы составляли замкнутый многоугольникъ съ одинаковымъ направленіемъ стрѣлокъ силъ. Многоугольникъ можетъ быть построенъ, если изъ усилій, приложенныхъ къ разсматриваемому узлу, имѣется не болѣе двухъ неизвѣстныхъ. Напр., для



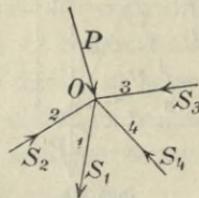
Фиг. 86.

узла O (фиг. 86) съ приложенными къ нему нагрузкой P и усиліями S_1, S_2, S_3 и S_4 элементовъ 1, 2, 3 и 4, изъ которыхъ неизвѣстны только S_3 и S_4 , величина послѣднихъ опредѣлится, если многоугольникъ $ABCD$ силъ S_1, S_2 и P замкнемъ двумя сторонами DE и AE параллельными элементамъ 3 и 4; тогда стороны DE и AE по величинѣ и направленію представляютъ искомыя усилія S_3 и S_4 . Они сжимаютъ элементы 3 и 4.

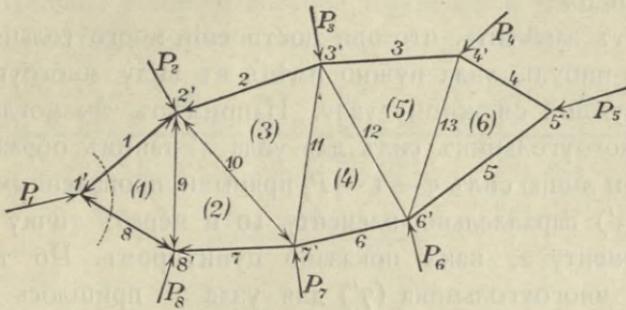
Такимъ образомъ при данныхъ внѣшнихъ силахъ можно построить многоугольники силъ для всѣхъ узловъ какой-нибудь статически опредѣлимой фермы, начиная съ узла, въ которомъ сходятся только два элемента. Если при этомъ многоугольники силъ такъ будутъ расположены, что каждая сила будетъ встрѣчаться на всемъ чертежѣ не болѣе одного раза, то послѣдній представитъ такъ называемую *диаграмму Кремоны*. Построеніе ея будетъ показано на слѣдующемъ примѣрѣ.

Пусть данныя внѣшнія силы $P_1, P_2, P_3 \dots$ будутъ приложены въ узлахъ какой-нибудь фермы, находящейся въ равновѣсіи (фиг. 87 а). Имъ соотвѣтствуетъ замкнутый многоугольникъ (фиг. 87 б), въ которомъ эти силы расположены въ порядкѣ узловъ $1', 2', 3' \dots$, а вершины его $(8' 1'), (1' 2'), (2' 3'), \dots$ обозначены нумерами смежныхъ съ ними силъ $(P_8 P_1), (P_1 P_2), (P_2 P_3) \dots$.

Построеніе діаграммы начинаемъ съ узла $1'$ и опредѣляемъ усилія 1 и 8 сходящихся въ немъ элементовъ, проводя параллельно



имъ прямая черезъ вершины ($1' 2'$) и ($8' 1'$). Получимъ треугольникъ силъ, направленія которыхъ соотвѣтствуютъ силамъ P_1 и показаны стрѣлками внутри треугольника. Онъ даетъ по величинѣ и направленію усилія 1 и 8. Если представимъ себѣ узелъ $1'$ вырѣ-



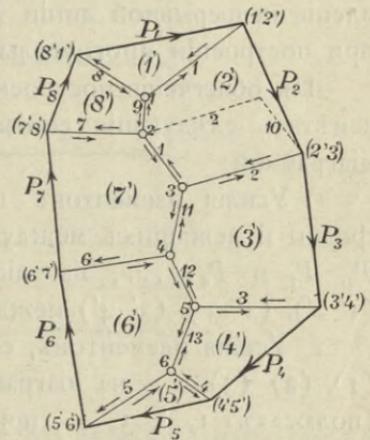
Фиг. 87 а.

заннымъ изъ фермы и перенесемъ къ отсѣченнымъ элементамъ 1 и 8 стрѣлки изъ треугольника силъ, то увидимъ, что оба элемента 1 и 8 сжаты, ибо ихъ усилія направлены къ узлу $1'$.

Затѣмъ переходимъ къ узлу $8'$, къ которому приложены извѣстныя силы P_8 и 8 и искомыя 9 и 7. Такъ какъ элементъ 8 сжатъ, то сила 8 направлена къ узлу $8'$ и образуетъ съ силой P_8 непрерывную линію силъ. Замыкая ее прямыми, проведенными черезъ вершину ($7' 8'$) параллельно

элементу 7 и черезъ точку 1 параллельно элементу 9, получимъ многоугольникъ силъ для узла $8'$; онъ даетъ усилія 9 и 7, которыя въ разсматриваемыхъ элементахъ вызываютъ сжатіе.

Обращаясь теперь къ узлу $2'$, замѣчаемъ, что силы его 9, 1 и P_2 уже извѣстны и составляютъ въ діаграммѣ непрерывную линію силъ. Ее остается только замкнуть прямыми параллельными искомымъ линіямъ 2 и 10, чтобы опредѣлить величину послѣднихъ; при этомъ прямая параллельная усилію 2 должна быть проведена черезъ вершину ($2' 3'$), а параллельная усилію 10 черезъ точку 2.



Фиг. 87 б.

Продолжая такимъ образомъ, можно найти всѣ усилія, составляя послѣдовательно многоугольники силъ для узловъ 7', 3', 6', 4'. Для послѣдняго узла 5 треугольникъ силъ уже данъ сторонами многоугольниковъ (4') и (6'), соответствующихъ узламъ 4' и 6'.

Слѣдуетъ замѣтить, что при построении многоугольника силъ для какого-нибудь узла нужно имѣть въ виду многоугольникъ, соответствующій смежному узлу. Напримѣръ, мы могли бы построить многоугольникъ силъ для узла 2' такимъ образомъ, что замкнули бы линію силъ $9-1-P_2$ прямыми, проведенными черезъ точку (2' 3') параллельно элементу 10 и черезъ точку 2 параллельно элементу 2, какъ показано пунктиромъ. Но тогда при построении многоугольника (7') для узла 7' пришлось бы силу 10 повторить на чертежѣ, соединяя ее съ силой 7 для составления непрерывной линіи P_7-7-10 , а также повторить силу 2 при построении многоугольника (3') для узла 3'.

Для облегченія построения діаграммы усилій въ фермѣ полезно замѣтить слѣдующія соотношенія между чертежемъ фермы и діаграммой:

1. Усилія элементовъ 1, 2, 3..., составляющихъ очертаніе фермы и лежащихъ между внѣшними силами ея P_1 и P_2 , P_2 и P_3 , P_3 и P_4 ..., на діаграммѣ проходятъ черезъ вершины (1' 2'), (2' 3'), (3' 4') между тѣми же внѣшними силами.

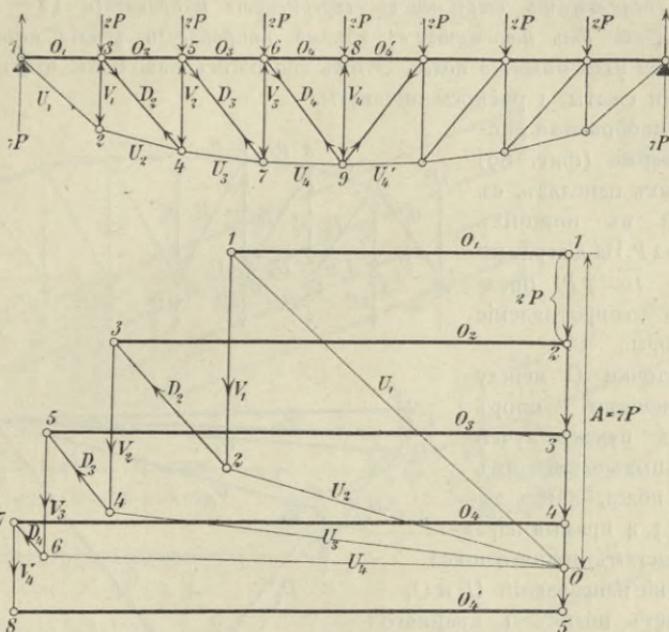
2. Усилія элементовъ, составляющихъ въ фермѣ треугольники (1), (2), (3),... на діаграммѣ пересѣкаются по три въ точкахъ (полюсахъ) 1, 2, 3, ..., при чемъ элементамъ фермы 9, 10, 11..., соединяющимъ смежные треугольники (1) и (2), (2) и (3), (3) и (4) ..., на діаграммѣ соответствуютъ усилія, соединяющія точки 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, ...

Изъ указанныхъ соотношеній можно вывести слѣдующее правило для быстрого построения діаграммы Кремоны:

Внѣшнія силы фермы въ порядкѣ ея очертанія соединяемъ въ замкнутый многоугольникъ, черезъ вершины его между каждыми двумя силами проводимъ прямыя параллельно элементамъ контура фермы, лежащимъ между тѣми же силами; затѣмъ изъ найденаго полюса 1 для крайняго треугольника (1) проводимъ послѣдовательно прямыя 12, 23, 34, ... параллельно и въ порядкѣ

элементов рѣшетки, соединяющихъ смежные треуголь-
ники фермы, до встрѣчи съ направлениемъ усилія на-
ружного элемента каждого послѣдующаго треуголь-
ника фермы.

Для лучшаго усвоенія способа Кремоны и нѣкоторыхъ прие-
мовъ разсмотрѣнны фермы прилагаются примѣры:



Фиг. 88 а и б.

1. Рыбообразная раскосная ферма (фиг. 88) имѣетъ 8 равныхъ панелей и нагрузку въ верхнихъ узлахъ по $2P$ для среднихъ узловъ и по P для крайнихъ у опоръ. Сопротивленіе каждой опоры $= 8P$, такъ что въ каждомъ крайнемъ узлѣ приложена внѣшняя сила $= 7P$, направленная снизу вверхъ. Вслѣдствіе симметріи обѣихъ половинъ фермы и ихъ нагрузки достаточно построить діаграмму для одной половины фермы.

На фиг. 88 б линия $O12345\dots$ представляетъ многоугольникъ внѣшнихъ силъ. Черезъ вершины его $1, 2, 3, 4, 5$ проведены толстыми линиями направленія усилій въ элементахъ верхняго пояса $1, 2, 3, 4, 5$, а черезъ точку O тонкими линиями проведены направленія усилій въ элементахъ нижняго пояса $1, 2, 3, 4\dots$, такъ какъ между этими элементами не приложены внѣшнія силы. Пересѣченіемъ проведенныхъ направленийъ усилій O_1 и U_1 опредѣляется полюсъ 1 крайняго треугольника. Изъ него проводимъ линію 12345678 , части которой соответственно параллельны элементамъ рѣшетки фермы $V_1, D_2, V_2, D_3, V_3, D_4, V_4$, а вершины лежатъ попеременно на толстыхъ и

тонких линияхъ. Исключеніе составляетъ сторона 78, параллельная V_4 и проведенная отъ направления O_4 до O'_4 , такъ какъ оба треугольника фермы соединенные общей стороной V_4 , имѣютъ наружные элементы на очертаніи верхняго пояса.

По направленію очертанія многоугольниковъ силъ для отдѣльныхъ узловъ находимъ, что всѣ части верхняго пояса сжаты, а нижняго вытянуты. Для опредѣленія же знака усилій V и D въ частяхъ рѣшетки можно пользоваться слѣдующимъ простымъ правиломъ: *если на линіи 1 2 3 4 5 6 7 8 усилій рѣшетки расположить стрѣлки въ непрерывномъ направленіи 12 — 23 — 34 — 45 , то они покажутъ, въ какомъ направленіи усилія рѣшетки дѣйствуютъ на узлы нижняго пояса.* Этимъ способомъ находимъ, что на фиг. 88 всѣ стойки сжаты, а раскосы вытянуты.

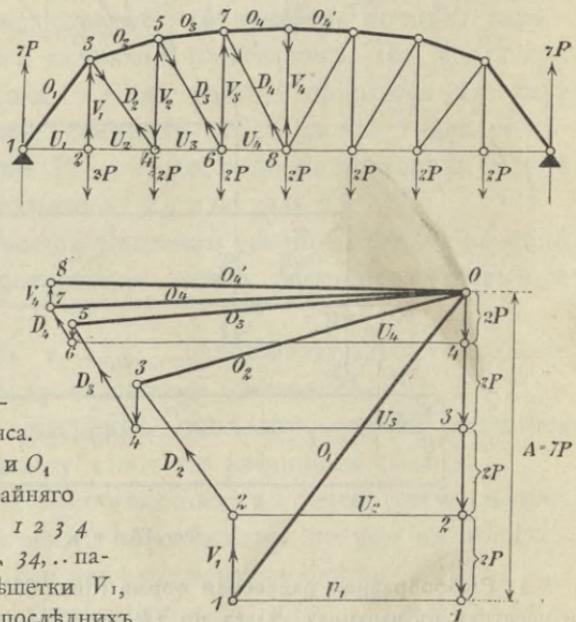
2. Лукообразная раскосная ферма (фиг. 89) о 7 равныхъ панеляхъ, съ нагрузкой въ нижнихъ узлахъ по $2P$. На диаграммѣ отрѣзокъ $10 = 7P$ представляетъ сопротивленіе лѣвой опоры.

Изъ точки O между сопротивленіями опоръ проведемъ пучекъ лучей параллельныхъ элементамъ верхняго пояса, а изъ точекъ 1, 2, 3, 4 прямая параллельная частямъ нижняго пояса. Пересѣченіе направленій U_1 и O_1 опредѣляетъ полюсъ 1 крайняго треугольника фермы; линія 1 2 3 4 5 6 7 8 съ частями 12, 23, 34, . . . параллельными элементамъ рѣшетки V_1, D_2, V_3, \dots даетъ усилія въ послѣднихъ, при чемъ точки 2, 3, 4 расположены на направленіяхъ усилій элемента поясовъ каждаго слѣдующаго треугольника фермы.

Поставленныя по линіи 1 2 3 4 5 6 стрѣлки показываютъ направленіе, въ какомъ усилія рѣшетки V и D дѣйствуютъ на узлы нижняго пояса. Такъ стойки V_1 и V_4 и всѣ раскосы вытянуты, а V_2 и V_3 сжаты; пояса, какъ всегда, верхній сжать, нижній вытянуть.

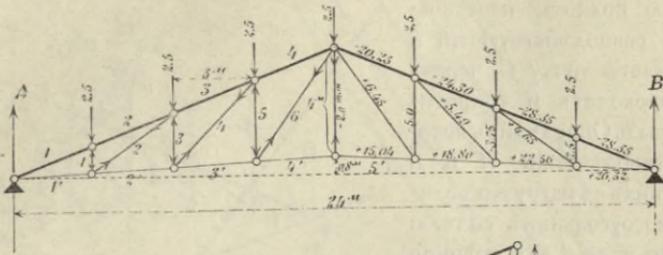
3. Англійская стропильная ферма. Фермы размѣщены параллельно другъ другу черезъ 5,1 м. Пролетъ фермъ = 24 м., панель = 3 м. Вертикальная нагрузка на кв. м. горизонтальной проекціи крыши состоитъ изъ:

- 54 кил. собств. вѣса (покрытіе — аспидный сланецъ на желѣзн. уголкахъ),
- 75 кил. вѣса слоя снѣга,
- 120 $Sn^2 (\alpha + 10)$ вертикальн. давленія вѣтра.

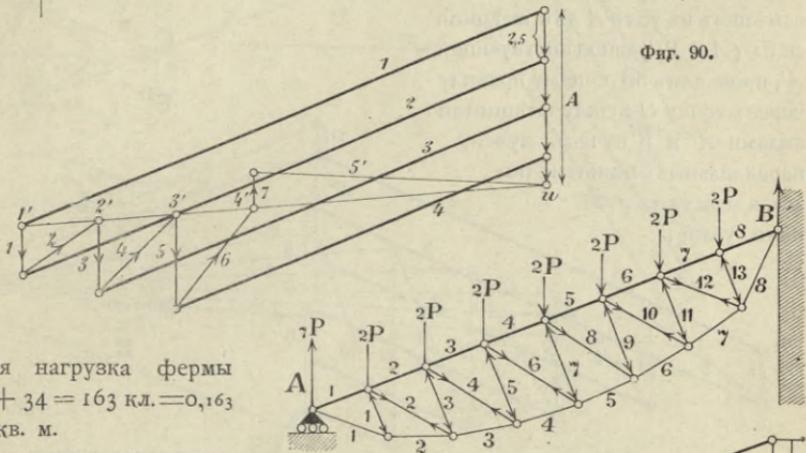


Фиг. 89.

Такъ какъ tg угла α наклоненія верхняго пояса къ горизонту $= \frac{4,8}{12} = 0,4$, то $\alpha = 22^0$, $Sn(\alpha + 10) = 0,553$; слѣд. нагрузка отъ вѣтра $= 120 \cdot 0,553^2 = 34$ кл.



Фиг. 90.

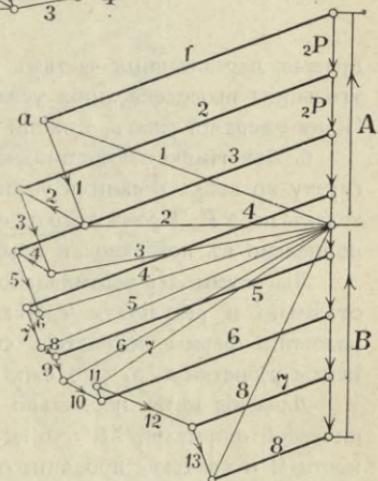


и полная нагрузка фермы $54 + 75 + 34 = 163$ кл. $= 0,163$ тон. на кв. м.

Отъ нея нагрузка на каждый узел $0,163 \times 5,1 \times 3,0 = 2,5$ т.

Для обѣихъ половинъ фермы предполагается одинаковая нагрузка. Въ опорной точкѣ дѣйствуетъ снизу вверхъ сила $\frac{1}{2} \times 2,5$ тон.

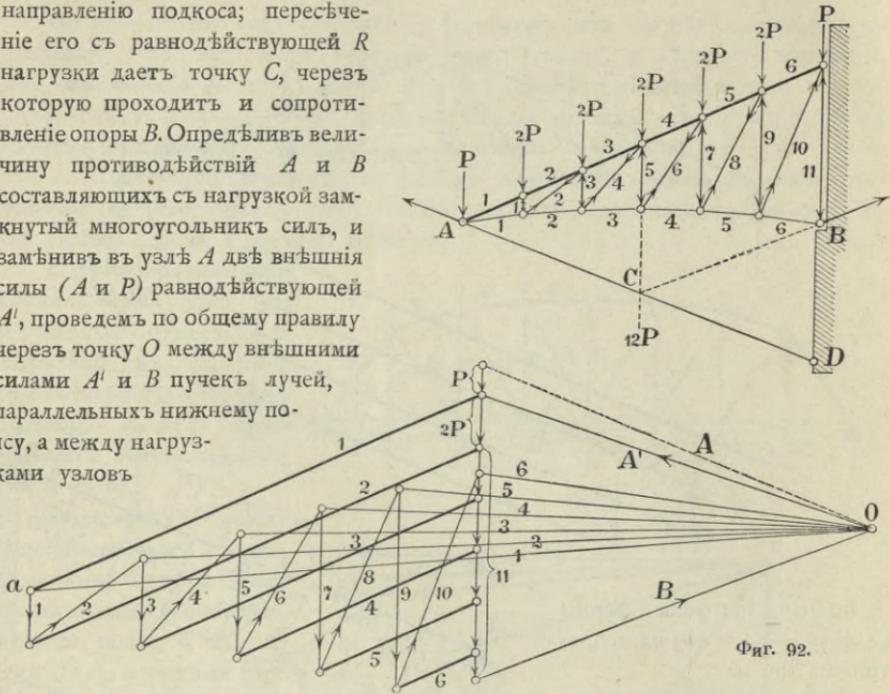
Прямая параллельная усилямъ верхняго нагруженнаго пояса отсѣкаютъ на лини внѣшнихъ силъ нагрузки узловъ. Прямая параллельная усилямъ нижняго пояса проходятъ черезъ одну и ту же точку; онѣ совпадаютъ между собою, такъ какъ имѣютъ одно и то же направленіе. Измѣренныя усилія частей фермы обозначены на правой половинѣ ея.



Фиг. 91.

4. Наклонная стропильная ферма (фиг. 91). Диаграмма построена подобно предыдущему. Элементы рѣшетки 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, сжаты, а 2, 4, 6, 11 вытянуты. Верхній поясъ сжатъ, нижній вытянутъ.

5. **Наслонная стропильная ферма съ подкосомъ.** Представленная на фиг. 92 ферма имѣть въ точкѣ *B* неподвижную шарнирную опору, а въ точкѣ *A* опорой служить подкосъ. Если въ точкѣ *D* устроенъ шарниръ, то сопротивление опоры *A* дѣйствуетъ по направлению подкоса; пересѣченіе его съ равнодѣйствующей *R* нагрузки даетъ точку *C*, черезъ которую проходитъ и сопротивление опоры *B*. Опредѣливъ величину противодѣйствій *A* и *B* составляющихъ съ нагрузкой замкнутый многоугольникъ силъ, и замѣнивъ въ узлѣ *A* двѣ внѣшнія силы (*A* и *P*) равнодѣйствующей *A'*, проведемъ по общему правилу черезъ точку *O* между внѣшними силами *A'* и *B* пучекъ лучей, параллельныхъ нижнему поясу, а между нагрузками узловъ



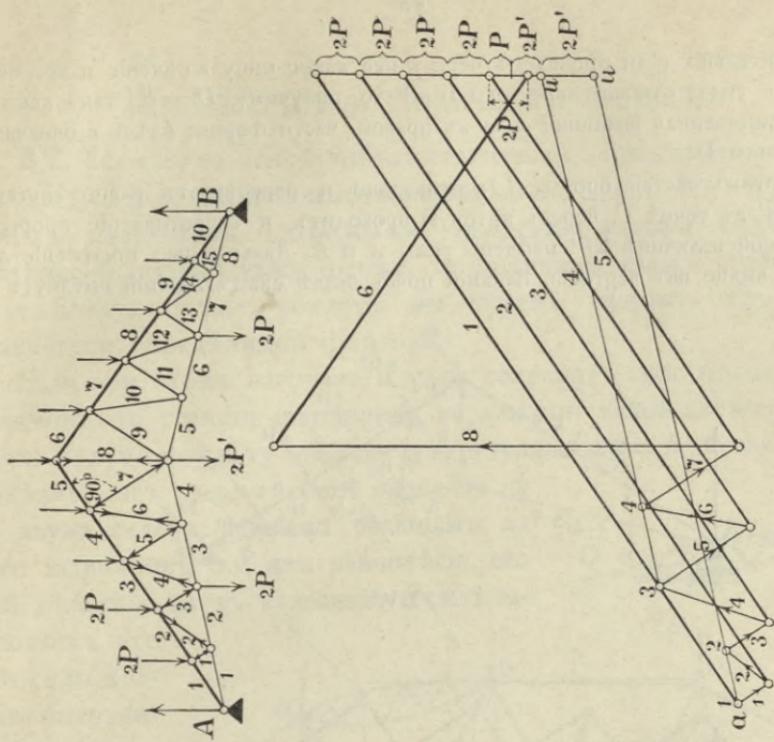
прямыя, параллельныя частямъ верхняго пояса. Изъ полюса *a* крайняго треугольника проведена линия усилій рѣшетки. Стойки сжаты, раскосы вытянуты. Пояса—верхній сжать, нижній вытянуть.

6. **Вельгійская стропильная ферма** (фиг. 93) имѣть вертикальную нагрузку во всѣхъ верхнихъ узлахъ, кромѣ крайнихъ, по $2P$ и въ трехъ нижнихъ узлахъ по $2P'$. Кромѣ того на ферму съ той или съ другой стороны дѣйствуетъ нормально къ поверхности крыши давленіе вѣтра.

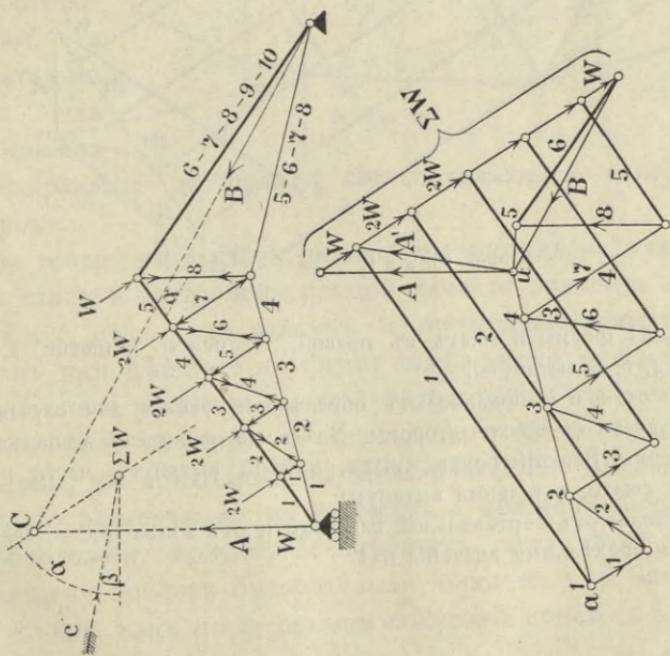
Діаграммы для вертикальной нагрузки и для дѣйствія вѣтра опредѣляются отдѣльно и результаты слагаются. Первая діаграмма построена для лѣвой половины фермы, вслѣдствіе симметріи ея съ правой. Верхній поясъ и элементы рѣшетки 1, 3, 5, 7 сжаты, остальные части фермы вытянуты.

Давленіе вѣтра нормально къ поверхности крыши и опредѣляется эмпирической формулой $\Sigma W = 0,1225 Qv^2 Sn^2\theta$; оно прямо пропорціонально поверхности Q и квадрату проекціи скорости на нормаль къ поверхности. Отъ нея приходится нагрузка на узелъ $2W = \frac{1}{5} \Sigma W$.

Когда дѣйствуетъ вѣтеръ съ лѣвой стороны, то рѣшетка правой половины фермы вовсе не напряжена и потому не показана на чертежѣ (фиг. 94).



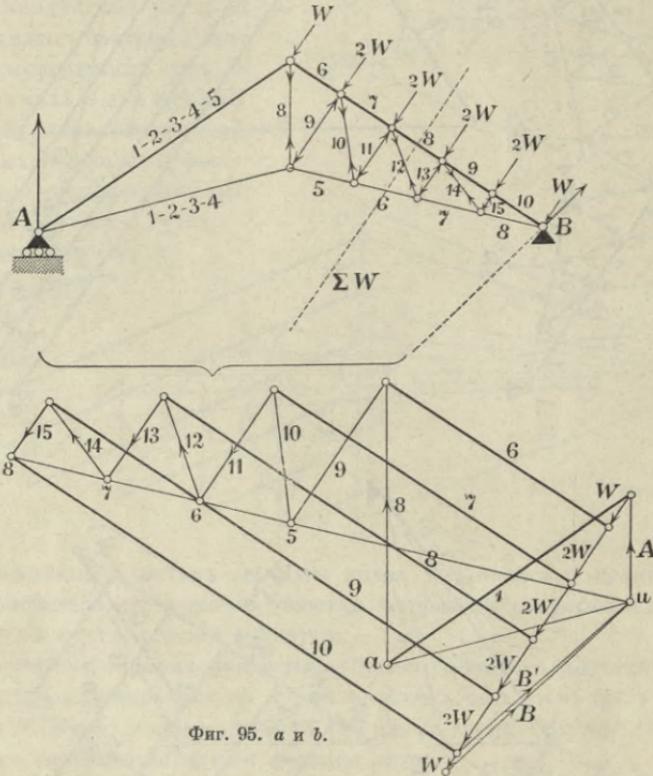
Фиг. 93.



Фиг. 94.

Дѣйствительно, если проведемъ черезъ нее какое нибудь сѣченіе и возьмемъ моментъ силъ относительно опоры B то получимъ $Dr=0$, такъ какъ B есть единственная внѣшняя сила въ правой части фермы; здѣсь r означаетъ плечо силы D .

Противодѣйствіе опоры A вертикально и пересѣкаетъ равнодѣйствующую ΣW въ точкѣ C , черезъ которую проходитъ и сопротивленіе опоры B . По данной величинѣ ΣW найдены силы A и B . Дальнѣйшее построеніе діаграммы видно изъ чертежа. Верхній поясъ вездѣ сжатъ, нижній вытянутъ въ



Фиг. 95. а и б.

лѣвой половинѣ фермы и сжать въ правой. Элементы рѣшетки 1, 3, 5, 7 сжаты, а 2, 4, 6, 8 вытянуты.

Чертежи 95 а и б показываютъ опредѣленіе усилій для случая, когда вѣтеръ дѣйствуетъ съ правой стороны. Здѣсь не работаетъ рѣшетка лѣвой половины фермы. Верхній поясъ сжатъ, нижній вытянутъ; части рѣшетки 9, 11, 13, 15 сжаты, остальные вытянуты.

Сумма усилій отъ вертикальной нагрузки и отъ вѣтра на діаграммѣ 94 или 95 даетъ предѣльные значенія ихъ.

IX. Разсчетъ сложныхъ фермъ.

57. Если мы въ какой-нибудь статически опредѣлимой фермѣ съ простыми прямыми элементами замѣнимъ одинъ или нѣсколько такихъ элементовъ сложными, представляющими отдѣльныя статически опредѣлимая фермы, то получимъ также статически опредѣлимую ферму, которую мы будемъ называть сложной статически опредѣлимой фермой.

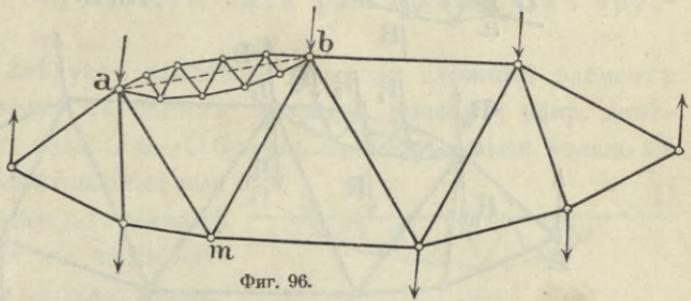
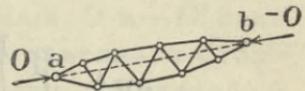
Если при этомъ нагрузка и узлы сохраняютъ свое положеніе и величину, то реакціи шарнировъ на каждый такой сложный элементъ будутъ имѣть ту же величину и направленіе. Дѣйствительно выдѣливъ изъ фермы такой элементъ ab

съ двумя силами равными реакціямъ на него шарнировъ, мы изъ равновѣсія его при дѣйствіи двухъ названныхъ силъ за-

ключаемъ, что эти силы должны быть равны и взаимно противоположны, а слѣдовательно каждая изъ нихъ должна

быть направлена по прямой ab , соединяющей центры обоихъ шарнировъ.

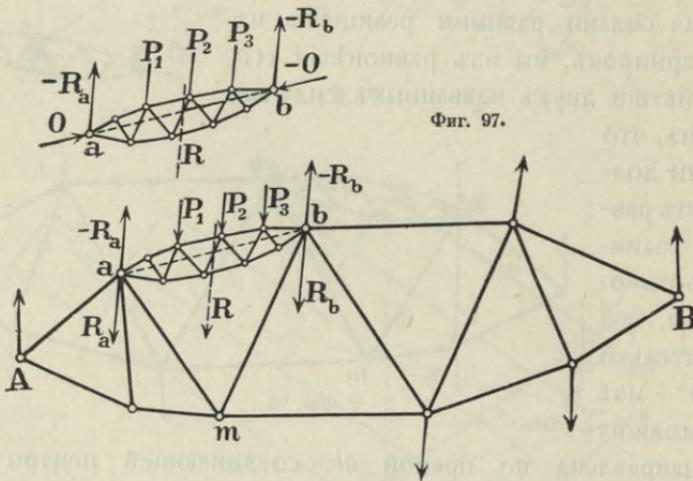
Зная теперь направленіе реакцій шарнировъ на элементъ, мы знаемъ также и направленіе реакцій даннаго элемента ab на шарниры a и b , какъ силъ равныхъ и противоположныхъ первымъ. Замѣнивъ ими дѣйствіе на ферму выдѣленнаго изъ нея элемента и разсматривая равновѣсіе лѣвой части фермы относительно вращенія ея около шарнира m , связывающаго обѣ части разъединенной фермы, мы приходимъ къ заключенію, что моментъ реакціи удаленнаго элемента ab на шарниръ a долженъ быть равенъ и противоположенъ моменту M внѣшнихъ силъ лѣвой части, или изгибающему моменту относительно точки m , т. е. мы находимъ тоже условіе, какъ и для реакціи или усилія простого элемента ab .



Фиг. 96.

Такимъ образомъ реакціи шарнировъ на элементъ ab не зависятъ отъ формы его и могутъ быть найдены какъ усиліе, сжимающее или растягивающее простой элементъ, соединяющій тѣ же узлы.

Предположимъ теперь, что мы имѣемъ какую-нибудь простую или сложную ферму, въ которой кромѣ нагрузки въ узлахъ главной фермы имѣется еще нагрузка между узлами. Пусть, напр., къ элементу ab между узлами его a и b приложены силы P_1 , P_2 и P_3 , которыхъ равнодѣйствующая пусть будетъ R . Мы не измѣнимъ условій равновѣсія и усилій частей фермы и даннаго элемента, если приложимъ къ послѣднему въ каждомъ узлѣ a и b по двѣ равныя и взаимно противоположныя силы, параллельныя



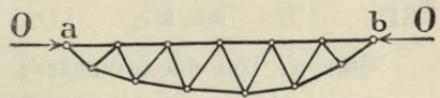
Фиг. 97.

равнодѣйствующей R и равныя ей составляющимъ R_a и R_b , проходящимъ черезъ центры шарнировъ a и b . Такъ какъ приложенная къ элементу ab нагрузка P_1 , P_2 , P_3 и силы $-R_a$ и $-R_b$ взаимно уравновѣшиваются на этомъ элементѣ, то вліяніе ихъ на шарниры a и b и величину усилій прочихъ элементовъ равно нулю; вліяютъ же на нихъ только составляющія R_a и R_b , которыя, какъ приложенныя въ узлахъ фермы, передаются непосредственно на шарниры a и b . Мы видѣли выше, что нагрузка, приложенная въ узлахъ главной фермы, вызываетъ тѣ же реакціи шарнировъ a и b на сложный элементъ ab , какъ и на простой, и что онѣ, какъ дѣйствующія по направленію прямой ab , могутъ быть легко опредѣлены. Выдѣляя затѣмъ изъ фермы сложный элементъ съ

уравновѣшенными на немъ силами $P_1, P_2, P_3, -R_a$ и $-R_b$ и найденными реакціями O и $-O$ шарнировъ a и b , мы получимъ статически опредѣлимую ферму ab , подверженную дѣйствию внѣшнихъ силъ $P_1, P_2, P_3, -R_a$ и $-R_b$, при которыхъ она работаетъ какъ простая балка *), и двухъ равныхъ и взаимно противоположныхъ силъ O и $-O$, влияние которыхъ на усилія въ частяхъ разсматриваемой фермы также просто можетъ быть опредѣлено.

Поэтому, если мы имѣемъ сложную ферму съ нагрузкой въ промежуточныхъ узлахъ сложныхъ элементовъ, то равнодѣйствующую нагрузки cadaго такого элемента нужно разложить на узлы главной фермы и, замѣнивъ сложные элементы простыми, опредѣлить усилія въ такой простой фермѣ; найденныя усилія O и $-O$ надо затѣмъ приложить къ концамъ соотвѣтственнаго сложнаго элемента ab , который вмѣстѣ съ его нагрузкой и силами $-R_a$ и $-R_b$ можетъ быть разсчитанъ какъ простая ферма.

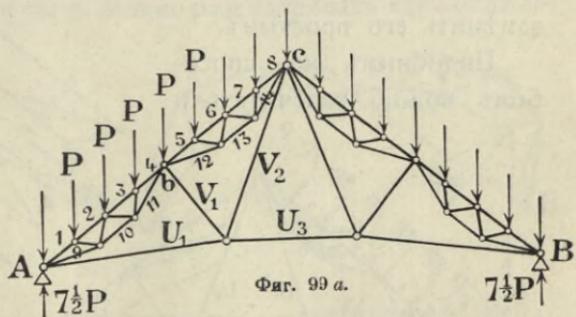
При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что если сложный элементъ представляетъ ферму съ однимъ *прямымъ* поясомъ, напр. верхнимъ (фиг. 98), то силы O и $-O$ будутъ вызывать усиліе только въ этомъ поясѣ, растягивающее или сжимающее и равное по величинѣ силѣ O , остальные же части элементарной фермы не будутъ вовсе напряжены, такъ какъ моментъ



Фиг. 98.

M ея внѣшнихъ силъ относительно верхнихъ узловъ и точекъ встрѣчи обоихъ поясовъ обращается всегда въ нуль; напряженія же въ нихъ будутъ зависѣть только отъ мѣстной нагрузки разсматриваемаго сложнаго элемента.

Какъ примѣръ возьмемъ стропильную ферму, показанную на фигурѣ 99 а; по замѣнѣ



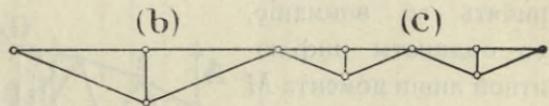
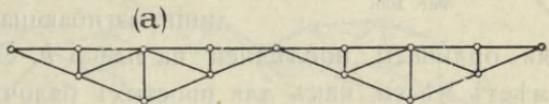
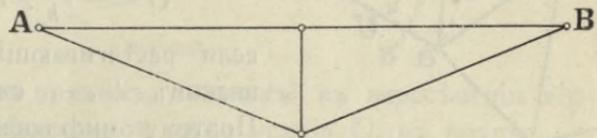
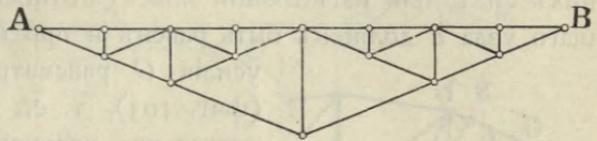
Фиг. 99 а.

*) Въ случаѣ дѣйствія параллельныхъ силъ P_1, P_2 и P_3 .

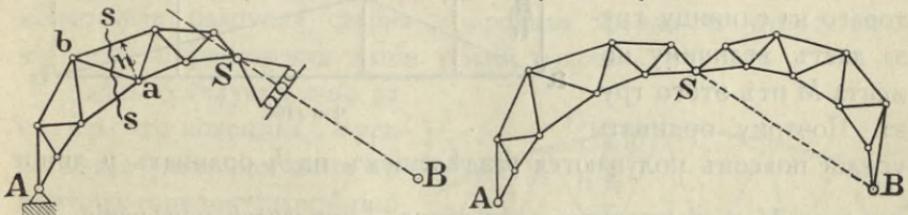
сложную ферму Финка (фиг. 101), которая может быть разсматриваема как составная из простой треугольной фермы AB и двухъ сложныхъ элементовъ (фиг. 101 a), изъ которыхъ каждый въ свою очередь распадается на простѣйшую треугольную ферму (b) и два сложныхъ элемента c . Опредѣливъ усиля во всѣхъ трехъ видахъ простыхъ фермъ и сложивъ ихъ, найдемъ искомыя усиля сложной фермы Финка.

Тотъ же способъ разсмотрѣнія можетъ быть примѣненъ и къ арочной фермѣ ASB (фиг. 102), въ которой при нагруженіи лѣвой части усиля частей послѣдней не измѣнятся, если правую половину, какъ сложный элементъ, замѣнимъ простымъ элементомъ или подкосомъ SB .

Вліяніе подкоса на часть фермы AS представляется силой, направленной по прямой BS , и потому въ этомъ случаѣ, т. е. при расположеніи нагрузки въ одной половинѣ AS эту часть можно разсматривать какъ отдѣль-



Фиг. 101.



Фиг. 102.

ную ферму на двухъ шарнирныхъ опорахъ—неподвижной A и подвижной S , имѣющей плоскость скольженія нормальную къ прямой BS .

Х. Инфлюентная линия усилий поясовъ.

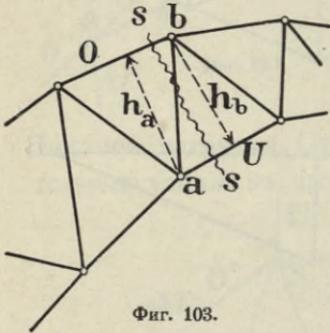
58. Усилия поясовъ. Усилие, напр., верхняго пояса O опредѣляется, какъ извѣстно, изъ условія, что моментъ M_a внѣшнихъ силъ, или изгибающій моментъ относительно противолежашаго узла a долженъ быть равенъ и противоположенъ моменту усилия O разсматриваемой части пояса (фиг. 103), т. е. усилие пояса опредѣляется изъ уравненія

$$O = -\frac{M_a}{h_a} \text{ или } U = \frac{M_b}{h_b},$$

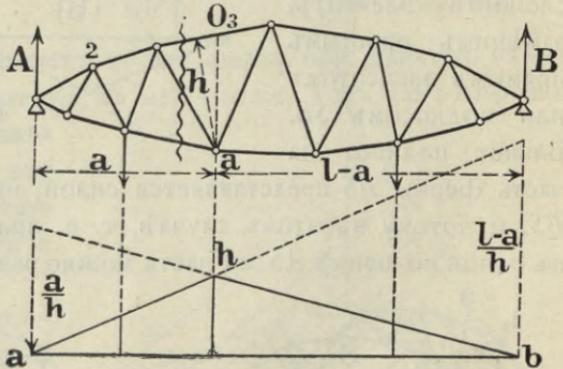
если растягивающія усилия обозначены знакомъ $+$, а сжимающія знакомъ $-$. Поэтому инфлюентныя линии усилия поясовъ получатся изъ инфлюентной линии изгибающаго момента M , раздѣляя ординаты послѣдней на плечо h . Эта простая зависимость имѣетъ мѣсто, какъ для простыхъ балочныхъ фермъ, такъ и для фермъ консольныхъ и арочныхъ. При этомъ необходимо только принять во вниманіе,

что ординаты инфлюентной линии момента M выражаются, какъ извѣстно, въ масштабѣ длины и представляютъ собою какъ бы длину плеча, произведеніе котораго на единицу груза даетъ величину момента M отъ этого груза. Поэтому ординаты

усилия поясовъ получаютъ раздѣленіемъ на h ординатъ y линии момента M , а слѣдовательно частное $\frac{y}{h}$ нулеваго измѣренія, выражающее ординату усилия въ поясѣ, должно быть представляемо въ произвольномъ масштабѣ (см. стр. 9 ч. II). Напримѣръ, для усилия O_3 верхняго пояса простой балочной фермы, изображенной



Фиг. 103.

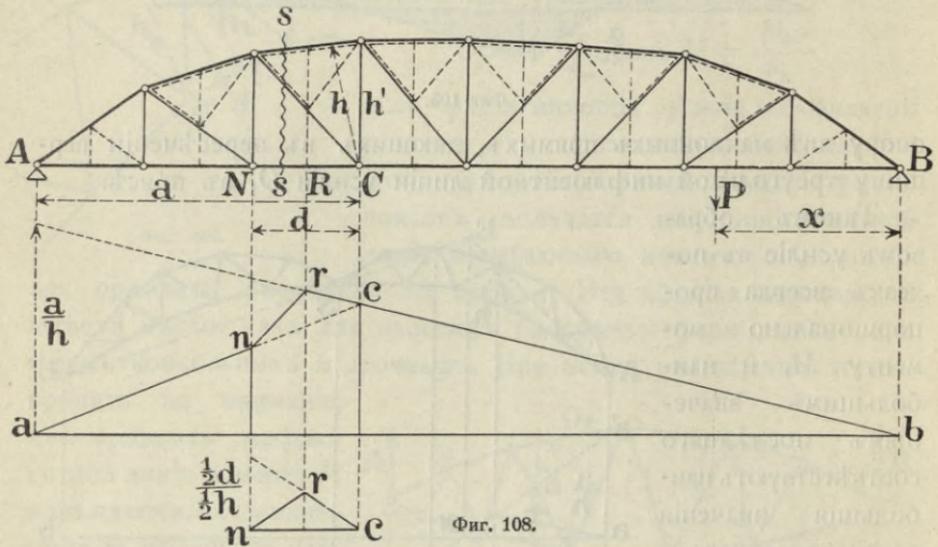


Фиг. 104.

усилия O_3 верхняго пояса простой балочной фермы, изображенной

сма триваемой части пояса, такъ что всегда для всякихъ фермъ отношеніе $\frac{M}{h'}$ выражаетъ горизонтальную проекцію усилія соотвѣтственной части верхняго или нижняго пояса.

Въ сложной фермѣ ординаты инфлюентной линіи усилія поясовъ (и рѣшетки) получаютъ сложениемъ ординатъ усилій, соотвѣтствующихъ той же части, входящей въ составъ простѣйшихъ фермъ. Напр., для фермъ моста черезъ р. р. Енисей, Оку, Зею и Амуръ, въ которыхъ простые элементы верхняго пояса (въ



Фиг. 108.

крайнихъ панеляхъ — нижняго пояса) замѣнены сложными элементами въ видѣ треугольных шпренгельныхъ балочекъ, служащихъ для передачи нагрузки промежуточныхъ верхнихъ и нижнихъ узловъ на главные узлы фермы, — инфлюентную линію усилія верхняго пояса, напр. въ третьей панели, получимъ, складывая ординаты инфлюентной линіи acb усилія того же пояса въ простѣйшей фермѣ, начерченной сплошными линіями, и ординаты треугольной линіи nrc , выражающія усиліе той же части въ шпренгельномъ элементѣ. Здѣсь точка r оказывается лежащей на продолженіи прямой bc , въ чемъ легко убѣдиться. Дѣйствительно, пока грузъ $P=1$ перемѣщается по правой части фермы отъ B до узла R , для лѣвой части, отсѣкаемой разрѣ-

зомъ ss между узлами N и R , мы можемъ написать уравненіе момента M относительно точки C

$$O_3 h + M = O_3 h + Aa = O_3 h + P \frac{ax}{l} = 0,$$

или

$$O_3 = -P \frac{ax}{lh},$$

которое представляетъ одну прямую bc , имѣющую мѣсто для всѣхъ значеній x отъ нуля до $x=BR$.

ХІ. Инфлюентныя линіи для рѣшетки фермъ.

59. Простыя балочныя фермы. Переходя къ опредѣленію инфлюентныхъ линій раскосовъ и вообще частей рѣшетки фермъ, мы должны разсмотрѣть отдѣльно простыя балочныя фермы, балочныя уравновѣшенныя и арочныя фермы (висячая есть обратная арочная ферма). Начнемъ съ первыхъ.

Здѣсь надо различать четыре случая: 1) когда точка встрѣчи направлений поясовъ, пересѣкаемыхъ сѣченіемъ ss , проведеннымъ черезъ данный раскосъ, находится на безконечности, т.-е. когда пояса параллельны между собою, 2) когда эта точка получается внѣ опоръ или пролета, 3) когда она находится между ними и 4) когда она совпадаетъ съ опорой. Первые два случая находятъ себѣ примѣненіе въ практикѣ, послѣдній случай встрѣчается рѣже (стропильныя фермы), а съ третьимъ случаемъ приходится имѣть дѣло еще рѣже (консольные мосты).

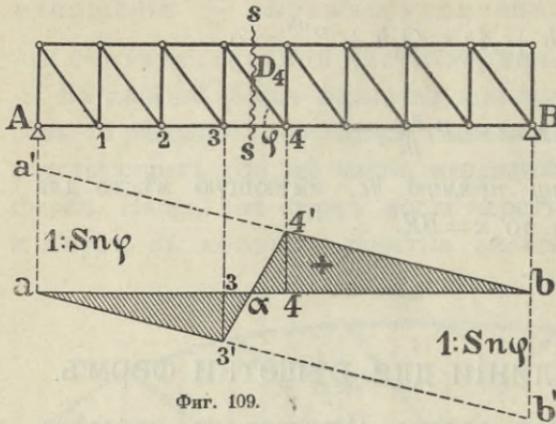
Первый случай. Для фермъ съ параллельными поясами усиліе раскоса опредѣляется по величинѣ поперечной силы Q , а именно изъ условія $Q = \pm D \sin \varphi$ или

$$D = \pm \frac{1}{\sin \varphi} Q,$$

гдѣ верхній знакъ относится къ нисходящему раскосу (лѣвый конецъ выше праваго), а нижній знакъ къ восходящему раскосу (лѣвый конецъ ниже праваго).

Эта простая зависимость указываетъ намъ, что инфлюентная линія усилія раскоса можетъ быть получена изъ инфлюентной линіи поперечной силы Q увеличеніемъ ординатъ ея въ отно-

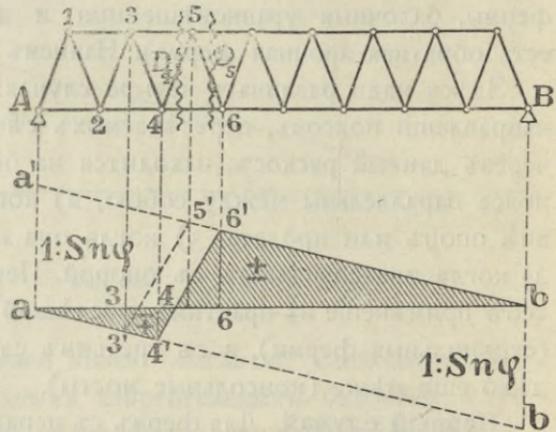
шении $1: \text{Sn}\varphi$, постоянномъ для даннаго раскоса. Такимъ образомъ инфлюентная линия усиля раскоса состоитъ изъ двухъ



Фиг. 109.

