Mathematische Aufgaben

aus den

Reifeprüfungen der Gymnasialabiturienten

ausgewählt und zusammengestellt

von

Professor **Anton Bökeler**

I. Teil

Aufgaben aus der Geometrie

geordnet nach den Abschnitten des Lehrbuchs von Spieker.

Beilage zum Programm des Gymnasiums Ravensburg.

Ravensburg
Buchdruckerei von Dr Kah.

Abschnitt IV.

1) In einem Dreieck ABC einen Punkt X so zu finden, dass, wenn man durch denselben die Parallelen zu den Seiten zieht, in jeder Ecke ein Rhombus entsteht.

(Punkt X ist Schnittpunkt der Winkelhalbierenden).

2) Von 2 ausserhalb eines Kreises K gegebenen Punkten P_1 und P_2 aus 2 Geraden P_1X und P_2Y so zu ziehen, dass P_1X durch P_2Y halbiert wird und beide auf einander senkrecht stehen.

$(P_2P_1 = P_2X)$

3) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn die Mittelpunkte zweier Seiten und der Fusspunkt der zu einer dieser Seiten gehörigen Höhe gegeben ist.

4) Ein Viereck zu zeichnen, wenn gegeben die Mittelpunkte der Seiten a, b, c, der Winkel β (a b) und der Abstand f von B nach der Diagonale e.

5) Gegeben: 4 Parallelen in gleichen Abständen von einander. Ein Quadrat zu konstruieren, dessen Ecken auf den 4 Parallelen liegen.

(A sei auf L_1, B auf L_2, C auf L_4, D auf L_3, AE und CF $\perp$ L_3, so ist DE = CF = dem Abstand von L_3 und L_4).

6) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, von welcher 2 gegebene Paare von Parallelen gleich grosse Stücke abschneiden.

($L_1 \parallel L_2$ und $L_3 \parallel L_4$ schneiden sich nach dem Parallelogramm ABCD; die abgeschnittenen Stücke XY = ZU sind $\parallel$ Diagonale BD).

7) Gegeben 2 Kreise und 2 gerade Linien und ein Punkt S. Ein Parallelogramm zu konstruieren, von dem 2 gegenüberliegende Ecken auf die beiden Kreise, die beiden andern auf die 2 Geraden fallen und dessen Diagonalschnittpunkt der Punkt S ist.

(SA $\perp$ L_1 über S um sich selbst verlängert bis B, BX $\parallel$ L_1 giebt Ecke X auf L_2, damit Z auf L_1 bekannt; KS = SC, CY = KU = r).

Abschnitt V.

8) $\triangle$ aus a, $p - q = d$ und γ.

9) $\triangle$ aus $h + t = s$, $p - q = d$, β.

(D Höhenfusspunkt, E Mitte von BC, so ist $ED = \frac{p-q}{2}$).

10) $\triangle$ aus $(b - c)$; $(p - q)$, $\beta - \gamma = \delta$.

(D Höhenfusspunkt, DE = BD, AB auf AC abgetragen = AF, so ist $\triangle$ FEC konstruierbar).

---

11) $\triangle$ aus $(h' - h)$, a und γ.

(Zu $(h' - h)$ und γ ist $(a - b)$ Datum).

12) $\triangle$ aus $(h' - h)$, $(a - b)$ und c.

(γ Datum zu $(h' - h)$ und $(a - b)$).

13) $\triangle$ aus $(a + b + c) = u$, $(h' + h)$ und γ.

$(a + b)$ Datum zu $(h' + h)$ und γ.

14) $\triangle$ aus $(h' + h)$, $(a + b)$ und $(\alpha - \beta)$.

(γ Datum zu $(h' + h)$ und $(a + b)$).

Vierecksaufgaben.

15) Ein Parallelogramm zu zeichnen aus der Differenz zwischen einer Seite und der zur anderen Seite gefällten Höhe, der Höhe zur ersten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel (Parallelogramm aus $b - h_a = d$, h_b, β)

($CE \perp AB$, rechtw. $\triangle$ CEB konstruierbar aus d und β).

16) Trapez aus b, d, $\sphericalangle (ee')$, $(e + e') = s$.

($DE \parallel AC$, BD verlängert um DF = DE, so ist $\triangle$FBE konstruierbar).

17) Trapez aus b, $a + c = s$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.

($AE \parallel DC$, BA verlängert um AF = AE, so ist $\triangle$FBE konstruierbar).

18) Trapez aus $b - d$, $a - c$, $\sphericalangle B - \sphericalangle C = \delta$ und Diagonale e.

($AE \parallel DC$, $\triangle$ABE konstruierbar aus $BE = b - d$, $AB - AE = a - c$, $\sphericalangle B - \sphericalangle E = \delta$).

19) Konstruiere ein Trapez, in welchem die Mittellinie durch die Diagonalen in 3 gleiche Teile geteilt wird, und von welchem gegeben sind die grössere Grundseite b und die Winkel β'' und γ' dieser Seite mit den Diagonalen.

(Es muss $d = \frac{b}{2}$ sein).

20) Ein Viereck zu konstruieren aus den Gegenseiten a und c, den Diagonalen e und e_1 und der Summe σ der Winkel β und γ an der Seite b.
(CE || AB und BE || AC, so ist Viereck BECD konstruierbar).

Zu den Aufgaben 21—24.

Summe, Differenz der Abstände eines Punktes von 2 Geraden.

Geometrischer Ort für alle Punkte, deren Abstände von 2 gegebenen Geraden eine gegebene Summe s oder Differenz d haben, ist ein System von 4 geraden Linien. Die gegebenen Geraden sei L_1 und L_2; ziehe zu L_1 und L_2 je im Abstande s die Parallelen, welche von L_2 resp. L_1 in den Punkten A und B resp. C und D geschnitten werden, so bilden AC, CB, BD und DA die geometrischen Örter. Dieselbe Konstruktion für die Differenz d.

21) Auf der Seite AC eines gegebenen Dreiecks ABC einen Punkt X zu finden, dass die Summe der von X auf AB und BC gefällten Lote = s werde.

22) Durch die Ecke A des $\triangle$ ABC ist eine Parallele zu BC gezogen; man soll auf derselben den Punkt X so bestimmen, dass die von X auf BC gefällte Senkrechte eben so gross wird als die Summe der auf die beiden andern Seiten (oder ihre Verlängerungen) gefällten Senkrechten.

23) Ein Kreis ist gegeben und in ihm 2 Sehnen AB und CD. Auf der Peripherie einen Punkt X zu finden, dessen Entfernungen von AB und CD die Summe s haben.

24) In einem Kreis ist ein Durchmesser AB und eine Sehne CD gezogen, die letztere teilt den Durchmesser im Verhältnis 3 : 5 und trifft ihn unter dem Winkel von 60°. Man soll auf der Peripherie des Kreises einen Punkt X finden, so dass seine Entfernungen von AB und CD eine gegebene Differenz d haben.

24a) Innerhalb eines Winkels den Punkt P so zu bestimmen, dass, wenn man von ihm auf die Schenkel die Lote PX und PY fällt, PX : PY = m : n und PX — PY = d ist.
(Mit Abschnitt IX).

Abschnitt VI.

Aufgaben mit Fasskreis. a, r, α Data.

25) Im Innern eines ungleichseitigen Dreiecks einen Punkt zu bestimmen, so dass einem Auge in ihm die drei Seiten gleich gross erscheinen.

26) Ein Dreieck in einen Kreis zu beschreiben, wenn gegeben der Winkel α und die Differenz d der durch die Höhe auf a bestimmten Abschnitte p und q.

27) Gegeben ist ein Kreis, darin eine Sehne BC. Auf dem zugehörigen Bogen soll ein Punkt X so bestimmt werden, dass die Differenz seiner Entfernungen von B und C eine gegebene Grösse d habe.
($\triangle$ aus a, b — c, α).

28) Gegeben sind ein Kreis K und zwei Punkte P_1 und P_2. Man soll in den Kreis ein Dreieck beschreiben, so dass eine Seite = a ist und die beiden anderen Seiten durch P_1 resp. P_2 gehen.
(α ist Datum zu a und r, Fasskreis über P_1P_2 mit $\sphericalangle$ α).

29) Gegeben ein Kreis K, 2 Punkte P_1 und P_2 auf der Peripherie desselben und eine Gerade L. Durch P_1 und P_2 sollen 2 Geraden so gezogen werden, dass sie sich auf der Peripherie des Kreises schneiden und mit L ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Basis auf L liegt.
(Winkel α an der Spitze ist Datum zu P_1P_2 und Kreis K, Richtung von Schenkel XP damit bekannt).

30) Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, dessen Winkel an der Spitze und dessen Basis gegeben ist und dessen Seiten durch 3 gegebene Punkte gehen sollen.
(Spieker VI: Aufgabe 101).

31) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus beiden Seiten und dem Durchschnittswinkel der Diagonalen.

32) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus einem Winkel α und den beiden Diagonalen e und e_1.

33) $\triangle$ aus a, r, b + c.

34) Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem einen Abschnitt der Gegenseite, der durch die Halbierungslinie

dieses Winkels entstanden ist, und dem auf derselben Seite liegenden durch die Höhe entstandenen Abschnitt dieser Gegenseite.

(d. h. $\triangle$ aus α, u, p).

35) Ein Dreieck zu konstruieren aus: m″, α, β.

36) Zur Konstruktion eines Dreiecks ist gegeben h″, t″, γ.

37) Trapez aus b, c, d, $\sphericalangle$ (ee′).

38) Ein Trapez ABCD zu konstruieren, von welchem die Höhe, die eine parallele Seite AD, die Summe der anderen parallelen Seite BC und der einen anstossenden nichtparallelen Seite CD, sowie die Differenz der Winkel BDC und CBD, welche diese Seiten mit der Diagonale BD bilden, gegeben sind.

(BC verlängert um CE = CD, so ist $\sphericalangle$ BDE $= R + \frac{\delta_1 - \beta_1}{2}$).

39) Trapez aus e, h, b — d = n, $\sphericalangle$ B + $\sphericalangle$ C = σ.

(AF Höhe, DE ∥ AB, CE = b — d = n, $\sphericalangle$ EDC = 2 R — σ).

40) Zeichne ein Kreisviereck aus a, b + c, r und $\sphericalangle$ C.

(Zu r und $\sphericalangle$ C ist e_1 Datum, BC um CE = CD verlängert, $\triangle$BDE konstruierbar).

41) Kreisviereck aus e, $\sphericalangle$ (e′c), $\sphericalangle$ (e′d), (a + b + c + d) = u.

(Durch e und $\sphericalangle$ D ist der Umkreis gegeben).

42) Viereck aus e, e′, $\sphericalangle$ (ee′), $\sphericalangle$ A und $\sphericalangle$ C.

(Durch B und D Parallelen zu AC, auf denselben BE = DF = AC, Parallelogramm BEFD konstruierbar; $\sphericalangle$ ECF = $\sphericalangle$ A).

43) Viereck aus e, e′, $\sphericalangle$ (ee′), $\sphericalangle$ A und $\sphericalangle$ B + $\sphericalangle$ C = σ.

{DE ∥ AC, AE ∥ DC, so ist $\sphericalangle$ BDE = $\sphericalangle$ (ee′) und $\sphericalangle$ EAD = $\sphericalangle$ D = 4 R — ($\sphericalangle$ A + σ)}.

---

44) Gegeben ein Kreis und 2 Punkte A, B; auf der Peripherie sollen die Punkte X und Y gefunden werden, dass XA und YB sich gegenseitig halbieren.

(XY ∥ AB und = AB).

Sehne a und zugehöriger konzentrischer Kreis.

45) 2 Kreise sind gegeben. An den einen soll eine Tangente so gelegt werden, dass sie von dem andern 1/3 der Peripherie abschneidet.

46) In einen gegebenen Kreis soll ein rechtwinkliges Dreieck beschrieben werden, von dem der Winkel β gegeben ist. Die Kathete AC soll ausserdem durch einen gegebenen Punkt P gehen.

47) Kreisviereck aus r, a, c, $\sphericalangle B + \sphericalangle C$.

(BA und CD schneiden sich in E, so ist $\sphericalangle E = 180^0 - (\sphericalangle B + \sphericalangle C$; CD ist Tangente an den konzentrischen Kreis mit dem zu c gehörigen Centralabstand in der durch $\sphericalangle E$ gegebenen Richtung).

48) Kreisviereck aus e, e′, $\sphericalangle$ (ee′) und $\sphericalangle B$.

(Zu e und $\sphericalangle B$ ist r Datum).

PK konstruierbar. (K Mittelpunkt eines geg. Kreises).

49) Eine gerade Linie zu ziehen, welche eine gegebene Gerade in X und einen gegebenen Kreis in Y und Z so schneidet, dass XY und YZ gegebene Längen haben.

(KX leicht zu konstruieren).

50) Einen Kreis zu konstruieren, der 2 parallele Geraden berührt und die Eigenschaft hat, dass die von einem gegebenen Punkte P an ihn gezogenen Tangenten eine gegebene Länge b erhalten.

(Radius bekannt, PX leicht zu konstruieren).

51) Um einen gegebenen Kreis K_1 einen Rhombus von vorgeschriebener Seite a zu zeichnen, so dass eine Ecke X auf den Umfang eines zweiten Kreises K_2 fällt.

(Um K_1 wird ein Rhombus mit der Seite a konstruiert, damit kennt man die Grösse von K_1X).

52) An einen gegebenen Kreis 2 Tangenten zu ziehen, welche einen gegebenen Winkel einschliessen und deren Durchschnitt auf einer gegebenen Geraden liegt.

(KX leicht zu finden).

53) Auf einem gegebenen Kreis K den Punkt zu finden, von welchem aus die an einem zweiten gegebenen Kreis K_1 gezogenen Tangenten den Winkel α miteinander bilden.

(K_1X leicht zu konstruieren).

54) Gegeben ist ein Dreieck; mit gegebenem Radius r einen Kreis zu zeichnen, der durch die Dreiecksspitze A geht und aus der Basis ein Stück = s herausschneidet.

(AX = r, zweiter geom. Ort leicht).

55) Gegeben: Kreis K, Punkt P, und die Strecken ρ und b. Gesucht: Ein Kreis mit Radius ρ, welcher Kreis K nach einem Durchmesser schneidet, so dass die Tangente von P an denselben = b wird.

(PX und KX leicht zu konstruieren).

56) Eine Strecke AB, auf welcher der Punkt C gegeben, als Sehne in einen gegebenen Kreis zu legen, so dass C auf die gegebene Sehne DE fällt.

(Mitte von AB sei F, so ist $\triangle$KFC konstruierbar, also KC bekannt).

57) Einen Punkt zu konstruieren, von welchem aus der erste von 2 gegebenen Kreisen unter einem Winkel von 90°, der andere unter einem Winkel von 60° erscheint.

(XK_1 und XK_2 leicht zu konstruieren).

58) Einen Punkt zu finden, so dass die Tangente von ihm an einen gegebenen Kreis gleich seiner Entfernung von einem gegebenen Punkte, aber halb so gross als der Abstand des gesuchten Punktes vom Mittelpunkt des Kreises ist.

(Gesuchter Punkt X, XY Tangente an K, so ist $\sphericalangle$ XKY = 30°, XK also Seite eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Höhe = r).

---

59) Auf dem Umfang eines Kreises K_1 liegen 2 Punkte A und B. Man soll einen zweiten Kreis K_2 zeichnen, der die Gerade AB und K_1 so berührt, dass der Berührungspunkt C zwischen K_1 und K_2 die vorgeschriebene Entfernung e von AB erhält. Kreisberührungen.

(Berührungspunkt C leicht zu finden, $K_1E \perp AB$, darauf $K_1F = K_1C$, CF giebt auf AB Berührungspunkt D).

60) Gegeben ist ein Kreis, eine Sehne AB desselben und ein Punkt C auf AB. Gesucht ist ein Kreis, der den gegebenen und die Sehne AB in C berührt.

(Ziehe Durchmesser $E_1E \perp AB$, Verlängerungen von EC resp. E_1C ergeben die Berührungspunkte D resp. D_1 mit K).

61) Gegeben 2 konzentrische Kreise K_1 und K_2, ferner eine den Kreis K_1 schneidende Gerade L. Einen Kreis zu zeichnen, der K_1 und K_2 berührt und aus L eine Sehne von vorgeschriebener Länge s ausschneidet.

(Radius bekannt).

62) Gegeben ein Kreis K, eine Gerade L, Punkt P auf L. Gesucht ein Kreis, der seinen Mittelpunkt auf L hat, durch P geht und K berührt.

(Mache $PA = PA_1 = r$ auf L, Mittellot auf KA resp. KA_1).

Verm. Aufgaben.

