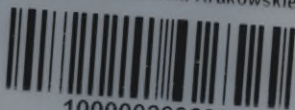


Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299230

WYDANO STARANIEM
KOMITETU WYDAWNICZEGO NA UPAMIĘTNIENIE DZIESIĘCIOLECIA
STOWARZYSZENIA TECHNIKÓW W WARSZAWIE.

MECHANIKA

TEORETYCZNA

DLA

INŻYNIERÓW, TECHNIKÓW I UCZĄCYCH SIĘ

INŻ. H. CZOPOWSKIEGO.

TOM II.

CZEŚĆ 2.

DYNAMIKA UKŁADÓW PUNKTÓW I BRYŁ
MATERIAŁNYCH.

WARSZAWA — 1916.

SKŁADY GŁÓWNE:

GEBETHNER i WOLFF
W WARSZAWIE.

GEBETHNER i SPÓŁKA
W KRAKOWIE.

KID 531 (075.8)



~~II 5763~~



11-351742

Za pozwoleniem cenzury niemieckiej 24/III 1916 r.

SPIS RZECZY CZĘŚCI 2^{ej} TOMU II^{go}.

§§ Str. V. Dynamika układu punktów materalnych.

1. Kinetyka układu punktów materalnych.

80. Określenie układu punktów materalnych	175
81. Ilość ruchu układu punktów materalnych	175
82. Pochodna względem czasu ilości ruchu układu punktów materalnych.	177
83. Moment ilości ruchu układu punktów materalnych	177
84. Energia kinetyczna układu punktów materalnych	177

2. Równania dynamiczne układu punktów materalnych.

-85. Siły wewnętrzne	178
-86. Prawo wzajemnego działania	178
-87. Równania dynamiczne	179
-88. Równania dynamiczne ruchu środka masy układu punktów	180
-89. Równania dynamiczne momentów.	181
-90. Równanie dynamiczne równowartości pracy i energii kinetycznej	183
91. Zastosowanie metody d'Alembert'a do obliczenia równań dynamicznych	184

3. Kinetyka ruchu względnego.

92. Określenie ruchu względnego względem środka masy.	186
93. Ilość ruchu względnego układu punktów materalnych	186
94. Moment ilości ruchu względnego	186
95. Obliczenie analityczno-wektorowe.	188
96. Energia kinetyczna ruchu względnego	188

4. Równania dynamiczne ruchu względnego.

97. Równanie dynamiczne momentów.	189
98. Równanie równowartości pracy względnej i energii kinetycznej ruchu względnego	189
99. Przykład	191
100. Przykład	195

VI. Dynamika brył materalnych.

1. Geometria mas.

-101. Moment bezwładności bryły materalnej względem płaszczyzny	198
---	-----

-102. Moment bezwładności bryły materalnej względem osi	199
-103. Moment bezwładności bryły materalnej względem bieguna	199
-104. Wymiary momentów bezwładności	200
-105. Wzajemna zależność momentów bezwładności	201
-106. Momenty odśrodkowe bryły materalnej	203
-107. Momenty bezwładności brył materalnych względem płaszczyzn wzajemnie równoległych.	204
-108. Momenty bezwładności brył materalnych względem osi równoległych	205
109. Szczególne wartości momentów bezwładności	206
-110. Momenty odśrodkowe bryły materalnej względem płaszczyzn rkwnoległych	206
-111. Momenty bezwładności bryły materalnej względem osi, przecinających się w jednym punkcie	207
-112. Elipsoida bezwładności danej bryły materalnej	209
-113. Właściwości momentów bezwładności brył materalnych	211
114. Punkt bezwładności na danej prostej	212
115. Ogniska bezwładności	214
116. Przykład	216
117. Przykład	217
118. Przykład	218
-119. Układy płaskie punktów materalnych	218
120. Uogólnienie twierdzeń o właściwościach momentów	219

2. Kinetyka brył materalnych.

-121. Ilość ruchu i moment ilości ruchu bryły materalnej	221
-122. Energia kinetyczna bryły materalnej	228
123. Związki matematyczne pomiędzy wyrazem momentu ilości ruchu a wyrazem energii kinetycznej.	229

3. Równania dynamiczne ruchu brył materalnych.

-124. Równania dynamiczne	231
-125. Związek pomiędzy równaniem dynamicznem momentów i równaniem pracy	232

§§	Str.
4. Obliczenie ruchu obrotowego bryły materalnej.	
126. Ruch bryły, obracającej się około osi nieruchomej	234
127. Ruch obrotowy jednostajny	234
-128. Ruch obrotowy jednostajnie przyspieszony	235
-129. Ruch obrotowy zmienny	240
5. Obliczenie ruchu płaskiego brył materalnych.	
130. Warunki powstawania ruchu płaskiego brył materalnych	243
131. Równania dynamiczne ruchu płaskiego.	244
132. Obliczenie ruchu swobodnego figury materalnej płaskiej, poruszającej się w swej płaszczyźnie, bez udziału sił zewnętrznych lecz z początkową prędkością.	245
-133. Obliczenie ruchu walca toczącego się	247
134. Obliczenie ruchu toczącego się wadła	251
135. Obliczenie sił wewnętrznych poruszającej się bryły materalnej	252
136. Obliczenie ruchu początkowego i sił wewnętrznych, jakie występują w bryle, w chwili wyprowadzenia jej z równowagi	256
137. Obliczenie ruchu początkowego bryły w chwili nagłej zmiany ruchu	258
138. Przykład nagłej zmiany ruchu	259
139. Przyrząd Atwood'a	260
140. Obliczenie ruchu brył układu materalnego	264
141. Obliczenie ruchu układu brył o jednym stopniu swobody	265
6. O uderzeniu się brył materalnych.	
-142. Siły chwilowe	266
-143. Przebieg uderzenia się brył	267
-144. Określenia sposobów uderzenia się brył.	268
-145. Uderzenie się brył proste i środkowe	268
146. Uderzenie się środkowe i proste brył niesprężystych	269
-147. Stracona energia kinetyczna	270
148. Uderzenie się środkowe i proste brył sprężystych	271
-149. Uderzenie się środkowe i proste brył niezupełnie sprężystych.	273

§§	Str.
-150. Wyznaczenie współczynnika	273
151. Przykład uderzenia mimośrodowego prostego.	274
152. Przyrząd Robins'a.	278
153. Uderzenie środkowe ukośne.	279
154. Uderzenie się brył z uwzględnieniem tarcia	282
155. Przykład obliczenia ruchu brył układu o dwóch stopniach swobody	286
156. Analiza równań ruchu	291
157. Ruch dzwonu	296
7. Ruch przestrzenny brył materalnych.	
<i>A. Bryła, obracająca się około osi nieruchomej.</i>	
158. Położenie wektora momentu ilości ruchu bryły, obracającej się około osi nieruchomej, względem biegunna, obranego na tej osi	297
159. Siły odporowe łożysk osi obrotu	299
8. Ruch kulisty bryły materalnej bez udziału sił zewnętrznych, lecz z prędkością początkową.	
160. Zadanie	305
161. Osi obrotu stateczne i niestateczne	309
162. Ruch swobodnej bryły materalnej	312
9. O gioskopach.	
163. Określenia i uwagi ogólne	313
164. Gioskop o jednym stopniu swobody	315
165. Nieściskość wzorów powyższych	317
166. Gioskop o dwóch stopniach swobody	318
167. Ruchy bezwładne gioskopów	321
168. Gioskop o trzech stopniach swobody	322
169. Stabilizacja wozu na jednej szynie	323
170. Przykład. Ruch bąka	328
171. Dokładne równanie dynamiczne ruchu bąka	338
172. Inne równania dynamiczne ruchu bąka	339
173. Ruch precesyjny i nutacyjny.	340
174. Siła odporowa punktu podparcia bąka	342
175. Równania dynamiczne Ruler'a	343
176. Równania geometryczne Ruler'a.	345
177. Inny sposób obliczania równań dynamicznych Ruler'a	346
10. Równania Lagrange'a.	
178. Równania statyczne	348
179. Równania dynamiczne Lagrange'a.	351
180. Przykład	353

V. Dynamika układu punktów meryalnych.

1. Kinetyka układów punktów meryalnych.

80. Określenie układu punktów meryalnych. Układem punktów meryalnych nazywamy zbiór punktów, którym przypisujemy pewne masy. Jeżeli każdy z takich punktów może być dowolnie przesunięty, niezależnie od położenia innych punktów, to układ taki nazwiemy układem punktów niezależnych. Jeżeli zaś przesunięcie choćby jednego z punktów danego układu pociąga za sobą ściśle określone przesunięcie innych punktów tegoż układu, to układ taki nazwiemy układem punktów zależnych.

Układy zależne nazwiemy *zmiennymi*, gdy odległości pomiędzy punktami się zmieniają; nazwiemy zaś *niezmiennymi*, gdy te odległości nie zmieniają się podczas ruchu punktów.

Przykładem układu zmiennego punktów zależnych jest układ planetarny; planety bowiem, gdy wyobrazimy je sobie w postaci punktów meryalnych, wzajemnie się przyciągają, i przesunięcie się jednej z nich wpływa na położenie innych; a przytem odległości ich wzajemne się zmieniają.

Układem niezmiennym jest każda bryła sztywna; w myśl bowiem danego określenia bryły, odległości pomiędzy punktami, na jakie wyobrazamy sobie rozłożoną tę bryłę, pozostają podczas jej ruchu niezmiennymi.

W naszych rozpatrywaniach będziemy mieli do czynienia wyłącznie z układami zmiennymi i niezmiennymi punktów zależnych; przytem układy zmienne będziemy krótko nazywali układami punktów, a układy niezmiennie bryłami.

81. Ilość ruchu układu punktów meryalnych. Sumę wektorową ilości ruchu punktów danego układu nazywamy *ilością ruchu tego układu*. Jeżeli literą m_k oznaczymy masę k — tego punktu danego układu, a literą \underline{v}_k prędkość tego punktu; to ilość ruchu, w myśl danego określenia wyrazimy wzorem:

$$\Sigma(m_k \underline{v}_k) \dots \dots \dots (189)$$

Wzór ten przedstawimy sobie geometrycznie w postaci wieloboku, w ogóle niezamkniętego, którego boki są wektorami ilości ruchu oddzielnych punktów. Jeżeli masy punktów są wielkościami o skończonych wartościach, to i wielobok posiadać będzie boki o skończonych długościach; jeżeli zaś masy punktów będą

nieskończenie małe, a ilość takich punktów będzie nieskończenie wielka, to wielobok ten zamieni się w linię krzywą. Bok zamykający taki wielobok lub cięciwa linii krzywej, jest wektorem wypadkowym tej sumy i przedstawia ilość ruchu danego układu.

Zajmiemy się obecnie wyznaczeniem wektora ilości ruchu danego układu punktów. Jeżeli znane są wielkości mas i prędkości każdego z punktów danego układu, to łatwo wyznaczyć ten wektor drogą geometryczną lub analityczną. Wektor ten jednakże, jak to zaraz wskażemy, jest w pewnym związku z ruchem środka masy danego układu tak, iż będziemy mogli go wyznaczyć z ruchu tego środka. Ażeby ten związek znaleźć, zastosujemy określenie środka masy jako punktu geometrycznego, którego położenie wyznaczają koniec wektora \bar{r}_s , określonego wzorem 130-tym tomu I-go:

$$m \bar{r}_s = \Sigma (m_k \bar{r}_k) \quad \dots \quad (190)$$

Dowiedliśmy już (w § 158-ym tomu I-go), że położenie środka masy nie zależy od wyboru położenia bieguna, a zależy jedynie od wzajemnego rozmieszczenia mas poszczególnych punktów; z czego wynika, że ze zmianą wzajemnego położenia punktów zmienia się również położenie środka masy danego układu; co też wyraża równanie 3-cie. Zadaniem naszym obecnie jest znalezienie związku, jaki zachodzi pomiędzy ruchem środka masy i ruchem jego oddzielnych punktów. Jeżeli zmienimy położenia wszystkich lub niektórych punktów danego układu, to zmieniają się również położenia odnośnych wektorów wodzących. Przesuńmy niektóre lub wszystkie punkty danego układu, i oznaczmy wektory, wyznaczające nowe położenia tych punktów dla odróżnienia od poprzednich literami z gwiazdkami, a położenie środka masy tego nowego układu wyznaczmy z równania:

$$m \bar{r}_s^* = \Sigma (m_k \bar{r}_k^*) \quad \dots$$

Ażeby otrzymać związek pomiędzy przesunięciami oddzielnych punktów, a przesunięciami środka układu odejmijmy od tego równania poprzednie, a otrzymamy:

$$m (\bar{r}_s^* - \bar{r}_s) = \Sigma m_k (\bar{r}_k^* - \bar{r}_k);$$

w którym różnica $(\bar{r}_s^* - \bar{r}_s)$ oraz różnice $(\bar{r}_k^* - \bar{r}_k)$ wyrażają przesunięcie środka masy i przesunięcia oddzielnych punktów tego układu. Przyjmijmy następnie, że te przesunięcia są nieskończenie małe, i podzielmy je przez okres czasu dt , w którym te przesunięcia zostały wykonane, przyjmując, że zostały wykonane jednocześnie; a otrzymamy związek pomiędzy prędkością środka masy a prędkościami oddzielnych punktów danego układu. Związek ten wyrazi się równaniem:

$$m \bar{v}_s = \Sigma (m_k \bar{v}_k) \quad \dots \quad (191)$$

Równanie to wystawimy: ilość ruchu każdego układu punktów (zależnych lub niezależnych, zmiennych lub niezmiennych) równa się ilości ruchu jego środka masy; gdy wyobrazimy sobie w tym środku skupione masy wszystkich punktów danego układu.

W szczególnych przypadkach, gdy np. punkty wykonują pewne ruchy, a środek masy tego układu pozostaje w spoczynku, wtedy ilość jego ruchu równa się zeru; ilość przeto ruchu np. bryły materialnej, obracającej się około każdej osi, przechodzącej przez środek jej masy, równa się podczas tego obrotu zeru. Gdy

przeto ilość ruchu równa się zeru, to z tego nie wynika, że ilości ruchu oddzielnych punktów równają się zeru, lecz wynika tylko, że suma tych ilości równa się zeru; oddzielne zaś punkty układu mogą być w ruchu, t. j. mogą posiadać pewne ilości ruchu.

82. Pochodna względem czasu ilości ruchu układu punktów materalnych. Przeprowadźmy następnie punkty danego układu do innego położenia z prędkościami różnemi od poprzednich i oznaczmy te nowe prędkości dla odróżnienia od poprzednich literami z gwiazdkami, a napiszemy na zasadzie poprzedniego równania związek pomiędzy temi nowemi prędkościami w następujący sposób:

$$m \bar{v}_s^* = \Sigma (m_k \bar{v}_k^*); \dots \dots \dots$$

Odejmijmy od tego równania poprzednie i rozdzielmy to nowe równanie przez okres czasu dt , w jakim wykonano tę zmianę prędkości, a otrzymamy równanie:

$$m \frac{d\bar{v}_s}{dt} = \Sigma \left(m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \right); \dots \dots \dots (192)$$

lub inaczej:

$$m \bar{p}_s = \Sigma (m_k \bar{p}_k) \dots \dots \dots (193)$$

gdzie litery \bar{p} oznaczają przyśpieszenia odnośnych punktów.

Równanie 191-e wyraża związek pomiędzy prędkością środka układu a prędkościami oddzielnych jego punktów; równanie zaś 193-cie wyraża związek pomiędzy przyśpieszeniami tychże punktów.

Zaznaczyć należy, że związki te, wyrażone równaniami 191-szem i 193-ciem nie wynikają z żadnych praw fizycznych, lecz są bezpośrednim wynikiem określenia położenia środka masy, wyrażonego równaniem 190-tem. Równania te otrzymać również można z równania 190-ego, biorąc bezpośrednio pierwszą a następnie drugą jego pochodną.

83. Moment ilości ruchu układu punktów materalnych. Mając na uwadze określenie momentu ilości ruchu punktu materalnego, podane w § 26-tym części 1-ej; damy teraz określenie nast.: sumę wektorową momentów ilości ruchu punktów danego układu względem dowolnie obranego bieguna, nazywamy momentem ilości ruchu danego układu względem tego bieguna. Oznaczmy moment ilości ruchu danego układu literą \bar{M}_v , a wyrazimy powyższe określenie wzorem:

$$\bar{M}_v = \Sigma \mathbf{v} m_k \bar{v}_k \cdot \bar{r}_k \dots \dots \dots (194)$$

W tenże sposób, w jaki określiliśmy moment ilości ruchu względem bieguna, określimy również moment względem osi, stosując do tego określenie, dane w teorii momentów sił (§ 165 tomu I-ego); w tym celu należy tylko wektorowi siły nadać znaczenie wektora ilości ruchu; mając to na uwadze, wypowiemy określenie: momentem ilości ruchu układu punktów materalnych względem osi nazywamy sumę momentów rzutów wektorów ich ilości ruchu na płaszczyznę, prostopadłą do osi, względem bieguna, obranego w przecięciu się danej osi z tą płaszczyzną.

Z twierdzenia, podanego w § 128 T. I-ego wynika, że moment ilości ruchu względem osi równa się rzutowi na nią wektora momentu ilości ruchu względem dowolnie obranego bieguna na tejże osi.

84. Energia kinetyczna układu punktów meryalnych. Mając na uwadze określenie energii kinetycznej punktu meryalnego, podane w § 184-tym tomu I-szego, damy nast. określenie: Sumę algebraiczną energii kinetycznych wszystkich punktów danego układu nazywamy jego energią kinetyczną.

Oznaczywszy literami m_k i v_k masę i prędkość k -tego punktu danego układu, a literą T jego energię kinetyczną; wyrazimy powyższe określenie wzorem algebraicznym:

$$T = \Sigma (\frac{1}{2} m_k v_k^2); \dots \dots \dots (195)$$

lub też wzorem wektorowym:

$$T = \Sigma (\frac{1}{2} m_k \overline{v_k}^2);$$

w którym druga potęga wektora prędkości oznacza mnożenie skalarne i zastępuje iloczyn $\overline{v_k} \cdot \overline{v_k}$ (§ 191-szy tomu I-szego).

2. Równania dynamiczne układu punktów meryalnych.

85. Siły wewnętrzne. Układem zmiennym punktów nazwaliśmy zbiór punktów meryalnych, pomiędzy którymi odległości się zmieniają. W szczególnym przypadku takiego układu, gdy zmiana ta wywołana jest siłami, występującymi pomiędzy oddzielnymi punktami, to układ taki nazwaliśmy układem zmiennym punktów zależnych i nazywać go będziemy krótko układem punktów meryalnych; a siły, które działają pomiędzy punktami, nazwiemy siłami wewnętrznymi.

Magnes np. i kawałek żelaza mogą być uważane za układ dwóch punktów meryalnych, pomiędzy którymi występują siły wewnętrzne; układ ten przytem podlegać jeszcze może siłom zewnętrznym, np. sile ciężenia ziemskiego.

Różnica pomiędzy siłami wewnętrznymi a zewnętrznymi jest względną; istotnej różnicy niema, jedna i ta sama bowiem siła może być w pewnych warunkach uważaną za wewnętrzną, w innych zaś za zewnętrzną. Prężność np. pary w cylindrze parowym należy uważać za siłę wewnętrzną, gdy bierzemy pod uwagę tłok i cylinder jako jeden układ, złożony z dwóch brył; należy zaś uważać ją za siłę zewnętrzną, gdy rozpatrujemy ruch tylko tłoka, wywołany tą prężnością.

86. Prawo wzajemnego działania. Spostrzeżenia i pomiary ruchów brył meryalnych doprowadziły Newtona do stwierdzenia t. zw. prawa wzajemnego działania. Prawo to oparte jest na tem spostrzeżeniu, że żadna bryła meryalna nie zmieni stanu swego ruchu, ażeby inna bryła meryalna nie zmieniła jednocześnie także swego ruchu. Jeżeli tłok np. cylindra parowego wykonywa pewien ruch, to jednocześnie cylinder wraz ze sztywno z nim połączonymi bryłami, a więc ewentualnie i z ziemią wykonywa także ruch (względem przestrzeni kinetycznej), — ruch przeciwny ruchowi tłoka. Zjawisko to możnaby stwierdzić doświadczalnie, zawiesiwszy np. lokomotywę na łańcuchach; wtedy bowiem zobaczylibyśmy, po puszczeniu pary do cylindrów, że podczas poruszania się tłoków, porusza się i cały korpus lokomotywy. Jeżeli dwie takie bryły wyobrazimy sobie w postaci

punktów materyalnych, to zmiany ich prędkości dają się wyrazić wzorem matematycznym, stwierdzonym drogą pośrednich lub bezpośrednich pomiarów; wzór ten jest nast.:

$$m_1 \frac{d\bar{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\bar{v}_2}{dt} = 0 \dots \dots \dots (196)$$

w którym m_1 i m_2 oznaczają pewne współczynniki, odnoszące się do poruszających się punktów materyalnych. Zmierzywszy doświadczalnie przyspieszenie dwóch takich brył, obliczyć można stosunek współczynników m_1 i m_2 , a z zestawienia takich współczynników dla różnych brył przekonamy się, że liczbowe ich wartości są te same, które znaleźć można drogą innych doświadczeń, wskazanych w § 1-szym części 1-ej tego tomu; liczby te nazwalibyśmy tam masami danych brył. Zjawisko przeto wzajemnego działania brył materyalnych daje możność obliczenia stosunku wartości mas różnych brył, i odwrotnie, daje możność obliczenia stosunku ich przyspieszeń, jeżeli ich masy są już określone z innych doświadczeń.

Mając na uwadze określenie siły, jako iloczynu z masy i z przyśpieszenia, prawo wzajemnego działania wypowiedzieć można w następujący sposób: siły wewnętrzne, występujące pomiędzy dwoma materyalnymi punktami danego układu, występują wzdłuż prostych łączących te punkty; są wzajemnie równe, a zwroty posiadają przeciwne.

Gdy scałkujemy rów. 196-te, wtedy otrzymamy równanie:

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = \text{stałej wielkości.}$$

Stałą wielkość obliczymy z początkowych warunków ruchu; jeżeli np. obydwie punkty były w początku ruchu w spoczynku (np. armata i pocisk), to równanie powyższe otrzyma postać:

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = 0.$$

W równanie to wchodzi wyrazy prędkości, które łatwo wymierzyć z doświadczeń; równanie powyższe przeto stosowane być może do obliczeń mas, jeżeli zmierzmy ich prędkości; jeżeli zaś wielkości mas są już obliczone inną drogą i prędkości są znane, to służyć one mogą do sprawdzenia doświadczalnie słuszności prawa wzajemnego działania.

Ażeby wyrazić prawo wzajemnego działania równaniami, należy wyrazić, że nie tylko suma dwóch takich sił, występujących pomiędzy dwoma punktami równa się zeru, jakśmy to wyrazili równaniem 196-tem, lecz i że suma ich momentów równa się zeru. Sama bowiem suma dwóch sił, przyrównana do zera, nie wyraża jeszcze, że te siły działają wzdłuż jednej i tej samej prostej, a dopiero równanie tej sumy łącznie z równaniem sumy momentów tych sił wyraża jednoznacznie prawo wzajemnego działania.

Jeżeli oznaczymy numery porządkowe dwóch punktów danego układu, literą i oraz literą k ; to prawo wzajemnego działania wyrazimy dwoma równaniami wektorowemi:

$$\bar{W}_{i,k} + \bar{W}_{k,i} = 0; \text{ oraz} \dots \dots \dots (197)$$

$$Mom (W_{i,k}) + Mom (W_{k,i}) = 0; \dots \dots \dots (198)$$

względem dowolnie obranego bieguna.

87. Równania dynamiczne. Równaniami dynamicznymi ruchu punktów materyalnych nazywamy równania, wykazujące związek pomiędzy siłami, działającymi na dany układ punktów, a ruchami jego punktów, wywołanymi temi siła-

mi. W dynamice punktu równaniem takim było równanie dynamiczne siły w postaci:

$$\bar{P} = \frac{d(m\bar{v})}{dt}.$$

W celu wyprowadzenia twierdzeń dynamiki układu punktów z twierdzeń dynamiki punktu pojedynczego, przyjmujemy:

1) że każdy punkt danego układu podlega prawu bezwładności, wskutek czego ruch jego obliczymy ze wzoru:

$$\bar{R}_k = \frac{d(m_k \bar{v}_k)}{dt};$$

w którym \bar{R}_k oznacza wypadkową wszystkich sił tak wewnętrznych jak i zewnętrznych, działających na dany punkt i wywołujących przyspieszenie $\frac{d\bar{v}_k}{dt}$; a litery m_k i \bar{v}_k oznaczają jego masę i prędkość;

2) że pomiędzy tymi punktami występują siły, podlegające prawu wzajemnego działania, których właściwości wyrażają równania 197-me i 198-me.

88. Równanie dynamiczne ruchu środka masy układu punktów.

Na podstawie powyższego można uważać, że na każdy punkt danego układu punktów materialnych działają wogóle: siły zewnętrzne oraz siły wewnętrzne, pochodzące od innych punktów danego układu. Oznaczmy, jakieśmy to już uczynili w statyce w § 118-tym tomu I-go, literą \bar{P}_k siłę zewnętrzną, przyłożoną do k -tego punktu danego układu lub ich wypadkową, jeżeli kilka sił na niego działa; a literą $\bar{W}_{k,i}$ siłę wewnętrzną, jaka pochodzi od i -tego punktu i działa na punkt k -ty, to równanie dynamiczne ruchu k -tego punktu, w myśl określenia siły jest następujące:

$$\bar{P}_k + \sum \bar{W}_{k,i} = \frac{d(m_k \bar{v}_k)}{dt}; \quad \dots \dots \dots (199)$$

gdzie i oznacza cyfry kolejne 1, 2, 3... n ; jeżeli n oznacza ilość wszystkich punktów danego układu. Ażeby wyrugować z rachunku siły wewnętrzne, napiszemy dla każdego punktu takie równanie, jakieśmy to czynili w statyce i zważywszy, że siły wewnętrzne na zasadzie prawa wzajemnego działania wzajemnie się znoszą, t. j. ziąwszy pod uwagę rów. 197-me, otrzymamy po dodaniu tych równań, równanie wolne od sił wewnętrznych w następującej postaci:

$$\sum \bar{P}_k = \frac{\sum d(m_k \bar{v}_k)}{dt};$$

lub też w postaci:

$$\sum \bar{P}_k = \frac{d \sum (m_k \bar{v}_k)}{dt};$$

a wzięwszy pod uwagę równ. 191-sze; otrzymamy równanie:

$$\sum \bar{P}_k = \frac{d(m \bar{v}_s)}{dt}; \quad \dots \dots \dots (200)$$

Równanie to, które co do swej postaci, jest jednakowe z równaniem dynamicznym punktu pojedynczego wypowiedzieć można w następujący sposób:

środek masy każdego układu punktów materialnych, pomiędzy którymi występują siły wewnętrzne, porusza się jak punkt swobodny, którego masa równa się sumie mas wszystkich punktów danego układu, i na który działają siły równe i równoległe do sił, przyłożonych do oddzielnych punktów danego układu.

Takie pojmowanie równania 200-nego nadaje pojęciu punktu o masie skończonej i dynamice takiego punktu pewnej rzeczywistości.

Równanie 200-tne daje związek pomiędzy siłami zewnętrznymi, działającymi na dany układ, a zmianą prędkości jego środka masy, t. j. daje możliwość obliczenia ruchu środka masy danego układu, gdy dane są siły, działające na dany układ i warunki ruchu początkowego; ruchu jednakże oddzielnych punktów danego układu z równania tego nieobliczymy. W szczególnym przypadku, gdy

$$\Sigma \bar{P}_k = 0;$$

wtedy po scałkowaniu rów. 200-go, mamy:

$$\Sigma (m_k \bar{v}_k) = 0 \dots \dots \dots (201)$$

przyjmując, że suma ilości ruchu danego układu w początku ruchu była równa zeru. Jeżeli np. mamy zbiór punktów materialnych, na które nie działają siły zewnętrzne, które jednakże wzajemnie się przyciągają lub odpychają podług jakichbądź praw i jeżeli w pewnej chwili punkty te były w spoczynku, to wskutek działania sił wewnętrznych otrzymują one w każdej chwili takie prędkości, że suma wektorowa ich ilości ruchu utworzy wielobok zamknięty; lub też, mając na uwadze rów. 200-tne, wyrazimy to zjawisko nieco inaczej: ruch punktów takiego układu będzie taki, że środek jego masy (jako punkt geometryczny), będzie pozostawał w spoczynku.

Przykładem takiego układu punktów służyć może bomba, rozpękająca się wskutek sił wewnętrznych na części, które przyjmiemy za punkty materialne o różnych masach i różnych prędkościach. Jeżeli bomba w chwili wybuchu pozostawała w spoczynku, to ruch jej części w chwili wybuchu będzie taki, że suma ich ilości ruchu uczyni zadość równaniu 201-szemu.

Przebieg takiego ruchu wystawić możemy w następujący sposób: jeżeli na dany układ punktów materialnych nie działają siły zewnętrzne, a tylko wewnętrzne, to ilość ruchu danego układu podczas ruchu punktów zostaje zachowaną; lub inaczej,— to ilość ruchu środka masy tego układu zostaje zachowaną.

89. Równania dynamiczne momentów. W celu zupełnego wyrażenia właściwości wzajemnego działania sił wewnętrznych, jakie występują w układach punktów materialnych; należy jeszcze zastosować do obliczenia ruchu punktów każdego układu równanie momentów sił wewnętrznych, t. j. równ. 198-me. W tym celu weźmiemy pod uwagę równanie 199-te, które wyraża, że suma sił zewnętrznych i suma sił wewnętrznych, działających na k -ty punkt danego układu, równa się wektorowi $m_k \bar{p}_k$, który w ten sposób jest wektorem wypadkowym tych sił, a ponieważ wszystkie te wektory przecinają się w jednym punkcie, to możemy do nich zastosować twierdzenie, § 108-my tomu I-go, że suma momentów względem dowolnie obranego bieguna wektorów składowych równa się momentowi wektora wypadkowego, suma przeto momentów sił zewnętrznych i wewnętrznych względem dowolnie obranego bieguna równa się momentowi wektora $m_k \bar{p}_k$. Wniosek ten wyrazimy równaniem:

$$\mathbf{V} \overline{P}_k \cdot \overline{r}_k + \Sigma \mathbf{V} \overline{W}_{k,i} \cdot \overline{r}_k = \mathbf{V} m_k \overline{p}_k \cdot \overline{r}_k;$$

gdzie

$$i = 1, 2, 3 \dots n.$$

Jeżeli zestawimy takie równania dla każdego punktu danego układu i dodamy te równania, to otrzymamy równanie

$$\Sigma \mathbf{V} \overline{P}_k \cdot \overline{r}_k = \Sigma \mathbf{V} m_k \overline{p}_k \cdot \overline{r}_k; \dots \dots \dots (202)$$

momenty bowiem sił wewnętrznych, występujących pomiędzy dwoma punktami, parami się znoszą, jak to wyraża równanie 198-me.

Wniosek ten wysłowimy w następujący sposób: suma momentów sił, działających na pewien układ punktów materialnych, względem dowolnie obranego bieguna, równa się sumie momentów wektorów, z których każdy jest m_k -krotnym wektorem przyspieszenia każdego punktu.

Wzór 202-gi wyrazimy jeszcze w innej postaci, która bywa nieraz przydatniejszą do rozpatrywania ruchu punktów, można ją bowiem łatwiej unaocznic sobie geometrycznie. W tym celu zastosujemy do obliczenia ruchu punktu pojęcie momentu jego ilości ruchu, któreśmy już stosowali w dynamice punktu; w § 27-mym w równ. 76-tem tego tomu.

Jeżeli literami $\overline{M}_{v,k}$ oznaczymy, jakieśmy to już uczynili w § 27-ym, moment ilości ruchu k -tego punktu, względem dowolnie obranego bieguna, to zgodnie z równaniem 76-tem napiszemy dla każdego punktu danego układu równanie dynamiczne postaci następującej:

$$\mathbf{V} \overline{P}_k \cdot \overline{r}_k + \Sigma \mathbf{V} \overline{W}_k \cdot \overline{r}_{k,i} = \frac{d \overline{M}_{v,k}}{dt};$$

a po dodaniu ich otrzymamy:

$$\Sigma \mathbf{V} \overline{P}_k \cdot \overline{r}_k = \frac{d \overline{M}_v}{dt} \dots \dots \dots (203)$$

gdzie \overline{M}_v oznacza wektor momentu ilości ruchu całego układu, określony w § 83-cim. W celu geometrycznego unaocznienia sobie tego równania, można skorzystać z rys. 19-tego tego tomu. Równanie 203-cie napisać również można w innej postaci,—w postaci szczegółowej, stosując do tego określenie momentu ilości ruchu, wyrażone równaniem 194-tem tego tomu; równanie to jest nast.:

$$\Sigma \mathbf{V} \overline{P}_k \cdot \overline{r}_k = \frac{d}{dt} \Sigma \mathbf{V} m_k \overline{v}_k \cdot \overline{r}_k \dots \dots \dots (204)$$

Zwrócić tu należy uwagę, że wzory 202-gi, 203-ci i 204-ty, chociaż różnią się swą postacią, są jednakowe, wyrażają bowiem jedną i tę samą właściwość układu punktów, że suma momentów sił wewnętrznych równa się zeru. Z postaci wzoru 203-ciego wynika, że związek pomiędzy wektorem momentu wypadkowego sił zewnętrznych względem dowolnego bieguna i wektorem momentu względem tegoż bieguna ilości ruchu danego układu punktów, jest taki sam, jaki istnieje dla pojedynczego punktu, równ. 76-te. Związek ten jest również taki sam, jaki istnieje dla siły, działającej na pewien punkt i jego ilością ruchu, gdy wektor siły i wektor ilości ruchu przyjmiemy za wektor momentu sił i za wektor momentu ilości ruchu. Wystowienie przeto tego równania zechce czytelnik powtórzyć z § 27-go tego tomu.

W szczególnym przypadku, jeżeli względem pewnego bieguna:

$$\Sigma \overline{M}_{P,k} = 0; \text{ to } \frac{d\overline{M}_v}{dt} = 0;$$

t. j. jeżeli suma momentów sił zewnętrznych względem pewnego bieguna równa się zeru, to wektor momentu ilości ruchu tego układu względem tegoż bieguna jest podczas ruchu punktów wektorem stałym. Jeżeli przytem jeszcze zachodzi warunek, że i

$$\Sigma \overline{F}_k = 0; \text{ to również: } \frac{d(m\overline{v}_s)}{dt} = 0;$$

t. j. środek masy danego układu w tych warunkach pozostaje w spoczynku lub w ruchu jednostajnym i prostoliniowym. Z tego jednakże nie należy wnioskować, ażeby punkty takiego układu pozostawały w spoczynku, mogą one bowiem się poruszać, lecz tylko w ten sposób, że środek ich masy pozostawać będzie w spoczynku lub w ruchu prostoliniowym i jednostajnym z prędkością taką, jaką posiadał ten środek na początku ruchu; i że suma momentów ilości ruchu tych punktów będzie wektorem stałym i nieruchomym w przestrzeni, równym momentowi ilości ruchu początkowego.

Równanie 200-tne i równanie 204-te, chociaż dają pewne właściwości ruchów oddzielnych punktów danego układu, nie wystarczają jednakże do obliczenia ich ruchu; do tego bowiem należy znać siły wewnętrzne, które wywołują ruchy oddzielnych punktów. Równaniem, w które wchodzi wielkości sił wewnętrznych jest równanie równowartości pracy i energii kinetycznej, które obecnie wyprowadzimy.

90. Równanie dynamiczne równowartości pracy i energii kinetycznej. Na str. 240-tej tomu I-ego dowiedliśmy twierdzenie, że praca cząstkowa wszystkich sił, przyłożonych do punktu materialnego, równa się przyrostowi energii kinetycznej tegoż punktu. Praca przeto cząstkowa sił zewnętrznych i suma prac cząstkowych sił wewnętrznych, działających np. na k -ty punkt danego układu, równa się przyrostowi jego energii kinetycznej; twierdzenie to wyrazimy wzorem:

$$dL_{P,k} + \Sigma dL_{W,k,i} = d(\frac{1}{2} m_k v_k^2);$$

gdzie $i = 1, 2 \dots n$; a $dL_{W,k,i}$ oznacza pracę cząstkową siły $W_{k,i}$, przyłożonej do k -tego punktu.

Napiszmy dla każdego punktu danego układu takie równanie i dodajmy je, a otrzymamy:

$$\Sigma dL_{P,k} + \Sigma \Sigma dL_{W,k,i} = d \Sigma (\frac{1}{2} m_k v_k^2); \dots \dots \dots (205)$$

gdzie k oraz i równają się kolejno: $1, 2, 3 \dots n$; a podwójny znak sumy oznacza, że należy najpierw sumować wartości prac, przyjmując wielkość i zmienną, przy stałej wielkości k ; a następnie—zmieniając wielkość k .

Pierwszy wyraz równania 205-tego można obliczyć, jeżeli są znane siły zewnętrzne i przesunięcia punktów, do których są one przyłożone. Drugi wyraz przedstawia sumę pracę wszystkich sił wewnętrznych, jakie występują pomiędzy punktami. W sumie tej znajdują się parami prace sił, występujących wzdłuż prostych, łączących dwa punkty danego układu; pytanie przeto powstaje; czy suma prac takich dwóch sił równa się zeru, jak to było z ich momentami; czy też posiadają pewne skończone wartości. Na str. 278-iej tomu I-go wykazaliśmy, że jeżeli odległości pomiędzy punktami

podczas działania sił nie zmieniają się, to suma wartości prac dwóch takich sił równa się zeru; lecz w układach zmiennych, które w tym dziale rozpatrujemy, odległości te zmieniają się, praca przeto dwóch sił, występujących pomiędzy punktami np. k -tym, a i -tym posiada wogóle pewną wartość, którą wyrazimy wzorem wektorowym:

$$\overline{W}_{k,i} \cdot d\overline{r}_{k,i}; \dots \dots \dots (206)$$

gdzie $d\overline{r}_{k,i}$ oznacza przyrost wektorowy odległości pomiędzy tymi punktami. Równanie przeto 205-te napiszemy w ogólnej postaci:

$$dL_P + dL_W = d\Sigma(\frac{1}{2}m_k v_k^2) \dots \dots \dots (207)$$

i wypowiemy je:

praca cząstkowa sił zewnętrznych, działających na punkty pewnego układu, łącznie z pracą sił wewnętrznych, występujących pomiędzy tymi punktami, równa się przyrostowi energii kinetycznej danego układu.

Jeżeli siły działają pewien skończony okres czasu, to wartość pracy sił zewnętrznych i wewnętrznych, jak również wartość przyrostu energii kinetycznej posiada wogóle wartości skończone; twierdzenie powyższe wypowiemy w tym razie w następujący sposób: praca sił zewnętrznych łącznie z pracą sił wewnętrznych równa się przyrostowi energii kinetycznej danego układu.

Jeżeli oznaczymy początek i koniec okresu działania sił literami t_0 i t ; a prędkości k -tego punktu w tych chwilach literami $v_{k,0}$ i v_k ; to wyrazimy to twierdzenie wzorem:

$$L_P \Big|_{t_0}^t + L_W \Big|_{t_0}^t = \Sigma(\frac{1}{2}m_k v_k^2) - \Sigma(\frac{1}{2}m_k v_{k,0}^2) \dots \dots \dots (208)$$

w którym L_P i L_W oznaczają sumy prac sił zewnętrznych i wewnętrznych, wykonanych przez te siły w okresie czasu $(t - t_0)$.

91. Zastosowanie metody d'Alembert'a do obliczenia równań dynamicznych. Metoda ta, którą wyłożyliśmy w 1-szej części tego tomu na str. 158-iej, dla ruchu jednego punktu, polega na tem, że do punktu materialnego, będącego w ruchu zmiennym, wyobrażamy sobie przyłożoną pewną siłę, zwaną siłą bezwładności i określoną wzorem:

$$\overline{B} = (-m\overline{p}),$$

która równoważy siły, działające na dany punkt, — tak zewnętrzne jak i wewnętrzne. Jeżeli przeto wyobrażymy sobie do każdego punktu danego układu przyłożoną taką siłę, to wszystkie te punkty pozostaną w spoczynku, lub w ruchu jednostajnym i prostoliniowym. W ten sposób na każdy punkt danego układu działać będą wogóle następujące siły: siły zewnętrzne, siły wewnętrzne i siły bezwładności, wyżej określone; a punkty danego układu znajdować się będą w równowadze. Ponieważ siły wewnętrzne, występujące pomiędzy punktami danego układu, wzajemnie się równoważą, przeto dojdziemy do wniosku: siły zewnętrzne i siły bezwładności punktów danego układu pozostają w każdej chwili w równowadze. Warunki tej równowagi wyrazić można wszystkimi znanymi sposobami. Jeżeli wyrazimy je np. sumą sił i sumą

ich momentów; porówn. wzory 88-te na str. 154-tej tomu I-go, to otrzymamy następujące równania:

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{P}_k + \Sigma \bar{B}_k &= 0; \\ \Sigma \bar{M}_{P,k} + \Sigma \bar{M}_{B,k} &= 0; \end{aligned} \quad (209)$$

w których wektory $\bar{M}_{B,k}$ oznaczają wektory momentów sił bezwładności, względem dowolnie obranego bieguna.

Wyrazimy obecnie sumę sił bezwładności i sumę ich momentów przyśpieszeniami punktów, do których wyobrażamy sobie te siły przyłożonemi. Z określenia siły bezwładności wynika, że

$$\bar{B}_k = \Sigma (-m_k \bar{p}_k);$$

a na zasadzie wzoru 193-go wyrazimy tę sumę wzorem:

$$\bar{B}_k = (-m \bar{p}_s); \quad (210)$$

który wysłowimy: suma sił bezwładności punktów danego układu równa się sile bezwładności środka jego masy, gdy w tym środku wyobrażymy sobie skupione masy wszystkich punktów.

Przekształćmy następnie w podobny sposób sumę momentów sił bezwładności. Moment siły bezwładności k -tego punktu wyrazić możemy wzorem 179-tym tego tomu:

$$\bar{M}_{B,k} = \left(-\frac{d}{dt} \mathbf{V} m_k \bar{v}_k \cdot \bar{r}_k \right);$$

a po zestawieniu takich wzorów dla każdego punktu i po dodaniu ich otrzymamy równanie:

$$\Sigma \bar{M}_{B,k} = -\frac{d}{dt} \Sigma \mathbf{V} m_k \bar{v}_k \cdot \bar{r}_k.$$

Wziąwszy następnie pod uwagę określenie ilości ruchu układu, napiszemy ten wzór w postaci:

$$\Sigma \bar{M}_{B,k} = -\frac{d\bar{M}_v}{dt} \quad (211)$$

Równanie to wysłowimy; suma momentów sił bezwładności danego układu punktów równa się pochodnej względem czasu z odwrotnym znakiem wektora momentu ilości ruchu tegoż układu.

Po zastąpieniu następnie w równaniach 209-tych sum sił bezwładności i ich momentów wzorami 210-tych i 211-tych, otrzymamy równanie dynamiczne 200-tne i 203-cie.

Zastosujmy wreszcie do wyrażenia równowagi sił, przyłożonych do oddzielnych punktów, zasadę pracy wyobrażalnej. W tym celu zastosujemy równ. 180-te, tego tomu, podane na str. 160-tej, wyrażające pracę siły bezwładności wielkościami kinetycznemi, a otrzymamy równanie 207-me tego tomu, t. j. równanie równowartości pracy sił zewnętrznych i sił wewnętrznych z jednej strony i energii kinetycznej z drugiej strony.

Metoda d'Alembert'a przeto nie daje nowych równań dynamicznych, lecz jedynie, nadając wyrazom kinetycznym znaczenia statyczne, pozwala sprowadzić zadania z dynamiki do zadań ze statyki; co nieraz ułatwia zestawienie równań ruchu, lub też unaocznia działanie sił bezwładności, powstających podczas ruchu punktów.

3. Kinytyka ruchu względnego.

92. Określenie ruchu względnego względem środka masy. W wielu razach dla uproszczenia rachunku lub dla unaocznienia sobie ruchu punktów danego układu przyjmujemy, że prędkość każdego punktu danego układu składa się z dwóch prędkości: z prędkości równej prędkości \bar{v}_s , jaką posiada w danej chwili środek masy całego układu i z prędkości \bar{v}'_k , określonej ze wzoru:

$$\bar{v}_k = \bar{v}_s + \bar{v}'_k \quad \dots \dots \dots (212)$$

W celu unaocznienia sobie prędkości \bar{v}'_k , wyobrazimy sobie całą przestrzeń, razem ze znajdującymi się w niej punktami, w ruchu postępowym z prędkością \bar{v}_s ; prędkość wtedy względna punktów danego układu względem tej przestrzeni wyrazimy wektorem \bar{v}'_k , określonym wzorem powyższym; dlatego też prędkość \bar{v}_s uważać będziemy jako prędkość unoszącą, a prędkość \bar{v}'_k jako względną, względem przestrzeni, poruszającej się ruchem postępowym z prędkością środka masy. Zobaczymy z następujących przykładów, że łatwiej nieraz obliczyć kolejno wielkości \bar{v}_s i \bar{v}'_k , i następnie obliczyć prędkości właściwe; niż obliczyć bezpośrednio prędkości rzeczywiste; porówn. treść zakończenia § 78-ego tomu I-ego.

Słuszne będzie mniemanie, że każdy ruch można rozłożyć na najrozmaitsze ruchy składowe; a obliczywszy każdy z nich, można wytworzyć sobie całokształt ruchu rzeczywistego; i rzeczywiście rozkłady takie bywają stosowane; przytoczony tu jednak rozkład znajduje najczęściej zastosowanie w naszych przykładach.

93. Ilość ruchu względnego układu punktów materialnych. Na zasadzie określenia ruchu względnego wyrazimy ilość ruchu k -tego punktu wzorem:

$$m_k \bar{v}_k = m_k \bar{v}_s + m_k \bar{v}'_k; \quad \dots \dots \dots (213)$$

a ilość ruchu całego układu wzorem:

$$\Sigma (m_k \bar{v}_k) = m \bar{v}_s + \Sigma (m_k \bar{v}'_k); \quad \dots \dots \dots (214)$$

a ponieważ na zasadzie równ. 191-szego $\Sigma (m_k \bar{v}_k) = m \bar{v}_s$, przeto

$$\Sigma (m_k \bar{v}'_k) = 0; \quad \dots \dots \dots (215)$$

Jeżeli sumę tę nazwiemy ilością ruchu względnego danego układu, to wynik ten wysłowimy: ilość ruchu względnego każdego układu punktów materialnych równa się w każdej chwili zeru. Wynik ten oczywiście stosuje się tylko do przypadku, w którym przestrzeń, względem której odnosimy ruch względny, jest w ruchu postępowym z prędkością, jaką posiada w danej chwili środek masy danego układu.

94. Moment ilości ruchu względnego. Momentem ilości ruchu względnego danego układu punktów materialnych nazwiemy sumę momentów ilości ruchu względnego oddzielnych jego punktów względem obranego bieguna.

Określenie to wyrazimy wzorem

$$\bar{M}'_v = \Sigma \mathbf{V} m_k \bar{v}'_k \cdot \bar{r}_k,$$

w którym \bar{M}'_v oznacza moment ilości ruchu względnego; \bar{r}_k — promień wodzący, wyprowadzony z dowolnego bieguna do k -tego punktu; \bar{v}'_k — prędkość względną, wyżej określoną.

Z określenia tego momentu wynika następująca jego właściwość. Ponieważ, stosownie do równania 215 go, $\Sigma (m_k \bar{v}'_k) = 0$, przeto układ wektorów $m_k \bar{v}'_k$ daje się prze-

kształcić wogóle na parę wektorów w taki sam sposób, w jaki przekształciliśmy układ wektorów sił, których $\Sigma \bar{P}_k = 0$, — na parę sił. W § 113-tym tomu I-go dowiedliśmy, że wielkość momentu pary sił nie zależy od położenia bieguna; dla danego przeto przypadku wypowiemy to twierdzenie w sposób następujący: **moment ilości ruchu względnego każdego układu punktów materialnych jest wielkością stałą, względem każdego bieguna, obranego w przestrzeni.**

Znajdźmy teraz związek pomiędzy momentem ilości ruchu rzeczywistego, a momentem ilości ruchu względnego, względem jednego i tego samego bieguna.

Ponieważ ilość ruchu każdego punktu składa się z dwóch wektorów, rów. 213-te, moment przeto ilości ruchu każdego punktu wyrazić można sumą momentów jego wektorów składowych; moment przeto ilości ruchu całego układu wyrazić można sumą momentów wektorów $m_k \bar{v}_s$ i sumą momentów $m_k \bar{v}'_k$, — ilości ruchu względnego wszystkich punktów danego układu.

Wektory $(m_k \bar{v}_s)$ są wzajemnie równoległe, suma przeto ich momentów równa się momentowi ich wypadkowej, która, podobnie jak wypadkowa sił równoległych, t. j. wogóle, jak wypadkowa wzajemnie równoległych wektorów, proporcjonalnych do mas, — posiada punkt przyłożenia w środku masy i równa się wyrazowi $m \bar{v}_s$; — moment przeto tej wypadkowej wyrazimy wzorem wektorowym

$$\mathbf{V} m \bar{v}_s \cdot \bar{r}_s;$$

w którym \bar{r}_s oznacza promień wodzący, wyprowadzony z obranego bieguna do środka masy danego układu.

Ponieważ moment ilości ruchu względnego nie zależy od położenia obranego bieguna, obierzemy go przeto w środku masy danego układu i wyrazimy ten moment wzorem:

$$\Sigma \mathbf{V} m_k \bar{v}'_k \cdot \bar{r}'_k,$$

w którym litery \bar{r}'_k oznaczają promienie wodzące, wyprowadzone ze środka masy do punktów danego układu. Moment przeto ilości ruchu danego układu punktów materialnych, względem dowolnie obranego bieguna, wyrazić można wzorem:

$$\Sigma \mathbf{V} m_k \bar{v}_k \cdot \bar{r}_k = \mathbf{V} m \bar{v}_s \cdot \bar{r}_s + \Sigma \mathbf{V} m_k \bar{v}'_k \cdot \bar{r}'_k \quad (216)$$

który wysłowimy: **wektor momentu ilości ruchu danego układu punktów materialnych względem dowolnego bieguna, można wyrazić sumą dwóch wektorów: wektora momentu ilości ruchu środka masy tego układu względem obranego bieguna i wektora momentu ilości ruchu względnego względem bieguna, obranego w środku masy.**

W szczególnym przypadku, gdy obierzemy biegun momentów w środku masy układu, wtedy moment ilości ruchu rzeczywistego względem bieguna, obranego w środku masy, równa się momentowi ilości ruchu względnego względem tegoż bieguna; moment bowiem ilości ruchu środka masy względem bieguna, obranego w tym środku, równa się zeru. Twierdzenie to wyrazimy wzorem:

$$\Sigma \mathbf{V} m_k \bar{v}_k \cdot \bar{r}'_k = \Sigma \mathbf{V} m_k \bar{v}'_k \cdot \bar{r}'_k \quad (217)$$

Wzór ten otrzymamy również bezpośrednio z równania 216-tego po podstawieniu w nie:

$$r_s = 0.$$

Równanie to wyrazimy: **moment ilości ruchu rzeczywistego względem bieguna, obranego w środku masy, równa się momentowi ruchu względnego względem tegoż bieguna.**

95. Obliczenie analityczno-wektorowe. Równanie 216-te wyprowadzimy jeszcze drogą analityczno-wektorową. W tym celu podstawimy w równanie 194-te, zgodnie z danymi określeniami:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_s + \vec{r}'_k, \text{ oraz } \vec{v}_k = \vec{v}_s + \vec{v}'_k; \dots \dots \dots (218)$$

a otrzymamy równanie:

$$\Sigma \mathbf{V} m_k \vec{v}_k \cdot \vec{r}_k = \Sigma \mathbf{V} m_k (\vec{v}_s + \vec{v}'_k) \cdot (\vec{r}_s + \vec{r}'_k),$$

które po wykonaniu mnożenia wektorowego według prawidła, wyrażonego wzorem 82-gim na str. 144-ej T. I-ego, przekształci się na następujące:

$$\Sigma \mathbf{V} m_k \vec{v}_k \cdot \vec{r}_k = \Sigma \mathbf{V} m_k \vec{v}_s \cdot \vec{r}_s + \Sigma \mathbf{V} m_k \vec{v}_s \cdot \vec{r}'_k + \Sigma \mathbf{V} m_k \vec{v}'_k \cdot \vec{r}_s + \Sigma \mathbf{V} m_k \vec{v}'_k \cdot \vec{r}'_k$$

a wreszcie na następujące:

$$\Sigma \mathbf{V} m_k \vec{v}_k \cdot \vec{r}_k = \mathbf{V} m \vec{v}_s \cdot \vec{r}_s + \Sigma \mathbf{V} m_k \vec{v}'_k \cdot \vec{r}'_k; \dots \dots \dots (219)$$

drugi i trzeci bowiem wyraz, znajdujący się po stronie prawej poprzedniego równania, równa się zeru, gdyż

$$\Sigma \mathbf{V} m_k \vec{v}_s \cdot \vec{r}'_k = \mathbf{V} \vec{v}_s \cdot (\Sigma m_k \vec{r}'_k);$$

a że

$$\Sigma m_k \vec{r}'_k = 0,$$

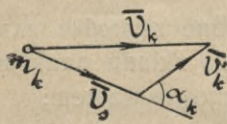
cały przeto wyraz równa się zeru; w tenże sposób wykazać można, że i trzeci wyraz równa się zeru.

96. Energia kinetyczna ruchu względnego. Energię kinetyczną ruchu względnego danego układu punktów materialnych oznaczmy literą T' i określmy ją wzorem:

$$T' = \Sigma (\frac{1}{2} m_k v_k'^2); \dots \dots \dots (220)$$

w którym litery v_k' oznaczają prędkości względne, określone wzorem 212-tym.

Obliczymy teraz związek, jaki zachodzi pomiędzy wyrazem energii kinetycznej ruchu rzeczywistego a wyrazem energii kinetycznej ruchu względnego.



Rys. 57.

Wektory wzoru 212-go tworzą trójkąt, rys. 31-szy, z którego odczytamy, że

$$v_k^2 = v_s^2 + v_k'^2 + 2 v_s \cdot v_k' \cdot \cos \alpha_k;$$

gdzie α_k oznacza kąt, zawarty pomiędzy kierunkami prędkości v_s i v_k' . Pomnożysz to równanie przez $\frac{1}{2} m_k$ i zestawisz takie równania dla wszystkich punktów, otrzymamy po ich dodaniu:

$$\Sigma (\frac{1}{2} m_k v_k^2) = \Sigma (\frac{1}{2} m_k v_s^2) + \Sigma (\frac{1}{2} m_k v_k'^2) + \Sigma (m_k v_s \cdot v_k' \cdot \cos \alpha_k) \dots \dots (221)$$

W trzecim wyrazie, znajdującym się po prawej stronie tego równania, wyniesiemy przed znak sumy wartość stałą v_s jako wspólny mnożnik i napiszemy ten wyraz w postaci:

$$v_s \cdot \Sigma (m_k v_k' \cdot \cos \alpha_k).$$

Wartość sumy tego wyrazu jest sumą rzutów ilości ruchu względnego punktów tego układu na kierunek prędkości v_s ; a ponieważ suma ilości ruchu względnego, porówn. wzór 215-ty, równa się zeru, przeto i suma ich rzutów równa się zeru; a więc wartość tego wyrazu z równania 221-go znika.

Równanie przeto 221-sze przekształci się na następujące:

$$\Sigma (\frac{1}{2} m_k v_k^2) = \frac{1}{2} m v_s^2 + \Sigma (\frac{1}{2} m_k v_k'^2) \dots \dots \dots (222)$$

Równanie to wyraża szukany związek, który wysłowimy: energja kinetyczna danego układu punktów materyalnych równa się sumie dwóch energii: energii kinetycznej środka masy układu, gdy w tym środku wyobrazimy sobie skupione masy wszystkich punktów danego układu, — i energii kinetycznej ruchu względnego tych punktów.

4. Równania dynamiczne ruchu względnego.

97. Równanie dynamiczne momentów. Równania te mają na celu wyrażenie związków pomiędzy siłami działającymi na dany układ, a ruchem względnym, jaki określiliśmy w § 92-gim; w szczególności zaś mają na celu wyrażenie związków pomiędzy momentem sił zewnętrznych a momentem ilości ruchu względnego, lub też związku pomiędzy pracą tych sił a energią kinetyczną ruchu względnego danego układu punktów.

Równanie dynamiczne momentów, t. j. równania 204-te pozostaje w mocy dla dowolnego bieguna momentów; jeżeli przeto obierzemy go w środku masy danego układu i weźmiemy pod uwagę równ. 217-te, wyrażające, że moment ilości ruchu właściwego względem bieguna, obranego w środku masy, równa się momentowi względem tegoż bieguna ilości ruchu względnego, to napiszemy bezpośrednio szukane równanie:

$$\Sigma \mathbf{V} \bar{P}_k \bar{r}'_k = \frac{d}{dt} \Sigma \mathbf{V} m_k \bar{v}'_k \cdot \bar{r}'_k \quad \dots \quad (223)$$

Z porównania tego równania z równaniem 204-tem wynika, że są one jednakowe tak dla ruchu rzeczywistego, jak i względnego, określonego w § 92-gim, jeżeli biegun momentów obierzemy w środku masy danego układu.

98. Równanie równowartości pracy względnej i energii kinetycznej ruchu względnego. Znajdźmy teraz związek pomiędzy pracą względną siły, a energią kinetyczną ruchu względnego. Energię kinetyczną ruchu względnego określiliśmy wzorem 220-tym; określenie zaś pracy względnej jest następujące: pracą względną danej siły nazywamy iloczyn z siły i z rzutu przesunięcia względnego $d\bar{s}'_k$ na kierunek siły, czyli pracą względną nazwiemy pracę jaką dana siła wykona podczas względnego przesunięcia jej punktu przyłożenia. Określenie to wyrazimy iloczynem skalarnym następującym wzorem:

$$dL'_{P,k} = \bar{P}_k \cdot d\bar{s}'_k; \quad \dots \quad (224)$$

w którym $dL'_{P,k}$ oznacza wartość pracy, nazwanej względną, siły przyłożonej do k -tego punktu, a $d\bar{s}'_k$ przesunięcie względne tegoż punktu.

Obliczmy teraz związek pomiędzy pracą rzeczywistą siły, a pracą względną danej siły. Przesunięcie względne $d\bar{s}'_k$ punktu przyłożenia danej siły równa się różnicy wektorowej przesunięcia właściwego i przesunięcia unoszącego. Rzut przeto przesunięcia względnego na każdą oś a więc i na kierunek siły równa się różnicy algebraicznej rzutu przesunięcia właściwego i unoszącego. Gdy podstawimy tę różnicę w iloczyn, wyrażający pracę względną, t. j. we wzór 224-ty, wtedy otrzyma-

my różnicę dwóch wyrazów, z których jeden jest wartością pracy siły, jaką ona wykonywa podczas właściwego przesunięcia, t. j. jest wartością pracy rzeczywistej; drugi zaś jest iloczynem z siły i z rzutu przesunięcia unoszącego na kierunek tej siły.

Wektorowo wyrazimy to rozumowanie w następujący sposób:

$$d\bar{s}'_k = d\bar{s}_k - d\bar{s}_u;$$

gdzie $d\bar{s}_k$ oznacza przesunięcie rzeczywiste k -tego punktu, a $d\bar{s}_u$ jego przesunięcie unoszące, równe przesunięciu środka masy. Po przemnożeniu tego równania skalarnie przez \bar{P}_k , otrzymamy:

$$\bar{P}_k \cdot d\bar{s}'_k = \bar{P}_k \cdot d\bar{s}_k - \bar{P}_k \cdot d\bar{s}_u.$$

Jeżeli napiszemy takie równanie dla każdego z punktów i następnie dodamy je, to otrzymamy wzór:

$$dL'_P = dL_P - (\Sigma \bar{P}_k) \cdot d\bar{s}_u; \quad \dots \quad (225)$$

który daje związek pomiędzy sumą prac względnych, a sumą prac rzeczywistych sił, przyłożonych do punktów danego układu.

W układach punktów materialnych występują jeszcze siły wewnętrzne, których pracę właściwą obliczymy ze wzoru 206-tego, pracę zaś względną tych sił obliczymy ze wzoru 225-go, gdy wektorom sił działających nadamy znaczenie sił wewnętrznych; a ponieważ suma sił wewnętrznych każdego układu punktów materialnych równa się zeru, przeto drugi wyraz, stojący po prawej stronie tego równania, równa się w tym razie zeru; otrzymamy przeto równanie:

$$dL'_W = dL_W; \quad \dots \quad (226)$$

gdzie dL'_W oznacza pracę względną sił wewnętrznych. Równanie to wysłowimy: praca względna sił wewnętrznych każdego układu punktów materialnych równa się rzeczywistej pracy tych sił.

Sumę przeto względnych prac sił zewnętrznych i wewnętrznych danego układu punktów wyrazimy wzorem:

$$dL'_P + dL'_W = dL_P - (\Sigma \bar{P}_k) \cdot d\bar{s}_u + dL_W.$$

Zastąpimy w tem równaniu, stosownie do równania 207-go, sumę prac sił zewnętrznych i wewnętrznych przyrostem energii kinetycznej całego układu, a otrzymamy równanie następujące:

$$dL'_P + dL'_W = d\Sigma (\frac{1}{2} m_k v_k^2) - (\Sigma P_k) \cdot d\bar{s}_u.$$

Podstawimy następnie

$$(\Sigma \bar{P}_k) \cdot d\bar{s}_u = d(\frac{1}{2} m \bar{v}_s^2);$$

sumę bowiem tych sił wyobrazić sobie można przyłożoną do środka masy układu, w którym wyobrazimy sobie skupione masy wszystkich punktów.

Po tem podstawieniu otrzymamy, wzięwszy przy tem pod uwagę równ. 202-gie,

$$dL'_P + dL'_W = d\Sigma (\frac{1}{2} m_k v_k^2) \quad \dots \quad (227)$$

Równanie to, które co do swej postaci jest jednakowe z równaniem 207-em, zestawionem dla ruchu rzeczywistego, wysłowimy: praca względna sił zewnętrznych, przyłożonych do punktów pewnego układu, łącznie z pracą sił wewnętrznych równa się przyrostowi energii kinetycznej ruchu względnego punktów danego układu.

Równanie 223-cie i 227-me daje związek pomiędzy współrzędnymi punktów względem środka masy i prędkościami względnymi; stosować je przeto można do obliczenia ruchu względnego, t. j. do obliczenia np. prędkości względnych \vec{v}'_k ; a że z równania 200-go obliczyć można prędkość \vec{v}_s środka masy, przeto z tych dwóch prędkości obliczyć można prędkości właściwe; a następnie tory danych punktów i inne właściwości kinematyczne ruchu punktów danego układu.

Tożsamość równań dynamicznych ruchu względnego z takimiż równaniami ruchu rzeczywistego jest wynikiem danego określenia ruchu względnego; dla innych ruchów względnych równania te się zmieniają, nie mogą być przeto stosowane.

99. Przykład. Obliczyć ruch dwóch punktów materialnych o masach m_1 i m_2 , związanych z sobą nicią sprężystą i wyrzuconych w polu ciężenia ziemskiego, przyjmąwszy, że nić podczas ruchu punktów pracuje na ciągnięcie.

Jeżeli długość nici w stanie nierozciągniętym $= l$, a w stanie rozciągniętym w pewnej chwili $= r$; to w nici występuje naprężenie S , proporcjonalne do wydłużenia; wartość tego naprężenia wyrazimy wzorem:

$$S = k \cdot (r - l);$$

gdzie k oznacza współczynnik proporcjonalności, właściwy danej nici. Układ dany złożony jest przeto z dwóch punktów materialnych, masy bowiem nici, w celu ułatwienia obliczeń, nie uwzględnimy; na punkty te działają siły wewnętrzne $\pm S$ i siły zewnętrzne, równe ciężarom tych punktów.

W myśl wypowiedzianego twierdzenia o ruchu środka masy, równ. 200-tne, środek ten o masie $(m_1 + m_2)$ porusza się tak, jak gdyby na niego działała tylko siła ciężenia $(m_1 + m_2) \vec{g}$. Środek ten przeto stosownie do obliczenia, podanego w § 17-tym tego tomu, zakreśla parabolę, którą wyznaczymy z początkowej jego prędkości.

W celu zaś obliczenia prędkości każdego z punktów, obliczmy najpierw ich ruchy względne i w tym celu wyobrazimy sobie stosownie do określeń, danych w § 92-tym tego tomu, że każda z tych prędkości złożona jest z prędkości unoszącej, równej prędkości środka masy i z prędkości względnej. Prędkość unoszącą w pewnej chwili obliczymy z ruchu środka masy; a prędkości względne obliczymy z równań ruchu względnego. Równanie ilości ruchu względnego danego układu jest, zgodnie z równ. 215-tem i z warunkami początkowymi, następujące:

$$m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = 0; \dots \dots \dots (228)$$

a równanie momentów tego ruchu, zgodnie z równ. 223-ciem, jest następujące:

$$\frac{d}{dt} \Sigma \mathbf{V} m_k \vec{v}'_k \cdot \vec{r}'_k = 0;$$

moment bowiem sił zewnętrznych względem bieguna, obranego w środku masy, równa się zeru. Równanie to po scałkowaniu przyjmie postać następującą:

$$\mathbf{V} m_1 \vec{v}'_1 \cdot \vec{r}'_1 + \mathbf{V} m_2 \vec{v}'_2 \cdot \vec{r}'_2 = \mathbf{V} m_1 \vec{v}'_{1,0} \cdot \vec{r}'_{1,0} + \mathbf{V} m_2 \vec{v}'_{2,0} \cdot \vec{r}'_{2,0} \dots \dots (229)$$

Z równania 228-go wynika, że wektory ilości ruchów względnych obydwóch punktów tworzą w każdej chwili podczas ruchu parę wektorów, nie mogą bowiem tworzyć dwóch równoważących się wektorów, gdyż moment ich, jak wskazuje równ. 229-te, nie jest równy zeru. Ponieważ wektory te tworzą jedną płaszczyznę, chwilowy przeto ruch względny tych punktów jest płaski, z czego wynika, że kierunki wektorów momentów ilości tego ruchu każdego z tych punktów względem

bieguna, obranego na tej płaszczyźnie, wzajemnie się pokrywają. Z równania zaś 229-go wynika, że kierunki te nie zmieniają się podczas ruchu punktów; płaszczyzna przeto ruchu względnego tych punktów pozostaje podczas ruchu punktów do siebie równoległą. Właściwy zatem ruch tych punktów składa się z ruchu względnego, który odbywa się w płaszczyźnie, prostopadłej do wektora momentu początkowej ilości ruchu względnego i z ruchu postępowego o chwilowej prędkości \bar{v}_s . Zwrócić tu należy uwagę, że właściwości te stosują się do ruchu dowolnych dwóch punktów, pomiędzy którymi występują dowolnie zmienne siły przyciągające lub odpychające; doszliśmy bowiem do określenia tych właściwości, nie korzystając z właściwości sił, występujących pomiędzy tymi punktami. Wniosek ten przeto stosuje się również np. do dwóch punktów materialnych, związanych nicią nierozciągliwą.

Ażeby obliczyć ruchy szczegółowe punktów danego w tem zadaniu układu, należy zastosować równanie równowartości pracy i energii kinetycznej ruchu względnego, równ. 227-me; w równanie to bowiem wchodzi wyrazy sił wewnętrznych. W tym celu obliczymy najpierw wartości pracy względnej sił wewnętrznych i takąż pracę sił zewnętrznych. Pracę względną sił zewnętrznych wyrazimy w myśl danego określenia, wzorem 224-tym:

$$dL'_P = m_1 \bar{g} \cdot d\bar{r}'_1 + m_2 \bar{g} \cdot d\bar{r}'_2 \quad \dots \quad (230)$$

A ponieważ promienie wodzące wyprowadzone są ze środka masy układu; przeto mamy związek:

$$m_1 \bar{r}'_1 + m_2 \bar{r}'_2 = 0; \quad \dots \quad (231)$$

z którego wynika, że

$$m_1 d\bar{r}'_1 + m_2 d\bar{r}'_2 = 0;$$

po podstawieniu tego wzoru w równanie 230-ste, otrzymamy, że praca względna sił ciężkości punktów danego układu równa się zeru. Wartość przeto pracy względnej sił wewnętrznych równa się przyrostowi energii kinetycznej ruchu względnego, co wyrazimy równaniem następującem:

$$-S \cdot d\bar{r}'_1 - S \cdot d\bar{r}'_2 = d\left(\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2\right). \quad \dots \quad (232)$$

Po wyrugowaniu z równania 228-mego, 229-go, 231-go i 232-go, dwóch niewiadomych, np. niewiadomych \bar{v}'_2 i \bar{r}'_2 , otrzymamy dwa równania z dwiema zmiennymi \bar{v}'_1 i \bar{r}'_1 , z których obliczymy ruch względny punktu 1-szego;—w tenże sposób obliczyć można ruch punktu 2-go. Po przeprowadzeniu tego rachunku, zobaczymy, że ruch tych punktów wyraża się wogóle funkcją eliptyczną.

W szczególnym przypadku danego zadania, w którym przyjąć można, że długość l jest tak małą wobec długości r , że można wartość jej pominąć, równania te znacznie się uproszczą, otrzymamy bowiem zamiast funkcji eliptycznych funkcje algebraiczne. Po obliczeniu np. z równ. 228-go i 231-go \bar{v}'_2 i \bar{r}'_2 i po podstawieniu tych wielkości do równania momentów, t. j. do równ. 229-go, otrzymamy:

$$\mathbb{V} m_1 \bar{v}'_1 \cdot \bar{r}'_1 = \mathbb{V} m_1 \bar{v}'_{1,0} \cdot \bar{r}'_{1,0}; \quad \dots \quad (233)$$

a następnie po podstawieniu tychże wartości, wyrażonych tylko algebraicznie, do równania pracy, t. j. po podstawieniu w równ. 232-gie wartości:

$$r'_2 = \frac{m_1}{m_1} \cdot r'_1; \quad \text{oraz} \quad v'_2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot v'_1; \quad \dots \quad (234)$$

otrzymamy, po skróceniu wspólnego mnożnika, następujące równanie:

$$-k \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) r'_1 \cdot dr'_1 = d \left(\frac{1}{2} m_1 v'_1{}^2 \right) \dots \dots \dots (235)$$

Z rów. 233-go i 235-go obliczyć można ruch względny punktu 1-go w tenże sposób, w jaki obliczyliśmy przykład, podany w § 33-cim, z równ. 87-go i 86-go. Wykonania tego obliczenia unikniemy, jeżeli zważymy, że równanie 235-te wyraża równowartość pracy siły, która przyciąga punkt materialny m_1 do środka masy proporcjonalnie do odległości tego punktu od środka; a ruch taki już obliczyliśmy w § 19-tym tego tomu. Ruch przeto każdego punktu układu danego składa się z dwóch ruchów:

1) z ruchu po elipsie, leżącej w płaszczyźnie, określonej kierunkami prędkości względnych w początku ruchu, i której środek pokrywa się ze środkiem mas danych punktów. Obydwie te elipsy są określone wektorami początkowych położeń punktów i ich prędkości względnych, jak to było opisane w § 19-tym tego tomu;—i

2) z ruchu postępowego tej płaszczyzny o prędkości zmiennej \bar{v}_s , stycznej do paraboli, określonej początkową prędkością środka mas tych punktów.

Jeżeli dane są prędkości początkowe $\bar{v}_{1,0}$ i $\bar{v}_{2,0}$ danych punktów, to odpowiednie im prędkości względne obliczymy z następujących wzorów, wynikających z określenia ruchu względnego:

$$\bar{v}'_{1,0} = \bar{v}_{1,0} - \bar{v}_{s,0};$$

a ponieważ

$$\bar{v}_{s,0} = \frac{m_1 \bar{v}_{1,0} + m_2 \bar{v}_{2,0}}{m_1 + m_2},$$

przeto

$$\bar{v}'_{1,0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (\bar{v}_{1,0} - \bar{v}_{2,0});$$

w tenże sposób, zastępuwszy wskaźnik 2 wskaźnikiem 1 i odwrotnie, otrzymamy:

$$\bar{v}'_{2,0} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\bar{v}_{2,0} - \bar{v}_{1,0});$$

prędkości te oraz wektory $\bar{r}'_{1,0}$ i $\bar{r}'_{2,0}$ wyznaczają elipsy, po których te punkty się poruszają, — stosownie do wzoru 67-go tego tomu.

Z równań tych obliczyć można również np. prędkości początkowe dla przypadku, w którym punkty te zakreślą koła zamiast elips; lub też — w którym poruszać się one będą po jednej elipsie, a nie po dwóch oddzielnych elipsach, i t. p.

W szczególnym przypadku, w którym np.

$$m_1 \bar{v}_{1,0} + m_2 \bar{v}_{2,0} = 0.$$

t. j. w którym prędkości początkowe są odwrotnie proporcjonalne do mas, kierunki ich równoległe a zwroty przeciwne; środek masy tych punktów nie otrzyma prędkości początkowej; ruch przeto tego środka będzie taki, jaki jest ruch punktu materialnego upuszczonego bez prędkości początkowej, t. j. ruch unoszący tych punktów będzie pionowy, postępowy i jednostajnie przyspieszony. Dla tego przypadku otrzymamy ze wzorów powyższych, że

$$\bar{v}'_{1,0} = \bar{v}_{1,0}; \text{ oraz } \bar{v}'_{2,0} = \bar{v}_{2,0},$$

t. j. że początkowe prędkości względne tych punktów równają się przy tych warunkach ruchowi początkowemu prędkościom rzeczywistym; co również wynika z tego

ogólnego warunku, że w chwili, w której płaszczyzna nie posiada prędkości unoszącej, prędkości w tej płaszczyźnie t. j. względne równe są prędkościom rzeczywistym.

Zbadajmy teraz znaczenie fizyczne siły, działającej na punkt 1-szy; warość tej siły, stosownie do równania 235-tego, wyraża się wzorem

$$k \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \cdot r'_1;$$

wartość zaś siły, działającej na punkt drugi, — wyrazem

$$k \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \cdot r'_2;$$

pozornie siły te są różne, lecz po uwzględnieniu związku 234-go otrzymamy, że obydwie te siły wyrażają się jednym wzorem $k(r'_1 + r'_2)$; są one przeto równe naprężeniu nici; co też i ze stanowiska fizycznego jest zrozumiałe.

Obliczmy teraz ruchy punktów, jakie one wykonują od chwili, w której siła przyciągania, występująca pomiędzy punktami, przestanie działać (np. od chwili, w której nić łącząca pęknie lub też stanie się $r = < l$). Od chwili, w której siła przyciągania przestaje działać, punkty wykonują ruch tylko pod działaniem sił ciężenia; t. j. każdy z nich zakreśli parabolę z taką początkową prędkością, jaką on posiadał w chwili, w której siła przyciągania przestała działać. Obliczmy teraz jaki ruch wykona środek masy tych dwóch punktów. W myśl przytoczonych w § 17-tym obliczeń, punkty zakreślają parabole, których płaszczyzny są pionowe i przechodzą przez kierunki początkowych prędkości $\bar{c}_{1,0}$ i $\bar{c}_{2,0}$, jakie punkty posiadają w chwili, w której siła przyciągania przestała działać. W celu obliczenia ruchu środka masy tych punktów obierzemy dla ułatwienia rozpatrywać początek układu spórzędnych w tem miejscu przestrzeni, w którym znajdował się ten środek w chwili, w której siła przyciągania przestała działać; i wyprowadźmy z niego promienie wodzące $\bar{\rho}_1$ i $\bar{\rho}_2$ do poruszających się swobodnie punktów; a równania ruchu tych punktów, zgodnie z równ. 60-tem, są następujące:

$$\bar{\rho}_1 = \bar{c}_{1,0} t + \frac{1}{2} \bar{g} \cdot t^2;$$

$$\bar{\rho}_2 = \bar{c}_{2,0} t + \frac{1}{2} \bar{g} t^2;$$

W celu obliczenia promienia wodzącego środka masy tych punktów oznaczmy promień wodzący tego środka literą $\bar{\rho}_s$; i napiszmy stosownie do określenia środka masy:

$$\bar{\rho}_s = \frac{m_1 \bar{\rho}_1 + m_2 \bar{\rho}_2}{m_1 + m_2}.$$

Podstawmy w to równanie wielkość promieni wodzących, obliczone w poprzednich równaniach, a otrzymamy po uproszczeniu:

$$\bar{\rho}_s = \frac{m_1 \bar{c}_{1,0} + m_2 \bar{c}_{2,0}}{m_1 + m_2} \cdot t + \frac{1}{2} \bar{g} \cdot t^2;$$

zważywszy następnie, że na zasadzie równania 191-ego

$$m_1 \bar{c}_{1,0} + m_2 \bar{c}_{2,0} = (m_1 + m_2) \bar{c}_{s,0},$$

otrzymamy szukane równanie ruchu:

$$\bar{\rho}_s = \bar{c}_{s,0} \cdot t + \frac{1}{2} \bar{g} \cdot t^2;$$

z którego wynika, że środek masy porusza się w ten sposób, w jaki porusza się punkt materialny, poddany sile ciężenia i wyrzucony z prędkością początkową $\bar{c}_{s,0}$. Lecz prędkość $\bar{c}_{s,0}$ jest prędkością tego środka, który zakreślał parabolę, określoną prędkością $\bar{v}_{s,0}$; środek ten przeto zakreśla, po przestaniu działania siły wewnętrznej, tę samą parabolę, jaką zakreślał podczas działania tej siły. Siła przeto przyciągania nie wpływa na ruch środka masy, lecz na ruch jego mają wpływ tylko siły zewnętrzne, działające na punkty danego układu.

Wniosek ten może być uważany za szczególny przypadek twierdzenia, któreśmy już dowiedli ogólnie, że siły wewnętrzne, jakie występują pomiędzy punktami danego układu, nie wpływają na ruch ich środka masy, gdy rozszerzymy to twierdzenie do przypadku, w którym wartości tych sił stają się zerami.

Wniosek ten możemy uogólnić do wszelkich układów punktów materialnych, i jeżeli np. przyjmiemy, że środek masy pocisku armatniego, wyrzuconego pod pewnym kątem względem poziomu, zakreśla parabolę; to po rozpęknięciu się tego pocisku wskutek sił wewnętrznych, środek mas wszystkich jego cząstek, na które dany pocisk się rozprysnie, zakreślać będzie tę samą parabolę, i z taką samą prędkością, z jakąby zakreślał środek pocisku całkowitego; i gdyby jakieś siły wewnętrzne znów skupiły te cząstki w jedną masę, to środek tej masy znalazłby się znów na tej samej paraboli w tem jej miejscu, w którym znajdowałby się w danej chwili, poruszając się z pociskiem nierozzerwanym.

100. Przykład. Pomiedzy dwoma punktami materialnymi działają siły proporcjonalne do mas tych punktów i odwrotnie proporcjonalne do ich wzajemnej odległości; obliczyć ich ruchy, przyjmawszy, że żadne siły zewnętrzne nie działają na te punkty.

Z równania ilości ruchu środka masy:

$$\frac{d[(m_1 + m_2)\bar{v}_s]}{dt} = 0,$$

wynika, że środek ten porusza się ze stałą prędkością, jaką on posiadał w początku ruchu; t. j. ruch tego środka będzie prostoliniowy i jednostajny lub też środek ten będzie pozostawał w spoczynku.