параллельныхъ прямыхъ, имѣющихъ на опорахъ ординаты равныя не 1, а $1: \text{Sn}\varphi$,—и третьей прямой, соединяющей крайнія ординаты двухъ первыхъ прямыхъ, соответствующія двумъ нагружаемымъ узламъ ближайшимъ къ сѣченію ss . Напримѣръ для фермы, изображенной на

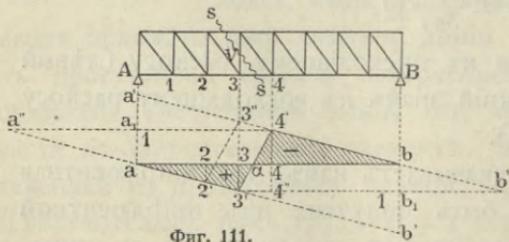
фиг. 110, при нагрузкѣ по низу инфлюентная линия раскосовъ D_4 или D_5 должна имѣть видъ, показанный на томъ же чертежѣ, при чемъ верхніе знаки ординатъ соответствуютъ нисходящему раскосу D_5 , а нижніе восходящему раскосу D_4 . Въ случаѣ нагрузки поверху, инфлюентная линия $b_6'4'a$ усиля раскоса D_4 принимаетъ видъ $b_5'3'a$.



Фиг. 110.

Точно также для рассмотрѣнной выше фермы (фиг. 111) усиленіе въ стойкѣ 3 при нагрузкѣ нижнихъ узловъ выражается ординатами инфлюентной линии поперечной силы Q для 4-ой панели, а при нагрузкѣ поверху—ординатами поперечной силы въ 3-й панели.

На усиленія раскосовъ фермы со стойками перенесеніе нагрузки изъ верхнихъ узловъ въ нижніе



Фиг. 111.

не оказываетъ никакого вліянія, что видно также изъ уравненія $DSn\varphi=Q$, въ которомъ сила Q не измѣняетъ своей величины отъ замѣны верхнихъ нагруженныхъ узловъ нижними.

Здѣсь не бесполезно будетъ также обратить вниманіе на *постоянное отношеніе*, существующее между отрѣзками треугольной положительной или отрицательной инфлюентной линіи усилія раскоса или стойки для фермы, имѣющей панели равной длины.

На фиг. 111 инфлюентной линіи усилія стойки V_3 , для которой $aa'=bb'=1$, проведемъ параллельно ab прямая изъ точекъ $4'$ и $3'$ до пересѣченія съ параллельными прямыми ab' и ba' въ точкахъ a'' и b'' . Тогда $4'a''=3'b''=ab=l$, и непосредственно изъ пропорціональности отрѣзковъ параллельныхъ прямыхъ мы находимъ:

$$\alpha_3 : aa' = 4'3'' : 4'a'' = d : l = 1 : m,$$

и подобнымъ же образомъ

$$\alpha_4 : ab = 3'4'' : 3'b'' = d : l = 1 : m.$$

Поэтому, если сумма грузовъ поѣзда, устанавливающихся на длинѣ положительной части aa' или отрицательной части ab инфлюентной линіи усилія стойки V_3 , будетъ $=R$, то для *max.* V_3 необходимо, чтобы на части α_3 панели находились $\frac{1}{m} R$, а на части α_4 нагрузка $=\frac{m-1}{m} R$, если $m = \frac{l}{d}$ означаетъ число панелей данной фермы.

Очевидно, то же соотношеніе и расположеніе поѣзда должно имѣть мѣсто и для раскоса D_4 или поперечной силы Q .

Относительно фермъ съ параллельными поясами слѣдуетъ впрочемъ сказать, что на практикѣ предпочтительнѣе усилія въ поясахъ и рѣшеткѣ фермы опредѣляютъ безъ помощи инфлюентныхъ линій, непосредственно по величинамъ M и Q .

60. Второй случай. Точка r пересѣченія направленій поясовъ лежитъ внѣ пролета или опоръ фермы. Грузъ, приложенный къ правой части nB фермы, относительно сѣченія ss даетъ въ лѣвой части одну внѣшнюю силу—реакцію опоры $A = P \frac{x}{l}$, вращающую эту часть фермы относительно точки r по направленію обратному движенію часовой стрѣлки; поэтому уси-

лие D раскоса должно вращать въ противоположномъ направленіи, т.-е. оно должно быть направлено внизъ отъ раскоса и остающуюся часть его растягивать; при чемъ моментъ $D \cdot r$ этого усилія долженъ быть равенъ моменту опорной реакціи A , т. е.

$$D \cdot r = A \cdot a = P \frac{ax}{l} \text{ или } D = P \frac{ax}{lr}.$$

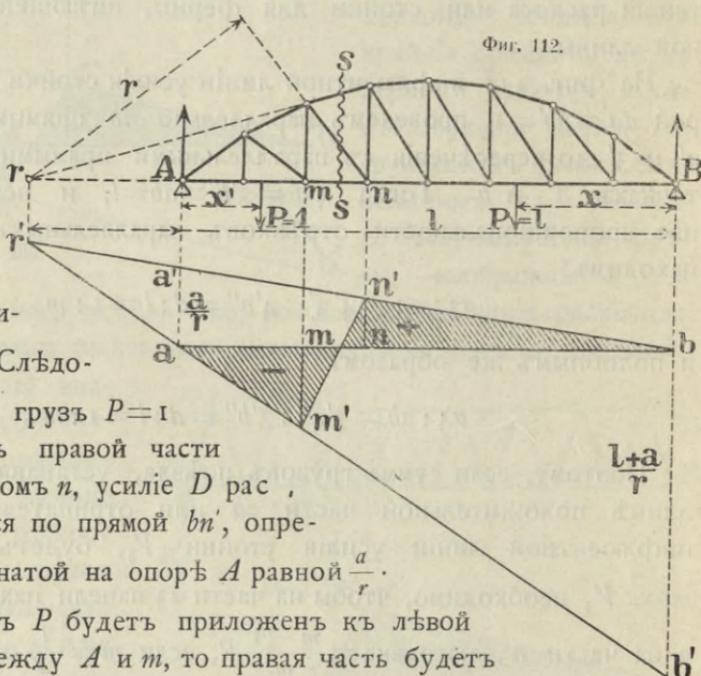
Это уравненіе представляетъ прямую, проходящую черезъ опорную точку B и имѣющую на другой опорѣ A при $x=l$ ординату $P \frac{a}{r} = \frac{a}{r}$. Слѣдо-

вательно, пока грузъ $P=1$ приложенъ къ правой части между B и узломъ n , усиліе D раскоса измѣняется по прямой bn' , определяемой ординатой на опорѣ A равной $\frac{a}{r}$.

Когда грузъ P будетъ приложенъ къ лѣвой части фермы между A и m , то правая часть будетъ заключать одну внѣшнюю силу—реакцію опоры B , вращающую эту часть относительно точки r по направленію обратному движенію часовой стрѣлки. Поэтому уравновѣшивающее его усиліе раскоса D должно вращать его въ противоположномъ направленіи, т.-е. оно должно быть направлено внизъ и сжимать оставшуюся часть раскоса; причемъ изъ равенства моментовъ реакціи B опоры B $(l+a)$ и усилія D раскоса $D \cdot r$ слѣдуетъ уравненіе для D

$$D = B \frac{l+a}{r} = Px' \cdot \frac{l+a}{lr}.$$

Оно представляетъ прямую, проходящую черезъ опору A ($x'=0$) и имѣющую ординату въ точкѣ B при $x'=l$, равную $\frac{l+a}{r}$. Часть am' этой прямой выражаетъ инфлюентную линію



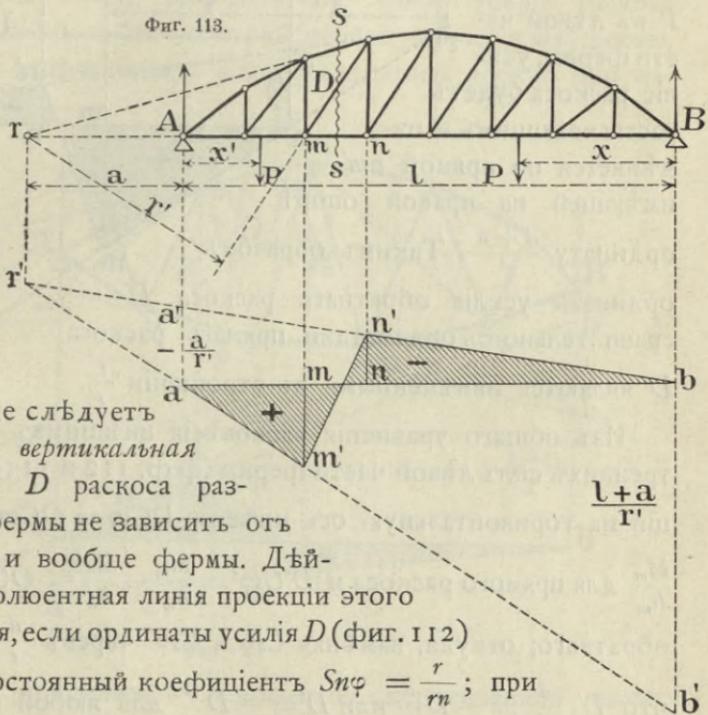
усилія раскоса D отъ груза, приложеннаго къ лѣвой части фермы между опорой A и узломъ m . Такъ какъ между узлами инфлюентная линия всегда представляетъ прямую, то соединивъ концы крайнихъ ординатъ найденныхъ линий въ узлахъ m и n прямою $m'n'$, получимъ всю инфлюентную линию $bn'm'a$ усилія разсматриваемаго раскоса D .

Отмѣтимъ здѣсь то геометрическое свойство прямыхъ $n'b$ и $m'a$, что ихъ точка пересѣченія r находится на одной вертикали съ точкой r пересѣченія направлений поясовъ, въ чемъ легко убѣдиться изъ подобія треугольниковъ $r'bb'$ и $r'a'a$. (При параллельныхъ поясахъ точки r и r' находятся въ бесконечности, т. е. прямая $n'b$ и $m'a$ должны быть параллельны между собою).

Точно также слѣдуетъ замѣтить, что вертикальная проекція усилія D раскоса разсматриваемой фермы не зависитъ отъ высоты стоекъ и вообще фермы. Дѣйствительно, инфлюентная линия проекціи этого усилія получится, если ординаты усилія D (фиг. 112)

умножимъ на постоянный коэффициентъ $Sn\varphi = \frac{r}{rn}$; при этомъ прямая bn' и am' обратятся въ другія прямая, имѣющія на опорахъ ординаты $\frac{a}{r} \cdot \frac{r}{rn} = \frac{a}{nr}$ и $\frac{a+l}{r} \cdot \frac{r}{rn} = \frac{a+l}{rn}$, которыя дѣйствительно зависятъ только отъ горизонтальныхъ разстояній и сохраняютъ свою величину при пропорціональномъ измѣненіи высотъ смежныхъ стоекъ, т. е. при постоянной точкѣ r .

Если въ разсматриваемой панели фермы замѣнимъ нисходящій раскосъ восходящимъ (фиг. 113), то путемъ подобныхъ же разсужденій убѣдимся, что при положеніи груза P въ правой части



фермы, тотъ же моментъ опорной реакции $A \cdot a = P \frac{ax}{l}$, вращающій по направленію обратному движенію часовой стрѣлки, будетъ уравновѣшиваться моментомъ $D' \cdot r'$ усиія раскоса D' , сооответствующимъ сжатію послѣдняго, при чемъ отрицательное усиіе раскоса D' будетъ измѣряться ординатами прямой bn' , имѣющей на лѣвой опорѣ ординату $aa' =$

$\frac{a}{r'}$. При поло-

женіи же груза

P въ лѣвой ча-

сти фермы, уси-

ліе раскоса будетъ

растягивающимъ и из-

мѣняется по прямой am' ,

имѣющей на правой опорѣ

ординату $\frac{l+a}{r'}$. Такимъ образомъ

ординаты усиія обратнаго раскоса D'

сравнительно съ ординатами прямаго раскоса

D являются измѣненными въ отношеніи $\frac{r}{r'}$.

Изъ общаго уравненія равновѣсія внѣшнихъ и вну-

треннихъ силъ лѣвой части фермы (ф.ф. 112 и 113) для проек-

цій на горизонтальную ось имѣемъ: $DCs\varphi = OCs\alpha - UCs\beta = \frac{M_n}{h_n} -$

$\frac{M_m}{h_m}$ для прямаго раскоса и $D'Cs\varphi' = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_n}{h_n} = OCs\alpha - UCs\beta$ для

обратнаго; откуда, замѣняя $Cs\varphi$ и $Cs\varphi'$ черезъ $\frac{d}{s}$ и $\frac{d'}{s'}$, находимъ,

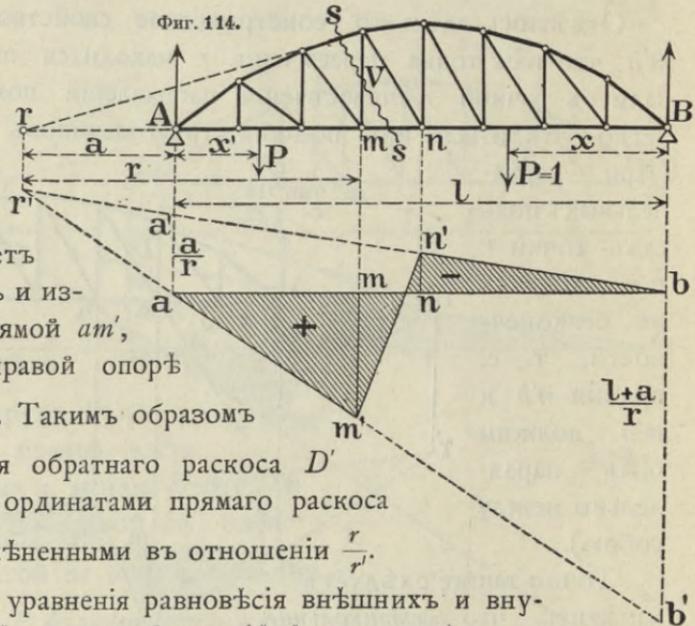
что $D' \frac{d}{s'} = -D \frac{d}{s}$ или $D' = -D \frac{s'}{s}$ для любой нагрузки фермы,

а потому $\max. D' = -\min. D \frac{s'}{s}$. Такимъ образомъ можно просто

опредѣлять наибольшее растягивающее усиіе обратнаго раскоса,

имѣя одну инфлюентную лінію для прямаго раскоса D .

Для стойки фермы, показанной на фиг. 114 и представляющей

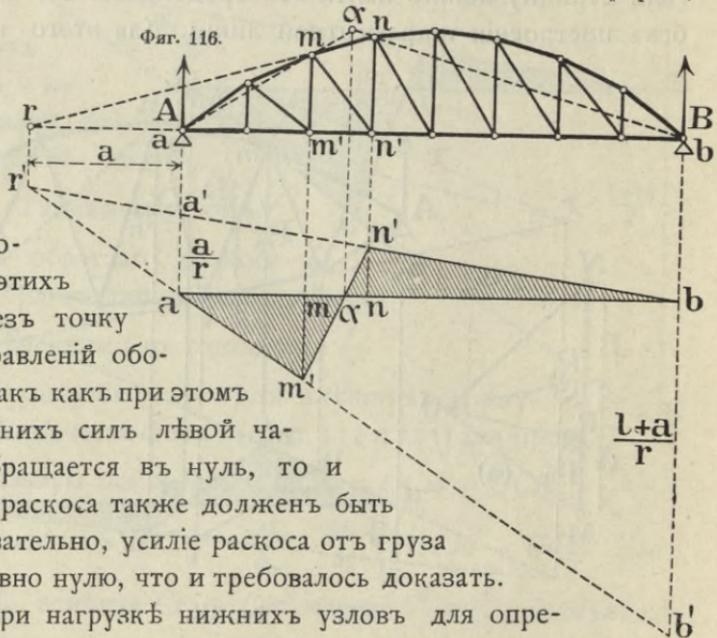


частный случай ($\varphi=90^\circ$) положенія раскоса, легко убѣдиться при помощи разрѣза ss , что положеніе груза $P=1$ въ правой части фермы вызываетъ въ стойкѣ сжимающее усиіе, выра-

дѣяіа черезъ узлы m и n . Величину ихъ найдемъ, проведя черезъ концы силы P (фиг. a) прямыя NO и MO параллельныя прямымъ nb_0 и ma_0 и черезъ ихъ точку пересѣченія O лучъ $OS \parallel mn$ (см. стр. 10 первой части); тогда отрѣзокъ NS выразитъ величину P_n , а отрѣзокъ SM величину P_m . Теперь линію a_0mb_0 мы можемъ разсматривать какъ веревочный многоугольникъ для силъ P_m и P_n , тремъ сторонамъ котораго соотвѣтствуютъ параллельныя имъ лучи OM , OS и ON многоугольника силъ; при этомъ линія a_0b_0 является замыкающей стороной веревочнаго многоугольника, а потому параллельный ей лучъ OS' опредѣляетъ реакціи опоръ фермы въ видѣ отрѣзковъ NS' и MS' . Равнодѣйствующая сила A и P_m , приложенныхъ къ лѣвой части фермы, должна проходить черезъ точку пересѣченія крайнихъ сторонъ mn и a_0b_0 веревочнаго многоугольника этихъ силъ, т. е. черезъ точку r встрѣчи направленій обоихъ поясовъ. Такъ какъ при этомъ моментъ внѣшнихъ силъ лѣвой части фермы обращается въ нуль, то и моментъ усилія раскоса также долженъ быть нулемъ; слѣдовательно, усиліе раскоса отъ груза P въ точкѣ α равно нулю, что и требовалось доказать.

Обратно, при нагрузкѣ нижнихъ узловъ для опредѣленія нулевой точки усилія раскоса надо продолжить направление пересѣченной части mn верхняго пояса до встрѣчи съ направленіями реакцій опоръ A и B фермы въ точкахъ a_0 и b_0 и соединить ихъ соотвѣтственно съ ближайшими къ ss нижними узлами u и t прямыми, пересѣченіе которыхъ и опредѣлитъ искомую точку α .

Для фермъ со стойками, въ которыхъ усилія раскосовъ не измѣняются отъ перенесенія нагрузки изъ нижнихъ узловъ въ верхніе и наоборотъ, можно при нагрузкѣ по низу фермы съ



нижнимъ *прямымъ* поясомъ вмѣсто направленія верхняго пояса взять нижній прямой поясъ и черезъ концы его a и b и концы m и n стоекъ, смежныхъ съ разрѣзомъ ss , провести прямыя am и bn , опредѣляющія своимъ пересѣченіемъ α нулевую точку инфлюентной линіи усилія даннаго раскоса D .

62. Третій случай. Точка r встрѣчи направлений поясовъ лежитъ между опорами фермы, въ пролетѣ. Пусть AB будетъ какая-нибудь ферма (фиг. 117) съ нагрузкой въ верхнихъ узлахъ, D —разсматриваемый раскосъ и r —точка встрѣчи направлений поясовъ, разстояніе которой отъ лѣвой опоры A обозначимъ по-прежнему черезъ a .

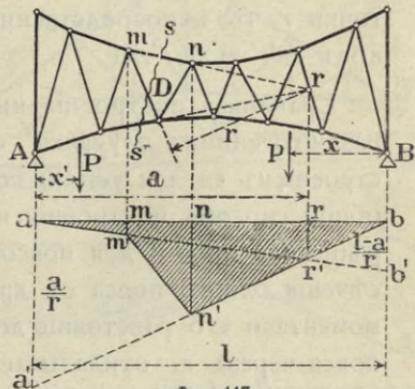
Когда грузъ P приложенъ къ правой части фермы относительно сѣченія ss , то условіе равновѣсія лѣвой части относительно точки r , находящейся теперь справа отъ реакціи опоры A и разсматриваемаго раскоса, требуетъ, чтобы моментъ $A \cdot a = P \frac{ax}{l}$ опорной реакціи былъ равенъ и противоположенъ моменту $D \cdot r$ усилія раскоса D , т. е. это усиліе должно быть направлено внизъ и растягивать часть раскоса, оставшуюся на лѣвой половинѣ фермы. Равенство обоихъ моментовъ приводитъ къ тому же уравненію

$$D = P \frac{ax}{lr},$$

выражающему прямую ba' , которой ордината $aa' = \frac{a}{r}$. Часть bn' этой прямой представляетъ намъ инфлюентную линію усилія D раскоса для положенія груза въ правой части фермы отъ B до узла n .

Если грузъ $P=1$ будетъ помѣщенъ въ лѣвой части фермы между опорой A и узломъ m , то разсмотрѣніе условія равновѣсія правой части фермы приводитъ къ заключенію, что усиліе раскоса направлено вверхъ, т. е. растягиваетъ раскосъ, а не сжимаетъ его, какъ то было въ предыдущемъ случаѣ, когда точка r находилась влѣво отъ раскоса и опоры B . Равенство обоихъ моментовъ даетъ для D уравненіе прямой $am'b'$, а именно:

$$D = P \frac{(l-a)x'}{lr}, \text{ причѣмъ}$$



Фиг. 117.

ордината ея $bb' = \frac{l - a}{r}$, а часть ея am' представляет инфлюэнтную линію для положеній груза отъ опоры A до узла m . Между узлами m и n усиліе D измѣняется по прямой $m'n'$.

Такимъ образомъ для даннаго нисходящаго раскоса получается инфлюэнтная линія усилія $am'n'b$ съ одними положительными ординатами. Для смежнаго восходящаго раскоса получаютъ всѣ ординаты съ отрицательнымъ знакомъ, соотвѣтствующія сжимающему усилію въ раскосѣ.

Въ разсматриваемомъ случаѣ прямыя bn' и am' также пересѣкаются въ точкѣ r' , лежащей на одной вертикали съ точкой r пересѣченія поясовъ, потому что отношеніе разстояній $a : l - a$ точки r до опоръ A и B равно отношенію разстояній до нихъ точки r , что непосредственно слѣдуетъ изъ подобія треугольниковъ $aa'r'$ и $bb'r'$.

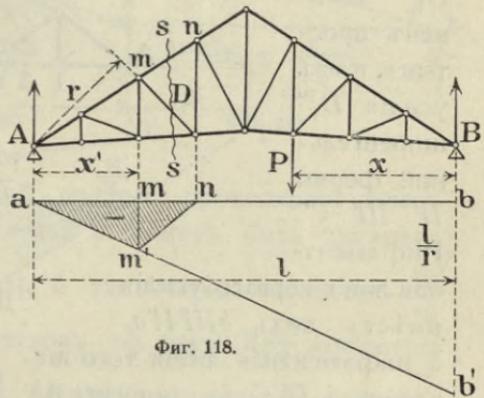
Сравнивая построеніе инфлюэнтной линіи усилія раскоса въ разсмотрѣнныхъ случаяхъ съ найденнымъ выше (стр. 102) построеніемъ ея для усилій поясовъ фермы, можно дать слѣдующій общій способъ построенія инфлюэнтной линіи усилій какъ для рѣшетки, такъ и для поясовъ фермы: обозначивъ точку пересѣченія одного пояса съ другимъ или раскосомъ, т. е. полюсъ момента и его разстояніе до разсматриваемой части рѣшетки или пояса черезъ r , откладываемъ на опорахъ a и b фермы ординаты aa' и bb' , равныя разстояніямъ полюса r до опоръ a и b , раздѣленнымъ на разстояніе r , въ одну и ту же сторону отъ оси ab , если точка r находится между опорами фермы, или въ противоположныя стороны, если эта точка окажется внѣ пролета; проводимъ прямыя ab' и ba' , пересѣкающіяся въ точкѣ r подъ полюсомъ r и находимъ на нихъ точки m' и n' подъ нагружаемыми узлами m и n , ближайшими къ сѣченію ss фермы. Тогда линія $am'n'b$ будетъ искомою инфлюэнтной линіей для даннаго пояса или раскоса. Знакъ же ординатъ инфлюэнтной линіи долженъ быть выбранъ въ зависимости отъ положенія раскоса, восходящаго или нисходящаго.

63. Четвертый случай. Точка встрѣчи направленной поясовъ совпадаетъ съ опорой A (фиг. 118). Въ этомъ случаѣ грузъ P , приложенный направо отъ сѣченія ss , вызываетъ въ раскосѣ усиліе D

равное нулю, такъ какъ моментъ его $D \cdot r$ относительно точки r или опоры A , равенъ моменту реакціи опоры A и потому такъ же долженъ быть равенъ нулю. Дѣйствительно, изъ общаго способа построения инфлюентной линіи въ этомъ случаѣ слѣдуетъ, что при $a=0$ ордината $aa' = a \cdot r$ обращается въ нуль, и прямая ba' инфлюентной линіи D совпадаетъ съ осью ba .

Когда грузъ P помѣщенъ въ лѣвой части фермы, то изъ условія равновѣсія правой части относительно точки A находимъ, что усиліе $D = B \frac{l}{r} = P \frac{x'}{r} = \frac{x'}{r}$ и выражается ординатами прямой ab' , опредѣляемой ординатой на опорѣ B равной $\frac{l}{r}$. Соединивъ прямую крайнюю точку m' прямой ab' съ точкой n , получимъ инфлюентную линію $am'n$ усилія D даннаго раскоса. Это же построение получится и изъ общаго способа, дающаго въ частномъ случаѣ при $a=0$ для прямой am' ординату $bb' = \frac{l-a}{r} = \frac{l}{r}$.

Такимъ образомъ общій способъ построения инфлюентной линіи относится ко всѣмъ случаямъ поясовъ и рѣшетки фермъ.



Фиг. 118.

Разсмотрѣвъ такимъ образомъ всѣ четыре случая инфлюентной линіи усилія въ частяхъ рѣшетки фермы, мы видимъ, что для опредѣленія инфлюентной линіи усилія раскоса или стойки въ какой-нибудь фермѣ достаточно найти только двѣ ординаты mm' и nn' , соотвѣтствующія нагруженнымъ узламъ фермы, ближайшимъ къ сѣченію ss , проведенному черезъ оба пояса и рассматриваемую часть рѣшетки, такъ какъ двѣ другія ординаты на опорахъ фермы всегда равны нулю. Отсюда вытекаетъ общій и простой способъ опредѣлять инфлюентную линію какой-нибудь части рѣшетки: нужно сперва приложить грузъ $P=1$ въ узелъ m и вычислить усиліе данной части, затѣмъ перенести грузъ въ узелъ n и также найти величину усилія, отложить равныя этимъ усиліямъ ординаты mm' и nn' , сообразно съ ихъ знаками, и точки a, m', n' и b послѣдовательно соединить прямыми.

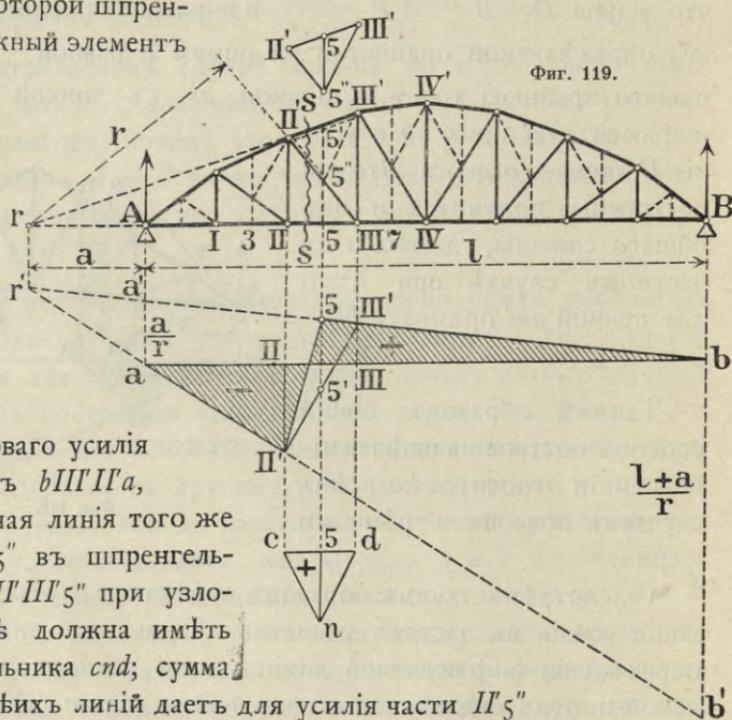
64. Рѣшетка сложныхъ фермъ. Подобно усилямъ поясовъ, инфлюентныя линіи усилій въ частяхъ рѣшетки сложной фермы получаютъ также сложениемъ ординатъ усилій разсматриваемой части фермы, входящей въ составъ простѣйшихъ фермъ, изъ которыхъ состоитъ данная сложная ферма. Напр., для сложной фермы фиг. 119, на которой для ясности промежуточныя стойки и шпренгели показаны пунктирными линіями, усиліе верхней половины раскоса D_3 слагается изъ усилія D'_3 раскоса простой фермы, въ которой шпренгельный сложный элемент

$III'II'5''$ верхняго пояса O_3 замѣненъ простымъ, и изъ усилія D_3'' шпренгельной фермы $II'III'5''$.

Инфлюентная линія перваго усилія имѣетъ видъ $bIII'II'a$, а инфлюентная линія того же элемента $II'5''$ въ шпренгельной фермѣ $II'III'5''$ при узловомъ нагружкѣ должна имѣть видъ треугольника cnd ; сумма

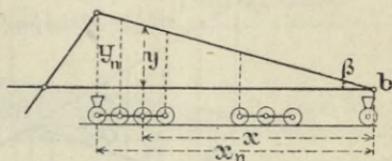
ординатъ обѣихъ линій даетъ для усилія части $II'5''$ сложной фермы инфлюентную линію вида $bIII'II'a$, гдѣ $5'5'' =$ высотѣ $n5$ треугольника cnd , при чемъ точка 5 этой инфлюентной линіи оказывается на продолженіи прямой $bIII'$.

Дѣйствительно, пока грузъ перемѣщается по правой части фермы относительно сѣченія ss отъ опоры B до узла 5 , усиліе части $II'5''$ сложной фермы выражается уравненіемъ $D = A \frac{a}{r} = P \frac{ax}{lr}$, которое представляетъ одну и ту же прямую, принадлежащую инфлюентной линіи на длинѣ отъ B до узла 5 , что и доказываетъ указанную нами зависимость.



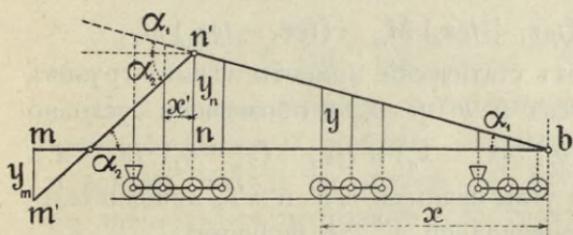
Фиг. 119.

65. Вычисленіе ΣPy . Такъ какъ положительная и отрицательная части инфлюентныхъ линий усилій въ поясахъ и рѣшеткѣ фермы состоятъ изъ прямыхъ линий числомъ обыкновенно не выше трехъ, чаще же изъ двухъ прямыхъ (образующихъ съ осью абсциссъ треугольникъ), то для опредѣленія усилій въ фермѣ съ помощью инфлюентныхъ линий нами рекомендуется аналитическій способъ, какъ болѣе точный, скорый и не требующій утомительнаго измѣренія ординатъ y подъ грузами для составленія суммы ΣPy , которая представляетъ величину искомага усилія, если пользоваться составленной нами таблицей моментовъ грузовъ поѣзда. Въ этомъ случаѣ ординаты y въ суммѣ ΣPy выражаются черезъ разстоянія грузовъ, сумма ΣPy — черезъ ΣPx или моментъ грузовъ поѣзда.



Фиг. 120.

Когда всѣ ординаты инфлюентной линии, соответствующія грузамъ поѣзда, принадлежатъ одной прямой, проходящей черезъ опору, напр. bn' , то каждая ордината y можетъ быть замѣнена черезъ $x \cdot \operatorname{tg} \beta$ или $x \frac{y_n}{x_n}$ (фиг. 120), и такъ какъ множитель $\frac{y_n}{x_n}$ одинаковъ для ординатъ всѣхъ грузовъ, то сумма ΣPy замѣнится выраженіемъ $\frac{y_n}{x_n} \Sigma Px = \frac{y_n}{x_n} M$, гдѣ M означаетъ статическій мо-



Фиг. 121.

ментъ грузовъ поѣзда относительно точки b , легко опредѣляемый съ помощью таблицы моментовъ.

Если ординаты y грузовъ въ суммѣ ΣPy принадлежатъ двумъ прямымъ bn' и $m'n'$, составляющимъ съ осью абсциссъ углы α_1 и α_2 , а между собою, слѣдовательно, уголь $\alpha_1 + \alpha_2$ (фиг. 121), то въ этомъ случаѣ можно съ помощью той же таблицы вычислить ΣPy , какъ разность члена $\operatorname{tg} \alpha_1 \Sigma Px = \operatorname{tg} \alpha_1 M_b$, распространеннаго на всѣ грузы поѣзда, и члена $(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2) \Sigma Px' = (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2) M_n$, относящагося только къ грузамъ,

составляющимъ съ осью абсциссъ углы α_1 и α_2 , а между собою, слѣдовательно, уголь $\alpha_1 + \alpha_2$ (фиг. 121), то въ этомъ случаѣ можно съ помощью той же таблицы вычислить ΣPy , какъ разность члена $\operatorname{tg} \alpha_1 \Sigma Px = \operatorname{tg} \alpha_1 M_b$, распространеннаго на всѣ грузы поѣзда, и члена $(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2) \Sigma Px' = (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2) M_n$, относящагося только къ грузамъ,

находящимся слѣва точки n , и M_n представляет ихъ моментъ относительно послѣдней. Этотъ результатъ получается изъ выраженія ΣPy , по замѣнѣ ординатъ прямой $m'n'$ ординатами продолженія прямой bn' , уменьшенными на отрѣзки, заключенные между обѣими прямыми, равные $(tg\alpha_1 + tg\alpha_2)x'$, гдѣ x' означаетъ разстоянiе грузовъ отъ точки n . Слѣдовательно,

$$\Sigma Py = tg\alpha_1 M_b - (tg\alpha_2 + tg\alpha_1) M_n$$

Продолжая слѣдовать тому же приему, мы можемъ вычислить съ помощью таблицы величину ΣPy даже и въ томъ случаѣ, когда

инфлюентная линiя состоитъ изъ трехъ прямыхъ

bm' , $m'n'$ и $n'a'$, составляющихъ съ осью

абсциссъ углы α_1 , α_2 и α_3 . Для

этого нужно сперва въ суммѣ ΣPy ординаты всѣхъ грузовъ

отнести къ прямой

bm' и ея продолженiю,

выразивъ ΣPy

черезъ $tg\alpha_1 M_b$, затѣмъ

вычесть предыдушую поправку

$(tg\alpha_1 + tg\alpha_2)M_m$, от-

носящуюся къ грузамъ поѣзда влѣво отъ точки m , и наконецъ

вычесть еще поправку $(tg\alpha_3 - tg\alpha_2)M_n$

относительно грузовъ поѣзда,

расположенныхъ слѣва отъ точки n . Поэтому имѣемъ

$$\Sigma Py = tg\alpha_1 M_b - (tg\alpha_1 + tg\alpha_2) M_m - (tg\alpha_3 - tg\alpha_2) M_n,$$

гдѣ M_b , M_m и M_n означаютъ статическiе моменты лѣвыхъ грузовъ поѣзда относительно точекъ b , m и n , и обозначены условно

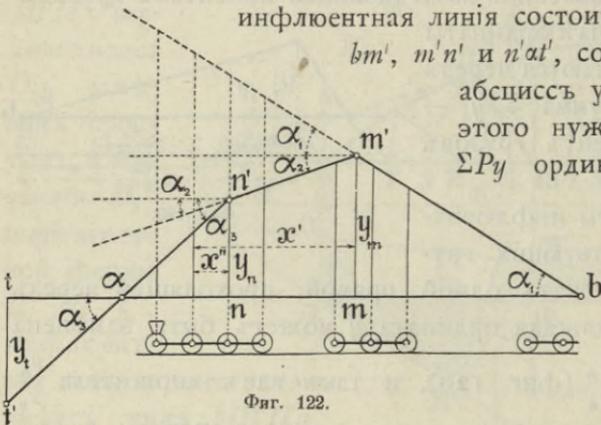
$tg\alpha_1 = y_m : x_m$, $tg\alpha_2 = (y_m - y_n) : (x_m - x_n)$ и $tg\alpha_3 = (y_n - y_l) : (x_n - x_l)$.

Если же взять правильно углы прямыхъ $m'n'$ и $n't'$, дополнительные до 360° , какъ для производной Y' , то получимъ

$$\Sigma Py = tg\alpha_1 M_b + (tg\alpha_2 - tg\alpha_1) M_m + (tg\alpha_3 - tg\alpha_2) M_n.$$

Въ частныхъ случаяхъ, сообразно съ расположенiемъ поѣзда, конечно, приходится нѣсколько видоизмѣнять приемъ пользованiя таблицей при вычисленiи усилiй въ фермахъ.

Невыгоднѣйшее расположенiе поѣзда опредѣляется по общему способу (стр. 12), по переменѣ знака у производной $\frac{\Delta Y}{\Delta x} =$

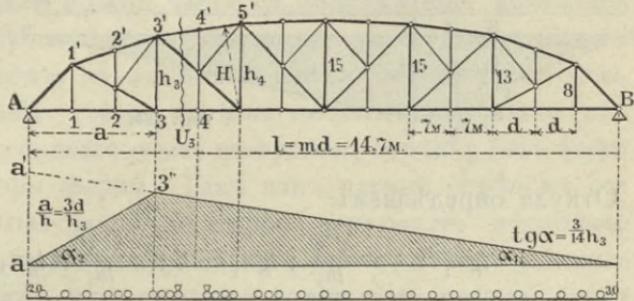


Фиг. 122.

$R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + \dots$ графически, или лучше аналитически, замѣняя $\operatorname{tg} \alpha_1, \operatorname{tg} \alpha_2, \dots$ пропорциональными имъ числами, которыя обыкновенно бывають цѣлыми. Для уясненія пользования таблицей при разысканіи невыгоднѣйшаго положенія поѣзда и вычисленія усилий въ фермахъ приведенъ ниже примѣръ.

Примѣръ. Пусть дана сложная ферма пролетомъ $l = md = 14 \cdot 7 = 98$ м., состоящая изъ 14 равныхъ панелей по 7 м.

Такъ какъ нижній поясъ состоитъ изъ простыхъ прямыхъ элементовъ, то усилия въ немъ будутъ тѣ же, какъ и въ простой фермѣ со средними панелями по 14 м., очерченной сплошными линиями. Дѣйствительно,



Фиг. 123.

но, усилия въ 4-й или 5-й панеляхъ $U_4 = U_5$ опредѣляются изъ условія равновѣсія лѣвой части фермы относительно узла 3':

$$M - U_3 h_3 = 0, \text{ откуда } U_3 = M_3 : h_3 = M_3 : 13.$$

Опорныя ординаты прямыхъ инфлюентной линіи M_3 равны $3d$ и $11d$, а для усилия U_3 онѣ равны $3d : h_3$ и $11d : h_3$, при чемъ тангенсы ихъ угловъ наклоненія

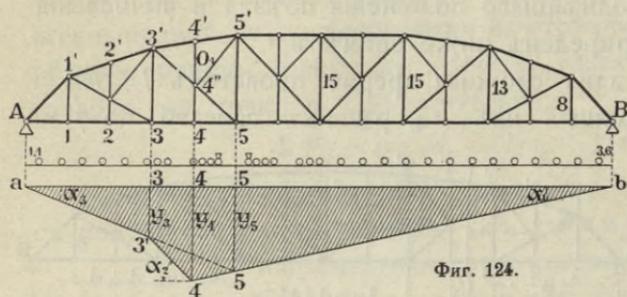
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3d}{h_3 \cdot 14d} = \frac{3}{14h} = \frac{3}{14 \cdot 13} \text{ и } \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{11}{14h} = \frac{11}{14 \cdot 13}.$$

При невыгоднѣйшемъ расположеніи поѣзда, показанномъ на чертежѣ, усилие U_3 найдемъ, разсматривая сперва дѣйствіе правой половины поѣзда по прямой b_3'' , затѣмъ лѣвой части поѣзда по линіи a_3'' съ поправкой для трехъ колесъ лѣваго паровоза, перешедшихъ за узель 3, и потомъ взявъ сумму обѣихъ частей:

$$U_3 = U_4 = \left[(9274,25 + 237,5 \cdot 3) \frac{3}{14 \cdot 13} + (1854,75 + 127,5 \cdot 2) \frac{11}{14 \cdot 13} - 116 \cdot \frac{1}{13} \right] \frac{1}{2} = 141,54 \text{ тн.}$$

Инфлюентная линія усилия $O_4 = O_5$ верхнюю часть $3'5'$ состоитъ изъ треугольника a_5b , соотвѣтствующаго простой

фермѣ, и треугольника 3' 4 5, соответствующаго поясу 3' 5' треугольной шпренгельной фермы 3' 4" 5', причемъ точки 5, 4 и *b* находятся на одной прямой (стран. 116).



Фиг. 124.

Откуда опредѣляемъ

$$tg\alpha_1 = 5 \cdot \frac{3'5'}{h_5}; \quad tg\alpha_2 = 23 \cdot \frac{3'5'}{h_5} \quad \text{и} \quad tg\alpha_3 = 9 \cdot \frac{3'5'}{h_5},$$

причемъ знаки $tg\alpha_2$ и $tg\alpha_3$ имѣютъ обратные знаку $tg\alpha_1$.

Разсматривая положеніе поѣзда, показанное на фигурѣ 124, и предполагая, что 4-ое колесо лѣваго паровоза находится непосредственно влѣво отъ узла 4, для производной отъ усилія пояса находимъ пропорціональное ей значеніе:

$$R_1 tg\alpha_1 - R_2 tg\alpha_2 - R_3 tg\alpha_3 = \\ 5 \cdot 262,5 - 23 \cdot 40 - 9 \cdot 62,5 = -170,$$

а въ случаѣ положенія этого колеса непосредственно вправо отъ узла 4 та же производная будетъ

$$5 \cdot 277,5 - 23 \cdot 25 - 9 \cdot 62,5 = +250.$$

Слѣдовательно, совпаденіе разсматриваемаго колеса съ узломъ 4 даетъ $max. O_4 (=max. O_5)$.

Съ помощью таблицы моментовъ грузовъ поѣзда вычисляемъ усиліе пояса, раздѣляя поѣздъ на двѣ части съ паровозомъ въ каждой:

$$O_4 = O_5 = tg\alpha_1 \sum P_1 x_1 + tg\alpha_3 \sum P_3 x_3 + \frac{y'}{d} \sum P_2 x_2 - (tg\alpha_1 + tg\alpha_2) \sum P' x' = \\ \left[\frac{1,51523}{63} (7583,25 + 217,5 \cdot 3,6) + \frac{1,51523}{35} (2861,75 + 147,5 \cdot 1,4) + \right. \\ \left. + \frac{0,41040}{7} (503,0 + 85 \cdot 0,9) - \left(\frac{1,51523}{63} + \frac{0,77445}{7} \right) 117 \right] \frac{1}{2} = 178,659 \text{ тн.}$$

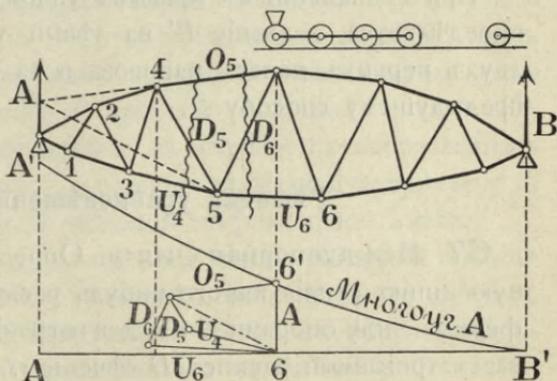
Помѣщая грузъ $P=1$ въ узлахъ 3, 4 и 5, найдемъ для усилія O_4 ординаты въ этихъ узлахъ

$$y_3 = \frac{3 \cdot 9}{14} \cdot \frac{3'5'}{h_5};$$

$$y_4 = \frac{5 \cdot 10}{14} \cdot \frac{3'5'}{h_5};$$

$$y_5 = \frac{5 \cdot 9}{14} \cdot \frac{3'5'}{h_5};$$

66. Графическій способъ для рѣшетки фермъ. Усилія отъ грузовъ поѣзда въ частяхъ рѣшетки простыхъ балочныхъ фермъ, соотвѣтственно разсмотрѣннымъ 1 и 2 случаямъ положенія точки r , могутъ быть опредѣлены графически безъ помощи инфлюентныхъ линій, которыя въ этихъ случаяхъ, какъ извѣстно, состоятъ изъ двухъ частей въ видѣ треугольниковъ противоположныхъ знаковъ. При такой формѣ инфлюентной линіи невыгоднѣйшее положеніе поѣзда для правой части ея опредѣляется условіемъ, чтобы отношеніе суммы грузовъ, стоящихъ влѣво отъ праваго узла къ суммѣ грузовъ, находящихся вправо отъ того же узла, было равно отношенію лѣваго отрѣзка инфлюентной линіи (отъ нулевой точки α до праваго узла) къ правому отрѣзку (отъ этого узла до правой опоры фермы). Такъ какъ первый отрѣзокъ составляетъ лишь часть панели, а второй заключаетъ нѣсколько такихъ панелей, то невыгоднѣйшее положеніе поѣзда обыкновенно соотвѣтствуетъ или основному положенію поѣзда, когда правое колесо паровоза совпадаетъ съ правымъ узломъ, или когда съ этимъ узломъ совпадаетъ второе колесо и въ рѣдкихъ случаяхъ — третье колесо (сравни стр. 34). Поэтому наибольшее усиліе въ какой-нибудь части фермы отъ поѣзда можно найти, подобно тому, какъ поступаютъ при опредѣленіи наибольшей поперечной силы Q отъ поѣзда, т. е. опредѣлить усиліе при основномъ положеніи поѣзда, затѣмъ при второмъ и т. д. и, сравнивъ найденныя усилія, взять изъ нихъ наибольшее. Пусть AB какая-нибудь ферма, $A'B'$ — многоугольникъ давленія опоры A , а 4 и 6 — нагружаемые узлы (нагрузка поверху), ближайшіе къ сѣченію ss ,

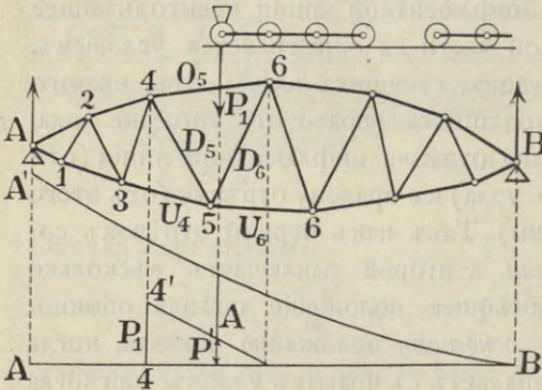


Фиг. 125.

проведенному черезъ разсматриваемый раскосъ 56 . При основномъ положеніи поѣзда въ лѣвой части фермы, отсѣченной разрѣзомъ ss , находится одна внѣшняя сила — реакція опоры A , которой величина изображается ординатой $6'$. Разложивъ ее по извѣ-

стному способу на три направленія O_5 , D_6 и U_6 , найдемъ величину усилія D_6 . (Для раскоса D_5 надо разложить ту же силу на три направленія O_5 , D_5 и U_4).

Когда съ правымъ узломъ совпадетъ не первое, а *второе* колесо паровоза, то въ лѣвой части фермы будетъ двѣ внѣшнія силы — реакціи опоры A и нагрузка P' на лѣвой узелъ 4 отъ



Фиг. 126.

перваго колеса паровоза, передаваемая по закону рычага. Въ этомъ случаѣ

надо сперва опредѣлить усиліе раскоса D_6 разложеніемъ первой силы A на три направленія O_5 , D_6 и U_6

по предыдущему способу, а затѣмъ разложить силу P' , приложенную въ узлѣ 4 на тѣ же три направленія, и послѣднее усиліе вычесть изъ перваго.

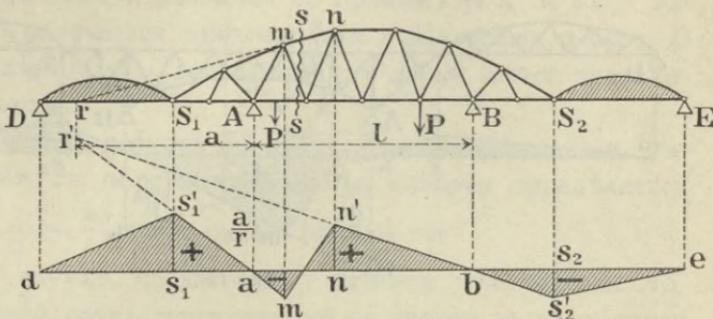
При совпаденіи съ правымъ узломъ *третьяю* колеса паровоза опредѣляется давленіе P' на лѣвый узелъ 4, передаваемое отъ двухъ первыхъ колесъ паровоза и за тѣмъ усиліе въ раскосѣ по предыдущему способу.

