WYDANO STARANIEM
KOMITETU WYDAWNICZEGO NA UPAMIĘTNIENIE DZIESIĘCIOLECIA
STOWARZYSZENIA TECHNIKÓW W WARSZAWIE.

MECHANIKA
TEORETYCZNA

DLA

INŻYNIERÓW, TECHNIKÓW I UCZĄCYCH SIĘ.

INŻ. H. CZOPOWSKIEGO.

TOM II.

CZĘŚĆ 1.

DYNAMIKA PUNKTU MATERYALNEGO.

Cena części 1-ej tomu II: rb. 1,00—kor. 2,50—mar. 2,15.

WARSZAWA — 1913.

SKŁADY GŁÓWNE:

GEBETHNER i WOLFF W WARSZAWIE.

GEBETHNER i SPÓŁKA W KRAKOWIE.

MECHANIKA TEORETYCZNA.

WYDANO STARANIEM
KOMITETU WYDAWNICZEGO NA UPAMIĘTNIENIE DZIESIĘCIOLECIA
STOWARZYSZENIA TECHNIKÓW W WARSZAWIE.

MECHANIKA
TEORETYCZNA

DLA

INŻYNIERÓW, TECHNIKÓW I UCZĄCYCH SIĘ.

INŻ. H. CZOPOWSKIEGO.

TOM II.

CZĘŚĆ 1.

DYNAMIKA PUNKTU MATERYALNEGO.

WARSZAWA — 1913.

SKŁADY GŁÓWNE:

GEBETHNER i WOLFF W WARSZAWIE.

GEBETHNER i SPÓŁKA W KRAKOWIE.

Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

SPIS RZECZY CZĘŚCI 1ej TOMU IIgo.

KURS SKRÓCONY.

Dynamika punktu.

§§ 1 do 10 włącznie; § 13-ty; §§ 15 do 18-go włącznie; od § 20 do 31-go włącznie; § 39, § 40, od § 43 do § 47-go włącznie; §§ 51, 52, 54, 56, 59.

SPROSTOWANIA.

Str.	*Wiersz lub wzór*	*Zamiast*	*Powinno być*
12	wzór 15-ty	$x = \frac{m v^2}{2 g} - \frac{m v_0^2}{2 g}$	$x = \frac{v^2}{2 g} - \frac{v_0^2}{2 g}$
30	wiersz od góry 10-ty	$\sqrt{\frac{c}{4 m^2} - \frac{k}{m}}$	$\sqrt{\frac{c^2}{4 m^2} - \frac{k}{m}}$
„	„ „ „ 4-ty	4. Zasady szczególne dynamiki.	4. Zasady szczególne dynamiki punktu materyalnego.
107	„ „ „ 7-my	obrotowej	walca
121	„ „ „ 10-ty	138	139
„	„ „ „ 14-ty	138	139
104	„ „ „ 19-ty	$N = \sqrt{N_n + N_n}$	$N = \sqrt{N_n + N_b}$

IV. Dynamika punktu.

1. Prawa zasadnicze.

1. Prawo bezwładności i równanie dynamiczne ruchu. Podstawą okreslenia *siły* jest prawo bezwładności, które głosi; (porów. § 96 tomu I-go):
każde ciało, pozostawione samo sobie, trwa w stanie spoczynku, lub w stanie ruchu jednostajnego prostolinijnego tak długo, dopóki jakieś czynniki zewnętrzne, pochodzące od innych ciał, nie zmienią tego stanu.

Prawo to jest wyrazem faktu, doświadczalnie stwierdzonego, że w otoczeniu każdego ciała (inaczej punktu materyalnego), wykonywującego ruch nie prostolinijny, lub nie jednostajny, odkryć zawsze można jakieś inne **ciało** lub układ ciał, (w stanie stałym, płynnym, lub gazowym), których obecność wywołuje zboczenie punktu, poruszającego się, z toru prostolinijnego, lub wogóle zmienia jego prędkość; i że, po usunięciu tych ciał, ruch jego staje się prostolinijny i jednostajny, lub też staje się zbliżony do takiego ruchu, o ile częściowo tylko usuniemy te ciała. W powyższem przeto wysłowieniu prawa bezwładności wyrażenie: „ciało, pozostawione samo sobie“, należy rozumieć w ten sposób, że w otoczeniu jego niema żadnych innych brył materyalnych. Chociaż warunek ten fizycznie jest niewykonalny, prawo jednakże bezwładności, w powyższy sposób wygłoszone, nie traci na swej mocy, i jest podstawą rozpatrywań ruchów, zachodzących w otaczającym nas świecie fizycznym. Wszelką zatem zmianę prędkości punktu materyalnego, czy to jej kierunku, czy też jej wartości, przypisujemy wpływowi otaczających go czynników fizycznych, które w języku potocznym nazywamy przyczynami danego ruchu, lub ściślej „przyczynami zmiany danego ruchu“. Czynnikami, zmieniającymi prędkość punktu danego, mogą być nietylko układy fizyczne w ścisłym znaczeniu tego słowa (np. sprężyna, prężność pary, magnes i t. p.), lecz i organizmy żyjące; a wszczególności muskuły nasze; w tym szczególnym przypadku mówimy, że na dany punkt wywieramy pewną siłę, przez co wywołujemy zmianę prędkości punktu, czy też bryły. Siła, jako nazwa czynnika, zmieniającego ruch, została uogólniona, i stosuje się również do czynników fizycznych; mówimy przeto we wszystkich przypadkach, w których następuje

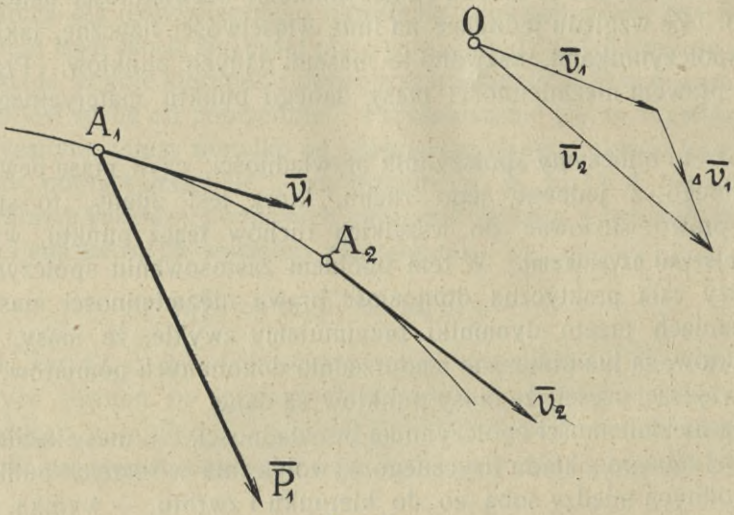
Zadania te podzielić można na trzy zasadnicze grupy.

Do pierwszej grupy zaliczymy zadania, w których dany jest ruch, a należy wyznaczyć siły, wywołujące ten ruch.

Jeżeli np. punkt materyalny przechodzi ruchem, określonym np. równaniem $s = f(t)$, z miejsca A_1 do miejsca A_2, nieskończenie blizkiego, rys. 1, to w celu wyznaczenia przyśpieszenia, zestawimy trójkąt podług wzoru wektorowego:

$$\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \triangle \bar{v}_1;$$

w którym $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ są wektory prędkości punktu w miejscach A_1 i A_2; i z tego trójkąta wyznaczymy wektor $\triangle \bar{v}_1$, który jest miarą przyrostu prędkości, i wskazuje kierunek i zwrot siły, działającej na punkt ruchomy w danem miejscu, czynnik bowiem m nie zmienia ani kierunku, ani zwrotu tego przyrostu. Wielkość zaś



Rys. 1.

tej siły obliczymy, stosownie do danych określeń, dzieląc przyrost ten przez wartość $\triangle t$ i mnożąc go przez m, t. j. przez wartość masy tego punktu. Z określenia siły wynika przeto, że kierunek i zwrot jej jest wyznaczony w każdem miejscu toru przez przyrost wektora prędkości w temże miejscu.

Siłę tę można sobie uwidocznić, jako siłę np. ciągnącą dany punkt, zgodnie z kierunkiem i zwrotem wektora $\triangle \bar{v}_1$ rys. 1-szy.

W szczególnym przypadku, w którym obydwa wektory $\bar{v}_2$ i $\bar{v}_1$ są równe (wektorowo); przyrost $\triangle \bar{v}$ równa się zeru, a zatem i siła w danym razie równa sie zeru;—jest to zgodne z prawem bezwładności, na którem oparliśmy określenie siły.

Wyznaczenie zatem sił, jakie wywiera dany układ fizyczny na otaczające go bryły materyalne, może nastąpić tylko drogą doświadczalną. Nic bowiem nie wiemy np. o sile przyciągania ziemskiego, o sile elektrycznej, magnetycznej, o sile sprężyny napiętej, o sile prężności pary i wogóle nic nie wiemy o wielkościach sił, dopóki nie zbadamy ruchów, jakie te czynniki wywołują w otaczających je bryłach.

Przytoczony tutaj sposób mierzenia sił, może być nazwany **kinetycznym**, gdyż oparty jest na bezpośredniej znajomości ruchu i masy punktu. Lecz posiadamy jeszcze inny sposób mierzenia sił, — sposób **statyczny**, który polega na tem, że punkt ruchomy, będący pod działaniem pewnej siły, doprowadzamy zapomocą innej siły do stanu równowagi, i **przyjmujemy** siłę, wywołującą ruch punktu, równą co do kierunku i wartości sile równoważącej, lecz co do zwrotu jej przeciwną.

Prężność np. pary, zawartej w cylindrze silnika parowego, jest w stanie wywołać ruch, czyli jest w stanie nadać przyśpieszenia bryłom, odpowiednio połączonym z ruchomym tłokiem tego cylindra. Z przyśpieszeń zatem tych brył możemy obliczyć siłę, jaką wywiera prężność pary; — jest to sposób kinetyczny mierzenia sił. Sposobem zaś statycznym zmierzymy tę siłę, jeżeli np. zapomocą obciążenia tłoka cylindra nie damy mu się poruszyć; obciążenie to, wyrażone np w *kg*, jest w danym razie miarą siły prężności pary. W tenże sposób możemy zmierzyć np. siłę sprężyny, wyznaczywszy przyśpieszenie punktu, na który ona działa; lub też zrównoważywszy jej działanie siłą inną. W celu np. obliczenia sił międzyplanetarnych, korzystamy ze sposobu kinetycznego obliczania sił; w technice zaś stosujemy obydwa te sposoby.

Zwrócić należy uwagę, że w obydwu tych sposobach, wyrażamy siły iloczynem z masy i przyśpieszenia, z tą tylko różnicą, że w kinetycznym sposobie wprowadzamy bezpośrednio do rachunku przyśpieszenie punktu, w statycznym zaś sposobie wprowadzamy je pośrednio — w pojęciu równowagi (porówn. określenie równowagi, podane w § 104-tym tomu I-ego).

Gdy wyznaczymy siły, jakie wywołuje dany układ na otaczające punkty, możemy mówić o znanych siłach, i możemy pytać się o ruch, wywołany temi siłami. Zadania tej grupy są odwrotne do poprzednich i stanowią drugą grupę zadań dynamiki, w których wiadome są siły i masa punktu, a należy wyznaczyć ruch punktu danego.

Ponieważ wyznaczenie siły danych czynników fizycznych może być dokonane tylko drogą doświadczalną (na co już zwracaliśmy uwagę), przeto zadania tej grupy polegają właściwie na obliczeniu przyśpieszenia punktu danego, znajdującego się pod działaniem pewnych czynników fizycznych, — z przyśpieszenia i masy innego punktu, poddanego działaniu tychże czynników; — lub też poddanego działaniu innych czynników, lecz im statycznie równowartych. Jeżeli bowiem mówimy, że na punkt materyalny (czy też bryłę) działa siła, określona danym wektorem, to zgodnie z powyższemi określeniami, wyrażenie to rozumiemy w ten sposób; że dany punkt znajduje się pod działaniem pewnych czynników fizycznych, zresztą nam nieznanych, które wywołują taką zmianę jego ruchu, że iloczyn z masy i z przyśpieszenia tego punktu równa się wektorowo iloczynowi z masy i przyśpieszenia innego punktu.

Powstawanie ruchu punktu, gdy dana jest siła, nań działająca, należy wyobrazić sobie w następujący sposób. Niech np. punkt ruchomy o masie danej m znajduje się w pewnej chwili t w miejscu A_1, rys. 2-gi, i posiada prędkość $\overline{v}_1$, i niech na niego działa siła, określona wektorem $\overline{P}_1$, to wyznaczymy przyśpieszenie

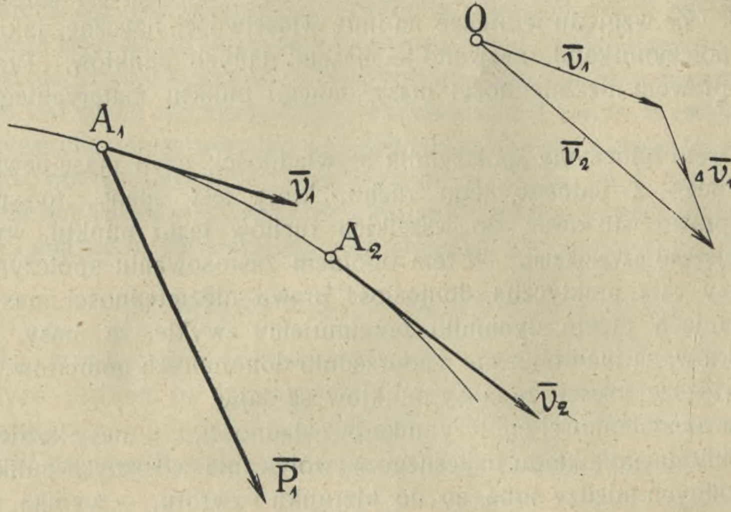
Zadania te podzielić można na trzy zasadnicze grupy.

Do pierwszej grupy zaliczymy zadania, w których dany jest ruch, a należy wyznaczyć siły, wywołujące ten ruch.

Jeżeli np. punkt materyalny przechodzi ruchem, określonym np. równaniem $s = f(t)$, z miejsca A_1 do miejsca A_2, nieskończenie blizkiego, rys. 1, to w celu wyznaczenia przyśpieszenia, zestawimy trójkąt podług wzoru wektorowego:

$$\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \triangle \bar{v}_1;$$

w którym $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ są wektory prędkości punktu w miejscach A_1 i A_2; i z tego trójkąta wyznaczymy wektor $\triangle \bar{v}_1$, który jest miarą przyrostu prędkości, i wskazuje kierunek i zwrot siły, działającej na punkt ruchomy w danem miejscu, czynnik bowiem m nie zmienia ani kierunku, ani zwrotu tego przyrostu. Wielkość zaś



Rys. 1.

tej siły obliczymy, stosownie do danych określeń, dzieląc przyrost ten przez wartość $\triangle t$ i mnożąc go przez m, t. j. przez wartość masy tego punktu. Z określenia siły wynika przeto, że kierunek i zwrot jej jest wyznaczony w każdem miejscu toru przez przyrost wektora prędkości w temże miejscu.

Siłę tę można sobie uwidocznić, jako siłę np. ciągnącą dany punkt, zgodnie z kierunkiem i zwrotem wektora $\triangle \bar{v}_1$ rys. 1-szy.

W szczególnym przypadku, w którym obydwa wektory $\bar{v}_2$ i $\bar{v}_1$ są równe (wektorowo); przyrost $\triangle \bar{v}$ równa się zeru, a zatem i siła w danym razie równa sie zeru;—jest to zgodne z prawem bezwładności, na którem oparliśmy określenie siły.

Wyznaczenie zatem sił, jakie wywiera dany układ fizyczny na otaczające go bryły materyalne, może nastąpić tylko drogą doświadczalną. Nic bowiem nie wiemy np. o sile przyciągania ziemskiego, o sile elektrycznej, magnetycznej, o sile sprężyny napiętej, o sile prężności pary i wogóle nic nie wiemy o wielkościach sił, dopóki nie zbadamy ruchów, jakie te czynniki wywołują w otaczających je bryłach.

Przytoczony tutaj sposób mierzenia sił, może być nazwany **kinetycznym**, gdyż oparty jest na bezpośredniej znajomości ruchu i masy punktu. Lecz posiadamy jeszcze inny sposób mierzenia sił, — sposób **statyczny**, który polega na tem, że punkt ruchomy, będący pod działaniem pewnej siły, doprowadzamy zapomocą innej siły do stanu równowagi, i **przyjmujemy** siłę, wywołującą ruch punktu, równą co do kierunku i wartości sile równoważącej, lecz co do zwrotu jej przeciwną.

Prężność np. pary, zawartej w cylindrze silnika parowego, jest w stanie wywołać ruch, czyli jest w stanie nadać przyśpieszenia bryłom, odpowiednio połączonym z ruchomym tłokiem tego cylindra. Z przyśpieszeń zatem tych brył możemy obliczyć siłę, jaką wywiera prężność pary; — jest to sposób kinetyczny mierzenia sił. Sposobem zaś statycznym zmierzymy tę siłę, jeżeli np. zapomocą obciążenia tłoka cylindra nie damy mu się poruszyć; obciążenie to, wyrażone np w kg, jest w danym razie miarą siły prężności pary. W tenże sposób możemy zmierzyć np. siłę sprężyny, wyznaczywszy przyśpieszenie punktu, na który ona działa; lub też zrównoważywszy jej działanie siłą inną. W celu np. obliczenia sił międzyplanetarnych, korzystamy ze sposobu kinetycznego obliczania sił; w technice zaś stosujemy obydwa te sposoby.

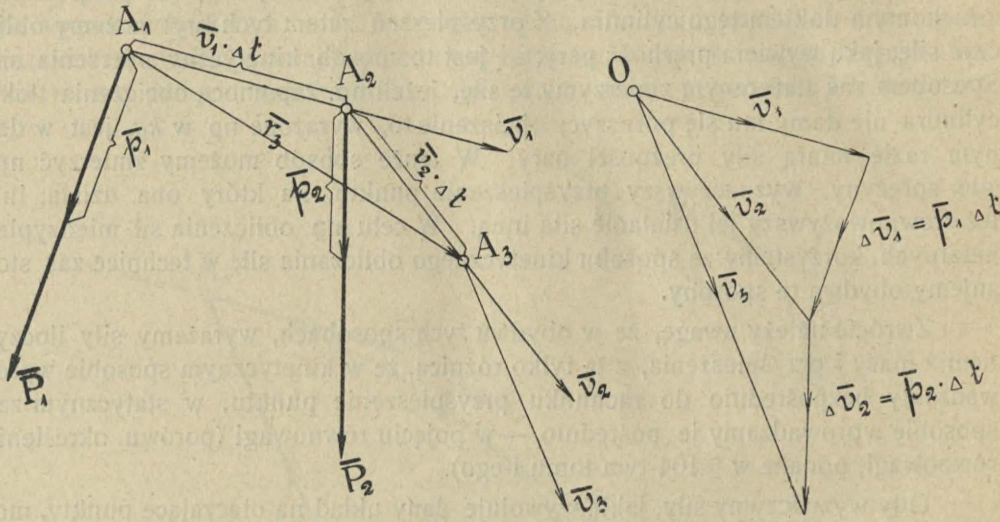
Zwrócić należy uwagę, że w obydwu tych sposobach, wyrażamy siły iloczynem z masy i przyśpieszenia, z tą tylko różnicą, że w kinetycznym sposobie wprowadzamy bezpośrednio do rachunku przyśpieszenie punktu, w statycznym zaś sposobie wprowadzamy je pośrednio — w pojęciu równowagi (porówn. określenie równowagi, podane w § 104-tym tomu I-ego).

Gdy wyznaczymy siły, jakie wywołuje dany układ na otaczające punkty, możemy mówić o znanych siłach, i możemy pytać się o ruch, wywołany temi siłami. Zadania tej grupy są odwrotne do poprzednich i stanowią drugą grupę zadań dynamiki, w których wiadome są siły i masa punktu, a należy wyznaczyć ruch punktu danego.

Ponieważ wyznaczenie siły danych czynników fizycznych może być dokonane tylko drogą doświadczalną (na co już zwracaliśmy uwagę), przeto zadania tej grupy polegają właściwie na obliczeniu przyśpieszenia punktu danego, znajdującego się pod działaniem pewnych czynników fizycznych, — z przyśpieszenia i masy innego punktu, poddanego działaniu tychże czynników; — lub też poddanego działaniu innych czynników, lecz im statycznie równowartych. Jeżeli bowiem mówimy, że na punkt materyalny (czy też bryłę) działa siła, określona danym wektorem, to zgodnie z powyższemi określeniami, wyrażenie to rozumiemy w ten sposób; że dany punkt znajduje się pod działaniem pewnych czynników fizycznych, zresztą nam nieznanych, które wywołują taką zmianę jego ruchu, że iloczyn z masy i z przyśpieszenia tego punktu równa się wektorowo iloczynowi z masy i przyśpieszenia innego punktu.

Powstawanie ruchu punktu, gdy dana jest siła, nań działająca, należy wyobrazić sobie w następujący sposób. Niech np. punkt ruchomy o masie danej m znajduje się w pewnej chwili t w miejscu A_1, rys. 2-gi, i posiada prędkość $\overline{v}_1$, i niech na niego działa siła, określona wektorem $\overline{P}_1$, to wyznaczymy przyśpieszenie punktu, jakie ona wywoła, gdy weźmiemy m-tą część wektora tej siły; a nowy ten wektor $\bar{p}_1$ jest wektorem szukanego przyśpieszenia.

Wyznaczenie toru i ruchu po nim z tego przyśpieszenia jest czynnością rachunkową, którą można w rozmaity sposób wykonać. Ażeby unaocznić działanie siły na dany punkt, zastosujemy w danym razie do wyznaczenia toru i ruchu po nim sposób wykreślny. Przyjmijmy np., że punkt ten znajduje się w chwili t, w miejscu A_1, rys. 2-gi, posiada prędkość $\bar{v}_1$ i poddany jest działaniu siły $\bar{P}_1$. a zadanie polega na wyznaczeniu położenia i prędkości punktu po upływie czasu $\triangle t$;



Rys. 2.

Prędkość $\bar{v}_1$ punktu, będącego pod działaniem siły $\bar{P}_1$, dozna pewnego przyrostu; ażeby wyznaczyć ten przyrost, przyjmiemy, z pewnem przybliżeniem, że przyśpieszenie $\bar{p}_1$ jest stałe w okresie czasu $\triangle t$, wobec tego przyrost prędkości wyrazimy równaniem:

$$\triangle \bar{v}_1 = \bar{p}_1 \cdot \triangle t, \quad \text{w którem} \quad \bar{p}_1 = \frac{\bar{P}_1}{m}.$$

Prędkość $\bar{v}_2$ punktu w miejscu, w którem znajdzie się on w chwili $(t + \triangle t)$, wyznaczymy z trójkąta wektorowego, zestawionego podług następującego równania:

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \bar{p}_1 \cdot \triangle t;$$

trójkąt ten przedstawiliśmy na rys. 2-gim.

Położenie punktu w chwili $(t + \triangle t)$ jest jeszcze nieznane; w celu jego wyznaczenia przyjmiemy znów z pewnem przybliżeniem, że punkt dany przechodzi z jednego położenia do drugiego w okresie czasu $\triangle t$ ruchem jednostajnym z prędkością $\bar{v}_1$; t. j. przyjmiemy, iż punkt ruchomy, po upływie czasu $\triangle t$ od wyjścia z A_1, przejdzie drogę $\bar{v}_1 \cdot \triangle t$ w kierunku prędkości chwilowej i znajdzie się w miejscu A_2, w którem posiada prędkość $\bar{v}_2$.

Gdy znamy siłę $\overline{P}_2$ w miejscu A_2, wtedy znajdziemy w sposób powyższy prędkość $\overline{v}_3$, oraz położenie A_3 punktu ruchomego; a linia łamana A_1, A_2, A_3 i t. d. przedstawi tor punktu ruchomego, prędkości zaś punktu danego odczytamy z wieloboku wektorowego. Postępując w ten sposób wyrazimy prędkość w $n+1$-szem miejscu toru, po upływie $n \,.\, \triangle t$ sekund, następującem równaniem wektorowem:

$$\overline{v}_n = \overline{v}_1 + \Sigma \overline{p}_k \,.\, \triangle t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Położenie zaś punktu po upływie tegoż okresu czasu wyznaczymy promieniem wodzącym, wyprowadzonym np. z początkowego położenia A_1 punktu ruchomego, a zatem:

$$\overline{r}_n = \Sigma \overline{v}_k \,.\, \triangle t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

w równaniach tych $k = 1, 2, \ldots n$.

Zrozumiałem jest, że wyniki postępowania tego o tyle będą zgodne z ruchem rzeczywistym, o ile okresy czasu $\triangle t$ będą małe; a jeżeli wyobrazimy je sobie nieskończenie małymi, to zamiast linii łamanej, mającej przedstawiać tor, otrzymamy linię ciągłą, przedstawiającą tor właściwy punktu danego.

Wielkości nieskończenie małe nie dają się jednakże wyrażać wykreślnie; jedynym zatem sposobem ścisłym wyrażenia ruchu jest sposób rachunkowy, jaki dają prawidła algebry zwykłej, lub wektorowej. Sposób obliczenia tego przedstawimy w następnych rozdziałach. Ze sposobu jednakże wektorowego, tutaj przedstawionego, po odpowiedniem dobraniu skali i przystosowaniu go do danych zadań, korzystać można w celu otrzymania przybliżonego obrazu ruchu.

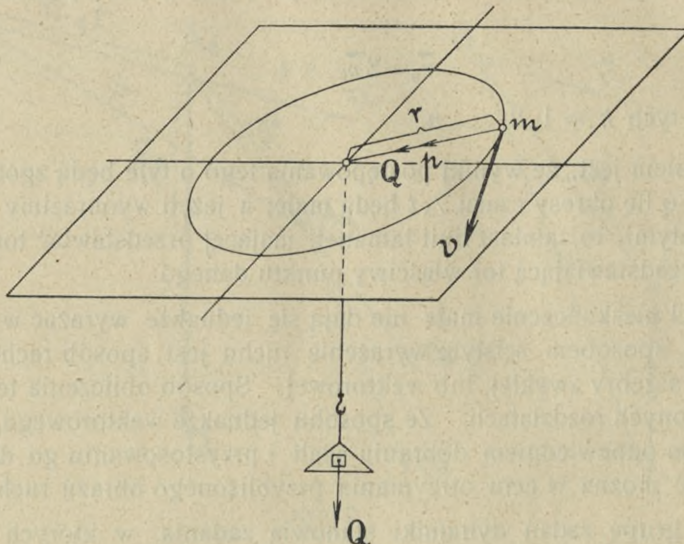
Trzecią grupę zadań dynamiki stanowią zadania, w których dane są siły i przyśpieszenia, a należy obliczyć masę punktu poruszającego się. Rozwiązanie tego rodzaju zadań sprowadza się do znalezienia ilorazu dwóch znanych i wzajemnie równoległych wektorów, — wektora siły i wektora przyśpieszenia. W celu zatem obliczenia masy danego punktu materyalnego, poddamy go działaniu znanej siły, wyznaczymy zapomocą pomiarów przyśpieszenie, jakie on otrzyma, a iloraz tych wielkości jest spółczynnikiem bezwładności;—jest wartością jego masy.

Poddajmy np. dany punkt materyalny działaniu pewnej siły; zbadajmy ruch, jaki ta siła wywoła; obliczmy przyśpieszenie tego punktu; a iloraz z tej siły i przyśpieszenia da wartość jego masy.

Uwiążmy np. bryłę daną na sznurku i obracajmy ją w ten sposób, ażeby zakreślała ona wraz ze sznurkiem koło poziome ruchem jednostajnym, rys. 3-ci. Ruch ten odbywa się pod działaniem siły, występującej w sznurku; ażeby tę siłę zmierzyć, przeciągnijmy sznurek przez bloczek, umieszczony w środku koła i przyczepmy do zwieszonego końca ciężar, równoważący napięcie sznurka, jakie powstaje podczas ruchu punktu; ciężar ten, równy np. $Q kg$, jest miarą siły, działającej na dany punkt. Przyśpieszenie tej bryły, obliczymy z równ. 32-ego, podanego w tomie I-ym, — z prędkości v, z jaką on przebiega po kole, i z promienia r tegoż koła; któreto wielkości można bezpośrednio zmierzyć; przyśpieszenie zatem danej bryły: $p = \frac{v^2}{r}$, i jest skierowane po promieniu ku środkowi, w którym też kierunku i z tymże zwrotem działa siła Q; a zatem:

$$m = Q : \frac{v^2}{r} .$$

Obliczenie mas różnych brył można wykonać jeszcze tymże przyrządem w następujący sposób. Do dodanego sznurka, obciążonego jednym i tym samym ciężarem, przyczepiajmy kolejno różne bryły materyalne, których masy chcemy obliczyć,



Rys. 3.

i nadajmy im takie prędkości po kole, któreby wywołały naprężenie nici, równe danemu ciężarowi, a po zmierzeniu wielkości v_1, v_2, v_3, i t. d. oraz r_1, r_2, r_3 i t. d., o ile są różne, napiszemy równania:

$$m_1 . \frac{v_1^2}{r_1} = m_2 . \frac{v_2^2}{r_2} = m_3 . \frac{v_3^2}{r_3} =, \ldots \ldots \quad (5)$$

z których obliczymy stosunki mas lub wartości ich, gdy przyjmiemy dowolną wartość liczbową dla jednej z nich. Można wreszcie uniknąć zupełnie korzystania z siły ciążenia; w tym celu należy sznurek przywiązać do sprężyny i uważać, ażeby podczas ruchu punktów sprężyna doznawała jednakowych odkształceń.

Gdy bryła dana, której masę mamy obliczyć, znajduje się w polu ciążenia ziemskiego, wtedy zrównoważymy jej ciężar inną bryłą o przyjętym ciężarze Q, masę jej obliczymy ze stosunku $\frac{Q}{g}$; jakieśmy to omówili w § 99-tym tomu I-go. Masy zaś brył, ktorych nie możemy zrównoważyć, znanym ciężarem, jak np. masy planet, możemy obliczyć tylko z ich ruchów, np. zapomocą równań 5-tych, o czem narazie mówić nie będziemy. Są jeszcze inne sposoby obliczenia mas danych punktów, które są oparte na trzeciem prawie zasadniczem, na prawie wzajemnego działania ciał, lecz o tym sposobie pomówimy w dynamice układu punktów.

Dostrzeganie powstawania ruchów doprowadza nas do wniosku, że każdy ruch może być wywołany różnymi pod względem fizycznym czynnikami. Ruch np. wozu może być wywołany siłą organizmu żyjącego, siłą prężności pary, siłą wzbuchu gazów, siłą sprężyn napiętych i t. p. Chociaż czynniki te są pod względem fizycznym różne, posiadają jednakże wspólną miarę działania; — miarę zmiany ruchu danego wozu, czy też wogóle danego punktu materyalnego. Jakie to są czynniki, mechanika teoretyczna nie bierze pod uwagę, a bada jedynie zmiany ruchu danych punktów materyalnych, wywołane tymi czynnikami i bierze następnie te zmiany za podstawę do obliczeń ruchów innych punktów.

3. Inne sposoby wektorowe wyrażania równania dynamicznego. Równanie dynamiczne, równ. 2-gie, które jest podstawą rachunkową całej dynamiki, przedstawimy jeszcze w innej postaci, również wektorowej, a mianowicie: podstawimy w nie, zgodnie z określeniem przyśpieszenia (tom I-szy § 44-ty):

$$\overline{p} = \frac{d\overline{v}}{dt};$$

i otrzymamy równanie:

$$\overline{P} = m\frac{d\overline{v}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Lub też, gdy wyznaczymy położenie punktu w przestrzeni wektorem wodzącym $\overline{r}$, wyprowadzonym z dowolnie obranego bieguna w przestrzeni; wtedy zgodnie § 57-ym T. I-go, mamy:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}; \qquad \text{a zatem} \qquad \overline{p} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2};$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie dynamiczne, otrzymamy je w następującej postaci:

$$\overline{P} = m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

4. Prawo superpozycyi. O prawie tem wspominaliśmy już w § 78-ym tomu I-ego; wyłożymy je jednakże tutaj więcej szczegółowo. Jeżeli dany punkt materyalny o masie m pod działaniem pewnego układu czynników fizycznych, doznaje przyśpieszenia $\overline{p}_1$, a pod działaniem innego układu po usunięciu pierwszego, doznaje przyśpieszenia $\overline{p}_2$, to pod działaniem jednoczesnem obydwóch układów, otrzyma on inne przyspieszenie, różne od poprzednich, które oznaczymy literą $\overline{p}$. W pewnych szczególnych zjawiskach, których czynniki układów podczas jednoczesnego ich działania nie oddziaływają na siebie, przyśpieszenie $\overline{p}$, jak doświadczenia wskazują, równa się sumie wektorowej przyśpieszeń składowych, t. j.

$$\overline{p} = \overline{p}_1 + \overline{p}_2$$

Gdy większa ilość układów działa na dany punkt, i każdy z nich oddzielnie wywołuje przyśpieszenie $\overline{p_k}$, wtedy działanie ich jednoczesne wywoła przyśpieszenie:

$$\overline{p} = \Sigma \overline{p_k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Prawo to jest stwierdzone doświadczalnie i jest jednem z praw zasadniczych mechaniki, — zwane prawem niezależności działania, lub inaczej prawem niezależności ruchów. Ponieważ przyśpieszenia w danym przykładzie odnoszą się do jednego i tego samego punktu o masie m, po przemnożeniu zatem równania 8-go przez m, otrzymamy równanie:

$$\overline{P} = \Sigma \overline{P_k}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

w którem $\overline{P}$ jest siłą, jaką wywierają wszystkie układy łącznie; $\overline{P_k}$ zaś są to siły, jakie wywiera każdy układ oddzielnie. Siłę $\overline{P}$ nazwaliśmy już w statyce siłą wypadkową sił składowych $\overline{P_k}$.

Gdy zatem wiele sił działa na dany punkt o masie m, wtedy mamy równanie dynamiczne:

$$\Sigma \overline{P} = m\overline{p};$$

w którem $\overline{p}$ oznacza przyśpieszenie, jakiego punkt dany dozna pod działaniem danych sił. W szczególnym przypadku, gdy przyśpieszenie $\overline{p}$ punktu ruchomego równa się zeru, t. j. gdy siły są w równowadze, otrzymamy warunek równowagi sił:

$$\Sigma \overline{P_k} = 0.$$

W innym szczególnym przypadku, gdy siły działają wzdłuż jednej prostej, t. j. posiadają wspólny kierunek, wtedy ich wypadkowa równa się sumie algebraicznej sił składowych. Jeżeli zatem pewna siła P_1 wywołuje przyśpieszenie p_1, to n takich sił łącznie, działających wzdłuż jednej prostej, wywołają przyśpieszenie np_1; proporcyonalność zatem przyśpieszenia do siły, przyjęta do określenia siły, jest wyrazem niezależności działania sił.

A. Zastosowania równania dynamicznego do obliczenia ruchu prostolinijnego.

5. **Warunki powstawania ruchu prostolinijnego.** Szczególnym przypadkiem ruchu punktu jest ruch prostolinijny. Ruch ten powstaje wtedy, gdy przyśpieszenie punktu ruchomego posiada kierunek niezmienny, i gdy kierunek początkowej jego prędkości, o ile on ją posiada, zlewa się z kierunkiem przyśpieszenia; inaczej mówiąc, ruch prostolinijny powstaje, gdy siła wywołująca go posiada stały kierunek, zlewający się z kierunkiem początkowej prędkości; wartość przytem siły może się zmieniać.

6. **Ruch punktu pod działaniem siły stałej.** Rozpatrzmy ruch punktu materyalnego, na który działa siła stała $\overline{P}$ i którego prędkość początkowa posiada kierunek, zlewający się z kierunkiem siły. Równanie dynamiczne ruchu tego napiszemy w postaci algebraicznej ze względu na to, że wektory tego równania le-

żą na jednej prostej, wszelkie zatem działania matematyczne z temi wielkościami podlegają odnośnym prawidłom algebry; napiszemy zatem równanie to w postaci:

$$P = m \frac{d^2 x}{d t^2}\,; \quad \text{lub inaczej:} \quad P = m \frac{d v}{d t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

W równaniach tych x oznacza drogę punktu ruchu; a v jego prędkość.

Ponieważ przyjęliśmy w tym pzykładzie, że siła przyśpieszająca P jest stałą wielkością, przeto równanie to można bezpośrednio scałkować i otrzymamy:

$$P t = m v + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Stałą C obliczymy, przyjąwszy początkowe warunki ruchu, dla

$$t = 0; \quad x = 0; \quad v = v_0\,;$$

a po podstawienie tych wartości, otrzymamy: $C = -m v_0$; a zatem:

$$P t = m v - m v_0\,;$$

lub:

$$v = v_0 + \frac{P}{m} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Jest to równanie, wykazujące związek pomiędzy czasem i prędkością danego punktu. Ażeby zaś znaleźć związek pomiędzy czasem i drogą, podstawimy w równ. 12-te:

$$v = \frac{d x}{d t}$$

i otrzymamy po scałkowaniu:

$$\tfrac{1}{2} P t^2 = m x - m v_0 t + C'.$$

Uwzględniając przyjęte warunki początkowego ruchu: $x = 0$; $t = 0$, otrzymamy $C' = 0$; a więc:

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2} \frac{P}{m} . t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Jest to równanie ruchu punktu materyalnego, będącego pod działaniem siły stałej, wyrażające związek pomiędzy spółrzędną x i czasem.

Jeżeli zechcemy znaleźć związek pomiędzy drogą i prędkością, to możemy z równ. 12-go obliczyć czas t, a po podstawieniu jego wartości w równanie 13-te, otrzymamy szukany związek:

$$x = v_0 \frac{m v - m v_0}{P} + \tfrac{1}{2} \frac{P}{m} \left(\frac{m v - m v_0}{P} \right)^2,$$

a po uproszczeniu:

$$x = \tfrac{1}{2} m \frac{v^2 - {v_0}^2}{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Równanie to możemy otrzymać bezpośrednio z równania dynamicznego siły, z równ. 10-tego; podstawiając w nie:

$$d t = \frac{d x}{v}\,;$$

wtedy bowiem:

$$P = m\,dv\,\frac{v}{dx}\;;\quad \text{lub inaczej:}\quad P.dx = d\,(\tfrac{1}{2}mv^2)\,;$$

a po scałkowaniu pomiędzy granicami dla x od zera do x, oraz dla prędkości od v_0 do v, otrzymamy równanie szukane, t. j. równanie 14-te.

Rachunek powyższy ma na celu przedstawienie na najprostszym przykładzie sposobu stosowania równania dynamicznego do obliczenia ruchu. Z rachunku tego widzimy, że równanie dynamiczne siły daje związek, w postaci równania różniczkowego, pomiędzy trzema wielkościami: siłą, przyśpieszeniem i czasem; jeżeli jedna z tych wielkości jest znana, np. w powyższym przykładzie siła P, to obliczyć można równanie ruchu w postaci skończonej, które wyraża związek pomiędzy dwiema pozostałemi wielkościami; w przykładzie powyższym jest nim równ. 12-te, wykazujące związek pomiędzy v i t. Związek pomiędzy x i v lub pomiędzy x i t, obliczymy, stosując do tego równanie kinematyczne $v = \frac{dx}{dt}$, z którego oznaczymy dt i podstawimy w równanie, wykazujące związek pomiędzy prędkością i czasem, lub w równanie dynamiczne, a po odpowiedniem scałkowaniu, znajdziemy szukane związki. Wybór jednakże zmiennych, pomiędzy któremi chcemy znaleźć związki, zależy w wielu przypadkach od możności wyrażenia całek danych wzorów funkcyami znanemi; zdarzają się bowiem wzory, których całki nie dają się wyrazić temi funkcyami.

W szczególnym przypadku powyższego przykładu, gdy siłą przyśpieszającą jest przyciąganie kuli ziemskiej, które w pewnych niewielkich przestrzeniach można uważać za stałe, wtedy siłę tę, zwaną ciężarem danego punktu materyalnego, wyrazić można równaniem:

$$P = mg;$$

w którem g jest przyśpieszeniem w danem miejscu kuli ziemskiej; po podstawieniu tej wartości w równ.: 12-te, 13-te i 14-te; otrzymamy równanie ruchu punktu materyalnego, spadającego w próżni pod działaniem siły ciążenia, równania te są następujące:

$$1)\quad v = v_0 + gt;$$

$$2)\quad x = v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2;$$

lub: $$x = \frac{\cancel{m}v^2}{2g} - \frac{\cancel{m}v_0^{\,2}}{2g} \quad \text{. . . . . (15)}$$

Pierwsze z tych równań wyraża związek w skończonej postaci, pomiędzy prędkością i czasem; — drugie pomiędzy drogą i czasem; — a trzecie pomiędzy drogą i prędkością.

7. Spadanie pionowe bryły materyalnej z uwzględnieniem oporu powietrza. Na bryłę spadającą działają w danym przypadku dwie siły: siła ciążenia bryły, działająca z góry na dół, i siła parcia powietrza, jaka powstaje podczas ruchu bryły. Przyjmujemy w tem zadaniu, że ciężar bryły jest nam dany, i że parcie powietrza na poruszającą się bryłę, na podstawie doświadczeń, jest proporcyonalne do wielkości pola F, utworzonego przez rzut bryły na płaszczyznę prostopadłą do kierunku jej ruchu; oraz proporcyonalne do prędkości w drugiej potędze. Siłę zatem parcia, którą oznaczymy literą A, wyrazimy wzorem:

$$A = kFv^2;$$

i nadamy jej zwrot przeciwny zwrotowi prędkości bryły.

We wzorze tym k jest spółczynnikiem empirycznym; F oznacza wielkość pola rzutu bryły na płaszczyznę, prostopadłą do kierunku ruchu, wyrażoną w m^2; v m/sek. oznacza prędkość uderzającego powietrza w bryłę; wartość tej prędkości przyjmiemy w danem zadaniu równą wartości prędkości spadającej bryły. Wzór ten, jako empiryczny, stosowany być może tylko do przypadków, które są zbliżone do przypadków objętych danemi doświadczeniami.

Oznaczywszy ciężar spadającej bryły przez Q kg, wyrazimy siłę, działającą na nią, wzorem: $(Q - kFv^2)$; siła ta wywołuje przyśpieszenie $\frac{dv}{dt}$; a więc napiszemy równanie dynamiczne:

$$(Q - kFv^2) = m\frac{dv}{dt}, \qquad (16)$$

w którem:

$$m = \frac{Q}{g}.$$

Równanie to jest równaniem różniczkowem ruchu, które należy scałkować, ażeby otrzymać równanie ruchu w skończonej postaci; jakieśmy to czynili w przykładzie poprzednim. W celu scałkowania oddzielmy zmienne, i otrzymamy:

$$dt = m\frac{dv}{Q - kFv^2}.$$

Przyjąwszy początkowe warunki ruchu:

$$x = 0; \quad t = 0; \quad v = 0;$$

po scałkowaniu tego równania podług wzoru 19-go, zamieszczonego w „Techniku“ t. I str. 75, otrzymamy:

$$t = m\frac{1}{2\sqrt{QkF}} \operatorname{lgn} \frac{\sqrt{QkF} + kFv}{\sqrt{QkF} - kFv} \qquad (17)$$

Równanie to pozwala obliczyć czas, po którego upływie, spadająca bryła posiada daną prędkość v. W celu zaś obliczenia prędkości, jaką bryła posiada po upływie danego czasu, rozwiążemy to równanie względem v; a skróciwszy przedtem ułamek przez wartość $\sqrt{kF}$, otrzymamy:

$$e^{t\frac{2\sqrt{QkF}}{m}} = \frac{\sqrt{Q} + v\sqrt{kF}}{\sqrt{Q} - v\sqrt{kF}};$$

skąd:

$$e^{t\frac{2\sqrt{QkF}}{m}} . (\sqrt{Q} - v\sqrt{kF}) = (\sqrt{Q} + v\sqrt{kF});$$

i wreszcie:

$$v = \sqrt{\frac{Q}{kF}} \cdot \frac{e^{t\frac{2\sqrt{QkF}}{m}} - 1}{e^{t\frac{2\sqrt{QkF}}{m}} + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Sprawdzimy przedewszystkiem wymiary tego wzoru, i w tym celu wyliczymy najpierw wymiar spółczynika k. Wymiar ten otrzymamy ze wzoru: $P = kFv^2$, gdy podstawimy w niego wymiary siły, pola i prędkości; a zatem po podstawieniu mamy:

$$MLT^{-2} = kL^2 (LT^{-1})^2; \qquad \text{skąd:} \qquad k = ML^{-3}.$$

Po podstawieniu następnie wymiarów wielkości wyrazu $\sqrt{\frac{Q}{kF}}$, otrzymamy jego wymiar:

$$\sqrt{\frac{Q}{kF}} = (MLT^{-2} . M^{-1} L^3 L^{-2})^{1/2} = (L^2 T^{-2})^{1/2} = LT^{-1};$$

jest to wymiar prędkości; a ponieważ i po lewej stronie jest prędkość, przeto ułamek w wykładniku powinien mieć wymiar zero. Sprawdzimy jeszcze jego wymiar, t. j. wymiar wyrazu $t . \frac{2\sqrt{QkF}}{m}$; wymiar ten jest następujący:

$$TM^{-1} (MLT^{-2} ML^{-3} L^2)^{1/2} = T^0 M^0 L^0 = \text{wymiar } 0.$$

A więc obydwie strony równania 18-tego posiadają wymiar prędkości LT^{-1}. Wzór 18-ty można jeszcze sprawdzić, zakładając: $k = 0$; lub $F = 0$; wtedy bowiem powinniśmy otrzymać równanie ruchu jednostajnie przyśpieszonego: $v = gt$.

W celu unaocznienia zależności v od t obliczymy następujący przykład liczbowy i zestawimy wartości v dla różnych wartości t. Do obliczenia przyjmiemy $F = 1\,m^2$; $Q = mg = 24\,kg$, oraz $k = 0{,}12$[1]. Z tych danych obliczymy $m = \frac{24}{9{,}81} = 2{,}45$, a po podstawieniu tych wartości w równanie 18-te, otrzymamy:

$$v = 13{,}9 \frac{e^{1{,}4t} - 1}{e^{1{,}4t} + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Na podstawie tego wzoru obliczyliśmy wartości v dla różnych t i zestawiliśmy je w następującej tablicy, w której podaliśmy również wartości v_b ze wzoru $v = gt$ dla przypadku, w którym nie uwzględniamy oporu powietrza.

t sek.	0	0,1	1	2	3	4	5	. . . .	∞
v m/sek. . . .	0	0,97	8,5	12,4	13,5	13,9	13,9	. . . .	13,9
v_b bez oporu .	0	0,98	9,8	19,6	29,4	39,2	49,0	. . . .	∞

[1]) G. Eiffel, w pracy „Recherches expérimentales sur la resistance de l'air“ 1907 — podaje różne spółczynniki oporu dla różnych powierzchni.

Ażeby określić związek pomiędzy drogą i czasem, podstawimy w równ. 18-te, $v = \frac{dx}{dt}$, gdzie x oznacza odległość punktu od miejsca wyjścia, i otrzymujemy z niego, po przemnożeniu licznika i mianownika przez wartość $e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}$, równanie następujące:

$$dx = \sqrt{\frac{Q}{kF}} \; \frac{e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}} - e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}}{e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}} + e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}} \, dt;$$

$$dx = \sqrt{\frac{Q}{kF}} \; \frac{\frac{m}{\sqrt{QkF}} \, d\left(e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}} + e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}\right)}{e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}} + e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}}.$$

Równanie to możemy bezpośrednio scałkować i otrzymamy:

$$x = \frac{m}{kF} \operatorname{lgn} \left(e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}} + e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}\right) + K.$$

Wartość K obliczymy z warunków, że dla $x = 0$, $t = 0$; a po podstawie tych wartości, otrzymamy:

$$x = \frac{m}{kF} \operatorname{lgn} \frac{e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}} + e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}}{2}.$$

Ze wzoru tego obliczyć można długości drogi, jaką zakreśli punkt materyalny w różnych okresach czasu. Zestawienie wartości drogi i czasu dla tego przykładu podajemy w poniższej tablicy, w której dopisaliśmy szereg wartości x_b, obliczonych ze wzoru $x_b = \frac{1}{2} g t^2$; i przedstawiających drogę, którą przebyłby punkt bez oporu powietrza:

t sek. . .	0	1	2	3	4	5
x m. . .	0	4,5	15,0	27,5	41,3	55,1
x_b m. . .	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,6

Tablica ta poucza, że ze wzrostem czasu, przyrosty drogi stają się prawie równe; np. pomiędzy sekundą 2-gą i 3-cią przybyło drogi 12,5 m, pomiędzy 3-cią i 4-tą przybyło 13,8 m, pomiędzy 4-tą i 5-tą przybyło również 13,8 m; czyli z powiększeniem czasu ruch punktu zbliża się do ruchu jednostajnego; a prędkość jego zbliża się do wartości 13,9 m; wykazanej w poprzedniej już tablicy.

We wzorze drogi wartość wyrazu $e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}$, z powiększaniem się t, nadzwyczaj prędko maleje, — tak, iż przy znacznych wartościach czasu możemy ten wyraz odrzucić; a wtedy otrzymamy wzór przybliżony dla dużych wartości t:

$$x = \frac{m}{kF} \lg n \left(\tfrac{1}{2} e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}\right);$$

lub inaczej:

$$x = \frac{m}{kF} \left(t \frac{\sqrt{QkF}}{m} - \lg n 2\right);$$

odrzucając jeszczee lgn 2 jako wartość małą, w porównaniu z wartością wyrazu, zawierającego czas, otrzymamy po skróceniu wzór przybliżony:

$$x = \sqrt{\frac{Q}{kF}} \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

Dla ruchu jednostajnego mamy wogóle wzór drogi: $x = ct$; wyraz zatem $\sqrt{\frac{Q}{kF}}$ wzoru powyższego wyraża prędkość stałą, do której zbliża się z biegiem czasu prędkość punktu spadającego. Jest to ta sama wartość, którą otrzymamy, gdy w równ. 18-em lub 19-em odrzucimy jednostki, znajdujące się w liczniku i mianowniku, jako wartości bardzo małe w stosunku do wartości wyrazu poprzedzającego.