63) Gegeben ist ein Kreis und eine Sehne AB desselben. Eine Sehne zu ziehen, welche AB in X, den Kreis in Y und Z so schneidet, dass $\sphericalangle YXB = \alpha$ und $XY - ZX = d$ wird.

($KD \perp XY$, so ist $DX = \frac{d}{2}$).

64) Einen Kreis zu zeichnen, der auf den Seiten eines gegebenen Dreiecks 3 gleiche Sehnen, je $= a$, abschneide.

(Der gesuchte Mittelpunkt ist der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises).

65) Ein Kreis soll die Seite BC eines Dreiecks ABC in einem gegebenen Punkt D berühren, die 2 anderen Seiten AB und AC unter gleichen Sehnen schneiden.

(Mittelpunkt X liegt auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle A$).

66) Gegeben 3 Punkte und eine Strecke a; einen Kreis zu zeichnen, dass die Abschnitte der von den 3 Punkten an ihn gezogenen Tangenten je $= a$ werden.

(Es muss $P_1X = P_2X = P_3X$ sein, Radius leicht zu konstruieren).

67) Von einem Dreieck ABC ist die Ecke A bekannt und diejenigen 2 Punkte, wo die Höhe und die Winkelhalbierende aus C den Umkreis schneiden.

(arc BD = arc AD, also Ecke B bekannt).

68) Im $\triangle$ ABC ist $AC > AB$. Man beschreibt aus A mit AB einen Kreisbogen, der BC in D und AC in E schneidet, und verbindet nun B und D mit E. Es sollen die bei B, D, E auftretenden Winkel in den Winkeln des gegebenen Dreiecks ausgedrückt werden.

($\sphericalangle ABE = \sphericalangle AEB = \frac{\beta + \gamma}{2}$, $\sphericalangle EBD = \frac{\beta - \gamma}{2}$,

$\sphericalangle ADE = \frac{\alpha}{2} + \gamma$, $\sphericalangle EDC = \frac{\alpha}{2}$ $\sphericalangle BED = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}$,

$\sphericalangle DEC = \frac{\alpha}{2} + \beta$).

69) Gegeben ein Kreis und zwei Punkte P_1 und P_2. Durch P_1

eine Gerade so zu legen, dass, wenn man darauf zwei Lote fällt, von welchen das eine P_2B durch P_2 geht, das andere AC den Kreis in C berührt, $P_2B + AC = s$ werden.

(E Halbierungspunkt von KP_2, $EF \perp XY$ ist $= \frac{s}{2}$).

70) In einen Kreis K ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben, von welchem (a + h) gegeben ist.

(Ziehe einen beliebigen Durchmesser AB, schneide darauf AC $= (a + h)$ und auf der Senkrechten auf AB in A $AD = \frac{1}{2}(a + h)$, so ergiebt die Verbindungslinie CD, falls sie den Kreis schneidet 2 Schnittpunkte X und X_1 mit demselben, X wie X_1 ist je Endpunkt einer Basis).

71) Gegeben ein Kreis K, eine Gerade L und eine Strecke a; im Kreis eine Sehne parallel L zu ziehen, dass die Summe der Sehne und ihres Abstandes vom Kreismittelpunkt = a werde.

(Vergl. vor. Aufgabe).

---

72) Man soll ein Parallelogramm zeichnen, von dem zwei gegenüberliegende Ecken in gegebenen Punkten P_1 und P_2 und die beiden andern Ecken auf einer gegebenen Kreisperipherie K liegen. Verm. Vierecksaufgaben.

(O Mitte von P_1P_2, $XY \perp KO$).

73) Einen Rhombus zu zeichnen aus einer Seite und dem Halbmesser ρ des einbeschriebenen Kreises.

(= rechtw. $\triangle$ aus a und $h = \rho$).

74) Tangententrapez aus ρ, a, b + d.

($c = (b + d) - a$, $AE \parallel CD$, $\triangle$ ABE konstruierbar, da $h = 2\rho$).

75) Ein Tangentenviereck, das ein gleichschenkliges Trapez ist, soll konstruiert und berechnet werden, wenn die beiden Grundlinien gegeben sind.

($a = c = \frac{b + d}{2}$, Höhe $h = \sqrt{bd}$, $J = \frac{b + d}{2} \sqrt{bd}$).

76) Tangentenviereck aus a + b, e, $\sphericalangle$ B und $\sphericalangle$ D.

($\triangle$ ABC leicht zu konstruieren, $\triangle$ ADC aus AC, $DC - AD = BC - AB$ und $\sphericalangle$ D).

77) Ein Sehnen-Tangentenviereck aus dem Radius r des ein-

beschriebenen Kreises und 2 anstossenden Seiten a und b zu konstruieren.

($\triangle$ ABC ohne weiteres gegeben, $\triangle$ ADC konstruierbar aus AC, DC — DA = a — b und $\sphericalangle$ D = 2 R — $\sphericalangle$ B).

Zu den Aufgaben 77—109.

0 Mittelpunkt des Jnkreises,

O', O'', O''' Mittelpunkt der Ankreise,

D, D', D'', D''' Berührungspunkte auf BC,

E, E', E'', E''' „ „ CA,

F, F', F'', F''' „ „ AB.

H_1 Halbierungspunkt von Bogen BC des Umkreises,

H_2 „ „ „ CA

H_3 „ „ „ AB,

$H_1G_1J_1 \perp BC$, $H_2G_2J_2 \perp CA$, $H_3G_3J_3 \perp AB$, J_1, J_2, J_3 auf dem Umkreis, G_1 auf BC, G_2 auf CA, G_3 auf AB, so ist:

$$BC = EE' = FF' = E''E''' = F''F''' = a.$$
$$AC = DD'' = FF'' = D'D''' = F'F''' = b.$$
$$AB = EE''' = DD''' = E'E'' = D'D'' = c.$$
$$AE' = AF' = BD'' = BF'' = CD''' = CE''' = s$$
$$AE = AF = BD''' = BF''' = CD'' = CE'' = s - a.$$
$$BD = BF = CE' = CD' = AE''' = AF''' = s - b.$$
$$CD = CE = BF' = BD' = AF'' = AE'' = s - c.$$

$$DD' = b - c,\quad EE'' = c - a,\quad FF''' = b - a.$$
$$D''D''' = b + c,\quad E'E''' = c + a,\quad F'F'' = b + a.$$

$$\text{arc } H_1B = \text{arc } H_1C,\quad H_1B = H_1O = H_1C = H_1O_1$$
$$\text{arc } H_2C = \text{arc } H_2A,\quad H_2C = H_2O = H_2A = H_2O_2$$
$$\text{arc } H_3A = \text{arc } H_3B,\quad H_3A = H_3O = H_3B = H_3O_3.$$

$$G_1J_1 = \frac{\rho'' + \rho'''}{2},\quad G_2J_2 = \frac{\rho''' + \rho'}{2},\quad G_3J_3 = \frac{\rho' + \rho''}{2}$$

$$G_1H_1 = \frac{\rho' - \rho}{2},\quad G_2H_2 = \frac{\rho'' - \rho}{2},\quad G_3H_3 = \frac{\rho''' - \rho}{2}.$$

$$G_1J_1 + G_1H_1 = \frac{\rho'' + \rho'''}{2} + \frac{\rho' - \rho}{2} = 2\,r.$$

Winkelhalbierende von A sei AR
„ „ B „ BS
„ „ C „ CT,
so bilden A, O, R, O′
B, O, S, O″
C, O, T, O‴ je eine harmonische Punktreihe,
$\sphericalangle$ OBO′ = $\sphericalangle$ OCO′ = 1 R u. s. w.
$Rr_1 \perp AB$, $Rr_2 \perp AC$, $Ss_1 \perp BC$, $Ss_2 \perp AB$, $Tt_1 \perp AC$, $Tt_2 \perp BC$, so bilden
A, F, r_1, F′; B, D, s_1, D″; C, E, t_1, E‴
A, E, r_2, E′; B, F, s_2, F″; C, D, t_2, D‴ je eine harmonische Punktreihe.

ρ Aufgaben.

78) $\triangle$ aus $a + b - c$, ρ, m''. $s-a$, ρ, α;
79) $\triangle$ aus $b + c - a$, β, γ. desgl.
80) $\triangle$ aus $b + c - a$, h', ρ'' $s-a$, ρ''', β u. s. w. Data.
(CD′′ = s − a).
81) $\triangle$ aus $b + c - a$, ρ, $\beta - \gamma$.
82) $\triangle$ aus γ, ρ'', ρ'''.
(γ und ρ'' giebt $\triangle$ CO′′D′′, für O′′′ leicht 2 geom. Örter).

---

83) $\triangle$ aus c, ρ', α. s, ρ', α Data.
84) $\triangle$ aus $a + b + c$, ρ, ρ'.
85) $\triangle$ aus $a + b + c$, ρ', h'.
86) Gegeben 2 sich unter spitzem Winkel schneidende Geraden und in diesem Winkel ein Punkt. Durch den Punkt eine dritte Gerade so zu ziehen, dass die 3 Geraden ein Dreieck von gegebenem Umfang u bilden.
87) Ein Stab von a cm Länge soll so in drei Teile geteilt werden, dass das aus ihnen gebildete Dreieck sich um einen Kreis mit dem Radius ρ cm legen lässt und ein Dreieckswinkel ein rechter wird.
(Die Aufgabe ist identisch mit $\triangle$ aus s, α = R und ρ).

$EE' = FF' = a.$

88) $\triangle$ aus $(b + c)$, ρ, a.

89) Recktwinkliges $\triangle$ aus a und ρ.
($AF = AE = \rho$).

90) Zwischen 2 sich schneidenden Tangenten eines Kreises eine dritte Tangente zu ziehen, so dass das von jenen begrenzte Stück derselben $= a$ wird.

91) Ein Tangentenviereck zu konstruieren, von dem 2 Gegenseiten, ein Winkel und der Radius des eingeschriebenen Kreises gegeben sind.

$DD' = b - c$
$D''D''' = b + c$

92) $\triangle$ aus ρ, ρ' und $b - c = d$.

93) $\triangle$ aus ρ, $b - c = d$, $\beta - \gamma = \delta$.
($\sphericalangle O'OD = \frac{\beta - \gamma}{2}$).

94) $\triangle$ aus $b + c$, β, ρ''.

95) $\triangle$ aus $b + c$, ρ'', ρ'''.

$\sphericalangle (hm) = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

96) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind die 3 Punkte, wo Transversale t, Höhe h und Winkelhalbierende m den Umkreis schneiden.
(Umkreis durch die 3 Punkte gegeben; $\sphericalangle (hm) = \sphericalangle (rm)$).

$H_1B = H_1O = H_1C$

97) Dreieck aus a, α und dem Abstand d des Inkreismittelpunkts vom Umkreismittelpunkt.

$\frac{\rho'' + \rho'''}{2}$, a, r
desgl.
$\frac{\rho' - \rho}{2}$, a, r
Data.

98) $\triangle$ aus r, $(\rho' - \rho)$, $(\beta - \gamma)$.

99) $\triangle$ aus $(b + c)$, $(\rho'' + \rho''')$, $(\rho' - \rho)$.
($\frac{\rho'' + \rho'''}{2} + \frac{\rho' - \rho}{2} = 2r$, damit auch a bekannt).

100) $\triangle$ aus $(a + b + c) = 2s$, $\rho' + \rho'' + \rho''' = p$, α.
(s und α geben ρ_1, $\frac{\rho'' + \rho'''}{2}$ und α geben a).

101) $\triangle$ aus $(\rho'' + \rho''')$, h, α.
(Zu $\frac{\rho'' + \rho'''}{2}$ und α ist a Datum).

102) $\triangle$ aus $(b + c - a)$, α, $(\rho + \rho'' + \rho''')$.
(ρ Datum zu $(s - a)$ und α, a resp. r Datum zu $\frac{\rho'' + \rho'''}{2}$ und α.

103) $\triangle$ aus r, α, $(\rho'' - \rho''')$.
($\frac{\rho'' + \rho'''}{2}$ Datum zu r und α).

104) $\triangle$ aus $(\rho'' + \rho''')$, $(b + c)$, $(h' + h'')$.
(α Datum zu $(b + c)$ und $(h' + h'')$; r Datum zu α und $\frac{\rho'' + \rho'''}{2}$).

105) $\triangle$ aus α, $r : \rho' = m : n$, $(\rho'' + \rho''')$.
(Mit Abschnitt X leicht).

---

106) $\triangle$ aus $(b - c) = d$, $(\rho' + \rho) = m$ und r.
($OL \parallel BC$, $O_1L \perp BC$, so ist $OL = (b - c)$, $O'L = (\rho' + \rho)$; H_1 Halbierungspunkt von OO', $H_1J_1 \parallel O'L$ und $H\,J_1 = 2\,r$, Halbierungspunkt von H_1J_1 ist Mittelpunkt des Umkreises).

107) $\triangle$ aus $(\beta - \gamma) = \delta$, $(\rho' + \rho) = m$ und r.
(In $\triangle\, OO'L$ ist $\sphericalangle\, OO'L = \frac{\beta - \gamma}{2}$).

108) $\triangle$ aus α, $(b + c) = m$ und $(\rho'' - \rho''') = d$.
($O''L \parallel BC$, $O'''L \perp BC$, so ist $O''L = (b + c)$, $O'''L = (\rho'' - \rho''')$; es ergiebt sich $\sphericalangle\, O'''O''L = \frac{\beta - \gamma}{2}$).

109) $\triangle$ aus $(\rho' - \rho)$, a, $(r + h)$.
($OK \parallel AC$, $O'K \perp AC$, so ist $OK = a$, $O'K = \rho' - \rho$, damit $\sphericalangle\, O'OK = \frac{\alpha}{2}$ bestimmt).

$b - c$, $\rho' + \rho$, $\frac{\beta - \gamma}{2}$
$b + c$, $\rho'' - \rho'''$, $\frac{\beta - \gamma}{2}$
a, $\rho'' + \rho'''$, $\frac{\alpha}{2}$
a, $\rho' - \rho$, $\frac{\alpha}{2}$
Data.

---

110) Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Mittelpunkt O des Inkreises, dem Mittelpunkt O' des Ankreises an die Seite BC, dem Verhältnis $\rho : \rho_1 = m : n$ und β.
(Mit Abschnitt IX: Teile OO_1 innen und aussen nach dem Verhältnis $m : n$, so ergeben sich für B leicht 2 geom. Örter).

A, O, R, O' harmon. Punktreihe.

111) $\triangle$ aus dem Mittelpunkt O des Inkreises, O' des Ankreises, $\rho : \rho_1 = m : n$ und h.
(Vergl. vorige Aufgabe).

112) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn der Lage nach gegeben sind der eine Endpunkt B der Hypotenuse, der Mittelpunkt des Inkreises und der Mittelpunkt O'' des Ankreises an die der gegebenen Ecke B gegenüberliegenden Kathete.
(B, O, S, O'' harmon. Punktreihe, für A leicht 2 geom. Örter).

113) $\triangle$ aus a, (b + c) und m.

($AE' = \frac{a+b+c}{2}$, $EE' = a$, suche den vierten harmon. Punkt r_2 zu A, E, E'; $\triangle A r_2 R$ leicht zu konstruieren).

Abschnitt VIII.

Dreiecks-Verwandlungsaufg.

114) $\triangle$ aus f^2, t, α.

115) $\triangle$ aus f^2, $h^1 - h$, a.

116) Ein Dreieck mit der Grundlinie a zu konstruieren, das $^3/_4$ eines gegebenen Vierecks ist und in welchem $(\beta + \gamma)$ das dreifache des Winkels α ist.

($\alpha = {}^1/_2$ R).

117) $\triangle$ aus f^2, a, $(\rho' - \rho) = d$.

(Zu a und $\frac{(\rho' - \rho)}{2}$ ist $\frac{\alpha}{2}$ Datum).

118) $\triangle$ aus f^2, α, $(\rho' - \rho) = d$

(siehe vorige Aufgabe).

119) $\triangle$ aus f^2, α, $(\rho'' + \rho''') = m$.

(Zu α und $\frac{\rho'' + \rho'''}{2}$ ist a Datum).

Verwandlungsaufg. mit Hilfe des Apollonius'schen Kreises.

120) Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, von welchem eine Seite a und das Verhältnis p : q der beiden andern gegeben sind.

121) Ein gegebenes Trapez soll in ein $\triangle$ verwandelt werden, von welchem die Grundlinie a und das Verhältnis der beiden andern Seiten b : c = m : n gegeben sind.

122) Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, in dem die Höhe h und das Verhältnis t' : t'' = m : n gegeben sind.

($\triangle BSC = \frac{1}{3} \triangle ABC$, $BS : SC = m : n$, $SG \perp BC$ ist $= \frac{h}{3}$).