Рѣшетка уравновѣшенныхъ фермъ.

67. Междуопорная часть. Опредѣлимъ сперва инфлюентную линію усилія какого-нибудь раскоса, принадлежащаго части фермы между опорами A и B для нагрузки поверху. Проведя черезъ рассматриваемый раскосъ D сѣченіе ss , мы изъ условія равновѣсія лѣвой отсѣченной фермы S_1Am , когда грузъ $P=1$ приложенъ вправо отъ сѣченія ss , заключаемъ, что моментъ Dr усилія раскоса D равняется моменту Aa опорной реакціи A относительно той же точки r . Слѣдовательно, усиліе раскоса D измѣняется пропорціонально реакціи опоры A , т. е. по нѣкоторой прямой $n'bs'_2$ отъ узла n до шарнира S_2 , а далѣе по замыкающей прямой s'_2e , со-

отвѣтствующей передачѣ дѣйствія груза на ферму $S_1 S_2$ черезъ узлы S_2 и E . Но часть $n'b$ искомой прямой выражаетъ усиліе раскоса при дѣйствіи груза $P=1$ между опорой B и узломъ n , когда существованіе консолей не вліяетъ на реакціи опоръ A и B и усилія

въ фермѣ. Поэтому прямую $n'b$ мы можемъ построить по предыдущему способу, какъ инфлюентную линію усилія раскоса D про-



Фиг. 127.

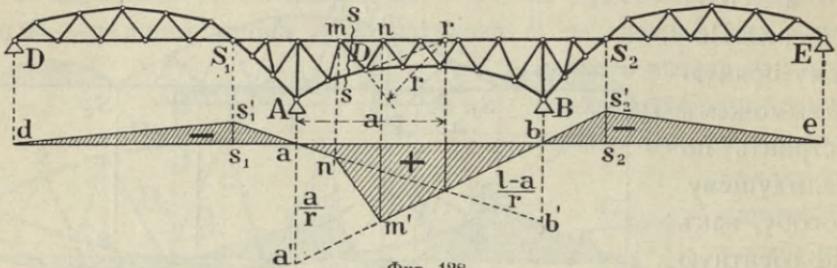
стой балочной фермы AB (безъ консолей) и, продолживъ ее до пересѣченія s_2 съ вертикалью, проведенной черезъ шарниръ S_2 , соединить прямой $s'_2 e$ конецъ крайней ординаты $s_2 s'_2$ прямой $n' b s'_2$ съ точкой e , соотвѣтствующей опорѣ E на оси абсциссъ.

Точно такъ же при положеніи груза $P=1$ влѣво отъ сѣченія ss , между узломъ m и шарниромъ S_1 , условіе равновѣсія правой части фермы относительно точки r показываетъ намъ, что усиліе раскоса D измѣняется пропорціонально моменту B . $(a+l)$ или опорной реакціи B , т. е. по нѣкоторой прямой $m' a s'_1$. Такъ какъ часть ея am' можетъ быть нами построена какъ инфлюентная линія усилія того же раскоса D простой балочной фермы AB , то продолживъ затѣмъ эту прямую до встрѣчи съ направлениемъ реакціи шарнира S_1 въ точкѣ s'_1 и проводя замыкающую прямую $s'_1 d$, мы получимъ и вторую часть искомой инфлюентной линіи.

Такимъ образомъ, инфлюентная линія усилія раскоса и вообще какой нибудь части рѣшетки уравновѣшенной фермы получится, если мы по одному изъ предыдущихъ способовъ построимъ инфлюентную линію $am'n'b$ усилія той же части въ простой балочной фермѣ AB (безъ консолей), крайнія стороны am' и $n'b$ продолжимъ до пересѣченія съ направлениемъ реакціи шарнировъ S_1 и S_2 въ точкахъ s'_1 и s'_2 и соединимъ послѣднія съ точками d и e прямыми ds'_1 и es'_2 .

Такое соотношеніе между инфлюентными линіями обѣихъ фермъ уравновѣшенной и простой, очевидно, остается справед-

ливомъ независимо отъ положенія точки r встрѣчи поясовъ относительно опоръ A и B фермы. Поэтому для всѣхъ трехъ остальныхъ случаевъ положенія точки r также могутъ быть построены инфлюентныя линіи усилій въ рѣшеткѣ уравновѣшен-

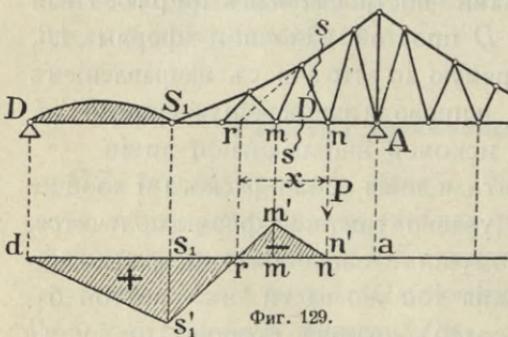


ныхъ фермъ. Напримѣръ, для третьяго случая инфлюентная линія усилія раскоса D имѣетъ видъ, представленный на фигурѣ 128.

68. Консоль. Здѣсь можетъ быть два случая: 1) когда точка r встрѣчи направлений поясовъ находится между сѣченіемъ ss , проведеннымъ черезъ данный раскосъ, и ближайшимъ шарниромъ S , фермы, и 2) когда эта точка оказывается внѣ ихъ.

Въ первомъ случаѣ всякій грузъ, приложенный къ правой части фермы относительно сѣченія ss , начиная съ узла n , не вызываетъ въ лѣвой части фермы никакой внѣшней силы, а потому изъ условія равновѣсія этой части фермы слѣдуетъ, что при

этомъ усиліе D въ раскосѣ будетъ равно нулю. Когда же грузъ $P=1$ будетъ приложенъ къ лѣвой части фермы S_1m на разстояніи x отъ точки r , которое будемъ считать положительнымъ вправо отъ нея и отрицательнымъ влево отъ r , то изъ условія равновѣсія лѣ-



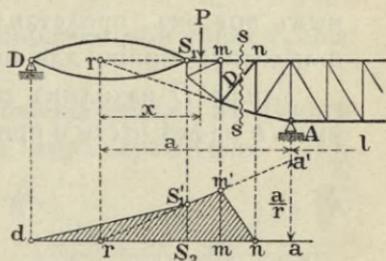
вой части фермы относительно точки r слѣдуетъ, что $D \cdot r + Px = 0$, или $D = -P \frac{x}{r} = -\frac{x}{r}$, т. е. усиліе D измѣняется по нѣкоторой прямой $m's'_1$, проходящей черезъ точку r (при $x=0$), и имѣетъ положительное значеніе при положеніи груза $P=1$

между S_1 и узлом m и отрицательное для части фермы отъ r до узла m ; при чемъ ея ордината aa' на опорѣ A (при $x = a$) равна $\frac{a}{r}$. Между узлами m и n , а равно между опорой D и шарниромъ S_1 , напряженіе измѣняется по прямымъ $m'n'$ и ds'_1 . Такимъ образомъ получается инфлюентная линия усилія раскоса D консоли въ видѣ $ds'_1 m'n$, состоящая изъ двухъ частей противоположныхъ знаковъ.

Для восходящаго раскоса mt получается подобная же инфлюентная линия съ обратными знаками, которая опредѣляется ординатой $aa' = -\frac{a}{r}$ продолженія прямой rm' .

Во второмъ случаѣ, когда точка r лежитъ внѣ консоли AS_1 (фиг. 130), всякій грузъ, приложенный къ правой части, начиная отъ узла n , не вызываетъ никакого усилія въ раскосѣ D , а всякій грузъ $P = 1$, помѣщенный между шарниромъ S_1 и узломъ m , вызываетъ въ данномъ раскосѣ растягивающее усиліе $D = P \frac{x}{r} = \frac{x}{r}$, выражаемое ординатами части $S_1 m$ прямой ra' , опредѣляемой ея ординатой $aa' = \frac{a}{r}$. Отъ опоры D до шарнира S_1 усиліе D должно измѣняться по прямой ds'_1 . Такимъ образомъ во второмъ случаѣ инфлюентная линия D состоитъ изъ одной части съ положительнымъ знакомъ для восходящаго и отрицательнымъ знакомъ для нисходящаго раскоса.

Изъ всего изложеннаго можно видѣть, что какъ для уравновѣшенныхъ балочныхъ фермъ, такъ и для простыхъ фермъ инфлюентная линия усилія раскоса будетъ вполне опредѣлена, если мы найдемъ значенія усилія D для двухъ положеній груза $P = 1$, въ нагружаемыхъ узлахъ m и n , ближайшихъ къ сѣченію ss .



Фиг. 130.

Рѣшетка арочныхъ фермъ.

69. При дѣйствиіи вертикальной нагрузки на арку съ 3-мя шарнирами, внѣшнія силы ея, какъ извѣстно, отличаются отъ внѣшнихъ силъ такой же простой балки только присутствіемъ

распора H арки. Поэтому инфлюэнтную линию усилия какой-нибудь части арки можно получить непосредственно из инфлюэнтной линии простой балочной фермы*), вводя въ нее поправку на вліяніе распора H . Такъ какъ $H = \frac{M_{os}}{f}$, то вліяніе распора оказывается пропорціональнымъ ординатамъ линии момента M_{os} простой балки, которая поэтому должна представлять собою также треугольникъ съ вершиной подъ среднимъ шарниромъ S арки. Сложеніе ея ординатъ съ ординатами инфлюэнтной линии усилия арки, рассматриваемой какъ простая балочная ферма, и дастъ инфлюэнтную линию усилия рассматриваемой части арки. Эта послѣдняя линия, очевидно, должна состоять изъ прямолинейныхъ частей, и при томъ въ числѣ не свыше 4.

Для примѣра возьмемъ симметричную арку съ верхнимъ прямымъ поясомъ, представленную на фиг. 131, и опредѣлимъ инфлюэнтную линию для нисходящаго раскоса D .

Усилие D находимъ по общему способу, разсѣкая арку сѣченіемъ tt на двѣ части и приравнивая моментъ усилия раскоса моменту

M всѣхъ внѣшнихъ силъ отсѣченной части арки относительно точки r пересѣченія направлений поясовъ, т. е. изъ уравненія.

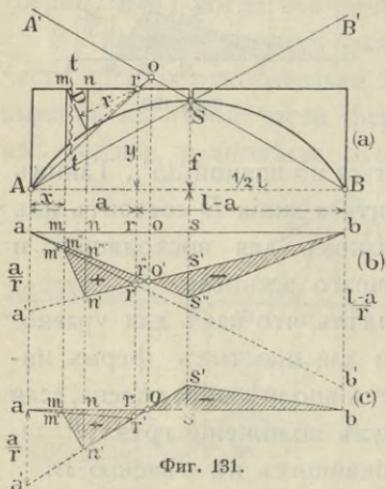
$$Dr = M = M_0 - Hy,$$

или

$$D = \frac{M_0}{r} - H \frac{y}{r},$$

гдѣ M_0 означаетъ моментъ вертикальныхъ внѣшнихъ силъ арки, равный моменту силъ простой балки относительно той же точки r , а y — ординату послѣдней относительно линии опорныхъ шарнировъ AB .

Отсюда видно, что для полученія инфлюэнтной линии усилия D въ аркѣ нужно вычесть изъ ординатъ раскоса D балочной фермы ординаты линии $H \frac{y}{r} = M_{os} \frac{y}{rf}$

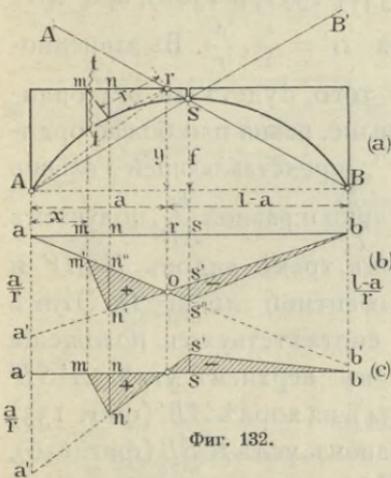


*) Въ предположеніи, разумѣется, отсутствія въ ней средняго шарнира S .

т. е. ординаты треугольника высотой $\frac{ab}{l} = \frac{l}{4}$, умноженные на отношение $\frac{y}{rf}$, — следовательно, нужно вычесть ординаты треугольника, которого высота $= \frac{ly}{4rf}$. Сообразно съ положеніемъ точки r въ правой или лѣвой половинѣ арки или внѣ послѣдней, слѣдуетъ разсмотрѣть отдѣльно каждый изъ трехъ случаевъ.

70. Точка r въ лѣвой половинѣ арки. Въ этомъ случаѣ (фиг. 131, 132 и 133) инфлюэнтная линия усиія раскоса D простой балки имѣетъ видъ $am'n'b$ (стр. 113), при чемъ ордината ея mm' подъ лѣвымъ узломъ m арки равна $\frac{l-a}{r} \cdot \frac{x}{l}$. Смотря по тому, будетъ ли эта ордината больше, равна или меньше ординаты $mm'' = \frac{ly}{4rf} \cdot \frac{x}{1/2l} = \frac{yx}{2fr}$ линіи $as''b$ вліянія распора арки, получается одинъ изъ трехъ видовъ I, II или III инфлюэнтной линіи усиія D арки (фиг. 131, 132 и 133).

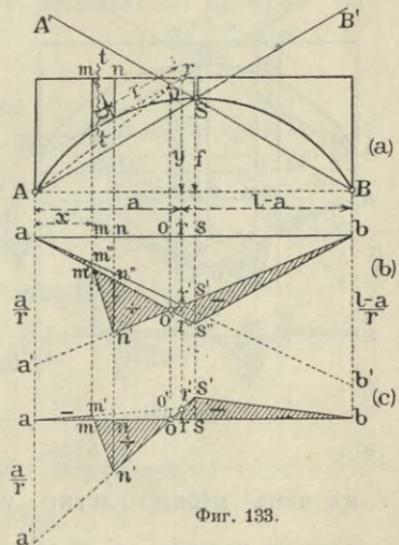
Первому типу I соотвѣтствуетъ положеніе точки r въ лѣвомъ углѣ ASA' , образуемомъ направленіями хоръ арки (фиг. 131),



Фиг. 132.

третьему типу III — положеніе точки r въ верхнемъ углѣ ихъ (фиг. 133) и второму типу II — положеніе ея на хордѣ BSA' (фиг. 132).

Дѣйствительно, точка r предположена въ лѣвой половинѣ арки, и можетъ находиться или въ углѣ ASA' , или въ углѣ $A'SB'$.

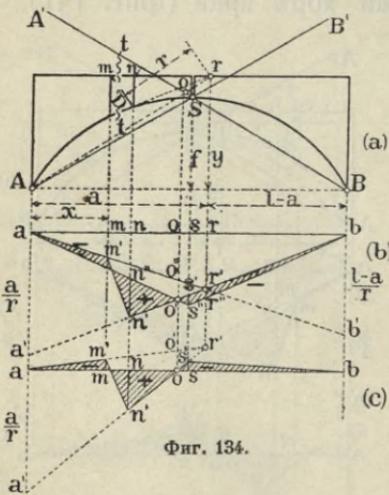


Фиг. 133.

При первомъ типѣ условіе $mm' > mm''$ или $\frac{(l-a)x}{lr} > \frac{yx}{2fr}$ можетъ быть представлено въ видѣ $\frac{y}{l-a} < \frac{f}{1/2l}$ и показываетъ намъ, что уголъ $rBA <$ угла SBA , или что точка r лежитъ внутри послѣдняго; слѣдовательно, она должна находиться въ углу ASA' . Во второмъ случаѣ, очевидно, точка r лежитъ на сторонѣ BSA' , а въ третьемъ случаѣ она лежитъ внѣ угла $A'SB'$, слѣдовательно, въ углу $A'SB'$.

Кромѣ того, во всѣхъ трехъ случаяхъ изъ условія, что точка r предположена въ лѣвой половинѣ арки ($a < \frac{1}{2}l$), слѣдуетъ, что уголъ $rAB >$ угла SAB или $\frac{y}{a} > \frac{f}{1/2l}$, откуда $\frac{a}{2r} < \frac{ly}{4fr}$, т. е. ордината ss' линіи D простой балки меньше ординаты ss'' для всѣхъ трехъ случаевъ, или что ордината $s''s'$ усилія D арки отрицательна въ типахъ I , II и III .

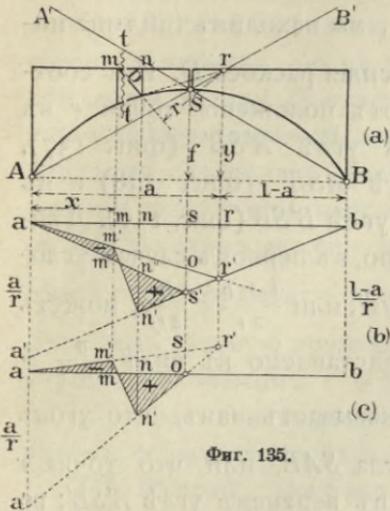
71. Точка r въ правой половинѣ арки. Въ этомъ случаѣ (фиг. 134, 135 и 136) инфлюэнтная линія усилія D простой балочной фермы имѣетъ видъ $am'n'b$ (фиг. 134b, 135b, и 136b), при чемъ ордината $ss' = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{r}$. Въ зависимости отъ того, будетъ ли эта ордината меньше, равна или болѣе ординаты ss'' , представляющей вліяніе распора арки и равной $\frac{ly}{4fr}$, получаемъ одинъ изъ трехъ видовъ III , IV и V инфлюэнтной линіи D . Этимъ типамъ соответствуютъ положенія точки r въ верхнемъ углу $A'SB'$ (фиг. 134), на хордѣ AB' (фиг. 135) и въ правомъ углу $B'SB$ (фиг. 136),



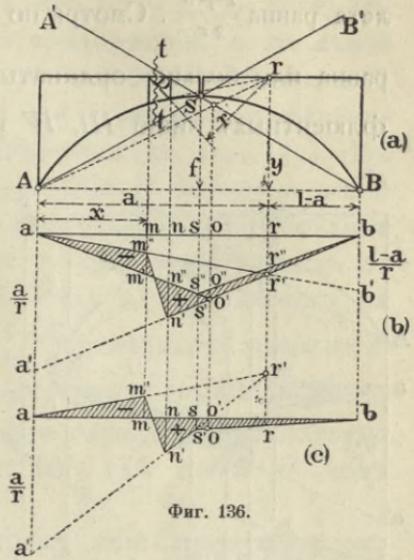
Фиг. 134.

въ чемъ можно легко убѣдиться. Дѣйствительно, въ первомъ случаѣ условіе $ss' < ss''$ или $\frac{a}{2r} < \frac{ly}{4fr}$, представленное въ видѣ $\frac{y}{a} > \frac{f}{1/2l}$, показываетъ намъ, что уголъ $rAB >$ угла SAB , т. е., что точка r заключается внѣ послѣдняго угла, слѣдовательно, внутри угла $A'SB'$. Во второмъ случаѣ точка r лежитъ на сторонѣ AB'

и въ третьемъ случаѣ—внутри угла $B'AB$, слѣдовательно въ углѣ хордъ $B'SB$.

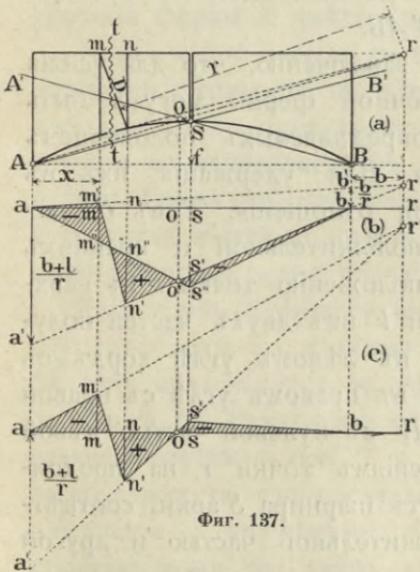


Фиг. 135.

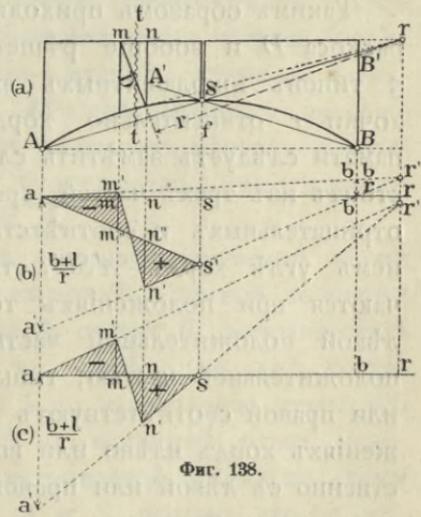


Фиг. 136.

72. Точка r внѣ пролета арки. Въ данномъ случаѣ (фиг. 137, 138 и 139) инфлюентная линия $am'n'b$ раскоса D простой ба-



Фиг. 137.



Фиг. 138.

лочной фермы AB состоитъ изъ двухъ частей (фиг. 137b, 138b и 139b) противоположнаго знака—лѣвой отрицательной и правой

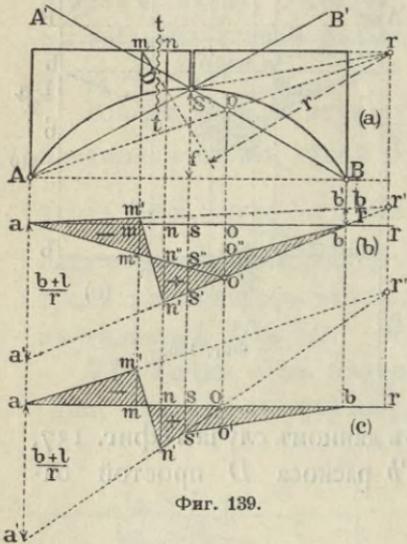
положительной части, при чем ордината ss' посрединѣ пролета равна $\frac{l+b}{2r}$. Смотри по тому, будетъ ли эта ордината меньше,

равна или больше ординаты $ss'' = \frac{ly}{4fr}$, мы находимъ три типа инфлюентныхъ линий III, IV и V для усиля раскоса D. Имъ соот-

вѣтствуютъ положенія точки r въ верхнемъ углѣ $A'SB'$ (фиг. 137), на хордѣ ASB' (фиг. 138) и въ правомъ углѣ $B'SB$ (фиг. 139). Дѣй-

ствительно, въ первомъ случаѣ условіе $ss' < ss''$, или $\frac{l+b}{2r} < \frac{ly}{4fr}$, можетъ

быть представлено въ видѣ $\frac{y}{l+b} > \frac{f}{1/2l}$ и показываетъ намъ, что уголъ $rAB >$ угла SAB , или что точка r лежитъ въ верхнемъ углѣ $A'SB'$; во второмъ случаѣ эта точка находится на хордѣ ASB' и въ третьемъ случаѣ она должна быть въ правомъ углѣ $B'AB$.



Фиг. 139.

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что для усиля раскоса D и вообще рѣшетки арочной фермы могутъ быть 5 типовъ инфлюентныхъ линий, опредѣляемыхъ положеніемъ точки r относительно хордъ арки. Для удержанія ихъ въ памяти слѣдуетъ замѣтить слѣдующія отношенія. Типъ III состоитъ изъ трехъ частей, средней положительной и крайнихъ отрицательныхъ и соответствуетъ положенію точки r въ верхнемъ углѣ хордѣ $A'SB'$; типы I и V изъ двухъ частей получаются при положеніяхъ точки r въ лѣвомъ углѣ хордѣ съ лѣвой положительной частью или въ правомъ углѣ съ правой положительной частью; типы II и IV съ нулевой частью лѣвой или правой соотвѣтствуютъ положеніямъ точки r на продолженіяхъ хордѣ влѣво или вправо отъ шарнира S арки, соотвѣтственно съ лѣвой или правой положительной частью и другой отрицательной.

Нулевая точка о инфлюентной линии соотвѣтствуетъ значенію момента $M=0$ въ точкѣ r арки и опредѣляется точно

также пересѣченіемъ прямой Ar (соединяющей шарниръ A съ точкой r) съ продолженіемъ хорды BS (стр. 126); если эта точка пересѣченія o окажется не на продолженіи, а на самой хордѣ SB , то дѣйствительной нулевой точки o инфлюентной линіи не имѣется, но ея примѣненіе для построенія инфлюентной линіи M или D остается безъ измѣненія (см. стр. 135). Изъ разсмотрѣнія чертежей инфлюентныхъ линій D непосредственно выводимъ слѣдующій общій способъ ихъ построенія: опредѣливъ точки r пересѣченія поясовъ и точку o пересѣченія прямыхъ Ar съ BS , находимъ на оси абсциссъ ab точку o , откладываяемъ на лѣвой опорѣ ординату $aa' = \frac{a}{r}$ или $\frac{b+l}{r}$ 1) и, соединивъ точки o и a' получаемъ главную прямую aos , которой точки s' , r' и n' подѣ шарниромъ S , полюсомъ r и узломъ n арки опредѣляютъ остальные части инфлюентной линіи $s'b$, $m'n'$ и am' , гдѣ точка m' подѣ узломъ m находится на прямой ar' .

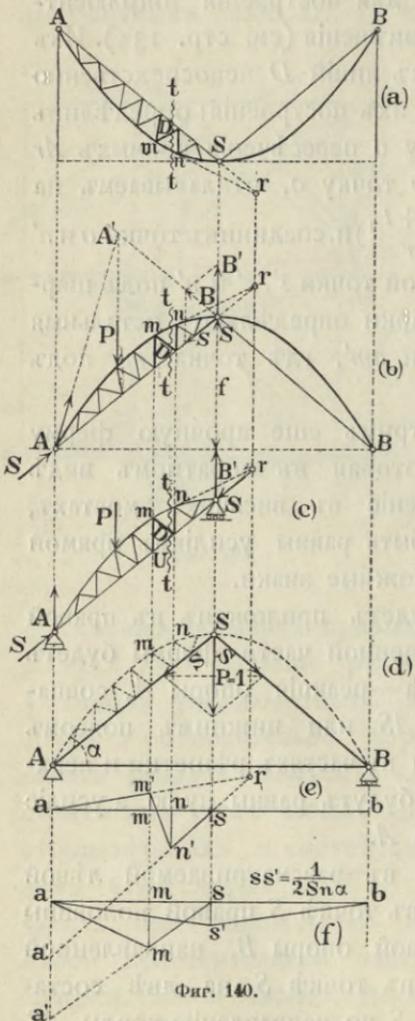
73. Второй примѣръ. Разсмотримъ еще арочную ферму вида, показаннаго на фиг. 140b, которая въ обратномъ видѣ (фиг. 140a) находитъ себѣ примѣненіе въ висячихъ мостахъ, при чемъ усилія въ нихъ должны быть равны усиліямъ прямой арочной фермы и имѣть противоположные знаки.

Когда какой-нибудь грузъ P будетъ приложенъ въ правой половинѣ фермы, то въ лѣвой отсѣченной части фермы будетъ имѣться только одна внѣшняя сила—реакція опоры A , совпадающая по направленію съ хордой AS или нижнимъ поясомъ фермы. Очевидно, при этомъ усилія въ частяхъ рѣшетки и верхняго пояса лѣвой половины фермы будутъ равны нулю, а усиліе нижняго пояса равно реакціи опоры A .

Если грузъ P будетъ помѣщенъ въ разсматриваемой лѣвой половинѣ арки, то дѣйствіе на нее въ точкѣ S правой половины SB арки представится реакціей правой опоры B , направленной по хордѣ BS . Разложивъ эту силу въ точкѣ S на двѣ составляющія вертикальную B' и другую S по направленію хорды AS , легко замѣтитъ, что составляющая B' по величинѣ равна реакціи опоры S полуфермы AS , разсматриваемой отдѣльно, какъ простая балка на двухъ опорахъ A и S , потому что ея мо-

1) Вообще гориз. разстоянію точки r до лѣвой опоры, раздѣленному на r .

ментъ B' . $\frac{1}{2} l$ относительно опоры A равенъ моменту груза P . Поэтому лѣвую половину арки AS мы можемъ разсчитывать какъ простую балочную ферму, подверженную дѣйствіямъ груза P и двухъ равныхъ силъ S , взаимно противоположныхъ и направленныхъ по прямой AS .



Этотъ выводъ впрочемъ непосредственно вытекаетъ изъ разсмотрѣнія арки какъ простой треугольной фермы ASB съ двумя сложными элементами AS и SB , въ которой неподвижные шарниры A и B арки замѣнены подвижными съ дополнительной элементомъ (затяжкой) AB . Въ такой фермѣ сложный элементъ AS работаетъ и какъ простая балка, передающая мѣстную нагрузку P на узлы A и S треугольной фермы ASB , и какъ простой прямой элементъ треугольной фермы ASB отъ узловой нагрузки, усиліе котораго S совпадаетъ съ направлениемъ AS самого элемента. Такъ какъ двѣ равныя и противоположныя силы S сжимаютъ нижній поясъ фермы AS и не вызываютъ никакихъ напряженій въ частяхъ другого пояса и ея рѣшѣткѣ, то усилія послѣднихъ для арки должны быть тѣ же, какъ и для простой балочной фермы AS , покоющейся на двухъ опорахъ A и S .

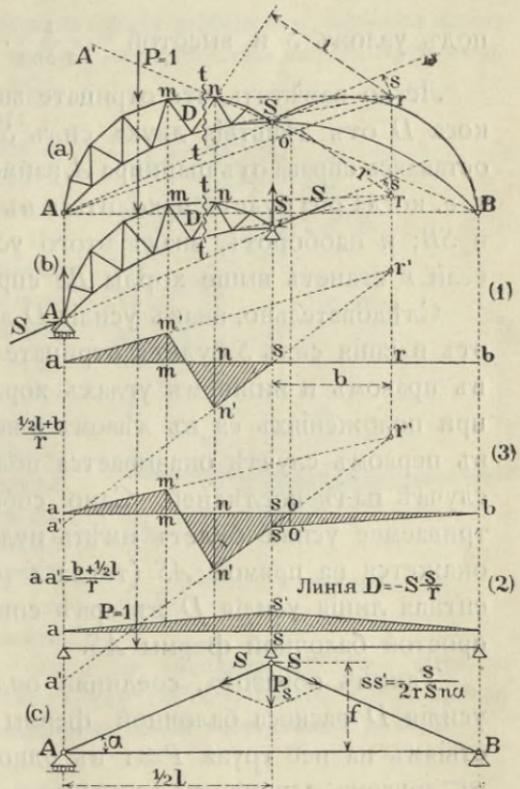
Такимъ образомъ инфлюентныя линіи усилій въ рѣшѣткѣ и верхнемъ поясѣ части AS разсматриваемой арочной фермы могутъ быть построены какъ для простой балочной фермы AS (фиг. 140с и е), а для нижняго пояса къ инфлюентной линіи $am's$ (фиг. 140f) пояса простой балки AS нужно присоединить инфлюентную линію усилія прямого элемента AS треугольной фермы

ASB , ординаты которой должны быть пропорциональны нагрузкѣ узла S и, слѣдовательно, представляются ординатами нѣкотораго треугольника $as'b$ съ вершиной s' подъ узломъ S . Дѣйствительно, положеніямъ груза $P=1$ въ двухъ остальныхъ узлахъ A и B треугольной фермы соотвѣтствуютъ усилія въ фермѣ равныя нулю, между узлами же ординаты инфлюентной линіи должны измѣняться прямолинейно. Положенію груза $P=1$ въ узлѣ S соотвѣтствуетъ усиліе равное составляющей силы P , разложенной на направленія

$$SA \text{ и } SB, \text{ т. е. } = \frac{1}{2} R : \text{Sna} = \frac{1}{2} \text{Sna} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}l^2 + f^2}}{2f}.$$

74. Общій случай. Примѣненный нами способъ разсмотрѣнія арки, какъ треугольной балочной фермы ASB съ двумя сложными элементами AS и SB

и дополнительнымъ элементомъ AB , замѣняющимъ неподвижность опорныхъ шарнировъ арки, даетъ намъ возможность изслѣдовать такимъ же образомъ общій случай арочной фермы. Пусть ASB (фиг. 141) представляетъ какую нибудь арочную ферму съ 3-мя шарнирами, для которой требуется опредѣлить инфлюентную линію усилія раскоса D . Ея ординаты получатся сложениемъ ординатъ двухъ инфлюентныхъ линій раскоса D балочной фермы AS , покоящейся на двухъ опорахъ A и S и подверженной дѣйствіямъ: 1) подвижного груза $P=1$, и 2) двухъ равныхъ противоположныхъ силъ S , приложенныхъ въ точкахъ A и S по прямой AS и равныхъ усилію прямого элемента AS треугольной балочной фермы ASB . Вели-



Фиг. 141.

чину этого усилия S найдемъ по общему способу, разсѣкая ферму AS разрѣзомъ tt и приравнявъ нулю моментъ относительно точки r силъ S и D , приложенныхъ къ части Am фермы, $Dr + Ss = 0$ или $D = -S \frac{s}{r}$. Отсюда видно, что усилие раскоса D измѣняется пропорціонально величинѣ силы S , которая, какъ составляющая нагрузки P_s узла S и равная $\frac{P_s}{2 Sna}$, будетъ въ свою очередь пропорціональна величинѣ давленія P_s , передаваемого на узелъ S отъ груза $P=1$ и представляемого ординатами треугольника съ вершиной подъ узломъ S и высотой равной 1. Слѣдовательно, и усилие раскоса D отъ дѣйствія двухъ силъ S , пропорціональныхъ P_s , должно выражаться также ординатами треугольника съ вершиною подъ узломъ S и высотой $-\frac{1}{2 Sna} \cdot \frac{s}{r} = -\frac{s}{2r} \sqrt{1 + \frac{l^2}{4f^2}}$.

Легко замѣтить, что отрицательный знакъ усилия данного раскоса D отъ дѣйствія двухъ силъ S не измѣняется, если точка r , оставаясь справа отъ шарнира A , займетъ положеніе ниже хорды BS , т. е. когда она будетъ находиться въ нижнемъ углу хорды арки AS и SB ; и наоборотъ, знакъ этого усилия будетъ положительнымъ, если r станетъ выше хорды BS справа или слѣва шарнира A .

Слѣдовательно, знакъ усилия D данного (восходящаго) раскоса отъ вліянія силъ S будетъ отрицательнымъ для положеній точки r въ правомъ и нижнемъ углахъ хорды арки, и положительнымъ при положеніяхъ ея въ лѣвомъ и верхнемъ углахъ, когда точка r въ первомъ случаѣ оказывается подъ хордой AS и во второмъ случаѣ надъ послѣдней. Само собою разумѣется, что рассматриваемое усилие будетъ имѣть нулевые значенія, если точка r окажется на прямой AS (тогда $s=0$); въ этомъ случаѣ инфлюэнтная линія усилия D въ аркѣ совпадаетъ съ линіей усилия D простой балочной фермы AS .

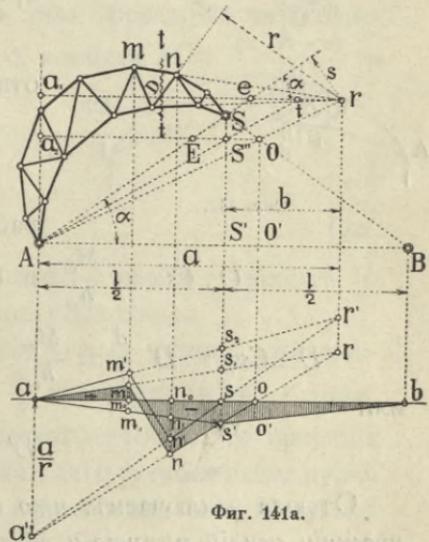
Такимъ образомъ, соединяя ординаты инфлюэнтныхъ линій усилия D раскоса балочной фермы AS , соответствующихъ дѣйствіямъ на нее груза $P=1$ въ одномъ случаѣ и двухъ силъ S въ другомъ случаѣ, мы всегда можемъ найти инфлюэнтную линію усилия D для арки; въ общемъ случаѣ она будетъ состоять изъ отрѣзковъ 4 прямыхъ, такъ какъ сумма ординатъ двухъ прямыхъ $y_1 = A_1x + B_1$ и $y_2 = A_2x + B_2$ представляетъ также ординату пря-

мой $y_1 = (A_1 + A_2)x + B_1 + B_2$. Построение инфлюентной линии D въ общемъ случаѣ можетъ быть исполнено или съ помощью нулевой точки o , ¹⁾ какъ указано было для арочной фермы съ верхнимъ прямымъ поясомъ (стр. 131), или по ординатамъ вершинъ m' , n' и s' инфлюентной линии D , соответствующимъ положеніямъ груза $P=1$ въ узлахъ m , n и S , если точка r получается внѣ предѣловъ чертежа.

Въ случаѣ *уравновѣшенныхъ арокъ* инфлюентныя линии училія въ рѣшеткѣ фермъ получаютъ продолженіемъ крайнихъ прямыхъ частей инфлюентной линии простой арки до концовъ консолей и соединеніемъ ихъ крайнихъ точекъ съ крайними опорами подвѣсныхъ частей консольной фермы.

¹⁾ Въ случаѣ, когда *нулевая* точка O будетъ мнимая, т. е., окажется между точками B и S (фиг. 143, 3), ея значеніе для построения инфлюентной линии сохраняется безъ измѣненія (стр. 131).

Въ самомъ дѣлѣ, пусть (фиг. 141 а) $am'n's$ — инфлюентная линия раскоса D простой балки AS отъ груза $P=1$ и $as'b$ — линия ея раскоса D отъ вліянія усилій S , гдѣ $ss' = s/2r \text{Sna}$. Сумму обѣихъ линий $amns'b$ получимъ, проведя прямую $a's'$ до ея пересѣченія съ прямыми ab , nm' и rr' въ точкахъ o , n и r и прямую ar , опредѣляющую точку m въ пересѣченіи съ прямой $nm'm_1$, такъ такъ $s_1s_2 = ss'$, $mm' = m_0m_1$ и $nn' = n_0n_1$. Нужно теперь доказать, что точка o лежитъ на одной вертикальной прямой Oo съ точкой O пересѣченія Ar съ BS . Для этого проведемъ параллельно AB прямую rea_1 , пересѣкающую медиану AS' въ точкѣ t , такъ что $rt = te = 1/2re = s/2sna$. Тогда изъ пропорциональности отрѣзковъ между прямыми Aa_1 , At и Ar находимъ $OS':Oa_2 = rt:ra_1 = s/2sna : a = s/2r \text{Sna} : a/r = ss' : aa' = os:oa$, или $OS':Oa_2 = os:oa$. Слѣд. прямая $Oo \parallel Ss$ и Aa' , или точки O и o лежатъ на одной вертикальной прямой.



Фиг. 141а.

ХІІ. Частные случаи фермъ.

1. Параболическія фермы.

75. Усиліе въ раскосѣ D какой-нибудь фермы AB (ф. 142 a, b, c) можно найти и изъ другого условія равновѣсія лѣвой отсѣченной части фермы, — что сумма проекцій всѣхъ ея силъ на горизонтальную ось должна быть равна нулю. Въшнія силы разсматриваемой части фермы, какъ вертикальныя, въ это уравненіе не войдутъ, и потому, обозначая знакомъ $+$ растягивающее усиліе D раскоса, будемъ имѣть:

$$U \cdot Cs\beta + D \cdot Cs\varphi - O \cdot Csa = 0.$$

Но при показанномъ на чертежѣ нисходящемъ раскосѣ горизонтальныя проекціи усилій поясовъ равны:

$$O \cdot Csa = \frac{M_n}{h_n} \text{ и } U \cdot Cs\beta = \frac{M_m}{h_m},$$

откуда

$$D \cdot Cs\varphi = \frac{M_n}{h_n} - \frac{M_m}{h_m}, \dots (38)$$

При восходящемъ же (обратномъ) раскосѣ

$$O \cdot Csa = \frac{M_m}{h_m} \text{ и } U \cdot Cs\beta = \frac{M_n}{h_n}, \text{ и потому}$$

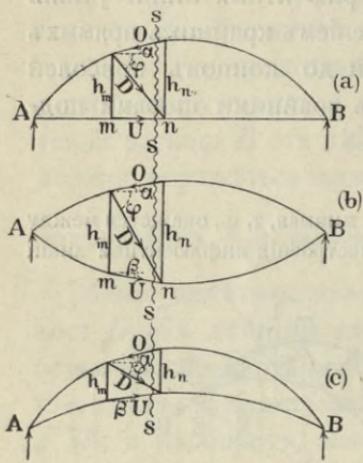
$$D' \cdot Cs\varphi' = D' \frac{d}{s'} = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_n}{h_n} = -D \cdot Cs\varphi = -D \frac{d}{s},$$

или

$$D' = -D \frac{s'}{s} \dots \dots \dots (39)$$

Отсюда заключаемъ, что при любой нагрузкѣ горизонтальныя проекціи усилій прямого и обратнаго раскосовъ какой-нибудь фермы (со стойками) равны и противоположны по знаку и выражаются разностью отношеній $\frac{M}{h}$ для нижняго и верхняго узловъ фермы, къ которымъ примыкаетъ разсматриваемый раскосъ, или что самыя усилія пропорціональны длинѣ раскосовъ s и s' и противоположны знаку.

76. Въ параболической фермѣ одинъ или оба пояса представляютъ собой многоугольники, вписанные въ параболическій



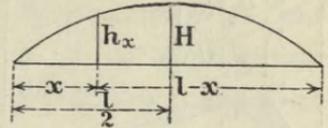
Фиг. 142.

сегментъ, и потому высота h стоекъ, какъ ординатъ параболы, выражается уравненіемъ

$$h_x = \frac{4H}{l^2} \cdot x(l-x),$$

гдѣ H означаетъ наибольшую ординату параболическаго сегмента для $x = \frac{l}{2}$. Слѣдовательно, въ параболическихъ фермахъ со стойками высоты послѣднихъ измѣняются пропорціонально произведенію разстояній ихъ x и $l-x$ до опоръ A и B фермы.

Одно изъ свойствъ параболической фермы со стойками заключается въ томъ, что при сплошной равномерной нагрузкѣ (прямой или узловой) всей фермы горизонтальныя проекціи встѣхъ усилий поясовъ равны между собою, а усилия раскосовъ (прямыхъ или обратныхъ) равны нулю.



Фиг. 143.

Дѣйствительно для какого-нибудь узла фермы на разстояніи x отъ опоры A величина изгибающаго момента $M = \frac{px(l-x)}{2}$ и соотвѣтствующая высота стойки

$$h = \frac{4H}{l^2} x(l-x),$$

поэтому отношеніе

$$\frac{M}{h} = \frac{pl^2}{8H} \dots \dots \dots (40)$$

выражаетъ, что горизонтальная проекція усилий верхняго и нижняго поясовъ фермы есть величина постоянная.

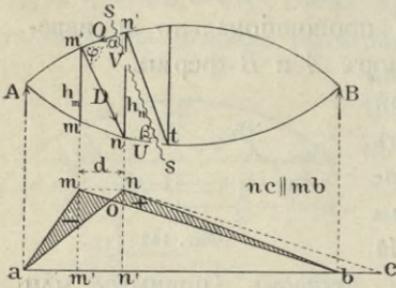
Такъ какъ горизонтальная проекція усилия какого-либо раскоса выражается разностью значеній $\frac{M}{h}$ для двухъ узловъ фермы, совпадающихъ съ концами разсматриваемаго раскоса, то проекція его, а слѣдовательно и величина усилия каждаго раскоса равна нулю.

Извѣстно, что при равномерной нагрузкѣ для *max. D* нужно нагрузить одну часть фермы, а для *min. D* остальную часть ея, поэтому *max. D = - min. D*, такъ какъ при нагрузкѣ обѣихъ частей фермы усилие раскоса равно

$$\text{max } D + \text{min } D = 0.$$

Между прочимъ мы можемъ здѣсь опредѣлить и величину этого *max. D*. Выше было найдено, что $D \cdot \text{Csc} \varphi = \frac{M_n}{h_n} - \frac{M_m}{h_m}$; слѣдовательно, ординаты инфлюентной линіи $D \cdot \text{Csc} \varphi$ выражаются разностью ординатъ моментовъ M_n и M_m , раздѣленныхъ соот-

въѣтственно на h_n и h_m . Но инфлюентная линия M_n представляетъ собой, какъ извѣстно, треугольникъ съ вершиной подъ узломъ n и высотой $= \frac{x(l-x)}{l}$, гдѣ x и $l-x$ — разстоянія узла n до опоръ A и B (см. стр. 29 фиг. 144); поэтому инфлюентная линия $M_n : h_n$ представляетъ также треугольникъ anb съ



Фиг. 144.

высотой $nn' = \frac{x(l-x)}{l} = \frac{4H}{l^2} x(l-x) = \frac{l}{4H}$; точно также и линия $M_m : h_m$ представляется также треугольникомъ amb съ высотой $mm' = \frac{l}{4H}$.

Слѣдовательно, инфлюентная линия $D \cdot Cs\varphi$, какъ разность Δ -овъ anb и amb , представится въ видѣ двухъ заштрихованныхъ треугольниковъ

bno и ato , причеъ $\max D \cdot Cs\varphi = k \cdot \omega = k \cdot \Delta bon = k \cdot \Delta boc$, если $nc \parallel mb$ и $bc = mn = d$. Такъ какъ треугольникъ onb имѣетъ общую вершину b съ треугольникомъ anb , имѣющимъ площадь $\frac{1}{2} l \cdot nn' = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4H} = \frac{l^2}{8H}$, и отношеніе площадей равно отношенію основанийъ $no : na = cb : ca = d : l+d$, то искомая площадь

$$\Delta onb = \frac{l^2}{8H} \cdot \frac{d}{l+d}$$

и потому

$$\max D \cdot Cs\varphi = \frac{kl^2}{8H} \cdot \frac{d}{l+d} \dots \dots \dots (41).$$

Если въ параболической фермѣ длина d всѣхъ панелей одинакова, то горизонтальная проекція усилія $\max D$ раскосовъ величина постоянная и равна горизонтальной проекціи наибольшаго усилія поясовъ $\frac{M}{h} = k \cdot \Delta amb = k \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4H} = \frac{kl^2}{8H}$, умноженной на отношеніе $\frac{d}{l+d} = \frac{1}{m+1}$, гдѣ m обозначаетъ число панелей данной фермы.

Перечисленные свойства параболической фермы дѣлаютъ особенно простымъ расчетъ усилій ея отъ дѣйствія сплошной нагрузки какъ постоянной, такъ и подвижной, напр. въ мостахъ подъ шоссеиную дорогу. Дѣйствительно, для поясовъ наибольшія усилія находимъ, умножая постоянную для всѣхъ панелей величину $(p+k) \frac{l^2}{8H}$ на отношеніе $\frac{1}{Cs\alpha} = \frac{o}{d}$ или $\frac{1}{Cs\beta} = \frac{u}{d}$ длины разсматриваемой части пояса къ длинѣ ея горизонтальной проекціи.

Въ раскосахъ усилія отъ постоянной нагрузки равны нулю, а отъ подвижной *max. D* равно постоянной величинѣ $\frac{kF^2}{8H} \cdot \frac{d}{l+d}$, умноженной на отношеніе $\frac{l}{Cs\varphi} = \frac{s}{d}$ длины *s* раскоса къ длинѣ ея горизонтальной проекціи.

77. Усилія въ поясахъ. Такъ какъ горизонтальная проекція *O. Csa* усилія части *m' n'* (ф. 144) верхняго пояса или проекція *U. Csβ* части *mn* нижняго пояса равны между собою и равны $\frac{M_n}{h_n} \cdot 1$, и инфлюентная линія $\frac{M_n}{h_n}$ представляетъ треугольникъ съ вершиною подъ узломъ *n* и высотой $nn' = \frac{l}{4H}$, то инфлюентныя линіи усилій *O* или *U* также представляютъ треугольники съ высотой.

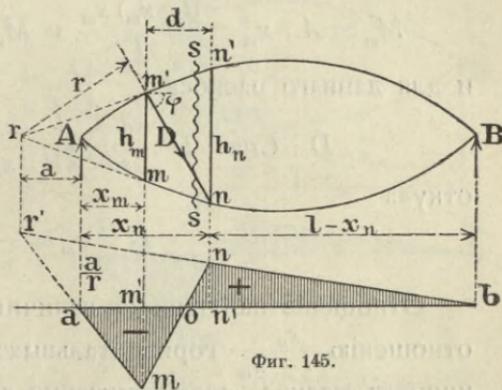
$$\frac{l}{4HCs\alpha} = \frac{l}{4H} \cdot \frac{o}{d}$$

или

$$\frac{l}{4HCs\beta} = \frac{l}{4H} \cdot \frac{u}{d} \dots \dots \dots (42)$$

78. Усилія въ раскосахъ. Изъ предыдущаго (стр. 108) мы знаемъ, что инфлюентная линія усилія раскоса какой-нибудь фермы состоитъ изъ отрѣзковъ трехъ прямыхъ и вполнѣ опредѣляется двумя ординатами, соответствующими узламъ, съ которыми совпадаютъ концы даннаго раскоса. При нисходящемъ раскосѣ и выпуклой формѣ поясовъ ординаты правой части инфлюентной линіи *onb* положительны, а лѣвой *amo* отрицательны.