Przykład powyższy poucza, że ruch punktu materyalnego, poruszającego się pod działaniem siły ciążenia w środowisku, sprawiającem opór, proporcyonalny do kwadratu prędkości, charakteryzuje się tem, że po upływie pewnego czasu, (jak w przykładzie powyższym po upływie 4-ch sekund), prędkość staje się, praktycznie biorąc, prawie niezmienną, t. j. ruch staje się prawie jednostajny[1]).

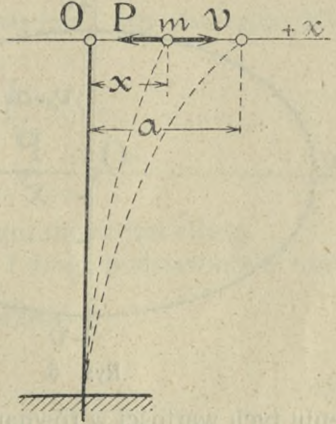
Wynik ten wytłomaczymy sobie fizycznie, gdy zwrócimy uwagę na stosunek siły ciążenia do siły oporu. Siła ciążenia w danym przykładzie jest stałą, siła zaś oporu wzrasta ze wzrastającą prędkością; z biegiem zatem czasu siła oporu dąży do zrównania się z siłą ciążenia; wskutek czego ruch punktu spadającego zbliża się do ruchu jednostajnego. Rozpatrując z teoretycznego stanowiska ten przebieg, zrównanie się tych sił następuje asymptotycznie do czasu; lecz biorąc go z praktycznego stanowiska, zrównanie się tych sił może nastąpić dosyć szybko; różnice ich bowiem po upływie krótkiego czasu stają się niedostrzegalne. Z tej właściwości danego ruchu korzystamy w przypadkach, w których działa na daną bryłę siła przyśpieszająca, a chcemy otrzymać ruch tej bryły jednostajny; lub ściślej mówiąc prawie jednostajny. Gdy np. na powierzchnię wała, prostopadle do jego osi, działa siła stała Q, wtedy, jak łatwo to fizycznie pojąć, wał dozna obrotu jednostajnie przyśpieszonego; chcąc jednakże otrzymać ruch jednostajny, przytwierdzamy do wała łopatki z płaszczyznami prostopadłemi do kierunku ruchu, a podczas obrotu wała łopatki te wywołują opór, którego wynikiem jest ruch jednostajny przyrządu. Przyrząd, w ten sposób zbudowany, bywa stosowany jako regulator (miarkownik) w małych mechanizmach, poruszanych siłami stałemi; bywa również stosowany do regulowania ruchu silników[2]).

---

[1]) Doświadczenia, wykonane przez G. Eiffel'a, potwierdzają z całą ścisłością te teoretyczne wyniki.

[2]) Ztft. d. V. d. Ing. 1892. str. 184.

8. **Ruch drgający.** Punkt materyalny o masie m poddany jest działaniu siły, przyciągającej do pewnego środka; obliczyć równanie ruchu. Jeżeli punkt dany umieścimy w środku przyciągania, nie nadając mu prędkości, to pozostanie on w spoczynku; lecz gdy umieścimy go zewnątrz tego środka i puścimy np. swobodnie, wtedy siła przyciągania nada mu pewien ruch w kierunku tego środka. W tych warunkach punkt dany nie zatrzyma się w środku przyciągania, lecz, zgodnie z prawem bezwładności, wskutek nabytej prędkości, przeleci przez środek przyciągania, i przesunąłby się do nieskończoności z tą prędkością, gdyby siła przyciągania nie wstrzymywała go w tym ruchu; a wreszcie nie zawróciła go znowuż do tego środka. Punkt zatem materyalny, wyprowadzony w tych warunkach z położenia równowagi, będzie się wahał około środka przyciągania. Ruch taki nazywamy wogóle ruchem wahadłowym, lub ruchem drgającym. Szczegółowe właściwości tego ruchu zależą od zmienności siły przyciągania; a zmienność ta może być rozmaita.



Rys. 4.

Przyjmijmy w danym przykładzie, że siła przyciągająca jest **proporcyonalną do odległości** punktu od środka przyciągania; jeżeli odległość tę oznaczymy przez x, to siłę przyciągającą P wyrazimy wzorem:

$$P = -kx,$$

w którym k oznacza spółczynnik proporcyonalności działania siły; znak zaś odjemny wskazuje, że siła P posiada zwrot przeciwny zwrotowi dodatnemu osi x. Ruch w ten sposób określony nazwano, ze względu na znaczenie, jakie posiada w akustyce, ruchem **harmonicznym**.

Ruch ten unaocznić sobie możemy zapomocą następującego modelu fizycznego. Umocujmy pionowo jeden koniec pręta sprężystego, a do drugiego przyczepmy bryłę materyalną o masie m; odchylmy następnie pręt od położenia pionowego i puśćmy go, a otrzymamy wahania się przyczepionej bryły; rys. 4-ty. W razie gdy pręt jest zupełnie sprężysty, siła sprężystości pręta jest, jak doświadczenia uczą, proporcyonalna do wielkości odchylenia; zatem odpowiada ona sile, przyjętej w danym przykładzie. Model ten jednakże jest niezupełnie zgodny z postawionem zadaniem; w przytoczonem bowiem zadaniu punkt przebiega po prostej linii; koniec zaś pręta zakreśla pewien łuk. Gdy jednakże przyjmiemy, że pręt jest dosyć długi, a odchylenie jego od położenia równowagi jest niewielkie, wtedy łuk, jaki zakreśla przyczepiona bryła, przyjąć można za jego cięciwę; a z tem zastrzeżeniem opisany model odpowiada warunkom, postawionym w danem zadaniu, i może służyć do jego unaocznienia.

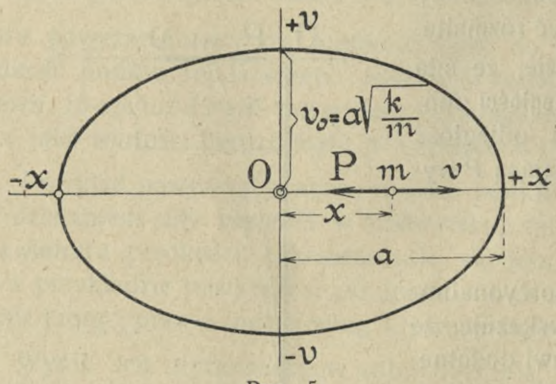
W celu zestawienia równania dynamicznego ruchu danego punktu podstawmy w ogólny wzór równania dynamicznego: $P = m\frac{dv}{dt}$, wartość siły $P = -kx$, a otrzymamy równanie:

$$-kx = m\frac{dv}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Pomiędzy zmiennemi tego równania zachodzi związek, wynikający z określenia prędkości: $v = \frac{dx}{dt}$.

Z tych dwóch równań możemy jedną zmienną wyrugować, a otrzymamy jedno równanie, wyrażające związek pomiędzy dwiema zmiennemi. Równań takich napisać możemy wogóle trzy: (x, v); (x, t), oraz (v, t). Zwrócić jednakże należy uwagę, że te trzy równania są zależne od siebie.

W celu znalezienia związku, pomiędzy x i v, podstawimy w powyższe równanie dynamiczne $dt = \frac{dx}{v}$, a otrzymamy, po scałkowaniu, równanie, wykazujące szukany związek. Równanie to jest następujące:



Rys. 5.

$$-\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + C.$$

Stałą C obliczymy, przyjąwszy np. dla wartości: $x = a$,

$$v = 0;$$

t. j. przyjąwszy, że punkt ruchomy, po odchyleniu go na odległość a od środka przyciągania, puścimy swobodnie bez prędkości. Po podstawieniu tych wartości w równanie powyższe otrzymamy:

$$-\frac{ka^2}{2} = C;$$

a następnie:

$$-\frac{kx^2}{2} = m\frac{v^2}{2} - \frac{ka^2}{2};$$

skąd wreszcie:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Z równania tego obliczyć można prędkości punktu ruchomego w każdem miejscu x toru; znak dodatny należy brać w tym przypadku, gdy spółrzędna x rośnie podczas ruchu punktu; gdy zaś ona maleje, należy brać znak odjemny.

Wykres (x, v) tego ruchu przedstawiony jest na rys. 5-tym. Z równania 22-ego wynika, że dla ruchu rzeczywistego powinno być $x < a$, i że największe oddalenie punktu ruchomego od O jest $x = a$; poza tą bowiem wartością dla x, v otrzymuje wartości urojone. Odległość tę nazwano największem odchyleniem, inaczej amplitudą. W miejscu, dla którego $x = a$, jest, zgodnie z założeniem, $v = 0$; czyniąc następnie $x < a$, v powiększa się, i dla: $x = 0$.

$$v = v_{\text{maxim}} = \pm a \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Największą zatem prędkość posiada punkt podczas przejścia przez środek przyciągania; oznaczywszy tę prędkość przez v_m, napiszemy:

$$v_m = \pm a \sqrt{\frac{k}{m}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Gdy daną jest prędkość v_m, wtedy największe odchylenie:

$$a = \pm v_m \sqrt{\frac{m}{k}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Jeśli uczynimy $x < 0$, to wartości v będą się powtarzały, albowiem $(\pm x)^2$ zawsze daje tę samą wartość.

Postać wykresu (x, v) unaocznimy sobie dokładniej, gdy równanie 22-gie przekształcimy na następujące:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{\left(a\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2} = 1,$$

które jest równaniem elipsy; wykres więc (x, v) danego ruchu jest elipsą.

W celu znalezienia związku pomiędzy czasem i drogą podstawimy w równanie dynamiczne: równ. 21-sze, $v = \frac{dx}{dt}$; i otrzymamy:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu.

Pierwszą jego całkę otrzymamy, po podstawieniu w nie $\frac{dx}{dt} = v$, oraz $dt = \frac{dx}{v}$. Pierwszą jego całką jest równanie ze zmiennemi x i v; a ponieważ równanie to już eśmy obliczyli, przeto w równ. 22-gie podstawimy bezpośrednio $v = \frac{dx}{dt}$ i otrzymamy szukany związek, lecz w postaci różniczkowej:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}.$$

W celu przekształcenia go na postać skończoną, oddzielimy zmienne i napiszemy:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}};$$

a po scałkowaniu mamy:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \,.\, \text{arc sin}\left(\frac{x}{a}\right) + C_1;$$

stałą C_1 obliczymy, przyjąwszy dla: $x = 0$;

$$t = 0;$$

t. j. przyjąwszy, że czas zaczynamy liczyć, od chwili, w której punkt ruchomy przechodzi przez środek O; a podstawiwszy te wartości, otrzymamy $C_1 = O$; a następnie:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ arc sin } \left(\frac{x}{a}\right);$$

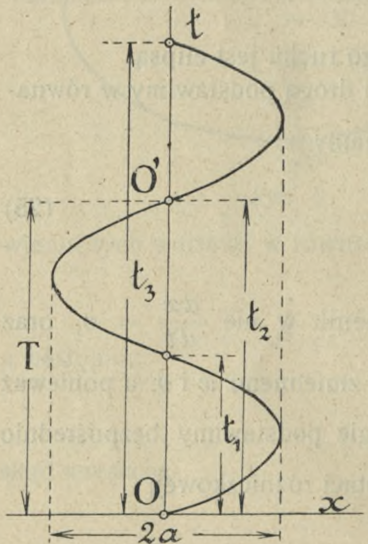
lub:

$$t\sqrt{\frac{k}{m}} = \text{arc sin}\left(\frac{x}{a}\right);$$

skąd:

$$x = a \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Równanie to jest zatem całką równania różniczkowego drugiego rzędu, przedstawionego pod Nr 25-ym. Wykres (x, t) danego ruchu przedstawiliśmy na rys. 6-tym.



Rys. 6.

Znajdźmy jeszcze związek pomiędzy prędkością i czasem, i w tym celu różniczkując równ. 26-te względem czasu t, otrzymamy:

$$v = \pm a\sqrt{\frac{k}{m}} \,.\, \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right). \quad . \quad (27)$$

Równanie to pozwala obliczyć prędkość punktu w każdej chwili t.

Z równ. 26-ego wynika, że dla: $x = 0$;

$$\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) = 0;$$

skąd:

$$t = n\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

gdzie n może być dowolną całą cyfrą: 0, 1, 2, 3,...; a więc punkt ruchomy przechodzi przez miejsce, $x = 0$, w równych odstępach czasu. Prędkości, z jaką on przechodzi to miejsce, obliczymy z równ. 27-ego, po podstawieniu w nie odpowiednich wartości czasu, a zatem prędkości te w czasie:

$$t_0 = 0; \qquad t_1 = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad t_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \qquad t_3 = 3\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

są następujące:

$$v_0 = a\sqrt{\frac{k}{m}}; \quad v_1 = -a\sqrt{\frac{k}{m}}; \quad v_2 = a\sqrt{\frac{k}{m}}; \quad v_3 = -a\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Z zestawienia tych wartości widzimy, że punkt ruchomy przechodzi przez środek przyciągania z prędkościami o jednakowych bezwzględnych wartościach, lecz o zwrotach różnych, co fizycznie wytłómaczymy sobie w ten sposób, że gdy punkt przechodzi w danej chwili z dodatną prędkością, to następnie przejść on musi z odjemną prędkością.

Dla czasu t_2, dla którego $n = 2$, punkt ruchomy zaczyna na nowo ruch z prędkością, jaką posiadał w czasie $t = 0$. Okres czasu, po upływie którego punkt ruchomy, po wyjściu z pewnego miejsca toru, powróci do niego **z tą samą prędkością**, nazwano okresem **podwójnego wahnięcia**. Okres ten oznaczymy literą T; i obliczymy go dla danego przykładu z następującego równania:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

ze wzoru tego odczytamy, że okres T nie zależy od wielkości odchylenia a, t. j. nie zależy od amplitudy.

Jeżeli ruch dany unaocznimy sobie zapomocą ruchu punktu materyalnego, umieszczonego na końcu pręta sprężystego, którego drugi koniec jest sztywno umocowany, jakieśmy to już wyżej mówili, to równ. 28-me wyraża, że okres podwójnego wahnięcia nie zależy od wielkości początkowego odchylenia pręta, a zależy tylko od wielkości masy i od wielkości spółczynnika sprężystości. Wziąwszy następnie pod uwagę związek pomiędzy a i v_m, wyrażony równaniem 24-tem, wypowiemy ten wniosek: okres podwójnego wahnięcia nie zależy od prędkości jaką nadamy punktowi w środku przyciągania.

Wzór 28-my wytłómaczymy sobie fizycznie w następujący sposób. Z powiększeniem masy poruszającej się, okres wahnięcia się powinien się powiększać; większa bowiem masa pod działaniem takiejże samej siły, porusza się wolniej, niż masa mniejsza; okres zatem wahnięcia tej samej sprężyny rośnie z powiększeniem masy ruchomej. Ze zwiększeniem natomiast siły przyśpieszającej, której wielkość dla tych samych odległości punktu wyraża spółczynnik k, okres wahnięć się zmniejsza; dany bowiem punkt prędzej przebiega po torze. Z tego wynika, że okres podwójnego wahnięcia powiększa się z powiększeniem się masy, poruszającego się punktu, i zmniejsza się z powiększeniem spółczynnika k, co jest zgodne z powyższym wzorem. Jeżelibyśmy przyjęli w myśl tych rozumowań, że okres T jest wprost proporcyonalny do masy i odwrotnie proporcyonalny do spółczynnika k, to wymiar wzoru takiego nie przedstawiałby wymiaru czasu; wymiar bowiem wielkości k, (który otrzymamy z określenia: $kx =$ sile, t. j. $kL = MLT^{-2}$), jest MT^{-2}, wyraz zatem $\frac{m}{k}$ ma wymiar T^2. Ażeby zaś otrzymać wymiar czasu, należy wziąć pierwiastek drugi z wyrazu $\frac{m}{k}$; a w ten sposób dojdziemy do powyższego wzoru; liczbę zaś π można uważać jako cechę okresowości danego ruchu

Ruch okresowy punktu materyalnego, którego okresy nie zależą od odchyleń, nazwano ruchem **izochronicznym**. Izochronizm w powyższym przykładzie wytłómaczymy sobie fizycznie w ten sposób, iż z powiększeniem odchylenia pręta, t. j. amplitudy, wywołujemy jednocześnie większą siłę, przyciągającą punkt materyalny do położenia równowagi; wskutek czego punkt dany otrzymuje większe przyśpieszenie tak, iż w tych samych okresach czasu przejść on może drogi o różnych długościach. W powyższych rozpatrywaniach ruch dany wyraziliśmy wielkością odchylenia i stosunkiem $\frac{k}{m}$; możemy jednakże wyrazić go innemi wielkościami, np. wielkością a i T; w tym celu należy z równ. 28-ego podstawić w równ. 26-te wartość:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi \frac{1}{T};$$

a otrzymamy:

$$x = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

Równanie w tej postaci bywa często stosowane do badań fizycznych, gdyż wyraża ono ruch wielkościami a i T, które można bezpośrednio wymierzyć z danego zjawiska.

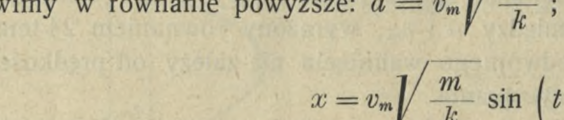
Jeżeli następnie zechcemy wyrazić równanie ruchu prędkością punktu w chwili, gdy znajduje się on w środku przyciągania, i stosunkiem $\frac{k}{m}$, to podstawimy w równanie powyższe: $a = v_m \sqrt{\frac{m}{k}}$; i otrzymamy równanie:

$$x = v_m \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \left(t \sqrt{\frac{k}{m}}\right), \quad \text{. . . . . (29)}$$

w którem v_m oznacza prędkość punktu w chwili przejścia przez środek przyciągania.

Ze wzoru 28-ego skorzystać możemy w celu obliczenia stosunku mas różnych brył. W tym celu umieszczać będziemy kolejno na końcu jednego i tego samego prętu sprężystego, umocowanego pionowo, różne bryły, których masy mamy obliczyć, a wyznaczywszy doświadczalnie okresy wahnięć każdej z brył, co nietrudno jest wykonać, ze względu na izochronizm ich ruchów; — obliczymy stosunek wartości tych mas ze stosunku wartości okresów w drugiej potędze.

9. Ruch punktu, gdy środek przyciągający jest w ruchu. Przyjmijmy, że środek przyciągający O, rys 7-my, znajduje się w ruchu np. prostolinijnym jednostajnym, i że przyciąganie odpowiada warunkowi wyżej postawionemu. Równanie ruchu tego punktu przedstawi się zatem w postaci następującej:



Rys. 7.

$$-k(x - \xi) = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

w którem x oznacza odległość poruszającego się punktu od początku drogi A_0; m jego masę; ξ odległość środka przyciągającego od tegoż początku. Wielkość ξ można wyrazić wogóle funkcyą czasu; w danym przykładzie: $\xi = ct$; po podstawieniu tej wartości w równanie dynamiczne, otrzymamy równanie:

$$-k(x-ct)=m\frac{d^2x}{dt^2};$$

lub inaczej:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=ckt.$$

W tym przykładzie siła przyciągająca $P=-k(x-ct)$ zależy od położenia punktu ruchomego i od czasu.

Równanie powyższe należy do grupy t. zw. równań różniczkowych z funkcyą wikłającą; całkowanie jego wykonać można w sposób następujący: podstawimy w nie nową zmienną: $\eta=x-ct$, a otrzymamy:

$$-k\eta=m\frac{d^2\eta}{dt^2}.$$

Jest to równanie co do swej postaci jednakowe z równ. 25-em i wskutek tego, przyjąwszy warunki początkowe ruchu, któreśmy przyjęli w przykładzie poprzednim, t. j.:

$$\text{dla}\quad t=0;\quad \eta=a;\quad \text{oraz}\quad \frac{d\eta}{dt}=0;$$

otrzymamy równanie ruchu względem środka przyciągania:

$$\eta=a\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right),$$

a względem początku spółrzędnych A_0:

$$x=ct+a\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(30)$$

Wykres (x, t) tego ruchu otrzymamy, gdy spółrzędne prostej: $x=ct$, dodamy do spółrzędnych sinusoidy: $\eta=a\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$.

10. Ruch, gdy środek dany odpycha punkt proporcyonalnie do odległości. Rozpatrzmy przypadek, gdy środek dany odpycha punkt materyalny siłą proporcyonalną do odległości. Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące:

$$kx=m\frac{d^2x}{dt^2};\quad\ldots\ldots\ldots\quad(31)$$

lub:

$$kx=m\frac{dv}{dt}.$$

W celu scałkowania tego równania podstawimy w nie:

$$dt=\frac{dx}{v},\qquad(\text{z równ. } v=\frac{dx}{dt}),$$

i otrzymamy:

$$kxdx=mvdv,$$

a po scałkowaniu:

$$\tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2} m v^2 + K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Przyjmijmy warunki początkowe:

$$x = 0; \quad v = v_0; \quad t = 0,$$

a otrzymamy:

$$0 = \tfrac{1}{2} m v_0^2 + K; \qquad \text{skąd:} \qquad K = -\tfrac{1}{2} m v_0^2,$$

a po podstawieniu tych wartości, napiszemy równanie:

$$\tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2;$$

skąd:

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} x^2 + v_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Z równania tego obliczymy v w każdem miejscu x toru, jeżeli daną jest prędkość v_0 w środku odpychania.

Ponieważ wielkości x i v wchodzą w to równanie w drugiej potędze, przeto wartości v są jednakowe dla symetrycznych położeń punktu względem środka odpychania. Z równania tego widzimy również, że wartość v rośnie do ∞ z powiększeniem się wartości x do ∞.

Podstawmy następnie w równ. 33-cie: $v = \frac{dx}{dt}$, a otrzymamy równanie różniczkowe, wyrażające związek pomiędzy x i t:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m} x^2 + v_0^2};$$

skąd:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m} x^2 + v_0^2}}.$$

W celu scałkowania tego równania przekształcimy je w ten sposób, ażeby przy zmiennej x znajdował się spółczynnik jedność, gdyż przyjmujemy, że znaną jest nam całka wyrazu ogólnego:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \lg n\,(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C;$$

(zamieszczonego w Techniku na str. 77, pod Nr 33); na skutek tego równanie powyższe otrzyma postać:

$$dt = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{m}{k}\right) v_0^2 + x^2}},$$

a po scałkowaniu:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} . \lg n\left(x + \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + x^2}\right) + C.$$

Podstawmy w nie: $t = 0$; $x = 0$, a otrzymamy:

$$C = -\sqrt{\frac{m}{k}} . \lg n\left(v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}\right);$$

i wreszcie:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} . \lg n \frac{x + \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + x^2}}{v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

W celu rozwiązania tego równania względem x, zastępujemy funkcyę logarytmiczną funkcyą wykładniczą, a więc:

$$e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{x + \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + x^2}}{v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}};$$

równanie to możemy napisać w sposób nast.:

$$\sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + x^2} = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}\, e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}} - x,$$

a po podniesieniu obydwóch stron do drugiej potęgi i po odpowiedniem skróceniu, otrzymamy:

$$\frac{m}{k} v_0^2 = \frac{m}{k} v_0^2 e^{2t\sqrt{\frac{k}{m}}} - 2 x v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} . e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}},$$

skąd wreszcie:

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} . \frac{e^{2t\sqrt{\frac{k}{m}}} - 1}{2\, e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}}};$$

lub inaczej:

$$x = \tfrac{1}{2} v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} . \left(e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}} - e^{-t\sqrt{\frac{k}{m}}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Jest to równanie ruchu, wykazujące związek pomiędzy drogą i czasem. Z równania tego wynika, że z rosnącą wartością t, wartość wyrazu $e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}}$ nadzwyczaj prędko rośnie, natomiast drugi wyraz również prędko maleje; wobec tego dla $t = \infty$, otrzymamy $x = \infty$. Równanie to wskazuje również, że dla $x = 0$ $t = 0$.

W szczególnym przypadku, gdy $v_0 = 0$, wtedy $x = 0$, niezależnie od czasu, t. j. punkt ruchomy, umieszczony bez prędkości początkowej w środku przyciągania, pozostaje w spoczynku, co jest fizycznie zrozumiałem.

Porównywując równanie dynamiczne tego zadania (równ. 31-sze) z takimże równaniem zadania poprzedniego (równ. 25-go) zauważymy, że różnią się one tylko znakiem przy wielkości k. Całkę zatem równ. 31-ego otrzymamy z całki równ. 25-tego, gdy podstawimy w nie: $k = -k$, czyli $\sqrt{k} = i\sqrt{k}$, gdzie $i = \sqrt{-1}$; tem równaniem jest nast.:

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{i} \sin\left(t \sqrt{\frac{k}{m}}\, i\right).$$

W celu usunięcia z niego wielkości urojonych, skorzystamy z ogólnego wzoru:

$$\sin(i\alpha) = i\,\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2};$$

(„Technik“ I str. 68, wzór 6-ty), i otrzymamy równ. 35-te.

Można również dojść do całki równania postaci ogólnej:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + qx = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

podstawiając w nie:

$$x = A\cos(t\sqrt{q}) + B\sin(t\sqrt{q});$$

lub

$$x = Ae^{t\sqrt{q}} + Be^{-t\sqrt{q}};$$

lub

$$x = \alpha.\cos(t\sqrt{q} + \beta),$$

a po obliczeniu stałych A i B lub α i β z początkowych warunków zadania, otrzymamy powyższe całki.

11. Ruch harmoniczny przytłumiony. Z warunków podanego powyżej zadania wynika, że ruch harmoniczny, gdy został raz wywołany, powinien trwać do nieskończoności, gdyż dla każdej wartości t, otrzymamy zawsze z równania ruchu wartość skończoną zmiennej x. W rzeczywistości jednakże przypadek taki nie zachodzi, ruch bowiem np. pręta sprężystego, wprowadzonego w ruch okresowy, po upływie pewnego czasu zanika.

Wzór więc ruchu, wyżej wyprowadzony, nie jest zgodny z rzeczywistością, a przyczyną tego jest pominięcie, przy wyprowadzaniu tego wzoru, pewnych warunków fizycznych, w jakich odbywa się dany ruch. W przykładzie powyższym założyliśmy pewne warunki, na których podstawie obliczyliśmy równanie ruchu, i daje ono wyniki, zgodne z tymi warunkami. Stawiając sobie jednakże zadanie obliczenia ruchu punktu materyalnego, umocowanego na końcu sprężystego pręta, powinniśmy wniknąć w dany mechanizm, zbadać wszystkie czynniki fizyczne, jakie podczas ruchu występują, i ująć je w rachunek.

Doświadczenie nas uczy, że ciała fizyczne nie są zupełnie sprężyste, i że po odkształceniu niezupełnie powracają do stanu pierwotnego; warunek ten należy przeto ująć rachunkiem. Następnie należy wziąć pod uwagę, że ruch sprężyny odbywa się w powietrzu, które przedstawia pewien opór drgającemu prętowi i poruszającej się masie; wstrzymuje on zatem drgania sprężyny. W jaki sposób wprowadzić te opory do rachunku, zależy od wyników badań, które należy przeprowadzić. W tym rachunku przyjmiemy, że wszystkie opory łącznie, które przeciwdziałają ruchowi, są proporcyonalne do prędkości punktu ruchomego i że kierunek ich wypadkowej zlewa się z kierunkiem prędkości punktu ruchomego, zwrot zaś jej jest przeciwny zwrotowi prędkości. Siłę więc, przyśpieszającą dany punkt, wyrazimy wzorem:

$$-\left(kx + c\frac{dx}{dt}\right),$$

w którym c jest spółczynnikiem oporu środowiska, k — zaś, jak poprzednio, jest spółczynnikiem proporcyonalności siły przyciągającej.

Równanie dynamiczne danego ruchu jest zatem następujące:

$$-\left(kx + c\frac{dx}{dt}\right) = m\frac{dv}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

lub w innej postaci, którą otrzymamy po podstawieniu $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ i po uporządkowaniu wyrazów:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38')$$

Z równań 37-ego lub 38-ego, po ich scałkowaniu, można wysnuć, drogą analizy algebraicznej, właściwości danego ruchu; zanim jednakże do tego przystąpimy, zanalizujemy to równanie w postaci różniczkowej, przedstawionej równaniem 37-em. W celu unaocznienia sobie danego ruchu, przyjmijmy, że punkt ruchomy w chwili, gdy znajdował się w położeniu równowagi, otrzymał, za pomocą np. uderzenia, pewną prędkość v_0; wskutek czego, gdyby na niego nie działały żadne siły, poruszałby się on, zgodnie z prawem bezwładności, ruchem jednostajnym i prostolinijnym; ponieważ jednakże działają na niego siły kx i $c\frac{dx}{dt}$, obydwie zwrócone ku środkowi przyciągania, (gdy punkt oddala się od środka), to ruch tego punktu będzie zwolniony. Wynikiem tego działania mogą być dwa przypadki: punkt ten, oddalając się od środka, może zatrzymać się na pewnej skończonej odległości od środka przyciągania; lub też może on ruchem zwalniającym biedz do nieskończoności.

Ażeby rozstrzygnąć, który z tych przypadków zachodzi w naszym przykładzie, weźmy pod uwagę równ. 24-te, z którego odczytamy, że w przypadku ruchu punktu przyciąganego proporcyonalnie do odległości, lecz bez oporu środowiska, zatrzyma się on na pewnej skończonej odległości. W danym zatem przykładzie, w którym oprócz siły przyciągającej występuje jeszcze opór środowiska, siła, wstrzymująca punkt w ruchu, jest większą niż w przykładzie bez oporu; punkt zatem tembardziej zatrzyma się na pewnej odległości od środka. Gdy następnie punkt dany dosięgnie tego położenia, wtedy pod działaniem siły przyciągającej, zacznie się on wracać ku środkowi z przyśpieszeniem, jakie nadadzą mu siły nań działające. Sił tych jest dwie: siła przyciągająca ku środkowi i siła oporu środowiska, odwrócona od tego środka. W miarę zbliżania się punktu ku środkowi, siła przyciągająca, zgodnie z warunkami danego zadania, — maleje; siła zaś oporu wzrasta lub maleje, zależnie od tego czy prędkość punktu powiększa się, czy też się zmniejsza. Wskutek przewagi jednej z tych sił nad drugą mogą nastąpić dwa rodzaje ruchu punktu: albo punkt, doszedłszy do środka, posiada jeszcze nabytą prędkość i w takim razie przejdzie na drugą stronę środka, ażeby znów powrócić do niego; lub też siła oporu środowiska jest tak wielką, że mogłaby zatrzymać punkt dany w ruchu; gdyby nie działała na niego siła przyciągania, która, choć jest znikomo mała w blizkości środka, nadaje jednakże punktowi ruch ku środkowi. W tym przypadku punkt posiadać zawsze będzie pewną prędkość, której wartość niewiele może różnić się od zera, czyli punkt zbliżać się będzie do środka nadzwyczaj wolno; co się wyrazi matematycznie nieskończenie długim okresem. Rodzaj zatem ruchu danego punktu zależy od wielkości siły przyciągającej, t. j. od spółczynnika k, od wielkości siły oporu, t. j. od spółczynnika c, i od masy m; od wielkości bowiem masy zależy wielkość prędkości, jakie wywołują jednakowe siły w jednakowych okresach czasu.

Ażeby ustalić ilościowo warunki, w jakich zachodzą te przypadki ruchu, znajdźmy całkę równania 38'-ego i zanalizujmy je.

Teorya równań różniczkowych daje sposoby całkowania, które, ściśle biorąc, polegają po większej części na odnalezieniu funkcyi niezależnie zmiennej jak w naszym przypadku: $x = f(t)$, któraby, podstawiona w równanie różniczkowe, zamieniła je identycznie w zero, t. j. zamieniła je w zero przy wszelkich wartościach tej zmiennej. W danym przeto razie x należy wyrazić taką funkcyą z t, której pochodne, oraz jej wartość, podstawiona w równanie różniczkowe 38'-me, zamieniłaby je w zero przy wszelkich wartościach zmiennej t. Przy wyborze tej funkcyi powodować się można charakterem ruchu, który w przybliżeniu określiliśmy już poprzednio. Na zasadzie tych rozpatrywań funkcya w równaniu $x=f(t)$, powinna mieć tę właściwość, ażeby wartość jej przy pewnych warunkach zadania dla $t=\infty$ zbliżała się do zera (przypadek 1-szy poprzednich rozpatrywań), przy innych zaś warunkach, żeby była okresową; (przypadek 2-gi). Funkcyą taką jest funkcya wykładnicza ogólnej postaci $\alpha e^{\rho t}$; dla rzeczywistej bowiem wartości spółczynników ρ i α, gdy przytem ρ jest odjemna, odpowiada ona warunkowi pierwszemu; dla urojonych zaś spółczynników α i ρ zamieni się ona na funkcyę okresową. Podstawmy zatem w równanie 38'-me

$$x = \alpha . e^{\rho t},$$

gdzie α i ρ są jeszcze nieokreślone spółczynniki, i zbadajmy, przy jakich wartościach funkcya ta zamieni równ. 38'-me identycznie w zero. W tym celu podstawmy tę funkcyę, oraz jej pochodne w równanie 38'-me, a otrzymamy:

$$e^{\rho t}(m\rho^2 + c\rho + k) = 0.$$

Równanie to zamieni się w zero przy wszelkich wartościach dla t, jeżeli wyraz:

$$m\rho^2 + c\rho + k = 0;$$

ażeby to nastąpiło, powinno być:

$$\rho = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}.$$

Przyjmując te dwie wartości dla ρ, otrzymamy dwie całki szczególne, wyrażające dwa szczególne ruchy danego punktu. Z wartości tych na zasadzie odnośnego twierdzenia z teoryi całek, napiszemy całkę zupełną równania 38-ego w następującej postaci:

$$x = Ae^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t} + Be^{\left(-\frac{c}{m} - \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t} \quad . \; . \; . \; (39)$$

Wartości spółczynników A i B obliczymy z początkowych warunków zadania.

Równanie to przedstawia dwojakiego rodzaju ruch, jakieśmy to już przewidzieli, zależnie od tego, czy wartość pod pierwiastkiem jest rzeczywistą, czy też urojoną. Jeżeli jest ona rzeczywistą, to x zostaje wyrażone funcyą wykładniczą, której wykładnik jest proporcyonalny do t. Ażeby ten przypadek, nastąpił, powinno być:

$$\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0;$$

lub inaczej $\qquad c^2 > 4mk.$

Ażeby zbadać ten ruch, obliczymy stałe A i B i w tym celu przyjmiemy następujące warunki ruchu początkowego, dla:

$$t = 0; \quad x = 0; \quad v = v_0;$$

t. j. przyjmiemy początek liczenia czasu w chwili, w której punkt ruchomy znajduje się w środku przyciągania i posiada w tem miejscu prędkość v_0. Unaocznić sobie możemy te warunki w ten sposób, że punkt ruchomy, będący w położeniu równowagi, otrzymuje np. zapomocą uderzenia prędkość v_0.

Po podstawieniu w równanie 39-te wartości $t = 0$; $x = 0$, otrzymamy:

$$0 = A + B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40)$$

W celu zaś podstawienia $t = 0$; $v = v_0$ obliczymy prędkość punktu, zróżniczkowawszy równ. 39-te względem t i następnie podstawiwszy w nie $t = 0$, oraz $v = v_0$; po wykonaniu tych działań otrzymamy:

$$v_0 = A\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right) + B\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right). \quad (41)$$

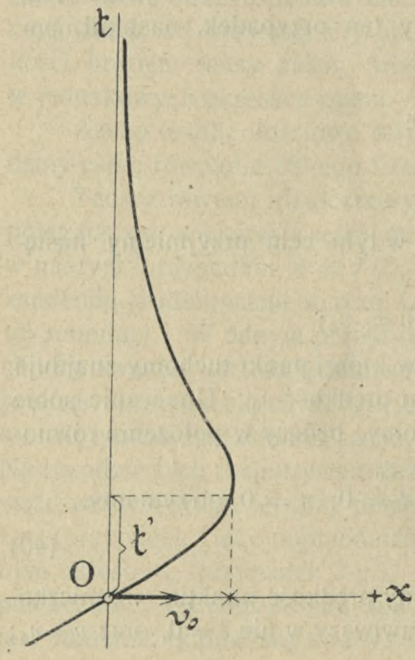
Z tych dwóch równań obliczymy spółczynniki A i B; i oznaczywszy dla skrócenia wartość wyrazu $\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$ literą γ, otrzymamy:

$$A = \frac{v_0}{2\gamma}\,; \quad \text{oraz} \quad B = -\frac{v_0}{2\gamma}\,;$$

a następnie, po podstawieniu tych wartości w równ. 39-te, otrzymamy równanie ruchu, wykazujące związek pomiędzy położeniem punktu i czasem; równanie to jest następujące:

$$x = \frac{v_0}{2\gamma} e^{-\frac{c}{2m}t} . (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (42)$$

Dla $t = 0$ otrzymamy $x = 0$; co jest zgodne z warunkami początkowego ruchu. Dla $t > 0$, x otrzymuje wartość dodatną, której znak nie zmienia się z rosnącem t, wartość bowiem wyrazu $e^{-\gamma t}$ dla $t > 0$ jest zawsze mniejszą od jedności, gdy tymczasem wartość wyrazu $e^{\gamma t}$ jest zawsze większą od jedności. Dla $t = \infty$ otrzymamy znów $x = 0$, albowiem $\frac{c}{2m} > \sqrt{\frac{c}{4m^2} - \frac{k}{m}}$, t. j. $\frac{c}{2m} > \gamma$. Punkt zatem od $t=0$ do chwili $t = \infty$, znajduje się po jednej stronie środka przyciągania; ruch jego jest zatem nieokresowy i punkt powraca asymptotycznie do położenia równowagi i z niego już nie wychodzi. Wykres (x, t) tego ruchu przedstawiony jest na rys. 8-ym.



Rys. 8.

Dla różnych wartości t pomiędzy 0 i ∞, x w równaniu 42-em przyjmuje różne wartości, co znaczy, że punkt zajmuje różne oddalenia od środka przyciągania. Pomiędzy temi oddaleniami są największe i najmniejsze, ażeby je obliczyć, zastosujemy prawidła do wyszukiwania największości i najmniejszości; i w tym celu pochodną x względem t przyrównamy do zera. Pochodna ta wyraża jednocześnie właściwość kinematyczną danego ruchu, t. j. że prędkość punktu w miejscu najmniejszego, lub największego oddalenia $= 0$. Z równania zatem, w ten sposób otrzymanego, obliczymy czas t, odpowiadający tym odchyleniom; a po podstawieniu tych wartości w równ. 42-gie, obliczymy szukane oddalenia. Po wykonaniu rachunku powinniśmy otrzymać dla x wartości: 0 oraz $x_{\max}$.

Przypadek takiego ruchu unaocznimy sobie, przyjąwszy np., że punkt ruchomy, oraz środek przyciągający jest umieszczony w płynie bardzo gęstym, gdy bowiem w tych warunkach nadamy punktowi prędkość v_0, np. uderzeniem, wtedy wychyli się on na pewną odległość, następnie zacznie powracać do miejsca wyjścia, lecz znaczny opór środowiska, w którem się punkt porusza, a mianowicie:

$$c^2 > 4mk,$$

nie pozwoli mu powrócić do środka przyciągania w skończonym okresie czasu. Jeżeli opór środowiska o tyle zmniejszymy, że:

$$c^2 < 4\,m\,k,$$

co można osiągnąć np. rozrzedzeniem środowiska, w którem porusza się punkt ruchomy, to otrzymamy wartość pod pierwiastkiem urojoną.

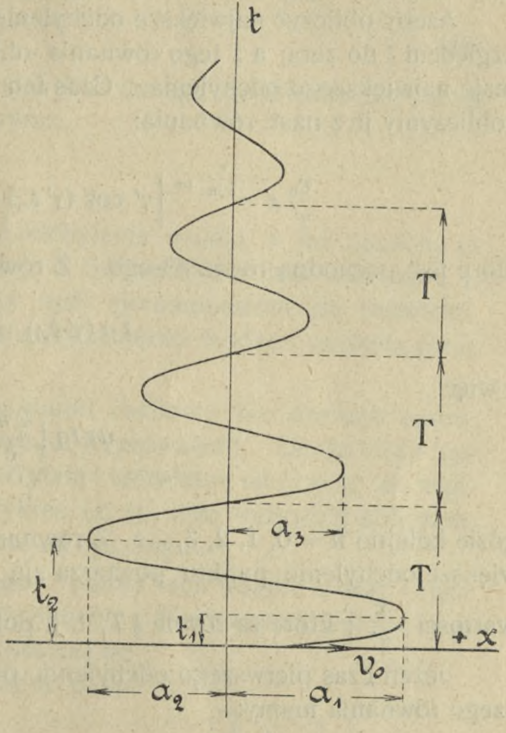
W celu zbadania tego ruchu, oznaczymy wartość pierwiastka $\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$ przez γ', t. j. podstawimy w powyższe wzory $\gamma = i\gamma'$, a po podstawieniu tej wartości w równ. 42-gie otrzymamy równanie:

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \frac{e^{i\gamma' t} - e^{-i\gamma' t}}{2i}.$$

Wyraz urojony, na zasadzie odpowiednich przekształceń, wyłożonych w analizie matematycznej, zastąpimy wyrazem $\sin(\gamma' t)$, i otrzymamy równanie ruchu dla danego przypadku w następującej postaci:

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{c}{2m}t} \sin(\gamma' t). \quad (43)$$

W równaniu tem posiadamy dwa czynniki ze zmienną t: czynnik $e^{-\frac{c}{2m}t}$, który z powiększeniem t maleje, i czynnik $\sin(\gamma' t)$, który jest funkcyą okresową; iloczyn więc tych czynników przedstawia krzywą okresową (w danym razie sinusoidę), której spółrzędne x maleją ze wzrostem czasu. Ruch taki nazywamy ruchem harmonicznym przytłumionym. Wykres (x, t) tego ruchu jest przedstawiony na rys. 9-tym.



Rys 9.

Zbadamy obecnie, czy ruch ten jest izochronicznym. W tym celu obliczymy okres podwójnego wahnięcia T. Wartość tego okresu otrzymamy z równ. 43-ego, po podstawieniu w nie $x = 0$, a zatem:

$$\sin(\gamma' T) = 0, \qquad \text{z którego} \qquad (\gamma' T) = n\pi.$$

Dla podwójnego wahnięcia $n = 2$, a zatem:

$$T = \frac{2\pi}{\gamma'},$$

lub też po podstawieniu wartości γ':

$$T = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mk - c^2}} \qquad \text{(44)}$$

Wartość ta nie zależy od odchylenia, a zależy tylko od spółczynników k i c; ruch zatem harmoniczny przytłumiony jest izochroniczny.

Łatwo sprawdzić, że dla $c = 0$, okres podwójnego wahnięcia przybierze wartość, wyrażoną równ. 28-em.

Z równania powyższego wynika, że okres podwójnego wahnięcia w środowisku z oporem jest większy, niż takiż okres ruchu bez oporu, co też zgodne jest z fizycznem pojmowaniem danego zjawiska.

Ażeby obliczyć największe odchylenie punktu, należy przyrównać pochodną x względem t do zera; a z tego równania obliczymy czas, w którym punkt dany doznaje największego odchylenia. Czas ten oznaczymy literą t_m; (m — max i min) i obliczymy je z nast. równania:

$$\frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{c}{2m} t_m} \left[\gamma' \cos(\gamma' t_m) - \frac{c}{2m} \sin(\gamma' t_m)\right] = 0;$$

które jest pochodną równ. 43-ego. Z równania tego mamy:

$$tg(\gamma' t_m) = \frac{2m\gamma'}{c}; \qquad \text{(45)}$$

a więc:

$$t_m = \frac{ar\,tg\left(\frac{2m}{c}\gamma'\right)}{\gamma'} + \frac{n\pi}{\gamma'} \qquad \text{(46)}$$

gdzie kolejno $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Z równania tego wyprowadzamy wniosek, że największe odchylenie punktu powtarza się w odstępach czasu, równych liczbowo wartości $\frac{\pi}{\gamma'}$; które są równe $\frac{1}{2}T$, t. j. połowie podwójnego wahnięcia.

Jeżeli czas pierwszego odchylenia punktu oznaczymy literą t_1, to z powyższego równania mamy:

$$t_1 = \frac{ar\,tg\left(\frac{2m}{c}\gamma'\right)}{\gamma'},$$

a czas następnych odchyleń:

$$t_m = t_1 + n \cdot \tfrac{1}{2} T. \qquad \text{(47)}$$

Ażeby obliczyć największe odchylenie, które oznaczymy literą a_m, podstawmy wartość t_m z równ. 45-ego w równ. 43-cie, a otrzymamy szukane odchylenie. W tym celu z równ. 45-ego obliczymy:

$$\sin(\gamma' t_m) = \frac{\frac{2m}{c}\gamma'}{\sqrt{1 + \left(\frac{2m}{c}\gamma'\right)^2}} = \frac{2m\gamma'}{\sqrt{c^2 + (2m\gamma')^2}},$$

a po podstawieniu tej wartości w rów. 43-cie, oraz po podstawieniu odnośnej wartości γ', otrzymamy:

$$a_m = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot e^{-\frac{c}{2m}(t_1 + n \cdot \frac{1}{2} T)} .$$

Dla pierwszego odchylenia, które oznaczymy literą a_1; $n = 0$; a zatem:

$$a_1 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot e^{-\frac{c}{2m} t_1},$$

a następnie, odchylenie dowolne:

$$a_m = a_1 \cdot e^{-\frac{c}{2m} \cdot n \cdot \frac{1}{2} T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Z równania tego odczytamy, że wartości odchyleń danego punktu tworzą szereg geometryczny, którego wykładnikiem jest wyraz

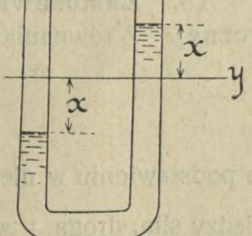
$$e^{-\frac{c}{2m} \cdot \frac{1}{2} T} .$$

Z powiększeniem przeto ilości wahnięć odchylenia maleją w ten sposób, że dla $n = \infty$; $a_m = 0$; i maleją o tyle prędzej, o ile wartość c jest większą, t. j. o ile dane środowisko przedstawia większy opór poruszającemu się punktowi. Punkt ruchomy waha się więc w danych warunkach około środka i zakreśla coraz miejsze odchylenia.

Przyjąwszy $c = 0$ t. j. przyjąwszy, że punkt ruchomy nie doznaje oporu, otrzymamy równanie, któreśmy już poprzednio wyprowadzili. Uczyniwszy zaś $c = \infty$, powinniśmy dla x otrzymać wartość stałą i niezależną od t; przy tak wielkim bowiem oporze ruch nie następuje. Wykres (x, t), oraz wszystkie obliczone w tym przykładzie wielkości są przedstawione na rys. 9-tym.

12. Przykład ruchu harmonicznego. Każdy ruch wogóle a więc i ruch harmoniczny może być wywołany w rozmaity sposób. Przytoczymy jeden z tych przypadków i wskażemy w jaki sposób stosować do obliczeń wzory, wyprowadzone w poprzednim paragrafie.

W rurce o stałym przekroju wygiętej w postaci litery U, znajduje się płyn, którego powierzchnia, w stanie spoczynku, tworzy poziom, oznaczony na rys. 10-ym literą y. Jeżeli w jednym końcu tej rurki płyn wepchniemy na głębokość x niżej tego poziomu, to w drugim jej końcu podniesie się on na wysokość x. W tem położeniu płynu powstaje siła P, która pcha całą masę m płynu do pierwotnego poziomu; siła ta równa się ciężarowi słupa płynu o wysokości $2x$.



Rys. 10.

Oznaczywszy literą f przekrój rurki; literą δ ciężar właściwy poruszającego się płynu, otrzymamy, że siła $P = 2xf\delta$ działa odwrotnie dodatnemu zwrotowi prędkości. Równanie zatem dynamiczne ruchu każdego punktu płynu jest następujące:

$$-2xf\delta = m \frac{dv}{dt} .$$

Jeżeli literą l oznaczymy długość rurki, napełnionej płynem, to masa poruszająca się: $m = \frac{lf\delta}{g}$; po podstawieniu tej wartości w równanie dynamiczne, otrzymamy:

$$-2xf\delta = \frac{lf\delta}{g} \cdot \frac{dv}{dt};$$

a po skróceniu:

$$-x = \frac{l}{2g} \cdot \frac{dv}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

Jest to równanie jednakowe z równ. 21-em, gdy podstawimy w nie $\frac{m}{k} = \frac{l}{2g}$. Wahanie się zatem słupa płynu jest harmoniczne, a więc i izochroniczne. Okres podwójnego wahnięcia T obliczymy, gdy podstawimy w równ. 21-sze iloraz $\frac{m}{k} = \frac{l}{2g}$.

a zatem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Sprawdźmy obecnie wymiar wzoru tego; w tym celu podstawimy:

$$l = L;\ g = LT^{-2};$$

a zatem wyraz

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} = \sqrt{\frac{L}{LT^{-2}}} = T = \text{(czasowi)};$$

co jest zgodne z wymiarem wielkości, znajdującej się po lewej stronie powyższego równania.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę opór, jakiego doznaje płyn podczas wahania się w rurze, i jeżeli ten opór przyjmiemy proporcyonalnym do pierwszej potęgi prędkości, to do obliczenia ruchu można zastosować wzory, wyprowadzone w § poprzednim dla ruchu harmonicznego przytłumionego.

13. Zastosowania zasady równowartości pracy i energii kinetycznej. Z równania dynamicznego ruchu prostolinijnego:

$$P = m\frac{dv}{dt};$$

po podstawieniu w nie $dt = \frac{ds}{v}$, otrzymamy równanie, wykazujące związek pomiędzy siłą, drogą i wywołaną przez tę siłę prędkością; równanie to ma postać następującą:

$$Pds = d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right);$$

i jest wyrazem równowartości pracy i energii kinetycznej; porówn. tom I-szy, § 184-ty, rów. 141-sze.