123) Ein gegebenes Quadrat in ein Dreieck zu verwandeln, so dass eine Seite des Dreiecks gleich der doppelten Diagonale des Quadrates ist und die beiden anderen Seiten sich zu einander verhalten, wie diese Diagonale zur doppelten Quadratseite?

124) Das Dreieck ABC so zu verwandeln, dass die Ecke B unverändert bleibt, statt A aber die Ecke in dem gegebenen Punkt E auftritt, und der neue Winkel EBX gleich dem gegebenen Winkel δ sei. Verm. Verwandlungsaufgaben.

125) Über der längeren Diagonale eines Rhombus als Schenkel ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen von gleicher Fläche mit dem Rhombus.

126) Ein gegebenes Dreieck in einen Rhombus zu verwandeln, dessen eine Diagonale gegeben ist.

($\triangle ABD = \frac{1}{2} \triangle ABC$ ist in ein Dreieck mit der Grundlinie e zu verwandeln u. s. w.).

127) Ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes mit gegebener Diagonale e und dem dieser gegenüberliegenden Winkel α zu verwandeln.

128) Ein Quadrat zu konstruieren, das gleich dem dritten Teil eines gegebenen Trapezes ist.

129) Ein gegebenes Rechteck in einen Rhombus mit gegebener Seite a zu verwandeln.

(Satz von den Ergänzungsparallelogrammen).

130) Ein Quadrat und ein gleich grosses Rechteck zu konstruieren, wenn gegeben sind die Summen s und s_1 aus der Quadratseite und je einer Rechteckseite.

(Satz von den Ergänzungsparallelogrammen).

131) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus dem als Dreieck gegebenen Inhalt f^2, der Höhe h und dem Winkel ε der Diagonalen.

132) Kreisviereck aus f^2, a, β, r.

(Aus a, β, r ergiebt sich die Grösse des Dreiecks ABC, durch f^2 und $\triangle ABC$ die Grösse des Dreiecks ACD).

133) Es sei ein Quadrat ABCD gegeben und über der Seite AD als Hypotenuse ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck nach aussen errichtet. Das entstandene Fünfeck soll von der Ecke A aus durch eine Gerade halbiert werden. Teilungsaufgaben.

134) Ein Viereck ABCD soll durch Strahlen von P im Innern

(nahe bei A) aus in 3 gleiche Teile geteilt werden, so dass AP einer dieser Strahlen ist.

135) Ein $\triangle$ ABC von einem Punkt P im Innern aus in 2 gleiche Teile zu teilen, so dass AP ein Stück der Teilungslinie wird.

(D Mitte von BC, AX $\parallel$ PD).

136) In dem Viereck ABCD den Punkt X zu bestimmen, dessen Verbindungslinien mit A und C gleich lang sind und zusammen das Viereck halbieren.

(Ziehe XF $\parallel$ AC, so ist $\triangle$ ABF $= \frac{1}{2}$ Viereck ABCD; für X leicht 2 geom. Örter).

137) Gegeben ist ein Viereck ABCD. Man soll innerhalb desselben einen Punkt X so bestimmen, dass die nach A und C gezogenen Strecken das Viereck halbieren und dass diese Strecken dasselbe Verhältnis haben wie den $\sphericalangle$ B einschliessenden Seiten.

(Vergl. vorige Aufgabe; X mit Hilfe des Apoll. Kreises).

138) Das Rechteck ABCD durch eine gebrochene Linie PXC von dem auf AD gegebenen Punkt P aus im Verhältnis 3 : 5 zu teilen, so dass PX = CX und PXCD das kleinere Stück sei. Die Länge von PX oder CX ist geometrisch zu berechnen, wenn PD = d, AB = a, BC = b gegeben.

(AE $\parallel$ PB, DF $\parallel$ PC, XG $\parallel$ PC, $\triangle$ PEG $= \frac{5}{8}$ $\triangle$ PEF;

$$PX = \frac{\sqrt{4\,(a^2 + d^2)^2 + a^2\,(3\,b - 4\,d)^2}}{4\sqrt{a^2 + d^2}}).$$

139) In einem Viereck den Punkt zu finden, von dem aus dasselbe durch je 2 entgegengesetzte Eckstrahlen halbiert wird.

(Verwandle Viereck ABCD in $\triangle$ ABE und $\triangle$ ADF, G Mitte von BE, H Mitte von AF, X Schnittpunkt von GX $\parallel$ AC und HX $\parallel$ BD).

140) Ein Fünfeck ABCDE durch eine unter dem Winkel φ gebrochene Linie, die von A nach einem auf der Seite CD gegebenen Punkt P geht, zu halbieren.

Abschnitt IX.

Die seitenhalbierenden Transversalen seien

$AD = t$
$BE = t'$
$CF = t''$, Schnittpunkt derselben sei S.

141) $\triangle$ aus t, t', h'' Aufgaben mit Transversalen.
($\triangle$ ASB konstruierbar).

142) $\triangle$ aus c, h'', $\sphericalangle (t\, t')$.
(Vergl. vorige Aufgabe).

143) $\triangle$ aus α, t, $\sphericalangle (t'\, b)$.
($AD = GD$; $\sphericalangle SBG = \sphericalangle (t'\, b)$).

144) $\triangle$ aus c, t, $\sphericalangle (t'\, b)$.
($DE = \frac{c}{2}$).

145) Rechtwinkliges Dreieck aus t' und t''.
($AG \parallel CF$, G auf BE).

146) $\triangle$ aus a, $t' + t'' = s$, $\sphericalangle (t'\, t'')$.
($BS + CS = \frac{2}{3}\, s$).

147) Gleichschenkliges Dreieck aus h' und t'.
($EG \perp AB$ ist $= \frac{h'}{2}$).

148) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben der Winkel γ, die Schwerlinie aus dessen Scheitel und die Mittelpunkte M und M_1 der ihn einschliessenden Seiten.
($\triangle$ MM_1C leicht zu konstruieren).

149) Von einem Parallelogramm ist gegeben die Grösse $\varepsilon = 72^0$ des Diagonalwinkels, eine Ecke P, eine Nachbarecke soll im Mittelpunkt eines gegebenen Kreises, die dritte auf dem Kreise selbst liegen. Das Parallelogramm zu konstruieren.
(Ist PMXY das verlangte Parallelogramm, O Schnittpunkt der Diagonalen, so ziehe $OA \parallel XM$ (A auf PM), so ist $OA = \frac{r}{2}$).

---

150) Der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von 2 gegebenen Punkten in einem gegebenen Verhältnis

Anwendungen des Kreises des Apollonius.

stehen, ist ein Kreis (Apollonius'scher Kreis). Dieser Satz soll entwickelt und seine Anwendbarkeit gezeigt werden:

a) auf Dreieckskonstruktionen, bei denen eine Seite a, das Verhältnis $b : c = 3 : 4$ der beiden andern Seiten, sowie eine der Strecken t, h oder m gegeben ist.

b) Zur Auffindung des Punktes, von dem aus 3 gegebene Kreise unter gleichen Winkeln gesehen werden.

151) An 2 ungleich grosse Kreise ist eine innere Tangente gezogen; man soll auf ihr ausserhalb der von den Berührungspunkten begrenzten Strecke einen Punkt bestimmen, dass von ihm aus die beiden Kreise gleich gross erscheinen.

(Der Punkt liegt auf dem Kreis über der Entfernung des inneren und äusseren Ähnlichkeitspunkts als Durchmesser).

152) Gegeben 2 Kreise K und K_1, über ihrer Centrale als Durchmesser ist ein dritter Kreis K_2 gezeichnet. Auf diesem einen Punkt X zu finden, dass die Tangentenpaare von ihm an K und K_1 gleiche Winkel einschliessen.

(Siehe vorige Aufgabe).

153) Gegeben 2 Kreise K und K_1 mit den Radien r und $r_1 = \frac{r}{2}$ und mit der Mittelpunktsentfernung $KK_1 = 2r$; es soll ein Punkt P gefunden werden, von welchem aus die beiden Kreise unter gleichen Winkeln erscheinen und für welchen $PK^2 - PK_1^2 = \frac{2}{3} KK_1^2$ ist.

(Vergl. Aufgabe 151; $PD \perp KK_1$, so ist nach Abschnitt XIX: $KD^2 - K_1D^2 = \frac{2}{3} KK_1^2$, daher $KD - K_1D = \frac{2}{3} KK_1$, also D auf KK_1 bestimmt).

154) $\triangle$ aus $b : c = m : n$ und den Projektionen p und q dieser Seiten auf a.

155) $\triangle$ aus a, $b : c = m : n$ und der Projektion q der Seite c auf a.

156) $\triangle$ aus a, $b : c = m : n$, $(c - b) = d$.

$\{b : d = m : (n - m)\}$.

157) $\triangle$ aus a, $t' : t'' = m : n$ und $\sphericalangle (t'\,a)$.
(BS : CS = m : n).

158) $\triangle$ aus t, $b : c = m : n$, $\sphericalangle (t\,a) = \varepsilon$.
(AD um sich selbst verlängert bis G, so ist $\triangle$ ABG konstruierbar).

159) $\triangle$ aus h, t', $b : c = m : n$.
(EG $\perp$ BC ist $= \frac{h}{2}$, $\triangle$ BEG bestimmt, $AE : AB = \frac{m}{2} : n$).

160) $\triangle$ aus t, t' und $b : c = m : n$.
(Vergl. Aufgabe 158).

161) $\triangle$ aus h, t, $h' : h'' = m : n$.
(AD = DG, $\triangle$ ABG konstruierbar, da nach Abschnitt X $AB : BG = h' : h'' = m : n$).

162) $\triangle$ aus t', t'' und $b : c = m : n$.
(AG $\parallel$ CF; $AE : AB = \frac{m}{2} : n$).

163) $\triangle$ aus c, h, und $b : t' = m : n$.
(AB ist im Verhältnis $\frac{m}{2} : n$ zu teilen; für E leicht 2 geom. Örter).

164) Aus der Seite c, dem Verhältnis der beiden anderen Seiten $2a = 3b$ und der Schwerlinie t' ist ein Dreieck zu zeichnen.
(ED $\parallel$ AC, $\triangle$ EBC bestimmt).

165) $\triangle$ aus $a : h = m : n$, b, t'.
(Mit Abschnitt X: $B_1C_1 = m$ wird im Verhältnis $t' : \frac{b}{2}$ geteilt; für E_1 leicht 2 geom. Örter).

166) $\triangle$ aus b, c und der Bedingung, dass $a = h$ sein soll.
(Mit Abschnitt X: Über einer beliebigen Strecke B_1C_1 kann das Dreieck $A_1B_1C_1 \backsim ABC$ konstruiert werden.

167) Konstruiere ein Dreieck aus a, $b : c = 3 : 2$ und $b^2 - c^2 = \frac{a^2}{3}$.
(Nach Abschnitt XIX ist: $p^2 - q^2 = \frac{a^2}{3}$, also $p - q = \frac{a}{3}$, $p = \frac{2a}{3}$, $q = \frac{a}{3}$).

168) $\triangle$ aus a, $b : c = m : n$, $b^2 - c^2 = d^2$.
(Nach Abschnitt XIX $p - q : d = d : a$, damit p und q bestimmt).

169) $\triangle$ aus a, $b^2 - c^2 = d^2$, $h' : h'' = m : n$.

(Mit Hilfe von Abschnitt XIX: $p - q : d = d : a$, damit p und q bestimmt, $h' : h'' = c : b = m : n$).

170) $\triangle$ aus a, $b^2 + c^2 = s^2$ und $b : c = p : q$.

(Nach Abschnitt XIX ist: $t = \sqrt{\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$).

171) Man konstruiere ein Parallelogramm, von welchem gegeben sind ein Winkel, das Verhältnis der denselben einschliessenden Seiten und die demselben gegenüberliegende Diagonale.

172) Ein Parallelogramm zu konstruieren, wenn eine Seite a, das Verhältnis der Diagonalen und der Winkel gegeben ist, unter welchem sich die Diagonalen schneiden.

173) Ein Trapez soll aus den beiden parallelen Seiten, dem Verhältnis der nicht parallelen und einer Diagonale konstruiert werden.

(AE ‖ CD, $\triangle$ ABE ist konstruierbar).

174) Kreisviereck aus a, b, $c : d = m : n$, $\sphericalangle$ D.

175) Kreisviereck aus $a : c = m : n$, b, r, $\sphericalangle (ee_1)$.

(Mit Abschnitt X: Schnittpunkt der Diagonalen O, $BO : CO = BA : CD = m : n$, da $\triangle ABO \sim \triangle DOC$, $\sphericalangle BOC = \sphericalangle (ee_1)$, also $\triangle$ BOC bestimmt).

176) Kreisviereck aus $a : c = m : n$, b, e, $\sphericalangle (ee_1)$.

(Siehe vorige Aufgabe).

177) Ein Viereck, in und um welches ein Kreis beschrieben werden kann, aus $a : b = m : n$, B und e zu konstruieren.

($\triangle$ ABC leicht zu konstruieren, $\triangle$ ACD aus e, $\sphericalangle D = 2R - \sphericalangle B$ und $CD - DA = BC - AB$).

178) Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind 2 zusammenstossende Seiten und 3 von den Winkeln, welche die beiden anderen Seiten mit den Diagonalen bilden. Z. B. Viereck aus a, b, $\sphericalangle$ (de), $\sphericalangle$ (ce), $\sphericalangle$ (ce').

(Mit Abschnitt X: $\triangle A_1D_1C_1 \sim \triangle ADC$ bestimmt durch $\sphericalangle$(de) und $\sphericalangle$ (ce); $A_1B_1 : B_1C_1 = a : b$, und $\sphericalangle$ (ce') gibt $\triangle A_1B_1C_1$).

179) Gegeben 2 Kreise K_1 und K_2. Auf dem Umfang von K_1 einen Punkt A und auf jenem von K_2 drei Punkte B, C, D so zu bestimmen, dass im Viereck ABCD $\sphericalangle A = 60^0$

ist, AB und AD den Kreis K_2 berühren und BC und CD im Verhältnis 3 : 2 stehen.

(K_2A ist $= 2\,r_2$).

AD = m Halbierungslinie des Winkels A, CD = u, BD = v; AD_1 Halbierungslinie des Aussenwinkels A, $CD_1 = u_1$, $BD_1 = v_1$;

B, D, C, D_1 harmonische Punktreihe.

180) $\triangle$ aus u, v, α.

181) Gleichschenkliges $\triangle$ aus den beiden Abschnitten, in welche ein Schenkel durch die Halbierungslinie seines Gegenwinkels geteilt wird.

182) $\triangle$ aus a, m, und $b : c = p : q$.

183) $\triangle$ aus a, m, $h' : h'' = p : q$.

(Nach Abschnitt X: $h' : h'' = c : b$.)

184) $\angle$ aus m, u_1, v_1.

185) $\triangle$ aus h', u_1, v_1.

---

186) Auf em Durchmesser AB eines Kreises sind zwei Punkte C und D auf verschiedenen Seiten des Mittelpunkts K gegeben. Man soll durch diese Punkte 2 gleiche Sehnen ziehen, e sich auf der Peripherie schneiden.

(Such u C, K, D den vierten harmon. Punkt E, Halbkreis über KE).

187) In einer te eines geg. gleichseitigen Dreiecks einen Punkt zu fi en, der von der Gegenecke noch einmal so weit entfernt st, als von der Mitte einer der andern Seiten.

188) Gegeben eine S cke AB und eine dazu senkrecht gerade Linie. Es soll f dieser ein Punkt P gefunden werden, so dass seine En rnungen von A und B sich wie 2 : 1 verhalten.

189) Gegeben 3 konzen che Kreise. Ein Dreieck zu konstruieren, das einen egebenen Dreieck ähnlich ist und dessen Ecken auf je er der 3 Kreisperipherien liegen.

(Mit Abschnitt X: Ist MNO das geg. Dreieck, so ist im Innern desselben Punkt X zu suchen, für welchen
$XM : XN : XO = r_1 : r_2 : r_3$.)

190) Es ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC gegeben. Ein Punkt P soll so bestimmt werden, dass sowohl seine Entfernungen von den Schenkeln AB und AC als auch diejenigen von den Endpunkten derselben, B und C sich wie 1 : 2 verhalten.

(Bekannter geom. Ort und Kreis des Apollonius.)

Medianensatz. 191) $\triangle$ aus $(b-c) = d, u, v$.

($b : d = u : u - v,\ c : d = v : (u-v)$).

Verm. Aufgaben. 192) Auf der Peripherie eines Kreises sind 2 Punkte P und P_1 gegeben. Durch dieselben 2 parallele Sehnen zu ziehen, die sich verhalten wie 2 gegebene Strecken m und n.

193) In einen gegebenen Kreis K ein Trapez zu konstruieren, von dem man einen Winkel A kennt und weiss, dass eine Grundlinie das doppelte der andern ist.