Для раскосовъ *параболической* фермы остается только найти величину наибольшихъ ординатъ *nn'* и *mm'*, предполагая сперва, что грузъ *P = 1* приложенъ въ правомъ узлѣ *n* и затѣмъ въ лѣвомъ узлѣ *m*; найденныя въ обоихъ случаяхъ



усилія раскоса *D* опредѣляютъ величины ординатъ *nn'* и *mm'*.

¹⁾ Равенство горизонтальныхъ проекцій усилій верхняго и нижняго поясовъ смежныхъ съ данной стойкой какой-нибудь фермы непосредственно вытекаетъ изъ условія равновѣсія силъ лѣвой части фермы, отсѣченной сѣченіемъ *ss* (фиг. 144), что проекціи ихъ на горизонтальную ось *U. Csβ — O. Csa = 0*, такъ какъ проекціи внѣшнихъ силъ и усилія стойки *V*, какъ вертикальныхъ, равны нулю.

Для вычисления усилия D раскоса имѣемъ общую формулу

$$D \cdot Cs\varphi = \frac{M_n}{h_n} - \frac{M_m}{h_m}.$$

При положеніи груза $P = 1$ въ узлѣ n реакція опоры $A = 1 \cdot \frac{l - x_n}{l}$ и значенія

$$M_n = A \cdot x_n = \frac{(l - x_n) x_n}{l} \text{ и } M_m = A \cdot x_m = \frac{(l - x_n) x_m}{l},$$

гдѣ x_n и x_m означаютъ горизонтальныя разстоянія узловъ n и m отъ опоры A . Такъ какъ $h_n = \frac{4H}{l^2} x_n (l - x_n)$ и $h_m = \frac{4H}{l^2} x_m \cdot (l - x_m)$, то

$$D \cdot Cs\varphi = D \frac{d}{s} = \frac{l}{4H} - \frac{l}{4H} \cdot \frac{l - x_n}{l - x_m} = \frac{l}{4H} \cdot \frac{d}{l - x_m}$$

или, по сокращеніи на d

$$D = y_n = \frac{l}{4H} \cdot \frac{s}{l - x_m} \dots \dots \dots (43)$$

При положеніи груза $P = 1$ въ лѣвомъ узлѣ раскосъ будетъ сжатъ; при этомъ $A = 1 \cdot \frac{l - x_m}{l}$,

$$M_m = A \cdot x_m = \frac{(l - x_m) x_m}{l} \text{ и } M_n = B (l - x_n) = \frac{x_m (l - x_n)}{l},$$

и для даннаго раскоса

$$D \cdot Cs\varphi = D \cdot \frac{d}{s} = \frac{l}{4H} \cdot \frac{x_m}{x_n} - \frac{l}{4H} = -\frac{l}{4H} \cdot \frac{d}{x_n};$$

откуда

$$D = y_m = -\frac{l}{4H} \cdot \frac{s}{x_n} \dots \dots \dots (44)$$

Отношеніе найденныхъ величинъ ординатъ nn' и mm' равно отношенію $\frac{x_n}{l - x_m}$ горизонтальныхъ разстояній нижняго и верхняго концовъ раскоса соотвѣтственно до лѣвой и правой опоръ A и B фермы. Но изъ подобныхъ треугольниковъ $mm'o$ и $nn'o$ имѣемъ также

$$\frac{nn'}{mm'} = \frac{on'}{om'}; \text{ слѣд. } \frac{x_n}{l - x_m} = \frac{on'}{d - on'};$$

откуда

$$\frac{on'}{d} = \frac{x_n}{l + x_n - x_m} = \frac{x_n}{l + d} \text{ или } on' = \frac{x_n d}{l + d} \dots \dots (45)$$

и

$$om = d - on' = \frac{(l - x_m) d}{l + d} \dots \dots \dots (46)$$

Площадь bno положительной части инфлюентной линии равна площади $\Delta onb = \frac{1}{2} ob \cdot y_n = \frac{1}{2} (on' + l - x_n) y_n = \frac{l(l - x_m)}{l + d} \cdot y_n =$
 $= \frac{l^2}{8H} \cdot \frac{s}{l + d} = \omega_n \dots \dots \dots (47)$

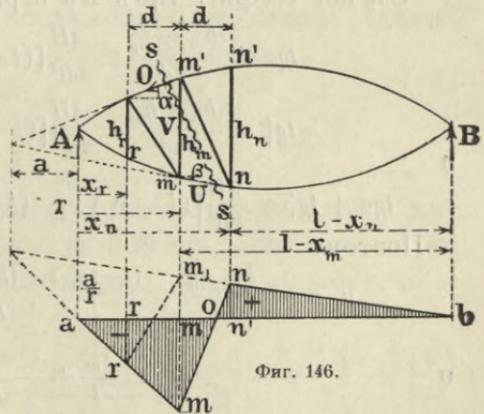
Площадь aom отрицательной части инфлюентной линии на основании предыдущаго должна быть равна площади положительной части, такъ какъ при сплошной равномерной нагрузкѣ всей фермы $\max. D = -\min. D$, или $\omega_n k = -\omega_m k$.

Для памяти полезно обратить вниманіе на то, что отношеніе разстояній om и on нулевой точки до лѣваго и праваго узловъ m и n фермы равно отношенію разстояній лѣвой и правой ординатъ y_m и y_n до правой и лѣвой опоръ фермы.

79. Усилія въ стойкахъ. Усиліе V въ стойкѣ mm' найдемъ изъ условія равновѣсія силъ лѣвой части фермы, разсѣченной разрѣзомъ ss по данной стойкѣ, приравнивая нулю сумму проекцій ихъ на вертикальную ось $Q + V - OSn\alpha - USn\beta = 0$, гдѣ Q представляетъ поперечную силу. Но $O \cdot Cs\alpha = U \cdot Cs\beta = \frac{M_m}{h_m}$, слѣдовательно.

$$V = -Q + \frac{M_m}{h_m} (tg\alpha + tg\beta) \dots (48)$$

При нагрузкѣ нижнихъ узловъ инфлюентная линия усилія V стойки (представляющей частный случай раскоса), состоитъ также изъ отрѣзковъ двухъ прямыхъ bn и am , опредѣляемыхъ отрѣзками на опорахъ $\frac{a}{r}$ и $\frac{a+l}{r}$, съ наибольшими ординатами подл правымъ n и лѣвымъ m нагружаемыми узлами, ближайшими къ сѣченію ss , и соединенныхъ между собой прямой mn . Она вполнѣ опредѣляется двумя ея ординатами, соотвѣтствующими этимъ узламъ и выражающими



Фиг. 146.

усилія V стойки при положеніи груза $P = 1$ въ этихъ узлахъ. Для опредѣленія ихъ предположимъ сперва, что грузъ $P = 1$ приложенъ въ правомъ узлѣ n . При этомъ

$$Q = A = 1 \cdot \frac{l - x_n}{l}, \quad M_m = Ax_m = \frac{(l - x_n)x_m}{l}, \quad \frac{M_m}{h_m} = \frac{1}{4H} \cdot \frac{l - x_n}{l - x_m},$$

и потому

$$V = y_n = -\frac{l - x_n}{l} + \frac{1}{4H} \cdot \frac{l - x_n}{l - x_m} (tg\alpha + tg\beta) \dots (49)$$

При положеніи груза $P = 1$ въ узлѣ m :

$$Q = -B = -1 \cdot \frac{x_m}{l}, \quad M_m = B(l - x_m) = \frac{x_m(l - x_m)}{l}, \quad \frac{M_m}{h_m} = \frac{1}{4H}$$

и потому

$$V = y_m = \frac{x_m}{l} + \frac{1}{4H} (tg\alpha + tg\beta) \dots (50)$$

Что касается значеній $tg\alpha$ и $tg\beta$, то здѣсь нужно разсмотрѣть два случая фермъ: 1) показанную на фигурѣ ферму съ двумя симметричными параболическими поясами и 2) съ однимъ прямымъ верхнимъ или нижнимъ поясомъ.

Случай 1 (фиг. 146). Въ первомъ случаѣ имѣемъ:

$$tg\alpha = \frac{h_m - h_r}{2d} = \frac{4H}{2d^2} [(l - x_m)x_m - (l - x_r)x_r],$$

$$tg\beta = \frac{h_n - h_m}{2d} = \frac{4H}{2d^2} [(l - x_n)x_n - (l - x_m)x_m]$$

и

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{4H}{2d^2} [(l - x_n)x_n - (l - x_r)x_r] = \frac{4H}{l^2} (l - 2x_m) \dots (51)$$

Поэтому

$$y_n = -\frac{l - x_n}{l} + \frac{(l - 2x_m)}{l} \cdot \frac{(l - x_n)}{l - x_m} = -\frac{(l - x_n)x_m}{l \cdot (l - x_m)} \dots (52)$$

и

$$y_m = \frac{x_m}{l} + \frac{l - 2x_m}{l} = \frac{l - x_m}{l} \dots (53)$$

Случай 2. При нижнемъ прямомъ поясѣ

$$tg\alpha = \frac{h_m - h_r}{d} = \frac{4H}{d^2} [(l - x_m)x_m - (l - x_r)x_r] = \frac{4H}{l^2} (l + d - 2x_m)$$

и $tg\beta = 0$. Поэтому

$$y_n = -\frac{l - x_n}{l} \left(1 - \frac{l + d - 2x_m}{l - x_m} \right) = -\frac{(l - x_n)}{l} \cdot \frac{x_r}{l - x_m} \dots (54)$$

и

$$y_m = \frac{x_m}{l} + \frac{l + d - 2x_m}{l} = \frac{l - x_r}{l} \dots (55)$$

При верхнемъ прямомъ поясѣ

$$\operatorname{tg} \alpha = 0, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{h_m - h_r}{d} = \frac{4H}{l^2} (l + d - 2x_m),$$

и поэтому для y_n и y_m получаются тѣ же значенія.

При *нагрузкѣ верхнихъ узловъ* инфлюентная линия усиля въ стойкѣ mm' состоитъ изъ тѣхъ же двухъ прямыхъ (фиг. 146) bnm_1 и ar , опредѣляемыхъ ординатами на опорахъ $\frac{a}{r} = -\frac{x_m}{l-x_m}$ и $\frac{l+a}{r} = \frac{l-x_m}{x_m}$, съ наибольшими ординатами подъ узлами m и r ближайшими къ сѣченію ss . Величину ихъ мы можемъ найти по найденнымъ ординатамъ для нагрузки нижнихъ узловъ.

Дѣйствительно,

$$m'm_1 = y_m = nn' \cdot \frac{l-x_m}{l-x_n} \quad \text{и} \quad rr' = y_r = mm' \cdot \frac{x_r}{x_m}$$

Поэтому для фермъ съ двумя симметричными поясами имѣемъ

$$y_m = -\frac{x_m}{l} \dots \dots \dots (56)$$

и

$$y_r = \frac{x_r}{l} \cdot \frac{l-x_m}{x_m} \dots \dots \dots (57)$$

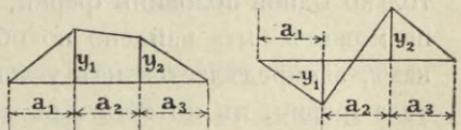
Во второмъ типѣ фермъ, когда *одинъ изъ поясовъ прямой*, имѣемъ

$$y_m = -\frac{x_r}{l} \dots \dots \dots (58)$$

и

$$y_r = \frac{x_r}{l} \cdot \frac{l-x_r}{x_m} \dots \dots \dots (59)$$

Въ виду сложности вычисленій, опредѣленіе площадей инфлюентной линии опускается въ изложеніи. Для вычисленія дѣйствія постоянной нагрузки необходимо знать разность площадей обѣихъ частей инфлюентной линии, которую можно найти по общей формулѣ (фиг. 147) площади многоугольника.



Фиг. 147.

$$\omega = \frac{y_1(a_1+a_2)}{1} + \frac{y_2(a_2+a_3)}{2}$$

Для фермъ съ двумя симметричными поясами и нагрузкой по низу

$$y_1 = y_m = \frac{l-x_m}{l}, \quad y_2 = y_n = -\frac{l-x_n}{l} \cdot \frac{x_m}{l-x_m},$$

$$a_1 = x_m, \quad a_2 = d, \quad a_3 = l - x_m - d, \quad \text{и потому} \quad \omega = \frac{d}{2}.$$

Слѣдовательно, всѣ стойки будутъ вытянуты усилиемъ

$$V_p = \omega p = \frac{dp}{2} \dots \dots \dots (60)$$

При нагрузкѣ верхнихъ узловъ:

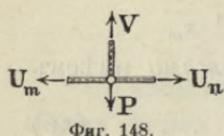
$$y_1 = \frac{x_r(l-x_m)}{lx_m}, y_2 = -\frac{x_m}{l}, a_1 = x_r, a_2 = d, a_3 = l-x \text{ и потому}$$

$$\omega = -\frac{d}{2};$$

слѣдовательно, всѣ стойки будутъ сжаты усилиемъ.

$$V = -\frac{dp}{2} \dots \dots \dots (61)$$

Если половина постоянной равномерной нагрузки будетъ дѣйствовать въ верхнихъ узлахъ, а другая половина въ нижнихъ, то



Фиг. 148.

усилій во всѣхъ стойкахъ фермы съ симметричными поясами будутъ равны нулю. Для фермъ съ однимъ прямымъ нижнимъ поясомъ въ стойкѣ отъ равномерной нагрузки фермы, при которой въ раскосахъ усилие $D=0$, опредѣлится изъ

условія равновѣсія нижняго узла и равно нагрузкѣ этого узла $+pd$ если нагрузка распределена въ нижнихъ узлахъ, и равно нулю когда она въ верхнихъ узлахъ.

Подобнымъ же образомъ для фермъ съ прямымъ верхнимъ поясомъ отъ постоянной равномерной нагрузки усилие въ стойкахъ равно $-pd$, когда нагрузка въ верхнихъ узлахъ и равно нулю, когда она дѣйствуетъ на нижніе узлы.

80. Если ферма имѣетъ четное число панелей и симметричную рѣшетку съ нисходящими раскосами въ одной ея половинѣ и восходящими въ другой, то достаточно разсчитать усилія только одной половины фермы, причемъ усилие въ средней стойкѣ не можетъ быть найдено по общимъ формуламъ усилій въ стойкахъ, а опредѣляется изъ условія равновѣсія верхняго средняго узла фермы, въ которомъ не встрѣчаются раскосы.

Напр. для фермы съ нижнимъ прямымъ поясомъ и нагрузкой по низу, для которой (фиг. 149).

$$O_1 C_s \alpha = O_2 C_s \alpha = \frac{M_m}{h_m}, \text{ имѣемъ } V_m = O_1 S_n \alpha + O_2 S_n \alpha = \frac{2M_m}{h_m} \operatorname{tg} \alpha,$$

т. е. стойка V_m будетъ вытянута, и инфлюентная линія усилія ея подобно линіи момента M_m представляетъ собой треугольникъ съ вершиной подъ узломъ m . Наибольшая ордината ея mm'

опредѣлится какъ усиліе V_m , соответствующее дѣйствию груза $P=1$ въ узлѣ m . Но при этомъ.

$$M_m = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{4},$$

и такъ какъ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_m - h_{m-1}}{d} = \frac{4H}{d^2} \left[\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2} - d \right) \left(\frac{l}{2} + d \right) \right] = \frac{4Hd}{l^2}$$

и

$$M_m : h_m = \frac{l}{4} : H,$$

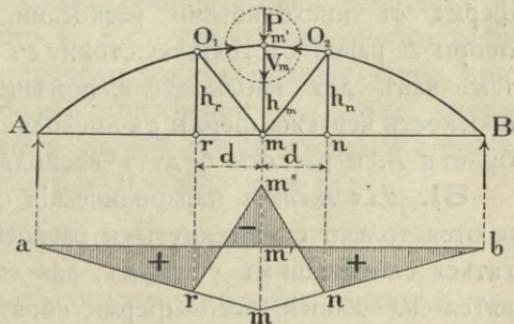
то окончательно находимъ

$$mm' = y_m = 2 \frac{d}{l}, \text{ и } \omega = \frac{y_m l}{2} = d \dots \dots \dots (62)$$

При нагрузкѣ верхнихъ узловъ, изъ условія равновѣсія верхняго узла m'

$$V_m = O_1 \operatorname{Sn} \alpha + O_2 \operatorname{Sn} \alpha - P_m = 2 \frac{M_m}{h_m} \cdot \operatorname{tg} \alpha - P_m$$

закключаемъ, что инфлюентная линія усилія V_m будетъ отличаться отъ предыдущей на разность ординатъ линіи нагрузки узла P_m , передаваемой вспомогаельными балочками отъ груза $P=1$ на узелъ m' , какъ опору. Последняя линія представляетъ собой треугольникъ съ ординатой



Фиг. 149.

равной 1 въ узлѣ m' и ординатами равными нулю въ остальныхъ узлахъ. Вычитая ее изъ ординаты $mm' = \frac{2d}{l}$, получимъ для усилія стойки V_m инфлюентную линію $arm''nb$, въ которой $m'm'' = \frac{2d}{l} - 1 = -\frac{l-2d}{l}$, причемъ площадь ω этой линіи равна предыдущей $\omega = d$ за вычетомъ площади треугольника $\frac{2d \cdot 1}{2} = d$, слѣдовательно $\omega' = d - d = 0$.

Для той же фермы изъ двухъ симметричныхъ половинъ, но

съ восходящими раскосами въ лѣвой половинѣ и нисходящими въ правой, усиліе въ средней стойкѣ V_m равно нагрузкѣ нижняго узла, что непосредственно вытекаетъ изъ условія равновѣсія этого узла. Поэтому при нагрузкѣ по низу инфлюентная линія имѣеть во всѣхъ узлахъ ординаты равныя нулю кромѣ узла m , гдѣ $V_m = 1$, а при нагрузкѣ по верху усиліе стойки V_m равно нулю для всѣхъ узловъ фермы.

Выше были рассмотрѣны фермы съ нисходящими раскосами. Относительно усилій въ стойкахъ фермъ съ *восходящими* раскосами вообще нужно замѣтить, что ихъ можно найти согласно предыдущему, рассматривая обратную ферму (т. е. ту же ферму, но повернутую около оси AB и 180° , въ которой раскосы будутъ уже нисходящими), и предположивъ обратное дѣйствіе нагрузки на ту же ферму, т. е. снизу вверхъ. Поэтому въ найденныхъ усиліяхъ стоекъ для обратной фермы съ нисходящими раскосами нужно только измѣнить знакъ, чтобы получить усилія въ стойкахъ данной фермы съ восходящими раскосами. Можно также найти тѣ же усилія по выведеннымъ формуламъ для фермъ съ нисходящими раскосами, рассматривая отъ правой опоры B равно отстоящую стойку съ данной отъ лѣвой опоры A , такъ какъ для наблюдателя, помѣщенного по другую сторону плоскости чертежа фермы съ нисходящими раскосами, лѣвая опора будетъ B , и раскосы будутъ восходящими.

81. Для мостовъ параболическія фермы обыкновенно устраиваются только съ вытянутыми раскосами, неспособными подвергаться сжимающимъ усиліямъ, для сопротивленія которымъ ставятся на длинѣ всей фермы обратные раскосы. Для расчета послѣднихъ нѣтъ надобности строить инфлюентныя линіи, такъ какъ усиліе $max. D' = - min. D \frac{s'}{s}$, т. е. ихъ можно получить изъ найденныхъ сжимающихъ усилій $min. D$ для прямыхъ раскосовъ, умноживъ ихъ на отношеніе $\frac{s'}{s}$ длинъ обратнаго и прямого раскосовъ.

Разсчетъ усилій въ стойкахъ фермъ съ двумя системами вытянутыхъ раскосовъ становится уже затруднительнѣе, чѣмъ для фермъ съ одной системой раскосовъ, такъ какъ стойки могутъ работать на сжатіе, какъ при системѣ нисходящихъ, такъ и при системѣ восходящихъ раскосовъ; поэтому ока-

зывается необходимымъ рассмотретьъ оба типа фермъ и взять для стоекъ большее изъ двухъ найденныхъ сжимающихъ усилий.

Для получения наибольшихъ усилий въ поясахъ фермъ съ двумя системами вытянутыхъ раскосовъ также представляется двойственность рѣшенія; если работаетъ нисходящій раскосъ, то тогда усилие верхняго представляется отношеніемъ $\frac{M}{hC\alpha}$ для праваго узла данной панели, а при системѣ восходящихъ раскосовъ — для лѣваго узла. Поэтому нужно бываетъ опредѣлить сперва *тах.* M для узловъ фермы и изъ значеній $\frac{M}{hC\alpha}$ для двухъ узловъ принять за усилие пояса большее.

Изъ всего сказаннаго о параболическихъ фермахъ видно, что легкость расчета принадлежитъ только фермамъ съ подвижной *равномерной* нагрузкой. Двойная система вытянутыхъ раскосовъ вообще въ фермахъ представляетъ по отношенію къ стойкамъ еще то усложненіе расчета, что недостаточно ограничиться рассмотрѣніемъ вышеуказанныхъ двухъ случаевъ работы восходящихъ или нисходящихъ раскосовъ, а нужно принять во вниманіе еще третій случай, когда слѣва данной стойки работаетъ на растяженіе нисходящій раскосъ, а съ правой стороны ея работаетъ восходящій раскосъ, подобно изслѣдованному выше примѣру средней стойки параболической фермы съ двумя симметричными половинами. Въ этомъ случаѣ усилие стойки V опредѣляется (фиг. 150) изъ равновѣсія верхняго узла m' :

$$O'Sn\alpha' - O''Sn\alpha'' - V - P_m = 0,$$

гдѣ $O'C\alpha' = O''C\alpha'' = \frac{M_m}{h_m}$, и P_m означаетъ нагрузку верхняго узла.

При нагрузкѣ нижнихъ узловъ $P_m = 0$, и потому усилие стойки

$$V = \frac{M_m}{h_m} (\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\alpha'').$$

Очевидно, оно всегда растягиваетъ стойку и измѣняется пропорціонально ординатамъ момента M_m для узла m , а слѣдовательно, выражается ординатами треугольника amb съ вершиной подъ

узломъ m и высотой $y_m = \frac{x_m(l-x_m)}{l \cdot h_m} (\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\alpha'')$.

Для параболической фермы имѣемъ

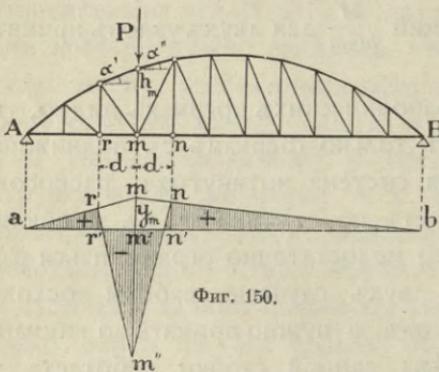
$$y_m = \frac{1}{4H} \left(\frac{h_m - h_{m-1}}{d} - \frac{h_{m+1} - h_m}{d} \right) =$$

$$= \frac{l}{4H} \cdot \frac{4H}{dl} \left[2x_m(l - x_m) - (x_m + d)(l - x_m - d) - (x_m - d)(l - x_m + d) \right]$$

или

$$y_m = \frac{2d}{l} \cdot \dots \cdot \dots \cdot (63)$$

величинѣ постоянной для всѣхъ стоекъ и въ томъ числѣ и для средней стойки, какъ мы видѣли выше (стр. 145).



Фиг. 150.

При нагрузкѣ верхнихъ узловъ нужно изъ ординатъ предыдущей линіи вычесть ординаты линіи P_m въ видѣ треугольника съ основаніемъ $2d$, вершиной подъ узломъ m и высотой $=1$, и тогда получится линія, $am'n'b$, которой отрицательная ордината

$$m'm' = \frac{2d}{l} - 1 = -\frac{l - 2d}{l} \cdot \dots \cdot \dots \cdot (64)$$

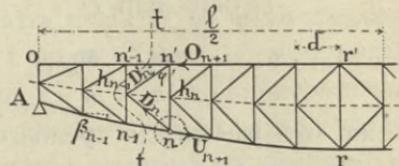
Въ заключеніе о параболическихъ фермахъ слѣдуетъ сказать, что всѣ выведенныя свойства относятся только къ фермамъ со стойками и не принадлежатъ фермамъ безъ стоекъ, съ треугольной рѣшеткой, хотя бы пояса представляли собой многоугольники, вписанные въ параболическіе сегменты. Въ нихъ, напр., усилія раскосовъ отъ равномерной нагрузки всей фермы не равны нулю, горизонтальная проекція усилій поясовъ — величина непостоянная и т. д.

2. Полунаклонная ферма.

82. Если въ какой-нибудь фермѣ со стойками и четнымъ числомъ $2r$ панелей средину каждой стойки соединимъ съ концами слѣдующей стойки двумя полунаклонными, то получимъ особую *полунаклонную* ферму, статически опредѣлимую относительно усилій въ ея частяхъ. Для ознакомленія съ ея расчетомъ возьмемъ симметричную ферму съ верхнимъ прямымъ и нижнимъ полупараболическимъ поясомъ, показанную на фиг. 151, и опредѣлимъ виды инфлюентныхъ линій для ея частей.

Усиліе въ *поясахъ* найдемъ изъ условія равновѣсія лѣвой части фермы, отдѣленной воображаемымъ разрѣзомъ *tt*, пересекающимъ оба пояса въ *n*-ой панели и верхнюю и нижнюю части *n*-1-ой стойки. Взявъ моментъ силъ разсматриваемой части относительно нижняго или верхняго *n*-1-аго узла фермы, находимъ

$$-O_n = U_n \text{Cos} \beta = \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}}$$



Фиг. 151.

Слѣдовательно, инфлюентныя линіи O_n или $U_n \text{Cos} \beta$ представляютъ треугольникъ съ вершиною подъ узломъ $n-1$ и высотой равной $\frac{(n-1)(m-n+1)d}{mh_{n-1}}$.

Если бы оба пояса были криволинейнаго очертанія, то такимъ же образомъ можно найти, что горизонтальныя проекціи усилій поясовъ *n*-ой панели равны и противоположны и выражаются также черезъ $M_{n-1} : h_{n-1}$, какъ если бы въ *n*-ой панели вмѣсто полураскосовъ былъ поставленъ раскосъ—нисходящій для усилія нижняго пояса или восходящій для верхняго пояса.

Усиліе нижняго *полураскоса* *n*-ой панели находимъ изъ условія равновѣсія выдѣленного нижняго *n*-го узла:

$$D_n \text{Cos} \varphi = U_{n+1} \text{Cos} \beta_{n+1} - U_n \text{Cos} \beta_n = \frac{M_n}{h_n} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}},$$

т. е. горизонтальная проекція нижняго полураскоса равна проекціи усилія нисходящаго раскоса *n*, *n*'-г раскосной фермы. Слѣд. инфлюентная линія D_n представляетъ два треугольника съ вершинами подъ узлами *n* и *n-1* и ординатами вершинъ

$$y_n = \frac{(m-n)s}{m} \left[\frac{n}{h_n} - \frac{n-1}{h_{n-1}} \right] \quad \text{и} \quad y_{n-1} = \frac{(n-1)s}{m} \left[\frac{m-n}{h_n} - \frac{m-n+1}{h_{n-1}} \right].$$

Тотъ же выводъ можно получить изъ условія равновѣсія лѣвой части фермы, отсѣченной вертикальнымъ разрѣзомъ черезъ *n*-ую панель, если взять моментъ всѣхъ силъ относительно верхняго узла

$$M_n - U_n \text{Cos} \beta h_n - D_n r = 0, \quad \text{откуда}$$

$$D_n = \frac{M_n}{r} - \frac{M_{n-1}}{r h_{n-1}}.$$

Каждый изъ 2 членовъ второй части представляетъ треуголь-

никъ, разность ихъ линію въ видѣ двухъ треугольниковъ съ вершинами подъ узлами n и $n-1$.

Для верхняго полураскоса изъ верхняго узла n' имѣемъ:

$$\begin{aligned} D'_n \cos \varphi' \text{ или } D'_n \frac{d}{s'} &= O_n \cos \alpha_n - O_{n+1} \cos \alpha_{n+1} = \\ &= -\frac{M_n}{h_n} + \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} = -D_n \cos \varphi = -D_n \frac{d}{s}, \end{aligned}$$

(тоже изъ равновѣсія средняго узла), откуда

$$D'_n = D_n \frac{s'}{s},$$

т. е. усилія полураскосовъ n -ой панели пропорціональны ихъ длинамъ s и s' , а горизонтальныя проекціи ихъ равны проекціямъ усилій нисходящаго и восходящаго раскосовъ такой же раскосной фермы. Поэтому инфлюентная линія полураскосовъ имѣетъ извѣстный видъ двухъ треугольниковъ съ вершинами подъ узлами n и $n-1$.

Для усилія V_n нижней части стойки n -ой панели изъ равновѣсія нижняго узла n находимъ:

$$V_n = -D_n \sin \varphi + U_{n+1} \sin \beta_{n+1} - U_n \sin \beta_n + P_n,$$

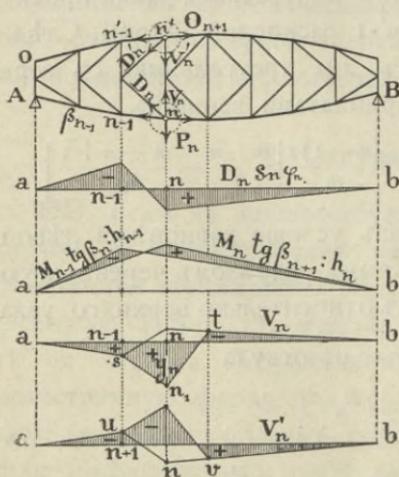
гдѣ P_n означаетъ нагрузку нижняго узла n .

Предположимъ сперва нагрузку по верху, или $P_n = 0$.

Тогда

$$V_n = -D_n \sin \varphi + \frac{M_n}{h_n} \operatorname{tg} \beta_{n+1} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \operatorname{tg} \beta_n.$$

Послѣдніе два члена второй части будутъ тѣ же, какъ и для



Фиг. 152.

раскосной фермы съ нисходящими раскосами и выражаются ординатами двухъ треугольниковъ съ вершинами подъ узлами n и $n-1$, а разность этихъ членовъ—ординатами линіи въ видѣ двухъ треугольниковъ съ вершинами подъ n и $n-1$.

Такъ какъ и первый членъ представляется ординатами подобной же линіи изъ двухъ треугольниковъ съ вершинами подъ тѣми же узлами n и $n-1$, но противоположныхъ знаковъ —

въ правой части и + въ лѣвой, то складывая ординаты обѣихъ инфлюентныхъ линий, получимъ линію V_n такого же вида asn_b изъ двухъ треугольниковъ съ вершинами подъ узлами n и $n-1$.

Въ случаѣ нагрузки по низу къ ординатамъ инфлюентной линіи V_n нужно прибавить ординаты линіи P_n въ видѣ треугольника съ наибольшей ординатой = 1 подъ узломъ n и нулевыми ординатами подъ смежными узлами $n-1$ и $n+1$; слѣдовательно, ординаты подъ этими узлами не измѣняются, а подъ узломъ n увеличатся на единицу, и потому при нагрузкѣ по низу инфлюентная линія V_n получитъ видъ asn, tb и будетъ вообще состоять изъ 4-хъ прямыхъ, опредѣляемыхъ ординатами y_{n-1} , y_n и y_{n+1} .

Для усилія V'_n верхней части n -ой стойки подобнымъ же образомъ находимъ изъ условія равновѣсія узла n' :

$$V'_n = -D'_n \sin \varphi' + O_n \sin \alpha_n - O_{n+1} \sin \alpha_{n+1} - P'_n,$$

а въ случаѣ нагрузки по низу

$$V'_n = -D_n \sin \varphi' + \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \operatorname{tg} \alpha_n - \frac{M_n}{h_n} \operatorname{tg} \alpha_{n+1}$$

Послѣдніе два члена второй части выражаютъ линію въ видѣ двухъ треугольниковъ съ вершинами подъ узлами n и $n-1$, подобно инфлюентной линіи $-D'_n \sin \varphi'$. Поэтому сумма ординатъ обѣихъ линій, или инфлюентная линія V_n при нагрузкѣ нижнихъ узловъ имѣетъ также видъ $aunb$ двухъ треугольниковъ съ вершинами подъ узлами n и $n-1$.

При нагрузкѣ по верху изъ ординатъ найденной линіи нужно вычесть ординаты линіи P'_n , для чего достаточно только вычесть 1 изъ ординаты подъ узломъ n и конецъ ея соединить съ ординатами подъ узлами $n-1$ и $n+1$, при чемъ для V'_n получится инфлюентная линія aun, vb .

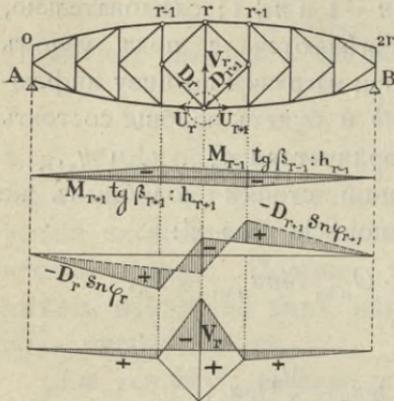
Для средней стойки усиліе V_r опредѣлится изъ равновѣсія нижняго средняго узла r :

$$V_r = -D_r \sin \varphi_r - D_{r+1} \sin \varphi_{r+1} - \frac{M_{r-1}}{h_{r-1}} \operatorname{tg} \beta_{r-1} - \frac{M_{r+1}}{h_{r+1}} \operatorname{tg} \beta_{r+1}$$

Послѣдніе два члена вмѣстѣ выражаютъ отрицательную ординату равнобедренной трапеціи съ вершинами подъ узлами $r-1$ и $r+1$. Линіи $-D_r \sin \varphi_r$ и $-D_{r+1} \sin \varphi_{r+1}$, вслѣдствіе симметріи раскосовъ r и $r+1$ го, также симметричны относительно середины пролета, такъ

что ордината второй линии подъ узломъ $r-1$ равна ординатѣ первой линии подъ узломъ $r+1$, а подъ узломъ r ординаты одинаковы.

Сумма обѣихъ послѣднихъ линий дастъ также симметричную линию, состоящую изъ прямой отъ лѣвой опоры до узла $r-1$, подъ которымъ ордината равна суммѣ ординатъ первой линии $-D_r \sin \varphi_r$ подъ узлами $r-1$ и $r+1$, а ордината въ среднемъ узлѣ r равна



Фиг. 153.

удвоенной ординатѣ линии $D_r \sin \varphi_r$ подъ тѣмъ же узломъ r . Въ случаѣ нагрузки понизу нужно измѣнить одну узловую ординату y_r , прибавляя къ ней $+1$. Такимъ образомъ и при нагрузкѣ понизу инфлюентная линия V_r будетъ также состоять изъ двухъ симметричныхъ половинъ и будетъ вполне опредѣляться ординатами подъ узлами $r-1$ и r .

83. Свойства полураскосной фермы можно представить себѣ

проще, если раздѣлить ее, какъ показано на фиг. 151, на двѣ раскосныя фермы вдвое меньшей высоты и разсматривать ее, какъ комбинацію двухъ такихъ фермъ: верхней—съ восходящими, а нижней—съ нисходящими раскосами. Легко убѣдиться, что отъ одной и той же нагрузки $\frac{1}{2} P$ и $\frac{1}{2} P$ усилие въ каждой панели нижняго пояса верхней раскосной фермы равно и противоположно усилию верхняго пояса нижней фермы, а потому при наложеніи обѣихъ фермъ и соединеніи ихъ въ одно цѣлое, усилие отъ общей нагрузки $\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P = P$ въ среднемъ поясѣ полураскосной фермы, показанномъ пунктиромъ, будетъ равно нулю, и потому элементы этого пояса могутъ быть удалены изъ фермы, безъ измѣненія усилій въ остальныхъ частяхъ составной или полураскосной фермы. Поэтому инфлюентныя линии усилій въ поясахъ и раскосахъ такой полураскосной фермы будутъ одинаковы съ инфлюентными линиями для тѣхъ же частей въ отдѣльныхъ составляющихъ раскосныхъ фермахъ, а сами усилія полураскосной фермы равны усиліямъ составляющихъ раскосныхъ фермъ отъ вдвое меньшей нагрузки, считая ее распредѣляющей поровну между верхней и нижней фермами.

3. Ферма Паули.

84. Если очертание фермы со стойками, или высоты послѣдней выбрать такимъ образомъ, чтобы наибольшія

усилія въ поясѣ $O = \frac{M_m}{h_m C_s \alpha}$ или $U = \frac{M_m}{h_m C_s \beta}$ были величинами постоянными для всей фермы, то получится такъ называемая ферма Паули.

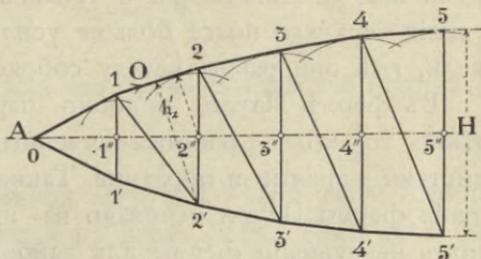
Для фермы съ симметричными поясами

$$C_s \alpha = \frac{d}{o_m} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2}};$$

поэтому усилие верхняго пояса

$$O = \frac{M_m}{2dh_m} \sqrt{4d^2 + (h_m - h_{m-1})^2} = C \dots \dots (65)$$

Задаваясь наибольшей высотой фермы и подставляя ее вмѣсто h_m , мы можемъ вычислить высоту h_{m-1} предшествующей стойки, если предварительно были опредѣлены наибольшія значенія моментовъ для всѣхъ узловъ фермы, т. е. для $x=d, 2d, 3d \dots$



Фиг. 154.

Построеніемъ можно также найти высоты стоекъ, задавшись высотой первой стойки (фиг. 154). Если назовемъ черезъ $h'_1, h'_2, h'_3 \dots$ перпендикуляры изъ нижнихъ узловъ на направленіе противоположащихъ частей верхняго пояса въ панеляхъ 1, 2, 3-ей \dots , то длины этихъ перпендикуляровъ $h'_1 = h_1 C_s \alpha$, $h'_2 = h_2 C_s \alpha$, \dots въ фермѣ Паули должны быть пропорціональны значеніямъ момента M , т. е.

$$\frac{M_1}{h'_1} = \frac{M_2}{h'_2} = \frac{M_3}{h'_3} = \dots = C \dots \dots \dots (66)$$

Параллельно имъ проведенные перпендикуляры изъ срединъ соответствующихъ стоекъ будутъ равны $\frac{1}{2} h'_1, \frac{1}{2} h'_2, \frac{1}{2} h'_3 \dots$

Зная M_1 и h_1 легко найти h'_1 , а слѣд. и величину C . Для

второй стойки нужно найти $h'_2 = \frac{M_2}{C}$, затѣмъ радіусомъ $= \frac{1}{2} h'_2$ изъ середины ея описать дугу круга и провести касательную къ ней изъ конца первой стойки, опредѣляющую направленіе верхняго пояса 2-ой панели, а слѣд. и высоту третей стойки. Продолжая такимъ образомъ, мы получимъ наконецъ и высоту h наибольшей стойки у середины пролета или высоту H фермы. Если H получится несоотвѣтственной длины, то ее можно измѣнить, опредѣливъ сперва h'_m , измѣнить затѣмъ пропорціонально длины остальныхъ перпендикуляровъ, и затѣмъ повторить построение снова.

Въ найденной такимъ образомъ фермѣ наибольшія усилія въ верхнемъ поясѣ будутъ равны между собой, но въ нижнемъ поясѣ это условіе не будетъ точно удовлетворяться, а лишь приблизительно. Дѣйствительно, горизонтальныя проекціи усилій верхняго пояса панелей 1, 2, 3-й и т. д. равны проекціямъ усилій нижняго пояса въ панеляхъ 2, 3, 4, и т. д., но углы наклоненія соотвѣтственныхъ панелей верхняго и нижняго поясовъ различны, слѣдовательно и усилія поясовъ неодинаковы, а именно усилія верхняго пояса больше усилій нижняго, кромѣ первой панели, гдѣ они равны между собою.

Въ фермѣ Паули, подобно параболической, раскосы работаютъ только на растяженіе и потому они дѣлаются двойной системы—прямые и обратные. Такимъ образомъ опредѣленіе очертанія фермы Паули основано на предположеніи, что при полномъ нагруженіи фермы для наибольшихъ усилій поясовъ работаютъ нисходящіе раскосы.

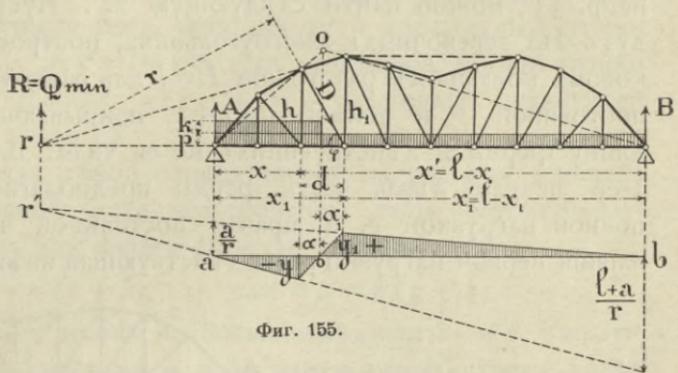
Когда очертаніе фермы Паули найдено, то усилія въ рѣшеткѣ фермы опредѣляются по общимъ способамъ.

4. Ферма Шведлера.

85. Неудобства параболическихъ фермъ Паули представляютъ двойная система вытянутыхъ раскосовъ и затруднительность соединенія поясовъ на опорѣ вслѣдствіе слишкомъ остраго ихъ пересѣченія. Для устраненія этихъ неудобствъ І. В. Шведлеръ въ 1867 году предложилъ ферму съ одной системой нисходящихъ раскосовъ гиперболическаго очертанія, опредѣляемаго условіемъ, что наименьшее усиліе раскоса $\min. D$ отъ равномерной постоянной нагрузки p и подвижной k равно нулю.

Изъ предыдущаго (фиг. 155) извѣстно, что для *min. D* нисходящаго раскоса необходимо загрузить подвижной нагрузкой r лѣвую часть фермы отъ опоры A до нулевой точки, заключающейся въ предѣлахъ панели разсматриваемаго раскоса. При этомъ для фермы Шведлера моментъ внѣшнихъ силъ лѣвой отсѣченной части фермы относительно точки пересѣченія поясовъ долженъ быть равенъ нулю, а такъ какъ равнодѣйствующая этихъ силъ, или *min. Q* вообще не равна нулю, то плечо ея должно быть нулемъ, т. е. точка

r пересѣченія поясовъ должна лежать на направленіи равнодѣйствующей внѣшнихъ силъ — реакціи опоры A и нагрузки отсѣченной части фермы. Величина



Фиг. 155.

на этой равнодѣйствующей, или *min. Q*, какъ извѣстно (стр. 24), постепенно уменьшается и обращается въ нуль при $x < \frac{l}{2}$, когда

реакція опоры A дѣлается равной нагрузкѣ лѣвой части фермы, и равнодѣйствующая обращается въ пару силъ. Такъ какъ послѣдняя можетъ быть разсматриваема, какъ бесконечно-малая сила на бесконечно большомъ разстояніи (ч. I стр. 8), то и точка пересѣченія поясовъ фермы Шведлера удаляется въ бесконечность, т. е. оба пояса будутъ параллельны другъ другу, и высоты смежныхъ стоекъ равны. Для слѣдующихъ панелей нагрузка лѣвой отсѣченной части фермы будетъ уже больше реакціи опоры A ($\text{min. } Q < 0$) и равнодѣйствующая ихъ, а также и точка пересѣченія поясовъ находятся уже по правую сторону отъ данной панели, приближаясь изъ бесконечности; слѣдовательно, высота каждой послѣдующей стойки будетъ уже меньше высоты предыдущей. Такимъ образомъ для каждой половины фермы Шведлера должна получиться нижеслѣдующая форма съ наибольшей высотой въ томъ сѣченіи, которому соотвѣтствуетъ $\text{min. } Q = 0$.

При такомъ очертаніи фермы средняя часть ея съ вдвѣлен-

раскоса должно быть равно нулю; слѣдовательно, моментъ внѣшнихъ силъ B_q и A_p лѣвой части фермы относительно точки r пересѣченія поясовъ долженъ быть равенъ нулю, т. е. — $AA' \times rB + BB' \times rA = 0$. Очевидно, точка r должна получиться на пересѣченіи прямой $B'A'$, съ направлениемъ пояса AB , такъ какъ изъ подобія треугольниковъ rAA' и rBB' находимъ

$$AA' : BB' = rA : rB, \text{ или } BB' \times rA = AA' \times rB.$$

87. Высоту h_1 какой-нибудь стойки фермы Шведлера можно найти также и вычислениемъ, зная высоту h предыдущей стойки (фиг. 155). Пусть x и $x' = l - x$ будутъ разстоянія данной стойки до опоръ A и B фермы, а x_1 и x_1' — разстоянія слѣдующей стойки, такъ что $x_1 = x + d$.

Если — ω площадь лѣвой отрицательной части, а ω' площадь правой положительной части инфлюентной линіи разсматриваемаго раскоса D , то для фермы Шведлера должно быть

$$\min. D = \omega'p - \omega(p + k) = 0, \text{ или } \omega'p = \omega(p + k) = \omega q.$$

Остается опредѣлить только наибольшія ординаты y и y_1 инфлюентной линіи подъ стойками h и h_1 , найти нулевую точку, вычислить основанія треугольниковъ и подставить въ предыдущее уравненіе, чтобы получить зависимость между h и h_1 .

Предположимъ, что грузъ $P=1$ приложенъ у правой стойки.

Тогда реакція опоры $A_1 = \frac{x_1'}{l}$, и моменты для праваго узла

$$M_1 = Ax_1 = \frac{x_1 x_1'}{l} \text{ и для лѣваго узла } M = Ax = \frac{xx_1'}{l}.$$

Горизонтальная проекція усилія раскоса (стр. 135)

$$D \cos \varphi = y, \cos \varphi = \frac{M_1}{h_1} - \frac{M}{h} = \frac{x_1'}{l} \left(\frac{x_1}{h_1} - \frac{x}{h} \right).$$

При положеніи груза въ лѣвомъ узлѣ

$$B = \frac{x}{l}, M_1 = \frac{xx_1'}{l} \text{ и } M = \frac{xx_1'}{l}, \text{ а потому}$$

$$y \cos \varphi = \frac{M_1}{h_1} - \frac{M}{h} = - \frac{x}{l} \left(\frac{x'}{h} - \frac{x_1'}{h_1} \right).$$

Разстоянія α и α_1 нулевой точки инфлюентной линіи до лѣваго и праваго узловъ фермы опредѣляются изъ пропорціональности ихъ значеніямъ ординатъ — y и y_1 :

$$a = \frac{-y}{y_1 - y} d = x \left(\frac{x'}{h} - \frac{x_1'}{h_1} \right) : \left(\frac{x}{h} + \frac{x_1'}{h_1} \right) \text{ и}$$

$$a_1 = \frac{y_1}{y_1 - y} \cdot d = x_1' \left(\frac{x_1}{h_1} - \frac{x}{h} \right) : \left(\frac{x}{h} + \frac{x_1'}{h_1} \right).$$

Поэтому основанія a и b лѣваго и праваго треугольниковъ

$$a = x + \alpha = \frac{x l}{h \left(\frac{x}{h} + \frac{x_1'}{h_1} \right)} \text{ и } b = x_1' + \alpha_1 = \frac{x_1' l}{h_1 \left(\frac{x}{h} + \frac{x_1'}{h_1} \right)},$$

и площади ихъ

$$\omega = -\frac{ay}{2} \text{ и } \omega' = \frac{by_1}{2}.$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе $\omega' p = \omega q$, получимъ зависимость:

$$\left(\frac{x'}{h} - \frac{x_1'}{h_1} \right) \frac{x^2}{h} q = \left(\frac{x_1}{h_1} - \frac{x}{h} \right) \frac{x_1'^2}{h_1} p.$$

Рѣшая его относительно $\frac{h_1}{h}$, находимъ искомую формулу

$$\frac{h_1}{h} = \frac{x_1'}{2x'} \left\{ 1 - \frac{x_1' p}{xq} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{x_1' p}{xq} \right)^2 + \frac{4p x_1 x'}{q x^2}} \right\} \dots (67)$$

Въ случаѣ подвижной нагрузки въ видѣ сосредоточенныхъ грузовъ поѣзда значеніе k эквивалентной нагрузки представляетъ переменную величину, зависящую отъ неизвѣстной длины a загружаемой части фермы. Въ этомъ случаѣ опредѣленіе высоты h_1 смежной стойки дѣлается послѣдовательнымъ приближеніемъ, или съ помощью таблицы эквивалентныхъ нагрузокъ k , или по сосредоточеннымъ грузамъ поѣзда, какъ для поперечной силы Q (стр. 33).

Когда высота стоекъ и вообще очертаніе фермы найдены, то усилія въ частяхъ ея опредѣляются уже по общимъ способамъ.