Równanie zatem równowartości pracy i energi kinetycznej jest pierwszą całką równania dynamicznego i wykazuje związek pomiędzy położeniem, t. j. pomiędzy spółrzędną punktu ruchomego i prędkością jego w miejscu, wskazanem przez tę spółrzędną. Zasada zatem równowartości pracy i energii kinetycznej w mechanice jest inną tylko postacią określenia dynamicznego siły. Siła wyraża zmianę prędkości punktu, na który działa; praca zaś wyraża zmianę wartości pewnej funkcyi tej prędkości, t. j. wyraża zmianę wartości $\frac{1}{2}mv^2$; pojęcia przeto siły i pracy wyrażają w innej tylko postaci matematycznej zmianę prędkości punktu, jaką on posiada w pewnej chwili swego ruchu. W następnych przykładach wskażemy sposoby stosowania zasady równowartości pracy i energii kinetycznej do obliczenia ruchu punktu.

Przykład. Przy spadaniu pionowem, bez uwzględnienia oporu powietrza, gdy przyjmiemy oś x skierowaną pionowo ku dołowi; napiszemy równanie pracy:

$$mgdx = d(\tfrac{1}{2}mv^2).$$

Gdy punkt ruchomy, w chwili rozpoczęcia mierzenia drogi x, posiada prędkość v_0, wtedy całka powyższego równania jest następująca:

$$mg\int_0^x dx = \tfrac{1}{2}m\int_{v_0}^{v} d(v^2);$$

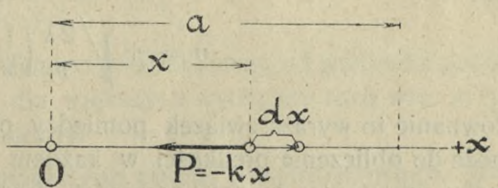
skąd po scałkowaniu:

$$x = \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2_0}{2g};$$

jest to równanie jednakowe z rów. 15-tem.

Przykład. W razie ruchu harmonicznego, po wykonaniu nieskończenie małego przesunięcia dx, rys. 11-ty, wyrazimy zasadę pracy równaniem:

$$-kxdx = d(\tfrac{1}{2}mv^2).$$



Rys. 11.

Całkując je od x do a oraz od v do 0, napiszemy:

$$-\int_x^a kxdx = \int_v^0 d(\tfrac{1}{2}mv^2);$$

a po scałkowaniu:

$$-\tfrac{1}{2}ka^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = -\tfrac{1}{2}mv^2; \text{ skąd:}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

jest to równanie jednakowe z rów. 22-iem.

Jeżeli zaś mamy daną prędkość v_m w środku przyciągania, to granice całki obierzemy dla x od zero do x; dla prędkości zaś od v_m do v, a po scałkowaniu otrzymamy:

$$-\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_m{}^2, \text{ skąd}$$

$$v = \pm \sqrt{v_m^2 - \frac{k}{m} x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

W celu obliczenia największego odchylenia a, podstawimy w równ. poprzednie $v = 0$, a otrzymamy: $a = v_m \sqrt{\frac{m}{k}}$; — jak poprzednio.

W przykładzie odpychania, rów. 32-gie wyraża równowartość pracy i energii kinetycznej i może być napisane bezpośrednio na podstawie tego twierdzenia.

Przykład. Punkt materyalny jest przyciągany przez pewien środek siłą odwrotnie proporcyonalną do drugiej potęgi odległości. Obliczyć na podstawie twierdzenia pracy, ruch punktu, gdy dane jest odchylenie początkowe a, i prędkość w niem $v = 0$. W celu zestawienia równania pracy, wyobraźmy sobie, iż punkt dany został przesunięty z miejsca x, wzdłuż cząstki drogi dx; a po przyrównaniu wartości pracy, powstałej wskutek tego, do przyrostu energii kinetycznej punktu, otrzymamy równanie:

$$-\frac{k}{x^2}\, dx = d\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right),$$

którego całka pomiędzy granicami od x do a, oraz od v do $v = 0$ jest następująca:

$$\frac{k}{a} - \frac{k}{x} = -\tfrac{1}{2} m v^2; \text{ skąd:}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{2k}{m}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Równanie to wyraża związek pomiędzy prędkością i położeniem punktu; i służyć może do obliczenia prędkości w każdem miejscu toru. Ażeby znaleźć równanie ruchu, wyrażające związek pomiędzy drogą i czasem, podstawimy w to równanie $v = \frac{dx}{dt}$; a po oddzieleniu zmiennych i przyjęciu warunków początkowych: dla $x = a$, $t = 0$, napiszemy równanie:

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2k}} \cdot \int_a^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} . \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

W celu jego scałkowania, zastąpimy zmienną x nową zmienną ψ, określoną równaniem:

$$x = a \cos^2 \psi,$$

z którego wynika:

$$dx = -2a \, . \cos\psi \, . \sin\psi \, . \, d\psi.$$

Granice całki nowej, odpowiadające granicom a i x, są 0 i ψ. Po wykonaniu tych podstawień w równ. 53-cie, otrzymamy:

$$t = 2\sqrt{\frac{m}{2k}}\,a^{\frac{3}{2}}\,.\int_0^{\psi}\cos^2\psi\,.\,d\psi;$$

skąd, na zasadzie wzoru 53-go, podanego w „Techniku“ na str. 79-ej:

$$t = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{k}}\,.\,(2\psi + \sin 2\psi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Z równania tego obliczyć można, za pośrednictwem wielkości ψ, czas, w jakim punkt ruchomy z wychylenia a przybędzie do miejsca x toru. Odwrotne jednakże obliczenie, mające na celu oznaczenie x, to jest, położenia punktu w danym czasie, wykonać można drogą prób, gdy dane są liczbowe wartości pozostałych zmiennych; nie można bowiem rozwiązać tego równania względem ψ.

Z równ. 52-ego odczytamy, że prędkość v posiada wartości rzeczywiste tylko dla $0 < x < a$, co znaczy, że punkt ruchomy znajduje się podczas ruchu tylko po jednej stronie środka przyciągania. Rozpoczyna on zatem swój ruch z odległości a z prędkością $v = 0$; i przybywa do środka przyciągania z prędkością $v = \infty$, i następnie z powiększeniem dodatnych wartość x zmniejsza znów swą prędkość; jest to zatem ruch okresowy. Z równ. 54-go obliczymy połowę okresu jego podwójnego wahnięcia, gdy podstawimy w nie $\psi = \frac{\pi}{2}$; wtedy bowiem $x = 0$. Oznaczywszy okres podwójnego wahnięcia literą T, otrzymamy jego wartość w postaci wzoru:

$$\tfrac{1}{2}\,T = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{k}}\,.\,\pi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

z którego odczytamy, że okresy wahnięć danego punktu zależą od wielkości początkowego wychylenia punktu i są dłuższe dla większych wychyleń; ruch więc w tym razie jest okresowy, lecz nie jest izochroniczny.

14. O całkach równań dynamicznych ruchu prostolinijnego. Równanie dynamiczne ruchu prostolinijnego jest równaniem różniczkowem rzędu drugiego z dwiema zmiennemi x i t.

Ażeby otrzymać z niego związek pomiędzy temi zmiennemi w skończonej postaci, należy równanie dynamiczne scałkować. Sposoby całkowania są różne, zależą bowiem od rodzaju funkcyi, jakie wchodzą do danego równania.

Jedna strona równania dynamicznego wyraża siłę, która może być stałą, lub zmienną; w przypadku zmienności może ona zależeć od położenia, t. j. może być wyrażona funkcyą x, jakieśmy to mieli np. w ruchu punktu przyciąganego lub odpychanego; lub może zależeć od prędkości i wyrazi się wtedy funkcyą zmiennej $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, jak to było w przykładzie spadania brył materyalnych z uwzględnieniem oporu powietrza; i wreszcie może ona zależeć od czasu, gdy przyjmiemy np., że działanie danej siły z czasem się zmienia, lub też, gdy przyjmiemy np. że środek przyciągający porusza się i ruch ten wyrazimy funkcyą czasu. Siła może być wreszcie zależna od każdej z tych wielkości oddzielnie lub też w dowolnem ich połączeniu. Siłę więc wyrazić można wogóle funkcyą $f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$, a równanie dynamiczne ruchu prostolinijnego następującem równaniem:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Równanie to może posiadać tyle szczególnych przypadków, ile zestawić można kombinacyi z trzech wielkości x, $\frac{dx}{dt}$ i t, biorąc je pojedyńczo, lub też łącząc je po dwie, lub po trzy; lub też wreszcie gdy ta funkcya przedstawia wielkość stałą. Każdy z tych przypadków wymaga mniej lub więcej odmiennego sposobu całkowania.

Funkcya zatem może być:

1) stałą wielkością, jak w przykładzie spadania w polu sił ciążenia bez uwzględnienia oporów; lub też:
2) może być wyrażona tylko zmienną x; jak to było w przykładzie sił przyciągających;
3) tylko zmienną $\frac{dx}{dt}$; gdy np. bryła, na którą nie działają żadne siły, rzuconą jest w środowisku, przedstawiającem opory, zależne od prędkości, lub też może być wyrażoną;
4) tylko zmienną t. Następnie, może być wyrażoną jednocześnie:
5) zmiennemi x oraz $\frac{dx}{dt}$; jak to było w przykładzie ruchu harmonicznego przytłumionego, lub
6) zmiennemi x oraz t, jak w przykładzie z ruchomym środkiem przyciągania, lub
7) zmiennemi $\frac{dx}{dt}$ oraz t;
8) lub wreszcie, w najogólniejszym przypadku, może być wyrażoną funkcyą wszystkich trzech zmiennych x, $\frac{dx}{dt}$, t.

Całkowanie wzorów we wszystkich tych przypadkach da się sprowadzić, po większej części, do sposobów, wskazanych w przytoczonych przykładach. Ponieważ równanie dynamiczne siły jest równaniem różniczkowem rzędu drugiego, więc całka jego posiadać powinna dwie stałe, które wogóle mogą być obliczone z dwóch znanych par wartości zmiennych; podstawiwszy je bowiem w równanie ruchu, otrzymamy dwa równania z dwiema niewiadomemi, które obliczymy. Zwykle te stałe obliczamy z tak zwanych warunków początkowego ruchu, t. j. ze znanych wartości x i v w chwili t; gdyż po podstawieniu tych wartości w równania ruchu, otrzymamy dwa równania, w których niewiadomemi są wartości nieznanych stałych.

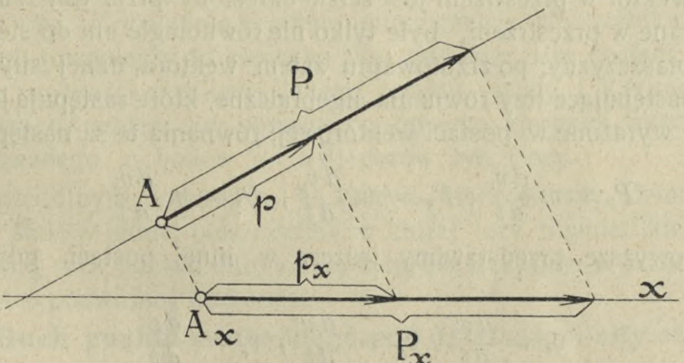
Wybitną rolę pomiędzy temi całkami zajmuje całka, zwana całką pierwszą równania dynamicznego, która wyraża związek pomiędzy spółrzędnemi punktu i prędkością w miejscu, wskazanem przez te spółrzędne. Całką tą jest równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. O tej całce mówiliśmy już w § poprzednim.

2. Równanie dynamiczne, wyrażone spółrzędnemi osiowemi.

15. Rzuty sił i przyśpieszeń. Ażeby wogóle obliczyć równania ruchu, gdy dane są siły; lub ażeby obliczyć siły, gdy dany jest ruch punktu, należy równanie dynamiczne:

$$\bar{P} = m\bar{p},$$

które jest wektorowe, wyrazić równaniami algebraicznemi; wtedy bowiem będzie możliwem stosowanie do obliczeń działań zwykłej algebry. W tym celu zrzutujmy promieniami równoległymi wektor siły, określony powyższym wzorem, na dowol-



Rys. 12.

nie obraną w przestrzeni oś x, a otrzymamy rzut p_x przyśpieszenia punktu i rzut P_x danej siły. Wzajemną zależność tych dwóch rzutów odczytamy z rys. 12-tego, i wyrazimy ją nast. równaniami:

$$\frac{P}{p} = \frac{P_x}{p_x} = m; \text{ skąd } P_x = mp_x.$$

Takiż stosunek pozostanie w mocy, gdy wektor ten zrzutujemy na dowolnie obraną płaszczyznę.

Jeżeli literą v_x oznaczymy rzut prędkości punktu właściwego na pewną oś, względnie na płaszczyznę, to stosunek powyższy wyrazimy równaniem:

$$P_x = m\frac{dv_x}{dt}; \text{ lub } P_x = m\frac{d^2x}{dt^2};$$

w którem x jest spółrzędną punktu ruchomego, mierzoną wzdłuż obranej osi od pewnego stałego punktu, na niej obranego.

Równania te wypowiemy w sposób następujący:

rzut równoległy siły na dowolną oś, lub płaszczyznę, równa się iloczynowi z masy punktu, na który ta siła działa i z rzutu przyśpieszenia tego punktu.

Dla rzutu siły i rzutu przyśpieszenia znajdziemy pewne znaczenia dynamiczne. Z kinematyki bowiem wiadomo (tom I-y str. 60), że rzut przyśpieszenia punktu ruchomego jest przyśpieszeniem jego rzutu; wielkość zatem p_x może być uważana za przyśpieszenie punktu A_x, który jest rzutem na oś x punktu właściwego A; rys. 12-ty. Twierdzenie to pozwala obliczyć ruch rzutu punktu właściwego na dowolnie obraną oś, lub też na płaszczyznę. Każde zatem z równań rzutów, uważać można za równanie dynamiczne ruchu rzutu punktu na odpowiednią oś lub na odpowiednią płaszczyznę.

Co do kierunku rzutowania nie robiliśmy żadnych zastrzeżeń, należy zatem rozumieć je tak prostokątne, jak i ukośnokątne, byleby były równoległe. W obliczeniach następnych rozumieć jednakże będziemy przez rzutowanie tylko rzutowanie prostokątne; gdy zaś stosować będziemy ukośnokątne, wtedy zaznaczymy to wyraźnie.

Każdy wektor w przestrzeni jest ściśle określony przez trzy rzuty na trzy osi, dowolnie obrane w przestrzeni, byle tylko nie równoległe ani do siebie, ani do jakiejkolwiek płaszczyzny; po zrzutowaniu zatem wektora danej siły na takie osi, otrzymamy następujące trzy równania algebraiczne, które zastępują jedno równanie dynamiczne, wyrażone w postaci wektorowej; równania te są następujące:

$$P_x = m\frac{dv_x}{dt};\ P_y = m\frac{dv_y}{dt};\ P_z = m\frac{dv_z}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (57)$$

Równania powyższe przedstawimy jeszcze w innej postaci, gdy podstawimy w nie:

$$v_x = \frac{dx}{dt};\ v_y = \frac{dy}{dt};\ v_z = \frac{dz}{dt};$$

równania te są następujące:

$$P_x = m\frac{d^2x}{dt^2};\ P_y = m\frac{d^2y}{dt^2};\ P_z = m\frac{d^2z}{dt^2} \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

Za pomocą równań 57-ych lub 58-ych można rozwiązać drogą rachunkową wszystkie zadania z dynamiki punktu.

Gdy np. dane są równania ruchu punktu w postaci:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t);$$

wtedy obliczymy z nich drogą różniczkowania wartości $\frac{dx}{dt}$ i t. d.; następnie $\frac{dv_x}{dt}$ i t. d., a następnie, znając masę punktu ruchomego, obliczymy rzuty siły; a z nich siłę właściwą, wywołującą dany ruch punktu.

Można również za pomocą powyższych równań dynamicznych rozwiązać zadania odwrotne. Gdy np. daną jest siła przez swe rzuty na trzy osi, wyrażone funkcyami spółrzędnych; wtedy całknąc równania dynamiezne obliczymy równania ruchu punktu danego.

Jeżeli na pewien punkt działa wiele sił, to siłę $\overline{P}$ uważać można za ich wypadkową; a sumę algebraiczną ich rzutów za rzut siły wypadkowej. W tenże sposób postąpimy, jeżeli zamiast jednego wektora przyśpieszenia, właściwego ruchomemu punktowi, wprowadzimy na skutek pewnych warunków zadania jego składowe.

Jeżeli ruch punktu odbywa się w płaszczyźnie, to osi spółrzędnych obierzemy w tejże płaszczyźnie; i zastosujemy do rachunku tylko dwa z powyższych równań·

Równania 57-me służą zatem do obliczenia ruchu krzywolinijnego.

A. Zastosowania równania dynamicznego do obliczenia ruchu krzywolinijnego.

16. Warunki powstawania ruchu krzywolinijnego. Ruch krzywolinijny punktu swobodnego powstaje, gdy kierunek siły, działającej na niego, mija się z kierunkiem prędkości, jaką on posiada w chwili działania siły; lub też, gdy siła zmienia swój kierunek. Wnioski te oparte są bezpośrednio na pojmowaniu i określeniu siły. Z równania bowiem dynamicznego siły wynika, że przyrost $d\overline{v}$ prędkości jest równoległy do kierunku siły; gdy więc siła posiada kierunek, różny od kierunku prędkości chwilowej danego punktu, wtedy i kierunek prędkości po upływie czasu dt zmieni się; posiada on bowiem kierunek trzeciego boku trójkąta, zbudowanego z boków $\overline{v}$ i $d\overline{v}$; porów. rys. 1-szy.

W szczególnym przypadku, w którym kierunek siły, działającej na dany punkt, leży stale w jednej płaszczyźnie, w której leży również kierunek początkowej prędkości, ruch punktu odbywa się w tej płaszczyźnie; w przeciwnym razie zakreśli on tor o podwójnej krzywości.

17. Ruch punktu swobodnego pod działaniem siły stałej. Na punkt materyalny działa siła $\overline{P}$, stała co do kierunku, wielkości i zwrotu; w początku ruchu punkt dany posiada prędkość $\overline{C}$, której kierunek mija się z kierunkiem siły; obliczyć równanie ruchu.

Ponieważ w danym przykładzie ruch będzie płaski, — w płaszczyźnie, przechodzącej przez kierunek prędkości początkowej i kierunek siły; obierzemy przeto w tej płaszczyźnie, dla ułatwienia rachunku, osi x i y. Osi te obrać można prostokątne lub ukośnokątne; obierzemy je prostokątnemi i w ten sposób, że osi y nadamy kierunek i zwrot siły; oś zaś x przeprowadzimy przez początkowe położenie punktu, prostopadle do y, ze zwrotem dodatnym, zgodnym ze zwrotem rzutu C_x prędkości początkowej, rys. 13-ty.

Wybór osi w przestrzeni jest wogóle zupełnie dowolny i nie wpływa na wynik rachunku; wybór zaś szczególnego położenia ma jedynie na celu możliwe uproszczenie rachunku.

Warunki początkowe ruchu przyjmiemy w danym przykładzie w ten sposób, że czas zaczniemy liczyć od chwili wyjścia punktu ruchomego z początku układu, w którym też punkt dany posiada prędkość $\overline{C}$. Warunki te wyrazimy algebraicznie w sposób następujący:

dla: $x = 0;\ y = 0;\ t = 0;$

oraz dla:

$$x = 0;\ y = 0;\ v_x = C_x;\ v_y = C_y.$$

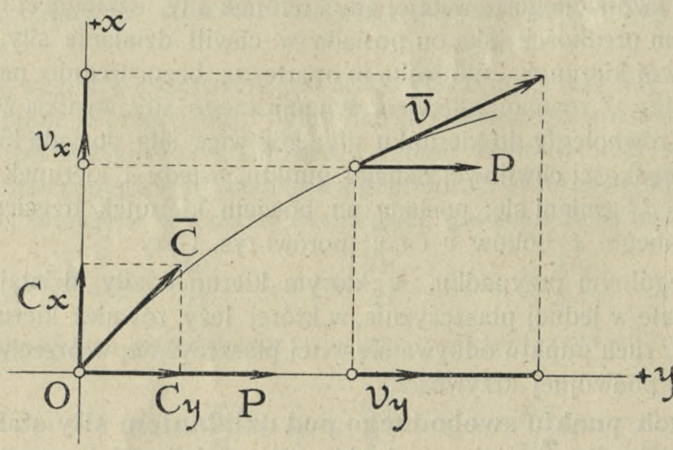
Obrawszy już osi spółrzędnych i warunki początkowe ruchu, przystąpimy do właściwego rachunku. W tym celu zastosujemy równania dynamiczne rzutów punktu na obrane osi, i w równania ogólne:

$$P_x = m\frac{dv_x}{dt};\ P_y = m\frac{dv_y}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

podstawimy odpowiednie wartości.

W danem zadaniu siła jest znaną, obliczymy zatem jej rzuty na obrane osi; rzuty te są następujące:

$$P_x = 0;\ P_y = P.$$



Rys. 13.

Po podstawieniu tych wartości w równania 59-te, otrzymamy:

$$0 = m\frac{dv_x}{dt};\quad P = m\frac{dv_y}{dt}.$$

Są to równania różniczkowe, które możemy bezpośrednio scałkować; po scałkowaniu otrzymamy:

$$mv_x = K_1;\ mv_y = Pt + K_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Ażeby obliczyć stałe, pochodzące z całkowania, skorzystamy z początkowych warunków ruchu, poprzednio obranych; i podstawimy:

$$t = 0;\ v_x = C_x;\ v_y = C_y;$$

a otrzymamy wartości stałych:

$$mC_x = K_1;\quad mC_y = K_2;$$

i następnie:

$$m v_x = m C_x; \quad m v_y = P t + m C_y.$$

Pierwsze równanie wskazuje, że $v_x = C_x$, t. j. rzut prędkości punktu ruchomego na oś x jest stały we wszystkich jego położeniach; co można sobie wytłomaczyć w ten sposób, że rzut siły na oś równa się zeru, przeto rzut punktu na tę oś pozostaje w ruchu jednostajnym z prędkością równą rzutowi początkowej prędkości.

Z drugiego równania odczytamy, że rzut prędkości na oś y, zależy od czasu. Ażeby obliczyć równania wykazujące związek pomiędzy spółrzędnemi punktu (x, y) i czasem t, podstawimy w równania powyższe:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt};$$

i otrzymamy:

$$m \frac{dx}{dt} = m C_x; \quad m \frac{dy}{dt} = P t + m C_y.$$

Równania te możemy bezpośrednio scałkować, a po scałkowaniu otrzymamy szukane zależności w postaci skończonej:

$$m x = m C_x t + K'; \quad m y = \tfrac{1}{2} P t^2 + m C_y t + K'';$$

stałe tych równań obliczymy z warunków początkowych; któreśmy już przyjęli. W tym celu podstawimy:

$$t = 0; \quad x = 0; \quad \text{oraz } y = 0;$$

i otrzymamy:

$$K' = 0; \quad K'' = 0;$$

wskutek czego równania ruchu przedstawią się w następującej postaci:

$$m x = m C_x t; \quad m y = \tfrac{1}{2} P t^2 + m C_y t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (61)$$

Z tych równań obliczyć można miejsce (x, y), w jakiem punkt się znajduje w czasie t; lub też odwrotnie, obliczyć można czas, jaki upłynął od chwili wyjścia punktu z położenia początkowego do chwili przybycia do miejsca (x, y).

W celu obliczenia równania toru należy wyrugować t z powyższych równań ruchu; wtedy bowiem otrzymamy równanie, wykazujące związek pomiędzy spółrzędnemi punktu ruchomego. Wyrugujmy zatem np. t z pierwszego równania i podstawmy je w drugie, a otrzymamy szukane równanie toru:

$$m y = \tfrac{1}{2} \frac{P}{C_x{}^2} \cdot x^2 + m \frac{C_y}{C_x} \cdot x.$$

Jestto równanie paraboli; tor więc, jaki zakreśli punkt materyalny z początkową prędkością $\overline{C}$ pod działaniem siły stałej, jest parabolą, której główna oś posiada kierunek siły.

W szczególnym przypadku, w którym siła, działająca na punkt ruchomy, jest siłą ciążenia ziemskiego; obliczymy równania ruchu po podstawieniu w równanie powyższe $P = mg$; oś y będzie wtedy pionowo skierowana ku dołowi; a po skróceniu przez m, otrzymamy równania ruchu:

$$x = C_x t;\ y = \tfrac{1}{2} g t^2 + C_y t.$$

Równanie zaś toru, jaki zakreśla w polu ciążenia punkt materyalny, wyrzucony z prędkością $\overline{C}$, jest następujące:

$$y = \tfrac{1}{2} \frac{g}{C_x^2} x^2 + \frac{C_y}{C_x} x.$$

Sprawdzimy teraz wymiary tego równania i w tym celu podstawimy:

$$x = L;\quad y = L;\quad g = LT^{-2};\quad C = LT^{-1};$$

trygonometryczna bowiem funkcya ma wymiar zera; a otrzymamy równanie jednorodne.

Zbadajmy obecnie ruch punktu materyalnego, wyrzuconego ku górze pod danym kątem α względem poziomu. Ażeby do obliczeń tego ruchu zastosować powyższe równania, należy wyobrazić sobie oś y pionowo ku dołowi, rys. 14; oś x poziomo; i należy podstawić w równania powyższe:

$$C_x = C \cos \alpha;\quad C_y = - C \sin \alpha.$$

Równanie zatem toru tego punktu jest następujące:

$$y = \tfrac{1}{2} x^2 \frac{g}{C^2 \cos^2 \alpha} - x \operatorname{tg} \alpha.$$

W celu zbadania właściwości tego ruchu, obliczmy pochodną $\frac{dy}{dx}$, która równa się:

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{g}{C^2 \cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha.$$

Gdy przyjmiemy, że $90^0 > \alpha > 0$, to pochodna ta dla pewnych wartości x jest odjemną, co wyraża, że dla tych wartości punkt ruchomy, wychodząc z miejsca O, podnosi się, jak wskazuje rys. 14-ty.

Spółrzędną x_0 miejsca największego wzniesienia punktu ruchomego obliczymy z równania:

$$\frac{dy}{dx} = 0; \text{ t. j. z równania:}$$

$$x_0 \frac{g}{C^2 \cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = 0; \text{ z którego}$$

$$x_0 = C^2 \frac{\sin \alpha \,.\, \cos \alpha}{g}, \text{ lub inaczej } x_0 = \frac{C^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie toru, otrzymamy spółrzędną y_0 tegoż miejsca:

$$y_0 = \tfrac{1}{2} \left(\frac{C^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 \cdot \frac{g}{C^2 \cos^2 \alpha} - \frac{C^2 \,.\, \sin 2\alpha \,.\, \operatorname{tg} \alpha}{2g};$$

lnb inaczej po przekształceniu tego wzoru:

$$y_0 = -\frac{1}{2\,g}\,C^2 \sin^2 \alpha.$$

Po przejściu punktu ruchomego przez najwyższe miejsce (x_0, y_0) toru, zacznie on spadać, gdyż $\frac{dy}{dx}$ przybierze wartości dodatne; a punkt przetnie oś x w odległości l od początku spółrzędnych. Odległość tę, zwaną przelotem rzutu, obliczymy z równania toru, po podstawieniu w nie $y = 0$; zatem mamy:

$$O = \tfrac{1}{2}\,l^2 \frac{g}{C^2 \cos^2 \alpha} - l \operatorname{tg} \alpha;$$

skąd otrzymujemy dwa pierwiastki:

$$l_1 = 0; \text{ oraz } l_2 = \frac{2 \sin \alpha \,.\, \cos \alpha}{g}\, C^2 = \frac{C^2}{g} \sin 2\,\alpha;$$

$$\text{lub inaczej } l_2 = 2\,x_0.$$

Obliczymy obecnie kąt α, przy którym przelot l będzie największy; gdy daną jest tylko algebraiczna wartość początkowej prędkości. W danym razie l ma być maximum przy zmiennej α; a więc powinno być $\sin 2\,\alpha = \max$; co nastąpi, gdy $\sin 2\,\alpha = 1$; $2\,\alpha = 90^0$, a więc gdy: $\alpha = 45^0$.

Obliczenie wektorowe. Rozwiążemy zadanie powyższe sposobem wektorowym. W tym celu przyjmijmy, że punkt materyalny zostaje wyrzucony z miejsca O z prędkością początkową $\overline{C}$, rys. 14-ty i że siła, działająca na punkt podczas jego ruchu, jest $m\overline{g}$. Położenie punktu wyznaczymy promieniem wodzącym $\overline{r}$; wyprowadzonym z O. Równanie dynamiczne, wyrazimy wektorowo:

$$\overline{P} = m \frac{d\overline{v}}{dt};$$

po podstawieniu w nie zamiast siły $\overline{P}$ wielkość $m\overline{g}$ i po skróceniu przez m, otrzymamy:

$$\overline{g} = \frac{d\overline{v}}{dt}; \text{ inaczej } \overline{g}\,dt = d\overline{v}.$$

Całka tego równania od 0 do t i od $\overline{C}$ do $\overline{v}$, wobec niezmienności wektoru $\overline{g}$, ma następującą postać:

$$\overline{g}\,t = \overline{v} - \overline{C}; \text{ skąd}$$

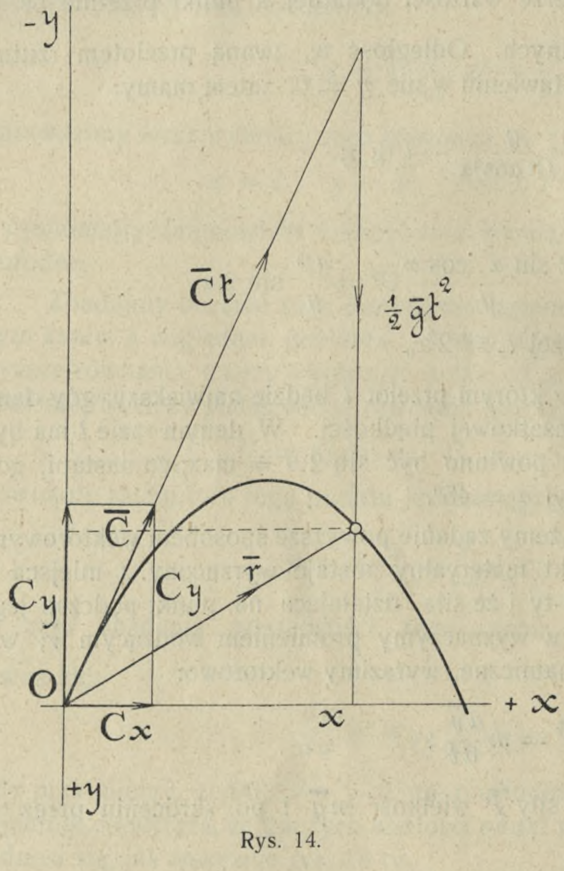
$$\overline{v} = \overline{C} + \overline{g}\,t \quad \dots\dots\dots\dots \quad (62)$$

Z równania tego odczytamy, że prędkość punktu w chwili t przedstawia trzeci bok trójkąta, zestawionego z boków $\overline{C}$ i $\overline{g}\,t$. Podstawmy następnie w to równanie $\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$, gdzie $d\overline{r}$ jest cząstką toru, a otrzymamy

$$d\overline{r} = \overline{C}\,.\,dt + \overline{g}\,t\,.\,dt;$$

po scałkowaniu pomiędzy granicami od O do $\overline{r}$, i od O do t, zważywszy przedtem, że wektory $\overline{C}$ i $\overline{g}$ są stałe i że suma wektorów $d\overline{r}$ jest promieniem wodzącym punktu ruchomego, otrzymamy:

$$\overline{r} = \overline{C}t + \tfrac{1}{2}\overline{g}t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$



Rys. 14.

Równanie to jest przedstawione geometrycznie na rys. 14-tym; w którym $\overline{r}$ jest bokiem zamykającym trójkąta, zestawionego z wektorów $\overline{C}t$, oraz $\frac{1}{2}\overline{g}t^2$.

Równanie powyższe wyrazimy spółrzędnemi prostokątnemi (x, y) punktu ruchomego, gdy trójkąt, przedstawiony przez nie, zrzutujemy na osi x i y; a zważywszy, że rzuty wektora $\overline{r}$ są spółrzędnemi punktu ruchomego, otrzymamy równania poprzednie.

18. Ruch swobodnego punktu materyalnego w polu sił środkowych. Określenie pól sił wogóle i sił środkowych w szczególe daliśmy w § 194-ym tomu I-ego; obecnie rozpatrzymy ruch swobodnego punktu materyalnego, rzuconego z pewną prędkością w polu tych sił. Szczególne przypadki tego ruchu rozpatrywaliśmy już w przykładach ruchu prostolinijnego; w których prędkość początkowa równała się zeru; obecnie rozpatrzymy przypadki ogólniejsze, w których prędkość początkowa posiada pewną wielkość, a kierunek jej nie zlewa się z kierunkiem siły.

Co do zmienności sił, uczynimy różne założenia, odpowiadające pewnym przypadkom, spotykanym w technice, lub w zjawiskach ruchu ciał niebieskich; ogólne bowiem rozpatrywania ruchu w polu sił, wyrażonych funkcyami spółrzędnych, przedstawia dosyć znaczne trudności rachunkowe.

19. Ruch punktu materyalnego swobodnego, pod działaniem sił środkowych, przyciągających proporcyonalnie do odległości. Gdy punkt materyalny znajduje się w polu sił środkowych, przyciągających go proporcyonalnie do jego odległości od środka przyciągania i gdy kierunek początkowej prędkości $\overline{v}_0$ nie zlewa się z kierunkiem siły przyciągającej, wtedy punkt dany zakreśli w przestrzeni pewien tor krzywolinijny. W celu obliczenia równania tego toru oraz ruchu po nim, zbadamy najpierw, czy tor jest płaski, czy też przestrzenny.

W tym celu przeprowadzimy płaszczyznę przez środek przyciągania, i przez kierunek początkowej prędkości; i zauważymy, że niema sił, któreby wyprowadziły punkt ruchomy z tej płaszczyzny; ruch zatem danego punktu jest płaski. Obierzmy układ osi ukośnokątnych w płaszczyźnie ruchu, w ten sposób, ażeby oś x zlewała się z prostą, łączącą środek przyciągania z początkowem położeniem r_0 punktu, rys. 15-ty, a oś y ażeby była równoległa do $\overline{v}_0$. Niech A oznacza na rys. 15-tym, położenie punktu ruchomego w chwili dowolnej t, r jego promień wodzący; to wartość siły przyciągającej w tem położeniu punktu wyrazimy wzorem wektorowym $\overline{P} = k\overline{r}$. Równanie dynamiczne przeto jest:

$$-\overline{P} = m\frac{d\overline{v}}{dt};$$

a rzut jego na oś x:

$$-P_x = m\frac{dv_x}{dt}.$$

Rzut P_x (ukośny) obliczymy ze stosunku geometrycznego:

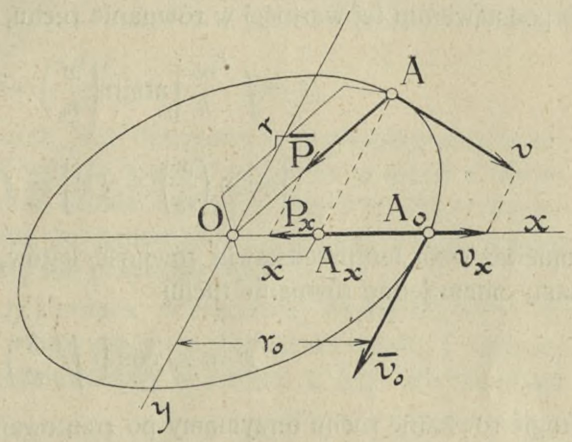
$$P_x = P\,.\,\frac{x}{r} = kx;$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie dynamiczne, otrzymamy równanie:

$$-kx = m\frac{dv_x}{dt};$$

lub w innej postaci:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2};\ .\ .\ \ (64)$$



Rys. 15.

z którego, po podstawieniu $dt = \frac{dx}{v}$ i po jego scałkowaniu, otrzymamy równanie, wykazujące związek pomiędzy prędkością i spółrzędną punktu; równanie to jest następujące:

$$-\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + K_1.$$

W celu obliczenia wartości K_1 skorzystamy z warunków początkowych danego ruchu, które przyjmiemy dla:

$$t = 0;\ x = r_0;\ y = 0;\ \text{oraz}\ v_x = 0;\ \text{i}\ v_y = v_0;$$

a po podstawieniu tych wartości:

$$K_1 = -\tfrac{1}{2}kr_0^2;$$

a więc:

$$mv_x^2 = k(r_0^2 - x^2).$$

Następnie, podstawiwszy w to równanie: $v_x = \frac{dx}{dt}$, otrzymamy równanie:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{r_0^2 - x^2},$$

które po scałkowaniu daje jedno z równań ruchu:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{arsin}\left(\frac{x}{r_0}\right) + K_2.$$

Podstawiwszy w nie:

$$x = r_0; \quad t = 0;$$

obliczymy:

$$K_2 = -\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \operatorname{arsin}(1) = -\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{2}\pi.$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie ruchu, mamy:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\operatorname{arsin}\left(\frac{x}{r_0}\right) - \frac{1}{2}\pi\right]; \text{ lub:}$$

$$\left[\operatorname{arsin}\left(\frac{x}{r_0}\right) - \tfrac{1}{2}\pi\right] = t\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Ponieważ wzór ten przedstawia równość kątów, przeto i dostawy ich są równe; mamy zatem jedno równanie ruchu:

$$x = r_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

Drugie równanie ruchu otrzymamy po zrzutowaniu danej siły ma oś y; równanie to jest następujące:

$$-ky = m\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Po scałkowaniu jego i wprowadzeniu przyjętych poprzednio warunków ruchu początkowego, otrzymamy równanie:

$$y = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

które łącznie z poprzedniem wyraża ruch danego punktu.

Równanie toru tego ruchu obliczymy, po wyrugowaniu z równań powyższych zmiennej t; równanie to jest następujące:

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{\left(v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2} = 1; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

i przedstawia elipsę, zbudowaną na osiach sprzężonych, przechodzących przez środek przyciągania i równoległych do $\overline{v}_0$, oraz do promienia wodzącego $\overline{r}_0$ punktu w początkowem jego położeniu.

W szczególnym przypadku elipsa ta może przybrać postać koła o promieniu r_0; przypadek ten nastąpi, gdy osi elipsy staną się równemi, t. j. gdy

$$r_0 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}};$$

lub inaczej, gdy początkowa prędkość:

$$v_0 = r_0 \sqrt{\frac{k}{m}},$$

i kierunek jej jest prostopadły do promienia.

Znaczenie dynamiczne tego warunku znajdziemy, gdy przedstawimy to równanie w następującej postaci:

$$m \frac{v_0^2}{r_0} = r_0 k.$$

Lewa bowiem strona tego równania jest iloczynem z przyśpieszenia dośrodkowego i z masy punktu; prawa zaś wyraża wartość siły przyciągającej w danem położeniu punktu; a zatem ruch punktu będzie kołowym, gdy początkowe warunki ruchu odpowiadają warunkom ruchu po danem kole; t. j., gdy iloczyn z masy punktu i przyśpieszenia jego równa się sile przyciągającej.

W szczególnym przypadku, gdy kierunek początkowej prędkości zlewa się z kierunkiem promienia wodzącego, wtedy osi x i y zlewają się z sobą i ruch będzie prostolinijny taki sam, jaki przedstawiliśmy w § 8-ym, a jego równanie jest następujące:

$$x = r_0 \cos \left(t \sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

Równanie to ma jednakże nieco inną postać, niż rów. 26-te, lecz to pochodzi z odmiennych warunków początkowego ruchu. Poprzednio bowiem przyjęliśmy dla $x = 0$; $t = 0$; obecnie zaś przyjęliśmy dla $x = r_0$; $t = 0$.

Okres, który nazwaliśmy w ruchu prostolinijnym harmonicznym, okresem podwójnego wahnięcia, a który obecnie jest okresem całkowitego obiegu, obliczymy, gdy znajdziemy okres czasu T, w którym punkt przybywa do tego samego miejsca na torze. Okres ten obliczymy z równania ruchu 65-go, gdy podstawimy w nie:

$$x = r_0;\ t = T;\ \text{wtedy } T \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi;\ \text{skąd}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Z równania tego odczytamy, że okres obiegu nie zależy od początkowego położenia punktu ani też od początkowej prędkości. Wyjaśnienie fizyczne tej właściwości jest takie same, jakie daliśmy przy rozpatrywaniu ruchu harmonicznego prostolinijnego.

Z powyższych równań można skorzystać w celu obliczenia równań ruchu dla przypadku, w którym siła środkowa odpycha punkt materyalny proporcyonalnie do odległości. W danym razie równanie dynamiczne ma postać:

$$kx = m \frac{d v_x}{d t}.$$

Z równań zatem ruchu punktu przyciąganego otrzymamy równania ruchu punktu odpychanego, przy zresztą jednakowych warunkach początkowych; gdy zamiast k podstawimy $(-k)$, równania te będą następujące:

$$x = r_0 \cos\left(t \sqrt{\frac{k}{m}}\,.\,i\right);\ \text{oraz}$$

$$y = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}\,.\,\frac{1}{i} \sin\left(t \sqrt{\frac{k}{m}}\,.\,i\right);$$

w których $i = \sqrt{-1}$.

W celu przekształcenia tych równań urojonych na równania rzeczywiste, skorzystamy ze wzorów 5-go i 6-go, przytoczonych w „Techniku" na str. 68-ej, i otrzymamy:

$$x = \tfrac{1}{2} r_0 \left(e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}} + e^{-t\sqrt{\frac{k}{m}}}\right);\ \text{oraz}$$

$$y = \tfrac{1}{2} v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \left(e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}} - e^{-t\sqrt{\frac{k}{m}}}\right).$$

Równania te wskazują, że z rosnącym czasem spółrzędne punktu ruchomego również rosną, punkt zatem stale oddala się od miejsc wyjścia. Równanie toru otrzymamy, rugując z tych dwóch równań t; co można uskutecznić, przeniósłszy stałe wyrazy, stojące przed nawiasami prawej strony równania, do mianownika lewej strony i następnie podniósłszy obydwie strony tych równań do potęgi drugiej; a po ich odjęciu otrzymamy szukane równanie toru.

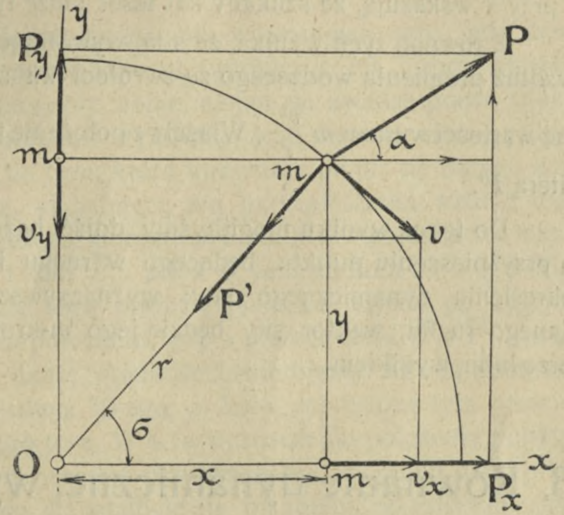
Można również napisać bezpośrednio równanie toru z równ. 67-go; po podstawieniu w nie $k = -k$; równanie to otrzyma postać:

$$\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{y^2}{\left(v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (68)$$

Tor zatem punktu materyalnego, odpychanego przez pewien środek siłą, proporcyonalną do odległości, jest hyperbolą, której średnice sprzężone przechodzą przez środek odpychania i jedna z nich jest równoległa do promienia wodzącego punktu w początkowem jego położeniu; druga zaś jest równoległa do kierunku początkowej prędkości; wartości tych średnic odczytać można z równania toru.

20. Przykład obliczenia sił, gdy dany jest tor i ruch punktu po nim. Punkt o masie m posuwa się po torze kołowym o promieniu r ze stałą prędkością v; wyznaczyć siłę, która wywołuje ten ruch. W przykładzie tym dany jest ruch punktu t. j. tor i prędkości po nim, a należy obliczyć siłę, wywołującą ruch.

Gdy punkt materyalny posiada pewną prędkość, a siły na niego nie działają, wtedy wykona on ruch, zgodnie z prawem bezwładności, po torze prostolinijnym ze stałą prędkością. Gdy zaś punkt materyalny zakreśla tor krzywolinijny, wtedy działają na niego siły, które sprowadzają go z toru prostego, wyznaczonego kierunkiem prędkości początkowej. Ażeby obliczyć tę siłę, zastosujmy równania dynamiczne, wyrażone spółrzędnemi prostokątnemi i w tym celu wyobraźmy sobie dowolną siłę P, przyczepioną do danego punktu, rys. 16-ty, i przeprowadźmy przez środek koła dwie wzajemnie prostopadłe osi x i y; a napiszemy wtedy równania dynamiczne:



Rys. 16.

$$P_x = m\frac{dv_x}{dt};\ P_y = m\frac{dv_y}{dt};$$

w których P_x i P_y są niewiadomemi. Z tegoż rys. 16-tego mamy związki:

$$v_x = v \sin \sigma = v\frac{y}{r};\quad v_y = -v\cos\sigma = -v\frac{x}{r};$$

po ich zróżniczkowaniu, zważywszy przedtem, że v i r są wielkości stałe, napiszemy:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{v}{r}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{v}{r}v_y;\quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{v}{r}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{v}{r}v_x;$$

a po podstawieniu wartości v_x i v_y z równań poprzednich, otrzymamy:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{v^2}{r}\cdot\frac{x}{r};\ \text{oraz}\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{v^2}{r}\cdot\frac{y}{r};\ \text{a następnie:}$$

$$P_x = -\frac{v^2}{r}\cdot\frac{x}{r};\ \text{oraz}\ P_y = -\frac{v^2}{r}\cdot\frac{y}{r};\ \text{skąd}$$

$$P = \pm\sqrt{P^2_x + P^2_y} = \pm\frac{mv^2}{r}.$$

Z równania tego obliczymy wartość szukanej siły; a kąt kierunkowy α tej siły względem osi x, obliczymy ze wzoru:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_y}{P_x} = \frac{-y}{-x} = \operatorname{tg} \sigma,$$

z którego wynika, że:

$$\alpha = \sigma; \text{ lub: } \alpha = \pi + \sigma.$$

Odjemne wartości rzutów siły na osi spółrzędnych wskazują, iż z tych dwóch odpowiedzi należy wybrać: $\alpha = \pi + \sigma$; zresztą znaki odjemne we wzorze $\operatorname{tg} \alpha$ przy y i przy x wskazują, że szukany kąt leżeć może tylko w trzeciej ćwiartce koła.

Z równań tych wynika, że siła, wywołująca ruch jednostajny po kole, działa wzdłuż promienia wodzącego ze zwrotem ku środkowi koła, a wartość jej równa się wartości wyrazu $m\frac{v^2}{r}$. Właściwe położenie tej siły jest oznaczone na rys. 16-tym, literą P'.

Do tegoż wyniku moglibyśmy dojść bezpośrednio na podstawie twierdzenia o przyśpieszeniu punktu, będącego w ruchu krzywolinijnym, oraz na podstawie określenia dynamicznego siły; wyznaczywszy bowiem wektor przyśpieszenia danego ruchu, wektor siły będzie jego m-krotną wielkością, co się zgadza z poprzednim wynikiem.

3. Równanie dynamiczne, wyrażone siłą normalną i styczną.

21. Siła dośrodkowa i styczna. Za pomocą przytoczonych trzech równań dynamicznych możemy rozwiązać wszelkie zadania z dynamiki punktu. Często jednakże, jak to było w ostatnim przykładzie, zadanie to można rozwiązać prościej, gdy warunki jego pozwalają na wyznaczenia wektora przyśpieszenia; wtedy bowiem szukaną siłę wyznaczymy bezpośrednio: — jako m-krotny wektor przyśpieszenia. Gdy w zadaniu dany jest tor, oraz równanie ruchu po tym torze w postaci np. $s = f(t)$, wtedy wyznaczyć można przyśpieszenie z dwóch jego rzutów na główną normalną do toru i na styczną do niego; jakieśmy to pokazali w § 47-ym tomu I-ego. Rzuty te są równe (równ. 33-te, str. 50, tomu I-ego):

$$p_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad p_t = \frac{dv}{dt}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

a właściwe przyśpieszenie:

$$\overline{p} = \overline{p}_n + \overline{p}_t.$$

Zrzutujmy następnie siłę $\overline{P}$, działającą na dany punkt w pewnem miejscu jego toru, na te same osi, na które zrzutowaliśmy przyśpieszenie t. j. na następujące trzy osi: na główną normalną do toru (na której leży promień krzywości); na styczną do niego i prostopadłą do tych dwóch osi (t. j. na binormalną); a zgodnie z twierdzeniem o rzutach sił na osi (§ 15-ty) i mając na uwadze rów. 69-te, napiszemy:

$$P_n = m\frac{v^2}{\rho};\ P_t = m\frac{dv}{dt};\ \text{oraz } P_b = 0\ \ldots\ldots \quad (70)$$

$P_b = 0$, wskutek tego, że wektor przyśpieszenia punktu leży w płaszczyźnie ściśle stycznej, (w której leżą też osi n i t), a zatem rzut jego, a więc i rzut siły na binormalną równają się zeru. Na podstawie tych równań mamy:

$$\overline{P} = \overline{P}_n + \overline{P}_t\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

Z równania 70-go i 71-go obliczyć można siłę, wywołującą ruch, gdy dany jest tor i ruch punktu po nim; lecz można również wyznaczyć tor i ruch punktu, gdy dane są siły. W tym celu wyobrazimy sobie, mając na uwadze prawo superpozycyi, że ruch punktu w danem polu sił wywołany jest dwiema siłami, jednocześnie działającemi: siłą normalną do toru, która utrzymuje punkt na okręgu koła w ruchu jednostajnym i siłą styczną, udzielającą mu przyśpieszenia wzdłuż tego okręgu. Niech będzie np. dane położenie początkowe punktu w przestrzeni, masa, jego prędkość v_1 w tem położeniu i siła $\overline{P}_1$, która w tem miejscu na niego działa, to znajdziemy następne położenie tego punktu, jakie on zajmie po upływie czasu $\triangle t$, oraz jego prędkość w tem położeniu, gdy w płaszczyźnie $(\overline{v}_1, \overline{P}_1)$ przeprowadzimy normalną do kierunku danej prędkości; zrzutujemy na nią daną siłę i odłożymy długość ρ_1, obliczoną z równ. 70-ego; a koło, zakreślone tym promieniem, jest kołem krzywości szukanego toru. W celu wyznaczenia położenia punktu, po upływie czasu $\triangle t$, przyjmiemy z pewnem przybliżeniem, że punkt dany przebiega po tym kole ze stałą prędkością v_1; znajdzie się on zatem, po upływie czasu $\triangle t$, w miejscu $A_1A_2 = v_1 . \triangle t$. Jeśliby na dany punkt działała tylko siła $P_{1,n}$, to przybyłby on do A_2 z prędkością v_1; ponieważ zaś działa na niego jeszcze siła styczna, prędkość ta będzie inną. W celu jej obliczenia, skorzystamy z równania $P_{1,t} = m\frac{dv}{dt}$, z którego obliczymy $\triangle v_1 = \frac{P_{1,t}}{m} . \triangle t$; $P_{1,t}$ jest bowiem znane jako rzut siły P_1 na kierunek v_1. Prędkość zatem w miejscu A_2 jest styczną do koła, zakreślonego promieniem ρ_1; a wartość jej $v_2 = v_1 + \triangle v_1$.