Równanie momentów ilości ruchu względnego, jest jednakowe z równaniem poprzedniego przykładu; moment bowiem sił zewnętrznych w tym razie jest również równy zeru jak poprzednio, chociaż z innych względów; ruch przeto tych punktów składa się z ruchu na płaszczyźnie, poruszającej się ruchem postępowym lub też pozostającej w spoczynku.

Równanie energii kinetycznej ruchu względnego różni się od poprzedniego wartością pracy siły przyciągającej, jest ona bowiem w tym razie inną; równanie to jest następujące:

$$-k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{(r'_1 + r'_2)^2} \cdot d(r'_1 + r'_2) = d\left(\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2\right);$$

po podstawieniu wartości r'_2 i v_2' , wyrażonych równaniami 234-temi, które i w tym razie pozostaje w mocy, otrzymamy po odpowiednim skróceniu:

$$-k \cdot \frac{m_1 m_2}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2} \cdot \frac{1}{r_1'^2} \cdot dr'_1 = d\left(\frac{1}{2}m_1 v_1'^2\right);$$

a po oznaczeniu wyrazu

$$\frac{m_2}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2} \quad \text{literą} \quad m'_2$$

otrzymamy równanie:

$$-k \cdot m_1 \cdot m'_2 \cdot \frac{1}{r'^2_1} \cdot dr'_1 = d\left(\frac{1}{2} m_1 v'^2_1\right).$$

Lewa strona tego równania wyraża pracę siły, działającej na punkt m_1 ; proporcjonalnej do masy m_1 i do masy m'_2 , którą należy wyobrazić sobie umieszczoną w środku masy danych punktów, i—odwrotnie proporcjonalnej do odległości punktu m_1 od tego środka; prawa zaś strona tego równania wyraża przyrost energii kinetycznej ruchu względnego punktu m_1 , na który działa ta siła. Ponieważ środek masy pozostaje we względnym spoczynku, przeto ruch względny danego punktu m_1 jest taki, jakiby ten punkt wykonał, gdyby był przyciągany do nieruchomego środka podług prawa, podanego w tem zadaniu, t. j. podług prawa Newton'a i gdyby w tym środku była skupiona masa m'_2 . Na zasadzie obliczeń wykonanych w § 33-cim tego tomu i zważywszy, że ruch względny obydwóch punktów odbywa się w jednej płaszczyźnie, dojdziemy do wniosku, że ruch względny dwóch takich punktów odbywać się będzie w jednej płaszczyźnie po pewnych stożkowych o wspólnem ognisku, pokrywającym się z nieruchomym w tej płaszczyźnie środkiem masy tych punktów.

Siłę, która przyciąga każdy z tych punktów, można obliczyć również drogą bezpośrednią; a mianowicie siła np. S_1 , która przyciąga punkt m_1 , w myśl danego określenia:

$$S_1 = k \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{1}{(r'_1 + r'_2)^2};$$

a po podstawieniu w ten wyraz

$$r'_2 = r'_1 \cdot \frac{m_1}{m_2},$$

otrzymamy wyraz wielkości tej siły:

$$S_1 = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2} \cdot \frac{1}{r'^2_1},$$

który jest jednakowy z wyrazem poprzednio obliczonym.

W szczególnym przypadku, w którym np. masa m_2 jest bardzo wielka w porównaniu z m_1 , środek masy obydwóch punktów leży blisko środka masy punktu m_2 ; wskutek czego przyjąć można z pewnem przybliżeniem, że punkt ten pozostaje w spoczynku na danej płaszczyźnie i jest środkiem przyciągającym.

Z pewnem przybliżeniem przykład ten zastosować można do obliczenia ruchu planet. Przyjąć bowiem można z pewnem przybliżeniem, że np. słońce i ziemia przedstawiają dwa punkty materialne, które w myśl hipotezy Newton'a przyciągają się według prawa, wypowiedzianego w tym przykładzie. Słońce i ziemia przeto zakreślają linie stożkowe (elipsy), których ogniska, ściśle mówiąc, leżą w środku mas obydwóch tych planet; z przybliżeniem zaś przyjąć można, że względu na znaczną wielkość masy słońca, w stosunku do masy ziemi, leżą one w środ-

ku słońca tak, iż ziemia tylko zakreśla około słońca pewną linię stożkową; stożkowa ta, jak pomiary wykazują, jest elipsa. Utożsamienie jednakże zjawisk ruchu tych dwóch przykładów nie jest ściśle z tego względu, że w rzeczywistości mamy cały układ planet i gwiazd, które wzajemnie na siebie działają; wyniki przeto powyższe, oparte na przyciąganiu się dwóch tylko punktów, muszą się mniej lub więcej zmienić, zależnie od czynników, wywołujących te zmiany. Wyniki te zmieniają się jeszcze wskutek niczem nieuzasadnionego założenia, któreśmy przyjęli w tem zadaniu, a jak w danym przypadku nawet niesłusznego, że planety wyobrażamy sobie w postaci punktów materyalnych, na które działają siły przyciągające. Lecz o tych uzupełnieniach tego rachunku nie będziemy mówić w tem miejscu.

W obydwu tutaj przytoczonych przykładach ruch względny danych punktów sprowadził się do ruchu środkowego, w którym środek pozostaje w spoczynku względny; w układach jednakże, złożonych z wielu punktów materyalnych, pomiędzy którymi występują siły wewnętrzne, przypadek ten nie zachodzi i obliczenie ruchu punktów takich układów nie daje się przeprowadzić z całą ścisłością ze względu na trudności matematyczne.

Zadanie. Obliczyć i opisać ruch dwóch punktów materyalnych, związanych z sobą nicią nierozciągliwą. Zadanie to różni się od poprzednich tem, że nie dane są w tem zadaniu siły wewnętrzne, natomiast dany jest geometryczny warunek stałej odległości pomiędzy tymi punktami. Dla wykończenia przeto tego zadania wypadnie obliczyć jeszcze siły wewnętrzne, jakie występują pomiędzy punktami, które obliczyć można po obliczeniu ruchu punktów.

VI. Dynamika brył materialnych.

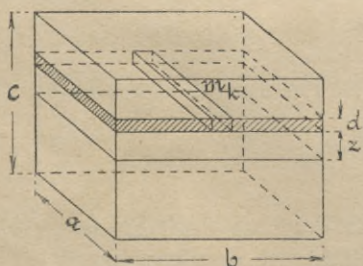
1. Geometria mas.

101. Moment bezwładności bryły materialnej względem płaszczyzny. Iloczyn z masy punktu i z kwadratu jego odległości od danej płaszczyzny nazywamy momentem bezwładności danego punktu względem danej płaszczyzny.

Jeżeli bryłę materialną uważać będziemy jako zbiór nieskończenie wielu punktów sztywno z sobą związanych, to sumę iloczynów z mas punktów i z kwadratów ich odległości od obranej płaszczyzny nazwiemy momentem bezwładności bryły względem tej płaszczyzny.

Oznaczywszy masę k -ego punktu bryły literą m_k , odległość jego od obranej płaszczyzny literą z_k , i wreszcie moment bezwładności bryły względem tej płaszczyzny literą I_p (inercja), to wyrazimy powyższe określenie wzorem:

$$I_p = \Sigma (m_k \cdot z_k^2) \dots \dots (235)$$



Rys. 58.

Przykład. Obliczyć moment bezwładności prostopadłościanu o krawędziach a , b , c , względem płaszczyzny, przechodzącej przez jego środek i równoległej do ściany a , b ; rys. 58-my. Na zasadzie określenia piszemy: $I_p = \Sigma (m_k \cdot z_k^2)$. Literą m_k oznaczamy masę nieskończenie małego prostopadłościanu; literą zaś z_k jego odległość od płaszczyzny, względem której obliczyć mamy moment bezwładności.

Sumowanie iloczynów wykonamy w ten sposób, że zsumujemy je najpierw dla stałej odległości z i otrzymamy moment bezwładności nieskończenie cienkiej warstwy o podstawie ab i wysokości dz . Moment przeto bezwładności masy całego prostopadłościanu otrzymamy, podstawiając we wzór ogólny:

$$m^k = ab \cdot dz \cdot \mu,$$

gdzie μ oznacza gęstość masy prostopadłościanu; a zatem

$$I_p = \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} a \cdot b \cdot dz \cdot \mu \cdot z^2 = ab\mu \cdot \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} z^2 \cdot dz;$$

a po scałkowaniu:

$$I_p = ab\mu \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} = \frac{1}{3} ab\mu \left[\frac{c^3}{8} - \left(-\frac{c^3}{8} \right) \right],$$

skąd wreszcie

$$I_p = \frac{1}{12} ab\mu c^3.$$

W innej postaci wyrazimy ten wzór, gdy podstawimy iloczyn $abc\mu = m$, gdzie m oznacza masę bryły, wzór ten jest następujący:

$$I_p = \frac{1}{12} mc^3 \dots \dots \dots (236)$$

102. Moment bezwładności bryły materialnej względem osi. Momentem bezwładności bryły materialnej względem osi nazywamy sumę iloczynów z mas oddzielnych jej punktów i z kwadratów ich odległości od danej osi.

Przykład. Obliczyć moment bezwładności walca prostego, o podstawie kołowej, względem jego osi.

Oznaczmy promień podstawy walca przez R , wysokość jego przez l , oś przez z , a moment bezwładności względem tej osi przez I_z ; a napiszemy wzór stosownie do postawionego określenia:

$$I_z = \Sigma (m_k \cdot h_k^2);$$

w którym h_k oznacza odległość cząstki m_k bryły od osi z .

Dodajmy najpierw iloczyny, w których odległość h_k jest stałą, a otrzymamy iloczyn z masy walca wydrążonego o promieniu h_k i o grubości powłoki dh .

Oznaczmy masę tej warstwy m_k , a napiszemy:

$$m_k = 2\pi h \cdot dh \cdot l \mu; \text{ zatem}$$

$$I_z = \int 2\pi h \cdot dh \cdot l \cdot \mu \cdot h^2 = \pi \cdot \mu \cdot l \int h^3 \cdot dh = 2\pi l \mu \left[\frac{h^4}{4} \right].$$

Jeżeli walec jest pełny, to granice zmiennej h są zero i R ; wtedy:

$$I_z = 2\pi l \mu \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \pi l R^4 \mu;$$

lub podstawivszy $\pi R^2 l \mu = m$, mamy:

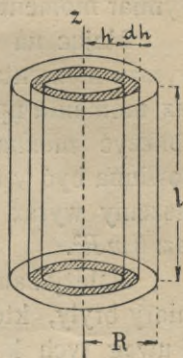
$$I_z = \frac{1}{2} m R^2.$$

103. Moment bezwładności bryły materialnej względem bieguna.

Momentem bezwładności bryły względem bieguna nazywamy sumę iloczynów z mas oddzielnych punktów i z kwadratów ich odległości od obranego bieguna, zwanego biegunem bezwładności.

Oznaczając ten rodzaj momentu bezwładności literą I_b (biegunowy), a literą r_k odległość cząstki masy m_k od tego bieguna, wyrazimy to określenie w następujący sposób:

$$I_b = \Sigma (m_k r_k^2).$$



Rys. 59.

Przykład. Obliczyć moment bezwładności kuli o promieniu R , względem bieguna, obranego w jej środku. Jako cząstkę masy przyjmiemy masę kuli wydrążonej o promieniu r i o grubości powłoki dr ; zatem:

$$m_k = 4\pi r^2 \cdot dr \cdot \mu,$$

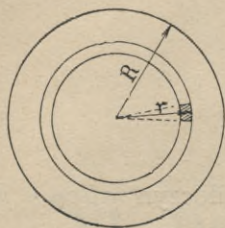
a po podstawieniu w ogólny wzór otrzymamy:

$$I_b = \int_0^R 4\pi r^2 \cdot dr \cdot \mu \cdot r^2 = 4\pi \mu \int_0^R r^4 dr$$

$$I_b = \frac{4}{5} \pi \mu R^5.$$

Ponieważ masa kuli: $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \mu$, a więc również mamy:

$$I_b = \frac{8}{15} m R^2.$$



Rys. 60.

104. Wymiary momentów bezwładności.

Wymiary wszystkich momentów tutaj przytoczonych są sumą dodajników, z których każdy jest iloczynem z masy i z kwadratu odległości; a więc wymiar momentów bezwładności wyrazimy wzorem ML^2 .

Mając na uwadze ten wymiar, możemy w wielu razach przewidzieć postać wyrazu momentu danej bryły i pominąć w ten sposób rachunek szczegółowy. Wyraz momentu np. kuli musi mieć postać $\alpha m R^2$, gdzie α jest pewną liczbą, którą obliczyć można tylko, wykonawszy odpowiedni rachunek; długość zaś jaka powinna być w tym wyrazie, może być tylko promieniem kuli. W tenże sposób napiszemy wyraz momentu bezwładności walca względem jego osi, jest nim wyraz: $\beta m R^2$.

Należy zauważyć, że wogóle do wzoru momentu bezwładności wejdą te wymiary bryły, które są prostopadłe do osi czy też do płaszczyzny bezwładności. Z uwag tych korzystać można w celu sprawdzenia wykonanego rachunku, lub w celu przypomnienia sobie odpowiednich wzorów.

Przy stosowaniu momentów bezwładności do obliczeń, spotykamy się w wielu podręcznikach z wielkością zwaną promieniem bezwładności. Wielkość tę określimy w następujący sposób: promieniem bezwładności k danej bryły nazywamy wielkość, czyniącą zadość następującemu równaniu:

$$m \cdot k^2 = I; \quad \dots \quad (237)$$

w którym I oznacza moment bezwładności danej bryły względem płaszczyzny osi lub bieguna, a m masę tej bryły. Promień bezwładności np. prostopadłościanu względem płaszczyzny, przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do krawędzi c , obliczymy ze wzoru 236-go:

$$m k^2 = \frac{1}{12} m c^2; \quad \text{skąd } k = \frac{c}{\sqrt{12}}.$$

Z określenia tej wielkości wynika, że wielkość k posiada wymiar długości. Wyraz przeto $m k^2$ można sobie przedstawić jako moment bezwładności względem płaszczyzny, osi lub bieguna, punktu o masie m , którego odległość od tej płaszczyzny, osi lub bieguna, równa się k jednostkom długości. W jakim zaś miejscu przestrzeni ma być ten punkt umieszczony, to dla określenia tej wielkości jest obojętne.

105. Wzajemna zależność momentów bezwładności. Pomędzy wartościami momentów bezwładności zachodzi zależność geometryczna, wynikająca bezpośrednio z ich określeń. Zależność ta pozwala z wartości momentów bezwładności jednego rodzaju—obliczyć momenty bezwładności innego rodzaju.

1) Zależność momentów względem płaszczyzn i względem osi. Niechaj x_k i y_k oznaczają odległości k -tego punktu w przestrzeni od dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, wtedy odległość h_k tego punktu od osi przecięcia się tych płaszczyzn wyrazi się wzorem:

$$h_k^2 = x_k^2 + y_k^2.$$

Napiszmy takie równanie kolejno dla każdego z punktów i pomnóżmy je przez masy odpowiednich punktów, to po dodaniu tych wszystkich iloczynów otrzymamy:

$$\Sigma (m_k h_k^2) = \Sigma (m_k x_k^2) + \Sigma (m_k y_k^2); \quad \text{lub inaczej}$$

$$I_z = I_1 + I_2$$

gdzie I_z oznacza moment bezwładności względem osi z , zaś I_1 i I_2 także momenty względem dwóch prostopadłych płaszczyzn przechodzących przez oś z .

Równanie to wypowiemy: moment bezwładności pewnej bryły względem osi równa się sumie jej momentów bezwładności względem dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, dowolnie przeprowadzonych przez tę oś.

Przykład. Obliczyć moment bezwładności prostopadłościanu względem osi z , przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do krawędzi b , rys. 62-gi; znając momenty bezwładności względem płaszczyzn, przechodzących przez środek masy i równoległych do ścian (a, b) i (c, b) i przechodzących przez oś z . Z poprzedniego:

$$I_1 = \frac{1}{12} m c^2; \quad I_2 = \frac{1}{12} m a^2 \quad \text{a więc:}$$

$$I_z = \frac{1}{12} m (c^2 + a^2).$$

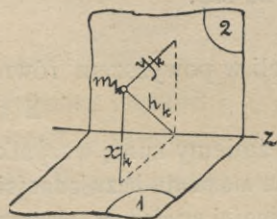
2) Zależność momentów względem płaszczyzn i względem bieguna. Przeprowadźmy przez dowolny punkt przestrzeni trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny, rys. 63-ci, i niechaj x_k, y_k i z_k oznaczają odległości od nich k -tego punktu danej bryły, a r_k jego odległość od punktu ich przecięcia się, t. j. od obranego bieguna, a napiszemy

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2.$$

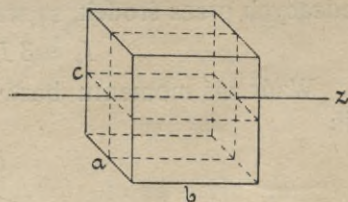
Mnożąc powyższe równanie przez m_k i biorąc sumę wszystkich iloczynów, jak uczyniliśmy poprzednio, otrzymamy wzór:

$$\Sigma (m_k r_k^2) = \Sigma (m_k x_k^2) + \Sigma (m_k y_k^2) + \Sigma (m_k z_k^2); \quad \text{lub inaczej}$$

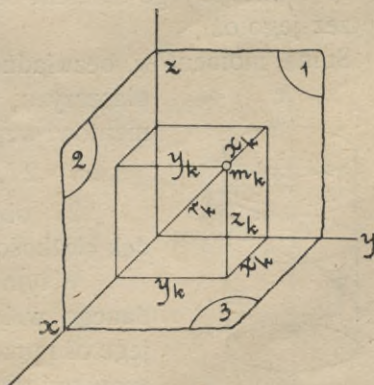
$$I_b = I_1 + I_2 + I_3; \quad \dots \dots \dots (238)$$



Rys. 61.



Rys. 62.



Rys. 63.

Wzór ten wysłowimy: moment bezwładności danej bryły względem bieguna równa się sumie momentów bezwładności tej bryły względem trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, przechodzących przez ten biegun.

Moment np. bezwładności prostopadłościanu względem jego środka ciężkości równa się:

$$I_b = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2 + c^2).$$

Jeżeli w powyższym równaniu 238-em zgrupujemy wyrazy w sposób następujący:

$$\Sigma (m_k r_k^2) = \Sigma m_k (x_k^2 + y_k^2) + \Sigma (m_k z_k^2)$$

i weźmiemy sumę wszystkich iloczynów, to otrzymamy wzór, który wypowiemy: suma momentu bezwładności danej bryły materialnej względem osi oraz momentu bezwładności względem płaszczyzny, prostopadłej do tej osi, równa się momentowi bezwładności danej bryły względem punktu przecięcia się tej osi z daną płaszczyzną.

Przykład. Znając moment bezwładności kuli względem jej środka, obliczyć:

- 1) moment jej bezwładności względem średnicy;
- 2) moment bezwładności względem płaszczyzny, przechodzącej przez jej środek.

Dany więc jest moment: $I_b = \frac{3}{5} m R^2$; należy obliczyć I_s oraz I_p .

Dla innej bryły zadanie to byłoby nieokreślone, lecz dla kuli jest ono możliwym; momenty bowiem bezwładności kuli względem wszystkich płaszczyzn, przechodzących przez środek, są wzajemnie równe, a zatem napiszemy:

$$I_b = 3 I_p; \quad \text{skąd} \quad I_p = \frac{1}{5} m R^2.$$

Wzór zaś momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek kuli:

$$I_s = 2 I_p; \quad \text{a zatem:}$$

$$I_s = \frac{2}{5} m R^2.$$

Przykład. Dany jest walec prosty o wysokości l i o podstawie kołowej, której promień R .

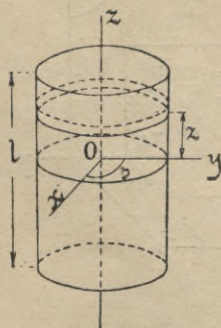
- 1) obliczyć jego moment bezwładności względem płaszczyzny, przechodzącej przez jego oś.

Suma momentów bezwładności względem dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, przechodzących przez oś walca, równa się momentowi względem tej osi, co napiszemy

$$2 I_p = \frac{1}{2} m R^2; \quad \text{a więc} \quad I_p = \frac{1}{4} m R^2;$$

- 2) obliczyć I_s względem osi przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do podstawy.

W tym celu obliczymy najpierw momenty bezwładności danego walca względem płaszczyzny, przechodzącej przez jego oś i przez oś x , oraz moment bezwładności względem płaszczyzny równoległej do podstawy i przechodzącej przez środek walca, a następnie obliczymy moment względem osi ich przecięcia się.



Rys. 64.

Moment bezwładności względem płaszczyzny (x, y) , rys. 64-ty, obliczymy w następujący sposób:

otrzymamy: $I_3 = \Sigma m_k z_k^2$; podstawiając $m_k = \pi R^2 \cdot dz \cdot \mu$,

$$I_3 = \pi \mu R^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} z^2 dz = \pi \mu R^2 \left[\frac{l^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \quad \text{i wreszcie: } I_3 = \frac{1}{12} m l^2;$$

podstawivszy tę wartość w równanie:

$$I_x = I_2 + I_3; \quad \text{otrzymamy} \quad I_x = \frac{1}{4} m (R^2 + \frac{1}{3} l^2).$$

3) Obliczyć moment bezwładności walca względem środka ciężkości:

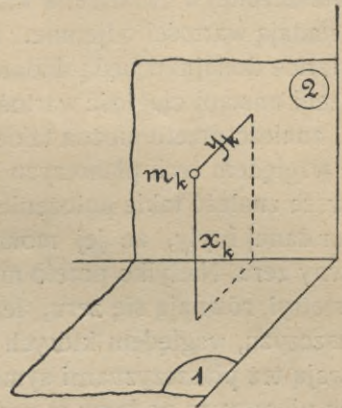
$$I_b = I_1 + I_2 + I_3 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot m R^2 + \frac{1}{12} m l^2 = \frac{1}{2} m (R^2 + \frac{1}{6} l^2).$$

106. Momenty odśrodkowe bryły materalnej. Iloczyn z masy punktu

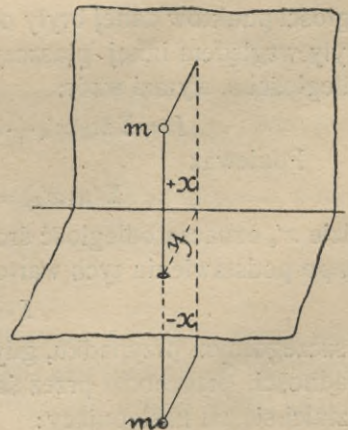
materalnego i z odległości jego od dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn nazywamy momentem odśrodkowym tego punktu względem danych płaszczyzn. Sumę takich iloczynów, odnoszących się do wszystkich punktów danej bryły, nazywamy momentem odśrodkowym danej bryły względem dwóch płaszczyzn. Oznaczywszy ten moment literą $I_{1,2}$, rys. 65, wyrazimy to określenie algebraicznie:

$$I_{1,2} = \Sigma (m_k x_k y_k);$$

gdzie liczby 1 i 2 wskazują na płaszczyzny, względem których obliczamy momenty. Wielkość momentu odśrodkowego różni się od momentów bezwładności tem, że wartość jego może być dodatnią lub ujemną; gdyż składniki tej sumy mogą być ze znakami różnymi. Dla pewnych przeto szczególnych położeń bryły względem danych płaszczyzn moment odśrodkowy może być równy zeru. Przypadek ten zachodzi np. gdy jedna z płaszczyzn momentu odśrodkowego jest płaszczyzną symetrii danej bryły; wtedy bowiem momenty odśrodkowe dwóch punktów symetrycznych względem płaszczyzny symetrii i względem każdej innej do niej prostopadłej, posiadają wartości wzajemnie równe lecz ze znakami przeciwnymi, rys. 66, suma ich przeto równa się zeru. Jeżeli przeto bryła dana jest symetryczną względem pewnej płaszczyzny, to jej moment odśrodkowy względem płaszczyzn, z których jedna jest płaszczyzną symetrii, a druga dowolną, lecz do niej prostopadłą, równa się zeru.



Rys. 65.



Rys. 66.

Przykłady. 1) Moment odśrodkowy prostopadłościanu względem płaszczyzn, z których jedna przechodzi przez środek ciężkości i jest równoległą do jednej ze ścian; druga zaś jest dowolna, lecz prostopadła do pierwszej; równa się zeru.

2) Moment odśrodkowy kuli względem wszystkich płaszczyzn, przechodzących przez jej środek, równa się zeru.

3) Moment odśrodkowy stożka prostego o podstawie eliptycznej, względem płaszczyzn, z których jedna przechodzi przez jedną z osi głównych podstawy i przez oś stożka, a druga jest dowolna, lecz do niej prostopadła, równa się zeru.

Nie wynika jednakże z wniosku powyższego, żeby dla brył niesymetrycznych nie można było znaleźć położenia dwóch takich płaszczyzn, względem których jej moment odśrodkowy byłby równy zeru. Okażemy obecnie, że płaszczyzny takie istnieją dla każdej bryły, a następnie okażemy w jaki sposób je odnaleźć. W tym celu wyobraźmy sobie przestrzeń rozdzieloną dwiema wzajemnie prostopadłymi płaszczyznami na cztery części i umieszczajmy kolejno daną bryłę w każdej z tych części; wtedy momenty odśrodkowe bryły, umieszczonej w ćwiartce, w której współrzędne są $(+x + y)$, posiadają wartości dodatnie; momenty zaś odśrodkowe bryły, umieszczonej w ćwiartce, w której punkty wyznaczone są współrzędnymi $(+x - y)$, posiadają wartości ujemne. Przy częściowem położeniu bryły w jednej i drugiej ćwiartce dodajniki będą dodatnie i ujemne. Wobec ciągłości położenia bryły w przestrzeni nastąpi ciągłość wartości sumy momentów odśrodkowych punktów tej bryły; znaleźć przeto można takie położenia bryły, w których momenty jej odśrodkowe względem tych płaszczyzn równać się będą zeru, lub też odwrotnie, można zawsze znaleźć takie położenie dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn względem danej bryły, że jej moment odśrodkowy względem tych płaszczyzn będzie równy zeru. Nietylko przeto momenty odśrodkowe brył, posiadających płaszczyzny symetrii, równają się zeru, lecz wogóle dla każdej bryły znaleźć można takie pary płaszczyzn, względem których momenty te równają się zeru; płaszczyzny takie nazywają też płaszczyznami symetrii dynamicznej. Sposób znalezienia położenia takich płaszczyzn podamy w następujących paragrafach.

107. Momenty bezwładności brył materalnych względem płaszczyzn wzajemnie równoległych. Zadanie to polega na obliczeniu momentu bezwładności bryły względem pewnej płaszczyzny, która jest równoległą do innej płaszczyzny, względem której moment bezwładności jest nam znany. Niech I' oznacza moment bezwładności pewnej bryły względem danej płaszczyzny; x'_k odległości punktów danej bryły od tej płaszczyzny; wtedy moment bezwładności I tejże bryły względem innej płaszczyzny, przeprowadzonej równoległe do pierwszej na odległości e , wyrazi wzór:

$$I = \sum m_k (x'_k + e)^2 = \sum (m_k x'^2_k) + 2e \sum (m_k x'_k) + e^2 \sum m_k.$$

Ponieważ

$$\sum (m x'_k) = m x'_s; \quad \text{oraz:} \quad \sum m_k = m;$$

gdzie x'_s oznacza odległość środka masy od danej płaszczyzny, § 157-my T. I, przeto, po podstawieniu tych wartości we wzór poprzedni, otrzymamy:

$$I = I' + 2emx'_s + m.e^2; \quad \dots \quad (239)$$

w szczególnym przypadku, gdy płaszczyzna, względem której znamy moment bezwładności, przechodzi przez środek masy, wtedy: $x'_s = 0$; i wzór powyższy przekształci się na następujący:

$$I = I_s + m.e^2 \quad \dots \quad (240)$$

gdzie I_s oznacza moment bezwładności danej bryły względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek masy.

108. Momenty bezwładności brył maturalnych względem osi równoległych. Ponieważ wielkość momentu bezwładności bryły względem osi zależy od położenia bryły względem tych osi, przeto w celu obliczenia momentu bezwładności dla każdej z osi, należałoby przeprowadzić nowy rachunek, ażeby zaś tego uniknąć, zestawimy pewne zależności matematyczne pomiędzy wartościami momentów bezwładności względem różnych osi.

Znajdźmy najpierw zależność pomiędzy wartościami momentów bezwładności danej bryły względem dwóch wzajemnie równoległych osi. Niechaj I'_z oznacza moment bezwładności danej bryły względem osi z' , I_z zaś niech oznacza moment bezwładności względem osi z , równoległej do pierwszej i znajdującej się od niej na odległości e , rys. 67-my; m_k niech oznacza masę jednego z punktów rozpatrywanej bryły; to moment bezwładności tego punktu względem osi z' jest $m_k h'_k{}^2$, względem zaś osi z $m_k h_k{}^2$. Wprowadziwszy do rachunku kąt α_k , jaki tworzy promień h'_k z płaszczyzną osi (z, z'), napiszemy:

$$h_k{}^2 = h'_k{}^2 + e^2 - 2 h'_k e \cdot \cos \alpha_k.$$

Ponieważ $h'_k \cos \alpha_k$ jest spółrzędną y_k , odniesioną do układu osi $x \cdot y \cdot z'$, rys. 67-my, rozpatrywanego punktu, gdyż $h'_k \cdot \cos \alpha_k = y_k$, to napiszemy:

$$h_k{}^2 = h'_k{}^2 + e^2 - 2 h'_k e \cdot \cos \alpha_k.$$

Pomnóżmy to równanie przez m_k i napiszmy także równanie dla każdego punktu, to po ich dodaniu otrzymamy:

$$\Sigma m_k h_k{}^2 = \Sigma m_k h'_k{}^2 + \Sigma m_k e^2 - 2 \Sigma m_k e y_k.$$

Wartości stałe wyniesiemy przed znak sumy, oraz oznaczymy Σm_k literą m , a otrzymamy:

$$I_z = I'_z + e^2 m - 2 e \Sigma m_k y_k \dots \dots \dots (241)$$

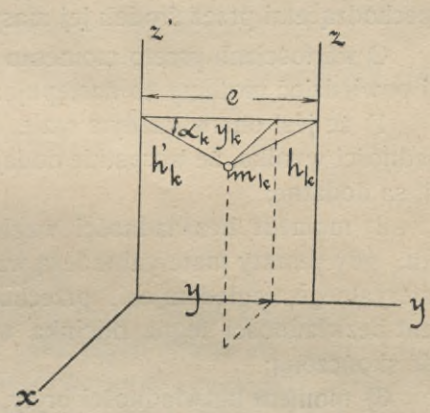
Wyraz $\Sigma m_k y_k$ przedstawia sumę momentów statycznych bryły względem osi x i może być zastąpiony wyrazem $m y_s$ (T. I, § 157), w którym y_s oznacza spółrzędną środka masy danej bryły.

W szczególnym przypadku, jeżeli środek masy leży na osi z' , to $y_s = 0$, a równanie powyższe przekształci się na następujące:

$$I_z = I_s + e^2 m; \dots \dots \dots (242)$$

które wysłowimy: moment bezwładności danej bryły względem dowolnej osi równa się sumie dwóch wyrazów, z których jeden jest momentem bezwładności tejże bryły względem osi, do niej równoległej i przechodzącej przez środek masy, drugi zaś jest iloczynem z masy bryły i kwadratu odległości tych osi.

Ze wzoru powyższego można obliczyć moment bezwładności danej bryły względem dowolnej osi w przestrzeni, gdy znaną będzie wartość momentu bezwładności względem osi równoległej do niej i przechodzącej przez środek masy.



• Rys. 67.

Zadanie. Znając moment bezwładności prostopadłościanu względem osi, przechodzącej przez środek jego masy i równoległej do krawędzi c ; obliczyć moment bezwładności względem osi, przechodzącej przez krawędź c . Odpowiedź: $I_c = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2)$.

109. Szczególne wartości momentów bezwładności. Ze wzoru 240-go wynika, że najmniejszym momentem bezwładności danej bryły względem różnych osi, wzajemnie równoległych, jest moment bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek masy.

Chcąc więc wyznaczyć położenie osi, względem której moment bezwładności danej bryły jest bezwzględnie najmniejszy, należy szukać jej pomiędzy osiami, przechodzącymi przez środek jej masy.

O wartościach przeto momentu bezwładności danej bryły względem różnych osi powiedzieć możemy co następuje:

1) że jest ona w każdym razie dodatnią; z określenia bowiem momentu bezwładności wynika, że wszystkie dodajniki sumy, która tworzy moment bezwładności, są dodatnie;

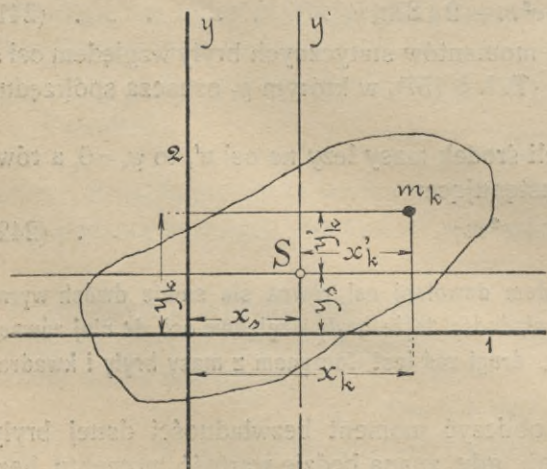
2) moment bezwładności względem osi może być tylko w tym razie równy zeru, gdy punkty materialne leżą wzdłuż osi; moment bezwładności np. odcinka materialnego względem osi, przechodzącej przez niego, równa się zeru; lecz moment bezwładności tegoż odcinka względem jakiegokolwiek innej osi posiada wartość skończoną;

3) moment bezwładności bryły, której punkty są rozmieszczone w przestrzeni, posiada zawsze wartość dodatnią względem każdej osi;

4) największą wartość momentu bezwładności posiada dana bryła względem osi, leżącej w nieskończoności; lub też gdy bryła lub niektóre jej punkty leżą w nieskończoności, a oś bezwładności leży w skończoności. Możemy więc powiedzieć, że wogóle dla przypadków, spotykanych w praktyce:

$$0 < I_a < \infty.$$

5) najmniejszą wartość momentu bezwładności posiada dana bryła względem pewnej osi, która przechodzi przez środek ciężkości.



Rys. 68.

110. Momenty odśrodkowe bryły materialnej względem płaszczyzn równoległych. Dany jest moment odśrodkowy $I'_{1,2}$ pewnej bryły względem dwóch płaszczyzn $1'$ i $2'$, przechodzących przez środek S masy danej bryły, rys. 68-my; obliczyć moment odśrodkowy $I_{1,2}$ względem płaszczyzn 1 i 2 , przeprowadzonych równoległe do poprzednich na odległościach x_s i y_s od środka.

Oznaczywszy literami x_k i y_k odległości punktów bryły od płaszczyzn 1-ej i 2-ej (na rys. 69 pokazane są ślady tych płaszczyzn), i temiż literami, lecz z kreskami, odległości od płaszczyzn 1' i 2', napiszemy następujący wzór momentu odśrodkowego względem płaszczyzn 1 i 2-ej:

$$I_{1,2} = \Sigma(m_k x_k y_k);$$

a ponieważ

$$x_k = x'_k + x_s \text{ i } y_k = y'_k + y_s$$

przeto po podstawieniu otrzymamy:

$$I_{1,2} = \Sigma m_k (x_s + x'_k) (y_s + y'_k);$$

$$I_{1,2} = x_s y_s \cdot \Sigma m_k + x_s \cdot \Sigma (m_k x'_k) + y_s \cdot \Sigma (m_k y'_k) + \Sigma (m_k x'_k y'_k).$$

Podstawmy: $\Sigma m_k = m$, a zważywszy, że płaszczyzny 1' i 2' przechodzą przez środek masy, mamy związku:

$$\Sigma (m_k x'_k) = 0; \quad \Sigma (m_k y'_k) = 0,$$

oznaczywszy następnie sumę

$$\Sigma (m_k x'_k y'_k) \text{ literą } I'_{1,2};$$

napiszemy

$$I_{1,2} = I'_{1,2} + m x_s y_s \dots \dots \dots (243)$$

Wzór ten wysłowimy: moment odśrodkowy danej bryły względem dwóch wzajemnie prostopadłych dowolnie obranych płaszczyzn równa się sumie dwóch wyrazów, w których jeden jest jej momentem odśrodkowym, względem płaszczyzn równoległych do poprzednich i przechodzących przez środek masy; drugi zaś jest iloczynem z masy danej bryły i z odległości jej środka od tych płaszczyzn.

Z tego twierdzenia wynika:

1) jeżeli moment odśrodkowy danej bryły względem dwóch płaszczyzn, przechodzących przez środek masy, równa się zeru, to moment ten, względem dwóch innych płaszczyzn, lecz równoległych do pierwszych, posiada wartość równą iloczynowi $m x_s y_s$;

2) ponieważ wielkości x_s i y_s można zawsze tak dobrać, ażeby suma $(I'_{1,2} + m x_s y_s)$ równała się zeru; przeto można zawsze znaleźć takie położenie dwóch płaszczyzn, równoległych do danych płaszczyzn, względem których moment odśrodkowy równać się będzie zeru;

3) wartość momentu odśrodkowego, względem dwóch płaszczyzn, przechodzących przez środek masy nie zmieni się, gdy jedną z tych płaszczyzn przesuniemy równoległe; wtedy bowiem jeden z mnożników x_s lub y_s równa się zeru.

111. Momenty bezwładności bryły materalnej względem osi, przecinających się w jednym punkcie. Zadanie to ma na celu wyrazić moment bezwładności bryły względem dowolnie obranej osi, przez jej momenty bezwładności względem osi spólrzędnych, posiadających początek na tej prostej.

Przeprowadźmy przez początek układu osi spólrzędnych x, y i z prostą l , rys. 69-ty, i oznaczmy jej kąty kierunkowe, jakie ona tworzy z osiami x, y, z , literami (x, l) , (y, l) i (z, l) . Jeżeli punkt K jest jednym z punktów bryły, to jego moment bezwładności względem osi l wyrazimy wzorem:

$$m_k \cdot K L^2;$$

gdzie KL jest odległością tego punktu od osi l , a m_k — oznacza masę danego punktu. Wyrażmy następnie tę odległość współrzędnymi x_k, y_k i z_k danego punktu. W tym celu z rysunku 69-go odczytamy

$$KL^2 = OK^2 - OL^2; \quad \text{oraz}$$

$$OK^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2;$$

odcinek zaś OL równa się sumie rzutów współrzędnych x_k, y_k i z_k na prostą l ; napiszemy przeto:

$$OL = x_k \cdot \cos(x, l) + y_k \cdot \cos(y, l) + z_k \cdot \cos(z, l).$$

Podstawmy te wartości w wyraz dla KL , a otrzymamy

$$KL^2 = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - [x_k \cdot \cos(x, l) + y_k \cdot \cos(y, l) + z_k \cdot \cos(z, l)]^2;$$

po przemnożeniu tego wyrazu przez m_k i po dodaniu takich wyrazów, zestawionych dla wszystkich punktów danej bryły, otrzymamy wyraz momentu bezwładności danej bryły względem obranej osi l .

W celu wykonania tego obliczenia pomnożmy pierwszy wyraz równania powyższego przez:

$$\cos^2(x, l) + \cos^2(y, l) + \cos^2(z, l);$$

a otrzymamy:

$$KL^2 = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \cdot [\cos^2(x, l) + \cos^2(y, l) + \cos^2(z, l)] - [x_k \cos(x, l) + y_k \cos(y, l) + z_k \cos(z, l)]^2. \quad x$$

Po przemnożeniu otrzymamy:

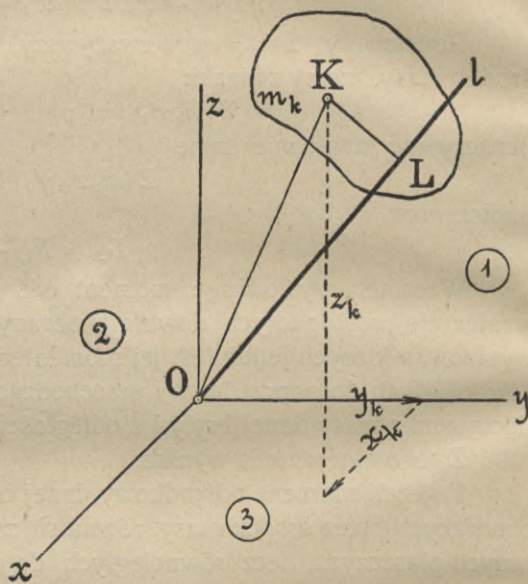
$$KL^2 = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \cdot \cos^2(x, l) + (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \cdot \cos^2(y, l) + (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \cdot \cos^2(z, l) - [x_k^2 \cdot \cos^2(x, l) + 2x_k y_k \cdot \cos(x, l) \cdot \cos(y, l) + y_k^2 \cdot \cos^2(y, l) + 2x_k z_k \cdot \cos(x, l) \cdot \cos(z, l) + 2y_k z_k \cdot \cos(y, l) \cdot \cos(z, l) + z_k^2 \cdot \cos^2(z, l)].$$

Następnie łączymy wyrazy w ten sposób, ażeby otrzymać wyrazy momentów bezwładności względem obranych osi współrzędnych x, y, z ; i otrzymamy

$$KL^2 = (y_k^2 + z_k^2) \cdot \cos^2(x, l) + (x_k^2 + z_k^2) \cdot \cos^2(y, l) + (x_k^2 + y_k^2) \cdot \cos^2(z, l) - 2x_k y_k \cdot \cos(x, l) \cdot \cos(y, l) - 2z_k x_k \cdot \cos(x, l) \cdot \cos(z, l) - 2y_k z_k \cdot \cos(y, l) \cdot \cos(z, l).$$

Pomnożmy teraz to równanie przez m_k , a wyraz $m_k \cdot KL^2$ wyrazi moment bezwładności punktu K względem osi l ; wyraz zaś $(y_k^2 + z_k^2) m_k$ — moment bezwładności tegoż punktu względem osi x i t. d. Zestawimy takie równania dla każdego punktu bryły, następnie zsumujemy je, a zważywszy, że wielkości $\cos(x, l)$ i t. d. jako niezależne od współrzędnych punktów danej bryły, mogą być wyniesione przed znak Σ , otrzymamy, zważywszy przedtem: że

$$\Sigma m_k (x_k^2 + y_k^2) = I_x \text{ i t. d.}; \quad \text{oraz} \quad \Sigma (m_k x_k y_k) = I_{1,2} \text{ i t. d.},$$



Rys. 69.

następujące równanie:

$$I_l = \cos^2(x, l) \cdot I_x + \cos^2(y, l) \cdot I_y + \cos^2(z, l) \cdot I_z - 2 \cos(x, l) \cdot \cos(y, l) \cdot I_{1,2} \\ - 2 \cos(y, l) \cos(z, l) \cdot I_{2,3} - 2 \cos(x, l) \cos(z, l) \cdot I_{1,3} \dots \dots (244)$$

Wzór ten daje możność obliczenia momentu bezwładności I_l danej bryły względem osi l z momentów bezwładności tej bryły względem trzech wzajemnie prostopadłych osi, przechodzących przez jeden punkt danej osi, oraz z trzech momentów odśrodkowych tejże bryły względem płaszczyzn, wyznaczonych przez te osi współrzędnych; a więc dla obliczenia momentu bezwładności danej bryły względem dowolnie obranej osi potrzebna jest znajomość sześciu niezależnych wielkości. W najogólniejszym więc przypadku dla wyznaczenia momentu bezwładności danej bryły musimy wykonać nie więcej jak sześć całkowań; w szczególnych przypadkach może być mniej, niektóre bowiem z tych momentów, zależnie od położenia osi współrzędnych x , y i z — względem bryły, mogą być wzajemnie równe lub też równe zeru.

Przykład. Obliczyć moment bezwładności prostopadłościanu względem osi l , przechodzącej przez jego przekątnię.

W tym celu przeprowadźmy przez środek masy prostopadłościanu równoległe do krawędzi prostopadłościanu (a , b , c) trzy wzajemnie prostopadłe osi x , y i z , a napiszemy na podstawie poprzednich rachunków:

$$I_x = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2); \quad I_y = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2); \quad I_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2).$$

Ponieważ płaszczyzny (x, y) oraz (y, z) są płaszczyznami symetrii, przeto $I_{1,2} = 0$; $I_{2,3} = 0$ oraz $I_{1,3} = 0$.

Wzór więc 244-ty dla danego przypadku przybierze postać:

$$I_l = \cos^2(x, l) \cdot I_x + \cos^2(y, l) \cdot I_y + \cos^2(z, l) \cdot I_z \dots \dots (245)$$

Ze stosunków geometrycznych, zachodzących w prostopadłościanie, wynika, że dla danego przypadku, gdy l jest przekątnią: $\cos^2(x, l) = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$; i t. d.; po podstawieniu przeto tych wartości we wzór powyższy, otrzymamy:

$$I_l = \frac{1}{12} m \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

112. Elipsoida bezwładności danej bryły materjalnej. W celu unaocznienia geometrycznego wielkości momentów bezwładności względem różnych osi l , przechodzących przez pewien punkt, wyrazimy równanie 244-te geometrycznie. W tym celu na każdej osi l odetniemy od początku układu długość:

$$\rho = \pm \frac{\lambda^2}{\sqrt{I_l}};$$

gdzie λ^2 oznacza dowolnie obrany, lecz stały dla danego zadania, współczynnik proporcjonalności. Przeprowadźmy przez obrany biegun O nieskończenie wiele osi l i na każdej z nich odetnijmy, określony wyżej odcinek ρ , to otrzymamy pęk promieni, wychodzących z jednego punktu, których końce utworzą pewną powierzchnię. Zadaniem naszym jest orzec jaka będzie ta powierzchnia.

W tym celu podstawmy do wzoru 244-tego:

$$I_l = \frac{\lambda^4}{\rho^2}; \quad \dots \quad (246)$$

i oznaczywszy literami x, y, z , spórzędne końców promienia ρ ; zastąpimy w otrzymanem równaniu iloczynny

$$\rho \cdot \cos(x, l), \quad \rho \cdot \cos(y, l), \quad \rho \cdot \cos(z, l),$$

wartościami spórzędnych x, y, z a otrzymamy równanie:

$$I_x \cdot x^2 + I_y \cdot y^2 + I_z \cdot z^2 - 2I_{1,2} \cdot xy - 2I_{2,3} \cdot yz - 2I_{1,3} \cdot xz = \lambda^4; \quad \dots \quad (247)$$

które przedstawia powierzchnię drugiego stopnia. Ażeby określić postać tej powierzchni, zważymy, że wszystkie jej punkty leżą wogóle w skończoności; wartości bowiem I_l — a więc i wartości ρ względem wszystkich osi przechodzących przez obrany biegun są wogóle wielkościami skończonemi. W szczególnym tylko przypadku, gdy punkty materialne są rozłożone wzdłuż osi, przechodzącej przez początek układu spórzędnych, wtedy względem tej osi $I_l = 0$; a $\rho = \pm \infty$; z czego wynika, że wogóle wszystkie punkty powierzchni, utworzonej przez końce promieni ρ leżą w skończoności, a w szczególnym tylko przypadku układu punktów materialnych leżą dwa jej punkty w nieskończoności. Ze znanych powierzchni drugiego stopnia odpowiada tym warunkom tylko elipsoida wraz ze swemi odmianami, w jakie przejść może w szczególnych przypadkach; a więc przedstawiać również może elipsoidę obrotową, kulę lub walec.

Wogóle przeto powiedzieć możemy: że każdy punkt w przestrzeni może być środkiem elipsoidy, posiadającej taką właściwość, że moment bezwładności danej bryły względem dowolnej osi, przechodzącej przez ten punkt, obliczymy ze wzoru: $I_l = \frac{\lambda^4}{\rho^2}$; w którym ρ jest długością odcinka, utworzonego na tej osi przez środek elipsoidy i jej powierzchnię. Elipsoida ta daje obraz geometryczny zmienności momentów bezwładności danej bryły względem osi, przechodzących przez dany biegun. Elipsoidę tę nazwano elipsoidą bezwładności danej bryły w obranym biegunie.

Dla danej bryły i dla danego bieguna, możemy zawsze zbudować jedną tylko elipsoidę bezwładności, niezależnie od położenia obranych osi spórzędnych x, y i z ; moment bowiem bezwładności względem każdej osi posiada, na zasadzie danego określenia, jedną tylko wartość; a więc i końce odcinków ρ , wyznaczą jedną tylko elipsoidę. Zmieniając przeto położenie osi spórzędnych x, y, z , a nie zmieniając ich początku i położenia bryły w przestrzeni, otrzymamy równania drugiego stopnia różnych postaci; które jednakże przedstawiać będą jedną i tę samą elipsoidę.

Gdy obierzemy osi spórzędnych wzdłuż głównych średnic tej elipsoidy i oznaczywszy spórzędne końców odcinków ρ literami ξ, η, ζ , wtedy równanie elipsoidy względem tych osi powinno mieć postać:

$$\frac{\xi^2}{\rho_1^2} + \frac{\eta^2}{\rho_2^2} + \frac{\zeta^2}{\rho_3^2} = 1; \quad \dots \quad (248)$$

w którym ρ_1, ρ_2, ρ_3 oznaczają długości głównych półśrednic elipsoidy. Oznaczywszy literami A, B, C wartość momentów bezwładności względem osi głównych danej elipsoidy, napiszemy na podstawie określenia wyrażonego wzorem 246-tym:

$$\rho_1 = \frac{\lambda^2}{\sqrt{A}}; \rho_2 = \frac{\lambda^2}{\sqrt{B}}; \rho_3 = \frac{\lambda^2}{\sqrt{C}};$$

a po podstawieniu tych wartości w równ. 248-me, otrzymamy równanie elipsoidy, odniesione do osi głównych, w następującej postaci:

$$A \cdot \xi^2 + B \cdot \eta^2 + C \cdot \zeta^2 = \lambda^4 \quad \dots \quad (249)$$

Z porównania tego równania z równaniem elipsoidy, odniesionej do dowolnych osi współrzędnych x, y, z , posiadających wspólny początek z osiami ξ, η, ζ wynika, że wartość momentów odśrodkowych, względem każdej pary płaszczyzn, przechodzących przez osi główne elipsoidy, są równe zeru; i odwrotnie, jeżeli dla każdej pary płaszczyzn, przechodzących przez obrane osi współrzędnych, momenty odśrodkowe równają się zeru, to proste przecięcia się tych płaszczyzn są osiami głównymi elipsoidy, gdyż wtedy równanie ogólne 244-te przekształci się na 249-te; t. j. na równanie symetryczne. Osi główne elipsoidy bezwładności nazywają się **głównymi osiami bezwładności danej bryły w danym biegunie**, a płaszczyzny przechodzące przez te osi głównymi płaszczyznami bezwładności. Elipsoida bezwładności zbudowana dla środka masy danej bryły nazywa się **elipsoidą środkową**.

Znając położenie osi głównych danej bryły dla obranego bieguna, obliczymy z równ. 244-tego moment jej bezwładności względem dowolnej osi, przechodzącej przez ten punkt, gdy jej kąty kierunkowe będą znane; wzór ten jest nast.:

$$I_l = A \cdot \cos^2(\xi, l) + B \cdot \cos^2(\eta, l) + C \cdot \cos^2(\zeta, l) \quad \dots \quad (250)$$

113. Właściwości momentów bezwładności brył maturalnych.

1) W każdym punkcie przestrzeni wyznaczyć można takie położenie trzech płaszczyzn wzajemnie prostopadłych, że względem każdej pary tych płaszczyzn momenty odśrodkowe danej bryły będą równe zeru. Zanikanie więc momentów odśrodkowych zachodzi nie tylko względem płaszczyzn, z których jedna jest płaszczyzną symetrii danej bryły, jakiesmy to już poprzednio zauważyli, lecz dla każdej bryły można je znaleźć.

2) Jeżeli w pewnym punkcie przestrzeni znajdziemy trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny, względem których trzy momenty odśrodkowe równają się zeru, to proste przecięcia się tych płaszczyzn są głównymi osiami bezwładności; gdyż wtedy równanie elipsoidy odniesione do tych prostych jak do osi współrzędnych będzie równaniem symetrycznym. Jeżeli przeto dana bryła posiada np. trzy płaszczyzny symetrii, to proste przecięcia się tych płaszczyzn są osiami głównymi; przypadek ten zachodzi np. w prostopadłościanie.

3) Ze zmianą położenia bieguna bezwładności, kierunki osi głównych wogóle się zmieniają. Jeżeli bowiem momenty odśrodkowe względem każdej pary z trzech głównych płaszczyzn równają się zeru, to nie będą one wogóle równe zeru względem innych trzech płaszczyzn do nich równoległych, porówn. wzór 243-ci; płaszczyzny te przeto nie będą już płaszczyznami głównymi.

4) Gdy względem dwóch par z trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn (1-sza, 2-ga, 3-cia) momenty odśrodkowe równają się zeru, np. jeżeli:

$$I_{1,3} = 0, \quad \text{oraz} \quad I_{2,3} = 0,$$

to proste przecięcia się płaszczyzn 1-ej i 2-giej jest jedną z osi głównych. W tym bowiem przypadku w równaniu ogólnym elipsoidy, równ. 247-me, wypadną dwa ilo-

czyiny spólrzędnych i otrzymamy równanie z iloczynem tylko dwóch spólrzędnych; względem więc trzeciej spólrzędnej będzie to równanie symetryczne, odpowiednia przeto tej spólrzędnej oś jest osią główną elipsoidy.

5) Jeżeli płaszczyzny główne przechodzą przez środek masy danej bryły, to dla biegunów, leżących na każdej z tych płaszczyzn, jedna z osi głównych jest do niej prostopadłą, pozostałe zaś dwie osi leżą w tej płaszczyźnie; równoległe bowiem przesunięcie dwóch płaszczyzn głównych, gdy trzecia przechodzi przez środek masy, nie zmienia wartości momentów odśrodkowych względem każdej z przesuniętych płaszczyzn i pozostałej; a ponieważ wartości momentów odśrodkowych równały się zeru, pozostaną i po przesunięciu tych płaszczyzn równe zeru, § 110-ty.

6) Z pomiędzy różnych położeń osi bezwładności, przechodzących przez obrany biegun w przestrzeni, wyznaczyć można położenie dwóch wzajemnie prostopadłych osi, względem których momenty bezwładności danej bryły są największe i najmniejsze. Oś względem której moment bezwładności jest najmniejszy, przechodzi przez wielką średnicę elipsoidy; zaś oś, względem której moment bezwładności jest największy, leży na małej średnicy elipsoidy.

7) Jeżeli wartości momentów bezwładności danej bryły względem dwóch osi głównych są wzajemnie równe, to momenty jej bezwładności względem wszystkich prostych, leżących w płaszczyźnie tych osi i przechodzących przez obrany biegun są wzajemnie równe, elipsoida bowiem jest w tym razie elipsoidą obrotową.

8) Jeżeli wartości momentów bezwładności danej bryły względem trzech osi głównych, przechodzących przez obrany biegun, są wzajemnie równe, to momenty bezwładności danej bryły względem wszystkich innych osi, przechodzących przez ten biegun są wzajemnie równe. W danym bowiem razie elipsoida przekształca się w kulę; promienie zatem wodzące, a więc i momenty bezwładności względem tych promieni są wzajemnie równe. Np. dla kuli, lub sześcianu elipsoida bezwładności zbudowana w środku ciężkości przekształca się w kulę; momenty przeto bezwładności tych brył względem wszystkich osi, przechodzących przez środek, są wzajemnie równe.

114. Punkt bezwładności na danej prostej. Gdy na danej prostej znajdziemy taki punkt, w którym zbudowana elipsoida bezwładności danej bryły posiada jedną średnicę główną na tej prostej; wtedy punkt taki nazwiemy **punktem bezwładności na danej prostej**. Zadanie obecne polega na określeniu położenia, w jakim powinna znajdować się taka prosta względem bryły, ażeby znajdował się na niej punkt bezwładności, a następnie — na wyznaczeniu położenia tego punktu. Obierzmy na danej prostej dowolny punkt O , jako początek spólrzędnych i przeprowadźmy przez niego trzy wzajemnie prostopadłe osi x, y, z , obrawszy tę prostą za oś z . Następnie na tejże prostej obierzmy inny punkt O' , na odległości dotychczas nie oznaczonej z_0 od O i przeprowadźmy przez niego inny układ prostokątnych osi (x', y', z') ; obrawszy oś z' również na tej prostej. W ten sposób mamy dwa układy spólrzędnych, których początki oraz osi z i z' leżą na danej prostej; płaszczyzny zaś (x, y) oraz (x', y') są wzajemnie równoległe; położenie zatem k -tego punktu bryły określić można spólrzędniemi (x_k, y_k, z_k) lub (x'_k, y'_k, z'_k) . Oznaczywszy kąt pomiędzy osiami x i x' przez α ; napiszemy następujące zależności geometryczne pomiędzy spólrzędniemi:

$$\begin{aligned} x'_k &= x_k \cos \alpha + y_k \sin \alpha; \\ y'_k &= -x_k \sin \alpha + y_k \cos \alpha; \\ z'_k &= z_k - z_o. \end{aligned}$$

Jeżeli np. punkt O' jest punktem bezwładności danej prostej, t. j. jeżeli x', y', z' są osiami głównymi w punkcie O' , to powinny zachodzić następujące geometryczne zależności:

- 1) $\Sigma (m_k \cdot x'_k z'_k) = 0;$
- 2) $\Sigma (m_k y'_k z'_k) = 0;$
- 3) $\Sigma (m_k x'_k y'_k) = 0.$

Podstawivszy w te równania wartości współrzędnych (x'_k, y'_k, z'_k) z poprzednich równań, otrzymamy trzy równania z dwiema niewiadomymi α i z_o , które określają położenie szukanego bieżuna; równania te są następujące:

- 1) $\cos \alpha \cdot \Sigma (m_k x_k z_k) + \sin \alpha \cdot \Sigma (m_k y_k z_k) - z_o [\cos \alpha \cdot \Sigma (m_k x_k) + \sin \alpha \cdot \Sigma (m_k y_k)] = 0$
- 2) $-\sin \alpha \cdot \Sigma (m_k x_k z_k) + \cos \alpha \cdot \Sigma (m_k y_k z_k) - z_o [-\sin \alpha \cdot \Sigma (m_k x_k) + \cos \alpha \cdot \Sigma (m_k y_k)] = 0;$
- 3) $\frac{1}{2} \sin 2 \alpha \cdot \Sigma [m_k (y_k^2 - x_k^2)] + \cos 2 \alpha \cdot \Sigma (m_k x_k \cdot y_k) = 0.$

Ażeby dwie niewiadome α i z_o mogły zaspakajać trzy powyższe równania, powinny zachodzić pewne szczególne zależności pomiędzy współczynnikami tych niewiadomych.

W celu wyznaczenia tych zależności wyrugujemy α z pierwszych dwóch równań i w tym celu 1-sze równanie pomnożymy przez $\sin \alpha$, drugie przez $\cos \alpha$ i dodamy je z sobą; następnie 1-sze pomnożymy przez $\cos \alpha$, drugie przez $\sin \alpha$ i także dodamy je z sobą; z 3-ciego zaś bezpośrednio obliczymy $\text{tg } 2 \alpha$; po tych przekształceniach otrzymamy następujące trzy równania:

- 1) $z_o = \frac{\Sigma (m_k y_k z_k)}{\Sigma (m_k y_k)};$
- 2) $z_o = \frac{\Sigma (m_k x_k z_k)}{\Sigma (m_k x_k)};$
- 3) $\text{tg } (2 \alpha) = \frac{2 \Sigma (m_k x_k y_k)}{\Sigma [m_k (x_k^2 - y_k^2)]} \dots \dots \dots (251)$

Ażeby wartość z_o zaspakajała dwa pierwsze równania, powinno być

$$\frac{\Sigma (m_k y_k z_k)}{\Sigma (m_k y_k)} = \frac{\Sigma (m_k x_k z_k)}{\Sigma (m_k x_k)} \dots \dots \dots (252)$$

Równanie to wyraża właśnie warunek, który powinien być spełniony, ażeby na obranej osi znajdował się punkt bezwładności. Nie każda więc prosta posiada punkt bezwładności dla danej bryły; lecz tylko proste, znajdujące się w szczególnych położeniach względem danej bryły, posiadają takie punkty.

Odległość punktu bezwładności danej prostej (jeżeli on istnieje), od obranego początku 0 współrzędnych obliczymy z równ. 1-go lub 2-go; a położenie dwóch pozostałych osi głównych obliczymy z równ. 3-go.

Rozpatrzmy pewne szczególne przypadki:

1) Jeżeli jednocześnie:

$$\Sigma (m_k x_k z_k) = 0; \quad \text{oraz} \quad \Sigma (m_k y_k z_k) = 0; \quad \text{a}$$

$$\Sigma (m_k x_k) \cong 0 \text{ i } \Sigma (m_k y_k) \cong 0;$$

to $z_0 = 0$;

t. j. obrany początek układu jest punktem bezwładności danej prostej; czyli prosta ta jest jedną z osi głównych danej bryły w tym punkcie.

2) Jeżeli jednocześnie:

$$\begin{aligned} \Sigma(m_k x_k z_k) = 0; \quad \Sigma(m_k y_k z_k) = 0; \quad \text{oraz} \\ \Sigma(m_k x_k) = 0; \quad \Sigma(m_k y_k) = 0, \end{aligned}$$

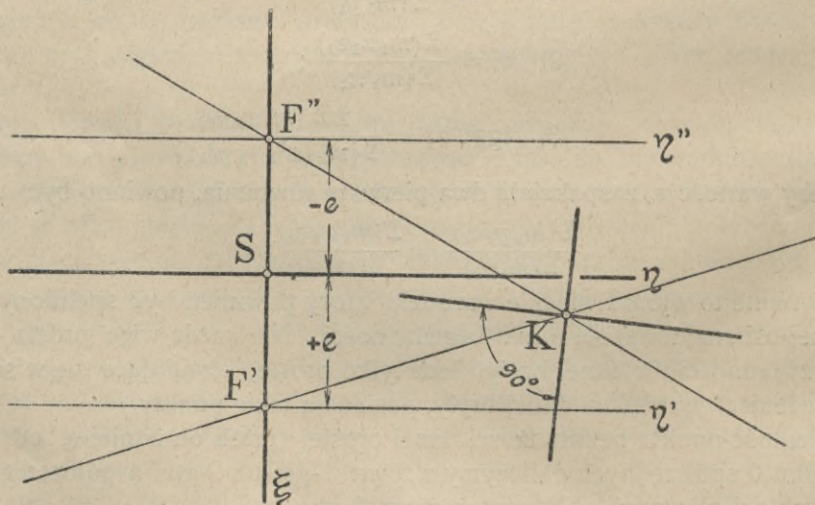
t. j. jeżeli oś ta przechodzi przez środek masy, to z_0 przybiera każdą dowolną wartość; czyli dana prosta jest osią główną dla każdego swego punktu; a ponieważ wartość kąta α jest niezależna od wartości z_0 , gdyż w równ. 3-cie nie wchodzi wartość z_0 , przeto kierunki pozostałych dwóch osi dla tych punktów nie zmieniają się w przestrzeni i pozostają równoległymi do osi głównych w środku masy. Wszystkie przeto punkty na osi głównej elipsoidy bezwładności są punktami bezwładności dla danej bryły.

3) Jeżeli $\Sigma(m_k x_k) = 0$; oraz $\Sigma(m_k y_k) = 0$; a
 $\Sigma(m_k x_k z_k) \cong 0$; oraz $\Sigma(m_k y_k z_k) \cong 0$;
 wtedy $z_0 = \infty$.

Osi, przechodzące przez środek masy, a nie będące osiami głównymi, posiadają punkty bezwładności w nieskończoności.

4) Jeżeli dana prosta jest równoległą do jednej z głównych osi, przechodzących przez środek masy; to jej biegun bezwładności pokrywa się z rzutem prostopadłym środka masy na tę prostą; płaszczyzna bowiem rzutująca jest w danym razie płaszczyzną główną elipsoidy w środku masy; a dana prosta jest osią główną elipsoidy dla punktu przecięcia się danej prostej z tą płaszczyzną; przypadek 5-ty paragrafu poprzedniego.

115. Ogniska bezwładności. Przyjmiemy, że momenty bezwładności



Rys. 70.

A, B, C danej bryły względem osi głównych ξ, η, ζ w środku masy posiadają wartości
 $A > B > C >$;
 wtedy moment bezwładności I_l względem osi η'_l , przeprowadzonej w płaszczyźnie

(ξ, η) równoległe do osi η na odległości e od niej; (rys. 70-ty przedstawia płaszczyznę ξ, η), wyrazi się stosownie do równania 242-ego wzorem:

$$I_{\eta'} = B + e^2 m.$$

Przy założeniu, że $A > B$, wartość e możemy zawsze tak dobrać, ażeby:

$$B + e^2 m = A;$$

wtedy punkty F' i F'' , leżące na osi ξ w odległości:

$$e = \pm \sqrt{\frac{A-B}{m}};$$

od środka masy, posiadają tę szczególną właściwość, że momenty bezwładności danej bryły względem osi ξ i η' , przechodzących przez te punkty, są wzajemnie równe; elipsoida zatem bezwładności danej bryły, zbudowana w tych punktach, posiada dwie główne średnice wzajemnie równe. Punkty te nazwano ogniskami bezwładności danej bryły na płaszczyźnie głównej (ξ, η) . Znajomość położenia tych ognisk daje możliwość wyznaczenia osi głównych w każdym punkcie danej płaszczyzny (ξ, η) . Momenty bowiem bezwładności względem osi, przeprowadzonych przez dowolny punkt K tej płaszczyzny i przez obydwa ogniska bezwładności są wzajemnie równe; proste przeto, połowiące kąty zewnętrzne i wewnętrzne, jakie one tworzą, są osiami głównymi w tym punkcie, rys. 70-ty.

Jasnym jest, że ogniska bezwładności mogą leżeć tylko na osi, względem której moment bezwładności jest większy od momentu względem drugiej osi; oddalając bowiem pewną oś od środka masy, moment bezwładności względem niej zawsze powiększa się i mniejsze wartości momentów możemy przez to zawsze dowolnie powiększyć.

Jeżeli więc $A > B > C$, to możemy na osi ξ znaleźć jeszcze takie bieguny H' i H'' , rys. 71-szy, przez które przeprowadzimy osi ζ'_1 i ζ''_2 równoległe do ζ ; względem których momenty bezwładności równać się będą wartości A ; odległości tych osi od osi ζ równają się

$$\pm \sqrt{\frac{A-C}{m}}.$$

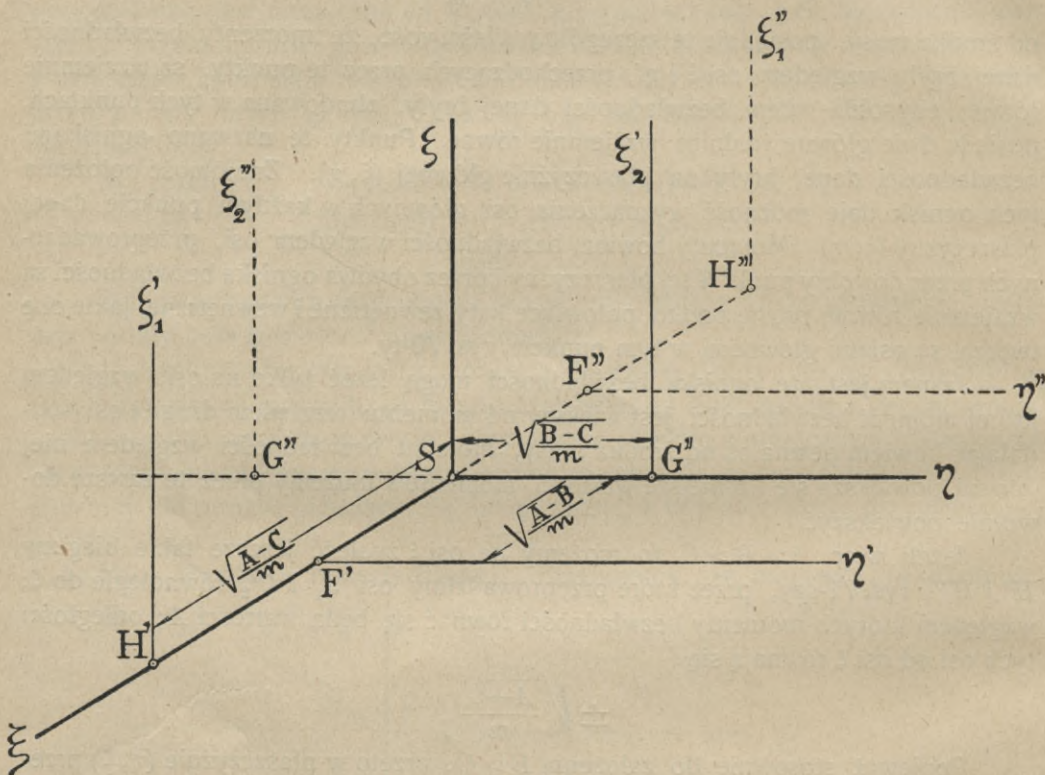
Ponieważ stosownie do założenia $B > C$, przeto w płaszczyźnie (η, ζ) przeprowadzić można również na odległości $= \pm \sqrt{\frac{B-C}{m}}$ od osi ζ i równoległe do niej takie osi ζ'_2 i ζ''_2 , względem których momenty bezwładności danej bryły równają się B . Wnioski te wypowiemy: przyjmując, że $A > B > C$ znajdziemy na osi ξ dwie pary ognisk bezwładności; jedna z tych par (F' i F'') wyznacza główne osi bezwładności względem biegunów, leżących na płaszczyźnie (ξ, η) ; druga zaś H' i H'' wyznacza te osi względem biegunów leżących na płaszczyźnie (ξ, ζ) . Na osi η znajdziemy tylko jedną parę ognisk, gdyż moment bezwładności B względem tej osi jest większy tylko od momentu C względem osi ζ . Znajomość położenia trzech par tych ognisk pozwala wyznaczyć położenie osi głównych względem biegunów, leżących na każdej z trzech płaszczyzn głównych, przechodzących przez dany środek.

W szczególnym przypadku, jeżeli $B=C$ i, jak poprzednio, $A > B$, to ogniska G' i G'' pokrywają się ze środkiem masy, ognisko zaś H' pokrywa się

z F' a H'' z F'' ; osi zatem η' i ζ' , względem których momenty bezwładności równają się A , zbiegają się w jednym punkcie na osi ξ , względem której moment bezwładności także równa się A ; otrzymujemy zatem w jednym punkcie na osi ξ w odległości

$\sqrt{\frac{A-C}{m}}$ od środka masy trzy wzajemnie prostopadłe osi, względem których mo-

menty bezwładności są równe wartości A . Wniosek ten wypowiemy w następujący sposób: gdy elipsoida bezwładności pewnej bryły, zbudowana w środku jej masy, posiada dwie osi główne wzajemnie równe, i gdy względem tych osi momenty bez-



Rys. 71.

władności są mniejsze od momentu względem osi trzeciej; wtedy na osi trzeciej znajdziemy dwa ogniska, względem których elipsoida bezwładności stanie się kulą; ogniska te nazywają ogniskami równych momentów bezwładności; zatem: dwa ogniska równych momentów bezwładności posiadają bryły, których elipsoida bezwładności w środku masy posiada dwie średnice wzajemnie równe; a trzecią mniejszą od każdej z nich. Bryły zatem obrotowe mogą posiadać ogniska równych momentów na osi obrotu, gdy średnica elipsoidy, leżąca na tej osi, jest mniejszą od pozostałych średnic; t. j. gdy elipsoida bezwładności jest spłaszczona.

116. Przykład. Wyznaczyć elipsoidę bezwładności punktu materialnego względem bieguna, dowolnie obranego w przestrzeni.

Przez dany biegun przeprowadzamy pęk osi bezwładności i względem każdej z nich obliczymy moment bezwładności danego punktu; moment ten $= mh_n^2$, gdy

literą m oznaczymy masę punktu materialnego i literą h_n odległość jego od n -tej osi, przeprowadzonej przez biegun. Odetnijmy na tych osiach wartości $\rho = \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{m h_n^2}}$; a końce tych odcinków wyznaczają powierzchnię szukanej elipsoidy.

Rozpatrzmy następnie pewne szczególne przypadki położenia osi, przechodzących po przez obrany biegun:

1) gdy oś przechodzi przez obrany biegun i dany punkt materialny, to moment bezwładności danego punktu względem tej osi $= 0$, a $\rho = \infty$; a więc oś ta przecina elipsoidę w ∞ , t. j. elipsoida w danym razie przekształca się na walec; którego oś przechodzi przez dany punkt materialny oraz obrany biegun; a ponieważ w danym przykładzie dla obranego bieguna jedną tylko taką osi znajdziemy, przeto oś ta jest największą osią elipsoidy. W celu wyznaczenia dwóch pozostałych osi przeprowadźmy przez dany biegun pęk osi prostopadłych do osi walca, a ponieważ momenty bezwładności względem tych osi są wzajemnie równe, przeto i odnośne promienie wodzące elipsoidy są wzajemnie równe. Wnioski te wystawimy: elipsoida bezwładności punktu materialnego, względem dowolnie obranego bieguna w przestrzeni, przekształca się w walec, którego oś przechodzi przez dany punkt materialny i przez obrany biegun, którego przekrój jest kołowy, o promieniu $= \frac{\lambda^2}{l\sqrt{m}}$; gdy literą l oznaczymy odległość danego punktu materialnego od

bieguna. Zbudowawszy taki walec, możemy wyznaczyć moment bezwładności danego punktu materialnego względem dowolnej osi; przechodzącej przez obrany biegun. Jasnym jest, że ze zmianą położenia bieguna zmienia się położenie osi walca i promień jego przekroju przy tej samej wartości λ . Gdy w szczególnym przypadku obierzemy biegun w danym punkcie materialnym, wtedy promień przekroju walca przybierze wartość $= \infty$, t. j. cała jego powłoka odsunie się do nieskończoności tak, iż długość każdego promienia wodzącego, przechodzącego przez dany punkt $= \infty$, momenty zatem bezwładności danego punktu względem każdej osi, przechodzącej przez niego równa się zeru; co również wynika bezpośrednio z postawionych warunków zadania.

117. Przykład. Znaleźć szczególne właściwości elipsoidy bezwładności dwóch punktów materialnych, względem różnych biegunów, dowolnie obieranych w przestrzeni.

Gdy obierzemy biegun nie na prostej, łączącej dane punkty, wtedy momenty ich bezwładności względem wszystkich osi, przechodzących przez taki biegun, posiadają wartości skończone; a końce odnośnych promieni ρ wyznacza elipsoidę o skończonej wielkości średnic. Dla szczególnych położań biegunów, gdy obierzemy je np. na prostej, łączącej dwa dane punkty, wtedy elipsoidy względem tych biegunów przekształcają się w walce o przekrojach kołowych i wspólnej osi, przechodzącej przez dane punkty; promienie tych przekrojów zależą od odległości obranego bieguna od danych punktów materialnych.

Przeprowadźmy przez biegun, nie leżący na prostej łączącej dane punkty, i przez dwa dane punkty płaszczyznę, a będzie ona płaszczyzną symetrii danego

układu punktów (po obydwóch bowiem stronach tej płaszczyzny niema punktów, jest to więc szczególnie przypadek symetrii); jedna więc z osi głównych szukanej elipsoidy dla dowolnego punktu tej płaszczyzny, jest prostopadłą do niej, a moment bezwładności względem tej osi równa się sumie iloczynów z mas danych punktów i kwadratów ich odległości od obranego bieguna; dwie pozostałe osi leżą w tej płaszczyźnie. Łatwo spostrzedz, że te wnioski stosują się również do prostego odcinka materyalnego.

118. Przykład. Znaleźć szczególne właściwości elipsoidy bezwładności trzech materyalnych punktów względem biegunów, dowolnie obieranych w przestrzeni.

W danym razie elipsoida bezwładności posiada dla wszelkich biegunów skończone wymiary. W szczególnym przypadku, gdy biegun obierzemy w płaszczyźnie trzech punktów; wtedy jedna z osi głównych jest prostopadłą do tej płaszczyzny.

Do określenia właściwości elipsoid bezwładności więcej złożonych układów punktów należy wogóle stosować metody ogólne, wyłożone w poprzednich paragrafach.

119. Układy płaskie punktów materyalnych. Szczególnym przypadkiem układów punktów materyalnych są układy na płaszczyźnie. Fizycznie układy takie przedstawić sobie możemy w postaci bardzo cienkich płyt materyalnych płaskich. To, cośmy powiedzieli o momentach bezwładności brył, stosuje się w zupełności do płaskich układów punktów; zachodzą tylko pewne szczególne ich właściwości, wynikające ze szczególnego sposobu rozmieszczenia punktów; właściwości te są następujące:

1) płaszczyznę układu płaskiego uważać można za jego płaszczyznę symetrii; jedna przeto z osi głównych bezwładności dla każdego punktu tej płaszczyzny jest prostopadłą do niej, dwie zaś pozostałe leżą na tej płaszczyźnie; wobec czego mówimy w tym razie tylko o dwóch osiach bezwładności.

2) przeprowadźmy przez obrany punkt w płaszczyźnie danego układu dwie prostopadłe osi spórzędnych x i y i prostopadłe do niej oś z ; to zachodzą następujące równania:

$$I_x = \Sigma (m_k y_k^2); \quad I_y = \Sigma (m_k x_k^2); \quad I_z = \Sigma m_k (x_k^2 + y_k^2);$$

z których wynika, że:

$$I_z = I_x + I_y,$$

czyli suma momentów bezwładności figury płaskiej, względem dwóch osi, wzajemnie prostopadłych, równa się momentowi bezwładności względem ich punktu przecięcia się.

2) Jeżeli około pewnego bieguna, na płaszczyźnie układu, obracać będziemy prostą l , to moment bezwładności I_l danego układu względem tej prostej obliczymy ze wzoru 244-tego, podstawivszy w niego: $\cos(z, l) = 0$; a więc:

$$I_l = \cos^2(x, l) \cdot I_x + \cos^2(y, l) \cdot I_y - 2 \cos(x, l) \cdot \cos(y, l) \cdot I_{1,2}$$

4) Odłożywszy na każdej z tych osi promień $\rho = \pm \frac{\lambda^2}{\sqrt{I_l}}$, por. § 112-sty, otrzymamy jako geometryczne miejsce końców tych promieni elipsę, której równanie jest następujące:

$$x^2 \cdot I_x + y^2 \cdot I_y - 2xy \cdot I_{1,2} = \lambda^4.$$

5) Osi główne elipsy w danym biegunie płaszczyzny układu, nazywają się osiami głównymi w tym biegunie. Dla każdego punktu płaszczyzny kierunki tych osi się zmieniają. Momenty bezwładności względem osi leżących w płaszczyźnie układu i przechodzących przez środek jego masy, oznaczać będziemy literami A i B . Równanie elipsy bezwładności w środku masy, odniesione do osi głównych bezwładności jest następujące :

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{B}}\right)^2} = 1.$$

6) Na osi η , gdy $B < A$, znajdziemy parę ognisk, dla których elipsa bezwładności przekształca w koło bezwładności; znajomość położenia tych ognisk pozwala wyznaczyć główne osi bezwładności dla dowolnego bieguna, leżącego na płaszczyźnie układu.

7) Jeżeli oś l nie leży w płaszczyźnie układu, wtedy dla obliczenia momentu bezwładności względem tej osi, należy zastosować elipsoidę bezwładności w danym biegunie.