Примѣръ. Пусть дана ферма пролетомъ $l = 32$ м., о 8 панеляхъ, и $p = 3$, а $k = 4$ тн./м. Называя черезъ h_1 высоту первой стойки, по предыдущей формулѣ находимъ:

$$h_2 = 1,531 h_1, h_3 = 1,706 h_1, h_4 = 1,656 h_1, h_5 = 1,423 h_1,$$

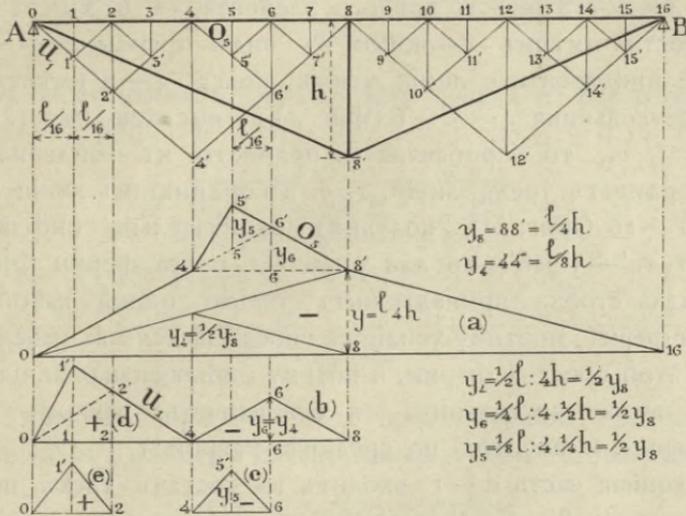
$$h_6 = 1,046 h_1, h_7 = 0,566 h_1 \text{ и } h_8 = 0.$$

Задавая наибольшей высотой фермы $h_3 = 4$ м., находимъ $h_1 = 2,345$, $h_2 = 3,589$, $h_3 = 4,00$ и слѣд. $h_4 = 4,00$ метр.

5. Ферма Финка.

88. Данная на фиг. 157 ферма Финка (см. стр. 101) представляетъ собою сложную статически опредѣлимую ферму, составленную изъ основной треугольной фермы 0—8'—16, въ которой простые элементы 0—8 и 8—16 замѣнены сложными

0—4'—8 и 8—12'—16. Последніе въ свою очередь могутъ быть разсматриваемы какъ простыя треугольныя фермы, въ которыхъ простые элементы 0—4, 4—8, 8—12 и 12—16 замѣнены сложными въ видѣ фермъ 0—2'—4, 4—6'—8 и т. д. Эти фермы также разсматриваются какъ простыя треугольныя, въ которыхъ сложные элементы 0—1'—2, 2—3'—4 замѣняютъ простые прямые элементы 0—2, 2—4, 4—6 и т. д.



Фиг. 157.

На основаніи вышеизложенныхъ соображеній нетрудно построить инфлюэнтную линію, напр. усилія O_5 какой-нибудь части 4—5 фермы Финка. Для простой фермы 0—8'—16 съ однимъ промежуточнымъ узломъ 8, усиліе въ верхнемъ поясѣ 0—16, равное $M_8:h$, имѣетъ инфлюэнтную линію (фиг. a) въ видѣ треугольника 0—8'—16, въ которомъ высота $y_8 = \frac{1}{4} l : h = \frac{l}{4}h$. Если въ этой фермѣ простой элементъ 0—8 замѣнимъ сложнымъ въ видѣ простой фермы 0—4—8 съ однимъ промежуточнымъ узломъ 4, то, подобно предыдущему, инфлюэнтная линія усилія верхняго пояса 0—8, равнаго $M_4:h$, будетъ имѣть видѣ треугольника 0—4'—8 съ высотой $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} l : h = \frac{l}{8h} = \frac{y_8}{2}$. Сложивъ ординаты обѣихъ линій, получимъ трапецію 0—4'—8'—16 (фиг. a).

Если во второй простой фермѣ 0—4'—8 простой прямой элементъ 4—8 замѣнимъ сложнымъ въ видѣ треугольной про-

стой фермы 4—6'—8 съ однимъ промежуточнымъ узломъ 6, то усиліе въ верхнемъ поясѣ этой послѣдней фермы, равное $M_6: \frac{1}{2} h$, будетъ имѣть инфлюентную линію въ видѣ треугольника 4—6'—8 (фиг. *b*) съ высотой $-66' = \frac{1}{4} l: \frac{1}{2} h = l/8 h = \frac{1}{2} y_8$. Прибавляя ея ординаты къ суммѣ ординатъ двухъ предыдущихъ линій въ видѣ трапецій, получимъ (фиг. *a*) инфлюентную линію 0—4'—6'—8'—16. Такъ какъ въ послѣдней (третьей) простой фермѣ 4—6'—8 вмѣсто прямого элемента 4—6 мы въ дѣйствительности имѣемъ сложный въ видѣ фермы 4—5'—6, для которой инфлюентная линія усилія пояса 4—6 имѣетъ также видъ треугольника 4—5'—6 (фиг. *a*) съ высотой $\frac{1}{8} l: 4. (\frac{1}{4} h) = l/8 h = \frac{1}{2} y_8$, то, прибавляя ея ординаты къ найденной выше суммѣ ординатъ трехъ линій, т. е. къ ординатамъ линіи 0—4'—6'—8'—16 (фиг. *a*), получимъ окончательно инфлюентную линію 0—4'—5'—8'—16 для усилія O_5 пояса фермы Финка.

Каждая стойка принадлежитъ только одной какой-нибудь простой фермѣ, поэтому усиліе ея опредѣляется изъ рассмотрѣнія только этой простой фермы, и потому инфлюентная линія стойки имѣетъ видъ треугольника съ основаніемъ, равнымъ пролету этой фермы, и высотой по срединѣ, равной l .

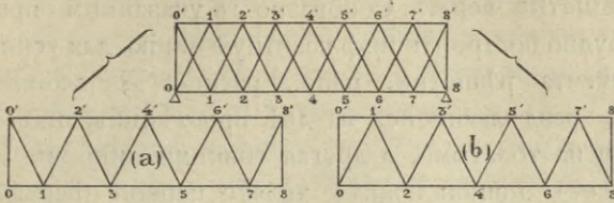
Наклонная часть 0—1' входитъ въ составъ трехъ простыхъ фермъ 0—4'—8', 0—2'—4 и 0—1'—2, поэтому инфлюентная линія ея усилія составляется изъ инфлюентныхъ линій, соответствующихъ этимъ фермамъ, въ видѣ треугольниковъ 0—4'—8, 0—2'—4 и 0—1'—2 (фиг. *b*, *d* и *e*) съ высотами: $M_4: h \text{ Csa} = \frac{1}{2} l: 4 h \text{ Csa} = l/8 h \text{ Csa}$, $M_2: h_2 \text{ Csa} = M_2: \frac{1}{2} h. \text{ Csa} = \frac{1}{4} l: 4. (\frac{1}{2} h) \text{ Csa} = l/8 h. \text{ Csa}$ и $M_1: h_1 \text{ Csa} = \frac{1}{8} l: 4. \frac{1}{4} h \text{ Csa} = l/8 h \text{ Csa}$, а сумма ординатъ этихъ треугольниковъ выражается ординатами линіи въ видѣ треугольника 0—1'—8 (фиг. *b*), гдѣ черезъ α обозначенъ уголъ части 0—2' съ горизонтомъ.

XIV. Статически неопредѣлимые фермы.

1. Приближенный расчетъ.

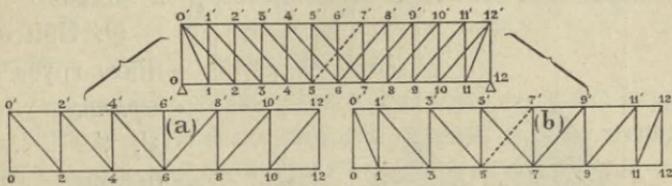
89. Въ большинствѣ прежде построенныхъ мостовъ примѣнялись сложные, статически неопредѣлимые фермы съ однимъ или нѣсколькими пересѣченіями между собой частей рѣшетки

фермы (фиг. 158, 159, 160 и 161). Такия сложныя фермы раз-
смаивались какъ составленныя изъ отдѣльныхъ простыхъ, ста-



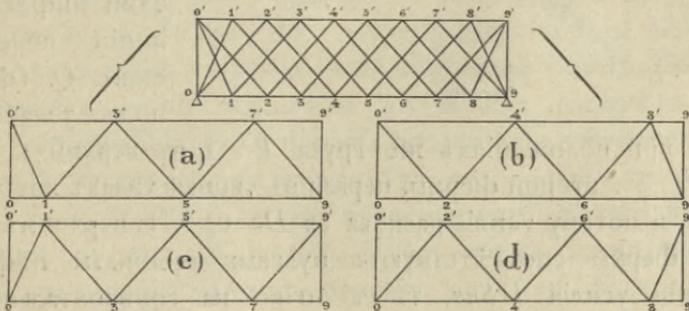
Фиг. 158.

тически опредѣлимыхъ фермъ, безъ взаимнаго пересѣченія эле-
ментовъ ихъ рѣшетки (фф. 158, *a* и *b*, 159, *a* и *b*, 160, *a*, *b*,



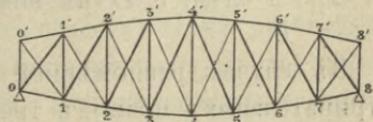
Фиг. 159.

c и *d*), при чемъ каждая такая простая ферма предполагалась
работающей отъ дѣйствія только той нагрузки, которая приложена



Фиг. 160.

въ ея узлахъ. Каждой простой фермѣ обыкновенно принадлежитъ
отдѣльная система рѣшетки, усилю въ которой опредѣляются
при расчетѣ только этой фермы. Элементы же поясовъ (а иногда и
стойки) принадлежатъ всѣмъ про-
стымъ фермамъ, а потому и усилю въ
нихъ принимаются равными суммѣ

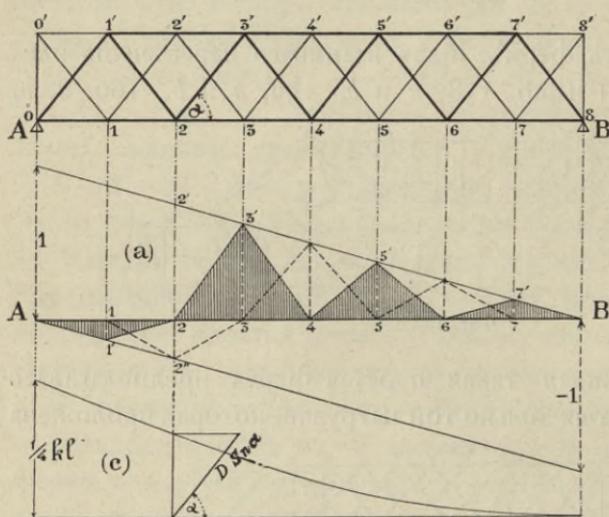


Фиг. 161.

усилій этихъ элементовъ, найденныхъ при расчетахъ отдѣльныхъ фермъ.

90. Рѣшетка фермъ. Сообразно съ указанными предположеніями, нетрудно построить инфлюентную линію для усилія какого-нибудь элемента рѣшетки, напр., раскоса $23'$ сложной фермы (фиг. 162), раздѣляющей на двѣ простѣйшія, изъ которыхъ одна начерчена толстыми, а другая тонкими линіями. Разсматриваемый раскосъ принадлежитъ только первой фермѣ, и усиліе

его опредѣляется, какъ извѣстно, по поперечной силѣ Q , а именно $D S n \alpha = -Q$. При положеніяхъ груза $P=1$ въ верхнихъ узлахъ $1', 3', 5' \dots$ первой фермы, проекція усилія D раскоса $23'$ этой фермы представляется ординатами инфлюентной линіи поперечной силы Q (фиг. а) подъ узлами этой



Фиг. 162.

фермы; при положеніяхъ же груза $P=1$ въ верхнихъ узлахъ $0', 2', 4' \dots$ второй фермы, первая въ своихъ узлахъ вовсе не нагружена, и потому усиліе раскоса ея $D=0$, т. е. верхнимъ узламъ второй фермы соотвѣтствуютъ нулевыя ординаты инфлюентной линіи усилія $D S n \alpha$, т. е. точки на горизонтальной оси AB . Такъ какъ между узлами фермы вообще инфлюентныя линіи измѣняются по прямой, то, соединивъ послѣдовательно прямыми найденныя подъ всѣми узлами сложной фермы точки инфлюентной линіи усилія раскоса $D S n \alpha$, получимъ искомую линію усилія $D S n \alpha$, а слѣд. и D въ видѣ ряда треугольниковъ $A 1' 2 3' 4 5' 6 7' B$.

Въ случаѣ равномерной нагрузки фермы, сумма площадей отрицательныхъ правыхъ треугольниковъ можетъ быть замѣнена равновеликими площадями трапецій, среднія линіи которыхъ

представляются половинами высотъ треугольниковъ, а такъ какъ точки, дѣлящія пополамъ высоты, всѣ лежатъ на одной прямой, имѣющей на опорѣ A ординату $= 1/2$, то отрицательная площадь инфлюентной линіи усилія $D Sna$ выразится половиной площади тр-ка $B 22'$, а положительная площадь точно также можетъ быть выражена половиной площади треугольника $A 22''$. Такимъ образомъ для равномерной нагрузки площади положительной и отрицательной части инфлюентной линіи усилія раскоса $D Sna$ равны половинамъ площадей инфлюентной линіи поперечной силы Q для сѣченія 2 балки AB при прямой нагрузкѣ, только съ обратными знаками (см. стр. 23 ч. II). Соотвѣтственно эюрѣ *max. Q* и *min. Q* (стр. 24, фиг. 22), построенной съ уменьшенной въ два раза ординатой $1/4 kl$, проекція усилія раскоса *min. D* получится построениемъ, показаннымъ на фиг. с.

Если бы вмѣсто нисходящаго раскоса мы разсмотрѣли *восходящій* раскосъ $21'$ той же простой фермы, усиліе котораго опредѣляется изъ условія $D Sna = Q$, то получили бы ту же инфлюентную линію, только съ обратными знаками. Отсюда выводимъ, что отъ равномерной подвижной нагрузки наибольшее усиліе для нисходящаго раскоса $21'$ или наименьшее усиліе для восходящаго раскоса $23'$ равно *max Q* отъ равномерной нагрузки $1/2 k$ для сѣченія $22'$ балки AB , проведеннаго черезъ нижній конецъ раскоса, если нагрузка расположена по верху. Подобнымъ же образомъ легко убѣдиться, что и для раскосовъ второй фермы — нисходящаго $2'3$ и восходящаго $34'$ — инфлюентная линія усилій раскосовъ будетъ имѣть видъ, представленный на фиг. 162 а пунктиромъ, и что проекція наибольшаго усилія нисходящаго раскоса $2'3$ и *min. D Sna* усилія восходящаго раскоса $34'$ равны *max. Q* отъ нагрузки $1/2 k$ для сѣченія $33'$, проведеннаго черезъ нижній конецъ раскоса $2'3$ или $34'$.

При нагрузкѣ *по низу* вычерченная сплошной линіей инфлюентная линія соотвѣтствуетъ раскосамъ второй простой фермы, сходящимся въ верхнемъ узлѣ $2'$, а вычерченная пунктиромъ линія — раскосамъ первой фермы, сходящимся въ верхнемъ узлѣ $3'$ фермы. Поэтому при нагрузкѣ *по низу*, *max. D Sna* раскоса $2'3$ и *min. D Sna* раскоса $1'2$ равны поперечной силѣ Q отъ прямой нагрузки $1/2 k$ балки AB для сѣченія $2'2$, проведеннаго черезъ *верхній* конецъ $2'$ раскосовъ $2'3$ и $2'1$, а для раскосовъ $23'$ и $3'4$,

которымъ соотвѣтствуетъ инфлюентная линия, обозначенная пунктиромъ, *max. D Sna* раскоса 3'4 и *min. D Sna* раскоса 2'3' равны поперечной силѣ Q отъ нагрузки $\frac{1}{2}k$ балки AB для сѣченія 3'3', проведеннаго черезъ верхній конецъ 3' раскосовъ 2'3' и 3'4.

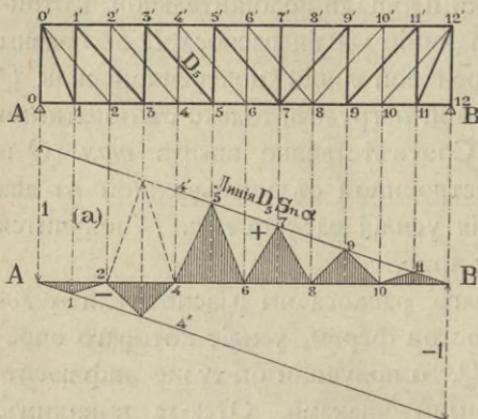
91. Для двойной сложной фермы (фиг. 163) со стойками, составленной изъ двухъ простыхъ фермъ, инфлюентная линия усилия $D_5 Sna = Q$ каково-нибудь раскоса 3'5 простой фермы, вычерченной толстыми линиями, будетъ, на основаніи предыдущаго, имѣть видъ (фиг. 163 a) A 1, 2, 3, 4, 5 . . . B , какъ для нагрузки верхнихъ узловъ, такъ и для нагрузки по низу.

Въ случаѣ равномерной нагрузки, усилия раскоса *max. D₅Sna* и *min. D₅Sna*

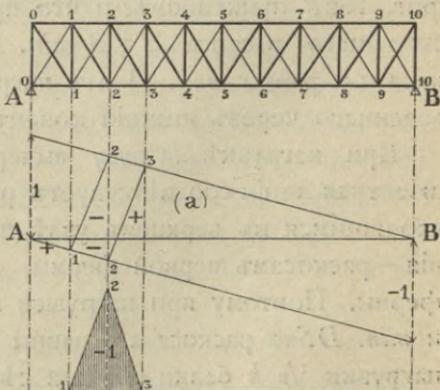
выражаются черезъ *max. Q* и *min. Q* поперечной силы балки AB отъ прямой нагрузки $\frac{1}{2}k$ для сѣченія 4'4, проведеннаго черезъ середину раскоса, если ферма имѣетъ равныя панели.

Инфлюентная линия для усилия стойки 3'3' ($V_3 = -Q$), при нагрузкѣ по низу имѣетъ ту же инфлюентную линію, какъ $D_5 Sna$ раскоса 3'5, только съ обратными знаками, что непосредственно слѣдуетъ изъ условія равновѣсія вырѣзаннаго верхняго узла 3', а именно ($D_5 Sna + V_3 = 0$). При нагрузкѣ по верху инфлюентная линия усилия V_3 стойки 3'3' имѣетъ одинаковый видъ съ линіей $D_3 Sna$ раскоса 1'3' съ обратными знаками, что вытекаетъ изъ условія равновѣсія нижняго узла 3' ($D_3 Sna + V_3 = 0$).

92. Для двойной сложной фермы со стойками типа фиг. 164, въ которой стойки принадлежатъ къ обѣимъ простымъ



Фиг. 163.

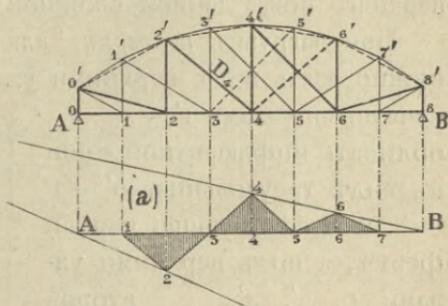


Фиг. 164.

фермамъ, усиліе стойки слагается изъ суммы ея усилій въ каждой простой фермѣ, а потому инфлюентная линия стойки $22'$ определяется какъ сумма ординатъ обѣихъ инфлюентныхъ линий разсматриваемой стойки (см. фиг. *a*): при нагрузкѣ по верху — изъ линіи $A12'В$ съ правой отрицательной и лѣвой положительной частями (фиг. *a*) и линіи $A23'В$ съ правой положительной и лѣвой отрицательной частями. Такъ какъ ординаты обѣихъ линій во всѣхъ узлахъ, кромѣ 2, равны и противоположны, а въ узлѣ 2 сумма ихъ $= -1$, то инфлюентная линия стойки $22'$ при нагрузкѣ по верху имѣетъ видъ треугольника $1'23'$ со знакомъ $(-)$.

Если бы разсматривалась нагрузка по низу, то получились бы тѣ же двѣ линіи, но съ обратными знаками предыдущимъ, и потому инфлюентная линия усилія стойки $22'$ имѣла бы видъ того же треугольника $1'23'$, но со знакомъ $+$.

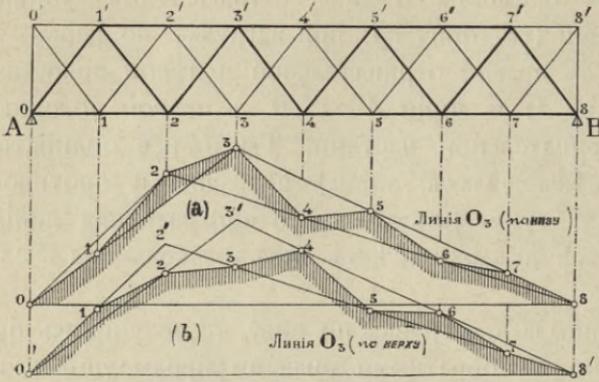
93. Въ случаѣ фермъ съ криволинейными поясами (фиг. 165), инфлюентная линия усилій въ частяхъ рѣшетки, напр. D_4 раскоса $2'4$, строится какъ и для фермъ съ прямыми поясами, вписывая въ инфлюентную линию раскоса той простой фермы, которой онъ принадлежитъ, рядъ треугольниковъ, имѣющихъ вершины на этой инфлюентной линіи подъ узлами разсматриваемой фермы, а концы оснований — въ смежныхъ узлахъ сложной фермы, принадлежащихъ другимъ простымъ фермамъ. Такимъ образомъ для раскоса $2'4$ получается линия $A-1-2-3-4-5-6-7-B$.



Фиг. 165.

94. Пояса. Такъ какъ пояса сложныхъ фермъ являются общими для всѣхъ простыхъ фермъ, составляющихъ сложную, то усиліе какой-нибудь части пояса равно суммѣ усилій, найденныхъ для этой части во всѣхъ простыхъ фермахъ. Пусть напр. дана двойная сложная ферма съ прямыми поясами и нагрузкой по низу (фиг. 166), составленная изъ двухъ простыхъ фермъ (первой — толсто вычерченной и второй — тонко). Усиліе O_3 части $2'3'$ верхняго пояса при положеніяхъ груза $P=1$ въ узлахъ первой

простой фермы, т. е. четных $0, 2, 4 \dots$ выражается ординатами, соответствующими инфлюентной линии верхняго пояса

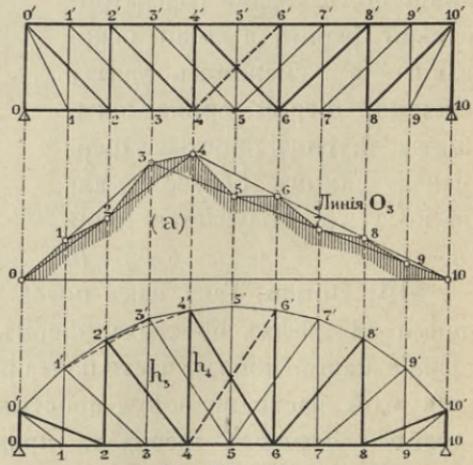


Фиг. 166.

первой фермы въ видѣ треугольника $0-2-8$, а при положеніяхъ груза $P=1$ въ нечетныхъ узлахъ $1, 3, 5, \dots$ т. е. въ узлахъ второй простой фермы, усиліе той же части пояса выражается ординатами инфлюентной линии въ

видѣ тр-ка $0-3-8$, соответствующей второй простой фермѣ. Такъ какъ между каждыми двумя смежными узлами фермы инфлюентная линия измѣняется по прямой, то стоитъ только соединить прямыми концы каждой изъ двухъ смежныхъ ординатъ, чтобы получить искомую инфлюентную линію усилія O_3 части $2'3'$ верхняго пояса данной сложной фермы (верхняя линія O_3).

При нагрузкѣ *поверху*, для линіи усилія O_3 верхняго пояса нужно взять подъ верхними узлами первой простой фермы, т. е. нечетными узлами $1', 3', 5' \dots$ ординаты инфлюентной линіи въ видѣ треугольника $0'-2'-8$, соответствующей первой фермѣ, а подъ верхними узлами $0, 2', 4', \dots$ второй фермы—ординаты линіи въ видѣ треугольника $0'-3'-8'$, относящейся ко второй фермѣ, и соединивъ концы смежныхъ ординатъ прямыми, получимъ инфлюентную линію O_3 для нагрузки поверху (нижняя линія O_3).



Фиг. 167 и 168.

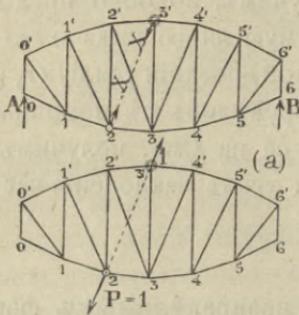
Для фермъ со стойками расположеніе нагрузки поверху или по низу не измѣняетъ инфлюентной линіи усилія поясовъ (фиг. 167).

Въ случаѣ фермы съ криволинейнымъ поясомъ (фиг. 168), рассматриваемая часть пояса $2'3'$ не совпадаетъ по положенію ни съ поясомъ $2'4'$ первой (толстой) простой фермы, ни съ поясомъ $1'3'$ второй фермы. Поэтому инфлюэнтная линия опредѣляется для горизонтальной проекціи усилія пояса $2'4'$, равной $M_4 : h_4$, первой фермы и проекціи усилія пояса $1'3'$, равной $M_3 : h_3$, второй фермы, имѣющихъ видъ треугольника $0-4-10$ въ первой фермѣ и тр-ка $0-3-10$ во второй фермѣ. Взявъ ординаты подъ узлами первой фермы на принадлежащей ей линіи $0-4-10$ и подъ узлами второй фермы ординаты на инфлюэнтной линіи $0-3-10$ и соединивъ концы ординатъ прямыми, получимъ, подобно предыдущей фермѣ съ прямыми поясами, инфлюэнтную линію вида $0-1-2-3-4 \dots -10$ для горизонтальной проекціи усилія O_3 рассматриваемой части верхняго пояса. Опредѣливъ съ помощью этой линіи величину $O_3 C \alpha$ и раздѣливъ ее на $C \alpha \alpha_3$, получимъ самое усиліе O_3 , гдѣ черезъ α_3 обозначенъ уголъ наклоненія части $2'3'$ пояса къ горизонту.

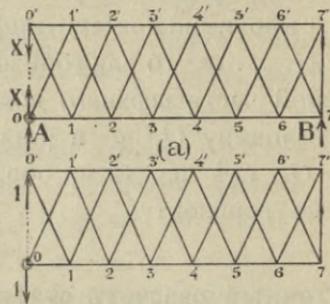
2. Точный расчетъ статически неопредѣлимыхъ фермъ.

95. Первый способъ. Извѣстно, что всѣ усилія въ фермѣ статически опредѣлимы, т. е. могутъ быть найдены изъ условій равновѣсія статики твердаго тѣла, если число m элементовъ фермы равно $2n-3$, гдѣ n —число узловъ фермы (см. стр. 82). Разсмотримъ теперь какую-нибудь ферму, въ которой число элементовъ $m=2n-2$ превышаетъ необходимое на одинъ элементъ, т. е. ферму съ однимъ статически неизвѣстнымъ усиліемъ X . Какого элемента усиліе принять такимъ неизвѣстнымъ—предоставляется усмотрѣнію каждаго. Напр. въ фермѣ (фиг. 169) можно за неизвѣстное принять усиліе излишняго элемента $23'$, а въ фермѣ (фиг. 170)—элемента $00'$. Удаливъ лишній элементъ изъ фермы и замѣнивъ его дѣйствіе двумя силами X , равными и противоположными, представляющими усиліе этого элемента, мы получимъ статически опредѣлимую ферму съ одной неизвѣстной внѣшней силой X , величина которой найдется изъ условія, что измѣненіе разстоянія между узлами, напр. 2 и $3'$ (фиг. 169), равно удлинению или укороченію выдѣленнаго элемента подъ вліяніемъ его усилія X .

Обыкновенно перемѣщенія точекъ фермы вслѣдствіе деформации рассматриваются по отношенію къ неподвижной горизонтальной плоскости AB , проходящей черезъ опоры A и B . Но послѣ того какъ ферма освобождена отъ опоръ A и B замѣной ихъ дѣйствія двумя извѣстными силами, мы можемъ рассматривать перемѣщенія такой свободной фермы и относительно другой какой-нибудь плоскости, напр. плоскости $23'$, проходящей черезъ узлы 2 и $3'$, при чемъ одну изъ этихъ точекъ, напр. узелъ $3'$, мы можемъ рассматривать какъ неподвижную или неизмѣнимо закрѣпленную. Такая замѣна неподвижной точки B и



Фиг. 169.



Фиг. 170.

неподвижной плоскости AB точкою $3'$ и плоскостью $23'$, неизмѣняющими своего положенія при деформации, очевидно не нарушаетъ ни условій равновѣсія фермы, ни относительныхъ перемѣщеній узловъ фермы при деформации, только послѣдняя теперь рассматривается по отношенію къ плоскости $3'2$ вмѣсто прежней плоскости AB . Очевидно результатъ получается тотъ же, если плоскости фермы во время деформации послѣдней мы сообщили бы поступательное перемѣщеніе, равное и обратное перемѣщенію узла $3'$, и вращеніе, равное и обратное вращенію прямой $23'$, соединяющей узлы 2 и $3'$. Такимъ образомъ на основаніи тѣхъ или другихъ соображеній мы можемъ данную ферму, находящуюся въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ нагрузки, силъ X и $-X$ и опорныхъ реакцій A и B , рассматривать какъ закрѣпленную въ точкѣ $3'$. Чтобы опредѣлить подъ вліяніемъ этихъ силъ перемѣщеніе точки 2 по отношенію къ точкѣ $3'$, какъ извѣстно (ч. I, стр. 243), нужно по направленію искомага перемѣщенія точки 2 приложить въ послѣдней силу $P=1$, вызы-

вающую реакцію точки 3', равную—1, найти вызываемыя при этомъ напряженія n въ частяхъ фермы и подставить затѣмъ ихъ въ извѣстную формулу

$$\delta_2 = \Sigma \frac{Nn}{E\omega} s,$$

гдѣ N —представляетъ усилія частей фермы подѣ влияніемъ данной нагрузки, опорныхъ реакцій A и B и силъ X и— X .

Усиліе N каждаго элемента можно представить какъ сумму усилія N_0 отъ дѣйствія той же данной нагрузки и тѣхъ же реакцій A и B , когда $X=0$, и усилія отъ дѣйствія силы X . Послѣдняя дѣйствуетъ въ противоположномъ направленіи съ силою $P=1$, поэтому усиліе въ элементахъ отъ дѣйствія силы X выразится черезъ— nX . Слѣд. усиліе $N=N_0-nX$ и

$$\delta_2 = \Sigma \frac{(N_0 - nX)n}{E\omega} s = \Sigma \frac{N_0ns}{E\omega} - X\Sigma \frac{n^2s}{E\omega}.$$

Приравнявъ δ_2 удлинению элемента 23' подѣ влияніемъ усилія X , т. е. $\frac{Xs'}{E\omega}$, получимъ уравненіе

$$\Sigma \frac{N_0n}{E\omega} s - X\Sigma \frac{n^2s}{E\omega} = X \frac{s'}{E\omega'} \text{ или } \Sigma \frac{N_0n}{E\omega} s = X \left(\Sigma \frac{n^2s}{E\omega} + \frac{s' \cdot 1^2}{E\omega'} \right).$$

Знакъ Σ распространяется на всѣ элементы, кромѣ излишняго 23'. Такъ какъ во второй части уравненія усиліе n соотвѣтствуетъ случаю, когда ферма нагружена силою $P=1$, т. е. когда усиліе въ элементѣ 23' равно—1, то знакъ Σ можно распространить на всѣ элементы фермы, включая и 23', какъ во второй, такъ и въ первой части, гдѣ для элемента 23' усиліе N_0 по условію равно нулю. Поэтому, распространяя знакъ Σ на всѣ элементы фермы, можемъ переписать

$$\Sigma \frac{N_0n}{E\omega} s = X\Sigma \frac{n^2s}{E\omega}, \text{ или } X = \frac{\Sigma \frac{N_0ns}{E\omega}}{\Sigma \frac{n^2s}{E\omega}} \dots \dots \dots (67)$$

Если для удобства вычисленій, при постоянномъ E , назовемъ величину $\frac{n^2s}{\omega}$ для каждаго элемента черезъ u , то значеніе усилія X выразится черезъ $X = \Sigma \frac{N_0u}{n} : \Sigma u$.

96. Второй способъ. Тотъ же результатъ можетъ быть полученъ непосредственно, если примѣнить начало возможныхъ пере-

мѣщеній къ равновѣсію фермы, когда въ элементѣ 23' усиліе $X=1$, а всѣ внѣшнія силы—равны нулю, при чемъ за возможные перемѣщенія принимаются деформации фермы при данной нагрузкѣ, когда въ элементѣ 23' вызывается усиліе X .

Такъ какъ для рассматриваемаго равновѣсія внѣшнія силы равны нулю, то $\Sigma n \cdot \Delta s = 0$; но для каждаго элемента $\Delta s = \frac{Ns}{E\omega}$ и $N = N_0 + nX$, поэтому $\Sigma n \frac{Ns}{E\omega} = \Sigma n \frac{(N_0 + nX)s}{E\omega} = 0$, откуда

$$X = -\Sigma \frac{N_0 n s}{E\omega} : \Sigma \frac{n^2 s}{E\omega} * \dots \dots \dots (67')$$

Этимъ же способомъ легко опредѣлить и *вліяніе измѣненія температуры*. Какъ извѣстно, въ статически опредѣлимыхъ фермахъ измѣненіе длины одного элемента не измѣняетъ длины другихъ, а потому измѣненіе температуры одного элемента не вызываетъ ни деформаций, ни усилій въ остальныхъ элементахъ фермы, чего нельзя уже сказать про фермы статически неопредѣлимыхъ.

Пусть температура элемента 23' повысилась на t° (фиг. 169). При этомъ длина этого элемента увеличится и $\delta_2 = s' \alpha t$, гдѣ α —коэффициентъ линейнаго расширенія. Въ этомъ элементѣ вызывается усиліе X , а въ остальныхъ $N = nX$ и измѣненія ихъ длины $\Delta s = \frac{N}{E\omega} s = \frac{nX}{E\omega} s$, а въ элементѣ 23' еще удлиненіе $\frac{X}{E\omega'} s'$. Принявъ эти доформации за возможные перемѣщенія для случая равновѣсія фермы, когда въ элементѣ 23' усиліе $n = X = 1$, а въ остальныхъ $= n$, выразимъ условіе равновѣсія $\Sigma n \cdot \Delta s = 0$, или $\Sigma n \frac{nX}{E\omega} s + 1 \cdot \left(\delta_2 + \frac{X}{E\omega'} s' \right) = 0$, въ которомъ знакъ Σ распространяется на всѣ элементы, кромѣ 23', а второй членъ—относится къ этому послѣднему, котораго усиліе $n = 1$. Откуда

$$X \cdot \left(\Sigma \frac{n^2 s}{E\omega} + \frac{s' s'}{E\omega'} \right) = -\delta_2 \cdot 1 = -s' \alpha t.$$

Или, распространяя знакъ Σ на всѣ элементы, включая и данный 23' съ усиліемъ $n = 1$, имѣемъ:

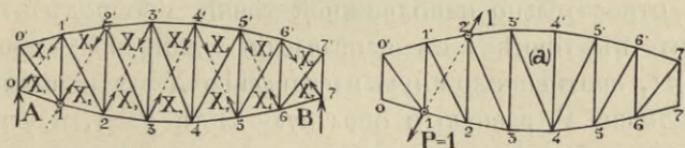
$$X \Sigma \frac{n^2 s}{E\omega} = -s' \alpha t, \text{ откуда } X = \frac{-s' \alpha t}{\Sigma u} \dots \dots \dots (68)$$

*) Разница въ знакахъ соотвѣтствуетъ опредѣленію усилій n въ послѣднемъ случаѣ отъ силы $X = 1$, а въ первомъ отъ противоположной силы $P = 1$.

При пониженіи температуры происходит отрицательное приращеніе длины $23'$ элемента и величина усилія X получается съ обратнымъ предыдущему знакомъ.

Относительно усилій n , вызываемыхъ въ элементахъ статически неопредѣлимыхъ фермъ дѣйствіемъ силы $X=1$, слѣдуетъ вообще замѣтить, что они равны нулю для всѣхъ элементовъ фермы (фиг. 169), кромѣ частей $2'3'$, $33'$, $2'3$ 23 и $22'$, а въ фермѣ (фиг. 170) они имѣютъ значеніе для всѣхъ элементовъ фермы, въ чемъ легко непосредственно убѣдиться, опредѣляя въ ней усилія отъ силы $X=1$ (см. ниже фиг. 173).

97. Ферма со многими лишними элементами. Разсмотримъ теперь ферму (фиг. 171) съ нѣсколькими лишними элементами, обозначенными пунктиромъ. Мы можемъ ихъ удалить



Фиг. 171.

изъ фермы, замѣнивъ ихъ дѣйствіе на ферму двойными и противоположными силами $X_1, X_2, X_3 \dots$, равными усиліямъ этихъ элементовъ. Освободивъ ферму отъ опоръ замѣной ихъ дѣйствія известными ихъ реакціями A и B , мы получимъ на плоскости свободную статически опредѣлимую ферму, находящуюся въ равновѣсіи и подверженную дѣйствію известныхъ силъ—нагрузки и опорныхъ реакцій—и неизвестныхъ двойныхъ силъ $X_1, X_2, X_3 \dots$.

Назовемъ черезъ N усиліе элементовъ при этой нагрузкѣ и черезъ N_0 —усиліе, когда неизвестныя силы $X_1, X_2, X_3 \dots$ отсутствуютъ. Кромѣ того назовемъ черезъ n_1 усиліе элементовъ той же статически опредѣлимой фермы, когда она подвержена дѣйствію только двухъ равныхъ и противоположныхъ силъ $X_1=1$, а остальные силы—нагрузка, реакціи опоръ и силы $X_2, X_3 \dots$ отсутствуютъ. Точно также обозначимъ черезъ n_2 —усиліе элементовъ, когда ферма подвержена дѣйствію только силъ $X_2=1$;—черезъ n_3 , когда дѣйствуютъ на ферму только силы $X_3=1$, и т. д. Такъ какъ на ферму дѣйствуютъ силы

$X_1, X_2, X_3 \dots$, неравныя единицы, то вызываемыя каждой изъ нихъ усилія могутъ быть выражены черезъ $n_1 X_1, n_2 X_2, n_3 X_3 \dots$, а при одновременномъ дѣйствіи всѣхъ силъ — нагрузки съ реакціями опоръ и силъ $X_1, X_2, X_3 \dots$, усиліе N элементовъ можетъ быть написано въ видѣ

$$N = N_0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 X_3 + \dots$$

Чтобы опредѣлить измѣненіе разстоянія между двумя какими-нибудь точками, напримѣръ точки 1 относительно точки 2' при дѣйствіи всѣхъ силъ на ферму, мы можемъ перемѣщеніе одной изъ этихъ точекъ, напр. 2' принять равнымъ нулю или закрѣпить находящуюся въ равновѣсіи свободную ферму въ точкѣ 2', не нарушая равновѣсія фермы и относительныхъ перемѣщеній ея точекъ. При такомъ состояніи фермы, искомое перемѣщеніе точки 1 относительно неподвижной точки 2' опредѣлится, если приложить въ точкѣ 1 въ направленіи удлиненія элемента 12' силу $P=1$, противоположную направленію $X_2=1$ и вызывающую реакцію точки 2', равную и обратную силѣ $P=1$, и усиліе $-n_2$ въ элементахъ фермы; затѣмъ примѣнить извѣстную формулу $-\sum \frac{N n_2}{E \omega} s$ и приравнять это перемѣщеніе удлиненію элемента 12' подъ вліяніемъ его усилія X_2 , т. е. $-\sum \frac{N n_2}{E \omega} s = \frac{X_2}{E \omega_2} s_2$ или

$$\sum \frac{(N_0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 X_3 + \dots) n_2}{E \omega} s + \frac{X_2}{E \omega_2} s_2 = 0,$$

гдѣ знакъ суммы распространяется только на элементы статически опредѣлимой фермы (исключая лишніе элементы). Примѣняя тѣ же разсужденія относительно каждаго изъ лишнихъ элементовъ, получимъ столько уравненій, сколько имѣется неизвѣстныхъ усилій $X_1, X_2, X_3 \dots$:

$$\sum (N_0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 X_3 + \dots) \frac{n_1 s}{E \omega} + \frac{X_1 s_1}{E \omega_1} = 0$$

$$\sum (N_0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 X_3 + \dots) \frac{n_2 s}{E \omega} + \frac{X_2 s_2}{E \omega_2} = 0 \dots (69)$$

$$\sum (N_0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 X_3 + \dots) \frac{n_3 s}{E \omega} + \frac{X_3 s_3}{E \omega_3} = 0$$

.....

.....

Рѣшая эти уравненія первой степени относительно X_1, X_2, X_3 найдемъ значенія неизвѣстныхъ усилій элементовъ.

98. Левыя части этихъ уравненій могутъ быть разсматриваемы какъ частныя производныя по $X_1, X_2, X_3 \dots$ отъ уравненія работы T внутреннихъ силъ всѣхъ элементовъ фермы:

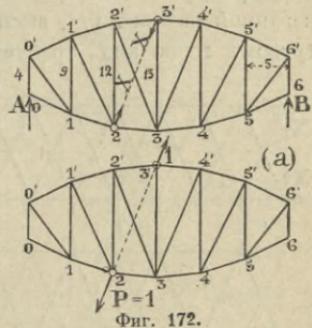
$$T = \frac{1}{2} \Sigma \frac{N^2}{E\omega} s = \frac{1}{2} \Sigma \frac{(N_0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 X_3 + \dots)^2}{E\omega} s + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{X_1^2}{E\omega_1} s_1 + \frac{X_2^2}{E\omega_2} s_2 + \frac{X_3^2}{E\omega_3} s_3 + \dots \right), \text{ включая и лишніе элементы}$$

съ усиліями $X_1, X_2, X_3 \dots$, работу которыхъ выражаетъ второй членъ суммы.

Такимъ образомъ недостающія уравненія для опредѣленія неизвѣстныхъ усилій $X_1, X_2, X_3 \dots$ статически неопредѣлимой фермы могутъ быть также написаны изъ условія, чтобы работа внутреннихъ силъ фермы для всѣхъ элементовъ ея при деформации отъ данной нагрузки была наименьшей, т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial X_1} = 0, \frac{\partial T}{\partial X_2} = 0, \frac{\partial T}{\partial X_3} = 0 \text{ и т. д.}$$

Примѣръ 1. Разсмотримъ показанную на фиг. 169 и 172 ферму пролетомъ 30 м., имѣющую двѣ оси симметріи, высоты $h_0=4$, $h_1=9$, $h_2=12$ и $h_3=13$ м. и нагрузку по 20,25 т. въ верхнихъ узлахъ 3', 4' и 5', и опредѣлимъ усиліе X лишняго элемента 23'. Отъ этой нагрузки при $X=0$ находимъ слѣдующія значенія усилій N_0 въ элементахъ 23, 2'3', 2'3, 22' и 33': $O_3=-24,12$, $U_3=18,13$, $D_3=17,864$, $V_2=-13,79$ и $V_3=-13,72$ т. Разсмотрѣвъ эту ферму подъ влияніемъ двухъ силъ $P=1$ (фиг. 172 а), находимъ изъ подобія $\Delta\Delta$ -ковъ значенія усилій n тѣхъ же 5 элементовъ:



$$O_3 = 1 \cdot \frac{2'3'}{23} = 0,374, U_3 = 1 \cdot \frac{23}{23'} = 0,374, V_2 = 1 \cdot \frac{33'}{23'} = 0,967,$$

$$V_3 = 1 \cdot \frac{22'}{23'} = 0,891 \text{ и изъ равновѣсія узла } 2': D_3 = -O_3 \frac{2'3'}{2'3'} = -1,$$

а для всѣхъ остальныхъ элементовъ усиліе n равно нулю, поэтому для нихъ не опредѣлялись значенія N_0 , такъ какъ въ формулу X входятъ они съ множителями n , равными нулю.

Элементы.	Длина с.м.	ω с.м. ²	n	N_0 кл.	$\frac{N_0 n s}{\omega}$	$\frac{n^2 s}{\omega}$
2'3'	5,02	100	0,374	- 24000	- 50 6	0,00702
23	5,02	110	0,374	18130	309,4	0,00638
2'3	13,46	60	- 1,000	17864	- 4006,6	0,22434
22'	12,00	200	0,967	- 13790	- 800,1	0,05611
33'	13,00	80	0,891	- 13720	- 1986,1	0,12906
23'	13,46	80	- 1,000	0	0	0,16828
Σ					- 6934,0	0,59116

$$X = \frac{\Sigma N_0 n s : \omega}{\Sigma n^2 s : \omega} = - \frac{6934,0}{0,59116} = - 11730 \text{ кл., т. е. раскось } 23' \text{ сжать}$$

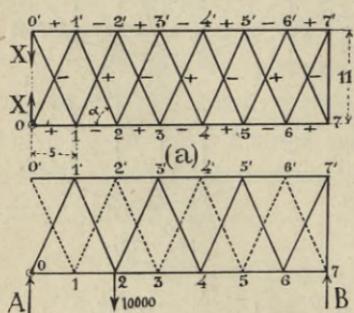
усилием $D'_3 = X = - 11730$ кл.

Зависящая от X усилия N во остальных пяти элементах определяются по формуле $N = N_0 - nX$, соответствующей значениям n , найденным от $P = 1$:

$$O_2 = - 24000 + 0,374 \cdot 11730 = - 19613, U_3 = 18130 + 0,374 \cdot 11730 = 22517, \\ D_3 = 17864 - 1 \cdot 11730 = 6134, V_2 = - 13790 + 0,967 \cdot 11730 = - 2447 \text{ и} \\ V_3 = - 13720 + 0,891 \cdot 11730 = - 3269 \text{ кл.}$$

Усилия во остальных элементах фермы не зависят от X , так что данная ферма имеет только одну статически неопределимую панель.

Примеръ 2. Для фермы с параллельными поясами пролетомъ 35 м., показанной на фиг. 173, высотой 11 м. и нагруженный в нижнемъ узлѣ 2 грузомъ 10000 кл., требуется определить усилие X в лѣвой стойкѣ oo' .



Фиг. 173.

Удаливъ стойку и замѣнивъ ея дѣйствіе силами X , соответствующими растягивающему усилию, определимъ сперва усилие в частях фермы, когда $X = 1$, и нѣтъ другой нагрузки фермы. Изъ послѣдовательнаго разсмотрѣнія равновѣсія узловъ $o, o', 1, 1'$ и т. д. находимъ, что всѣ усилия поясовъ равны 1. $ctg \alpha$ со знакомъ $+$ въ нечетныхъ панеляхъ и знакомъ $-$ въ четныхъ; усилия раскосовъ также равны ± 1 : Sna , при чемъ верхній знакъ относится къ раскосамъ четныхъ панелей, а нижній — къ нечетнымъ, и наконецъ усилие стойки $77' = 1$

Отъ нагрузки $P = 10000$ кл. в узлѣ 2 при $X = 0$ находимъ изъ равновѣсія узловъ $o', 1, 2', 3, \dots$, что раскосы, представленные пунктиромъ, вовсе не работаютъ, а усилия остальныхъ раскосовъ равны $\pm \frac{A}{Sna}$ или $\pm \frac{B}{Sna}$, гдѣ реакции опоръ $A = \frac{5}{7} P$ и $B = \frac{2}{7} P$.

Найденныя усилія N_0 и n , а также и размѣры всѣхъ частей показаны въ слѣдующей таблицѣ.

	s	ω	N_0	n	$\frac{N_0 n s}{\omega}$	$\frac{n^2 s}{\omega}$
O_1	5,00	112	0	0,4545	0	0,00922
O_2	5,00	112	— 6494	— 0,4545	131,76	0,00922
O_3	5,00	156	— 4694	0,4545	— 94,60	0,00662
O_4	5,00	168	— 3896	— 0,4545	52,70	0,00615
O_5	5,00	156	— 3896	0,4545	— 56,75	0,00662
O_6	5,00	112	— 1299	— 0,4545	26,36	0,00922
O_7	5,00	112	— 1299	0,4545	— 26,36	0,00922
U_1	5,00	102	3247	0,4545	72,34	0,01013
U_2	5,00	102	3247	— 0,4545	— 72,34	0,01013
U_3	5,00	140	5195	0,4545	84,33	0,00738
U_4	5,00	152	5195	— 0,4545	— 77,67	0,00680
U_5	5,00	140	2597	0,4545	42,15	0,00738
U_6	5,00	102	2597	— 0,4545	— 57,86	0,01013
U_7	5,00	102	0	0,4545	0	0,01013
D_1	12,08	63	0	— 1,0984	0	0,23134
D_2	12,08	44	7850	1,0984	2367,28	0,33124
D_3	12,08	28	0	— 1,0984	0	0,52051
D_4	12,08	28	— 3138	1,0984	— 1487,03	0,52051
D_5	12,08	28	0	— 1,0984	0	0,52051
D_6	12,08	44	— 3138	1,0984	— 946,30	0,33124
D_7	12,08	63	0	— 1,0984	0	0,23134
D'_1	12,08	94	— 7850	— 1,0984	1108,77	0,15505
D'_2	12,08	70	0	1,0984	0	0,20820
D'_3	12,08	50	3138	— 1,0984	— 832,74	0,29149
D'_4	12,08	50	0	1,0984	0	0,29149
D'_5	12,08	50	3138	— 1,0984	— 832,74	0,29149
D'_6	12,08	70	0	1,0984	0	0,20820
D'_7	12,08	94	3138	— 1,0984	— 442,94	0,15505
V_7	11,00	100	— 2857	1,0	— 314,27	0,11000
V_0	11,00	100	0	1,0	0	0,11000
Σ					— 1355,91	4,62601

Слѣдовательно усиліе первой стойки V_0 равно:

$$X = - \frac{\sum N_{0ns} : \omega}{\sum n^2 s : \omega} = \frac{1355,91}{4,62601} = 293,10 \text{ кл.},$$

а усилія въ остальныхъ частяхъ найдутся по формулѣ $N_0 + nX$, такъ какъ усилія n опредѣлены отъ силъ $X=1$, а не противоположныхъ имъ силъ $P=1$, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ. Отсюда можно видѣть, что изображенная пунктиромъ система раскосовъ передаетъ на лѣвую стойку V_0 отъ груза 10000 кил. только $\frac{293,1}{A} = \frac{7}{5} \cdot \frac{293,1}{10000} = 0,041$; а по приближенному способу, разбивая на двѣ простѣйшія фермы, нашли бы $V_0 = 0$, т. е. погрѣшность не превышала бы 4,1%.