(Durch $\angle$ A und $\odot$ K ist BD bekannt.)

194) Trapez aus b, d, h, $\angle$ (ee′).

195) Gegeben ist Punkt P auf der Geraden g und P_1 auf g_1. Man soll von P nach g_1 die Strecke PX und von P_1 nach g die Strecke P_1Y, welche PX in Z schneidet, so ziehen, dass $PZ : ZX = P_1Z : ZY = 3 : 2$ ist.

(XY ist $\parallel PP_1$; $XY : PP_1 = 2 : 3$).

196) Gegeben ein Dreistahl O und ein Kreis. Eine den Kreis und den Dreistahl schneidende Gerade so zu ziehen, dass die in den Kreis fallende Sehne = a wird und die beiden zwischen den Strahlen des Dreistahls liegenden Strecken sich verhalten wie m : n.

(A beliebiger Punkt auf L_1, AB $\parallel L_3$, AB ist im Verhältnis m : n zu teilen in C und C_1, AC und AC_1 sind die Richtungen der gesuchten Geraden.)

197) Kreisviereck ABCD aus $\sphericalangle$ A, D $\sphericalangle$ ACB und dem Verhältnis m : n zwischen den Abschnitten von AC, in welche dieselbe von BD geteilt wird.

($\triangle$ ABD leicht zu konstruieren, AD um DE zu verlängern, dass AD : DE = m : n, EC $\parallel$ BD.)

198) Ein Viereck ABCD zu konstruieren aus b, c, $\sphericalangle\,\gamma$ und a : e : c = m : n : p.

199) Einem gegebenen Dreieck ein Rechteck so einzubeschreiben, dass 2 Ecken auf der Seite a liegen und die Differenz der Rechtecksseiten gleich einer gegebenen Strecke d werde.
(Die auf a liegende Rechtecksseite ergiebt sich aus: $x : (h + d) = a : (a + h)$.)

200) In einem gegebenen Kreise soll man eine Sehne von vorgeschriebener Länge s ziehen, so dass sie von einem gegebenen Durchmesser nach dem Verhältnis 2 : 3 geteilt wird.

201) Auf einer Seite eines Dreiecks ein Lot bis zur Verlängerung einer zweiten Seite so zu errichten, dass dasselbe durch die dritte Seite halbiert wird.

202) Gegeben ist $\triangle$ ABC. Man soll ihm ein $\triangle$ XYZ so einbeschreiben, das die Seite XY eine vorgeschriebene Länge = s habe und einer gegebenen Geraden L parallel laufe, und dass $\sphericalangle$ XZY gleich einem gegebenen Winkel φ sei.
(BD $\parallel$ L, D auf AC, BD : s = AB : AX, also X bekannt.)

203) Es sind 2 Parallelen L und L_1, auf L Punkt P und auf L_1 Punkt P_1 gegeben. Man soll durch einen dritten Punkt P_2, der mit P und P_1 auf einer geraden Linie liegt, eine Gerade so ziehen, dass sie L in X, L_1 in Y schneidet und $PX^2 + P_1Y^2$ = einem geg. Quadrat s^2 wird.

$$\begin{aligned}(PX^2 : P_1Y^2 &= PP_2^2 : P_1P_2^2\\ PX^2 : s^2 &= PP_2^2 : (PP_2^2 + P_1P_2^2), \text{ oder}\\ PX : s &= PP_2 : \sqrt{PP_2^2 + P_1P_2^2})\end{aligned}$$

204) Zwischen die Seiten AB und AC des Dreiecks ABC eine Gerade, welche AB in X, AC in Y trifft, so zu ziehen, dass XY eine vorgeschriebene Länge m habe und dass

$$BX : CY = 3 : 5.$$

(Auf CA 5 gleiche Teile bis E, ED $\parallel$ AB und ED = 3 solche Teile, Kreisbogen aus B mit m, schneidet CD in F usw.)

205) Ein Dreieck zu konstruieren aus α, a + b, a + c.
(Verlängere AB um BE = BC und AC um CD = CB, vergl. Spieker IX. Aufg. 45.)

206) Durch 2 Seiten eines Dreiecks eine Parallele zur dritten so zu ziehen, dass der obere Abschnitt der einen geschnittenen Seite vermindert um den unteren Abschnitt der anderen geschnittenen Seite gleich einer gegebenen Differenz d ist.

$\{\mathbf{AX} : (AC + d) = AB : (AB + AC)\}$

207) Gegeben sind zwei konzentrische Halbkreise. Man soll von dem Endpunkt des grösseren Durchmessers eine Sehne so ziehen, dass sie von dem kleineren Halbkreis in drei gleiche Teile geteilt wird.

(AB Durchmesser des grossen Halbkreises, AXYZ die gesuchte Gerade, XE ∥ YF ∥ ZB, so ist AE = EF = FB.)

Abschnitt X.

Dreiecks-konstruktionen.

208) $\triangle$ aus $a : r = m : n$, b, h.

(α ist Datum zu m und n).

209) $\triangle$ aus α, $b : m = p : q$, h'.

(α, $b : m =$ geben ein $\backsim \triangle$).

210) $\triangle$ aus β, h, $a : c = 2 : 3$.

211) $\triangle$ aus a, $\sphericalangle (at) = \varepsilon$, $c : t = m : n$.

212) $\triangle$ aus h, γ, $b : t = m ; n$.

213) $\triangle$ aus $h : t' = 4 : 5$, $\sphericalangle \alpha$ und a.

($h : t'$ und α ein $\backsim \triangle$.)

214) $\triangle$ aus t', α, $a : h = m : n$.

($a : h$ und α ein $\backsim \triangle$.)

215) $\triangle$ aus $c : h'' = m : n$, γ, ρ.

($c : h''$ und γ ein $\backsim \triangle$.)

216) $\triangle$ aus $r : h'' = m : n$, $\alpha - \beta = \delta$ und b.

($r : h''$ und $(\alpha - \beta)$ ein $\backsim \triangle$.)

217) $\triangle$ aus $t : h = p : q$, m und $(\beta - \gamma) = \delta$.

($t : h$ und $\sphericalangle (h\ r) = (\beta - \gamma)$ ein $\backsim \triangle$.)

218) $\triangle$ aus $a : r = p : q$, $b : c = s : t$ und m.

($a : r$ giebt α; α, $b : c$ ein $\backsim \triangle$.)

219) $\triangle$ aus $(h' + h'') = p$, $(\beta - \gamma) = \delta$ und $h : \rho = m : n$.

($h : \rho$ und $(\beta - \gamma)$ ein $\backsim \triangle$.)

220) $\triangle$ aus $(a + b + c) = 2s$, ρ', $h' : h'' = m : n$.
(Zu ρ' und s ist α Datum, α und $h' : h''$ ein $\sim \triangle$).

221) $\triangle$ aus $r : \rho = m : n$, α, $t + h = s$.
($r : \rho$ und α ein $\sim \triangle$.)

222) $\triangle$ aus $(b + c) : \rho'' : \rho''' = m : n : p$ und r.
$(b + c) : \rho'' : \rho'''$ ein $\sim \triangle$).

223) $\triangle$ aus $\rho : (s—a) = m : n$, a, ρ'.
(Zu $\rho : (s—a)$ ist α Datum.)

224) Gleichschenkliges $\triangle$ aus $\sphericalangle \beta$ und $a + \frac{b}{2} = s$.
($\sphericalangle \beta$ giebt ein $\sim \triangle$.)

225) $\triangle$ aus $(b—c) : (p—q) = m : n$, $(\beta—\gamma) = \delta$ und $(a + b + c) = u$.
(Mache $AF = AE = AB$, F auf AC, E auf BC, so ist durch $(b—c) : (p—q)$ und $(\beta—\gamma)$ ein dem $\triangle$ FEC, also auch ein dem $\triangle$ ABC ähnliches $\triangle$ konstruierbar.)

226) Auf der Peripherie eines geg. Kreises 3 Punkte A, B, C so zu finden, dass sich die Sehnen $AB : BC : CA = 2 : 3 : 4$ verhalten.

227) $\triangle$ aus $b : c = m : n$, β, $a^2 + b^2 + c^2 = s^2$.
($b : c$ und β ein $\sim \triangle$, damit $a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2 = s_1{}^2$ zu konstruieren, $a : a_1 = s : s_1$.)

228) In einen gegebenen Kreis ein Dreieck ABC zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck $A_1 B_1 C_1$ ähnlich ist, so dass eine der Dreiecksseiten z. B. BC durch einen geg. Punkt P geht.
(Zu $\sphericalangle A_1$ und $\odot$ K ist die Länge BC Datum.)

Viereckskonstruktionen.

229) Tangentenviereck aus $c : d = m : n$, $b + d = s$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$.
(Aus $c : d = m : n$, $\sphericalangle D$ und $\sphericalangle C$ $\sim$ Tangentenviereck.

230) Tangentenviereck aus $a : b : c = m : n : p$, $\sphericalangle \alpha$ und der Summe der Diagonalen $e + e_1 = s$.
($a : b : c$ und α ein $\sim$ Tangentenviereck).

231) Trapez aus dem Umfang $u = (a + b + c + d)$, dem Verhältnis der beiden Parallelseiten $b : d = m : n$ und den beiden Basiswinkeln B und C.
($b : d$, $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle C$ ein $\sim$ Trapez.)

232) Tangententrapez aus Umfang u, β und γ.

(β und γ geben ein ∽ Tangententrapez.)

233) Gleichschenkliges Tangententrapez aus Mittellinie m und ∢β.

(∢ β giebt ein ∽ gleichschenkliges Tangententrapez, ferner ist $a = \frac{b + d}{2} = m$.)

234) Ein Sehnentangentenviereck aus $e' : a = m : n$, ∢ A und dem Radius des einbeschriebenen Kreises.

(Aus $e' : a = m : n$ und ∢ A ist ein dem △ ABD ähnliches Dreieck $A_1B_1D_1$ konstruierbar, △ $B_1C_1D_1$ ergiebt sich aus ∢ C_1, B_1D_1 und $C_1B_1 - C_1D_1 = A_1B_1 - A_1D_1$.)

Konstruktionen mit Ähnlichkeitspunkten.

235) In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein anderes gleichseitiges Dreieck einzubeschreiben, dessen Seiten mit den Seiten des gegebenen Dreiecks einen gegebenen Winkel machen.

236) Einem Dreieck ein Rechteck einzubeschreiben, das einem gegebenen ähnlich ist und von dem eine Seite in eine Dreiecksseite, und die Gegenecken desselben auf die 2 andern Seiten fallen.

237) In ein gegeb. Dreieck einen Rhombus von gegeb. ∢ φ so einzuzeichnen, dass 2 Ecken desselben auf der Grundlinie und die 2 andern Ecken auf den andern Seiten des Dreiecks liegen.

238) In ein geg. Quadrat ein anderes einzubeschreiben, dessen Seiten mit den gegebenen einen geg. Winkel α bilden.

239) In einen gegebenen Sektor mit spitzem Centriwinkel ein Quadrat so einzuzeichnen, dass eine Seite in den Radius des Sektors fällt, von den beiden andern Ecken aber die eine auf den andern Radius und die andere auf den Kreisbogen falle.

240) In ein geg. Quadrat ein Rechteck zu zeichnen, welches einem geg. Rechteck ähnlich ist.

241) In ein gegebenes Dreieck ABC einen Rhombus so einzubeschreiben, dass je eine Ecke auf AC und BC, 2 Ecken auf AB liegen und zwar die eine derselben in einem gegebenen Punkt.

242) Gegeben △ ABC und auf BC Punkt P. Um P einen Kreis zu beschreiben, der AB und AC beziehungsweise deren Verlängerungen in X und Y so schneidet, dass XY parallel BC werde.

243) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Geraden L liege, so zu konstruieren, dass er die Gerade L_1 berühre und die Gerade L_2 in zwei Punkten X und Y so schneide, dass der zur Sehne XY gehörige Zentriwinkel eine vorgeschriebene Grösse α habe.

244) Gegeben sind 3 Geraden, welche einen Punkt gemein haben. Gesucht ist ein Kreis O, der 2 derselben berührt und von der dritten eine Sehne XY von vorgeschriebener Länge s abschneidet.

245) Zeichne in ein geg. △ ABC ein Rechteck, dessen Seiten sich wie 2 : 1 verhalten, derart, dass auf jeder Dreieckseite eine Ecke des Rechtecks liegt und dass die vierte Ecke des Rechtecks auf der Mittellinie von △ ABC liegt.

246) In dem gegebenen Viereck ABCD soll auf der Seite AB ein Punkt E und auf der Seite AD ein Punkt F so bestimmt werden, dass AE : AF = 2 : 3 und ∢ ECF = 60^0 werde.

247) Ein Dreieck ABC und ein Viereck MNPQ sind gegeben. Ein MNPQ ähnliches Viereck $M_1N_1P_1Q_1$ ist so zu zeichnen, dass M_1N_1 auf BC, P_1 auf AC und Q_1 auf AB fallen.

Abschnitt XI.

248) Um einen gegebenen Kreis mit einem gegebenen Winkel ein gleichschenkliges Trapez zu konstruieren und zu beweisen, dass für jedes derartige Trapez der Kreisdurchmesser die mittlere Proportionale zwischen den beiden Parallelseiten ist. Mittlere Proportionale.

(Durchmesser EF ⊥ BC, △ AOE ∽ △ OBF.)

249) Kreisviereck aus $a^2 : b^2 : e^2 = m : n : p$, Diagonale e' und der Bedingung AD = 2 CD.

($a^2 : b^2 : e^2 = m^2 : mn : mp = m^2 : s^2 : t^2$, dh. $a : b : e = m : s : t$).

250) Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem gegeben ist das Verhältnis der Quadrate der Seiten $a^2 : b^2 : c^2 = m : n : p$ und die Höhe h.

(Vergl. vorige Aufgabe.)

251) Gegeben ist ein Kreis mit einer Sekante, ferner 2 Punkte P_1 und P_2. Man soll eine Gerade so konstruieren, dass sie von P_1 und P_2 das Abstandsverhältnis $m : n$ hat und dass die vom Kreis abgeschnittene Sehne durch die gegeb. Sekante so geteilt wird, dass das Rechteck aus den Teilen gleich einem Quadrat s^2 ist.

(P_1P_2 ist in D und D_1 im Verhältnis $m : n$ zu teilen; ist AB die geg. Sekante, O Schnittpunkt mit der ges. Geraden DXY, so ist $XO.OY = s^2 = AO.OB$.)

Dritte Proportionale.

252) In einem Dreieck ABC XY || BC so zu ziehen, dass XY mittlere Proportionale zu BX und AX werde.

(BY trifft die Parallele durch A zu BC in D, so ist:

$$BC : AB = AB : AD.)$$

253) In einem Dreieck XY || BC zu ziehen, dass $BC . XY = AX . CY$ wird.

(CY ist dritte Proportionale zu BC und AB.)

Sekantensatz.

254) Auf dem einen Schenkel eines Winkels A sind die Punkte P_1 und P_2 gegeben; auf dem andern Schenkel die Punkte X und Y zu finden, dass $XY = a$ und die 4 Punkte auf einem Kreise liegen.

Tangentensekantensatz.

255) Die Aufgabe ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, von welchem gegeben die Differenz d der beiden Seiten, soll durch Konstruktion gelöst werden.

256) Einen Kreis zu konstruieren, der den einen Schenkel eines geg. Winkels in einem geg. Punkte P berührt und auf dem andern eine Sehne von geg. Länge s abschneidet.

($AX : AP = AP : AY$, $AY—AX = s$.)

257) Es ist ein Kreis zu zeichnen, welcher die eine von 2 gegebenen Parallelen unter dem Winkel α und die andere unter einer Sehne von gegebener Länge s schneidet, und durch einen geg. Punkt P geht.

(⨀X schneide L in A und E, L_1 in B und C, Tangente in A treffe L_1 in D, so verhält sich $DB : DA = DA : DC$, $DC—DB = s$.)

258) Gegeben ein Dreieck ABC; es soll ein Kreis konstruiert werden, der durch B geht und für welchen die Tangente von A an denselben = $^3/_4$ AB und die von C = $^1/_2$ BC werde.

259) Einen Kreis zu beschreiben, der eine Seite eines gegebenen Dreiecks berührt und eine andere unter einer gegebenen Sehne s so schneidet, dass die beiden ausserhalb des Kreises liegenden Stücke der Seite ein gegebenes Verhältnis m : n haben.

260) Gegeben ist eine Gerade L, ferner ein Kreis K und auf seiner Peripherie der Punkt P. Man soll einen Kreis konstruieren, der L berühre, und den Kreis K im Punkte P so schneide, dass die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise eine vorgeschriebene Länge = m habe.