Znając następnie siłę P_2 w miejscu A_2, obliczymy ρ_2, zakreślimy koło tym promieniem i obliczymy w powyższy sposób położenie A_3 punktu ruchomego, oraz jego prędkość w tem miejscu. Postępując w ten sposób, otrzymamy tor punktu, złożony z cząstek kół, zakreślonych z różnych środków, różnymi promieniami.

Zauważymy, że tor punktu, wykreślony sposobem wskazanym na str. 6, składa się z odcinków prostych; wykreślony zaś sposobem teraz wyłożonym składa się z odcinków kołowych.

W szczególnych przypadkach:

1) gdy $P_n = 0$, oraz $P_t = 0$; wtedy ruch punktu jest prostolinijny i jednostajny; z powyższych bowiem równań otrzymamy $\rho = \infty$; i prędkość stałą;

2) gdy $P_n = 0$; a $P_t \gtrless 0$, wtedy powstaje ruch zmienny prostolinijny; gdyż $\rho = \infty$, a prędkość jest zmienną;
3) gdy zaś $P_n \gtrless 0$, a $P_t = 0$; wtedy otrzymamy ruch krzywolinijny jednostajny;
4) gdy wreszcie $P_n \gtrless 0$, oraz $P_t \gtrless 0$, wtedy otrzymujemy ruch krzywolinijny zmienny.

Obserwując np. siły, wywołujące bieg ostatniego wagonu pociągu, który przebiega po łuku, zauważymy, że siły, występujące w ciągnących go łańcuchach, są siłami stycznemi do toru; nadają więc one ruch przyśpieszony wzdłuż toru; siły zaś odporowe szyn, występujące w płaszczyźnie poziomej, są siłami dośrodkowemi normalnemi do toru.

Równania zatem 70 i 71-sze są równaniami dynamicznemi w postaci algebraicznej i różnią się tylko od takichże równań, wyrażonych spółrzędnemi osiowemi, szczególnym wyborem osi rzutów. Równania zatem 70 i 71-sze stosować można do rozwiązywania wszelkich zadań z dynamiki punktu; a przedewszystkiem, do obliczenia sił, wywołujących dany ruch punktu po danym torze. Gdy bowiem dany jest tor i ruch punktu po nim, wtedy obliczymy metodą analityczną z równań toru promień krzywości w danym miejscu toru, lub wyznaczymy go wykreślnie, gdy dana jest postać toru (porów. § 42-gi tomu I-go); a z równań 70-ych obliczymy rzut P_n; z przyśpieszenia zaś punktu po torze, t. j. z wartości $\frac{dv}{dt}$ obliczymy siłę P_t; a z równania 71-ego wyznaczymy siłę, działającą w danej chwili na punkt ruchomy i wywołującą dany ruch. Możnaby również rozwiązać za pomocą tych równań zadanie odwrotne t. j. z danych sił obliczyć tor, lecz sposób ten jest dosyć zawiły pod względem rachunkowym.

Przykład. Punkt materyalny o ciężarze $Q = 10\ kg$, zakreśla w płaszczyźnie poziomej ruchem jednostajnym, o prędkości: $v = 3\ m/\text{sek.}$, koło o promieniu $r = 1\ m$. Obliczyć siłę, wywołującą ten ruch.

Sła styczna w danym razie $P_t = m\frac{dv}{dt} = 0$, gdyż prędkość v, stosownie do warunków zadania, jest stałą. Siła zaś normalna $P_n = m\frac{v^2}{r} = \frac{10}{g} \cdot \frac{3^2}{1} \cong 9\,kg$. Ponieważ tor jest kołem, przeto normalne we wszystkich punktach koła, przecinają się w jego środku; siła P_n jest przeto skierowaną ku środkowi koła i posiada wartość stałą. Ażeby więc punkt materyalny o ciężarze 10 kg zakreślił tor kołowy ruchem jednostajnym z prędkością 3 $m/$sek., należy do tego punktu przyłożyć siłę niezmienną pod względem algebraicznym $P = 9\ kg$, skierowaną ku środkowi koła. Siłę dośrodkową dostarcza w tym razie naprężenie nici, które jest równe 9 kg. Wynik ten pozwoli obliczyć wielkość przekroju nici; ażeby pod działaniem siły ciągnienia nie zerwała się, jeżeli np. obierzemy tę nić w postaci drutu żelaznego, którego wytrzymałość przyjmiemy: $\sigma = 1000\ kg/cm^2$, to przekrój f tego drutu obliczymy z równania: $f \cdot 1000 = 9\ kg$; skąd $f = \frac{9}{1000} \cdot 100 = 0{,}9\ mm^2$; a zatem średnica drutu $d = 1{,}08\ mm$.

Jeżeliby torem punktu były szyny, to siła dośrodkowa zostałaby udzielona danemu punktowi za pośrednictwem szyn; wtedy parcie szyn na punkt materyalny jest siłą, która nadaje mu ruch krzywolinijny.

---

4. Zasady szczególne dynamiki.

22. Cel tych zasad. Przytoczone na początku poprzedniego rozdziału dwa prawa zasadnicze: prawo bezwładności i prawo superpozycyi wystarczają zupełnie do określania właściwości ruchu punktu; a równanie dynamiczne, będące wyrazem tych praw, daje możność ujęcia tych właściwości w matematyczną formę. Dla ułatwienia jednakże określenia właściwości ruchu, jak również dla ułatwienia obliczeń, wyprowadzono z tych praw, inne prawa, zwane zasadami, które obejmują całe grupy zjawisk ruchu, i wyjaśniają ich przebieg. Zasady te wyrażają się pewnemi równaniami, wyprowadzonemi drogą przekształceń algebraicznych z przytoczonego równania dynamicznego; i wyrażającemi jedynie w sposób więcej poglądowy związki pomiędzy parametrami ruchu.

Zasady zatem, które tu wyłożymy nie wnoszą do naszych rozpatrywań żadnych nowych praw fizycznych, ani też nie dają równań algebraicznych, niezależnych od równania dynamicznego, a są tylko wyrazem w innej postaci tego równania.

Zasadami temi są:

zasada równowartości pracy sił i energii kinetycznej; oraz

zasada momentu ilości ruchu.

A. Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej.

23. Rozwinięcie tej zasady. W tomie I-ym na str. 240-ej wyprowadziliśmy równanie 141-sze, wykazujące równowartość pracy siły, przyłożonej do punktu materyalnego, i przyrostu energii kinetycznej, jakiego ten punkt doznał podczas nieskończenie małego przesunięcia. Równanie to ma następującą postać:

$$P_t \,.\, ds = d\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right);$$

P_t oznacza rzut siły na kierunek przesunięcia ds.

Rozpatrzmy teraz przypadek, w którym punkt ruchomy, pod działaniem danych sił, zakreśli tor o skończonej długości. W tym celu dzielimy tor, jaki zakreśla punkt ruchomy, na cząstki ds, które uważać będziemy za cząstki prostolinijne; a pracę siły P_k wzdłuż k — tej cząstki toru wyrazimy, na zasadzie określeń, podanych w § 176-tym tomu I-ego, wzorem:

$$P_k \,.\, ds_k \,.\, \cos\,(P_k,\, ds_k);$$

sumę zaś tych prac, gdy punkt ruchomy przejdzie po pewnym torze ciągłym, z miejsca A do miejsca B, wyrazimy wzorem:

$$\int_A^B P_k \,.\, ds_k \cos(P_k, ds_k);$$

i wartość jej oznaczymy literą L_A^B.

Oznaczmy następnie prędkość punktu na początku k-tej cząstki toru przez v_{k-1}, a na jej końcu przez v_k, a wyrazimy przyrost energii kinetycznej wzdłuż tej cząstki wzorem:

$$\tfrac{1}{2} m v_k^2 - \tfrac{1}{2} m v_{k-1}^2;$$

przyrost zaś wzdłuż następnej $(k+1)$-ej cząstki wzorem:

$$\tfrac{1}{2} m v_{k+1}^2 - \tfrac{1}{2} m v_k^2.$$

Gdy następnie dodamy wszystkie, w ten sposób utworzone, przyrosty energii kinetycznej, i gdy zważymy, że wartości energii kinetycznych w miejscach zetknięć się cząstek toru są wzajemnie równe, wtedy otrzymamy jako sumę tych przyrostów różnicę wartości energii kinetycznej punktu w końcowem i w początkowem jego położeniu; t. j. otrzymamy równanie:

$$L_A^B = \tfrac{1}{2} m v_B^2 - \tfrac{1}{2} m v_A^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

w którem v_B i v_A oznaczają prędkości w końcowem i początkowem położeniu punktu ruchomego. Równanie to jest jednakowe z rów. 142-ym tomu I-go; wyprowadziliśmy je tylko w tem miejscu drogą szczególnych rozważań, która nas objaśnia, dla czego wartości energii kinetycznej w pośrednich położeniach punktu nie wchodzą do tej sumy. Treść równania 72-ego wypowiedzieliśmy już w tomie I-ym, którą tu powtarzamy:

praca siły wzdłuż pewnej drogi równa się przyrostowi energii kinetycznej punktu, jakiego on doznał przy przejściu tej drogi.

Pracę sił wzdłuż pewnego toru, obliczymy wogóle, gdy znany będzie tor, jaki zakreśli dany punkt, oraz siły, występujące wzdłuż tego toru. Obliczenie zatem pracy sił, przyłożonych do punktu ruchomego, podczas jego przejścia z jednego miejsca do drugiego, jest wogóle niemożliwe bez wskazania toru, po którym punkt przebiega.

W szczególnych jednakże przypadkach, które omówiliśmy w § 198-ym tomu I-go, a które spotykają się w wielu zjawiskach świata fizycznego, wartość pracy sił, przyłożonych do punktu ruchomego, zależy tylko od miejsca, w jakiem znajduje się punkt ruchomy i wyraża się funkcyą jego spółrzędnych; wartość ta jest zatem niezależną od postaci toru, po jakim przebiegł dany punkt pomiędzy dwoma położeniami, a zależy tylko od spółrzędnych krańcowych miejsc. W tych szczególnych przypadkach zasada równowartości pracy i energii kinetycznej daje bezpośredni związek pomiędzy prędkością punktu, a jego spółrzędnemi; t. j. daje pierwszą całkę równania dynamicznego, co również stwierdziliśmy, przy badaniu ruchu prostolinijnego. Obierzmy jako spółrzędne danego punktu np. spółrzędne prostokątne (x, y, z), to pracę cząstkową siły P w miejscu (x, y, z), podczas nieskończenie małego przesunięcia punktu, wyrazimy wzorem:

$$P_x dx + P_y dy + P_z dz,$$

jeżeli zatem

$$P_x dx + P_y dy + P_z dz = dU,$$

gdzie U jest funkcyą spółrzędnych, nie zawierającą czasu wyraźnie; wtedy otrzymamy równanie:

$$dU = d(\tfrac{1}{2} m v^2);$$ lub jego całkę:

$$U_B - U_A = \tfrac{1}{2} m v_B^2 - \tfrac{1}{2} m v_A^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (73)$$

Funkcya U, którą nazwaliśmy w § 198-ym tomu I-go funkcyą sił, a odjemną jej wartość w § 200-ym — potencyałem sił, jest funkcyą spółrzędnych punktu ruchomego. Jeżeli daną jest np. funkcya $U(x, y, z)$, to dla każdego położenia (x_B, y_B, z_B) punktu ruchomego obliczymy wartość powyższej funkcyi, i tę wartość oznaczyliśmy literą U_B; a po podstawieniu tej wartości w równanie 73-cie obliczymy energię kinetyczną, jaką posiada dany punkt w tem miejscu. Lecz tę samą energię kinetyczną posiada punkt nietylko w miejscu (x^B, y^B, z_B), lecz we wszystkich miejscach przestrzeni, których spółrzędne czynią zadość równaniu:

$$U(x, y, z) = U_B.$$

Geometryczne miejsce tych punktów jest przeto powierzchnią, wyrażoną tem równaniem. Jeżeli funkcya sił jest jednowartościowa, to punkt ruchomy przebija tę powierzchnię w jakiemkolwiek jej miejscu z jedną i tą samą energię kinetyczną; a więc również z jedną i tą samą prędkością. Jest to wynik, któryśmy tutaj zdobyli drogą analizy algebraicznej, a do którego doszliśmy również w § 201 tomu I-go, drogą rozpatrywań właściwości powierzchni równych potencyałów.

Chociaż sposób wyprowadzenia równania równowartości pracy i energii kinetycznej, jaki stosowaliśmy w tomie I-ym, polega jedynie na przekształceniach algebraicznych, dowiedziemy jednakże w więcej krótki sposób, że równanie to może być wyprowadzone bezpośrednio z równania dynamicznego ruchu, bez żadnych dodatkowych określeń, drogą tylko przekształceń algebraicznych. W tym celu weźmiemy za podstawę naszych rozpatrywań równanie dynamiczne w postaci wektorowej:

$$\overline{P} = m \frac{d\overline{v}}{dt};$$

a po zrzutowaniu jego na styczną do toru, otrzymamy:

$$P_t = m \frac{dv}{dt}.$$

Można było również wziąć bezpośrednio to równanie; za podstawę naszych rozpatrywań, jest ono bowiem równaniem dynamicznem sił stycznych do toru.

Równanie to pomnożymy przez wartość ds i podstawimy w prawej stronie równania $\frac{ds}{dt} = v$, a otrzymamy szukane równanie:

$$P_t . ds = d\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right).$$

Równanie przeto równowartości pracy i energii kinetycznej punktu jest wynikiem równania dynamicznego ruchu; jest ono przeto szczególnym wyrazem prawa bezwładności. I rzeczywiście, gdy na punkt dany nie działają siły, praca ich równa się zeru, i energia kinetyczna punktu nie doznaje przyrostu podczas ruchu; z czego wynika, że punkt porusza się ze stałą prędkością, lub też pozostaje w spoczynku. Gdy zaś na dany punkt działa pewna siła, która wykonuje pracę, wtedy energia kinetyczna punktu, o tyle się zmienia, o ile praca tej siły się zmienia.

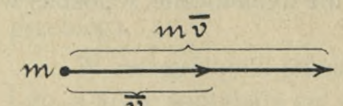
Zasada jednakże równowartości pracy i energii kinetycznej jest tylko pewnym szczególnym wyrazem prawa bezwładności, gdyż wyraża ona, wrazie np. gdy siły na punkt nie działają, niezmienność prędkości tylko pod względem algebraicznym, a nie wskazują tej niezmienności pod względem wektorowym, jak to daje równanie dynamiczne. Równanie przeto 72-gie, lub 73-cie nie może wystarczyć do obliczenia ruchu punktu swobodnego. I rzeczywiście; w celu obliczenie ruchu punktu swobodnego należy mieć trzy równania algebraiczne. W szczególnych jednakże przypadkach, w których punkt ruchomy posiada jeden tylko stopień swobody, a siły nań działające posiadają funkcyę sił, równ. 73-cie wystarcza do obliczenia ruchu takiego punktu. Wogóle zaś jest ono jedno z trzech równań, potrzebnych do obliczenia ruchu punktu; dwa zaś brakujące mogą być np. równaniami rzutów siły na dwie osi, lub też równaniami, które wyprowadzimy w następującym paragrafie, a które wyrażają t. zw. zasadę momentu ilości ruchu.

B. Zasada momentu ilości ruchu.

24. Ilość ruchu. Określenie: wektor prędkości punktu materyalnego, pomnożony przez wartość masy tegoż punktu, nazywamy ilością jego ruchu. W oznaczeniach wektorowych określenie to wyrazimy iloczynem;

$$m\bar{v};$$

i wysłowimy je krótko: **ilością ruchu danego punktu nazywamy m-krotny wektor jego prędkości.**



Rys. 17.

Z określenia tego wynika, że ilość ruchu posiada wymiar:

$$MLT^{-1}.$$

Znaczenie fizyczne ilości ruchu przedstawić sobie można w sposób następujący. Gdy punkt materyalny o masie m posiada pewną prędkość i gdy siły na ten punkt nie działają, wtedy wektor $m\bar{v}$, podczas ruchu tego punktu, nie zmienia się, ani co do długości, ani co do kierunku, ani też co do zwrotu; i odwrotnie, jeżeli dany punkt posiada podczas ruchu stałą ilość ruchu

$m\overline{v}$, to powiadamy, że siły na niego nie działają. Niezmienność zatem wektora ilości ruchu jest ścisłym wyrazem prawa bezwładności.

Poprzednio wyrażaliśmy prawo bezwładności niezmiennością wektora prędkości, lecz w zjawiskach ruchu, w których bierzemy pod uwagę czynniki fizyczne, wywołujące dany ruch, wielkości kinematyczne t. j. spółrzędne i czas nie wystarczają do wyrażenia zachodzących ruchów; wzór zatem $m\overline{v}$ = stałej; jest wyrazem ogólniejszym prawa bezwładności, niż wyraz samej prędkości.

Przyjąwszy niezmienność ilości ruchu za wyraz matematyczny bezwładności, określimy siłę jako stosunek przyrostu ilości ruchu do czasu, w jakim ten przyrost powstał; a zatem siłę wyrazimy wzorem:

$$\overline{P} = \frac{d(m\overline{v})}{dt}, \qquad (74)$$

który jest jednakowy ze wzorem 6-tym, w przypadku gdy masa m posiada stałą wartość.

Przyjmijmy następnie, że dana siła jest np. stała i działa na dany punkt materyalny, nie posiadający początkowej prędkości, w przeciągu pewnego czasu t; to z równania $\overline{P} = \frac{d(m\overline{v})}{dt}$ napiszemy:

$$\int_0^t \overline{P} dt = \int_0^{\overline{v}} d(m\overline{v}); \text{ a po zcałkowaniu } \overline{P}t = m\overline{v}.$$

Równanie to wyraża, że iloczyn z siły stałej, działającej na punkt materyalny i z czasu t, w przeciągu którego ona działała, równa się ilości ruchu $m\overline{v}$. Ilość zatem ruchu punktu danego jest miarą działania siły na dany punkt materyalny w przeciągu pewnego okresu czasu.

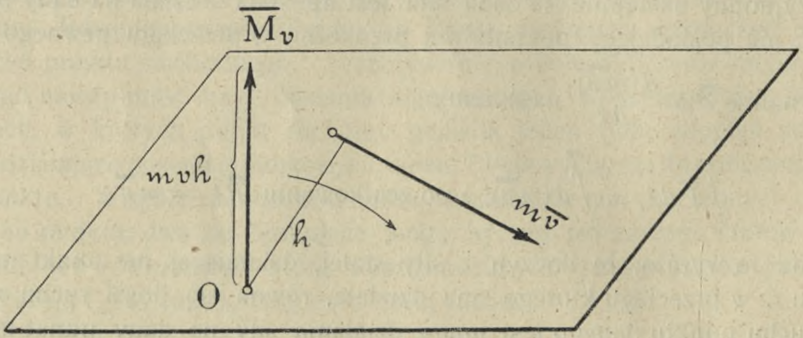
Zauważyć należy, że wartość ilości ruchu nie daje wielkości siły, ani też wielkości okresu czasu jej działania; a daje ona tylko wartość iloczynu z siły i czasu, gdy siła jest stała; lub też daje wartość całki $\int_0^t \overline{P} dt$, gdy siła jest zmienną. Ta sama zatem ilość ruchu może być wywołaną np. wielkiemi siłami, działającemi w krótkich okresach czasu; lub też odwrotnie może być wywołananą—małemi siłami, działającemi w długim okresie czasu.

25. Siły chwilowe. Ilość ruchu może być uważaną za miarę tak zwanych sił chwilowych. Siłą chwilową nazywamy siłę, która w przeciągu bardzo krótkiego okresu czasu jest w stanie wywołać stosunkowo znaczne zmiany ilości ruchu danego punktu. Siły te powstają np. podczas uderzenia, podczas wybuchu i t. p. Gdy np. bryłę daną, będącą w danej chwili w spoczynku, uderzymy, to nabędzie ona odrazu znacznej prędkości,—t. j. nabędzie w jednej chwłli znacznego przyrostu ilości ruchu. W tym przykładzie siła przyśpieszająca, pochodząca od ciała uderzającego, działa na daną bryłę bardzo krótko, a wywołuje znaczny przyrost ilości ruchu. Przyrost ten przyjmujemy przeto za miarę siły uderzenia. Niewchodząc więc w fizyczną stronę pochodzenia sił chwilowych, przyjmujemy za ich miarę przyrost ilości ruchu, jakiego doznaje dany punkt pod ich działaniem. Ze stanowiska fizycznego należy przeto rozróżniać dwojakiego rodzaju siły: siły ciągłe i siły chwilowe. Miarą sił ciągłych jest iloczyn z masy i przyśpieszenia punktu;—miarą zaś sił chwilowych jest przyrost ilości ruchu.

Powstawanie zatem każdego ruchu można sobie wyobrazić w dwojaki sposób: powstawanie w sposób ciągły, lub też w sposób przerywany.

Przytoczyliśmy tych kilka ogólnych przykładów w celu unaocznienia fizycznego wielkości, nazwanej ilością ruchu; zastosowania zaś tego pojęcia do różnych przykładów podamy w innych rozdziałach.

26. Moment ilości ruchu punktu materyalnego względem bieguna lub osi. Określenie: **Momentem ilości ruchu, względem dowolnie obranego w przestrzeni bieguna, nazywamy wektor, wystawiony w obranym biegunie prostopadle do płaszczyzny, przechodzącej przez ten biegun i przez wektor ilości ruchu, którego długość równa się iloczynowi z ilości ruchu i z odległości bieguna od kierunku wektora** $m\overline{v}$; **a zwrót jest skierowany ku patrzącemu,** gdy przypuszczalny obrót płaszczyzny, wskazany przez



Rys. 18.

zwrót wektora ilości ruchu, jest zgodny z obrotem strzałki zegara, rys. 18-ty. Płaszczyznę, przechodzącą przez biegun i przez wektor ilości ruchu nazwiemy płaszczyzną momentu. Określenie to wyrazimy następującym wzorem wektorowym :

$$\overline{M}_v = \mathrm{V}\, m\overline{v}\,\overline{h}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

w którym $\overline{M}_v$ oznacza określony wyżej wektor momentu ilości ruchu; a litera V objaśnia, że iloczyn $m\overline{v}\,\overline{h}$ należy przyjmować jako wektor.

Stosując określenie iloczynu wektorowego, podane w § 109-tym tomu I-ego, napiszemy wzór 75-ty w następującej postaci:

$$\overline{M}_v = \mathrm{V}\, m\overline{v}\,\overline{r};$$

gdzie $\overline{r}$ oznacza wektor wodzący danego punktu.

Określenie momentu ilości ruchu co do swej formy geometrycznej jest jednakowe z określeniem momentu siły, jakieśmy dali w § 106-tym tomu I-ego, gdy wektor siły przyjmiemy za wektor ilości ruchu. W tenże sposób, zgodnie z określeniem momentu siły względem osi, podanem w § 126-tym tomu I-go, damy również określenie momentu ilości ruchu względem osi, gdy zamiast wektora siły zastosujemy wektor ilości ruchu; a zatem:

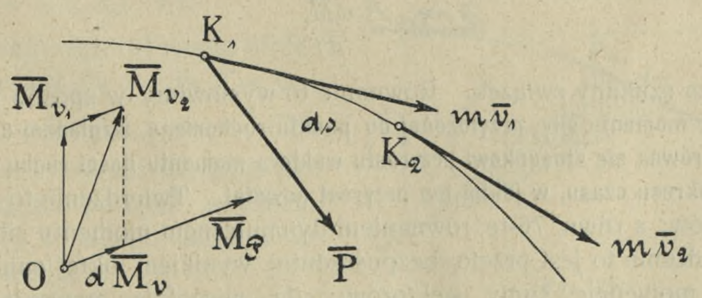
momentem ilości ruchu względem osi nazwiemy moment rzutu wektora ilości ruchu na płaszczyznę prostopadłą do osi, względem punktu przecięcia się jej z tą płaszczyzną.

Momentowi ilości ruchu możemy nadać następujące znaczenie fizyczne. Jeżeli przyjmiemy ilość ruchu za miarę siły chwilowej np. — siły uderzenia, to moment ilości ruchu należy uważać za miarę chwilowego obrotu, t. j. za miarę uderzenia, nadającego danemu punktowi obrót około pewnego bieguna; gdy wyobrazimy sobie dany punkt sztywno związanym z tym biegunem.

Przytoczymy obecnie pewne właściwości kinetyczne momentu ilości ruchu, wynikające bezpośrednio z jego określenia; jeżeli np. na dany punkt materyalny nie działa żadna siła, lub też działają siły, będące w równowadze, to na zasadzie prawa bezwładności punkt ten zakreśli ruchem jednostajnym tor prostolinijny; moment przeto ilości ruchu tego punktu względem dowolnie obranego bieguna w przestrzeni, jest wektorem stałym i niezmiennym; nietylko bowiem wartość iloczynu mv jest w danym przypadku stałą, lecz i ramię momentu jest niezmienne; a zatem i wektor $\overline{M}_v$ posiada niezmienne położenie w przestrzeni i niezmienną długość. Gdy zaś na dany punkt działa pewna siła, wtedy wektor momentu ilości ruchu zmienia wogóle swój kierunek i swą wartość. W szczególnym przypadku, w którym siła, działająca na dany punkt, znajduje się ciągle w płaszczyźnie, wyznaczonej przez jego początkową ilość ruchu, wtedy tor punktu leży w tej płaszczyźnie; a kierunek wektora $\overline{M}_v$ jest stały; lecz długość jego wogóle zmienia się, zależnie od wartości iloczynu z ilości ruchu i z długości ramienia.

Wogóle można powiedzieć, że wektor momentu ilości ruchu punktu materyalnego, będącego pod działaniem pewnej siły, zmienia kierunek długość i zwrot, a w następnym paragrafie wykażemy, w jaki sposób zmiana ta następuje, t. j. wykażemy związek pomiędzy przyrostem wektora momentu ilości ruchu, a wektorem momentu siły, działającej na dany punkt.

27. Związek pomiędzy przyrostem wektora momentu ilości ruchu a wektorem momentu siły. W celu znalezienia tego związku weźmy pod

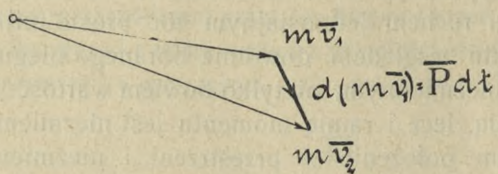


Rys. 19.

uwagę punkt ruchomy w dwóch nieskończenie blizkich położeniach K_1 i K_2, rys. 19-ty. Niech $m\overline{v}_1$ oznacza wektor ilości ruchu punktu, znajdującego się chwilowo w położeniu K_1; $m\overline{v}_2$ zaś w następnem jego położeniu K_2, nieskończenie blizkiem do poprzedniego; to różnica tych wektorów $(m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1)$ jest przyrostem ilości ruchu, jaki powstał pod działaniem siły $\bar{P}$, przyłożonej do danego punktu. Stosownie do określenia siły, napiszemy równanie:

$$\bar{P}dt = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1,$$

które wyraża, że wektor $\bar{P}dt$ równa się różnicy dwóch wektorów $m\bar{v}_2$ oraz $m\bar{v}_1$, rys. 20-ty. Ponieważ kierunki tych wektorów, oraz wektora siły, rys. 19-ty, przecinają się w jednym punkcie[1]), przeto możemy do tych wektorów zastosować twierdzenie o momentach (§ 108-my, tomu I-go), które głosi, że wektor momentu siły wypadkowej równa się sumie wektorowej momentów sił składowych, przyłożonych do jednego punktu. Twierdzenie to stosuje się nietylko do sił, lecz wogóle do wielkości wektorowych, których kierunki zbiegają się w jednym punkcie.



Rys. 20.

W danym przeto razie powiemy, że moment wektora $\bar{P}dt$ równa się różnicy wektorowej momentów ilości ruchu danego punktu w dwóch jego sąsiednich położeniach. Ażeby te stosunki unaocznić sobie geometrycznie, obierzmy w przestrzeni dowolny biegun O, rys. 19-ty, i wystawmy w niem, zgodnie z określeniem momentów, trzy wektory $\bar{M}_{v,1}$, $\bar{M}_{v,2}$, oraz $\bar{M}_P$, a zważywszy, że moment wektora $\bar{P}.dt$ równa się momentowi siły $\bar{P}$ pomnożonemu przez dt, wyrazimy powyższe twierdzenie o momencie wypadkowym następującem równaniem wektorowem:

$$\bar{M}_P \,.\, dt = \bar{M}_{v,2} - \bar{M}_{v,1}\,.$$

Z równania tego odczytamy przedewszystkiem, że pod działaniem danej siły moment ilości ruchu doznaje pewnego przyrostu, który jest równoległy do wektora momentu tejże siły. Oznaczywszy ten przyrost przez $d\bar{M}_v$ i rozdzieliwszy powyższe równanie przez wielkość dt, otrzymamy równanie wektorowe:

$$\bar{M}_P = \frac{d\bar{M}_v}{dt}, \qquad (76)$$

które wyraża szukany związek. Równanie to wysłowimy w sposób następujący: **wektor momentu siły, przyłożonej do punktu ruchomego, względem dowolnie obranego bieguna, równa się stosunkowi przyrostu wektora momentu ilości ruchu względem tegoż bieguna do okresu czasu, w jakim ten przyrost powstał.** Twierdzenie to nazwano zasadą momentów; a równ. 76-te, równaniem dynamicznem momentu siły.

Twierdzenie to jest przeto bezpośrednim wynikiem określenia siły i twierdzenia o momencie sumy wektorów: siła wywołuje przyrost ilości ruchu danego punktu; a moment jej wywołuje przyrost momentu ilości ruchu tegoż punktu. Dla tego też równanie momentu 76-te ma podobną postać matematyczną, jaką posiada równanie siły,—równ. 74-te.

[1]) Kierunek bowiem wektora $m\bar{v}_2$ zlewa się z kierunkiem cząstki toru ds, rys. 19.

28. Zasada pól. W szczególnym przypadku, w którym moment sił, działających na dany punkt, względem pewnego bieguna, równa się zeru t. j. gdy $\overline{M}_P = 0$, wtedy przyrost $d\overline{M}_v = 0$; a wektor $\overline{M}_v$ pozostaje niezmienny podczas ruchu punktu i równa się wektorowi momentu początkowej ilości ruchu tegoż punktu. Z niezmienności wektora momentu ilości ruchu, jaka zachodzi w tym przypadku, wyprowadzimy następujące wnioski, tyczące się ruchu punktu:

1) ruch odnośnego punktu odbywa się stale w płaszczyźnie prostopadłej do tego wektora, t. j. do wektora $\overline{M}_v$; a płaszczyzna ta przechodzi przez biegun, względem którego $\overline{M}_P = 0$, i przez wektor początkowej ilości ruchu.

2) wartość momentu ilości ruchu, t. j. wartość iloczynu mvh podczas ruchu punktu pozostaje niezmieniona i równa iloczynowi mv_0h_0; t. j. zachodzi w danym razie równanie:

$$mvh = mv_0h_0 \quad . \; , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (77)$$

w którem v_0 oznacza wartość prędkości początkowej; zaś h_0 ramię wektora tej prędkości względem obranego bieguna, rys. 21-szy.

Z równania tego obliczyć można prędkość v punktu w każdem miejscu toru, gdy znaną jest odległość h bieguna od stycznej, przeprowadzonej w danem miejscu. Wogóle zaś powiemy, że prędkość punktu w tym przypadku zwiększa się, gdy długość ramienia się zmniejsza.

Wynik ten, że iloczyn mvh w danym przypadku jest stałą wielkością, możemy przedstawić geometrycznie w następujący sposób. Podstawmy w równ. 77-me wartość $v = \frac{ds}{dt}$, a po jego przekształceniu, napiszemy:

$$ds \, . \, h = (v_0h_0) \, . \, dt.$$

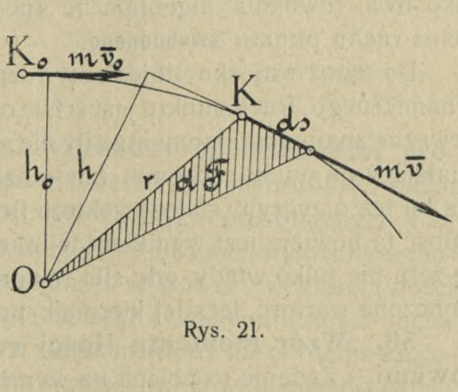
Iloczyn $ds \, . \, h$ wyraża podwójną wielkość pola trójkąta, którego podstawą jest cząstka ds toru punktu, a wierzchołek jego leży w biegunie; h bowiem jest wysokością tego trójkąta; rys. 21-szy. Oznaczmy wielkość pola tego trójkąta przez dF, a równanie powyższe napiszemy w postaci:

$$dF = (\tfrac{1}{2} \, v_0h_0) \, . \, dt;$$

a po scałkowaniu tego równania, otrzymamy, przyjąwszy dla $t = 0$; $F = 0$;

$$F = (\tfrac{1}{2} \, v_0 \, . \, h_0) \, . \, t \quad . \quad . \qquad (78)$$

F w danym razie wyraża wielkość pola, jakie zakreśla promień wodzący, wyprowadzony z danego bieguna do punktu ruchomego.



Rys. 21.

Równananie 78-me wysłowimy w sposób następujący: jeżeli moment sił, działających na punkt ruchomy względem pewnego bieguna, równa się ciągle zeru, to ruch punktu jest płaski i odbywa się w płaszczyźnie, przechodzącej przez dany biegun i przez kierunek początkowej prędkości tego punktu; a promień wodzący, wyprowadzony z bieguna do danego punktu, zakreśla pole proporcyonalne do czasu. Twierdzenie to, będące szczególnym przypadkiem zasady momentu (równ. 76-tego), nazwano **zasadą pól**.

29. Ile równań algebraicznych daje zasada momentu ilości ruchu? Równanie dynamiczne ruchu punktu w postaci wektorowej daje trzy równania algebraiczne, z których obliczyć można ruch punktu swobodnego, gdy dane są warunki ruchu początkowego. Możliwość obliczenia ruchu punktu z równania dynamicznego jest wyrazem tej fizycznej właściwości ruchu, że punkt każdy przy danej prędkości początkowej i pod działaniem pewnej siły wykonywa ściśle określony ruch.

Nasuwa się teraz pytanie, czy zasada momentów, wyrażona równ. 76-tem, daje możność obliczenia ruchu ze znajomości momentów sił, działających na dany punkt; a jeżeli ta zasada nie wystarcza, to ile daje ona równań niezależnych.

W celu dania odpowiedzi rozpatrzmy najpierw równanie momentów ze stanowiska kinetycznego. W tym celu równanie 76-te przedstawmy w postaci następującej:

$$\overline{M}_v = \int \overline{M}_P \, dt,$$

z którego można wyznaczyć wektor $\overline{M}_v$ momentu ilości ruchu danego punktu w każdej chwili jego ruchu, gdy dany jest wektor momentu siły w funkcyi czasu. Kierunek wektora $\overline{M}_v$ wyznacza płaszczyznę, w której chwilowo odbywa się ruch. Znajomość więc tego kierunku zastępuje jedno równanie algebraiczne, płaszczyzna bowiem wyraża się jednem równaniem algebraicznem. Znajomość następnie wartości wektora $\overline{M}_v$ w danej chwili ruchu pozwala zestawić jedno równanie algebraiczne ruchu, a mianowicie:

$$mvh = M_{v,0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Kierunek więc wektora ilości ruchu daje jedno równanie algebraiczne; długość jego daje drugie równanie, — rów. 79-te; i więcej równań ze znajomości tego wektora nie otrzymamy; zwrót bowiem jego daje tylko zwrót prędkości, jaką punkt ruchomy w danej chwili posiada. Zasada przeto momentów daje wogóle tylko dwa równania algebraiczne ruchu punktu; nie wystarcza zatem do obliczenia ruchu punktu **swobodnego**.

Do tegoż wniosku dojdziemy rozpatrując zasadę momentów ze stanowiska dynamicznego. Ruch punktu jest ściśle określony przez siłę, działającą na niego; a ponieważ ze znajomości momentu siły nie można sądzić o samej sile; moment przeto siły działający na punkt ruchomy, nie może wystarczyć do obliczenia ruchu punktu. Dla tej też przyczyny stałość wektora ilości ruchu nie wyraża prawa bezwładności;— stałość ta bowiem jest wynikiem tej okoliczności, że $M_P = 0$; a moment siły równa się zeru nie tylko wtedy, gdy siła równa się zeru, lecz i wtedy, gdy siła posiada skończoną wartość, lecz jej kierunek przecina biegun.

30. Wzór momentu ilości ruchu, wyrażony spółrzędnemi biegunowemi. Zadanie to polega na wyrażeniu momentu ilości ruchu wielkością promienia wodzącego r, wyprowadzonego z bieguna O, rys. 22-gi i wielkością kąta σ (lub jego różniczki), jaki tworzy promień wodzący z dowolnie lecz stale dla danego zadania obraną osią biegunową. Niech dany punkt w pewnej chwili posiada ilość ruchu $m\overline{v}$, to wartość momentu tej ilości w myśl danego określenia $M_v = mvh$; lub też inaczej, zgodnie z równaniem 79-em, podanem w § 105 tomu I-go:

$$M_v = mv_x r,$$

w którem v_x jest rzutem wektora v na oś x, prostopadłą do promienia wodzącego r. Rzut ten wyrazimy następującym wzorem:

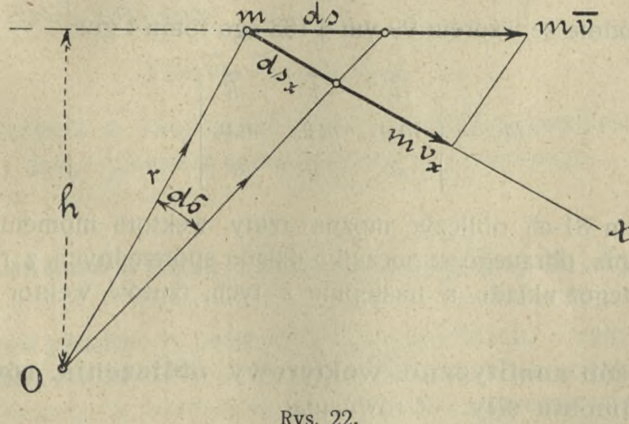
$$v_x = \frac{ds_x}{dt};$$

gdzie ds_x jest rzutem cząstki ds na oś x. Cząstka ds_x może być uważana, podczas nieskończenie małego przesunięcia, za cząstkę $r d\sigma$ łuku, jaki zakreśla koniec promienia wodzącego r; przeto podstawimy:

$$v_x = r\frac{d\sigma}{dt},$$

i otrzymamy wyraz szukany:

$$M_v = mr^2 . \frac{d\sigma}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (80)$$



Rys. 22.

31. Wzór momentu ilości ruchu, wyrażony spółrzędnemi prostokątnemi. Zadanie dane polega na obliczeniu wektora momentu ilości ruchu pewnego punktu z rzutów ilości ruchu na osi spółrzędnych prostokątnych i ze spółrzędnych tego punktu. W tym celu zastosujemy twierdzenie, wyłożone o momencie sił w § 128-ym tomu I-go, w którem zastąpimy wektor siły wektorem ilości ruchu i wygłosimy twierdzenie: że rzut na pewną oś wektora momentu ilości ruchu względem bieguna, obranego na tejże osi, równa się momentowi ilości ruchu względem tejże osi, a suma wektorowa tych rzutów na trzy osi (nierównoległe do jednej płaszczyny, nie równoległe też między sobą) wyznacza właściwy wektor momentu ilości ruchu.

W § 132-im tomu I-go obliczyliśmy moment wektora siły; w tenże sposób obliczyć można moment wektora ilości ruchu; należy tylko podstawić we wzory

94 i 95-ty, na str. 169-tej tomu I-go, zamiast rzutów siły rzuty ilości ruchu; a z tych równań napiszemy bezpośrednio równania rzutów momentu ilości ruchu na osi wzajemnie prostopadłe, przeprowadzone przez obrany biegun; a więc:

$$M_{v,x} = m v_y z - m v_z y;$$

$$M_{v,y} = m v_z x - m v_x z;$$

$$M_{v,z} = m v_x y - m v_y x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

We wzorach tych M_v oraz v, zaopatrzone wskaźnikami x, y, z, oznaczają rzuty tych wektorów na osi spółrzędnych prostokątnych. Na podstawie powyższych wzorów napiszemy następujące równanie wektorowe:

$$\overline{M}_v = \overline{M}_{v,x} + \overline{M}_{v,y} + \overline{M}_{v,z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

lub też równania algebraiczne:

$$M_v = \pm \sqrt{M^2_{v,x} + M^2_{v,y} + M^2_{v,z}} \quad \ldots\ldots \quad (83)$$

$$\cos (M_v, x) = \frac{M_{v,x}}{M}; \text{ i t. d.}$$

lub wreszcie zgodnie ze wzorem 99-ym § 133-ego tomu I-go:

$$M_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ m v_x & m v_y & m v_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (84)$$

Z równań zatem 81-ch obliczyć można rzuty wektora momentu ilości ruchu względem bieguna, obranego w początku układu spółrzędnych, z rzutów prędkości punktu na osi tegoż układu a następnie z tych; rzutów wektor momentu ilości ruchu.

32. Sposób analityczno-wektorowy obliczenia równania dynamicznego momentu siły. Z równania:

$$\overline{P} = \frac{d (m \overline{v})}{d t},$$

otrzymamy, po jego przemnożeniu wektorowem przez promień wodzący $\overline{r}$ danego punktu, równanie następujące:

$$\mathrm{V}\, \overline{P} \overline{r} = \mathrm{V} \frac{d (m \overline{v})}{d t} . \overline{r}.$$

Dowiedziemy teraz, ze wyraz

$$\mathrm{V} \frac{d (m \overline{v})}{d t} . \overline{r} = \frac{d}{d t} \mathrm{V} (m \overline{v}) . \overline{r}.$$

W tym celu obliczymy pochodną momentu ilości ruchu względem czasu podług prawidła, wyłożonego w § 111-ym tomu I-ego, a więc:

$$\frac{d}{dt} \mathrm{V}(m\overline{v}) . \overline{r} = \mathrm{V} \frac{d(m\overline{v})}{dt} . \overline{r} + \mathrm{V}(m\overline{v}) . \frac{d\overline{r}}{dt};$$

ponieważ zaś $\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{v}$, wyraz przeto:

$$\mathrm{V} m\overline{v} \frac{d\overline{r}}{dt} = \mathrm{V} m\overline{v}\,\overline{v} = 0;$$

wobec czego otrzymujemy równanie:

$$\mathrm{V}\overline{P}\overline{r} = \frac{d}{dt}(\mathrm{V}(m\overline{v})\overline{r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

które jest jednakowe z równaniem 76-tem.

Równanie to jest tylko przekształceniem równania dynamicznego siły; nie wnosi przeto do rozpatrywań ruchu żadnych nowych zasad; a jest tylko szczególnym wyrazem równania dynamicznego siły.

W szczególnym przypadku, który już rozpatrywaliśmy w inny sposób, gdy momenty sił zewnętrznych, względem pewnego bieguna, równe są zeru, otrzymamy z powyższego wzoru, równanie:

$$\mathrm{V}(m\overline{v}) . \overline{r} = \mathrm{V}(m\overline{v}_0) . \overline{r}_0,$$

które wyraża związek w skończonej postaci pomiędzy prędkością punktu i jego położeniem t. j. jest,—pierwszą całką równania dynamicznego.

C. Zastosowania zasad szczególnych dynamiki.

33. Ruch punktu w polu sił Newtonowskich. Punkt materyalny o masie m, posiadający w chwili $t = 0$ prędkość $\overline{v}_0$, jest przyciągany do pewnego środka, nieruchomego w przestrzeni, siłą odwrotnie proporcyonalną do drugiej potęgi z jego odległości od tegoż środka, t. j., jest on przyciągany siłą, odpowiadającą prawu, postawionemu przez Newtona dla ruchu planet. Obliczyć równanie toru tego punktu.

Ponieważ moment sił, działających na dany punkt, względem bieguna obranego w środku przyciągania, równa się zeru; przeto wektor momentu ilości ruchu $\overline{M}_v$ punktu względem tego bieguna, pozostaje podczas ruchu punktu wektorem niezmiennym, tak co do kierunku, jak też co do długości; z czego znów wynika, że tor punktu leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez środek przyciągania i przez kierunek prędkości początkowej $\overline{v}_0$. Właściwość tę danego ruchu można również sobie wytłumaczyć drogą rozważań właściwości sił; jak to czyniliśmy poprzednio.

Ruch przeto tego punktu wyrazimy dwiema spółrzędnemi, obranemi w płaszczyźnie jego ruchu. Układ spółrzędnych obierzmy biegunowy ze spółrzędnemi r i σ i z biegunem w środku przyciągania; w tym bowiem układzie siły środkowe dają się wyrazić funkcyą jednej tylko zmiennej: promienia wodzącego; co stanowi ważne udogodnienie rachunkowe.

Do rozwiązania tego zadania zastosujemy zasadę pracy, oraz zasadę momentu ilości ruchu; w równania te wejdą spółrzędne punktu r, σ, oraz czas t, jaki upłynął od wyjścia jego z początkowego położenia; a po wyrugowaniu z tych dwóch równań zmiennej t, otrzymamy związek pomiędzy r i σ, t. j. otrzymamy równanie toru, wyrażone spółrzędnemi biegunowemi.

Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej daje równanie:

$$1) \quad -\frac{k}{r^2}\,dr = d(\tfrac{1}{2}mv^2) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (86)$$

Zasada zaś momentu ilości ruchu względem środka przyciągania, daje równanie:

$$2) \quad \frac{dM_v}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (87)$$

Ażeby otrzymać równanie toru, wyrażone spółrzędnemi r i σ, należy wielkości v i M_v wyrazić temi spółrzędnemi. W tym celu prędkość $\bar{v}$ zrzutujemy na promień wodzący punktu i na prostopadłą do niego i napiszemy równanie:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\sigma}{dt}\right)^2.$$

Wartość zaś momentu ilości ruchu weźmiemy z równ. 117-tego:

$$M_v = mr^2\frac{d\sigma}{dt}.$$

Po podstawieniu tych wartości w równania poprzednie, — scałkujemy je; a przyjąwszy, dla $t = 0$:

$$r = r_0;\ \sigma = 0;\ v = v_0;\ M_v = M_0;$$

otrzymamy całki ich w następującej postaci:

$$1) \quad \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0} = \tfrac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] - \tfrac{1}{2}mv_0^2, \text{ oraz,}$$

$$2) \quad mr^2\frac{d\sigma}{dt} = M_0.$$

Z równań tych wyrugujemy dt, i otrzymamy równanie w postaci różniczkowej, wykazujące związek pomiędzy spółrzędnemi punktu; a po jego scałkowaniu otrzymamy równanie toru w skończonej postaci, wyrażone obranemł spółrzędnemi.

Wyraz:

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0}, \text{ który oznaczamy literą } E_0;$$

jest wielkością, charakteryzującą warunki początkowe ruchu; a po obliczeniu z równania momentów:

$$dt = \frac{mr^2 d\sigma}{M_0},$$

i po podstawieniu tej wartości w równanie pracy, otrzymamy równanie:

$$\frac{k}{r} = \tfrac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{M_0}{mr^2}\right)^2 + \left(r \frac{M_0}{mr^2}\right)^2\right] - E_0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (88)$$

W równaniu tem można oddzielić zmienne i następnie szukać jego całki. Lecz całkowanie to uprości się po wprowadzeniu nowej niezależnie zmiennej w, określonej równaniem:

$$w = \frac{1}{r}; \text{ skąd } r = \frac{1}{w}; \text{ oraz } dr = -\frac{1}{w^2}\,dw,$$

lub inaczej $dr = -r^2 dw$.

Po podstawieniu tych wartości w równanie poprzednie otrzymamy:

$$kw = \tfrac{1}{2} m \left[\left(-\frac{dw}{d\sigma} \cdot \frac{M_0}{m}\right)^2 + \left(w \frac{M_0}{m}\right)^2\right] - E_0; \text{ skąd}$$

$$d\sigma = \frac{-dw}{\sqrt{\frac{2E_0 m}{M_0^2} + \frac{2km}{M_0^2} w - w^2}}.$$

Na mocy wzoru 34-tego, podanego w „Techniku“ na str. 77-ej, napiszemy całkę tego równania:

$$\sigma = \operatorname{arsin} \frac{\frac{km}{M_0^2} - w}{\sqrt{\left(\frac{km}{M_0^2}\right)^2 + \frac{2E_0 m}{M_0^2}}} + C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (89)$$

Jest to równanie toru, jaki zakreśla punkt materyalny w danem polu sił. Ażeby odczytać z tego równania właściwości geometryczne tego toru, należy przedewszystkiem obliczyć stałą C, przyjąwszy pewne wartości spółrzędnych początkowego położenia punktu. W celu jednakże uproszczenia rachunku przyjmiemy pewne szczególne wartości w_1 i σ_1 zmiennych w i σ; któreby znajdowały się w pewnej zależności od samej krzywej. Przyjmijmy np. że w_1 ma odpowiadać najmniejszej wartości r, którą oznaczymy przez r_1; a kąt biegunowy, odpowiadający temu promieniowi, oznaczymy literą σ_1.

Jeżeli zmienna r ma posiadać wartość najmniejszą, to zmienna w posiadać powinna wartość największą; przeto wartość ułamka, wchodzącego do równania 89-go, powinna przybrać wartość największą odjemną. Wartości jednakże tego ułamka przy zmiennej w posiadają granicę od $+1$ do -1; ułamek ten bowiem wyraża sinus pewnego kąta; dla największej zatem wartości w ułamek ten przybrać może tylko wartość (— 1).