8) Warunki, pozwalające określić, czy na danej osi w płaszczyźnie układu, znajduje się biegun bezwładności, znajdziemy w następujący sposób. Obierzmy na danej osi punkt O jako początek układu współrzędnych; daną oś obierzmy za oś y , prostopadłą do niej za oś x . Na osi y w odległości y_0 obierzmy punkt O' jako początek drugiego układu osi (x', y'), przyjmując daną oś za y' ; a zależność współrzędnych tych układów wyrazi się następującymi równaniami :

$$x' = x; \quad y' = y - y_0;$$

Jeżeli O' ma być punktem głównym, to powinno zachodzić równanie:

$$\Sigma(m_k x'_k y'_k) = 0;$$

lub inaczej :

$$\Sigma[m_k x_k (y_k - y_0)] = 0,$$

skąd otrzymamy :

$$y_0 = \frac{\Sigma(m_k x_k y_k)}{\Sigma(m_k x_k)} \dots \dots \dots (252)$$

Ponieważ jest tu jedno równanie z jedną niewiadomą y_0 , przeto każda prosta, leżąca w płaszczyźnie układu płaskiego punktów materialnych, posiada punkt bezwładności; odległość tego punktu od obranego początku obliczymy z równania 252-ego. Szczególne przypadki tego równania obliczyć można jak poprzednio.

120. Uogólnienie twierdzeń o właściwościach momentów. W następującem rozpatrywaniu nazywać będziemy wogóle momentem danego układu punktów materialnych iloczyn algebraiczny, wektorowy lub skalarny z dwóch długości i z wielkości masy i czasu; lub też — sumę takich iloczynów. A więc przez tę nazwę rozumiemy: momenty bezwładności punktów i brył materialnych względem płaszczyzn, osi lub biegunów, — momenty ich odśrodkowe; — momenty ilości ruchu i wreszcie — energię kinetyczną. Dla każdego z tych momentów dowiedliśmy, że wartość jego względem dowolnej płaszczyzny, osi lub dowolnego bieguna, składa się z wielkości dwóch takich samych momentów, z których jeden jest momen-

tem, względem tychże płaszczyzn, osi lub biegunów środka masy danego układu; gdy w tym środku wyobrazimy sobie skupioną całą masę danego układu; drugi zaś jest takim samym momentem względem płaszczyzny lub osi, przechodzących przez ten środek lub względem bieguna, obranego w tym środku; porówn. wzory: 216-sty; 222-gi; 240-sty; 242-gi; 243-ci.

Tożsamość tych twierdzeń jest wynikiem tej wspólnej właściwości funkcji matematycznych, określających te momenty, że funkcye te są drugiego stopnia pod względem wymiaru długości. Wzory określające te momenty są:

$$\Sigma (m_k x_k^2); \quad \Sigma (m_k x_k y_k); \quad \Sigma (\mathbf{V} m_k \bar{v}_k \cdot \bar{r}_k); \quad \text{oraz} \quad \Sigma (\frac{1}{2} m_k v_k^2).$$

Jeżeli zastąpimy w tych wzorach daną długość sumą dwóch innych długości, z których jedna jest wielkością zmienną, odniesioną do środka masy; np. $x'_k, y'_k, \bar{r}'_k, \bar{v}'_k$; a druga wielkością stałą, określającą położenie lub ruch środka masy, np. wielkością x_s, y_s, \bar{r}_s lub \bar{v}_s ; to po wykonaniu odpowiednich działań matematycznych, wskazanych wyrazem, określającym dany moment, otrzymamy trojakiemu rodzaju wyrazy:

1) wyrazy typu

$$\Sigma (m_k x'_k{}^2); \quad \Sigma (m_k x'_k y'_k); \quad \Sigma (\mathbf{V} \Sigma m_k \bar{v}'_k \bar{r}'_k) \quad \text{oraz} \quad \Sigma (\frac{1}{2} m_k v'_k{}^2);$$

które są takimi samymi funkcjami, jak poprzednie, tylko — nowych zmiennych; t. j. wyrażają te same momenty innymi tylko zmiennymi;

2) wyrazy, będące iloczynami lub drugimi potęgami wyłącznie ze stałych długości, które można wynieść przed znak sumy; a sumę mas wszystkich punktów zastąpić masą całego układu; są to wyrazy nast.:

$$m x_s{}^2; \quad m x_s y_s; \quad \mathbf{V} m \bar{v}_s \bar{r}_s; \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2} m v_s{}^2;$$

i wreszcie otrzymamy wyrazy;

3) będące iloczynami ze stałych długości i ze zmiennych długości. Stałe wielkości wyniesiemy przed znak sumy, a sumy będą równe zeru; gdyż są sumami iloczynów z mas i z odległości od środka masy lub z ich pochodnych. Jeżeli bowiem określimy położenie środka masy wyrazem

$$m x_s = \Sigma (m_k x_k);$$

to z tego wynika, że

$$\Sigma (m_k x'_k) = 0;$$

a więc i

$$\Sigma \left(m_k \frac{d x'_k}{d t} \right) = 0; \quad \text{i t. p.}$$

wyrazy przeto tego rodzaju wypadną ze wzorów.

W tem właśnie określeniu środka masy leży uproszczenie podanych przekształceń.

2. Kinetyka brył materalnych.

121. Ilość ruchu i moment ilości ruchu bryły materalnej. Określenia ilości ruchu i momentu ilości ruchu pewnej bryły materalnej są te same, jakie daliśmy w §§ 81-szym i 83-cim dla dowolnego układu punktów materalnych; a mianowicie:

ilością ruchu danej bryły materalnej nazwiemy sumę wektorową ilości ruchu oddzielnych jej punktów, a

momentem jej ilości ruchu nazwiemy sumę wektorową momentów ilości ruchu tych punktów względem obranego bieguna.

Z określenia momentu ilości ruchu nie należy wnioskować, że moment ten równa się momentowi ilości ruchu środka masy; jest to bowiem słuszne, jak to niebawem zobaczymy, tylko dla pewnego szczególnego przypadku; wogóle zaś przypadek ten nie zachodzi; i wogóle, w celu obliczenia momentu ilości ruchu danej bryły należy postępować w tenże sposób, w jaki postępowaliśmy przy obliczaniu momentu sił, działających na daną bryłę; t. j. należy najpierw obliczyć wektory momentów ilości ruchu oddzielnych punktów, na jakie wyobrażamy sobie rozłożoną daną bryłę, następnie należy dodać te wektory; a ich wypadkowa będzie momentem ilości ruchu danej bryły.

W § 25-tym tego tomu podaliśmy znaczenie fizyczne ilości ruchu punktu materalnego; wyobrażając sobie, że ilość ruchu danego punktu materalnego może być uważana za miarę uderzenia, jakie udzielone zostało danemu punktowi; lub też za miarę działania chwilowego pewnej siły. Pojęcia te, odnoszące się do punktu materalnego, można również zastosować do ruchu bryły, wyobraziwszy ją sobie złożoną z bardzo wielu punktów materalnych. Wektor przeto ilości ruchu danej bryły materalnej, odniesiony do pewnego punktu przekształceń, porówn. § 143-ci tomu I-go, wyraża wypadkową wszystkich sił chwilowych, nadających punktom danej bryły posiadane przez nich prędkości; a wektor momentu ilości ruchu danej bryły wyraża moment wypadkowy momentów tych sił, względem bieguna, obranego w punkcie przekształceń. Jeżeli np. uderzymy bryłę materalną, mogącą obracać się około pewnego punktu nieruchomego, to mamy do czynienia z siłą uderzenia i z jej momentem; miarą przeto uderzenia jest suma ilości ruchu wszystkich punktów, której wielkość równa się w myśl § 81-ego ilości ruchu środka masy; oraz sumie momentów ilości ruchu wszystkich jej punktów, którą nazwaliśmy momentem ilości ruchu danej bryły.

Jeżeli przeto mamy np. dany wektor momentu ilości ruchu pewnej bryły materalnej względem bieguna, około którego bryła się obraca, to należy wyobrazić sobie w płaszczyźnie, prostopadłej do tego wektora i przechodzącej przez punkt nieruchomy, siłę uderzającą, która wywołała dany stan prędkości punktów tej bryły; a stan ten, jeżeli bryła obraca się około punktu nieruchomego, określić można wektorem $\bar{\omega}$ prędkości obrotowej, jaką posiada bryła bezpośrednio po uderzeniu.

W rozpatrywaniach przeto ruchu takiej bryły i czynników wywołujących jej ruch, będziemy mieli do czynienia z dwoma wektorami; z wektorem momentu ilości ruchu \overline{M}_v , który jest wyrazem czynników fizycznych, działających na tę bryłę i z wektorem $\overline{\varphi}$ prędkości obrotowej danej bryły, który można uważać za wyraz skutku działania tych czynników; dwa te wektory są od siebie zależne; zajmujemy się przeto obliczeniem tej zależności. Zanim jednakże do tego przystąpimy, zwrócimy uwagę na tę okoliczność, że do wyrażenia tej zależności wypadnie zastosować właściwości rozmieszczenia mas punktów danej bryły względem obranego bieguna momentów; każdy bowiem punkt danej bryły jest punktem przyłożenia wektora jego ilości ruchu; wypadkowa przeto ich momentów zależy od rozmieszczenia geometrycznego tych punktów względem bieguna momentów i od wielkości ich mas.

Ilość ruchu danej bryły można obliczyć w tenże sposób, w jaki obliczyliśmy tę ilość dla dowolnego układu punktów, por. wzór 191-szy; powtórzmy przeto tutaj twierdzenie, podane w § 81-szym, że ilość ruchu bryły materialnej równa się ilości ruchu środka jej masy, gdy wyobrazimy sobie w tym środku skupioną całą masę danej bryły; twierdzenie to wyrazimy wzorem takim samym jak poprzednio:

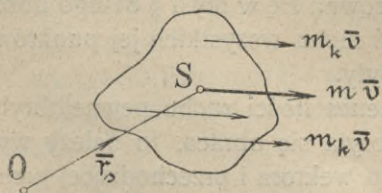
$$\Sigma (m_k \overline{v}_k) = m \overline{v}_s.$$

Wektor momentu ilości ruchu bryły materialnej da się wyrazić wielkościami, określającymi ruch danej bryły i wielkościami, wyrażającymi rozmieszczenie mas jej punktów; gdy tymczasem wektor momentu zmiennego układu punktów może być wyrażony tylko sumą ilości ruchu oddzielnych punktów, t. j. złożoną z tylu składników, ile było punktów w danym układzie. Ponieważ ruch punktów bryły materialnej da się wyrazić wogóle dwoma wektorami \overline{v} i $\overline{\varphi}$; t. j. — wektorem prędkości dowolnego jej punktu i wektorem prędkości kątowej; porówn. wzór 58-my, podany na str. 90-iej tomu I-go, przeto i moment jej ilości ruchu powinien dać się wyrazić temi wielkościami.

Zajmiemy się obecnie obliczeniem wzoru momentu ilości ruchu danej bryły materialnej, wyrażonego wielkościami określającymi jej ruch, i w tym celu, ażeby zadanie sobie ułatwić, obliczymy go najpierw dla pewnych szczególnych przypadków ruchu.

1) Gdy bryła jest w ruchu postępowym z prędkością \overline{v} , to moment jej ilości ruchu względem dowolnie obranego bieguna wyrazimy wzorem ogólnym:

$$\overline{M}_v = \Sigma [V m_k \overline{v} \cdot \overline{r}_k].$$



Rys. 72.

Ponieważ w tym przypadku ruchu wektory ilości ruchu mogą być uważane za przecinające się w jednym punkcie — w nieskończoności; suma przeto ich momentów równa się momentowi ich wypadkowej: a że długości tych wektorów są proporcjonalne do mas, to wypadkowa ich, podobnie jak wypadkowa sił ciężkości oddzielnych punktów, przechodzi przez środek masy danej bryły;

i równa się wielkości $m \overline{v}$; przeto, jeżeli bryła jest w ruchu postępowym, to

$$\overline{M}_v = V m \overline{v} \cdot \overline{r}_s; \quad \dots \quad (253)$$

gdzie \bar{r}_s jest promieniem wodzącym, wyprowadzonym z obranego bieguna, do środka masy danej bryły.

Wniosek ten wypowiemy: moment, względem dowolnie obranego bieguna, ilości ruchu bryły, będącej w ruchu postępowym, równa się momentowi ilości ruchu środka jej masy względem tegoż bieguna, gdy wyobrazimy sobie całą masę skupioną w tym środku.

Drogą rachunku wektorowego dojdziemy do tego wyniku w następujący sposób. Stosownie do określenia momentu ilości ruchu napiszemy wzór:

$$\bar{M}_v = \Sigma [\mathbf{V} m_k \bar{v} \cdot \bar{r}_k];$$

lub inaczej zgodnie z prawidłami, wyłożonemi w § 110-tym tomu I-ego:

$$\bar{M}_v = \mathbf{V} \bar{v} \cdot \Sigma (m_k \bar{r}_k);$$

i wreszcie:

$$\bar{M}_v = \mathbf{V} \bar{v} \cdot m \bar{r}_s, \quad \text{lub po przestawieniu czynnika } m \quad \bar{M}_v = \mathbf{V} m \bar{v} \cdot \bar{r}_s.$$

W szczególnym przypadku, gdy biegun momentów obierzemy w środku masy takiej bryły, to

$$\bar{M}_v = 0;$$

moment względem bieguna obranego w środku masy, ilości ruchu bryły, poruszającej się ruchem postępowym, jest w każdej chwili równy zeru.

2) Weźmy teraz pod uwagę układ sztywny punktów, leżących na płaszczyźnie i przyjmijmy, że układ ten znajduje się w ruchu dowolnym w swojej płaszczyźnie; czyli weźmy pod uwagę figurę płaską materyalną, poruszającą się w swej płaszczyźnie.

Podczas ruchu takiego układu suma wektorowa momentów ilości ruchów oddzielnych jego punktów zamienia się na sumę algebraiczną; prędkości bowiem oraz ilości ruchu oddzielnych punktów leżą w jednej płaszczyźnie; wektory przeto $\bar{M}_{v,k}$ leżą na wspólnej prostopadłej, wystawionej w obranym biegunie.

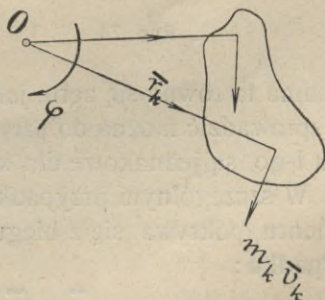
Wiemy z kinematyki, że każdy ruch płaski może być wywołany przez obrót około środka chwilowego obrotu, porówn. § 61-szy tomu I-szego. Gdy obierzemy biegun momentów w **środku chwilowego obrotu** (*) i oznaczmy prędkość kątową obrotu chwilowego literą φ , wtedy

$$v_k = r_k \cdot \varphi,$$

gdzie r_k oznacza w tym razie prostopadłą odległość bieguna momentów od kierunku ilości ruchu k -tego punktu.

Po podstawieniu tej wartości w ogólny wzór momentu ilości ruchu, otrzymamy jego wartość:

$$M_v = \Sigma (m_k r_k \varphi \cdot r_k) = \varphi \cdot \Sigma (m_k r_k^2);$$



Rys. 73.

(*) Należy uświadomić sobie różnicę pomiędzy środkiem chwilowego obrotu a biegunem momentów. Środek chwilowego obrotu określa chwilowy ruch bryły; biegunem zaś, względem którego obliczamy momenty, może być dowolny punkt przestrzeni.

skąd wreszcie :

$$M_v = I_0 \cdot \varphi \quad (254)$$

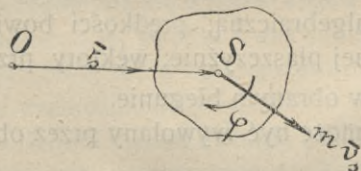
gdzie I_0 oznacza moment bezwładności danego układu względem środka chwilowego obrotu. Wzór ten wysłowimy: moment ilości ruchu figury płaskiej materialnej względem bieguna, obranego w środku chwilowego obrotu, równa się iloczynowi z prędkości kątowej i z momentu bezwładności danej figury względem tegoż bieguna.

Jeżeli zaś biegun momentu ilości ruchu obierzemy w dowolnym punkcie na płaszczyźnie danej figury, nie w środku chwilowego obrotu; to wartość tego momentu obliczymy, wyobraziwszy sobie na zasadzie § 65 tego tomu I-ego; że ruch chwilowy figury danej jest złożony z ruchu postępowego o prędkości \bar{v}_s , jaką posiada w danej chwili np. środek masy tego układu i z ruchu obrotowego o prędkości φ około tego środka; moment przeto ilości ruchu każdego punktu składa się z sumy momentów obydwóch składowych tego ruchu; zważywszy następnie, że ruch punktów, wywołany obrotem figury około środka masy, jest ruchem względnym, który określiliśmy w § 92-im tego tomu; możemy zastosować bezpośrednio do obliczenia momentu ilości ruchu danej figury twierdzenie podane w § 216-tym tego tomu; wypowiemy je: moment ilości ruchu układu płaskiego względem bieguna, dowolnie obranego na płaszczyźnie tego układu, składa się: z momentu ilości ruchu postępowego względem obranego bieguna, moment ten jest wyrażony równaniem 253-im, i z momentu ilości ruchu obrotowego, względem bieguna; obranego w środku masy; moment ten wyrażony jest wzorem 42-gim; całkowity przeto moment: ¹⁾

$$\bar{M}_v = \mathbf{V} m \bar{v}_s \cdot \bar{r}_s + I_s \cdot \bar{\varphi} \quad (255)$$

W szczególnym przypadku, w którym środek masy figury płaskiej pozostaje

w spoczynku, wartości momentów jej ilości ruchu względem wszystkich biegunów są jednakowe; równe są bowiem wyrazowi $I_s \cdot \varphi$. Do wniosku tego dojdziemy również drogą bezpośredniego rozumowania, wzięwszy pod uwagę twierdzenie, że suma wektorów ilości ruchu każdej bryły materialnej równa się wektorowi ilości ruchu środka masy; jeżeli



Rys. 74.

zaś suma ta równa się zeru, jak w przypadku przytoczonym, to układ tych wektorów sprowadzić można do pary wektorów, których momenty na zasadzie § 115-tego tomu I-go, są jednakowe dla wszystkich biegunów.

W szczególnym przypadku, który rozpatrywaliśmy poprzednio, jeżeli biegun momentu pokrywa się z biegunem chwilowego obrotu; to, zważywszy, że w tym przypadku :

$$\bar{r}_s \perp \bar{v}_s; \quad \text{a więc} \quad v_s = r_s \cdot \varphi;$$

wyraz momentu ilości ruchu jest następujący :

$$M_v = m r_s^2 \cdot \varphi + I_s \cdot \varphi;$$

¹⁾ Czytelnik zechce sobie uprzytomnić położenie tych wektorów względem płaszczyzny figury, jak również wyprowadzić ten wzór na podstawie § 144-tego tomu I-go.

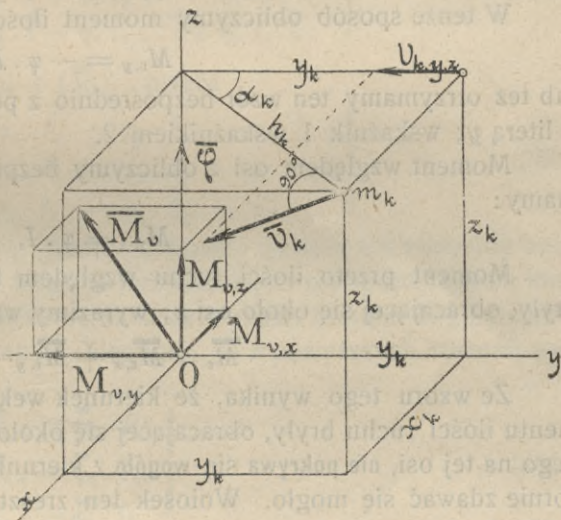
a zważywszy jeszcze, że zgodnie z równaniem 242-em:

$$m r_s^2 + I_s = I_0;$$

otrzymamy wzór 254-ty, wyprowadzony bezpośrednio dla tego przypadku.

3) Jeżeli bryła materyalna obraca się około osi, to można dowieść w tenże sposób, w jaki to uczyniliśmy dla figury płaskiej, że moment jej ilości ruchu względem osi obrotu równa się iloczynowi z momentu bezwładności tej bryły względem osi obrotu i z prędkości obrotowej; i wzór tego momentu będzie jednakowy ze wzorem 254-ym z tą tylko różnicą, że I_0 oznaczać będzie moment bezwładności danej bryły względem osi obrotu.

4) Wyznamy teraz położenie i wielkość wektora momentu ilości ruchu bryły, obracającej się około pewnej osi, względem bieguna obranego na tejże osi. W celu tego obliczenia zastosujemy układ współrzędnych (x, y, z) , którego początek obierzmy w danym biegunie O na danej osi; i przyjmieśmy kierunek osi obrotu φ za oś z , a osi x i y prostopadłe do niej; zresztą—dowolnie. Na rysunku 75-ym pokazany jest biegun momentów O i oś obrotu φ ; oraz jeden punkt m_k danej bryły.



Rys. 75.

Wyobrazimy sobie następnie, że szukany wektor \bar{M}_v jest zrzutowany na obrane osi współrzędnych; a rzuty jego, które oznaczymy literami $M_{v,x}$ i $M_{v,y}$ i $M_{v,z}$, uważać będziemy stosownie do § 28-go tomu I-go, za momenty ilości ruchu danej bryły względem osi x, y, z ; a obliczywszy te momenty, wyznaczmy z nich położenie właściwego momentu względem obranego bieguna i obliczymy jego wielkości; porówn. §§ 131-szy i 132-gi tomu I-go; w których postępowaliśmy w tenże sposób; przy obliczeniu momentu siły względem bieguna.

Ażeby przeto obliczyć np. $M_{v,x}$, zrzutujemy wektory ilości ruchu każdego punktu danej bryły na płaszczyznę (y, z) , i obliczymy momenty tych rzutów względem początku współrzędnych. Oznaczywszy odległości k -tego punktu od osi obrotu literami h_k ; wyrazimy wartość prędkości jego wzorem $h_k \varphi$. Oznaczywszy następnie kąt, jaki tworzy promień h_k z płaszczyzną (y, z) literą α_k , wyrazimy rzut $v_{k,y,z}$ prędkości v_k na płaszczyznę (y, z) wzorem:

$$v_{k,y,z} = (h_k \varphi) \cdot \sin \alpha_k;$$

kierunek bowiem prędkości v_k tworzy z płaszczyzną (y, z) kąt $(90 - \alpha_k)$; a zważywszy, że

$$h_k \cdot \sin \alpha_k = x_k;$$

wyrazimy rzut na płaszczyznę (y, z) wektora ilości ruchu tego punktu wzorem:

$$m_k x_k \varphi;$$

a moment jego względem bieguna, obranego w początku układu, wzorem

$$- (m_k x_k \varphi) \cdot z_k;$$

z_k jest bowiem w tym razie ramieniem tego rzutu; a więc

$$M_{v,x} = - \varphi \Sigma (m_k x_k z_k);$$

lub inaczej

$$M_{v,x} = - \varphi \cdot I_{1,3}; \quad \dots \dots \dots (256)$$

gdzie $I_{1,3}$ oznacza moment odśrodkowy danej bryły względem płaszczyzn 1-ej i 3-ej; (porówn. § 106-ty tego tomu).

W tenże sposób obliczymy moment ilości ruchu względem osi y :

$$M_{v,y} = - \varphi \cdot I_{2,3}; \quad \dots \dots \dots (257)$$

lub też otrzymamy ten wzór bezpośrednio z poprzedniego, gdy zastąpimy w nim x literą y ; wskaźnik 1 wskaźnikiem 2.

Moment względem osi z obliczymy bezpośrednio ze wzoru 254-tego i otrzymamy:

$$M_{v,z} = \varphi \cdot I_z \quad \dots \dots \dots (258)$$

Moment przeto ilości ruchu względem bieguna O obranego na osi obrotu bryły, obracającej się około osi z ; wyrazimy wzorem wektorowym

$$\overline{M}_v = \overline{M}_{v,x} + \overline{M}_{v,y} + \overline{M}_{v,z}.$$

Ze wzoru tego wynika, że kierunek wektora M_v , t. j. kierunek wektora momentu ilości ruchu bryły, obracającej się około danej osi względem bieguna obranego na tej osi, nie pokrywa się wogóle z kierunkiem tejże osi obrotu, jakby to pozornie zdawać się mogło. Wniosek ten zresztą unaocznimy sobie bezpośrednio, jeżeli zbudujemy wektor momentu pojedynczego punktu materialnego względem bieguna obranego na osi, około której ten punkt się obraca. W szczególnem tylko położeniu bryły, jakie ona zajmuje względem osi obrotu, kierunki te pokrywać się mogą; a to nastąpi tylko wtedy, gdy jednocześnie wartości:

$$I_{1,3} = 0; \quad \text{oraz} \quad I_{2,3} = 0.$$

Wniosek ten wypowiemy:

kierunek wektora momentu ilości ruchu względem bieguna, obranego na osi obrotu pewnej bryły materialnej, pokrywa się tylko wtedy z kierunkiem tej osi, jeżeli oś ta jest jedną z osi głównych elipsoidy bezwładności, zbudowanej w obranym biegunie momentów.

Z powyższych warunków wynika jeszcze wniosek, jeżeli w szczególnym przypadku bryła posiada takie położenie względem osi obrotu, że na tej osi znajduje się biegun bezwładności (§ 114-ty tego tomu); to kierunek momentu ilości ruchu względem tego bieguna, ale tylko względem tego bieguna, pokrywa się z kierunkiem osi obrotu.

5) W ogólniejszym przypadku ruchu, jeżeli kierunek osi obrotu nie pokrywa się z żadną z osi obranego już układu spólrzędnych, to w celu obliczenia wektora momentu ilości ruchu względem bieguna, obranego na tej osi, rozło-

żymy wektor prędkości obrotowej $\bar{\varphi}$ w kierunkach osi spólrzędnych; a dany obrót $\bar{\varphi}$ będziemy uważali za złożony z trzech obrotów $\bar{\varphi}_x, \bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z$; i obliczenie momentu ilości ruchu sprowadzimy do poprzedniego przypadku.

Wyznaczywszy kierunki obranych osi spólrzędnych wektorami jednostkowymi $\bar{i}, \bar{k}, \bar{j}$ (§ 21-szy tomu I-go), a momenty ilości ruchu względem bieguna, obranego w początku układu, powstające podczas kolejnych obrotów około tych osi literami $(\bar{M}_v)_1, (\bar{M}_v)_2$ i $(\bar{M}_v)_3$; napiszemy na zasadzie wzorów 259-tych; stosując je kolejno do tych przypadków:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{M}_v)_1 &= + \varphi_x I_x \cdot \bar{i} - \varphi_x I_{1,2} \cdot \bar{j} - \varphi_x I_{1,3} \cdot \bar{k}; \\ (\bar{M}_v)_2 &= - \varphi_y I_{1,2} \cdot \bar{i} + \varphi_y I_y \cdot \bar{j} - \varphi_y I_{2,3} \cdot \bar{k}; \\ (\bar{M}_v)_3 &= - \varphi_z I_{1,3} \cdot \bar{i} - \varphi_z I_{2,3} \cdot \bar{j} + \varphi_z I_z \cdot \bar{k}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (259)$$

A ponieważ $\bar{M}_v = (\bar{M}_v)_1 + (\bar{M}_v)_2 + (\bar{M}_v)_3$, przeto

$$\left. \begin{aligned} M_{v,x} &= + \varphi_x \cdot I_x - \varphi_y \cdot I_{1,2} - \varphi_z \cdot I_{1,3}; \\ M_{v,y} &= - \varphi_x \cdot I_{1,2} + \varphi_y \cdot I_y - \varphi_z \cdot I_{2,3}; \\ M_{v,z} &= - \varphi_x \cdot I_{1,3} - \varphi_y \cdot I_{2,3} + \varphi_z \cdot I_z. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (260)$$

Wzory te znacznie się uproszczą, jeżeli obierzemy główne osi elipsoidy bezwładności, zbudowanej dla obranego bieguna momentów, za osi spólrzędnych; momenty bowiem odśrodkowe będą równe zeru. Jeżeli przeto literami ξ, η i ζ oznaczymy osi główne danej bryły w obranym biegunie, to z powyższych równań wynika, że:

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{v,\xi} &= \bar{\varphi}_\xi \cdot I_\xi; \\ \bar{M}_{v,\eta} &= \bar{\varphi}_\eta \cdot I_\eta; \\ \bar{M}_{v,\zeta} &= \bar{\varphi}_\zeta \cdot I_\zeta. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (261)$$

skąd:

$$\bar{M}_v = \bar{\varphi}_\xi \cdot I_\xi + \bar{\varphi}_\eta \cdot I_\eta + \bar{\varphi}_\zeta \cdot I_\zeta \dots \dots \dots (262)$$

lub analitycznie

$$M_v^2 = (\varphi_\xi \cdot I_\xi)^2 + (\varphi_\eta \cdot I_\eta)^2 + (\varphi_\zeta \cdot I_\zeta)^2;$$

i t. d.

Równania te pozwalają wyznaczyć wektor \bar{M}_v , gdy dane jest położenie wektora $\bar{\varphi}$ i położenie bryły w przestrzeni; t. j. gdy znane jest położenie wektora $\bar{\varphi}$ względem trzech głównych osi elipsoidy i momenty bezwładności względem tych osi. I odwrotnie, za pomocą powyższych równań wyznaczyć można wektor $\bar{\varphi}$, gdy znane jest położenie wektora \bar{M}_v względem osi głównych danej bryły oraz momenty jej bezwładności względem tych osi; wektor ten wyznaczmy z równań 261-ych:

$$\bar{\varphi}_\xi = \frac{\bar{M}_{v,\xi}}{I_\xi}; \quad \bar{\varphi}_\eta = \frac{\bar{M}_{v,\eta}}{I_\eta}; \quad \bar{\varphi}_\zeta = \frac{\bar{M}_{v,\zeta}}{I_\zeta};$$

skąd

$$\bar{\varphi} = \frac{\bar{M}_{v,\xi}}{I_\xi} + \frac{\bar{M}_{v,\eta}}{I_\eta} + \frac{\bar{M}_{v,\zeta}}{I_\zeta} \dots \dots \dots (263)$$

122. Energia kinetyczna bryły materalnej. Określenie energii kinetycznej bryły jest takie same, jakie podaliśmy w § 84-tym wogóle dla układów punktów materalnych. Ponieważ w danym razie układem punktów jest sztywna bryła materalna, przeto gdy znany jest jej ruch; t. j. gdy są znane np. wektory \bar{v}_A i $\bar{\varphi}$, (wzór 58-my str. 90 tomu I-ego); wtedy prędkość każdego jej punktu jest już ściśle temi wielkościami określona; a więc i energia kinetyczna może być wyrażoną temi wielkościami. Zadaniem naszym jest obecnie obliczenie energii kinetycznej danej bryły, gdy dany jest jej ruch.

W tym celu obliczymy najpierw te wartości dla pewnych szczególnych przypadków ruchu:

1) jeżeli np. bryła pozostaje w spoczynku, to jej energia kinetyczna

$$T = 0;$$

prędkości bowiem wszystkich punktów są równe zeru;

2) gdy zaś bryła jest w ruchu postępowym z prędkością chwilową \bar{v} ; natenczas

czas

$$T = \Sigma (\frac{1}{2} m_k v^2);$$

skąd

$$T = \frac{1}{2} m v^2;$$

gdzie $m = \Sigma m_k$ oznacza masę całej bryły;

3) gdy bryła obraca się w danej chwili około pewnej osi z prędkością kątową φ i gdy h_k oznaczają odległości jej punktów od osi obrotu, to

$$v_k = \varphi \cdot h_k; \quad \text{a więc}$$

$$T = \Sigma [\frac{1}{2} m_k (\varphi \cdot h_k)^2] = \frac{1}{2} \varphi^2 \cdot \Sigma (m_k h_k^2);$$

i wreszcie

$$T = \frac{1}{2} I_\varphi \cdot \varphi^2 \quad \dots \quad (264)$$

gdzie litera I_φ oznacza moment bezwładności danej bryły względem osi obrotu.

4) W razie zaś swobodnego ruchu bryły, energię jej kinetyczną obliczymy, gdy wyobrazimy sobie że ruch chwilowy złożony jest np. z prędkości postępowej \bar{v}_s środka jej masy i z prędkości obrotowej $\bar{\varphi}$ około osi, przechodzącej przez ten środek; a zważywszy, że prędkości, które powstają wskutek obrotu bryły, są prędkościami względnie określonymi w § 92-im, napiszemy wzór energii kinetycznej danej bryły ze wzoru 20-tego i 22-go:

$$T = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} I_s \cdot \varphi^2; \quad \dots \quad (265)$$

gdzie I_s oznacza moment bezwładności bryły względem osi chwilowego obrotu, przechodzącej przez środek jej masy.

Wzór ten wysłowimy: energia kinetyczna bryły materalnej, równa się sumie algebraicznej dwóch składników; z których jeden wyraża energię kinetyczną środka masy; gdy wyobrazimy sobie skupioną w nim całą masę; drugi zaś wyraża energię kinetyczną ruchu obrotowego bryły około osi, przechodzącej przez ten środek. Energię kinetyczną np. walca o przekroju kołowym, toczącym się po płaszczyźnie z prędkością postępową v_s wyrazimy wzorem:

$$T = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} I_s \cdot \varphi^2 \quad \dots \quad (266)$$

Wzór ten da się jeszcze przekształcić ze względu, że mamy w danym przypadku warunek toczenia się; który wyrazimy wzorem

$$v_s = r \cdot \varphi;$$

gdym literą r oznaczymy promień przekroju walca; a po podstawieniu wartości φ z tego równania w poprzednie, otrzymamy:

$$T = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} I_s \left(\frac{v_s}{r} \right)^2; \dots \dots \dots (267)$$

a ponieważ moment bezwładności walca pełnego względem jego osi, § 102-gi,

$$I_s = \frac{1}{2} m r^2;$$

przeto

$$T = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} \frac{v_s^2}{r^2} \cdot \frac{1}{2} m r^2$$

i wreszcie, po uproszczeniu tego wzoru, wyraz energii kinetycznej toczącego się walca jest następujący:

$$T = \frac{3}{4} m v_s^2.$$

123. Związki matematyczne pomiędzy wyrazem momentu ilości ruchu a wyrazem energii kinetycznej. Ponieważ moment ilości ruchu i energia kinetyczna danej bryły materialnej jest ściśle określoną wielkościami określającymi ruch bryły, przeto pomiędzy wyrazem momentu i wyrazem energii zachodzi powinien pewien związek matematyczny; związek ten znajdziemy w następujący sposób.

Energię kinetyczną punktu k -tego, którą oznaczymy literą T_k , wyrazimy iloczynem skalarnym dwóch wektorów; § 84-ty:

$$T_k = \frac{1}{2} m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k;$$

lub inaczej

$$T_k = \frac{1}{2} m_k \bar{v}_k \cdot \mathbf{V} \bar{r}_k \cdot \bar{\varphi};$$

gdzie \bar{r}_k oznaczają promienie wodzące, wyprowadzone z dowolnego bieguna obranego na osi obrotu do punktów danej bryły.

Wyraz ten przekształcimy na zasadzie prawidła, podanego na str. 252-iej tomu I-go, na następujący:

$$T_k = \frac{1}{2} \bar{\varphi} \cdot \mathbf{V} m_k \bar{v}_k \cdot \bar{r}_k;$$

a ponieważ

$$\mathbf{V} m_k \bar{v}_k \cdot \bar{r}_k = \bar{M}_{v, k};$$

przeto

$$T_k = \frac{1}{2} \bar{\varphi} \bar{M}_k;$$

po dodaniu takich wartości, zestawionych dla wszystkich punktów danej bryły, otrzymamy, że

$$T = \frac{1}{2} \bar{\varphi} \cdot \bar{M}_v. \dots \dots \dots (268)$$

Wzór ten wysłowimy: wartość energii kinetycznej bryły materialnej równa się połowie iloczynu skalarnego z wektora prędkości obrotu i z wektora momentu ilości ruchu względem bieguna dowolnie obranego na osi obrotu.

Związek ten przekształcimy jeszcze na inny, przydatny często do przekształceń analitycznych. Zrzutujemy mianowicie wektory $\overline{\varphi}$ i \overline{M}_v na trzy wzajemnie prostopadłe osi, a na zasadzie wzoru wektorowego (wzór 158-my na str. 250-jej tomu I-ego); napiszemy równanie 268-me w postaci algebraicznej:

$$T = \frac{1}{2} \varphi_x \cdot M_{v,x} + \frac{1}{2} \varphi_y \cdot M_{v,y} + \frac{1}{2} \varphi_z \cdot M_{v,z}; \dots \dots \dots (269)$$

Wartości momentów względem osi spólrzędnych podstawimy w to równanie z równań 260-ych, i otrzymamy

$$T = \frac{1}{2} \varphi_x^2 \cdot I_x + \frac{1}{2} \varphi_y^2 \cdot I_y + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \cdot I_z - \frac{1}{2} \cdot 2 \varphi_x \cdot \varphi_y \cdot I_{1,2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \varphi_y \cdot \varphi_z \cdot I_{2,3} - \frac{1}{2} \cdot 2 \varphi_z \cdot \varphi_x \cdot I_{3,1} \dots \dots \dots (270)$$

Określiwszy przeto chwilowy obrót bryły wielkościami φ_x , φ_y , φ_z , i znając jej momenty bezwładności i odśrodkowe względem osi spólrzędnych x , y , z , obliczymy ze wzoru 270-go jej energię kinetyczną.

Z równania tego, po jego zróżniczkowaniu cząstkowym względem zmiennych φ_x , φ_y , φ_z , otrzymamy:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_x} = \varphi_x \cdot I_x - \varphi_y \cdot I_{1,2} - \varphi_z \cdot I_{2,1};$$

a po uwzględnieniu wzoru 260-ego otrzymamy równanie:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_x} = M_{v,x}.$$

W tenże sposób otrzymamy związki pomiędzy rzutem momentu ilości ruchu danej bryły na obrane osi a pochodną cząstkową energii kinetycznej względem rzutu prędkości obrotu na tę oś; przeto mamy wogóle:

$$M_{v,x} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_x}; \quad M_{v,y} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_y}; \quad M_{v,z} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_z} \dots \dots \dots (271)$$

Jeżeli osi rzutów obierzemy w kierunkach osi głównych (ξ , η , ζ) środkowej elipsoidy bezwładności danej bryły, to po podstawieniu w równanie 269-te

$$M_{v,\xi} = \varphi_\xi I_\xi, \text{ i t. d.};$$

otrzymamy:

$$T = \frac{1}{2} \varphi_\xi^2 \cdot I_\xi + \frac{1}{2} \varphi_\eta^2 \cdot I_\eta + \frac{1}{2} \varphi_\zeta^2 \cdot I_\zeta; \dots \dots \dots (272)$$

skąd, jak poprzednio, otrzymamy związki:

$$M_{v,\xi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_\xi}; \quad M_{v,\eta} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_\eta}; \quad M_{v,\zeta} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_\zeta}.$$

które są również szczególnym przypadkiem równań 271-yh.

3. Równania dynamiczne ruchu brył materalnych.

124. Równania dynamiczne. Ponieważ bryłę materalną uważać można za układ punktów materalnych, pomiędzy którymi występują siły wewnętrzne czyniące zadość prawu wzajemnego działania, równania przeto dynamiczne ruchu środka masy, oraz równania momentów, wyprowadzone w §§ 88-ym i 89-tym dla układów zmiennych, można bezpośrednio stosować do ruchu brył sztywnych; równania te przeto są następujące:

równanie ruchu środka masy:

$$\Sigma \bar{P}_k = \frac{d(m\bar{v}_s)}{dt} \dots \dots \dots (273)$$

następnie, jako równanie momentu ilości ruchu rzeczywistego może być zastosowane jedno z równań, podanych w § 89-tym tego tomu; są one bowiem jednakowe, różnią się jedynie swą postacią; równania te są następujące:

$$\Sigma \mathbf{v} \bar{P}_k \cdot \bar{r}_k = \Sigma \mathbf{v} m_k \bar{p}_k \cdot \bar{r}_k; \dots \dots \dots (274)$$

$$\Sigma \mathbf{v} \bar{P}_k \cdot \bar{r}_k = \frac{d}{dt} \Sigma \mathbf{v} m_k \bar{v}_k \cdot \bar{r}_k; \dots \dots \dots (275)$$

$$\Sigma \mathbf{v} \bar{P}_k \cdot \bar{r}_k = \frac{d\bar{M}_v}{dt}; \dots \dots \dots (276)$$

równanie zaś momentu, względem bieguna obranego w środku masy, ilości ruchu względnego, napiszemy z równania 223-iego;

$$\Sigma \mathbf{v} \bar{P}_k \cdot \bar{r}'_k = \frac{d}{dt} \Sigma \mathbf{v} m_k \bar{v}'_k \cdot \bar{r}'_k \dots \dots \dots (277)$$

Równanie jednakże 207-me, t. j. równanie równowartości pracy i energii kinetycznej w zastosowaniu do brył sztywnych znacznie się upraszcza; suma bowiem prac sił wewnętrznych, jakie występują pomiędzy punktami sztywnej bryły materalnej równa się zeru; cośmy dowiedli w § 215-tym tomu I-go; równanie to przeto dla ruchu brył sztywnych jest następujące:

$$\Sigma L_P = d\Sigma (\frac{1}{2} m_k v_k^2) \dots \dots \dots (278)$$

Z równań tych obliczyć można ruch każdej bryły, który jest wywołany działaniem danych sił wewnętrznych; a ogólniej mówiąc, równania te dają związek pomiędzy siłami, działającymi na bryłę, a spółrzednymi jej ruchu.

Z równania ruchu środka masy, równ. 273-ie, obliczyć można podług metod, wyłożonych w 1-szej części tego tomu, ruch środka masy, jako punktu materalnego o masie równej masie całej bryły. Znajomość ruchu środka masy danej bryły ma w tym razie o tyle praktyczniejsze znaczenie, niż miało w układzie zmiennym punktów, że położenie bryły w przestrzeni jest już przez znajomość położenia tego środka do pewnego stopnia wyznaczone; do zupełnie przeto ścisłego określenia jej ruchu brak tylko znajomości ruchu względnego tej bryły względem środ-

ka masy, który obliczyć można z równania 277-ego. Z sześciu przeto stopni swobody ruchu, jakie posiada wogóle każda bryła swobodna, trzy można obliczyć z równania ruchu środka masy; a pozostałe trzy z równania momentu ilości ruchu względniego. Z tego bowiem równania obliczyć można wektor \overline{M}'_v , — lub jego rzuty na dowolne osi lub na osi główne danej bryły; a następnie, znając ten wektor, wyznaczyć można wektor $\overline{\varphi}$ chwilowego obrotu, do czego zastosować należy równania 260-te lub 263-ie; a wektor $\overline{\varphi}$ łącznie z obliczoną już prędkością v_s określi jednoznacznie ruch chwilowy danej bryły. Taka jest ogólna metoda obliczenia ruchu bryły, wywołanego działaniem danych sił.

Dla obliczenia przeto ruchu bryły swobodnej mamy dwa równania wektorowe (równ. 273-ie i np. równ. 277-te); te dwa równania wektorowe zastąpić można wogóle sześcioma równaniami algebraicznymi, z których obliczyć można sześć niewiadomych w funkcji czasu; niewiadomymi temi mogą być np. sześć współrzędnych, określających położenie bryły swobodnej w przestrzeni. Dwa przeto równania wektorowe lub sześć równań algebraicznych, które otrzymamy drogą rzutowania, wystarcza zupełnie do obliczenia ruchu bryły swobodnej; gdy dane są siły na nią działające. W zadaniach technicznych jednakże niewiadomymi bywają zwykle: częściowo siły (np. nieznanne siły odporowe) i częściowo współrzędne ruchu lub też związki pomiędzy temi współrzędnymi, porówn. § 60-ty tomu I-go; gdy bryła jest nieswobodną. Z tych rozpatrywań widzimy, że równanie równowartości pracy i energii kinetycznej jako równanie siódme staje się do obliczenia ruchu bryły zbytecznym; nasuwa się przeto wniosek, że to równanie, nie mogąc stać w sprzeczności z równaniem środka masy i z równaniem momentów, musi być wynikiem algebraicznych przekształceń tych równań; czego też bezpośrednio dowiedzimy w paragrafie następującym.

Sposób jednakże obliczenia ruchu bryły z powyższych równań znacznie się różni od takiegoż obliczenia ruchu punktów układu zmiennego; wyrazy bowiem momentów ilości ruchu oraz energii kinetycznej brył sztywnych dają się wyrazić wzorami o skończonej postaci; t. j. dają się wyrazić funkcjami wielkości, określających chwilowy ruch danej bryły; czego nie można było stosować do układów zmiennych; wzory te obliczyliśmy już w §§ 121-szym i 122-gim tego tomu i będziemy je stosować do poszczególnych przypadków ruchu brył.

Zanim przeto przystąpimy do rozwiązania danego zadania z dynamiki brył, powinniśmy przedewszystkiem obrać współrzędne, określające położenie a więc i ruch danej bryły; ażeby następnie móc temi współrzędnymi wyrazić momenty ilości ruchu lub energię kinetyczną, poruszającej się bryły. Współrzędne te naturalnie mogą w rachunku występować jako niewiadome lub jako znane wielkości; zaznaczyć przy tem należy, że od wyboru tych współrzędnych zależy prędkość i przejrzysty sposób przeprowadzenia całego rachunku i — przedstawienia jego wyników.

125. Związek pomiędzy równaniem dynamicznem momentów i równaniem pracy. W równaniu momentów wyraziliśmy sztywność bryły, stałością w danej chwili wielkości φ dla wszystkich punktów danej bryły; równanie przeto momentów i równanie pracy wyrażają te same właściwości bryły sztywnej i wskutek tego jedno z tych równań powinno być wynikiem drugiego. W celu tego

dowodzenia rozpatrzmy równania ruchu bryły, obracającej się około dowolnego punktu. Równanie momentów tego ruchu względem bieguna, obranego w środku obrotu, wyrazimy równaniem; równ. 274-te:

$$\Sigma[\mathbf{V}\bar{P}_k \cdot \bar{r}_k] = \Sigma[\mathbf{V}m_k\bar{p}_k \cdot \bar{r}_k].$$

Wyobraźmy sobie następnie, że bryłę daną obróciliśmy około osi chwilowego obrotu o kąt $\bar{\varphi} \cdot dt$; i pomnożmy powyższe równanie skalarnie przez tę wielkość, a otrzymamy:

$$\Sigma(\mathbf{V}\bar{P}_k \cdot \bar{r}_k) \cdot \bar{\varphi} dt = \Sigma(\mathbf{V}m_k\bar{p}_k \cdot \bar{r}_k) \cdot \bar{\varphi} \cdot dt.$$

Przekształćmy następnie te iloczyny skalarne podług prawidła, podanego na str. 252-iej tomu I-szego, a otrzymamy

$$\Sigma[\bar{P}_k \cdot \mathbf{V}\bar{r}_k \cdot \bar{\varphi} \cdot dt] = \Sigma[m_k\bar{p}_k \cdot \mathbf{V}\bar{r}_k \bar{\varphi} \cdot dt].$$

Wektor $\mathbf{V}\bar{r}_k \bar{\varphi} \cdot dt$ wyraża cząstkę drogi, jaką punkt k -ty zakreśla podczas obrotu bryły; cząstkę tę oznaczmy wektorem $d\bar{s}_k$; a po podstawieniu tego wyrazu w równanie powyższe napiszemy je w następujący sposób:

$$\Sigma(\bar{P}_k \cdot d\bar{s}_k) = \Sigma\left[m_k\bar{p}_k \cdot \frac{d\bar{s}_k}{dt}\right] dt;$$

lub po podstawieniu $\bar{p}_k = \frac{d\bar{v}_k}{dt}$ otrzymamy:

$$\Sigma(\bar{P}_k \cdot d\bar{s}_k) = \frac{d}{dt} \Sigma \frac{1}{2}(m_k\bar{v}_k^2);$$

a więc równanie pracy sił podczas ruchu kulistego bryły sztywnej jest wynikiem przekształceń algebraicznych równania momentów; nie wnosi ono nam przeto żadnych nowych właściwości ruchu.

Jeżeli zaś równanie momentów dane jest w postaci trzech równań algebraicznych; w postaci np. trzech równań momentów względem trzech osi prostokątnych; które to równania mogą być uważane za rzuty równania wektorowego momentów na trzy osi; to, ażeby z nich otrzymać równanie równowartości pracy i energii kinetycznej, należy każde z nich pomnożyć przez różniczkę kąta obrotu danej bryły około każdej z trzech osi a, po dodaniu tych równań, otrzymamy różniczkę zupełną, która będzie szukanem równaniem równowartości pracy i energii kinetycznej. Równanie to bowiem będzie wyrazem analitycznym mnożenia skalarnego; jaki podaliśmy w § 191-szym we wzorze 158-ym tomu I-go. W szczególnym przypadku jeżeli bryła obraca się około osi nieruchomej i posiada w pewnej chwili prędkość $\frac{d\sigma}{dt}$, to wystarczy pomnożyć równanie momentów przez wielkość $d\sigma$; ażeby otrzymać równanie równowartości pracy i energii kinetycznej.

Równanie przeto równowartości pracy i energii kinetycznej, zastosowane do ruchu bryły sztywnej, może być uważane jako jedno z trzech równań algebraicznych, jakimi wyrazić można każde równanie wektorowe. Równanie zaś równowartości pracy i energii kinetycznej, zastosowane do układów zmiennych, jest niezależne od równania momentów, wyraża ono bowiem nowe właściwości danego układu, a mianowicie właściwości sił wewnętrznych.

4. Obliczenie ruchu obrotowego bryły materialnej.

126. Ruch bryły, obracającej się około osi nieruchomej. Jeżeli bryła materialna może tylko obracać się około osi, nieruchomej w przestrzeni, to posiada jeden tylko stopień swobody ruchu; jedno przeto równanie algebraiczne wystarczy do obliczenia jej ruchu. Równaniem tem może być tak dobrze równanie momentu ilości ruchu jak też równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. Jeżeli zastosujemy równanie momentu ilości ruchu, to obliczymy momenty sił i moment ilości ruchu danej bryły względem osi obrotu; momenty bowiem sił odporowych, występujących w łożyskach danej osi, równają się w tym razie zeru; a jedynie momenty sił, przyłożonych do bryły, wejdą do obliczenia.

Położenie w przestrzeni bryły, obracającej się około osi nieruchomej, określimy kątem σ , jaki tworzy płaszczyzna, sztywno związana z bryłą i przechodząca przez oś obrotu, — z inną płaszczyzną, przechodzącą również przez tę oś lecz pozostającą nieruchomą w przestrzeni. Oznaczywszy chwilową prędkość literą φ ; moment bezwładności bryły względem osi obrotu literą I_o ; to równanie momentu ilości ruchu względem osi obrotu, zgodnie ze wzorami 276-tym i 254-tym tej części, jest następujące:

$$M_{P, \varphi} = \frac{d(I_o \cdot \varphi)}{dt}; \quad (279)$$

w którym $M_{P, \varphi}$ oznacza moment, względem osi obrotu, sił zewnętrznych, działających na tę bryłę; a iloczyn $I_o \cdot \varphi$ jest momentem ilości ruchu tej bryły, por. równ. 254-te. Jeżeli bryła podczas obrotu nie zmienia swego położenia względem osi obrotu, t. j. jeżeli jest sztywnie z nią związana, to wartość jej momentu bezwładności I_o nie zależy od czasu; i równanie powyższe przekształci się w tym razie na następujące:

$$M_{P, \varphi} = I_o \cdot \frac{d\varphi}{dt}; \quad (280)$$

Wzór ten wyraża, że moment sił zewnętrznych względem osi obrotu, równa się iloczynowi z momentu bezwładności bryły względem osi obrotu i z wartości przyspieszenia kąтового. Zachodzi przeto w tym wzorze ten sam związek pomiędzy momentem sił a wywołanem przyspieszeniem kątowem; jaki zachodzi pomiędzy siłą a wywołanem przyspieszeniem punktu materialnego, na który działa dana siła; porówn. wzór 6-ty. Wzór przeto 280-ty różni się od wzoru 6-tego tylko tem, że wielkość masy jest zastąpiona w przypadku ruchu obrotowego wielkością momentu bezwładności; przyspieszenie linijne przyspieszeniem obrotowem, a siła momentem.

127. Ruch obrotowy jednostajny. W szczególnym przypadku, jeżeli wartość momentu, względem osi obrotu, sił zewnętrznych równa się zeru; to otrzymamy równanie:

$$0 = \frac{d(I_o \cdot \varphi)}{dt},$$

z którego otrzymamy:

$$\varphi = \varphi_0;$$

gdy literą φ_0 oznaczymy prędkość początkową danej bryły.

Do tychże wyników dojdziemy również, stosując równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. Jeżeli bowiem podczas przesunięcia przystosowanego praca sił zewnętrznych, działających na bryłę, obracającą się około osi, równa się zeru, to bryła dana podczas ruchu nie otrzyma żadnego przyrostu energii kinetycznej, i wartość jej a więc i prędkość obrotowa pozostanie podczas obrotu bryły stałą; a więc równą energii kinetycznej ruchu początkowego, o ile moment bezwładności pozostaje stałym. Analitycznie wyrazimy to następującymi równaniami; równanie pracy jest w tym razie:

$$0 = d\left(\frac{1}{2} I_0 \cdot \varphi^2\right);$$

z którego, po scałkowaniu, otrzymamy:

$$\frac{1}{2} I_0 \cdot \varphi^2 - \frac{1}{2} I_0 \cdot \varphi_0^2; \quad \text{i wreszcie} \quad \varphi = \varphi_0.$$

Gdy np. na bryłę materialną, obracającą się około osi pionowej, działają np. tylko siły ciężenia wtedy, po nadaniu jej pewnej prędkości obrotowej będzie się ona obracała około tej osi ruchem jednostajnym. Będzie się ona również obracała ruchem jednostajnym około każdej innej osi, gdy oś ta przechodzić będzie przez jej środek ciężkości; praca bowiem sił ciężkości podczas tego obrotu lub moment tych sił względem takiej osi równa się zeru.

Jeżeli zaś bryła podczas swego obrotu zmienia położenie względem osi obrotu, np. zbliża się lub oddala się od osi; lub też zmienia swą postać wskutek jakich-bądź choćby nieznanых sił wewnętrznych; to z powyższego równania otrzymamy związek:

$$I \cdot \varphi - I_0 \varphi_0 = 0;$$

w którym I oznacza wartość momentu bezwładności w chwili, w której prędkość obrotowa równa się wartości φ ; czyli prędkość obrotowa φ jest w tym razie zmienną pomimo tego, że na bryłę nie działają siły zewnętrzne, któreby zmieniały jej ruch. Gdy np. gimnastyk, obracający się swobodnie z pewną prędkością około drążka gimnastycznego, przyciągnie swój korpus do tego drążka, wtedy nabejdzie on wskutek tego większej prędkości obrotowej, zmniejszy się bowiem jego moment bezwładności względem osi obrotu; ażeby obliczyć tę prędkość, należy znać zmienność momentu bezwładności bryły, jako funkcję czasu lub jako funkcję położenia. Zwrócić jeszcze należy uwagę czytelnika, że w razie stosowania równania równowartości pracy i energii kinetycznej do ruchu brył, które zmieniają układ swych punktów wskutek sił wewnętrznych, należy wprowadzić do tego równania wartość pracy tych sił, t. j. należy zastosować równ. 207-me.

128. Ruch obrotowy jednostajnie przyśpieszony. Jeżeli wartość momentu sił zewnętrznych M_P jest podczas ruchu wielkością stałą, to obrót bryły jest jednostajnie przyśpieszony; a równania ruchu tej bryły pod względem matematycznym będą te same, jakie otrzymaliśmy w § 6-tym dla ruchu punktu materialnego; należy tylko w tych równaniach zastąpić zmienną x zmienną σ ; prędkość v prędkością kątową φ ; wartość m wartością I_0 ; a P wartością M_P .

Przykładem ruchu obrotowego, wywołanego danymi siłami, może być wał i osadzone na nim koło; gdy bowiem na wał nawiniemy linę i do jej końca przyczepimy siłę stałą P , to moment jej względem osi będzie posiadał wartość stałą.

Moment sił zewnętrznych względem osi obrotu jest w danym razie $P \cdot r$, momenty bowiem sił odporowych względem tej osi równają się zeru; a siły oporowych w tym razie nie uwzględnimy; równanie przeto ruchu wału wraz z kołem jest następujące:

$$P \cdot r = I_o \cdot \frac{d\varphi}{dt}; \quad (281)$$

w którym I_o oznacza w danym razie moment bezwładności względem osi obrotu: wału, koła i wogóle wszystkich brył materalnych, związanych z wałem i obracających się razem z nim pod działaniem momentu siły P . Z równania tego wynika:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{P \cdot r}{I_o}$$

skąd po scałkowaniu

$$\varphi = \varphi_o + \left(\frac{P \cdot r}{I_o}\right) \cdot t;$$

i następnie, po powtórznem scałkowaniu:

$$\sigma = \varphi_o t + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{P \cdot r}{I_o}\right) \cdot t^2;$$

jeżeli przyjmiemy warunki ruchu początkowego, dla $t = 0$

$$\varphi = \varphi_o; \quad \text{oraz} \quad \sigma = 0.$$

Równanie momentów daje związek pomiędzy prędkością kątową a czasem; lub też pomiędzy położeniem bryły a czasem; jeżeli zaś zechcemy obliczyć związek pomiędzy tą prędkością a położeniem bryły, t. j. związek np. pomiędzy wielkościami φ i σ ; to postąpimy w ten sposób, w jaki postąpiliśmy w dynamice punktu, § 6-ty; a mianowicie wyrugujemy z równania powyższego zmienną t , podstawivszy

np. $dt = \frac{d\sigma}{\varphi}$; a otrzymamy po scałkowaniu szukany związek. Do tego samego wy-

niku dojdziemy również, jeżeli w myśl § 125 tego pomnożymy równanie momentów przez $d\sigma$; lub też jeżeli bezpośrednio zastosujemy równanie równowartości pracy i energii kinetycznej; jakieśmy to już wskazali w dynamice punktu, § 13-ty. Dla powyższego przykładu napiszemy następujące równanie pracy zważywszy, że praca sił odporowych równa się zeru:

$$P \cdot dx = d\left(\frac{1}{2} I_o \cdot \varphi^2\right); \quad (282)$$

w którym dx oznacza przesunięcie siły P ; a wyraz w nawiasach jest wyrazem energii kinetycznej, obliczonym z równ. 264-go. Po scałkowaniu tego równania, przyjąwszy dla

$$x = 0; \quad \varphi = \varphi_o$$

otrzymamy:

$$P \cdot x = \frac{1}{2} I_o (\varphi^2 - \varphi_o^2) \quad (283)$$

We wzorze tym wielkość x , wyrażająca długość odwiniętej nici, może być uważana za spórzędną położenia bryły. Jeżeli zaś zechcemy zastosować jako spórzędną położenia kąt obrotu bryły, jak to było poprzednio, to

podstawimy w powyższy wzór $x = \sigma \cdot r$. Łatwo się przekonać, że pochodna równania 281-ego będzie równaniem momentów; równanie bowiem pracy jest pierwszą całką równania momentów, cośmy już dowiedli w § 125-tym dla ogólnego przypadku.

Jeżeli dla obliczenia ruchu danego wału zechcemy uwzględnić siły oporowe, np. tarcie czopów w łożyskach wału; to przyjąwszy, że tarcie, występujące na obwodzie czopa, równa się wartości wyrazu

$$\mu (P + Q);$$

gdzie Q oznacza ciężar wału i jego obciążenia; napiszemy równanie momentów:

$$P \cdot r - \mu (P + Q) r_1 = I_0 \cdot \frac{d\varphi}{dt};$$

w którym r_1 oznacza promień czopa, czyli ramię siły tarcia. Z równania tego obliczyć można drogą całkowania prędkość kątową oraz kąt obrotu wału w każdej chwili.

Inny będzie jednakże ruch danej bryły, jeżeli siłą ciągnącą wywoływać będzie ciężar P bryły materialnej, przyczepionej do liny. Chociaż bowiem skutek tej zmiany wielkość siły, działającej na wał, nie zmieni się, obrót jego jednakże będzie inny; siła bowiem P wywołuje w danym razie zmianę ilości ruchu nie tylko masy wału, lecz i masy ciężaru; lub inaczej wyrażając się,—praca tej siły wywołuje wzrost energii kinetycznej nie tylko wału, koła lecz i masy ciężaru.

Należy przeto w tym razie wprowadzić do rachunku moment ilości ruchu lub też energię kinetyczną nie tylko wału i koła, lecz i ciężaru jako bryły materialnej, poruszającej się pod działaniem danej siły ciężkości. Ażeby to pojmowanie ująć rachunkiem, wyobrazimy sobie linę, na której zawieszony jest ciężar P przeciętą, a do jej końców przyłożone dwie równe siły S_1 i S_2 , rys 76-ty; w ten sposób zadanie to rozpadnie się na dwa zadania: na zadanie obliczenia ruchu obrotowego, wywołanego siłą S_1 i na zadanie—ruchu bryły, na którą działają siły P i S_2 . Do rozwiązania tych zadań możemy stosować znane równania dynamiczne; a wyraziwszy ruch każdej z tych brył siłami S_1 i S_2 i siłą P ; możemy z tych równań wyrugować siły S_1 i S_2 ; są one bowiem na zasadzie prawa wzajemnego działania wzajemne równe.

W celu obliczenia ruchu wału obracającego się, napiszemy tak jak poprzednio równanie momentów:

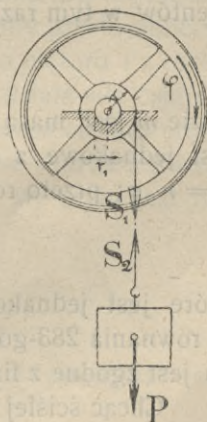
$$S_1 \cdot r = I_0 \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

W celu zaś obliczenia ruchu bryły, napiszemy równanie ruchu środka jej masy, oznaczywszy jego prędkość literą v :

$$P - S_2 = m \frac{dv}{dt}$$

a zważywszy, że na zasadzie prawa wzajemnego działania:

$$S_1 = S_2;$$



Rys. 76.

otrzymamy z powyższych równań równanie:

$$\frac{1}{r} \cdot I_0 \frac{d\varphi}{dt} = P - m \frac{dv}{dt};$$

lub po podstawieniu

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt};$$

$$P \cdot r = (I_0 + m r^2) \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad \dots \quad (284)$$

z którego obliczymy ruch wału w każdej chwili t .

Równanie to można również bezpośrednio otrzymać, wzięwszy pod uwagę, że równanie momentów pozostaje wogóle w mocy tak dla układów zmiennych jak i dla niezmiennych; a to ze względu, o którym już poprzednio mówiliśmy, że w obydwóch przypadkach suma momentów sił wewnętrznych, występujących pomiędzy punktami danego układu równa się zeru. Dany przeto układ dwóch brył uważać można za zmienny układ punktów; a sumę momentów ilości jego ruchu, możemy podzielić na dwie sumy: na sumę momentów ilości ruchu wału wraz ze sztywno połączonymi bryłami i na sumę momentów ilości ruchu punktów materialnych ciężaru, na jakie wyobrazimy go sobie rozłożonym.

Moment ilości ruchu wału wraz ze sztywno połączonymi z nim bryłami względem osi obrotu wyrazimy jak poprzednio iloczynem $I_0 \cdot \varphi$; a moment ilości ruchu ciężaru, zważywszy, że jego ruch jest postępowy, wyrazimy iloczynem z ilości ruchu środka masy i z długości odpowiedniego ramienia, wzór 253-ci. Jeżeli ciężar jest swobodnie zawieszony, to środek jego znajduje się na przedłużeniu osi liny; ramię przeto ilości jego ruchu, pomijając grubość liny, jest r ; a równanie momentów w tym razie jest następujące:

$$P \cdot r = I_0 \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d(m v \cdot r)}{dt};$$

gdzie m jest masą danego ciężaru a v jego prędkością postępową. Równanie to jest jednakowe z równaniem poprzednim; wielkość r bowiem jest stałą; a że $v = r \cdot \varphi$; przeto równanie to przekształci się na następujące:

$$P \cdot r = (I_0 + m r^2) \cdot \frac{d\varphi}{dt}; \quad \dots \quad (285)$$

które jest jednakowe z równaniem 282-iem, wyprowadzonym w inny sposób. Z równania 283-go otrzymamy równanie 279-te, gdy podstawimy w nie $m = 0$, co jest zgodne z fizycznym pojmowaniem danego zjawiska.

Chcąc ściślej ująć rachunkiem warunki fizyczne danego zadania, należałoby wziąć jeszcze pod uwagę ilość ruchu odwijającej się liny lub jej energię kinetyczną; lecz w praktyce masa lin bywa wobec innych części mechanizmu tak małą, że wpływ jej jest niewielki na przebieg ruchu; wobec czego nie uwzględniamy jej masy w rachunku.

Chcąc zastosować do obliczenia powyższego przykładu równanie równowartości pracy i energii kinetycznej, zważywszy, że suma prac sił wewnętrznych, występujących pomiędzy bryłami, równa się w danym razie zeru; równanie przeto pracy całego układu jest następujące:

$$P \cdot dx = d\left(\frac{1}{2} I_0 \cdot \varphi^2 + \frac{1}{2} m v^2\right), \quad \dots \quad (286)$$

w którym wartość w nawiasach wyraża przyrost energii kinetycznej wału, koła i ciężaru. W energetycznym sposobie pojmowania zjawisk ruchu wysłowimy to równanie: praca cząstkowa sił zewnętrznych idzie na powiększenie energii kinetycznej ruchu obrotowego i na powiększenie energii kinetycznej ruchu postępowego.

Z równania 286-tego otrzymamy równanie momentów, t. j. w danym przypadku—równ. 285-te; gdy wykonamy wskazane w równaniu 286-tem różniczkowanie i rozdzielimy je następnie przez wyraz $\varphi \cdot dt$, t. j., gdy wykonamy działanie odwrotne temu, zapomocą którego otrzymać można z równania momentów równanie pracy. Przy tem przekształceniu wzięść należy pod uwagę, że

$$dx = r \cdot \varphi dt; \quad \text{i} \quad v = r \varphi.$$

Po zróżniczkowaniu i podstawieniu tych wartości, otrzymamy:

$$P r \varphi \cdot dt = I_o \cdot \varphi \cdot d\varphi + m r \varphi \cdot r \cdot d\varphi;$$

i wreszcie otrzymamy równanie momentów:

$$P \cdot r = I_o \frac{d\varphi}{dt} + m r^2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Obliczymy obecnie naprężenie nici, do której przyczepiony jest ciężar P_{kg} . Naprężenie to unaocznimy sobie, gdy nić przetniemy; wtedy bowiem, ażeby nic nie zmienić w danym układzie brył, wypadnie do jej końców przyłożyć siły S_1 i S_2 , rys. 76-ty, których wartości są wzajemnie równe, lecz zwroty przeciwne. Bezpośrednio jest zrozumiałem, że w szczególnym przypadku, w którym ciężar P wisi na nici w spoczynku, naprężenie nici jest równe ciężarowi P ; wraze zaś, gdy nić spada swobodnie razem z ciężarem nie obracając wału, naprężenie jej, gdy nie uwzględnimy jej masy, równa się zeru. Lecz w danym razie siła np. S_2 łącznie z siłą ciężkości P wywołuje ruch masy zawieszzonego ciężaru; ażeby przeto obliczyć to naprężenie, należy wzięść pod uwagę znany już ruch danego ciężaru i z ruchu tego obliczyć siłę, wywołującą ten ruch. Na daną przeto bryłę działa siła ciągnięcia S_2 i siła ciężkości P , rys. 76-ty; pod działaniem tych sił masa ciężaru otrzymuje przyspieszenie, które oznaczmy literą p_c , i które obliczyć można z równania ruchu. Równanie przeto dynamiczne ruchu środka masy tej bryły jest następujące:

$$(P - S_2) = m \cdot p_c,$$

z którego mamy:

$$S_2 = P - m p_c, \quad \text{lub} \quad S_2 = m(g - p_c).$$

Z równania tego wynika, że wartość S_2 zmniejsza się z powiększeniem przyspieszenia p_c bryły; a w przypadku $p_c = g$, $S_1 = 0$.

Wartość przyspieszenia p_c obliczymy z równania 284-ego, wzięwszy pod uwagę, że

$$p_c = r \cdot \frac{d\varphi}{dt};$$

po podstawieniu zatem tej wartości w równanie powyższe, otrzymamy:

$$S_2 = P \cdot \left(1 - \frac{m r^2}{I_o + m r^2} \right).$$

Z równania tego wynika, że wartość S_2 zmniejsza się ze zmniejszeniem się wartości I_o ; a w szczególnych przypadkach, jeżeli

$$I_o = 0; \quad \text{otrzymamy} \quad S_2 = 0;$$

jeżeli zaś

$$I_o = \infty; \quad \text{otrzymamy} \quad S_2 = P.$$

Pozostawia się czytelnikowi znalezienie znaczenia fizycznego tych przypadków.

W celu unaocznienia sobie ilościowych stosunków, jakie zachodzą w tym ruchu, przyjmijmy, dla uproszczenia obliczenia, że na wale niema koła; a wtedy moment bezwładności wała, który wyobrazimy sobie w postaci walca o masie m_w :

$$I_o = \frac{1}{2} m_w \cdot r^2;$$

a zatem:

$$S_2 = P \left(1 - \frac{m}{\frac{1}{2} m_w + m} \right).$$

Przyjawszy jeszcze, że np. $m_w = m$, otrzymamy

$$S_2 = \frac{1}{3} P,$$

t. j. naprężenie nici w danych warunkach równa się $\frac{1}{3}$ przyłączonego do niej ciężaru.

129. Ruch obrotowy zmienny. Rozpatrywaliśmy dotychczas dwa przypadki ruchu obrotowego bryły około osi nieruchomej, wywołane danymi siłami: obrót *jednostajny*, który zachodzi, gdy moment, względem osi obrotu, sił, przyłożonych do bryły, równa się zeru;—lub gdy ich praca przystosowana równa się zeru; i obrót *jednostajnie przyspieszony*, gdy moment ten podczas ruchu jest wielkością stałą. Wogóle zaś, jeżeli moment sił jest zmienny (w zależności od czasu lub od położenia bryły, to przyspieszenie obrotowe jest również zmienne.

Przykładem zmiennego obrotu około osi nieruchomej może być ruch *wahadła bryłowego pospolitego*. Wahadłem bryłowym pospolitem nazwiemy każdą bryłę materialną, mogącą obracać się pod działaniem siły swego ciężaru około osi poziomej nieruchomej, zwanej osią zawieszenia.

W celu określenia położenia takiego wahadła w przestrzeni, przeprowadzimy przez środek jego masy i przez oś obrotu płaszczyznę, sztywno związaną z tem wahadłem i razem z niem obracającą się; a kąt σ , jaki tworzy ta płaszczyzna z drugą płaszczyzną nieruchomą, przechodzącą przez oś zawieszenia, wyznacza położenie wahadła w przestrzeni; płaszczyznę nieruchomą obierzemy pionowo; przekrój takiego wahadła, prostopadle do osi zawieszenia, przedstawia rys. 77-my.

Przyjmijmy następnie, że na bryłę, w ten sposób zawieszoną, działa tylko siła ciężenia oraz siły odporowe osi obrotu; i że oporów powietrza i tarcia, jakie występują podczas obrotu bryły, w danem obliczeniu nie uwzględnimy.

W celu napisania równania momentów, wyobrazimy sobie, że siły ciężkości oddzielnych punktów danej bryły przyłączone są do tychże punktów; suma ich przeto momentów równa się momentowi siły ciężkości, przyłączonej do środka masy; moment zaś sił odporowych osi zawieszenia względem tejże osi równa się zeru. Oznaczywszy literą s odległości środka ciężkości od osi obrotu, literą I , mo-

ment bezwładności bryły względem osi zawieszenia; napiszemy równanie momentów na zasadzie równania 276-tego; rys. 77-ty:

$$m g \cdot s \cdot \sin \sigma = \frac{d(I_o \varphi)}{dt};$$

a podstawivszy w nie, stosownie do przyjętych oznaczeń na rys. 77-mym:

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \frac{d^2\sigma}{dt^2};$$

otrzymamy równanie ruchu:

$$I_o \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} + m g \cdot s \cdot \sin \sigma = 0. \quad (287)$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu, jednakowe pod względem algebraicznym z równaniem 103-ciem części 1-szej tego tomu; gdy podstawimy w równanie 103-cie:

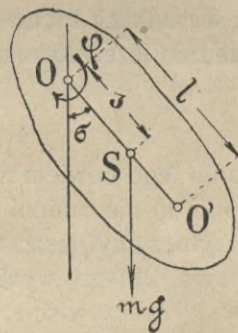
$$\frac{g}{l} = \frac{m g \cdot s}{I_o} \quad (288)$$

Wyniki przeto obliczeń, otrzymane z równania 103-go, mogą być bezpośrednio zastosowane do danego wahadła, gdy w odpowiednie wzory podstawimy wielkości, wskazane wzorem 286-ym. Określ np. podwójnego wahnienia wahadła bryłowego obliczymy, przy tychże zastrzeżeniach, jakieśmy tam czynili, bezpośrednio ze wzoru 109-go; gdy podstawimy w niego wartości, wskazane równaniem 64-tem; okres ten

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{m g \cdot s}} \quad (289)$$

Przyjąć przeto można, że wielkość obliczona z równ. 288-go

$$l = \frac{I_o}{m \cdot s}; \quad (290)$$



Rys. 77.

wyraża długość wahadła matematycznego, które wykonywa przy jednakowych warunkach początkowych taki sam ruch, jaki wykonywa wahadło bryłowe o momencie bezwładności I_o , masie m i którego środek ciężkości znajduje się na odległości s od osi zawieszenia. Z tych względów wahadło matematyczne o wskazanej długości l , nazywają wahadłem zastępczym danego wahadła bryłowego.

Jeżeli na prostopadłej, opuszczonej ze środka masy na oś zawieszenia O , odetniemy od punktu O ku temu środkowi długość l , to otrzymamy punkt O' , rys. 77-my, zwany środkiem wahań danej bryły względem danej osi zawieszenia.

Ruch przeto tego środka, t. j. prędkość obrotowa i przyspieszenie obrotowe jest w każdej chwili takie same, jakie posiada dana bryła w tejże chwili. Środek wahań ma jeszcze tę właściwość, że jeżeli przeprowadzimy przez niego oś równoległą do osi zawieszenia, przechodzącej przez O , i zawiesimy na niej daną bryłę zamiast na osi O ; to ruch tego nowego wahadła, t. j. prędkość i przyspieszenie kątowe w każdej chwili, a więc i okresy wahnień około tej nowej osi są takie same jakie były, gdy bryła obracała się około osi O . W celu tego dowiedzenia obliczymy

długość wahadła zastępczego, tego nowego wahadła; a w tym celu przekształcimy wzór 290-ty, podstawivszy w niego, na zasadzie równania 240-ego tego tomu:

$$I_0 = m \cdot s^2 + I_s;$$

gdzie I_s oznacza moment bezwładności wahadła względem osi, przechodzącej przez środek jego masy i równoległej do osi zawieszenia. Po podstawieniu tej wartości w równ. 290-te otrzymamy:

$$l = s + \frac{I_s}{m \cdot s}. \quad (291)$$

Obliczymy teraz długość l' wahadła zastępczego wahadła zawieszonoego na osi O' . Odległość środka masy od tej nowej osi zawieszenia równa się $(l-s)$; na podstawie przeto równania 291-go napiszemy:

$$l' = (l-s) + \frac{I_s}{m(l-s)}; \quad (292)$$

ażebv znaleźć związek pomiędzy l i l' , obliczymy wartość I_s z równania 291-ego, i podstawimy ją w równ. 292-gie, a otrzymamy:

$$l' = l;$$

czyli ruch wahadła około osi O' będzie taki sam jakv był około osi O przy jednakowych warunkach ruchu początkowego. Do tegoż wniosku dojdziemy również bezpośrednio jeżeli równanie 291-sze napiszemy w postaci:

$$s(l-s) = \frac{I_s}{m};$$

z równania tego bowiem wynika, że wielkości l i s mogą się wzajemnie zastąpić, a równanie to nie zmieni się.

Przytoczmy jeszcze następujące właściwości ruchu wahadła bryłowego, z równania 291-go wynika, że dla $s=0$ i dla $s=\infty$; wartość $l=\infty$, a z nią i $T=\infty$. I rzeczywiście, jeżeli oś zawieszenia przeprowadzimy przez środek masy, $s=0$, to bryła pozostawać będzie w spoczynku lub obracać się będzie ciągle z jednym zwrotem, co odpowiada nieskończeniu długiemu okresowi wahnięć. Gdy następnie przesuwac będziemy oś zawieszenia od środka masy do ∞ ; okresy wahnięć T będą otrzymywały różne wartości od $+\infty$ do $+\infty$; a na podstawie ciągłości funkcji matematycznych wywnioskujemy, że pomiędzy temi wartościami powinny być jakieś wartości najmniejsze; które będą odpowiadały ściśle określonemu położeniu osi zawieszenia wahadła. Postawimy sobie teraz zadanie znalezienia położenia takiej osi, na której bryła zawieszona wykona wahnięcia w najkrótszym czasie. W celu uproszczenia rozpatrywań ograniczmy na razie to zadanie warunkiem, że szukana oś ma być równoległą do pewnej prostej, danej w przestrzeni. Określ wtedy wahnięć będzie najkrótszy, gdy długość l wahadła zastępczego będzie najkrótszą; przy zmiennej przeto odległości s wartość l powinna być najmniejszą; co nastąpi dla wartości, którą oznaczymy literą s_1 i którą obliczymy z równania:

$$\frac{dl}{ds} = 0;$$

z równania przeto 291-go, po jego zróżniczkowaniu mamy:

$$1 - \frac{1}{s_1^2} \cdot \frac{I_s}{m} = 0,$$

z którego

$$s_1 = \sqrt{\frac{I_s}{m}} \dots \dots \dots (292)$$

Oś przeto zawieszenia, przeprowadzona równolegle do danej osi na wskazanej odległości s_1 od środka masy, jest osią, około której dana bryła wykona wahanie o najmniejszych okresach. Jeżeli następnie zmieniać będziemy kierunek osi, do której oś zawieszenia ma być równoległą, to zmieniać się będzie również wartość I_s momentu bezwładności danej bryły względem osi a z nią zmieniać się będzie również wartość s_1 stosownie do równ. 293-go; a więc i okres T . Ze wszystkich wartości I_s najmniejszą jest wartość momentu bezwładności względem osi, przechodzącej przez wielką średnicę elipsoidy bezwładności, zbudowanej w środku masy danej bryły. Wartość przeto T będzie bezwzględnie najmniejszą, gdy bryłę daną zawiesimy na osi równoległej do kierunku wielkiej średnicy elipsoidy bezwładności, zbudowanej w środku jej masy na odległości, obliczonej ze wzoru 293-go. Geometrycznym miejscem tych osi jest wałek o przekroju kołowym, którego promień obliczymy z równ. 293-go, a osią tego walca jest wielka średnica elipsoidy.

Do obliczenia równania ruchu wahadła bryłowego można również zastosować równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. Równanie to jest następujące:

$$mg \cdot d (s \cdot \cos \sigma) = d \left[\frac{1}{2} I_o \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \right]; \dots \dots \dots (294)$$

z którego można obliczyć żądane związki.

O tożsamości tego równania z równaniem 287-em, przekonamy się, wykonawszy wskazane w tem równaniu różniczkowanie i rozdzieliwszy je przez $d\sigma$.