3. Арочныя сквозныя фермы.

99. Арки съ 2 шарнирами. Расчетъ усилій въ арочныхъ фермахъ отъ дѣйствія вертикальной нагрузки дѣлается съ помощью инфлюентныхъ линій для частей арки на слѣдующихъ основаніяхъ.

Извѣстно, что реакціи опоръ арки съ двумя шарнирами имѣютъ вертикальныя составляющія, равныя реакціямъ простой балки того же пролета и отъ той же нагрузки, и горизонтальныя составляющія, равныя распору H арки. Поэтому расчетъ усилій въ частяхъ арки дѣлается какъ для простой балочной фермы, подверженной: 1) дѣйствию вертикальной нагрузки, т. е. при $H=0$ и 2) дѣйствию въ опорныхъ точкахъ двухъ горизонтальныхъ силъ, взаимно противоположныхъ и равныхъ распору H арки. Въ первомъ случаѣ усилія въ частяхъ арки отъ груза $P=1$ обозначаемъ черезъ n_1 , а во второмъ случаѣ отъ распора $H=1$ черезъ n_2 .

Такъ какъ при расчетѣ усилій по способу Риттера въ первомъ случаѣ при дѣйствиі одного груза $P=1$ въ отсѣченной воображаемымъ разрѣзомъ части фермы единственной внѣшней силой является реакція одной изъ опоръ A или B фермы, то представляется весьма удобнымъ сперва составить одну основную таблицу усилій частей фермы въ предположеніи, что реакція $A=1$ или $B=1$, и затѣмъ, при положеніи груза $P=1$ въ различныхъ узлахъ фермы, найденныя значенія отъ $A=1$ ($B=1$) только умножать на соотвѣтственную величину реакціи опоры A или B , чтобы получить усилія n_i въ частяхъ арки отъ груза $P=1$ при $H=0$.

Точно также таблица усилий n_2 въ частяхъ арки, разсматриваемой какъ простая балка, при дѣйствиі двухъ горизонтальныхъ силъ $H=1$, позволяетъ легко найти усилія отъ распора H , умножая значенія n_2 на величину H соответствующаго распора арки. Сумма обоихъ усилий вида $n_1 + n_2 H$ очевидно представляетъ усиліе n въ самой аркѣ.

Формулу для опредѣленія величины распора H въ аркѣ съ 2 шарнирами можно вывести на основаніи слѣдующихъ соображеній. Сохраняя обозначенія черезъ n_1 для усилія отъ груза $P=1$ въ частяхъ арки, разсматриваемой какъ балочная ферма, то есть при $H=0$, а черезъ n_2 — для усилія въ той же фермѣ отъ дѣствія горизонтальной силы $H=1$, приложенной къ подвижной опорѣ A въ направленіи отъ A къ B , и называя черезъ s , ω и E длину части, площадь ея сѣченія и модуль нормальной упругости, мы можемъ опредѣлить величину $\Delta_1 l$ горизонтальнаго перемѣщенія точки A подвижной опоры балочной фермы отъ груза $P=1$ по извѣстной формулѣ (стр. 243, ч. I фор. 236), прилагая въ точкѣ A въ направленіи ея перемѣщенія $\Delta_1 l$ силу 1 , противоположную $H=1$ и вызывающую слѣд. напряженіе — n_2 :

$$\Delta_1 l = - \Sigma \frac{n_1 n_2}{E \omega} s,$$

а уменьшеніе $\Delta_2 l$ разстоянія между опорами балочной фермы отъ горизонтальной силы H найдется по той же общей формулѣ

$$\Delta_2 l = \Sigma \frac{n_2 (H n_2)}{E \omega} s = H \Sigma \frac{n_2^2}{E \omega} s.$$

Такъ какъ разстояніе между опорами A и B арки не измѣняется, то оба перемѣщенія должны быть равны другъ другу; слѣдовательно

$$H \Sigma \frac{n_2^2 s}{E \omega} = - \Sigma \frac{n_1 n_2 s}{E \omega}, \text{ откуда, по сокращеніи на } E,$$

$$H = - \Sigma \frac{n_1 n_2 s}{\omega} : \Sigma \frac{n_2^2 s}{\omega} (70)$$

Ту же формулу мы можемъ получить, разсматривая равновѣсіе арки, какъ простой балочной фермы, при дѣйствиі горизонтальной силы $H=1$, и примѣняя къ нему начало возможныхъ перемѣщеній, считая за таковыя деформаціи отъ груза $P=1$ самой арки, которому въ частяхъ арки соответствующь напряженіе n и деформація

$$\Delta s = \frac{n}{E \omega} s = \frac{n_1 + H n_2}{E \omega} s.$$

Такъ какъ при дѣйстви $P=1$ на арку перемѣщенія точекъ приложенія внѣшнихъ силъ — реакцій опоръ арки — равны нулю, то для разсматриваемаго равновѣсія балочной фермы при дѣйстви $H=1$ необходимо, чтобы

$$\sum n_2 \Delta s \text{ или } \sum n_2 \cdot \frac{(n_1 + Hn_2)}{E\omega} s = 0, \text{ поэтому}$$

$$\sum \frac{n_1 n_2 s}{E\omega} = - H \sum \frac{n_2^2 s}{E\omega},$$

откуда для распора H находимъ ту же формулу

$$H = - \sum \frac{n_1 n_2 s}{\omega} : \sum \frac{n_2^2 s}{\omega}.$$

Изъ этой формулы между прочимъ можно видѣть, что величину распора H можно найти, не зная самыхъ площадей ω сѣченія частей арки, а имѣя только отношенія ихъ или числа имъ пропорціональныя, которыя при проектированіи арки можно предварительно выбрать изъ существующихъ сооружений.

Разсчетъ арки рекомендуется вести въ слѣдующемъ порядкѣ. Приложивъ грузъ $P=1$ въ первомъ узлѣ, опредѣляютъ усилія n_1 во всѣхъ частяхъ арки, какъ простой балки, и располагаютъ ихъ въ первомъ вертикальномъ столбцѣ таблицы. Потомъ помѣщаютъ грузъ $P=1$ въ узлѣ № 2 арки, находятъ значенія усилій n_1 и располагаютъ ихъ во второмъ вертикальномъ столбцѣ таблицы, и т. д. до послѣдняго узла арки. Затѣмъ прилагаютъ силу $H=1$ и опредѣляютъ значенія усилій n_2 . Имѣя значенія n_1 и n_2 и задавшись числами пропорціональными площадямъ ω , вычисляютъ распоръ H отъ груза $P=1$, помѣщеннаго послѣдовательно въ узлахъ 1, 2, 3, . . . , и значенія $n_2 H$ для каждаго положенія груза; послѣднія располагаютъ вертикальными столбцами во второй таблицѣ. Складывая значенія n_1 каждаго столбца первой таблицы со значеніями $n_2 H$ того же столбца второй таблицы составляемъ третью таблицу усилій $n = n_1 + n_2 H$ въ аркѣ, расположенныхъ въ ней также вертикальными столбцами, соотвѣтственно положенію груза $P=1$ въ узлахъ 1, 2, 3 и т. д. Въ этой послѣдней таблицѣ № 3 каждый горизонтальный рядъ будетъ представлять усилія n какой-нибудь части арки при положеніяхъ груза $P=1$ въ узлахъ 1, 2, 3 и т. д., т. е. значенія ординатъ инфлюентной линіи усилія этой части, посред-

ством которых искомая инфлюэнтная линия въ видѣ многоугольника можетъ быть построена. Вычисливъ величину тангенсовъ угловъ наклоненія $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ сторонъ этой линии, опредѣляютъ невыгоднѣйшія положенія поѣзда по знаку производной $R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + \dots$.

100. Распоръ отъ *измѣненія температуры* на $\pm t^\circ$ опредѣляется по формулѣ

$$H = \pm \frac{E \alpha t}{\sum \frac{n^2 s}{\omega}} \dots \dots \dots (71)$$

Ее можно получить, подобно формулѣ распора отъ вертикальной нагрузки, рассматривая арку какъ простую балочную ферму, подверженную дѣйствию горизонтальной силы H на опорѣ и приравнивая перемѣщеніе Δl этой опорной точки (выражаемое, согласно предыдущему, через $\sum \frac{n_2 (H n_2) s}{E \omega}$) измѣненію длины арки $\alpha t l$ отъ температуры, т. е.

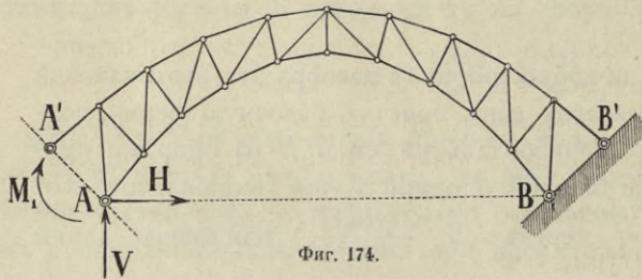
$$H \sum \frac{n_2^2 s}{E \omega} = \alpha t l, \text{ откуда}$$

$$H = \frac{E \alpha t l}{\sum \frac{n_2^2 s}{\omega}}$$

Въ этой формулѣ уже нельзя значенія ω площадей сѣченія элементовъ арки замѣнять пропорціональными имъ числами, а нужно имѣть величину самыхъ площадей. Поэтому при проектированіи фермы вліяніе температуры оцѣнивается приближенно, опредѣляя по формулѣ (250) стр. 257 ч. I. напряженіе n отъ температуры и уменьшая на его величину допускаемое напряженіе R для фермы. Этимъ путемъ при проектированіи устраняется вліяніе температуры и является возможность замѣнить площади сѣченія частей арки пропорціональными имъ числами, опредѣлить отъ вертикальной нагрузки распоръ H , усилія частей и, по допускаемому напряженію $R - n$, необходимыя для нихъ сѣченія.

Двухшарнирные ародчныя **фермы съ затяжкой** рассчитываются какъ простыя балочныя фермы съ однимъ лишнимъ элементомъ — затяжкой. Измѣненіе температуры въ такихъ фермахъ, какъ было уже выше указано (стр. 256), напряженій не вызываетъ.

101. Арки безъ шарнировъ. Арочная ферма съ двумя задѣланными пятами рассчитываются, подобно такимъ же аркамъ сплошного сѣченія, какъ ферма съ одной закрѣпленной опорой, если удалить другую опору и замѣнить ея дѣйствіе парой силъ съ моментомъ M_1 и двумя силами — вертикальной V и горизонтальной H , приложенными къ какой-нибудь неподвижной точкѣ фермы на опорѣ, напр. точкѣ A (фиг. 174). Для такой фермы, закрѣпленной однимъ концомъ BB' и подверженной дѣйствію



нагрузки, парѣ силъ M_1 и силамъ V и H , мы можемъ опредѣлить усилія въ частяхъ арки отъ каждой изъ этихъ 4 силъ, дѣйствующихъ отдѣльно.

Фиг. 174.

Назовемъ: 1) черезъ N_0 усилія, вызываемыя одной нагрузкой (когда $M_1 = H = V = 0$); 2) черезъ n_1 усилія, вызываемыя одной силой $H = 1$ (когда нѣтъ нагрузки и $M_1 = V = 0$) и слѣд. черезъ $n_1 H$ усилія отъ силы H ; 3) черезъ n_2 усилія, вызываемыя силой $V = 1$, когда нѣтъ ни нагрузки и $M_1 = H = 0$, и слѣд. черезъ $n_2 V$ — усилія отъ силы V ; и 4) черезъ n_3 усилія въ фермѣ отъ пары силъ $M_1 = 1$, когда нѣтъ нагрузки, ни силъ V и H , и слѣд. черезъ $n_3 M_1$ — усилія отъ пары M_1 . Очевидно, при одновременномъ дѣйствіи всѣхъ силъ, усиліе N частей арки выразится суммой отдѣльныхъ дѣйствій

$$N = N_0 + n_1 H + n_2 V + n_3 M_1,$$

въ которой неизвѣстны только три величины H , V , M_1 . Онѣ найдутся изъ трехъ уравненій, выражающихъ условія неподвижности конца AA' арки: 1) перемѣщеніе точки A арки при деформациі по горизонтальному направленію равно нулю, 2) перемѣщеніе ея по вертикальному направленію также равно нулю и 3) уголъ вращенія сѣченія AA' арки при деформациі равенъ нулю. Всѣ эти перемѣщенія могутъ быть выражены по общей формулѣ $\delta = \Sigma \frac{Nn}{E\omega} s$ (форм. 236 стр. 243 и форм. 225 стр. 236, ч. I).

Перемѣщеніе δ_1 точки A по горизонтальному направленію опредѣлится, если къ точкѣ A по этому направленію приложить силу 1, т. е. $H=1$, и найденныя отъ этой силы усилія n_1 подставить въ общую формулу, т. е.

$$\delta_1 = \Sigma \frac{N n_1}{E \omega} s = 0 \dots \dots \dots (72)$$

Перемѣщеніе δ_2 точки A по вертикальному направленію получится по общей формулѣ, подставляя вмѣсто n значеніе n_2 усилій, вызываемыхъ силой 1 по направленію вертикальнаго перемѣщенія, т. е. силой $V=1$. Слѣдовательно

$$\delta_2 = \Sigma \frac{N n_2}{E \omega} s = 0 \dots \dots \dots (73)$$

Наконецъ уголъ вращенія сѣченія AA' получится по той же формулѣ, замѣняя n усилиемъ n_3 , происходящимъ отъ дѣйствія пары силъ 1, приложенной къ AA' по направленію искомага вращенія, т. е. отъ $M_1=1$. Слѣдовательно

$$\varphi = \Sigma \frac{N n_3}{E \omega} s = 0 \dots \dots \dots (74)$$

Подставивъ въ найденныя три условія вмѣсто N его значеніе $N_0 + n_1 H + n_2 V + n_3 M_1$, получимъ уравненія, опредѣляющія значеніе неизвѣстныхъ H , V и M_1 :

$$\left. \begin{aligned} H \Sigma \frac{n_1^2}{E \omega} s + V \Sigma \frac{n_2 n_1}{E \omega} s + M_1 \Sigma \frac{n_1 n_3}{E \omega} s + \Sigma \frac{N_0 n_1}{E \omega} s &= 0 \\ H \Sigma \frac{n_2 n_1}{E \omega} s + V \Sigma \frac{n_2^2}{E \omega} s + M_1 \Sigma \frac{n_2 n_3}{E \omega} s + \Sigma \frac{N_0 n_2}{E \omega} s &= 0 \\ H \Sigma \frac{n_1 n_3}{E \omega} s + V \Sigma \frac{n_2 n_3}{E \omega} s + M_1 \Sigma \frac{n_3^2}{E \omega} s + \Sigma \frac{N_0 n_3}{E \omega} s &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (75)$$

Тѣ же уравненія получимъ, если выберемъ такія значенія перемѣнныхъ силъ H , V и M_1 въ закрѣпленіи арки, чтобы работа деформациі всѣхъ частей арки $T = \Sigma \frac{N^2}{2 E \omega} s$ была наименьшей.

Для этого необходимо

$$\frac{\partial T}{\partial H} = \Sigma \frac{N s}{E \omega} \frac{\partial N}{\partial H} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial V} = \Sigma \frac{N s}{E \omega} \frac{\partial N}{\partial V} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial T}{\partial M_1} = \Sigma \frac{N s}{E \omega} \frac{\partial N}{\partial M_1} = 0.$$

Такъ какъ $N = N_0 + n_1 H + n_2 V + n_3 M_1$ и $\frac{\partial N}{\partial H} = n_1, \frac{\partial N}{\partial V} = n_2$ и $\frac{\partial N}{\partial M_1} = n_3$, то $\frac{\partial T}{\partial H} = \Sigma \frac{N n_1 s}{E \omega} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial V} = \Sigma \frac{N n_2 s}{E \omega} = 0$ и $\frac{\partial T}{\partial M_1} = \Sigma \frac{N n_3 s}{E \omega} = 0$.

Рѣшивъ эти три уравненія, найдемъ значенія трехъ неизвѣстныхъ H , V и M_1 , а слѣд. усилія $N = N_0 + n_1 H + n_2 V + n_3 M_1$ всѣхъ частей арки.

XV. Давленіе земли.

102. Равновѣсіе земляной массы. Въ строительномъ дѣлѣ встрѣчается надобность поддерживать съ боковъ земляныя массы стѣнами. Такія стѣны извѣстны подъ именемъ *подпорныхъ стѣнъ*. Подпорная стѣна должна быть такъ устроена, чтобы долговременное и безопасное существованіе ея было обезпечено. Для удовлетворенія этому требованію форма и размѣры подпорной стѣнки должны быть такъ выбраны, чтобы она при дѣйствіи внѣшнихъ силъ обладала необходимой прочностью и устойчивостью. Внѣшними силами являются собственный вѣсъ P стѣны и давленіе на нее R_0 земляной массы. Первая сила легко опредѣляется по размѣрамъ стѣны; опредѣленіе же величины и положенія второй силы представляетъ болѣе сложную задачу и возможно при допущеніи нѣкоторыхъ условій.

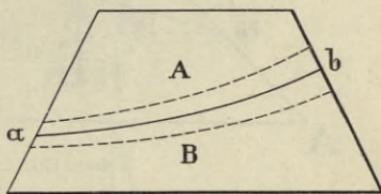
Разсмотримъ сперва вообще состояніе равновѣсія однородной земляной массы; мы будемъ предполагать ее ограниченной сверху призматической поверхностью съ горизонтальными ребрами и съ боковъ двумя плоскостями, перпендикулярными къ ребрамъ и находящимися на единицѣ разстоянія одна отъ другой (фиг. 175).

Представимъ себѣ внутри земляной массы плоскость и на ней какую-нибудь элементарную площадку $d\omega$, и пусть n и t означаютъ нормальную и касательную внутреннія силы, отнесенныя къ единицѣ площади. Тогда для равновѣсія раздѣляемыхъ площадкой элементовъ массы необходимо и достаточно, чтобы $t \leq nf + \gamma$, гдѣ f — коэффициентъ внутренняго тренія земли, а γ — сила сцепленія, или сила противодѣйствія разъединенію частицъ земли вдоль плоскости соприкосновенія. Умножая это равенство на величину площадки ω и суммируя элементарныя силы на всей плоскости, получимъ для послѣдней условія равновѣсія

$$T \leq Nf + \gamma\omega \text{ или } \frac{T}{\omega} \leq \frac{N}{\omega} f + \gamma,$$

т. е. для всякой плоскости, проведенной въ земляной массѣ, находящейся въ равновѣсїи, среднее касательное усиліе $\frac{T}{\omega}$ должно быть меньше суммы произведенія изъ коэффициента f внутренняго тренія на среднее нормальное усиліе $\frac{N}{\omega}$ и силы сцѣпленія γ . Если для какого-нибудь элемента плоскости $t = nf + \gamma$, то прилегающія къ нему частицы земли въ состоянїи скользить, одна по другой; если же это равенство будетъ имѣть мѣсто для всѣхъ элементовъ плоскости или вообще какой-нибудь цилиндрической поверхности ab , то послѣдняя называется *поверхностью скольженія*, а ея пересѣченіе ab съ перпендикулярной къ ней плоскостью называется *линіей скольженія* (фиг. 175). Очевидно, для нея неравенство обращается въ равенство

$$\frac{T}{\omega} = \frac{N}{\omega} f + \gamma.$$



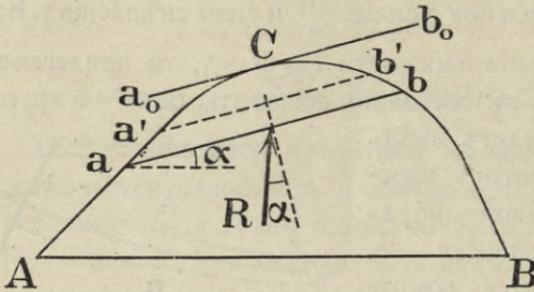
Фиг. 175.

При дальнѣйшихъ выводахъ мы будемъ принимать сцѣпленіе земли $\gamma = 0$, т. е. будемъ разсматривать самый неблагоприятный случай — случай рыхлой свѣженасыпанной земли. Очевидно, условія равновѣсія для такой земляной массы будутъ тѣмъ болѣе достаточны для равновѣсія массы, обладающей нѣкоторымъ сцѣпленіемъ. Въ этомъ случаѣ условія равновѣсія для элемента массы и для всей части, отсѣкаемой плоскостью, принимаютъ видъ

$$\frac{T}{\omega} \leq \frac{N}{\omega} f \text{ и } t \leq nf,$$

гдѣ $f = tg\varphi$ означаетъ коэффициентъ тренія земли. Оба неравенства показываютъ, что для равновѣсія земляной массы необходимо и достаточно, чтобы давленіе n на произвольно взятый элементъ $d\omega$ или плоскость внутри земляной массы составляло съ нормалью къ элементу или плоскости уголъ α , меньшій угла тренія φ земли по землѣ. Равенство угла α , составляемаго равнодѣйствующей давленія остальной земли на отдѣленную часть ея по плоскости ab , и угла тренія φ служитъ достаточнымъ условіемъ, чтобы плоскость ab была плоскостью скольженія.

Предположимъ, что масса земли, не имѣющая сцѣпленія и находящаяся въ равновѣсїи, ограничена какой-нибудь цилиндрической поверхностью ACB , на которой нѣтъ никакихъ силъ (фиг. 176).



Фиг. 176.

Пересѣчемъ эту массу какой-нибудь плоскостью ab , параллельной производящимъ цилиндрической поверхности. Отдѣленная часть aCb земляной массы находится въ равновѣсїи подѣ действиемъ собственного

вѣса Q и равнодѣйствующей R давленій на нее остальной части земли по плоскости ab . Слѣдовательно, эти двѣ силы равны и взаимно противоположны; кромѣ того уголъ α , составляемый силою R съ нормалью къ плоскости, или равный ему уголъ плоскости съ горизонтомъ, долженъ быть меньше угла тренія φ . Это условіе будетъ справедливо для всякой плоскости $a'b'$, параллельной ab , и остается справедливымъ и въ томъ случаѣ, когда сѣкущая плоскость ab обратится въ касательную a_0b_0 . Такимъ образомъ для равновѣсїя разсматриваемой земляной массы необходимо, чтобы направленіе ограничивающей массу поверхности или ея откосовъ составляло съ горизонтомъ уголъ, меньшій угла тренія. Если ограничивающая массу поверхность есть плоскость, то уголъ α наклоненія ея къ горизонту долженъ быть меньше или равенъ углу φ тренія; въ послѣднемъ случаѣ ($\alpha = \varphi$) плоскость называется *естественнымъ откосомъ*. Опытъ подтверждаетъ такое заключеніе.

103. Неопредѣленность задачи. Пусть масса земли, находящаяся въ равновѣсїи, ограничена плоскостью AB стѣны (фиг. 177) и откосомъ $ACDEF$, части котораго съ горизонтомъ составляютъ углы, меньшіе угла естественнаго откоса φ . Длину стѣны и земляной призмы, перпендикулярную къ плоскости чертежа, мы вездѣ будемъ принимать равной единицѣ. Возьмемъ какую-нибудь точку b на AB и проведемъ черезъ нее плоскость bX , подѣ произвольнымъ угломъ i къ вертикали, отдѣляющую отъ земляной массы призму $bACDEX$. Послѣдняя находится въ равновѣсїи подѣ

Поэтому для всякаго значенія переменнаго угла i

$$\frac{dR_0}{di} = 0, \text{ или } \frac{dF}{di} + \frac{dF}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{di} = 0.$$

Замѣняя $\frac{d\alpha}{di} = f'(i)$ получимъ $\frac{dF}{di} + \frac{dF}{d\alpha} f'(i) = 0.$

Такъ какъ уравненіе $R_0 = F(i, \alpha, \alpha_0)$ должно давать одну и ту же величину R_0 для всякаго положенія плоскости bX и ея угла i , то мы можемъ разсмотрѣть то ея положеніе и уголь i_1 , для которыхъ α имѣеть наибольшую величину. Пусть α_1 будетъ это значеніе = $\max. \alpha$; слѣдовательно,

$$\frac{d\alpha_1}{di_1} = f'(i_1) = 0.$$

Предыдущія уравненія для значеній α_1 и i_1 примутъ видъ

$$R_0 = F(i_1, \alpha_1, \alpha^0) \text{ и } \frac{dF}{di_1} = 0.$$

Исключивъ изъ этихъ двухъ уравненій величину i_1 , выразимъ величину R_0 въ функціи угловъ α_1 и α_0 . Но результатъ исключенія будетъ тотъ же, если мы въ этихъ уравненіяхъ замѣнимъ i_1 черезъ i , т. е.

$$R_0 = F(i, \alpha_1, \alpha_0) \text{ и } \frac{dF}{di} = 0.$$

Такъ какъ предыдущее уравненіе $R_0 = F(i, \alpha, \alpha_0)$ выражало условіе равновѣсія силъ R_0 , R и Q , то первое изъ двухъ послѣднихъ уравненій также выражаетъ условіе равновѣсія силъ R_0 , Q и нѣкоторой силы R_1 , составляющей постоянный уголь α_1 съ нормалью къ плоскости bX ; второе уравненіе показываетъ, что R_0 есть наибольшая величина $F(i, \alpha_1, \alpha_0)$, какъ функціи одною переменнаго i .

Такимъ образомъ, если бы намъ были извѣстны уголь α_0 , составляемый давленіемъ R_0 съ нормалью къ стѣнѣ bA и наибольшая величина α_1 угла α , образуемаго дѣйствительной реакціей R съ нормалью къ плоскости bX , при измѣненіи положенія послѣдней, то величину силы R_0 мы могли бы опредѣлить какъ наибольшее значеніе силы R_0 , находящейся въ равновѣсіи съ силами Q и R_1 переменнаго призма bAX , предполагая, что сила

R , составляет постоянный угол α , съ нормалью къ переменнѣйшей плоскости bX .

104. Предѣльное равновѣсіе. При обыкновенныхъ условіяхъ устойчиваго равновѣсія угла α_0 и α , являются неизвѣстными, и давленіе земляной массы на стѣну, въ зависимости отъ способа возведенія стѣны и насыпи и ихъ взаимной осадки, можетъ имѣть различныя значенія и вообще оказывается неопредѣленнымъ. Поэтому въ дальнѣйшихъ выводахъ мы ограничимся опредѣленіемъ давленія земли для случая *предѣльнаго* или *неустойчиваго равновѣсія*, когда равновѣсіе стѣны и поддерживаемой ею земли нарушается и отдѣлившаяся часть земли, или призма обрушенія, начинаетъ скользить внизъ по стѣнѣ bA и по плоскости bX , называемой *плоскостью обрушенія*. Очевидно, вполне достаточно придать стѣнѣ такіе размѣры, чтобы она могла сопротивляться этому предѣльному давленію въ моментъ нарушенія равновѣсія. При этомъ уголъ α имѣетъ уже опредѣленное значеніе и равенъ φ , и уголъ $\alpha_0 = \varphi'$, гдѣ черезъ φ обозначенъ уголъ тренія земли по землѣ, а черезъ φ' — уголъ тренія земли по кладкѣ. Если $\varphi' > \varphi$, то къ стѣнѣ пристанетъ тонкій слой земли, и скольженіе призмы будетъ происходить по этому слою, такъ что уголъ α_0 надо тогда положить $= \varphi$. Вообще, называя черезъ φ_0 меньшій изъ угловъ φ' и φ , будемъ имѣть $\alpha_0 = \varphi_0$. Въ практикѣ обыкновенно $\varphi_0 = \varphi$, и въ рѣдкихъ случаяхъ гладкихъ стѣнъ $\varphi_0 = \varphi'$.

Такимъ образомъ для рѣшенія вопроса о наибольшемъ давленіи земли на стѣну мы пришли къ слѣдующимъ условіямъ задачи: 1) что сила R_0 составляетъ съ нормалью къ стѣнѣ уголъ φ_0 , равный меньшему изъ двухъ угловъ φ и φ' тренія земли по землѣ и земли по кладкѣ, и 2) что для опредѣленія величины R_0 надо найти между всѣми плоскостями bX , разсматриваемыми какъ плоскости скольженія, такую, которой соотвѣтствуетъ наибольшее значеніе силы R_0 ; оно и представитъ намъ искомую величину R_0 давленія земли на стѣнку bA .

105. Способъ Понсле. Примѣнимъ къ опредѣленію величины *max.* R_0 графическій способъ, предложенный Понсле. Пусть AB — плоскость стѣны, $ACDEF$ — профиль земли, и bX , — плоскость обрушенія, встрѣчающая этотъ профиль по откосу CD (фиг. 178). Проведемъ bX подъ произвольнымъ угломъ i къ вертикали. Отдѣляемая ею призма $bACX$ находится въ равновѣсіи

подъ угломъ $\varphi + \varphi_0$ къ плоскости стѣны bA до пересѣченія въ точкѣ O съ продолженіемъ откоса $A'CXD$, затѣмъ прямыя bK , Xx и $A'T$, параллельныя естественному откосу и составляющія съ вертикалью уголъ $90^\circ - \varphi$; и наконецъ прямую $A'y$ параллельно bX .

Треугольникъ mnp силъ Q , R и R_0 подобенъ треугольнику bxX . Дѣйствительно, въ треугольникѣ силъ уголъ mnp между направленіями силы R и силы Q , или вертикально bZ' , равенъ разности угловъ XsZ' и $Z'bs$, т. е. $90^\circ - \varphi - i$; точно такъ же уголъ mnp между силами R_0 и Q , или вертикалью bZ' равенъ разности угловъ AtZ и AbZ , т. е. $90^\circ - \varphi_0 - \varepsilon$; слѣдовательно третій уголъ $\sphericalangle npt = \varphi + \varphi_0 + i + \varepsilon$. Съ другой стороны, въ треугольникѣ xbX уголъ $xXb = \sphericalangle XbK =$ разности $\sphericalangle ZbK - \sphericalangle ZbX = 90 - \varphi - i = \sphericalangle nmp$, и уголъ $xbX = \varphi + \varphi_0 + \varepsilon + i = \sphericalangle npt$.

Изъ подобія треугольниковъ xbX и npt слѣдуетъ

$$\frac{R_0}{Q} = \frac{bx}{Xx}, \text{ или } R_0 = Q \cdot \frac{bx}{Xx}.$$

Если δ — вѣсъ единицы объема земли, то вѣсъ призмы

$$Q = \delta \triangle AbX = \delta \cdot \triangle bXy = \frac{1}{2} \delta \cdot by \cdot Xx \cdot \text{Sn}Xxb$$

$$\text{или } Q = \frac{1}{2} \delta \cdot by \cdot Xx \cdot \text{Sn}A'Tb.$$

Поэтому сила

$$R_0 = Q \cdot \frac{bx}{Xx} = \frac{1}{2} \delta \cdot bx \cdot by \cdot \text{Sn}A'Tb.$$

Такъ какъ уголъ $A'Tb = 90^\circ - \varphi_0 - \varepsilon$ постоянный, то наибольшая величина Q соотвѣтствуетъ наибольшему значенію произведенія $bx \cdot by$ или

$$(Ob - Ox) (Ob - Oy) = Ob^2 - Ob (Ox + Oy) + Ox \cdot Oy.$$

Но произведеніе $Ox \cdot Oy$ есть величина постоянная при измѣненіи угла i , потому что изъ подобія треугольниковъ имѣемъ

$$\frac{Oy}{Ob} = \frac{OA'}{OX} = \frac{OT}{Ox}; \text{ откуда } Oy \cdot Ox = Ob \cdot OT.$$

Слѣдовательно, *maximum* произведенія $bx \cdot by$ соотвѣтствуетъ *minimum'у* суммы $Ox + Oy$, что при постоянномъ произведеніи

Ox . Oy получится при $Ox = Oy$, когда точки x и y совпадаютъ въ нѣкоторой точкѣ x_1 . Ея положеніе найдемъ, описавъ на bT , какъ на діаметрѣ, полуокружность и отложивъ длину Ox_1 , равную длинѣ касательной OL , проведенной изъ точки O къ окружности. Тогда $\max . R_0 = \frac{1}{2} \delta . bx_1^2 . SnA'TB$.

Если проведемъ изъ точки x_1 прямую $x_1 X_1$, параллельно направленію естественнаго откоса $A'T$, то опредѣлимъ положеніе точки X_1 , а слѣдовательно и положеніе плоскости обрушенія bX_1 .

Итакъ для опредѣленія давленія R_0 земли на часть стѣны Ab нужно: превратить многоугольную фигуру $bACX$ сѣченія призмы въ равновеликій треугольникъ $bA'X$, при чемъ точка A' должна быть взята непременно на продолженіи пересѣкаемой стороны CD профиля призмы; провести основную прямую bO подъ угломъ $AbO = \varphi + \varphi_0$ и прямую $A'T$ параллельно естественному откосу, описать на bT полуокружность, провести къ ней касательную OL и отложить $Ox_1 = OL$; затѣмъ провести изъ точки x_1 прямую $x_1 X_1$ параллельную $A'T$. Тогда искомое давленіе R_0 выразится $\frac{1}{2} \delta bx_1^2 . SnA'Tb$, а неизвѣстная площадь обрушенія опредѣлится прямою bX_1 . Если на прямой $x_1 X_1$ отложимъ $x_1 c = x_1 b$, то площадь треугольника bxc_1 , умноженная на δ , выразитъ въ масштабѣ чертежа, давленіе земли R_0 . Будемъ называть его «треугольникомъ давленія земли». Величина $SnA'Tb = Sn(90^\circ - \varphi - \epsilon) = Cs(\varphi_0 + \epsilon)$, при чемъ уголъ ϵ считается положительнымъ, если стѣна bA наклонена впередъ, и отрицательнымъ, если она наклонена въ сторону земли.

Слѣдуетъ замѣтить, что отрѣзки OT , Ox_1 и Ob пропорціональны отрѣзкамъ OA' , OX_1 и OK ; поэтому между послѣдними существуетъ также отношеніе $OA' . OK = \overline{OX_1^2}$; слѣдовательно, точку X_1 можемъ опредѣлить, проведя изъ O касательную OT' къ полуокружности $A'TK$ и отложивъ $OX_1 = OT'$.

Если бы точка X_1 получилась въ пересѣченіи съ другимъ откосомъ напр. DE , то нужно повторить построеніе, принимая, что точки O и A' находятся на прямой DE , при чемъ точка A' опредѣляется по условію, что треугольникъ $A'bX$ равновеликъ съ площадью многоугольника $bACDX'$.

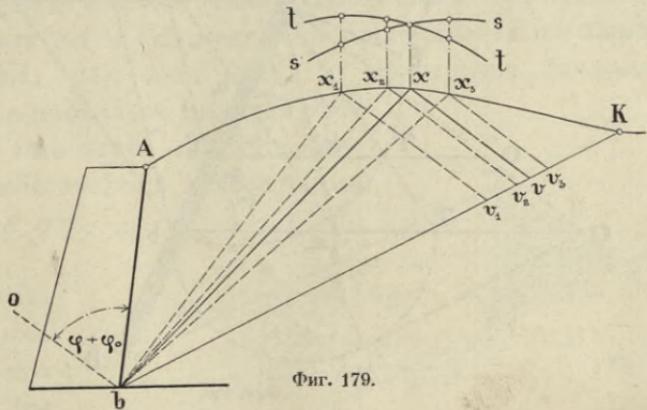
106. Изъ доказаннаго можно вывести еще другой признакъ для опредѣленія плоскости обрушенія bX_1 . Дѣйствительно, изъ уравненія $Ox_1^2 = OT \cdot Ob$ и параллельности $A'T$ и x_1X_1 , слѣдуетъ

$$\frac{Ox_1}{Ob} = \frac{OT}{Ox_1} = \frac{OA'}{OX_1},$$

т. е. $A'x_1 \parallel bX_1$ и площадь Δ -ка bX_1x_1 равна площади Δ -ка $bX_1A' =$ площади призмы обрушенія $bACX_1$. Если же проведемъ изъ точекъ A' и X_1 параллельно bO прямыя $A'S$ и X_1v до пересѣченія съ направлениемъ естественнаго откоса земли bk въ точкахъ S и v , то площадь Δ -ка bX_1v , равнаго bX_1x_1 , оказывается равной площади призмы обрушенія $bACX_1$. Такимъ образомъ положеніе плоскости обрушенія bX_1 можно найти изъ условія, что отдѣляемая ею площадь $bACX_1$ — равна площади Δ -ка bX_1v , опредѣляемаго прямой X_1v , параллельной основной линіи bT . Такъ какъ отрѣзки bS , bv и bk — пропорціональны OA' , Ox_1 и Ok и $Ox_1^2 = OA' \cdot Ok$ то и $bv^2 = bS \cdot bk$. Поэтому положеніе плоскости обрушенія bX_1 можетъ быть найдено и другимъ построениемъ: провести изъ точки A' прямую $A'S$ параллельно основной линіи bT , описать на отрѣзкѣ kS полуокружность, провести изъ точки b касательную bv , отложить $bv = bv$ и изъ точки v провести прямую $vX_1 \parallel bT$, которая въ пересѣченіи съ прямой $A'k$ опредѣлитъ точку X_1 , а слѣд. и положеніе искомой прямой bX_1 .

При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что вѣсь призмы обрушенія

$bACX_1$ всегда равенъ вѣсу призмы bX_1v и что Δ -къ bX_1v , равный Δ -ку bX_1x_1 , также подобенъ треугольнику силъ *три*. Если отложить на прямой bk отъ точки v отрѣзокъ $vt = vX_1$, то Δ -къ vX_1t , равный Δ -ку



Фиг. 179.

bX_1C , по умноженіи на плотность земли δ , выразитъ давленіе

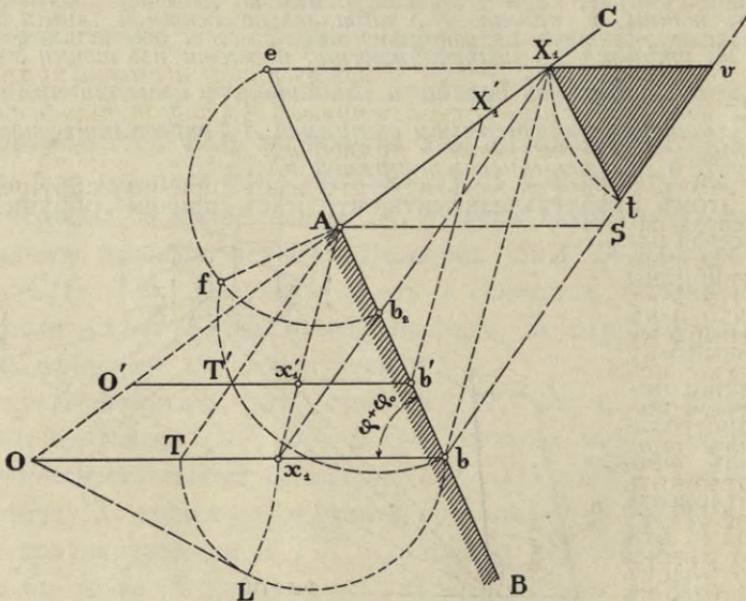
$$\text{земли } R_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot vX_1^2 C_s(\varphi_0 + \varepsilon).$$

Если поверхность земли ограничена не прямыми, а кривой линией (фиг. 179), то въ этомъ случаѣ можно или замѣнить кривую достаточно близкимъ къ ней многоугольникомъ вписаннымъ или описаннымъ, или примѣнить слѣдующее построение, основанное на доказанномъ свойствѣ призмы обрушенія, что площадь ея (фиг. 178) $bACX_1$ равна площади Δ -ка bX_1v .

Изъ точки b проведемъ рядъ сѣкущихъ bx_1, bx_2, bx_3 и изъ точекъ x_1, x_2, x_3 параллельно основной линіи bO — прямыя x_1v_1, x_2v_2, x_3v_3 . Отъ точекъ x_1, x_2, x_3 отложить вертикально ординаты, равныя площадямъ bAx_1, bAx_2, bAx_3 , и вычертить кривую ss ; затѣмъ изъ тѣхъ же точекъ отложить ординаты, равныя площадямъ треугольниковъ $bx_1v_1, bx_2v_2, bx_3v_3$, и вычертить кривую tt . Пересѣченіе обѣихъ кривыхъ опредѣлитъ точку x призмы обрушенія, которая опредѣляется условіемъ:

$$\text{пл. } bAx = \text{пл. } \Delta bxv.$$

107. Частные случаи. Пусть AB — плоскость стѣны, поддерживающая земляную массу (фиг. 180), и AC — ограничивающій



Фиг. 180.

ее прямой откосъ. Въ этомъ случаѣ точка A' совпадаетъ съ A . Поэтому для опредѣленія давленія земли на стѣну Ab нужно

естественному откосу bS , точка k пересѣченія AC съ bS удаляется въ безконечность, также какъ и точка X_1 плоскости обрушенія, но отрѣзокъ A_1v (фиг. 180), параллельный AS , сохраняетъ постоянную величину tv между прямыми AC и bv и можетъ быть опредѣленъ для любой точки t , также какъ и треугольникъ mtv давления земли. При этомъ плоскость обрушенія совпадаетъ съ bS .

109. Для случая прямого откоса AC (фиг. 180) здѣсь умѣстно будетъ рѣшить обратную задачу: Дана точка X_1 ; найти точку b плоскости обрушенія bX_1 , проходящей черезъ X_1 . Для этого можно взять на Ab произвольную точку b' , провести основную линію $b'O'$, пересѣкающую въ точкахъ O' и T' продолженіе прямой AC и прямую AT , параллельную естественному откосу bS , найти точку x'_1 , чтобы $O'x'_1$ была средней пропорціональной между $O'T'$ и $O'b'$, и провести прямую Ax'_1 , какъ геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ x_1 . Тогда прямая X_1x_1 , проведенная черезъ данную точку X_1 , параллельно AT' , опредѣлитъ искомую точку x_1 въ пересѣченіи съ прямой Ax'_1 , а прямая Ox_1b , проведенная черезъ точку x_1 параллельно $O'b'$, въ пересѣченіи съ прямой AB дастъ искомую точку b и плоскость обрушенія bX_1 .

Эту же задачу можно рѣшить и другимъ способомъ, разсматривая подобіе треугольниковъ Ab_2x_1 и bb_2X_1 и затѣмъ bb_2x_1 и b_2X_1e , гдѣ b_2 и e представляютъ точки пересѣченія прямой AB съ прямой X_1x_1 , параллельной естественному откосу, и прямой X_1e , параллельной основной линіи bO . Изъ подобія первыхъ треугольниковъ имѣемъ $\frac{b_2b}{Ab_2} = \frac{b_2X_1}{b_2x_1}$, а изъ подобія двухъ другихъ треугольниковъ

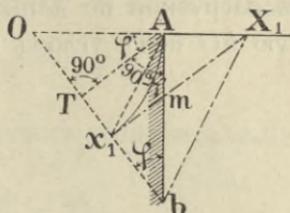
$$\frac{b_2X_1}{b_2x_1} = \frac{b_2e}{b_2b}, \text{ откуда}$$

$$\frac{b_2b}{Ab_2} = \frac{b_2e}{b_2b}, \text{ или } b_2b^2 = b_2e \cdot b_2A.$$

Слѣд., описавъ на b_2e полуокружность и возставивъ изъ A перпендикуляръ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ f , получимъ $b_2f^2 = b_2e \cdot b_2A$, и отложивъ затѣмъ $b_2b = b_2f$, найдемъ искомую точку b . Послѣднее рѣшеніе задачи представляется болѣе удобнымъ.

110. Разсмотримъ теперъ случай, когда земляная масса ограничена сверху горизонтальной плоскостью AC (фиг. 182), и стѣна имѣетъ вертикальную грань bA и уголъ тренія $\varphi_0 = 0$.

Въ этомъ случаѣ прямая bO должна составлять съ Ab уголъ φ , равный углу OAT ; слѣдовательно, AT перпендикулярна къ Ob . Но для прямоугольнаго треугольника bOA катетъ OA есть средняя пропорциональная между гипотенузой Ob и отрезкомъ OT . Поэтому, описавъ изъ точки O дугу Ax_1 , до пересѣченія съ Ob , найдемъ отрезокъ bx_1 ; прямая x_1X_1 , параллельная откосу AT и, слѣдовательно, перпендикулярная къ Ob , опредѣлитъ точку X_1 и положеніе плоскости обрушенія bX_1 . При этомъ давленіе земли



Фиг. 182.

$$R_0 = bx_1^2 \cdot \frac{1}{2} \delta \cdot \text{Sn}ATb_v^2 = bx_1^2 \cdot \frac{1}{2} \delta.$$

Изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ OAb и Ox_1X_1 , находимъ, что $OX_1 = Ob$; отрезокъ $bx_1 = AX_1$; уголъ $bX_1x_1 =$ углу $AbX_1 = \frac{1}{2}$ угла $AmX_1 = \frac{1}{2}$ угла $TAb = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$, и давленіе земли $R_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot \overline{AX_1^2}$,

или

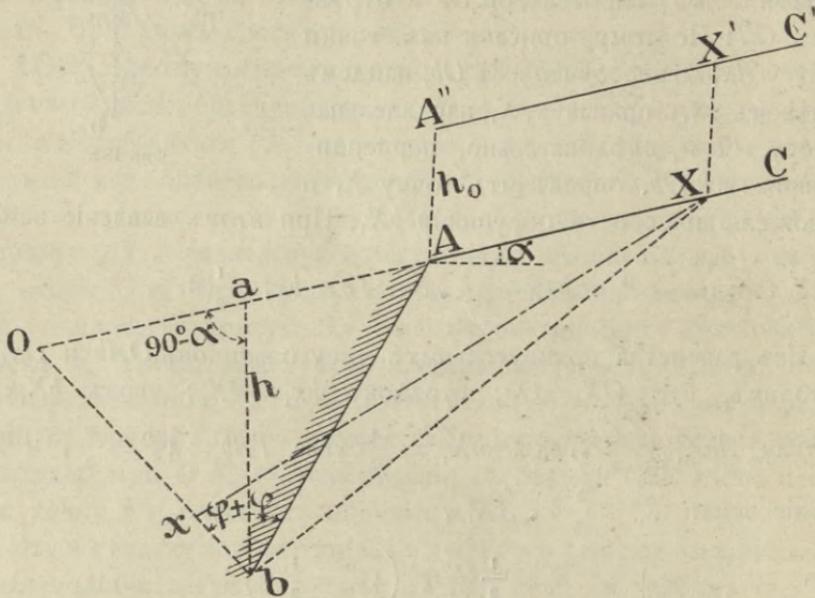
$$R_0 = \frac{1}{2} \delta h^2 \text{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right),$$

гдѣ черезъ h обозначена высота стѣны bA .

Такимъ образомъ въ случаѣ вполнѣ гладкой вертикальной стѣны, давленіе земли будетъ имѣть горизонтальное направленіе и точку приложенія на разстояніи $\frac{2}{3}$ высоты отъ точки A ; уголъ AbX_1 призмы обрушенія, составляетъ половину угла, образуемаго направленіемъ естественнаго откоса съ вертикалью bA , такъ что прямая bX_1 дѣлитъ этотъ уголъ пополамъ. Последнее свойство имѣетъ мѣсто даже въ томъ случаѣ, когда вполнѣ гладкая стѣна будетъ наклонена къ вертикальной плоскости подъ какимъ-нибудь угломъ.

III. Пусть Ab (фиг. 183)—наклонная плоскость стѣны, поддерживающая земляную массу и AC —ограничивающій ее откосъ; на немъ распределена вертикальная *равномѣрная нагрузка*, которую мы можемъ представить въ видѣ воображаемаго слоя земли толщиной $h_0 \text{Csa}$, гдѣ α —уголъ наклоненія откоса AC къ горизонту.

Для опредѣленія давленія на стѣну bA , проведемъ какую-нибудь плоскость bX и вѣсь отдѣленной земляной призмы bAX съ нагрузкой по длинѣ AX назовемъ черезъ Q . Проведемъ прямую bO подъ угломъ $\varphi + \varphi_0$ къ bA и прямую Xx параллельную



Фиг. 183.