(Sehne PA ist Tangente von P an den zu m gehörigen konzentrischen Kreis, damit ⊙ aus P, A, L.)

261) Gegeben zwei gleichgrosse Kreise und eine Gerade, erstere auf derselben Seite der Geraden. Einen die Gerade berührenden Kreis zu zeichnen, der die beiden Kreise von aussen berührt.

(Hilfskreis, der durch die Mittelpunkte K und K_1 geht und die Gerade L_1 berührt, die zu L im Abstande r gezogen ist.)

262) Gegeben Kreis K, Gerade L und darauf Punkt P; gesucht Punkt X auf L, dass PX = der Tangente aus X an K wird.

(Beschreibe einen bel. Kreis, der L in P berührt, ⊙ K in A und B schneidet, Verbindungslinie BA giebt mit L Punkt X).

263) Gegeben ist ein Kreis mit einer Sehne AB und Punkt P; durch P eine Sekante zu ziehen, welche den Kreis in X und Y, die Sehne in Z trifft, so dass das Rechteck aus ZX und ZY gleich dem Quadrat über einer gegebenen Strecke a wird.

($ZK = \sqrt{a^2 + r^2}$)

264) In ein Dreieck ABC ist ein Kreis konstruiert, der durch B geht, die Höhe AD ⊥ BC berührt und AB stetig teilt (Sehne grösserer Abschnitt). Es soll ein zweiter Kreis konstruiert werden, dessen Mittelpunkt auf AD ist und der

den oben genannten Kreis und den Umkreis des Dreiecks rechtwinklig schneidet (die Konstruktion des ersten Kreises muss angegeben und durchgeführt werden.

(Siehe Aufgabe 270).

(Beim ersten Teil ist die Aufgabe ⊙ aus L, P, P_1 zu lösen; Mittelpunkt des gesuchten Kreises Schnittpunkt von AD und der Verbindungslinie der Schnittpunkte des ersten Kreises mit dem Umkreis; fallen die Schnittpunkte nahe zusammen, so ist ein Hilfskreis nötig.)

Stetige Teilung.

265) Ein Kreis K und in demselben eine Sehne AB sowie auf dem zugehörigen Bogen ein festliegender Punkt P sind gegeben; durch P eine zweite Sehne PX so zu ziehen, dass PX durch AB nach dem goldenen Schnitt geteilt wird.

266) Gegeben sind zwei parallele Geraden L und L_1 und ein sie berührender Kreis K; es soll an denselben eine Tangente gelegt werden, dass das zwischen L und L_1 fallende Stück im Berührungspunkt stetig geteilt wird; wie gross ist die Länge dieser Tangente, wenn der Radius des Kreises mit r bezeichnet wird?

(Tangente $= r\sqrt{\sqrt{5} + 2}$)

267) Durch die Mitte einer Seite eines Vierecks mit ausspringenden Winkeln eine von zwei anderen Seiten desselben begrenzte Gerade so zu legen, dass dieselbe durch die erste Seite golden geteilt wird.

(Lot ME von Mitte M auf Seite BC ist um MF zu verlängern, dass FE in M stetig geteilt ist.)

268) In einem Dreieck ABC soll XY || BC gezogen werden, dass sich verhält: BC : XY = AY : CY.

(AC ist in Y stetig zu teilen.)

269) Gegeben zwei sich schneidende Kreise K und K_1. Es soll durch den einen Schnittpunkt eine die 2 Kreise schneidende Gerade gezogen werden, dass die von den Kreisen begrenzte Sekante im Schnittpunkt nach dem goldenen Schnitt geteilt wird.

(KK_1 ist in C stetig zu teilen.)

270) Im Dreieck ABC soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher durch die Ecke A geht, BC berührt und AC stetig schneidet.

(Sehne AD grösserer Abschnitt; vergl. Aufgabe 264.)

271) Gegeben ein Kreis K und in demselben 2 Halbmesser KA und KB; zwischen die verlängerten Halbmesser eine den Kreis in Z berührende Tangente XY so zu legen, dass XY in Z nach dem goldenen Schnitt geteilt wird.

(Radius KA in E stetig zu teilen, EC $\parallel$ Radius KB, $\sphericalangle$ ACK = 1 R; XY $\parallel$ AC.)

272) Auf dem Radius eines Kreises 2 einander ähnliche gleichschenklige Dreiecke zu konstruieren, die ihre Spitzen auf der Peripherie haben.

(Radius ist stetig zu teilen.)

273) In einem Dreieck ABC ist BC in D halbiert; es soll AE $\parallel$ DG so konstruiert werden, dass, wenn DG die Seite AC in F und die Verlängerung von BA in G schneidet, FG $= \frac{1}{2}$ AE wird.

(BC ist in E stetig zu teilen.)

274) Ein reguläres Fünfeck zu konstruieren aus der Summe der Seite und der Diagonale.

(Die geg. Summe ist stetig zu teilen, Diagonale ist major, Seite minor.)

275) Von einem Punkte ausserhalb eines Kreises soll eine Sekante so gezogen werden, dass die Kreislinie im Verhältnis 1 : 4 geteilt wird.

(Sehne XY Seite des dem Kreise einbeschriebenen reg. Fünfecks.)

276) Gegeben Punkt P innerhalb Kreis K. Durch P eine Sehne zu ziehen, welche den Kreisumfang im Verhältnis 2 : 3 teilt. Welche Lage muss P haben, damit die Lösung möglich wird?

(XY Diagonale des dem Kreise einbeschriebenen reg. Fünfecks.)

277) Beschreibt man in ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Höhe gleich der Basis ist, den Inkreis, so ist dessen Radius gleich der Seite des Zehnecks, das man in den Kreis beschreiben kann, der über der Basis als Durchmesser steht.

$\{\rho : a - \rho = \frac{a}{2} : \frac{a}{2}\sqrt{5},\ \rho = \frac{a}{4}(\sqrt{5} - 1.)\}$

278) Auf der Peripherie eines Kreises den Punkt X zu bestimmen.

Konstr. mit $^2/_5$ R. u. s. w.

dessen Verbindungslinien mit 2 gegebenen Punkten einen Winkel von $^2/_5$ R einschliessen.

279) Ein Dreieck zu konstruieren, in welchem gegeben ist das Verhältnis der Winkel $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 5$ und die seitenhalbierende Transversale t.

($\alpha = \frac{2}{5}$R, $\beta = \frac{3}{5}$R).

280) Ein Dreieck zu konstruieren, in welchem gegeben ist $\alpha : \beta : \gamma = 4 : 5 : 6$ und die Höhe h.

($\beta = \frac{2}{3}$R, $\gamma = \frac{4}{5}$ R.)

(Vergl. auch Aufgaben 307, 308, 311, 313, 332.)

Goldenes Dreieck.

281) Ein gleichschenkliges Trapez zu konstruieren, von welchem gegeben: die grössere parallele Seite, welche gleich der Diagonale ist und die Bedingung, dass die 3 andern Seiten gleich sein sollen.

($\sphericalangle$ BDC = $\sphericalangle$ BCD = $\frac{4}{5}$ R).

282) Gegeben 3 Geraden L_1, L_2, L_3, welche sich schneiden; auf L_1 Punkt P. Gesucht ein goldenes Dreieck PXY, so dass X auf L_2 und Y auf L_3 liegt.

(Umkreis um PXY schneidet L_3 in A, dann ist $\sphericalangle$ PAX = $\frac{4}{5}$ R,

$\sphericalangle$ XAY = $\frac{2}{5}$ R).

(Vergl. auch Aufgabe 304).

Rechtw. Dreiecke, in denen a : b = b : c.

283) Ein rechtwinkliges Dreieck aus Hypotenuse a und der Bestimmung zu konstruieren, dass die eine Kathete gleich der Projektion der andern ist. Welche Lage auf der Hypotenuse bekommt darin der Höhenfusspunkt?

(a : p = p : q, Höhenfusspunkt teilt a stetig.)

283a) Über der gegebenen Strecke a als Hypotenuse ein rechtwinklinges Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten eine stetige Proportion bilden.

(Identisch mit voriger Aufgabe.)

284) Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Kathete b zu konstruieren, wenn die Kathete c mittlere Proportionale zur Hypotenuse a und Kathete b werden soll.

(Ähnliches $\triangle$ konstruierbar).

285) Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen aus der Höhe h, wenn eine Kathete gleich der Projektion der andern Kathete auf die Hypotenuse ist.

(S. vorige Aufgabe).

286) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus dem Umfange u, in welchem eine Kathete mittlere Proportionale zur Hypotenuse und zur andern Kathete ist.

(Vergl. Aufgabe 284).

287) Ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Seiten eine stetige Proportion bilden, aus

a) der Projektion p der kleineren Kathete b.

($p + q : q = q : p$, d. h. minor gegeben.)

b) der Differenz der Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse.

(Aus $p + q : q = q : p$, folgt $q : p = p : q - p$.)

Stetige Teilung in Verbindung mit anderen Abschnitten.

288) Gegeben △ ABC. Man soll auf AB den Punkt X und auf AC den Punkt Y suchen, so dass XY || BC und △ AXY = △ BCX wird.

(Mit Hilfe von XII: AB ist in X stetig zu teilen, AX major.

289) In einem Dreieck zu einer Seite BC die Linie XY parallel zu ziehen, dass sich verhält △ ABC : Trapez BXYC = Trapez BXYC : △ AXY.

(Mit Hilfe von XII § 196: Über AB Halbkreis, BA in E stetig geteilt, ED ⊥ AB, Sehne AD = AX'.

290) In einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele zu ziehen, dass das abgeschnittene Dreieck das grössere Stück einer stetigen Proportion werde, bei der das ursprüngliche Dreieck das ganze, das Trapez das kleinere Stück abgiebt.

(Über AB Halbkreis, AB in E stetig geteilt, ED ⊥ AB, Sehne AD = AX).

291) Um einen gegebenen Kreis soll ein konzentrischer gezeichnet werden, so dass der dadurch entstandene Ring das geometrische Mittel zwischen beiden Kreisen ist.

(Mit Abschnitt XIII: r ist major zum gesuchten Radius).

292) Gegeben ein Kreis und ausserhalb desselben ein Punkt P. Durch P eine Sekante so zu ziehen, dass die Differenz

der Quadrate ihrer Abschnitte gleich dem Quadrat der Tangente ist, welche von P an den Kreis gezogen werden kann.

(Mit XVIII: Äusserer Abschnitt x ergiebt sich aus: $a : x = x : \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$, a Tangente, $\frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$ major zu a.)

293) Eine Strecke a ist stetig geteilt und über dem grösseren Abschnitt als Grundlinie ist mit dem kleineren als Schenkel ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet. Den Inhalt dieses Dreiecks in a auszudrücken.

$$(J = \left(\frac{a}{4}\right)^2 \sqrt{520 - 232\sqrt{5}}.)$$

294) Um wie viel ist der Inhalt eines Quadrats mit der Seite a = 10 cm kleiner als der eines Kreises, dessen Radius gleich dem grösseren Abschnitte der nach dem goldenen Schnitt geteilten Seite a ist?

(Mit Abschnitt XIII: 20,1 qcm.)

Abschnitt XII.

Anwendungen des Satzes über Dreiecke mit gemeinschaftl. Winkel.

295) Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Diagonalwinkel ε gegeben ist.

296) Ein Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln, das denselben Diagonalwinkel hat.

297) Ein beliebiges Fünfeck in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Diagonalwinkel gegeben ist.

298) Von einem $\triangle$ ABC ein gleichschenkliges AXY abzuschneiden, das = $^2/_3$ des gegebenen ist.

299) Es sollen die Seiten AB und AD eines gegebenen Vierecks durch eine Gerade XY so geschnitten werden, dass AX = AY und $\triangle$ AXY = $^2/_3$ Viereck ABCD wird.

300) An einen geradlinigen Eisenbahndamm stösst die Ecke B eines dreieckigen Grundstückes. Die Grenze AC soll durch eine andere parallel dem Bahndamm ersetzt werden; die

Ecke B und $\sphericalangle$ B sollen unverändert bleiben. Wie findet man durch Konstruktion die neue Lage von AC?

(Ist XY die neue Grenze und AD || Bahndamm, so ist BD : BY = BY : BC.)

301) Das Dreieck ABC so zu verwandeln, dass die Ecke B und die Richtung BC unverändert bleiben, die Ecke A aber in den gegebenen Punkt P fällt.

302) Das Parallelogramm ABCD in ein gleichschenkliges Dreieck mit Erhaltung des Winkels bei B zu verwandeln.

303) Verwandle ein gegebenes Viereck in ein gleichschenkliges Dreieck, so dass der Winkel an der Spitze eine gegebene Grösse α hat.

304) Ein gegebenes Quadrat in ein gleichschenkliges Dreieck zu verwandeln, dessen Winkel an der Spitze halb so gross ist als ein Winkel an der Grundlinie.

305) Ein gegebenes Viereck in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.

306) Ein Viereck ABCD in ein reguläres Sechseck zu verwandeln.

(Bestimmungsdreieck AXY = $^1/_6$ Viereck ABCD, AX = AY und $\sphericalangle$ XAY = 60°.)

307) Ein Viereck in ein reguläres Fünfeck zu verwandeln.

(Bestimmungsdreieck AXY = $^1/_5$ Viereck, AX = AY, $\sphericalangle$ XAY = $\frac{4}{5}$R.)

308) Es soll ein beliebiges Viereck in ein reguläres Zehneck verwandelt werden.

(Bestimmungsdreieck AXY = $\frac{1}{10}$ Viereck AX = AY, $\sphericalangle$ XAY = $^2/_5$ R.)

309) Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, das $^2/_5$ eines gegebenen Quadrats beträgt.

310) Ein Viereck in ein inhaltsgleiches Dreieck zu verwandeln, in welchem die Winkel sich verhalten wie 1 : 2 : 3.

311) Ein Quadrat in einem Rhombus mit dem Winkel $\alpha = 36^0$ zu verwandeln.

312) Ein Viereck in einen Rhombus zu verwandeln, dessen Winkel = dem Schnittwinkel der Diagonalen des Vierecks ist.

(Parallelen durch die Ecken mit den Diagonalen geben ein Viereck, das doppelt so gross ist).

313) Es soll ein gegebenes Dreieck ABC in einen Rhombus mit dem Winkel 72^0 verwandelt werden. Die Konstruktion des Winkels 72^0 ist anzugeben und durchzuführen.

314) Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln, von welchem ein Winkel β und das Verhältnis der einschliessenden Seiten m : n gegeben ist.

($\triangle$ ABC wird in ein Parallelogramm mit dem Winkel β verwandelt; sind a und b die Seiten desselben, so ist eine Seite des gesuchten Parallelogramms konstruierbar aus:

$$\frac{m}{n} a : x = x : b).$$

315) Ein $\triangle$ ABC in ein anderes AXY zu verwandeln, das mit demselben den gemeinschaftlichen Winkel A hat und dessen Gegenseite zu $\sphericalangle$ A einer gegebenen Geraden L parallel ist.

(Ziehe durch B die Parallele BE zu L, so ist AC : AY = AY : AE)

316) An einem Dreieck werde von jeder Ecke aus auf einer Seite $^1/_3$ ihrer Länge abgeschnitten (von A aus auf AB, von B aus auf BC, von C aus auf CA) und die Teilpunkte zu einem Dreieck verbunden. Wie gross ist das entstandene mittlere Dreieck?

$$(\triangle \mathrm{DEF} = \frac{1}{9} \triangle \mathrm{ABC};\ \text{allg.} = \frac{n^2 - 3n + 1}{n^2} \cdot \triangle \mathrm{ABC}).$$

317) Gegeben ein Kreis und in demselben eine Sehne AB. Auf der Peripherie des Kreises ist der Punkt X so zu bestimmen, dass XA . XB = q^2.

($\triangle$ aus a, α, (b . c) = q^2. Vergl. Aufgabe 331).

318) Ein Dreieck zu konstruieren aus α, $h' : h'' = m : n$ und $(b \cdot c) = q^2$.

319) Einem gegebenen Kreise ein Viereck einzubeschreiben, von welchem das Produkt $(ab) = q^2$ zweier an einander anstossenden Seiten nebst dem von denselben eingeschlos-

senen Winkel B, sowie das Verhältnis $c : d = m : n$ der beiden andern Seiten gegeben ist.

(Durch $\sphericalangle$ B und r ist Diagonale AC gegeben, aus $(a \,.\, b) = q^2$, $\sphericalangle$ B und AC ist $\triangle$ ABC bestimmt).

320) Geometrisch nachzuweisen, dass der Inhalt eines Vierecks nur von der Länge der Diagonalen und dem Winkel zwischen denselben abhängt.

(Ziehe durch die Ecken Parallelen zu den Diagonalen).