5. Obliczenie ruchu płaskiego brył materialnych.

130. Warunki powstawania ruchu płaskiego brył materialnych.

Ruch płaski bryły określiliśmy w § 59-tym tomu I-go jako ruch, w którym punkty danej bryły zakreślają tory płaskie, leżące w płaszczyznach równoległych do pewnej płaszczyzny, zwanej płaszczyzną danego ruchu. Jeżeli bryła jest nieswobodna, to znajdować się ona będzie w ruchu płaskim, jeżeli np. trzy jej punkty, nie leżące na jednej prostej, pozostawać będą podczas ruchu na trzech wzajemnie równoległych płaszczyznach; i ruch taki powstanie pod działaniem dowolnie skierowanych sił. Ruch płaski powstaje przeto, gdy np. dana bryła obraca się około osi, pozostającej w spoczynku; przykłady tego ruchu rozpatrywaliśmy poprzednio; lub też ruch ten powstaje, gdy np. bryła obraca się około osi, poruszającej się z prędkością prostopadłą do tej osi; z tego rodzaju ruchem mamy najczęściej do czynienia w technice. Jeżeli zaś bryła jest swobodna, to ruch płaski powstanie wtedy, gdy ruch

początkowy oraz siły, działające na bryłę, odpowiadać będą pewnym ściśle określonym warunkom; oraz gdy rozmieszczenie cząstek mas danej bryły podlegać będzie pewnym szczególnym rozmieszczeniom. Warunki powstawania ruchu płaskiego bryły swobodnej wskazać możemy dopiero w rozdziale następnym; a obecnie przystąpimy do obliczenia ruchu czy to brył, zmuszonych danymi warunkami fizycznymi wykonywać ruch płaski; czy też figur materyalnych płaskich swobodnych lub nieswobodnych, poruszających się w swych płaszczyznach pod działaniem sił zewnętrznych.

131. Równania dynamiczne ruchu płaskiego. Ruch płaski swobodny posiada trzy stopnie swobody; położenie bowiem bryły a więc i ruch jej jest określony trzema wielkościami algebraicznymi; trzy przeto równania algebraiczne wystarczą do wyrażenia tych wielkości w funkcji czasu. Szczególnym przypadkiem ruchu płaskiego brył jest ruch figury płaskiej w swej płaszczyźnie; i do ruchu figur płaskich sprowadzić można ruch płaski brył; i odwrotnie, z ruchu figury płaskiej, którą postawimy w pewnym geometrycznym związku z bryłą właściwą, można odtworzyć ruch płaski samej bryły. W rozpatrywaniach przeto następnym będziemy mówili o ruchu figur płaskich w ich płaszczyźnie, rozumiejąc przez to wogóle ruch płaski brył.

Spółrzednymi, wyznaczającymi położenie figury płaskiej w jej płaszczyźnie, mogą być spółrzedne, np. środka jej masy i kąt jaki tworzy prosta, sztywno połączona z tą figurą, z inną prostą, nieruchomo leżącą w płaszczyźnie tejże figury; a spółrzednymi określającymi ruch danej figury płaskiej może być prędkość środka jej masy i prędkość obrotowa. Równaniami dynamicznymi mogą być w tym razie dwa równania algebraiczne ruchu środka masy i jedno równanie momentu ilości ruchu, które może być również zastąpione równaniem równowartości pracy i energii kinetycznej; jest ono bowiem pierwszą całką równania momentu ilości ruchu, cośmy ogólnie dowiedli w § 125-tym; te trzy przeto równania wystarczają do obliczenia ruchu bryły płaskiej. Oznaczmy literami x_s i y_s spółrzedne prostokątne środka masy danej figury; a literą σ kąt, jaki tworzy z osią np. x dowolna prosta, sztywno związana z poruszającą się figurą; a równanie ruchu środka masy w postaci wektorowej będzie następujące:

$$\Sigma \bar{P}_k = m \bar{p}_s; \quad \dots \dots \dots (295)$$

w postaci zaś algebraicznej, wyrażone spółrzednymi prostokątnymi, jest następujące:

$$\begin{aligned} \Sigma P_{k,x} &= \frac{d(m v_{s,x})}{dt} \\ \Sigma P_{k,y} &= \frac{d(m v_{s,y})}{dt} \dots \dots \dots (296) \end{aligned}$$

Trzecim równaniem dynamicznym tego ruchu może być równanie ruchu względnego, t. j. równ. 277-me; gdy biegun momentów obierzemy w środku masy; i gdy wyraz momentu ilości ruchu obliczymy ze wzoru 254-go. Równanie to jest następujące:

$$\Sigma \mathbf{v} \bar{P}_k \cdot \bar{r}'_k = \frac{d(I_s \cdot \varphi)}{dt}; \quad \dots \dots \dots (297)$$

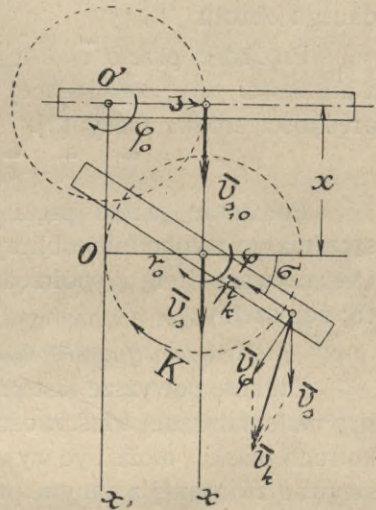
w którym I_s oznacza moment bezwładności figury materalnej płaskiej względem bieguna obranego w środku masy; litera zaś φ oznacza prędkość chwilowego obrotu. Zwrócić przytem należy uwagę, że wogóle ruch względny układów sztywnych względem przestrzeni, poruszającej się ruchem postępowym z prędkością równą prędkości środka masy, jest ruchem obrotowym około osi, przechodzącej przez środek masy.

Równania 296-te oraz równanie 297-me są trzema równaniami algebraicznymi, z których obliczyć można np. trzy spórzędne położenia danej bryły w funkcji czasu, gdy dane będą siły, działające na tę bryłę; i odwrotnie, obliczyć można pewne siły, gdy dany jest ruch.

132. Obliczenie ruchu swobodnego figury materalnej płaskiej, poruszającej się w swej płaszczyźnie, bez udziału sił zewnętrznych lecz z początkową prędkością.

Figurę płaską objerzemy w postaci np. pręta materalnego, obracającego się około osi O' , rys. 78-my, przechodzącej przez pewien punkt jego osi, z prędkością n obrotów na minutę; w pewnem położeniu tego pręta oś obrotu zostaje usunięta; zadanie polega na obliczeniu dalszego ruchu tego pręta, przy założeniu, że siły, działające na niego, są zrównoważone.

Stosownie do warunków zadania ciężar pręta jest zrównoważony siłami odporowemi płaszczyzny po jakiej on się porusza; siła przeto ciężkości pręta nie wpływa na jego ruch; a że dla uproszczenia rachunku pominiemy siły oporowe, występujące podczas ruchu pręta, przeto z chwilą uwolnienia pręta od osi, około której był on zmuszony się obracać, otrzymuje on ruch płaski o znanym ruchu początkowym. Równanie ruchu środka masy tego pręta jest w tym razie następujące:



Rys. 78.

$$0 = m \frac{d\bar{v}_s}{dt};$$

skąd po scałkowaniu:

$$\bar{v}_s = \bar{v}_{s,0}; \dots \dots \dots (298)$$

gdzie $\bar{v}_{s,0}$ oznacza prędkość początkową środka masy, a \bar{v}_s prędkość jego w dowolnej chwili. Prędkość początkowa jest nam znana; kierunek bowiem jej pokrywa się z kierunkiem stycznej do koła, jakie zakreślał środek pręta podczas obrotu przymuszonego w chwili, w której tę oś usunięto; wartość tej prędkości obliczymy z równania:

$$v_{s,0} = \varphi_0 \cdot s;$$

w którym początkowa prędkość obrotowa

$$\varphi_0 = \frac{2\pi n}{60};$$

a litera s oznacza odległość środka pręta od osi obrotu. Z równania 296-go wynika, że środek pręta, porusza się ruchem prostoliniowym i jednostajnym, którego kierunek wyznaczony jest kierunkiem jego prędkości początkowej.

Równanie momentu ilości ruchu danego pręta względem bieguna obranego w środku masy jest stosownie do równ. 297-go następujące:

$$o = \frac{d(I_s \cdot \varphi)}{dt};$$

z którego wobec niezmienności momentu bezwładności pręta podczas jego ruchu otrzymamy:

$$\varphi = \varphi_0. \quad (299)$$

Z równania tego wynika, że pręt obraca się około środka swej masy ruchem jednostajnym.

Środek przeto pręta zakreśla tor prostolinijny ruchem jednostajnym, a pręt obraca się około tego środka ze stałą prędkością, równą prędkości początkowej danego obrotu.

Prędkość przeto \bar{v}_k k -tego punktu składa się w myśl § 81-go tomu I-go, z prędkości $v_{\varphi, k}$, wynikającej z obrotu pręta i z prędkości postępowej v_s , równej prędkości środka masy; t. j.

$$\bar{v}_k = \bar{v}_s + \bar{v}_{\varphi, k}; \quad \text{gdzie} \quad \bar{v}_{\varphi, k} = V \bar{r}_k \cdot \bar{\varphi}.$$

Położenie przeto pręta na płaszczyźnie, po upływie czasu t od chwili puszczenia go swobodnie, obliczymy z równania 298-go i 299-go po ich scałkowaniu. Oznaczywszy literą x spólrzędną środka pręta, a literą σ — kąt o jaki pręt się obrócił; napiszemy

$$x = v_{s, 0} \cdot t; \quad \text{oraz} \quad \sigma = \varphi_0 \cdot t.$$

Zadanie powyższe jest przeto rozwiązane; pozostaje tylko zbadać drogą analizy matematycznej właściwości kinematyczne tego ruchu. Ruch danego pręta, jako ruch płaski, może być wywołany wogóle ruchem toczenia się pewnej krzywej, sztywno związanej z danym prętem, po innej nieruchomej; leżącej w danej płaszczyźnie, porówn. § 66 tomu I-go. Ażeby tę krzywą obliczyć dla danego przypadku, obliczymy, stosownie do § 81-go tomu I-go, odległość r_0 bieguna chwilowego obrotu od środka masy pręta; wielkość ta:

$$r_0 = \frac{v_s}{\varphi} = \frac{v_{s, 0}}{\varphi_0} = s;$$

jest przeto wielkością stałą; bieguny zatem chwilowych obrotów leżą na stałych odległościach od kierunku prędkości środka masy; czyli tor krzywej nieruchomej jest linia prosta równoległa do toru, jaki zakreśla środek masy; a krzywa ruchoma jest kołem o promieniu $r_0 = s$, zakreślonym ze środka masy; koło to jest oznaczone na rys. 78-ym literą K ; linia zaś nieruchoma literą x' . Ruch przeto danego pręta można wywołać toceniem się koła o promieniu s sztywno związanego z prętem, po prostej równoległej do kierunku prędkości początkowej środka masy. W zadaniach z dynamiki spotykamy się często z wymaganiem obliczenia przyśpieszenia dowolnego punktu danej bryły z innych warunków ruchu. W celu przeto obliczenia przyśpieszeń punktów danego pręta weźmiemy pod uwagę, że pręt posiada

ruch obrotowy i postępowy; przyspieszenie przeto każdego jego punktu, w myśl § 91-go tomu I-go, składa się z przyspieszeń, wywołanych tymi ruchami. W danym przykładzie każdy punkt danego pręta posiada tylko jedno przyspieszenie dośrodkowe $= r_k \cdot \varphi_0^2$; przyspieszenia bowiem ruchu postępowego i przyspieszenia obrotowego stycznego w tym razie niema.

Inny jednakże będzie ruch tego pręta, gdy puścimy go w sposób wyżej wskazany, lecz w płaszczyźnie pionowej i gdy uwzględnimy jego ciężar. Równania dynamiczne tego ruchu są następujące:

$$m\bar{g} = \frac{d(m\bar{v}_s)}{dt}; \quad \text{oraz} \quad o = \frac{d(I_s \cdot \varphi)}{dt}.$$

Równanie pierwsze stosownie do obliczeń, podanych w § 17-tym tomu I-go, wyraża, że środek masy zakreśla parabolę; rys. 14-ty części 1-szej tego tomu; z równania zaś momentu ilości ruchu wynika, że pręt obraca się około tego środka, jak poprzednio, ruchem jednostajnym; moment bowiem siły ciężenia, która działa na ten pręt względem bieguna, obranego w środku masy, równa się zeru.

Zaznaczyć należy, że wywody te odnoszą się tylko do ruchu pręta czy też wogóle do bryły, która wykonuje z jakichbądź powodów ruch płaski; w przeciwnym zaś razie ruch bryły będzie inny, o czym będziemy mówić w odpowiednim rozdziale o ruchu bryły swobodnej.

Czytelnik zechce wykazać różnicę i podobieństwo pomiędzy tem zadaniem a zadaniem, podanem w § 19-tym tego tomu; oraz różnicę pomiędzy równaniami dynamicznymi tych zadań.

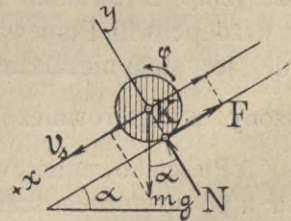
W rozwiązaniu danego zadania jak i każdego innego należy rozróżnić część dynamiczną; mającą na celu zestawienie równań dynamicznych ruchu i—część kinematyczną, mającą na celu przekształcenie ruchu, wyrażonego równaniami dynamicznymi, na inne ruchy, więcej naoczne lub też odpowiadające wymaganiom danego zadania; takie też postępowania należy rozróżnić w przeprowadzeniu rozwiązania zadania powyższego.

133. Obliczenie ruchu walca toczącego się. Obliczyć ruch walca o przekroju kołowym, toczącego się wskutek swej ciężkości po płaszczyźnie pochylej w ten sposób, że oś jego pozostaje podczas ruchu pozioma, rys. 79-ty. Do wyznaczenia położenia tego walca wystarcza jedna tylko spólrzędna algebraiczna, którą może być np. odległość jego osi od początkowego jej położenia; kąt bowiem obrotu, o jaki obrócił się walec podczas tego ruchu, obliczyć można z warunku toczenia się, który wyraża się równaniem:

$$v_s = r \cdot \varphi,$$

i z którego, po scałkowaniu, obliczyć można związek pomiędzy położeniem walca a kątem obrotu.

Ażeby do obliczenia ruchu danego walca zastosować równania, odnoszące się do ruchu bryły swobodnej, należy uczynić go swobodnym; w tym celu przyłożymy do niego siłę odporową N , prostopadłą do płaszczyzny, po której się toczy, i—siłę F styczną do walca, która wywołuje toczenie się jego; gdyby bowiem jej



Rys. 79.

nie było, walec ślizgałby się po tej płaszczyźnie, a nie toczył się, jak tego wymaga zadanie. Na walec przeto działają siły N i F ; nieznane co do wielkości, znane jednakże co do kierunków; i działa na niego jeszcze znana siła jego ciężkości.

W celu zastosowania równania 275-tego, wyobrazimy sobie ruch tego walca, jako ruch złożony: z ruchu obrotowego około środka masy i z ruchu postępowego. Obrzyszy biegun momentów w środku masy; napiszemy równanie dynamiczne momentów ilości ruchu względnego, stosownie do tego równania 277-go:

$$F \cdot r = \frac{d(I_s \cdot \varphi)}{dt}; \quad \dots \dots \dots (300)$$

w którym r oznacza promień walca; jest to równanie ruchu względnego danego walca, w którym jest jednakże niewiadoma F .

Siłę F obliczymy z równania dynamicznego środka masy, równ. 275-te:

$$m\bar{g} + \bar{F} + \bar{N} = \frac{d(m\bar{v}_s)}{dt}; \quad \dots \dots \dots (301)$$

po zrzutowaniu jego na kierunek osi x , równoległej do płaszczyzny, otrzymamy równanie algebraiczne:

$$mg \cdot \sin \alpha - F = m \frac{dv_s}{dt};$$

a ponieważ $v_s = r\varphi$, a $\frac{dv_s}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}$;

przeto, po podstawieniu tych wartości:

$$F = mg \cdot \sin \alpha - mr \cdot \frac{d\varphi}{dt}; \quad \dots \dots \dots (302)$$

Po podstawieniu następnie tej wartości w równ. 300-tne; otrzymamy:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgr \cdot \sin \alpha}{mr^2 + I_s}; \text{ lub inaczej}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgr \cdot \sin \alpha}{I_K}; \quad \dots \dots \dots (303)$$

gdzie I_K oznacza moment bezwładności walca względem osi, stykającej się z płaszczyzną. Z równania tego obliczyć można prędkość i położenie danego walca w każdej chwili. Ponieważ w równaniu 301-em wartość, stojąca po prawej jego stronie, jest stałą niezależną od czasu; przeto obrót walca jest jednostajnie przyspieszony; a więc również i ruch jego postępowy, gdyż $p_s = r \frac{d\varphi}{dt}$.

Po scałkowaniu równania 301-go otrzymamy prędkość obrotową w funkcji czasu; a po powtórnem scałkowaniu; otrzymamy kąt obrotu w funkcji czasu; z czego możemy obliczyć jego położenie w każdej chwili.

Jeżeli zaś zechcemy obliczyć te wielkości w funkcji np. spótrzędnej środka masy, to z równania 300-go wyrugujemy czas; podstawiając w nie $dt = \frac{d\varphi}{\varphi}$ jakieżś to wykonali w § 6-tym części 1-ej; lub też zastosujemy bezpośrednio równanie równowartości pracy i energii kinetycznej.

W celu tego obliczenia zastosujemy w danym razie równanie pracy. Podczas toczenia się walca, pracę wykonuje tylko siła ciężkości; wartości bowiem prac sił N i F równają się podczas tego ruchu zeru. Energię kinetyczną walca toczącego się wyrazimy wzorem 265-tym § 122-go; równanie przeto równowartości pracy i energii kinetycznej jest w danym razie następujące:

$$Q \cdot ds \cdot \sin \alpha = d\frac{1}{2}(I_s \varphi^2 + m v_s^2);$$

w którym ds oznacza cząstkę, jaką zakreślił środek masy. Z równania tego obliczyć można prędkość obrotową lub prędkość środka masy, jako funkcję spółrzednej tego środka.

W ten sposób zadanie obliczenia ruchu walca jest rozwiązane; pozostaje tylko analiza otrzymanych równań. W tym celu scałkujemy równanie pracy i zastąpimy wyraz $s \cdot \sin \alpha$ wysokością h spadu środka walca.

Jeżeli początkowa prędkość środka masy walca równała się zeru; to po podstawieniu w powyższe równanie $\varphi = \frac{v_s}{r}$, otrzymamy:

$$mgh = \frac{1}{2} \left(\frac{I_s}{r^2} + m \right) \cdot v_s^2;$$

skąd

$$v_s = \sqrt{\frac{2mgh}{\frac{I_s}{r^2} + m}}.$$

Z równania tego obliczymy prędkość środka walca po opuszczeniu się jego z wysokości h .

Dla walca np. pełnego:

$$I_s = \frac{1}{2} m r^2; \quad \text{przeto}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{2} + 1}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 2gh.$$

Zważywszy następnie, że prędkość v_s^* bryły, spadającej po płaszczyźnie ruchem postępowym, wyraża się wzorem

$$v_s^* = \sqrt{2gh};$$

przyjdziemy do wniosku, że środek walca, spadającego ruchem postępowym, spada prędzej niż środek walca, toczącego się; i — że prędkość środka walca toczącego się zależy od wartości jego momentu bezwładności w ten sposób, że z powiększeniem się wartości $\frac{I_s}{r^2}$ przy tej samej np. wartości masy, prędkość środka walca zmniejsza się. Jeżeli naprz. po płaszczyźnie pochyłej puszczone będą z jednakowych wysokości kula, walec i obręcz, zrobione z mas o jednakowych wielkościach; to najpierw stoczy się kula, następnie walec, a wreszcie obręcz, która będzie o tyle wolniej spadała, o ile średnica jej będzie większą. Wartość przeto prędkości środka masy brył o różnych postaciach, lecz o równych wartościach mas, waha się pomiędzy prędkością ruchu postępowego a wartością $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 2gh$; największa bowiem wartość $\frac{I_s}{r^2}$ bryły, zrobionej z danej masy, posiada pierścien, o promieniu możliwie

wielkim; w krańcowym przeto przypadku, który zachodzi, gdy $r = \infty$; $I_s = m r^2$;
 a $\frac{I_s}{r^2} = m$.

Siłę F obliczymy z równania 302-go po podstawieniu w nie z równ. 303-go wartości przyspieszenia; siła ta

$$F = m g \cdot \sin \alpha \cdot \left(1 - \frac{m r^2}{I_k}\right). \quad (304)$$

Po zrutowaniu wreszcie równania 301-go na oś pionową, obliczymy siłę odporową

$$N = m g \cos \alpha.$$

W równaniu 304-em wyraz $m g \sin \alpha$ wyraża składową siły ciężkości, nadającą walcowi ruch postępowy; gdyby środek walca pozostawał w spoczynku, siła F byłaby równa tej składowej; a że jest on w ruchu, przeto siła F powinna być mniejszą od tej składowej; co też wyraża czynnik w nawiasach równania 304-ego, którego wartość jest mniejszą od jedności.

Dla walca pełnego

$$I_k = I_s + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2;$$

przeto dla tego przypadku

$$F = \frac{1}{3} m g \cdot \sin \alpha.$$

Z równania tego wynika, że trzecia część składowej siły ciężkości danego walca idzie na nadanie bryle przyspieszenia postępowego, a $\frac{2}{3}$ na wywołanie jego ruchu obrotowego.

Jeżeli siła F wywołana jest np. tarcie W , jakie występuje pomiędzy powierzchnią walca a płaszczyzną; to toczenie się walca może nastąpić tylko wtedy, gdy

$$W \geq F;$$

w przeciwnym bowiem razie walec będzie się ślizgał po płaszczyźnie a nie toczył, i zadanie będzie inne. Po podstawieniu w tę nierówność wartości $W = \mu N$; oraz wartości N z równ. poprzedniego i F z równania 302-ego; obliczymy kąt nachylenia płaszczyzny, przy którym dana bryła będzie się toczyć, a nie ślizgać; równanie to jest następujące:

$$\mu \cdot m g \cos \alpha \geq m g \sin \alpha \cdot \left(1 - \frac{m r^2}{I_k}\right);$$

skąd

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{\mu}{1 - \frac{m r^2}{I_k}}$$

Walec np. pełny toczyć się będzie po płaszczyźnie pochyłej, gdy kąt jej nachylenia α względem poziomu odpowiada warunkowi $\operatorname{tg} \alpha \leq 3 \mu$.

Jeżeli zaś będzie $\operatorname{tg} \alpha > 3 \mu$, to walec ten będzie się ześlizgiwał, ruch przeto jego nie będzie odpowiadał warunkom, postawionym w danym zadaniu.

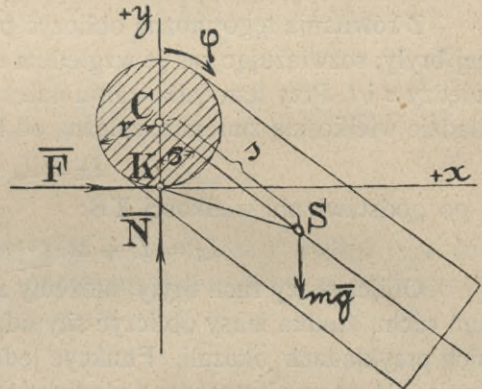
Szczególnym przypadkiem powyższego przykładu można uważać kulę dosyć lekką, umieszczoną na pionowo bijącym strumieniu wody. Strumień bowiem wody, uderzając w kulę, wywołuje siłę F , zwróconą pionowo ku górze. W przypadku $m g - F = 0$,

środek kuli będzie pozostawał w spoczynku; t. j. kula zawiśnie w powietrzu; lecz jeżeli uderzenie będzie mimośrodkowe, to kula obracać się będzie około swego środka wskutek momentu, jaki wywoła siła F ; w przypadku zaś gdy strumień ten uderza kulę środkowo, kula wtedy nie otrzyma obrotu i zawiśnie w zupełnym spoczynku.

W ogólniejszym zakresie otrzymamy podobne zjawisko, gdy wyobrazimy sobie płaszczyznę, po której toczy się kula; poruszającą się ruchem postępowym ku górze we własnej płaszczyźnie; a przy warunku $W \geq F$, toczący się walec, czy też tocząca się kula może być nawet uniesiona siłą tarcia ku górze, obracając się jednocześnie około osi poziomej.

134. Obliczenie ruchu toczącego się wahadła. Bryła materyalna połączona jest w jedną całość z walcem, który może toczyć się po płaszczyźnie o tyle chropowatej, że walec nie będzie się ślizgał, rys. 80; obliczyć ruch bryły bez uwzględnienia oporów; gdy płaszczyzna po której walec się toczy jest poziomą, a bryła jest w początku ruchu odchyłoną od położenia równowagi.

Ponieważ ruch tej bryły jest płaski, którego płaszczyzna jest prostopadłą do osi walca; ruch przeto tej bryły może być określony ruchem koła, jakie otrzymamy z przecięcia się walca z płaszczyzną ruchu, po prostej, którą



Rys. 80.

otrzymamy z przecięcia się płaszczyzny toczenia się z płaszczyzną ruchu, rys. 80. Położenie danej bryły określa spólrzędna położenia punktu styczności koła z prostą, po której się ono toczy; i — kąt odchylenia σ , jaki tworzy z pionową prosta CS , łącząca środek koła z rzutem środka bryły na płaszczyznę ruchu; a ponieważ spólrzędna punktu zetknięcia się jest zależną od wielkości σ , wskutek danego w zadaniu warunku — toczenia się; jedna przeto z tych spólrzędnych, np. spólrzędna σ wystarcza do określenia położenia bryły; i jedno równanie dynamiczne wystarczy do określenia jej ruchu. Jako równanie dynamiczne oberzemy np. równanie równowartości pracy i energii kinetycznej; gdyż równanie to wolne będąc od sił odporowych, wyrazi przeto bezpośrednio ruch danego wahadła.

Na bryłę daną działa siła odporowa N , występująca w punkcie styczności; — siła styczna do walca F , wywołująca jego toczenie się i siły ciężenia, których wypadkowa przechodzi przez środek masy całego układu. Ruch chwilowy bryły jest ruchem obrotowym około punktu zetknięcia się koła z prostą, po której się toczy; energię przeto kinetyczną danej bryły wyrazimy wzorem

$$\frac{1}{2} I_K \cdot \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2;$$

w którym I_K oznacza moment bezwładności całej bryły względem bieguna chwilowego obrotu K ; a $\frac{d\sigma}{dt}$ oznacza prędkość kątową jej obrotu około tegoż bieguna.

Równanie przeto dynamiczne równowartości pracy i energii kinetycznej otrzyma-

my w tenże sposób, w jaki otrzymaliśmy równ. 294-te dla wahadła pospolitego. W tym celu potoczmy dane wahadło do nieskończonego blizkiego położenia i napiszemy:

$$mg \cdot d (s \cdot \cos \sigma) = d \left[\frac{1}{2} I_K \cdot \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \right]. \quad (305)$$

Przyjawszy początkowe warunki ruchu

$$\text{dla } \sigma = \sigma_0; \quad \left(\frac{d\sigma}{dt} \right) = 0;$$

otrzymamy z tego równania, po jego scałkowaniu. równanie:

$$mgs \cdot (\cos \sigma - \cos \sigma_0) = \frac{1}{2} I_K \cdot \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2. \quad (306)$$

Z równania tego można obliczyć prędkość kątową w każdym położeniu σ danej bryły; rozwiązując zaś je względem dt i całkując, otrzymać można związek pomiędzy σ i t . Przy tem całkowaniu należy wziąć pod uwagę, że I_K jest w tym przykładzie wielkością zmienną, zależną od kąta σ ; mamy bowiem

$$I_K = I_s + m \cdot K S^2;$$

a po podstawieniu wielkości KS :

$$I_K = I_s + m (r^2 + s^2 - 2r \cdot s \cdot \cos \sigma).$$

Obliczywszy ruch bryły, możemy z pozostałych równań jej ruchu, t. j. z równań ruchu środka masy obliczyć siły odporowe N i F ; jakieśmy to już w poprzednich przykładach okazali. Funkcye jednakże, jakie otrzymamy z całkowania równania 304-go są eliptyczne; badanie przeto ruchu tej bryły jest nieprzystępne. Ażeby jednakże wytworzyć sobie choć przybliżony obraz tego ruchu przyjmiemy, że odchylenie σ jest tak małą wielkością, że drugie potęgi wartości tego kąta można pominać; wobec czego podstawimy w powyższe wzory $\cos \sigma = 1$ i otrzymamy wartość momentu bezwładności:

$$I_K \cong I_s + m (r - s)^2;$$

która jest przy tem założeniu wielkością stałą; równanie przeto 303-cie będzie jednakowe z równaniem 285-tem, str. 241-sza części, wyprowadzonym dla wahadła pospolitego; z równania przeto 287-ego obliczymy wartość okresu podwójnego wahnięcia, t. j. obliczymy okres czasu, w którym dane wahadło powróci do położenia, z którego zostało puszczone. Dla przypadku $r=0$; wahadło toczące się zamieni się w wahadło pospolite, obracające się około osi, czy też punktu nieruchomego; po podstawieniu też w równanie powyższe $r=0$; otrzymamy wzór 285-ty.

135. Obliczenie sił wewnętrznych poruszającej się bryły materialnej. Pręt cienki o stałym przekroju obraca się w płaszczyźnie poziomej około punktu stałego, obranego na jego osi, rys. 81-szy; obliczyć największe naprężenie ciągnące, ścinające i gnące.

W zadaniu tem mamy dany ruch bryły materialnej, a poszukujemy sił wewnętrznych, występujących w pewnych jej przekrojach. Ażeby unaocznić sobie te siły, sprowadzimy to zadanie do zadania statycznego, i w tym celu zastosujemy metodę d'Alembert'a, podaną w § 91-szym. W myśl tej metody wyobrazimy sobie, że do każdego punktu tego pręta przyłożone są siły bezwładności; a natomiast

przyjmiemy, że pręt pozostaje w spoczynku. Siłami temi są w danym razie siły odśrodkowe działające wzdłuż promieni, wyprowadzonych z punktu obrotu do oddzielnych punktów pręta, oraz siły styczne prostopadłe do tych promieni.

Wobec znacznej długości pręta w porównaniu z jego przekrojem przyjąć można, że siły odśrodkowe wywołują ciągnięcie pręta wzdłuż jego osi; a siły styczne są prostopadłe do osi i wywołują gięcie pręta.

Oznaczywszy literą q ciężar jednostki długości danego pręta, wyrazimy ciężar jego cząstki, odległej na x od punktu obrotu, wzorem

$$q \cdot dx;$$

siłę przeto odśrodkową, którą należy wyobrazić sobie przyłożoną do tej cząstki, wyrazimy wzorem:

$$\frac{q \cdot dx}{g} \cdot x \varphi^2.$$

Jeżeli następnie wyobrazimy sobie pręt, przecięty w miejscu ξ , to należy przyjąć, że na ten przekrój działają wszystkie siły odśrodkowe punktów, leżących od ξ do l . Siłę przeto C_ξ , ciągnącą pręt w przekroju ξ wzdłuż jego osi

w chwili, w której pręt posiada prędkość φ , obliczymy jako sumę wszystkich sił odśrodkowych z równania następującego:

$$C_\xi = \int_{\xi}^l \frac{q \cdot dx}{g} \cdot x \varphi^2;$$

a po scałkowaniu:

$$C_\xi = \frac{1}{2} \frac{q}{g} \cdot (l^2 - \xi^2) \cdot \varphi^2. \quad (307)$$

Jeżeli przyjmiemy w danym zadaniu, że prędkość φ jest zmienną i rośnie np. proporcjonalnie do czasu, to naprężenie ciągnące rośnie również proporcjonalnie do wartości czasu w drugiej potęgę. Ażeby przeto nie przekroczyć wytrzymałości materiału, prędkość obrotu można powiększać tylko do pewnych granic.

Siłę tnącą S_ξ w przekroju φ obliczymy ze wzoru:

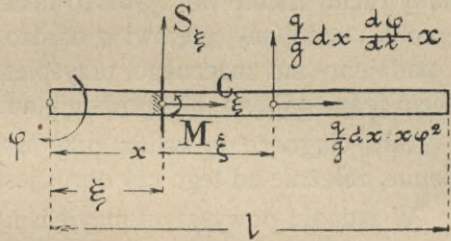
$$S_\xi = \int_{\xi}^l \frac{q \cdot dx}{g} \cdot x \frac{d\varphi}{dt};$$

a po scałkowaniu, zważywszy, że przyspieszenie kątowe jest w danej chwili dla wszystkich punktów jednakowe, otrzymamy:

$$S_\xi = \frac{1}{2} \frac{q}{g} \cdot (l^2 - \xi^2) \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \quad (308)$$

Moment gnący M_ξ , jaki występuje w przekroju ξ , obliczymy jako sumę momentów sił stycznych, występujących w przekrojach od ξ do l ; moment ten przeto wyrazimy wzorem:

$$M_\xi = \int_{\xi}^l \frac{q \cdot dx}{g} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot (x - \xi);$$



Rys. 81.

a po scałkowaniu wzorem :

$$M_{\xi} = \frac{1}{6} \cdot \frac{q}{g} \cdot (2l^3 - 3l^2\xi + \xi^3) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad (309)$$

Wartości przeto sił tnących jak również wartość momentu gnącego danego pręta jest proporcjonalna do wielkości przyspieszenia kąowego; ażeby przeto nie przekroczyć wytrzymałości materiału na ścinanie lub na gięcie, przyspieszenie to powinno posiadać określoną granicę. Często też się zdarza, że pręt podczas nagłej zmiany ruchu złamie się; zjawisko takie tem się tłumaczy, że w chwili nagłej zmiany ruchu, nadajemy prętowi w bardzo krótkim okresie czasu znacznej prędkości; t. j. nadajemy mu znacznego przyspieszenia. W pręcie zaś, obracającym się np. ruchem jednostajnym, nie powstają ani siły ścinające ani momenty gnące.

Siły ciągnące powstają przy wszelkim obrocie pręta; i są one stałe lub zmienne, zależnie od tego czy obrót jest jednostajny czy też zmienny.

W zadaniu powyższem przyjęliśmy, że wielkość przekroju pręta jest bardzo mała w porównaniu z jego długością; i uczyniliśmy to w celu uproszczenia rozpatrywań. Inaczej jednakże przedstawi się rozkład sił bezwładności, gdy wymiary przekroju pręta będą znaczniejsze; wtedy nie można będzie przyjąć, że kierunki np. sił odśrodkowych pokrywają się z kierunkiem osi pręta, jakieśmy to uczynili i, że kierunki sił stycznych są równoległe do przekrojów. Do spotykanych jednakże w praktyce przykładów można stosować to założenie.

W zadaniu powyższem dany był ruch bryły; a z ruchu tego obliczyliśmy siły wewnętrzne; jeżeli zaś zamiast ruchu są dane np. siły zewnętrzne, wywołujące ruch; to, w celu obliczenia sił wewnętrznych, należy najpierw obliczyć ruch danej bryły w pewnej chwili lub w pewnym jej położeniu; a następnie obliczyć siły wewnętrzne, jakie występują w tejże chwili.

Jeżeli dane są siły zewnętrzne, działające na daną bryłę, to siły wewnętrzne zależą również bezpośrednio od tych sił; gdyż w danym razie siły wewnętrzne (występujące w przekroju), w myśl metody d'Alembert'a, powinny równoważyć się nietylko z siłami bezwładności, jak to było w przykładzie powyższym, lecz i z siłami zewnętrznymi. Uważać przeto można, na zasadzie superpozycji sił, że wogóle siły wewnętrzne bryły, będącej w ruchu, składają się :

- 1) z sił, wywołanych ruchem bryły; siły te nazwiemy kinetycznymi; i
- 2) z sił, wywołanych działaniem sił zewnętrznych; siły te nazwiemy statycznymi. W powyższym przykładzie, w którym nieuwzględnialiśmy sił zewnętrznych, mieliśmy do czynienia tylko z siłami wewnętrznymi kinetycznymi. Siły wewnętrzne statyczne, o ile one występują, obliczymy zwykłymi metodami, podawanymi w statyce; a suma tych obydwóch rodzajów sił jest wyrazem naprężeń, występujących w danym przekroju i jest miarodajną dla wytrzymałości tej bryły.

Przykład. Pręt materyalny, zawieszony swobodnie na osi poziomej, obraca się pod działaniem swego ciężaru, rys. 82-gi; obliczyć naprężenia, jakie występują w przekrojach tego pręta.

Naprężenia w przekroju ξ , zgodnie z równaniem 307-em, 308-em i 309-tem są następujące:

$$C_{\xi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{g} \cdot (l^2 - \xi^2) \cdot \varphi^2 + \int_{\xi}^l q \cdot dx \cdot \cos \sigma; \quad (310)$$

$$S_{\xi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{g} \cdot (l^2 - \xi^2) \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \int_{\xi}^l q \cdot dx \cdot \sin \sigma; \quad (311)$$

$$M_{\xi} = \frac{1}{6} \cdot \frac{q}{g} \cdot (2l^3 - 3l^2 \cdot \xi + \xi^3) \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \int_{\xi}^l q \cdot dx \cdot \sin \sigma \cdot (x - \xi). \quad (312)$$

Drugie wyrazy, znajdujące się po prawej stronie tych równań, w postaci całek, wyrażają naprężenia, nazwane statycznymi; które w przykładzie poprzednim nie występowały.

W równaniach tych siły wewnętrzne i ich momenty wyrażone są przyspieszeniem obrotowym i prędkością obrotową pręta; wielkości te jednakże możemy wyrazić siłami, wywołującymi dany ruch i w tym celu napiszemy np. równanie momentu ilości ruchu względem bieguna, obranego w środku obrotu. Równanie to jest następujące:

$$m g \cdot \sin \sigma \cdot \frac{1}{2} l = \frac{d(I_A \cdot \varphi)}{dt};$$

z którego obliczymy przyspieszenie kątowe pręta.

Prędkość zaś obrotową, potrzebną do obliczenia siły ciągnącej, możemy bezpośrednio obliczyć z równania równowartości pracy i energii kinetycznej; lub też—całkując równanie momentów, po odpowiednim wyrugowaniu czasu. Przyjawszy np. dla

$$\sigma = \sigma_0; \quad \varphi = 0;$$

równanie równowartości pracy i energii kinetycznej po jego scałkowaniu będzie następujące:

$$\frac{1}{2} I_A \cdot \varphi^2 = m g (\cos \sigma - \cos \sigma_0).$$

Po podstawieniu z tych równań wartości przyspieszenia i prędkości w równania 310-te, 311-te i 312-te i po scałkowaniu tych równań; otrzymamy wartości sił wewnętrznych w zależności od położenia pręta σ i od położenia przekroju ξ .

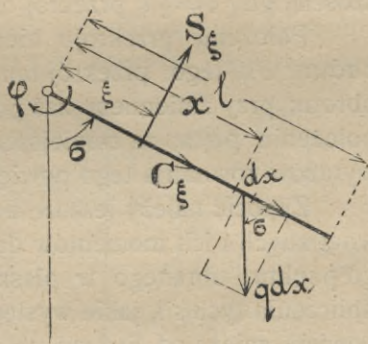
Dla pręta materalnego

$$I_A = \frac{1}{3} m l^2 = \frac{1}{3} \frac{q}{g} l^3;$$

po podstawieniu przeto tej wartości we wzory 311-ty i 312-ty i po skróceniu otrzymamy:

$$S_{\xi} = -\frac{q}{4l} \cdot \sin \sigma \cdot (l - \xi) (l - 3\xi);$$

$$M_{\xi} = \frac{q}{4l} \cdot \sin \sigma \cdot (l - \xi)^2 \cdot \xi.$$



Rys. 82.

Z równań tych wynika:

1) że wielkość momentu gnącego i wielkość siły ścinającej w przekroju danego pręta nie zależy od początkowych warunków ruchu; a tylko od kąta nachylenia pręta względem osi pionowej. Wynik ten stanie się bezpośrednio zrozumiałym, gdy zważymy, że siły styczne a więc i ich moment zależy od przyspieszenia kątoowego, a nie od prędkości; prędkość przeto początkowa, która dodaje się na zasadzie prawa superpozycji z prędkością nabytą, nie wpływa na wielkości tych naprężeń;

2) że największe wartości momentu gnącego i sił ścinających w każdym przekroju pręta występują w chwili puszczenia pręta; gdyż wtedy $\sin \sigma$ a więc M_{ξ} i S_{ξ} są największe. Wynik ten jest bezpośrednio zrozumiałym z tego względu, że przyspieszenie kątowe w początkowym położeniu pręta jest największe;

3) największy moment gnący w danym położeniu pręta znajduje się na odległości $\frac{1}{3}$ jego długości, licząc od osi zawieszenia; gdyż M_{ξ} stanie się największą, gdy $\xi = \frac{1}{3} l$, przekrój ten przeto jest przekrojem niebezpiecznym na gięcie.

Położenie przekroju niebezpiecznego, pracującego na ciągnięcie, obliczymy z równ. 310-tego; przekrój ten znajduje się, przy danym położeniu pręta, przy osi obrotu; przy zmiennem zaś położeniu wystąpi największe naprężenie w pionowym położeniu pręta; ze zmniejszeniem się bowiem wartości ξ i σ , wartości obydwóch wyrazów równania tego powiększają się.

Zwrócić należy jeszcze uwagę, że sposoby, tutaj wskazane, obliczenia sił wewnętrznych i ich momentów dają możliwość ich obliczenia w odniesieniu do pewnego punktu, obranego w płaszczyźnie danego przekroju; nie dają zaś możliwości obliczenia tych sił, jakie występują w oddzielnych cząstkach tego przekroju; siły te bowiem zależą od fizycznych właściwości materiału, z którego pręt jest zrobiony; i można je obliczyć dopiero po przyjęciu jakiejś hipotezy, określającej fizyczne właściwości danej matery; hipotezą tą jest dla ciał sprężystych t. zw. prawo Hook'a.

136. Obliczenie ruchu początkowego i sił wewnętrznych, jakie występują w bryle, w chwili wyprowadzenia jej z równowagi. Przykładem tego może być następujące zadanie. Belka ciężka o przekroju bardzo małym w porównaniu z jej długością i o ciężarze q na jednostkę długości, oparta jest swobodnie na dwóch poziomych podporach A i B , rys. 83-ci. W pewnej chwili jedna z podpór np. B zostaje nagle usunięta; obliczyć ruch początkowy belki w chwili tego usunięcia; oraz—siłę odporową, jaka występuje w tejże chwili w pozostałej podporze.

W chwili usunięcia podpory, na belkę działa jej ciężar, którego moment wywołuje obrót belki około pozostałego punktu podparcia. Z warunków zadania wynika, że belka nie będzie posiadała prędkości początkowej; a jedynie tylko przyspieszenie, które mamy przedewszystkiem obliczyć. Równanie dynamiczne momentów względem bieguna, obranego w pozostałym punkcie podparcia, jest następujące:

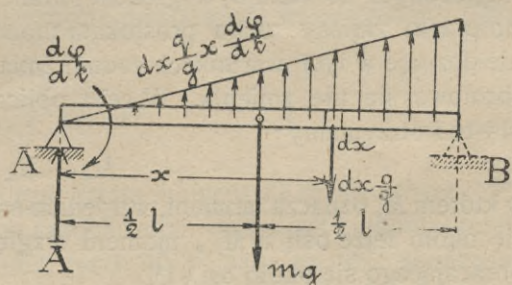
$$mg \cdot \frac{l}{2} = \frac{d(I_A \cdot \varphi)}{dt}; \quad \text{skąd}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgl}{2I_A}; \quad \dots \dots \dots (313)$$

gdzie I_A oznacza moment bezwładności belki względem bieguna, obranego w punkcie podparcia A . Z przyspieszenia kąowego, wyrażonego tem równaniem, możemy obliczyć naprężenia w przekrojach belki, jakieśmy to wyżej uczynili, lub — siłę odporową A , jak tego wymaga dane zadanie. W tym celu unaocznimy sobie metodą d'Alembert'a siły bezwładności, jakie występują w belce w chwili usunięcia podpory i przyłożymy do jej cząstek siły bezwładności, jakie powstają w chwili usunięcia podpory B . Oznaczmy literą x odległość pewnej cząstki belki od punktu obrotu i wyobrazimy sobie, że do tej cząstki przyłożona jest siła bezwładności styczna z kierunkiem ku górze, i o wielkości, wyrażonej wzorem

$$\frac{q}{g} \cdot dx \cdot x \cdot \frac{d\varphi}{dt};$$

przyłożymy następnie ciężar belki w środku jej masy, a otrzymamy obraz sił bezwładności, będących w równowadze z siłami odporowemi i z ciężarem belki w chwili usunięcia podpory B . Zwrócić jeszcze należy uwagę, że ponieważ prędkość obrotowa w chwili usunięcia podpory równa się zeru, przeto siły odśrodkowe nie występują i belka pozostaje pod działaniem tylko sił stycznych i siły ciężkości. Wykres tego obciążenia przedstawiliśmy na rys. 83-cim. Siłę odporową A obliczymy z warunku równowagi sił przyłożonych do danej belki. Równanie to jest następujące:



Rys. 83.

$$A + \int_0^l \frac{q \cdot dx}{g} \cdot x \frac{d\varphi}{dt} - mg = 0;$$

z którego obliczymy:

$$A = mg - \frac{1}{2} ml \cdot \frac{d\varphi}{dt};$$

a po podstawieniu z równania ruchu, z równ. 313-tego, — wartość przyspieszenia otrzymamy:

$$A = mg \left(1 - \frac{m l^2}{4 I_A} \right)$$

Jeżeli wyobrazimy sobie belkę w postaci pręta, co w wielu przypadkach będzie zgodne z rzeczywistością, to ponieważ

$$I_A = \frac{1}{3} m l^2;$$

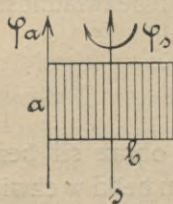
przeto

$$A = \frac{1}{4} mg.$$

Siła więc odporowa jednej podpory, w chwili usunięcia drugiej, stanowi tylko połowę wartości siły odporowej belki, wspartej na obydwóch podporach.

W rozwiązaniu tego zadania można pominąć metodę d'Alembert'a, a natomiast zastosować równanie dynamiczne ruchu środka masy. Obliczywszy bowiem z równania dynamicznego momentów przyspieszenie tego środka, obliczymy z równania ruchu środka masy siły nieznanne, wywołujące ten ruch, t. j. jak w danym przykładzie siłę odporową; postępowanie to jest przeto takie same, jakie stosowaliśmy do obliczenia sił odporowych brył nieswobodnych; a mianowicie wpierw obliczaliśmy ruch, a następnie siły — odporowe.

137. Obliczenie ruchu początkowego bryły w chwili naglej zmiany ruchu. Prostokąt materyalny o bokach a i b , rys. 84-ty, obraca się z prędkością stałą φ_s około osi pionowej s ; przechodzącej przez środek masy i równoległej do boku a ; nagle oś ta zostaje usunięta, a prostokąt zostaje zmuszony obracać się około osi innej, przechodzącej np. przez bok a ; obliczyć prędkość φ_a , jaką otrzyma prostokąt w chwili rozpoczęcia obrotu około nowej osi.



Rys. 84.

W celu zastosowania do tego zadania wyłożonych zasad dynamiki, wyobraźmy sobie; że unieruchomienie boku a zostało wywołane pewnymi siłami, przyłożonemi do niego; a prędkość φ_s przyjmiemy za prędkość początkową ruchu tego prostokąta; w ten sposób mamy obliczyć ruch bryły, na którą działają siły i której ruch początkowy jest φ_s . Obravszy oś a za oś momentów, napiszemy równanie dynamiczne momentów względem tej osi

$$\frac{dM_v}{dt} = 0; \quad \dots \dots \dots (314)$$

W myśl bowiem przyjętych założeń, moment siły ciężkości i momenty sił, przyłożonych do boku a , względem obranej osi momentów, równa się zeru. Pomimo przeto zmiany ruchu prostokąta moment ilości jego ruchu względem osi a , nie doznaje w tych warunkach żadnej zmiany; lecz z tego nie wynika, że i prędkość obrotowa się nie zmienia. W celu obliczenia prędkości φ_a scałkujemy równanie 314-te i otrzymamy:

$$M_v - M_{v,o} = 0, \quad \dots \dots \dots (315)$$

w którym M_v oznacza moment, względem osi a , ilości ruchu prostokąta, obracającego się około tejże osi; a $M_{v,o}$ moment względem tejże osi a ilości ruchu prostokąta, obracającego się około osi s (1).

Moment M_v na zasadzie odnośnych wzorów, wzór 254-ty.

$$M_v = I_a \cdot \varphi_a;$$

gdzie I_a oznacza moment bezwładności prostokąta względem osi a .

Moment ilości ruchu względem osi a prostokąta obracającego się około osi s obliczymy ze wzoru 255-tego, moment ten w danym przykładzie

$$M_{v,o} = I_s \cdot \varphi_s.$$

Mamy przeto z równania 315-go:

$$I_a \cdot \varphi_a - I_s \cdot \varphi_s = 0;$$

skąd

$$\varphi_a = \frac{I_s}{I_a} \cdot \varphi_s;$$

lub po podstawieniu dla danego przykładu:

$$I_a = I_s + m \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m b^2; \quad \text{oraz} \quad I_s = \frac{1}{12} m b^2$$

otrzymamy:

$$\varphi_a = \frac{1}{4} \varphi_s.$$

(1) Należy bowiem rozróżniać ściśle oś obrotu od osi, względem której obliczamy momenty; nacośmy już zwracali uwagę w przypisku na str. 224-tej tej części.

W chwili przeto unieruchomienia boku a , prostokąt dany obraca się około tego boku z chwilową prędkością, równą $\frac{1}{2}$ prędkości, jaką posiadał podczas obrotu około osi s . Dalszy ruch tego prostokąta zależy od warunków fizycznych, w jakich ten prostokąt znajdować się będzie. Jeżeli oś obrotu a zostaje fizycznie utrzymana, to prostokąt obracać się będzie około tej osi ze stałą prędkością φ_a . Jeżeli zaś w tej chwili po zmianie obrotu oś a zostanie usunięta; to powstanie ruch swobodny prostokąta z początkową prędkością $\overline{\varphi}_a$; obliczenie tego ruchu może być wykonane w tenże sposób, w jaki obliczyliśmy ruch pręta w § 132-gim.

W przykładzie powyższym na dany prostokąt działały siły, które nie dawały momentu względem osi obrotu a ; obliczmy teraz ruch, jaki otrzyma ten prostokąt, jeżeli będą na niego działały siły, dające moment względem osi a .

Obliczenie tego ruchu zmieni się w ten sposób; że zamiast równania 314-tego, otrzymamy w tym przypadku równanie dynamiczne momentów względem osi a o następującej postaci:

$$\frac{dM_v}{dt} = M_P;$$

w którym M_P oznacza moment sił zewnętrzných, działających na prostokąt. Całka tego równania jest następująca:

$$M_v - M_{v,0} = \int_0^{\Delta t} M_P \cdot dt;$$

w którym Δt oznacza okres czasu, w którym działa moment sił zewnętrznych. Ponieważ jednakże okres ten w przypadkach nagłych zmian ruchu jest znikomym; przeto i wartość tej całki posiada wartość znikomą; jeżeli M_P posiada wartość skończoną.

Wyrażając się matematycznie powiemy, że wartość całki powyższej jest nieskończenie małą w porównaniu z różnicą wartości momentów ilości ruchu i może być z tego powodu pominięta.

Poglądowo unaocznimy sobie ten wniosek w następujący sposób: siły zewnętrzne, działające na pewną bryłę, podczas działania na nią sił chwilowych, nie mają czasu do wywołania znaczniejszej zmiany ruchu tej bryły; zmiana przeto ruchu takiej bryły pochodzić może tylko od działania sił chwilowych, które, w myśl danego ich określenia, są tak wielkie, że w przeciągu znikomo krótkiego czasu wywołują znaczne zmiany ruchu. Wogóle przeto powiedzieć możemy, że w obliczeniu ruchu, wywołanego siłami chwilowemi, działanie sił skończonych może być pominięte.

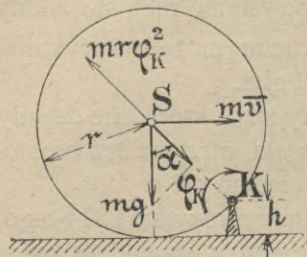
138. Przykład nagłej zmiany ruchu. Krążek materyalny ślizga się po płaszczyźnie poziomej ruchem postępowym jednostajnym w kierunku prostopadłym do swej osi; w pewnym miejscu swej drogi trafia on na przeszkodę materyalną o wysokości h ; około której się obróci. Jaką prędkość postępową powinien mieć ten krążek, ażeby, obróciwszy się około punktu zetknięcia się z przeszkodą, przetoczył się przez tę przeszkodę, rys. 85-ty.

Ażeby krążek dany mógł przetoczyć się przez tę przeszkodę, powinien unieść się na wysokość h ; energia jego kinetyczna przeto, w chwili obrotu około punktu ze-

tknięcia się z przeszkodą, powinna być większą a przynajmniej równą pracy ciężkości walca, jaką on wykona, przy podniesieniu się; t.j. powinna być:

$$\frac{1}{2} I_K \cdot \varphi_K^2 \geq mgh;$$

gdzie φ_K oznacza prędkość początkową obrotu krążka około punktu zetknięcia się jego z przeszkodą. Prędkość tę obliczymy jako obrót początkowy naglej zmiany ruchu danego walca; § poprzedni.



Rys. 85.

Równość momentów ilości ruchu po i przed uderzeniem względem bieguna, obranego w K , wyrazimy równaniem:

$$I_K \cdot \varphi_K - mv \cdot (r - h) = 0; \quad (316)$$

a po podstawieniu z tego równania wartości φ_K w poprzednią nierówność, otrzymamy szukany warunek:

$$v \geq \frac{1}{r - h} \cdot \sqrt{2 \frac{I_K}{m} \cdot g \cdot h}.$$

Ażeby obliczyć siłę odporową, jaka występuje w punkcie zetknięcia się krążka z przeszkodą, zastosujemy równanie ruchu środka masy. Jeżeli w obliczeniu tem nieuwzględnimy siły tarcia, to siła odporowa występuje normalnie do obwodu krążka, t.j. występuje wzdłuż promienia KS ; oznaczmy tę siłę literą \bar{N} ze zwrotem ku środkowi krążka, a napiszemy równanie ruchu środka masy:

$$\bar{N} + m\bar{g} = m \frac{d\bar{v}_s}{dt}.$$

Zrzutujmy to równanie na normalną KS , a otrzymamy:

$$mg \cdot \cos \alpha - N = mr\varphi_K^2;$$

skąd, po podstawieniu odnośnych wartości, obliczymy siłę odporową N .

Zadanie. Obliczyć wysokość przeszkody, przy której krążek po uderzeniu oddzieli się od niej, jeżeli nie był przymocowany.

Odpowiedź:

$$h \leq r \cdot \frac{I_K}{2mr^2 + I_K}.$$

Zadanie. Obliczyć tę siłę odporową, stosując do tego metodę d'Alembert'a.

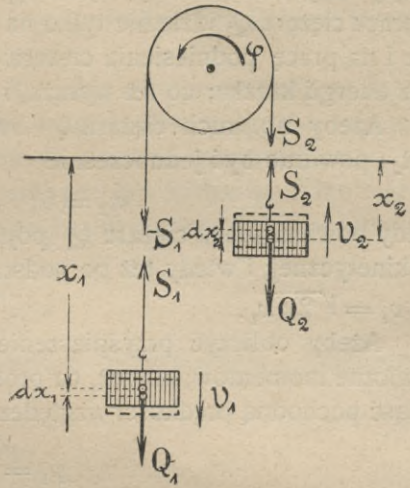
139. Przyrząd Atwood'a. Przez krążek materyalny, obracający się około osi poziomej nieruchomej, przerzucona jest nić nierozciągliwa, na której końcach przyczepiono ciężarki Q_1 i Q_2 ; obliczyć ruch np. ciężarka Q_1 , nieuwzględniając oporów, jakie powstają podczas ruchu, i nie uwzględniając masy nici; rys. 86-ty.

Ciężar Q_1 przedstawia bryłę o jednym stopniu swobody; gdyż np. odległość x_1 środka jego od początkowego jego położenia określa położenie ciężaru; jedno przeto równanie wystarczy do obliczenia tego ruchu.

Do rozwiązania tego zadania nie można zastosować bezpośrednio wzorów, wyprowadzonych dla ruchu brył pojedynczych; posiadamy bowiem w danym przykładzie trzy bryły, które są połączone z sobą nicią i których ruchy są wzajemnie uzależnione.

Jeżeli wogóle nicią giętką połączone są dane bryły, na które działają siły ze-

wewnętrzne, to w nici takiej występują siły ciągnące. Ażeby te siły unaocznić, wyobraźmy sobie, że nica jest przecięta w dowolnym miejscu i do jej końców przyczepione są dwie siły takie, które nie zmieniają chwilowego stanu ruchu lub też spoczynku tych brył; siły te są miarą naprężenia nici, jakie występuje podczas jej rozciągania. Naprężenia te, na zasadzie prawa wzajemnego działania, są wzajemnie równe; co do zwrotów przeciwne i działają wzdłuż jednej prostej. Każdy przeto układ, złożony z wielu brył materialnych, połączonych z sobą nićmi, rozdzielić można na oddzielne bryły; gdy wyobrażymy sobie nici poprzecinane, a natomiast przyłożone do ich końców siły ich naprężeń. Po takim rozdzieleniu danego układu na bryły pojedyncze można już do każdej z nich zastosować równania dynamiczne. Jeżeli zastosujemy np. równania równowartości pracy i energii kinetycznej, to otrzymamy tyle równań algebraicznych, z ilu brył złożony jest dany układ. Jeżeli



Rys. 86.

równania te dodamy z sobą, to suma cząstkowych prac naprężeń w tej samej nici będzie równa zero i wypadnie z wyrazu ogólnej sumy, a pozostanie w równaniu tylko suma cząstkowych prac sił zewnętrznych, przyłożonych do całego układu, oraz przyrosty energii kinetycznej każdej bryły oddzielnej.

W celu zastosowania tych ogólnych uwag do danego przykładu; przesuńmy ciężar Q_1 na wysokość dx_1 , a równanie równowartości pracy i energii kinetycznej dla całego układu będzie następujące:

$$Q_1 \cdot dx_1 - Q_2 \cdot dx_2 = d\left(\frac{1}{2} I_s \varphi^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\right); \quad \dots \quad (317)$$

w którym φ oznacza prędkość obrotową krążka w dowolnej chwili; v_1 i v_2 oznaczają prędkości ruchu postępowego odnośnych ciężarków; a I_s — moment bezwładności krążka względem osi, przechodzącej przez środek jego masy.

W skutek nierozciągliwości nici mamy związki:

$$dx_2 = dx_1; \quad \text{a więc i} \quad v_2 = v_1; \quad \text{oraz} \quad v_1 = r\varphi;$$

a po podstawieniu tych wartości w równanie pracy i po scałkowaniu tego równania dla warunków początkowych:

$$t = 0; \quad x_1 = 0; \quad v_1 = 0;$$

otrzymamy równanie ruchu, dające związek pomiędzy prędkością bryły Q_1 i jej położeniem; równanie to jest następujące:

$$x_1(m_1 - m_2) = \frac{v_1^2}{2g} \left(\frac{I_s}{r^2} + m_1 + m_2 \right) \quad \dots \quad (318)$$

skąd

$$v_1 = \sqrt{2g x_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{\frac{I_s}{r^2} + m_1 + m_2}} \quad \dots \quad (319)$$

Z równania tego wynika, że prędkość ciężaru Q_1 jest mniejszą na tych samych wysokościach, niż prędkość swobodnie spadającej bryły. Wynik ten można wytłumaczyć sobie fizycznie tem; że siła ciężkości bryły Q_1 wywołuje ruch nie tylko swojej masy, lecz i — masy ciężaru Q_2 , oraz — masy krążka; lub inaczej wyrażając się, że praca ciężaru Q_1 idzie nie tylko na powiększenie swej własnej energii kinetycznej, lecz i na pracę podniesienia ciężaru Q_2 , — na powiększenie jego energii kinetycznej oraz energii krążka; co też wyraża równanie 317-te.

Ażeby np. ruch ciężaru Q_1 był jednakowy z ruchem swobodnie spadającej bryły; powinno być jednocześnie

$$m_2 = 0; \quad \text{oraz} \quad I_s = 0;$$

wtedy bowiem praca ciężaru Q_1 pójdzie tylko na powiększenie jego własnej energii kinetycznej; i wtedy też po podstawieniu tych wartości w równ. 319-te otrzymamy $v_1 = \sqrt{2gx_1}$.

Ażeby obliczyć przyspieszenie ciężaru Q_1 ; można zastosować równanie dynamiczne momentów; lub też, co prościej będzie, mając już równanie 319-te, można wziąć pochodną prędkości względem czasu, a otrzymamy to przyspieszenie:

$$p_1 = g \frac{m_1 - m_2}{\frac{I_s}{r^2} + m_1 + m_2}; \quad \dots \dots \dots (320)$$

lub też, zważywszy, że ruch ciężaru danego jest jednostajnie przyspieszony, można utożsamiać równanie 319-te z równaniem ruchu jednostajnie przyspieszonego:

$$v = \sqrt{2px},$$

i bezpośrednio napisać wyraz tego przyspieszenia.

Zadanie obliczenia naprężenia nici, na której zawieszony jest ciężar Q_1 ; należy do grupy zadań, w których obliczamy siły ze znanego ruchu bryły.

W celu tego obliczenia napiszemy równanie dynamiczne ruchu środka bryły Q_1 :

$$(Q_1 - S_1) = m_1 p_1;$$

z którego obliczymy naprężenie S_1 , po podstawieniu z równania 320-tego wartości przyspieszenia. Naprężenie to:

$$S_1 = m_1 g \cdot \frac{\frac{I_s}{r^2} + 2m_2}{\frac{I_s}{r^2} + m_1 + m_2} \quad \dots \dots \dots (321)$$

Sprawdźmy słuszność tego wzoru dla pewnych szczególnych przypadków. Jeżeli np.

$$m_2 = 0; \quad \text{oraz} \quad I_s = 0; \quad \text{to} \quad S_1 = 0;$$

i rzeczywiście; w tym przypadku ciężar Q_1 swobodnie spada; przyspieszenie więc jego $= g$; a w nici naprężenie nie występuje.

Jeżeli zaś

$$m_1 = m_2,$$

to otrzymamy

$$p_1 = 0; \quad \text{oraz} \quad S_1 = m_1 g;$$

niezależnie od wartości I_s i r ; co jest bezpośrednio zrozumiałem; następuje bowiem w tym przypadku równowaga ciężarów; naprężenie przeto nici równa się zawieszonemu na niej ciężarowi. Niezależność w tym przypadku naprężenia S_1 od I_s i r objaśnia się tem, że w przypadku równowagi ciężarów krążek pozostaje w spoczynku lub w obrocie jednostajnym; masa przeto jego pozostaje bez wpływu na rozkład sił, gdyż nie otrzymuje przyśpieszenia obrotowego.

Zauważyć następnie należy, że naprężenie S_2 , jakie występuje podczas ruchu bryły i krążka, w części nici, zwieszającej się po drugiej stronie krążka, nie jest równe S_1 , jakby to się zdawać mogło. Naprężenie to powinno być mniejsze od S_1 ; siła bowiem S_1 porusza ciężar Q_2 oraz obraca krążek; siła zaś S_2 dźwiga tylko ciężar Q_2 i nadaje mu ruch. Siłę S_2 obliczymy z równania ruchu ciężaru Q_2 ; równanie to jest następujące:

$$Q_2 - S_2 = -m_2 \frac{dv_2}{dt};$$

a po podstawieniu $v_2 = v_1$ oraz — odnośnej wartości przyśpieszenia, obliczymy z tego wzoru szukane naprężenie:

$$S_2 = m_2 g \cdot \frac{\frac{I_s}{r^2} + 2 m_1}{\frac{I_s}{r^2} + m_1 + m_2} \dots \dots \dots (322)$$

Siły S_1 i S_2 , przyłożone z odwrotnymi zwrotami do końców nici, przewieszonych przez krążek, wywołują obrót tego krążka. Obrót ten obliczyć można np. z równania dynamicznego momentów, zestawionego dla ruchu krążka; ruch ten jednakże jest już znany ze znanej wartości p_1 ; gdyż $r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = p_1$; obliczenie to może być przeto sprawdzeniem prawidłowości naszego rachunku. Równanie momentu sił, działających na krążek, względem osi obrotu, jest następujące:

$$S_1 \cdot r - S_2 \cdot r = \frac{d(I_s \varphi)}{dt};$$

z którego, po podstawieniu wartości S_1 i S_2 otrzymamy wzór 320-ty.

Jeżeli obrót krążka ma być wywołany tarcie, występującem pomiędzy nicią a krążkiem; to siły, występujące w końcach nici, powinny odpowiadać warunkowi, wyrażonemu równaniem 257-em tomu I-go; t. j. powinien zachodzić związek:

$$S_1 \leq S_2 \cdot e^{\mu \alpha}; \dots \dots \dots (323)$$

w przeciwnym bowiem razie nastąpi ślizganie się nici po obwodzie krążka; i wyniki obliczenia powyższego nie będą się stosowały do tego przypadku.

Po podstawieniu we wzór 323-ci wartości naprężeń z równań 321-ego i 322-ego otrzymamy związek, jaki powinien zachodzić pomiędzy wielkościami mas poruszających się ciężarów, ażeby wywołać tarcie pomiędzy nicią a krążkiem; stosunek ten jest następujący:

$$m_1 \leq m_2 \cdot e^{\mu \alpha}; \quad \text{lub inaczej:} \quad Q_1 \leq Q_2 \cdot e^{\mu \alpha}.$$

Wynik ten stanie się bezpośrednio zrozumiałym, gdy zważymy, że stosownie do wzoru 321-ego i 322-ego, naprężenia w niciach są proporcjonalne do zawieszonych ciężarów.

Nie trudno pod względem praktycznym uczynić zadość powyższej nierówności; jeżeli można dowolnie powiększać wielkość μ lub α . W szczególnych zaś przypadkach, gdy wartości μ i α nie możemy powiększyć, wypadnie dla wywołania obrotu krążka zastosować inny sposób zaczepienia pomiędzy krążkiem i nicią; wypadnie np. zastąpić nić łańcuchem, a koło uczynić zębatem.

140. Obliczenie ruchu brył układu materalnego. Każdy mechanizm jest złożony wogóle z brył materalnych, które stykają się wzajemnie, lub też połączone są ze sobą cięgnami. Bryły te są przeto nieswobodne; a o ich stopniach swobody można mówić w tenże sposób, w jaki mówiliśmy o ilości stopni swobody jednej bryły, § 58-my tomu I-go. Jeżeli np. dla określenia położenia brył danego układu wystarcza znajomość jednej spórzędnej, to mówimy, że dany układ posiada jeden stopień swobody; i t. p. Układ np. podany w § 226-tym tomu 1-ego posiada dwa stopnie swobody.

Na części danego mechanizmu, t. j. na każdą bryłę, z jakich złożony jest dany mechanizm, działają wogóle siły zewnętrzne i siły odporowe, pochodzące od innych brył. Jeżeli te części połączone są z sobą np. cięgnami, to ruchy ich podczas działania w cięgnach sił ciągnących mogą być obliczone w sposób w paragrafie poprzednim; w razie zaś jeżeli te części bezpośrednio się stykają pewnymi cząstkami swych pól, które dla uproszczenia rachunku przyjmujemy za punkty geometryczne, to w celu obliczenia ich ruchu, wyobrazimy sobie, że do każdej z takich brył przyłożone są siły odporowe, pochodzące od brył sąsiednich i zestawimy dla każdej bryły równanie dynamiczne, np. równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. Równań takich otrzymamy tyle, z ilu brył składa się dany mechanizm. Do każdego z tych równań wchodzi wyrazy pracy sił zewnętrznych, wyrazy pracy sił odporowych i wyraz przyrostu energii kinetycznej danej bryły. Jeżeli następnie równania te dodamy, to otrzymamy sumy wyrazów prac sił zewnętrznych; sumę wyrazów prac sił odporowych i sumę przyrostów energii kinetycznych oddzielnych części.

Przy pewnych szczególnych warunkach fizycznych, suma prac sił odporowych może równać się zeru; a wtedy równanie pracy będzie wolne od wielkości sił odporowych; i przedstawi związek pomiędzy siłami zewnętrznymi i spórzędnymi ruchu danego układu.

Warunki, przy których suma prac sił odporowych, występujących pomiędzy bryłami, równa się zeru, są następujące:

- 1) przesunięcia brył powinny być przystosowane do warunków ruchu danego układu brył; wtedy bowiem przesunięcia sił odporowych są prostopadłe do kierunku sił;
- 2) siły tarcia, występujące pomiędzy oddzielnymi bryłami; powinny być tak małe, żeby można było ich nie uwzględniać;
- 3) powierzchnie zetknięć się brył nie powinny zmieniać swej geometrycznej postaci podczas ruchu.

Jeżeli dany układ odpowiada tym warunkom, to praca sił zewnętrznych podczas przesunięcia przystosowanego danych brył równa się sumie przyrostów energii kinetycznej oddzielnych brył tego układu.

Stosowanie tego twierdzenia szczególnie się nadaje do obliczenia ruchu złożonych mechanizmów o jednym stopniu swobody, gdy nieuwzględniamy oporów; daje ono bowiem bezpośrednio szukane równanie ruchu.

Zwrócić tutaj należy uwagę na tę okoliczność, że twierdzenie, wygłoszone w § 217 tomu I-go o warunkach równowagi sił, działających na układ złożony, jest szczególnym przypadkiem tego twierdzenia o ruchu brył. Z określenia bowiem równowagi sił wynika, § 118 tomu I-go, że podczas równowagi sił, przyrost energii kinetycznej danego układu równa się zeru. Jeżeli przeto na mechanizmy, opisane w § 218-tym tomu I-go, działają siły, które się nie równoważą; to części tych mechanizmów będą w ruchu; a równanie ich ruchu otrzymamy, gdy przyrównamy sumę prac przystosowanych do sumy przyrostów energii kinetycznych, poruszających się części danego mechanizmu.

W pewnych jednakże szczególnych przypadkach można stosować równanie równowartości pracy sił zewnętrznych i energii kinetycznej; chociaż siły wewnętrzne wykonują pewną pracę. Przypadki te zachodzą, jeżeli podczas pewnego okresu czasu, w którym bryły są w ruchu; suma prac sił wewnętrznych równa się zeru; pomimo, że w oddzielnych okresach tego ruchu suma tych prac nie jest równą zeru; przyrost przeto energii kinetycznej, który powstał w całym okresie czasu, równa się w tym razie tylko pracy sił zewnętrznych.

Przykładem takich układów są układy, złożone z brył sprężystych, lub też z brył połączonych cięgnami sprężystymi. Jeżeli taki układ po odkształceniu wywołanem siłami zewnętrznymi, powróci do swej pierwotnej postaci, to suma prac, jakie wykonają siły wewnętrzne w ciągu tego okresu, równa się zeru; suma przeto prac sił zewnętrznych równa się w tym razie przyrostowi energii kinetycznej, powstałemu w tym okresie; pomimo, że siły wewnętrzne wykonywały podczas ruchu brył pewne prace.

Podczas np. uderzenia się brył sprężystych, powstaje najpierw praca ujemna sił wewnętrznych; a następnie, podczas powracania ich do pierwotnych postaci, powstaje praca taka dodatnia tych sił, iż suma tych prac w ciągu całego okresu może być uważaną za równą zeru.

141. Obliczenie ruchu układu brył o jednym stopniu swobody.

Obliczmy np. ruch ciężaru Q przymocowanego do śruby sposobem, wskazanym na rysunku 278-ym i podanym na str. 288-iej tomu I-go. Zachowawszy oznaczenia, wskazane w tym przykładzie, napiszemy równanie równowartości pracy i energii kinetycznej:

$$PR \cdot d\sigma - Q \cdot dx = d\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I \cdot \varphi^2\right);$$

w którym v oznacza prędkość postępową, φ prędkość obrotową śruby, a I moment bezwładności względem osi obrotu wszystkich obracających się części mechanizmu.

Podstawiawszy w powyższe równanie:

$$d\sigma = \frac{2\pi}{h} \cdot dx; \quad \text{oraz} \quad \varphi = \frac{2\pi}{h} \cdot v;$$

otrzymamy, po scałkowaniu przy początkowych warunkach: $t = 0$; $x = 0$; $\varphi = 0$; $v = 0$, równanie ruchu:

$$R \cdot \frac{2\pi}{h} \cdot x - Q \cdot x = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \frac{4\pi^2}{h^2} \cdot v^2;$$

z którego:

$$v = \sqrt{2x \cdot \frac{P \cdot \frac{2\pi R}{h} - Q}{m + I \cdot \frac{4\pi^2}{h^2}}}$$

Łatwo spostrzedz z tego wzoru, że ruch ciężaru jest ruchem jednostajnie przyspieszonym. W szczególnych przypadkach, jeżeli:

$$P \cdot \frac{2\pi R}{h} - Q = 0;$$

to zachodzi stan równowagi; otrzymamy bowiem $v = 0$ dla wszelkich wartości x . Jeżeli zaś:

$$P \cdot \frac{2\pi R}{h} - Q > 0;$$

to $v > 0$; czyli ruch odbywa się zgodnie ze zwrotem rosnącego x ; t. j. ku górze; w przeciwnym razie, jeżeli wyraz powyższy jest ujemny, to v otrzyma wartości rzeczywiste tylko dla $x < 0$; t. j. ruch ciężaru będzie ku dołowi.

6. O uderzeniu się brył materalnych.

142. Siły chwilowe. Jeżeli bryła materalna po zetknięciu się z inną bryłą zmieni nagle, t. j. w krótkim okresie czasu stan swego ruchu, to powiadamy, że bryła ta doznała uderzenia. Ponieważ, każdą zmianę prędkości punktów materalnych przypisujemy siłom; przyjmujemy przeto i w tym razie, że począwszy od chwili zetknięcia się brył do chwili ich rozejścia się, występują w punktach czy też polach ich zetknięcia się pewne siły. Przyjmujemy przeto, że bryła materalna, uderzając w inną bryłę, doznaje działania pewnej siły, pochodzącej od bryły uderzonej; a ponieważ i bryła uderzona zmienia jednocześnie stan swego ruchu, powiadamy przeto, że doznaje ona również pewnego działania, pochodzącego od bryły uderzającej.

Siły te, w myśl prawa fizycznego wzajemnego działania, o którem mówiliśmy w § 86-tym tego tomu, są co do swych wielkości wzajemnie równe, działają wzdłuż jednej prostej i zwroty mają przeciwne. Dwie takie siły odpowiadają przeto warunkom równowagi, które wyraziliśmy ich summą i summą ich momentów; porówn. wzory 197-my i 198-my. Ponieważ zmiana ilości ruchu, jaka zachodzi w bryle wskutek uderzenia jest dosyć znaczną w porównaniu z czasem, w jakim ona powstała, przeto wnioskujemy, że siły, jakie powstają podczas uderzenia się brył, muszą być bardzo wielkie. Ażeby wyrobić sobie przybliżony obraz wielkości tych sił; przyjmijmy np., że bryła o masie 10 kg po jej uderzeniu nabyła prędkości 1 m na sek., a okres zetknięcia się tych brył, t. j. okres uderzenia wynosi 0,001 sekundy. Jeżeli przyjmiemy następnie, z pewnym przybliżeniem, że siła

ta podczas uderzenia jest stałą; to z równania:

$$P = \frac{d(mv)}{dt};$$

po jego scałkowaniu otrzymamy:

$$P \cdot \Delta t = mv; \quad \text{i wreszcie} \quad P = \frac{mv}{\Delta t};$$

gdzie Δt oznacza okres czasu, podczas którego bryły były w zetknięciu; a po podstawieniu przyjętych wartości otrzymamy:

$$P = \frac{10}{g} \cdot 1 \cong 1000 \text{ kg.}$$

Jest to siła dosyć znaczna w porównaniu np. z ciężarem danej bryły; a będzie ona większą, jeżeli okres uderzenia będzie krótszy. Zrozumiałem przeto powinno być teraz ze stanowiska fizycznego, dlaczego np. gwóźdź nawet pod słabem uderzeniem młotka zagłębi się w deskę; lub też dlaczego wytrzymałość bryły, w którą uderzymy młotkiem, może być bardzo łatwo przekroczoną; i o tyle łatwiej o ile uderzenie jest krótsze.

Z określenia uderzenia wynika jeszcze inny bardzo ważny wniosek, do którego doszliśmy już w § 137-ym przy obliczeniu nagłych zmian ruchu.

Jeżeli na bryłę, poddaną uderzeniu, działają podczas tego uderzenia siły zewnętrzne, o wielkościach nieznaczących w porównaniu z siłą chwilową, jaka powstaje podczas uderzenia; to działanie tych sił podczas uderzenia możemy pominąć; wobec bowiem znacznych zmian w ruchu brył, jakie wywołują siły uderzenia; zmiany ruchu, wywołane siłami ciągłymi w tymże okresie czasu, są tak nieznaczące, że można je pominąć. Wniosek ten byłby zupełnie ścisły, gdyby okres uderzenia trwał nieskończenie krótko; wtedy bowiem siła uderzenia $P = \infty$; a wszystkie inne siły, o skończonych wartościach, byłyby nieskończenie małymi w porównaniu z siłą uderzenia; t. j. nie wywołałyby żadnej zmiany ruchu. W świecie jednakże fizycznym nie mamy takich uderzeń ($\Delta t = 0$); przeto wniosek ten posiada tylko względną wartość; dla praktycznych jednakże obliczeń pozostawać może w swej mocy. Wniosek ten wysłowimy: działanie sił ciągłych, przyłożonych do bryły, mogą być pominięte przy obliczaniu ruchu, wywołanego siłami chwilowemi. Przy obliczaniu np. prędkości piłki, jaką ona otrzyma, w chwili odbicia się o ścianę, ciężaru tej piłki można nie uwzględniać, uwzględnimy go jednakże przy obliczeniu jej ruchu przed i po odbiciu się jej od ściany.

143. Przebieg uderzenia się brył. W przebiegu uderzenia się brył należy rozróżnić dwa okresy. Pierwszy okres rozpoczyna się z chwili, w której bryły zetkną się w jednym punkcie, i okres ten trwa tak długo, dopóki bryły wskutek wzajemnego nacisku nie wyrównają swych prędkości. W chwili tego wyrównania bryły nie oddziałują już na siebie; nie zmieniają stanu swego ruchu, ani też nie odkształcają się. Od tej chwili zaczyna się okres drugi uderzenia, którego przebieg zależy od fizycznych właściwości, uderzających się brył. W okresie tym zachodzi powrót odkształconych brył do pierwotnej postaci; które, zależnie od ich fizycznych właściwości, bądź powracają zupełnie do swych pierwotnych postaci podczas styka-

nia; bądź powracają tylko częściowo; bądź wreszcie wcale nie zmieniają swojej odkształconej postaci. Bryły, które po uderzeniu się powracają do pierwotnej postaci nazywają zupełnie sprężystymi: inne zaś niezupełnie sprężystymi lub niesprężystymi.

Badania nasze dotyczą zmian, jakie zachodzą w ruchu uderzających się brył od początku pierwszego okresu, t. j. od chwili zetknięcia się brył do chwili, w której wyrównają się ich prędkości, lub też do chwili ich rozejścia się.