естественному откосу. Полученный треугольникъ bXx подобенъ треугольнику силъ (см. стр. 189), и потому реакція стѣны

$$R_0 = Q \cdot \frac{bx}{Xx}.$$

Такъ какъ площадь треугольника bAX выражается черезъ $\frac{1}{2} AX \cdot ba \cdot \sin Oab = \frac{1}{2} AX \cdot h \cdot \cos \alpha$, а площадь четырехугольника $AXX'A''$ равна $AX \cdot h_0 \cos \alpha$, то вѣсь $Q = \frac{1}{2} \delta \cdot AX(h + 2h_0) \cdot \cos \alpha$, и сила

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot h \left(1 + \frac{2h_0}{h}\right) \cos \alpha \cdot \frac{bx \cdot AX}{Xx}.$$

Намъ нужно найти наибольшую величину силы R_0 , когда измѣняется положеніе точки X , т. е. *maximum* выраженія $\frac{bx \cdot AX}{Xx}$, которое не зависитъ отъ равномерной нагрузки на

откосъ AC . Такимъ образомъ вліяніе этой нагрузки не измѣняетъ положенія призмы обрушенія, опредѣленной для случая, когда $h_0=0$, и увеличиваетъ только величину R_0 въ отношеніи

$$\left(1 + \frac{2h_0}{h}\right) : 1.$$

Напримѣръ, для гладкой вертикальной стѣны съ горизонтальнымъ откосомъ

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi\right) h^2 \left(1 + \frac{2h_0}{h}\right).$$

или

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot (h^2 + 2hh_0) \operatorname{tg}^2 \left(45 - \frac{1}{2} \varphi\right).$$

Приращеніе величины давленія по длинѣ стѣны dh

$$dR_0 = \delta \operatorname{tg}^2 \left(45 - \frac{1}{2} \varphi\right) (h + h_0) dh.$$

Отношеніе $\frac{dR_0}{dh}$ или давленіе n на единицу площади стѣны на глубинѣ h составляетъ

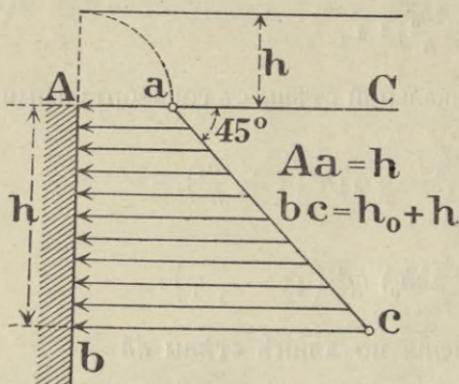
$$n = \delta (h + h_0) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi\right),$$

т. е. оно равно вѣсу столба земли высотой $h+h_0$, умноженному на коэффициентъ $\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi\right)$. При $\varphi=0$ (для жидкаго грунта, величина этого коэффициента $=1$; въ случаѣ песчанаго грунта, пропитаннаго водою, $\varphi=30^\circ$, и величина $\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi\right) = \operatorname{tg}^2 30^\circ = \frac{1}{3}$, т. е. давленіе такого грунта на стѣну составляетъ $\frac{1}{3}$ вертикальнаго давленія его на горизонтальную плоскость, проведенную на той же глубинѣ h отъ поверхности земли.

Выведенная формула для n показываетъ, что давленіе земли на единицу площади стѣны, или напряженіе его, измѣняется пропорціонально ординатамъ прямой ac , имѣющей при $h=0$ ординату $Aa=h_0$ и наклоненной подъ угломъ 45° къ прямой Aa (фиг. 184). Элементарная площадь этой прямой между двумя смежными ординатами—пропорціональна давленію на элементъ стѣны dh . Поэтому давленіе на стѣну Ab будетъ пропорціонально площади трапеціи $Aabc$, а разстояніе ея центра тяжести отъ сто-

роны Aa определить расстояние точки приложения равнодействующей давления земли R_0 от точки A .

Подобным же построением определяется положение равнодей-



Фиг. 184.

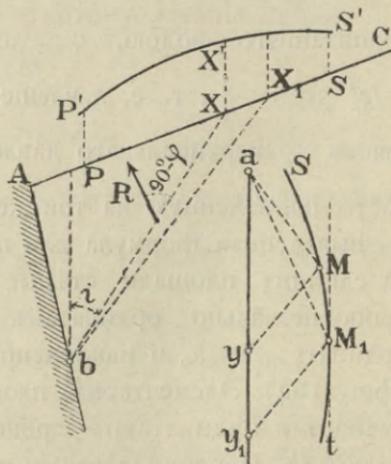
ствующей давления земли на стѣну и въ томъ случаѣ, если ея плоскость Ab составляетъ съ вертикалью какой-нибудь уголъ, и величина угла тренія φ_0 не равна нулю (фиг. 183). Дѣйствительно мы видѣли (стр. 193), что давление земли R_0 безъ нагрузки на откосѣ AC измѣняется пропорціонально Ab^2 или пропорціонально квадрату h вертикальнаго

расстоянія точки b до откоса AC ; присутствие нагрузки на откосѣ увеличиваетъ величину R_0 въ отношеніи $\frac{h+2h_0}{h}$, слѣдовательно, она будетъ измѣняться пропорціонально

$$h^2 \cdot \frac{(h+2h_0)}{h} \text{ или } h^2 + 2hh_0,$$

т. е. въ томъ же отношеніи, какъ и при вертикальной гладкой стѣнѣ, а потому точка приложения давления земли R_0 можетъ быть определена также, какъ центр тяжести трапеціи.

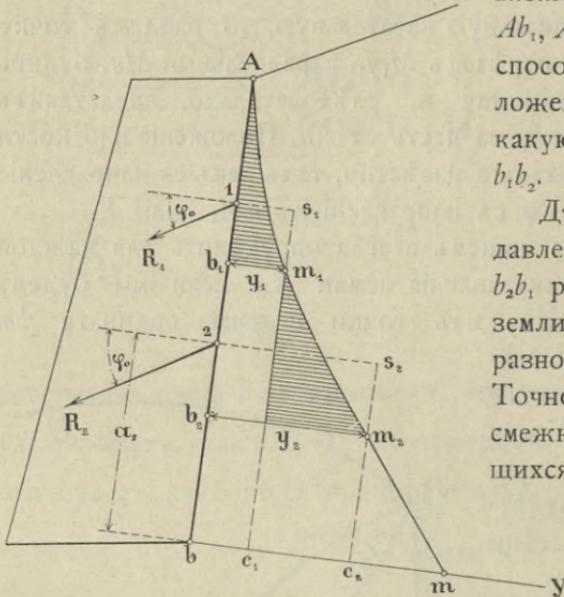
112. Случай произвольной нагрузки. Когда дана какая нибудь нагрузка на откосѣ AC , изображаемая въ видѣ массы земли $PP'SS'$ (фиг. 185), то наибольшую величину давления земли или реакции R_0 стѣны на призму bAX мы можемъ найти, построивъ для данной части стѣны Ab кривую значеній силы R_0 , соответствующихъ ряду положеній плос-



Фиг. 185.

центр тяжести этой площади, построением веревочного многоугольника.

113. Точка приложения давления земли. После того, как вычерчена (фиг. 187) кривая давления земли Am_1m_2m , ординаты которой b_1m_1 , b_2m_2 , ... в точках b_1 , b_2 , ... представляют давление земли на части стѣны Ab_1 , Ab_2 , ..., можно и другим способом найти точку приложения давления земли R_2 на какую-нибудь часть стѣны b_1b_2 .



Фиг. 187.

Дѣйствительно, величина давления земли на часть стѣны b_2b_1 равна разности давлений земли на части Ab_2 и Ab_1 , т. е. разности ординат $y_2 - y_1$. Точно также и для двухъ смежныхъ точекъ, находящихся отъ точки b на расстояніяхъ x и $x + dx$, давление земли на элементъ стѣны dx выразится разностью ординатъ dy . Взявъ стати-

ческой моментъ этихъ элементарныхъ силъ dy относительно оси bY , т. е. Σxdy , и приравнявъ его моменту равнодѣйствующей $(y_2 - y_1)a_2$, получимъ уравненіе $(y_2 - y_1)a_2 = \Sigma xdy$. Но вторая часть уравненія представляетъ площадь $c_1m_1m_2c_2$; превративъ ее въ равновеликій прямоугольникъ c_1c_2sk , изъ уравненія находимъ:

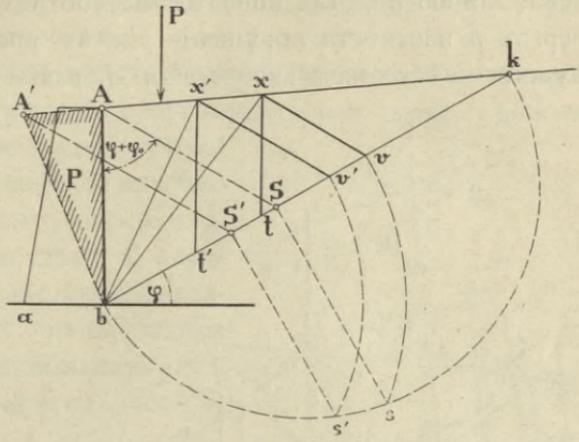
$$(y_2 - y_1)a_2 = c_1c_2 \cdot a_2 = c_1c_2 \cdot c_1k = (y_2 - y_1)c_1k,$$

откуда $a_2 = c_1k = b_2$.

Такимъ образомъ опредѣляется точка 2 приложения давления земли R_2 . Проведя изъ этой точки векторъ $2-R_2$, равный давлению земли $y_2 - y_1$, подъ угломъ φ_0 тренія земли по стѣнѣ, рѣшимъ задачу о положеніи силы R_2 .

114. Дѣйствіе сосредоточеннаго груза P . Пусть нагрузка на поверхности земли состоитъ изъ сосредоточеннаго груза P

(фиг. 188) и требуется опредѣлить при этомъ давленіе земли на прямую стѣну Ab . Замѣнимъ грузъ P равнымъ ему вѣсомъ земляной призмы $b'AA'$, взявъ на продолженіи Ak точку A' такъ, чтобы $P = \delta \cdot \Delta bAA'$. Тогда вмѣсто какой-нибудь земляной призмы bAx и груза P можемъ разсматривать равновеликую имъ призму $bA'x$. Поэтому для опредѣленія призмы обрушенія проводимъ черезъ точку A' прямую $A'S' \parallel$ основной линіи AS до пересѣченія въ точкѣ S' съ естественнымъ откосомъ bk , описываемъ на bk полуокружность, пересѣкающую въ точкѣ s' перпендикуляръ изъ точки S' къ прямой bk , откладываемъ на послѣдней $bv' = bs'$, изъ точки v' проводимъ $v'x' \parallel AS$ и откладываемъ $v't' = v'x'$. Тогда bx' представитъ плоскость обрушенія, а $v'x't'$ — треугольникъ давленія земли.



Фиг. 188.

Если бы груза P не было, то показаннымъ на фиг. 188 построениемъ плоскость обрушенія опредѣлилась бы bx , а давленіе земли — площадью Δ -ка vxt . Если бы грузъ P былъ приложенъ справа относительно точки x , т. е. внѣ призмы обрушенія bAx , то онъ вовсе не измѣнилъ бы величины давленія земли на стѣну bA .

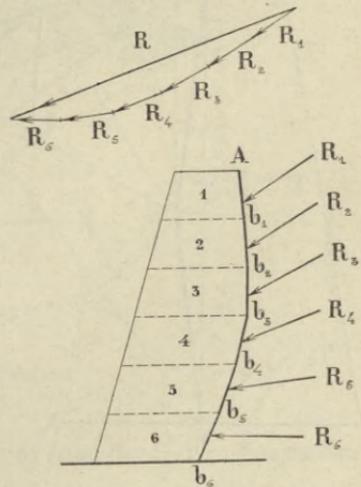
Чтобы опредѣлить ту часть стѣны, на которую распространяется вліяніе груза P , замѣнимъ его, вмѣсто призмы $b'A'A$ (фиг. 189), равной ей призмой pAa , гдѣ точка a взята на продолженіи прямой bA . Если бы груза P не было, то проходящая черезъ точку p плоскость обрушенія pb_1 опредѣлилась бы построениемъ, показаннымъ на фиг. 180, а именно: черезъ точку p провести прямыя pe и pb_2 , параллельно основной линіи и естественному откосу bk , на b_2e описать полуокружность, пересѣкающую перпендикуляръ Af въ точкѣ f , отложить $b_2b_1 = b_2f$ и черезъ точку b_1 провести b_1k_1 , параллельно естественному откосу bk . Тогда b_1p — плоскость

$b_0s, v_0x_0 \parallel pv', x_0t_0 \parallel pt$, приче́мъ b_0x_0 будетъ плоскость обруше́нія призмы и площадь $t_0x_0v_0$ — мѣ́ра давленія земли. Разность площадей $\Delta\Delta$ -ковъ $pv't'$, и $x_0v_0t_0$ умноженная на δ , дасть величину прираще́нія давленія земли отъ дѣ́йствія груза P на часть стѣны b_0b_1 . Отложивъ $pn = x_0v_0$ и проведя $no \parallel b_0k_0$, получимъ эту разность въ видѣ́ площади $onv't'$.

115. Давленіе земли на стѣну многоугольнаго очертанія. Рассмотримъ теперь стѣну многоугольнаго или даже криволинейнаго очертанія, такъ какъ кривая можетъ быть замѣнена достаточно близкимъ къ ней многоугольникомъ. Давленіе земли на всю стѣну R опредѣляется какъ равнодѣйствующая давленій земли R_1, R_2, R_3, \dots на отдѣльныя ея прямыя части, составляющихъ съ послѣдними постоянный уголъ $90 - \varphi_0$ (фиг. 190).

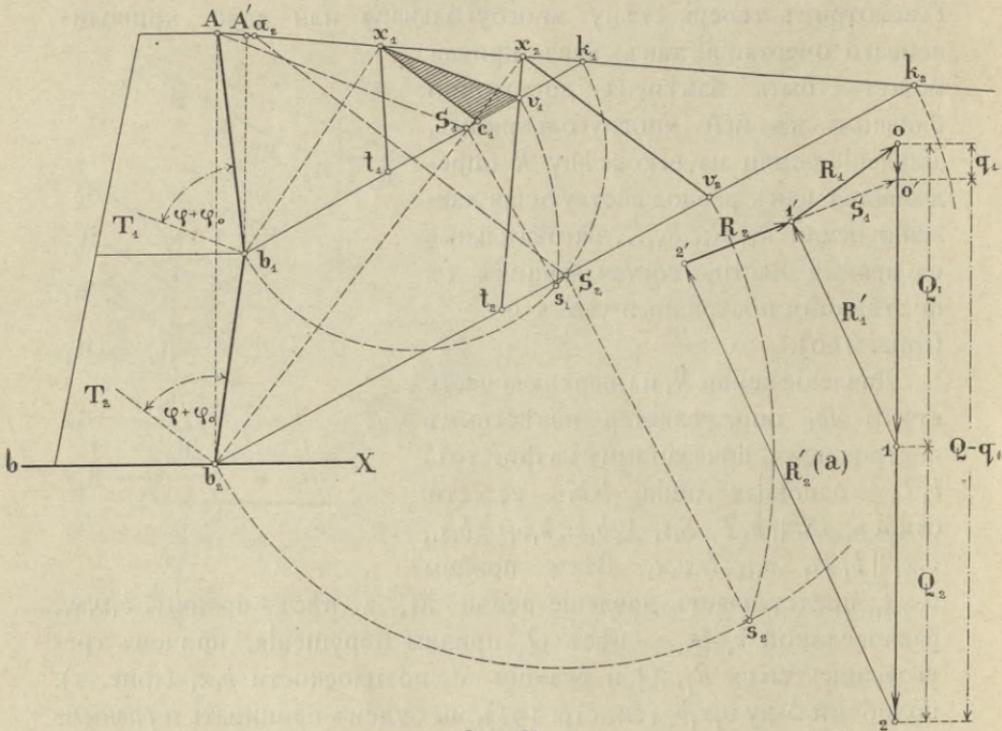
Давленіе земли R_1 на верхнюю часть стѣны Ab_1 опредѣляется извѣстнымъ построениемъ, показаннымъ на фиг. 191: b_1T_1 — основная линия, b_1k_1 — естеств. откосъ, $AS_1 \parallel b_1T_1, S_1s_1 \perp b_1k_1, b_1v_1 = b_1s_1, v_1x_1 \parallel b_1T_1, v_1t_1 = v_1x_1$. Вѣсь призмы $v_1x_1t_1$ представляетъ давленіе земли R_1 , а вѣсь призмы $b_1v_1x_1$, равновеликой b_1Ax_1 , — вѣсь Q_1 призмы обруше́нія, приче́мъ треугольникъ силъ R_1, Q и реакціи R'_1 по плоскости b_1x_1 (фиг. а), подобный Δ -ку $v_1x_1b_1$ (см. стр. 191), мы будемъ принимать и равнымъ ему, выбравъ масштабъ для силъ такъ, чтобы $R'_1 = Q_1 - b_1x_1$.

Продолживъ на многоугольникъ силъ направленіе силы R_2 до пересѣченія съ вертикальной линіей o_2 въ точкѣ o' , обозначимъ черезъ q_1 отдѣленную отъ вѣса Q_1 часть его. Силу R_1 разложимъ на составляющія $S_1 = R_1 - o'$ и q_1 , а силу, представляемую отрезкомъ $2' - o'$, назовемъ черезъ R_{1-2} , такъ что $R_{1-2} = R_2 + S_1$. Если мы найдемъ силу R_{1-2} , то искомая сила R_2 опредѣлится, какъ $R_2 = R_{1-2} - S_1$. Но сила R_{1-2} находится въ равновѣсіи съ силами $(Q_2 + Q_1 - q_1)$ и реакціей R'_2 по плоскости обруше́нія b_2x_2 , такъ какъ онѣ составляютъ на фиг. а замкнутый треугольникъ $22'o'$. Поэтому сила R_{1-2} можетъ быть опредѣлена, какъ давленіе земли



Фиг. 190.

на стѣну b_2b_1 отъ призмы обрушенія $b_2b_1Ax_2$, вѣсь которой $Q = Q_1 + Q_2$ уменьшенъ на величину q_1 . Если черезъ точку x_1 проведемъ прямую $x_1c_1 \parallel$ основной линіи b_2T_2 , то вѣсь q_1 представится вѣсомъ призмы $x_1v_1c_1$. Дѣйствительно, треугольникъ $b_1x_1v_1$ подобенъ и равенъ треугольнику силъ $1-1'-o$, поэтому $x_1v_1 = 1-1'$, уголъ $v_1 =$ углу o , а также уголъ $o-1'-o'$ между направленіями давленій земли R_1 и R_2 (наклоненныхъ къ частямъ



Фиг. 191.

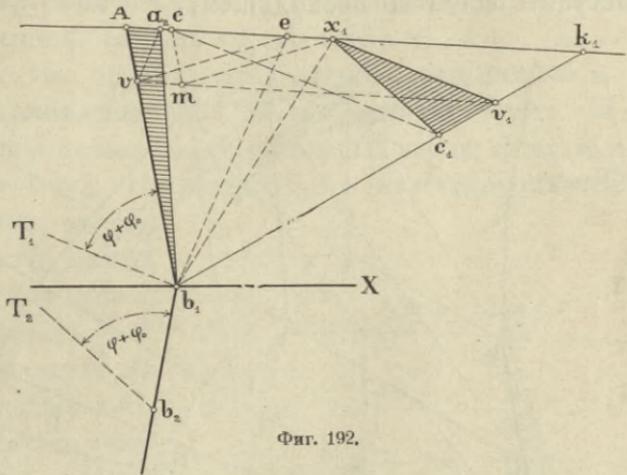
стѣны b_1A и b_2b_1 подъ однимъ и тѣмъ же угломъ) — равенъ углу между сторонами x_1v_1 и x_1c_1 , параллельными основнымъ линіямъ b_1T_1 и b_2T_2 , составляющимъ между собой уголъ, равный углу перелома линіи b_2b_1A . Слѣдовательно:

$$\frac{q_1}{Q_1} = \frac{oo'}{o1} = \frac{v_1c_1}{v_1b_1} = \frac{\text{пл. } v_1x_1c_1}{\text{пл. } v_1x_1b_1} = \frac{\delta \cdot \text{пл. } v_1x_1c_1}{\delta \cdot \text{пл. } v_1x_1b_1} = \frac{\delta \cdot \text{пл. } v_1x_1c_1}{Q_1},$$

откуда $q_1 = \delta \cdot \text{пл. } v_1x_1c_1$.

Если теперь изъ точки b_1 проведемъ $b_1A' \parallel b_2A$, то вѣсь Q призмы обрушенія $b_2b_1Ax_2$, можемъ замѣнить вѣсомъ призмы $b_2A'x_2$,

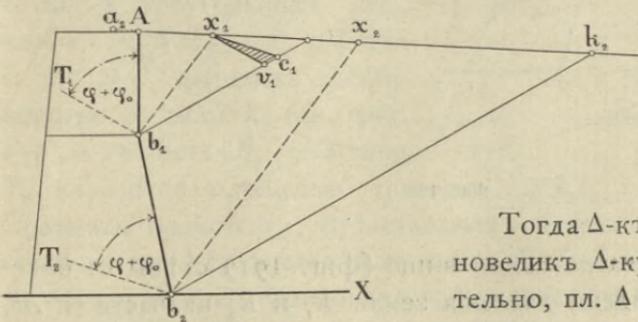
а вычтя из этой площади $b_2A'x_2$ площадь Δ -ка $b_2A'a_2$, равновеликого Δ -ку $v_1x_1c_1$, получим призму $b_2a_2x_2$, вѣсь которой относительно призмы $b_2b_1Ax_2$ уменьшенъ на величину q_1 . Соответствующія этой призмѣ $b_2a_2x_2$ положеніе плоскости обрушенія b_2x_2 и величина давленія земли R_{1-2} опредѣляются извѣстнымъ построениемъ: параллельно основной линіи b_2T_2 изъ точки a_2 проводимъ прямую a_2S_2 , на b_2k_2 описываемъ полуокружность, изъ точки S_2 возстановляемъ перпендикуляръ S_2s_2 , откладываемъ $b_2v_2 = b_2s_2$, проводимъ $v_2x_2 \parallel a_2S_2$ и дѣлаемъ $v_2t_2 = v_2x_2$. Вѣсь призмы $v_2x_2t_2$ представитъ давленіе



Фиг. 192.

R_{1-2} . Отложивъ его величину $o'2'$ на многоугольникѣ силъ, найдемъ искомое давленіе $R_2 =$ вектору $2'1'$.

116. Самое вычитаніе площади Δ -ка $v_1x_1c_1$ изъ призмы обрушенія можно исполнить чисто графическимъ способомъ (фиг. 192):



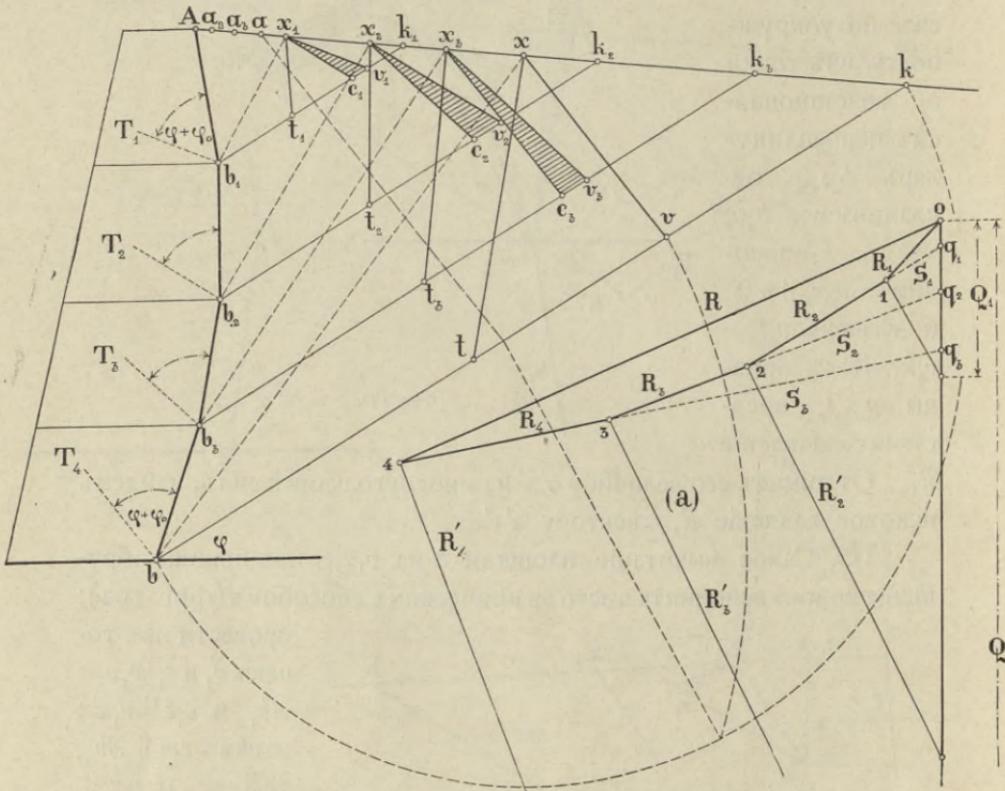
Фиг. 193.

провести изъ точекъ v_1 и c_1 : $v_1v = Ak_1$ и $c_1c \parallel v_1x_1$; затѣмъ $cm \parallel Ab_1$, $ve \parallel mx_1$ и $va_2 \parallel b_1e$.

Тогда Δ -къ b_1Aa_2 будетъ равновеликъ Δ -ку $v_1x_1c_1$. Дѣйствительно, пл. $\Delta v_1x_1c_1 =$ пл. $\Delta v_1x_1c =$ пл. $\Delta x_1cm =$ пл. $Aev =$ пл. b_1Aa_2 , такъ какъ пл. $\Delta va_2e =$ пл. Δva_2b_1 .

Если очертаніе стѣны $b_2b_1A_1$ образуютъ не *выходящій*, а *входящій* уголъ при b_1 (фиг. 193), то давленіе земли R_2 на часть b_2b_1 будетъ составлять съ горизонтомъ не *меньшій*, а *большій* уголъ,

чѣмъ давленіе R_1 на верхнюю часть Ab_1 , такъ что, продолживъ на многоугольникъ силъ направленіе силы R_2 , получимъ отрѣзокъ q_1 выше точки o ; поэтому сила R_{1-2} будетъ уравновѣшиваться съ реакціей R'_1 и вѣсомъ призмы обрушенія $Q + q_1$, а не $Q - q_1$, т. е. для опредѣленія силы R_{1-2} площадь призмы обрушенія нужно, вмѣсто уменьшенія, *увеличить* на площадь Δ -ка $v_1x_1c_1$, а затѣмъ поступить согласно предыдущему.



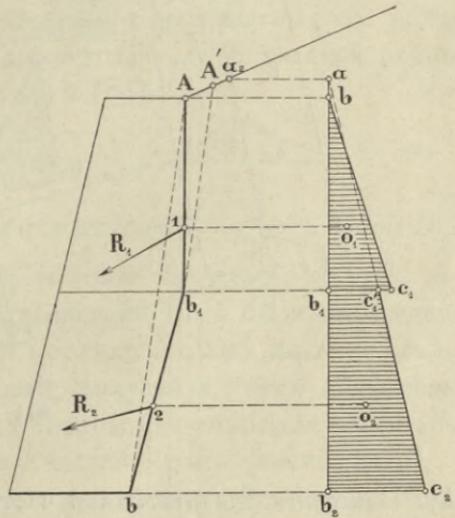
Фиг. 194.

Когда для рассматриваемой выше (фиг. 191) стѣны съ выходящими углами найдены давленія земли R_1 и R_2 на части ея Ab_1 и b_1b_2 , то для опредѣленія давленія R_3 на слѣдующую часть b_2b_3 нужно на многоугольникъ силъ (фиг. 194) продолжить направленіе силы R_3 до направленія силы Q и, обозначивъ весь этотъ отрѣзокъ $3q_2$ черезъ R_{1-3} , найти его величину, какъ давленіе земли на часть b_2b_3 отъ призмы обрушенія вѣсомъ $Q - q_1 - q_2$,

для чего изъ вѣса выше найденной призмы, уже уменьшенной на q_1 , нужно вычесть еще вѣсъ q_2 , равный вѣсу слѣдующей призмы $v_2x_2c_2$, въ которой стороны x_2v_2 и x_2c_2 соотвѣтственно параллельны основнымъ линиямъ b_2T_2 и b_3T_3 для частей b_1b_2 и b_2b_3 ; уменьшивъ площадь призмы обрушения $b_2b_1a_2x_2$ еще на площадь Δ -ка $v_2x_2c_2$, найдемъ точку a_3 , и т. д. Давленіе R_{1-3} выразится вѣсомъ призмы $v_3x_3\tau_3$, а вычитая изъ R_{1-3} составляющую S_2 , получимъ искомое давленіе R_3 на часть b_3b_2 . Давленія R_4, R_5, \dots на послѣдующія части стѣны опредѣляются подобно предыдущимъ.

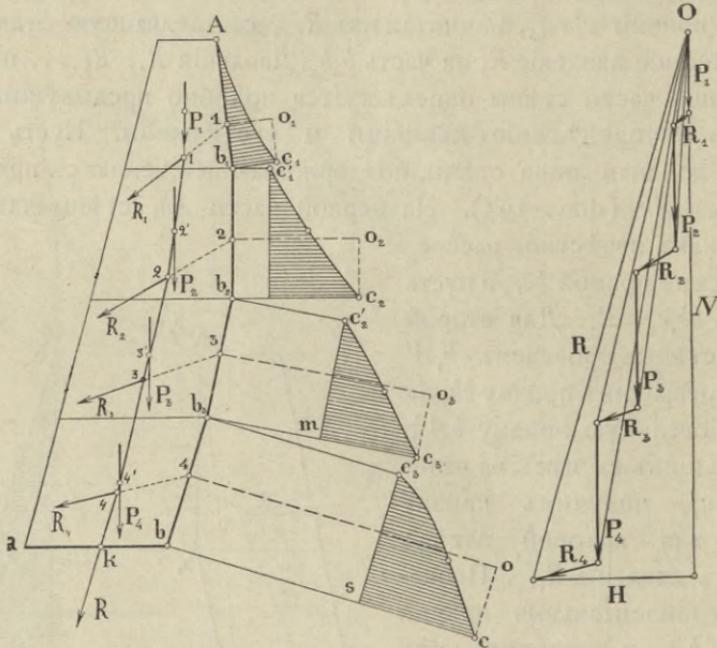
117. Распределеніе давленія и его кривая. Пусть bb_1A будетъ ломаная линия стѣны, поддерживающей землю съ прямымъ откосомъ Ak (фиг. 195). На первой части Ab_1 стѣны давленіе земли, какъ извѣстно, распределяется по прямой bc_1 , и пусть δ . пл. $\Delta bb_1c_1 = R_1$. Для второй части стѣны проведемъ b_1A' $\parallel bA$, превративъ призму bb_1Ak въ равновеликую призму $bA'k$, и уменьшивъ ее вѣсъ на величину q_1 , получимъ призму b_2a_2k , для которой затѣмъ найдемъ давленіе R_{1-2} . Проведемъ горизонтальныя прямыя a_2a и b_2c_2 и построимъ отъ точки a треугольникъ abc_2 , чтобы δ . пл. $\Delta ab_2c_2 = R_{1-2}$. Тогда δ . пл. $ab_1c'_1$ выразитъ составляющую S_1 силы R_1 (см. фиг. 191), а разность $R_{1-2} - S_1$ или R_2 выразится площадью трапеціи $c'_1c_2b_2b_1$, умноженной на δ . Ординаты прямой c'_1c_2 представляютъ напряженія давленія R_2 на части стѣны b_1b ; равнодѣйствующая R_2 проходитъ черезъ точку 2, опредѣляемую горизонтальной прямой o_2-2 , проведенной черезъ центр o_2 трапеціи (фиг. 195).

На фиг. 196 построена кривая давленія земли, состоящая изъ отдѣльныхъ частей, соотвѣтственно частямъ стѣны. Для верхней части bA кривая давленія опредѣлена согласно предыдущему (фиг. 187), причемъ ордината $b_1c_1 = R_1$. Для второй части b_2b_1 съ давле-



Фиг. 195.

ниемъ земли R_2 ордината $b_2c_2 =$ давлению R_{1-2} призмы земли $b_2x_2a_2 =$
 $= R_2 + S_1$, ордината $b_1c'_1 = S_1$ — составляющей силы R_1 на направ-
 ление R_2 (фиг. 194, а). Для слѣдующей части b_3b_2 съ давленіемъ
 земли R_3 ординаты $b_3c_3 =$ давлению R_{1-3} призмы земли $b_3x_3a_3 =$
 $= R_3 + S_2$, и $b_2c'_2 = S_2$ — составляющей изъ R_1 и R_2 на направле-



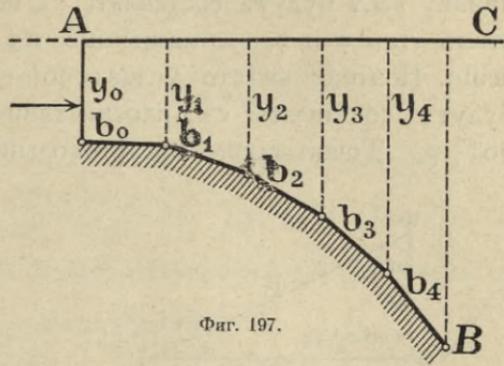
Фиг. 196.

R_3 . Наконецъ для послѣдней части стѣны bb_3 ординаты $bc = R_{1-4} =$
 $R_4 + S_3$ — давлению призмы земли bxa , а $b_3c'_3 = S_3$.

Для вычерчиванія кривыхъ находятъ для каждой изъ нихъ по одной промежуточной точкѣ, опредѣляя для нихъ давленіе земли по изложенному выше способу.

118. Пользуясь предыдущими способами, можно найти давленіе земли на наружную *поверхность свода*. При расчетѣ его обыкновенно предполагается, что давленіе земли на части свода дѣйствуетъ вертикально, но неправильность такого предположенія представляется очевидной, если разсматривать тѣ части свода, направленіе которыхъ составляетъ съ горизонтомъ уголъ большій угла φ . тренія земли по стѣнѣ (фиг. 197).

Пусть b_0B —наружная поверхность половины свода и AC —горизонтальный откосъ земли, покрывающей сводъ. Дѣлимъ поверхность свода на части и замѣняемъ ихъ плоскими элементами $b_0b_1, b_1b_2, b_2b_3, \dots$, обозначая разстоянія вершинъ b_0, b_1, b_2, \dots отъ плоскости AC черезъ y_0, y_1, y_2, \dots .



Фиг. 197.

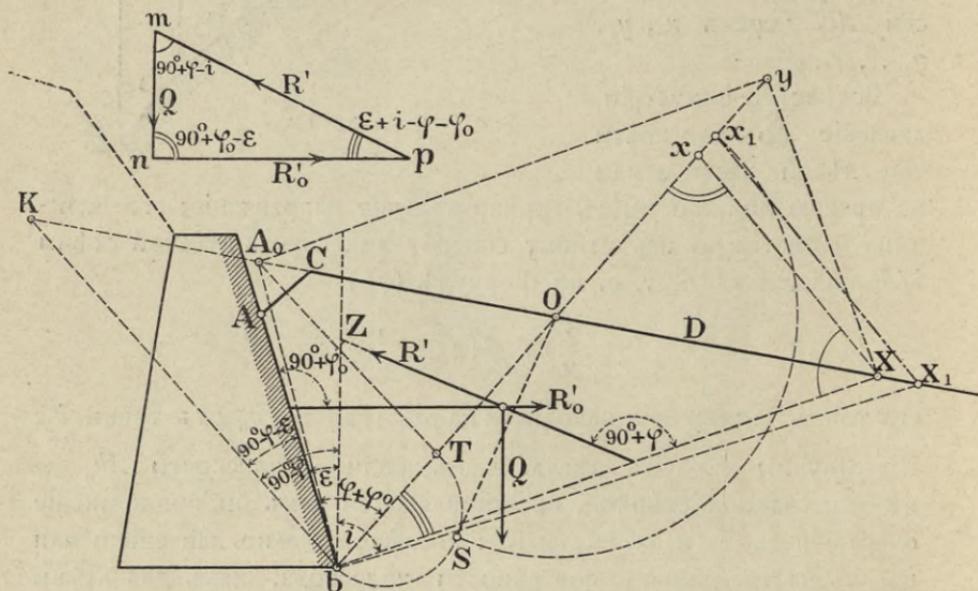
Вслѣдствіе симметріи, давленіе по плоскости Ab_0 лѣвой части земли на правую должно имѣть горизонтальное направленіе; его величина найдется по извѣстному способу для случая гладкой стѣны b_0A , полагая $\varphi=0$, т. е. по формулѣ (76)

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta y_0^2 g^2 \left(45 - \frac{1}{2} \varphi \right);$$

его точка приложенія находится на разстояніи $\frac{1}{3} y_0$ отъ точки b_0 . Поэтому мы можемъ лѣвую часть земли по плоскости Ab_0 замѣнить гладкой стѣнкой, представляющей какъ бы продолженіе очертанія свода и затѣмъ найти послѣдовательно давленіе земли на всѣ части данной поверхности полусвода, какъ для стѣны многоугольнаго профиля, проводя «основныя» линіи для части Ab_0 подъ угломъ φ , а для остальныхъ частей—подъ углами $\varphi + \varphi^0$.

119. Отпоръ земли. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ подпорная стѣна, поддерживающая земляную массу или арку моста съ одной стороны, напримѣръ съ лѣвой, бываетъ покрыта съ противоположной стороны также массой земли, но меньшей высоты. Если размѣры стѣнки будутъ недостаточны для ея устойчивости, то она можетъ выйти изъ равновѣсія и сдвинуться вправо, въ сторону земляной массы меньшей высоты (фиг. 198). Отъ этой массы, при движеніи стѣны Ab отдѣляется нѣкоторая призма земли AbX , сдвигающаяся вправо по плоскости bX и представляющая *наименьшее сопротивленіе* этому сдвигу. Такъ какъ призма перемѣщается *вверхъ* по плоскости bX , то ея движеніе встрѣчаетъ сопротивленія тренію въ плоскостяхъ bA и bX , направленныя

обратно рассмотрѣннымъ выше, слѣдовательно, реакція R' массы, расположенной ниже плоскости bX , и реакція R'_0 стѣны на призму bAX будутъ составлять съ нормальми къ этимъ плоскостямъ углы φ и φ_0 , отложенные въ противоположномъ направленіи. Поэтому вмѣсто угловъ $90^\circ - \varphi$ и $90^\circ - \varphi_0$ силы R' и R'_0 будутъ составлять съ плоскостями bX и bA углы $90^\circ + \varphi$ и $90^\circ + \varphi_0$. Точно также въ треугольникѣ mnp , построенномъ изъ



Фиг. 198.

силъ R'_0 , R' и вѣса Q призмы, углы будутъ имѣть значенія, отличающіяся отъ прежнихъ только измѣненіемъ въ нихъ знака при φ и φ_0 . Если мы отложимъ при точкѣ b уголъ $\varphi + \varphi_0 = \angle AbO$ въ сторону, противоположную предыдущему, а равно и направленіе bK естественнаго откоса, и проведемъ параллельно ему прямая A_0T и Xx до пересѣченія съ bO въ точкахъ T и x , то получимъ треугольникъ bXx , подобный треугольнику силъ mnp ; изъ нихъ находимъ

$$R'_0 = Q \cdot \frac{bx}{Xx}.$$

Если проведемъ изъ точки A_0 прямую A_0y , параллельную bX до встрѣчи bO въ точкѣ y , то

$$Q = \delta \cdot \text{пл. } bA_0X = \frac{1}{2} \delta \cdot by \cdot Xx \cdot \text{Sn}A_0TO, \text{ слѣд.}$$

$$R'_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot bx \cdot by \cdot \text{Sn}A_0TO.$$

Сила R'_0 будетъ наименьшей, когда произведеніе $bx \cdot by$ будетъ имѣть наименьшее значеніе.

Такъ какъ $bx \cdot by = (Ob + Ox) \cdot (Ob + Oy) = Ob^2 + Ob(Ox + Oy) + Ox \cdot Oy$ и $\frac{Ox}{OT} = \frac{OX}{OA_0} = \frac{Ob}{Oy}$ или $Ox \cdot Oy = Ob \cdot OT$, то $\min. bx \cdot by$ соотвѣтствуетъ $\min.$ суммы $Ox + Oy$ и будетъ при

$$Ox = Oy = Ox_1 = OS.$$

Поэтому

$$\min. R'_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot x_1^2 \text{Sn}A_0TO,$$

и положеніе плоскости bX опредѣлится точкой пересѣченія X_1 прямой x_1X_1 , проведенной изъ точки x_1 , параллельно $xX \parallel A_0T$

Найденная сила $\min. R'_0$ представляетъ *пассивное давленіе*, или такъ называемый *отпоръ земли*, тогда какъ разсмотрѣнная нами выше сила R_0 называется *активнымъ давленіемъ* земли на стѣнку, потому что она дѣйствуетъ на послѣднюю, стремясь сдвинуть ее.

Легко убѣдиться тѣми же способами, какіе были примѣнены для давленія земли R_0 , что отпоръ земли R'_0 также возрастаетъ пропорціонально квадрату высоты h стѣны и увеличивается въ отношеніи $1 + \frac{2h_0}{h}$ въ случаѣ нагрузки на откосъ земли въ видѣ слоя высотой h_0 , что точка приложенія отпора земли находится на $\frac{1}{3}h$, когда $h_0 = 0$, и опредѣляется центромъ тяжести трапеціи со сторонами h_0 и $h_0 + h_1$, когда таковая нагрузка существуетъ.

Мы остановимся на случаѣ гладкой вертикальной стѣны и горизонтальнаго откоса земли (фиг. 199). Для него $\varphi_0 = 0$ уголъ $AbO = \varphi$, уголъ $OAT = \varphi$, уголъ $ATO = 90^\circ$, $Ob \cdot OT = OA^2 = Ox_1^2$ и уголъ $OAx_1 = \frac{1}{2} AOT = 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

Изъ подобія равнобедренныхъ ΔOAx_1 и ΔObX_1 слѣдуетъ $Ox_1 = Ob$, а $\angle ObX_1 = \angle OX_1b = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$; слѣдов. $\angle AbX_1 = \varphi + 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi = 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

Поэтому $bx_1 = bO + Ox_1 = OX_1 + AO = AX_1$,

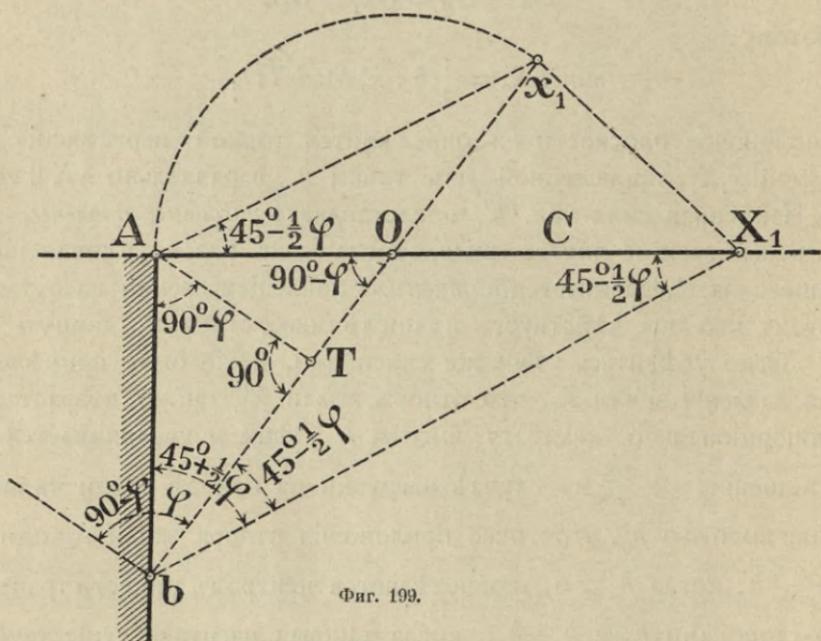
и
$$\min . R'_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot bx_1^2 \text{Sn} ATO = \frac{1}{2} \delta \cdot AX_1^2,$$

или
$$\min . R'_0 = \frac{1}{2} \delta h^2 \text{tg}^2 (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \dots \dots \dots (79)$$

Если же имѣется нагрузка въ видѣ слоя земли высотой h_0 ,

то $\min . R'_0 = \frac{1}{2} \delta h^2 \text{tg}^2 (45 + \frac{1}{2} \varphi) \cdot (1 + \frac{2h_0}{h})$ или

$$\min . R'_0 = \frac{1}{2} \delta (h^2 + 2hh_0) \text{tg}^2 (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \dots \dots \dots (80)$$



Фиг. 199.

Приращеніе давленія R'_0 на длинѣ dh , отнесенное къ единицѣ площади, или напряженіе его

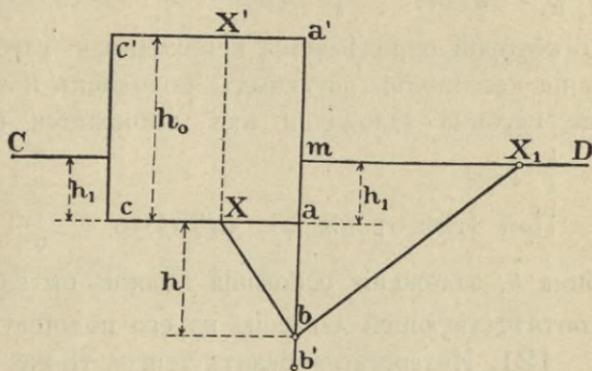
$$n = \frac{dR'_0}{dh} = \delta (h + h_0) \text{tg}^2 (45 + \frac{1}{2} \varphi) \dots \dots \dots (81)$$

Оно равно вѣсу столба земли высотой $h + h_0$, умноженному на коэффициентъ $\text{tg}^2 (45 + \frac{1}{2} \varphi)$; его величина при $\varphi = 30^\circ$ равна 3 и, слѣдовательно, въ девять разъ больше коэффициента, соответствующаго активному давленію земли.

XVI. Глубина заложения оснований.

120. Основания мостовых опоръ и другихъ сооруженийъ должны быть опущены въ грунтъ на такую глубину, чтобы не могло происходить выдавливанія грунта изъ подъ подошвы сооружения. Пусть ac (фиг. 200) означаетъ подошву основанія сооружения, заложенную на глубинѣ h_1 отъ поверхности земли CD , и пусть

$aa' = h_0$ — высота воображаемаго слоя земли, замѣняющаго давленіе на подошву сооружения ac . Возьмемъ какую-нибудь точку b въ плоскости aa' на глубинѣ h подъ подошвою сооружения и проведемъ черезъ нее плоскость bX при-



Фиг. 200.

змы обрушенія baX и плоскость bX_1 призмы отпора bmX_1 . Для устойчивости сооружения необходимо, чтобы давленіе R_0 на вертикальную плоскость ab призмы обрушенія $bXX'a'$ было меньше сопротивленія R'_0 призмы отпора bmX_1 , или еще лучше, чтобы приращеніе перваго давленія на элементъ плоскости $bb' = dh$ — или на напряжение его $\frac{dR_0}{dh} = n$ — было меньше приращенія сопротивленія dR'_0 , или его напряженія $\frac{dR'_0}{dh} = n'$ на той же площадкѣ bb' .

Если мы будемъ пренебрегать существованіемъ силы тренія по плоскости bm между призмами обрушенія и отпора, какъ это обыкновенно дѣлалось при опредѣленіи глубины заложения основаній, и будемъ примѣнять выведенныя выше формулы 78 и 81 для случая гладкой вертикальной стѣнки, то условіе устойчивости сооружения $n < n'$ представится въ видѣ

$$\delta \cdot (h + h_0) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right) \leq \delta (h + h_1) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right);$$

откуда, принимая во вниманіе зависимость

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right) = \operatorname{ctg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right),$$

находимъ $\frac{h_1 + h}{h_0 + h} \geq \text{tg}^4(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi)$.

Отношеніе $\frac{h_1 + h}{h_0 + h}$ представляетъ правильную дробь, наименьшая величина которой соотвѣтствуетъ значенію $h = 0$; поэтому условіе устойчивости приводится къ извѣстной формулѣ

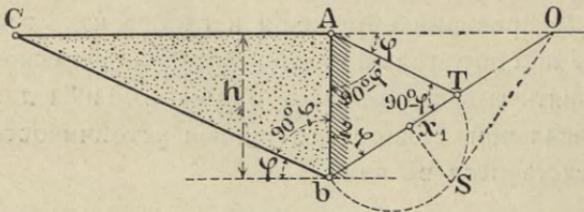
$$\frac{h_1}{h_0} > \text{tg}^4(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi), \text{ или } h_1 > h_0 \text{tg}^4(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \dots (82)$$

по которой опредѣляется необходимая глубина заложения основанія кессоновъ, опускаемыхъ колодцевъ и т. п.; дѣйствительная же глубина заложения ихъ выбирается большей отъ 2,5 до 3 $\frac{1}{2}$ разъ.