Po podstawieniu zatem w równ. 89-te:

$$w = w_1, \text{ oraz } \sigma = \sigma_1;$$

których wartości na razie nie obliczamy; otrzymamy równanie:

$$\sigma_1 = \text{arsin}\,(-1) + C;$$

z którego obliczymy:

$$C = \sigma_1 + \frac{\pi}{2};$$

Po podstawieniu tej wartości, oraz wartości $w = \frac{1}{r}$ w równ. 2-gie, otrzymamy równanie toru w postaci następującej:

$$\sigma - \sigma_1 = \frac{\pi}{2} + \text{arsin}\, \frac{\frac{km}{M^2_0} - \frac{1}{r}}{\sqrt{\left(\frac{km}{M_0^2}\right)^2 + \frac{2E_0 m}{M_0^2}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (90)$$

Oznaczmy kąt $(\sigma - \sigma_1)$ literą ψ i weźmy cosinus obydwóch stron tego równania, a zważywszy, że wogóle $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$, otrzymamy, po odpowiedniem przekształceniu:

$$\cos\psi = \frac{\frac{1}{r} - \frac{km}{M_0^2}}{\sqrt{\left(\frac{km}{M_0^2}\right)^2 + \frac{2E_0 m}{M_0^2}}}; \text{ skąd:}$$

$$r = \frac{\frac{M_0^2}{km}}{1 + \cos\psi \sqrt{1 + \frac{2E_0 M^2_0}{k^2 m}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (91)$$

Jest to równanie biegunowe krzywej stożkowej, w której ognisku leży biegun spółrzędnych. Postać ogólna tej krzywej jest następująca:

$$r = \frac{p}{1 + \cos\psi \,.\, e}.$$

Równanie przeto 91-sze przedstawia stożkową, której parametr wyraża licznik tego równania, a wartość pierwiastka jej jest mimośrodem.

Z geometryi analitycznej jest wiadomem:

gdy $e < 1$; t. j. gdy $E_0 < 0$, wtedy równanie powyższe przedstawia elipsę;

„ $e = 1$; t. j. „ $E_0 = 0$, „ „ „ „ parabolę;

„ $e > 1$; t. j. „ $E_0 > 0$, „ „ „ „ hyperbolę.

Znak wartości E_0 rozstrzyga przeto o rodzaju stożkowej; a pozostałe wartości równania 91-ego nie wpływają na jej rodzaj; nie zmieniają one bowiem znaku wartości pierwiastka.

Zatem zależnie od tego, czy:

$$\tfrac{1}{2} m v^2{}_0 \overset{<}{\underset{>}{=}} \frac{k}{r_0};$$

tor będzie elipsą, parabolą lub hyperbolą.

Wyniki te wypowiemy w sposób następujący: rodzaj stożkowej, jaką zakreśla punkt materyalny w polu sił Newtonowskich, zależy od początkowej jego odległości r_0, i od wartości prędkości v_0; lecz nie zależy od jej kierunku w przestrzeni. Ponieważ przytem wartość M_0 wchodzi w równanie toru w drugiej potędze, przeto postać toru nie zależy od zwrotu prędkości początkowej.

34. Analiza warunków, określających rodzaj stożkowej. Znajdźmy obecnie znaczenie dynamiczne, wyprowadzonych drogą analityczną warunków, określających rodzaj stożkowej. Wyraz $\frac{1}{2} m v_0{}^2$ wyraża wartość energii kinetycznej punktu ruchomego w jego położeniu początkowem; zaś wyraz $\frac{k}{r_0}$ — wartość pracy, jakąby siła przyciągania wykonała, podczas przeprowadzenia punktu ruchomego z ∞ do położenia początkowego r_0.

Siła przyciągająca punkt, który oddala się od środka, wykonywa pracę odjemną, (gdyż zwrot tego przesunięcia jest niezgodny ze zwrotem siły), energia zatem kinetyczna tego punktu zmniejsza się podczas oddalania się punktu od środka przyciągania; jeżeli zatem punkt ruchomy ma przesunąć się do ∞, to jego energia kinetyczna $\frac{1}{2} m v_0{}^2$, powinna być przynajmniej równą wartości pracy $\frac{k}{r_0}$; jeżeli zaś jest ona mniejszą, to punkt ruchomy, nie mając takiego zasobu energii, ażeby wykonał pracę $= \frac{k}{r_0}$, będzie pozostawał w skończoności. Jeżeli zaś energia początkowa $\frac{1}{2} m v_0{}^2 > \frac{k}{r_0}$, to punkt dany przybędzie do ∞ z pewnym zapasem energii, króra nie pozwoli mu zawrócić z drogi, lecz, przeprowadziwszy go przez nieskończoność, wprowadzi go do skończoności w innem miejscu przestrzeni.

Jeżeli wiemy, że torem punktu w danem polu sił jest jedna z krzywych stożkowych, można na podstawie tych wniosków orzec, w jakim przypadku będzie nią elipsa, parabola lub hyperbola.

W szczególnym przypadku elipsa może przybrać postać koła, przypadek ten nastąpi gdy $e = 0$, t. j. gdy:

$$1 + \frac{2 E_0 M_0{}^2}{k^2 m} = 0.$$

Z równania tego obliczymy wartość prędkości v_0, jaką należy nadać punktowi ruchomemu w danem jego położeniu r_0, ażeby zakreślił on koło. W tym celu podstawiamy w powyższe równanie przyjętą wartość $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{k}{r_0}$; oraz wartość:

$$M_0 = m v_0 r_0 \sin \alpha_0;$$

$$\text{gdzie } \alpha_0 \text{ oznacza } \sphericalangle (v_0, r_0);$$

a po przekształceniu jego, otrzymamy równanie:

$$m^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0 . v_0^4 - 2 k m r_0 \sin^2 \alpha_0 . v_0^2 + k^2 = 0,$$

z którego:

$$v_0^2 = \frac{2 k m r_0 \sin^2 \alpha_0 \pm \sqrt{4 k^2 m^2 r_0^2 \sin^4 \alpha_0 - 4 k^2 m^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0}}{2 m^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0};$$

a następnie po wyniesieniu przed pierwiastek kwadratu wyrazu $2 k m r_0 \sin \alpha_0$, otrzymamy, po skróceniu licznika i mianownika przez $2 m r_0 \sin \alpha_0$:

$$v^2{}_0 = \frac{k \sin \alpha_0 \pm \sqrt{\sin^2 \alpha_0 - 1}}{m r_0 \sin \alpha_0}.$$

Z wyrazu, znajdującego się pod pierwiastkiem, wnioskujemy, że v_0 może posiadać wartość rzeczywistą w jedynym tylko przypadku, gdy:

$$\sin^2 \alpha_0 - 1 = 0; \text{ t. j. gdy } \alpha_0 = \pm 90^0.$$

Podstawiwszy zatem tę wartość w równanie prędkości, otrzymamy wartość szukanej prędkości:

$$v^2{}_0 = \frac{k}{m r_0}; \text{ lub inaczej } \frac{m v^2{}_0}{r_0} = \frac{k}{r_0^2}.$$

Wyniki te wypowiemy w sposób następujący: ażeby w polu sił Newtonowskich wywołać ruch kołowy punktu materyalnego, należy nadać mu prędkość, której kierunek jest prostopadły do promienia wodzącego; t. j. $\alpha_0 = \pm 90^0$; oraz ażeby iloczyn z masy i przyśpieszenia dośrodkowego t. j. wartość $\frac{m v_0^2}{r_0}$ równała się sile przyciągania $\frac{k}{r_0^2}$; jak to wskazuje powyższe równanie.

Warunek powstawania ruchu kołowego obliczyć również można bezpośrednio; zważywszy, że siły, działające na punkt, poruszający się po kole w polu sił Newtonowskich, i wogóle w polu sił środkowych, zależnych tylko od odległości od środka przyciągania, nie wykonują żadnej pracy; energia kinetyczna przeto tego punktu, a więc i prędkość jego pozostaje niezmienioną (pod względem algebraicznym) i równą prędkości początkowej. Wiemy z kinematyki, że przyśpieszenie punktu, przebiegającego po kole z prędkością jednostajną v_0, skierowane jest po promieniu, zwrócone ku środkowi koła i równa się $p = \frac{v_0^2}{r_0}$; a ponieważ siła, wywołująca to przyśpieszenie w polu sił Newtonowskich, równa się $\frac{k}{r^2{}_0}$; przeto dla ruchu po kole powinien być zachowany warunek: $\frac{m v_0^2}{r_0} = \frac{k}{r_0^2}$, poprzednio wyprowadzony.

Uwaga. Zechce czytelnik uogólnić wskazany sposób określenia warunków powstawania ruchu kołowego, stosując go do pól sił środkowych, w których siły podlegają innym prawom zmienności, niż przytoczonym w tym przykładzie, np. prawu przyciągania proporcyonalnego do odległości.

35. Prawo ciążenia powszechnego. Newton postawił hypotezę, opartą na licznych obserwacyach ruchu planet, że ruchy te odbywają się w ten sposób, jak gdyby planety przyciągały się wzajemnie siłą, odwrotnie proporcyonalną do drugiej potęgi z ich wzajemnej odległości. Ponieważ wszystkie wnioski i rachunki, tyczące się ruchu ciał niebieskich, oparte na tej hypotezie, są zgodne z pomiarami ruchów zachodzących w rzeczywistości, właściwość zatem przyciągania się brył materyalnych odwrotnie proporcyonalnie do drugiej potęgi z ich odległości, przyjęto jako prawo ogólne przyrody i nazwano je prawem powszechnego ciążenia.

Jeżeli np. bryła materyalna, znajdująca się w polu sił ciążenia ziemskiego, otrzyma prędkość początkową, niezgodną z kierunkiem promienia kuli ziemskiej, to zakreśli ona tor w postaci krzywej stożkowej, zamkniętej w skończoności, lub też rozciągającej się do nieskończoności; zależnie od przytoczonych wyżej warunków ruchu początkowego.

Prędkości jednakże, nadane bryłom materyalnym, wyrzuconym z powierzchni ziemi, są zwykle tak małe, że $\frac{1}{2} m v_0^2 < \frac{k}{r_0}$; tory zatem, jakie one zakreślają są elipsami, w których ognisku znajduje się środek kuli ziemskiej; zauważymy następnie, że odległości, z jakiemi mamy do czynienia w doświadczeniach ziemskich, są tak małe w porównaniu z odległością środka tej elipsy, w której ognisku leży środek bryły ziemskiej, że część toru eliptycznego, przystępną dla naszych pomiarów, przyjąć możemy dla ułatwienia rozpatrywań ruchu za część paraboli, której oś główna zlewa się z osią pomienionej elipsy. Tor zatem paraboliczny punktu materyalnego, wyrzuconego w polu ciążenia ziemskiego jest torem przybliżonym. Do tychże wyników doszliśmy też w § 17-ym, przy rozpatrywaniu rzutu punktu materyalnego. W rozpatrywaniach tych przyjęliśmy, że siły, przyciągające punkt wyrzucony, są stałe we wszystkich miejscach toru, i że są wzajemnie równoległe; co jest tylko z pewnem przybliżeniem zgodne z rzeczywistością, błąd jednakże, stąd wynikający, jest w zwykłych warunkach niedostrzegalny.

Przyjąwszy zatem prawo powszechnego ciążenia za zgodne z przebiegiem zjawisk przyrody, wypowiemy na zasadzie wyników paragrafu poprzedniego, że ziemia np. zakreśla elipsę, w której ognisku leży słońce; że księżyc zakreśla również elipsę, w której ognisku znajduje się ziemia i t. p.

Badania ruchu komet wykazują, że ruch ich podlega również prawu ciążenia powszechnego; a tory ich nietylko eliptyczne, lecz i paraboliczne i hyperboliczne, w których ognisku znajduje się słońce, przewidziane są rachunkiem, przytoczonym w paragrafie poprzednim.

Przy obliczaniu ruchu punktu, wyrzuconego z powierzchni ziemi, należy zwrócić uwagę na tę okoliczność, że w przypadku, gdy tor punktu przetnie powierzchnie kuli ziemskiej, wtedy równania powyższe nie odpowiadają warunkom ruchu wewnątrz ziemi np. w głębokim otworze; wielkość bowiem przyciągania we wnętrzu ziemi, pomijając wszelkie opory, jest inna, niż na jej powierzchni; a mianowicie: powiększa się ona proporcyonalnie do odległości od środka ziemi, co można dowieść, wychodząc z ogólnej zasady, że punkt ruchomy jest przyciągany przez wszystkie cząstki kuli ziemskiej, podług prawa Newtona; gdy więc znajduje się on w jej wnętrzu, wypadkowa tych przyciągań cząstkowych jest inną, niż w przypadku, gdy jest on zewnątrz kuli ziemskiej.

36. Granice ruchu punktu w polu sił środkowych. Sposób odnalezienia warunków, przy których punkt ruchomy zakreśli tor w skończoności, lub nieskończoności można uogólnić i zastosować go do obliczenia ruchu punktu w polu sił środkowych, które są funkcyami odległości od środka pola, i nie zależą od wielkości kąta biegunowego. Sposób ten pozwoli obliczyć wogóle granice, w jakich dany punkt zakreśla tor pod działaniem takich sił.

Wyraźmy prawo zmienności sił środkowych funkcyą ogólną $f(r)$ ze znakiem dodatnym, gdy siły odpychają punkt; to praca tych sił podczas przejścia punktu ruchomego z położenia początkowego r_0 do innego położenia r wyrazi się całką $\int_{r_0}^{r} f(r)\, dr$, lub inaczej wzorem:

$$U(r) - U(r_0).$$

Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej daje równanie:

$$U(r) - U(r_0) = \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2;$$

Zasada zaś momentów daje równanie:

$$M_0 = m r^2 \frac{d\sigma}{dt}.$$

W równaniach tych v oznacza prędkość punktu w miejscu r, v_0 — w miejscu r_0; a M_0 oznacza moment ilości ruchu w miejscu r_0.

W najodleglejszem i najbliższem miejscu toru punkt ruchomy posiada prędkość, której kierunek jest prostopadły do promienia wodzącego; przeto, oznaczywszy tę odległość literą r_m (maximum lub minimum) i prędkość w tych miejscach przez v_m, równanie momentu ilości ruchu jest nast.:

$$m v_m r_m = M_0; \text{ skąd: } v_m = \frac{M_0}{m\, r_m}.$$

Podstawiwszy wartość v_m w równanie pracy dla położenia r_m punktu, otrzymamy równanie:

$$U(r_m) - U(r_0) = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{M_0}{m}\right)^2 \frac{1}{r_m^2} - \tfrac{1}{2} m v_0^2,$$

z którego po przemnożeniu przez r_m^2, o ile r_m nie posiada wartości zera lub ∞, otrzymamy równanie:

$$r_m^2 \cdot U(r_m) + r_m^2 \left[\tfrac{1}{2} m v_0^2 - U(r_0)\right] - \tfrac{1}{2} m \left(\frac{M_0}{m}\right)^2 = 0,$$

z którego obliczymy długość promienia r_m.

Zauważyć następnie należy, że tor punktu ruchomego dotyka kół, zakreślonych promieniami r_m; koła przeto, zakreślone temi promieniami, wyznaczają granice, pomiędzy któremi ruch punktu się odbywa.

W szczególnym przypadku, gdy $M_0 = 0$, t. j. gdy ruch jest prostolinijny; równanie to przekształci się na nast.:

$$U(r_m) + [\tfrac{1}{2} m v^2_0 - U(r_0)] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

$M_0 = 0$ następuje w dwóch przypadkach; w przypadku, gdy kierunek prędkości początkowej przechodzi przez środek sił, lub też w przypadku, gdy $v_0 = 0$.

W przypadku $v_0 = 0$, mamy:

$$U(r_m) = U(r_0).$$

37. Ogólne równanie toru punktu w polu sił środkowych. Obliczyć równanie ruchu punktu w polu sił środkowych, gdy siły te są pewną funkcyą, narazie nieokreśloną, promienia wodzącego; wyrażoną symbolem ogólnym $f(r)$.

Zadanie to jest uogólnieniem, wyżej rozpatrywanych przykładów; do rozwiązania jego zastosujemy przeto te same zasady; któreśmy stosowali do powyższych szczególnych przypadków. W celu uniknięcia powtarzania się, rozpatrzmy równ. 86 i 87 przykładu poprzedniego, a zauważymy, że tylko w pierwsze z nich wchodzi $f(r)$; lewa bowiem strona tego równania przedstawia iloczyn $f(r)\,dr$, wyrażający pracę cząstkową, prawa zaś strona pozostaje w tej samej postaci i dla tego ogólnego przypadku; drugie zaś z powyższych równań zupełnie nie zmienia się i dla danego przykładu. Całki więc tych równań są następujące:

$$1) \quad \int_{r_0}^{r} f(r)\,dr = \tfrac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] - \tfrac{1}{2} m v^2_0; \text{ oraz}$$

$$2) \quad m r^2 \frac{d\sigma}{dt} = M_0 .$$

Oznaczymy $\int f(r)\,dr$ przez $U(r)$ i następnie, jak poprzednio: $\frac{1}{2} m v^2_0 - U(r_0)$ przez E_0; a po wyrugowaniu z tych równań dt, otrzymamy równanie analogiczne do równ. 88-ego:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 \cdot \frac{M^2_0}{m r^4} = U(r) - \tfrac{1}{2}\frac{M^2_0}{mr^2} + E_0 .$$

Podstawmy w nie, jak poprzednio: $r = \frac{1}{w}$, a otrzymamy równanie:

$$\tfrac{1}{2}\left(-\frac{dw}{d\sigma}\right)^2 \frac{M^2_0}{m} = U(r) - \tfrac{1}{2}\frac{M^2_0}{m} \cdot w^2 + E_0, \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

z którego można obliczyć $d\sigma$ i następnie, po scałkowaniu, σ wyrazić wielkością w, a więc również wielkością r. Funkcya $U(r)$ pozostaje naturalnie nieokreśloną, dopóki zadanie jej nam nie da.

Równanie 93-cie przekształcimy na inne, którego całka jest nam znaną; a mianowicie zróżniczkujemy je względem σ, mając na uwadze, że r i w są funkcyami σ; i otrzymamy:

$$\frac{dw}{d\sigma}\cdot\frac{d^2w}{d\sigma^2}\cdot\frac{M^2_0}{m}=\frac{d\,U(r)}{dr}\cdot\frac{dr}{dw}\cdot\frac{dw}{d\sigma}-\frac{M^2_0}{m}.w.\frac{dw}{d\sigma};$$

po skróceniu przez $\frac{dw}{d\sigma}$ i po podstawieniu:

$$\frac{d(Ur)}{dr}=f(r)=f\left(\frac{1}{w}\right);\text{ oraz }\frac{dr}{dw}=-r^2=-\frac{1}{w^2},$$

otrzymamy:

$$\frac{d^2w}{d\sigma^2}+w=-\frac{m}{M^2_0}\cdot\frac{f\left(\frac{1}{w}\right)}{w^2}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(94)$$

Jest to ogólne równanie toru punktu w polu sił środkowych.

Sprawdźmy to równanie dla pola sił Newtonowskich. W tym celu podstawimy w nie:

$$f(r)=-\frac{k}{r^2}=-kw^2;$$

a otrzymamy:

$$\frac{d^2w}{d\sigma^2}+w=\frac{m}{M^2_0}k.$$

Jest to równanie różniczkowe linijne 2-go rzędu ze stałą wielkością wikłającą; w celu jego scałkowania, wprowadzimy do rachunku nową zmienną z, zależną od w w sposób następujący:

$$w=\frac{m}{M^2_0}k+z.$$

Po podstawieniu tej zmiennej; wielkość stała wypada z poprzedniego równania i otrzymujemy równanie:

$$\frac{d^2z}{d\sigma^2}+z=0,$$

którego całkę przedstawić można w postaci następującej:

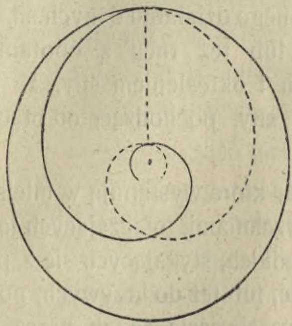
$$z=A\cos(\sigma-\beta);$$

gdzie A i β są stałe, wyznaczalne z początkowych warunków ruchu. Po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie i po zastąpieniu w wyrazem $\frac{1}{r}$, otrzymamy równanie toru tego ruchu:

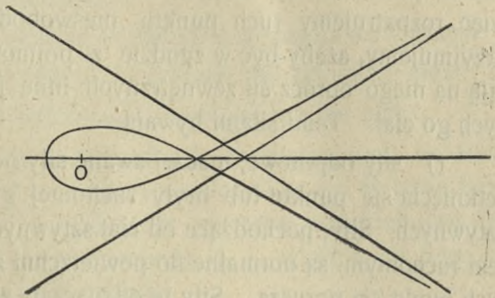
$$r=\frac{\frac{M^2}{mk}}{1+e\cos(\sigma-\beta)},$$

które jest jednakowe z równaniem 91-szem lub następnem.

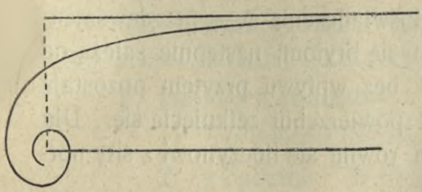
38. Zadanie. Punkt materyalny, przyciągany do pewnego środka siłą, odwrotnie proporcyonalną do trzeciej potęgi z odległości, zakreśla przy różnych warunkach ruchu początkowego tory, wskazane na rys. 23, 24, 25 i 26-tym. Zbadać, przy jakich warunkach ruchu początkowego zakreśla on każdy rodzaj z tych torów. (Rysunki te są wzięte z dzieła „Treatise on Dynamics by A. Gray and J. G. Gray".—1911).



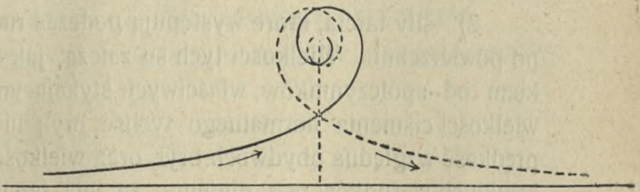
Rys. 23.



Rys. 25



Rys. 24.



Rys. 26.

5. Ruch punktu nieswobodnego oraz ruch punktu z oporami.

A. Siły odporowe i siły oporowe.

39. Warunki fizyczne powstawania ruchu. Jeżeli punkt materyalny pod działaniem sił danych wykonywa ruch nie zgodny z ruchem, wskazanym przez te siły, to po bliższem rozpatrzeniu warunków fizycznych, w jakich odbywa się taki ruch, zauważymy, że przyczyną tej niezgodności są ciała, z któremi styka się punkt ruchomy, i które zmieniają ruch, wyznaczony przez siły dane.

Jeżeli np. punkt materyalny pod działaniem siły ciążenia, zsuwa się po płaszczyźnie pochyłej, to płaszczyzna dana przedstawia właśnie ten fizyczny warunek, który nie pozwala punktowi zakreślić toru pionowego ruchem, wyznaczonym siłą ciążenia, lecz zmusza go do wykonywania ruchu po płaszczyźnie. Bryłę, znajdującą się w takich warunkach, nazwaliśmy w § 137 tomu I-go bryłą nieswobodną.

W przykładzie zaś spadania brył w powietrzu lub w jakiem innem środowisku fizycznem opór danego środowiska jest tym czynnikiem fizycznym, który zmienia ruch punktu, wyznaczony siłami ciążenia; w danym razie mówimy, że punkt ruchomy doznaje **oporu**.

Ponieważ warunki fizyczne, w jakich odbywa się ruch, wpływają na zmianę danego ruchu, przypisujemy im przeto właściwości sił. Siły te obliczyć można ze zmian, jakie one wywołują w ruchu punktu, poddanego działaniu danych sił. Gdy więc rozpatrujemy ruch punktu nieswobodnego lub też ruch z oporami, to przyjmujemy, ażeby być w zgodzie z pojmowaniem i określeniem siły, że działają na niego oprócz sił zewnętrznych inne jeszcze siły, pochodzące od otaczających go ciał. Temi siłami bywają:

1) siły odporowe, inaczej zwane siły połączeń, które występują w miejscach zetknięcia się punktu lub bryły ruchomej z powierzchniami, otaczających ją ciał sztywnych. Siły, pochodzące od ciał sztywnych i gładkich, stykających się z punktem ruchomym, są normalne do powierzchni zetknięć, lub też do krzywych, po których punkt się porusza. Siły te odznaczają się tą właściwością, że ich praca, podczas przesunięcia przystosowanego, równa się zeru;

2) siły tarcia, które występują podczas ruchu punktu lub bryły po torze, lub po powierzchni. Wielkości tych sił zależą, jak doświadczenia uczą, przedewszystkiem od spółczynników, właściwych stykającym się bryłom; następnie zależą od wielkości ciśnienia normalnego tychże brył; nie bez wpływu przytem pozostaje prędkość względna obydwóch brył, oraz wielkość powierzchni zetknięcia się. Dla zwykłych warunków przyjmujemy, że siła tarcia równa się iloczynowi z siły normalnej, i spółczynnika tarcia;

3) siły, powstające wskutek oporu środowiska, w którem porusza się dany punkt. Siły, występujące w tych warunkach, nazywamy siłami oporowemi danego środowiska; lub krótko nazywać będziemy je oporami. Wielkości tych sił zależą od geometrycznej postaci bryły ruchomej; od fizycznych właściwości danego środowiska; (np. od większej lub mniejszej gęstości); i od prędkości poruszającej się bryły względem środowiska. Dla większości przypadków przyjmujemy zgodnie z doświadczeniami i rozważaniami teoretycznemi, że siły te są proporcyonalne do pierwszej lub do drugiej potęgi z prędkości bryły ruchomej względem środowiska.

Siły te oraz siły tarcia mają tę wspólną właściwość, że kierunki ich działania zlewają się z kierunkami prędkości poruszającego się punktu, a zwroty ich są przeciwne zwrotowi tejże prędkości; wskutek czego praca przystosowana tych sił jest zawsze odjemną;

4) siły sprężystości brył lub też linii materyalnych, po których porusza się punkt dany lub też do których jest on przymocowany. Przykładem tego przypadku służyć może ciężar, przyczepiony do jednego końca nici sprężystej, gdy drugi koniec jest unieruchomiony w przestrzeni lub też gdy jest w pewnym określonym ruchu. Wielkości tych sił są w przybliżeniu, zależnie od fizycznych właściwości brył lub linii materyalnych, proporcyonalne do wielkości ich odkształceń; praca zaś ich może być tak odjemną, jak i dodatną. Podczas odkształcenia bryły lub linii sprężystej, siły sprężystości wykonują pracę odjemną; podczas zaś powrotu tych ciał do stanu pierwotnego praca ich jest dodatną; a suma algebraiczna obydwóch prac, jak doświadczenia uczą, jest zawsze odjemną, i wartość jej zależy

od fizycznych właściwości brył. W przypadkach, w których suma ta jest tak małą w porównaniu z innemi wielkościami danego zadania, że można jej wartość liczbową pominąć, przyjmujemy ją często dla uproszczenia rachunku równą zeru.

Zadaniem naszem obecnie jest wskazanie sposobów obliczenia ruchu punktu, odbywającego się w wyłuszczonych warunkach.

Pod względem kinematycznym zadania te podzielić można na dwie grupy:

1) zadania na ruch punktu **swobodnego**; (z oporami, lub bez nich); oraz

2) zadania na ruch punktu **nieswobodnego**, (z oporami lub bez nich).

Gdy punkt jest nieswobodny, ilość spółrzędnych, wyznaczających położenie punktu jest mniejszą od trzech, cośmy szczegółowo wyłożyli na str. 66 tomu I-ego. Do obliczenia przeto ruchu punktu nieswobodnego potrzeba jedno lub dwa równania algebraiczne zależnie od ilości stopni swobody, t. j. zależnie od tego, czy punkt porusza się po linii, czy też po powierzchni.

Ruch punktu swobodnego z oporami lub bez oporów posiada trzy stopnie swobody; do jego przeto obliczenia należy mieć trzy równania algebraiczne.

40. Rodzaje zadań. Zadania na obliczenie ruchu punktu wogóle, podzielimy przeto na następujące grupy:

I. Punkt jest swobodny, a ruch jest:
   1) bez oporów lub też;
   2) z oporami. W obydwu tych przypadkach punkt posiada trzy stopnie swobody.

II. Punkt jest nieswobodny:
   1) a ruch jest bez oporów, lub też
   2) z oporami. W obydwóch tych przypadkach punkt posiada jeden lub dwa stopnie swobody.

Do rozwiązania zadań obydwóch grup stosujemy zasady, wyłożone w rozdziałach poprzednich; i w tym celu wyobrazimy sobie, że na dany punkt oprócz sił zewnętrznych działają jeszcze siły odporowe łącznie z oporowemi i następnie zestawimy odnośne równanie dynamiczne, jak dla punktu swobodnego.

B. Ruch punktu swobodnego z oporami.

41. Przykład. Przykładem tego ruchu jest ruch punktu ciężkiego, wyrzuconego w powietrzu. Szczególny przypadek tego ruchu rozpatrywaliśmy w § 17-ym, w którym nie uwzględnialiśmy oporu powietrza, w § 7-m zaś rozpatrywaliśmy ten ruch z uwzględnieniem oporu, gdy punkt nie posiadał prędkości początkowej; obecnie przyjmiemy, że punkt ma nadaną pewną początkową prędkość, której kierunek tworzy z poziomem kąt α. Na dany punkt w danym razie działa:

1) siła ciężkości $m\overline{g}$, oraz

2) siła oporu $\overline{W}$; której kierunek zlewa się z kierunkiem chwilowej prędkości punktu; a zwrot jest jej przeciwny, rys. 27-my. Równanie dynamiczne ruchu punktu w środowisku z oporami jest przeto następujące:

$$m\bar{g} + \bar{W} = m\frac{d\bar{v}}{dt},$$

w którem są dwie zmienne v i t. Równania tego całkować nie możemy w ten sposób, jakieśmy to wykonali na str. 45-ej; kierunek bowiem prędkości, a więc i siły $\bar{W}$ jest zmienny. Zastosujemy przeto całkowanie algebraiczne, i w tym celu zrzutujemy to równanie na dwie osi wzajemnie prostopadłe rys. 27-my, jakieśmy to uczynili w § 17-ym. Równanie rzutów na oś x jest następujące:

$$-W_x = m\frac{dv_x}{dt};$$

równanie zaś rzutów na oś y:

$$mg + W_y = m\frac{dv_y}{dt}.$$

Przyjmijmy, że opór jest proporcyonafny do drugiej potęgi prędkości, t. j. $W = kv^2$; a więc:

$$W_x = kv^2 \cos\alpha; \text{ oraz } W_y = kv^2 \sin\alpha;$$

gdzie α oznacza kąt nachylenia stycznej do toru, przeprowadzonej w miejscu rozpatrywanem. Jeżeli wprowadzimy jako zmienne rzuty prędkości na osi, to:

$$W_x = kvv_x; \quad W_y = kvv_y.$$

Podstawimy wartość W_x w pierwsze równanie, a obliczymy bezpośrednio jego całkę. W tym celu oddzielimy zmienne i otrzymamy następujące równanie:

$$-kvdt = m\frac{dv_x}{v_x};$$

a przyjąwszy warunki ruchu początkowego dla $s = 0$:

$$v_x = C_x, \quad v_y = C_y,$$

oraz podstawiwszy: $vdt = ds$; otrzymamy bezpośrednio całkę:

$$-ks = m \operatorname{lgn} \frac{v_x}{C_x};$$

skąd:

$$v_x = C_x e^{-\frac{ks}{m}}.$$

Równanie to daje związek pomiędzy rzutem v_x prędkości i drogą s; znalezienie bowiem związku pomiędzy v_x i t, jakieśmy to uczynili poprzednio, sprawia przy całkowaniu znaczne trudności. Z tej też przyczyny v_y trudno jest wyrazić funkcyą t.

W przypadku takich trudności matematycznych staramy się obliczyć związki pomiędzy innemi zmiennemi, będącemi w pewnem ściśle określonym związku z ruchem danego punktu. W danym np. przypadku można wyrazić spółrzędne punktu funkcyą tangensa kąta, jaki tworzy styczna do toru z osią x. Obliczenie to przeprowadzono w mechanice Auteurietha, (w tłomaczeniu inż. St. Patschkego na str. 324-tej), do której zwracam czytelnika.

Postępowanie rachunkowe w rozwiązaniu zadania powyższego jest łatwiejsze, gdy przyjmiemy, że opór środowiska jest proporcyonalny do pierwszej potęgi z prędkości. Wtedy mamy równanie dynamiczne:

$$m\bar{g} - k\bar{v} = m\frac{d\bar{v}}{dt},$$

którego rzut na oś x daje następujące równanie:

$$1)\quad - kv_x = m\frac{dv_x}{dt};$$

a na oś y:

$$2)\quad mg - kv_y = m\frac{dv_y}{dt}.$$

Całka pierwszego równania po przyjęciu dla: $t = 0$:

$$x = 0,\ y = 0,\ v_x = C_x \text{ i } v_y = C_y;$$

jest następująca:

$$t = -\frac{m}{k}\operatorname{lgn}\frac{v_x}{C_x};$$

skąd:

$$1)\quad v_x = C_x e^{-\frac{k}{m}t}.$$

W celu scałkowania równania drugiego, przekształcimy je na następujące:

$$(mg - kv_y) = -\frac{m}{k}\frac{d(mg - kv_y)}{dt};$$

z którego, po oddzieleniu zmiennych, napiszemy bezpośrednio jego całkę:

$$t = -\frac{m}{k}\operatorname{lgn}\frac{mg - kv_y}{mg - kC_y};\ \text{skąd:}$$

$$mg - kv_y = (mg - kC_y)\,e^{-\frac{k}{m}t};\ \text{i wreszcie:}$$

$$2)\quad v_y = \frac{m}{k}g - \left(\frac{m}{k}g - C_y\right)e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Obliczymy następnie właściwe równania ruchu, podstawiwszy w równania powyższe:

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ \text{oraz}\ v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Równania te po scałkowaniu są następujące:

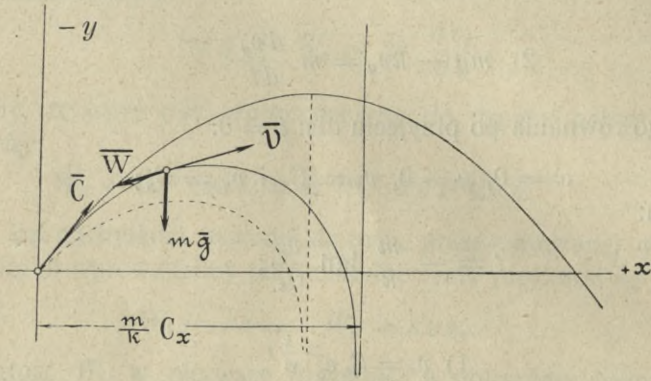
$$1)\quad x = \frac{m}{k}C_x\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right);\ \text{oraz:}$$

$$2)\quad y = \frac{m}{k} g t - \frac{m}{k}\left(\frac{m}{k} g - C_y\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Z równań tych wynika, że z powiększeniem czasu wartość wyrazu $e^{-\frac{k}{m}t}$ maleje, a spółrzędna x zbliża się do pewnej stałej wielkości, równej $\frac{m}{k} C_x$; y zaś wzrasta do nieskończoności.

Dla $t = \infty$, mamy:

$$x_m = \frac{m}{k} C_x;\ \text{a}\ y = \infty;\ \text{oraz}\ v_x = 0;\ v_y = \frac{m}{k} g.$$



Rys. 27.

Prosta przeto $x_m = \frac{m}{k} C_x$ jest asymptotą toru, rys. 27-my, a kierunek prędkości zbliża się do kierunku pionowego, wartość zaś jej zbliża się do pewnej stałej wartości; porów. wyniki obliczeń w § 7-ym.

Ruch tego punktu może być uważany za przybliżony obraz, w którym opór jest proporcyonalny do innej potęgi z prędkości.

Łatwo wywnioskować, że dla tych przypadków, przy jednakowych warunkach początkowych, asymptota toru będzie leżała bliżej miejsca wyjścia punktu, a wysokość wzniesienia będzie mniejszą; energia bowiem początkowa punktu pójdzie nietylko na pracę podniesienia punktu, lecz i na pracę oporów, która powiększa się z powiększeniem się oporów.

42. Równania ogólne ruchu punktu swobodnego z oporami. Ogólne równanie dynamiczne punktu swobodnego, poruszającego się w środowisku z oporami jest następujące:

$$\overline{P} + \overline{W} = m\frac{d\overline{v}}{dt},$$

w którem $\overline{P}$ oznacza siłę, przyłożoną do punktu; $\overline{W}$ — siłę oporową, której kierunek zlewa się z kierunkiem prędkości chwilowej; zwrot zaś jest przeciwny zwrotowi tej prędkości, a wartość jest pewną daną funkcyą tejże prędkości i zależy od fizycznych właściwości środowiska. Równanie powyższe przekształcić można na równanie algebraiczne, rzutując je np. na osi spółrzędnych, jakieśmy to w powyższym przykładzie wykonali.

Stosowanie zasady pracy lub też zasady momentów w przypadkach ruchu z oporami nie daje tych dogodności rachunkowych, jakie dają te zasady w przypadku np. sił środkowych i zachowawczych. Praca bowiem sił oporowych zależy w danym razie od drogi, po jakiej przebywa punkt ruchomy. Do równania zaś momentu sił wejdzie moment sił oporowych; wskutek czego równania te są dosyć zawiłe pod względem matematycznym i nie dają się łatwo całkować.

Dla przybliżonych rozpatrywań tych ruchów może być stosowane z pewnem powodzeniem równania dynamiczne siły normalnej i stycznej. Z równania siły normalnej obliczymy: $\rho = m \frac{v^2}{P_n}$ i drogą wykreślną wskazaną w § 21-szym, kolejno znajdować będziemy położenia punktu ruchomego; a zważywszy że:

$$m \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{P}_t - \overline{W},$$

otrzymamy:

$$\triangle \overline{v} = \frac{1}{m}(\overline{P}_t - \overline{W}) \cdot \triangle t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (95)$$

Z równania tego wynika, że prędkość ruchu z oporami w miejscu np. 2-em jest mniejszą niż prędkość w temże miejscu tegoż punktu, poruszającego bez oporu; a ponieważ wartości P_n są te same dla obydwóch ruchów (bez oporów i z oporami), przeto promień krzywości toru w miejscu wyjścia punktu, poruszającego się z oporami, jest mniejszy niż takiż promień toru punktu, poruszającego się w temże polu sił, lecz bez oporów. Z czego wynika, że punkt poruszający się w środowisku z oporami, przy wyjściu z początkowego położenia, zakreśla tor o większej krzywości, niżby go zakreślił, gdyby oporów nie istniało; co też stwierdza przykład poprzedni.

C. Ruch punktu bez oporów po danym torze.

43. Ruch bez oporów punktu ciężkiego po krzywej w płaszczyźnie poziomej. Na drut, zwinięty w postaci koła o promieniu r, nawłeczona jest bryła materyalna o ciężarze Q, której nadano, np. uderzeniem, pewną prędkość początkową v_0, stycznie do obwodu koła. Obliczyć ruch bryty, gdy koło znajduje się w płaszczyźnie poziomej i gdy nie uwzględnimy tarcia pomiędzy bryłą a drutem.

Na bryłę działa siła ciążenia Q i siła odporu N, która sprowadza daną bryłę z toru prostolinijnego, jakiby wykonała pod działaniem siły ciążenia, na tor kołowy. Siła odporowa wobec nieuwzględnienia tarcia leży w płaszczyźnie normalnej do toru, przeprowadzonej w miejscu, w którem badamy ruch bryły; położenie zaś jej w tej płaszczyźnie jest nam nieznane, jak również i jej wielkość. Rys. 28-my przedstawia płaszczyznę normalną do koła. Równanie dynamiczne ruchu tego punktu jest następujące:

$$\overline{Q}+\overline{N}=m\overline{p};$$

Rzut tego równania na styczną do toru daje równanie:

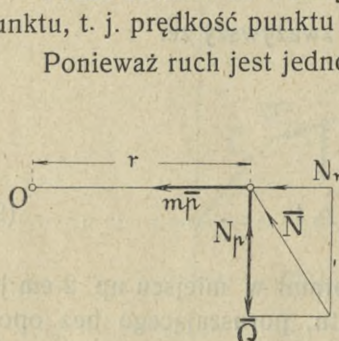
$$0=mp_t;$$

z którego wynika, że ruch po torze odbywa się jednostajnie z prędkością stałą v_0, równą prędkości początkowej danego punktu. Do tegoż wniosku dojdziemy zastosowawszy, zamiast równania rzutów na styczną do toru, zasadę równowartości pracy i energii kinetycenej, która daje pierwszą całkę równania siły stycznej.

Praca bowiem sił w danym razie $=0$; z czego wynika, że energia kinetyczna punktu, t. j. prędkość punktu pozostaje podczas ruchu niezmienną.

Ponieważ ruch jest jednostajny po kole, przeto przyśpieszenie jego:

$$p_n=\frac{v^2_0}{r};\ p_t=0.$$



Rys. 28.

W celu obliczenia siły normalnej zrzutujmy powyższe równanie dynamiczne na promień koła, a otrzymamy:

$$N_r=m\frac{v^2_0}{r};$$

gdzie N_r oznacza rzut siły odporowej N na kierunek promienia, ze zwrotem dodatnym ku środkowi koła. Ażeby obliczyć drugi rzut siły N, zrzutujmy równanie dynamiczne na oś pionową, a otrzymamy:

$$Q-N_p=0;$$

rzut bowiem przyśpieszenia na pionową $=0$. Siła przeto odporowa:

$$\overline{N}=\overline{N}_p+\overline{N}_r;$$

i można ją uważać za złożoną z dwóch sił: z siły pionowej równoważącej ciężar punktu, i z siły, wywołującej przyśpieszenie p.

Okres T obiegu punktu: $T=\dfrac{2\pi r}{v_0}$.

Pozostawia się czytelnikowi zastosowanie tych rozpatrywań do przypadku, w którym drut ma postać krzywej dowolnej, leżącej w płaszczyźnie poziomej.

44. Wahadło matematyczne stożkowe. Do jednego końca nici nierozciągliwej przymocowany jest punkt materyalny o ciężarze mg; drugi zaś jej koniec jest umocowany nieruchomo w przestrzeni rys. 29-ty. Obliczyć prędkość v_0, jaką należy nadać temu punktowi, ażeby zakreślił on koło poziome o promieniu r, którego środek znajduje się na pionowej, przeprowadzonej przez punkt umocowania nici. Długość nici oznaczymy literą l, a jej naprężenie literą S.

Kierunek szukanej prędkości w myśl jej określenia jest styczny do koła, a wielkość jej obliczymy z równania dynamicznego, zważywszy, że na dany punkt działa ciężar punktu i naprężenie nici S, a zatem mamy:

$$m\bar{g} + \bar{S} = m\bar{p}. \quad \dots\dots\dots \quad (96)$$

Podczas tego ruchu praca siły ciążenia i naprężenia nici równa się zeru; przeto energia kinetyczna punktu pozostaje podczas ruchu stałą; a punkt poruszać się będzie po kole ruchem jednostajnym; z czego wynika, że przyśpieszenie punktu jest skierowane po promieniu koła $i = \frac{v^2_0}{r}$. Zrzutujmy równanie dynamiczne danego ruchu (równ. 96-te) na promień wodzący danego punktu, a otrzymamy równanie:

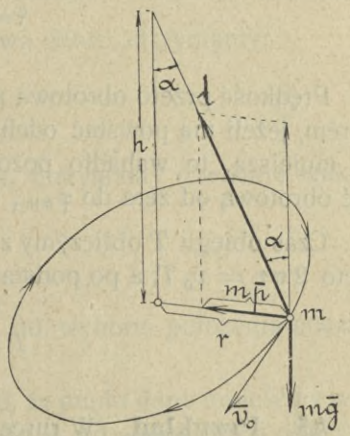
$$S \sin\alpha = m\,\frac{v^2_0}{r},$$

w które wchodzą dwie niewiadome S i v_0; ażeby je obliczyć, zrzutujmy równanie dynamiczne jeszcze na oś pionową, a otrzymamy równanie:

$$mg - S\cos\alpha = 0.$$

Z tych dwóch równań wyrugujemy S, dzieląc np. jedno przez drugie, i obliczymy wartość prędkości szukanej, przy której punkt zakreśli koło, a zatem:

$$v_0 = \pm\sqrt{rg\,\mathrm{tg}\,\alpha} \quad \dots \quad (97)$$



Rys. 29.

Równanie rzutów równania dynamicznego na trzecią oś np. na styczną do koła wskaże nam, że rzut przyśpieszenia równa się zeru, ruch przeto punktu jest jednostajny; cośmy zresztą już wywnioskowali z zasady pracy.

Równanie 97-me możemy otrzymać bezpośrednio, gdy obierzemy oś rzutów w ten sposób, ażeby rzut naprężenia nici na tę oś równał się zeru, a rzut przyśpieszenia posiadał skończoną wartość. Osią taką jest prosta, leżąca w płaszczyźnie biegunowej i prostopadła do kierunku nici; rzut na tę oś daje równanie:

$$mg \sin\alpha = mp \cos\alpha,$$

z którego po podstawieniu $p = \frac{v^2_0}{r}$, otrzymamy równ. 97-me.

W celu zbadania właściwości tego ruchu; podstawmy w równ. 97-me, $v_0 = r\varphi$ i obliczmy φ;

$$\varphi = \pm\sqrt{g\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{r}}.$$

Z równania tego wynika, że dla $r = 0$: $\alpha = 0$, a $\varphi = \sqrt{\frac{0}{0}}$; t. j. φ otrzymuje w tym przypadku wartość nieoznaczoną. Ażeby ją obliczyć wyrazimy zmienne α i r wspólną zmienną, w tym celu podstawimy: $r = h \operatorname{tg} \alpha$; i otrzymamy:

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Dla $\alpha = 0$, $h = h_{max.} = l$; a $\varphi = \varphi_{min.}$, czyli:

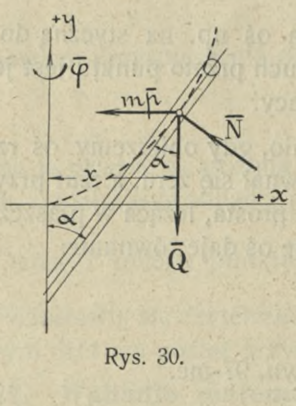
$$\varphi_{min.} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Prędkość przeto obrotowa powinna mieć conajmniej wartość, wskazaną tym wzorem, jeżeli ma powstać odchylenie wahadła. Jeżeli zaś prędkość obrotowa φ jest mniejszą, to wahadło pozostanie w spoczynku. Powiększając przeto prędkość obrotową od zera do $\varphi_{min.}$, wahadło nie doznaje żadnych odchyleń.

Czas obiegu T obliczymy z właściwości ruchu, że jest on jednostajny,—mamy przeto $2\pi r = v_0 T$, a po podstawieniu odpowiedniej wartości dla v_0, mamy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \operatorname{tg} \alpha}}.$$

45. Przykład. W rurce, obracającej się około osi pionowej, z prędkością stałą φ; rys. 30-ty; której wewnętrzne ścianki są zupełnie gładkie, umieszczono punkt materyalny o ciężarze $m\bar{g}$ (np. w postaci kulki); znaleść miejsce w tej rurce, w którem kulka ta, podczas obrotu rurki, pozostawać będzie w spoczynku względem rurki. Kąt, jaki tworzy oś rurki z osią obrotu, oznaczono literą α.



Rys. 30.

Na daną kulkę działa siła ciężkości i siła normalna; siły te wywołują przyśpieszenie punktu, które jest skierowane po promieniu x koła, jakie on ma zakreślić i równa się $m\frac{v^2}{x}$; lub inaczej, ponieważ $v = x\varphi$, $p = x\varphi^2$; promień x wyznacza szukane położenie pnnktu. Równanie dynamiczne tego ruchu jest przeto następujące:

$$m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{p}. \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

Zrzutujmy to równanie na oś rurki; rzut bowiem siły odporowej równa się w tym razie zeru; a otrzymamy równanie:

$$mg \cos \alpha = mx\varphi^2 \sin \alpha;$$

z którego obliczymy położenie punktu ruchomego, odpowiadające postawionym warunkom:

$$x = \frac{g}{\varphi^2} \operatorname{cotg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

Z równania tego wynika, że przy stałych wielkościach g i φ, x zależy od kąta α. Zmieniając przeto kąt α, rurka będzie zmieniać swe położenia, a oś jej będzie styczną do pewnej krzywej. Krzywa ta będzie miała taką właściwość, że punkt ruchomy w każdem jej miejscu będzie pozostawał w spoczynku lub w ruchu jednostajnym podczas jej obrotu ze stałą prędkością φ.

W celu obliczenia równania tej krzywej przeprowadzimy osi x i y, rys. 30-ty, a zważywszy, że oś rurki jest styczną do szukanej krzywej, napiszemy: $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg} \alpha$; a po podstawieniu tej wartości w równ. 99-te; otrzymamy:

$$x = \frac{g}{\varphi^2} \frac{dy}{dx};$$

skąd po oddzieleniu zmiennych i po scałkowaniu, otrzymamy równanie szukanej krzywej:

$$x^2 = \left(\frac{2g}{\varphi^2}\right) y + C.$$

Jest to równanie paraboli, a C jest stałą, zależną od wyboru położenia początku osi spółrzędnych.

Zadanie to odmieńmy następnie w ten sposób, że punkt dany umieśćmy w dowolnem miejscu rurki, które określimy odległością a od osi obrotu; i obliczymy siłę S, działająca wzdłuż osi rurki, jaką trzeba przyłożyć do niego, ażeby utrzymać go w spoczynku w danem miejscu rurki.

Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące:

$$\overline{S} + m\overline{g} + \overline{N} = m\overline{p}.$$

Zrzutujmy to równanie na oś rurki (dla czego na tę oś?); a otrzymamy:

$$S + mg \cos \alpha = ma\varphi^2 \sin \alpha;$$

skąd:

$$S = m(a\varphi^2 \sin \alpha - g \cos \alpha).$$

Pozostawia się czytelnikowi zbadać, dla jakich wartości a, przy stałych φ i α, wartość S jest dodatną, równą zeru, lub odjemną.