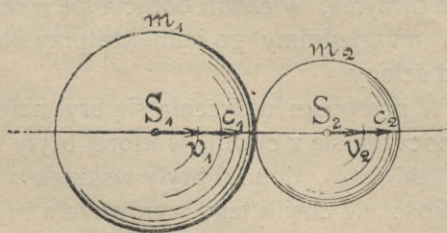
W celu obliczenia ruchu uderzających się brył będziemy uważali je jako zmienny układ punktów, w którym działają tylko siły wewnętrzne, co do których już wiemy, że suma ich oraz suma ich momentów równa się zeru, a praca ich ze względu na odkształcalność brył, wogóle nie jest równa zeru; może ona być jednakże równą zeru w tym tylko szczególnym przypadku, o którym wspominaliśmy w końcu § 139-tego; t. j. w przypadku, w którym obydwie bryły w końcu drugiego okresu przybiorą pierwotną postać, i w tym tylko przypadku można będzie stosować do obliczeń ruchu zasadę zachowania energii kinetycznej. Jeżeli zaś obydwie bryły w końcu drugiego okresu nie zupełnie powrócą do pierwotnej postaci, wtedy do rachunku wprowadzimy wyraz pracy sił wewnętrznych, której wielkość jednakże będzie można obliczyć tylko drogą doświadczeń.

144. Określenia sposobów uderzenia się brył. Dwie bryły podczas uderzenia się stykają się z sobą cząstkami swych odkształconych powierzchni; dla uproszczenia jednakże rozpatrywać, przyjmiemy te cząstki jako punkty geometryczne, leżące na nieodkształconych powierzchniach uderzających się brył i nazwiemy je punktami uderzeń, a normalne do powierzchni odnośnych brył, wystawione w tych punktach nazwiemy osiami uderzeń. Na podstawie tych określeń przyjąć można, że osie uderzeń dwóch brył podczas ich uderzenia się wzajemnie się pokrywają.

Jeżeli środek masy bryły leży na jej osi uderzeń, to uderzenie takie nazwiemy **środkowem**, w przeciwnym razie **mimośrodkowem**; jeżeli zaś kierunek prędkości punktu uderzenia pokrywa się z kierunkiem osi uderzenia, to uderzenie takie nazwiemy **prostym**, w przeciwnym razie **ukośnym**. Uderzenie np. kuli o ścianę jest zawsze **środkowem**, środek bowiem kuli i jej punkt uderzenia leżą na osi uderzenia, lecz nie zawsze jest ono **proste**, nie zawsze bowiem kierunek prędkości punktu uderzenia pokrywa się z kierunkiem osi uderzenia.

145. Uderzenie się brył proste i środkowe. Rozpatrzmy najprostszy

przykład uderzenia się brył — prostego i środkowego. W tym celu weźmy pod uwagę dwie kule, o masach m_1 i m_2 , poruszające się ruchem postępowym z prędkościami c_1 i c_2 w ten sposób, że środki ich pozostają podczas ruchu na jednej prostej. Przyjmiemy dla ujednostajnienia rachunku, że zwroty tych prędkości są z sobą zgodne; uderzenie się kul nastąpi wtedy,



Rys. 87.

gdy jedna z nich dogoni drugą, t. j. gdy np. $c_1 > c_2$; uderzenie takie, w myśl danych określeń, jest **środkowe** i **proste**; zadanie polega na obliczeniu prędkości tych kul v_1 i v_2 , jakie one posiadać będą po wzajemnem się uderzeniu. Zadanie w ten

sposób postawione rozpada się na dwa zadania: na zadanie, polegające na obliczeniu prędkości, jakie posiadać będą kule w chwili wyrównania swych prędkości, t. j. w chwili, w której przestają na siebie oddziaływać; i na zadanie, polegające na obliczeniu prędkości w chwili ich rozejścia się. Zadanie pierwsze odpowiada przypadkowi, w którym kule są z materiału niesprężystego; zadanie zaś drugie, gdy kule te są z materiału sprężystego.

Prędkości, które mamy obliczyć v_1 i v_2 , przyjmiemy za dodatne, gdy zwroty mają zgodne z prędkościami c_1 i c_2 . Ponieważ przyjmujemy wogóle, że podczas działania sił chwilowych, nie uwzględnia się działania sił ciągłych, równanie przeto ilości ruchu, § 200-tny, punktów tych brył w dowolnej chwili podczas ich stykania się jest następujący:

$$\frac{d\Sigma(m_k v_k)}{dt} = 0,$$

gdzie litery v_k oznaczają prędkość punktów obydwóch brył; z równania tego po jego scałkowaniu otrzymamy:

$$\Sigma(m_k v_k) = \text{stałe} \dots \dots \dots (324)$$

Sumę tę wyobrazimy sobie rozdzieloną na dwie sumy; z których jedna będzie obejmować sumę ilości ruchu jednej kuli; druga zaś takąż sumę iloczynów kuli drugiej; a ponieważ przyjmiemy w tym przykładzie, że ruchy obydwóch kul są postępowe, suma przeto $\Sigma(m_k v_k)$ dla każdej bryły będzie równą iloczynowi z jej masy i wspólnej tym punktom prędkości. Równanie przeto 324-te przekształci się na następujące:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 c_1 + m_2 c_2 \dots \dots \dots (325)$$

Równanie to pozostaje w swej mocy dla prędkości brył w każdej chwili podczas ich stykania się; pozostają przeto w mocy tak dla uderzeń sprężystych, jak i niesprężystych; siły bowiem wewnętrzne, chociaż podczas stykania się brył, zmieniają swe wielkości, lecz zmieniają je jednocześnie w ten sposób, że wartości ich w każdej chwili są wzajemnie równe, niezależnie od tego, czy bryły są sprężyste czy niesprężyste.

146. Uderzenie się środkowe i proste brył niesprężystych. Jeżeli fizyczne właściwości uderzających się kul są tego rodzaju, że obydwie kule posiadają tylko pierwszy okres, t. j. że po nabyciu wspólnej prędkości, nie powracają do pierwotnej postaci, wtedy

$$v_1 = v_2 = v,$$

a po podstawieniu tych wartości w równanie 325-te otrzymamy:

$$v = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \dots \dots \dots (326)$$

Z równania tego obliczymy przeto prędkość wspólną, jaką posiadają kule niesprężyste, po ich połączeniu się.

W szczególnym przypadku, w którym

$$m_1 = m_2 = m,$$

prędkość po uderzeniu się kul:

$$v = \frac{c_1 + c_2}{2},$$

t. j. prędkość wspólna jest w danym przypadku średnią arytmetyczną wielkością prędkości początkowych. Jeżeli zaś prędkości początkowe są równe, lecz posia-

dają zwroty przeciwne: t. j. jeżeli prędkość jednej bryły jest dodatnią, drugiej zaś ujemną; to po podstawieniu w równ. 326-te:

$$m_2 = m_1; \quad c_2 = -c_1;$$

otrzymamy dla tego przypadku:

$$v = 0;$$

t. j. dwie kule niesprężyste o równych masach i prędkościach przeciwnych, po uderzeniu się pozostaną w spoczynku.

Wyników tych można było spodziewać się ze względu na symetryczność warunków danego zjawiska.

147. Stracona energia kinetyczna. Wynik tego ostatniego przypadku zwrócić powinien uwagę naszą na tę okoliczność, że po takim uderzeniu się, ginie energia kinetyczna, jaką posiadają bryły przed ich uderzeniem się; wartość bowiem tej energii w danym przypadku przed uderzeniem wyraża się wzorem

$$2 \cdot \frac{1}{2} m_1 c_1^2;$$

po uderzeniu się zaś wartość ta równa się zeru. Na okoliczność tę zwróciliśmy już uwagę w początku tych rozpatrywań; zaznaczając, że siły wewnętrzne wykonują pracę; stracona energia kinetyczna idzie właśnie na pracę odkształcenia brył uderzających się i na energie fizyczne, np. ciepło, powstające wskutek uderzenia. Znając przeto wogóle prędkość, a więc i energię kinetyczną brył przed i po ich uderzeniu się, obliczyć możemy ze straconej energii pracę sił wewnętrznych. W celu tego obliczenia uważać będziemy, jak poprzednio, obydwie uderzające się bryły jako jeden układ punktów i zastosujemy do tego obliczenia równanie 208-me, t. j. równanie równowartości pracy i energii kinetycznej; a ponieważ podczas uderzenia się brył nie uwzględniamy sił zewnętrznych; przeto wartość straconej energii kinetycznej, w pierwszym okresie uderzenia, którą oznaczymy literą T_s , wyrazimy wzorem:

$$T_s = \Sigma (\frac{1}{2} m_k c_k^2) - \Sigma (\frac{1}{2} m_k v_k^2).$$

W przypadku, gdy bryły poruszają się ruchem postępowym; jak to było w przytoczonym przykładzie, przekształci się to równanie na następujące:

$$T_s = (\frac{1}{2} m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2;$$

a po podstawieniu wartości v z równania 326-ego i po uporządkowaniu wyrazów, otrzymamy

$$T_s = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2)^2 \quad \dots \quad (327)$$

Energia ta, jakieśmy to już powiedzieli, idzie na prace odkształcenia bryły i na energie fizyczne, pojawiające się podczas uderzenia się brył materialnych.

W szczególnych przypadkach:

- 1) jeżeli: $m_1 = m_2$ oraz $c_1 = c_2 = c$, to
 $v = c$; oraz $T_s = 0$.

Wynik ten jest bezpośrednio zrozumiały z tego względu, że bryły, posiadające jednakowe prędkości, nie uderzą się, nie nastąpi przeto straty energii;

- 2) jeżeli: $c_2 = 0$; oraz $m_2 = \infty$; to
 $v = 0$, a $T_s = \frac{1}{2} m_1 c_1^2$.

Przypadek ten zachodzi, gdy np. kafarem (m_1) zabijamy pal w ziemię ($m_2 = \infty$). Energia stracona idzie w danym razie na przewyciężenie sił oporowych, jakie stawia ziemia wbijanemu palowi. Opór ten, który oznaczymy literą W i przyjmiemy za stałą, obliczymy z równania pracy:

$$- W \cdot s = - \frac{1}{2} m_1 c_1^2,$$

w którym s oznacza zagłębienie się pala, jakie powstaje wskutek uderzenia kafarem. Jeżeli zmierzmy to zagłębienie w jakimś szczególnym przypadku, to dla tego przypadku:

$$W = \frac{Qh}{s};$$

gdzie litera Q oznacza ciężar kafara, h —wysokość, z której on spada, a wyraz energii straconej $\frac{1}{2} m_1 c_1^2$ zastąpiony jest wyrazem Qh . Dla praktycznych celów bierze się pod rachubę tylko część tej siły W , jaką obliczymy z tego wzoru; przebieg bowiem fizyczny zabijania pali nie jest zupełnie zgodny z uderzeniem nie sprężystem, jakieś tu przyjęli; nie cała przeto energia kinetyczna kafara idzie na pogłębienie pala;

3) przyjmijmy następnie przypadek, w którym:

$$m_2 = \infty, \text{ a } c_2 \cong 0.$$

Przykładem tego przypadku jest uderzenie bryłą, np. kawałkiem gliny w wagon, będący w biegu. Po podstawieniu tych wartości we wzór 326-ty i 327-my, otrzymamy:

$$v = c_2; \quad T_s = \frac{1}{2} m_1 (c_1 - c_2)^2.$$

Wyjaśnienie fizyczne tego zjawiska zechce czytelnik sobie unaocznic.

148. Uderzenie się środkowe i proste brył sprężystych. W poprzednim paragrafie rozpatrywaliśmy przypadek, w którym bryły materialne po odkształceniu się poruszają się ze wspólną prędkością v . Obecnie rozpatrzmy przypadek, w którym bryły jeszcze podczas stykania się przybierają zupełnie lub niezupełnie pierwotne postaci. Zjawisko to wyrazimy matematycznie w ten sposób, że stracona na odkształcenie brył energia kinetyczna zupełnie lub niezupełnie powraca. Jeżeli energia ta zupełnie powraca, to nie mamy żadnej straty; energia przeto brył po uderzeniu się równa się w tym razie energii przed uderzeniem; inaczej mówiąc, zachodzi w tym razie zachowanie energii, które wyrazimy równaniem:

$$1) \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 c_1^2 + \frac{1}{2} m_2 c_2^2.$$

Równanie to, łącznie z równaniem zachowania ilości ruchu, które pozostaje w mocy dla wszelkich uderzeń, t. j. równanie to łącznie z równaniem:

$$2) \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 c_1 + m_2 c_2,$$

daje możność obliczenia obydwóch niewiadomych v_1 oraz v_2 .

Sposób tego obliczenia uprościmy sobie, gdy napiszemy powyższe równania w następujący sposób:

$$m_1 (v_1^2 - c_1^2) = - m_2 (v_2^2 - c_2^2);$$

$$m_1 (v_1 - c_1) = - m_2 (v_2 - c_2);$$

a po rozdzieleniu pierwszego przez drugie, otrzymamy równanie 1-go stopnia:

$$v_1 + c_1 = v_2 + c_2,$$

które łącznie z równaniem ilości ruchu przedstawia dwa równania pierwszego stopnia. Z tych dwóch równań obliczymy bezpośrednio:

$$v_1 = \frac{c_1(m_1 - m_2) + 2m_2c_2}{m_1 + m_2}; \quad (328)$$

lub inaczej w innym zgrupowaniu:

$$v_1 = \frac{(m_1c_1 + m_2c_2) + m_2(c_2 - c_1)}{m_1 + m_2} \quad (329)$$

Niewiadomą v_2 obliczymy, zastępując w tym wzorze v_1 przez v_2 , m_1 przez m_2 , c_1 przez c_2 i— odwrotnie; podstawienia takie możemy uczynić, gdyż i równania 1-sze i 2-gie nie zmieniają swych postaci, gdy zrobimy te podstawienia, a więc bezpośrednio z równania 328-go:

$$v_2 = \frac{c_2(m_2 - m_1) + 2m_1c_1}{m_1 + m_2},$$

lub w innej postaci

$$v_2 = \frac{(m_1c_1 + m_2c_2) + m_1(c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} \quad (330)$$

Szczególne przypadki:

1) Przyjmijmy:

$$m_1 = m_2 = m,$$

wtedy z wzorów powyższych obliczymy:

$$v_1 = c_2; \quad v_2 = c_1;$$

t. j. gdy masy uderzających się brył są równe, to ciała po uderzeniu się zamieniają swe prędkości.

Jeżeli przyjmiemy następnie oprócz tego, że

$$m_1 = m_2, \text{ jeszcze że } c_2 = 0,$$

wtedy:

$$v_1 = 0, \text{ oraz } v_2 = c_1,$$

co wyraża, że gdy jedna bryła przed uderzeniem jest w spoczynku, to przy równych masach po uderzeniu otrzyma ona prędkość bryły uderzającej, a bryła uderzająca pozostanie w spoczynku, co jest w zgodzie z poprzednim wnioskiem.

Wynik ten wytłumaczmy sobie fizycznie w następujący sposób. Bryła pierwsza, uderzając bryłę drugą, będącą np. w spoczynku, nadaje jej pewnej prędkości i zmniejsza wskutek tego swoją prędkość; co wyraża równanie zachowania ilości ruchu; przebieg ten trwa aż do chwili wyrównania się ich prędkości; od tej chwili zaczyna się okres drugi, polegający na tem, że bryły, powracając do pierwotnych postaci, wzajemnie się odpychają; co ze swej strony wywołuje ponowne zmniejszenie się prędkości bryły pierwszej, a powiększenie się prędkości bryły drugiej.

2) Przyjmijmy następnie, że $m_2 = \infty$, wtedy ze wzoru 329-tego

$$v_1 = \frac{\infty}{\infty} = 2c_2 - c_1;$$

a jeżeli przyjmiemy jeszcze, że $c_2 = 0$; wtedy $v_1 = -c_1$.

Wysłowienie tego wniosku, oraz unaocznienie sobie fizyczne tego przypadku pozostawia się czytelnikowi.

149. Uderzenie się środkowe i proste brył niezupełnie sprężystych. W drugim okresie uderzenia się brył powraca często, zależnie od właściwości fizycznych uderzających się brył, pewna część energii straconej w pierwszym okresie; oznaczywszy tę część literą η , wyrazimy wielkość powracającej energii wyrazem $T_s \cdot \eta$; straconą przeto energię podczas obydwóch okresów uderzeń wyrazimy wzorem

$$T_s(1 - \eta);$$

wartość tej energii powinna być równą różnicy energii przed i po uderzeniu; na zasadzie tego mamy równanie:

$$T_o - T = T_s(1 - \eta); \dots \dots \dots (331)$$

w którym T_o i T oznaczają wartości energii kinetycznych przed i po uderzeniu.

Równanie to może być również uważane za bezpośredni wynik równania 208-ego, po podstawieniu w nie:

$$L_P = 0; \quad L_W = -T_s \cdot (1 - \eta);$$

wtedy bowiem otrzymamy równanie:

$$-T_s(1 - \eta) = T - T_o;$$

które jest jednakowe z równaniem 331-szem.

Dla przypadku uderzających się brył prosto i środkowo, t. j. gdy ruch ich jest postępowym, podstawimy w równanie 331-sze:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2;$$

$$T_o = \frac{1}{2} m_1 c_1^2 + \frac{1}{2} m_2 c_2^2;$$

oraz wartość T_s z równania 327-ego, a otrzymamy równanie, które łącznie z równaniem zachowania ilości ruchu; t. j. z równaniem 325-tem, przedstawia dwa równania z dwiema niewiadomymi v_1 i v_2 . Z równań tych obliczymy:

$$v_1 = \frac{(m_1 c_1 + m_2 c_2) + \sqrt{V\eta} \cdot m_2 (c_2 - c_1)}{m_1 + m_2}$$

oraz

$$v_2 = \frac{(m_1 c_1 + m_2 c_2) + \sqrt{V\eta} \cdot m_1 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} \dots \dots \dots (332)$$

150. Wyznaczenie współczynnika η . Współczynnik η wyznaczmy liczbowo, gdy wykonamy choć jedno doświadczenie z materyałami, dla których chcemy go wyznaczyć, a wtedy współczynnik ten będzie można stosować do innych przypadków uderzeń brył z tychże materyałów. Doświadczenie takie należy wykonać w warunkach najdogodniejszych dla pomiarów. W tym celu przyjmiemy np. $m_2 = \infty$ oraz $c_2 = 0$, wtedy otrzymamy z równania 332-ego:

$$v_1 = -\sqrt{V\eta} \cdot c_1;$$

przypadek ten ma miejsce, gdy np. daną kulą uderzymy w dużą nieruchomą masę; wtedy odbije się ta kula z prędkością wskazaną tym wzorem. Jeżeli prędkość v_1 i c_1 zmierzmy, to obliczymy współczynnik η dla danego materyału.

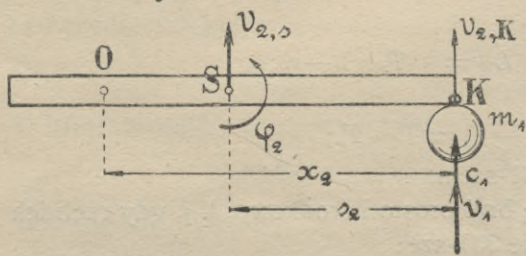
W doświadczeniu tem unikniemy mierzenia prędkości i zastąpimy mierzaniem innej więcej dostępnej dla pomiaru wielkości. Mianowicie upuściwszy kulę ze znanej wysokości h na płytę poziomą, obliczymy jej prędkość w chwili uderzenia

ze wzoru $c_1 = \sqrt{2gh}$. Kula ta po odbiciu się uniesie się do wysokości h' , którą łatwo zmierzyć; prędkość przeto w chwili odbicia się obliczymy ze wzoru $v = \sqrt{2gh'}$. Podstawivszy te wielkości w równanie powyższe i pominiąwszy znak ujemny; otrzymamy

$$\sqrt{2gh'} = \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{2gh}; \quad \text{skąd} \quad \eta = \frac{h'}{h}.$$

Doświadczalnie znaleziono dla uderzenia kuli o bandę bilardu $\eta = 0,55$. Kula z kości słoniowej, upuszczona na płytę marmurową, podnosi się do $\frac{2}{3}$ pierwotnej wysokości, czyli $\eta = \frac{2}{3}$. W przypadku uderzenia się kości słoniowej o kość słoniową $\eta = (\frac{8}{9})^2$; — stali o korek $\eta = (\frac{5}{6})^2$; — szkła o szkło $\eta = (\frac{13}{16})^2$; i wreszcie z określenia wynika dla ciał niesprężystych $\eta = 0$, a dla ciał zupełnie sprężystych $\eta = 1$.

151. Przykład uderzenia mimosrodkowego prostego. Na stole doskonale gładkim spoczywa pręt materyalny; w dowolne miejsce jego osi i prostopadle do niej uderza kula o masie m_1 ; będąca w chwili uderzenia w ruchu postępowym, równoległym, do płaszczyzny stołu; rys. 88-my; obliczyć ruch pręta i kuli po uderzeniu.



Rys. 88.

Kula w danym razie doznaje uderzenia środkowego i prostego; pręt zaś również prostego lecz mimosrodkowego. Prędkość kuli przed uderzeniem oznaczmy literą c_1 , prędkość jej po uderzeniu literą v_1 . Ruch pręta po uderzeniu określimy jego prędkością obrotową φ_2 i prędkością $v_{2,K}$ jaką posiada punkt zetknięcia się K pręta z bryłą; dwie bowiem te wielkości określają stan ruchu pręta.

Obliczmy najpierw ruch, w jakim znajdować się będzie kula, oraz pręt w końcu pierwszego okresu uderzenia; t. j. w chwili, gdy prędkości punktów zetknięcia się kuli i pręta wyrównają się. Ruch ten będzie jednakowy z ruchem, jakiby dane bryły posiadały, gdyby były zupełnie niesprężyste.

W danym razie może być zastosowany nie tylko równanie zachowania ilości ruchu, lecz również równanie zachowania momentu ilości ruchu; równanie zaś zachowania energii nie może być stosowane, ze względu na pracę sił wewnętrznych, jaka powstaje wskutek niesprężystości uderzenia. Oznaczmy literą $v_{2,s}$ prędkość środka masy pręta, to równanie zachowania ilości ruchu obydwóch brył jest następujące:

$$1) \quad m_1 v_1 + m_2 v_{2,s} = m_1 c_1;$$

równanie zaś momentów względem bieguna, obranego np. w środku masy pręta, jest następujące:

$$2) \quad m_1 v_1 \cdot s_2 + \varphi_2 I_{2,s} = m_1 c_1 s_2,$$

w którym s_2 oznacza odległość punktu uderzenia od środka masy pręta, a $I_{2,s}$ — moment bezwładności pręta względem osi, przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do płaszczyzny ruchu.

W tych dwóch równaniach dynamicznych niewiadomymi są wielkości

$$v_1, v_{2, \kappa}, v_{2, s}, \varphi_2;$$

omiędzy którymi zachodzi jeszcze związek kinematyczny, porów. równanie 56-te na str. 76-ej T. I-ego:

$$3) \quad v_{2, \kappa} = v_{2, s} + s_2 \cdot \varphi_2,$$

oraz zachodzi związek, wyrażający warunek wyrównania się prędkości punktów zetknięcia się obydwóch brył; warunek ten wyrazimy równaniem:

$$4) \quad v_1 = v_{2, \kappa}.$$

Z tych przeto czterech równań obliczyć można cztery niewiadome. Wyrugujemy z tych równań np. wielkości $v_{2, s}$, oraz $v_{2, \kappa}$; w tym celu podstawimy ich wartości z równ. 3 i 4-tego w równanie 1-sze ilości ruchu, a otrzymamy równ.:

$$m_1 v_1 + m_2 (v_1 - s_2 \varphi_2) = m_1 c_1,$$

a po uporządkowaniu otrzymamy równ.:

$$(m_1 + m_2) \cdot v_1 - m_2 s_2 \cdot \varphi_2 = m_1 c_1,$$

które łącznie z równaniem momentów, t. j. z równaniem 2-gim przedstawia dwa równania z dwiema niewiadomymi: v_1 i φ_2 .

Ażeby obliczyć z tych dwóch równań v_1 , pomnóżmy powyższe równanie przez I_s , równanie zaś 2-gie przez $m_2 s_2$, a po dodaniu otrzymamy:

$$v_1 = \frac{I_{2, s} + m_2 s_2^2}{(m_1 + m_2) I_{2, s} + m_1 m_2 s_2^2} \cdot m_1 c_1.$$

W podobny sposób obliczymy:

$$\varphi_2 = \frac{m_1 m_2 s_2}{(m_1 + m_2) I_{2, s} + m_1 m_2 s_2^2} \cdot c_1.$$

Z równań tych obliczymy prędkość kuli i prędkość obrotową pręta po ich uderzeniu się. Prędkość środka pręta po uderzeniu obliczymy z równ. 3-go uwzględnivszy równ. 4-te. Poleca się czytelnikowi wyznaczenie biegunowego obrotu pręta.

Jeżeli uderzenie posiada drugi okres, t. j. jeżeli kula i pręt są np. zupełnie lub niezupełnie sprężyste, to równanie 4-te przestaje być w mocy, natomiast nabiera mocy równanie zachowania energii kinetycznej. Do obliczenia przeto ruchów brył zupełnie sprężystych, jakie one posiadają po uderzeniu się, mamy trzy przytoczone równania i równanie zachowania energii, które jest następujące:

$$4') \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + (\frac{1}{2} m_2 v_{2, s}^2 + \frac{1}{2} I_{2, s} \varphi_2^2) = \frac{1}{2} m_1 c_1^2 \dots \dots (333)$$

Zadanie przeto dynamiczne obliczenia ruchu tych brył, jeżeli są one sprężyste, jest już rozwiązane; pozostają tylko przekształcenia algebraiczne, mające na celu obliczenia szukanych niewiadomych.

Można uniknąć tych, zresztą dosyć znużających obliczeń, jeżeli sprowadzimy równania powyższe do postaci równań, wyrażających uderzenie środkowe; wtedy bowiem będziemy mogli skorzystać z równań 332-gich. W tym celu oberzemy jako niewiadome: prędkość v_1 oraz $v_{2, \kappa}$ i wyrazimy $v_{2, s}$ wielkością $v_{2, \kappa}$; co osiągnie-

my, rugując np. v_1 z równania 1-go i 2-go; w tym celu pomnożymy równanie 1-sze przez s_2 i odejmiemy je od 2-go, a otrzymamy:

$$\varphi_2 = \frac{m_2 s_2}{I_{2,s}} \cdot v_{2,s}; \quad (334)$$

po podstawieniu następnie tej wartości w równanie 3-cie, otrzymamy:

$$v_{2,K} = v_{2,s} \cdot \left(1 + \frac{m_2 s_2^2}{I_{2,s}} \right);$$

skąd

$$v_{2,s} = v_{2,K} \cdot \frac{I_{2,s}}{I_{2,s} + m_2 s_2^2} \quad (335)$$

Podstawimy następnie tę wartość w równanie 1-sze, i otrzymamy:

$$m_1 v_1 + m_2 \frac{I_{2,s}}{I_{2,s} + m_2 s_2^2} \cdot v_{2,K} = m_1 c_1.$$

Oznaczmy wyraz:

$$m_2 \frac{I_{2,s}}{I_{2,s} + m_2 s_2^2} \text{ literą } m_2' \quad (336)$$

a po podstawieniu w równanie poprzednie, otrzymamy równanie:

$$m_1 v_1 + m_2' v_{2,K} = m_1 c_1.$$

Jest to równanie jednakowe pod względem swej algebraicznej postaci z równaniem 2-gim § 148-ego, gdy zastąpimy w tem ostatniem literę m_2 literą m_2' , określoną wzorem 336-em.

Sprowadźmy teraz równanie 333-cie do postaci równania 1-ego § 148-ego. W tym celu podstawmy z równania 334-ego wartość φ_2 w równanie 333-cie, a otrzymamy:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,s}^2 \cdot \left(1 + \frac{m_2 s_2^2}{I_{2,s}} \right) = \frac{1}{2} m_1 c_1^2;$$

wyraziwszy następnie $v_{2,s}$ zmienną $v_{2,K}$ z równania 335-ego, otrzymamy równanie zachowania energii kinetycznej w nast. postaci:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{I_{2,s}}{I_{2,s} + m_2 s_2^2} \cdot v_{2,K}^2 = \frac{1}{2} m_1 c_1^2.$$

Zastosujmy podstawienie, wyrażone wzorem 336-tym, a otrzymamy równanie

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m_2' v_{2,K}^2 = \frac{1}{2} m_1 c_1^2; \quad (337)$$

które co do swej postaci jest jednakowe z równaniem 1-szem § 148-ego.

Z równania przeto 329-ego i 330-ego lub z równań 332-ich, podstawiając w nie zamiast m_2 wielkość m_2' , określoną wyrazem 336-tym, obliczymy bezpośrednio prędkości v_1 i $v_{2,K}$, tak dla uderzenia sprężystego jak i dla uderzenia niezupełnie sprężystego.

Wielkości m_2' możemy nadać pewne fizyczne znaczenie; mianowicie możemy tę wielkość uważać za masę pewnej bryły, która środkowo uderza się z bryłą m_1 i która po uderzeniu posiada taką samą prędkość postępową, jaką posiada po uderzeniu punkt zetknięcia się z kulą. Wielkość masy takiej bryły nazywają masą zastępczą danej bryły dla danego uderzenia.

W celu wytworzenia sobie dokładnego obrazu ruchu bryły obracającej się po uderzeniu, wyznaczmy jeszcze położenie bieguna chwilowego jej obrotu, jaki ona posiada po uderzeniu.

Oznaczywszy literą x_2 odległość tego bieguna od punktu zetknięcia się brył, rys. 88-my i wzięwszy pod uwagę, że kąt obrotu a więc i prędkość chwilowego obrotu jest jednakową w danej chwili dla wszystkich biegunów, porów. tom I-szy str. 75 oraz wzór 58-my na str. 90-tej, napiszemy równ.:

$$v_{2,s} = (x_2 - s_2) \cdot \varphi_2;$$

a podstawivszy w nie z równ. 334-ego wartość φ_2 , otrzymamy:

$$x_2 = s_2 + \frac{I_{2,s}}{m_2 s_2} \dots \dots \dots (338)$$

lub też inaczej, zważywszy, że moment bezwładności $I_{2,0}$ pręta, względem bieguna obrotu

$$I_{2,0} = I_{2,s} + m_2 \cdot s_2^2,$$

napijemy:

$$x_2 = \frac{I_{2,0}}{m_2 s_2} \dots \dots \dots (339)$$

Z równania 338-ego wynika, że $x_2 > s_2$, t. j. że biegun chwilowego obrotu i punkt uderzenia leżą po przeciwnych stronach środka masy. Z tegoż równania wynika też, że położenie tego bieguna nie zależy od sprężystości uderzających się brył; równanie bowiem 334-te jest wynikiem równania 1-go i 2-go, t. j. równania dynamicznego ilości ruchu i jego momentu; w które nie wchodzi siły wewnętrzne, a więc i — współczynnik sprężystości; z czego znów wynika, że położenie bieguna chwilowego obrotu po uderzeniu bryły (wogóle mimośrodkiem) nie zależy od stopnia jej sprężystości, ani też od masy i prędkości bryły uderzającej, a jedynie zależy od położenia punktu uderzenia względem środka masy bryły uderzonej. Właściwość tę można wytłumaczyć sobie fizycznie w następujący sposób. Wyobraźmy sobie, że do punktu uderzenia danego pręta przyłożona jest siła P , która zastępuje działanie uderzającej kuli. Moment tej siły względem środka masy wywołuje obrót, którego prędkość rośnie z powiększeniem siły działającej, a to w myśl równania momentów, równanie 276-te, które po scałkowaniu otrzyma postać:

$$\int_0^{\Delta t} P \cdot s_2 \cdot dt = I_{2,s} \cdot \varphi_2.$$

Zgodnie zaś z równaniem ruchu środka masy, prędkość tego środka rośnie również proporcjonalnie do wielkości siły P , gdyż pg równ. 273-ciego.

$$m_2 v_{2,s} = \int_0^{\Delta t} P \cdot dt;$$

a więc rośnie razem z wartością prędkości punktu K ; która składa się z prędkości środka masy i prędkości obrotu.

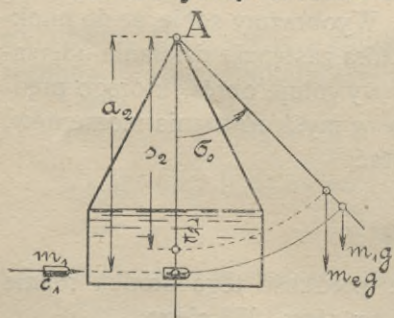
Z proporcjonalności przeto prędkości punktów K i S danej bryły wynika, że w każdej chwili, podczas uderzenia, bryła dana obraca się około jednego i tego samego bieguna z różną tylko prędkością, zależną od wielkości siły uderzenia.

Z porównania wzoru 338-ego ze wzorem 291-ym wynika, że związek, jaki zachodzi pomiędzy punktem uderzenia a środkiem masy i biegunem chwilowego obrotu, jest taki sam, jaki zachodzi pomiędzy osią obrotu, środkiem masy i środkiem wahań. Z tego porównania wynika, że jeżeli dany pręt uderzymy prostopadłe do jego osi w kierunku punktu 0, to punkt K będzie wtedy biegunem chwilowego obrotu.

Biegun ten czy też oś, przechodząca przez ten biegun i prostopadła do płaszczyzny ruchu, ma bardzo ważne znaczenie fizyczne. Punkty bowiem bryły, leżące na tej osi, pozostają w spoczynku podczas uderzenia bryły. Jeżeli przeto chcemy ażeby np. uderzenia, jakim podlegają pewne obracające się części maszyn, nie oddziaływały szkodliwie na osi obrotu, należy dobrać taki stosunek odległości punktu uderzenia i osi obrotu od środka masy, jaki wskazuje równ. 338-me; należy nadać tym częściom maszyn, za pomocą odpowiednich obciążeń, takie masy i takie momenty bezwładności, ażeby wielkości ich zaspakajały równ. 338-me. Odnalezienie tego środka jest w wielu razach bardzo ważne, np. przy pracy ręcznej młotem; każdemu bowiem uderzeniu młota odpowiada pewne położenie osi chwilowego obrotu; a jeżeli ta oś wypadnie nie w miejscu, w którym robotnik trzyma młot, to odczuje on silne uderzenie w rękę; praktyczne przeto władanie młotem polega również na uchwyceniu młota w miejscu, przez które przechodzi oś chwilowego obrotu.

W zadaniu powyższem jedna bryła się obracała, druga zaś była w ruchu postępowym; lecz sposób obliczenia, podany tu, może być zastosowany do przypadku, w którym obydwie bryły się obracają i w pewnej chwili wzajemnie się uderzają. Przy obliczeniu tego rodzaju przykładów znacznem uproszczeniem rachunkowem jest zastosowanie pojęcia masy zastępczej; możemy bowiem wtedy zadanie uderzenia się mimośrodkowego brył różnego stopnia sprężystości sprowadzić do takiegoż uderzenia środkowego.

152. Przyrząd Robins'a. Przyrząd ten jest przykładem uderzenia mimośrodkowego prostego, nie sprężystego i przeznaczony jest do mierzenia prędkości pocisków; prędkość ta bowiem jest tak znaczna, że bezpośrednio jej zmierzyć nie można. Przyrząd ten składa się ze skrzynki, która napełniona jest materyą, stawiającą znaczny opór przenikającej kuli. Skrzynka ta zawieszona jest za pomocą pewnej konstrukcji na osi poziomej, około której może się wahać jak zwykłe wahadło.



Rys. 89.

Pocisk dany, którego prędkość mamy obliczyć, skierowany jest poziomo i wpada do skrzynki, a wskutek oporu, jaki spotyka w nagromadzonej materyi, zatrzyma się w niej. Przyjmujemy dla uproszczenia rachunku, że zatrzyma się on w miejscu, znajdującem się w płaszczyźnie, przechodzącej przez oś obrotu i środek masy skrzynki. Skrzynka zawieszona pionowo odchyli się wskutek uderzenia od tego położenia o kąt, który oznaczmy literą σ_0 . Oznaczmy nieznaną prędkość pocisku, który uważamy za punkt materialny, literą c_1 ; odległość kierunku tej prędkości od osi obrotu literą a_2 oraz literą m_1 jego masę; oznaczmy następnie moment bezwładności skrzynki

wraz z zawartością i z konstrukcją względem osi obrotu—literą $I_{2,A}$; masę jej literą m_2 i prędkość obrotową w chwili uderzenia literą φ_2 ; to wyrazimy równość momentów ilości ruchu po uderzeniu i przed uderzeniem względem bieguna, obranego w punkcie obrotu następującym wzorem:

$$m_1 a_2 \varphi_2 \cdot a_2 + \varphi_2 I_{2,A} = m_1 c_1 \cdot a_2;$$

z którego

$$c_1 = \frac{I_{2,A} + m_1 a_2^2}{m_1 a_2} \cdot \varphi_2 \dots \dots \dots (340)$$

Z równania tego obliczymy prędkość pocisku, gdy zmierzmy prędkość obrotu wahadła w chwili uderzenia się z kulą; i w ten sposób zadanie zostaje rozwiązane.

Ponieważ jednakże bezpośrednie zmierzenie prędkości φ_2 przedstawia pewne trudności techniczne; zmierzmy przeto kąt największego odchylenia σ_0 , którego wielkość jest w ścisłym związku z prędkością początkową. W celu znalezienia tego związku, zastosujemy równanie równowartości pracy i energii kinetycznej; a zważywszy, że poruszająca się bryła po uderzeniu składa się ze skrzynki wraz z zawartością, z konstrukcją zawieszenia i z kuli, napiszemy równanie:

$$-(m_2 g s_2 + m_1 g a_2) (1 - \cos \sigma_0) = -\frac{1}{2} (I_{2,A} + m_1 a_2^2) \varphi_2^2;$$

z którego obliczymy, po odpowiedniem przekształceniu funkcji trygonometrycznej:

$$\varphi_2 = 2 \sin \frac{\sigma_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{g(m_2 s_2 + m_1 a_2)}{I_{2,A} + m_1 a_2^2}};$$

a po podstawieniu tej wartości w równ. 340-te, otrzymamy wartość prędkości kuli, wyrażoną wartością kąta odchylenia σ_0 :

$$c_1 = 2 \sin \frac{\sigma_0}{2} \cdot \frac{1}{m_1 a_2} \sqrt{g(m_2 s_2 + m_1 a_2) (I_{2,A} + m_1 a_2^2)} \dots \dots (341)$$

Ze względów praktycznych starają się zwykle trafić kulą w skrzynkę w tem miejscu, ażeby oś wahadła nie doznała uderzenia. Wyznaczenie położenia takiego punktu jest możliwem, na zasadzie wzorów wyżej obliczonych, gdy przyjmiemy, że wahadło jest symetryczne względem płaszczyzny pionowej, w której porusza się środek jego masy. Ażeby przeto powyższy warunek zachować, należy, ażeby wielkość a_2 jako odległość kierunku prędkości kuli od osi obrotu, odpowiadała równaniu 339-emu; t. j. ażeby

$$a_2 = \frac{I_{2,A}}{m_2 s_2}.$$

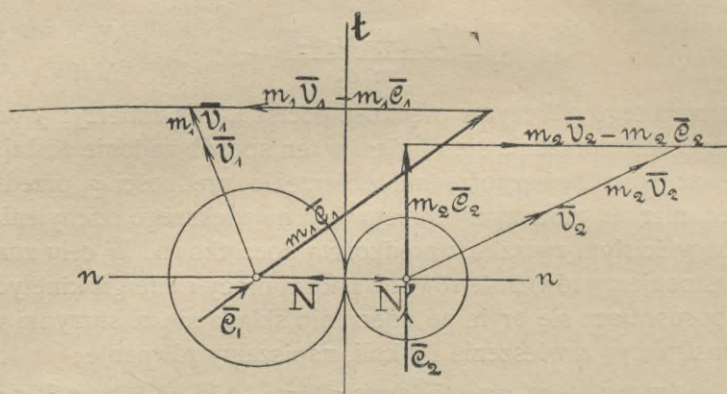
Znając wartość a_2 , możemy z tego równania oraz z równania 341-ego wyrugować $I_{2,A}$; i otrzymamy dla danego przypadku:

$$c_1 = 2 \sin \frac{\sigma_0}{2} \cdot \frac{m_2 s_2 + m_1 a_2}{m_1} \sqrt{\frac{g}{a_2}} \dots \dots \dots (342)$$

153. Uderzenie środkowe ukośne. Przykładem tego rodzaju uderzenia jest uderzenie się dwóch kul, poruszających się ruchem postępowym w ten sposób, że ich środki pozostają w jednej płaszczyźnie. Kule te podczas uderzenia się uważać będziemy, jak poprzednio, za jeden układ zmienny, na który nie działają siły zewnętrzne, lecz tylko wewnętrzne.

Jeżeli literami \bar{c}_1 i \bar{v}_1 oznaczymy prędkości przed i po uderzeniu 1-szej kuli o masie m_1 ; a literami \bar{c}_2 i \bar{v}_2 także prędkości drugiej kuli o masie m_2 , rys. 90-ty, to równanie zachowania ilości ruchu jest następujące :

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = m_1 \bar{c}_1 + m_2 \bar{c}_2 . \quad (343)$$



Rys. 90.

Równanie to posiada cztery algebraiczne niewiadome i przedstawia dwa równania algebraiczne; każdą bowiem z prędkości wyrazić można dwiema algebraicznymi wielkościami; a równanie samo dwoma równaniami algebraicznymi. Nie wszystkie jednakże właściwości danego uderzenia wyrażone są przez powyższe równanie; z fizycznych bowiem warunków jest jeszcze znany kierunek siły chwilowej, działającej na każdą bryłę, a więc znany jest kierunek przyrostu ilości ruchu każdej z kul.

Oznaczmy siłę, działającą podczas zetknięcia się kul, literami \bar{N} i \bar{N}' , a napiszemy :

$$\bar{N} = \frac{d(m_1 \bar{v}_1)}{dt}, \quad \text{oraz} \quad \bar{N}' = \frac{d(m_2 \bar{v}_2)}{dt} .$$

Równania te możemy algebraicznie scałkować, kierunki bowiem wektorów prędkości podczas uderzenia nie się zmieniają. Oznaczwszy literą Δt okres czasu, w jakim te kule działają na siebie, napiszemy całki tych równań :

$$\int_0^{\Delta t} \bar{N} . dt = m_1 \bar{v}_1 - m_1 \bar{c}_1, \quad \text{oraz}$$

$$\int_0^{\Delta t} \bar{N}' . dt = m_2 \bar{v}_2 - m_2 \bar{c}_2 . \quad (344)$$

Ponieważ kierunki sił N są znane, pokrywają się one bowiem z osią uderzenia, przeto przyrosty ilości ruchu każdej z kul są równoległe do tej osi. Ażeby wyrazić tę właściwość algebraicznie, weźmiemy pod uwagę, że rzuty tych przyrostów na prostopadłą do osi uderzeń, t. j. na styczną t , rys. 90-ty, do powierzchni sty-

kających się kul, równają się zeru. Zaopatrzywszy te rzuty wskaźnikami t , napiszemy równania tych rzutów:

$$\begin{aligned} 1) \quad & m_1 v_{1,t} - m_2 c_{1,t} = 0; \\ 2) \quad & m_2 v_{2,t} - m_2 c_{2,t} = 0 \dots \dots \dots (345) \end{aligned}$$

Rzuty zaś tych równań na oś uderzenia, t. j. na normalną do powierzchni zetknięć da równanie algebraiczne:

$$m_1 v_{1,n} - m_1 c_{1,n} = m_2 v_{2,n} - m_2 c_{2,n},$$

które napiszemy w następującej postaci:

$$3) \quad m_1 v_{1,n} + m_2 v_{2,n} = m_1 c_{1,n} + m_2 c_{2,n}; \dots \dots \dots (346)$$

gdzie wskaźniki n oznaczają rzuty odpowiednich wektorów na oś uderzenia. Mamy przeto trzy równania algebraiczne z czterema niewiadomymi. Równanie czwarte otrzymamy, gdy uwzględnimy stopień sprężystości kul; w przypadku zupełnej sprężystości równaniem tem jest równanie zachowania energii kinetycznej:

$$4) \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 c_1^2 + \frac{1}{2} m_2 c_2^2.$$

Równanie to po podstawieniu

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v_{1,n}^2 + v_{1,t}^2; & v_2^2 &= v_{2,n}^2 + v_{2,t}^2; \\ c_1^2 &= c_{1,n}^2 + c_{1,t}^2; & c_2^2 &= c_{2,n}^2 + c_{2,t}^2; \end{aligned}$$

i po uwzględnieniu równań 345-ych, przekształci się na następujące:

$$4) \quad \frac{1}{2} m_1 v_{1,n}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,n}^2 = \frac{1}{2} m_1 c_{1,n}^2 + \frac{1}{2} m_2 c_{2,n}^2 \dots \dots (347)$$

Te cztery równania rozwiązują nasze zadanie. W celu unaocznienia sobie właściwości ruchu tych kul, porównamy równania 346 i 347-me z równaniami § 148-ego i przyjdziemy do wniosku, że rzuty na oś uderzenia prędkości środków tych kul są takie same, jakieby kule posiadały, gdyby uderzały się prosto z prędkościami, równymi rzutom na tę oś właściwych prędkości. W celu przeto obliczenia rzutów na oś uderzenia nieznanych prędkości, jakie powstają po uderzeniu, stosować można wszystkie wzory, wyprowadzone dla uderzenia prostego sprężystego lub nie zupełnie sprężystego; a następnie ażeby otrzymać właściwe prędkości, należy dodać do nich wektorowo prędkości styczne, obliczone z równań 1-go i 2-go.

Dla przykładu obliczmy ruch kuli nie zupełnie sprężystej, jaki ona otrzyma po ukośnem uderzeniu się o ścianę nieruchomą, gdy ruch jej przed uderzeniem był postępowy. Jeżeli kulę uderzającą nazwiemy bryłą pierwszą, ścianę zaś — bryłą drugą, to masę i prędkości kuli uderzającej oznaczmy literami m_1 , \bar{c}_1 i \bar{v}_1 , a te wielkości dla ściany — literami m_2 i c_2 . W danym przypadku mamy:

$$m_2 = \infty; \quad c_2 = 0.$$

Prędkość normalną, jaką kula posiada po uderzeniu, obliczymy bezpośrednio z równania 332-ego:

$$v_{1,n} = -\sqrt{\eta} \cdot c_{1,n};$$

z równań zaś 345-ych

$$v_{1,t} = c_{1,t}; \dots \dots \dots (348)$$

przeto

$$v_1 = \sqrt{\eta \cdot c_{1,n}^2 + c_{1,t}^2}$$

Kąt, jaki tworzy kierunek prędkości c_1 z osią uderzeń, oznaczmy literą α_1 i nazwiemy go kątem uderzenia; kąt zaś, jaki tworzy kierunek prędkości v_1 z tą samą osią, oznaczmy literą β_1 i nazwiemy go kątem odbicia; kąty te przyjmujemy za dodatne, jeżeli leżą po jednej stronie osi uderzenia. Kąt odbicia obliczymy ze wzoru:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{v_{1,t}}{-v_{1,n}} = -\frac{1}{V\eta} \cdot \frac{c_{1,t}}{c_{1,n}},$$

z którego wynika, że kąt odbicia leży po przeciwnej stronie osi uderzenia i powiększa się ze zmniejszeniem się sprężystości brył.

W przypadku uderzenia zupełnie sprężystego $\eta = 1$; a wtedy:

$$v_{1,n} = -c_{1,n}; \quad \text{a że} \quad v_{1,t} = c_{1,t};$$

przeto w tym przypadku:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = -\frac{c_{1,t}}{c_{1,n}} = -\operatorname{tg} \alpha_1;$$

z czego wynika, że kąt odbicia się kuli zupełnie sprężystej o ścianę nieruchomą równa się kątowi uderzenia ze znakiem przeciwnym.

W przypadku uderzenia zupełnie niesprężystego: $\eta = 0$, a więc

$$v_{1,n} = 0; \quad v_{1,t} = c_{1,t}; \quad \text{oraz} \\ \operatorname{tg} \beta_1 = \infty; \quad \text{a więc} \quad \beta_1 = -90^\circ.$$

Ze wzorów tych wynika, że kula niesprężysta uderzona ukośnie o ścianę nieruchomą, nie odbije się od niej; lecz będzie miała dążność do poślizgnięcia się po niej; posiada bowiem po uderzeniu prędkość styczną.

154. Uderzenie się brył z uwzględnieniem tarcia. Poślizgnięcie się bryły, wyżej opisanej, wzdłuż ściany, wywołuje siłę tarcia pomiędzy bryłą a ścianą; pojawienie się przeto tej siły wpływa na ruch bryły, jaki powstaje po uderzeniu. Wogóle w przypadku ukośnego uderzenia się dwóch brył, prędkości ich styczne $v_{1,t}$ i $v_{2,t}$ posiadają różne wartości; punkty przeto ich zetknięć doznają pewnego względnego przesunięcia się; a przesunięcie to jest powodem powstania siły tarcia. Chociaż siła tarcia działa w tym razie bardzo krótko, wartość jej jednakże może być bardzo znaczną; siła bowiem normalna, pochodząca od uderzenia się brył, jest właśnie wskutek krótkotrwałości uderzenia bardzo znaczną.

W zadaniu powyższem nie uwzględniliśmy siły tarcia; dla ściślejszego jednakże wyrażenia ruchu brył materyalnych po ich uderzeniu się, należy wprowadzić tę siłę do obliczeń. Dla przykładu obliczmy ruch kuli po uderzeniu się jej o ścianę nieruchomą z uwzględnieniem tarcia.

W danym razie oprócz siły N działa jeszcze, podczas zetknięcia się kuli ze ścianą, siła tarcia W , która, działając stycznie do kuli, wywołuje jej obrót około jej środka i wywołuje ruch tego środka. Ruch kuli przed uderzeniem określimy prędkością \bar{c} środka jej masy i prędkością obrotową $\bar{\omega}$; po uderzeniu zaś, ruch jej określimy prędkością \bar{v} tegoż środka i prędkością obrotową $\bar{\varphi}$ około tego środka; ażeby przeto określić ruch kuli po uderzeniu, należy obliczyć wielkości \bar{v} i $\bar{\varphi}$.

Na kulę podczas uderzenia działają przeto dwie siły: siła \bar{N} normalna do powierzchni zetknięć i siła \bar{W} styczna do tej powierzchni; rys. 91-szy.

Równanie przeto dynamiczne ruchu środka masy kuli jest następujące:

$$(\bar{N} + \bar{W}) = \frac{d(m\bar{v})}{dt};$$

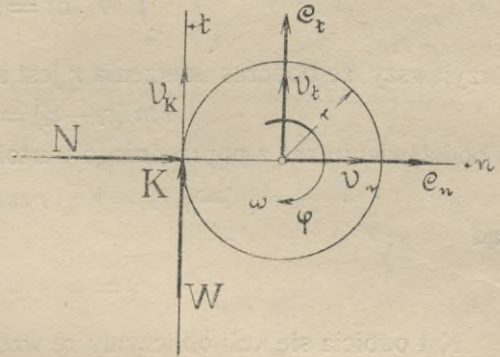
skąd stosownie do przyjętych oznaczeń:

$$f(\bar{N} + \bar{W}) dt = m\bar{v} - m\bar{c};$$

Rzuty tego równania na oś uderzenia n i na oś styczną t ; dają dwa równania algebraiczne:

$$\int_0^{\Delta t} N \cdot dt = m v_n - m c_n;$$

$$\int_0^{\Delta t} W \cdot dt = m v_t - m c_t. \quad (349)$$



Rys. 91.

Podstawmy następnie w to równanie wartość:

$$W = \mu N;$$

a po wyrugowaniu z obydwóch powyż-

szych równań wyrazu $\int_0^{\Delta t} N \cdot dt$, otrzymamy związek:

$$\mu (m v_n - m c_n) = m v_t - m c_t; \quad \dots \dots \dots (350)$$

który jest zresztą bezpośrednio zrozumiałym; jest on bowiem zastosowaniem równania $\mu N = W$ do sił chwilowych; które się mierzą przyrostami ilości ruchu.

Ażeby wprowadzić do rachunku stopień sprężystości materiału podczas uderzenia, należy zastosować zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej i rachunek w ten sposób przeprowadzić, aby mógł skorzystać ze wzorów, wyprowadzonych w poprzednich rozpatrywaniach dla uderzenia prostego i środkowego; znacznie to bowiem ułatwi obliczenie. W celu zastosowania równania dynamicznego pracy przyjmiemy, że kierunek wypadkowej siły sprężystości, t. j. sił wewnętrznych, jakie powstają podczas zetknięcia się kuli ze ścianą, jest prostopadły do ściany; wobec czego praca siły tarcia idzie na zmniejszenie tylko prędkości stycznej; praca zaś siły sprężystości, t. j. sił wewnętrznych idzie na zmniejszenie prędkości normalnej. Dla obliczenia przeto zmian prędkości normalnych, czy to uwzględniając tarcie, czy też nie uwzględniając go, równania 332-gie pozostaną w swej mocy. W danym przeto przykładzie v_n obliczymy z tych równań, podstawiając w nie, zgodnie z warunkiem danego zadania: $m_2 = \infty$, oraz $c_2 = 0$; i otrzymamy

$$v_n = -\sqrt{\eta} \cdot c_n; \quad \dots \dots \dots (351)$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie 349-te, otrzymamy:

$$v_t = c_t - \mu (1 + \sqrt{\eta}) c_n. \quad \dots \dots \dots (352)$$

Trzecim równaniem algebraicznym jest równanie momentów; rys. 91-szy:

$$W \cdot r = \frac{d(I_s \varphi)}{dt};$$

w którym φ oznacza prędkość obrotową kuli w dowolnej chwili podczas uderzenia.

Z równania tego napiszemy:

$$\int_0^{\Delta t} W \cdot r \cdot dt = I_s \varphi - I_s \omega;$$

po podstawieniu w nie z równania 349-ego:

$$\int_0^{\Delta t} W \cdot dt = m v_t - m c_t;$$

a przyjąwszy, że podczas uderzenia r jest stałe, otrzymamy:

$$r m (v_t - c_t) = I_s (\varphi - \omega);$$

po podstawieniu zaś z poprzedniego wartości v_t , otrzymamy:

$$- \mu (1 + V\eta) r m c_n = I_s (\varphi - \omega);$$

skąd

$$\varphi = \omega - \mu (1 + V\eta) \frac{r m}{I_s} \cdot c_n \quad \dots \quad (353)$$

Kąt odbicia się kuli obliczymy ze wzoru

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_t}{v_n} = - \frac{1}{V\eta} \cdot \frac{c_t}{c_n} + \mu \frac{1 + V\eta}{V\eta}.$$

Ażeby wzory te zastosować do szczególnych przypadków, należy zwrócić uwagę na zachodzące w rzeczywistości zwroty prędkości i sił; i—zaopatrzyć je znakami odpowiadającymi, przyjętym znakom na rys. 91-szym.

Ważny wpływ wywiera na ruch kuli po uderzeniu zwrot siły tarcia; który należy ściśle określić przed napisaniem równania momentów. Zwrot tej siły jest zawsze przeciwny zwrotowi prędkości punktu zetknięcia się kuli z płaszczyzną; ażeby przeto określić zwrot siły tarcia, jaka wystąpi podczas uderzenia, należy zbadać jaki zwrot posiada prędkość tego punktu w chwili uderzenia. Prędkość tego punktu składa się z prędkości ruchu postępowego kuli i prędkości, wynikającej z jej obrotu około środka. Prędkość tę stosownie do przyjętych na rys. 91-szym oznaczeń wyrazimy wzorem:

$$v_K = c_t + \omega \cdot r;$$

w którym r oznacza promień kuli, a c_t rzut prędkości środka masy kuli na styczną do niej w punkcie K ; od znaku przeto wyrazu, stojącego po prawej stronie tego równania, zależy zwrot siły tarcia a więc i jej momentu. Jeżeli ω jest dodatnią wielkością, zgodnie z przyjętymi oznaczeniami na rys. 91-szym: t. j. jeżeli zwrot prędkości punktu, jaka powstaje podczas obrotu kuli, zgodny jest ze zwrotem rzutu na styczną prędkości tegoż punktu, jaka powstaje podczas ruchu postępowego kuli; to przy wszelkich wartościach tych prędkości, wartość wyrazu

$$c_t + \omega \cdot r > 0.$$

Jeżeli zaś zwrot obrotu będzie przeciwny zwrotowi tego rzutu, to znak prędkości ω będzie odjemny; i dla pewnych wartości może nastąpić przypadek, w którym

$$c_t - \omega r < 0;$$

a wtedy siła tarcia wywoła obrót kuli o zwrocie przeciwnym w stosunku do poprzedniego. Przy obliczaniu przeto — z uwzględnieniem tarcia — ruchu kuli, jaki ona posiadać będzie po uderzeniu się, należy rozróżnić te trzy przypadki.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, w którym

$$c_t + \omega \cdot r > 0;$$

a kula uderza w ścianę w sposób, jaki wskazuje rys. 92-gi. Równanie ruchu kuli, które oparte są na znakowaniu, podanem na rys. 91-szym, po uderzeniu się o ścianę, otrzymamy po podstawieniu w powyższe wzory; które oparte są na znakowaniu, podanem na rys. 91-szym

$$c_n = -c_n; \quad \text{oraz} \quad \mu = -\mu;$$

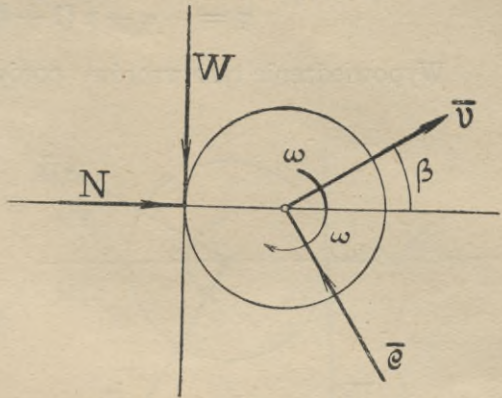
przeto mamy:

$$v_n = V\eta \cdot c_n;$$

$$v_t = c_t - \mu (1 + V\eta) \cdot c_n;$$

$$\varphi = \omega - \mu (1 + V\eta) \frac{r m}{I_s} \cdot c_n$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{V\eta} \cdot \frac{c_t}{c_n} - \mu \cdot \frac{1 + V\eta}{V\eta}$$



Rys. 92.

Ze wzorów tych wynika, że wartość prędkości obrotowej φ po uderzeniu oraz kąta odbicia jest mniejsza od takichże wartości, gdy nie uwzględnimy tarcia; co się tłumaczy tem, że siła tarcia działa w danym razie przeciw początkowej prędkości stycznej c_t ; wskutek czego prędkość tę zmniejsza oraz wywołuje moment przeciwny obrotowi kuli. Przyjęty warunek $c_t + \omega \cdot r > 0$ zachodzi również wtedy, gdy obrót kuli jest przeciwny, przyjętemu w obliczeniu powyższem, i gdy wartość bezwzględna prędkości tego obrotu:

$$\omega < \frac{c_t}{r}.$$

Równania ruchu po uderzeniu w przypadku, w którym początkowa prędkość obrotu jest przeciwną wskazanemu na rys. 92-im obrotowi, otrzymamy ze wzorów powyższych po podstawieniu w nie: $\omega = -\omega$. Ruch takiej kuli po uderzeniu różni się od ruchu kuli w poprzednim uderzeniu tem, że prędkość obrotowa kuli po uderzeniu zwiększa się. Co jest również bezpośrednio zrozumiałem, w danym bowiem razie siła tarcia wywołuje moment, którego zwrot jest zgodny ze zwrotem obrotu początkowego.

Dla przypadku, w którym:

$$c_t - \omega \cdot r < 0;$$

otrzymamy odnośne wzory ruchu po uderzeniu; gdy podstawimy we wzory 353-cie; porówn. rys. 93-ci:

$$c_n = -c_n; \quad \omega = -\omega \quad \text{oraz} \quad \mu = -\mu;$$

mamy przeto dla tego przypadku:

$$v_n = V\bar{\eta} \cdot c_n; \quad v_t = c_t + \mu (1 + V\bar{\eta}) \cdot c_n$$

$$\varphi = -\omega + \mu (1 + V\bar{\eta}) \cdot \frac{r m}{I_s} \cdot c_n.$$

Wypowiedzenie tych wzorów, porównanie z poprzednimi oraz bezpośrednie objaśnienie dynamiczne pozostawia się czytelnikowi.

W trzecim przypadku, gdy

$$c_t + \omega r = 0;$$

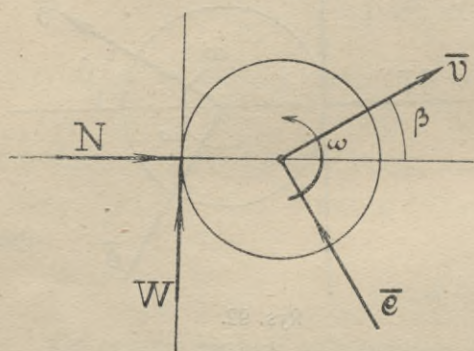
przesunięcia punktów zetknięcia się nie zachodzi; tarcie przeto nie występuje i do obliczenia ruchu w tym przypadku stosować można bezpośrednio wzory na uderzenie bez tarcia; lub też we wzory powyższe należy podstawić $\mu = 0$.

155. Przykład obliczenia ruchu brył układu o dwóch stopniach swobody.

Mechanizmy, opisane w § 218-tym tomie I-ego i w §§ poprzednich tego tomu, przedstawiają układy brył o jednym stopniu swobody; jedno przeto równanie dynamiczne wystarczało do obliczenia ich ruchu lub warunków równowagi. Obliczenie zaś ruchu brył układów o wielu stopniach swobody przedstawia wogóle bardzo znaczne trudności matematyczne; otrzymujemy bowiem stosownie do zadania dwa lub więcej wogóle jednoczesnych równań różniczkowych wyższych rzędów z tyluż niewiadomymi: z których zmienne nie zawsze dają się wyrugować i których całki nie zawsze dają się wyrazić zwykłymi funkcjami. W technice jednakże spotykamy się nieraz z takimi układami brył; w celu przeto zbadania ich ruchu, upraszczamy te układy, wprowadzając do rachunku różne założenia; stosownie do szczególnych warunków, w jakich odbywa się dany ruch.

Jako przykład obliczenia ruchu takich brył obliczymy tutaj ruch tak zwanego, wahadła podwójnego płaskiego. Wahadło to składa się z dwóch sztywnych brył materialnych, z których jedna obraca się około osi nieruchomej poziomej; druga zaś około osi, sztywno związanej z bryłą pierwszą i równoległej do osi poprzedniej. W celu ułatwienia rozpatrywań ruchu tych brył, wyobrazimy je sobie w postaci figur płaskich materialnych, poruszających się w płaszczyźnie pionowej. Jedna z tych figur obracać się przeto będzie około bieguna nieruchomego A , porówn. rys. 94 ty; druga zaś około bieguna B sztywno związanej z figurą pierwszą, a więc około bieguna ruchomego; przytem przyjmiemy dla ułatwienia rachunku, że biegun ruchomy leży na przedłużeniu prostej, łączącej biegun nieruchomy A ze środkiem S_1 masy bryły pierwszej; przyjmiemy następnie, że siłami poruszającymi te bryły są ich ciężary Q_1 i Q_2 .

Niech litery m_1 i m_2 oznaczają masy tych figur; S_1 i S_2 — środki ich mas; s_1 i s_2 odległość tych środków od odpowiednich tym bryłom biegunów obrotu; r_1 odległość pomiędzy biegunami obrotów; następnie litery σ i ψ niech oznaczają kąty,



Rys. 93.

jakie tworzą w pewnej chwili przedłużenia prostych s_1 i s_2 z osią pionową; a litery \bar{A} i \bar{B} — siły odporowe, jakie występują w biegunach obrotów A i B .

Układ ten posiada dwa stopnie swobody; znajomość bowiem kątów σ i ϕ jest niezbędną i wystarczającą do wyznaczenia położenia a więc i ruchu tych figur na płaszczyźnie. Zadanie polega na obliczeniu ruchu tych brył, gdy je odchylimy od położenia pionowego; oraz na obliczeniu siły odporowej, występującej w nieruchomym przegubie A i siły wewnętrznej, występującej, w przegubie ruchomym B .

W zadaniu tem jest przeto sześć niewiadomych algebraicznych: cztery rzuty dwóch nieznanych sił odporowych \bar{A} i \bar{B} i dwa kąty, określające położenie a więc i ruch tych brył w każdej chwili.

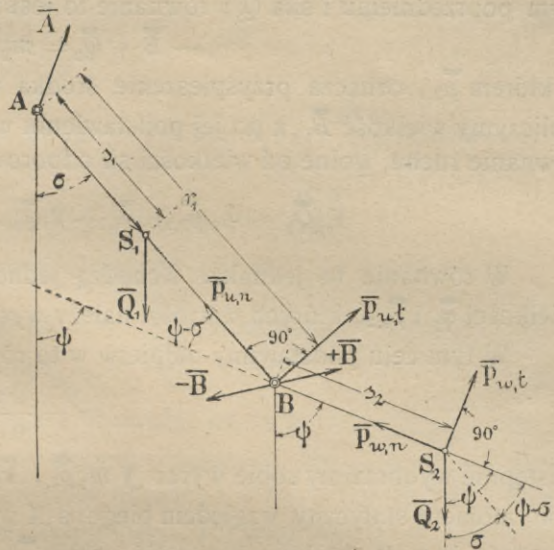
Do obliczenia tych niewiadomych mamy sześć równań algebraicznych; każdą bowiem z tych figur uważać będziemy, po przyłożeniu do niej sił odporowych \bar{A} i \bar{B} — za swobodną; i napiszemy dla każdej z nich po trzy równania dynamiczne w postaci algebraicznej.

W celu uniknięcia zawiłych rachunków, powinniśmy się starać w ten sposób zestawić równania dynamiczne, ażeby w każde z nich wchodziła najmniejsza ilość niewiadomych. Znacznego również uproszczenia dozna obliczenie, jeżeli obliczymy np. najpierw ruch brył, a następnie siły odporowe; co osiągniemy możliwie bezpośrednio, gdy zestawimy takie dwa równania dynamiczne, któreby były wolne od sił odporowych; z nich bowiem obliczymy bezpośrednio współrzędne położenia w funkcji czasu; a gdy obliczymy już ruch tych brył, zestawimy następnie pozostałe cztery równania algebraiczne, w które wchodzić będą siły odporowe i starać się przytem będziemy, ażeby w każde z tych równań wchodziła również najmniejsza ilość niewiadomych.

Rozwiązanie przeto tego zadania można wykonać w następujący sposób: do bryły 1-szej przyłożymy siły odporowe \bar{A} i \bar{B} i uważać ją będziemy za swobodną. Jako równanie jej ruchu napiszemy równanie momentu ilości ruchu względem bieguna obranego np. w A . Oznaczywszy literą $I_{1,A}$ moment bezwładności bryły 1-ej względem bieguna A , napiszemy na zasadzie wzoru 276-go równanie to w postaci wektorowej:

$$\mathbf{V} \bar{B} \cdot \bar{r}_1 + \mathbf{V} \bar{Q}_1 \cdot \bar{s}_1 = \frac{d(I_{1,A} \cdot \bar{\varphi}_1)}{dt}$$

w którym $\bar{\varphi}_1$ oznacza prędkość kątową bryły 1-szej.



Rys. 94.

W celu wyrugowania z tego wzoru siły odporowej \bar{B} , napiszemy równanie dynamiczne środka masy bryły 2-ej. Na bryłę tę działa siła \bar{B} ze zwrotem odwrotnym poprzedniemu i siła \bar{Q}_2 ; równanie to jest następujące:

$$-\bar{B} + \bar{Q}_2 = m_2 \bar{p}_{2,s};$$

w którym $\bar{p}_{2,s}$ oznacza przyśpieszenie środka masy bryły 2-ej. Z równania tego obliczymy wielkość \bar{B} , a po jej podstawieniu w równanie poprzednie, otrzymamy równanie ruchu, wolne od wielkości sił odporowych, równanie to jest następujące:

$$V(\bar{Q}_2 - m_2 \bar{p}_{2,s}) \cdot \bar{r}_1 + V \bar{Q}_1 \cdot \bar{s}_1 = \frac{d(I_{1,A} \cdot \bar{\varphi}_1)}{dt} \quad (354)$$

W równanie to jednakże wchodzi jednocześnie dwie dotychczas nieznanne wielkości $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{p}_{s,2}$, których wartości należy wyrazić obraniami współrzędnymi σ i φ .

W tym celu podstawimy najpierw w to równanie

$$\varphi_1 = -\frac{d\sigma}{dt};$$

następnie wyobrazimy sobie wyraz $V m_2 \bar{p}_{2,s} \cdot \bar{r}_1$, jaki posiadamy w tem równaniu, jako moment statyczny względem bieguna A wektora $m_2 \bar{p}_{2,s}$, który posiada punkt przyłożenia w B . Ażeby zaś wyrazić wektor $\bar{p}_{2,s}$ wielkościami σ i ψ , należy przede wszystkim wyrazić ruch bryły drugiej temi wielkościami. W tym celu przyjmiemy, że ruch tej bryły składa się z ruchu obrotowego około punktu B , i z ruchu postępowego jaki ten punkt posiada, porówn. § 65-ty tomu I-go; przyśpieszenie przeto $\bar{p}_{s,2}$ składa się z przyśpieszenia \bar{p}_w , jakie posiada środek masy bryły drugiej podczas jej obrotu około bieguna B , i z przyśpieszenia \bar{p}_u unoszącego, wspólnego wszystkim punktom tej bryły i równego przyśpieszeniu punktu B ; czyli przyjmiemy, że

$$\bar{p}_{2,s} = \bar{p}_w + \bar{p}_u.$$

W celu ułatwienia rachunku rozłożymy przyśpieszenia te na normalne i styczne, porówn. rys. 94-ty tak, iż

$$\bar{p}_{2,s} = (\bar{p}_{w,n} + \bar{p}_{w,t}) + (\bar{p}_{u,n} + \bar{p}_{u,t}).$$

Ażeby przeto obliczyć wyraz $V m_2 \bar{p}_{2,s} \cdot \bar{r}_1$, wyrażający moment względem bieguna w A wektora $m_2 \bar{p}_{2,s}$ z punktem przyłożenia w B ; wyobrazimy sobie że te cztery składowe wektory przyłożone są do punktu B , porówn. rys. 94-ty, zrzutujemy je na prostopadłą do ramienia r_1 , i obliczymy moment sumy tych rzutów; po obliczeniu tych momentów i po podstawieniu ich wartości w równanie 354-te, przedstawi się to równanie w postaci następującej:

$$Q_2 \cdot r_1 \cdot \sin \sigma - m_2 r_1 \cdot [p_{w,n} \cdot \sin(\psi - \sigma) - p_{w,t} \cdot \cos(\psi - \sigma) - p_{u,t}] + \\ + Q_1 \cdot s_1 \cdot \sin \sigma = -I_{1,A} \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2};$$

a po podstawieniu wartości przyśpieszeń, które odpowiednio do danych określeń, posiadają następujące wartości:

$$\begin{aligned}
 p_{w,n} &= s_2 \cdot \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2; & p_{w,t} &= s_2 \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2}; \\
 p_{u,n} &= r_1 \cdot \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2; & p_{u,t} &= r_1 \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2}.
 \end{aligned} \quad (355)$$

otrzymamy równanie:

$$\begin{aligned}
 Q_2 \cdot r_1 \cdot \sin \sigma - m_2 \cdot r_1 \cdot s_2 \cdot \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \cdot \sin(\psi - \sigma) + m_2 \cdot r_1 \cdot s_2 \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} \cdot \cos(\psi - \sigma) + \\
 + m_2 r_1^2 \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} + Q_1 \cdot s_1 \cdot \sin \sigma = - I_{1,A} \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2};
 \end{aligned}$$

i wreszcie po uporządkowaniu podług pochodnych:

$$\begin{aligned}
 (I_{1,A} + m_2 r_1^2) \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} + m_2 s_2 \cdot r_1 \cdot \cos(\psi - \sigma) \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} - m_2 s_2 r_1 \cdot \sin(\psi - \sigma) \cdot \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \\
 + (m_1 s_1 + m_2 r_1) g \cdot \sin \sigma = 0.
 \end{aligned} \quad (356)$$

Jest to jedno równanie ruchu tych brył, wolne od sił odporowych; drugie także równanie zestawimy, gdy do bryły drugiej przyłożymy siłę — \bar{B} i \bar{Q}_2 i obliczymy równanie momentów względem bieguna, obranego w B ; w ten sposób bowiem otrzymamy równanie wolne od tej siły odporowej. Do tego obliczenia zastosować można równanie momentów ilości ruchu w postaci równ. 274-tego; lub też w postaci równania 275 tego. Ponieważ w równanie 356-te wchodzi wielkości przyśpieszeń, przeto zastosujemy równanie 274-te; i w tym celu określimy przyśpieszenia punktów bryły 2-ej, jako złożone z ruchu obrotowego około punktu B i z ruchu postępowego, jakie posiada tenże punkt; przyśpieszenie przeto każdego jej punktu składa się z przyśpieszenia ruchu postępowego \bar{p}_u i z przyśpieszenia, jakie powstaje podczas ruchu obrotowego; przyśpieszenie to wyobrazimy sobie w postaci przyśpieszenia dośrodkowego $\bar{p}_{w,n}$ i stycznego $\bar{p}_{w,t}$. Suma przeto momentów względem B iloczynów z mas punktów i z ich przyśpieszeń, jakie powstają podczas ruchu postępowego, wyrazi się wzorem

$$\mathbf{V} m_2 \bar{p}_u \cdot \bar{s}_2;$$

suma zaś momentów iloczynów z mas i przyśpieszeń oddzielnych punktów, jakie powstają podczas ruchu obrotowego, wyrazimy wzorem

$$I_{2,B} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt}$$

w którym φ_2 oznacza prędkość obrotową bryły drugiej a której pochodną wyrazimy wzorem

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = - \frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

Równanie przeto momentów bryły 2-giej względem B jest następujące:

$$\mathbf{V} \bar{Q}_2 \cdot \bar{s}_2 = \mathbf{V} m_2 \bar{p} \cdot \bar{s}_2 - I_{2,B} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} \quad (357)$$

W celu przekształcenia tego równania na algebraiczne, rozłożymy, jak poprzednio:

$$\bar{p}_u = \bar{p}_{u,n} + \bar{p}_{u,t};$$

a po przyłożeniu tych wektorów składowych do punktu S_2 , jak wymaga iloczyn wektorowy wzoru powyższego i po obliczeniu ich momentów względem B , otrzymamy zamiast poprzedniego równania—następujące:

$$m_2 g \cdot s_2 \cdot \sin \psi = - m_2 r_1 \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \cdot s_2 \cdot \sin (\psi - \sigma) - \\ - m_2 r_1 \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \cdot s_2 \cdot \cos (\psi - \sigma) - I_{2,B} \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2};$$

i wreszcie po uporządkowaniu względem pochodnych:

$$m_2 s_2 \cdot r_1 \cdot \cos (\psi - \sigma) \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + I_{2,B} \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2} + m_2 s_2 \cdot r_1 \cdot \sin (\psi - \sigma) \cdot \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 + \\ + m_2 g \cdot s_2 \cdot \sin \psi = 0. \quad \dots \quad (358)$$

Jest to drugie równanie dynamiczne, które łącznie z równ. 356-tem przedstawia dwa równania algebraiczne różniczkowe drugiego rzędu z dwiema zmiennymi σ i ψ .

Do równań tych, równ. 356-te i 358-me, które są wolne od sił odporowych, można dojść jeszcze inną drogą; więcej bezpośrednio. W tym celu należy uważać dany układ dwóch brył za układ zmienny, w którym występują siły wewnętrzne a między nimi i siły $\pm \bar{B}$; a że suma momentów wogóle sił wewnętrznych równa się zeru; przeto obrawszy bieguna momentów w A i zestawivszy równanie momentów obydwóch brył względem tego bieguna, otrzymamy bezpośrednio równanie ruchu wolne od sił $\pm B$ i od siły A . Do tego obliczenia zastosujemy równanie momentów w postaci równania 274-tego. Sumę momentów iloczynów z mas punktów i z ich przyspieszeń rozbijemy na dwie sumy: na sumę momentów tych wektorów bryły pierwszej i na taką sumę bryły drugiej. Suma tych momentów bryły pierwszej wyrazi się bezpośrednio wzorem

$$- I_{1,A} \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2};$$

suma zaś tych momentów bryły drugiej wymaga pewnych omówień. Przyjmiemy, jakśmy to wyżej uczynili, że przyspieszenie każdego z punktów tej bryły składa się z przyspieszenia ruchu postępowego równego przyspieszeniu punktu B , i z przyspieszenia ruchu obrotowego, jakie każdy punkt tej bryły posiada podczas obrotu około punktu B . Sumę momentów iloczynów z tych przyspieszeń i z mas, względem bieguna momentów, obranego w B , wyraziliśmy już prawą stroną równania 357-go; ażeby zaś napisać wyraz momentów tych wektorów względem bieguna, obranego w A , zastosujemy wzór 123-ty tomu I-go; i w tym celu wyobrazimy sobie wszystkie wektory $m_k \bar{p}_k$ bryły drugiej przyłożonemi do punktu B , a suma ich momentów lub moment ich wypadkowej, względem bieguna w A , łącznie z momentem tych wektorów względem bieguna w B jest szukaną sumą $\Sigma \mathbf{V} m_k \bar{p}_k \cdot \bar{r}_k$. Zważywszy następnie, że dla bryły drugiej, w myśl równania 193-iego tego tomu

$$\Sigma (m_k \bar{p}_k)_2 = m_2 \bar{p}_{2,s};$$

otrzymamy równanie momentów całego układu względem bieguna w A :

$$\mathbf{V} \bar{Q}_1 \cdot \bar{s}_1 + \mathbf{V} \bar{Q}_2 \cdot (\bar{r}_1 + \bar{s}_2) = - I_{1,A} \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + \mathbf{V} m_2 \bar{p}_u \cdot \bar{s}_2 - I_{2,B} \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \\ + \mathbf{V} m \bar{p}_{2,s} \cdot \bar{r}_1 \quad \dots \quad (359)$$

Drugim równaniem wolnem od sił wewnętrznych jest równ. 357-me.

Ażeby utożsamić równ. 359-te z jednym z poprzednich, odejmiemy od równania 359-go równ. 354-te, a otrzymamy równ. 357-me. Ażeby obliczyć siłę odporową \bar{A} i siłę wewnętrzną \bar{B} , wyjdziemy z założenia, że ruch brył jest już znany z poprzednich obliczeń (co do metody tej porówn. § 51-szy); a z równań ruchu środka mas danych brył obliczymy te siły.

Równania te dla bryły 1-szej i bryły 2-giej po uczynieniu ich swobodnemi są następujące:

$$\begin{aligned} \bar{A} + \bar{B} + m_1 \bar{g} &= m_1 \bar{p}_{1,s}; \\ -\bar{B} + m_2 \bar{g} &= m_2 \bar{p}_{2,s}; \end{aligned}$$

z których obliczymy szukane wielkości. Z równania np. drugiego obliczymy:

$$-\bar{B} = m_2 \bar{p}_{2,s} - m_2 \bar{g};$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie pierwsze, otrzymamy:

$$\bar{A} = m_1 \bar{p}_{1,s} + m_2 \bar{p}_{2,s} - m_1 \bar{g} - m_2 \bar{g}.$$

Równanie to możemy również bezpośrednio otrzymać, stosując równanie ruchu środka masy do całego układu zmiennego; wtedy bowiem napiszemy równanie:

$$\bar{A} + m_1 \bar{g} + m_2 \bar{g} = m_1 \bar{p}_{1,s} + m_2 \bar{p}_{2,s};$$

które jest jednakowe z poprzednim. Rzutując te równania na obrane osi współrzędnych i podstawivszy wartości przyśpieszeń w funkcji czasu, obliczymy rzuty sił odporowych także w funkcji czasu.