При углѣ тренія $\varphi = 30^\circ$, $\text{tg}^4 30^\circ = \frac{1}{9}$, слѣдовательно, глубина h_1 заложения основанія должна быть больше $\frac{1}{9}$ высоты h_0 соотвѣтствующей давленію на его подошву.

121. Интересно выразить теперь то же условіе устойчивости $n < n'$, принимая въ расчетъ силу тренія въ плоскости ba , раздѣляющей обѣ призмы.

Въ этомъ случаѣ давленіе R_0 призмы обрушенія на призму отпора будетъ составлять съ нормалью къ плоскости ba уголъ $\varphi_0 = \varphi$, отложенный внизъ, а реакцію R'_0 призмы отпора на призму обрушенія составляетъ такой же уголъ съ нормалью къ ba , но отложенный вверхъ; слѣдовательно, направленія силъ R_0 и R'_0 и n и n' — параллельны между собою. Чтобы выразить условіе устойчивости, нужно сперва опредѣлить R_0 и R'_0 въ функціи угла φ и высоты h . Вычислимъ величину первой силы для случая



Фиг. 201.

вертикальной стѣны съ угломъ тренія $\varphi_0 = \varphi$ и безъ нагрузки на откосъ AC (фиг. 201). Мы знаемъ, что давленіе R_0 выражается построеніемъ Понсле (фиг. 180):

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot b x_1^2 \cdot \text{sn} ATO,$$

если $Ox_1^2 = Ob \cdot OT$.

Въ данномъ случаѣ $SnATO = Sn(90^\circ - \varphi) = Cs\varphi$; $bA = bT = h$
и $Ob = \frac{h}{Cs2\varphi}$. Поэтому $Ox_1^2 = \frac{h}{Cs2\varphi} \left(\frac{h}{Cs2\varphi} - h \right) = \frac{h^2(1 - Cs2\varphi)}{Cs^22\varphi} =$
 $= \frac{h^2 2Sn^2\varphi}{Cs^22\varphi}$, или $Ox_1 = \frac{h\sqrt{2}Sn\varphi}{Cs2\varphi}$; слѣдоват. $bx_1 = Ob - Ox_1 =$
 $= \frac{h}{Cs2\varphi} - \frac{h\sqrt{2}Sn\varphi}{Cs2\varphi} = \frac{h\sqrt{2}}{Cs2\varphi} (Sn45^\circ - Sn\varphi)$. Такимъ образомъ да-
вление $R_o = \delta h^2 \cdot \frac{(Sn45^\circ - Sn\varphi)^2}{Cs^22\varphi} \cdot Cs\varphi = \delta h^2 A$, и его напряженіе n
на глубинѣ h , т. е. $\frac{dR_o}{dh} = 2\delta h \cdot A$, гдѣ черезъ A обозначенъ
коэффициентъ $\frac{(Sn45^\circ - Sn\varphi)^2 \cdot Cs\varphi}{Cs^22\varphi}$.

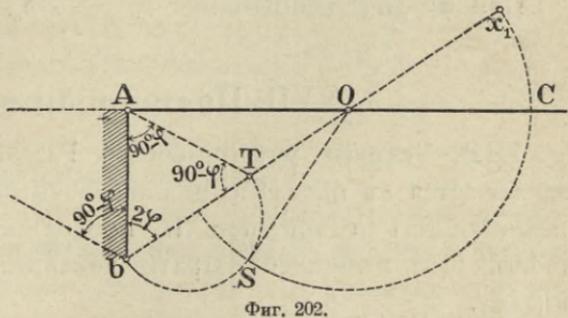
Въ случаѣ нагрузки слоемъ земли высотой h_o

$$R_o = \left(1 + \frac{2h_o}{h} \right) \delta h^2 A =$$

$$(h^2 + 2hh_o) \delta A$$

и напряженіе $n = 2(h + h_o) \delta A'$

Для опредѣленія величины силы R'_o построение Понсле даетъ (фиг. 202)



$$R'_o = \frac{1}{2} \delta \cdot bx_1^2 SnATO,$$

при чемъ $Ox_1^2 = Ob \cdot OT$. Въ настоящемъ случаѣ отрезки bO , OT и Ox_1 имѣютъ тѣ же значенія, которыя мы только что опредѣлили для давленія R_o ; поэтому

$$bx_1 = bO + Ox_1 = \frac{h}{Cs2\varphi} + \frac{h\sqrt{2}Sn\varphi}{Cs2\varphi} = \frac{h\sqrt{2}(Sn45^\circ + Sn\varphi)}{Cs2\varphi}.$$

Слѣдовательно, сопротивление призмы отпора

$$R'_o = \delta \cdot h^2 \frac{(Sn45^\circ + Sn\varphi)^2}{Cs^22\varphi} \cdot Cs\varphi = \delta h^2 \cdot B,$$

и напряженіе $n' = 2\delta hB$, гдѣ черезъ B обозначенъ

множитель $\frac{(Sn45^\circ + Sn\varphi)^2 \cdot Cs\varphi}{Cs^22\varphi}$.

При нагрузкѣ слоемъ h_1 земли

$$R'_0 = \left(1 + \frac{2h_1}{h}\right) \delta h^2 B = (h^2 + 2hh_1) \delta B \text{ и } n' = 2\delta (h + h_1) B.$$

Примѣняя теперь выведенныя формулы къ условію устойчивости основанія сооруженія $n' > n$ (фиг. 200), находимъ

$$2\delta (h + h_1) B > 2\delta (h + h_0) A, \text{ откуда } \frac{h + h_1}{h + h_0} > \frac{h_1}{h_0} > \frac{A}{B}.$$

$$\text{Но } \frac{A}{B} = \left(\frac{\text{Sin}45^\circ - \text{Sin}\varphi}{\text{Sin}45^\circ + \text{Sin}\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\text{tg}\frac{1}{2}(45^\circ - \varphi)}{\text{tg}\frac{1}{2}(45^\circ + \varphi)}\right)^2,$$

слѣдовательно, глубина h_1 заложенія основанія должна удовлетворять условію:

$$h_1 > h_0 \frac{\text{tg}\frac{3}{2}(45^\circ - \varphi)}{\text{tg}\frac{3}{2}(45^\circ + \varphi)} \dots \dots \dots (83)$$

При $\varphi = 30^\circ$, необходимо $h_0 > \frac{1}{34} h_0$.

XVII. Подпорныя стѣны.

122. Условія устойчивости. Разсчетъ подпорныхъ стѣнъ заключается въ опредѣленіи поперечныхъ размѣровъ ихъ, обезпечивающихъ безопасное и продолжительное существованіе стѣнъ, безъ излишней затраты каменныхъ матеріаловъ на ихъ кладку.

Излагаемый разсчетъ относится къ стѣнамъ изъ *кладки на растворѣ*, находящимся въ обыкновенныхъ условіяхъ; стѣнамъ изъ *сухой кладки* слѣдуетъ придавать размѣры на $\frac{1}{3}$ большіе размѣровъ стѣнъ изъ кладки на растворѣ; особенности разсчета стѣнъ набережныхъ и вододержательныхъ плотинъ, устраиваемыхъ въ исключительно неблагоприятныхъ условіяхъ, будутъ указаны послѣ разсчета стѣнъ въ обыкновенныхъ условіяхъ.

Сила сцѣпленія раствора съ камнями (естественными или искусственными), а также сопротивленія разрыву его и самихъ камней, по сравненію съ сопротивленіями ихъ сжатію—незначительны; поэтому при разсчетѣ подпорныхъ стѣнъ пренебрегаютъ существованіемъ этихъ силъ и принимаютъ, что каменная кладка оказываетъ сопротивленіе только сжимающимъ силамъ, и что

скольжению однихъ слоевъ кладки по другимъ противодѣйствуетъ только проявляющееся между слоями треніе.

Пусть $ABCD$ (фиг. 203)—подпорная стѣна съ прямою задней гранью AB , состоящая изъ рядовъ кладки, параллельныхъ CB .

P —вѣсъ стѣны,

R_0 —давленіе земли на заднюю грань стѣны,

φ_0 —его уголъ съ нормалью къ грани AB ,

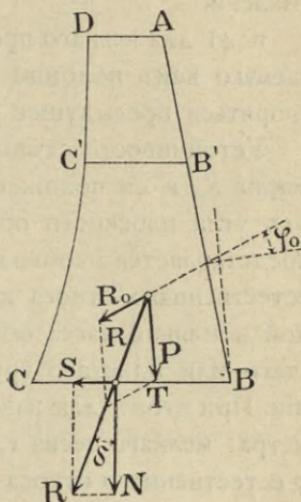
и R —равнодѣйствующая силъ P и R_0 .

Для обезпеченія продолжительнаго и безопаснаго существованія подпорной стѣны требуется, чтобы она была устойчива въ надлежащей степени, т. е. ея поперечные размѣры должны быть таковы, чтобы отъ дѣйствія силъ P и R_0 не могли произойти ни перемѣщеніе стѣны, ни ослабленіе матеріала. Стѣна можетъ перемѣститься или скользя по плоскости BC , когда сила тренія равна или меньше составляющей R по плоскости BC , или вращаясь параллельно плоскости чертежа, когда давленіе на грунтъ у реберъ C или B превзойдетъ безопасный предѣлъ и вызоветъ осадку грунта и наклоненіе стѣны. Поэтому устойчивость стѣны прежде всего зависитъ отъ прочности и малой сжимаемости грунта подъ подошвой стѣны. Ослабленіе матеріала стѣны можетъ послѣдовать, если напряженіе его отъ дѣйствія силъ P и R_0 въ какой-либо точкѣ превзойдетъ допускаемое для этого матеріала прочное сопротивленіе.

Такимъ образомъ поперечные размѣры подпорной стѣны должны быть таковы, чтобы удовлетворялись слѣдующія условія устойчивости:

1) вызываемое нормальной составляющей N наибольшее напряженіе сжатію грунта не должно превосходить допускаемаго для него предѣла $3-6 \frac{\text{кл}}{\text{см}^2}$ (кромѣ скалистыхъ грунтовъ).

2) равнодѣйствующая силъ P и R_0 сила R должна составлять съ нормалью къ подошвѣ BC уголъ δ , не превосходящій угла тренія кладки стѣны по землѣ φ_0 . Въ этомъ случаѣ требуется,



Фиг. 203.

чтобы $T = Ntg\delta \geq m S$, гдѣ m — коэффициентъ безопасности, принимаемый = 1,5 — 2;

3) ни въ одной точкѣ стѣны напряженіе матеріала не должно превосходить допускаемаго для этого матеріала прочнаго сопротивленія

и 4) для всякаго произвольно-взятаго сѣченія $C'B'$, разсматриваемаго какъ подошва части стѣны $ADC'B'$, должно удовлетворяться предыдущее условіе относительно скольженія.

Устойчивость стѣны значительно зависитъ отъ силы давленія земли R_0 и ея положенія, которыя опредѣляются въ зависимости отъ угла плоскости обрушенія и вѣса земляной призмы; поэтому представляется необходимымъ возможно точнѣе опредѣлить уголъ естественнаго откоса земли φ и ея вѣсъ δ . Поддерживаемая стѣной земляная масса обыкновенно состоитъ изъ песчанаго, глинистаго или илистаго грунта и разсматривается въ сухомъ состояніи. При этомъ для расчета принимаютъ вѣсъ δ въ тоннахъ 1 куб. метра: мелкаго песка 1,6, гравія 1,8 и глины и ила 1,4—1,6, а уголъ φ естественнаго откоса для нихъ соотвѣтственно 30° , 35° и 40 — 45° .

Для мокрыхъ глины и ила вѣсъ δ возрастаетъ до 1,9 и $\frac{m}{m^3}$, а уголъ φ тренія уменьшается до 20° и менѣе. Для рѣчныхъ опоръ мостовъ и набережныхъ, за которыя вода можетъ протекать и заполнять промежутки между частицами песчанаго или гравелистаго грунта, нужно при расчетахъ вѣсъ его увеличивать и уменьшать уголъ тренія какъ для земли по землѣ, такъ и для подошвы — стѣны по грунту.

Давленіе на грунтъ подъ подошвой стѣны опредѣляется, какъ и для кладки стѣны, по закону неравномѣрнаго сжатія. При этомъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что при грунтахъ слабыхъ, сильно сжимаемыхъ и при возможности измѣненій положенія точки J пересѣченія равнодѣйствующей R съ подошвой BC въ зависимости отъ дѣйствующихъ на стѣну силъ, первоначально плоская поверхность грунта подъ подошвой стѣны, вслѣдствіе сжимаемости его, можетъ обратиться въ кривую поверхность, нарушающую правильность распредѣленія давленія на грунтъ и ослабляющую устойчивость стѣны. Въ такихъ случаяхъ размѣры подошвы стѣны должны быть настолько увеличены, чтобы точка J пересѣченія равнодѣйствующей R съ подошвой стѣны мало отклонялась отъ середины послѣдней.

Условія устойчивости стѣны служатъ основаніемъ для опредѣленія поперечныхъ размѣровъ стѣны, т. е. толщины стѣны по подошвѣ и въ любомъ сѣченіи $B'C$.

Разсмотримъ часть стѣны, поперечный профиль которой $ABCD$ (фиг. 204) и длина которой равна единицѣ. Пусть a —толщина стѣны по подошвѣ;
 b —разстояніе отъ J точки встрѣчи подошвы съ равнодѣйствующей R до точки C ;

c —разстоянія отъ J точки встрѣчи подошвы съ равнодѣйствующей до середины подошвы O ;

N и S —составляющія силы R .

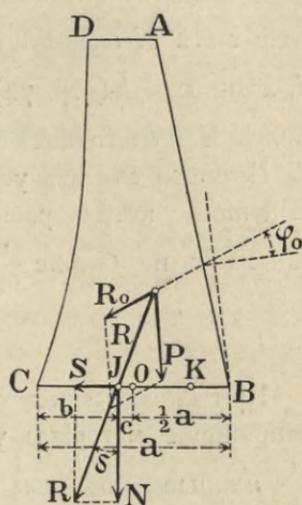
Отъ величины b зависитъ степень устойчивости стѣны и равномерность распределенія давленія: чѣмъ больше b , тѣмъ ближе J къ серединѣ, а слѣдовательно и равномернѣе распределеніе давленія.

При неравномерномъ сжатіи для прямоугольнаго сѣченія (стр. 70) наибольшее напряженіе соответствуетъ ближайшему къ точкѣ J ребру C , а наименьшее—ребру B , при чемъ

$$\max. n = \frac{N}{a} \left(1 + \frac{6c}{a} \right) = \frac{N}{a} \left(4 - \frac{6b}{a} \right)$$

$$\min. n = \frac{N}{a} \left(1 - \frac{6c}{a} \right) = \frac{N}{a} \left(\frac{6b}{a} - 2 \right).$$

Мы знаемъ, что при $b > \frac{1}{3}a$, значенія $\max. n$ и $\min. n$ будутъ положительны, т. е. въ сѣченіи будутъ вызываться однѣ сжимающія напряженія, при чемъ $\max. n$ съ увеличеніемъ b уменьшается, а $\min. n$ увеличивается; при $b = \frac{a}{3}$, $\max. n = \frac{2N}{a}$, $\min. n = 0$ (см. фиг. 82, стр. 70). Когда b меньше $\frac{a}{3}$, то $\max. n$ положительно, а $\min. n$ отрицательно, т. е. на части площади ближайшей къ B происходятъ растягивающія напряженія.



Фиг. 204.

Такъ какъ мы принимаемъ, что какъ грунтъ такъ и каменная кладка оказываютъ сопротивленіе только сжимающимъ усилямъ, то въ случаѣ b меньше $\frac{a}{3}$ нужно считать, что противодѣйствіе силъ N оказываетъ только часть площади BC отъ C до K , длиною $= 3b$ (стр. 74). $\text{Max. } n = \frac{2N}{3b}$ въ точкѣ C ; $\text{min. } n = 0$ въ точкѣ K и въ точкахъ отъ K до B напряженія также равны нулю.

Принято считать устойчивость *подпорной стѣны* вполне обеспеченной, когда равнодѣйствующая R встрѣчаетъ подошву основанія не ближе $\frac{1}{4}$ ширины ея отъ ребра C , т. е. когда

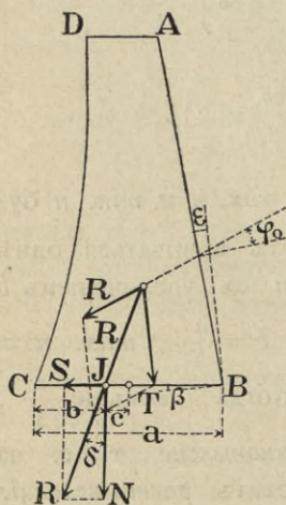
$$b > \frac{1}{4} a = c.$$

При соблюденіи этого требованія устраняется и чрезмѣрное напряженіе матеріала у внѣшняго ребра, такъ какъ не менѣ $\frac{3}{4}$ площади подошвы оказываютъ сопротивленіе сжатію.

Требованіе относительно точки приложенія равнодѣйствующей соотвѣтственныхъ силъ P и R_0 имѣетъ мѣсто для всякаго произвольно взятаго шва кладки, такъ какъ каждый шовъ по отношенію къ вышележащей части стѣны находится въ тѣхъ же условіяхъ, что и подошва BC по отношенію ко всей стѣнѣ $ABCD$.

123. Опредѣленіе размѣровъ стѣны. Чтобы опредѣлить поперечные размѣры подпорной стѣны, нужно только условія устойчивости стѣны выразить аналитически.

Написавъ относительно точки J аналитическое выраженіе суммы моментовъ силъ P и R_0 и приравнявъ ее моменту равнодѣйствующей R , т. е. нулю, получимъ уравненіе, опредѣляющее величину b въ зависимости отъ a ; если же мы положимъ въ немъ $b = \frac{1}{4} a$, то уравненіе будетъ служить для опредѣленія величины a , когда она намъ неизвѣстна.



Фиг. 205.

Опредѣливъ такимъ образомъ величину a , нужно затѣмъ будетъ провѣрить, удовлетворяются ли условія устойчивости 3 и 4. Величина угла φ тренія кладки по кладкѣ принимается въ $27\frac{1}{2}^{\circ}$ при свѣжемъ растворѣ и $\varphi=37^{\circ}$ при отвердѣвшемъ растворѣ. Для подошвы стѣны уголъ тренія кладки по землѣ принимается обыкновенно въ 30° .

Если одно изъ этихъ условій или оба не удовлетворяются, то толщину a опредѣляютъ изъ аналитическихъ выраженій этихъ условій.

Прочное сопротивленіе R_2 каменной кладки на сжатіе зависитъ отъ свойствъ и вида камней, рода и качества раствора. Въ нижеслѣдующей таблицѣ указаны среднія численныя величины прочнаго сопротивленія и вѣса кубическаго метра каменной кладки разнаго рода.

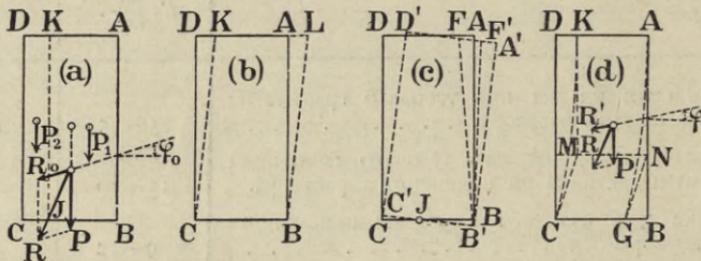
Родъ каменной кладки.	Прочное сопротивление $R_2 \frac{\text{к.л.}}{\text{с.м}^2}$.	Вѣсъ м ³ въ к.л.
Правильная кладка изъ тесоваго гранита на цементномъ растворѣ	25—35	2600
Правильная кладка изъ тесоваго песчаника или известняка на цементномъ растворѣ .	15—20	2400
Кладка изъ бутоваго камня на цементномъ растворѣ	9—12	2300
Кладка изъ бутоваго камня на известковомъ растворѣ	5—7	2300
Кладка изъ хорошаго кирпича на цементномъ растворѣ.	8—10	1700
Кладка изъ кирпича на известковомъ растворѣ.	5—6	1700
Бетонная кладка на цементномъ растворѣ . .	5—7	2000

124. Выборъ профиля подпорныхъ стѣнъ. На очертаніе профиля подпорныхъ стѣнъ, кромѣ условій устойчивости, вліяютъ атмосферные дѣятели и родъ каменнаго матеріала, опредѣляющія наименьшую толщину стѣны и требующійся видъ свободнаго пространства у стѣны, обусловливающія уклонъ передней грани. Наивыгоднѣйшимъ очертаніемъ поперечнаго профиля стѣны бу-

детъ то, при которомъ стѣна, удовлетворяя условіямъ устойчивости и практическимъ указаніямъ, требуетъ наименьшаго количества матеріала, т. е. когда поперечное сѣченіе имѣетъ наименьшую площадь.

Пусть $ABCD$ (фиг. 206а) подпорная стѣна прямоугольнаго сѣченія и сила R , равнодѣйствующая изъ силъ P и R_0 , пересѣкаетъ подошву BC въ точкѣ J ; $CJ = \frac{1}{4} BC$.

Вѣсъ *правой* части стѣны $ABKJ$ относительно J будетъ *увеличивать*, а вѣсъ *лѣвой* части $CDKJ$ — *уменьшать* устойчивость стѣны, такъ какъ первый приближаетъ къ срединѣ подошвы точку J , а второй — удаляетъ отъ нея. Поэтому для увеличенія устойчивости стѣны или, при сохраненіи данной степени устойчивости, для сбереженія матеріала слѣдуетъ уменьшить вѣсъ лѣвой части и увеличить вѣсъ правой. Достигнуть этого можно слѣдующими способами:



Фиг. 206.

1) отнять отъ прямоугольнаго поперечнаго профиля слѣва треугольникъ CDK (фиг. 207b и 206b);

2) еще лучше отнять треугольникъ CDK отъ лѣвой части и прибавить треугольникъ ABL къ правой (фиг. 206b и 206b');

3) повернуть весь профиль $ABCD$ стѣны около оси J , не измѣняя самого профиля, на уголъ β (206c и 207c);

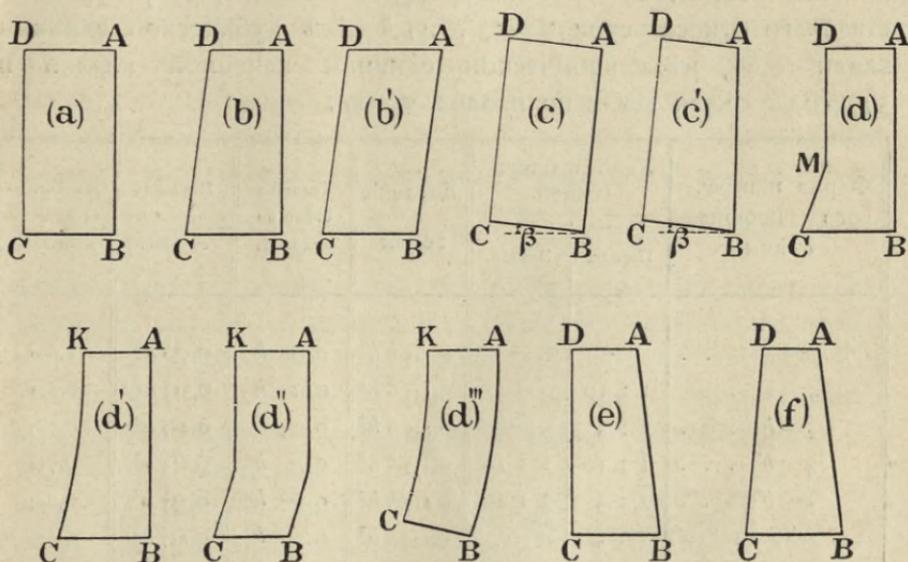
4) повернуть весь профиль стѣны около оси J на уголъ β , отрѣзавъ справа треугольникъ ABF (фиг. 207c и 207c');

5) отнять отъ прямоугольнаго сѣченія слѣва трапецію $CDKM$ причемъ точка M должна быть взята такъ, чтобы равнодѣйствующая R' изъ вѣса P и давленія R_0 , соответствующихъ части

стѣны $AKMN$ пересѣкала шовъ MN въ разстояніи $\frac{1}{4}MN$ отъ точки M (фиг. 206*d* и 207*d*);

б) отнять отъ прямоугольнаго сѣченія слѣва, вмѣсто трапеціи $CDKM$, площадь CDK , причеъ кривая CK —касательна къ KM и MC въ точкахъ K и C (фиг. 206*d* и 207*d'*).

Если точка пересѣченія равнодѣйствующей съ подошвой лежитъ внѣ средней трети, то правый нижній уголъ можно срѣзать:



Фиг. 207.

или 7) по прямой GN (фиг. 206*d* и 207*d''*),

или 8) по кривой AG (фиг. 206*d* и 207*d'''*). Величина срѣза опредѣляется такимъ образомъ, чтобы напряженіе матеріала въ точкѣ G , ранѣе засыпки стѣны землею, не превосходило допускаемаго прочнаго сопротивленія.

Поперечный профиль на фиг. 207*d'''* называется англійскимъ профилемъ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ поперечному профилю стѣны придаютъ формы, изображенныя на фиг. 207*e* и 207*f*, скашивая одну грань, или обѣ.

При всякой формѣ поперечнаго сѣченія, толщина стѣны по верху должна быть не меньше 0,25 сж. Уклоны сръзанныхъ частей въ профиляхъ на фиг. 207*b*, *b'*, *c* и *c'* отъ $\frac{1}{10} - \frac{1}{5}$, въ профиляхъ 207*d* и *d''* уклонъ нижнихъ граней — $\frac{2}{7}$.

Для нагляднаго представленія относительной выгоды различныхъ формъ поперечнаго профиля (ф. 207) въ таблицѣ приведены относительные размѣры ихъ площадей. При составленіи таблицы принято, что 1) земляная масса ограничена сверху горизонтальной плоскостью, 2) высота подпорной стѣны *h*, 3) уголъ естественнаго откоса земли $\varphi = 35^\circ$, 4) δ вѣсъ кубической единицы земли = 0,8 δ_0 вѣса кубической единицы каменной кладки и 5) уголъ тренія земли по кладкѣ $\varphi_0 = 0^\circ$.

Форма поперечнаго профиля стѣны.	Уклонъ боков. граней.		Давленіе земли.	Толщина стѣны по подошвѣ.	Площадь поперечнаго сѣченія.	Относительная величина площади.
	Передн.	Задней.				
Форма <i>a</i> . . .	—	—	0,135 δh^2	0,380 <i>h</i>	0,380 h^2	1,000
„ <i>b</i> . . .	1 : 10	—	0,135 δh^2	0,365 <i>h</i>	0,315 h^2	0,829
„ <i>b</i> . . .	1 : 5	—	0,135 δh^2	0,367 <i>h</i>	0,267 h^2	0,703
„ <i>b'</i> . . .	1 : 10	1 : 10	0,117 δh^2	0,279 <i>h</i>	0,279 h^2	0,734
„ <i>b'</i> . . .	1 : 5	1 : 10	0,117 δh^2	0,287 <i>h</i>	0,237 h^2	0,624
„ <i>c'</i> ($\beta = 11^\circ 19'$)	1 : 5	—	0,135 δh^2	0,342 <i>h</i>	0,237 h^2	0,624
„ <i>c'</i> ($\beta = 11^\circ 19'$)	1 : 5	1 : 10	0,117 δh^2	0,270 <i>h</i>	0,220 h^2	0,579
„ <i>e</i> . . .	—	1 : 10	0,156 δh^2	0,461 <i>h</i>	0,411 h^2	1,082
„ <i>e</i> . . .	—	1 : 5	0,177 δh^2	0,530 <i>h</i>	0,430 h^2	1,132
„ <i>f</i> . . .	1 : 10	1 : 10	0,156 δh^2	0,441 <i>h</i>	0,341 h^2	0,897

Таблица показываетъ, что изъ числа трапециoidalныхъ формъ поперечнаго профиля наиболѣе выгодною является форма *c'*, соотвѣтствующая стѣнѣ съ наклонными швами и съ боковыми гранями, наклоненными въ сторону къ земляной массѣ. Наиболѣе невыгодная форма *e*, соотвѣтствующая стѣнѣ съ горизонтальными швами, съ передней вертикальной гранью и задней, наклоненной въ сторону отъ земляной массы. По степени выгоды формы

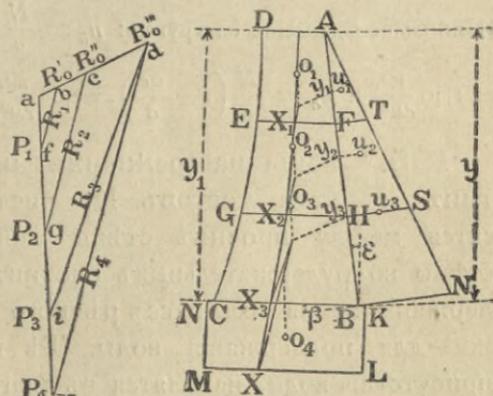
можно размѣстить въ слѣдующемъ порядкѣ: c' , b' , b , f и e . Сравненіе формъ поперечнаго профиля показываетъ, что съ увеличеніемъ наклона боковыхъ граней въ сторону земляной массы количество кладки уменьшается, а съ увеличеніемъ наклона задней грани въ сторону отъ земляной массы количество кладки возрастаетъ.

Если сравнить формы поперечнаго профиля d , d' , d'' и d''' съ формой c' , то оказывается, что формы d и d' — менѣе выгодны, а форма d'' и d''' болѣе выгодны, чѣмъ форма c' .

Точка пересѣченія какого-нибудь шва съ равнодѣйствующей соотвѣтственныхъ вѣса и давленія земли называется *центромъ давленія*. Мы знаемъ (стр. 74 ч. I), что кривая, соединяющая центры давленій, называется *кривою давленія*; она даетъ ясное представленіе о степени устойчивости всей стѣны и каждой ея части.

Согласно предыдущему, мы можемъ выразить условія устойчивости въ нѣсколько иномъ видѣ, а именно: 1) кривая давленія должна пересѣкать швы не ближе $\frac{1}{4}$ толщины стѣны отъ передней грани; 2) направленіе равнодѣйствующей (но не кривой давленія) должно составлять съ нормалью къ шву уголъ, меньшій угла тренія кладки φ ; и 3) напряженіе матеріала въ швахъ, гдѣ кривая подходит ближе всего къ передней грани стѣны, не должно превосходить допускаемаго прочнаго сопротивленія.

Для построенія кривой давленія, стѣну $ABCD$ (фиг. 208) разбиваютъ на нѣсколько отрѣзковъ плоскостями EF , $GH \dots$, параллельными подошвѣ BC , и принимаютъ ихъ за швы кладки. Опредѣливъ вѣса частей отъ верхней грани AD до сѣченій EF , GH , $BC \dots$, давленія земли на AF , AH и AB и точки ихъ приложенія, складываютъ соотвѣтствующіе



Фиг. 208.

вѣса и давленія и находятъ направленіе и положеніе равнодѣйствующихъ R_1 , $R_2 \dots$; точки пересѣченія равнодѣйствующей

щихъ съ соотвѣтственными швами лежатъ на искомой кривой давленія.

Примѣръ 1. Для представленной на фиг. 196 подпорной стѣнки построить линію равнодѣйствующихъ и найти наибольшее напряженіе давленія подошвы стѣны на грунтъ.

Давленія земли на части той же стѣны опредѣлены на фиг. 193 и для вѣса земли $\delta = 1,6 \frac{m}{m^3}$ они оказались равными:

$$R_1 = 0,74, R_2 = 1,74, R_3 = 1,98, R_4 = 2,4 \text{ т.}$$

и ихъ равнодѣйствующая 6,88 т.

Вѣса частей стѣны, при вѣсѣ 1 м³. кладки $\delta_1 = 2,0$ т., по масштабу опредѣляются:

$$P_1 = 1,15 \cdot 2 = 3,30 \text{ т., } P_2 = 2,485 \cdot 2 = 4,97 \text{ т.}$$

$$P_3 = 2,65 \cdot 2 = 5,30 \text{ т. и } P_4 = 2,85 \cdot 2 = 5,70 \text{ т.}$$

Соединивъ на фиг. 196 силы P_1, R_1, P_2, R_2 и т. д. въ многоугольникъ и принявъ начальную его точку O за полюсь, строимъ веревочный многоугольникъ 1, 2', 2, 3', 3, 4', 4, k , представляющій искомую линію равнодѣйствующихъ. Направленіе послѣдней стороны опредѣляетъ положеніе равнодѣйствующей R и ея точку k пересѣченія съ подошвой стѣны, находящуюся вправо отъ середины подошвы на разстояніи 4 см. Разложивъ равнодѣйствующую R на составляющія—нормальную N къ подошвѣ = 21650 кл. и параллельную ей $H = 6400$ кл., находимъ для угла тренія кладки по землѣ 30° силу тренія $N \operatorname{tg} 30^\circ = 0,57 \cdot 21650$ и коэффициентъ устойчивости на скольженіе

$$m = \frac{0,57 \cdot 21650}{6400} = 1,93.$$

Наибольшее давленіе на грунтъ: $n_b = \frac{N}{a} \left(1 + \frac{6c}{a}\right) = \frac{21650}{174 \cdot 100} \left(1 + \frac{6 \cdot 4}{174}\right) =$
 $= 1,40 \frac{\text{кл.}}{\text{см}^2}$ и $n_a = \frac{N}{a} \left(1 - \frac{6c}{a}\right) = 1,08 \frac{\text{кл.}}{\text{см}^2}.$

125. Стѣны набережныхъ и вододержательныхъ плотинъ и устои мостовъ. Къ числу подпорныхъ стѣнъ относятся между прочимъ стѣны набережныхъ, устои мостовъ и стѣны вододержательныхъ плотинъ. Первыя служатъ для поддержанія земляныхъ массъ рѣчного или морского берега, вторыя же—для поддержанія воды. Тѣ и другія стѣны, вслѣдствіе присутствія воды, находятся въ менѣе благопріятныхъ условіяхъ, чѣмъ подпорныя стѣны, служащія для поддержанія земляныхъ насыпей. Трещины въ каменной кладкѣ у задней грани стѣнъ дѣлаются опасными: 1) вода, входя въ нихъ, производитъ на кладку давленіе снизу вверхъ и уменьшаетъ устойчивость стѣны

и 2) замерзая, вода производитъ дальнѣйшее распространіе трещинъ.

Чтобы предупредить образованіе трещинъ, необходимо спроектировать стѣну такъ, чтобы всѣ швы каменной кладки подвергались *только сжатію*. Изъ теоріи неравнообѣрнаго сжатія намъ извѣстно, что для удовлетворенія этому условію равнообѣдствующая внѣшнихъ силъ должна встрѣчать шовъ въ разстояніи не меньшемъ $\frac{1}{3}$ соотвѣтствующей толщины стѣны отъ наружнаго ребра. Поэтому условія устойчивости для устоевъ мостовъ и подпорныхъ стѣнъ водоудержательныхъ плотинъ и набережныхъ могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

1) равнообѣдствующая внѣшнихъ силъ должна встрѣчать подошву стѣны въ средней трети толщины стѣны, или что кривая давленія должна заключаться въ средней трети стѣны;

2) уголъ между равнообѣдствующей и нормалью къ подошвѣ не долженъ превосходить угла тренія каменной кладки;

3) ни въ одной точкѣ стѣны напряженіе каменнаго матеріала не должно превосходить допускаемаго прочнаго сопротивленія сжатію.

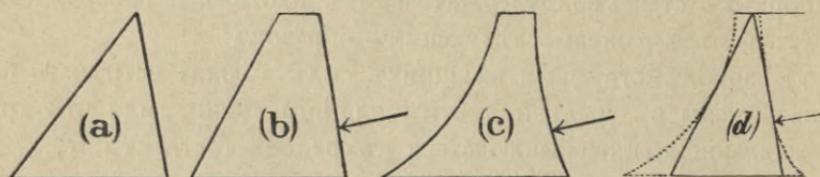
Предыдущія условія имѣютъ мѣсто для всякаго шва съ соотвѣтственной частью стѣны.

162. Стѣны набережныхъ подвержены дѣйствию трехъ силъ: собственнаго вѣса, давленія земли на заднюю грань и давленія воды на переднюю грань; при чемъ послѣднее дѣйствуетъ нормально къ поверхности стѣны и приложено на разстояніи $\frac{2}{3}$ высоты отъ горизонта воды. Устои мостовъ подвергаются еще давленію фермъ моста и иногда давленію воды на подошву, равному вѣсу вытѣсненной воды.

Стѣнамъ набережныхъ придаютъ обыкновенно трапециoidalную форму поперечнаго сѣченія. Опредѣленіе размѣровъ ихъ дѣлается на основаніи условій устойчивости, выражая ихъ аналитически съ тою лишь разницей, что разстояніе b точки J пересѣченія равнообѣдствующей надо положить равнымъ $\frac{1}{3} a$ вмѣсто $\frac{1}{4} a$.

Толщина стѣны набережной по верху a_0 принимается такою, чтобы она могла оказать сопротивление разрушительному дѣйствію атмосферныхъ дѣятелей. Обыкновенно берутъ a_0 не меньше 0,25 саж. Уклоны передней грани набережныхъ отъ 0 до $\frac{1}{10}$ и рѣдко $\frac{1}{5}$, задней — уклонъ со стороны берега отъ 0 до $\frac{1}{10}$.

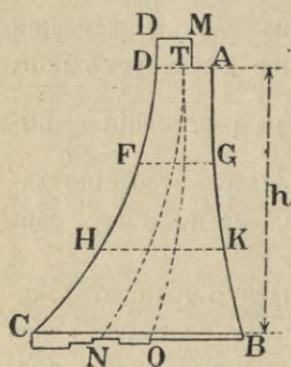
Стѣны водоудержательныхъ плотинъ подвержены дѣйствію всегда вполнѣ опредѣленныхъ силъ: собственного вѣса и давленія воды. Этимъ стѣнамъ придаютъ обыкновенно формы: треугольную, трапециoidalную и криволинейную (фиг. 209 *a, b* и *c*).



Фиг. 209.

На уровнѣ наивысшаго горизонта воды стѣна должна имѣть толщину, достаточную для сопротивленія ударамъ волнъ и атмосфернымъ вліяніямъ. При треугольной формѣ стѣны сопряженіе верхней уширенной части съ нижней дѣлается съ помощью пологихъ кривыхъ поверхностей (фиг. 209*d*).

Иногда для уменьшенія давленія на подошву, стѣну уширяютъ внизу и уширенную часть соединяютъ съ верхней также пологими кривыми поверхностями (фиг. 209*c*).



Фиг. 210.

Стѣны водоудержательныхъ плотинъ должны быть устойчивы, какъ при дѣйствіи бокового давленія воды, такъ и при спускѣ поддерживаемой плотиною воды, при дѣйствіи одного собственного вѣса плотины. Толщина стѣнъ водоудержательныхъ плотинъ опредѣляется такимъ

образомъ изъ аналитическихъ выраженій условій устойчивости въ двухъ предположеніяхъ: при дѣйствіи воды и вѣса плотины, и при дѣйствіи одного вѣса плотины; для толщины a выбирается

большее изъ двухъ значеній. Для нагляднаго представленія рас-
предѣленія усилій въ стѣнѣ и выясненія правильности приданнаго
стѣнѣ профиля, вычерчиваютъ на немъ двѣ кривыхъ давленія —
при совмѣстномъ дѣйствіи воды и вѣса стѣны, и при отдѣльномъ
дѣйствіи послѣдняго (фиг. 210).

Стѣны водоудержательныхъ плотинъ ставятся иногда непосред-
ственно на грунтъ. Чтобы удовлетворить въ этомъ случаѣ первому
и второму условіямъ устойчивости, приходится увеличить толщину
стѣны и подошвы. Пренебрегая вѣсомъ уширеній и приравнивая
наибольшія напряженія по подошвѣ при давленіи воды и безъ
него допускаемому давленію на грунтъ, можемъ найти величину
уширенного основанія стѣны.

По даннымъ практики, толщина верхней части водоудержа-
тельной плотины на уровнѣ наивысшаго горизонта воды должна
быть не менѣе 0,50 сж. и не менѣе $\frac{1}{7}$ высоты h стѣны до этого
горизонта. Верхняя часть плотины возвышается надъ уровнемъ
наивысшаго горизонта воды на высоту около $\frac{1}{10}h$.

Примѣръ 2. Дана опора моста (фиг. 211) высотой 10,8 м. и
шириною по верху 1,0 м. и по низу 5,0 м., поддерживающая пе-
счаную насыпь съ горизонтальной поверхностью, на которой па-
раллельно берегу расположенъ желѣзнодорожный путь съ тяже-
лыми паровозами. Горизонтъ высокой воды возвышается на 9,0 м.,
а низкой — на 2,0 м. надъ подошвой стѣны. Разсмотрѣть случай
быстраго пониженія воды съ наивысшаго уровня до низкаго, когда
поддерживаемый опорой моста грунтъ остается еще влажнымъ,
построить кривую давленія и опредѣлить наибольшее давленіе
на подошву устоя подъ вліяніемъ давленія земли и воды.

Принимаемъ вѣса земли, воды и кладки равными $\delta = 1,6$, $\delta' = 1,0$
и $\delta_1 = 2,0 \frac{m}{m^3}$ и наименьшіе углы тренія влажной земли по землѣ
и по кладкѣ $\varphi = \varphi_0 = 25^\circ$, такъ что $\varphi + \varphi_0 = 50^\circ$. Давленіе воды
на наружную грань $W = \frac{1}{2} \delta' \cdot 2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$ т. и на подошву (вѣсъ
вытѣсненной ею воды) $D = \delta \cdot 2,5 = 10$ т. Давленіе мостовой фермы
опору на 20,0 т.

Нагрузка на каждую изъ 5 осей паровоза = 17 т. при раз-
стояніи между ними 1,5 м. Предполагая, что рельсы укрѣплены

Для верхней части устоя строимъ призму обрушения, проходящую черезъ точку перелома b_1 . Черезъ точку A проведемъ $AS_1 \parallel$ основной линіи b_1T_1 , т. е. подь угломъ $\varphi + \varphi_0 = 50^\circ$ къ направлению верхней части устоя, и линію естественнаго откоса b_1k_1 подь угломъ $\varphi = 25^\circ$ къ горизонту. Находимъ $b_1v_1^2 = b_1k_1 \cdot b_1S_1$, проводимъ $v_1x_1 \parallel AS_1$ и отложимъ $v_1t_1 = v_1x_1$. Тогда давленіе земли на верхнюю часть $R_1 = \delta$. пл. $x_1v_1t_1 = 11,15$ т. Черезъ нижнюю точку b устоя проводимъ основную линію bT для второй части устоя подь угломъ 50° и параллельную ей черезъ точку x_1 прямую x_1c_1 и замѣняемъ пл. $\Delta x_1c_1v_1$ равновеликой пл. Δb_1Aa_1 . Подлежащій вычету вѣсъ $q = \delta$. пл. $\Delta b_1Aa_1 = 4,46$ т.

Опредѣлимъ теперь призму обрушения, проходящую черезъ точку x_2 , непосредственно передь грузомъ P_1 . Для этого проводимъ черезъ эту точку прямая x_2e_1 и x_2b' параллельно основной линіи bT и естественному откосу b_1k_1 , а также $a_1a_2 \parallel b_1x_2$, причемъ точки e_1 , a_2 и b' лежатъ на продолженіи вертикальной прямой bb_1 . На $b'e_1$ описываемъ полуокружность, изъ точки a_2 проводимъ $a_2f_1 \perp$ къ $b'e_1$, откладываемъ $b'b_2 = b'f_1$ и опредѣляемъ положеніе искомой призмы обрушения x_2b_2a безь груза P_1 . Соответствующее ей давленіе $R_{1-2} = 14,9$ т. на стѣну b_1b_2A выразится δ . пл. $\Delta x_2v_2t_2$, если $x_2v_2 \parallel bT$ и $b_2v_2k_2 \parallel$ естественному откосу, а давленіе R_2 на часть b_2b_1 — черезъ $R_{1-2} - S_1 = 6,6$ т. (фиг. 191).

Далѣе опредѣляемъ призму обрушения, проходящую черезъ точку x_3 (посрединѣ между грузами P_1 и P_2) и заключающую въ себѣ грузъ P_1 . Для этого проводимъ изъ точки a_1 прямую $a_1a_3 \parallel b_1x_3$, выбираемъ на продолженіи b_1b_2 такую точку p_1 , чтобы δ . $\Delta p_1a_3x_3 = P_1 = 8,5$ т., и проводимъ изъ точки x_3 прямая x_3e_2 и x_3b'' параллельно bT и b_1k_1 , на $b''e_2$ описываемъ полуокружность, проводимъ $p_1f_2 \perp b''e_2$ и дѣлаемъ $b''f_2 = b''b_3$. Тогда b_3x_3 — искомая плоскость обрушения, а соответствующее ей давленіе R_{1-3} на стѣну b_3b_1A выразится площадью $\Delta x_3v_3t_3 = 29,06$, если $b_3v_3 \parallel b_1k_1$, $x_3v_3 \parallel bT$ и $v_3t_3 = v_3x_3$. Разность $R_{1-3} - S_2 = 14,16$ т. дастъ величину R_3 .

Наконецъ опредѣляемъ плоскость обрушения, проходящую черезъ точку x_4 , заключающую и грузъ P_2 . Проводимъ $a_1a_4 \parallel b_1x_4$ и выбираемъ точку p_2 такъ, чтобы δ . пл. $p_2a_4x_4 = P_1 + P_2 = 17$ т. проводимъ $x_4e_3 \parallel bT$ и $x_4b''' \parallel b_1k_1$, описываемъ полуокружность e_3f_3b''' , дѣлаемъ $p_2f_3 \perp b'''e_3$ и $b'''f_3 = b'''b$ (такъ выбрана высота опоры). Тогда b_4x_4 будетъ искомая плоскость обрушения, а пло-

щадь треугольника $x_4 v_4 t_4$, умноженная на δ , представить соответствующее давление земли $R_{1-4} = 43,4$ т., а равенство $R_{1-4} - S_3 = R_4 = 14,34$ т. — давление на часть устоя bb_3 .

Таким образом давление земли на части устоя Ab_1, b_1b_2, b_2b_3 и bb_3 определяются: $R_1 = 11,15$, $R_2 = 6,60$, $R_3 = 14,16$ и $R_4 = 14,34$ т. Точки приложения этих давлений можно принять для верхней части на $1/3 b_1A$ от b_1 , а для остальных середин каждой части, или же точнее как показано на фиг. 196. Вся частей стѣны определяются: $Q_1 = 54,0$ (вместѣ съ давлением фермы 20,0 т.), $Q_2 = 17,46$, $Q_3 = 20,0$ и $Q_4 = 17,0$ т. Строимъ многоугольникъ силъ $Q_1 - R_1 - Q_2 - R_2 - Q_3 - R_3 - Q_4 - R_4 - D$ и W , дѣйствующихъ на стѣну и, принявъ начальную его точку O за полюсь, строимъ веревочный многоугольникъ равнодѣйствующихъ, послѣдняя сторона котораго опредѣляетъ положеніе равнодѣйствующей R всѣхъ силъ и точку k ея пересѣченія съ подошвой bd , отстоящую на разстояніи 1,80 м. отъ ребра d , т. е. въ средней трети подошвы стѣны.

Разложивъ равнодѣйствующую R на составляющія $N = 122400$ кл. — перпендикулярную и $H = 37600$ кл. — параллельную подошвѣ стѣны, находимъ наибольшее напряженіе давления на грунтъ

$$\max n = \frac{122400}{500 \cdot 100} \left(1 + \frac{6 \cdot 70}{500}\right) = 4,51 \text{ кл./см.}^2$$

$$\text{и } \min n = \frac{122400}{500 \cdot 100} \left(1 - \frac{6 \cdot 70}{500}\right) = 0,39 \text{ кл./см.}^2$$

Принимая же уголъ тренія подошвы стѣны по мокрому грунту $= 25^\circ$, для котораго $\operatorname{tg} \varphi_0 = 0,446$, получимъ коэффициентъ устойчивости на скольженіе

$$m = \frac{N \operatorname{tg} \varphi_0}{H} = \frac{122400 \cdot 0,446}{37600} = 1,45.$$



Содержаніе II части.

Теорія фермъ.

Глава		Стр.
I.	Понятія о внѣшнихъ силахъ и фермахъ	1
II.	Общія свойства инфлюентныхъ линій	8

Внѣшнія силы фермъ.

III.	Простыя балки	15
IV.	Аналитическій способъ опредѣленія <i>тах М.</i>	39
V.	Консольныя балки	53
VI.	Простыя трехшарнирныя арки	63
VII.	Консольныя трехшарнирныя арки	75

Внутреннія силы сквозныхъ фермъ.

VIII.	Общіе способы опредѣленія усилій	80
IX.	Разсчетъ сложныхъ фермъ	97
X.	Инфлюентныя линіи усилій поясовъ	102
XI.	Инфлюентныя линіи усилій рѣшетки фермъ	105
XII.	Рѣшетка арочныхъ фермъ	125
XIII.	Частные случаи фермъ	135
XIV.	Статически неопредѣлимые фермы	160
XV.	Давленіе земли	182
XVI.	Глубина заложенія основаній	212
XVII.	Подпорныя стѣны	216

10-80

8-96

100

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000294599