46. Ruch bez oporów punktu ciężkiego po prostej pochyłej Na punkt, zsuwający się bez tarcia po prostej, nachylonej względem poziomu, rys. 31-szy działa ciężar $m\overline{g}$ oraz siła odporowa toru $\overline{N}$; siły te wywołują przyśpieszenie $\overline{p}$ punktu, które jest skierowane wzdłuż toru, (normalne bowiem przyśpieszenie $= 0$), ze zwrotem dodatnym ku dołowi. Równanie zatem dynamiczne tego ruchu w postaci wektorowej jest następujące:

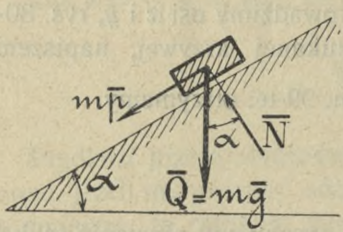
$$m\overline{g} + \overline{N} = m\overline{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Ażeby obliczyć przyśpieszenie p najdogodniej będzie dla rachunku zrzutować trójkąt wektorów, przedstawiony przez powyższe równanie dynamiczne, na kierunek toru, niewiadoma bowiem N nie wejdzie wtedy do równania tych rzutów; równanie przeto rzutów jest następujące:

$$mg \sin \alpha = mp;$$

lub w innej postaci:

$$mg \sin \alpha = m \frac{d^2 s}{d t^2};$$



Rys. 31.

gdze s oznacza długość drogi. Podstawmy w równanie powyższe zgodnie z określeniem: $p = \frac{dv}{dt}$, a po scałkowaniu i rozwiązaniu względem v, otrzymamy:

$$mv = mg \sin \alpha \,.\, t + C.$$

Przyjmijmy, że dla $t = 0$: $v = 0$, a po skróceniu przez m otrzymamy:

$$v = g \sin \alpha \,.\, t.$$

W celu obliczenia związku pomiędzy drogą s i czasem t, podstawimy w równanie poprzednie:

$$v = \frac{ds}{dt};$$

a przyjąwszy, dla

$$t = 0: \quad s = 0,$$

napiszemy całkę tego równania:

$$s = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \,.\, t^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \qquad (101)$$

Równania te pozwalają obliczyć prędkość i położenie punktu ruchomego w chwili t. Równanie, wykazujące zależność pomiędzy s i v, obliczymy, gdy z równania prędkości wyrugujemy zmienną t i podstawimy jej wartość w równanie drogi; równanie to jest nasjępujęce:

$$s = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \left(\frac{v}{g \sin \alpha} \right)^2; \quad \text{skąd:} \quad s = \frac{v^2}{2 g \sin \alpha}.$$

Siłę normalną N obliczymy, gdy zrzutujemy równanie dynamiczne na kierunek tejże siły; równanie tych rzutów jest następujące:

$$mg \cos \alpha - N = 0; \quad \text{skąd:} \quad N = mg \cos \alpha.$$

Równanie ruchu danego punktu można również otrzymać bezpośrednio, stosując zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej. W tym celu zróbmy nieskończenie małe przesunięcie ds punktu ruchomego, które jest zgodne z warunkami danego ruchu, rys. 32-gi, a otrzymamy równanie:

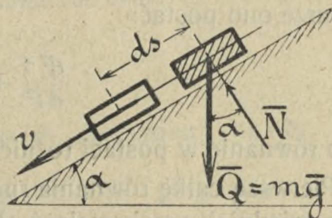
$$mg \sin \alpha \,.\, ds = d \left(\tfrac{1}{2} mv^2 \right);$$

scałkujemy je od 0 do s i od 0 do v, a otrzymamy równanie ruchu w postaci:

$$g \sin \alpha . s = \tfrac{1}{2} v^2,$$

wykazujące zależność pomiędzy położeniem punktu na torze i jego prędkością.

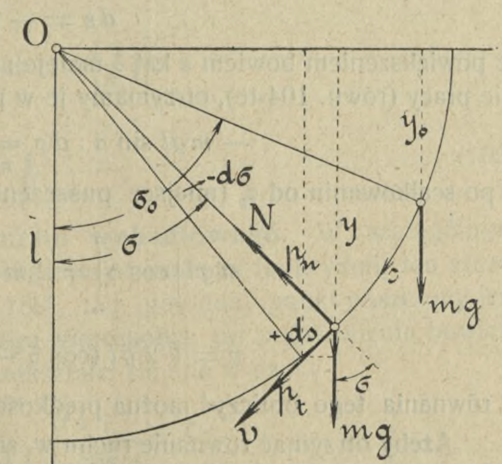
Związek pomiędzy czasem i drogą, lub prędkością i czasem znajdziemy z równania dynamicznego, jakieśmy to uczynili poprzednio; lub też obliczymy go z równania pracy; gdy podstawimy w nie v lub ds z równania: $v = \frac{ds}{dt}$.



Rys. 32.

47. Wahadło matematyczne płaskie. Punkt materyalny pod działaniem swego ciężaru ślizga się bez oporów po obwodzie koła, umieszczonego w płaszczyźnie pionowej. Obliczyć równania ruchu tego punktu i zbadać jego właściwości.

Ruch ten wywołać można jeszcze w inny sposób. Można np. punkt materyalny przyczepić do jednego końca nici nierozciągliwej, której ciężaru i masy nie uwzględniamy, a drugi jej koniec unieruchomić w przestrzeni; odchyliwszy wtedy dany punkt od położenia pionowego i puściwszy go swobodnie, (lub nadawszy mu początkową prędkość w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez punkt zawieszenia), otrzymamy ruch punktu po kole. Możemy również wyobrazić sobie tor w postaci koła materyalnego, po którym ślizga się punkt ruchomy pod działaniem swego ciężaru. W tych obydwóch przypadkach punkt materyalny, wyprowadzony z położenia równowagi, powracać będzie do tegoż położenia z pewną prędkością, która uniesie go, zgodnie z prawem bezwładności, na przeciwną stronę tego położenia; i w ten sposób powstanie ruch punktu, zwany wahadłowym. Położenie punktu na kole określimy kątem σ, jaki tworzy promień wodzący, wyprowadzony ze środka koła, z kierunkiem pionowym, rys. 33-ci.



Rys. 33.

Na punkt dany działa przeto siła ciążenia oraz siła odporowa N, jak w poprzednim przykładzie; siły te wywołują przyśpieszenie p.

Równanie zatem dynamiczne danego ruchu jest następujące:

$$m\overline{g} + \overline{N} = m\overline{p}.$$

W celu obliczenia równań ruchu zrzutujmy to równanie na styczną do toru, siła bowiem normalna, która jest nieznaną, zrzutuje się wtedy jako zero, a otrzymamy równanie, wykazujące związek pomiędzy przyśpieszeniem stycznem p_t i spółrzędną σ; równanie to jest następujące:

$$mg \sin \sigma = mp_t; \text{ lub inaczej: } g \sin \sigma = \frac{dv}{dt} \qquad (102)$$

Gdy podstawimy w to równanie:

$$v = \frac{ds}{dt} = -\frac{l d\sigma}{dt}; \text{ oraz } \frac{dv}{dt} = -l\frac{d^2\sigma}{dt^2};$$

przybierze ono postać:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right) . \sin \sigma = 0 \qquad (103)$$

Jest to równanie w postaci różniczkowej ruchu danego punktu.

Pierwszą całkę równania ruchu można otrzymać z równania powyższego drogą odpowiednich przekształceń algebraicznych; lecz można je również otrzymać, stosując zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej. W tym celu nadajmy danemu punktowi przesunięcie przystosowane ds, rys. 33-ci; a napiszemy równanie pracy:

$$mg \sin \sigma . ds = d\left(\tfrac{1}{2} mv^2\right) \qquad (104)$$

z przyjętego na rys. 33-cim sposobu liczenia kąta σ wynika, że:

$$ds = -l d\sigma;$$

(z powiększeniem bowiem s kąt σ maleje); a po podstawieniu tej wartości w równanie pracy (równ. 104-te), otrzymamy je w postaci:

$$-mgl \sin \sigma . d\sigma = d\left(\tfrac{1}{2} mv^2\right) \qquad (105)$$

a po scałkowaniu od σ_0 (miejsce puszczenia punktu) do σ i od 0 do v, otrzymamy:

$$mgl \Big| \cos \sigma \Big|_{\sigma_0}^{\sigma} = \Big| \tfrac{1}{2} mv^2 \Big|_0^v; \text{ skąd:}$$

$$v = \sqrt{2gl(\cos \sigma - \cos \sigma_0)} \qquad (106)$$

Z równania tego obliczyć można prędkość punktu w każdem jego położeniu σ.

Ażeby otrzymać równanie ruchu w skończonej postaci, podstawimy w równ. 106-te: $v = -l\frac{d\sigma}{dt}$; a po rozwiązaniu jego względem dt, otrzymamy:

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} . \frac{d\sigma}{\sqrt{\cos \sigma - \cos \sigma_0}};$$

skąd wreszcie:

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} . \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{\cos \sigma - \cos \sigma_0}} \qquad (107)$$

Pozostaje obecnie wykonać wskazane w tem równaniu całkowanie. Lecz całka wyrazu po prawej stronie nie daje się wyrazić zwykłemi funkcyami algębraicznemi; stanowi ona bowiem funkcyę t. zw. eliptyczną, której wartość obliczyć można za pomocą rozwinięcia jej w szeregi, lub ze specyalnie, na podstawie tych szeregów, zestawionych tablic w tenże sposób, w jaki znajdujemy wartości funkcyi logarytmicznych lub trygonometrycznych. Całkowanie przeto wzoru powyższego wykonamy z pewnem przybliżeniem; w tym celu przekształcimy daną funkcyę w szereg, i zadowolnimy się tylko pierwszymi wyrazami tego szeregu; przyjmiemy przeto:

$$\cos \sigma_0 = 1 - \tfrac{1}{2}\sigma_0^2; \quad \text{oraz} \quad \cos \sigma = 1 - \tfrac{1}{2}\sigma^2;$$

a po podstawieniu tych wartości w powyższe równanie, otrzymamy:

$$\int_0^t dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}};$$

a po scałkowaniu podług wzoru 32-go, podanego w „Techniku“ na str. 77-ej:

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \left[\arc\sin\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)\right]_{\sigma_0}^{\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

Jest to równanie, wykazujące związek pomiędzy czasem t i położeniem punktu, wyznaczonem przez kąt σ; i jest równaniem ruchu w skończonej postaci, gdy kąt odchylenia jest mały:

Jeżeli oznaczymy literą T okres podwójnego wahnięcia, to czas, potrzebny do przejścia punktu od $\sigma = \sigma_0$ do $\sigma = 0$, jest ćwiercią tego okresu; przeto obliczymy z powyższego wzoru:

$$\tfrac{1}{4} T = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[\arc\sin\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)\right]_{+\sigma_0}^{0};$$

a po wykonaniu działań:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

48. Przypadek szczególny ruchu wahadłowego. W szczególnym przypadku całka równania 107-ego daje się wyrazić znanemi funkcyami; ten szczególny przypadek następuje, gdy $\sigma_0 = 180^0$, t. j. gdy dany punkt puszczony jest z najwyższego miejsca na kole t. j. z jego wierzchołka; po podstawieniu bowiem w równ. 107-me wartości: $\sigma_0 = 180^0$, przekształci się ono w nast.:

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \int \frac{d\sigma}{\sqrt{1 + \cos\sigma}} + C;$$

a po podstawieniu $1 + \cos\sigma = 2\cos^2\frac{\sigma}{2}$, otrzymamy wyraz, którego całkę podaje wzór 62-gi, zamieszczony w „Techniku“ na str. 79. Całka ta jest nast.:

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int \frac{d\frac{\sigma}{2}}{\cos\frac{\sigma}{2}} = -\sqrt{\frac{l}{g}} . \mathrm{lgn}\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{4}\right) + C.$$

Czas w danym razie zaczniemy liczyć od chwili, w której punkt ruchomy znajduje się w miejscu najniższem na kole; a więc gdy $\sigma = 0$; wtedy $t = 0$; a po przedstawieniu tych wartości w równanie powyższe, otrzymamy:

$$0 = -\sqrt{\frac{l}{g}} . \text{lgn}\, tg \frac{\pi}{4} + C; \text{ skąd } C = 0; \text{ a więc:}$$

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} . \text{lgn}\, tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{4}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (110)$$

Ażeby obliczyć np. okres czasu, w jakim punkt dany podniesie się z miejsca najniższego na kole do jego wierzchołka, należy podstawić w równ. powyższe: $\sigma = -\pi$; gdyż w myśl przyjętego w tem rozpatrywaniu zwrotu ruchu, należy wyobrazić sobie, że punkt przebiega po kole ze zwrotem, zgodnym z obrotem wskazówki zegara. Po tem podstawieniu otrzymamy:

$$t = \infty .$$

Wynik ten wytłomaczymy sobie fizycznie w następujący sposób. Punkt dany dobiega do wierzchołka koła z prędkością, zbliżającą się do zera; dla przejścia przeto cząstek łuku koła, znajdujących się w blizkości wierzchołka koła, wymaga bezmiernie długiego okresu czasu, zbliżającego się do ∞. I rzeczywiście np. dla $\sigma = -179^0$; $t \cong 1{,}8 \sqrt{l}$, t. j. posiada jeszcze skończoną wartość.

Wynik rów. 110-go nie jest w zgodzie z równ. 108-em, co jest zupełnie słuszne, gdyż rów. 108-me wyprowadziliśmy, czyniąc założenie, że kąt odchylenia jest bardzo mały, nie może być przeto stosowany do tego wręcz przeciwnego przypadku.

49. Dokładność wzoru przybliżonego. Jaką dokładność posiada wzór przybliżony, nie możebnem jest powiedzieć, dopóki nie znamy wzoru ścisłego; dla praktycznych jednakże celów, należy choć ocenić, w jakich granicach wzór przybliżony wyraża rzeczywistą zależność zmiennych. Ocenę tę uskutecznimy w powyższym przypadku drogą dynamicznych rozważań. W tym celu weźmy pod uwagę równanie pracy, równ. 104-te, które wzięliśmy za podstawę do naszych obliczeń. Wyraz

$$-mgl \sin \sigma . d\sigma,$$

przedstawia pracę cząstkową siły ciążenia wzdłuż przesunięcia $-l . d\sigma$; lecz zamiast tego wyrazu ścisłego przyjęliśmy do rachunku wyraz przybliżony:

$$-mgl\sigma . d\sigma, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (111)$$

zastąpiliśmy bowiem w rów. 107-em cos σ wartością $(1 - \frac{1}{2}\sigma^2)$, co jest równoważne z przyrównaniem sin σ do długości łuku σ. Porównywując te dwa wzory pracy cząstkowej dokładny 105-ty i przybliżony 111-ty, zauważymy, żeśmy zamiast właściwej wartości:

$$mg \sin \sigma,$$

siły, przyśpieszającej dany punkt, przyjęli do rachunku wartość przybliżoną:

$$mg\sigma,$$

która jest większą od poprzedniej; gdyż $\sigma > \sin \sigma$.

Większa siła wywołuje większe przyśpieszenie punktu, lub też inaczej się wyrażając, większa siła podczas przesunięcia punktu materyalnego sprawia większy przyrost jego energii kinetycznej, niż siła mniejsza, podczas tego samego przesunięcia. Prędkości zatem, obliczone z równania, opartego na wartości siły $mg\sigma$, są większe niż w rzeczywistości występują; a różnica ich jest tem większa, o ile σ różni się od sin σ. Zbliżając np. wartości σ do zera, różnica ta zbliża się również do zera; a dla $\sigma = \frac{\pi}{2} = 1.57$; $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, różnica ta jest bardzo znaczna; a więc i okresy wahnięć, obliczone ze wzoru przybliżonego, o wiele różnić się będą od okresów rzeczywistych. Dla $\sigma > \frac{\pi}{2}$, wartość σ rośnie, wartości zaś sin σ maleją, a więc, gdy $\sigma > \frac{\pi}{2}$, zachodzi rozbieżność pomiędzy zmiennością tych wartości, przyjmujemy bowiem w rachunku przybliżonym, że siła przyśpieszająca wzrasta proporcyonalnie do kąta odchylenia, a w rzeczywistości, blizko kąta $\sigma = \frac{\pi}{2}$, pozostaje ona prawie stałą; a dla, $\sigma > \frac{\pi}{2}$ maleje. Największa różnica zachodzi dla $\sigma = \pi$; wtedy bowiem $\sin\sigma = \sin\pi = 0$, a $\sigma = 3{,}14$. Dla odchyleń zatem $\sigma > \frac{\pi}{2}$ wzór przybliżony zupełnie się nie nadaje.

Potwierdzenie, wypowiedzianych wniosków, znajdziemy w następującym zestawieniu liczb, w którem σ_0 oznacza kąt początkowego odchylenia wahadła; F zaś spółczynnik wzoru: $T = F\sqrt{\frac{l}{g}}$, odpowiadający rzeczywistemu wahnięciu wahadła i obliczony ze wzorów ścisłych; a więc dla:

$\sigma_0 =$	0^0	5^0	10^0	20^0	40^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0
$F =$	6,2832	6,2860	6,2952	6,3212	6,4800	6,7432	7,4164	8,6260	11,0724	∞

gdy tymczasem we wzorze przybliżonym:

$$F = 2\pi = 6{,}2832\,,$$

dla wszystkich kątów odchylenia. Widzimy z tego zestawienia, że różnica okresów wahnięć np. dla $\sigma_0 = 40^0$, stanowi 3%; dla 90^0 około 20%, a dla większych kątów odchylenia znacznie rośnie.

50. Dokładniejszy sposób obliczenia ruchu wahadłowego. Przybliżenie, z jakiem chcemy obliczyć szukane wartości, może być dowolne; gdyż zależy ono od ilości wyrazów, jakie weźmiemy do rachunku, przy rozwinięciu funkcyi trygonometrycznej w szereg.

W celu uniknięcia długich szeregów możliwem jest również stosowanie innych skróceń, które prędzej prowadzą do wzorów dosyć dokładnych. Zastosujemy np. skrócenia następujące, z których częściowo korzystaliśmy już w przykładach § 258 i następnych tomu I-go, a mianowicie, gdy ξ jest wielkością mniejszą od jedności, to mamy:

$$(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} = (1+\xi^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\xi^2.$$

Ażeby wyraz pod pierwiastkiem rów. 107-ego sprowadzić do tej postaci, podstawimy w niego $\cos\sigma = 1 - 2\sin^2\frac{\sigma}{2}$; oraz $\cos\sigma_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\sigma_0}{2}$; a otrzymamy:

$$\int\frac{d\sigma}{\sqrt{\cos\sigma - \cos\sigma_0}} = \int\frac{d\sigma}{\sqrt{2\left(\sin^2\frac{\sigma_0}{2} - \sin^2\frac{\sigma}{2}\right)}} = \int\frac{d\sigma}{\sqrt{2}\sin\frac{\sigma_0}{2}.\sqrt{1-\frac{\sin^2\frac{\sigma}{2}}{\sin^2\frac{\sigma_0}{2}}}}.$$

Wprowadzimy następnie nową zmienną ψ, określoną równaniem:

$$\frac{\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)} = \sin\psi,$$

i wyrazimy tę całkę funkcyą tej zmiennej. Ażeby wyrazić $d\sigma$ zmienną ψ, zróżniczkujmy powyższe równanie i otrzymamy:

$$\cos\left(\frac{\sigma}{2}\right).d\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \cos\psi\,.\sin\left(\frac{\sigma_0}{2}\right).d\psi; \text{ skąd:}$$

$$d\sigma = \frac{2\cos\psi\,.\sin\frac{\sigma_0}{2}}{\cos\frac{\sigma}{2}}d\psi;$$

podstawiwszy w nie

$$\cos\frac{\sigma}{2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\sigma}{2}} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\sigma_0^2}{2}.\sin^2\psi};$$

otrzymamy:

$$d\sigma = \frac{2\,.\cos\psi\,.\sin\frac{\sigma_0}{2}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\sigma^0}{2}.\sin^2\psi}}d\psi.$$

Po podstawieniu tych wartości, otrzymamy całkę poprzednią w nast. postaci:

$$\int\frac{2\cos\psi\,.\sin\frac{\sigma_0}{2}\,.\,d\psi}{\sqrt{2}\,.\sin\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{1-\sin^2\psi}\,.\sqrt{1-\sin^2\frac{\sigma_0}{2}.\sin^2\psi}}.$$

Po skróceniu i podstawieniu w równanie 107-me otrzymamy:

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} . \int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\sigma_0}{2} . \sin^2 \psi}} \quad \ldots \ldots \quad (112)$$

Granica $\psi = \frac{\pi}{2}$ odpowiada granicy $\sigma = \sigma_0$; drugą zaś granicą ψ obliczymy z σ, za pośrednictwem równania, określającego zmienną ψ.

Scałkujemy teraz powyższy wyraz sposobem skróconym, stosując wyżej przytoczony wzór, w który podstawimy:

$$\xi^2 = \sin^2 \frac{\sigma_0}{2} . \sin^2 \psi;$$

i otrzymamy:

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} . \int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi} \left(1 + \tfrac{1}{2} \sin^2 \frac{\sigma_0}{2} \sin^2 \psi . d\psi\right) \quad \ldots \quad (113)$$

Całkowanie tego wyrazu może być wykonane podług wzoru 53-go, znajdującego się na str. 79-ej „Technika". W celu obliczenia np. okresu podwójnego wahnięcia scałkujemy je dla ćwierci podwójnego wahnięcia; dla którego granice całkowania są od $\frac{\pi}{2}$ do 0; wartości te bowiem odpowiadają granicom od $\sigma = \sigma_0$ do $\sigma = 0$. Całka wyrazu:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 \psi d\psi = \Big| -\tfrac{1}{4} \sin 2\psi + \tfrac{1}{2} \psi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -\frac{\pi}{4},$$

a po podstawieniu jej w równ. 113-te mamy:

$$\tfrac{1}{4} T = \sqrt{\frac{l}{g}} . \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\sigma_0}{2}\right); \text{ skąd:}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} . \left(1 + \tfrac{1}{4} \sin^2 \frac{\sigma_0}{2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (114)$$

Z tego wzoru wynika, że okres wahnięć zależy od amplitudy σ_0. Dokładność tego wzoru dalej sięga, niż wzoru poprzedniego; nie jest ona jednakże zupełną i np. dla $\sigma_0 = \pi$, wzór ten nie da wartości $T = \infty$; jaką powinien dać wzór dokładny.

Gdy podstawimy jeszcze dla uproszczenia rachunku $\sin \frac{\sigma_0}{2} = \frac{\sigma_0}{2}$; wtedy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} . \left(1 + \frac{\sigma^2_0}{16}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (115)$$

Wartość okresu, obliczona z tego wzoru, jest większą, niż otrzymana ze wzoru 109-ego, co było już przez nas przewidziane.

51. Obliczenia siły odporowej wahadła. W celu obliczenia siły odporowej toru, gdy wyobrażamy sobie ruch punktu po kole materyalnym; lub jak w przykładzie z wahadłem, — naprężenia nici, należy zrzutować równanie dynamiczne tego ruchu możliwie w ten sposób, ażeby dało bezpośrednio związek pomiędzy siłą odporową N i prędkością punktu; — przyjmujemy bowiem, że prędkość ta jest już obliczona z równania pracy. Równanie to otrzymamy, rzutując równanie dynamiczne tego ruchu na normalną do toru, a zważywszy, że $p_n = \frac{v^2}{l}$ otrzymamy:

$$N - mg \cos \sigma = m \frac{v^2}{l}; \text{ skąd:}$$

$$N = mg \cos \sigma + m \frac{v^2}{l} \qquad \text{(116)}$$

Podstawmy w nie z równania pracy:

$$v^2 = 2\,gl\,(\cos \sigma - \cos \sigma_0),$$

a otrzymamy:

$$N = mg\,(3 \cos \sigma - 2 \cos \sigma_0) \qquad \text{(117)}$$

Równanie to daje zależność siły odporowej od położenia wahadła. Szczególne przypadki:

1) Gdy $\sigma_0 = 0$, oraz $\sigma = 0$, t. j. gdy punkt jest zawieszony pionowo, wtedy $N = mg$; naprężenie nici w danym przypadku równa się ciężarowi punktu, jest to przypadek równowagi.

2) Dla $\sigma = \sigma_0$; $N = mg \cos \sigma$; t. j. naprężenie nici w początkowem jego położeniu równa się rzutowi ciężaru punktu na kierunek promienia, co wypada również ze statycznych rozpatrywań.

3) W najwyższem początkowem położeniu punktu t. j. dla $\sigma_0 = 180^0$ i dla $\sigma = 180^0$; $N = -mg$; co się znaczy, że do punktu, znajdującego się na wierzchołku koła, należy przyłożyć siłę, skierowaną po promieniu na zewnątrz koła; dodatny bowiem zwrot siły N przyjęliśmy w danem rachunku ku środkowi koła. W modelu więc fizycznym, przedstawiającym ten ruch, zamiast nici powinniśmy w danym razie zastosować pręt sztywny; siła ciśnienia pręta równa się w tym przypadku ciężarowi danego punktu. Przytoczone trzy przypadki są zgodne z twierdzeniami statyki.

4) N będzie największe dla danego odchylenia σ_0, gdy $\cos \sigma$ będzie największe, co nastąpi dla $\sigma = 0$; t. j. największe naprężenie dodatne, przy dowolnem pierwotnem odchyleniu, następuje zawsze w najniższem położeniu punktu.

5) Bezwzględnie największą dodatną wartość otrzyma N, gdy $\cos \sigma = + \max$; a $\cos \sigma_0 = - \max$. Przypadek ten nastąpi, gdy $\sigma = 0$; a $\sigma_0 = 180$; t. j. bezwzględnie największe naprężenie nici następuje w położeniu pionowem, gdy punkt

rozpoczął swój ruch z wierzchołka koła. Wartość ta równa się 5 . mg; naprężenie więc nici w tych warunkach jest pięć razy większe od ciężaru punktu.

6) Ponieważ naprężenie wahadła, gdy punkt znajduje się na wierzchołku koła, jest odjemne, gdy zaś spadnie na spód koła jest dodatne; przeto istnieć powinno miejsce, w którem $N = 0$. Oznaczymy to miejsce literą σ'; a obliczymy je z rów. 117-tego, gdy podstawimy w nie $N = 0$ oraz $\sigma_0 = 180^0$; a zatem mamy:

$$3 \cos \sigma' + 2 = 0; \text{ skąd: } \cos \sigma' = -\tfrac{2}{3}; \text{ a } \sigma' \cong 180^0 - 48^0 \cong 132^0.$$

Punkt więc, spadający z wierzchołka koła, wywołuje w położeniu $\sigma < 132^0$ siłę odporową, zwróconą ku środkowi koła; powyżej zaś tego miejsca wywołuje siłę odporową, zwróconą na zewnątrz koła.

52. Bezpośredni sposób przybliżonego obliczenia ruchu wahadłowego. Przybliżone obliczenie ruchu wahadłowego, przeprowadzone w § 47-ym, może być bezpośrednio zastosowane przy zestawieniu równania dynamicznego.

Przyjąwszy bowiem, że długość l jest dosyć wielką w porównaniu z kątem odchylenia σ_0, przyjąć możemy z pewnem przybliżeniem, że cząstka łuku, jaką zakreśla punkt, zlewa się ze styczną do tego łuku; t. j., przyjmiemy, że punkt przebiega po prostej x, rys. 33-ci. Siła przyśpieszająca punkt jest $Q \sin \sigma$; lub inaczej, po podstawieniu $\sin \sigma = \frac{x}{l}$, siła przyśpieszająca $= Q\frac{x}{l}$; równanie przeto dynamiczne ruchu jest nast:

$$-Q\frac{x}{l} = m\frac{dv}{dt},$$

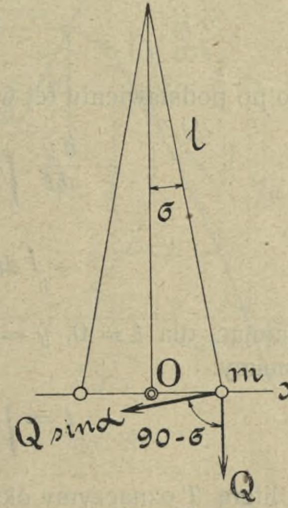
z którego, po podstawieniu $Q = mg$; i po skróceniu przez m, otrzymamy:

$$-x = \frac{l}{g} \cdot \frac{dv}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

Równanie to pod względem algebraicznym jest jednakowe z rów. 21-em:

$$-x = \frac{m}{k}\frac{dv}{dt},$$

wyprowadzonem w § 8-ym, gdy podstawimy w nie $\frac{m}{k} = \frac{l}{g}$. Możemy przeto uniknąć całkowania tego równania, skorzystawszy bezpośrednio z wyników, poprzednio otrzymanych. Wzór np. podwójnego wahnięcia danego wahadła obliczymy z równ. 28-go:

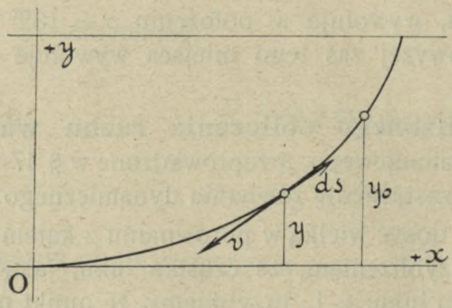


Rys. 33.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

53. Ruch punktu po cykloidzie pospolitej. W ruchu wahadłowym, któryśmy opisali w poprzednim przykładzie, punkt materyalny zmuszony był przebiegać po kole, lecz może on również poruszać się po dowolnej krzywej; a metoda wyżej stosowana da się również zastosować do wszelkich przypadków ruchu po torze.

Przyjmijmy, że tor, po którym porusza się punkt materyalny pod działaniem siły ciążenia, jest cykloidą pospolitą, rys. 34-ty, i zestawmy równania ruchu tego punktu.



Rys. 34.

Do rozwiązania tego zadania zastosujemy równanie pracy i napiszemy bezpośrednio:

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)};$$

przyjmując, że punkt przesuwa się z miejsca, wyznaczonego przez spółrzędną y_0, do położenia y; rys. 34-ty.

Znajdźmy teraz równanie ruchu, wyrażające związek pomiędzy położeniem punktu a czasem; w tym celu podstawimy $v = -\frac{ds}{dt}$; a ponieważ z geometrycznych właściwości cykloidy wynika, że:

$$ds = \sqrt{\frac{2r}{y}} \,.\, dy;$$

przeto po podstawieniu tej wartości w równanie prędkości, otrzymamy:

$$-\frac{dy}{dt} \cdot \sqrt{\frac{2r}{y}} = \sqrt{2g(y_0 - y)}, \text{ skąd:}$$

$$-\int_0^t dt = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y_0 y - y^2}}.$$

Przyjmując, dla $t = 0$, $y = y_0$ i całkując (Techn. tom I, str. 77, wzór 34), otrzymamy:

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \left[\arc\sin\left(\frac{y_0 - 2y}{y_0}\right)\right]_{y_0}^{y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (119)$$

Jeżeli literą T oznaczymy okres podwójnego wahnięcia, to okres przejścia punktu z $y = y_0$, do $y = 0$, jest $\frac{1}{4}\,T$; a więc:

$$\tfrac{1}{4}\,T = \sqrt{\frac{r}{g}} \left[\arc\sin \frac{y_0 - 2y}{y_0}\right]_{y_0}^{0};$$

a po podstawieniu:

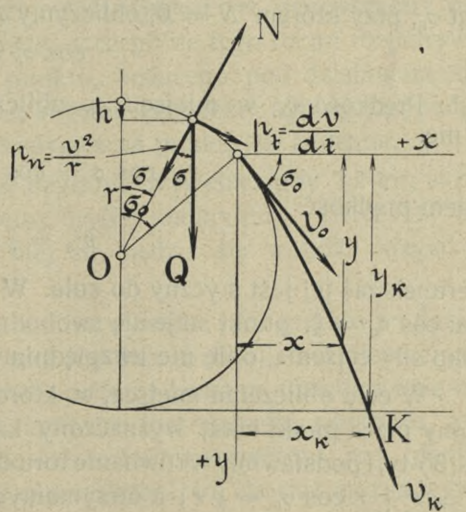
$$\tfrac{1}{4}\,T = \sqrt{\frac{r}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \pi \sqrt{\frac{r}{g}};$$

i wreszcie:

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\,; \text{ lub inaczej: } T = 2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (120)$$

Ze wzoru tego wynika, że okres wahnięcia nie zależy od y_0, t. j. nie zależy od początkowego położenia punktu materyalnego. Gdy więc puścimy punkt materyalny z jakiegobądź miejsca cykloidy, okresy jego wachnięć będą jednakowe; ruch przeto wahadła cykloidalnego jest izochroniczny. Wynik ten możemy sobie w następujący sposób wytłomaczyć fizycznie. Gdy punkt dany opuścimy z wyższego miejsca cykloidy, wtedy spada on po torze więcej spadzistym, wskutek czego nabiera odrazu znacznej prędkości; gdy tymczasem puszczony z miejsca niżej położonego, w którem nachylenie toru jest więcej zbliżone do poziomu, poruszać się będzie wolniej. Punkt dany przebywa przeto dłuższą drogę z większą prędkością, drogę zaś krótszą z mniejszą prędkością w ten sposób, że okresy czasu, w jakich on przebywa te drogi, są wzajemnie równe. Izochronizm w danym razie jest przeto wynikiem postaci danego toru. Chcąc wyrazić tę właściwość, nazwano cykloidę tautochroną czyli krzywą jednakowych okresów czasu.

54. Spadanie punktu ciężkiego po kole. Na wierzchołku obwodu koła o promieniu r, ustawionego pionowo, rys. 35-ty, umieszczono punkt materyalny o ciężarze Q, który pod działaniem swego ciężaru zsuwa się bez tarcia po obwodzie tego koła. Wyznaczyć miejsce, w którem dany punkt opuści obwód koła; i wyznaczyć miejsce, w którem spadnie on na poziom, na którym stoi koło; oraz obliczyć prędkość, jaką on posiada w tem miejscu.



Rys. 35.

Przyjmujemy, że dany punkt wyprowadzony jest przez małe odchylenie ze stanu równowagi niestałej, w jakiej się znajduje na wierzchołku koła; po tem odchyleniu następuje ruch, wywołany siłą ciążenia. Punkt dany opuści obwód koła w tem miejscu, w którem siła odporowa równa się zeru i zmienia swój znak. Określmy dowolne położenie punktu na kole przez kąt środkowy σ, rys. 35-ty, i oznaczmy literą $+N$ siłę odporową, skierowaną na zewnątrz koła; w miejscu zatem, w którem punkt ruchomy opuści obwód koła, siła ta będzie: $N = 0$, a przy dalszym ruchu zmieni swój znak. Zadanie więc polega na wyrażeniu siły N funkcyą spółrzędnej σ; a po przyrównaniu tej wartości do zera, otrzymamy równanie, z którego obliczymy szukany kąt, t. j., obliczymy spółrzędną σ_0 położenia, w którem punkt opuści obwód koła.

Na punkt dany działają siły $\overline{N}$ i $\overline{Q}$, które wywołują przyśpieszenie $\overline{p}$, mamy zatem równanie dynamiczne:

$$\overline{N} + \overline{Q} = m\overline{p}.$$

Równanie szukane otrzymamy, rzutując to równanie na promień koła, zatem:

$$N - Q \cos \sigma = m \frac{v^2}{r}.$$

W równaniu tem prędkość należy wyrazić spółrzędną σ i w tym celu zrzutujmy równanie dynamiczne na styczną, a otrzymamy szukany związek pomiędzy v i σ; lub zamiast tego równania napiszemy odrazu jego całką w postaci równania pracy.

$$Qh = \tfrac{1}{2} mv^2.$$

Podstawiwszy w nie:

$$h = r(1 - \cos \sigma);\ Q = mg,$$

otrzymamy:

$$v^2 = 2gr(1 - \cos \sigma), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (121)$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie, otrzymamy:

$$N = Q(3 \cos \sigma - 2).$$

Kąt σ_0, przy którem $N = 0$, obliczymy z nast. równ.:

$$\cos \sigma_0 = \tfrac{2}{3}.$$

Prędkość v_0 w miejscu σ_0 obliczymy z równania 121-ego, podstawiwszy w nie:

$$\cos \sigma = \cos \sigma_0 = \tfrac{2}{3};$$

zatem prędkość:

$$v^2_0 = \tfrac{2}{3} gr;$$

kierunek zaś jej jest styczny do koła. W miejscu, wyznaczonem kątem σ_0, z równania: $\cos \sigma_0 = \frac{2}{3}$, punkt staje się swobodny, posiada prędkość v_0 i podlega działaniu tylko siły ciążenia, o ile nie uwzględnimy oporu powietrza.

W celu obliczenia miejsca, w którem punkt upadnie na poziom, przeprowadzimy przez punkt koła, wyznaczony kątem σ_0, dwie wzajemnie prostopadłe osi, rys. 35-ty, i podstawimy w równanie toru danego punktu, wyprowadzone na str. 44-tej, $y_k = r + r \cos \sigma_0 = \frac{5}{3} r$; a otrzymamy:

$$x_k = (10 - \sqrt{10}) \tfrac{2}{27} r \sqrt{2} \cong 0{,}716\ r.$$

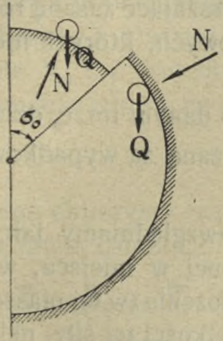
Wartość prędkości w miejscu K obliczymy z równania pracy podstawiwszy, $h = 2r$:

$$v_k = \sqrt{2gh} = 2\sqrt{gr}.$$

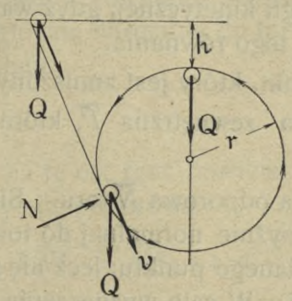
Jeżeli zaś punkt ma nie spaść z obwodu koła, należy zbudować je w sposób, wskazany na rys. 36-ym.

55. Zadanie. Punkt materyalny pod działaniem siły ciążenia spada z pewnej wysokości po torze prostym, do którego przytyka się koło w ten sposób, że tworzy ono przedłużenie tego toru, rys. 37-my. Obliczyć wzniesienie h ponad wierzchołkiem koła, z którego puszczony punkt nie spadnie z koła; nie uwzględniając tarcia i innych oporów, jakie powstają podczas ruchu.

W celu rozwiązania tego zadania postępujemy w tym przypadku, jak poprzednio; obliczymy siłę odporową N; wyznaczymy następnie miejsce na torze, w którem $N = 0$; i z tego równania obliczymy niewiadomą h. Odpowiedź: $h = \frac{1}{2} r$.



Rys. 36.



Rys. 37.

56. Ogólne rozpatrywanie ruchu punktu, będącego pod działaniem sił zewnętrznych, po danym torze krzywolinijnym w przestrzeni bez uwzględnienia sił oporowych. Przypadki szczególne tego ruchu rozpatrywaliśmy już w §§ poprzednich, badając ruch punktu, będącego pod działaniem siły ciążenia, po prostej, po kole i po cykloidzie; obecnie weźmiemy ogólny przypadek, gdy tor jest krzywy w przestrzeni, a siła, działająca na punkt, jest zmienna.

Ruch punktu po danym torze możemy fizycznie wywołać, gdy na tor, w postaci np. drutu bardzo gładkiego, nawleczemy bryłkę materyalną. Bryłka ta bowiem, pod działaniem przyłożonych do niej sił, będzie się wogóle ślizgać po drucie.

Jeżeli dany tor jest płaski, to można również wywołać ruch punktu po danym torze, gdy umocujemy ten punkt do końca nici zupełnie giętkiej, lecz nierozciągliwej i nić nawiniemy na ewolutę danej krzywej; podczas bowiem rozwijania się nici punkt zakreśli dany tor. Przykładem tego sposobu jest wahadło pospolite, którego ewolutą jest punkt; lub wahadło cykloidalne, którego ewolutą jest również cykloida. Jeżeli zaś tor jest krzywolinijny w przestrzeni, to, chociaż można wywołać ruch punktu po tym torze również za pomocą odwijania nici, sposób ten jednakże jest złożony. Zresztą, sposobów fizycznych, wywołujących ruch punktu po danym torze, może być bardzo wiele. Wogóle zaś uwidocznimy sobie ruch punktu po danym torze, ślizganiem się bryłki materyalnej, nawleczonej na odpowiednio wygięty drut.

Pod względem kinematycznym, ruch punktu po danym torze, posiada jeden stopień swobody; porów.: tom I-y § 58 i § 226; z trzech bowiem stopni swobody, jakie posiada każdy punkt swobodny, odejmujemy mu, dając tor, po którym on ma się poruszać,—dwa stopnie swobody. Jedna przeto spółrzędna t. j. jedna niezależna zmienna wyznacza położenie punktu na torze; a zatem droga, prędkość i przyśpieszenie danego punktu, oraz siła odporowa toru są funkcyami jednej tylko niezależnej zmiennej. Jaką wielkość obierzemy za tę niezależną zmienną, zależy od zadania i wybór ten jest w zasadzie obojętnym; udatny jednakże jej wybór wpływa znacznie na uproszczenie i przejrzystość rachunku; na co należy zwrócić uwagę.

Jeżeli mamy w zadaniu wyznaczyć tylko ruch punktu, t. j. np. mamy obliczyć prędkość w funkcyi spółrzędnej, to do obliczenia tego ruchu wystarcza jedno tylko równanie; a tym równaniem może być równanie, wyrażające zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej; gdyż wartości sił odporowych, których nie znamy, nie wchodzą do tego równania.

Na punkt, który jest zmuszony poruszać się po danym torze, działa:

1) siła zewnętrzna $\overline{P}$, która może być uważaną za wypadkową wielu sił: $\overline{P} = \Sigma \overline{P}_k$.

2) siła odporowa $\overline{N}$ toru. Siła ta, o ile nie uwzględniamy tarcia, znajduje się w płaszczyźnie normalnej do toru, przeprowadzonej w miejscu, w którem badamy ruch danego punktu; lecz nie znamy ani jej położenia (w tej płaszczyźnie), ani jej wielkości. W celu wyznaczenia położenia i wielkości tej siły, należy obliczyć np. dwa jej rzuty na osi spółrzędnych; które obierzemy w płaszczyźnie normalnej. W układzie zatem równań algebraicznych siła ta wyraża się dwiema niewiadomemi wielkościami. Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące:

$$\overline{P} + \overline{N} = m\overline{\dot{p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (122)$$

Równanie to wektorowe, przekształcimy na algebraiczne, gdy zrzutujemy je na trzy dowolne osi; otrzymamy wtedy trzy równania algebraiczne, z których obliczyć można trzy niewiadome: prędkość i dwa rzuty siły odporowej; wyraziwszy je funkcyą obranej spółrzędnej niezależnej. Osi te, dla uproszczenia rachunku, obierzemy w sposób następujący:

jedną obierzemy po stycznej do toru, ze zwrotem dodatnym, zgodnym z ruchem punktu; oś tę oznaczymy literą t;

drugą,—którą oznaczymy literą n, obierzemy po głównej normalnej do toru z dodatnym zwrotem ku środkowi koła krzywości; i

trzecią b (binormalną) obierzemy prostopadle do płaszczyzny dwóch poprzednich osi, t. j. prostopadle do płaszczyzny ściśle stycznej, w której leżą poprzednie dwie osi. Rzuty wektorów powyższego równania dynamicznego na te osi dają następujące trzy równania:

1) równanie rzutów sił na styczną:

$$P_t = m\frac{dv}{dt}.$$

Równanie to zastąpić można pierwszą jego całką, wyrażającą równowartość pracy i energii kinetycznej; a zatem zastąpimy je równaniem:

$$P_t \cdot ds = d(\tfrac{1}{2}mv^2),$$

w którem ds oznacza cząstkę toru. Równanie to, gdy siły posiadają funkcyę sił, scałkujemy i wyrazimy prędkość funkcyą obranej spółrzędnej.

2) Równanie rzutów na normalną główną n, ma postać:

$$P_n + N_n = mp_n;$$

w równaniu tem zgodnie ze wzorem 34-tym tomu I-go: $p_n = \frac{v^2}{\rho}$; a ponieważ prędkość v obliczyliśmy już z poprzedniego równania, zaś ρ jest promieniem krzywości, który może być obliczony z równania danego toru, przeto w równaniu tem jest tylko jedna niewiadoma N_n, t. j. rzut siły odporowej na główną normalną do toru.

3) Równanie rzutów na oś b jest następujące:

$$P_b + N_b = 0;$$

z równania tego obliczymy rzut siły odporowej na tę oś; rzut bowiem P_b jest znany. Z dwóch zatem ostatnich rownań obliczymy siłę odporową:

$$\overline{N} = \overline{N}_n + \overline{N}_b;\ \text{lub inaczej: } N = \sqrt{N^2_n + N_b^2};\ \text{i t. d.}$$

W szczególnym przypadku, jeżeli tor jest płaski i siły leżą w jego płaszczyźnie, jak to było w przykładach np. z wahadłem kołowem i cykloidalnem, $P_b = 0$, a więc i $N_b = 0$; a siła odporowa, którą oznaczyliśmy, w tym przypadku, literą N:

$$N = m\frac{v^2}{\rho} - P_n.$$

57. Ruch punktu po danym torze z tarciem. Wielkość siły tarcia w następujących rachunkach przyjmujemy równą iloczynowi z siły normalnej do toru i spółczynnika tarcia, właściwego trącym się ciałom. Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące:

$$\overline{P} + \overline{N} + \overline{W} = m\overline{p},$$

w którem siła $W = \mu N$; a μ oznacza spółczynniki tarcia; siła ta jest styczną do toru ze zwrotem przeciwnym zwrotowi prędkości punktu poruszającego się. Zrzutujmy to równanie wektorowe na osi, przyjęte w § poprzednim, a otrzymamy równania:

1) $P_t - \mu N = m\frac{dv}{dt}$; lub w postaci równania pracy:

$$(P_t - \mu N)\, ds = d(\tfrac{1}{2}\, mv^2);\ \text{następnie:}$$

2) $P_n + N_n = m\frac{v^2}{\rho}$;

3) $P_b + N_b = 0$.

Przy obliczeniu tarcia należy wziąć pod uwagę, że: $N = \sqrt{N^2_n + N^2_b}$.

Równania te różnią się od poprzednich tem, że w równanie pracy, któreśmy napisali zamiast rzutów sił na styczną, wchodzi obecnie wielkość siły odporowej.

Ogólna jednakże ilość równań oraz niewiadomych nie zmieniła się; jedynie rachunek nie jest tak prosty, jak poprzednio, wskutek tego, że wielkości rzutów niewiadomej siły N wchodzą we wszystkie trzy równania.

Dla wahadła naprz. płaskiego, dla którego $N_b = P_b = 0$, otrzymamy następujące równania dynamiczne:

1) $\quad - mgl \sin \sigma \, d\sigma - \mu N l \, d\sigma = d(\tfrac{1}{2} mv^2)$; oraz:

2) $\quad N - mg \cos \sigma = \dfrac{mv^2}{l}$.

Są to dwa równania z dwiema niewiadomymi N i v; które wyrazić można funkcyą spółrzędnej σ. Po wyrugowaniu np. wartości N z drugiego równania i po podstawieniu jej do pierwszego, otrzymamy równanie:

$$- mgl \sin \sigma \, . \, d\sigma - \mu \left(\frac{mv^2}{l} + mg \cos \sigma\right) l \, d\sigma = d(\tfrac{1}{2} mv^2);$$

a po jego scałkowaniu otrzymamy szukaną zależność pomiędzy v i σ. Całkowanie tego równania można wykonać; po zastosowaniu pewnych podstawień. Przeprowadzenie tego rachunku, które tu pominę, znajdzie czytelnik między innemi w „Mechanice“ Autenritt'a [1]).

Jeżeli siła P nie leży w płaszczyźnie ściśle stycznej do toru, jak w powyższym przykładzie; to składowa N_b posiada pewną skończoną wartość; a siła odporowa

$$N = \sqrt{N^2_n + N^2_n}.$$

Wyraz ten wchodzi do równania dynamicznego i doprowadza wogóle całkę jego do funkcyi eliptycznej, której analiza jest nadzwyczaj zawiłą i przytem mało znaną.

Wobec tego uprościmy równanie różniczkowe, gdy zastąpimy wyraz

$$\sqrt{N^2_n + N^2_b} \text{ wyrazem } \alpha N_n + \beta N_b,$$

którego liczbowa wartość niewiele różni się od wartości wyrazu ścisłego. Można dowieść, lub sprawdzić drogą prób, że jeżeli:

$$\alpha = 0{,}961, \text{ oraz } \beta = 0{,}398;$$

to największa różnica pomiędzy wartością ścisłą a przybliżoną nieprzekracza 4%; a zważywszy jeszcze, że wartość ta w równaniu dynamicznem jest pomnożoną przez spółczynnik tarcia, który w ogóle jest < 1, a w mechanizmach udoskonalonych bywa doprowadzony do bardzo małego ułamka, możemy stosować wyraz przybliżony bez obawy uczynienia jakiejś dostrzegalnej niedokładności.

Przybliżone wzory tego rodzaju podaje „Technik“ na str. 45-tej pod № 16 17, 18-tym, z których można korzystać i w innych tego rodzaju przypadkach.

---

[1]) W polskiem tłomaczeniu inż. St. Patschkego, str. 324.

W razie ruchu punktu po torze z oporem, przyporcyonalnym do wartości pewnej funkcyi z prędkości, postępowanie rachunkowe, wyżej wyłożone, się nie zmieni, przybędzie tylko w równaniu pracy cząstkowej jeden wyraz siły, przedstawiony funkcyą prędkości; lecz to nie zmieni ogólnej postaci równania różniczkowego; zmieni tylko sposób jego całkowania.