156. Analiza równań ruchu. Otrzymane jednakże równania, równ. 356-te i 358-me, nie dają się całkować, choćby tylko z tego względu, że nie można z nich wyrugować zmiennej σ lub ψ . W celu przeto zbadania choć w przybliżeniu — ruchu, wyrażonego takimi równaniami, należy je uprościć, korzystając z pewnych szczególnych właściwości ruchu danego układu. Weźmiemy np. pod uwagę przypadek, w którym bryły dane wskutek pewnych warunków zadania odchylają się od pionu o bardzo małe kąty; a wtedy przyjąć można, że

$$\sin \sigma \cong \sigma; \quad \sin \psi \cong \psi; \quad \cos(\psi - \sigma) \cong 1;$$

oraz, wobec małych prędkości, jakie w tych warunkach występują, przyjąć jeszcze można, że

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 \cong 0, \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \cong 0.$$

Po podstawieniu tych wartości w powyższe dwa równania, 356-te i 358-me, przekształcą się one na następujące:

$$\begin{aligned} (I_{1,A} + m_2 r_1^2) \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + m_2 s_2 \cdot r_1 \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2} + (m_1 s_1 + m_2 r_1) \cdot g \cdot \sigma &= 0; \\ m_2 s_2 r_1 \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + I_{2,B} \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2} + m_2 g \cdot s_2 \cdot \psi &= 0; \quad \dots \quad (360) \end{aligned}$$

które są równaniami liniowemi drugiego rzędu, jednorodnemi, z dwiema jednoczesnemi zaleźnemi zmiennymi i ze stałymi współczynnikiemami.

Dla skrócenia i większego uwydatnienia charakteru tych równań napiszemy je w następujący sposób:

$$a \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + b \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2} + e \cdot \sigma = 0; \quad (361)$$

$$b \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + c \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2} + f \cdot \psi = 0; \quad (362)$$

w których:

$$\begin{aligned} a &= I_{1,A} + m_2 r_1^2; \\ b &= m_2 s_2 r_1; \quad c = I_{2,B}; \\ e &= (m_1 s_1 + m_2 r_1) \cdot g; \quad f = m_2 \cdot s_2 \cdot g. \end{aligned} \quad (363)$$

Ażeby z tych równań otrzymać jedno równanie z jedną zmienną, np. ze zmienną σ , wyrugujemy zmienną ψ , i w tym celu obliczymy z 361-ego:

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\frac{e}{b} \cdot \sigma - \frac{a}{b} \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2};$$

a po podstawieniu tej wartości w równ. 362-gie, otrzymamy:

$$b \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} - c \cdot \frac{e}{b} \sigma - c \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + f \cdot \psi = 0;$$

skąd

$$\psi = \frac{c}{f} \cdot \frac{e}{b} \cdot \sigma + \left(\frac{c}{f} \cdot \frac{a}{b} - \frac{b}{f} \right) \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2}.$$

Po dwukrotnem zróżniczkowaniu tego równania względem t , otrzymamy:

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{c}{f} \cdot \frac{e}{b} \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + \left(\frac{c}{f} \cdot \frac{a}{b} - \frac{b}{f} \right) \cdot \frac{d^4 \sigma}{dt^4};$$

i wreszcie, po podstawieniu tej wartości w równ. 361-sze i po uporządkowaniu, otrzymamy równanie różniczkowe liniowe 4-go rzędu z jedną zmienną σ w funkcji czasu:

$$(ac - b^2) \cdot \frac{d^4 \sigma}{dt^4} + (af + ce) \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + ef \cdot \sigma = 0 \quad (364)$$

Szczególną całką tego równania jest funkcja:

$$\sigma = e^{p \cdot t}.$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie, otrzymamy równanie charakterystyczne danego równania różniczkowego; które jest jednocześnie równaniem, charakteryzującym ruch danej bryły; z równania tego bowiem będziemy mogli sądzić o rodzaju ruchu, jaki dana bryła wykonywa. Równanie to jest następujące:

$$(ac - b^2) \rho^4 + (af + ce) \rho^2 + ef = 0. \quad (365)$$

Cztery pierwiastki tego równania: ρ_1, ρ_2, ρ_3 i ρ_4 dają wogóle cztery szczególne całki; całka przeto ogólna danego równania różniczkowego ma postać:

$$\sigma = C_1 \cdot e^{\rho_1 t} + C_2 \cdot e^{\rho_2 t} + C_3 \cdot e^{\rho_3 t} + C_4 \cdot e^{\rho_4 t} \quad (366)$$

gdzie litery C oznaczają pewne wielkości stałe, które obliczyć można z warunków ruchu początkowego.

Ażeby wyrazić drugą spólrzdną ψ w funkcji czasu; należy z równania 361 i 362-go wyrugować σ . Lecz zamiast tego szczegółowego rachunku można bezpo-

średnio napisać równanie różniczkowe tej zmiennej, wzięwszy pod uwagę, że równanie 361-sze zamieni się na 362-gie, jeżeli zastąpimy w niem literę σ literą ψ , literę a literą c , i wreszcie e literą f , — i odwrotnie; możemy przeto te podstawienia zrobić również w równaniu 364-te, i otrzymamy:

$$(ac - b^2) \cdot \frac{d^4 \psi}{dt^4} + (ce + af) \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2} + ef \cdot \psi = 0. \quad (367)$$

Spółczynniki tego równania są takie same, jakie są w równaniu 364-em; równanie przeto charakterystyczne tego równania różniczkowego będzie również takie same, jakie było poprzednio; cała przeto równ. 367-ego:

$$\psi = K_1 e^{\rho_1 t} + K_2 e^{\rho_2 t} + K_3 e^{\rho_3 t} + K_4 e^{\rho_4 t}; \quad (368)$$

gdzie litery K są pewne stałe spółczynniki. Wielkość przeto ρ dla obydwóch równań:

$$\rho = \pm \sqrt{\frac{-(af + ce) \pm \sqrt{(af + ce)^2 - 4(ac - b^2) \cdot ef}}{2 \cdot (ac - b^2)}}.$$

Jeżeli wartość tego pierwiastka jest urojoną, to się znaczy, że mamy do czynienia z ruchem okresowym. Oznaczmy rzeczywiste czynniki takich pierwiastków literami α_1 i α_2 , a wtedy:

$$\rho_1 = \alpha_1 \cdot i; \quad \rho_2 = -\alpha_1 \cdot i; \quad \rho_3 = \alpha_2 \cdot i; \quad \rho_4 = -\alpha_2 \cdot i;$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$; po podstawieniu następnie tych wartości w równ. 366-te i w 368-me, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sigma &= (C_1 \cdot e^{\alpha_1 i \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\alpha_1 i \cdot t}) + (C_3 \cdot e^{\alpha_2 i \cdot t} + C_4 \cdot e^{-\alpha_2 i \cdot t}); \\ \psi &= (K_1 \cdot e^{\alpha_1 i \cdot t} + K_2 \cdot e^{-\alpha_1 i \cdot t}) + (K_3 \cdot e^{\alpha_2 i \cdot t} + K_4 \cdot e^{-\alpha_2 i \cdot t}). \end{aligned} \quad (369)$$

lub też, zamieniając funkcje wykładnicze na kołowe, napiszemy te równania w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma &= A_1 \cdot \sin(\alpha_1 \cdot t + \beta_1) + B_1 \cdot \sin(\alpha_2 \cdot t + \gamma_1); \\ \psi &= A_2 \cdot \sin(\alpha_1 \cdot t + \beta_2) + B_2 \cdot \sin(\alpha_2 \cdot t + \gamma_2). \end{aligned} \quad (370)$$

W równaniach tych mamy osiem stałych wielkości

$$A_1, A_2, B_1, B_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2;$$

które są dotychczas nieokreślone. Z warunków ruchu początkowego określimy cztery z tych wielkości; ażeby bowiem określić ten ruch, powinny być dane w pewnej chwili dwa kąty, określające położenie wahadeł, i dwie wielkości, określające ich prędkości w tem położeniu. Pozostałe zaś cztery spółczynniki obliczymy z warunkiem, że równania 370-te powinny zaspakajać identycznie równanie 361-sze i 362-ie.

Nie wchodząc w szczegóły tego obliczenia, damy pewne wskazówki ogólne, pozwalające sądzić z równania charakterystycznego, bez obliczania jego pierwiastków, o rodzaju ruchu brył danego układu.

Jeżeli np. która z wartości ρ jest dodatnią, to wartość odpowiedniego wyrazu $e^{\rho \cdot t}$ rośnie z biegiem czasu; a więc i wartość odpowiedniej spółrzędnej rosnąć będzie do nieskończoności; porówn. równania 366-te oraz 368-me.

Jeżeli zaś która z wartości ρ jest ujemną, to wartość tego wyrazu z biegiem czasu maleje; nie przesądza to jednakże o wartości σ lub ψ .

Jeżeli wreszcie jeden z pierwiastków jest wielkością zespoloną postaci $(p+qi)$, to, wobec tego, że mamy do czynienia z układami, wykonującymi ruchy rzeczywiste, powinien istnieć drugi pierwiastek sprzężony postaci $(p-qi)$. W tym przeto przypadku równanie np. 366-te może być przekształcone na następujące:

$$\sigma = C_1 \cdot e^{(p+qi)t} + C_2 \cdot e^{(p-qi)t} + C_3 \cdot e^{(p'+qi')t} + C_4 \cdot e^{(p'-qi')t} \quad \text{lub}$$

$$\sigma = e^{pt} \cdot (C_1 \cdot e^{qi \cdot t} + C_2 \cdot e^{-qi \cdot t}) + e^{p't} \cdot (C_3 \cdot e^{q'i \cdot t} + C_4 \cdot e^{-q'i \cdot t});$$

lub wreszcie na następujące:

$$\sigma = e^{pt} \cdot [K' \cdot \cos(qt) + K'' \cdot \sin(qt)] + e^{p't} \cdot [K''' \cdot \cos(q't) + K'''' \cdot \sin(q't)].$$

Wyraz ten przedstawia ruch harmoniczny złożony; który, zależnie od tego czy p i $p' \cong 0$, z biegiem czasu wzrasta lub zanika.

Jeżeli przeto równanie charakterystyczne posiada choć jeden pierwiastek dodatny, to spółrzędna ruchu, wyrażonego odnośnem równaniem różniczkowem, rośnie do nieskończoności; i do ruchu tego, ze względu na zrobione założenia, nie możemy stosować równań przybliżonych. Jeżeli zaś w danem równaniu pierwiastki rzeczywiste są ujemne, to spółrzędna danego ruchu zbliża się z biegiem czasu do wartości stałej czyli ruch zanika. Jeżeli zaś pierwiastki są zespolone, to ruch jest okresowy; a przytem jeżeli rzeczywisty wyraz tych pierwiastków jest dodatny, to ruch jest okresowy, wzmagający się do nieskończoności; jeżeli zaś wyraz ten jest ujemny, to ruch jest okresowy zanikający.

Z rodzaju przeto pierwiastków równania charakterystycznego wywnioskować można o rodzaju ruchu, wyrażonego tem równaniem.

Dla celów technicznych ważnem jest nieraz osądzić, czy ruch dany jest wzmagający się czy też zanikający, lub harmoniczny. Ważnem jest przeto móżd osądzić, bez rozwiązywania równań, bezpośrednio ze spółczynników równania, czy pierwiastki jego rzeczywiste będą ujemne, lub też czy wyrazy rzeczywiste pierwiastków zespolonych będą ujemne, gdyż tylko w tych przypadkach ruch nie będzie wzmagający się.

W równaniach drugiego stopnia łatwo to osądzić, obliczywszy pierwiastki tego równania.

Jeżeli np. równaniu stopnia drugiego nadamy postać

$$\rho^2 + a_1 \rho + a_2 = 0,$$

to pierwiastki jego wyrazimy wzorem:

$$\rho = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2}$$

Jeżeli pierwiastki posiadają wartości urojone; to wyraz rzeczywisty powinien być ujemny, t. j. powinno być

$$a_1 > 0;$$

ażeby ruch był okresowy zanikający.

Jeżeli zaś pierwiastek posiada wartość rzeczywistą, to ażeby ruch był zanikający, powinno być

$$-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2} < 0;$$

a nastąpi to wtedy, gdy

$$a_1 > 0; \quad \text{oraz} \quad a_2 > 0 \dots \dots \dots (371)$$

Gdy zaś mamy równanie wyższych stopni, sposób ten określenia pierwiastków staje się utrudniony, a nawet niemożliwym. Związki jakim powinny podlegać współczynniki równania n -tego stopnia, ażeby rzeczywiste pierwiastki lub też rzeczywiste wyrazy pierwiastków zespolonych były odjemne, podał Hurwitz (Math. Ann. Bd. 46, 1875, str. 273). Przytoczymy je tutaj, nie podając ich dowodzeń. W myśl tej teorii pierwiastki rzeczywiste lub wyrazy rzeczywiste pierwiastków urojonych równ. n -tego stopnia o postaci:

$$\rho^n + a_1 \rho^{n-1} + \dots + a_{n-1} \rho + a_n = 0;$$

będą odjemne jeżeli: 1) każdy współczynnik $a > 0$; i 2) jeżeli jednocześnie wartości każdego wyznacznika, utworzonego kolejno z następującego ogólnego wyznacznika

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0.$$

A więc dla $n = 2$; podług tego prawidła powinno być:

$$a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad \text{oraz} \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Dla $n = 3$, powinno być:

$$a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\text{oraz} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Dla $n = 4$:

$$a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0, \quad \text{oraz}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0.$$

i t. d.

Takie jest postępowanie analityczne, mające na celu obliczenie tak zwanych ruchów drgających brył materyalnych.

Jeżeli zaś równanie charakterystyczne wykaże, że ruch dany nie jest drgający, lecz odbywa się na stosunkowo znacznych przestrzeniach, to do obliczenia takiego ruchu należy zastosować równania ściśle; jak w danym przykładzie równania 356, 358-me, których jednakże całkowanie jest w wielu przypadkach niemożliwe, lub też przedstawia znaczne trudności. W tych przypadkach należy określić właściwości danego ruchu bezpośrednio z tych równań w ten sposób, jaki stosowaliśmy np. w § 61-szym do obliczenia wahadła kulistego. W wielu przypadkach można również odkryć pewne właściwości danego ruchu z równania równowartości pracy i energii kinetycznej.

157. Ruch dzwonu. Obliczenie ruchu wahadła podwójnego znajduje bezpośrednie zastosowanie w praktyce przy obliczeniu ruchu dzwonów. Bryła, nazwana pierwszą, może przedstawiać dzwon; bryła druga—serce jego. Przebieg ruchu dzwonu nie jest tak prosty, jak się to pozornie zdawać może. W Kolonii np. w roku 1875 założono dzwon, który nie wydawał dźwięku, gdyż podczas poruszania dzwonem serce jego w ten sposób się poruszało razem z dzwonem, że nie uderzało w dzwon. Te szczególne warunki zachowania się serca i dzwonu można obliczyć z wyprowadzonych równań ruchu. W tym celu weźmiemy pod uwagę ten szczególny przypadek ruchu dzwona, w którym serce jego i dzwon wykonują jednocześnie jednakowe ruchy, jak gdyby stanowiły jedną bryłę sztywną; i znajdziemy warunki przy jakich to zachodzi.

Równanie tego ruchu otrzymamy z równań 360-tych; gdy podstawimy w nie

$$\psi = \sigma.$$

Równania te są następujące:

$$(I_{1,A} + m_2 r_1^2 + m_2 s_2 r_1) \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + (m_1 s_1 + m_2 r_1) \cdot g \cdot \sin \sigma = 0;$$

$$(I_{2,B} + m_2 s_2 \cdot r_1) \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + m_2 s_2 \cdot g \cdot \sin \sigma = 0.$$

Ażeby zaś te równania wyrażały jeden i ten sam ruch, powinny być jednakowe; wobec czego powinien zachodzić następujący związek pomiędzy jego współzmiennymi:

$$\frac{I_{1,A} + m_2 r_1^2 + m_2 s_2 r_1}{I_{2,B} + m_2 s_2 r_1} = \frac{m_1 s_1 + m_2 r_1}{m_2 s_2}.$$

Przekształcimy następnie to równanie w ten sposób, że wprowadzimy długości wahadeł zastępczych, równ. 290-te, tak dla dzwona jak i dla jego serca. Podstawimy przeto w to równanie:

$$\frac{I_{1,A}}{m_1 s_1} = l_1; \quad \frac{I_{2,B}}{m_2 s_2} = l_2;$$

a otrzymamy związek powyższy w następującej postaci:

$$\frac{l_1 + \frac{m_2 r_1^2}{m_1 s_1} + \frac{m_2 s_2 r_1}{m_1 s_1}}{l_2 + r_1} = 1 + \frac{m_2 r_1}{m_1 s_1};$$

skąd po przekształceniu:

$$l_1 - l_2 - r_1 = \frac{m_2 r_1}{m_1 s_1} \cdot (l_2 - s_2).$$

Jeżeli przeto zachodzi ten związek pomiędzy wielkościami, określającymi rozmieszczenie masy w dzwonie, to serce dzwonu nie uderzy w dzwon.

Związek ten uprości się, jeżeli weźmiemy pod uwagę, że wielkość m_2 jest zwykle w dzwonach bardzo małą w porównaniu z wielkością m_1 ; i że wielkość $(l_2 - s_2)$ niewiele różni się od zera; przyjąć przeto możemy, że wartość prawej strony powyższego równania $= 0$; a powyższy związek przybierze postać:

$$l_1 \cong l_2 + r_1. \quad \dots \dots \dots (372)$$

Z równania tego wynika, że dzwon nie wyda dźwięku pomimo ruchu, jeżeli środek wahanja dzwonu i serca jego wzajemnie się pokrywają.

Badania nieudanego dzwonu Kolońskiego wykazały, że

$$l_1 = 3,282 \text{ m}, \quad l_2 = 2,629 \text{ m}, \quad \text{a} \quad r_1 = 0,667;$$

które to wartości czynią zadość równaniu 372-emu; słusznie przeto dzwon taki nie odpowiadał celowi. Zwrócić należy jeszcze uwagę, że niespotkanie się dzwonu z sercem zachodzi nietylko w tym przypadku, w którym dzwon i serce poruszają się jak jedna bryła, lecz i wtedy, gdy serce porusza się względem dzwonu w takich granicach, które nie sięgają do powierzchni dzwonu. Przypadku tego jednakże rozpatrywać nie będziemy.

7. Ruch przestrzenny brył materialnych.

A. Bryła obracająca się około osi nieruchomej.

158. Położenie wektora momentu ilości ruchu bryły, obracającej się około osi nieruchomej, względem bieguna, obranego na tej osi. W § 121-ym № 4 obliczyliśmy położenie wektora \bar{M}_v momentu ilości ruchu danej bryły względem bieguna, obranego na osi obrotu, ze znanego położenia wektora prędkości obrotowej w danej chwili i ze znanego położenia bryły względem osi; zadajemy sobie teraz pytanie: jakim zmianom ulegnie ten wektor podczas obrotu bryły około osi nieruchomej. W celu rozwiązania tego zadania uprzytomnijmy sobie, że wektor momentu ilości ruchu danej bryły jest sumą wektorów momentów ilości ruchu oddzielnych punktów, na jakie wyobrażamy sobie bryłę rozłożoną; a przyjdziemy do wniosku, że wektor ten obraca się razem z bryłą; wszystkie bowiem wektory ilości ruchu oddzielnych punktów i ich ramiona obracają się razem z bryłą.

Jeżeli prędkość obrotowa bryły jest stałą, to wektory ilości ruchu oddzielnych punktów nie zmieniają swych długości i położenia względem bryły; a że promienie wodzące również się nie zmieniają podczas obrotu, wielkość przeto \bar{M}_v przy tych warunkach również się nie zmienia; wniosek ten wysłowimy: jeżeli bryła materialna obraca się około osi nieruchomej ruchem jednostajnym, to koniec wektora \bar{M}_v zakreśla również ruchem jednostajnym koło, którego płaszczyzna jest prostopadłą do osi obrotu. Jeżeli zaś prędkość obrotowa jest zmienną to, ponieważ prędkości oddzielnych punktów zmieniają jednocześnie swe wielkości proporcjonalnie do tej prędkości, długość wektora \bar{M}_v zmienia również swą długość; podczas przeto niejednostajnego obrotu bryły materialnej około osi nieruchomej, wektor \bar{M}_v zachowuje kierunek poprzedni względem bryły, koniec jego jednakże zakreśla pewną krzywą, leżącą na powierzchni stożka obrotowego.

Wektor przeto $\frac{d\bar{M}_v}{dt}$ bryły, obracającej się około osi nieruchomej, możemy wyobrazić sobie jako wektor prędkości, z jaką przebiega koniec wektora \bar{M}_v , mo-

mentu ilości ruchu podczas obrotu bryły. Prędkość tę wyrazić można w następujący sposób: jeżeli obrót jest jednostajny, — wektorem stycznym, do koła, jakie zakreśla koniec wektora momentu ilości ruchu podczas obrotu bryły; którego kierunek jest prostopadły do płaszczyzny (M_v, φ); a wartość jego równa się iloczynowi

$$M_v \cdot \sin \alpha \cdot \varphi;$$

promień bowiem tego koła wyrazimy wzorem:

$$M_v \cdot \sin \alpha;$$

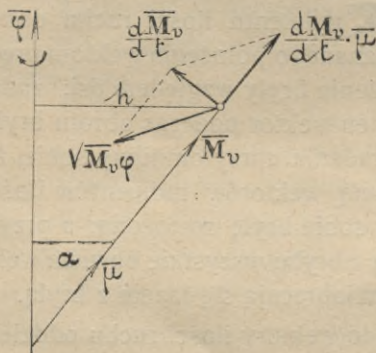
w którym litera α oznacza kąt, jaki tworzy kierunek wektora momentu ilości ruchu z osią obrotu. Wektorowo wyrazimy prędkość, z jaką porusza się koniec wektora momentu ilości ruchu podczas jednostajnego obrotu w taki sam sposób, w jaki wyraziliśmy prędkość punktu, którego promień wodzący oznaczyliśmy literą r , porów. wzór 40-ty § 51-go tomu I-go; napiszemy przeto dla obrotu jednostajnego bryły:

$$\frac{d\bar{M}_v}{dt} = v \bar{M}_v \cdot \bar{\varphi},$$

wektor bowiem \bar{M}_v może być uważany za promień wodzący punktu, który wyobrazimy sobie umieszczonym na końcu tego wektora.

Jeżeli zaś prędkość obrotowa jest zmienną, to promień wodzący \bar{M}_v nie tylko obraca się razem z bryłą, lecz i jednocześnie zmienia swą długość proporcjonalnie do prędkości obrotowej.

Ażeby przeto obliczyć całkowitą prędkość końca wektora \bar{M}_v należy w tym razie przyjąć na zasadzie prawa superpozycji ruchów, że prędkość ta składa się z dwóch prędkości: z prędkości, jaka powstaje podczas obrotu przy stałej jego długości; i z prędkości, jaka powstaje wskutek wydłużenia się promienia wodzącego. Pochodna przeto wektora \bar{M}_v składa się w tym razie z wektora, określonego wzorem poprzednim i z wektora, którego kierunek pokrywa się z kierunkiem wektora \bar{M}_v a długość jego równa się wyrazowi $\frac{dM_v}{dt}$; pochodne te są przedstawione na rysunku 95-tym.



Rys. 95.

Jeżeli literą \bar{p} oznaczymy wektor jednostkowy o kierunku wektora \bar{M}_v , to całkowitą pochodną wektora momentu ilości ruchu, gdy obrót jest zmienny, wyrazimy wzorem

$$\frac{d\bar{M}_v}{dt} = v \bar{M}_v \cdot \bar{\varphi} + \frac{dM_v}{dt} \cdot \bar{p} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (373)$$

W szczególnym przypadku, który rozpatrywaliśmy poprzednio i w którym długość wektora \bar{M}_v była stałą, wyraz drugi prawej strony tego równania wypadnie, i otrzymamy wzór, wyprowadzony bezpośrednio dla tego przypadku.

W danym przypadku równanie momentu ilości ruchu względem bieguna, obranego w punkcie F , jest zgodnie z równaniem dynamicznem 276-tem, następujące:

$$\overline{M}_{G_o} = \frac{d\overline{M}v}{dt} \quad (374)$$

w którym \overline{M}_{G_o} oznacza wektor momentu siły odporowej G_o względem bieguna, obranego w F . Z równania tego wynika, że wektor ten jest prostopadły do płaszczyzny (M_o, φ) , i że posiada zwrot zgodny ze zwrotem obrotu tej płaszczyzny, siła przeto G_o leży w tej płaszczyźnie, obraca się razem z nią i wywołuje moment dodatni względem bieguna F , jak pokazuje rys. 96-ty. Ażeby przeto obliczyć wartość tego momentu, należy wyznaczyć najpierw położenie i wielkość wektora \overline{M}_o . W tym celu obierzemy układ prostokątny osi spólrzędnych (x, y, z) z początkiem w obranym biegunie i z osią z wzdłuż osi obrotu i z osiami x i y dowolnie obranymi w płaszczyźnie, prostopadłą do osi z ; rys. 96-ty.

Rzuty wektora tego momentu ilości ruchu na osi spólrzędnych, zgodnie ze wzorami 256—257 i 258-ym, są kolejno równe wartościom:

$$-I_{1,3} \cdot \varphi; \quad -I_{2,3} \cdot \varphi; \quad I_z \cdot \varphi \quad (375)$$

Wartości te dla uwidocznienia rysunku odłożono na dodatnich osiach x i y . Przypadek ten będzie zgodny z rzeczywistością, jeżeli momenty odśrodkowe bryły są odjemne; co nastąpi gdy np. bryła znajdzie się w całości lub odpowiednią częścią w ósemce $(-x, -y, +z)$.

Długość promienia koła, zakreślonego końcem wektora \overline{M}_o , wyrazimy przeto wzorem:

$$h = \varphi \cdot \sqrt{I_{1,3}^2 + I_{2,3}^2}; \quad (376)$$

a wartość momentu względem F siły G_o wyrazimy iloczynem z promienia koła i prędkości φ ; t. j. wzorem:

$$M_{G_o} = \varphi^2 \cdot \sqrt{I_{1,3}^2 + I_{2,3}^2}; \quad (377)$$

zwrot zaś jego strzałki jest zgodny ze zwrotem prędkości punktów obracającej się bryły. Siła przeto

$$G_o = \frac{1}{l} \cdot \varphi^2 \sqrt{I_{1,3}^2 + I_{2,3}^2}.$$

Położenie płaszczyzny (M_o, φ) , w której działa siła G_o , wyznacza kąt α' rys. 96-ty, który obliczymy ze wzoru:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{-I_{2,3}}{-I_{1,3}} \quad (378)$$

Obliczmy teraz siły odporowe łożysk, gdy na bryłę działają siły zewnętrzne, zmieniające jej prędkość obrotową. Sposób tego obliczenia jest zasadniczo taki sam, jaki stosowaliśmy poprzednio; zachodzą tylko zmiany formalne; a mianowicie, równanie momentów, t. j. rów. 374-te, zmieni się o tyle, że przybędzie po lewej jego stronie wyraz momentu sił zewnętrznych, z prawej zaś wyraz pochodnej długości wektora momentu ilości ruchu, zgodnie ze wzorem 373-cim paragrafu poprzedniego. Oznaczywszy siły odporowe w tym ogólnym przypadku literami \overline{F} i \overline{G}

(bez wskaźników); napiszemy równanie momentów względem bieguna, obranego w punkcie F , w sposób następujący:

$$\Sigma \bar{M}_{P, k} + \bar{M}_G = v \bar{M}_v \cdot \bar{\varphi} + \frac{dM}{dt} v \cdot \bar{\mu}; \quad (379)$$

z którego wyznaczyć można drogą rzutowania jego na osi współrzędnych szukany moment \bar{M}_G ; a następnie siłę \bar{G} .

W celu jednakże unaocznienia sobie wpływu poszczególnych czynników na powstawanie sił odporowych; wyobrazimy sobie, że każda z sił odporowych złożona jest z dwójakiego rodzaju składowych; ze składowych, wywołanych:

1) działaniami tych składowych sił zewnętrznych, które nie wpływają na ruch obrotowy bryły, a jedynie wywołują siły odporowe łożysk; te siły odporowe nazwiemy **statycznymi**; i

2) działaniami sił bezwładności jakie powstają w punktach danej bryły podczas jej obrotu; t. j. działaniami sił odśrodkowych i stycznych; te składowe sił odporowych nazwiemy **kinetycznymi**. Siły odporowe kinetyczne podzielimy jeszcze w celu ułatwienia rozpatrywań na dwójakiego rodzaju składowe; na siły odporowe, wywołane siłami bezwładności odśrodkowymi i na siły odporowe, wywołane siłami bezwładności stycznymi. Wypadkowe sił odporowych statycznych i kinetycznych będą właściwymi siłami odporowymi każdego z łożysk.

Ażeby wyznaczyć składowe sił zewnętrznych, które nie wpływają na ruch bryły, a wywołują siły odporowe statyczne, przekształcimy dany układ sił zewnętrznych w sposób, wskazany w § 143-cim tomu I-go na inny, — prostszy; więcej dogodny dla naszych rozpatrywań. W tym celu obierzemy biegun przekształceń sił na osi obrotu, — w ogóle w dowolnem jej miejscu, i wyznaczmy wypadkową \bar{R} wszystkich sił zewnętrznych oraz ich moment wypadkowy \bar{M} względem tegoż bieguna; następnie wektor tego momentu rozłożymy na dwie składowe, na składową wzdłuż osi obrotu, którą oznaczymy literą \bar{M}_φ i na składową prostopadłą do niej, którą oznaczymy literą $\bar{M}_{x, y}$, jako rzut właściwego wektora momentu sił zewnętrznych na płaszczyznę (x, y) , prostopadłą do osi i przeprowadzoną przez obrany biegun przekształceń. Siła \bar{R} i moment, wyrażony wektorem $\bar{M}_{x, y}$, nie wpływają na ruch obrotowy bryły, a wywołują jedynie siły odporowe, — nazwane poprzednio statycznymi. Jeżeli biegun przekształceń obierzemy w jednym z łożysk np. w F ; to, oznaczwszy prostopadłą składową momentu sił względem tego bieguna literą $M_{x, y, F}$; otrzymamy wielkość siły odporowej, którą oznaczymy literą G_s , ze wzoru:

$$M_{x, y, F} + G_s \cdot l = 0;$$

o kierunku prostopadłym do płaszczyzny $(\bar{M}_{x, y, F}, \bar{\varphi})$.

Obliczenie tych sił odporowych może być również wykonane sposobem analitycznym, stosowanym np. w przykładzie 1-szym podanym w § 136-tym tomu I-go.

W tenże sposób przekształcimy układy sił odśrodkowych i stycznych na ich wypadkowe i na ich momenty wypadkowe, względem dowolnie obranego bieguna O , rys. 97-my. Siła odśrodkowa k -tego punktu, którą oznaczymy literą $\bar{B}_{k, o}$, wyraża się wzorem:

$$\bar{B}_{k, o} = m_k \bar{h}_k \cdot \varphi^2.$$

w którym litery h_k oznaczają odległości punktów bryły od osi obrotu. Wypadkową przeto \bar{B}_o tych sił wyrazimy wzorem:

$$\bar{B}_o = \Sigma (m_k \bar{h}_k \cdot \varphi^2);$$

a zważywszy, że

$$\Sigma (m_k \bar{h}_k) = m \bar{h}_s,$$

i że wartość φ jest w każdej chwili wartością stałą dla wszystkich punktów danej bryły wyrazimy tę wypadkową wzorem:

$$\bar{B}_o = m \bar{h}_s \cdot \varphi^2; \dots \dots \dots (380)$$

z punktem przyłożenia w obranym punkcie przekształceń.

Ze wzoru tego wyznaczyć można wektor wypadkowej sił odśrodkowych ze znanej prędkości obrotowej bryły oraz z wielkości i kierunku wektora \bar{h}_s ; który jest znany, jeżeli znane jest położenie bryły względem osi obrotu.

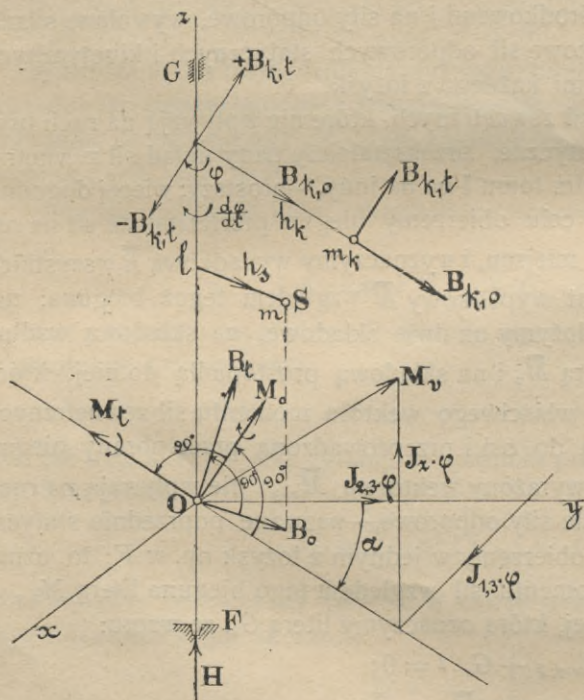
Wypadkową sił bezwładności stycznych obliczymy z wypadkowej sił odśrodkowych, zważywszy, że kierunek siły stycznej każdego punktu danej bryły jest

prostopadły do kierunku siły odśrodkowej tegoż punktu; a wielkości obydwóch tych sił są w każdej chwili do siebie proporcjonalne; wartość bowiem bezwzględna siły stycznej k -tego punktu, którą oznaczmy literą $B_{k,t}$.

$$B_{k,t} = m h_k \frac{d\varphi}{dt};$$

wieloboki przeto tych sił są do siebie podobne; a kierunki ich boków wzajemnie prostopadłe; wypadkowe przeto tych sił są również do siebie proporcjonalne i prostopadłe. Wartość zatem wypadkowej sił stycznych, którą oznaczmy literą B_t , obliczymy bezpośrednio ze wzoru 380-go, podstawiając zamiast czynnika φ^2 czynnik $\frac{d\varphi}{dt}$ i otrzymamy

$$B_t = m h_s \cdot \frac{d\varphi}{dt} \dots (381)$$



Rys. 97.

Kierunek tej wypadkowej jest prostopadły do kierunku wektora h_s , a zwrot jej jest przeciwny zwrotowi prędkości środka masy. Ze wzoru przeto 380-tego i 381-ego obliczyć można wypadkowe sił bezwładności; porówn. rys. 97-my.

W celu obliczenia momentu sił odśrodkowych, wystawimy w obranym biegu- nie przekształceń wektory momentów sił odśrodkowych oddzielnych punktów,

a wypadkowa ich będzie momentem sił odśrodkowych. Wektor tego momentu musi być prostopadły do osi; wszystkie bowiem składowe wektory są do niej prostopadłe. Droga przeto tych poszczególnych obliczeń można znaleźć szukany wektor; pominiemy jednakże te obliczenia; natomiast skorzystamy bezpośrednio z równania momentów ilości ruchu; t. j. z równania 211-go. W tym celu weźmiemy pod uwagę twierdzenie ogólne o momentach sił bezwładności, wyrażone równaniem 84-tem; i otrzymamy, że moment sił odśrodkowych

$$\bar{M}_o = -v \bar{M}_v \cdot \bar{\varphi};$$

a wartość jego

$$M_o = \varphi^2 \sqrt{I_{1,3}^2 + I_{2,3}^2}; \dots \dots \dots (382)$$

zwrot zaś jest przeciwny zwrotowi prędkości końca wektora M_v ; porówn. rys. 97-my.

Wektory momentów sił stycznych oddzielnych punktów danej bryły są pochylone względem osi obrotu; wypadkowy ich przeto wektor jest wogóle również pochylony względem tej osi. Ponieważ dla obliczenia sił odporowych wystarcza znajomość tylko tej składowej wektora momentu, która wywołuje siły odporowe (ten sposób rozumowania stosowaliśmy przy obliczeniu sił odporowych statycznych), zajmiemy się przeto bezpośrednio obliczeniem tylko tej składowej. W tym celu przekształcimy dany układ sił odśrodkowych na inny, jemu równowarty, w ten sposób, że przeprowadzimy przez każdy punkt danej bryły płaszczyznę, prostopadłą do osi; a w punktach przecięcia się tych płaszczyzn z osią obrotu przyłożymy po dwie siły $\pm B_{k,t}$, rys. 97-my, równoważące się, równoległe i równe siłom stycznym odpowiednich punktów; w ten sposób zamiast sił z punktami przyłożenia w oddzielnych punktach bryły, otrzymamy układ par sił, $(B_{k,t}, -B_{k,t})$ i układ oddzielnych sił $+B_{k,t}$ z punktami przyłożenia na osi i równych siłom stycznym oddzielnych punktów danej bryły. Momenty par tych sił nie wpływają na odpory łożysk; w pojęciach bowiem d'Alembert'a równoważą się one z momentem, względem osi, sił zewnętrznych; a równanie ich równowagi jest równaniem ruchu danej bryły. Siły zaś, przyłożone do osi, wywołują odpory w łożyskach i nie wpływają na ruch bryły. Siły te jak każdy układ sił sprowadzić można do siły wypadkowej \bar{B}_t , którą już wyznaczyliśmy poprzednio i do ich momentu \bar{M}_t , który obecnie obliczymy w następujący sposób. Siły styczne oddzielnych punktów, które przecinają oś, są prostopadłe do sił odśrodkowych tychże punktów i prostopadłe do osi obrotu; wektory przeto momentów każdej z nich są prostopadłe do takichże wektorów sił odśrodkowych; wypadkowy przeto moment tych sił jest prostopadły do wektora momentu sił odśrodkowych względem tegoż bieguna; a ponieważ wartości sił stycznych są proporcjonalne do wartości sił odśrodkowych tychże punktów, a ramiona ich względem obranego bieguna są wspólne, wartość przeto momentu sił stycznych, prostopadłego do osi obrotu, jest proporcjonalny do takiegoż momentu sił odśrodkowych; obliczymy go przeto z równania 383-ego i wyrazimy wzorem:

$$M_t = \frac{d\varphi}{dt} \sqrt{I_{1,3}^2 + I_{2,3}^2} \dots \dots \dots (383)$$

Siłę wreszcie odporową sztorca osi, oznaczona na rys. 97-ym literą H , która jest wywołaną tylko składowymi sił zewnętrznymi w kierunku osi; obliczymy z równania:

$$\Sigma P_{k,z} + H = 0;$$

wszystkie bowiem siły bezwładności są prostopadłe do osi obrotu i nie posiadają rzutów na tę oś.

Działania przeto sił bezwładności bryły, obracającej się około danej osi sprowadzić można, porówn. rys. 97-my:

1) do dwóch sił \overline{B}_o i \overline{B}_t , przyłożonych do obranego punktu przekształceń i wyrażonych wzorami 380-ym i 381-ym; z których siła odśrodkowa \overline{B}_o jest równoległą do prostopadłej opuszczonej ze środka masy bryły na oś obrotu; siła zaś styczna \overline{B}_t jest do niej prostopadłą, i posiada zwrot przeciwny zwrotowi, jaki posiada w danej chwili przyśpieszenie środka masy;

2) do działania momentów sił odśrodkowych i stycznych. Wektor \overline{M}_o momentu sił odśrodkowych jest prostopadły do płaszczyzny (M_o, φ) i posiada wielkość, wyrażoną wzorem 382-gim, a zwrot przeciwny zwrotowi prędkości końca wektora \overline{M}_o . Wektor zaś \overline{M}_t momentu sił stycznych, wywołujących tylko siły odporowe łożysk, jest prostopadły do poprzedniego i wartość jego wyraża wzór 383-ci; a zwrot jest przeciwny zwrotowi dodatnich przyrostów rzutu wektora \overline{M}_o na płaszczyznę prostopadłą do osi.

Wypadkowe sił bezwładności i wektory ich momentów są przedstawione na rys. 97-ym dla punktu przekształceń O , dowolnie obranego na osi obrotu. Po takim przekształceniu sił bezwładności, obliczenie sił odporowych sprowadza się do obliczenia sił odporowych pręta, podpartego w punktach F i G , na który działają dwie siły prostopadłe do niego, przyłożone w pewnym obranym punkcie na jego osi i dwa momenty.

Obliczenie sił odporowych uprości się wogóle, gdy obierzemy biegun przekształceń sił i biegun momentów w jednym z łożysk osi; wtedy bowiem otrzymamy bezpośrednio siły odporowe; jakie występują w łożysku drugim. Dla obliczenia np. siły odporowej w G obierzemy biegun w F ; a z równań

$$G_o \cdot l + M_o = 0; \quad G' \cdot l + M_t = 0;$$

obliczymy wartości sił odporowych; zważywszy przytem, że siła G_o leży w płaszczyźnie (M_o, φ) ; siła zaś G' w płaszczyźnie prostopadłej do niej.

W szczególnym przypadku, jeżeli oś obrotu posiada punkt bezwładności dla danej bryły (warunki, przy których to następuje, podane są w § 114-ym), to momenty sił odśrodkowych względem bieguna, obranego w tym punkcie zanikają; wartości bowiem momentów odśrodkowych $I_{1,3}$ oraz $I_{2,3}$ danej bryły względem układu osi spórzędnych, przeprowadzonych przez ten punkt, w myśl danego określenia równają się zeru. Jeżeli przeto oś obrotu posiada punkt bezwładności dla danej bryły, to w tym tylko szczególnym przypadku działanie sił bezwładności sprowadza się do działania tylko dwóch sił: siły odśrodkowej i siły stycznej z punktami przyłożenia w punkcie bezwładności.

W myśl przeto twierdzenia podanego w § 113-tego tego tomu dla przypadku 4-go, siły bezwładności bryły, obracającej się około osi, równoległych do jednej z osi głównych, wystawionych w środku masy tej bryły, sprowadzić można do siły wypadkowej z punktem przyłożenia w punkcie bezwładności. Teżże właściwości podlegają również siły bezwładności; gdy np. bryła dana jest symetryczną względem płaszczyzny, a oś obrotu jest prostopadłą do tej płaszczyzny. Do tego wniosku w tym przypadku łatwo również dojść bezpośrednio; siły bowiem odśrodkowe są w tym razie symetryczne względem płaszczyzny symetrii; wypadkowa ich przeto leżeć musi w tej płaszczyźnie; a wypadkowa sił stycznych musi być do niej prostopadłą.

Z tychże powodów, w myśl § 119-tego, suma momentów sił bezwładności figury płaskiej materialnej, obracającej się około osi, leżącej w płaszczyźnie tej figury względem bieguna, obranego w rzucie środka masy na oś obrotu, równa się zeru. Jeżeli przeto na bryłę taką nie działają siły zewnętrzne, lub też działają siły posiadające wypadkową, przechodzącą przez punkt bezwładności, to w celu unieruchomienia takiej osi wystarczy podeprzeć ją tylko w punkcie bezwładności; występująca bowiem siła odporowa równoważyć się będzie z siłami bezwładności.

Jeżeli oś, posiadająca punkt bezwładności, przechodzi przez środek masy, to nie tylko suma momentów sił bezwładności względem bieguna, obranego w tym punkcie, zniknie, lecz i siły bezwładności tak styczne jak i odśrodkowe znikną, porów. wzory 380 i 381-szy; i to zachodzi nie tylko względem bieguna przekształceń, obranego w punkcie bezwładności, lecz również, — na podstawie twierdzenia, dowiedzionego w § 114-tym dla przypadku 2-go, — względem każdego innego bieguna obranego na tej osi; czyli w danym przypadku siły bezwładności jak i ich momenty wzajemnie się równoważą i nie działają na oś obrotu; a bryła raz obrócona około takiej osi, obracać się będzie bez jej podtrzymywania; oś taką nazwano *osią swobodną* danej bryły.

Ponieważ oś, która posiada punkt bezwładności dla danej bryły i przechodzi przez środek jej masy, jest jedną z osi głównych elipsoidy środkowej tej bryły; przeto każda bryła materialna posiada trzy osi swobodne; które pokrywają się z kierunkami średnic głównych środkowej elipsoidy bezwładności.

Niezmiennosc obrotu około osi głównej należy uważać jako szczególny wyraz bezwładności materji.

8. Ruch kulisty bryły materialnej bez udziału sił zewnętrznych, lecz z prędkością początkową.

160. Zadanie. Jeżeli środek masy pewnej bryły materialnej unieruchomimy w przestrzeni w ten sposób, że bryła będzie mogła swobodnie się kręcić około tego punktu i jeżeli następnie nadamy jej pewien ruch początkowy, to bryła ta wykonywać będzie pewien ściśle określony ruch kulisty, który mamy obliczyć; zakładając, że na daną bryłę po nadaniu jej ruchu początkowego nie działają żadne siły

zewnątrznie; a jeżeli działają, to — tylko takie, które nie dają momentu względem bieguna, obranego w punkcie podparcia; z tego też względu przyjęliśmy, że bryła dana jest podparta w środku swej masy; unikamy bowiem w ten sposób momentu jej siły ciężkości względem bieguna obranego w środku masy.

Zadanie to jest podobne do zadania, jakie rozpatrywaliśmy w § 127-ym, z tą tylko różnicą, że w tamtem zadaniu bryła mogła obracać się tylko około osi nieruchomej; i dla tego przypadku okazaliśmy, że bryła taka obrócona raz około osi nieruchomej, i pozostawiona sama sobie, obracać się dalej będzie około tej osi ruchem jednostajnym. W danym zaś przykładzie, w którym bryła ma tylko jeden punkt unieruchomiony, znane jest położenie osi chwilowego obrotu tylko w początku jej ruchu; podczas zaś dalszego ruchu położenie jej będzie się zmieniać, wskutek występujących, podczas obrotu bryły, momentów sił bezwładności; które, chociaż występują również w bryle obracającej około osi nieruchomej, równoważą się one jednakże z momentami sił odporowych, występujących w łożyskach i nie powodują zmiany położenia tej osi. Zadanie przeto ruchu kulistego tak wogóle, jak i w tym przypadku polega na określeniu miejsca geometrycznego osi chwilowych obrotów w bryle i w przestrzeni; inaczej mówiąc, zadanie to polega stosownie do § 71-go tomu I-go, na określeniu stożka ruchomego, związanego z daną bryłą, oraz—stożka nieruchomego, po którym toczy się stożek ruchomy.

Rozwiązanie. Ruch kulisty posiada trzy stopnie swobody, trzy przeto równania algebraiczne lub jedno równanie wektorowe wystarczy do określenia tego ruchu; równaniem tem jest równanie momentów. W danym przykładzie moment sił zewnętrznych względem obranego bieguna, w punkcie nieruchomym, równa się zeru; równanie przeto dynamiczne jest następujące:

$$\frac{d\overline{M}_v}{dt} = 0;$$

którą po scałkowaniu przedstawi się w postaci:

$$\overline{M}_v - \overline{M}_{v,0} = 0.$$

Równanie to wyraża, że wektor momentu ilości ruchu danej bryły, jest w każdej chwili podczas ruchu bryły wielkością stałą co do kierunku zwrotu i długości.

Pomimo więc tego, że oś chwilowego obrotu może zmieniać swój kierunek w przestrzeni, wektor \overline{M}_v pozostawać będzie nieruchomym. Bryła zatem podczas ruchu tak się będzie ustawiać w przestrzeni, że wektor momentu, względem punktu nieruchomego, ilości jej ruchu pozostawać będzie nie zmieniony, i z tego warunku należy określić ruch tej bryły; t. j. należy wyznaczyć miejsce geometryczne osi chwilowych obrotów. W tym celu zastosujemy najpierw równanie równowartości pracy i energii kinetycznej, jako jedno z równań algebraicznych równania momentu ilości ruchu.

Ponieważ w danym przykładzie praca sił zewnętrznych równa się zeru, przeto zachodzi tu również przypadek zachowania energii kinetycznej danej bryły.

Jeżeli wektorem $\overline{\varphi}$ wyrazimy prędkość obrotową bryły w dowolnej chwili, a literą T_0 wartość energii kinetycznej tej bryły w początku ruchu, to warunek zachowania energii wyrazimy stosownie do § 264-go wzorem:

$$\frac{1}{2} I_{\varphi} \cdot \varphi^2 = T_0;$$

w którym I_φ oznacza moment bezwładności danej bryły względem osi, około której bryła obraca się w danej chwili. Z równania tego obliczymy wartość prędkości obrotowej:

$$\varphi = \frac{V\sqrt{2T_0}}{VI_\varphi} \dots \dots \dots (384)$$

a ponieważ nie znany jest jej kierunek, przeprowadzimy przeto w myśli przez dany punkt pęk osi, i na każdej z nich od punktu nieruchomego odetniemy, odpowiednią tej osi, wartość prędkości, obliczoną z powyższego wzoru; a w utworzonym w ten sposób pęku wektorów znajdując się będą i wektory, określające prędkości obrotowe, jakie dana bryła w rzeczywistości wykonywać będzie. Ażeby te wektory odnaleźć zbadajmy najpierw postać powierzchni, jaką tworzą końce tych wektorów; w tym celu porównajmy wzór 384-ty ze wzorem, podanym w § 112-ym tego tomu:

$$\rho = \frac{\lambda^2}{VI_i};$$

określającym elipsoidę bezwładności bryły, zbudowanej w punkcie nieruchomym; a zważywszy, że I_i oznacza w tym wzorze moment bezwładności bryły względem osi, przechodzącej przez promień wodzący ρ , a I_φ we wzorze 384-ym oznacza także moment względem osi obrotu φ ; przyjdziemy do wniosku, jeżeli przyjmiemy nieokreśloną w tym wzorze wielkość

$$\lambda^2 = V\sqrt{2T_0};$$

że $\bar{\varphi} = \bar{\rho}$.

Końce przeto wektorów chwilowych prędkości obrotowych danej bryły leżą na powierzchni elipsoidy bezwładności, zbudowanej w punkcie nieruchomym, jeżeli dla λ przyjmiemy wielkość, określoną powyższym wzorem.

Ażeby otrzymać drugie równanie algebraiczne, wyrażające związek pomiędzy prędkością obrotową a momentem ilości ruchu, rzutujemy wektor $\bar{\varphi}$ na kierunek wektora \bar{M}_v ; a oznaczywszy wielkość tego rzutu literą φ' , wyrazimy ją, stosownie do określenia iloczynu skalarnego, podanego we wzorze 153-cim § 191-ego tomu I-go, równaniem: (1)

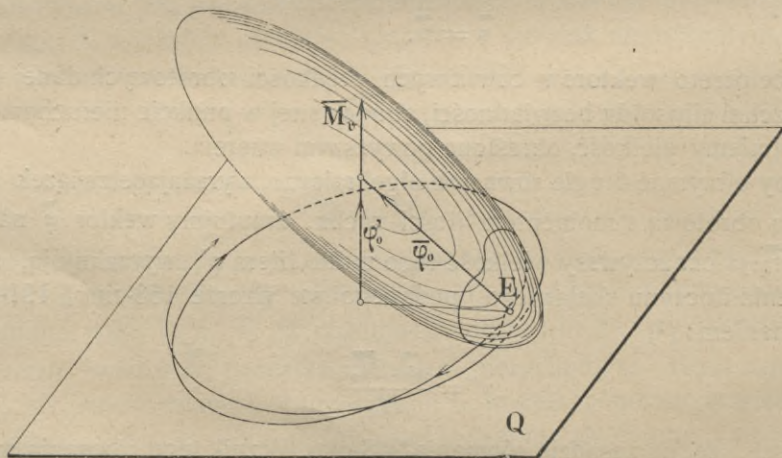
$$\varphi' = \frac{\bar{\varphi} \cdot \bar{M}_v}{M_v};$$

a zważywszy, że, na zasadzie równania 268-ego, licznik tego równania wyraża podwójną wartość energii kinetycznej, która w danym przykładzie jest stałą, a wielkość M_v jest również stałą, jako długość wektora niezmiennego; przeto przyjdziemy do wniosku, że rzuty φ' wektorów $\bar{\varphi}$, zmiennych co do długości i położenia podczas ruchu bryły, na kierunek niezmienny wektora \bar{M}_v są stałe; a więc i równe rzutowi znanego wektora prędkości początkowej φ_0 na tenże kierunek. Gdybyśmy np. dla początkowego ruchu wyznaczyli w jakibądź sposób, odpowiadający temu

(1) gdyż stosownie do danego określenia iloczynu skalarnego $\bar{\varphi} \cdot \bar{M}_v = \varphi \cdot M_v \cdot \cos(\varphi, M_v)$.

ruchowi wektor $\overline{M}_{v,o}$; (np. z równania 262-ego) i zrzutowali na jego kierunek prędkość początkową $\overline{\varphi}_o$, wtedy otrzymalibyśmy odcinek φ'_o przez koniec którego przeprowadzona płaszczyzna Q prostopadle do kierunku $\overline{M}_{v,o}$ byłaby miejscem geometrycznym końców wszystkich nieznanych wektorów $\overline{\varphi}$; płaszczyznę Q ze względu na tę właściwość nazwano płaszczyzną nieruchomą danej bryły.

Koniec przeto wektora $\overline{\varphi}$ znajduje się podczas ruchu bryły jednocześnie na powierzchni elipsoidy bezwładności, zbudowanej w punkcie nieruchomym i na płaszczyźnie nieruchomej, przeprowadzonej przez koniec wektora φ'_o , prostopadle do kierunku $\overline{M}_{v,o}$. Ponieważ ruch bryły w każdej chwili może posiadać tylko jedną oś chwilowego obrotu, elipsoida przeto bezwładności może mieć jeden tylko punkt wspólny z płaszczyzną nieruchomą; t. j. może być do niej styczną. Podczas przeto ruchu bryły jej elipsoida bezwładności, którą uważamy za sztywno połączoną z bryłą i z nią razem się poruszającą, styka się różnymi swymi punktami z płaszczyzną nieruchomą; z czego wynika, że ta elipsoida albo ślizga się albo toczy się po tej płaszczyźnie lub też wykonywa jednocześnie obydwa te ruchy, zatrzymując jednakże swój środek w punkcie nieruchomym. Zważywszy jednakże, że punkt zetknięcia się elipsoidy z tą płaszczyzną, jako punkt osi chwilowego obrotu, nie posiada w chwili zetknięcia się z płaszczyzną żadnej prędkości; przeto przyjdziemy do wniosku, że elipsoida ta nie ślizga się po tej płaszczyźnie, lecz toczy się po niej. Ruch przeto kulisty bryły materialnej, która otrzymała pewną prędkość początkową; i na którą nie działają siły zewnętrzne lub których momenty względem



Rys. 98.

punktu podparcia równają się zero, będzie taki, że jej elipsoida bezwładności, zbudowana w punkcie podparcia i sztywno z nią związana, będzie się toczyć bez ślizgania się po płaszczyźnie nieruchomej.

Mając przeto daną bryłę w początkowym jej położeniu, oraz mając dany wektor $\overline{\varphi}_o$ początkowej jej prędkości, obliczymy

$$T_o = \frac{1}{2} \varphi_o^2 \cdot I_o, \quad \text{a stąd} \quad \lambda^2 = \sqrt{2 T_o}$$

i zbudujemy elipsoidę bezwładności, rys. 98. Następnie przez koniec wektora $\bar{\varphi}_0$, który oznaczyliśmy na tej elipsoidzie literą E , przeprowadzimy płaszczyznę styczną do tej elipsoidy; a płaszczyzna ta będzie płaszczyzną nieruchomą; gdy następnie zbudowaną w ten sposób elipsoidę toczyć będziemy po tej płaszczyźnie, pozostawiając jej środek w punkcie nieruchomym, otrzymamy ruch danej bryły, którą wyobrażamy sobie sztywno połączoną z jej elipsoidą bezwładności.

Kierunek wektora \bar{M}_0 , danego ruchu wyznaczmy, gdy z punktu nieruchomego opuścimy prostopadłą na płaszczyznę nieruchomą Q , a prostopadła ta wyznaczy kierunek wektora \bar{M}_0 , który niezmienna się podczas ruchu bryły.

Elipsoida bezwładności, tocząc się po płaszczyźnie nieruchomej, dotyka się jej różnymi punktami swej powierzchni; gdy te punkty w jakibądź sposób utrwalimy na powierzchni elipsoidy, to otrzymamy pewną krzywą; którą Poincot (twórca powyższej konstrukcji ok. 1804 r.), nazwał polodją, t. j. torem polusów, a który my nazwiemy **torem ruchomym** biegunów. Promienie, wyprowadzone z punktu nieruchomego do punktów toru tych biegunów wyznaczają stożek, który należy wyobrazić sobie sztywno połączony z daną bryłą; wszystkie tworzące tego stożka stają się kolejno osiami chwilowych obrotów bryły; jest to więc stożek ruchomy, ściśle związany z poruszającą się bryłą; o stożku tym mówiliśmy w kinematyce ruchu kulistego, w § 71-szym tomu I-szego. Punkty zetknięcia się elipsoidy z płaszczyzną nieruchomą, utrwalone na tej płaszczyźnie, wyznaczają inną krzywą; nazwaną herpolodją; a którą my nazwiemy **torem nieruchomym** biegunów. Promienie, wyprowadzone z punktu nieruchomego do punktów tego toru, utworzą stożek, który będzie stożkiem nieruchomym i którego tworzące będą kolejno osiami chwilowych obrotów bryły. Cały więc przebieg ruchu kulistego bryły można wyobrazić sobie jako toczenie się stożka ruchomego po stożku nieruchomym. Ogólny obraz tego ruchu wraz z torem nieruchomym przedstawiony jest na rys. 98-ym; przykład zaś torów ruchomych dla wszelkich prędkości początkowych przedstawiony jest oddzielnie na rys. 102-im.

W szczególnym przypadku, gdy elipsoida bezwładności jest elipsoidą obrotową, § 113-ty, p. 8-my tej części, wtedy obydwa te tory staną się kołami, i obydwa stożki będą stożkami prostymi o podstawach kołowych. Jeżeli zaś elipsoida bezwładności pewnej bryły ma postać kuli, to płaszczyzna styczna do niej przeprowadzona przez koniec wektora φ_0 jest jednocześnie prostopadłą do tego wektora; czyli kierunek momentu ilości ruchu pokrywa się z kierunkiem osi obrotu; obrót przeto takiej bryły będzie odbywał się nieustannie około osi początkowego obrotu; a tor ruchomy i tor ich nieruchomy przedstawiają się w postaci pojedynczych punktów. Takież ruch powstanie, gdy kierunek początkowej prędkości pokrywa się z kierunkami jednej z osi głównych; do tych wniosków doszliśmy również w końcu § 159-tego tomu.

Właściwości elipsoidy bezwładności wyzyskać również można w celu wyznaczenia wektora np. \bar{M}_0 , gdy dany jest ruch bryły, t. j. gdy dany jest wektor $\bar{\varphi}$; i odwrotnie; do czego również dojść można drogą analityczną, stosując równania 260-te i 262-gie.

161. Osi obrotu stateczne i niestateczne. Z tych i z poprzednich rozpatrywań wynika, § 159-ty, że gdy ós początkowego obrotu pokrywa się z kierun-

kiem jednej z głównych osi elipsoidy środkowej bezwładności danej bryły, natenczas obrót tej bryły, gdy nie działają na nią siły zewnętrzne, będzie odbywał się stale około tej osi. Każda bryła, wogóle mówiąc, posiada trzy takie osi, które wskutek tej właściwości nazwane są **osiami swobodnymi** danej bryły; gdyż osi te mogą pozostawać swobodnymi, a bryła będzie się około każdej z nich obracać, kierunki zatem osi głównych elipsoidy bezwładności, zbudowane w środku bryły są jednocześnie osiami swobodnymi danej bryły.

Osi te jednakże pomimo tych wspólnych właściwości różnią się między sobą pod względem obrotów, jakie bryła dana wykonywa, a które nazwiemy obrotami statecznymi lub niestatecznymi.

Wogóle nazywamy ruchem **statecznym** pewnej bryły taki jej ruch, który, po nieskończeniu małej zmianie ruchu początkowego, zmienia się również nieskończenie mało; i odwrotnie, — ruchem **niestatecznym** nazwiemy taki ruch, który, po takiej zmianie, doznaje skończonych zmian. Punkt np. materalny, znajdujący się w rurce, § 45-ty, na odległości x , określonej wzorem 99-tym, jest w ruchu kołowym niestatecznym; tymczasem takiż ruch punktu wahadła stożkowego, § 62-gi, jest — statecznym. Pojęcie stateczności ruchu jest przeto podobne do takiegoż pojęcia, podanego w statyce w § 171-szym tomu I-go. W naszym przykładzie obrotu bryły około jednej z osi głównych ruchem statecznym nazwiemy taki ruch, który niewiele się zmieni, jeżeli niewiele odchylimy oś początkowego obrotu od osi głównej; oś główna, około której odbywa się ruch stateczny, nazwiemy osią stateczną; w przeciwnym razie niestateczną. Zbadajmy teraz, które z osi swobodnych są stateczne, a które niestateczne. Zadanie to sprowadzić można do wyznaczenia postaci ruchomego toru biegunów, gdy jeden jego punkt jest dany. Jeżeli bowiem tor, którego jeden punkt jest dany w bliskości jednego z wierzchołków elipsoidy, otacza ten wierzchołek w bliskości; to ruch będzie stateczny, a oś taką nazwiemy stateczną; jeżeli zaś tor ten pomimo tego, że jeden jego punkt obrany został w bliskości wierzchołka, oddali się znacznie od tego wierzchołka, to ruch będzie niestateczny, a odpowiednią oś nazwiemy niestateczną. W celu przeprowadzenia tych badań przekształcimy nieco sposób wyznaczenia ruchomego toru biegunów danej bryły.

Płaszczyzna styczna, przeprowadzona do środkowej elipsoidy bezwładności w pewnym jej punkcie jest płaszczyzną nieruchomą, po której elipsoida się toczy w ten sposób, że odległość jej środka od płaszczyzny pozostaje podczas toczenia się niezmienną. Na zasadzie jednakże przemienności ruchów, str. 167-ma tego tomu, tenże tor biegunów ruchomych może być również wyznaczony, przez toczenie płaszczyzny stycznej po elipsoidzie w ten sposób, ażeby jej odległość od środka elipsoidy była stałą. Toczenie takie można wykonać w ten sposób, że ze środka elipsoidy opiszemy kulę o promieniu φ'_0 ; a każda płaszczyzna dotykająca jednocześnie tej kuli i elipsoidy, odpowiadać będzie powyższemu warunkowi; w ten sposób punkty zetknięcia się płaszczyzny z elipsoidą wyznaczą na elipsoidzie tor ruchomy biegunów. Zastosujmy ten sposób do wyznaczenia ruchomego toru biegunów, gdy oś początkowego obrotu tworzy niewielki kąt z jedną z osi głównych i w tym celu oznaczmy długości półśrednic elipsoidy bezwładności danej bryły literami a, b, c i przyjmijmy, że

$$a > b > c;$$

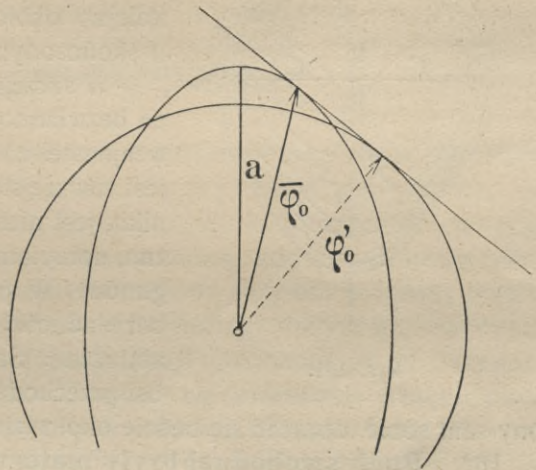
co wogóle zawsze możemy przyjąć za wyjątkiem szczególnych przypadków, o których będzie jeszcze mowa.

Gdy $\bar{\varphi}_0 = \bar{a}$; t. j. gdy kierunek osi obrotu początkowego pokrywa się z kierunkiem największej półśrednicy elipsoidy, to

$$\varphi'_0 = \varphi_0 = a;$$

a płaszczyzna nieruchoma dotyka się do elipsoidy i do kuli, zakreślonej promieniem φ'_0 w jednym wspólnym punkcie; tor biegunów w tym przypadku jest punktem pojedynczym.

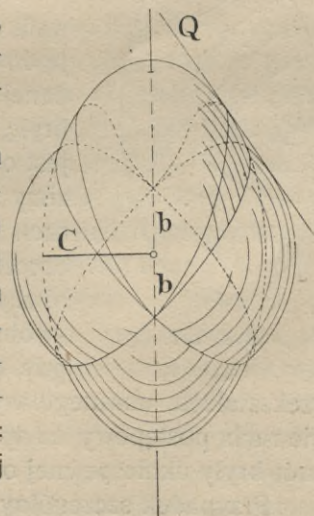
Jeżeli zaś kierunek osi $\bar{\varphi}_0$ tworzy niewielki kąt z kierunkiem półśrednicy a , to promień φ'_0 kuli będzie mniejszy od tej półśrednicy; i wierzchołek elipsoidy wyłoni się z powierzchni tej kuli, rys. 99-ty; a tor biegunów, który otrzymamy, tocząc płaszczyznę po obydwóch powierzchniach, znajdować się będzie w bliskości wierzchołka elipsoidy.



Rys. 99.

Gdy zaś zmniejszać będziemy promień φ'_0 kuli, wtedy tor biegunów będzie się oddalał od wierzchołków największej średnicy, i pewną swą częścią zbliżać się będzie do wierzchołków średniej półśrednicy elipsoidy; w przypadku zaś, w którym średnica kuli równać się będzie średniej półśrednicy b , obydwie gałęzie toru biegunów, leżące na symetrycznych połowach elipsoidy, połączą się z sobą; rys. 100-ny. Gdy następnie średnicę kuli uczynimy mniejszą od średniej średnicy elipsoidy, rys. 101-szy; wtedy tor biegunów zacznie okrężyć najmniejszą średnicę elipsoidy, i wreszcie, gdy średnica kuli stanie się równą najmniejszej średnicy; tor biegunów pokryje się z jej wierzchołkami.

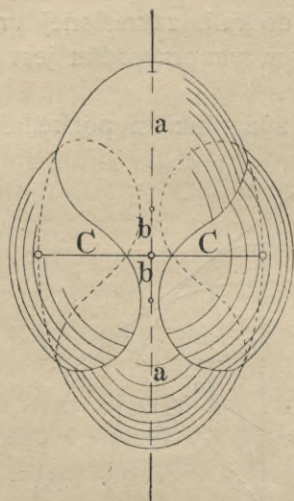
Tory te dla różnych średnic kul, t. j. dla różnych położen początkowych prędkości obrotowych, przedstawione są na rys. 102-im. Ze sposobu tworzenia tych torów wnioskujemy, że przez każdy punkt powierzchni elipsoidy przechodzi jeden tor biegunów; za wyjątkiem wierzchołków średniej półśrednicy, w których przecinają się dwa symetryczne tory. Wniosek ten ma takie znaczenie kinematyczne, że do każdej osi obrotu chwilowego, należy jeden ściśle określony stożek ruchomy; a więc powstanie jeden ściśle określony ruch danej bryły, po nadaniu jej pewnego obrotu początkowego.



Rys. 100.

Stosując te rozpatrywania do naszego zapytania o stateczność osi, przyjdziemy do wniosku, że osi,

pokrywające się z kierunkiem największej i najmniejszej średnicy, są stateczne; osi bowiem obrotu początkowego, obrane w bliskości tych półśrednic, posiadają stożki o małym otworze; oś zaś, pokrywająca się ze średnią średnicą elipsoidy, jest niestateczną; najmniejsze jej bowiem odchylenie od kierunku tej średnicy, daje stożek



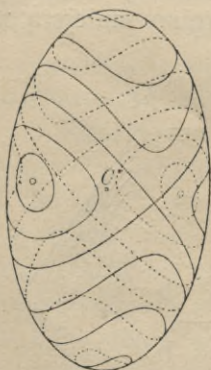
Rys. 101.

o znacznym otworze. Niestateczność ta ujawni się tem, że bryła obrócona około osi, tworzącej niewielki kąt z kierunkiem osi średniej średnicy elipsoidy bezwładności, i pozostawiona sama sobie, niebędzie się obracała dalej około osi, pozostającej w bliskości tej średnicy; lecz będzie się obracała kolejno około osi, które tworzą w bryle stożek o skończonym otworze.

W szczególnym przypadku, w którym elipsoida bezwładności pewnej bryły posiada dwie osi wzajemne równe, obrót bryły około osi trzeciej jest zawsze stateczny; około zaś osi, leżącej w równiku, jest niestateczny; o czem przekonać się można, uprzytomniając sobie tworzenie się toru biegunów. W przypadku zaś, w którym elipsoida bezwładności jest kulą, wszystkie osi obrotu są stateczne. Sześcian np. obrócony około dowolnej osi przechodzącej przez jego środek, i pozostawiony

sam sobie, obracać się będzie około tej samej osi.

162. Ruch swobodnej bryły materalnej. Ogólne rozwiązanie tego zadania przedstawia znaczne trudności matematyczne; damy przeto tutaj tylko pewne wskazówki ruchu takiej bryły i rozwiążemy je dla szczególnego przypadku, mianowicie, dla przypadku w którym moment sił zewnętrznych względem środka masy danej bryły równa się zeru.



Rys. 102.

Jużeśmy zwrócili uwagę na wynik naszych rozprawy, wskazujący, że ruch środka masy bryły, na którą działają dowolne siły, porusza się jak punkt materalny o masie danej bryły; gdy wyobrazimy sobie, że siły działające na tę bryłę, są do tego punktu przyłożone. Przez ruch tego środka jest określony jeden z ruchów składowych, na jakie wyobrazimy sobie rozłożony ruch bryły, a mianowicie jest określony ruch postępowy danej bryły. Ażeby następnie obliczyć ruch obrotowy bryły, t. j. ruch względny, § 92-gi, zastosujemy równanie 277-me. Działanie przeto sił, przyłożonych do bryły swobodnej, unaocznimy sobie, porówn. § 143-ci tomu I-go, gdy przekształcimy układ danych sił względem bieguna

przekształceń, obranego w środku jej masy; a wypadkowa tych sił wywoływać będzie ruch postępowy bryły; wypadkowy zaś moment względem tego środka — obrót bryły około pewnej osi, przechodzącej przez ten środek.

Przypadek szczególny ruchu bryły swobodnej, gdy moment sił względem środka masy równa się zeru, obliczyliśmy w §-cie poprzednim. Jeżeli przeto na

swobodną bryłę materalną, posiadającą pewną początkową prędkość obrotową, działają siły, których moment względem środka jej masy równa się zeru, to ruch jej będzie złożony z ruchu postępowego, określonego ruchem środka masy; i z ruchu kulistego około środka masy, określonego ruchem toczącej się elipsoidy bezwładności po płaszczyźnie nieruchomej; jak to opisaliśmy w § poprzednim.

W następnym rozdziale rozpatrzemy jeszcze jako przypadek szczególny ruch bryły, zwanej giroskopem, na którą działa siła ciężkości.

9. O giroskopach.

163. Określenia i uwagi ogólne. Każdą bryłę materalną, symetryczną względem pewnej osi i obracającą się ze znaczną prędkością około tej osi, nazywać będziemy giroskopem. Przykładem giroskopu jest: koło rozpędowe, obracające się na wale;—zabawka, zwana bakiem;—kula ziemską, gdy rozpatrujemy tylko jej ruch obrotowy dzienny i t. p. Oś symetrii giroskopu nazywać będziemy jego osią; oś tę wyobrazimy sobie, jako prostą sztywno związaną z danym giroskopem i poruszającą się razem z nim. Ruch obrotowy giroskopu około tej osi nazywać będziemy dla odróżnienia od obrotów około innych osi **wirowaniem** danego giroskopu; — giroskop może nie tylko wirować, lecz i obracać się około innej osi, dowolnie obranej w przestrzeni; obrót ten nazwiemy wtedy obrotem dodatkowym. Jeżeli giroskop wiruje i jednocześnie obraca się około innej osi, to właściwy jego obrót odbywa się około osi, pokrywającej się z kierunkiem wypadkowej obydwóch prędkości, stosownie do prawideł, wskazanych w § 87-ym tomu I-go.

Giroskop jest przeto szczególnym przypadkiem bryły materalnej, obracającej się około jednej ze swych osi głównych statecznych; z tą tylko różnicą, że w giroskopie prędkość wirowania bywa bardzo znaczną w stosunku do innych jego obrotów dodatkowych, jakie on otrzymać może; — skutek czego możemy przyjąć z pewnym przybliżeniem, że kierunek właściwej prędkości obrotu giroskopu lub też, że kierunek wektora momentu jego ilości ruchu lub wreszcie, że kierunki obydwóch tych wektorów pokrywają się podczas ruchu giroskopu z kierunkiem jego osi. Jeżeli zaś dla większej dokładności przyjmiemy, że kierunki tych wektorów nie pokrywają się z osią giroskopu; to w każdym razie przyjąć będziemy mogli, że kąt ich odchylenia od osi giroskopu są niewielkie; co znów pozwoli usunąć z obliczenia drugie i wyższe potęgi wielkości, wyrażających te odchylenia. Uproszczenia te niepomiernie ułatwiają rozpatrywania ruchu giroskopów; którego dokładne obliczenia rozbijają się o nieprzezwyciężone trudności pod względem matematycznym.

Prawa fizyczne, jakie rządzą ruchami brył wirujących, są oczywiście te same, jakie rządzą ruchami brył zwykłych; ujawniają się one w inny tylko sposób, wskutek znacznej prędkości wirowania. Bezwładność np. punktu materalnego ujawnia się w ten sposób, że po nadaniu mu pewnej prędkości i pozostawieniu go samemu sobie, trwać on będzie w ruchu prostolinijnym i jednostajnym, określonym prędkością

początkową; ażeby zaś zmienić ten ruch, należy przyłożyć do tego punktu pewną siłę której wielkość powinna wzrastać z powiększeniem masy punktu i jego prędkości (uprzytomnijmy sobie np. jak trudnem byłoby zmienić kierunek wyrzuconego z działa pocisku podczas ruchu pocisku). W giroskopach zaś ta sama bezwładność materji utrzymuje jego oś w niezmienionym kierunku w przestrzeni (kinetycznej) i stawia pewien opór zmianie tego kierunku; bo chociaż siły dośrodkowe, działające na punkty giroskopu wirującego zmieniają ruchy prostolinijne tych punktów na kołowe; zmieniają je jednakże tylko w płaszczyznach prostopadłych do osi wirowania; ażeby zaś wyprowadzić je z tych płaszczyzn, należy przyłożyć do giroskopu siły zewnętrzne; a właściwie należy przyłożyć pewien moment sił, którego wielkość o tyle powinna być większą, o ile (jak to łatwo przewidzieć, a co następnie dowiedzimy) prędkość wirowania i moment bezwładności giroskopu względem osi wirowania jest większy. Bezwładność przeto materji w giroskopie wirującym ujawnia się pewną sztywnością położenia osi wirowania w tenże sposób, w jaki ujawnia się sztywność kierunku ruchu punktu materialnego swobodnego; sztywnym bowiem nazwać również można kierunek ruchu punktu materialnego swobodnego. Ponieważ w powyższy sposób pojęta sztywność osi wirującego giroskopu jest bezpośrednim wynikiem bezwładności materji; z właściwości tej przeto skorzystać można do wyznaczenia układu kinetycznego, porówn. § 64-ty części 1-szej. Pomiędzy przeto wielu zastosowaniami giroskopów, stosują go również do wyznaczenia stałych kierunków w przestrzeni.

Jeżeli punkt materialny jest nieswobodny, jeżeli np. jest on zmuszony posuwać się po torze krzywolinijnym, to bezwładność tego punktu ujawni się pewnym naciskiem, pewnym działaniem punktu na tor. W tenże sposób ujawnia się bezwładność giroskopu, gdy zechcemy np. odchylić oś jego od położenia, jakie ona zajmuje w danej chwili w przestrzeni kinetycznej. Jeżeli np. giroskop, którego oś umieścimy w łożyskach, wiruje swobodnie, t. j. obraca się tylko około osi własnej; to w myśl wniosków § 159-go tego tomu, nie wywiera on żadnego innego działania na te łożyska, oprócz ciśnienia statycznego; jeżeli zaś giroskopowi wirującemu nadamy w jaki bądź sposób obrót dodatkowy; to wywierać on będzie za pośrednictwem swych łożysk pewne działanie na czynniki, wywołujące ten obrót dodatkowy; osią bowiem jego obrotu nie będzie już oś symetrii, — oś główna, lecz — oś inna; działanie to nazwiemy działaniem danego giroskopu na łożyska. O działaniu tem mówiliśmy już na stron. § 301-ej tego tomu; obliczając siły odporowe łożysk, w których oś obrotowa bryły zmuszoną była pozostawać.

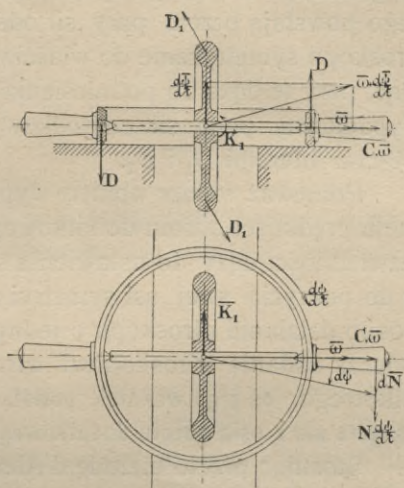
Działanie punktu na tor, po którym on zmuszony jest posuwać się, wyrazi się normalną składową siły bezwładności danego punktu; inaczej — siłą odśrodkową; działanie zaś giroskopu, którego np. koniec osi zmuszony będzie poruszać się po danym torze, jest wywołane momentem sił bezwładności; szczegółowiej mówiąc, momentami sił odśrodkowych i stycznych, które występują w bryle obracającej się nie około jednej z osi głównych.

Z tych rozpatrywań wynika, że jeżeli giroskopowi wirującemu nadamy ruch postępowy, to zachowywać się on będzie jak zwykła bryła, t. j. nie będzie wywierał działania na czynniki, nadające mu ruch postępowy, czyli przedstawiać on będzie opór taki, jaki przedstawiałaby niewirująca bryła materialna o masie równej

masie danego giroskopu; podczas bowiem ruchu postępowego wszystkie płaszczyzny prostopadłe do osi wirowania, w których punkty danej bryły zakreślają tory kołowe, pozostają podczas tego ruchu prostopadłymi do tej osi.

W celu zbadania właściwości ruchu giroskopów, t. j. ruchu brył materialnych silnie wirujących około swych osi symetrii, znajdujących się pod działaniem sił zewnętrznych, rozpoczniemy od rozpatrywania szczególnych przypadków tego ruchu; ażeby następnie przejść do rozpatrywania ruchów ogólniejszych.

164. Giroskop o jednym stopniu swobody. W celu unaocznienia sobie giroskopu, wyobrazimy go sobie w postaci pierścienia materialnego, wirującego na osi, umieszczonej końcami swymi (czopami) w ramie. Jeżeli rama ta jest unieruchomioną, t. j. jeżeli rama ta nie może swobodnie się poruszać; to giroskop taki nazwiemy giroskopem o jednym stopniu swobody, rys. 103-ci.



Rys. 103.