321) Ein Dreieck ABC durch eine Gerade XY so zu halbieren, dass AX = AY wird. Die Seiten des gleichschenkligen Dreiecks AXY zu berechnen für $a = 85$, $b = 58$ und $c = 33$.

(Konstruktion leicht; zweiter Teil mit Abschnitt XIX:
$AX = AY = \sqrt{33 . 29} = 30{,}93$, $XY = 22{,}98$).

322) Im Trapez ABCD soll die Strecke EF parallel zu den Grundlinien BC und AD so gelegt werden, dass sie mittlere Proportionale zu BC und AD ist. Hierauf soll noch bewiesen werden, dass Trapez EBCF = $\triangle$ BCD ist.

(Erster Teil leicht; BA und CD schneiden sich in S, so muss $SB : SE = SE : SA$ sich verhalten; daher ist $SE^2 . SF^2 = SA . SB . SD . SC = SB^2 . SD^2$ also $SE . SF = SB . SD$ oder $\triangle$ SEF $\triangle$ SBD, und auch Trapez EBCF = $\triangle$ BCD).

(Vergl. auch Aufg.: 415—422).

---

323) Ein rechtwinkliges Dreieck durch 2 auf der Hypotenuse errichtete Senkrechte in 3 gleiche Teile zu teilen. $J \backsim J_1$ $J : J_1 = a^2 : a_1^2$

324) Ein Quadrat durch 2 auf einer Diagonale errichtete Senkrechte in 3 gleiche Teile zu teilen.

325) Über einer gegebenen Strecke a ein reguläres Fünfeck zu konstruieren und zu ermitteln, wie sich der Inhalt dieses Fünfecks zu demjenigen des von den Diagonalen gebildeten kleinen regulären Fünfecks verhält.

$\{J : J_1 = 2 : (7 - 3\sqrt{5}\,\}$.

326) Ein Rechteck zu zeichnen, wenn das Verhältnis von Diagonale und einer Seite $= m : n$ und der Inhalt gleich dem Quadrat der Strecke q ist.

327) Im Dreieck ABC soll durch FE parallel zu BC das Dreieck EFA abgeschnitten werden, so dass dieses $^2/_5$ des ganzen

Dreiecks wird. Wenn nun in diesem $\triangle$ ABC die 3 Seiten $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ cm sind, wie gross sind dann die Strecken AE, AF, AG, wenn AG den Abstand der Spitze A von der Parallelstrecke EF bezeichnet?

(AE $= 3 \sqrt{10}$
AP $= 2{,}8 \sqrt{10}$
EF $= 2{,}6 \sqrt{10}$
AG $= 2{,}58 \sqrt{10}$.)

328) In einem Dreieck ABC ist die Linie AD von A nach einem Punkt D der Grundlinie BC gezogen; es sollen X und Y so auf AD gesucht werden, dass BX $\parallel$ CY und $\triangle$ ABX $= \triangle$ ACY wird.

(Verlängere BX bis zum Schnitt F mit AC, so ergiebt sich F aus BD : CD = AC : AF.)

Dreieck in ein anderes zu verwandeln, das einem geg. $\triangle \backsim$ ist.

329) $\triangle$ aus $(b + c) : \rho'' : \rho''' = m : n : p$ und Inhalt f^2.

(Aus $(b + c) : \rho'' : \rho'''$ ist ein ähnliches Dreieck konstruierbar; a ergiebt sich aus $a^2 : a_1^2 = f^2 : f_1^2$.)

330) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben ist der Inhalt $= f^2$, das Verhältnis der Höhen $h' : h'' = m : n$ und ein Basiswinkel $= \beta$.

331) Ein Dreieck zu zeichnen, worin das Verhältnis der Grundlinie zur Höhe, der Winkel an der Spitze und das Produkt der Schenkelseiten in Gestalt eines Quadrats gegeben ist.

z. B. $\triangle$ aus $(b \,.\, c) = m^2$, $a : h = p : q$, α.

(Durch $a : h$ und α ist ein dem gesuchten Dreieck ähnliches Dreieck, durch $(bc) = m^2$ und α ist f^2 bestimmt.)

332) Ein gegebenes Dreieck in ein flächengleiches zu verwandeln, dessen Winkel sich verhalten wie 1 : 4 : 5.

333) Ein Dreieck in ein anderes flächengleiches zu verwandeln, dessen Winkel sich wie 1 : 2 : 3 verhalten.

334) Ein beliebiges gegebenes Dreieck in ein flächengleiches zu verwandeln, dessen Seiten sich wie 1 : 2 : 3 verhalten.

335) Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, dessen Seiten sich wie 3 : 4 : 5 verhalten.

---

336) Von einem Dreieck durch eine mit einer Seite parallele Gerade ein Trapez abzuschneiden, welches $^3/_4$ des Inhalts des Dreiecks beträgt. **Teilung || Basis.**

337) In einem beliebigen Dreieck ABC soll zur Basis BC die Parallele XY gezogen werden, dass die entstehenden Flächenteile sich wie 2 : 7 verhalten. Welches wird die Höhe des Trapezes sein, wenn das gegebene Dreieck ein gleichseitiges mit der Seite $BC = \sqrt{2}$ ist?

338) Von einem Dreieck ABC durch eine Parallele zu BC ein Dreieck von vorgeschriebenem Flächeninhalt f^2 abzuschneiden.

($AX^2 : AB^2 = f^2 : \frac{a \cdot h}{2}$.)

339) Ein Trapez durch eine Gerade parallel zu einer Grundlinie zu halbieren.

(XY gesuchte Parallele, S Schnittpunkt der nicht parallelen Seiten, so ist $SX^2 = \frac{1}{2}(SB^2 + SA^2$.)

340) Ein Trapez, in welchem die eine Grundlinie gleich der Hälfte der andern ist, durch Parallelen mit den Grundlinien in drei gleiche Teile zu teilen.

($SX = SA\sqrt{2}$, $SX_1 = SA\sqrt{3}$.)

341) Ein reguläres Sechseck soll durch Parallelen mit einer Seite in 3 gleiche Teile geteilt werden.

(Identisch mit: In einem Trapez durch eine Parallele zur Grundlinie $^2/_3$ desselben abzuschneiden.)

---

342) Durch 2 auf der Peripherie eines Kreises gegebene Punkte P und P_1 parallele Sehnen PX und P_1Y so zu ziehen, dass die Quadrate über diesen Sehnen sich verhalten wie 2 gegebene Strecken a und b. $x^2 : y^2 = m : n$; $x : y = m^2 : n^2$.

(Schnittpunkt von PP_1 und XY sei O, so verhält sich $PO^2 : P_1O^2 = a : b$.)

343) Einen Kreisbogen AB in C so zu teilen, dass $AC^2 : BC^2 = m : n$ ist.

($\sphericalangle$ ACB sei halbiert durch CD, so verhält sich: $AD^2 : BD^2 = m : n$.)

344) In einer Seite eines gegebenen Dreiecks einen Punkt so zu bestimmen, dass, wenn durch ihn Parallelen mit den 2 andern Dreiecksseiten gezogen werden, die 2 entstehenden Dreiecke sich wie 1 : 2 verhalten.
($AX^2 : BX^2 = 1 : 2$).

345) Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, welches gleich einem gegebenen gleichseitigen Dreieck ist und von dem das Verhältnis m : n der Basis zur Basishöhe bekannt ist.
($x^2 : b^2 = \frac{m}{2}\sqrt{3} : n$, wenn x die gesuchte Basis, b die Seite des gleichseitigen Dreiecks ist).

346) $\triangle$ aus t, t_1, $h' : h'' = p^2 : q^2$.
(Es muss $h' : h'' = p^2 : q^2 = m : n$ konstruiert werden).

347) $\triangle$ aus a, h', $b : c = p^2 + q^2 : p^2$, wo p^2 und q^2 gegebene Quadrate sind.

348) Gegeben 2 sich schneidende Kreise. Durch einen Schnittpunkt eine Sekante zu ziehen, deren Abschnitte sich wie die Quadrate der Radien verhalten.
($KO : OK_1 = r^2 : r_1^2$, A Schnittpunkt der Kreise, Sekante $XY \perp AO$).

349) Durch einen Punkt an einen Kreis eine Sekante so zu ziehen, dass das Rechteck aus der ganzen Sekante und der Sehne gleich dem Quadrat des Durchmessers werde.
(Tangente von P an ⊙ K sei a, so verhält sich: äusserer Abschnitt PY: Sehne $XY = a^2 : d^2$, $YC \parallel XK$, also $PC : CK = a^2 : d^2$; CY vierte Proportionale zu r, PC und PK).

350) $\triangle$ aus $(a \,.\, b) = p^2$, f^2, t.
($a \,.\, h = 2f^2$, daher: $b : h = p^2 : (f\sqrt{2})^2$, damit $\measuredangle\, \gamma$ gegeben).

Produkte zweier Strecken.

351) Gegeben 2 Parallelen und zwischen denselben ein Punkt P. Durch P eine die Parallelen in X und Y schneidende Gerade so zu ziehen, dass $PX \,.\, PY = q^2$.
($PA \perp L_1$, $YC \perp XY$, $PA : q = q : PC$).

352) Gegeben 3 Parallelen und ein Punkt P. Durch P eine Gerade zu ziehen, welche die Parallelen in X, Y, Z so schneidet, dass $XY \,.\, YZ = q^2$.
($XA \perp L_1$, YC XA, $ZC \perp XY$, $XA : q = q : YC$).

353) Gegeben 3 Punkte P, P′ und P″. Durch P eine solche Gerade zu ziehen, dass, wenn von P′ und P″ auf dieselbe die Lote P′X und P″Y gefällt werden, das Rechteck aus PX und PY einem gegebenen Quadrate a^2 gleich werde.

(YC ⊥ PP′, so ergiebt sich PC aus PP″ : a = a : **PC**).

354) Gegeben 2 Kreise K und K_1, auf K Punkt P; durch P eine Gerade zu ziehen, welche ⊙ K_1 in X und ⊙ K zum zweitenmale in Y trifft, dass PX . PY = a^2 wird.

(Beschreibe um X mit XP den Kreis, der die Verlängerung von KP in A trifft, so ergiebt sich PA aus

PA : a = a : PK; X leicht zu finden).

355) Gegeben 2 Kreise K und K_1, welche sich nicht schneiden und zwischen ihren Peripherien der Punkt P. Durch P eine die Kreise in X resp. Y schneidende Sekante zu ziehen, dass PX . PY = a^2 wird.

(Ziehe KP mit Verlängerung und KX, mache △ PYA ∽ △ PKX, so ergiebt sich PA aus **PA** : a = a : PK; ferner ist PY : AY = PK : r).

---

356) Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, das = ²/₃ der Differenz von 2 gegebenen gleichseitigen Dreiecke ist. Allg. Pythag. Satz.

---

357) Von einem rechtwinkligen Dreieck ist durch die Höhe ¹/₃ des Inhalts abgeschnitten; ein solches Dreieck soll konstruiert und seine Winkel sollen berechnet werden.

(BD : DC = 1 : 2, D Fusspunkt der Höhe AD, tg $\beta = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.)

$a : a_1 = h_1 : h$, wenn $f^2 = f_1^2$; **$f^2 : f_1^2 = a : a_1$,** wenn $h = h_1$; **$f^2 : f_1^2 = h : h_1$,** wenn $a = a_1$.

358) Gegeben △ ABC; den Punkt X zu bestimmen, so dass

$$\triangle\ BCX = \frac{5}{7}\ \triangle\ ABC \text{ und } \triangle\ ACX = \frac{2}{5}\ \triangle\ ABC \text{ ist.}$$

359) Zu 3 gegebenen Punkten A, B, C einen vierten Punkt X so zu finden, dass ∢ AXC einem gegebenen ∢ η gleich sei, und dass die Dreiecke XAB und XCB einander gleich seien.

360) 2 Strecken und eine Gerade sind der Lage nach gegeben. Auf der Geraden einen Punkt von der Eigenschaft zu suchen, dass, wenn man ihn mit den Endpunkten der

Strecken verbindet, die beiden entstehenden Dreiecke einander gleich sind.

361) Auf den Halbmessern MP und MQ eines Quadranten liegen 2 Strecken AB und CD nicht am Mittelpunkt beginnend. Auf dem Bogen des Quadranten den Punkt X zu bestimmen, so dass die Dreiecke ABX und CDX gleich gross sind. Wie vereinfacht sich die Konstruktion, wenn die Strecken am Mittelpunkt beginnen?

362) Innerhalb eines Trapezes einen Punkt zu finden, so dass von den Dreiecken, welche durch Verbindung dieses Punktes mit den Ecken entstehen, je 2 gegenüberliegende einander gleich sind. Determination auch für den Fall, dass der gesuchte Punkt ausserhalb des Trapezes liegen darf.

(Es sind leicht 2 geom. Örter aufzufinden.)

363) Von einem Dreieck ABC durch eine Gerade, welche mit BC 60^0 bildet, $^1/_4$ abzuschneiden.

(AD bilde mit BC einen Winkel von 60^0, so ist $CD : CX = CX : \frac{BC}{4}$.)

Inhaltsberechnungen.

364) Von einem auf der kleineren Parallelseite AD eines Trapezes ABCD gegebenen Punkte P eine Linie PX nach BC zu ziehen, dass das Trapez durch dieselbe in 2 gleiche Teile geteilt wird. Wie gross wird CX werden, wenn BC = 20 cm AD = 14 cm, AB = CD = 5 cm und DP = 4 cm und welches wird der Inhalt des Trapezes sein?

(CX = 13 cm, J = 52 qcm.)

365) Im Trapez ABCD mit den Grundlinien b und d und der Höhe h ist durch den Schnittpunkt der Diagonalen eine Parallele zu den Grundlinien gezogen. Dadurch wird das Trapez in 2 kleinere Trapeze zerlegt. Wie verhalten sich deren Inhalte zu einander?

($J_1 : J_2 = d^2 (3 b + d) : b^2 (3 d + b.$)

Abschnitt XIII.

366) In einem Kreis ist der Radius stetig geteilt und mit dem grösseren Abschnitt ein konzentrischer Kreis gezeichnet.

Wie gross ist der entstandene Kreisring und wie lässt sich ein ihm flächengleicher Kreis zeichnen?

(Ring $= \frac{r^2 \pi}{2} (\sqrt{5} - 1)$; gesuchter Radius mittlere Proportionale zu r und major von r.)

367) Drei gleiche Kreise vom Radius 10 m berühren sich von aussen, je zwei den dritten. Wie gross ist der Flächeninhalt der zwischen diesen drei Kreisen liegenden Figur?

$$(J = \frac{r^2}{2} \sqrt{3} - \pi.)$$

368) Ein Durchmesser eines Kreises vom Radius = r cm ist in 2 Teile geteilt, die sich wie 2 : 3 (allgemein m : n) verhalten und über den Teilen sind Halbkreise nach den entgegengesetzten Seiten beschrieben. In welchem Verhältnis stehen die 2 Flächenteile, in welche der Kreis durch die wellenförmige Linie der Halbkreise zerlegt wird?
(Verhältnis der Teile = n : m.)

369) Zu beweisen: Beschreibt man über der Hypotenuse und den Projektionen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks nach derselben Seite hin Halbkreise, so ist der entstandene Pelekoïd gleich dem Kreis, der die Höhe des Dreiecks zum Durchmesser hat.

370) Über den Seiten eines Quadrats mit der Seite a sind nach innen gleiche Kreisbögen konstruiert, die sich in den Ecken des Quadrats gegenseitig berühren. Wie gross ist die entstehende krummlinige Figur?

(Inhalt der Figur $= \frac{a^2}{2} (4 - \pi.)$)

371) Im Kreis um M sei AB eine Seite des regelmässigen Dreiecks und die in A und B gezogenen Tangenten schneiden sich in C. Es soll der Inhalt des zwischen den Tangenten und dem Bogen AB liegenden Flächenstücks bestimmt werden, wenn r gegeben ist.

(Flächenstück $= \frac{r^2}{3} (3 \sqrt{3} - \pi.)$)

372) Durch die Ecken eines aus 2 Quadraten von der Seite a

zusammengesetzten Rechtecks werden Kreisbögen derart nach aussen gezeichnet, dass ihre Mittelpunkte in den Mitten der längeren Seiten und in den Mittelpunkten der Quadrate liegen. Es soll der Flächeninhalt der entstandenen sogenannten Eilinie berechnet werden.

(Inhalt $= \frac{a^2}{4} (5\pi - 2)$.)

373) Auf einer Strecke AD $=$ a liege eine Strecke BC $=$ b. Beschreibe über AB und AC Halbkreise nach der einen, über BD und CD Halbkreise nach der andern Seite. Wie gross ist der Inhalt des entstehenden Pelekoïds? Wie verhält sich der Inhalt desselben zum Inhalt des Kreises über AD als Durchmesser?