D. Ruch punktu materyalnego po danej powierzchni.

58. **Ruch punktu po powierzchni bez oporów.** Punkt materyalny, poruszający się po danej powierzchni, posiada dwa stopnie swobody; dwiema zatem spółrzędnemi niezależnemi wyrazimy ruch punktu oraz siły odporowe powierzchni. Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące:

$$\overline{P} + \overline{N} = m\overline{p}.$$

Siła odporowa N, wobec gładkości powierzchni, jest normalną do niej; kierunek jej jest więc znany; nieznaną jest tylko jej wielkość; siła ta przedstawia przeto jedną algebraiczną niewiadomą. Ponieważ tor, jest nieznany co do swej postaci, przeto i przyśpieszenie punktu podczas ruchu jest nam nieznane ani co do kierunku, ani co do wielkości. Przyśpieszenie to przedstawia jednakże tylko pozornie trzy algebraiczne niewiadome; jest ono bowiem uwarunkowane postacią powierzchni, po której punkt się porusza; a warunek ten wyrazimy równaniem powierzchni. Mamy przeto w danem zadaniu cztery niewiadome, a dla ich wyliczenia jedno równanie dynamiczne w postaci wektorowej, oraz jedno równanie algebraiczne, określające daną powierzchnię. W celu obliczenia tych niewiadomych, stosujemy wogóle metodę rzutów na trzy osi prostokątne x, y, z; dowolnie obrane w przestrzeni. Rzuty wektorów równania dynamicznego na te osi dają następujące trzy równania:

1) $P_x + N_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$;

2) $P_y + N_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$;

3) $P_z + N_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2}$;

Równanie zaś powierzchni jest następujące:

4) $f(x, y, z) = 0$.

Są to cztery wyżej omówione równania. Ponieważ jednakże jedną niewiadomą N wyraziliśmy, ze względów rachunkowych, trzema jej rzutami, przeto należy jeszcze wprowadzić do rachunku warunek, że siła N jest prostopadłą do powierzchni; warunek ten wyrazimy dwoma następującemi równaniami:

5) $N_x : N_y = \dfrac{df}{dx} : \dfrac{df}{dy}$;

6) $N_y : N_z = \dfrac{df}{dy} : \dfrac{df}{dz}$.

Mamy zatem sześć równań, z których obliczymy sześć niewiadomych: x, y, z, N_x, N_y, N_z w funkcyi czasu t;—jest to ogólne postępowanie.

Lecz takie postępowanie rachunkowe, aczkolwiek zupełnie ściśle, prowadzi do wzorów dosyć zawiłych i daje najczęściej wyniki mało przejrzyste; w celu zatem ułatwienia rozpatrywań tego ruchu, należy korzystać ze szczególnych właściwości danych powierzchni w ten sposób, ażeby módz bezpośrednio zastosować twierdzenie pracy, oraz momentów ilości ruchu, które są pierwszemi całkami powyższych równań dynamicznych; postępowanie takie w wielu szczególnych przypadkach prowadzi wprost do celu.

Równanie pracy daje bezpośrednio zależność pomiędzy spółrzędnemi punktu ruchomego i jego prędkością. Równanie to łącznie z równaniem momentu ilości ruchu pozwala w wielu przypadkach obliczyć tor i ruch po nim. Lecz wogóle w równanie momentów ilości ruchu wchodzi wielkość siły odporowej, która jest nieznaną; równanie to nie wystarcza przeto do obliczenia ruchu i należy zastosować jeszcze inne równania dynamiczne.

Dla pewnych jednakże szczególnych powierzchni moment sił odporowych, czy to względem odpowiednio obranego bieguna, czy też względem takiejże osi równa się zeru; a wtedy równanie momentu ilości ruchu będzie drugiem równaniem, wykazującem zależność pomiędzy spółrzędnemi punktu i prędkością jego, lub inaczej się wyrażając, pomiędzy spółrzędnemi i czasem. Takiemi powierzchniami są powierzchnie obrotowe; ich bowiem normalne przecinają oś obrotu; momenty przeto sił odporowych względem tej osi równają się zeru.

59. Ruch punktu materyalnego po powierzchni walca prostego o podstawie kołowej. Weźmy naprzód przypadek, w którym na dany punkt, posiadający początkową prędkość $\overline{v}_0$, styczną do powierzchni walca, nie działa żadna siła zewnętrzna (a więc również i siła ciążenia). Jeśliby punkt był swobodny, poruszałby się po linii prostej ruchem jednostajnym; w danym zaś przypadku, wskutek sił odporowych walca, zakreśli on z pewną prędkością pewien tor, leżący na powierzchni walca. Postać tego toru, oraz prędkości punktu odczytamy, z równania pracy i momentu ilości ruchu. Na dany punkt działa przeto tylko siła odporowa, której praca podczas przystosowanego przesunięcia punktu, $= 0$, a zatem równanie pracy jest następujące:

$$1) \quad 0 = \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 ,$$

z którego wynika, że $v = v_0$ t. j, że punkt ruchomy przebiega po danym walcu z prędkością stałą pod względem algebraicznym, i równą prędkości początkowej.

Równania momentu ilości ruchu zestawimy względem osi walca; momenty bowiem sił odporowych, względem tej osi, równają się zeru. W tym celu, zgodnie z określeniem momentu względem osi, zrzutujmy siły i prędkości na płaszczyznę prostopadłą do osi; a odznaczywszy te rzuty kreskami, otrzymamy równanie:

$$2) \quad 0 = \frac{d M_{v,z}}{dt}; \text{ lub inaczej: } m v' r - m v_0' r = 0,$$

z którego wynika, że rzuty właściwych prędkości na płaszczyznę, prostopadłą do osi, są stałe. Z tych właściwości wynika, że tor jest linią śrubową o stałem podniesieniu.

Przyjmijmy następnie, że na punkt, któremu udzielono prędkości początkowej v_0, działa siła ciążenia $m\overline{g}$, a walec jest ustawiony pionowo.

W celu zestawienia równania pracy, oznaczymy odległość pionową punktu ruchomego od położenia początkowego przez z, a napiszemy to równanie w następującej postaci:

$$1) \quad mgz = \tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2.$$

Równanie zaś momentu ilości ruchu względem osi obrotowej jest następujące:

$$2) \quad O = mv'r - mv'r = 0, \text{ skąd: } v' = v_0'.$$

Z równania tego wynika, że rzuty prędkości właściwej na płaszczyznę poziomą są niezmienne (jak poprzednio); lecz z równania pracy odczytamy, że prędkość właściwa jest zmienną i powiększa się z rosnącą wartością spółrzędnej z; z tych właściwości wynika, że kierunek prędkości punktu po powierzchni walca z biegiem czasu zbliża się do **kierunku pionowego.**

W celu wyznaczenia toru tego ruchu, rozwińmy powierzchnię walca na płaszczyznę, a wektory wszystkich prędkości znajdą się na tej płaszczyźnie i będą stycznemi do krzywej, powstałej z rozwiniętego toru. Z powyższego stosunku rzutu prędkości do prędkości właściwej obliczyć można, że rozwinięcie toru jest parabolą. Parabola zatem z osią pionową, której płaszczyznę nawiniemy na walec, przedstawia tor punktu materyalnego, posuwającego się z prędkością początkową pod działaniem siły ciążenia po powierzchni gładkiej walca pionowego o podstawie kołowej.

60. Ruch punktu po powierzchni kuli. Ruch punktu po powierzchni kuli wywołać można, puściwszy punkt materyalny z pewną prędkością zewnątrz względnie wewnątrz powierzchni kuli; punkt ten zakreśli na tej pdwierzchni pewien tor. Ruch taki wywołać również można, nadawszy punktowi materyalnemu wahadła pospolitego, § 47-my, pewną dowolnie skierowaną w przestrzeni prędkość; a punkt ten zakreśli w przestrzeni tor, który leży na powierzchni kuli o promieniu równym długości nici; w ten sposób puszczone wahadło nazywają wahadłem kulistem.

Zadanie polega na wyznaczeniu toru, ruchu po nim i wielkości siły odporowej, jaką on wywoła podczas tego ruchu. Weźmy najpierw pod uwagę przypadek, gdy punkt ruchomy o masie m porusza się po powierzchni danej kuli **bez działania sił zewnętrznych**, a więc również bez udziału sił ciążenia; i porusza się jedynie skutniem nadanej mu prędkości początkowej. Gdyby ten punkt był swobodny, zakreśliłby on ruchem jednostajnym tor prostolinijny. W danym zaś razie wskutek sił odporowych wykona on inny ruch, który obliczymy z równań dynamicznych.

Praca sił podczas przesunięcia cząstkowego punktu po powierzchni kuli, równa się w danym razie zeru. Energia kinetyczna punktu pozostaje zatem podczas tego ruchu niezmieniona, t. j. punkt ruchomy zakreśla ruchem jednostajnym na powierzchni kuli pewien tor dotychczas nieznany.

W celu wyznaczenia postaci toru zastosujemy zasadę momentu ilości ruchu, i otrzymamy drugie równanie dynamiczne ruchu. Siłą działającą na punkt ruchomy jest wobec założeń powyższych tylko siła odporowa powierzchni kuli; a ponieważ moment jej względem środka kuli równa się zeru, przeto mamy równanie momentu ilości ruchu względem bieguna obranego w środku kuli:

$$\frac{d\overline{M}_v}{dt} = 0,$$

t. j. wektor momentu ilości ruchu jest stały co do kierunku, wielkości i zwrotu; z czego wynika, że ruch punktu po kuli, bez udziału sił zewnętrznych, odbywa się w płaszczyźnie nieruchomej, wyznaczonej przez kierunek prędkości początkowej punktu i przez środek kuli; ruch zatem danego punktu w tych warunkach jest ruchem jednostajnym po wielkiem kole, wyznaczonem przez początkowe położenie punktu i przez kierunek początkowej jego prędkości.

Ponieważ promień krzywości tego toru jest stały równa się bowiem promieniowi kuli r, przeto siła odporowa N, jako siła dośrodkowa:

$$N = m\frac{v^2}{r};$$

jest jednakową we wszystkich położeniach punktu. Rozwiązanie przeto danego zadania jest skończone.

Rozpatrzmy teraz ruch rzutu tego punktu na jakąkolwiek płaszczyznę. Oznaczmy w tym celu literą N' rzut siły odporowej na tę płaszczyznę; literą h odległość punktu od średnicy prostopadłej do płaszczyzny rzutów; a napiszemy związek:

$$N' = N\frac{h}{r},$$

w którym tylko wielkość h jest zmienną.

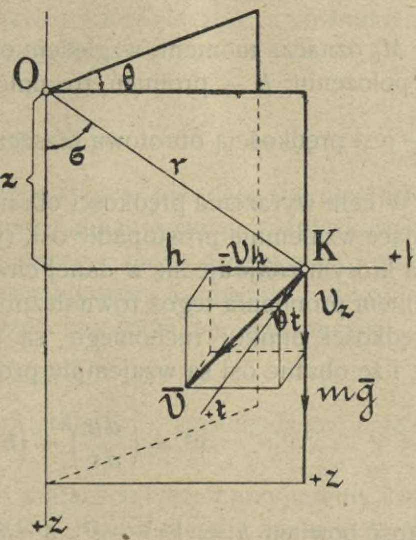
Ponieważ rzut siły jest siłą, wywołującą ruch punktu A', będącego rzutem punktu właściwego, przeto wyobrazić sobie możemy, że punkt A' wykonywa ruch pod działaniem sił N', zbiegających się w jednym środku, który jest rzutem środka kuli na obraną płaszczyznę, – i zwróconych ku temu środkowi. Siły te są proporcyonalne do odległości h od tego środka, mogą być więc uważane jako siły, przyciągające proporcyonalnie do odległości od danego środka. Tor punktu A' jest rzutem toru właściwego punktu; a więc jest elipsą; z tego wnioskujemy, że torem punktu, będącego pod działaniem sił środkowych, przyciągających proporcyonalnie do odległości, jest wogóle elipsa; cośmy już obliczyli bezpośrednio w § 19-tym.

Inny, rozumie się, będzie ruch punktu po kuli, gdy działać będzie na niego pewna siła zewnętrzna; taką siłą w następnych rozpatrywaniach niech będzie siła ciężkości punktu.

Ruch, jaki wykonywa punkt ciężki na kuli, można również wywołać za pomocą wahadła, złożonego z pręta sztywnego, którego masy nie uwzględniamy, a na którego końcu przyczepimy punkt ciężki; po nadaniu bowiem temu punktowi pewnej prędkości początkowej, wykona on ruch, jakiby wykonał przy tych samych warunkach początkowych na powierzchni kuli.

Jako spółrzędne punktu ruchomego, wyznaczające jego położenie na kuli, obierzemy: 1) odległość z, rys. 38-my, równoleżnika, na którym punkt dany chwilowo się znajduje, licząc dodatne odległości od środka kuli po osi pionowej ku dołowi;

2) oraz kąt θ, jaki tworzy płaszczyzna biegunowa, przechodząca przez punkt ruchomy z inną płaszczyzną biegunową nieruchomo obraną w przestrzeni. Na rys. 38-ym, na którym O oznacza środek kuli, naniesiono spółrzędne z i θ. Spółrzędne początkowego położenia punktu oznaczymy literami z_0 i θ_0, a prędkość początkową literą $\overline{v}_0$.



Rys. 38

Na punkt dany działa siła jego ciężkości $m\overline{g}$ i siła odporową $\overline{N}$ powierzchni kuli, (czy też naprężenia wahadła); równanie przeto dynamiczne ruchu tego punktu jest następujące:

$$\overline{N} + m\overline{g} = m\overline{p}.$$

W celu rozwiązania zadania tego możemy zastosować bezpośrednio zasadę pracy i zasadę momentów. Praca bowiem siły odporowej N, podczas przesunięcia punktu po kuli, równa się zeru, i moment jej względem bieguna, obranego w środku kuli, równa się także zeru.

Równanie przeto pracy podczas cząstkowego przesunięcia punktu po powierzchni kuli jest nast.:

$$mg\,dz = d(\tfrac{1}{2}mv^2),$$

z którego po scałkoweniu od z_0 do z; i od v_0 do v, otrzymamy następujące równanie:

$$1)\quad mg(z - z_0) = \tfrac{1}{2}mv^2 - mv_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

Moment sił odporowych względem środka kuli równa się zeru; a więc i względem każdej osi, przechodzącej przez ten biegun, równa się zeru. Zestawimy przeto równanie momentu ilości ruchu względem osi pionowej z, gdyż wtedy i moment siły ciążenia równa się zeru; okoliczność ta chociaż nie jest potrzebną dla naszego rachunku, upraszcza go jednakże, pozbywamy się bowiem momentu siły ciążenia; a zatem napiszemy: $\frac{dM_{v,z}}{dt} = 0$; a więc:

$M_{v,z}$ = stałej; lub inaczej, zgodnie z równ. 80-tem:

$$2)\quad mh^2\frac{d\theta}{dt}=M_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (124)$$

gdzie M_0 oznacza moment, względem osi z, ilości ruchu punktu w początkowem jego położeniu; h — promień równoleżnika, na którym znajduje się chwilowo, a $\frac{d\theta}{dt}$ jest prędkością obrotową płaszczyzny biegunowej punktu ruchomego.

W celu wyrażenia prędkości obranemi spółrzędnemi, zrzutujemy ją na trzy następujące wzajemnie prostopadłe osi, rys. 38-my: na oś t, styczną do równoleżnika, na którym znajduje się w danej chwili punkt ruchomy; na oś h, będącą przedłużeniem promienia tegoż równoleżnika, i na oś z pionową; a zważywszy, że rzuty prędkości punktu ruchomego są prędkościami jego rzutów, str. 59-ta tomu I-ego, i że obrane osi są wzajemnie prostopadłe, mamy:

$$v^2=\left(\frac{dh}{dt}\right)^2+\left(h\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Wielkość bowiem $h=\sqrt{r^2-z^2}$; a $dh=\frac{-z\,dz}{\sqrt{r^2-z^2}}$.

Po podstawieniu tych wartości w równania 123-cie i 124-te; otrzymamy:

$$1)\quad 2g(z-z_0)=\left[\left(\frac{dh}{dt}\right)^2+\left(h\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-v_0^2; \text{ oraz}$$

$$2)\quad mh^2\frac{d\theta}{dt}=M_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (125)$$

W tych równaniach mamy trzy zmienne z, θ, oraz czas t; można więc z nich wytworzyć związki pomiędzy każdą ze spółrzędnych i czasem, lub pomiędzy samemi spółrzędnemi.

W celu znalezienia związku pomiędzy z i t, obliczymy z drugiego równania $\frac{d\theta}{dt}$, i podstawimy w pierwsze, oraz podstawimy wartość dh, a otrzymamy:

$$2g(z-z_0)=\left[\left(\frac{-z}{h}\cdot\frac{dz}{dt}\right)^2+\left(h\cdot\frac{M_0}{mh^2}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-v_0^2;$$

po uporządkowaniu zaś:

$$2g(z-z_0)=\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\left(\frac{z^2}{h^2}+1\right)+\left(\frac{M_0}{mh}\right)^2-v_0^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (126)$$

skąd, po podstawieniu: $h^2=r^2-z^2$ i rozwiązaniu względem $\frac{dz}{dt}$, otrzymamy:

$$r\frac{dz}{dt}=\pm\sqrt{f(z)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (127)$$

w którem przyjęto:

$$f(z)=(r^2-z^2)[2g(z-z_0)+v_0^2]-\left(\frac{M_0}{m}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (128)$$

W podobny sposób, rugując z powyższych równań zmienną z, obliczyć można związek pomiędzy spółrzędnemi θ i t.

Wyrugowawszy następnie z równania 1-go i 2-go zmienną t, która występuje w postaci różniczki dt, otrzymamy równanie, które łącznie z równaniem kuli określa postać toru; równanie to jest następujące:

$$\frac{d\theta}{dz} = r\frac{M_0}{m}\cdot\frac{1}{(r^2-z^2)\sqrt{f(z)}} \quad \text{. . . . . (129)}$$

Całki powyższych wzorów są funkcyami eliptycznemi, nie dają się przeto wyrazić zwykłemi funkcyami. Można jednakże drogą analizy równań różniczkowych wywywnioskować o pewnych właściwościach danego ruchu i otrzymać jego obraz; analizę tę przeprowadzimy w paragrafie następnym; a obecnie obliczymy siłę odporową powierzchni kuli. W tym celu zrzutujmy równanie dynamiczne:

$$m\overline{g} + \overline{N} = m\overline{p}.$$

na normalną do powierzchni kuli t. j. na jej promień[1]), przechodzący przez dany punkt.

Siła N zrzutuje się w rzeczywistej swej wielkości; i jeżeli przyjmiemy zwrot dodatny ku środkowi kuli, to rzut siły ciężkości równa się $(-mg\cos\sigma)$; gdzie σ oznacza kąt, zawarty pomiędzy kierunkiem promienia i kierunkiem pionowym, a $\cos\sigma = \frac{z}{r}$, rys. 38-my.

Rzut przyśpieszenia $\overline{p}$ na kierunek normalnej do powierzchni obliczymy w następujący sposób. Zastąpmy przyśpieszenie $\overline{p}$ sumą dwóch przyśpieszeń $(\overline{p}_n + \overline{p}_t)$, w której $p_n = \frac{v^2}{\rho}$, jest rzutem przyśpieszenia na główną normalną do toru, a $p_t = \frac{dv}{dt}$ na styczną; i zrzutujmy ją na obrane osi. Rzut p_n na normalną do powierzchni wyrazimy wzorem:

$$\frac{v^2}{\rho}\cdot\cos(\rho, N),$$

rzut zaś p_t równa się zeru.

Zważywszy następnie, że, stosownie do twierdzeń geometryi analitycznej:

$$\rho = r\cdot\cos(\rho, N)^{2)}, \quad \text{. . . . . (130)}$$

---

[1]) Uprzytomnić sobie należy, że główna normalna do krzywej, zakreślonej na pewnej powierzchni, nie zlewa się wogóle z normalną tej powierzchni; lecz tworzy z nią pewien kąt, który w szczególnym tylko przypadku może równać się zeru.

[2]) Związek ten dla krzywej na kuli wynika bezpośrednio z następujących rozważań. Płaszczyzna ściśle styczna w pewnym punkcie każdej krzywej, zakreślonej na dowolnej powierzchni, przechodzi przez dwie sąsiednie cząstki łuku; koło przechodzące przez te dwie cząstki jest kołem krzywości. Gdy zaś krzywa leży na powierzchni kuli, to płaszczyzna ściśle do niej styczna w pewnym jej punkcie, przecina powierzchnię kuli po kole, które jest kołem jej krzywości, a promień jego jest jej promieniem krzywości; z czego wynika związek pomiędzy promieniem krzywości krzywej, zakreślonej na kuli a promieniem kuli.

otrzymamy, po skróceniu przez ρ, równanie rzutów na normalną:

$$-mg\frac{z}{r}+N=\frac{mv^2}{r},$$

z którego, po podstawieniu wartości v^2 z równania pracy, obliczymy:

$$N=\frac{m}{r}\left[g(3z-2z_0)+v_0{}^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (131)$$

Jest to szukane równanie, z którego obliczyć można np. położenie równoleżnika, na którym punkt ruchomy opuści powierzchnię kuli.

61. Analiza równań ruchu punktu ciężkiego po powierzchni kuli. Zestawienie równania dynamicznego w zadaniu powyższem nie przedstawiało żadnych trudności; scałkowanie jego jednakże i uwidocznienie sobie ruchu, wyrażonego otrzymanemi równaniami, przedstawia znaczne trudności rachunkowe. W takich przypadkach staramy się wogóle odczytać właściwości ruchu bezpośrednio z równań różniczkowych oraz z geometrycznych stosunków, które zachodzą w każdem poszczególnem zadaniu. W celu zastosowania tego sposobu do obliczenia ruchu punktu po kuli, weźmiemy pod uwagę jego równania dynamiczne i zbadamy ich właściwości.

Z niezmienności znaku wartości $\frac{d\theta}{dt}$, obliczonej z równania momentu ilości ruchu:

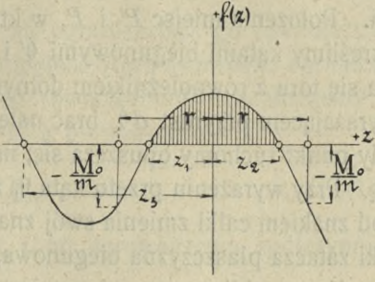
$$mh^2\frac{d\theta}{dt}=M_0,$$

wynika, że rzut punktu na płaszczyznę poziomą krąży około osi pionowej z jednym i tym samym zwrotem, o ile $M_0 \gtrless 0$. W przypadku zaś, w którym $M_0=0$, $\frac{d\theta}{dt}=0$, kąt przeto θ jest stały, a ruch punktu jest ruchem zwykłego wahadła płaskiego.

Podczas ruchu punktu na powierzchni kuli, rzut jego na oś pionową wykonywa również pewien ruch. Równaniem ruchu tego rzutu jest równanie 127-me; a wartości dla z, które czynią: $\frac{dz}{dt}=0$; t. j. pierwiastki równania $f(z)=0$; wskazują miejsca na osi pionowej, w których rzut punktu posiada prędkość zero i jednocześnie wskazują największe oddalenia tego rzutu od środka kuli. Pierwiastki przeto równania:

$$(r^2-z^2)\left[2g(z-z_0)+v^2{}_0\right]-\left(\frac{M_0}{m}\right)^2=0. \quad \ldots\ldots \quad (132)$$

wyznaczają miejsca na osi, w których rzut punktu na tę oś posiada prędkość zero. Równanie to jest względem niewiądomej z stopnia 3-go; posiada przeto trzy pierwiastki. Dla naszych rozpatrywań tylko te pierwiastki mają znaczenie fizyczne, które leżą pomiędzy wartościami $(-r)$ i $(+r)$; i które czynią $f(z)>0$; w razie bowiem odjemnej wartości tej funkcyi wartości prędkości stają się urojonemi, nie mają a więc fizycznego znaczenia. Wartości przeto $z = \pm r$ (o ile $M_0 \gtrless 0$) nie mogą być pierwiastkami danego równania, gdyż czynią wartość $f(z) < 0$; z czego wynika, że punkt ruchomy nie przechodzi przez wierzchołki kuli. Ponieważ ruch danego punktu odbywa się wogóle przy wszelkich warunkach początkowych, przeto dla zmiennej z jest szereg wartości, które czynią $f(z) > 0$, i szereg ten powinien znajdować się pomiędzy $z = \pm r$; a ponieważ dla $z = \pm r$, $f(z) < 0$; przeto wartość jej zmienia dla dwóch wartości z, leżących pomiędzy $\pm r$, dwa razy swój znak; a zatem dwa pierwiastki danego równania leżeć muszą pomiędzy $\pm r$; pierwiastki te oznaczymy literami z_1 i z_2; wartość zaś trzeciego leżeć będzie pomiędzy wartościami $(-r)$ i $(-\infty)$ t. j. będzie odjemną; podstawiwszy bowiem $z = -r$, otrzymamy $f(z) < 0$; podstawiwszy zaś $z = -\infty$, $f(z) > 0$. Wykres przeto wartości $f(z)$, który w przybliżeniu przedstawiliśmy na rys. 39-tym, dla różnych wartości zmiennej z, przecina trzy razy oś spółrzędnych; dwa razy w miejscach, leżących pomiędzy $z = \pm r$ i po raz trzeci w miejscu pomiędzy $-\infty$ i $-r$. Rozumie się, że spólrzędne miejsc tych można obliczyć bezpośrednio z równ. 132-ego, jeżeli weźmiemy do rachunku wartości liczbowe.

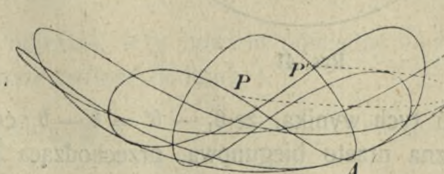


Rys. 39.

Rozpatrzymy jednakże ogólne właściwości tych pierwiastków, ażeby na ich podstawie wytworzyć sobie choć przybliżony obraz ruchu. Pierwiastki z_1 i z_2 wyznaczają położenie dwóch równoleżników na kuli, pomiędzy którymi punkt ruchomy zakreśla tor; a ponieważ $\frac{d\theta}{dt} \gtrless 0$, (jeżeli $M_0 \gtrless 0$), przeto punkt ruchomy na poziomie tych równoleżników posiada prędkości poziomo skierowane, których wartości można obliczyć z rów. 125-tego, po podstawieniu w nie:

$$h = h_1 = \sqrt{r^2 - z_1^2}; \text{ oraz } h = h_2 = \sqrt{r^2 - z_2^2}.$$

Ruch punktu danego możemy przeto unaocznić sobie np. w ten sposób. Punkt otrzymawszy pewną prędkość poczatkową, opuszcza się po powierzchni kuli i, dosięgnąwszy równoleżnika na poziomie z_2, dotknie się jego, aby następnie dzięki posiadanej energii (inaczej, wskutek bezwładności) podnieść się do równoleżnika z_1; i następnie po zetknięciu się z nim opuści się znów do równoleżnika z_2 i t. d. Obraz ten nasuwa przypuszczenie, że tor punktu jest symetryczny względem płaszczyzny bieguno-



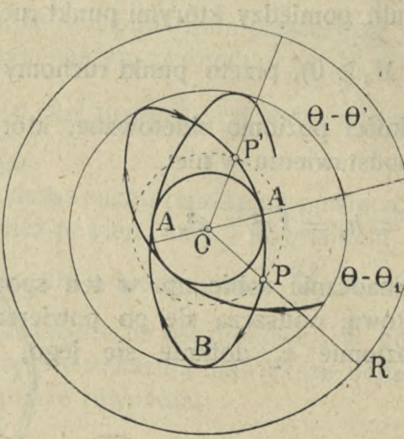
Rys. 40.

wej, przechodzącej przez punkty zetknięcia się toru z ograniczającym go równoleżnikiem (dolnym lub górnym). Ażeby to zbadać, weźmy pod uwagę dwa miejsca na dowolnym równoleżniku, wyznaczonym spółrzędną z_0, w których tor punktu przecina go, i wyobraźmy sobie, że punkt ruchomy, przechodząc przez miejsce P', rys. 40-ty, równoleżnika tego, opuszcza się do miejsca A, leżącego na dolnym równoleżniku z_2; a w miejscu P przecina on podczas podnoszenia się równoleżnik z_0; na rys. 40-tym pokazany jest tor punktu, oraz równoleżnik, oznaczony punktami. Położenia miejsc P' i P, w których punkt ruchomy, przecina równoleżnik z_0, określimy kątami biegunowymi θ' i θ, rys. 41-szy; położenie zaś miejsca zetknięcia się toru z równoleżnikiem dolnym określimy kątem θ_1. W równaniu 129-tem, wyrażającem przyrost $d\theta$, brać należy znak $+$, gdy przyrost dz jest dodatny, t. j. gdy punkt ruchomy opuszcza się; należy zaś brać go odjemnym, gdy punkt podnosi się. Przy wyrażeniu przeto kąta θ_1 zmienną z należy wziąć pod uwagę, że funkcya pod znakiem całki zmienia swój znak przy przejściu przez wartość θ_1; kąt przeto, jaki zatacza płaszczyzna biegunowa, gdy punkt ruchomy przejdzie od P' do A, rys. 41-szy, obliczymy z następującego równania:

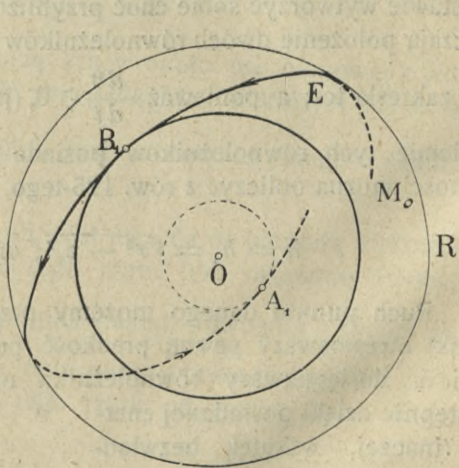
$$\theta_1 - \theta' = \int_{\theta'}^{\theta_1} d\theta = -r\frac{M_0}{m}\int_{z_0}^{z_1}\frac{dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{f(z)}} = -[F(z_1) - F(z_0)];$$

a kąt:

$$\theta - \theta_1 = \int_{\theta_1}^{\theta} d\theta = r\frac{M_0}{m}\int_{z_1}^{z_0}\frac{dz}{(z^2 - z^2)\sqrt{f(z)}} = [F(z_0) - F(z_1)],$$



Rys. 41.



Rys. 42.

z równań tych wynika, że $\theta_1 - \theta' = \theta - \theta_1$; co stwierdza nasze przypuszczenie. Płaszczyzna przeto biegunowa, przechodząca przez punkt zetknięcia się toru z równoleżnikiem górnym lub dolnym, jest płaszczyzną symetryi toru.

Jeżeli następnie zrzutujemy tor punktu na płaszczyznę poziomą, to otrzymamy krzywą, która leży pomiędzy dwoma kołami o promieniach h_1 i h_2, dotyka je kojejno w pewnych punktach, i jest symetryczną względem osi, przeprowadzonych z rzutu środka kuli do punktów zetknięć toru z temi kołami.

Zbadajmy obecnie, czy krzywa ta nie jest elipsą, której średnice główne równają się $2\,h_1$ i $2\,h_2$; elipsa bowiem taka odpowiadałaby zbadanym dotychczas właściwościom. Przypuszczenie to jednakże jest niemożliwem; pod pierwiastkiem bowiem wzoru 129-tego mamy funkcyę stopnia trzeciego, której całka nie może być funkcyą algebraiczną.

Zbadajmy jeszcze tor punktu ze względu na ograniczające go równoleżniki. Pierwiastki równania $f(z) = 0$, wyznaczają odległość równoleżników, ograniczających tor. W celu zbadania właściwości tych równoleżników zanalizujemy to równanie i uporządkujemy je podług zmiennej z, a po podstawieniu:

$$\tfrac{1}{2}\,m v_0^2 - m g z_0 = E_0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (133)$$

gdzie E_0 wyraża warunki początkowe ruchu, i po sprowadzeniu spółczynnika przy z^3 do jedności; otrzymamy równanie:

$$z^3 + \frac{E_0}{mg}\,.\,z^2 - r^2\,.\,z - \left[\frac{E_0}{mg}\,r^2 - \frac{1}{2g}\left(\frac{M_0}{m}\right)^2\right] = 0, \quad \ldots \quad (134)$$

którego pierwiastki wyznaczają położenie ograniczających ruch równoleżników.

Równanie powyższe da się przedstawić w postaci:

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0;$$

a po przemnożeniu czynników—w postaci:

$$z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)\,.\,z^2 + (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)\,.\,z - z_1 z_2 z_3 = 0\,. \quad (135)$$

Z porównania spółczynnika przy zmiennej z tego równania z takimże spółczynnikiem równ. 134-tego otrzymamy:

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = - r^2; \text{ inaczej } z_3 (z_1 + z_2) = - (r^2 + z_1 z_2).$$

Ze stosunków geometrycznych wynika, że bezwzględna wartość iloczynu $z_1 z_2 < r^2$; wartość przeto wyrazu $(r^2 + z_1 z_2) > 0$, niezależnie czy iloczyn $z_1 z_2$ jest dodatny czy też odjemny; z czego znów wynika, że:

$$z_3 (z_1 + z_2) < 0.$$

Ponieważ zaś z_3 jest zawsze odjemne, leży bowiem pomiędzy $-r$ i $-\infty$, przeto $(z_1 + z_2)$ musi posiadać zawsze wartość dodatną; t. j.

$$z_1 + z_2 > 0.$$

Warunek ten wyraża, że albo obydwa koła, ograniczające tor, leżą na dolnej półkuli, w tym bowiem razie z_1 i z_2 są dodatne; lub też jedno z nich jest na dolnej, a drugie na górnej półkuli, i w ten sposób są położone, że suma ich odległości od środka kuli > 0; — z czego wynika, że nie mogą leżeć na półkuli górnej; jak również że punkt materyalny, puszczony na górnej półkuli, zejdzie zawsze na półkulę dolną.

Jeżeli równoleżniki te leżą na różnych półkulach, to odległość dolnego równoleżnika od środka kuli musi być większa od takiejże odległości górnego równoleżnika. Jeżeli zatem punkt ruchomy wskutek nadanego mu ruchu podniesie się na górną półkulę do pewnego poziomu, to opuści się on następnie na dolną półkulę o tyle, że suma odległości ograniczających równoleżników od środka kuli zawsze jest dodatną. Promień przeto dolnego równoleżnika jest zawsze mniejszy od promienia górnego równoleżnika. Rys. 41-szy i 42-gi przedstawiają rzuty toru na płaszczyznę poziomą. Rys. 41-szy przedstawia ruch punktu po jednej półkuli; rys. zaś 42-gi, gdy ruch ten odbywa się po obydwóch półkulach, a w tym razie A_1 i B_1 są miejscami zetknięć się punktu ruchomego z kołami ograniczającemi; koło zaś R jest rzutem równika.

W szczególnym przypadku, gdy pierwiastki są wzajemnie równe, t. j. gdy $z_1 = z_2$, wtedy punkt ruchomy zakreśli koło, które wobec powyższego wniosku może leżeć tylko na półkuli dolnej. Ponieważ w tym przypadku siła ciążenia punktu ruchomego wykonuje pracę zero, a siła odporowa powierzchni gładkiej wykonywa zawsze pracę zero, przeto punkt dany podczas ruchu nie doznaje zmiany energii kinetycznej, t. j. zakreśla on koło ze stałą początkowo nadaną prędkością.

Powróćmy jeszcze do równań 134-tego i 135-tego, a z porównania wyrazów stałych otrzymamy związek:

$$\frac{E_0}{mg} r^2 - \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{M_0}{m}\right)^2 = z_1 z_2 z_3 ;$$

a ponieważ pierwiastek z_3 jest zawsze odjemny, przeto znak wyrazu, znajdującego się po lewej stronie równania, którego wartość można obliczyć z początkowych warunków ruchu, rozstrzyga o tem, czy ruch punktu odbywa się po jednej półkuli, czy też po obydwóch. Jeżeli np.

$$E_0 r^2 - \frac{1}{2} \frac{M_0^2}{m} < 0; \text{ to } z_1 z_2 > 0, \quad \ldots\ldots \quad (136)$$

czyli punkt przebiega po jednej tylko półkuli.

Znajdźmy obecnie znaczenie dynamiczne tych warunków; w tym celu podzielimy wzór 136-ty przez r^2 i napiszemy go w postaci:

$$E_0 > \frac{1}{2} \cdot \frac{M_0^2}{mr^2} \cdot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (137)$$

W szczególnym przypadku, gdy $M_0 = 0$, t. j. gdy ruch odbywa się w płaszczyźnie biegunowej, warunek podniesienia się punktu ponad równik, t. j. ponad średnicę poziomą, wyrazi się wzorem:

$$E_0 > 0 .$$

Wartość wyrazu E_0 zgodnie z jego określenięm, podanem w równ. 133-ciem, wyraża przewyżkę energii kinetycznej $\frac{1}{2} m v_0^2$, udzielonej punktowi, ponad wartość pracy $m g z_0$, jaką siła ciążenia punktu wykona podczas podniesienia jego do poziomu równika. W tym więc szczególnym przypadku ruchu punktu, warunek, $E_0 > 0$, podniesienia się punktu ponad równik, lub dojścia do niego, jest wyrazem zasady zachowania energii.

Warunki ruchu po kuli można wyprowadzić również z zasady zachowania energii, gdy zważymy, że ruch punktu w płaszczyźnie biegunowej, (t. j., gdy $M_0 = 0$), i ruch dowolny po powierzchni kuli, różnią się tem, że punkt, poruszający się tylko w płaszczyźnie biegunowej, przybywa do równika z prędkością zero; w ogólnym zaś ruchu (gdy $M_0 \gtrless 0$). punkt ruchomy dochodzi do równika z pewną prędkością poziomo skierowaną; posiada więc on w tem miejscu pewną energię kinetyczną. Punkt zatem ruchomy, ażeby doszedł do równika, powinien mieć wogóle nadane tyle energii ($\frac{1}{2} m v_0^2$), ażeby po wykonantu pracy podniesienia $m g z_0$ posiadał w poziomie równika jeszcze energię $\frac{1}{2} m v_r^2$; gdy literą v_r oznaczymy prędkość na równiku. Obliczmy tę prędkość. Rzut poziomy prędkości w każdem miejscu punktu $= h \frac{d\theta}{dt}$; na równiku przeto

$$v_r = r \frac{d\theta}{dt};$$

wyraz $\frac{d\theta}{dt}$ obliczymy z równania 125-tego, po podstawieniu w nie $h = r$; zatem:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{M_0}{m r^2};$$

wartość przeto energii punktu na poziomie równika:

$$\tfrac{1}{2} m v_r^2 = \tfrac{1}{2} m \left(r \frac{M_0}{m r^2} \right)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{M_0^2}{m r^2}.$$

Ażeby więc punkt ruchomy doszedł do równika powinna być mu nadana w początku jego ruchu energia kinetyczna:

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = m g z_0 + \tfrac{1}{2} \frac{M_0^2}{m r^2};$$

a jeżeli energia ta jest większą od wskazanej przez to równanie, to ciężar punktu może wykonać jeszcze pracę podniesienia się wyżej równika. Co też wyraża warunek przedstawiony wzorem 137-em, wyprowadzonym drogą analizy algebraicznje. Rozpatrzmy jeszcze ruch rzutu punktu, poruszającego się po kuli, na płaszczyznę poziomą, z tego bowiem ruchu będziemy również mogli sądzić o ruchu punktu właściwego. W tym celu zrzutujmy na płaszczyznę poziomą punkt ruchomy i siły nań działające, t. j. siłę normalną i siłę jego ciężkości, a zauważymy, że kierunki rzutów siły normalnej zbiegają się w rzucie środka kuli; rzut zaś siły ciążenia równa się zeru. Rzut przeto punktu ruchomego znajduje się tylko pod działaniem siły środkowej, równej rzutowi siły odporowej. Oznaczmy ten rzut literą N', a napiszemy:

$$N' = N \,.\, \sin \sigma; \text{ lub inaczej } N' = N \frac{h}{r};$$

gdzie h jest promieniem wodzącym rzutu punktu właściwego. Ażeby zatem wyznaczyć ruch rzutu punktu danego, należy wyznaczyć ruch punktu, będącego w polu sił środkowych, określonych równaniem $N' = N \frac{h}{r}$. Wyznaczenie tego ruchu nie przedstawia trudności w przypadku, gdy N jest stałą wielkością; wtedy bowiem wielkość siły środkowej będzie proporcyonalną do długości promienia wodzącego; tor przeto tego ruchu stosownie do § 19-tego będzie elipsą, lub kołem. Szczególny ten przypadek nastąpi, gdy kąt odchylenia wahadła jest bardzo mały. Przyjąwszy np. że kąt odchylenia zbliża się do zera, siła N' zbliżać się będzie do wartości stałej; a rzut punktu właściwego zakreśli na płaszczyźnie poziomej, zgodnie z § 19-tym, krzywę zbliżoną do elipsy, której środek znajduje się w środku przyciągania; a jedna z osi sprzężonych posiada kierunek rzutu promienia wodzącego w początkowem położeniu punktu właściwego; druga zaś — kierunek rzutu prędkości początkowej. Dla małych zatem odchyleń wahadła, tor właściwy, jaki zakreśla punkt na kuli, otrzymamy jako przecięcie się walca prostego o podstawie eliptycznej z powierzchnią kuli. Prędkości rzutu punktu właściwego po elipsie są rzutami prędkości punktu właściwego; z rzutów tych można zatem wyznaczyć wektory prędkości właściwych. Inny przypadek, w którym $N =$ stałej, następuje, gdy $z =$ stałej, tor jest w tym razie kołowym. W przypadkach ogólnych możemy również sądzić, chociaż w przybliżeniu, o postaci toru, gdy zamiast wyrazu ścisłego:

$$N = mg\,(3 \cos \sigma - 2 \cos \sigma_0) + \frac{m v_0^2}{r},$$

zastosujemy przybliżoną jego wartość, którą otrzymamy po podstawieniu:

$$\cos \sigma = \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{r}\right)^2} \cong 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{h}{r}\right)^2;$$

a zatem:

$$N \cong mg\left[3 - \tfrac{3}{2}\left(\frac{h}{r}\right)^2\right] + \left(\frac{m v_0^2}{r} - 2\, mg \cos \sigma_0\right);$$

skąd:

$$N \cong C - \tfrac{3}{2}\, mg \left(\frac{h}{r}\right)^2;$$

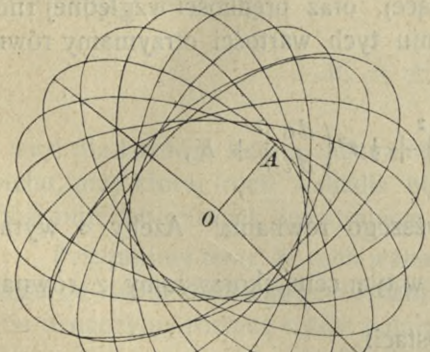
gdzie:

$$C = 3\, mg + \frac{m v_0^2}{r} - 2\, mg \cos \sigma_0;$$

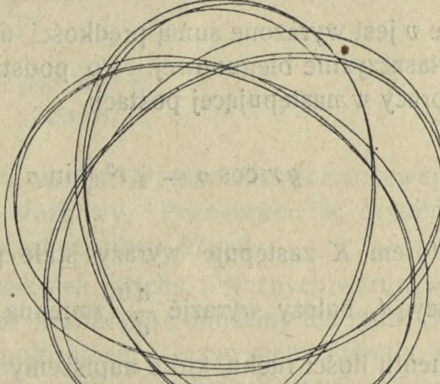
i jest wielkością niezmienną dla danego zadania; po podstawieniu tych wzorów:

$$N' \cong N\frac{h}{r} = C.\frac{h}{r} - \tfrac{3}{2}\, mg \,.\left(\frac{h}{r}\right)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

Z tego wzoru wynika, że siłę środkową N', można uważać z pewnem przybliżeniem, za złożoną z dwóch sił: z siły przyciągającej proporcyonalnie do odległości od środka i z siły odpychającej proporcyonalnie do trzeciej potęgi tejże odległości. Łatwo odczytać z tego równania, że jeżeli wartość $\left(\frac{h}{r}\right)$ maleje, to wartość $\left(\frac{h}{r}\right)^3$ jeszcze prędzej maleje tak, iż wpływ siły odpychającej na ruch punktu staje się coraz mniejszy, a tor zbliża się do elipsy, cośmy już wyżej przewidzieli. Ze wzrostem wartości h wpływ siły odpychającej wzrasta i ruch należy już uważać za złożony, z ruchu po elipsie i z ruchu, powstałego z siły odpychającej; ruch taki wyobrazić sobie można jako ruch po elipsie, gdy jednocześnie elipsa jest w ruchu. Rys. 43-ci i 44-ty są rzutami toru punktu wahadła kulistego na płaszczyznę poziomą, a powstanie tego toru można sobie wyobrazić w ten sposób, że punkt ruchomy, (t. j. rzut punktu właściwego), zakreśla elipsę, która obraca się około swego środka.



Rys. 43.



Rys. 44.

Szczegółowsze badanie tego ruchu wykazują, że punkt styka się z tem samem kołem, ograniczającem jego ruch w równych odstępach. Jeżeli zatem stosunek wielkości takiego odstępu do obwodu tegoż koła jest wymierny, to punkt po przejściu pewnej ilości razy około środka, powróci do miejsca wyjścia; gdy zaś stosunek ten jest niewymierny, wtedy punkt ruchomy nigdy nie wróci do swego pierwotnego położenia; a tor będzie w tym razie krzywą niezamkniętą, która po upływie nieskończenie długiego czasu, wypełni swemi punktami całe pole pomiędzy kołami, ograniczającemi tor. Rys. 40-ty przedstawia tor punktu ruchomego w widoku. Rysynki zaś 43-ci i 44-ty są odbitkami zdjęc fotograficznych ruchu, odbywającego się w rzeczywistości[1]).

62. Właściwość ruchu wahadła kulistego, zbliżonego do wahadła stożkowego. Znajomość ruchu wahadła kulistego potrzebną nam jest przy badaniu ruchu regulatorów; rozpatrzymy przeto jeszcze pewne jego właściwości. Rozpatrywania, które mamy teraz przedsięwziąć różnią się pod względem teorytycznem od poprzednich tem, że obecnie za podstawę weźmiemy szczególny ruch po kole w płaszczyźnie poziomej, ruch, którego powstanie warunkuje równ. 97-me; Zbadamy ten ruch w tym przypadku, gdy jego początkowa prędkość niezupełnie odpowiada warunkom ruchu po kole, wskazanym przez równ. 97-me. Ruch taki wywołamy, gdy wahadło, poruszające się po kole poziomem, odchylimy nieco, np. słabem uderzeniem, z położenia, w którem się znajduje chwilowo; wtedy wahadło dane zejdzie z toru kolistego i zakreści jakiś inny tor, przypuszczalnie zbliżony do koła, lecz dotychczas nam nieznany. Wyznaczenie tego toru, oraz ruchu po nim jest obecnie naszem zadaniem. Do tych badań zastosujemy spółrzędną σ punktu ruchomego i w celu napisania równania ruchu, wyrażonego tą spółrzędną i czasem, podstawimy w równanie pracy, równ. 123-cie:

$$z = r \cos \sigma; \text{ oraz } v^2 = \left(r \sin \sigma \,.\, \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\sigma}{dt}\right)^2;$$

gdzie v jest wyrażone sumą prędkości unoszącej, oraz prędkości względnej ruchu na płaszczyźnie biegunowej. Po podstawieniu tych wartości otrzymamy równanie pracy w następującej postaci:

$$g r \cos \sigma = \tfrac{1}{2} r^2 \left(\sin \sigma \,.\, \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} r^2 \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + K,$$

w którem K zastępuje wyrazy stałe powyższego równania. Ażeby σ wyrazić funkcyą t, należy wyrazić $\frac{d\theta}{dt}$ zmienną σ; a w tym celu skorzystamy z równania momentu ilości ruchu, które napiszemy w postaci:

$$m (r \sin \sigma)^2 \frac{d\theta}{dt} = M_0,$$

obliczymy z niego $\frac{d\theta}{dt} = \frac{M_0}{m r^2 \sin^2 \sigma}$ i podstawimy w powyższe równanie pracy; a otrzymamy je w postaci:

$$g r \cos \sigma = \tfrac{1}{2} r^2 \left(\frac{M_0}{m r^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \sigma} + \tfrac{1}{2} r^2 \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + K.$$

---

[1]) Rys. 40, 43 i 44 są wzięte z dzieła: „The Dynamics, by Arthur Gordon Webster. 1912“.

Zróżniczkujmy to równanie względem czasu, a po skróceniu przez wspólny czynnik $\frac{d\sigma}{dt}$, otrzymamy:

$$- g r \sin \sigma = - r^2 \left(\frac{M_0}{m r^2}\right)^2 \frac{\cos \sigma}{\sin^3 \sigma} + r^2 \frac{d^2 \sigma}{d t^2};$$

skąd po uporządkowaniu:

$$\frac{d^2 \sigma}{d t^2} + \left[\frac{g}{r} \sin \sigma - \left(\frac{M_0}{m r^2}\right)^2 \frac{\cos \sigma}{\sin^3 \sigma}\right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

Równanie to moglibyśmy również wyprowadzić z równania dynamicznego tego ruchu; zrzutowawszy je na trzy osi: z, h i na oś prostopadłą do płaszczyzny biegunowej, a po wyrugowaniu z tych równań N i $\frac{d\theta}{dt}$ otrzymalibyśmy powyższe równanie ruchu.

Równanie 138-me jest jednem z równań ruchu wahadła kulistego. Zbadajmy obecnie, mając za podstawę to ogólne równanie, czy jest możliwem, ażeby powstał ruch kołowy punktu; a gdy okaże się to możliwem, znajdźmy warunki ruchu początkowego, przy których powstaje ten ruch. W przypadku ruchu kołowego kąt $\sigma = \sigma_c$ = stałej wielkości, a zatem po podstawieniu tej wartości w rów. 138-me, otrzymamy z niego:

$$M_0 = \pm m \sqrt{\frac{g r^3 \sin^4 \sigma_c}{\cos \sigma_c}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

a więc dla każdego kąta σ_c można obliczyć wartość M_0 momentu początkowej ilości ruchu, przy której ruch wahadła będzie stożkowy. Pozostawia się czytelnikowi utożsamić ten warunek z warunkiem, wyrażonym równ. 97-em

Przyjmijmy teraz, że ruch wahadła wskutek jakichś fizycznych warunków odbiega od ruchu kołowego i że ta różnica jest nieznaczna i obliczmy ten ruch. W tym celu oznaczymy różnicę kątów pomiędzy położeniem rzeczywistem wahadła, a stożkowem przez $\triangle \sigma$; kąt wahadła stożkowego przez σ_c; to kąt właściwego ruchu:

$$\sigma = \sigma_c + \triangle \sigma;$$

zmienną wielkością, podczas tego ruchu jest $\triangle \sigma$, jeżeli zatem obliczymy związek pomiędzy $\triangle \sigma$ i czasem t, to będziemy mogli obliczyć również właściwe odchylenie σ w zależności od t. Ażeby obliczyć ten związek podstawmy w równanie ogólne ruchu kulistego, równ. 138-me, wartość $\sigma = \sigma_c + \triangle \sigma$; i przyjmiemy, że $\triangle \sigma$ jest wielkością tak małą w porównaniu z σ, że wyższe jej potęgi oprócz pierwszej, mogą być rachunkiem nie uwzględnione.