Jeżeli rama giroskopu pozostawać będzie w spoczynku, to wirujący giroskop będzie wywierał na łożyska w których oś się obraca tylko ciśnienia statyczne, t. j. ciśnienia równe ciężarowi giroskopu. Obróćmy następnie w jaki bądź sposób w możliwie krótkim czasie dt ramę wraz z wirującym giroskopem około osi, prostopadłej do płaszczyzny ramy o kąt $d\psi$; to giroskop za pośrednictwem swej osi, na której się obraca, wywrze pewne działanie na ramę; które to działanie można bezpośrednio odczuć, jeżeli ramie, którą trzymać będziemy w ręku, nadamy wraz z wirującym giroskopem chwilową prędkość obrotową $\frac{d\psi}{dt}$. Zadaniem naszym jest obliczenie tego działania. W celu unaocznienia sobie zachodzących stosunków dynamicznych, zastosujemy do tych obliczeń metodę d'Alembert'a. Jeżeli giroskop obraca się tylko około własnej osi i oś jego jest w spoczynku; to siły odśrodkowe punktów giroskopu, ze względu na symetryczność masy giroskopu względem osi obrotu, wzajemnie się równoważą. Lecz jeżeli nadamy giroskopowi wirującemu jeszcze obrót dodatkowy; to położenie osi właściwego obrotu względem osi giroskopu się zmieni; i położenie to wyznaczmy jako wypadkową, określoną wzorem:

$$\bar{\omega} + \frac{d\bar{\psi}}{dt};$$

gdzie $\bar{\omega}$ oznacza prędkość wirowania giroskopu; $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$ prędkość chwilowego obrotu; rys. 103-ci.

Ponieważ oś właściwego obrotu nie pokrywa się już z osią symetrii (t. j. z osią główną) danego giroskopu; lecz jest pochyloną względem tej osi, przeto siły od-

środkowe punktów danego pierścienia dają moment, dążący do obrócenia giroskopu w pewnym ściśle określonym kierunku; a w naszym przykładzie, w którym giroskop posiada jeden tylko stopień swobody, moment ten działa za pośrednictwem osi giroskopu na ramę i wywiera na nią pewien nacisk. Podczas obrotu dodatkowego powstają przeto pary sił odśrodkowych, które dążą do ustawienia danego giroskopu symetrycznie do właściwej, t. j. do wypadkowej osi obrotu; inaczej mówiąc, pary te dążą do podniesienia dodatniego końca giroskopu ku górze, rys. 103. Wypadkową parę sił odśrodkowych oznaczyliśmy schematycznie na rysunku 103-cim literami D_1 i D_1 .

Ponieważ wektor obrotu wypadkowego leży pomiędzy osią giroskopu i wektorem prędkości obrotu dodatkowego, a giroskop wskutek powstałego momentu sił bezwładności dąży do ustawienia się symetrycznie względem tej nowej osi; t. j. dąży do pokrycia swej osi symetrii z osią obrotu wypadkowego; przeto wyrazimy sposób działania giroskopu o jednym stopniu swobody następującem prawidłem: podczas nadania giroskopowi wirującemu o jednym stopniu swobody obrotu dodatkowego, oś jego wskutek powstałego momentu sił odśrodkowych dąży do zgodnego pokrycia się z osią obrotu dodatkowego.

Stosując przeto metodę d'Alembert'a do wyjaśnienia zjawiska ruchu giroskopu, powiedzieć możemy, że działanie giroskopu o jednym stopniu swobody, jakie się ujawnia podczas jego obrotu dodatkowego, jest działaniem momentu sił odśrodkowych, jaki powstaje w chwili odchylenia się osi właściwego obrotu od osi giroskopu.

Ażeby obliczyć wielkość tego działania, zastosujemy twierdzenie, dowiedzione w § 179-ym, że moment sił bezwładności, który oznaczmy literą \bar{K}_1 , rys. 103-ci wyraża się wzorem

$$\bar{K}_1 = - \frac{d\bar{N}}{dt};$$

w którym \bar{N} oznacza wektor momentu ilości ruchu danego giroskopu.

Jeżeli literą C oznaczmy moment^t bezwładności giroskopu względem jego osi, to podczas wirowania

$$\bar{N} = C \cdot \bar{\omega}.$$

Ażeby obliczyć pochodną wektora \bar{N} , czego wymaga równanie momentów, wyobrazimy sobie wektor ten umieszczonym wzdłuż osi giroskopu i wykonującym razem z tą osią obrót dodatkowy; a wektor prędkości końca tego wektora z odwrotnym zwrotem, będzie wektorem momentu sił odśrodkowych, t. j. wektorem wyrażającym działanie danego giroskopu.

Ponieważ w naszym przypadku przyjęliśmy

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} \perp \bar{\omega};$$

przeto wartość tego działania wyrazi się wzorem algebraicznym:

$$K_1 = C\omega \cdot \frac{d\psi}{dt} \dots \dots \dots (385)$$

Jeżeli zaś w ogólniejszym przypadku oś obrotu dodatkowego tworzy z osią giroskopu pewien kąt, który oznaczymy literą α ; to

$$K_1 = C \cdot \omega \cdot \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \alpha \dots \dots \dots (386)$$

Obydwa te wzory wyrazić można wzorem wektorowym:

$$\bar{K}_1 = - \mathbf{v} \bar{N} \cdot \frac{d\bar{\psi}}{dt};$$

który stosowaliśmy już w § 51-szym tomu I-go, w celu wyrażenia prędkości punktu za pomocą promienia wodzącego i prędkości obrotowej.

Oznaczywszy odległość pomiędzy punktami podparcia ramy literą a ; a siły, działające na podpory, t. j. naciski literą D , napiszemy dla danego przypadku równanie:

$$D \cdot a = C \omega \cdot \frac{d\psi}{dt};$$

z którego obliczymy siły, działające na łożyska. Siły te przeto dążą do uniesienia jednego końca giroskopu, i do przyciśnięcia drugiego jego końca, rys. 103-ci. Możliwym przeto ze stanowiska dynamicznego okaże się przypadek, w którym np. oś giroskopu, podparta jednym tylko swym końcem, pozostawać będzie w płaszczyźnie poziomej; a nawet przy pewnych warunkach może okazać dążność do uniesienia końca nie podpartego wbrew sile ciężenia giroskopu.

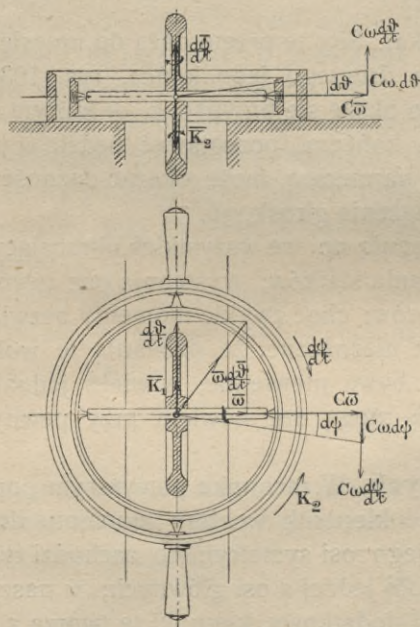
W technice—działania giroskopów występują np. we wszystkich obracających się kołach statków parowych, podczas zakręcania statków; występują one również w tychże warunkach w kołach wszystkich wozów; choć zwykle momenty bezwładności tych kół i prędkości ich obrotowe są tak nieznaczne, że działania te wobec innych czynników, działających na te wozy, bywa niewielkie; w wielu jednakże przypadkach należy te działania uwzględnić; mogą one bowiem przy pewnych warunkach wywołać niepożądane zjawiska (*).

165. Nieściśłość wzorów powyższych. W rachunku powyższym popełniliśmy pewną niedokładność, przyjmując, że kierunek wektora momentu ilości ruchu giroskopu pokrywa się z kierunkiem jego osi symetrii; co zachodzi tylko w przypadku, gdy obrót bryły odbywa się około jednej z osi głównych; w naszym zaś przykładzie, gdy giroskop otrzymuje obrót dodatkowy, kierunki te tworzą z sobą pewien kąt. Wzory przeto, otrzymane drogą powyższą, są przybliżone i o tyle tylko zbliżają się do wzorów ścisłych, o ile kąt odchylenia prędkości wypadkowej od osi symetrii jest niewielki, t. j. o ile wartość $\frac{d\psi}{dt}$ jest małą w porównaniu z wartością ω ; i o ile wartości momentów bezwładności danej bryły względem osi prostopadłych do osi giroskopu są małe; porówn. wzór 262-gi tego tomu. W praktycznych jednakże zastosowaniach wpływ tych wielkości na przebieg zjawiska ruchu bywa tak nieznaczny, że przyjąć można, szczególnie w pierwszych badaniach,

(*) Obliczenie działania giroskopowego kół wagonów na szyny znajdzie czytelnik u Kleina i Somerfelda w tomie IV-tym na str. 771; oraz powtórzone to obliczenie przez p. L. Silbersteina w Przeglądzie Technicznym № 18, 1912 roku.

że kierunek momentu ilości ruchu giroskopu wirującego oraz kierunek prędkości obrotowej pokrywa się z kierunkiem jego osi.

166. Giroskop o dwóch stopniach swobody. Gdy uczynimy ramę opisanego poprzednio giroskopu—ruchomą w ten sposób, żeby mogła obracać się swobodnie około osi prostopadłej do osi giroskopu, i gdy prędkość obrotową około tej nowej osi oznaczymy wektorem $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$, rys. 104-ty, to giroskop ten posiadać będzie dwa stopnie swobody ruchu; będzie on bowiem posiadał obrót swobodny około osi $\bar{\omega}$ i takież obrót około osi $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$. Działanie tego giroskopu podczas przymusowego obrotu $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$ będzie ze względu na możliwość obrotu około nowej osi zupełnie inne, niż było poprzednio. Różnica będzie polegać na tem, że działanie giroskopu, o jednym



Rys. 104.

stopniu swobody równoważyło się poprzednio z siłami odporowemi łożysk, które się nie poddawały temu działaniu; w danym zaś giroskopie wywoła ono obrót ruchomej ramy giroskopu około osi nowej $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$.

Wyobraźmy sobie, że w początku ruchu giroskop wiruje tylko około swej osi z prędkością $\bar{\omega}$ i że rama ruchoma, w której on się obraca oraz rama nieruchoma, w której obraca się na czopach rama ruchoma, rys. 104-ty, znajduje się w jednej płaszczyźnie poziomej. Nadajmy następnie temu giroskopowi wraz z ramami pewien obrót przymuszony około osi, prostopadłej do płaszczyzny obydwóch ram, o prędkości

chwilowej $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$; a wywołamy tym obrotem

działanie giroskopu, t. j. wywołamy siły odśrodkowe, których moment obliczymy jak w poprzednim przykładzie. Oznaczywszy

wektor tego momentu literą \bar{K}_1 ; porówn. rys. 104-ty, obliczymy jego wartość

$$K_1 = C\omega \cdot \frac{d\psi}{dt}.$$

Gdy giroskop posiadał jeden stopień swobody, jak poprzednio, t. j. gdy rama w której obracała się oś ω nie miała swobody ruchu; wtedy działanie K_1 tego giroskopu równoważyło się z siłami odporowemi jego ramy; w danym zaś przypadku, ponieważ rama wraz z giroskopem ma możliwość obrotu, działanie to wywołuje obrót ramy ruchomej wraz z giroskopem około nowej osi $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$. Związek dynamiczny

pomiędzy tem działaniem i wywołanym przez niego ruchem jest taki sam; jaki zachodzi pomiędzy działaniem momentu sił zewnętrznych, a wywołanym przez niego ruchem obrotowym; związek ten wyraża wzór 279-ty tego tomu; który w danym przykładzie przybierze postać:

$$C\omega \cdot \frac{d\psi}{dt} = A \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2}; \dots \dots \dots (387)$$

gdzie A oznacza moment bezwładności giroskopu względem nowej osi.

Lecz obrót giroskopu około osi $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$ wywołuje obrót wektora momentu ilości ruchu $C\bar{\omega}$ około tej osi tak, iż powstaje nowy przyrost jego ze zwrotem zgodnie równoległym do wektora $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$; a wartość jego rozdzielona przez czas, wyrazi się wzorem:

$$K_2 = C\omega \cdot \frac{d\vartheta}{dt}; \dots \dots \dots (388)$$

porówn. rys. 104-ty.

Przesunięciu temu odpowiada przeto nowe działanie giroskopu, które występuje w postaci momentu pary sił, starającej się obrócić dany giroskop około osi $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$, lecz ze zwrotem przeciwnym zwrotowi tej prędkości. Ponieważ dany giroskop stosownie do warunków zadania niema możności obrócenia się swobodnie około osi $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$, działanie to przeto będzie zrównoważone siłami odporowemi ramy nieruchomej. Innemi słowy, jeżeli giroskopowi wirującemu nadamy w jakibądź sposób pewną prędkość $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$ około osi prostopadłej do płaszczyzny ram, to należy do ramy przyłożyć parę sił, równoważącą występujące działanie giroskopu, którego wartość wyraziliśmy wzorem 388-ym, a wektor jego nanieśliśmy na rys. 104 tym. Po podstawieniu we wzór 388-my wartości $\frac{d\vartheta}{dt}$ z równania 387-go, po jego scałkowaniu, otrzymamy:

$$K_2 = \frac{C^2\omega^2}{A} \cdot \psi \dots \dots \dots (389)$$

Jeżeli przeto obrócimy giroskop o dwóch stopniach swobody w płaszczyźnie jego obydwóch osi, to giroskop będzie stawiał pewien opór temu obrotowi; dla obrócenia przeto takiego giroskopu należy przyłożyć do niego oprócz sił chwilowych, nadających przyrządowi jako zwykłej bryle materialnej odnośną prędkość obrotową $\frac{d\psi}{dt}$, jeszcze parę sił, przewyciężająca działanie giroskopu, t. j. parę równoważącą działanie danego giroskopu. Wielkość tej pary może być w zwykłych nawet warunkach dosyć znaczną; różnie ona bowiem w stosunku do drugiej potęgi momentu bezwładności giroskopu i w stosunku do drugiej potęgi jego prędkości wirowania.

Działanie to unaocznimy sobie w następujący sposób: jeżeli np. nadamy rękoma danemu giroskopowi obrót chwilowy $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$; to uczujemy w tejże chwili działanie momentu \bar{K}_2 , które się ujawni w postaci krótkotrwałego szarpnięcia giroskopu w przeciwną stronę nadanemu obrotowi. Krótkotrwałość działania tego momentu pochodzi stąd, że giroskop pod działaniem momentu \bar{K}_1 obróci się swą osią ku górze; wskutek czego w chwili, w której oś ta stanie równoległa do kierunku $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$, działanie momentu \bar{K}_2 zaniknie. Działanie to jednakże powstanie ponownie, jeżeli giroskop siłą swej bezwładności obróci się o 180° ; lecz wtedy działanie to będzie posiadało zwrot przeciwny poprzedniemu; krótko mówiąc: giroskop obrócony z prędkością $\frac{d\psi}{dt}$ ujawnić może przy pewnych warunkach cały szereg szarpnięć ze zwrotami naprzemian, to przeciwnymi nadanemu obrotowi, to zgodnymi z nim.

Dla obrócenia przeto giroskopu o dwóch stopniach swobody w płaszczyźnie jego obydwóch osi potrzebny jest dla przezwyciężenia powstającego działania momentu sił odśrodkowych pewien nakład pracy mechanicznej, który znaleźć może swój wyraz w wysiłku, jaki użyć musimy do wykonania tego obrotu rękoma. Dla obrócenia zaś giroskopu o jednym stopniu swobody nie potrzeba żadnej pracy, żadnego wysiłku; powstające bowiem działanie jego podczas takiego obrotu jest prostopadłe do płaszczyzny tegoż obrotu.

Powstanie działania giroskopu o **dwóch** stopniach swobody, może być również wyjaśnione bezpośrednio na podstawie działania momentu sił odśrodkowych, jakie powstają podczas właściwego ruchu giroskopu. Giroskop podczas obrotu $\frac{d\psi}{dt}$ obraca się w rzeczywistości około osi;

$$\left(\bar{\omega} + \frac{d\bar{\vartheta}}{dt} + \frac{d\bar{\psi}}{dt} \right),$$

lecz ponieważ działanie, wywołane obrotem $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$, wywołuje obrót giroskopu około osi nieruchomej $\frac{d\bar{\vartheta}}{dt}$; nie udziela się przeto ono jego ramie nieruchomej; a wywołuje tylko nowy obrót. Działanie więc tego giroskopu wywołuje się obrotem około osi, rys. 104-ty:

$$\bar{\omega} + \frac{d\bar{\vartheta}}{dt}$$

i dąży do ustawienia giroskopu symetrycznie do tej osi; wskutek czego otrzymuje się działanie określone wektorem \bar{K}_2 .

W celu unaocznienia sobie działań opisanych giroskopów, wyobrazimy sobie, że trzymamy poziomo w rękach łożyska, w których obraca się oś giroskopu; jeżeli trzymać będziemy ręce poziomo i dosyć sztywno, to giroskop będzie posiadał jeden tylko stopień swobody; i jeżeli trzymać będziemy te łożyska w spoczynku, to odczuwać będziemy w rękach tylko naciski, pochodzące od rozkładu ciężaru całego

przyrządu, które określić można z równań statyki; jeżeli zaś obrócimy się wraz z giroskopem około osi pionowej, to odczuwamy w jednym ręku powiększenie się tego nacisku, w drugim zaś zmniejszenie się; a mianowicie, jeżeli w prawym ręku trzymamy koniec dodatny osi obrotu i obrócimy się ze zwrotem również dodatnym (prawem ramieniem w tył, lewem naprzód), to w prawym ręku uczujemy zmniejszenie się nacisku, w lewym zaś powiększenie. Przy znacznej prędkości giroskopu i nagłym obrocie około osi pionowej, koniec jego prawy może nawet wyrwać się z ręki ku górze; a lewą rękę może przycisnąć ku dołowi; chcąc przeto utrzymać oś giroskopu podczas tego obrotu w poziomie, należy odpowiednio do tego działania dopasować wysiłki naszych muskułów; a jeżeli podtrzymanie tych łożysk jest wykonane za pomocą przyrządów mechanicznych, to należy zwrócić uwagę na odpowiednie umocowanie tych łożysk.

Jeżeli zaś pozwolimy danemu giroskopowi wykonać możliwie swobodnie opisany ruch (t. j. ruch prawego końca ku górze); to otrzymamy giroskop o dwóch stopniach swobody i działanie jego na nasze ręce będzie inne niż było poprzednio. Ażeby to działanie określić, uprzytomnijmy sobie w jaki sposób obraca się wektor \bar{N} momentu ilości ruchu podczas ruchu przyrządu; wektor ten w tym przypadku obraca się około osi poziomej i koniec jego podczas tego obrotu wyznacza wektor pionowo skierowany ku górze; działanie przeto tego giroskopu ujawni się obrotem giroskopu około tego wektora z przeciwnym zwrotem temu, jaki wskazuje jego strzałka; czyli prawy koniec danego giroskopu będzie dążył do oddalenia się od nas; lewy zaś będzie zbliżał się; ażeby przeto przyrząd cały utrzymać w pierwotnym położeniu, należy silnie przyciągać rękę prawą ku sobie, a lewą odpychać.

167. Ruchy bezwładne giroskopów. Zbadajmy teraz jaki będzie ruch opisanych giroskopów po nadaniu im prędkości $\frac{d\psi}{dt}$ i po pozostawieniu ich następnie samym sobie; t. j. jaki ruch wykonają te giroskopy bez udziału sił zewnętrznych, a jedynie pod działaniem sił odporowych; — nie uwzględniając sił oporowych, jakie powstają podczas ruchu.

Ruch taki wogóle można nazwać ruchem bezwładnym danej bryły swobodnej lub nie swobodnej, lub takiegoż punktu materialnego; gdyż w danym razie bryła czy też punkt podlegają tylko działaniu sił bezwładności i względnie sił odporowych, jeżeli są nieswobodne. Ruchem bezwładnym np. punktu materialnego swobodnego jest ruch prostoliniowy i jednostajny. Wyrazem matematycznym tego ruchu jest wzór:

$$d \frac{(m\bar{v})}{dt} = 0;$$

wyrazem zaś takiegoż ruchu bryły materialnej, obracającej się np. około punktu nieruchomego, bez udziału sił zewnętrznych, jest wzór

$$\frac{d\bar{M}_o}{dt} = 0;$$

względem bieguna, obranego w punkcie nieruchomym.

Jeżeli przeto mamy do czynienia z giroskopem o jednym stopniu swobody, i jeżeli oś jego jest nieruchomą w przestrzeni, to już w § 126-tym dowiedliśmy

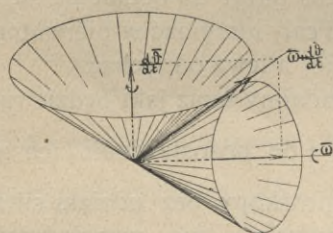
ogólnie, że po nadaniu początkowej prędkości wirowania, giroskop taki, jako bryła, obracająca się około osi głównej, wirować będzie z początkową prędkością; i że tej prędkości nie zmieni nadana jemu prędkość chwilowa $\frac{d\bar{\vartheta}}{dt}$; gdyż moment sił odporowych, który występuje podczas tego obrotu jako moment sił zewnętrznych jest prostopadły do osi wirowania, nie może wpłynąć na zmianę prędkości wirowania.

Podobnie, choć nieco inaczej przedstawi się zjawisko ruchu bezwładnego giroskopu o dwóch stopniach swobody. Ponieważ wektor momentu sił odporowych jest w tym razie prostopadły do płaszczyzny obydwóch osi swobodnych, rzuty przeto jego na każdą z tych osi równają się zero, a więc i wartości momentów ilości ruchu $C \cdot \omega$ i $A \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ względem tych osi są stałe; z czego znów wynika, że prędkości obrotowe są, jak poprzednio było z jedną prędkością, również stałe, t. j.

$$\omega = \omega_0; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)_0,$$

gdzie wskaźniki zero oznaczają odpowiednie wielkości w początku ruchu, t. j. w chwili, w której giroskop otrzymał prędkość $\frac{d\vartheta}{dt}$.

Ruch przeto bezwładny giroskopu o dwóch stopniach swobody składa się z dwóch obrotów jednostajnych; z obrotu ω około osi giroskopu i z obrotu tej osi około osi nieruchomej w przestrzeni $\frac{d\bar{\vartheta}}{dt}$.



Rys. 105.

Wektor chwilowego obrotu tego giroskopu określimy przeto wzorem $\left(\bar{\omega} + \frac{d\bar{\vartheta}}{dt} \right)$; wektor więc ten leży w płaszczyźnie tych osi, razem z nią się obraca i zakreśla stożek około osi nieruchomej $\frac{d\bar{\vartheta}}{dt}$; rys. 105-ty; jest to stożek sztywno związany z przestrzenią nieruchomą (kinetyczną). Drugi zaś stożek ruchomy, sztywno związany z giroskopem, wyobrazimy sobie wytworzony przez obrót wektora chwilowego obrotu

$$\left(\bar{\omega} + \frac{d\bar{\vartheta}}{dt} \right)$$

około osi ruchomej $\bar{\omega}$; ruch przeto bezwładny giroskopu o dwóch stopniach swobody możemy odtworzyć tocząc prosty stożek ruchomy, którego oś pokrywa się z osią giroskopu, po również prostym stożku, lecz nieruchomym o osi $\frac{d\bar{\vartheta}}{dt}$. Taki

ruch bryły nazywają wogóle ruchem precesyjnym, a prędkość $\frac{d\bar{\vartheta}}{dt}$ prędkością precesyjną, kierunek zaś jej osią precesyi.

168. Giroskop o trzech stopniach swobody. Jeżeli płaszczyznę ramy nieruchomej giroskopu o dwóch stopniach swobody ustawimy prostopadłe do płaszczyzny

szczyzny osi $(\bar{\omega}, \frac{d\bar{\Phi}}{dt})$ i uczynimy ją obracalną około osi pionowej przez dodanie odpowiednich czopów, mogących obracać się swobodnie w nowej ramie zewnętrznej nieruchomej, to otrzymamy obraz giroskopu o trzech stopniach swobody, rys. 106-ty. Prędkość kątową około tej nowej osi obrotu oznaczymy wektorem $\frac{d\bar{\Phi}}{dt}$.

Giroskop przeto ten posiada trzy prędkości składowe $\bar{\omega}, \frac{d\bar{\Phi}}{dt}, \frac{d\bar{\Psi}}{dt}$, około których swobodnie może się obracać; ruch przeto takiego giroskopu jest ruchem kulistym około punktu nieruchomego; ruch ten pod względem dynamicznym rozpatrywaliśmy na str. 305-tej tego tomu.

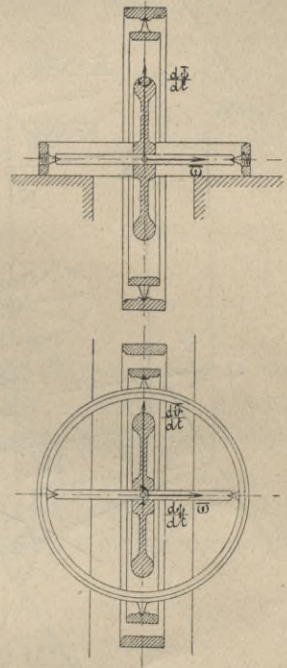
O działaniu takiego giroskopu na podpory mowy być nie może; giroskop ten bowiem posiada zupełną swobodę obracania się około dowolnej osi, przechodzącej przez punkt, w którym te trzy osi się przecinają; mowa może być tylko o statycznym zrównoważeniu ciężaru takiego giroskopu; lecz rozpatrywania tego przypadku, nie mającego nic wspólnego z działaniem giroskopów, podawać tu nie będziemy.

Giroskopem przeto o trzech stopniach swobody, możemy swobodnie obracać w przestrzeni, nie odczuwając żadnych oporów.

169. Stabilizacja wozu na jednej szynie.

Przykład ten ma na celu wykazać możliwość utrzymania się wozu biegnącego po jednej szynie, która znajduje się niżej środka ciężkości wozu. Rys. 107-my przedstawia przekrój poprzeczny wozu; litery W, W oznaczają ściany jego boczne; litery R, R — ramę, mogącą obracać się około osi poziomej a, a w łożyskach, przyrządowanych do ścian wozu; w ramie tej umocowane są łożyska, w których osadzona jest oś z wirującym giroskopem. W położeniu pionowym wozu oś giroskopu stoi wogóle pionowo; a w płaszczyźnie symetrii wozu, niżej środka jego ciężkości, znajdują się koła danego wozu. Gdy wóz obciążony jest symetrycznie i gdy giroskop pozostaje w spoczynku, wóz znajduje się w równowadze niestałej; i najmniejsze jego odchylenie z tej równowagi powoduje obrót około krawędzi szyny. Oznaczmy kąt odchylenia płaszczyzny symetrii wozu od płaszczyzny pionowej, pochodzącej przez szynę, literą ψ ; ciężar wozu — wraz z przyrządami literą Q ; literą H odległość środka jego ciężkości S_1 od krawędzi szyny, po której się wóz toczy; i wreszcie literą I moment jego bezwładności względem osi obrotu, t. j. względem krawędzi szyny; a wyrazimy moment siły ciężkości wozu, podczas jego odchylenia się od pionu o kąt ψ , wzorem.

$$QH \cdot \sin \psi.$$



Rys. 106.

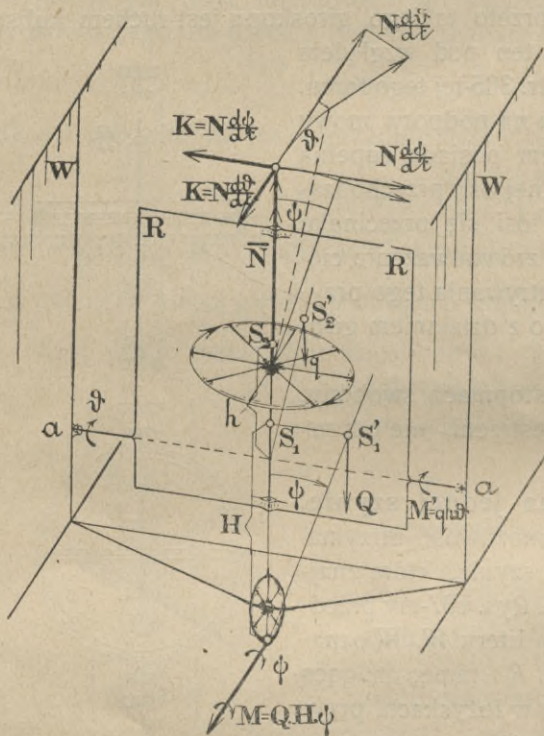
Moment sił wywołuje obrót wozu około krawędzi szyny ze zwrotem dodatnim. Przyjmijmy dla uproszczenia danego rachunku, że kąt odchylenia jest niewielki tak, iż zastąpimy wartość $\sin \psi$ wartością łuku tego kąta ψ ; a równanie dynamiczne ruchu przewracającego się wozu będzie stosownie do równania 280-tego następujące:

$$QH \cdot \psi = I \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2} \dots \dots \dots (390)$$

Położenie giroskopu wraz z ramą jest również równowagą niestalą; gdy bowiem odchylimy ramę giroskopu od pionu o kąt ϑ , powstanie moment jego ciężkości, który wywoła obrót ramy wraz z giroskopem około osi a, a . W celu obliczenia równania dynamicznego tego ruchu, oznaczmy literą q ciężar giroskopu łącznie z ciężarem ramy; literą j moment jego bezwładności wraz z ramą, względem osi obrotu a, a ; literą h odległość jego środka ciężkości S_2 od osi obrotu a, a ; i literą ϑ kąt, o jaki się rama wraz z giroskopem odchyli od pionu; a szukane równanie w postaci przybliżonej jest następujące:

$$qh \cdot \vartheta = j \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \dots \dots \dots (391)$$

Jeżeli zaś giroskopowi nadamy ruch wirowy, to dwie takie bryły materialne jak rama z giroskopem i wóz, z których każda oddzielnie znajduje się w równo-



Rys. 107.

wadze niestalej, zespalają się jednakże w jedną całość stateczną nie wywrotną; jak to zaraz wykażemy. Podczas ruchu wirującego giroskopu, wywołanego obrotem dodatkowym wozu, powstają momenty sił odśrodkowych, które zmieniają wyżej przytoczone równania ruchu i zmieniają ruch tak wozu jak i giroskopu. Ażeby obliczyć te momenty, należy wziąć pod uwagę ruch wektora momentu ilości ruchu giroskopu wirującego; i w tym celu dla uproszczenia rachunku przyjmijmy, że kierunek tego wektora, który oznaczmy literą \bar{N} , pokrywa się podczas obrotu wozu i ramy z kierunkiem osi giroskopu. Założenie to jednakże nie jest zupełnie zgodne z rzeczywistością; położenie bowiem wektora momentu ilości ruchu zmienia się względem osi giroskopu, wskutek występujących obrotów dodatkowych; które jednakże, przy zastrzeżeniu, że kąty odchylenia ϑ i ψ są nie wielkie, nie mogą być wielkimi; założenie to przyjmijmy do naszych obliczeń, jako przybliżenie nie-

przekraczające granic dokładności zamierzonych obliczeń i przybliżenie to będzie o tyle bliższe prawdy, o ile znaczniejszą jest prędkość wirowania giroskopu i jego moment bezwładności względem swej osi. Wektor przeto \bar{N} momentu ilości ruchu danego giroskopu wyobrazimy sobie umieszczonym wzdłuż jego osi, i wykonującym ruch razem z tą osią. Założenie to pozwoli nam wyznaczyć przyrosty tego wektora i jego pochodne wektorowe; które wzięte z odwrotnymi zwrotami wyrażać będą działania giroskopu, t. j. działania momentów sił odśrodkowych, jakie powstają w giroskopie wskutek jego obrotów dodatkowych. Zwrócić przytem należy uwagę na tę okoliczność, że przyrost każdego wektora o stałej długości, a więc i wektora \bar{N} powstaje tylko podczas jego ruchu obrotowego; a więc tylko podczas ruchu obrotowego osi giroskopu ujawni się jego działanie; jeżeli zaś ruch tego wektora jest postępowy, to działanie giroskopowe nie powstaje; cośmy zresztą fizycznie wyjaśnili na początku tego działu. Podczas przeto dowolnego ruchu giroskopu należy wyróżnić tylko prędkość obrotową jego osi. Wyobrazmy sobie wóz w położeniu pionowym; ramę zaś razem z giroskopem w ruchu wahadłowym około osi a, a , to prędkość chwilową jej obrotu, gdy znajdować się ona będzie w położeniu ϑ , wyrazimy wzorem $\frac{d\vartheta}{dt}$; prędkość przeto końca wektora \bar{N} w tejże chwili wyrazimy wzorem

$$N \cdot \frac{d\vartheta}{dt};$$

a kierunek jej będzie styczny do koła, jakie ten koniec zakreśla podczas obrotu ramy. Ze względu jednakże, że kąt ϑ ma być nieznaczny, — kierunek tego wektora będzie niemal równoległym do osi podłużnej wozu; jak pokazano na rysunku 107-ym.

Działanie przeto giroskopu podczas tego ruchu wyrazimy wektorem równym, lecz co do zwrotu przeciwnym wektorowi prędkości; wektor ten oznaczono na rysunku literą K , zwróconą do czytelnika, przeto

$$K = N \frac{d\vartheta}{dt} \dots \dots \dots (392)$$

Wyobrazmy sobie teraz ramę giroskopu w płaszczyźnie pionowej, a wóz razem z giroskopem w ruchu obrotowym około szyny; oznaczmy następnie literą ψ kąt nachylenia wozu względem osi pionowej, to prędkość obrotową osi giroskopu w tem położeniu giroskopu wyrazimy wzorem $\frac{d\psi}{dt}$; działanie przeto giroskopu wyrazi się wektorem, który oznaczmy literą k ; a który oznaczony jest na rysunku literą K , dopisaną przy wektorze ze zwrotem na lewo, literę tę przeto należy zamienić literą k . Wartość tego wektora

$$k = N \frac{d\psi}{dt} \dots \dots \dots (393)$$

a kierunek, przyjmując, że ψ jest niewielkie, będzie poziomy i prostopadły do osi wozu, jak pokazano na rysunku 107-ym. Jeżeli przeto wóz odchyli się od pionu o kąt ψ , giroskop zaś o kąt ϑ ; to do momentów sił zewnętrznych

$$QH\psi \quad \text{i} \quad qh\vartheta,$$

jakie działają na giroskop dochodzą jeszcze działania samego giroskopu, jako momenty sił odśrodkowych, występujących w giroskopie podczas jego ruchu. Wnio-

sek ten daje możność zestawienia równań dynamicznych ruchu wozu; zanim to jednakże uczynimy, zdajmy sobie sprawę z założeń, na jakich oparliśmy powyższe wywody.

W rozumowaniach tych przyjęliśmy, że giroskop obrócił się o kąt ϑ przy $\psi=0$; i na podstawie tego obliczyliśmy działanie \bar{K} ; następnie przyjęliśmy, że przy $\vartheta=0$, wóz obrócił się o kąt ψ , i stąd obliczyliśmy działanie \bar{k} ; lecz w rzeczywistości ruch ramy giroskopu będzie inny, i może być w rozmaity sposób wykonany. Jeżeli np. giroskop obrócił się wprawdzie o kąt ϑ przy $\psi=0$; a następnie obrócił się on wraz z wozem o kąt ψ ; to właściwie działanie giroskopu wyrazi się w tym razie wzorem

$$k = \left(\mathbf{V} \bar{N} \cdot \frac{d\bar{\psi}}{dt} \right) = N \cdot \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin(90 - \vartheta),$$

oś bowiem giroskopu, w chwili obrotu około krawędzi szyny, jest już pochyloną względem tej krawędzi o kąt $(90 - \vartheta)$.

Jeżeli zaś wóz wykona wprawdzie obrót ψ przy $\vartheta=0$, to podobnie wzór działania \bar{K} będzie inny, niż ten, który przytoczyliśmy. Podane przeto wzory 392-gi i 393-ci, wyrażające działanie giroskopu, dają wartości przybliżone, oparte na pominięciu drugich i wyższych potęg kątów odchylenia.

Przyjąwszy przeto wielkości działań danego giroskopu, jakieśmy je obliczyli w równaniach 392 i 393-ciem, przyłączymy te działania do działań momentów sił zewnętrznych i napiszemy zamiast równania 390-go i 391-go następujące:

$$\begin{aligned} QH \cdot \psi + N \cdot \frac{d\vartheta}{dt} &= I \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2}; \\ qh \cdot \vartheta - N \cdot \frac{d\psi}{dt} &= i; \frac{d^2\vartheta}{dt^2}; \end{aligned} \quad (394)$$

są to dwa równania liniowe jednoczesne z dwiema zmiennymi zależnymi,—różniczkowe drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami.

Zwrócić tu należy uwagę, że w równaniach tych tkwi jeszcze jedno przybliżenie, które należy sobie uświadomić; mianowicie litera I stosownie do danego określenia oznacza moment bezwładności wozu i ramy giroskopowej wraz z giroskopem przy pewnym ściśle określonym wzajemnym ich położeniu; tymczasem—rama wraz z giroskopem jest w ruchu względem wozu, wartość przeto I jest zmienną i zależy od kąta ϑ ; wobec jednakże nie wielkich odchyień przyjąć ją możemy za stałą; do przyjęcia tego założenia upoważnia nas jeszcze ta okoliczność, że masa giroskopu jest niewielką w stosunku do masy wozu, błąd przeto staje się jeszcze mniejszym.

Celem naszym obecnie jest przekształcenie równań 394-tych na inne dwa równania różniczkowe, z których każde posiadać będzie po jednej zmiennej zależnej; po scałkowaniu bowiem tych równań otrzymamy równanie ruchu obrotowego wozu około krawędzi szyny; które będzie miało postać ogólną $\psi = f(t)$. Jeżeli funkcya ta będzie tego rodzaju, że z rosnącym t kąt ψ będzie także rósł, to wyrażać ona będzie, że wóz dany wywróci się i że urządzenie giroskopowe nie wpływa na jego stabilizację; jeżeli zaś otrzymamy funkcję, która, pomimo powiększającej się wartości t , da wartość dla ψ zmienną w pewnych granicach, lub też wartość zanikającą; to

wóz dany będzie się wahać około pewnego położenia; lub też w drugim przypadku będzie stale zbliżał się do pewnego położenia równowagi, lecz nie wywróci się.

Przekształcenie równania 394-tych na dwa równania z oddzielonemi zmiennymi wykonać można w rozmaity sposób. W celu np. wyrugowania z tych równań zmiennej ϑ ; weźmiemy drugą pochodną równania pierwszego i pierwszą pochodną równania 2-go; i wyrugujemy z nich trzecią pochodną zmiennej ϑ , która powstanie po obliczeniu tych pochodnych; w tem nowem równaniu znajdować się jeszcze będzie oprócz zmiennej ψ pierwsza pochodna zmiennej ϑ ; której wartość podstawimy z równ. pierwszego, równań 394-tych; w ten sposób otrzymamy następujące równanie różniczkowe zmiennej ψ :

$$I \cdot j \cdot \frac{d^4 \psi}{dt^4} + (N^2 - QH \cdot i - qh \cdot I) \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2} + QH \cdot qh \cdot \psi = 0. \quad (395)$$

Ażeby wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego tego równania różniczkowego były urojone, co jest niezbędnem dla stabilizacyi wozu, należy, ażeby spółczynniki jego odpowiadały następującym warunkom, porów. wzory na str. 295-tej tego tomu:

- 1) $N^2 - QH \cdot i - qh \cdot I > 0$;
- 2) $QH \cdot qh > 0$; i wreszcie ażeby
- 3) $(N^2 - QH \cdot i - qh \cdot I)^2 > QH \cdot qh \cdot Ii$.

Warunkowi 1-szemu możemy fizycznie uczynić zawsze zadość, powiększając wartość N ; przez powiększenie prędkości wirowania giroskopu lub przez powiększenie jego momentu bezwładności względem jego osi.

Drugi warunek jest w danem zadaniu spełniony: obydwa bowiem QH i qh są dodatne.

Gdybyśmy jednakże chcieli np. umieścić oś ramy giroskopu wyżej jego środka ciężkości, wtedy należałoby w powyższe równanie podstawić $qh = -qh$; moment bowiem ciężenia po odchyleniu giroskopu byłby ujemny, a wóz pod działaniem tak zawieszzonego giroskopu musiałby się wywrócić; równanie bowiem jego ruchu nie odpowiadałoby warunkowi ruchu okresowego. Warunkowi jednakże drugiemu może być uczynione zadość, jeżeli obydwa momenty (QH) i (qh) będą ujemne; lecz przypadek $QH < 0$ nie odpowiadałby naszemu wozowi. Przypadek zaś, w którym QH jest ujemne, zachodzi w statku wodnym, wypór bowiem wody dąży do ustawienia pochylonego statku pionowo; dla wstrzymania przeto statku od bujań, t. j. od wahań około podłużnej osi statku, giroskop należy zawiesić w położeniu statecznem, wtedy bowiem QH i qh będą ujemne; i kąt ψ wyrazi się funkcją okresową czasu.

Rozpatrzmy pewne szczególne przypadki. Z równań 394-tych otrzymamy równ. 390 i 391-sze dla następujących szczególnych przypadków:

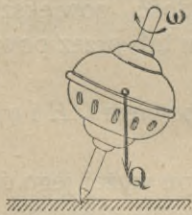
- 1) jeżeli podstawimy $N = 0$; co odpowiada przypadkowi, w którym giroskop nie wiruje; również otrzymamy te równania;
- 2) jeżeli $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$; t. j. jeżeli rama pozbawiona jest swobody obrotu około swej osi obrotu; w tych więc przypadkach giroskop wirujący pozostaje bez wpływu na stabilizacyę wozu; i wreszcie

3) jeżeli $\frac{d\psi}{dt} = 0$, t. j. jeżeli wóz pozbawiony jest możności wywrócenia się;

obrót ramy giroskopu będzie w tym razie taki, jak gdyby nie istniał giroskop. Wyjaśnienie takiego zachowania się ruchu ramy lub wozu, jakie stosujemy do tych dwóch przypadków, znajdzie czytelnik w przykładach o działaniu giroskopów o jednym stopniu swobody. Te dwa szczególne przypadki możemy uogólnić i wyjaśnienie to wypowiedzieć w następujący sposób: właściwości stabilizacyjne posiada jedynie giroskop o trzech stopniach swobody.

Przykłady powyższe mają na celu wskazanie metody obliczenia, jakie należy stosować przy stosowaniu giroskopu do stabilizacji przyrządów chwiejnych. Szczegóły tych badań jak np. wpływ siły odśrodkowej wozu na działanie giroskopu podczas ruchu jego po krzywym torze; wpływ oporów na ruch wozu lub statku znajdzie czytelnik u Föppl'a w VI-tym tomie na str. 220; u Kleina i Somerfelda w tomie IV-ym na str. 903; jak również u Routha w tomie II-gim; w szczególności zaś opis i wskazówki do obliczenia wozu jednoszynowego systemu Brennan'a podają A. Gray i J. G. Gray w dziele swoim „A Treatise on Dynamics“; w dziele tem znajdują się również liczne przykłady ruchu giroskopów.

170. Przykład. Ruch bąka. Jeżeli jeden punkt osi giroskopu swobodnego uczynimy nieruchomym w ten sposób, ażeby giroskop mógł swobodnie kręcić się około tego punktu, to po nadaniu giroskopowi obrotu około jego osi, i po ustawieniu tej osi pochyło względem pionu, otrzymamy obraz bąka, puszczonego swobodnie na płaszczyźnie o tyle chropowatej, że koniec osi jego nie będzie mógł się po niej ślizgać, weźmiemy ten szczególny przypadek pod uwagę, rys. 108-my.



Rys. 108.

Wiemy z doświadczeń, że jeżeli ustawimy bąk niewirujący pochyło, to się on przewróci; jeżeli zaś będzie on w tem położeniu pochyłym wirował, to zachowanie się jego będzie inne. I zupełnie słusznie; gdy bowiem giroskop wirujący otrzyma ruchy dodatkowe jak w danym razie ruch padania; to powstają wtedy momenty sił odśrodkowych, które wpływają na jego ruch.

Na dany bąk działa w tym razie siła ciężenia, której punkt przyłożenia jest w środku jego masy; oraz siła odporowa w punkcie podparcia. Ciężar bąka jest dany, siła zaś odporowa w punkcie podparcia jest nam nieznaną. Wektor momentu tych sił, jako sił zewnętrznych, działających na dany giroskop, względem bieguny, obranego w punkcie podparcia, jest prostopadły do płaszczyzny (S, z), przechodzącej przez środek masy S i oś pionową z , wystawioną w punkcie podparcia, i wektor ten pozostaje prostopadłym do tej płaszczyzny we wszystkich położeniach giroskopu, jakie zajmuje on podczas swego ruchu. Ponieważ moment siły odporowej względem punktu podparcia równa się zeru, przeto uważać można, że w zadaniu tem znane są siły i ruch początkowy bąka, a należy obliczyć jego dalszy ruch. Ruch początkowy bąka może być ruch wirowania, jeżeli wirujący bąk puścimy swobodnie; lub też ruch ten może być również złożony z ruchu wirowania i z prędkości osi bąka, jeżeli w chwili puszczenia bąka nadamy tej osi pewnej

prędkości; zwanej początkową. W celu obliczenia ruchu bąka z tych warunków, zastosujemy równanie momentu ilości ruchu

$$\overline{M}_P = \frac{d\overline{M}_v}{dt} \dots \dots \dots (396)$$

W celu uproszczenia obliczenia przyjmiemy najpierw pewne szczególne założenia co do wielkości i położenia wektora \overline{M}_v . Przyjmiemy mianowicie z pewnym przybliżeniem, że prędkość wirowania giroskopu jest tak znaczną, że prędkości dodatkowe jakie otrzyma giroskop podczas swego ruchu, są wobec niej znikome; i następnie przyjmiemy, że wobec tak znacznej prędkości wirowania, kierunek wektora momentu ilości ruchu giroskopu pokrywa się z kierunkiem jego osi i razem z nim się porusza. Oznaczywszy wektor momentu ilości ruchu wirującego giroskopu w tym szczególnym przypadku literą \overline{N} ; (uważać go bowiem możemy za rzut na oś giroskopu właściwego wektora \overline{M}_v , który właściwie nie pokrywa się z tą osią); wyrazimy jego wielkość wzorem:

$$\overline{N} = C \cdot \overline{\omega} \dots \dots \dots (397)$$

gdzie C oznacza moment bezwładności giroskopu względem jego osi; a $\overline{\omega}$ oznacza prędkość wirowania.

Odetnijmy następnie wektor \overline{N} na osi giroskopu od punktu jego oparcia, to na podstawie równania powyższego napiszemy wzór

$$\overline{M}_P = C \cdot \frac{d\overline{\omega}}{dt}; \dots \dots \dots (398)$$

z którego wynika, że przyrost prędkości obrotowej $\overline{\omega}$ podczas ruchu giroskopu powinien być ciągle równoległy do wektora momentu ciężaru giroskopu; t. j. że wektor $\overline{\omega}$ a z nim w myśl zrobionych założeń i wektor \overline{N} wraz z osią giroskopu, po puszczeniu go swobodnie z pewną prędkością wirowania lecz bez dodatkowej prędkości, będzie zakreślać ruchem jednostajnym stożek prosty o osi pionowej i o półotworze równym kątowi początkowego nachylenia osi bąka. Koniec przeto wektora \overline{N} zakreśli podczas ruchu bąka koło ruchem jednostajnym, którego płaszczyzna będzie pozioma; a długość jego promienia równać się będzie wyrazowi

$$N \cdot \sin \vartheta,$$

(porówn. zadanie wektorowe na str. 26-ej tomu I-go).

Ponieważ wartość pochodnej wektora \overline{N} wyraża się prędkością końca jego jaka powstaje podczas jego obrotu około osi pionowej, przeto na podstawie równania 396-go i przyjętych uproszczeń napiszemy równanie

$$Q \cdot s \cdot \sin \vartheta = N \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{d\psi}{dt};$$

w którym s oznacza odległość środka ciężkości bąka od punktu podparcia; Q ciężar jego, a $\frac{d\psi}{dt}$ prędkość obrotową osi giroskopu około osi pionowej; t. j. prędkość zwaną precesyjną. Z równania tego obliczymy prędkość ruchu precesyjnego:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Q \cdot s}{N}; \dots \dots \dots (399)$$

Ze wzoru tego wynika, że wartość prędkości precesyjnej jest dla danego bąka przy danych założeniach stałą; dla różnych zaś bąków rośnie ona z wartością iloczynu $Q \cdot s$.

Okres czasu $T_{o,p}$ (czas obiegu precesyjnego), w jakim oś bąka zakreśli jeden obieg, obliczymy ze wzoru:

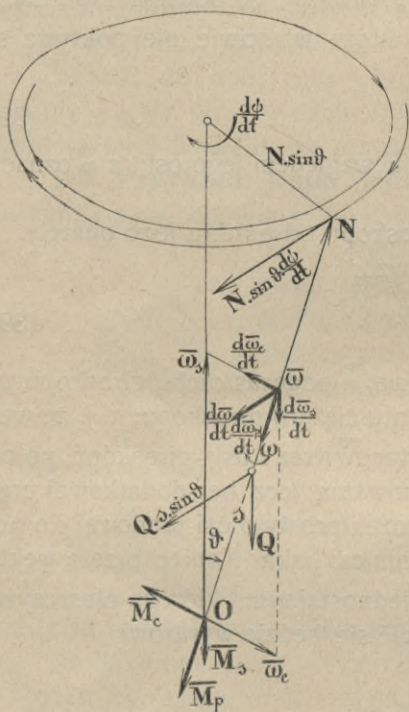
$$2\pi = \frac{d\psi}{dt} \cdot T_{o,p};$$

z którego po podstawieniu prędkości precesyjnej otrzymamy:

$$T_{o,p} = 2\pi \cdot \frac{N}{Q \cdot s} \dots \dots \dots (400)$$

Ponieważ wartość N jest bardzo wielka, ze względu na znaczną wartość prędkości wirowania, okres przeto tego obiegu może być tak długi, że go z łatwością na zegarku odczytać możemy; a wtedy będziemy mogli z tej wartości obliczyć wielkość N dla danego ruchu bąka; lub też, jeżeli moment bezwładności bąka względem jego osi jest znany, będziemy mogli obliczyć jego prędkość wirowania; którą w inny sposób podczas ruchu bąka trudno zmierzyć.

Zbadajmy teraz jaki wpływ na dany ruch bąka wywierają siły, a właściwie momenty siły tarcia i oporu powietrza, jakiego doznaje bąk podczas swego wirowania. Tarcie powstaje przy zetknięciu się osi bąka z podstawą, na której wiruje; zbadajmy przeto warunki fizyczne, w jakich odbywa się to zetknięcie. Choćby koniec osi materialnej bąka, który wspiera się na podstawie, był nawet nadzwyczaj ostry; musi on jednakże posiadać powierzchnię kulistą, która, znalazłszy pewne zagłębienie w podstawie, obraca się w tem zagłębieniu jak w łożysku, i wywołuje tarcie.



Rys. 109.

Podporządkowując występujące siły tarcia pod określenia, wyłożone w § 238-ym i 242-gim tomu I-go, rozróżnimy w tym przypadku tarcie czopowe i tarcie storcowe. Jeżeliby giroskop stał pionowo, mielibyśmy tylko tarcie storcowe; gdyby zaś znajdował się w położeniu poziomem, wystąpiłoby tylko tarcie czopowe; gdy zaś wirujący giroskop jest nachylony względem pionu, to występują jednocześnie obydwa rodzaje tarcia; które wyobrazimy sobie powstałe w ten sposób, że tarcie czopowe jest wywołane składową poziomą wirowania; tarcie zaś storcowe wywołane jest składową pionową tegoż wirowania. Tarcia te wywołują momenty, których wektory \overline{M}_c i \overline{M}_s (czopowy i storcowy), rys. 109-ty, są równoległe do osi poziomej i pionowej, a zwroty posiadają przeciwne zwrotom odpo-

wiednich składowych prędkości wirowania. Z równania przeto 396-tego i 398-ego, w których przez \overline{M}_p rozumieć będziemy w danym razie \overline{M}_c i \overline{M}_s , wynika, że moment \overline{M}_c wywołuje ruch osi bąka w kierunku środka stożka, jaki zakreślała ta oś pod działaniem momentu siły ciężkości; a \overline{M}_s wywołuje zmniejszenie się składowej pionowej prędkości wirowania.

Następnie: tarcie powietrza, jakie powstaje podczas wirowania bąka wywołuje moment sił, którego wektor \overline{M}_p (powietrza) jest skierowany wzdłuż osi wirowania ze zwrotem przeciwnym zwrotowi tegoż wirowania; moment ten przeto wstrzymuje wirowanie bąka.

Wszystkie przeto te opory łącznie z jednoczesnem działaniem momentu siły ciężkości bąka nadają taki ruch osi bąka, że zakreśla ona w przestrzeni powierzchnię stożkową, o otworze ciągle się zmniejszającym; i że wielkość prędkości wirowania stale się zmniejsza. Jeżeli dla zobrazowania sobie tego ruchu weźmiemy pod uwagę ruch dowolnego punktu osi girokopu; to punkt ten zakreśli w przestrzeni krzywą, której rzut na płaszczyznę poziomą przedstawi pewnego rodzaju krzywą spiralną, zbliżającą się do punktu podparcia bąka; krótko mówiąc oś wirującego bąka, obracając się około osi pionowej, dąży do położenia pionowego; a osiągnąwszy to położenie lub też jemu blizkie, zacznie tracić do reszty swą energię kinetyczną na pracę tarcia storcowego i na pracę oporu powietrza, aż dojdzie do tego stanu prędkości wirowania, że najmniejsze odchylenie osi jego od pionu spowoduje jego przewrócenie się.

Przy jakiej minimalnej prędkości wirowania bąk się przewróci, wzory powyższe nie dają nam wskazówek; gdyż skutek przyjętych skróceń, niezupełnie ujmują one zachodzące stosunki kinetyczne wirującego bąka; do obliczenia przeto tej prędkości należy zrobić założenia, które więcej odpowiadają w rzeczywistości zachodzącym warunkom fizycznym. Do przeprowadzenia tego nowego rachunku skłania nas jeszcze ta okoliczność, że wzór 398-my wyraża ruch, który zaprzecza zasadom dynamiki, bo chociaż pobieżne spostrzeżenie wskazuje, że oś bąka zakreśla rzeczywiście stożek około osi pionowej i przybiera ona z czasem kierunek pionowy; lecz przy bliższej obserwacji dostrzedz można, że ruch ten nie jest ruchem jednostajnym; a posiada pewne drgania poprzeczne do powyższego ruchu; jak również — pewne drgania w kierunku swego toru; a o drganiach tych równanie 398-me nic nie mówi. Wyniki powyższe są przytem sprzeczne z zasadą zachowania energii; bąk bowiem otrzymuje pewien ruch obrotowy około osi z ; a więc — i nową energię kinetyczną, która powstaje bez nakładu pracy mechanicznej; ciężar bowiem w myśl opisu danego ruchu nie wykonuje pracy; środek bowiem ciężkości w myśl tych rozważań zakreśla koło poziome, gdy nie uwzględniamy tarcia; a nawet ciężar ten wykonuje pracę odjemną jeżeli przyjmiemy pod uwagę, że oś jego zbliża się do osi pionowej. Niezgodności te są wynikiem niezupełnie zgodnych z rzeczywistością i przytem nawet sprzecznych z sobą założeń; bąk bowiem, nabywając obroty dodatkowe, np. obrót około osi z , obraca się właściwie około osi wypadkowej tych obrotów, której kierunek nie pokrywa się z kierunkiem osi bąka; jakieżmy to w danym rachunku przyjęli; a więc skutek tego i kierunek wektora \overline{M}_c nie może pokrywać się z tą osią.

Wobec tych sprzeczności, przyjmijmy teraz do obliczenia ruchu bąka założenia, które dalej idą w swej dokładności niż poprzednie, choć nie zupełnie jeszcze czynią zadość ścisłemu ujęciu zjawiska; chociaż bowiem przyjmujemy, że oś chwilo-owego obrotu, t. j. oś wypadkowego obrotu bąka tworzy z nią pewien kąt, lecz w celu uniknięcia zawiętego rachunku, przyjmujemy, że kierunek wektora momentu ilości ruchu pokrywa się jak poprzednie z osią giroskopu; co nie jest zgodne z rzeczywistością, a nawet nie jest w zgodzie z pierwszym założeniem; i na podstawie tych założeń przeprowadzimy najpierw jakościowe rozpatrywanie, a następnie obliczenie ruchu bąka, które już ze znacznym przybliżeniem będzie zgodne z rzeczywistym ruchem; sił jednakże oporowych w tym obliczeniu nie uwzględnimy.

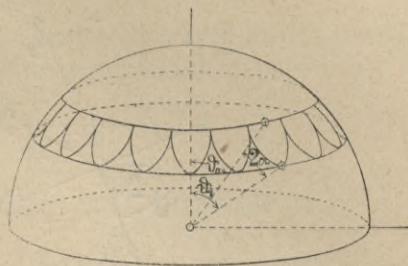
W chwili puszczenia wirującego bąka swobodnie, t. j. bez żadnej dodatkowej prędkości, jest on pod działaniem tylko momentu siły ciężenia; wskutek czego po upływie czasu Δt pochyli się jego oś o pewien kąt, wskutek czego koniec wektora \vec{N} , który w danem obliczeniu wyobrażamy sobie ściśle związanym z osią bąka, nabędzie pewnej prędkości; wektor tej prędkości z odwrotnym znakiem wyraża moment sił odśrodkowych, jakie powstały wskutek zmiany osi właściwego obrotu bąka; oś ta bowiem wskutek nowego obrotu jakiego doznał bąk, pochylając się, nie pokrywa się już z osią jego symetrii; wektor przeto tego działania jest styczny do południka, jaki zakreśla koniec wektora \vec{N} podczas pochylania się bąka; a zwrot ma przeciwny zwrotowi prędkości końca tego wektora; moment przeto sił odśrodkowych, jaki wskutek tego powstał, dąży do obrócenia bąka około osi, którą wyobrażamy sobie przeprowadzoną przez punkt jego podparcia równoległe do kierunku pomienionego wektora; t. j. moment ten w następnym okresie czasu Δt przesunie koniec wektora \vec{N} po równoleżniku ze zwrotem dodatnim. Powstały stąd nowy wektor prędkości końca wektora \vec{N} z odwrotnym znakiem, wyraża wektor działania momentu nowych sił odśrodkowych; które w trzecim okresie czasu Δt przeciwdziałać będzie momentowi siły ciężkości podniesie oś bąka po południku ku górze. Ruch więc osi bąka składa się z trzech kolejnych ruchów:

- 1) z ruchu po kole biegunowem ku dołowi, który powstaje wskutek ciężaru bąka;
- 2) z ruchu po równoleżniku ze zwrotem dodatnim i
- 3) z ruchu po kole biegunowem ku górze.

Lecz ruchy w naturze nie odbywają się skokami i w danym więc razie otrzymamy obraz ruchu osi bąka, więcej zbliżony do ruchu rzeczywistego, jeżeli okresy czasu Δt wyobrażymy sobie podzielone na nieskończenie wiele małych okresów dt , i gdy weźmiemy pod uwagę, że działania momentów sił odśrodkowych są proporcjonalne do wielkości prędkości końca wektora \vec{N} . W celu szczegółowszego zobrazowania ruchu bąka, obierzemy jeden punkt jego osi, który nazwiemy wierzchołkiem bąka, i opiszemy na zasadzie powyższych rozważań ruch tego wierzchołka, jakiego on dozna po puszczeniu bąka swobodnie. Jeżeli bąk nie otrzymał prędkości początkowej, oprócz prędkości wirowania, to wierzchołek jego wskutek ciężaru bąka, zacznie opuszczać się po kole biegunowem, prostopadłe do równoleżnika, na którym się znajdował w chwili puszczenia i z prędkością szybko wzrastającą. Z powstaniem jednakże i wzrostem tej prędkości powstaje i wzrasta proporcjonal-

nie do tej prędkości działanie sił odśrodkowych, które nadaje wierzchołkowi temu ruch w kierunku poziomym, t. j. po równoleżniku: z chwilą powstania tego ruchu powstaje nowe działanie giroskopowe, dążące do podniesienia wierzchołka bąka ku górze; które przy znacznym wzroście prędkości poziomej może go nawet podnieść; podniesienie to jednakże zgodnie z zasadą zachowania energii, może sięgnąć tylko do wysokości równoleżnika z którego wyszedł. W ten sposób wierzchołek nieprzewracającego się bąka zakreśli tor, zawarty pomiędzy dwoma równoleżnikami; tor ten przedstawiliśmy na rys. 110-ym w sposób dosyć przesadny, ażeby lepiej go unaocznic.

Przebieg tego ruchu jest zgodny z zasadą zachowania energii; praca bowiem ciężaru bąka, podczas jego pochylenia się, idzie na energię kinetyczną, jaką on otrzymuje podczas jego upadania i podczas ruchu osi jego po równoleżniku; w najniższym położeniu posiada znaczną prędkość po równoleżniku; wskutek czego powstaje znaczne



Rys. 110.

działanie momentu sił odśrodkowych, które dąży do podniesienia bąka; gdy zaś wierzchołek podniesie się na wysokość równoleżnika, z którego wyszedł; to nie posiada on już żadnej prędkości; jeżeli jej nie posiadał początkowo; niema więc tu żadnego działania ubocznego, i tor wierzchołka w tem miejscu jest prostopadły do równoleżnika; tor zaś ten w najniższym położeniu jest styczny. Otóż to podnoszenie się i opuszczanie się wierzchołka bąka z jednoczesnem posuwaniem się po równoleżniku, jest tem drganiem, które spostrzegać się wogóle daje w wirującym i puszczonej swobodnie bąku; oraz jest tym ruchem osi bąka, który przedstawia się jako ruch obrotowy około osi pionowej z .

Jeżeli oś wirującego bąka przy puszczeniu go otrzyma pewną prędkość, to ruch jego osi będzie inny. Jeżeli np. nadamy wierzchołkowi prędkość początkową po równoleżniku, to tor wierzchołka będzie styczny również do równoleżnika górnego; wskutek czego postać tego toru znacznie się zmieni; zmieni się ona przytem i ze zmianą zwrotu tej prędkości i jej wielkości; powstawać bowiem będą działania różne, zgodne lub przeciwne z działaniem momentu siły ciężkości.

W celu obliczenia ruchu bąka na podstawie tych ściślejszych założeń zastosujemy trzy wzajemnie prostopadłe osi współrzędnych (ξ , η , ζ); rys. 111-ty; z których ζ pokrywa się z osią bąka; oś η jest do niej prostopadła i leży w płaszczyźnie, zwanej biegunową; i przechodzącej przez oś giroskopu ζ i oś pionową z , wyprowadzoną z punktu podparcia bąka; a oś ξ przyjmijemy prostopadłe do płaszczyzny tych dwóch osi. Przyjmujemy następnie, że osi te są sztywno związane z płaszczyzną biegunową, i razem z nią obracają się około osi pionowej z . Położenie tego układu ruchomego a wraz z nim i położenie bąka względem przestrzeni kinetycznej określimy:

- 1) przez kąt ϑ , jaki tworzy oś bąka ζ z osią nieruchomą z ;
- 2) przez kąt ψ jaki tworzy płaszczyzna biegunowa, z płaszczyzną nieruchomo obraną i przechodzącą przez oś z ;

3) przez kąt, jaki tworzy płaszczyzna, przechodząca przez oś bąka i obracająca się razem z nim około jego osi ζ , z płaszczyzną biegunową.

Pierwsze dwa kąty określają położenie osi bąka względem przestrzeni kinetycznej; kąt zaś trzeci określa położenie bąka jako bryły względem płaszczyzny biegunowej. Ponieważ przeprowadzenie bąka z pewnego położenia do nieskończonego blizkiego może być osiągnięte przez powiększenie tych trzech kątów o nieskończenie małe przyrosty; chwilowy przeto stan prędkości bąka zostaje określony przez trzy pochodne tych kątów

względem czasu; właściwą przeto jego prędkość obrotową $\bar{\varphi}$ w pewnej chwili wyrazimy wzorem

$$\bar{\varphi} = \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\psi}{dt} + \bar{\omega}; \quad (400)$$

w którym trzy wektory prędkości składowych posiadają kolejno kierunki osi ξ , osi z i osi ζ . Literą $\bar{\omega}$ oznaczyliśmy w tem równaniu prędkość obrotową bąka względem płaszczyzny biegunowej.

Lecz chwilową prędkość $\bar{\varphi}$ możemy również wyrazić równaniem

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_\xi + \bar{\varphi}_\eta + \bar{\varphi}_\zeta; \quad (401)$$

w którym trzy składowe prędkości

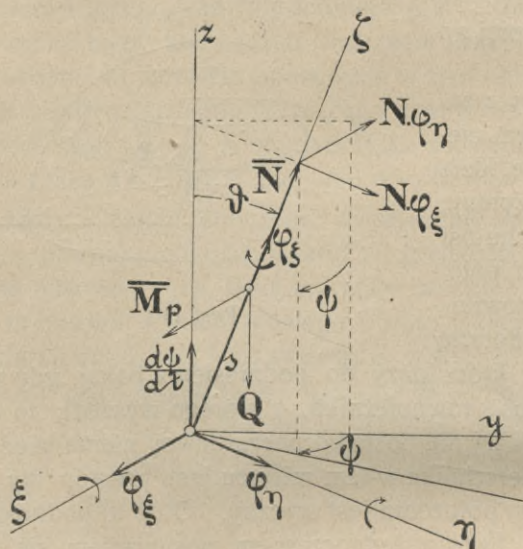
są rzutami prędkości chwilowej $\bar{\varphi}$ na trzy obrane osi w tem ich położeniu, w jakim one znajdują się w danej chwili.

Z tych dwóch równań znajdziemy związki kinematyczne, jakie zachodzą pomiędzy składowymi prędkościami równania 400-ego i takież składowymi równania 401-go. Związki te bowiem będą nam potrzebne do obliczenia jednych składowych; gdy dane będą drugie. W celu znalezienia tych związków, rzutujemy te dwa równania kolejno na osi np. ξ , η i ζ i przyrównamy wartości tych rzutów jednego równania do wartości rzutów drugiego równania, rzuty te bowiem przedstawiają rzut jednego i tego samego wektora $\bar{\varphi}$ na obraną oś; a więc otrzymamy:

$$\varphi_\xi = \frac{d\vartheta}{dt}; \quad \varphi_\eta = -\frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \vartheta; \quad \varphi_\zeta = \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos \vartheta. \quad (402)$$

Przyjęte tu wielkości mają tylko na celu określenie położenia bąka i jego stanu chwilowej prędkości; a właściwe zestawienie równań dynamicznych i obliczenie ruchu bąka nastąpi dopiero teraz.

Ażeby rozpatrywania jakościowe, przytoczone poprzednio, ująć rachunkiem, należy na podstawie równania 280-tego, przyrównać działania momentów sił odśrodkowych do iloczynów z odnośnych momentów bezwładności bąka i z przyspieszeń kątowych; a więc działanie, jakie powstaje np. podczas pochylenia się wierzchołka bąka daje następujące równanie, porówn. rys. 111-ty:



Rys. 111.

$$N \cdot \varphi_{\xi} = A \cdot \frac{d\varphi_{\eta}}{dt}; \quad (403)$$

gdzie A oznacza moment bezwładności bąka względem osi η .

Działanie zaś, równoległe do osi ξ , jakie powstaje wskutek ruchu końca wektora N , łączy się z działaniem momentu siły ciężkości i daje równanie, rys. 111-ty:

$$N \cdot \varphi_{\eta} + Q \cdot s \cdot \sin \vartheta = A \cdot \frac{d\varphi_{\xi}}{dt} \quad (404)$$

W celu przeprowadzenia dalszych obliczeń wyrugujemy z tych dwóch równań np. φ_{η} ; a w tym celu scałkujemy równanie 403-cie i podstawimy z niego wartość φ_{η} w równanie 404-te; a przyjąwszy, że w chwili $t = 0$:

$$\vartheta = \vartheta_0; \quad \text{oraz} \quad \varphi_{\eta} = 0,$$

i zważywszy, że $\varphi_{\xi} = \frac{d\vartheta}{dt}$; całka równania 403-ciego jest następująca:

$$\begin{aligned} -N \cdot (\vartheta - \vartheta_0) &= A \cdot \varphi_{\eta}; & \text{z którego} \\ \varphi_{\eta} &= -\frac{N}{A} \cdot (\vartheta - \vartheta_0) \end{aligned} \quad (405)$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie 404-te i zastąpieniu, przy niewielkim kącie odchylenia, $\sin \vartheta$ wartością łuku ϑ ; otrzymamy:

$$-\frac{N^2}{A} \cdot \vartheta + \frac{N^2}{A} \cdot \vartheta_0 + Q \cdot s \cdot \vartheta = A \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2};$$

a po rozdzieleniu przez A i po uporządkowaniu otrzymamy równanie ruchu osi bąka w płaszczyźnie (ξ, z) , t. j. w płaszczyźnie biegunowej:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \left(\frac{N^2}{A^2} - \frac{Q \cdot s}{A} \right) \cdot \vartheta - \frac{N^2}{A^2} \cdot \vartheta_0 = 0 \quad (406)$$

Równanie to jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu liniowe ze stałymi współczynnikami i stałym wyrazem

W celu pozbycia się wyrazu stałego wprowadzimy do rachunku nową zmienną ε , określoną z równania:

$$\vartheta = \frac{N^2}{A^2 - \frac{Q \cdot s}{A}} \cdot \vartheta_0 + \varepsilon; \quad (407)$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie 406-te otrzymamy równanie różniczkowe bez stałego wyrazu, które bezpośrednio będziemy mogli zcałkować:

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \left(\frac{N^2}{A^2} - \frac{Q \cdot s}{A} \right) \cdot \varepsilon = 0. \quad (408)$$

Jeżeli bąk nie ma się przewrócić, to kąt ε nie powinien się powiększać z biegiem czasu; a to nastąpi gdy

$$\frac{N^2}{A^2} - \frac{Q \cdot s}{A} > 0; \quad (409)$$

wtedy bowiem równanie 408-me wyrazi ruch harmoniczny; wierzchołek przeto bąka wykona również ruch harmoniczny. Nierówność przeto 409-ta jest warun-

kiem stabilizacji bąka; t. j. warunkiem, przy zachowaniu którego bąk będzie się wahał około pewnego położenia równowagi, lecz się nie przewróci.

Wahania te odbywać się będą około równoleżnika, wyznaczonego pierwszym wyrazem, znajdującym się po prawej stronie równania 407-go, gdyż on jest wielkością stałą, do której odchylenia $\pm \varepsilon$ się dołączają. Największe przeto odchylenie t. j. amplitudę nutacyi, którą oznaczymy literą a , wyznaczmy z różnicy dwóch kątów:

$$a = \frac{\frac{N^2}{A^2} \cdot \vartheta_0 - \vartheta_0}{\frac{N^2}{A^2} - \frac{Q \cdot s}{A}} = \frac{\frac{Q \cdot s}{A} \cdot \vartheta_0}{\frac{N^2}{A^2} - \frac{Q \cdot s}{A}};$$

a że wartość $\frac{Q \cdot s}{A}$ wobec wartości $\frac{N^2}{A^2}$ powinna być bardzo mała; (ażeby, stosownie do wzoru 409-go, zabezpieczyć bąk od przewrócenia się), przeto pominiemy tę wartość i otrzymamy z dostatecznym przybliżeniem:

$$a \cong \frac{Q \cdot s}{\left(\frac{N^2}{A}\right)} \cdot \vartheta_0 \dots \dots \dots (410)$$

Odchylenie to jest przeto bardzo małe, i o tyle będzie mniejsze, o ile bąk więcej zabezpieczony jest od upadku. Wierzchołek przeto bąka zakresła pewną krzywą okresową, zawartą pomiędzy równoleżnikami, określonymi kątami:

$$\vartheta_0 \quad i \quad \left(\vartheta_0 + 2 \cdot \frac{Q \cdot s}{\left(\frac{N^2}{A}\right)} \cdot \vartheta_0\right) \dots \dots \dots (411)$$

Równaniem ruchu harmonicznego wierzchołka bąka jest całka równania 408-ego; która ma postać; porówn. § 10-ty tego tomu:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \cos\left(\frac{N}{A} \cdot t + \beta\right);$$

gdzie α i β są wielkości stałe; które obliczymy z następujących początkowych warunków ruchu:

$$\text{dla } t = 0; \quad \varepsilon = -a; \quad \text{oraz} \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = 0;$$

po podstawieniu otrzymamy przeto

$$\beta = 0; \quad \alpha = -a,$$

i wreszcie po podstawieniu tych wartości oraz wartości a z równania 410-ego:

$$\varepsilon = -\frac{Q \cdot s \cdot A}{N^2} \cdot \vartheta_0 \cdot \cos\left(\frac{N}{A} \cdot t\right) \dots \dots \dots (412)$$

Okres T_n podwójnego wahnięcia wierzchołka bąka obliczymy ze wzoru 109-tego części 1-iej, utożsamiając równ. 408-me z równaniem 103-iem; a więc

$$T_n = 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{N^2}{A^2} - \frac{Q \cdot s}{A}}} \cong 2\pi \cdot \frac{A}{N} \dots \dots \dots (413)$$

Ażeby obliczyć prędkość $\frac{d\psi}{dt}$, z jaką obraca się płaszczyzna biegunowa około osi z , rys. 111-ty, t. j. prędkość precesyi, należy wartość φ_0 z równ. 402-ego podstawić do równ. 405-go, a otrzymamy szukaną prędkość precesyi:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{N}{A} \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\sin \vartheta} \cong \frac{N}{A} \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta};$$

w celu wyrażenia tej prędkości w funkcji czasu podstawimy w to równanie

$$\vartheta = \vartheta_0 + a + \varepsilon,$$

a zważywszy, że wartość $(a + \varepsilon)$, jako bardzo małą w porównaniu z wartością ϑ_0 , pominiemy w mianowniku, otrzymamy:

$$\frac{d\psi}{dt} \cong \frac{N}{A} \cdot \frac{(a + \varepsilon)}{\vartheta_0};$$

a po podstawieniu wartości a i ε z równania 410-go i 412-ego otrzymamy:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Q \cdot s}{N} \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{N}{A} \cdot t \right) \right]. \quad \dots \quad (414)$$

Obrót przeto płaszczyzny biegunowej około osi pionowej, t. j. prędkość precesyi jest złożona z prędkości stałej, która równa się wartości, obliczonej poprzednio w pierwszym przybliżeniu, równanie 399-te; oraz z ruchu okresowego; wyraz przeto drugi w tych nawiasach, odgrywa rolę poprawki, która wynika z dokładniejszych założeń.

Z równania tego jeszcze wynika, że wartość prędkości precesyi waha się pomiędzy zerem i wartością $2 \cdot \frac{Q \cdot s}{N}$; a wyraz 399-ty daje tylko średnią prędkość.

Dla $t = 0$; oraz dla $t = 2\pi \cdot \frac{A}{N}$; prędkość $\frac{d\psi}{dt} = 0$; okres przeto T_p całkowitej zmiany ruchu precesyjnego.

$$T_p \cong 2\pi \cdot \frac{A}{N}; \quad \dots \quad (415)$$

i jest równy okresowi T_n , równ. 413-te, podwójnego wahnięcia nutacyjnego. Wynik ten jest bezpośrednio zrozumiały; nutacja bowiem jest w związku dynamicznym z precesją. Jeżeli np. w pewnej chwili prędkość precesyi = 0, to nie powstaje w danej chwili działania, którego by wektor był styczny do równoleżnika; w tej więc chwili nutacja musi być także = 0, o ile błąk nie otrzymał tej prędkości z zewnątrz. Okresy przeto zmian ruchów precesyi i nutacyi w danych warunkach muszą również występować jednocześnie.

Kąt ψ_a , jaki tworzą z sobą płaszczyzny biegunowe, przechodzące przez dwa po sobie następujące miejsca, w których $\frac{d\psi}{dt} = 0$, obliczymy z równ. 414-tego; gdy je scałkujemy pomiędzy granicami

$$t = 0 \quad \text{i} \quad t = 2\pi \cdot \frac{A}{N};$$

kąt ten, po wykonaniu tych działań:

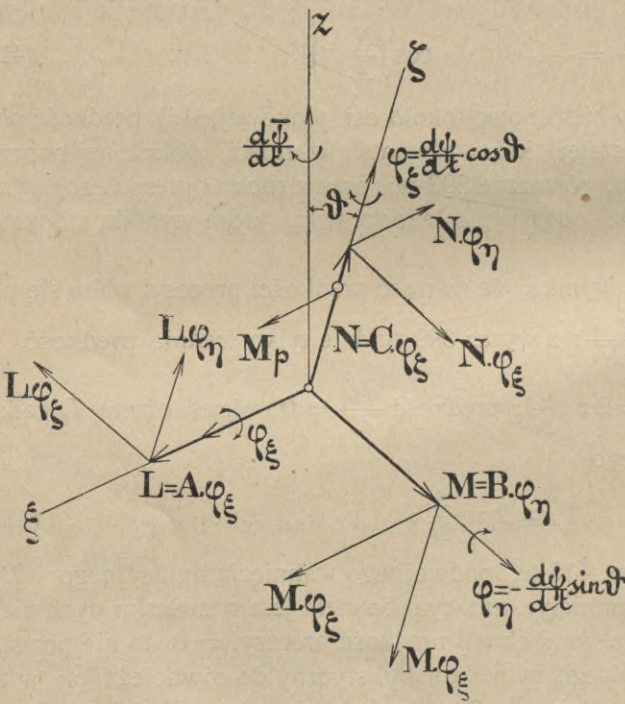
$$\psi_a = 2 \pi \cdot Q \cdot s \cdot \frac{A}{N^2} \dots \dots \dots (416)$$

Ruch więc wierzchołka bąka składa się z dwóch ruchów; z ruchu wahadłowego w płaszczyźnie biegunowej (ruch nutacyjny równ. 412) i z obrotu tej płaszczyzny około pionu z prędkością zmienną okresową, lecz zawsze jednozrotną; równ. 414-te.

Z tych obliczeń, opartych na założeniu, że wektor momentu ilości ruchu bąka pokrywa się w każdej chwili z jego osią, wynika; że koniec tego wektora zakreśla pewien łuk w płaszczyźnie biegunowej, co jest sprzeczne z równaniem momentu, równ. 396-te, które wyraża, że przyrost tego wektora powinien być równoległy do wektora momentu sił zewnętrznych, t. j. prostopadły do płaszczyzny biegunowej. Unikniemy tej sprzeczności, jeżeli przyjmiemy najogólniejszy przypadek, który ściśle odpowiada zachodzącym w rzeczywistości warunkom, że moment ilości ruchu i oś chwilowego obrotu bąka tworzą pewne kąty z jego osią.

171. Dokładne równania dynamiczne ruchu bąka. W celu obliczenia

ruchu bąka na podstawie tych najogólniejszych założeń, oznaczmy jak poprzednio rzuty wektora chwilowej prędkości obrotu bąka na osi ξ , η , ζ literami φ_ξ , φ_η i φ_ζ ; oraz oznaczmy literami L , M , N rzuty na te osi wektora momentu \bar{M}_v ilości ruchu, jaką on posiada w danej chwili; a w celu obliczenia prędkości końca tego wektora wyobraźmy sobie, że wektor \bar{M}_v obraca się kolejno około tych osi współrzędnych, zamiast około jednej φ , co jest zgodne z prawem superpozycji ruchów; przy tem wyobraźmy sobie, że zamiast wektora \bar{M}_v obracać będziemy trzy jego składowe \bar{L} , \bar{M} , \bar{N} ;



Rys. 112.

prędkości bowiem końców tych trzech wektorów będą składowymi prędkości końca wektora \bar{M}_v . Obrót przeto około osi ξ da wektory prędkości końców składowych M i N , których wyrazy są

$$M \cdot \varphi_\xi \quad \text{i} \quad N \cdot \varphi_\xi;$$

porówn. rys. 112-ty; obrót zaś tych składowych około osi η i następnie około osi ζ da nowe wektory tych prędkości; razem więc otrzymamy sześć składowych wektorów prędkości końca wektora \bar{M}_v ; wektory te są pokazane na rys. 112-tym; odwró-

ciwszy następnie ich zwroty otrzymamy sześć momentów sił odśrodkowych, które łącznie z momentami sił zewnętrznych wywołują przyśpieszenia obrotowe bąka około każdej z osi współrzędnych. Zestawiając kolejno wzory momentów względem osi ξ , η i ζ , otrzymamy następujące równania dynamiczne:

$$\begin{aligned} N \cdot \varphi_\eta - M \cdot \varphi_\zeta + Qs \cdot \sin \vartheta &= \frac{dL}{dt}; \\ L \cdot \varphi_\zeta - N \cdot \varphi_\xi &= \frac{dM}{dt}; \\ M \cdot \varphi_\xi - L \cdot \varphi_\eta &= \frac{dN}{dt} \dots \dots \dots (417) \end{aligned}$$

Po podstawieniu w te równania:

$$L = \varphi_\xi \cdot A; \quad M = \varphi_\eta \cdot A; \quad N = (\varphi_\zeta + \omega) C;$$

otrzymamy trzy równania różniczkowe, jednoczesne, z trzema zmiennymi φ_ξ , φ_η , φ_ζ , oraz ze zmienną ϑ .