($F = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{4}$; Fläche : Kreis $=$ b : a).

374) In einem gleichseitigen Dreieck ABC werden um die Ecken A, B und C mit einem Radius e Kreisbögen nach aussen, über den auf den Seiten bleibenden Reststrecken als Durchmesser Halbkreise nach innen beschrieben. Es soll die von den Kreisen eingeschlossene Figur berechnet werden, wenn BC $=$ a gegeben ist. Zwischen welchen Grenzen muss e liegen?

($F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + e^2\pi - \frac{3a}{8}\pi\,(a - 4\,e)$).

375) $\triangle$ ABC sei gleichschenklig und der Winkel an der Spitze A $= 36^0$. Man beschreibt aus C durch A einen Kreisbogen bis D auf der Richtung BC, und aus einem auf AC liegenden Punkt E den Bogen durch A und B; man soll nun die zwischen den Bogen und der Strecke BD liegende Fläche ohne trigonometrische Hilfsmittel berechnen, wenn AB $=$ 10 gegeben ist.

(Fläche $= 15\,\pi\,(5 - \sqrt{5}) + \frac{25}{2}\sqrt{50 - 22\sqrt{5}} = 242{,}75$).

376) Im Rhombus ABCD sollen 2 Parallelen zur kürzeren Diagonale gezogen werden, so dass ein gleichseitiges Sechseck entsteht. Die Seite und der Inhalt des Sechsecks

sollen berechnet werden, wenn die Seite a des Rhombus und die kürzere Diagonale e gegeben sind.

$$\left(\text{Seite } x = \frac{ae}{a+e}, \text{ Sechseck} = \frac{e^2(2a+e)\sqrt{(2a)^2 - e^2}}{2(a+e)^2}\right).$$

Abschnitt XVIII.

Teilung von Strecken.

378) Eine Strecke a so zu teilen, dass das Rechteck aus den beiden Abschnitten doppelt so gross wird als das Quadrat über dem kleineren Abschnitt.

379) In gerader Linie sind die Punkte A, B und C gegeben. Man soll den Punkt X zwischen B und C finden, dass $AB \cdot BX = CX^2$ wird.

380) Auf der Geraden L, welche die Parallelen L_1 und L_2 in A und B schneidet, ist ein Punkt P gegeben, und zwar so, dass Punkt A zwischen den Punkten B und P liegt. Man soll durch P eine Gerade ziehen, welche L_1 in X und L_2 in Y schneidet, so dass das Rechteck aus AX und BY gleich einem gegebenen Quadrat a^2 wird.

$$\left(AX^2 = x^2 = \frac{a^2 b}{c}, \text{ wenn } PA = b \text{ und } PB = c \text{ ist.}\right)$$

381) Die Strecke a so zu verlängern, dass die Summe der Quadrate der ganzen Linie und ihrer Verlängerung gleich ist einem gegebenen Quadrate b^2?

Tangenten, Sekanten an gegebene Kreise.

382) Auf der Verlängerung des Durchmessers eines Kreises den Punkt zu finden, von welchem aus eine Tangente gleich dem Durchmesser gezogen werden kann.

$$(KX = r\sqrt{5}).$$

383) Durch einen Punkt an einen Kreis eine Sekante zu ziehen, dass das Rechteck aus der ganzen Sekante und der Sehne gleich dem Quadrat des Durchmessers d werde.

(Tangente von P an ⊙ K sei a, so ist ganze Sekante $x = \sqrt{a^2 + d^2}$, vergl. Aufgabe 349).

384) Von einem Punkt ausserhalb eines Kreises eine Sekante an diesen zu ziehen, dass die entstehende Sehne doppelt so lang (allgemein n mal so lang) als der äussere Abschnitt werde.

(Äusserer Abschnitt x aus $x^2 = \frac{a^2}{n+1}$, wenn a die Tangente von P an ⊙ K ist.)

385) Im Endpunkt B des Durchmessers AB ist eine Tangente an den Kreis um M gelegt; man soll auf derselben den Punkt X so bestimmen, dass, wenn man die Strecke XM zieht, welche die Peripherie in C schneidet, $BX + XC = a$ werde.

(Tangente $BX = x$ ergiebt sich aus $x^2 + r^2 = (r + a - x)^2$.)

386) Gegeben ein Kreis und Punkt C auf der Verlängerung des Durchmessers AB (über B hinaus); in C ist die Senkrechte zu AC errichtet. Man soll von A aus eine Gerade, welche den Kreis in X, die Senkrechte in Y schneidet, so ziehen, dass XY eine vorgeschriebene Länge a habe.

($AC = b$; $AX = x$ ergiebt sich aus: $2r : x = a + x : b$.)

387) Von einem Punkt A ist eine Sekante ABC durch einen Kreis gelegt. Man soll durch denselben Punkt eine zweite Sekante so ziehen, dass die Summe der Quadrate der auf die letztere von den Durchschnittspunkten B und C gefällten Senkrechten einem gegebenen Quadrate s^2 gleich ist.

(Es sei $AB = b$, $AC = c$, so ist das Lot $BD = \frac{b \cdot s}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.)

388) Den geometrischen Ort eines Punktes zu bestimmen, für welchen die an zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt gezogenen Tangenten sich wie 2 : 3 verhalten.

(Der geometrische Ort ist ein Kreis mit

$$\text{Radius } x = \sqrt{\frac{(3r + 2r_1)}{5}(3r - 2r_1)}.)$$

389) Gegeben 2 konzentrische Kreise und ein Punkt P ausserhalb. Durch den Punkt eine die Kreise schneidende Sekante zu ziehen, so dass die auf ihr durch den grösseren Kreis bestimmte Sehne doppelt so gross ist als die durch den kleineren Kreis bestimmte. Welches Grössenverhältnis

muss zwischen den Halbmessern der gegebenen Kreise bestehen, damit die Aufgabe zu lösen möglich ist?

(Abstand der gesuchten Sekante vom Mittelpunkt =

$$\sqrt{\frac{(2\,r + R)}{3}\,(2\,r - R)};$$

Determination leicht.)

390) Durch den äusseren Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise eine Sekante so zu ziehen, dass ihre in die Kreise fallenden Abschnitte sich um die Strecke 2 d unterscheiden.

(Halbe Sehne in ⊙ K: $x = \frac{r\,d}{r - r_1}$.)

---

391) Ein Rechteck zu zeichnen von gleichem Inhalt mit einem gegebenen Rechteck und gleichem Umfang mit einem zweiten. (x + y) und (x—y) konstruierbar.

($x + y = c + d$; $(x - y)^2 = (c + d)^2 - 4ab$.)

392) Ein Dreieck zu konstruieren aus der Summe zweier Seiten, dem eingeschlossenen Winkel und dem Produkt aus der Höhe zur dritten Seite und dem Radius des umgeschriebenen Kreises.

(Mit dem Satz $bc = 2\,r\,.\,h$ ergiebt sich b und c aus: $b + c = s$ und $(b - c)^2 = s^2 - (2\,m\sqrt{2})^2$, wenn $r.h = m^2$.)

393) Ein Dreieck zu zeichnen aus der Summe der Grundlinie und Höhe $a + h = s$, dem Inhalte f^2 und dem Radius des umgeschriebenen Kreises r.

($a + h = s$; $(a - h)^2 = s^2 - (2\,f\sqrt{2})^2$.)

394) In einen Kreis ein Dreieck zu konstruieren, von dem ein Winkel und seine Mediane gegeben sind; d. h. △ aus m, r, α

(a Datum zu r und α, die Winkelhalbierende AD schneide den Umkreis in E, $AE = x$, $ED = y$, so ist $x - y = m$; $(x + y)^2 = m^2 + 8\,rd$, wo d die Entfernung des Punktes E von BC.)

394a) △ aus a, m, α.

394b) Durch den Punkt P auf der Halbierungslinie eines gegebenen Winkels eine Gerade so zu ziehen, dass das zwischen die Schenkel fallende Stück derselben eine gegebene Grösse a habe.

394c) Dreieck aus $a : m = p : q$, α, ρ^1.

395) Ein Dreieck zu konstruieren aus $a:b = m:n$; $a^2 - b^2 = d^2$ und h.

$$\left((a+b)^2 = \frac{d^2\,(m+n)}{(m-n)},\ (a-b)^2 = \frac{d^2\,(m-n)}{(m+n)}.\right)$$

396) Einem Halbkreis über seinem Durchmesser ein Rechteck einzubeschreiben, dessen Inhalt gleich dem eines gegebenen Quadrats a^2 ist.

(Die Seiten seien x und 2 y (2 y auf dem Durchmesser), so ist $(x+y)^2 = r^2 + a^2$; $(x-y)^2 = r^2 - a^2$.)

397) Gegeben ein Kreis K und ausserhalb Punkt P. Durch P eine Sekante zu ziehen, dass die Summe der Quadrate ihrer Abschnitte gleich einem gegebenen Quadrat a^2 wird.

(Die Tangente von P an $\odot$ K sei b, so ist:
$(x+y)^2 = a^2 + (b\sqrt{2})^2$; $(x-y)^2 = a^2 - (b\sqrt{2})^2$.)

397a) Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt ist eine Sehne XY so zu ziehen, dass die Summe der Quadrate über beiden Abschnitten $= p^2$ wird.

(Durch P Sehne AB zu ziehen, dass $PA = PB = m$, so ergeben sich die Abschnitte aus: $(x+y)^2 = p^2 + (m\sqrt{2})^2$; $(x-y)^2 = p^2 - (m\sqrt{2})^2$.)

398) In einen gegebenen Kreis ein Rechteck zu beschreiben, dessen Inhalt gleich einem gegebenen Quadrat f^2 sei.

(Die Seiten ergeben sich aus $(x+y)^2 = (2\,r)^2 + (f\sqrt{2})^2$;
$(x-y)^2 = (2\,r)^2 - (f\sqrt{2})^2$.)

399) $\triangle$ aus $a^2 + b^2 + c^2 = f^2$, $a + b + c = 2\,s$, $b + c - a = 2\,d$.

(Die Seiten b und c ergeben sich aus $(b+c)^2 = (s+d)^2$;
$(b-c)^2 = (s+d)^2 - 4\,(s^2 + d^2) + (f\sqrt{2})^2$.)

Konstr von rechtw. Dreiecken.

400) Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man den Inhalt f^2 und den Überschuss d der Hypotenuse über die Differenz der Katheten. Wie gross sind die Seiten, und wie konstruiert man sie?

$$(b-c)^2 = a^2 - (2f)^2 = (a-d)^2, \text{ woraus } a = \frac{d^2 + (2f)^2}{2\,d}.$$

401) Rechtwinkliges Dreieck aus der Summe der Hypotenuse und je einer Kathete $a + b = s$; $a + c = s_1$.

(Hypotenuse $a = (s + s_1) - \sqrt{2ss_1}$).

402) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, in dem das Quadrat über der einen Kathete gleich dem dreifachen Rechteck aus der anderen Kathete und der Hypotenuse a ist.
(Kathete c aus: $c^2 + 3\,ac - a^2 = 0$.)

403) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus der Hypotenuse a und der Summe s einer Kathete und ihrer Projektion auf die Hypotenuse.
(Kathete b aus: $b^2 + a.\,b - a.\,s = 0$.)

---

404) An einen Kreis ist die Tangente AB gezogen (A Berührungspunkt). Einen Kreis zu zeichnen, der die Tangente und den gegebenen Kreis berührt und dessen Inhalt das doppelte des gegebenen Kreises ist. Kreisberührungen.
(Radius $x = r\sqrt{2}$, Mittelpunkt leicht durch 2 geom. Örter zu finden.)

405) In einem Kreis ist eine Sehne AB gezogen. Einen Kreis zu zeichnen, der die Sehne und den gegebenen Kreis berührt und dessen Inhalt gleich der Hälfte des gegebenen Kreises ist.
(Radius $x = \frac{r}{2}\sqrt{2}$, leicht 2 geom. Örter.)

406) Gegeben 3 gleiche Kreise mit Radius r, ihre Mittelpunkte A, B, C liegen in gleichen Entfernungen d von einander auf einer Geraden; einen Kreis zu konstruieren, der alle 3 Kreise berührt, den mittleren einschliessend, die 2 anderen von aussen.
(Radius $x = \frac{d^2}{4r}$.)

407) Gegeben sind 2 Kreise der Lage nach. Es soll ein dritter gezeichnet werden, welcher den kleineren einschliessend, den grösseren ausschliessend berührt und dessen Fläche doppelt so gross ist als die gegebenen Kreisflächen zusammengenommen.
(Radius $x = \sqrt{2\,(r^2 + r_1^2)}$, leicht 2 geom. Orter.)

408) Einen Kreis zu zeichnen, welcher 2 Seiten eines gegebenen Quadrats berührt und durch eine Ecke geht. Durch Konstruktion und durch Rechnung zu lösen.
(Konstr. mit Abschn. X; Radius x aus $(a\sqrt{2} - x)^2 = 2\,x^2$.)

409) Über der Strecke 2a als Durchmesser ist ein Halbkreis beschrieben und in der Entfernung e vom Mittelpunkt auf demselben das Lot errichtet. Man soll einen Kreis zeichnen, welcher den Durchmesser, das Lot und den grösseren Bogen berührt

(Radius x aus: $x^2 + (x-e)^2 = (a-x)^2$.)

410) Über dem Durchmesser eines Halbkreises ist der senkrechte Radius gezogen und um diesen als Durchmesser ein Kreis gelegt. Es sollen zu beiden Seiten des letzteren Kreise eingezeichnet werden, die ihn, den Halbkreis und den Basisdurchmesser berühren.

(Radius $x = \frac{r}{4}$ ergiebt sich aus: $(\frac{r}{2} + x)^2 - (\frac{r}{2} - x)^2 = (r-x)^2 - x^2$.)

411) Um die Enden einer Strecke a werden 2 Kreisbögen mit dem Radius a bis zu ihrem Schnittpunkt gezogen (gotischer Spitzbogen); ferner wird über a der Halbkreis und das Mittellot konstruiert. Gesucht ein Kreis, der einen Schenkel des Spitzbogens, den Halbkreis und das Mittellot berührt.

(Radius $x = \frac{a}{8}$ ergiebt sich aus: $(\frac{a}{2} + x)^2 - x^2 = (a-x)^2 - (\frac{a}{2} + x)^2$.)

412) Um 2 Nebenecken A und D eines Quadrats sind 2 gleiche sich berührende Kreise beschrieben. Die Kreise zu zeichnen, welche diese beiden Kreise berühren und durch eine der andern Ecken hindurch gehen.

(Die Entfernung x des gesuchten Mittelpunktes von der Seite BC ist $= a + \sqrt{\frac{7}{12} a^2}$, wenn die Seite des Quadrats $= 2a$ ist.)

413) Um die Endpunkte einer Strecke AB = 2a cm sind 2 Kreisbögen mit gleichem Radius 2a cm beschrieben, die sich in C schneiden. Es sollen über AB 2 gleiche, die äusseren Bögen berührende Halbkreise so beschrieben werden, dass über ihnen noch ein dritter Kreis vom selben Radius eingezeichnet werden kann, der sämtliche Peripherien be-

rührt. Wie gross ist der Radius der 3 Kreise und wie wird er konstruiert?

(Radius x ergiebt sich aus $(2a - x)^2 - a^2 = 4x^2 - (a-x)^2$.)

414) Über der Basis eines gotischen Spitzbogens sind 2 gleiche, einander berührende Halbkreise errichtet; es soll ein Kreis konstruiert werden, der sämtliche 4 Kreisperipherien berührt.

(Basis sei 4 a, Radius x aus $4x^2 - a^2 = (4a - x)^2 - 4a^2$.)

---

415) Ein Rechteck parallel der Diagonale in 3 gleiche Teile zu teilen und die Teilungslinien zu berechnen, wenn a und b die Seiten des Rechtecks sind. Teilung von geradlinigen Figuren.

(Die Abschnitte auf den Rechteckseiten sind: $\frac{a}{3}\sqrt{6}$ und $\frac{b}{3}\sqrt{6}$ und die Teilungslinien je $= \frac{1}{3}\sqrt{6(a^2+b^2)}$.)

416) Ein Dreieck ABC parallel zur Höhe AD zu halbieren.

($BY^2 = \frac{1}{2} BC . BD$, Y auf BC.)

417) Von einem Dreieck ist parallel der Höhe h ein Stück gleich $^1/_3$ der Fläche abzuschneiden.

($BY^2 = \frac{1}{3} BC . BD$.)

418) Ein gegebenes Dreieck durch eine Linie parallel zur Winkelhalbierenden m zu halbieren.