Równania te są następujące:

$$\begin{aligned} (\varphi_\zeta + \omega) \cdot \varphi_\eta \cdot C - \varphi_\eta \cdot \varphi_\zeta \cdot A + Q \cdot s \cdot \sin \vartheta &= \frac{d\varphi_\xi}{dt} \cdot A; \\ \varphi_\xi \cdot \varphi_\zeta \cdot A - (\varphi_\zeta + \omega) \cdot \varphi_\xi \cdot C &= \frac{d\varphi_\eta}{dt} \cdot A; \\ 0 &= \frac{d(\varphi_\zeta + \omega)}{dt} \cdot C \dots \dots \dots (418) \end{aligned}$$

* Podstawimy następnie wartości zmiennych φ_ξ , φ_η i φ_ζ z równań 402-gich i otrzymamy:

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + (C \cdot \omega_0 - A \cdot \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos \vartheta) \cdot \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \vartheta &= Q \cdot s \cdot \sin \vartheta; \\ A \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{d\vartheta}{dt} \cdot (2A \cdot \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos \vartheta - C \cdot \omega_0) &= 0; \\ \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos \vartheta + \omega &= \omega_0 \dots \dots \dots (419) \end{aligned}$$

w których ω_0 oznacza bezwzględną prędkość wirowania w chwili puszczenia bąka. W pierwsze dwa równania wchodzi tylko zmienne ψ i ϑ i zmienna niezależna t , wobec tego z tych równań obliczyć można ruch osi bąka; a wtedy z trzeciego — prędkość jego względną ω ; prędkość bowiem jego bezwzględna, t. j. względem przestrzeni kinetycznej jest podług tego równania stała i równa prędkości początkowego wirowania. Całki jednakże tych równań niedadzą się wyrazić funkcjami znanymi; analiza przeto powyższych równań dynamicznych polegać może tylko na wprowadzeniu różnych skrótów, podobnych do skrótów, jakie stosowaliśmy w § 47-ym lub w § 61-szym; oraz jakie stosowaliśmy przy obliczaniu wahadeł; a skrócenia te doprowadzą nas do równań poprzednio tutaj wyprowadzonych; opartych bezpośrednio na założeniach, upraszczających obliczenie.

172. Inne równania dynamiczne ruchu bąka. Zamiast powyższych trzech równań momentów ilości ruchu, określających ruch bąka, można również

napisać inne równania dynamiczne; możemy np. napisać jedno równanie równowartości pracy i energii kinetycznej), (które można również otrzymać jako jedną z pierwszych całek powyższych równań momentów; stosując do tego prawidła, podane w § 125-tym); oraz dwa równania momentów względem odpowiednio obranych osi; jedno np. względem osi pionowej z , a drugie względem osi bąka; moment bowiem siły ciężkości względem tych osi = 0. Równanie energii kinetycznej napiszemy na zasadzie wzoru 269-tego i otrzymamy:

$$d \left[\frac{1}{2} A (\varphi_{\xi}^2 + \varphi_{\eta}^2) + \frac{1}{2} C (\varphi_{\zeta} + \omega)^2 \right] = d(Q \cdot s \cdot \cos \vartheta);$$

a po podstawieniu odpowiednich wartości z równania 402-go i po scałkowaniu otrzymamy:

$$1) \quad \frac{1}{2} A \left[\left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \cdot \sin^2 \vartheta \right] + \frac{1}{2} C \cdot \omega_0^2 + Q \cdot s \cos \vartheta = K_1,$$

gdzie K_1 jest stałą, obliczalną z warunków ruchu początkowego.

Równanie momentu ilości ruchu względem osi z , napiszemy; zważywszy, że moment ilości ruchu względem osi z jest rzutem na tę oś wektora momentu ilości ruchu bąka; lub też jest sumą rzutów na tę oś trzech jego składowych L, M, N ; równanie to jest następujące; rys. 112-ty:

$$\frac{d}{dt} [-M \cdot \sin \vartheta + N \cdot \cos \vartheta] = 0;$$

a po podstawieniu w nie wartości z równ. 402-gich, i po scałkowaniu otrzymamy

$$2) \quad C \cdot \omega_0 \cdot \cos \vartheta + A \cdot \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \vartheta = K_2;$$

w którym K_2 obliczymy z warunków ruchu początkowego.

Trzecie równanie ma wyrażać moment ilości ruchu względem osi bąka; jest ono następujące:

$$\frac{d}{dt} [C (\varphi_{\zeta} + \omega)] = 0;$$

lub po scałkowaniu

$$3) \quad (\varphi_{\zeta} + \omega) = \omega_0.$$

Te trzy równania możemy otrzymać również z równań 419-ych drogą algebraicznych przekształceń, stosując do tego twierdzenie z § 125-tego.

173. Ruch precesyjny i nutacyjny. Obrót płaszczyzny, przechodzącej przez oś bąka i pionową z , nazwaliśmy ruchem precesyjnym; jeżeli ten obrót jest jednostajny i oś giroskopu tworzy z pionową, podczas ruchu, kąt stały, to ruch taki nazwano ruchem precesyjnym jednostajnym; jeżeli zaś oś ta podczas ruchu bąka zmienia kąt nachylenia względem pionu, to ruch ten nazywają pozornie precesyjnym, a składowy ruch osi bąka, jaki wykonywa ta oś w płaszczyźnie biegunowej,—ruchem nutacyjnym; miarą ruchu precesyjnego jest prędkość $\frac{d\psi}{dt}$; miarą zaś

ruchu nutacyjnego jest prędkość $\frac{d\vartheta}{dt}$; nazwy te wzięte są z astronomii, gdzie są stosowane przy opisie ruchu kuli ziemskiej. Stosując te nazwy do ruchu bąka, powiemy, że bąk ciężki, wsparty jednym punktem swej osi, wykonywa wogóle ruch precesyjny połączony z nutacyjnym.

Nasuwa się teraz pytanie, czy dany bąk może wykonać i przy jakich warunkach może wykonać ruch precesyjny jednostajny, t. j. ruch, w którym oś bąka zakreśla stożek prosty o półotworze ϑ_0 .

W pierwszej chwili puszczenia bąka, bez nadania osi jego pewnej prędkości, oś ta pod działaniem momentu siły ciężkości bąka stara się pochylić; jeżeli zaś chcemy, ażeby ta oś nie pochyliła się, jak tego wymaga dane zadanie, należy zrównoważyć moment siły ciężkości innym momentem, np. momentem działania giroskopowego, które bąk powinien posiadać w chwili puszczenia go; ażeby przeto powstał ruch precesyjny jednostajny, należy bąkowi udzielić oprócz prędkości wirowania, jeszcze pewnej prędkości precesyjnej $\left(+\frac{d\vartheta}{dt}\right)$, wtedy bowiem powstanie działanie, równoległe, lecz przeciwne zwrotowi momentu siły ciężkości. Prędkość tę obliczymy z warunku równowagi momentu siły ciężkości i działania giroskopowego; równanie to jest następujące, porówn. rys. 112-ty; lub równanie pierwsze równań 417-ych:

$$N_0 \cdot \varphi_{\eta,0} - M_0 \cdot \varphi_{\zeta,0} + Q \cdot s \cdot \sin \vartheta_0 = 0;$$

w którym wskaźniki zero oznaczają, że wielkości, zaopatrzone nimi, odnoszą się do odpowiednich wielkości w początku ruchu.

Po podstawieniu odnośnych wartości z równań 402-gich, oraz po skróceniu przez $\sin \vartheta$, otrzymamy równanie:

$$(C-A) \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0^2 \cdot \cos \vartheta_0 + C \cdot \omega_0 \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0 - Q \cdot s = 0; \quad (420)$$

Z równania tego obliczymy np. prędkość $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0$, jaką należy nadać osi bąka w chwili jego puszczenia; gdy dane będzie nachylenie ϑ_0 osi bąka i jego prędkość wirowania ω_0 względem płaszczyzny biegunowej oraz—momenty bezwładności A i C .

Lecz wartość obliczona z tego równania zapewnia nam zrównoważenie momentu ciężaru bąka momentem sił odśrodkowych tylko w chwili puszczenia bąka; t. j. zachowanie warunków ruchu początkowego, wyrażonych powyższem równaniem, zapewnia nam precesję jednostajną tylko w chwili puszczenia bąka; czy jednak ten ruch pozostanie takim w dalszym swym przebiegu, równanie powyższe nie zapewnia tego. Ażeby zbadać jaki ruch wykona bąk przy określonym z powyższego równanie ruchu początkowym; należałoby obliczyć $\frac{d\vartheta}{dt}$ w funkcji czasu

i w wartościach początkowych warunków ruchu; a po podstawieniu wartości prędkości początkowej z powyższego równania, powinniśmy otrzymać, o ile ruch ten będzie precesyjny jednostajny, że $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$.

Postępowanie to zastąpimy jednakże następującym rozumowaniem, na mocy którego dojdziemy do pewnych przypuszczeń, określających dalszy ruch bąka. Ponieważ w chwili puszczenia bąka moment siły ciężkości jest zrównoważony momentem sił odśrodkowych bąka, przeto oś jego już się nie pochyli, jak to było poprzednio, i w okresie czasu Δt wykona taki ruch, jaki wykona giroskop wirujący z pewną prędkością początkową, na który nie działają siły zewnętrzne; a że ruchem

takim jest ruch precesyjny jednostajny, wierzchołek przeto zakresli w pierwszej chwili ruchem jednostajnym cząstkę koła; a że w następnej chwili zajdzie ten sam stosunek pomiędzy obydwoma rodzajami momentów, gdyż oś bąka zachowa prędkość nadaną, i ten stosunek będzie ciągle się powtarzał; ruch przeto bąka będzie przy tych warunkach początkowych, ciągle precesyjnym jednostajnym.

174. Siła odporowa punktu podparcia bąka. Pżyjęliśmy w poprzednim przykładzie, że koniec osi bąka spoczywa na płaszczyźnie o tyle chropowatej, że koniec ten nie może się ślizgać po tej płaszczyźnie. Zadanie obecne polega na obliczeniu siły, jaką należy przyłożyć do końca osi bąka, gdybyśmy usunęli płaszczyznę podparcia, czyli należy obliczyć siłę odporową podstawy bąka. Oznaczmy siłę tę literą \bar{R} nieznaną co do kierunku i wielkości, o której tylko wiemy, że przechodzi ona przez punkt podparcia bąka. Ponieważ uważamy, że ruch bąka jest nam już znany, przeto obliczymy siły nań działające z równania ruchu środka jego masy; równanie to jest następujące

$$\bar{R} + \bar{Q} = m \bar{p}_s \dots \dots \dots (421)$$

Obliczyliśmy, że ruch środka masy bąka jest złożony z ruchu w płaszczyźnie biegunowej, który uważać będziemy za względny i z obrotu w tej płaszczyźnie, który uważać będziemy za ruch unoszący; przyspieszenia przeto punktów jego składają się z przyspieszeń tych dwóch ruchów, § 92-gi tomu I-go. W celu ich obliczenia obierzmy układ współrzędnych w płaszczyźnie biegunowej z początkiem w punkcie podparcia bąka; oś x tego układu obierzmy poziomo; oś z pionowo ku górze i oś y pionowo do nich, a napiszemy równanie 421-sze w postaci algebraicznej,

$$R_x = m p_{s,x}; \quad R_z - Q = m p_{s,z} \dots \dots \dots (422)$$

Oznaczmy literami $p_{s,t}$ i $p_{s,n}$ przyspieszenia styczne i normalne ruchu względnego środka masy; t. j. przyspieszenia ruchu po kole, leżącym w płaszczyźnie biegunowej, literą zaś $p_{s,u}$ — przyspieszenie unoszące,

t. j. przyspieszenie ruchu po kole poziomem, to rzuty przyspieszenia środka masy na osi wyrazimy sumą rzutów tych składowych na osi x, y, z ; wyrazy tych rzutów odczytamy z rysunku 113-tego:

$$p_{s,x} = p_{s,t} \cdot \cos \vartheta - p_{s,n} \cdot \sin \vartheta - p_{s,u};$$

$$p_{s,z} = -p_{s,t} \cdot \sin \vartheta - p_{s,n} \cdot \cos \vartheta; \dots \dots \dots (423)$$

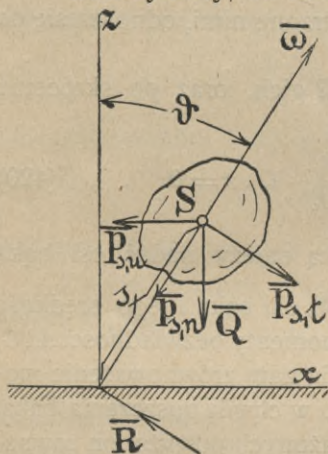
wartości zaś przyspieszeń składowych wyrazimy wzorami

$$p_{s,t} = s \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}; \quad p_{s,n} = s \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2; \quad \text{oraz} \quad p_{s,u} = s \cdot \sin \vartheta \cdot \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2;$$

a po podstawieniu tych wartości w równania 423-cie otrzymamy:

$$p_{s,x} = s \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \cos \vartheta - s \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \cdot \sin \vartheta - s \cdot \sin \vartheta \cdot \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2;$$

$$p_{s,z} = -s \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \cdot \sin \vartheta - s \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \cdot \cos \vartheta.$$



Rys. 113.

W tych wzorach uwzględniliśmy tylko jedną składową przyspieszenia unoszącego,—przyspieszenie dośrodkowe; chcąc jednakże być zupełnie ścisłym, należałoby jeszcze uwzględnić przyspieszenie styczne tego ruchu i przyspieszenie złożone (Coriolisa), lecz rachunku tego tutaj nie podamy.

Jeżeli bąk jest w ruchu precesyjnym jednostajnym, to przyspieszenia względne odpadają, a pozostanie tylko przyspieszenie unoszące jako dośrodkowe; w tym razie przeto składowa pionowa siły odporowej równa się ciężarowi bąka; a składowa pozioma $R_x = -m p_u$.

Wartości pochodnych ϑ i ϕ obliczyliśmy już w funkcji czasu w § poprzednim z różnym stopniem dokładności; możemy przeto je bezpośrednio zastosować do obliczenia siły odporowej; a przytem, zważywszy, że odchylenia osi bąka od kąta ϑ_0 są niewielkie; możemy podstawić w tych wzorach $\cos \vartheta = \cos \vartheta_0$; oraz $\sin \vartheta = \sin \vartheta_0$, co znacznie uprości obliczenie.

Uwzględnienie w tem obliczeniu wszystkich szczegółów kinematycznych, np. przyspieszenie Coriolis'a, nie ma znaczenia dla celów praktycznych; gdyż w rzeczywistości ruch bąka odbywa się niezupełnie w tych warunkach fizycznych; jakie przyjęliśmy do obliczenia; rachunki przeto nasze posiadają i tak tylko przybliżony charakter.

175. Równania dynamiczne Euler'a. Przytoczone obliczenia ruchu giroskopów, i w ogóle ruchu kulistego brył materyalnych są ujęte w ogólną postać algebraiczną przez tak zwane równania Euler'a. Równania te wyrażają znaną już nam zasadę momentu ilości ruchu, równ. 276-te; możnaby je przeto otrzymać z tego równania drogą algebraicznych przekształceń.

Do zestawienia jednakże tych równań zastosujemy w tem miejscu pojęcie momentu sił odśrodkowych, które stosowaliśmy w poprzednich rozpatrywaniach i w tym celu wyobrazimy sobie układ osi prostokątnych, przechodzących przez punkt, około którego bryła się obraca, i ściśle związanych z daną bryłą. Osi te mogły by być obrane dowolnie w danej bryle; obierzemy je jednakże, ze względu na uproszczenia rachunkowe, jakie stąd wynikają, w kierunkach osi głównych elipsoidy bezwładności, zbudowanej w punkcie, około którego bryła dana się kręci.

Oznaczmy jak poprzednio prędkość chwilowego obrotu bryły wektorem $\bar{\varphi}$; a literami ξ , η i ζ osi główne elipsoidy bezwładności, które są jednocześnie osiami spółrzędnych; literami zaś φ_ξ , φ_η i φ_ζ — rzuty tej prędkości na obrane osi; jeżeli następnie oznaczymy literami A , B i C wartości momentów bezwładności danej bryły względem obranych osi spółrzędnych, to rzuty L , M , N wektora momentu, stosownie do równań 261-ych tego tomu, ilości ruchu \bar{M}_0 danej bryły na te osi wyrazimy wzorami:

$$L = A \cdot \varphi_\xi; \quad M = B \cdot \varphi_\eta; \quad N_\zeta = C \cdot \varphi_\zeta \quad \dots \quad (424)$$

Obracając następnie z prędkościami φ_ξ , φ_η i φ_ζ daną bryłę kolejno około obranych osi spółrzędnych, zamiast obrócić ją około osi $\bar{\varphi}$, otrzymamy, rys. 114-ty, sześć wektorów działań giroskopowych, t. j. sześć składowych wektorów momentu sił odśrodkowych, które łącznie z rzutami wektora momentu sił zewnętrznych, działających na daną bryłę, równają się, równ. 280-te, iloczynowi z odnośnych momentów bezwładności i z przyspieszeń kątowych.

Zestawiając te równania kolejno dla każdej osi oddzielnie, otrzymamy trzy równania, zwane równaniami dynamicznymi Euler'a:

$$N \cdot \varphi_{\eta} - M \cdot \varphi_{\zeta} + M_{P, \xi} = \frac{dL}{dt};$$

$$L \cdot \varphi_{\zeta} - N \cdot \varphi_{\xi} + M_{P, \eta} = \frac{dM}{dt};$$

$$M \cdot \varphi_{\xi} - L \cdot \varphi_{\eta} + M_{P, \zeta} = \frac{dN}{dt}.$$

Podstawiawszy następnie z równań 424-tych odnośne wartości rzutów wektora momentów ilości ruchu, otrzymamy po zgrupowaniu wyrazów:

$$A \cdot \frac{d\varphi_{\xi}}{dt} + (B-C) \cdot \varphi_{\eta} \cdot \varphi_{\zeta} = M_{P, \xi};$$

$$B \cdot \frac{d\varphi_{\eta}}{dt} + (C-A) \cdot \varphi_{\xi} \cdot \varphi_{\zeta} = M_{P, \eta};$$

$$C \cdot \frac{d\varphi_{\zeta}}{dt} + (A-B) \cdot \varphi_{\xi} \cdot \varphi_{\eta} = M_{P, \zeta} \dots \dots \dots (425)$$

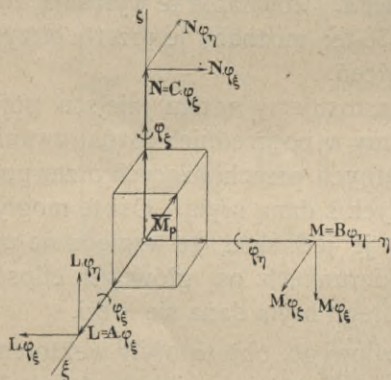
W równania te wchodzi jak i w poprzednim przypadku trzy zmienne φ_{ξ} , φ_{η} i φ_{ζ} oraz współrzędne, określające położenie wektora momentu sił zewnętrznych względem przestrzeni nieruchomej (kinetycznej). Ażeby przeto móc scałkować te równania, należy wogóle zmienne φ_{ξ} , φ_{η} i φ_{ζ} wyrazić współrzędnymi układu nieruchomego; a wtedy otrzymamy wogóle trzy jednoczesne równania różniczkowe z trzema zmiennymi zależnymi od czasu, które po scałkowaniu dadzą związki pomiędzy współrzędnymi położenia bryły i czasem.

Postępowanie to jednakże chociaż jest zupełnie słuszne i ściśle, napotyka wogóle na tak znaczne trudności matematyczne, że zmuszeni jesteśmy i w tym razie uciekać się do różnych uproszczeń, polegających na

usuwaniu z rachunku pewnych wyrazów, których wartości wywierają mały wpływ na przebieg zjawiska ruchu, a niepomernie uproszczają obliczenia.

W celu zakończenia sposobu obliczenia ruchu, podanego przez Euler'a, który dla metodycznego postępowania jest niezbędny, podamy układ współrzędnych, stosowany przez Euler'a i damy związki kinematyczny pomiędzy zmiennymi φ_{ξ} , φ_{η} i φ_{ζ} z jednej strony, a współrzędnymi, wyznaczającymi położenie bryły w przestrzeni kinetycznej, z drugiej strony; związki te nazwiemy równaniami geometrycznymi Euler'a.

176. Równania geometryczne Euler'a. W celu określenia położenia układu osi ξ , η , ζ , sztywno związanych z kręcącą się bryłą i razem z nią poruszających się względem przestrzeni nieruchomej (kinetycznej), przeprowadźmy przez



Rys. 114.

punkt obrotu osi nieruchome (x, y, z) wzajemnie prostopadłe; i oznaczymy prostą przecięcia się płaszczyzny (x, y) z płaszczyzną (ξ, η) literą W ; tę prostą nazwiemy linią węzłów; a położenie ruchomego układu (ξ, η, ζ) względem układu nieruchomego (x, y, z) wyznaczą następujące kąty, zwane kątami Euler'a:

1) kąt ϑ , jaki tworzy płaszczyzna (ξ, η) z płaszczyzną (x, y) ; kąt ten równa się kątowi, jaki tworzy oś z z osią ζ ; jako kąt pomiędzy prostopadłymi do tych płaszczyzn;

2) kąt ψ , jaki tworzy oś x z linią węzłów;

3) kąt ν , jaki tworzy oś ξ z prostą W . Kąt ϑ wyznacza zatem położenie płaszczyzny (ξ, η) względem płaszczyzny (x, y) ; kąt ψ wyznacza położenie linii węzłów na płaszczyźnie x, y ; kąt zaś ν wyznacza położenie osi ξ na płaszczyźnie (ξ, η) ; a więc wyznacza również położenie osi η . W ten sposób te trzy kąty ϑ, ψ, ν wyznaczają położenie osi (ξ, η, ζ) względem osi (x, y, z) ; w przypuszczeniu, że początki tych układów są wspólne.

Ażeby przeprowadzić bryłę materyalną, sztywno związaną z układem współrzędnych (ξ, η, ζ) , z położenia określonego kątami:

$$\vartheta, \psi, \nu;$$

do położenia nieskończenie bliskiego; określonego kątami:

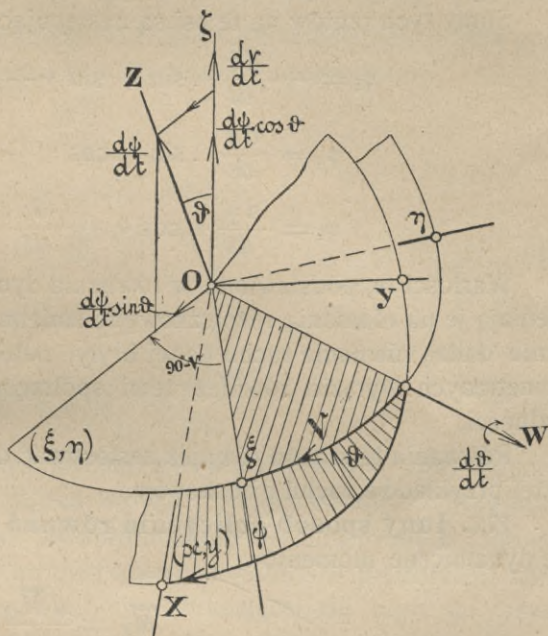
$$(\vartheta + \Delta\vartheta); \quad (\psi + \Delta\psi); \quad (\nu + \Delta\nu);$$

należy dany układ obrócić około

pewnej osi; lecz na zasadzie prawa superpozycji ruchów; można zastąpić ten obrót trzema innymi obrotami; a mianowicie obrotem około osi z o kąt $\Delta\psi$; następnie około osi W o kąt $\Delta\vartheta$ i wreszcie około osi ζ o kąt $\Delta\nu$. Prędkość przeto chwilowego obrotu z jaką przeprowadzamy daną bryłę wraz z układem (ξ, η, ζ) z jednego położenia do drugiego nieskończenie bliskiego, składa się z trzech prędkości składowych:

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dt}; \quad \frac{d\bar{\psi}}{dt}; \quad \frac{d\bar{\nu}}{dt};$$

o kierunkach osi W, z i ζ , rys. 115-ty; których wypadkowa jest prędkością właściwą $\bar{\varphi}$. Ponieważ suma algebraiczna rzutów tych wektorów na dowolną oś, jest rzutem prędkości właściwej $\bar{\varphi}$ na tę oś, rzuty przeto $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ tej prędkości obliczymy jako sumy rzutów tych trzech składowych wektorów na każdą z osi ξ, η i ζ . W celu ułatwienia tego obliczenia, rozłożymy prędkość $\frac{d\psi}{dt}$ w kierunku osi ζ i w kierunku



Rys. 115.

osi pomocniczej, prostopadłej do niej i leżącej w płaszczyźnie kąta ϑ . Wartości tych składowych są następujące: w kierunku osi ζ

$$\frac{d\psi}{dt} \cdot \cos \vartheta;$$

i w kierunku osi pomocniczej

$$\frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \vartheta;$$

zamiast przeto rzutować trzy wektory składowe na każdą z osi ξ , η i ζ ; rzutować będziemy na nie cztery wektory składowe.

Sumy tych rzutów na te osi są następujące:

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi} &= -\frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \nu + \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \cos \nu; \\ \varphi_{\eta} &= \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \nu + \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \sin \nu; \\ \varphi_{\zeta} &= \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos \vartheta + \frac{d\nu}{dt} \dots \dots \dots (426) \end{aligned}$$

Wartości te, podstawione w równania dynamiczne Euler'a, równ. 425-te, zamieniają je na równania różniczkowe ze zmiennymi ϑ , ψ i ν ; równania te po scałkowaniu dadzą równanie ruchu danej bryły; należy tylko rzuty wektora momentu sił zewnętrznych wyrazić również temi spółrzednymi, co nie przedstawia wogóle trudności.

Równania te można również zastosować do obliczenia ruchu, przytoczonych wyżej przykładów ruchu giroskopów.

177. Inny sposób obliczenia równań dynamicznych Euler'a. Równania dynamiczne momentów

$$\overline{M}_p = \frac{d\overline{M}_v}{dt};$$

określa zupełnie ruch około punktu nieruchomego bryły materialnej, pozostającej pod działaniem sił zewnętrznych; bezpośrednio jednakże zastosowanie tego równania, do obliczenia ruchu takiej bryły, jest niedogodnem z tego względu, że obliczenie pochodnej momentu ilości ruchu, czego wymaga to równanie, jest pod względem rachunkowym zbyt złożone; bo chociaż z równań 260-tych tego tomu, które wyrażają rzuty wektora momentu ilości ruchu na osi nieruchome, możnaby obliczyć rzuty tej pochodnej a z nich i samą pochodną, gdyby momenty I były wielkościami niezależnymi od czasu; lecz wielkości te są funkcjami czasu, i ta okoliczność sprawia właśnie trudności obliczenia pochodnej momentu ilości ruchu.

Obliczenie obrotu bryły około osi nieruchomej, któreśmy przeprowadzili w § 126-tym i 159-tym nie przedstawiało tych trudności; wartość bowiem momentu bezwładności I_{φ} był w tym razie niezmienną; a wartości momentów odśrodkowych $I_{2,3}$ i t. d. uczyniliśmy stałymi, przyjmąwszy, że płaszczyzny spółrzednych, względem których je obliczamy, obracają się razem z bryłą. W ogólnym przeto przypadku, w którym wzajemne położenie osi chwilowego obrotu względem bryły zmienia się, unikniemy tych trudności; jeżeli ruch bryły odniesiemy do układu spółrzednych, sztywno

związanych z daną bryłą i poruszających się z nią razem; względem bowiem tych osi wszystkie I będą wielkościami stałymi. W celu zastosowania tego sposobu przekształcimy równanie momentów w ten sposób; że przyrost wektora \bar{M}_v wyobrazimy sobie złożony z dwóch przyrostów: z przyrostu, jakiego on doznaje, poruszając się razem z bryłą i z przyrostu jakiego on doznaje, zmieniając swe położenie w samej bryle. Prędkość przeto jego końca składać się będzie z obrotu, jaki wykonywa bryła, jest to prędkość unosząca; tę prędkość wyrazimy wzorem wektorowym:

$$\mathbf{v} \bar{M}_v \cdot \bar{\varphi}$$

gdzie $\bar{\varphi}$ oznacza chwilową prędkość bryły; \mathbf{v} — z prędkości względnej, z jaką porusza się ten koniec w samej bryle; prędkość tę oznaczymy symbolicznie

$$\frac{d^* \bar{M}_v}{dt}$$

tak, iż powyższe równanie momentów przyjmie postać:

$$\bar{M}_P = \mathbf{v} \bar{M}_v \cdot \bar{\varphi} + \frac{d^* \bar{M}_v}{dt} \dots \dots \dots (427)$$

Jest to równanie Euler'a w postaci wektorowej.

Napisawszy je w postaci

$$-\mathbf{v} \bar{M}_v \cdot \bar{\varphi} + \bar{M}_P = \frac{d^* \bar{M}_v}{dt}; \dots \dots \dots (428)$$

znajdziemy w niem wyraz pojęć dynamicznych, na których oparliśmy poprzednie wyprowadzenie; lewa bowiem strona wyraża sumę momentu sił bezwładności, jakie powstają w bryle podczas jej obrotu około osi chwilowej $\bar{\varphi}$ i momentu sił zewnętrznych. Gdyby oś obrotu była unieruchomiona w przestrzeni, wtedy suma tych wyrazów równałaby się działaniu obracającej się bryły na łożyska osi; w danym zaś razie wyraża ona działanie, które zmienia położenie bryły.

Równanie to utożsamimy z równaniami 425-tymi, gdy rzutujemy je na osi główne danej bryły; i w tym celu dla obliczenia rzutów wyrazu pierwszego na obrane osi spórzędnych zastosujemy wzór 97-my tomu I-go; rzuty wyrazu drugiego napiszemy bezpośrednio; rzuty zaś wyrazu, stojącego po prawej stronie równania 428-mego, obliczymy, gdy weźmiemy pod uwagę twierdzenie, wyprowadzone w § 23-cim tomu I-go, że rzut pochodnej równa się algebraicznej pochodnej rzutu tego wektora i na zasadzie tego otrzymamy trzy składowe tej pochodnej $\frac{dL}{dt}$, $\frac{dM}{dt}$ i $\frac{dN}{dt}$; gdzie literami L , M i N oznaczyliśmy rzuty wektora \bar{M}_v na osi główne; w ten sposób otrzymamy równania 425-te.

10. Równania Lagrange'a.

178. Równania statyczne. O znaczeniu metody analitycznej Lagrange'a w mechanice wspomnieliśmy już w § 227-ym tomu I-go; a równania równowagi, zdobyte na tej drodze, wyraziliśmy wzorem 210-ym tegoż tomu. Ażeby niepowtarzać tutaj rachunku, podanego w § 229-ym tomu I-go dla przypadku równowagi sił, — do obliczenia ruchu układu, gdy siły te nie są w równowadze, nawiążemy nasze obliczenie do równania 210-go; nadamy mu tylko postać wektorową, przez co otrzymamy większą zwiezłość tych wzorów i przejrzystość dalszych przekształceń.

W tym celu wyobraźmy sobie, że położenie każdego punktu danego układu wyznaczone jest przez promień wodzący \bar{r}_k , wyprowadzony do k -tego punktu układu z dowolnie obranego lecz stałego punktu, zwanego początkiem układu; i przyjmiemy, że położenie tego wektora w przestrzeni jest określone przez pewne niezależne od siebie wielkości, które oznaczymy ogólnie, jak w § 229-ym tomu I-go, literami: $q_1, q_2 \dots q_s$, i nazwiemy je spólrzędnymi niezależnymi; wielkości te mogą oznaczać np. kąty, jakie tworzy pewien promień wodzący z obranymi osiami układu nieruchomego; lub odległości od pewnych osi, płaszczyzn i t. p.; o te szczegóły w danym razie nie idzie, a idzie tylko o to, ażeby te wielkości były od siebie niezależne, i jednoznacznie określały położenie k -tego promienia \bar{r}_k , a więc i odpowiedniego punktu. Takiemi spólrzędnymi są np. kąty σ i ψ w zadaniu § 154-go; lub odległości x_1 i x_2 w równ. 198-em tomu I-go, lub kąty α i β w temże zadaniu. Położenie przeto i wielkość promienia wodzącego wyrazić możemy wzorem ogólnym (¹):

$$\bar{r}_k = \bar{f}(q_1, q_2, \dots) \dots \dots \dots (429)$$

Jeżeli wszystkie zmienne, określające położenie danego promienia, otrzymają pewne przyrosty; to koniec promienia zakreśli częśćkę toru, jaką w rzeczywistości zakreśla punkt, którego położenie ten promień określa; przesunięcie to nazwiemy całkowitem lub rzeczywistym i oznaczymy je symbolem

$$d\bar{r}_k; \dots \dots \dots (430)$$

jako całkowitą różniczkę promienia, będącego funkcją, rów. 429-te, niezależnie zmiennych. Jeżeli zaś jednej tylko zmiennej niezależnej, którą oznaczymy literą q_s , nadamy przyrost, a pozostałe niezmiennimy, co zawsze możemy skutecznie ze względu na niezależność tych zmiennych; to przesunięcie k -tego punktu, jakie wskutek tego powstanie, nazwiemy przesunięciem niezależnym i oznaczymy je symbolem

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \cdot dq_s; \dots \dots \dots (431)$$

jako różniczkę cząstkową równania 429-go. Oczywiście jest, że przesunięcie niezależne nie jest tożsamem z przesunięciem rzeczywistym punktu; lecz jest jednym ze

(¹) Do szczególnych wzorów tego rodzaju zaliczyć można np. następujący:

$$\bar{r}_k = \bar{i} \cdot f_1(q_1, q_2, \dots) + \bar{j} \cdot f_2(q_1, q_2, \dots) + k \cdot \bar{f}_3(q_1, q_2, \dots),$$

który dla określonych wartości q określa ściśle położenie k -tego punktu danego układu.

składowych przesunięć, na jakie, na podstawie prawa superpozycji, wyobrazić sobie możemy każde przesunięcie rozłożone; co wyrazimy równaniem, które pod względem matematycznym jest zupełną różniczką równania 429-go;

$$d\bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \cdot dq_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \cdot dq_s \quad (432)$$

Równanie to możemy zobrazować sobie w postaci wieloboku wektorowego, którego składowe wyrażone są wyrazami stojącymi po prawej stronie równania, a wektor wypadkowy — wektorem, znajdującym się po lewej stronie tegoż równania.

Obliczmy teraz rzut wektora przesunięcia niezależnego $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \cdot dq_s$ na dowolną oś. W tym celu oznaczymy literą x_k rzut promienia \bar{r}_k na tę oś a, mając na uwadze twierdzenie § 23-iego tomu I-go, napiszemy ogólnie, że wartość tego rzutu:

$$\left| \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \cdot dq_s \right|_x = \frac{\partial x_k}{\partial q_s} \cdot dq_s \quad (433)$$

Mając to na uwadze, możemy wyrazić wzór 210-ty tomu I-go, jako sumę iloczynów skalarnych dwóch wektorów; z których jeden jest wektorem siły a drugi wektorem przesunięcia niezależnego; na podstawie tego wzór 210-ty przyjmie postać następującą:

$$\bar{P}_1 \cdot \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_s} + \bar{P}_2 \cdot \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_s} + \dots + \bar{P}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} + \dots = 0; \quad (434)$$

lub wogóle następującą:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \bar{P}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} = 0. \quad (435)$$

Jeżeli równanie to wyobrazimy sobie pomnożone przez dq_s , to, mając na uwadze równ. 431-sze, wyrażać ono będzie sumę prac sił zewnętrznych, przyłożonych do punktów danego układu, jakie one wykonają podczas przesunięcia niezależnego, określonego przyrostem dq_s ; równanie to przeto wypowiemy: gdy siły przyłożone do pewnego układu brył nie swobodnych, których ograniczenia ruchu mogą być wyrażone funkcją współrzędnych, są w równowadze, to suma prac tych sił podczas przesunięcia niezależnego, równa się zeru. A ponieważ dla każdego z przesunięć niezależnych można napisać takie równanie; przeto otrzymamy tyle równań, ile dany układ posiada współrzędnych niezależnych; inaczej mówiąc, ile posiada stopni swobody; takie jest znaczenie dynamiczne równań równowagi Lagrange'a.

Znamienną w tych równaniach jest ta okoliczność, że nie wchodzi w nie wielkości sił odporowych — wogóle sił połączeń, które są wywoływane warunkami ograniczającymi ruch brył. Omawialiśmy, co prawda, w § 216 tym tomu I-go, przypadki, w których praca sił odporowych równała się zeru; lecz to zachodziło tylko dla tych szczególnych przypadków, w których pewne punkty bryły ślizgały się po danych powierzchniach lub liniach i gdy przesunięcia były zgodne z warunkami ruchu danej bryły; i dla tych przypadków wykazaliśmy, że suma pracy sił odporowych równa się zeru. Równania zaś 435-te (przemnożone przez odpowiednie dq_s), wyrażają to samo twierdzenie, lecz dla szerszego zakresu przypadków; wyrażają

one mianowicie, że suma prac wszelkich sił połączeń, która powinna była wejść do sumy prac sił, działających na bryły, równa się zeru; i to nie tylko wtedy, gdy ograniczenia ruchu brył danego układu stanowią pewne linje lub powierzchnie, po których one się ślizgają, jakieśmy to przyjęli przy zestawieniu równania 193-go, lecz i wtedy, gdy pomiędzy spółrzednymi różnych punktów danego układu zachodzą najróżnorodniejsze połączenia, które dają się wyrazić funkcjami spółrzednych różnych punktów tego układu, a niekoniecznie jednego punktu, jak to było poprzednio. Ograniczenia ruchu brył danego układu wyraziliśmy w tych rozpatrywaniach związkiem matematycznym typu $L=0$; t. j. funkcją pomiędzy spółrzednymi różnych punktów; a dla rzutów sił połączeń, jakie mają zastępować te ograniczenia, znaleźliśmy w § 228-mym tomu I-ego wyrazy $\lambda \frac{dL}{dx_k}$; wzór przeto

$$\sum_{k=1}^{k=n} \lambda \left[\frac{\partial L}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_s} + \frac{\partial L}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_s} + \frac{\partial L}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_s} \right] = 0; \dots \dots \dots (435)$$

po przemnożeniu go przez dq_s , wyraża, że sumę prac, jaką siły połączeń wykonują podczas przesunięcia niezależnego, t. j. wywołanego zmianą tylko jednej spółrzednej q_s , równa się zeru. Na zasadzie tego równania, równanie 435-te jest bezpośrednim wynikiem równ. 190-go tomu I-go.

W technice mamy zwykle do czynienia z ograniczeniami ruchu, które polegają na połączeniu różnych punktów danych brył za pomocą prętów, sznurów, dźwigni, bloków; wreszcie za pomocą zetknięć z innymi bryłami i t. p. Oczywiście jest, że te wszystkie ograniczenia można wyobrazić sobie usuniętymi i zastąpionymi siłami połączeń; bez bliższego jednakże zbadania takiego mechanizmu, nie możemy sądzić czy suma prac tych sił podczas przesunięć niezależnych równać się będzie zeru czy nie. Ażeby zaś na to dać odpowiedź, powinniśmy, postępując metodycznie w myśl założeń Lagrange'a, starać się wyrazić te ograniczenia funkcjami spółrzednych pewnych punktów tych brył; a dopiero jeżeli istnienie takich funkcji okaże się możliwem, to na zasadzie równ. 435-go, wywnioskujemy, że suma prac sił połączeń, podczas przesunięć niezależnych równa się zeru. Postępowanie takie, aczkolwiek jest metodycznie słuszne, jest pod względem rachunku dosyć złożone, łatwiej jest bowiem nieraz, wniknąwszy w szczegóły danego mechanizmu, orzec, czy siły połączeń podczas przesunięć niezależnych nie wykonują pracy niż taki rachunek przeprowadzić. Jeżeli bryły rozpatrywanego układu ślizgają się po powierzchniach innych brył, tośmy już omówili, że praca sił odporowych równa się w tym razie zeru, o ile nie uwzględniamy oporów; jeżeli zaś pewne punkty różnych brył danego układu są połączone z sobą za pomocą lin, przekładni, bloków, przegubów i t. p. to stosując do tych mechanizmów zasady prac przystosowanych (porówn. § 217-ty tomu I-go) przyjdziemy do wniosku, że praca podczas tego przesunięcia sił, przyczepionych do końców takich lin, przekładni i t. p. (które to siły są siłami połączeń), równa się zeru, o ile te liny, przekładnie i t. p. się nieodkształcają; i o ile nie uwzględniamy oporów.

Zgodziwszy się przeto z jakichbydz zresztą względów, czy to matematycznych czy też fizycznych z tem, że podczas przesunięć niezależnych, praca sił wewnętrznych, występujących pomiędzy punktami każdej bryły, i sił połączeń, zastępują-

cych ograniczenia ruchu, równa się zeru, musimy przyjść do wniosku, mając na uwadze zasadę prac wyobraźalnych, § 214 i 216-tego tomu I-go, że w razie równowagi sił zewnętrznych, powinna suma prac tych sił i tylko tych sił, podczas przesunięcia niezależnego, równać się zeru; i ten też wniosek wyraża równanie 435-te; po pomnożeniu go przez dq_s .

179. Równania dynamiczne Lagrange'a. Ażeby wzór 435-ty lub 210-ty, wyrażający równowagę sił, przyłożonych do układu brył materyalnych, przekształcić na wzór dynamiczny, określający ruch danego układu, zastosujemy zasadę d'Alembert'a; i w tym celu do każdego punktu danego układu wyobrażymy sobie przyłożone siły bezwładności

$$- m_k \bar{p}_k;$$

wskutek czego otrzymamy nowy układ sił: sił zewnętrznych i sił bezwładności, które są z sobą w równowadze. W celu wyrażenia tej równowagi zastosujemy wzór 3-ci, podstawivszy w niego zamiast sił \bar{P}_k siły $(\bar{P}_k - m_k \bar{p}_k)$; a po przeniesieniu sum na przeciwne strony równania, otrzymamy równanie:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left[\bar{P}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \right] = \sum_{k=1}^{k=n} \left[m_k \bar{p}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \right] \dots \dots \dots (436)$$

Zadanie obecne polega na obliczeniu sumy, znajdującej się po prawej stronie tego równania; t. j. na wyrażeniu jej skończonemi wielkościami.

Na obliczenie tej sumy podał Lagrange nadzwyczaj wytworny pod względem rachunkowym sposób; obliczył ją mianowicie z wartości energii kinetycznej, jaką posiadają w pewnej chwili bryły danego układu; należy tylko wyrazić tę wartość spółrzednemi niezależnemi q_s , oraz ich pochodnemi względem czasu; jeżeli zaś mamy wartość energii wyrażoną innemi spółrzednemi (np. prostokątnemi); to należy znać związek geometryczny pomiędzy obydwoma rodzajami spółrzednych i uważać te spółrzedne, np. spółrzedne prostokątne, za funkcyje niezależnych zmiennych q_s .

Na podstawie podanych określeń — prędkość rzeczywista \bar{v}_k k -tego punktu danego układu brył wyrazić można z wyrazu 430-go lub 432-go, dzieląc go przez dt .

W pierwszym przypadku otrzymamy wyraz

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt};$$

w drugim zaś:

$$\bar{v}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \cdot q'_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \cdot q'_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \cdot q'_s \dots \dots \dots (437)$$

gdzie q'_1 i t. d. oznaczają pochodne $\frac{dq_1}{dt}$ i t. d.; pochodne te nazywać będziemy prędkościami zmiennych niezależnych.

Wzór 437-my rozumieć można w ten sposób, że prędkość właściwa każdego punktu układu składa się z prędkości częściowych tych punktów, jakie powstają podczas kolejnych zmian zmiennych niezależnych q_s .

Widzimy ze wzoru 437-go, że prędkość \bar{v}_k jest funkcją liniową prędkości zmiennych niezależnych q'_s ; wskutek czego pochodna cząstkowa prędkości właściwej \bar{v}_k względem prędkości każdej niezależnie zmiennej q'_s będzie się równać pochodnej cząstkowej promienia wodzącego; co wyrazimy równaniem

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q'_s} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \dots \dots \dots (438)$$

Przekształcimy teraz wyraz energii kinetycznej brył danego układu, stosownie do naszych potrzeb. Wyraz ogólny energii kinetycznej wszelkiego układu punktów jest następujący:

$$T = \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{1}{2} m_k \bar{v}_k^2 \right]; \dots \dots \dots (439)$$

obliczmy następnie pochodną cząstkową tej wielkości względem prędkości zmiennej niezależnej q'_s ; a zważywszy, że prędkość \bar{v}_k jest funkcją prędkości zmiennych q'_s , jak wskazuje równ. 437-me i 438-me, otrzymamy tę pochodną:

$$\frac{\partial T}{\partial q'_s} = \sum_{k=1}^{k=n} \left[m_k \bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \right]$$

Obliczmy teraz pochodną tego równania względem czasu, mając na uwadze, że prędkość v_k i prędkość $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$ są funkcjami czasu; pochodna ta

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_s} \right) = \sum \left[m_k \bar{p}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \right] + \sum \left[m_k \bar{v}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \right) \right] \dots \dots (440)$$

Przekształcimy następnie czynnik $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \right)$, stojący w drugiej sumie prawej

strony tego równania, na zasadzie przemienności⁽¹⁾ różniczkowań na wyraz $\frac{\partial}{\partial q_s} \left(\frac{d \bar{r}_k}{dt} \right)$; a podstawivszy w niego $\frac{d \bar{r}_k}{dt} = \bar{v}_k$, otrzymamy wyraz tej sumy jako cząstkową pochodną energii kinetycznej względem niezależnie zmiennej q_s ; t. j. wyraz ten może być zastąpiony przez wyraz:

(1) Otrzymamy również bezpośrednio ten wynik, jeżeli zważymy, że $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}$ są funkcjami zmiennych q_1, q_2 , i t. d.; a te q są funkcjami t ; przeto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \cdot \partial q_s} \cdot q'_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_2 \cdot \partial q_s} \cdot q'_2 + \dots$$

a ponieważ po obliczeniu $\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_s}$ z równania 437-mego otrzymamy wzór:

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_s \cdot \partial q_1} \cdot q'_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_s \cdot \partial q_2} \cdot q'_2 + \dots$$

który jest jednakowy z poprzednim; przemienność przeto różniczkowania jest i w tym razie uzasadniona.

$$\frac{\partial}{\partial q_s} \sum_{k=1}^{k=n} [\frac{1}{2} m_k \bar{v}_k^2];$$

lub też przez wyraz

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}.$$

A ponieważ pierwszy wyraz, stojący po tejże stronie równania 440-go, da się zastąpić przez wyraz sił z równania 436-tego; otrzymamy przeto zamiast równania 440-go następujące:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \sum_{k=1}^{k=n} \bar{P}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}; \quad \dots \dots \dots (441)$$

z którego obliczyć można każdy ruch bryły lub układu brył o każdej ilości stopni swobody; równań bowiem takich napiszemy tyle ile układ posiada niezależnych współrzędnych q_s , wyznaczających jego ruch; t. j. tyle, ile dany układ posiada stopni swobody.

180. Przykład. Jako przykład stosowania równań Lagrange'a do obliczenia ruchu układów przytoczymy obliczenie ruchu punktu materialnego ciężkiego, jaki on wykonywa po powierzchni kuli pod działaniem swego ciężaru. Ruch ten obliczyliśmy w § 60-tym części 1-szej tego tomu, stosując do tego zasady szczególne dynamiki; a mianowicie zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej oraz zasadę momentów; porówn. równanie 123-cie i 124-te. Ażeby zastosować metodę Lagrange'a do tego przykładu należy najpierw obrać współrzędne niezależne, które określą jednoznacznie położenie danego punktu. Współrzędnymi temi mogą być kąty θ i σ ; jakie obraliśmy w § 60-tym i które pokazane są na rys. 38-ym. Prędkość przeto tego punktu wyrazimy dwoma niezależnymi prędkościami: prędkością, jaką punkt dany wykona podczas zmiany tylko kąta σ ; prędkość ta wyrazi się wzorom

$$r \frac{d\sigma}{dt};$$

oraz prędkością jaką wykona tenże punkt podczas zmiany tylko kąt θ ; prędkość ta

$$r \sin \sigma \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

Wartość przeto energii kinetycznej tego punktu wyrazimy bezpośrednio współrzędnymi niezależnymi, zważywszy, że kierunki tych prędkości niezależnych są wzajemnie prostopadłe; a więc

$$T = \frac{1}{2} m \left[\left(r \cdot \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 + \left(r \cdot \sin \sigma \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]. \quad \dots \dots \dots (442)$$

Praca cząstkowa ciężaru tego punktu podczas przesunięcia niezależnego $d\sigma$ wyrazi się wzorem $d(mg \cdot r \cdot \cos \sigma)$; podczas zaś przesunięcia $d\theta$ równa się zeru. Stosownie przeto do równania Lagrange'a, równ. 441-sze, weźmiemy najpierw pod uwagę zmienną niezależną σ i otrzymamy:

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma'} = m r^2 \cdot \sigma'; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma'} \right) = m r^2 \cdot \sigma''; \quad \frac{\partial T}{\partial \sigma} = m r^2 \cdot \sin \sigma \cdot \cos \sigma \cdot \theta'^2.$$

a po podstawieniu tych wyrazów w równ. 441-sze, otrzymamy:

$$1) \quad m r^2 \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} - m r^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot \sin \sigma \cdot \cos \sigma = - m g r \cdot \sin \sigma.$$

gdzie wyraz po prawej stronie wyraża rozdzieloną przez $d\sigma$ pracę, jaką siła ciężkości wykona podczas przesunięcia niezależnego $d\sigma$.

Następnie obliczywszy wzór Lagrange'a dla niezależnej zmiennej θ ; otrzymamy drugie równanie dynamiczne. W tym celu podstawimy w równ. 441-sze następujące wielkości, które otrzymamy z równ. 442-ego:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = m r^2 \cdot \sin^2 \sigma \cdot \theta'; \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0;$$

drugie równanie ruchu jest przeto następujące:

$$2) \quad \frac{d}{dt} \left(m r^2 \cdot \sin^2 \sigma \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) = 0;$$

praca bowiem siły ciężkości punktu podczas przesunięcia niezależnego $d\theta$ równa się zeru.

Łatwo spostrzedz, że równanie pierwsze wyraża moment względem osi, prostopadłej do płaszczyzny kąta σ , ilości ruchu danego punktu; gdy do działania momentu siły ciężkości dołączymy jeszcze działanie momentu siły odśrodkowej, jakiej podlega ten punkt podczas swego obrotu razem z płaszczyzną kąta σ (¹).

Drugie z tych równań wyraża moment ilości ruchu względem osi z i jest jednakowe z równaniem 2-gim równań 125-tych części 1-ej tego tomu.

Ażeby wykazać, że z tych równań otrzymać można np. równanie 1-sze równań 125-tych; które jest wyrazem zasady równowartości pracy i energii kinetycznej; obliczmy pochodną równania drugiego, jak to wskazuje to równanie, a pomnożywszy zgodnie z prawidłem, podanym w § 125-tym tego tomu, otrzymane równanie przez $\sigma' \cdot dt$, równanie zaś pierwsze przez $\theta' \cdot dt$ powinniśmy otrzymać, po ich dodaniu, — zupełną różniczkę, której całka wyrazi zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej.

Z równań Lagrange'a można wyprowadzić zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej; należy tylko tak je przekształcić, ażeby wyrażały one pracę sił podczas rzeczywistego przesunięcia; w tym celu należy pomnożyć każde z tych równań przez odpowiednie jemu dq , a po ich dodaniu, otrzymamy szukane równa-

(¹) Ponieważ przyjąć można, że punkt dany posiada przyspieszenie względne, unoszące i złożone (Coriolis'a równ. 171 tomu I-go); w myśl przeto wyjaśnienia zasady d'Alembert'a, (podanego na str. 161-ej 1-ej części tego tomu, o obliczeniu poszczególnych ruchów); należy, w celu obliczenia ruchu względnego w płaszczyźnie kąta σ , przyłączyć do danego punktu jako siły działające na niego siły bezwładności ($-m \vec{p}_u$) i $\left(-m \cdot 2 \mathbf{V} \vec{v}_w \cdot \frac{d\vec{\theta}}{dt} \right)$; z których pierwsza jest siłą t. zw. odśrodkową ruchu unoszącego; druga — siłą Coriolis'a. — Moment względem osi, prostopadłej po płaszczyźnie kąta σ , siły odśrodkowej ruchu unoszącego równa się wyrazowi

$$m r \sin \sigma \cdot \theta'^2 \cdot r \cos \sigma;$$

którego działanie przyłącza się do działania momentu siły ciężkości; gdyż moment siły Coriolis'a względem tej osi równa się zeru; kierunek jej bowiem jest równoległy do tejże osi.

nie. Zwrócić należy uwagę, że postępowanie to, oparte na superpozycji przesunięć niezależnych, jest zgodne z postępowaniem, wskazanem w § 125-tym tego tomu.

W § 125 wskazaliśmy sposób znalezienia dla ruchu jednej bryły równania równowagi pracy i energii kinetycznej z równań momentów ilości ruchu; metoda zaś Lagrange'a daje sposób wyprowadzenia za pomocą obliczania cząstkowych pochodnych wyrazu energii kinetycznej równań momentów ilości ruchu; w ten sposób z jednego jedynego wyrazu energii kinetycznej danego układu i z wyrazu pracy sił przyłożonych do niego, można obliczyć równania ruchu danego układu; byle by te wielkości były wyrażone spólrzędnymi niezależnymi i to stanowi znakomitą dogodność równań Lagrange'a.

Lagrange, podając swe równania, nie opierał się na pojęciach dynamicznych, jakieśmy to starali się tutaj uczynić, i co dla nas jest pożądanem; lecz opierał się na pojęciach matematycznych, jakieśmy to częściowo przedstawili w tomie 1-em przy obliczaniu tych równań; wskutek tego zakres zastosowania tego równania przekracza granice pojęć dynamicznych i rozszerza się również do takich zjawisk fizycznych, w których pojęcia dynamiki nie znajdują bezpośrednio swego znaczenia.

Poleca się czytelnikowi obliczyć równania ruchu metodą Lagrange'a i znaleźć znaczenia dynamiczne oddzielnych wyrazów wahadła toczącego się, podanego w § 134-tym, oraz wahadła podwójnego, podanego w § 155-tym tego tomu.

Zakończając tę pracę, powierzoną mi przez „Komitet Wydawniczy na upamiętnienie dziesięciolecia Stowarzyszenia Techników w Warszawie“, nadmieniam, że do programu mechaniki ogólnej, jaki ja sobie wyobrażam, szczególnie dla studujących inżynierię budowy maszyn, należy dołączyć jeszcze dział o prędkościach krytycznych,—o modelach mechanicznych i o wyrównaniu mas; czego nie mogłem przynajmniej narazie pomieścić w tej pracy; gdyż i tak przekroczyłem niepomierne omówioną pierwotnie z Komitem objętość, przeznaczone fundusze na druk, oraz termin ukończenia; —wobec tego sądzę, że te przekroczenia w danym razie nie będą mi wzięte za złe, — ani przez Komitet ani też przez Czytelników.

Warszawa w marcu 1916 r.



SKOROWIDZ NAZW.

Cyfry rzymskie oznaczają numery **tomów**; cyfry arabskie — **paragrafy**.

d'Alembert'a metoda II 7 i nast.; 91.
Analiza równań ruchu II 156.

Bąk II 170.

Bezwładność I 3, 96.

Biegun chwilowego obrotu I 61.

„ momentu I 105, 144.

„ przekształceń I 143.

Blok = krążek I 281.

Bryła = układ sztywny punktów I 117, II 124
i nast.

„ swobodna I 60, II 162.

„ nieswobodna I 60, 137, 220.

Centrodye = tor ruchomy i nieruchomy I 66.

Ciążenie powszechne II 35.

Ciężar I 99.

Czas, miara jego kinetyczna II 65.

„ drgania = okres II 8, 11, 47

Czopy I 238 i nast.

Drganie harmoniczne II 8.

„ zanikające II 11.

Droga I 27, 34.

Dynama = skretnik I 145.

Dynamika II 2 i nast.

Elipsoida bezwładności II 122.

„ (centralna) środkowa II 112.

Energia kinetyczna I 184; II 84, 122, 123.

„ potencjalna I 200.

Funkcja sił I 189; II 23.

Geometrya mas II 101 i nast.

Giroskopy II 163.

Guldin'a twierdzenia I 167, 169.

Gwint I 236.

Hamulec I 248.

Hropolodya = tor nieruchomy II 160.

Hodograf I 45.

Iloczyn skalarny I 191 i nast.

„ z trzech wektorów I 193.

„ wektorowy I 52, 110, 133.

Ilość ruchu II 24, 81 i nast.; 121.

Impuls = ilość ruchu = także moment ilości
ruchu.

Kąt tarcia I 232.

Kinematyka punktu I 26.

„ brył I 58.

Kinetyka II 80, 121.

Kinetyczna miara czasu II 65.

„ układ odniesienia II 64.

Klin I 237.

Koła cierne I 250.

„ zębate I 251.

„ pasowe I 248.

Koń mechaniczny I 180.

„ parowy = koń mechaniczny I 180

Kręcenie się = ruch kulisty I 71; II 160.

Krążek I 218.

„ cierny I 250.

„ przesuwny I 218.

„ stały I 218.

Krzywa łańcuchowa I 172.

„ prędkości I 30.

Krzywizna I 42.

Lagrange'a równania dynamiczne II 179.

„ „ statyczne I 227 i nast.; II 178.

Linje łańcuchowe I 172 i nast.

„ śrubowe I 70.

„ sił I 195.

Lin' tarcie I 247.

„ sztywność I 258.

Łożyska I 241, 243.

Masa I 97; II 1, 2.

Mechanika, wstęp I 1.

Mechanizmy I 234 i nast.

Mnożnik nieoznaczony I 227.

„ skalarny I 20.

Mnożenie wektorowe I 52, 110.

Momenty bezwładności II 101, 113, 120.

„ bezwładności biegunowe II 103.

„ ilości ruchu II 26 i nast.; oraz

„ „ 83, 121, 123.

„ odśrodkowe II 106.

„ pary sił I 113, 114, 115.

„ siły względem bieguna I 105, 106, 109,
132, 151.

„ — rzuty jego na osi I 128, 130, 131.

„ statyczne I 105, 106, 109 i 151.

Momenty siły wypadkowej 107, 108, 143.
 „ siły względem osi 126.

Newton II 33.
 Nutacya II 170, 173.

Obrót I 49.
 „ składowy I 87.
 „ wypadkowy I 87.
 „ ziemi II 174.
 Ognisko bezwładności II 115.
 Okres wahnięcia II 8, 11, 47.
 Określenia I 222.
 Operator ∇ I 203.
 Oś bezwładności II 102.
 „ centralna ruchu I 73.
 „ chwilowa I 72, 73.
 „ główna bezwładności II 112.
 „ momentu I 126.
 „ obrotu chwilowego I 71, 72, 73.
 „ swobodna II 161.
 „ skrętu I 73.
 „ stateczna II 161.

Para obrotów I 85.
 Parametry I 2
 Para sił I 113 i nast.; 148.
 Perpetuum mobile I 197, 207.
 Płaszczyzna (nieziemna) nieruchoma II 160.
 „ pochyła I 233, II 46.

Pochodna wektora I 22.
 „ iloczynu wektorowego I 111.
 „ „ skalarnego I 192.
 Podobieństwo przekształceń sił i prędkości
 kątowych I 150.

Podstawy mechaniki I 2.
 Polodya II 160.
 Pola sił I 194 i nast.; 208 i nast.
 „ wektorowe I 194.
 „ skalarne I 199.
 „ zachowawcze I 206.

Powierzchnia nieruchoma I 73.
 „ ruchoma I 73.
 Potencjał siły I 200, 204.

Praca sił I 176 i nast.; 197, II 90, 98, 125.
 „ cząstkowa I 181.
 „ mechaniczna I 176 i nast.
 „ nadana I 234.
 „ stracona I 230.
 „ w mechanizmach I 234.
 „ wyobraźalna 212 i nast.; 224.
 „ sił ciężkości 219.
 „ przystosowana I 216.

Prawa zasadnicze I 3, II 14.
 Prawo bezwładności I 3, 96; II 1.
 „ superpozycji II 4.

„ wzajemnego działania II 86.
 Precesya II 170 rów. 415-te; 173.

Prędkość I 30, 43, 54, 86.
 „ chwilowa I 31.
 „ kątowna I 50, 51, 86.
 „ składowa I 76.
 „ średnia I 32.
 „ unosząca I 75.
 „ wypadkowa I 76.
 „ względna I 75.
 Prędkości rzutu I 56.

Promień krzywosci I 42.
 Przekształcenie ruchów I 89.
 „ układów sił I 138 i nast.; oraz 143.
 Przemienność dodajników I 11.
 „ ruchów II 77.
 Przesunięcie przygotowane = przystosowane
 I 216.
 Przestrzeń bezwzględna = kinetyczna II 64.
 Przykłady i zadania równowagi sił na płaszczyźnie I 124.
 „ i zadania równowagi sił w przestrzeni
 I 136.
 „ i zadania równowagi sił przyłożonych
 do bryły nieswobodnej I 137.

Przyrost wektora I 22.
 Przyspieszenie I 33, 44, 54, 55.
 Przyśpieszenie, rzut jego I, 56.
 „ Coriolis'a I 92 i nast.
 „ dośrodkowe normalne I 47.
 „ kątowne I 50, 73.
 „ normalne I 47.
 „ ruchu złożonego I 91, 92, 93.
 „ styczne I 47.
 „ unoszące I 73.

Punkt bezwładności II 114.
 „ materyalny I 98.

Redukcyja sił = przekształcenie I, 38, 143.
 „ ruchów = przekształcenie I 89.
 Rodzaje równowagi I 171.
 Rozkładanie sił I 103.
 „ wektorów I 19.

Równania równowagi Lagrange'a I 228.
 „ dynamiczne Lagrange'a II 179.
 „ połączeń I 227.
 „ dynamiczne momentów II 89.
 „ ruchu środka masy II 88.
 „ równowartości pracy i energii kinetycznej I 23; II 90, 124.
 „ dynamiczne ruchu względnego II 97
 i nast.
 „ dynamiczne brył II 124.
 „ różniczkowe ruchu I 34.
 „ dynamiczne ruchu II 1, 3, 85 i nast.;
 97, 124.
 „ ruchu I 28, 41, 56.
 „ wektorowe I 57.

Równowaga sił, działających na jeden punkt
 I, 104.
 „ sił działających na bryłę swobodną I
 118, 119, 120.
 „ bryły nieswobodnej I 137.
 „ dwóch sił I 121.
 „ trzech sił I 122.
 „ sił na płaszczyźnie I 123.
 „ sił w przestrzeni I 125, 135.
 „ „ działających na bryłę.
 „ „ nieswobodną I 137.
 „ „ niestała I 171.
 „ „ obojętna I 171.
 „ „ rodzaje I 171.
 „ stała I 171.

Równowazne = równowarte układy sił I 138.
 Ruch I 6, 58.
 „ drgający II 8.
 „ harmoniczny II 8, 11, 12.
 „ izochroniczny II 8.

- Ruch,— rodzaje I 59.
 „ kulisty I 71; II 160.
 „ krzywoliniowy II 16.
 „ możliwość I 60.
 „ płaski I 61.
 „ wypadkowy I 75.
 „ złożony punktu I 75,
 „ bryły, ogólny I 72.
 „ bryły, ciągły I, 72, 73.
 „ prostoliniowy na płaszczyźnie I 63.
 „ ciągły na płaszczyźnie I 66.
 „ złożony punktu I 75.
 „ „ bryły I 79.
 „ harmoniczny bez oporów II 8 i nast.
 „ „ przytłumiony II 11.
 „ chwilowy I 31.
 „ jednostajnie zmienny I 33 i nast.
 „ jednostajny I 29, 46.
 „ kulisty I 71; II 160.
 „ krzywoliniowy punktu I 41 i nast.; II 16 i nast.
 „ swobodny bryły materialnej, obliczenie II 162.
 „ punktu nieswobodnego II 58 i nast.; II 43 i nast.
 „ obroty punktu I 46, 47, 49, 50.
 „ bryły I 69, 126 i nast.
 „ płaski I 61 i nast.
 „ początkowy,— obliczenie II 136.
 „ postępowy I 59; II 130 i nast.
 „ prostoliniowy I 27.
 „ śrubowy I 70.
 „ toczenia się I 66, 69.
 „ unoszący I 75.
 „ względny II 77 i nast.; 92 i nast.
 „ punktu zmienny I 30, 47, 53.
 „ złożony I 75.
 Rzut
 „ wektora I 15, 19.
 „ przyrostu wektora I 23.
 „ wektora momentu I 130 i nast.
- Siła I 97, 100 i II 1.
 „ bezwładności II 75.
 „ bierna I 101.
 „ ciężkości II 35.
 „ chwilowa II 25.
 „ dośrodkowa II 21.
 „ normalna II 21.
 „ odporowa Lagrange'a I 228; II 178.
 „ odśrodkowa I 75.
 „ odporowe I 137, 223; II 43 i nast.; 58, 158.
 „ oporowe I 230; II 41, 42.
 „ połączeń I 229; II
 „ składowa I 102.
 „ środkowa II 19, 33, 36, 37.
 „ styczna II 21.
 „ uogólniona I 226.
 „ wewnętrzna I 118; II 85, 86.
 „ wypadkowa I 102.
 „ zewnętrzna I 101.
 „ żywa = energia kinetyczna.
- Składanie sił I 102.
 „ wektorów I 8.
 „ prędkości I 76.
 „ przyśpieszeń I 91.
 „ sił I 102.
 „ momentów I 107.
- Składanie obrotów I 81, 82, 85, 87, 88.
 „ ruchów postępowych I 80.
 Skręt I 73.
 Spadek potencjału I 202.
 Stateczność bryły I 170.
 Spółczynnik tarcia I 230.
 Spółrzędne niezależne I 226, II 178.
 „ wektorowe I 21.
 Sprawność I 234.
 Stabilizacja II 169.
 Stateczność równowagi I 171; ruchu II 161.
 Statyka I 96 i nast.
 Stopnie swobody ruchu I 58, 226, 227.
 „ „ „ w statyce I 137.
 „ „ „ w dynamice II.
 Stożek tarcia I 231.
 Suma wektorów I 9, 11.
 Superpozycja ruchów I 3, 75, 78.
 Swoboda I 58, 59, 60, 101, 137.
- Środek chwilowego obrotu I 61.
 „ ciężkości I 159 i nast.
 „ masy I 157.
 „ sił równoległych I 153 i nast.
 „ uderzenia II 151.
 „ wahań II 129.
 Śruba I 236.
- Tarcie I 230, 247, 252; II 57.
 Toczenie się I 66, 69, 254.
 Tor nieruchomy biegunów I 66; II 160.
 „ ruchomy biegunów I 66; II 160.
 „ względny II 77.
- Uderzenie się bryły materialnych II 142 i nast.
 Układ bryły, równowaga I 127 i nast.
 „ „ obliczenie ruchu II 139 i nast.
 „ punktów materialnych II 80 i nast.
 „ punktów nieswobodnych i swobodnych I 58, 60, 137.
 „ niezmienny I 117.
 „ sił I 138 i nast.
- Wahadło (fizyczne) = bryłowe popolite II 129.
 „ kuliste II 60 i nast.
 „ odśrodkowe II 44.
 „ matematyczne płaskie II 47 i nast.
 „ sferyczne = kuliste II 60 i nast.
 „ stożkowe II 44.
 „ toczące się II 124.
 „ podwójne II 155.
- Wektor jednostkowy I 20.
 Wektora określenie I 7.
 „ rzuty I 15, 19.
 „ wzory algebraiczne I 18.
- Wektor,— znaczenie jego fizyczne I 25.
 „ ilości ruchu.
 „ momentu ilości ruchu I 106, 109
 „ prędkości kątowej I 51, 86.
 „ siły I 97 i nast.
- Wektorów dodawanie I 8, 11, 15, 16.
 „ mnożenie I 53, 110.
 „ odejmowanie I 10, 13, 22.
 Wektorowy iloczyn I 52, 110.
 Wielobok momentów I 108.
 „ prędkości I 76.

Wielobok sił I 102.

„ wektorów I 8.

Wir pola sił I 204, 205.

Wóz jednoszynowy II 169.

Wykres drogi I 30.

„ prędkości I 31.

„ przyśpieszenia I 33.

„ wektorowy prędkości I 45.

Wymiar I 40.

„ momentu siły I 105.

Wymiar pracy I 179.

„ prędkości I 40.

„ przyśpieszenia I 40.

„ siły I 100.

Zachowanie energii I 207.

Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej II 23, 76.

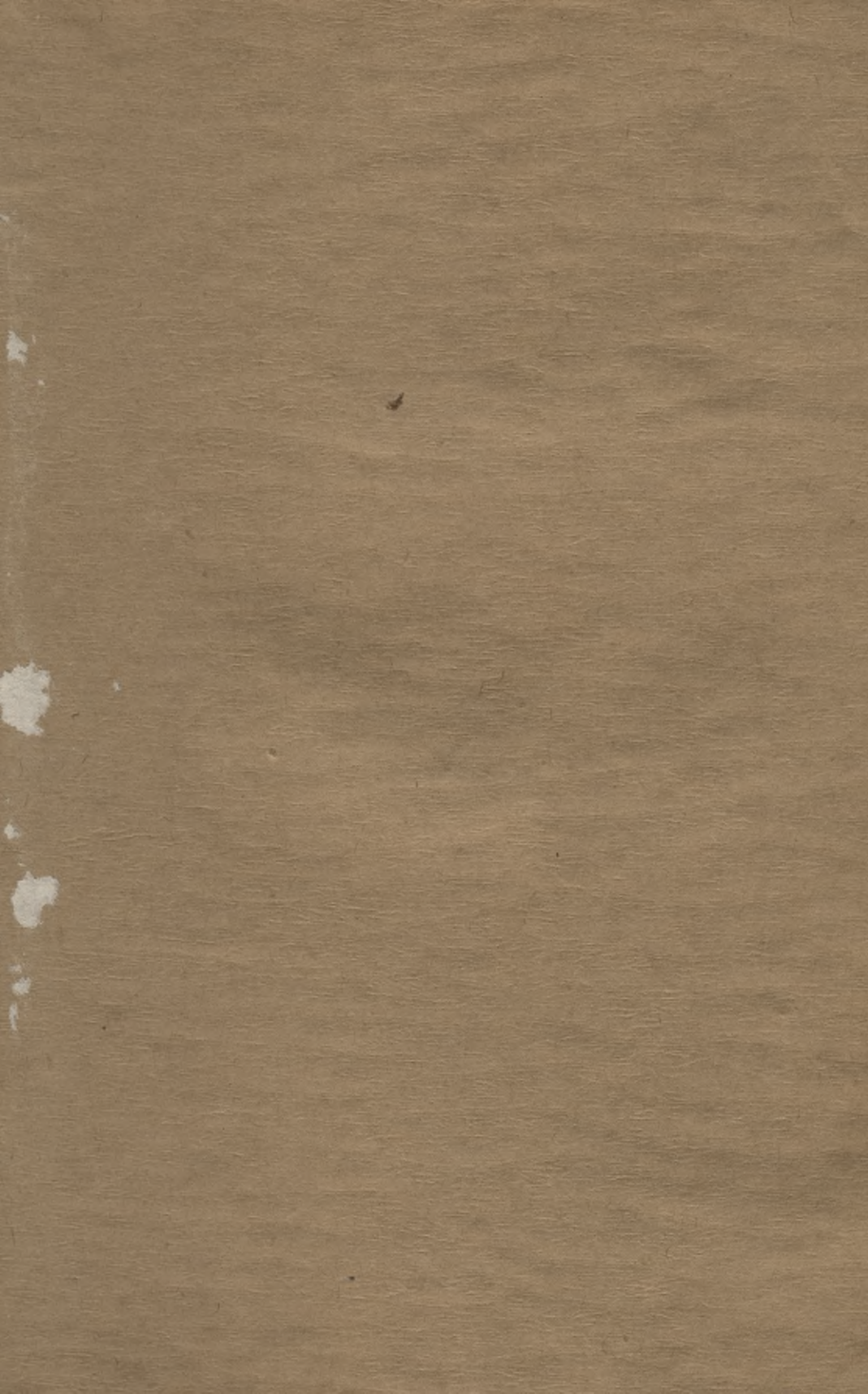
„ momentu ilości ruchu II 24.

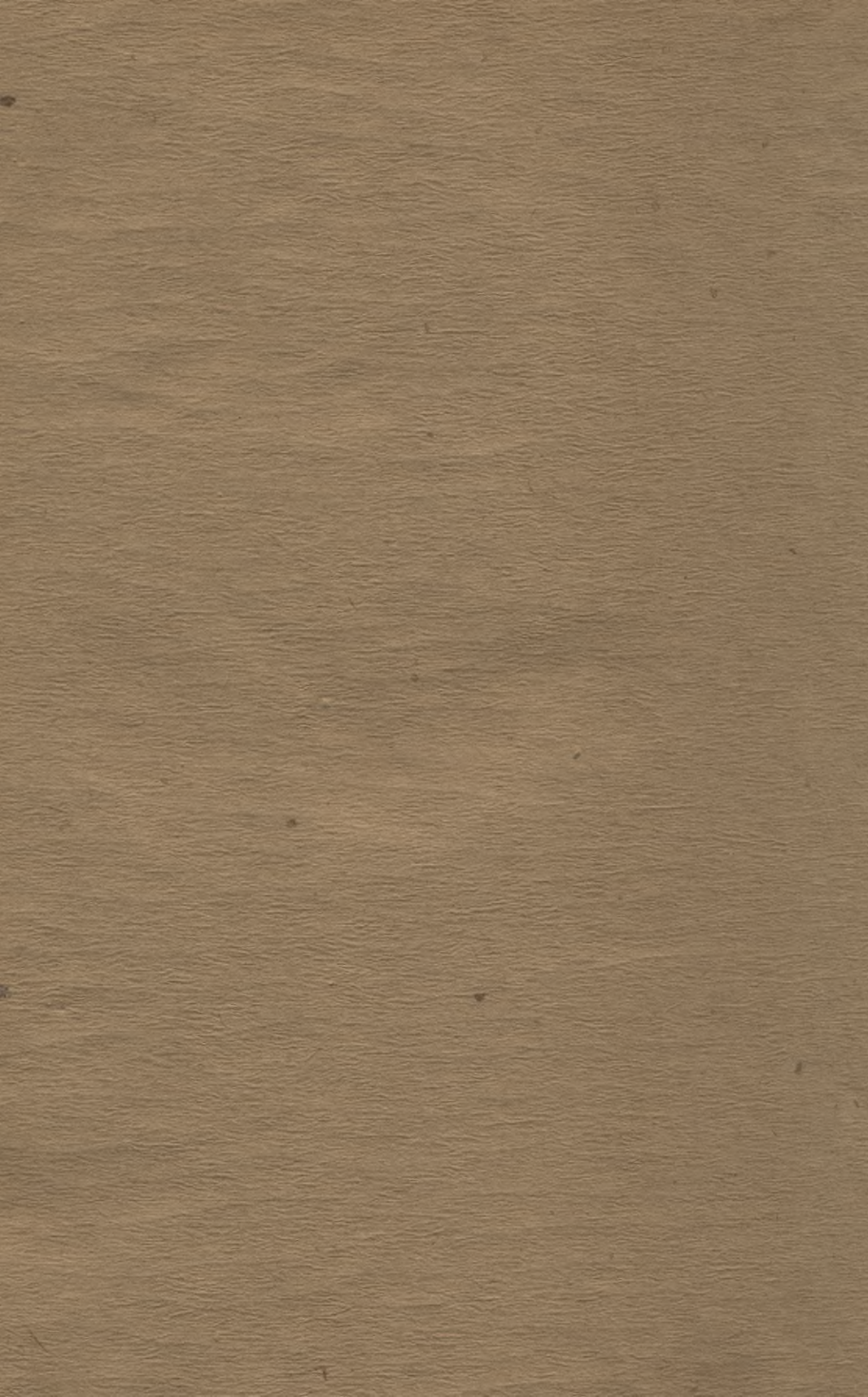
Zmiana nagła warunków ruchu II 136 i nast.

WYKAZ DZIEŁ

z których korzystałem częściowo w niniejszej pracy.

- Paul Appel.** *Traité de Mécanique rationelle.* Paryż 1909.
- Dr. Aug. Föppl.** *Vorlesungen über technische Mechanik.* I, IV i VI-ty tom. Lipsk 1901, 1905, 1910.
- Jan Nep. Franke.** *Mechanika teoretyczna.* Warszawa 1884.
- Andrew Gray and James Gordon Gray.** *A treatise on Dynamics.* Londyn 1911.
- Georg Hamel.** *Elementare Mechanik.* Lipsk 1912.
- W. Hofmann.** *Bewegung u. Trägheit.* Wiedeń, Lipsk 1904.
- Dr. Wilhelm Hort.** *Technische Schwingungslehre.* Berlin 1910.
- Dr. G. Jaumann.** *Die Grundlagen der Bewegungslehre.* Lipsk 1905.
- F. Klein, u. A. Sommerfeld.** *Ueber die Theorie des Kreisels.* Lipsk 1903.
- A. E. H. Love.** *Theoretical Mechanics.* Cambridge 1906.
- Maks Lorenz.** *Technische Mechanik starrer Systeme.* Monachium 1902.
- Dr. Ernst Mach.** *Die Mechanik in ihrer Entwicklung.* Lipsk 1904.
- Dr. C. Neumann.** *Ueber die Principien der Gallilei-Newton'schen Theorie.* Lipsk 1870.
- G. H. Niewęłowski.** *Kurs mechaniki rozumowej.* Paryż 1873.
- E. J. Routh.** *Die Dynamik der Systeme starrer Körper.* Lipsk 1898.
- Dr. Wilhelm Schell.** *Theorie der Bewegung und der Kräfte.* Lipsk 1879.
- Dr. Heinrich Streintz.** *Die physikalischen Grundlagen der Mechanik.* Lipsk 1883.
- A. G. Webster.** *The Dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies.* Lipsk 1912
- Dr. P. Volkmann.** *Einführung in das Studium der theoretischen Physik insbesondere in das der analytischen Mechanik.* Lipsk 1900.





POLITECHNIKA KRAKOWSKA

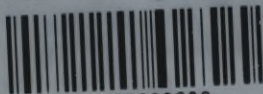
Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-351742

Kdn 452/57

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299230