(Die Winkelhalbierende sei AD, so ist $BY^2 = \frac{1}{2} BC . BD$, Y auf BC, oder in den Seiten ausgedrückt $BY^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 . c}{(b + c)}$.)

419) Ein gegebenes Dreieck durch eine Gerade zu halbieren, welche mit einer Seite einen gegebenen Winkel φ bildet.

(BD bilde mit AB den Winkel φ, AD sei = d, so ist $AX^2 = \frac{b . c^2}{2d}$, X auf AB.)

420) Die Fläche eines gegebenen Vierecks durch eine Parallele zu einer Diagonale zu halbieren.

(DE ∥ Diagonale AC, so ist $BX^2 = \frac{1}{2} BC . BE$, X auf BC.)

421) In dem Dreieck ABC soll die Linie XY so gezogen werden, dass das $\triangle$ABC halbiert wird und dass AX = CY ist.

(AX = x ergiebt sich aus $2x(b - x) = bc$.)

422) In einem Dreieck zwischen 2 Seiten eine Linie XY so zu ziehen, dass durch sie vom Dreieck ein Sehnenviereck = $^2/_3$ des gegebenen Dreiecks abgeschnitten wird.

($\sphericalangle$ AXY = $\sphericalangle\gamma$ und $\sphericalangle$AYX = $\sphericalangle\beta$, also die Richtung von XY gegeben,

$$AX^2 = \frac{1}{3} AC^2.)$$

423) Zu der Seite BC im $\triangle$ ABC die Parallele XY, welche AB in X und AC in Y schneidet, so zu ziehen, dass $BX^2 + CY^2 = k^2$ wird; k ist eine gegebene Strecke.

$$(BX = x = \frac{c \,.\, k}{\sqrt{b^2 \quad c^2}}.)$$

424) Gegeben ist ein Dreieck ABC, worin AB > BC ist; man soll in diesem Dreiecke eine Parallele XY zu BC ziehen, welche AB in X, AC in Y trifft und zwar so, dass XY = AX — BX werde.

$$(AX = x \text{ ist } \frac{c^2}{2c - a}.)$$

425) Ein gegebenes Dreieck ABC durch eine von A nach BC gehende Linie so zu teilen, dass der erste Teil doppelt genommen die mittlere Proportionale zwischen dem ganzen Dreieck und dem zweiten Teile bilde.

(Grundlinie BX des ersten Teiles ergiebt sich aus:

$$a : 2x = 2x : (a - x).)$$

Teilung von Kreisen und Kreisteilen.

426) In einen gegebenen Kreis 2 konzentrische Kreise so zu zeichnen, dass dadurch die ganze Kreisfläche in 3 Teile geteilt wird, von denen der innere und der äussere einander gleich sind und der mittlere $^1/_7$ der ganzen Kreisfläche ist.

(Die Radien seien x und y, so ist $x^2 = \frac{4}{7} r^2$; $y^2 = \frac{3}{7} r^2$.)

427) Einen gegebenen Kreisring mit den Radien a cm und b cm

durch einen konzentrischen Kreis zu halbieren. Wie lang wird dessen Radius und wie lässt er sich konstruieren?

(Radius $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.)

428) Einen gegebenen Ring, dessen äusserer Radius = a mm, dessen innerer = b mm ist, durch 2 konzentrische Kreise in 3 gleiche Teile zu teilen. Die Radien derselben sind zu berechnen und zu konstruieren.

($x^2 = \frac{1}{3}(a^2 + 2b^2)$; $y^2 = \frac{1}{3}(2a^2 + b^2)$.)

429) Einen Kreissektor durch 2 konzentrische Bogen in 3 gleiche Teile zu teilen.

($MX = \sqrt{\frac{r}{3} \cdot r}$, $MY = \sqrt{\frac{2r}{3} \cdot r}$.)

430) Ein Kreis K_1 berührt den Kreis K von innen im Punkte B. Es soll ein dritter Kreis gezeichnet werden, der die beiden in B berührt und das sichelförmige, zwischen ihnen liegende Flächenstück halbiert.

(Radius $x = \sqrt{\frac{r^2 + r_1^2}{2}}$.)

---

431) Ein Quadrat zu konstruieren, dessen Inhalt sich zu dem eines gegebenen Rechtecks verhalte, wie sein Umfang zum Umfang des Rechtecks. Flächenbeziehungen.

($x = \frac{2ab}{a+b}$.)

432) In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck (Seite = a) ist ein anderes einzubeschreiben, welches das $^3/_4$fache des gegebenen ist; der Radius des Umkreises für das gesuchte Dreieck ist zu berechnen.

(Seite $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, Radius $= \frac{a}{2}$.)

433) Aus der Ecke A des Rechtecks ABCD, in dem AB > BC ist, soll eine Gerade, welche CD in X und die Verlängerung von BC in Y schneidet, so gezogen werden, dass $\triangle$ CXY den gleichen Flächeninhalt hat wie das gegebene Rechteck ABCD.

($CY = b + b\sqrt{3}$, $BC = b$.)

434) In einem Rechteck mit den Seiten a und b soll die kleinere Seite a um einen gewissen Betrag verlängert, die grössere um denselben Betrag verkürzt werden, dass das neue Rechteck einen doppelt so grossen Flächeninhalt als das ursprüngliche bekommt.

435) Auf der Mittellinie eines rechten Winkels A liegt der Punkt P, dessen Entfernungen von den Schenkeln = d also bekannt sind. Durch P die Gerade XY zwischen den Schenkeln so zu ziehen, dass $\triangle AXY = q^2$ wird.

(AX = x ergiebt sich aus $dx^2 - 2q'x + 2dq^2 = 0$.)

436) Von einem gleichschenkligen Dreieck kennt man die Höhe h; ferner ist bekannt, dass das über der Grundlinie stehende eingeschriebene Quadrat $^1/_3$ der Dreiecksfläche beträgt. Man soll die Grundlinie des Dreiecks berechnen und konstruieren.

(Halbe Grundlinie $= h + \frac{h}{2}\sqrt{3}$.)

437) 2 Kreise berühren sich von aussen und es sind an sie die beiden äusseren Tangenten sowie die beiden auf der Centrallinie aussen senkrecht stehenden Tangenten gezogen. Es soll der Inhalt des dadurch bestimmten Trapezes berechnet werden, wenn die Halbmesser der Kreise r_1 und r_2 sind.

(Die Parallelseiten des Trapezes sind $\frac{2\,r}{r_1}\sqrt{r\,r_1}$ und $\frac{2\,r_1}{r}\sqrt{r\,r_1}$, Höhe $2\,(r + r_1$.)

Abschnitt XIX.

(bc)=(2rh) 438) Beweise, dass für jedes Dreieck die Relation $(b\,c) = (2\,r\,h)$ gilt und löse mit dieser Beziehung die Aufgabe: In einem Kreis ist die Sehne BC gezogen. Auf der Peripherie den Punkt X so zu bestimmen, dass BX. CX gleich dem Quadrat des Radius werde.

439) $\triangle$ aus r, $(b.\,c) = p^2$ und Halbierungslinie m des Winkels α.

($h = \frac{p^2}{2\,r}$, $\sphericalangle\,(hm) = \sphericalangle\,(rm)$.)

440) $\triangle$ aus $(b\,c) = 3\,r^2$, h, β.

441) Eine festliegende Strecke AB und eine derselben parallele Gerade L sind gegeben; in L einen Punkt X so zu bestimmen, dass das Rechteck aus AX und BX gleich AB^2 ist.

442) Innerhalb des Dreiecks ABC den Punkt x zu finden, dass $\sphericalangle$ BXC $= 120^0$ und XB . XC $= {}^1/_3\; BC^2$ wird.

443) $\triangle$ aus $b + c = s$, $(r\,h) = m^2$ und α.

$\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - (m\sqrt{2})^2$.)

444) Zu beweisen: In einem rechtwinkligen Dreieck, in welchem $h = {}^1/_3\, a$, ist das Rechteck aus den Katheten gleich dem Quadrat ihrer Differenz.

(Vergl. Aufgabe 392.)

---

445) $\triangle$ aus a, $b^2 - c^2 = d^2$, β. $b^2 - c^2 = p^2 - q^2$

446) $\triangle$ aus a, $b^2 - c^2 = d^2$, r.

447) $\triangle$ aus $b^2 - c^2 = d^2$, h, t.

(Es sei AD die Höhe, BE $=$ EB $=$ x, ED $=$ n, so ist n bestimmt durch h und t, x ergiebt sich aus $x = \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{n}$

448) $\triangle$ aus $b^2 - c^2 = d^2$, $p - q = m$, $\beta - \gamma = \delta$.

(Es ist $a = \frac{d^2}{m}$; DE $=$ DB, so ist $\sphericalangle$ EAC $= \beta - \gamma$.)

449) Im Dreieck ABC soll der Punkt P so bestimmt werden, dass seine Abstände von AB und AC sich wie 3 : 5 verhalten und $BP^2 - CP^2 = \frac{a^2}{4}$ sei.

(Fälle PD $\perp$ BC, so ist BD $= \frac{5\,a}{8}$, CD $= \frac{3\,a}{8}$.)

450) Ein Parallelogramm zu zeichnen aus den beiden Diagonalen und der Differenz der Quadrate zweier anstossender Seiten

451) $\triangle$ aus a, t, $5\,(b^2 - c^2) = m^2$.

($p - q = \frac{m^2}{5\,a}$, $p + q = a$.)

452) Auf der Seite AD eines Rechtecks ABCD soll der Punkt X so bestimmt werden, dass $CX^2 - BX^2$ gleich der Fläche des gegebenen Rechtecks werde.

($XE \perp BC$, $CX^2 - BX^2 = CE^2 - BE^2 = a.b$, also $CE - BE = a$, $CE + BE = b$.)

453) Gegeben Kreis K, Gerade L und darauf Punkt P; gesucht Punkt X auf L, dass PX = der Tangente von X an K wird.

($XK^2 - XP^2 = r^2$, X also leicht zu finden, vergl. Aufg. 262.)

454) Gegeben ist ein Kreis und eine Gerade, auf welcher im Punkt A ein Lot errichtet ist. Es soll auf diesem ein Punkt X gefunden werden, so dass die Strecke XA gleich der von X an den Kreis gezogenen Tangente ist.

($XK^2 - XA^2 = r^2$, geom. Ort für X leicht zu finden.)

455) Auf einem gegebenen Kreis liegen die 3 Punkte A, B und C. Es soll durch A eine Sehne AX gezogen werden, so dass, wenn O der Mittelpunkt von AX ist, $BO^2 - CO^2 = r^2$ wird.

(Es sei $OD \perp BC$, so ist $BD^2 - CD^2 = r^2$, also Fusspunkt D konstruierbar, für O leicht 2 geom. Örter.)

456) Man beschreibe einen Kreis, welcher durch 2 gegebene Punkte A und B geht und einen gegebenen Kreis K unter dessen Durchmesser als Sehne schneidet.

(Es muss $XP^2 - XK^2 = r^2$ sein, für X leicht 2 geom. Örter zu finden.)

457) Einen Kreis zu zeichnen, der durch den Punkt P geht, den Kreis K halbiert und für welchen die Tangente von P_1 an denselben = a wird.

($XP^2 - XK^2 = r^2$, P_1P schneide $\odot$ X in P_2, so ist:
$P_1P : a = a : P_1P_2$.)

458) Es sind 2 Kreise K_1 und K_2 gegeben, und auf Kreis K_2 der Punkt P. Es soll ein Kreis konstruiert werden, welcher den Kreis um K_1 rechtwinklig schneidet und den Kreis K_2 in P berührt.

($XK_1^2 - XP^2 = r_1^2$, Mittelpunkt X leicht durch 2 geom. Örter zu bestimmen.)

459) Einen Kreis zu konstruieren, der durch einen gegebenen Punkt P geht, einen gegebenen Kreis senkrecht schneidet und eine zweite gegebene Kreislinie halbiert.

(Die geom. Örter zu konstruieren aus: $XK_1^2 - XP^2 = r_1^2$ und $XP^2 - XK_2^2 = r_2^2$.)

---

460) $\triangle$ aus $b^2 + c^2 = s^2$, a, r. $2(b^2+c^2)$

461) $\triangle$ aus a, $b^2 + c^2 = s^2$, β. $=4t^2+a^2)$

462) Ein Dreieck zu konstruieren aus $BC^2 + AC^2 = s^2$, der Höhe $AD = h$ und dem Winkel $ABC = \beta$.

(Durch h und β ist AB gegeben.)

463) $\triangle$ aus $a^2 + b^2 = p^2$, c, $t + t_2 = q$.

($4t_2^2 = 2p^2 - c^2$, daher $\triangle$ aus c, t, t_2.)

464) $\triangle$ aus a, t′ und $b^2 + c^2 = s^2$.

($\triangle$ DEC konstruierbar aus $DC = \frac{a}{2}$, $DE^2 + CE^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2$, $BE = t'$, wo D Halbierungspunkt von BC, und E Halbierungspunkt von AC ist.)

465) Innerhalb des gegebenen Dreiecks ABC soll ein Punkt X gefunden werden, so dass $XA^2 + XC^2 = s^2$ wird, und dass die Entfernungen von AB und BC sich wie m : n verhalten.

---

466) $\triangle$ aus f^2, a, ρ.

($\rho : f = f : s$.) $f^2 = \rho \cdot s$

467) $\triangle$ aus f^2, $a + b + c = 2s$ und ρ'. $\rho'(s-a)$ u. s. w. $= \frac{a \cdot h}{2}$.

($s : f = f : \rho$.)

468) $\triangle$ aus f^2, ρ und ρ'.

($\rho : f = f : s$.)

469) $\triangle$ aus f^2, a, b + c.

($a + b + c = 2s$, $s : f = f : \rho$, daher $\triangle$ aus $a + b + c = 2s$, a und ρ.)

470) Konstruiere ein Dreieck, das gleichen Umfang 2 s und einen gleichen Winkel wie ein gegebenes Dreieck, aber nur den halben Inhalt desselben hat.

(Für das gesuchte Dreieck ist $\rho = \frac{f^2}{2s}$, also $\triangle$ aus: ρ, β und Umfang 2 s.)

471) Ein rechtwinkliges Dreieck aus dem Umfang 2 s und Inhalt f^2 zu konstruieren und die Seiten zu berechnen.

$$(s : f = f : \rho;\ a = \frac{s^2 - f^2}{s}$$

$$b = \frac{(s^2 + f^2) + \sqrt{s^4 - 6\,s^2 f^2 + f^4}}{2\,s}$$

$$c = \frac{(s^2 + f^2) - \sqrt{s^4 - 6\,s^2 f^2 + f^4}}{2\,s}$$

472) $\triangle$ aus f^2, ρ'', ρ'''.

($s - b = \frac{f^2}{\rho'''}$, $s - c = \frac{f^2}{\rho''''}$, damit auch a gegeben, also $\triangle$ aus a, ρ'', ρ'''.)

473) $\triangle$ aus f^2, b, $c - a = d$.

($b + d = 2\,(s - a)$; $b - d = 2\,(s - c)$; $(s - a) : f = f : \rho'$, $(s - c) : f = f : \rho'''$, daher $\triangle$ aus b, ρ', ρ'''.)

474) $\triangle$ aus a, $b + c = m$, h.

($a + m = 2\,s$, $m - a = 2\,(s - a)$; $s : a = \frac{h}{2} : \rho$,

$s - a : a = \frac{h}{2} : \rho'$, daher $\triangle$ aus a, ρ, ρ'.)

475) $\triangle$ aus a, $b - c = d$, h.

($a + d = 2\,(s - c)$; $a - d = 2\,(s - b)$; $(s - b) : a = \frac{h}{2} : \rho''$,

$(s - c) : a = \frac{h}{2} : \rho'''$, daher $\triangle$ aus a, ρ'', ρ'''.)

$f^2 = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$. 476) In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Rechteck aus den Abschnitten v und w, in welche die Hypotenuse durch den Berührungspunkt des einbeschriebenen Kreises geteilt wird, gleich dem Inhalt des Dreiecks. Der Satz soll bewiesen und ein rechtwinkliges Dreieck aus v und w konstruiert werden.

($v = s - b$, $w = s - c$, aber $\rho \cdot s = s\,(s - a) = (s - b)\,(s - c)$ $= J$, für den zweiten Teil: $v + w : v = w : \frac{h}{2}$.)

---

477) In einem Rhombus sind durch den Schnittpunkt der Diagonalen die Höhen gezogen.

1) Welche Figur wird durch die 4 Endpunkte derselben bestimmt;

2) wie gross ist der Inhalt dieses Vierecks, wenn die Diagonalen des Rhombus $e = 3$ und $e_1 = 4$ m gegeben sind?

(Figur ist ein Rechteck, Seite des Rhombus = 2,5 m.
Rechteck = 2,7648 qm.)