Równanie 139-te napiszemy w postaci ogólnej:

$$\frac{d^2 \sigma}{d t^2} + F(\sigma) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

po podstawieniu w nie: $\sigma = \sigma_c + \triangle\sigma$, otrzymamy:

$$\frac{d^2(\sigma_c + \triangle\sigma)}{dt^2} + F(\sigma_c + \triangle\sigma) = 0.$$

Różniczkowanie, wskazane w tem równaniu, zastosujemy do oddzielnych składników sumy; a funkcyę: $F(\sigma_c + \triangle\sigma)$ rozwiniemy w szereg Taylora:

$$F(\sigma_c + \triangle\sigma) = F(\sigma_c) + \triangle\sigma \,.\, \frac{dF(\sigma_c)}{d\sigma_c}, \quad \ldots \ldots \quad (142)$$

w którym uwzględnimy tylko wyraz pierwszej potęgi wielkości $\triangle\sigma$. Po podstawieniu tych wartości i uwzględnieniu; że:

$$\frac{d^2\sigma_c}{dt^2} = 0; \text{ oraz } F(\sigma_c) = 0;$$

otrymamy szukane równanie:

$$\frac{d^2(\triangle\sigma)}{dt^2} + \triangle\sigma \,.\, \frac{dF(\sigma_c)}{d\sigma_c} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (143)$$

Zastosujmy ten wzór do naszego przykładu i podstawimy w nie, po utożsamieniu równ. 141-ego z 139-tem:

$$F(\sigma) = \frac{g}{r}\sin\sigma - \left(\frac{M_0}{mr^2}\right)^2 . \frac{\cos\sigma}{\sin^3\sigma};$$

skąd:

$$\left.\frac{dF(\sigma)}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_c} = \frac{g}{r}\cos\sigma_0 + \left(\frac{M_0}{mr^2}\right)^2 . \frac{1 + 2\cos^2\sigma_c}{\sin^4\sigma_c};$$

a otrzymamy po podstawieniu M_0 z równ. 140-ego, szukany związek:

$$\frac{d^2(\triangle\sigma)}{dt^2} + \triangle\sigma \,.\, k = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (144)$$

w którem:

$$k = \frac{g}{r} . \frac{1}{\cos\sigma_c}(1 + 3\cos^2\sigma_c) \,.\, \ldots \ldots \quad (145)$$

Jest to równanie różniczkowe, którego właściwości matematyczne zbadaliśmy w § 8-ym, oraz 52-gim. Równanie to przedstawiać może, zależnie od znaku wartości k, dwojakiego rodzaju ruch: ruch okresowy, gdy całka jego jest funkcyą okresową (trygonometryczną), lub też ruch nieokresowy, gdy całka jest funkcyą wykładniczą. Gdy $k > 0$; $\triangle\sigma$ waha się pomiędzy pewnemi stałemi wartościami $\pm \triangle\sigma'$; a przypadek ten wyraża, że tor, jaki zakreśla wahadło, wyprowadzone nieco z położenia σ_c, wije się około obwodu koła po obydwu jego stronach; gdy zaś $k < 0$ wartość

$\triangle \sigma$ z biegiem czasu stale się powiększa; punkt przeto, zeszedłszy z toru kołowego, nigdy na niego nie wróci.

Ze wzoru 145-go odczytamy, że wartość k nie może być dla wahadła kulistego odjemną, gdyż w myśl poprzednich badań tego ruchu musi być zawsze $\sigma_c < 90^0$; zmiany zatem wielkości $\triangle \sigma$ są w ruchu wahadła kulistego okresowe.

Ruch ten uwidocznimy sobie w sposób następujący. Umieśćmy się w płaszczyźnie biegunowej wahadła i z nią razem obracajmy się około osi pionowej, a ruch danego punktu przedstawi się jako ruch wahadła płaskiego, którego położenie równowagi jest nachylone względem pionu pod kątem σ_c.

Z właściwości tych dwóch ruchów sądzić można o ruchu złożonym; a więc, oznaczywszy okres podwójnego wachnięcia w płaszczyźnie biegunowej literą T_w, napiszemy, po utożsamieniu równ. 143-ciego z równ. np. 21-szem, i na zasadzie wyprowadzonego już wzoru 28-go:

$$T_w = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \sqrt{\frac{\cos \sigma_c}{1 + 3\cos^2 \sigma_c}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (146)$$

okres zaś T_0 pełnego obiegu wahadła stożkowego napiszemy z równ. § 44-tego:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} . \sqrt{\cos \sigma_c} \, ;$$

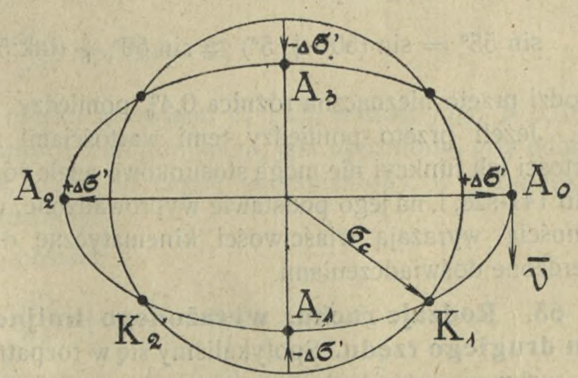
a zależność tych dwóch okresów wyrazimy wzorem:

$$T_w = \frac{T_0}{\sqrt{1 + 3\cos^2 \sigma_c}} .$$

Jeżeli kąt σ_c jest bliski zera, to

$$T_w \cong \tfrac{1}{2} T_0 \, ;$$

a z tego stosunku wynika, że podczas np. połowy podwójnego wahnięcia punktu w płaszczyźnie biegunowej, płaszczyzna ta obróci się o ćwierć pełnego obrotu t. j. o 90^0. W ten sposób wahadło podczas pełnego obrotu płaszczyzny biegunowej przetnie stożek w czterech symetrycznych miejscach. Rzut toru takiego punktu na płaszczyznę poziomą ma postać w przybliżeniu, wskazaną na rys. 45-tym; na któ-



Rys. 45.

rym nakreślone koło przedstawia rzut toru punktu podczas ruchu stożkowego; a literami $\triangle\sigma'$ oznaczono największe odchylenia wahadła od tego ruchu. Punkt A_0 oznacza rzut właściwego punktu w początkowem jego odhyleniu; A_1 — po zrobieniu połowy podwójnego wahnięcia; A_2 zaś po zrobieniu pełnego podwójnego wahnięcia. Punkty K_1 i K_2 są rzutami punktu, gdy wahadło przechodzi przez położenia równowagi.

Z powiększeniem jednakże kąta σ_c, okres podwójnego wahnięcia punktu w płaszczyźnie biegunowej się powiększa; czyli punkt ruchomy przy większych kątach σ_c wolniej się waha, t. j. gdy punkt zrobi np. połowę podwójnego wahnięcia, wtedy płaszczyzna biegunowa obróci się o kąt większy niż 90^0; wskutek czego miejsca K_1 i K_2, rys. 45-ty, w których wahadło przecina stożek z powiększeniem kąta σ_c posuwają się po kole w kierunku zgodnym z obrotem płaszczyzny biegunowej; i w ten sposób otrzymąmy postać toru, wskazaną np. na rys. 41-szym. Dla granicznej wartości $\sigma_c = 90^0$; $T_0 = T_w$.

Jeżeli stosunek $\frac{T_0}{T_w}$ jest współmierny, co następuje tylko przy szczególnych wartościach kąta odchylenia σ_c, to punkt ruchomy powróci po pewnym czasie do miejsca wyjścia, i ponowi tę samą drogę; w przeciwnym razie zakreślać on będzie ciągle nowe tory, którymi wypełni część powierzchni kuli, zawartą pomiędzy kołami, wyznaczonemi przez kąty środkowe $(\sigma_c + \triangle\sigma')$ i $(\sigma_c - \triangle\sigma')$.

W powyższym przybliżonym rachunku przyjęliśmy, że $\triangle\sigma$ jest małą wielkością w porównaniu z kątem σ_c; dokładniejszego jednakże jej określenia nie daliśmy wskutek tego, że do tego należałoby przeprowadzić rachunek ścisły; gdyż wtedy dopiero, ze wzorów otrzymanych tą drogą, ustalićby można stopień dokładności; a tego staraliśmy się uniknąć, ze względu na trudności rachunkowe. Należy jednakże choć ogólnikowo ocenić, o ile postępowanie nasze rachunkowe zbliża się do dokładnych wartości. Dokładnie, np. $\sin 55^0 = 0{,}81915$ (wzięte z tablic), a wzór przybliżony, który stosowaliśmy w powyższym rachunku, wzór 140-ty, da wartość po rozłożeniu np.:

$$\sin 55^0 = \sin (50^0 + 5^0) \cong \sin 50^0 + (\text{łuk } 5^0) . \cos 50^0 = 0{,}82216;$$

zachodzi przeto nieznaczna różnica 0,4% pomiędzy wartością dokładną, a przybliżoną. Jeżeli przeto pomiędzy temi wartościami zachodzi tak mała różnica, to i wartości ich funkcyi nie mogą stosunkowo wiele różnić się między sobą; równanie przeto 141-sze, i, na jego podstawie wyprowadzone, równ. 143-cie z dostateczną dokładnością wyrażają właściwości kinematyczne danego ruchu, co też zostało stwierdzone doświadczeniami.

63. Rodzaje ruchu, wyrażonego linijnem równaniem różniczkowem drugiego rzędu. Spotykaliśmy się w rozpatrywaniach poprzednich z równaniem ruchu o postaci:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Równanie te wyraża dwojakiego rodzaju ruch, zależnie od znaku spółczynnika k.

1) w przypadku $k > 0$, równanie to wyraża ruch harmoniczny (okresowy) około pewnego środka; wyraz bowiem $\frac{d^2x}{dt^2}$ uważać można za iloczyn z masy (w danej postaci tego wyrazu $= 1$) i przyśpieszenia punktu; a wyraz kx — za siłę, działającą na dany punkt; powyższe przeto równanie, napisane w postaci:

$$-kx = \frac{d^2x}{dt^2},$$

uważać można za równanie dynamiczne siły ($-kx$), zwróconej ciągle ku środkowi, tak dla dodatnych wartości x, jak i dla odjemnych; ruch przeto tego punktu będzie opóźniony, gdy punkt oddala się od środka przyciągania, a będzie przyśpieszony, gdy zbliża się on do tego środka. Inny będzie ruch w przypadku:

2) gdy $k > x$, wtedy bowiem zwrot siły (kx) i przyśpieszenia $\frac{dx^2}{dt^2}$ posiadają zwroty zgodne, ruch przeto takiego punktu jest ciągle przyśpieszony. W przypadku zaś:

3) gdy $k = 0$, siła działająca na punkt $= 0$; ruch zatem jest jednostajny.

Jeżeżeli więc w równaniu ruchu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0;$$

$k > 0$, to ruch jest harmoniczny; jeżeli;

$k < 0$ „ „ „ ciagle przyśpieszony i jednozwrotny-nieokresowy, jeżeli zaś;

$k = 0$ „ „ „ jednostajnie przyśpieszony.

Te same wnioski odnoszą się do przypadku, w którym wyraz kx zastąpimy wyrazem ogólniejszym $f(x)$. Wyraz ten możemy również uważać za wyraz siły, i powiemy: jeżeli w równaniu ruchu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0,$$

dla warteści x, zawartych np. między granicami x_1 i x_2, wartość $f(x) > 0$, to rúch w położeniach punktu, określonych temi granicami, jest opóźniony, gdy oddala się od środka; jeżeli zaś $f(x) < 0$, to jest on ciągle przyśpieszony, w przypadku zaś, gdy $f(x) = 0$, to on jest jednostajny.

Jeżeli mamy równanie o postaci:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dt}{dt} + kx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (147)$$

to, przyjąwszy dwa ostatnie wyrazy za wyrazy sił; napiszemy je w postaci:

$$-c\frac{dx}{dt} - kx = \frac{d^2x}{dt^2},$$

z którego wynika, że siła $c \frac{dx}{dt}$ podczas ruchu punktu zmienia swój zwrot ze zmianą zwrotu prędkości. Jeżeli $c > 0$, to siła $c \frac{dx}{dt}$ wstrzymuje jego ruch; ruch przeto punktu będzie ciągle tą siłą przytłumiany; lecz punkt pomimo tego nie zatrzyma się, gdyż wtedy siła $c \frac{dx}{dt}$ byłaby $= 0$; a siła kx wywołałaby ruch; może więc tylko następować, asymptotyczne wygasanie prędkości i siły kx.

Jeżeli zaś $c < 0$, to zwrot siły $c \frac{dx}{dt}$ jest zgodny ze zwrotem prędkości, punkt przeto pod działaniem tej siły, jest ciągle przyśpieszony. Algebraiczna analiza równ. 38'-tego, podana w § 11-tym tego tomu, doprowadziła nas do wniosku, że o ile pierwiastki równania:

$$m\rho^1 + c\rho + k = 0; \; \rho = -\left(\frac{c}{2m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - k},$$

są urojone, to ruch jest harmoniczny. Przypadek ten wcale nie zachodzi, jeżeli $k < 0$, t. j. jeżeli siła odpycha dany punkt od środka, jeżeli zaś $k > 0$, to może nastąpić ruch harmoniczny przy pewnym stosunku wartości c i k. Jeżeli ten przypadek zachodzi i przytem c jest dodatne, to ruch jest harmoniczny przytłumiony, porów. równ. 43-cie; jeżeli zaś wartość c jest odjemną, to łatwo odczytać z równ. 43-go, że ruch jest harmoniczny wymuszony. Jeżeli zaś pierwiastki równania powyższego są rzeczywiste, to ruch jest nieokresowy. Przypadek ten następuje zawsze, gdy $k < 0$; a dla pewnych tylko stosunków wartości c i k; gdy $k > 0$.

Z wniosków tych korzystać będziemy przy badaniu właściwości ruchu na podstawie równania dynamicznego.

---

6. Kinetyczny układ odniesienia i kinetyczna miara czasu.

64. Kinetyczny układ odniesienia. Jeżeli mówimy o zmianie miejsca punktu ruchomego w przestrzeni, to zawsze mamy na myśli pewien określony układ punktów, względem którego ta zmiana następuje; układ ten nazwiemy układem odniesienia ruchu danego punktu. Położenie punktu określamy zwykle odległościami jego od danego układu odniesienia; ruch zaś jego zmianami tych odległości w czasie, t. j., wyrażamy t. zw. równaniami ruchu.

Lecz sposób ten określania ruchu, chociaż jest zupełnie ścisły, w każdej bowiem chwili pozwala wyznaczyć położenie punktu ruchomego względem obranego układu odniesienia, pozostawia jednakże pod względem fizycznym pewną wątpliwość; z tych bowiem odległości czy też z równań ruchu nie dowiemy się, czy punkt dany jest w ruchu, czy też układ porusza się.

Pod względem też **geometrycznym** obojętnem jest np. czy ziemia obraca się około słońca, w myśl teoryi Kopernika, czy też słońce z całym układem gwiazd obraca się około ziemi, w myśl teoryi Ptolomeusza, wzajemne bowiem odległości tych brył i zmiany tych odległości pozostają w obydwóch przypadkach te same; nie znamy przeto możności rozstrzygnięcia tej wątpliwości drogą pomiarów.

Z tego też powodu, oddalając się np. statkiem od brzegu, wydaje się nam chwilami, że brzeg oddala się od statku. Przyczyną tego złudzenia jest właśnie ta okoliczność, że obserwując dane zjawisko, bierzemy pod uwagę odległości statku od brzegu, które się zmieniają, a które nie orzekają, co się w danym razie porusza. Jeżeli zaś statek i my wraz z nim doznajemy pewnych wstrząśnień; t. j. pewnych raptownych przyśpieszeń, wtedy powiemy, że to statek się porusza. Dla rozstrzygnięcia przeto tej wątpliwości, korzystamy w danym razie z pewnej **fizycznej** właściwości, poruszających się brył materyalnych i ta właściwość dopiero rozstrzyga, która z nich się porusza.

Właściwością tą jest w zjawiskach ruchu brył materyalnych bezwładność materyi; jeżeli ją uwzględnimy, to otrzymamy ściśle określony w przestrzeni układ, do którego będziemy zmuszeni odnosić wszelkie ruchy brył materyalnych; układ ten nazywają niektórzy autorzy **układem kinetycznym** [1]); inni zaś, dają mu miano układu bezwzględnego; miano, które zresztą nic nie wyraża; pojęcie bowiem „bezwzględności" jest słowem pustem — bez treści, któremu możemy nadać dowolne znaczenie.

Prawo bezwładności, które jest stwierdzone doświadczeniami, głosi, że punkt, pozostawiony sam sobie, trwa w stanie ruchu jednostajnego lub w stanie „spoczynku" i t. d.; gdybyśmy przeto mogli ustalić w przestrzeni położenie np. trzech punktów materyalnych, niepodlegających działaniu żadnych czynników zewnętrznych, otrzymalibyśmy układ odniesienia, posiadający tę właściwość, że każdy inny punkt materyalny pozostawać będzie, bez udziału czynników zewnętrznych, względem tych punktów w spoczynku lub w ruchu prostolinijnym jednostajnym. Zrozumiałem jest, że nie idzie w danym razie o układ odniesienia, złożony z trzech punktów; lecz mowa jest o jakimkolwiek układzie punktów, osi lub powierzchni, byle można było jednoznacznie określić względem nich położenie punktu w przestrzeni.

Oparłszy się przeto na prawie bezwładności, przyznać musimy możność wyznaczenia w przestrzeni pewnego układu odniesienia, względem którego punkt materyalny, posiadający w danej chwili pewną prędkość, zakreśli bez udziału czynników zewnętrznych ruchem jednostajnym tor prostolinijny; — lub pozostawać będzie w spoczynku, gdy nie posiadał prędkości początkowej względem tych punktów.

---

[1]) Dział mechaniki, w którym rozpatrujemy związki pomiędzy położeniami punktu i czasem, nazywamy kinematyką; dział zaś, w którym ustalamy związki pomiędzy masą punktu, jego położeniem i czasem nazywamy kinetyką. Greckie *κινημα* wyraża ruch jako stan poruszającej się bryły; a *κινησις* wyraża—wywoływanie ruchu. Kinematyka stosuje do swych rozpatrywań długość i czas, t. j. stosuje wielkości L i T; kinetyka zaś oprócz tych wielkości stosuje jeszcze masę, t. j. stosuje wielkości M, L i T. Prędkości przyśpieszenia są np. wielkościami kinematycznemi, lecz energia jest wielkością kinetyczną.

Wyznaczenie położenia tego układu w przestrzeni jest celem naszych rozpatrywań i może być on osiągnięty tylko drogą spostrzeżeń i doświadczeń. Szukając tego układu w przestrzeni nasuwa się przedewszystkiem pytanie, dlaczego np. nie ma być nim układ, sztywno związany z bryłą ziemską? Odpowiedź na to dają doświadczenia; pomiary bowiem np. ruchu punktu materyalnego, wyrzuconego z pewną prędkością lub upuszczonego bez prędkości z powierzchni ziemi, wykazują, że nie zakreśla on względem ziemi toru parabolicznego, jakiby powinien zakreślić zgodnie z rachunkiem, opartym na prawie bezwładności, odniesionem do układu związanego z bryłą ziemską; a zakreśli on parabolę, lecz w innym układzie odniesienia; w układzie, który w przybliżeniu uważać można za związany z tak zwanemi gwiazdami stałemi.

Jeżeli przeto przyjmiemy tytułem próby, że punkt ten zakreśla tor paraboliczny względem układu, związanego z gwiazdami stałemi, i jeżeli przyjmiemy, jak nam dyktuje teorya Kopernika, że ziemia jest w ruchu względem tego układu, to możemy obliczyć sposobami, wskazanymi w rozdziale o ruchu względnym, w jakiem np. miejscu upadnie ten punkt na jej powierzchnię; a w razie zgodności wyników tego rachunku z pomiarami przyjdziemy do wniosku, że nasze założenie, co do ruchu ziemi względem gwiazd stałych, jest słuszne i, że punkt materyalny, pozostawiony sam sobie z pewną prędkością początkową, zakreśliłby tor, który byłby prostolinijny względem układu sztywno związanego z tak zwanemi gwiazdami stałemi. Można przeto na razie przyjąć, że układ kinetyczny jest sztywno związany ze stałemi gwiazdami.

Należy mieć jednakże na uwadze, że wniosek ten oparty jest na pomiarach, które z natury swojej nie są ścisłe; położenie więc tego układu, jako niezmiennego układu względem gwiazd stałych, należy uważać za zbliżone tylko do układu kinetycznego, o który nam chodzi.

Układ przeto odniesienia, sztywno związany z gwiazdami, z dostateczną tylko dokładnością dla zjawisk ziemskich uważać można za układ kinetyczny; t. j. za układ, względem którego punkt materyalny, pozostawiony sam sobie, zakreśli tor prostolinijny ruchem jednostajnym, lub pozostawać będzie w spoczynku. Ruchy zaś ciał niebieskich, obliczone na podstawie prawa bezwładności, nie mogą być odniesione do tego układu; a muszą być odniesione do układu, jaki w rzeczywistości wyznacza bezwładność materyi.

Przy rozpatrywaniu przeto ruchu punktu, jako zjawiska **geometrycznego**, obojętnem jest, w jakim stanie ruchu znajduje się układ odniesienia, gdyż w danym razie idzie nam tylko o ruch punktu względem tego układu. Jeżeli zaś rozpatrujemy ruch punktu **materyalnego**, uwzględnić musimy jego bezwładność; a wtedy ruch tego punktu należy odnieść do jednego jedynego układu; t. j. do układu, w którym zachowane jest prawo bezwładności; w tym bowiem tylko razie wyniki obliczeń będą zgodne z rzeczywistym przebiegiem zjawiska.

W szczególnych jednakże dziedzinach zjawisk ruchu, gdy ruch odbywa się na niewielkim obszarze, możemy przyjąc z pewnem przybliżeniem, że układ kinetyczny jest sztywno związany z bryłą ziemską. W jakich przypadkach można to przyjąć, sądzić będziemy mogli z przykładów, które przytoczymy w tym jeszcze dziale, jak również w dziale dynamiki brył, traktującym o giroskopach; zaznaczamy w tem miejscu, że w technice, chociaż zjawiska ruchu odbywają się względnie na niewielkim obszarze, stosowanie jednakże układu kinetycznego staje się w wielu przypadkach niezbędnem.

W celu uzupełnienia podstaw, na których rozpatrujemy ruchy punktów lub brył materyalnych, damy jeszcze określenie miary czasu.

65. Kinetyczna miara czasu. Do „pojęcia“ czasu dochodzimy drogą porównania, zachodzących w naszych oczach zjawisk z podobnemi zjawiskami, poprzednio spostrzeganemi, a których wrażenia pozostały w naszej pamięci; inaczej mówiąc, pojęcie czasu powstaje w naszym umyśle, gdy spostrzegamy „następstwo“ zjawisk.

„Miarą“ czasu może być przeto każda dostrzegalna zmiana, zachodząca w świecie fizycznym; i żadna z tych zmian nie ma w tym względzie pierwszeństwa przed inną zmianą. Dla badań ruchu brył **materyalnych** przyjmiemy jako miarę czasu zmianę ich położeń w przestrzeni; gdy, po nadaniu im pewnej prędkości, „pozostawimy je samym sobie“; t. j. za miarę czasu przyjmiemy długość drogi, jaką zakreśli np. punkt materyalny, pozostawiony sam sobie, i przyjmiemy, że równym odcinkom tej drogi odpowiadają równe odstępy czasu. Taką miarę czasu nazwiemy miarą kinetyczną czasu, lub krótko — **czasem kinetycznym**, podobnie do nazwy układu kinetycznego, i do tak pojmowanego czasu będziemy odnosili trwanie ruchów wszystkich brył materyalnych. Na podstawie takiego określenia miary czasu i układu odniesienia możemy mówić np. o nierównomierności obrotu ziemi około własnej osi; a nawet możemy mówić o ruchu t. zw. gwiazd stałych.

Z podanego określenia „układu odniesienia i miary czasu“ wynika, że nie są to określania tak zwane bezwzględne; lecz są to określenia względne, — oparte na właściwościach zjawisk ruchu **brył materyalnych**; są to przeto określenia zgodne ze stanowiskiem, jakie zajmujemy we wszystkich działach wiedzy naszej i ze stanowiskiem, jakie wyznaczają nam nasze zdolności poznawcze.

Z tych określeń wynika, że inne zjawiska fizyczne mogą wymagać innego układu odniesienia oraz innej miary czasu; a gdy ta potrzeba zajdzie, wtedy utworzymy inny układ odniesienia oraz inną miarę czasu w ten sposób, ażeby dana grupa zjawisk mogła być dokładnie odwzorowana w tym układzie i jej przebieg— wyrażony obraną miarą czasu.

Taką grupę zjawisk stanowią zjawiska elektromagnetyczne, które przynajmniej dotychczas niemożemy podciągnąć pod prawa Newtonowskie; dla tych przeto zjawisk wypadnie utworzyć inny układ odniesienia, — inną miarę czasu. Określenia przeto układu i miary czasu, tutaj podane, niewykluczają możności w razie potrzeby naukowej stawiania innych określeń tego rodzaju.

Może nam się wydać, że określenia układu kinetycznego i miary czasu tworzą z treścią prawa bezwładności błędne koło rozumowania; prawo to bowiem głosi, że punkt materyalny, pozostawiony „sam sobie“, zakreśla tor prostolinijny ruchem jednostajnym; gdy tymczasem określenie ruchu prostolinijnego, jak również określenie ruchu jednostajnego (które wymaga miary równych odstępów czasu), opieramy na bezwładności materyi; lecz tej sprzeczności niema, dla utworzenia bowiem miary czasu wystarcza ruch jednego tylko punktu materyalnego, do tego bowiem ruchu odnieść można ruchy wszystkich innych punktów materyalnych.

Prawo przeto bezwładności należy pojmować w następujący sposób: punkty materyalne, wyrzucone w przestrzeni, z której usunięto wszystkie czynniki zewnętrzne, zakreślają tory prostolinijne ruchem takim, że równym odcinkom, zakreślonym przez **jeden** punkt materyalny, odpowiadają jednocześnie równe między sobą odcinki torów, jakie zakreśla **każdy** inny punkt materyalny, wyrzucony w tejże przestrzeni. Doniosłość przeto prawa bezwładności polega właśnie na takiem uogólnieniu danego zjawiska fizycznego. Zwrócić należy naszą uwagę, że na takiem samem uogólnieniu opiera się określenie miary siły i miary masy; porów. str. 3-cią tego tomu.

Dla utworzenia miary czasu wystarcza ruch jednego punktu materyalnego, wyrzuconego w przestrzeń; dla wyznaczenia zaś układu odniesienia, względem którego każdy inny punkt materyalny zakreśli tor prosrolinijny, należy wyrzucić w przestrzeń dwa takie punkty, jeżeli kierunki ich się mijają; lub — trzy, gdy kierunki ich się przecinają; te trzy kierunki mogą być uważane za zwykłe osi spółrzędnych ukośnokątnych lub prostokątnych.

Trudności jednakże fizycznej natury, jakie spotykamy przy urzeczywistnieniu warunków, w jakich znajdować się mają punkty materyalne, wyznaczające układ odniesienia i czas, są nieprzezwyciężone; nie możemy bowiem usunąć ze świata fizycznego czynników, oddziaływających ne ruch punktów materyalnych; możemy jednakże postawić te czynniki w takiem wzajemnem uwarunkowaniu, że działania ich będą się znosić; lub też uwzględnimy te działania, wprowadziwszy je do obliczeń ruchu punktu; a wtedy, wyraziwszy ruch równaniem np. postaci $s = f(t)$, będziemy mogli obliczyć położenia punktu, w jakich on się znajduje w równych odstępach czasu, t. j. w takich odstępach, w jakich każdy inny punkt materyalny zakreśliłby równe między sobą odcinki drogi, gdyby był pozostawiony „sam sobie“.

Szczególnem zastosowaniem tej metody mierzenia czasu jest np.: mierzenie za pomocą wahadła pospolitego. Podstawą bowiem obliczenia tego ruchu jest prawo bezwładności, które uwzględniamy, wprowadzając do rachunku siłę odporową. Wynikiem tego rachunku jest np., że okresy wahnięć są wzajemnie równe; miarą przeto równych odstępów czasu będzie czas, jaki upływa np. pomiędzy dwoma krańcowemi położeniami wahadła; tym samym bowiem odstępom czasu odpowiadałyby równe między sobą odcinki drogi, jakieby zakreślił każdy inny punkt materyalny; gdyby był „pozostawiony sam sobie“.

Porównania prędkości obrotu kuli ziemskiiej, zdobyte drogą ścisłych pomiarów, z czasem kinetycznym, wykazują, że prędkości te bardzo mało różnią się między sobą, t. j., że równym odstępom czasu kinetycznego odpowiadają chociaż niezupełnie równe lecz prawie równe kąty obrotu ziemi; i że różnice te są tak niewielkie, że w naszych ziemskich doświadczeniach mogą być nie uwzględnione; w astronomicznych jednakże obserwacyach nie mogą być pominięte. Praktyczną przeto jednostką czasu może pozostać dla naszych rozpatrywań sekunda; jako pewna część obrotu kuli ziemskiej.

7. Ruch złożony punktu materyalnego.

A. Układ odniesienia złożonego ruchu punktu materyalnego.

66. Kinematyka ruchu złożonego. W rozdziałach poprzednich rozpatrywaliśmy ruch punktu po krzywych lub powierzchniach, pozostających w spoczynku. W otaczających nas jednakże zjawiskach fizycznych jak i w technice spotykamy się z ruchem punktów materyalnych (w ogóle brył) po krzywych, które są w ruchu. W tych rozpatrywaniach stosować będziemy wielkości, określone w § 75-tym tomu I-ego, oraz — równania 60-te i 71-sze, dające związki pomiędzy temi wielkościami[1]); równania te są nast.:

$$\overline{v}_b = \overline{v}_w + \overline{v}_u; \text{ oraz} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (148)$$

$$\overline{p}_b = \overline{p}_w + \overline{p}_u + 2\,V\overline{v}_w\overline{\varphi}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (149)$$

które przekształca się w przypadku postępowego ruchu toru ($\varphi = 0$) na:

$$\overline{p}_b = \overline{p}_w + \overline{p}_u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

Nasuwa się pytanie czy wzory te odnoszą się do układu, pozostającego w spoczynku czy też w ruchu. Z rozpatrywań § 75-go tomu I-go wynika, że wzory te pozostają w swej mocy w obydwóch przypadkach; na zasadzie bowiem prawa superpozycyi możemy wielkości kinematyczne dodawać; aby tylko dany punkt i dany tor, po którym on się porusza, wykonywał ruch razem z tym układem. Jeżeli przeto idzie tylko o geometryczne pojęcie ruchu, to jest obojętnem, czy dany układ odniesienia jest w spoczynku czy też w ruchu, abyśmy tylko stan jego ruchu ściśle określili; jeżeli zaś weźmiemy pod uwagę bezwładność materyi, to położenie tego układu jest już ściśle w przestrzeni określone. Układem tym jest układ kinetyczny, w rozdziale poprzednim określony i względem niego obliczać będziemy wszelkie ruchy punktów materyalnych; jak i ruchy torów poruszających się.

Powstanie wypadkowego przyśpieszenia punktu, jakiego on doznaje w ruchu złożonym, przedstawimy sobie bezpośrednio, gdy zważymy, że przyrost

---

[1]) W § 76-tym tomu I-go podaliśmy obliczenie prędkości wypadkowej dla przypadku, gdy tor był w ruchu postępowym; do obliczenia zaś tej prędkości dla przypadku, gdy tor jest w ruchu dowolnym daliśmy tylko wskazówki. Ażeby jednakże nie pozostawiać luki w wykładzie, omówimy szczegółowiej sposób tego obliczenia. Jeżeli tor ruchomy x przechodzi z pewnego położenia x_1 do innego dowolnego położenia x_2, to można go zawsze przeprowadzić z jednego położenia do drugiego ruchem obrotowym oraz postępowym. Można przeto sobie wyobrazić na zasadzie prawa superpozycyi, że ruch wypadkowy tego punktu składa się z tych kolejnych ruchów: z ruchu wzdłuż toru i z ruchu unoszącego razem z torem; ruch unoszący można przyjąć, że składa się z ruchu po kole podczas obrotu toru i z ruchu postępowego wraz z torem. Ponieważ przesunięcie po kole jest wielkością nieskończenie małą rzędu drugiego w porównaniu z wielkościami pozostałych przesunięć; jest ono bowiem równe iloczynowi z nieskończenie małego przesunięcia wzdłuż toru, jako promienia koła, oraz z nieskończenie małego kąta obrotu, możemy przeto wyraz tego ruchu, przy przejściu do granic, opuścić, a otrzymamy wzór, wyrażający sumę przesunięć, t. j. sumę prędkości względnej i unoszącej.

prędkości punktu, będącego w ruchu złożonym, można uważać na zasadzie prawa superpozycyi za złożony:

a) z przyrostu prędkości, jaki powstaje podczas ruchu punktu po torze nieruchomym, t. j. z wielkości $d\overline{v}_w$;

b) z przyrostu prędkości, jaki powstaje wskutek ruchu punktu razem z torem; gdy wyobrazimy sobie punkt umocowanym do toru; przyrost ten oznaczyliśmy wyrazem $d\overline{v}_u$; i

z przyrostu prędkości, jaki powstaje podczas obrotu toru, gdy wyobrazimy sobie, że wektor prędkości danego punktu obraca się razem z torem, jak gdyby był do niego przymocowany. Przyrost ten składa się z dwóch przyrostów:

c) z przyrostu wektora prędkości $\overline{v}_w$, jaki powstaje wskutek obrotu jednej cząstki toru, wzdłuż której punkt się posuwa; przyrost ten wyrazimy wzorem; porów. rys. 118-ty tomu I-ego:

$$V\,\overline{v}_w \,.\, \overline{\varphi} \,.\, dt;$$

gdzie $\overline{\varphi} \,.\, dt$ wyraża nieskończenie mały obrót toru; oraz

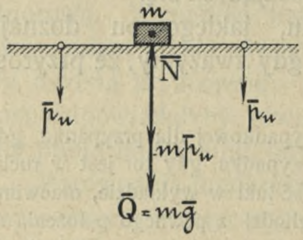
d) z przyrostu, jakiego doznaje wektor prędkości wskutek obrotu następnej cząstki toru, po której punkt przebiega z prędkością $(\overline{v} + d\overline{v})$; przyrost ten wyrazimy wzorem:

$$V\,(\overline{v}_w + \triangle\,\overline{v}_w) \,.\, (\overline{\varphi} + \triangle\,\overline{\varphi}) \,.\, dt;$$

a suma tych czterech przyrostów, rozdzielona przez dt, da wyraz wypadkowego przyśpieszenia punktu.

B. Ruch punktu po torze, będącym w ruchu postępowym.

67. Przykład. Na podstawie poziomej spoczywa bryła materyalna o ciężarze mg; (którą wyobrażamy sobie w postaci punktu). Ciężar tej bryły wywołuje w podstawie siłę odporową N. Przyjmijmy, że podstawa ta posuwa się pionowo ku dołowi z przyśpieszeniem stałem $\overline{p}_u$. Obliczyć ruch tej bryły względem podstawy i siłę odporową N.



Rys. 46

Na punkt dany działa w tych warunkach siła $(\overline{Q} + \overline{N})$; a punkt posiada przyśpieszeniu $\overline{p}_w$ i $\overline{p}_u$. Wobec małego obszaru przestrzeni, w jakim zachodzl dane zjawisko ruchu, przyjmiemy, że układ kinetyczny jest sztywno związany z ziemią. Pionowy przeto kierunek przyjąć można za oś nieruchomą, względem której odbywa się ruch bryły i podstawy. W odniesieniu przeto do tego układu równanie dynamiczne jest nast.:

$$(\overline{Q} + \overline{N}) = m\,(\overline{p}_w + \overline{p}_u).$$

Zastąpimy to równanie wektorowe równaniem algebraicznem, gdy zrzutujemy wielobok wektorów, przedstawiony przez nie, na prostopadłą do podstawy; równanie to jest nast.:

$$1)\quad Q - N = mp_u;$$

przyśpieszenie bowiem $\bar{p}_w$, zgodnie z warunkami zadania, może posiadać tylko kierunek wzdłuż podstawy, rzut przeto jego na oś prostopadłą do niej $= 0$. Ażeby zaś je obliczyć, zrzutujmy równanie powyższe na kierunek podstawy, a otrzymamy równanie:

$$2) \quad 0 = p_w.$$

Punkt przeto w tych warunkach pozostaje na podstawie w spoczynku; co wysłowimy, że jest on w równowadze względnej.

Jeżeli daną jest siła Q oraz przyśpieszenie podstawy p_u, to obliczymy z równ. 1-ego:

$$N = Q - mp_u; \text{ lub inaczej } N = m(g - p_u).$$

Siła zatem odporowa podstawy, na której spoczywa punkt, jest wielkością zależną od przyśpieszenia tejże podstawy.

Szczególne przypadki:

1) gdy $p_u = 0$, wtedy

$$N = mg;$$

t. j. gdy podstawa jest w spoczynku, wtedy siła odporowa równa się ciężarowi punktu; co jest zrozumiałe bezpośrednio; zachodzi bowiem w danym przypadku zwykły stan równowagi;

2) gdy $p_u = g$; wtedy siłą odporowa:

$$N = 0;$$

i rzeczywiście, podstawa i punkt materyalny posiadają w tym razie ruch o jednakowem przyśpieszeniu; biegną więc do sobie równolegle, nie wywierając na siebie ani ciągnienia ani ciśnienia;

3) gdy $p_u > g$; otrzymamy siłę odporową:

$$N < 0;$$

t. j. siłę, posiadającą w tym razie znak przeciwny, przyjętemu za dodatny. Należy zatem punkt dany przymocować do podstawy, jeżeli ma on na niej pozostawać;

4) gdy $p_u < 0$, t. j. gdy przyśpieszenie podstawy zwrócone jest ku górze, wtedy siła odporowa jest zawsze skierowaną ku górze i posiada większe wartości, niż w przypadku, w którym przyśpieszenie p_u było zwrócone zgodnie ze zwrotem przyśpieszenia g. Zjawiska tego ruchu spostrzegać można, będąc np. w windzie w chwili, gdy winda rozpoczyna swój ruch lub też w chwili, gdy zatrzymuje się; w tych bowiem chwilach ruch jest przyśpieszony lub zwolniony. Podczas np. zatrzymywania się windy przyśpieszenie jej zwrócone jest ku górze; t. j. $p_u = -p'_u$, a więc:

$$N = m(g + p'_u);$$

spostrzeżemy też w danym razie silne ugięcie sprężyn krzesła, na którym siedzimy w windzie; co jest wynikiem powiększenia się siły odporowej sprężyn. Podczas jednostajnego ruchu windy nieodczuwamy żadnych zmian w siłach odporowych, w tym bowiem ruchu $p_u = 0$.

Zwrócić jednakże należy uwagę, że w przykładzie tym punkt ruchomy znajduje się w równowadze względnej; gdyż niewykonywa on ruchu względem toru, na którym spoczywa; nie jest on jednakże w równowadze bezwzględnej, posiada bowiem pewne przyśpieszenie p_b.

Rozpatrzmy następnie ruch punktu ciężkiego, gdy tor prosty jest nachylony pod kątem α względem poziomu i jest w ruchu postępowym o przyśpieszeniu stałem, zwróconem np. pionowo ku dołowi. Punkt dany znajduje się w danym razie, pod działaniem siły ciążenia $\overline{Q}$ i siły odporowej $\overline{N}$ normalnej do toru poruszającego się; równanie przeto dynamiczne jest następ.:

$$\overline{Q}+\overline{N}=m\overline{p_w}+m\overline{p_u} \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

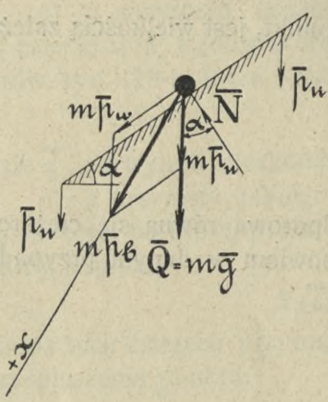


Fig. 47.

W celu obliczenia przyśpieszenia p_w, zrzutujemy to równanie na kierunek toru; ażeby zaś obliczyć przyśpieszenie p_u zrzutujemy je na normalną do niego; rzutowania te dają dwa równania algebraiczne:

1) $Q \sin\alpha = mp_w + mp_u \sin\alpha$; oraz

2) $Q \cos\alpha - N = mp_u \cos\alpha$.

Gdy wielkość Q, p_u oraz α są dane, wtedy obliczymy dwie niewiadome p_w i N.

Z pierwszego przeto równania:

$$p_w = (g - p_u)\sin\alpha;$$

z drugiego zaś:

$$N = m(g - p_u)\cos\alpha.$$

Szczególne przypadki:

1) gdy $p_u = 0$; wtedy:

$$p_w = g\sin\alpha, \text{ a } N = Q\cos\alpha.$$

Jest to zwykły przypadek ruchu punktu ciężkiego po prostej pochyłej, pozostającej w spoczynku; porów. § 46-ty;

2) gdy $p_u = g$; wtedy $N = 0$; oraz $p_w = 0$ niezależnie od kąta α; punkt przeto wykonywa w tym razie ruch, jak gdyby był swobodny;

3) gdy $p_u > g$; t. j., gdy przyśpieszenie unoszące zwrócone jest ku dołowi i jest większe od g; wtedy:

$$N = -m(p_u - g)\cos\alpha;$$

t. j. siła normalna do toru jest odjemna; punkt zatem ruchomy ma dążność oderwania się od toru. Przyśpieszenie względne w danym razie:

$$p_w = -(p_u - g)\sin\alpha;$$

t. j. punkt ruchomy porusza się po torze ku górze;

4) gdy $p_u < 0$ t. j., gdy przyspieszenie unoszące zwrócone jest ku górze; wtedy po podstawieniu $p_u = -p_u'$ otrzymamy:

$$N = m\,(g + p'_u)\cos\alpha; \text{ oraz}$$

$$p_w = (p_u' + g)\sin\alpha.$$

Siła normalna jest w tym - przypadku zawsze dodatną, jak również przyśpieszenie wzdłuż toru; ruch zatem względny zawsze jest zwrócony ku dołowi.

Siłę względną t. j. siłę, która jest wstanie wywołać taki sam ruch punktu po torze, pozostającym w spoczynku, jaki on posiada podczas ruchu toru, obliczymy ze wzoru:

$$P_w = mp_w = m(g - p_u)\cos\alpha.$$

Siła ta może być dodatną lub odjemną; zależnie od tego czy $g \gtrless p_u$.

W celu obliczenia toru bezwzględnego punktu ruchomego, t. j. toru, jaki dany punkt zakreśla w przestrzeni nieruchomej (do której odnosimy siły Q i N); napiszemy bezpośrednio na zasadzie prawa superpozycyi:

$$\overline{p}_b = \overline{p}_w + \overline{p}_u \qquad \text{. . . . .} \qquad (152)$$

Ponieważ tor w danym przykładzie jest w ruchu postępowym ze stałem przyśpieszeniem i jest on prostolinijny; przyśpieszenie przeto względne ma stały kierunek w przestrzeni, równoległy do toru; jeżeli następnie przyjmiemy, że przyśpieszenie ruchu unoszącego jest także niezmienne; to przyśpieszenie bezwględne posiada stały kierunek i stałą wartość, którą obliczymy z powyższego równania. Ruch zatem bezwzględny punktu ruchomego, przy omówionych warunkach, będzie się odbywał w ten sposób, jak gdyby na niego działała jedna tylko siła stała $m\overline{p}_b$. Ruch takiego punktu rozpatrywaliśmy w § 17-ym i dowiedliśmy tam, że tor jego jest prostolinijny, gdy punkt nie posiada prędkości początkowej lub gdy ją posiada w kierunku przyśpieszenia. Gdy więc punkt dany posiada w początku ruchu bezwzględną prędkość równą zeru, torem jego jest prosta linia, której kierunek wyznaczymy z powyższego równania; jeżeli zaś będzie temu punktowi nadana w początku jego ruchu pewna prędkość bezwzględna $\overline{v}_{b,0}$, która może być wynikiem dwóch prędkości $(\overline{v}_{w,0} + \overline{v}_{u,0})$; to torem jego jest parabola; a kierunki wektorów $\overline{p}_b$ i $\overline{v}_{b,0}$ są kierunkami jej osi sprzężonych; porów. § 17-ty.

Jeżeli tor ruchomy posiada przyśpieszenie stałe, lecz dowolnie skierowane w przestrzeni, to sposób wyznaczenia ruchu punktu jest jednakowy z poprzednim. Niech np. na rys. 48-ym m oznacza położenie początkowe punktu na torze unoszącym; p_u przyśpieszenie toru, to czworobok A, B, C, D jest geometrycznym wyrazem równania 151-ego; i jest on zestawiony ze znanych boków $\overline{Q}$ i $m\overline{p}_u$ oraz ze znanych kierunków $m\overline{p}_w$ i $\overline{N}$.

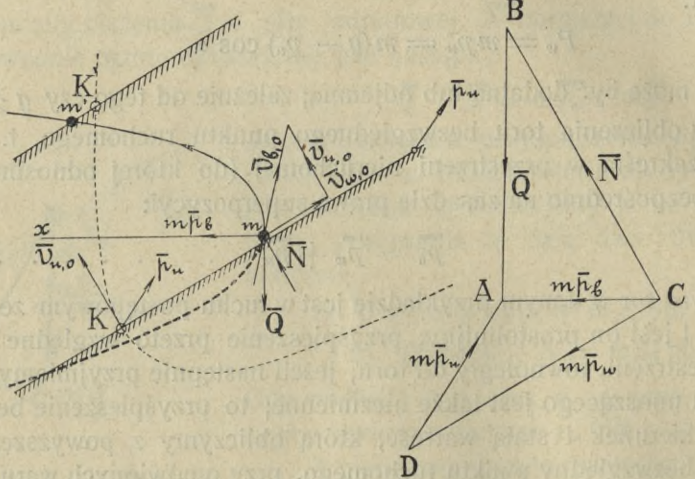
Jeżeli punkt nie posiadał początkowej prędkości względnej, i tor nieposiadał prędkości bezwzględnej, to kierunek odcinka:

$$\overline{CA} = m\overline{p}_w + m\overline{p}_u,$$

wyznacza kierunek bezwzględnego toru, jaki punkt ruchomy zakreśla, a prosta $mx \parallel CA$ jest tym torem. Gdy zaś punkt otrzymał prędkość początkową $\overline{v}_{w,0}$, i tor— prędkość $\overline{v}_{u,0}$, wtedy torem bezwzględnym jest parabola.

Na rys. 48-ym parabola (mm') jest torem bezwzględnym danego punktu; parabola zaś (KK') jest torem, jaki zakreśla pewien punkt K toru ruchomego.

Zadanie. Jaki będzie ruch punktu, znajdującego się w powyższych warunkach, gdy nieuwzględnimy ciężaru bryły tylko jej masę. Przypadek ten zachodzi, gdy np. tor porusza się w płaszczyźnie poziomej, a ciężar punktu jest zrównoważony siłą odporową tej płaszczyzny.



Rys. 48.

68. Przykład. Przyjmijmy, że tor unoszący nie jest prosty lecz kołowy i porusza się w płaszczyźnie pionowej ruchem postępowym z przyśpieszeniem $\overline{p}_u$ stałem, zwróconem np. pionowo ku dołowi. Obliczyć ruch bezwzględny tego punktu, t. j. ruch jego po kole.

Fizycznie możemy przedstawić sobie ten przykład w postaci wahadła płaskiego z nicią sztywną, którego płaszczyzna wraz z punktem zawieszenia opuszcza się pionowo ze stałem przyśpieszeniem p_u.

Równanie dynamiczne tego ruchu jest nast.:

$$\overline{Q} + \overline{N} = m\overline{p}_w + m\overline{p}_u \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (153)$$

Ażeby wyrugować z rachunku nieznaną siłę N, zrzutujmy to równanie na styczną do toru, przeprowadzoną w dowolnem położeniu punktu, określonem kątem σ, jaki tworzy z pionem promień wodzący, wyprowadzony ze środka koła do danego położenia punktu; a otrzymamy równanie:

$$Q \sin \sigma = mp_{w,t} + mp_u \,.\, \sin \sigma;$$

w którem $p_{w,t}$ oznacza rzut przyśpieszenia względnego na styczną do toru; po podstawieniu w to równanie:

$$Q = mg, \text{ oraz } p_{w,t} = -l\,\frac{d^2\sigma}{dt^2}\,;$$

otrzymamy równanie ruchu w postaci:

$$-l\frac{d^2\sigma}{dt^2} = (g - p_u)\sin\sigma.$$

Równanie to jest jednakowe z równaniem 103-ciem, wyrażającem ruch punktu po nieruchomym torze kołowym, gdy zamiast g podstawimy w nie $(g - p_u)$. Całka zatem powyższego równania jest ta sama, jakąśmy znaleźli przy obliczeniu wahadła w § 47-ym; należy tylko zastąpić w tamtych wzorach g wyrazem $(g - p_u)$.

Na zasadzie tego porównania, okres np. podwójnego wahnięcia wahadła z małem odchyleniem początkowem σ_0, opuszczającego się pionowo z przyśpieszeniem p_u; obliczymy ze wzoru 109-ego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - p_u}}.$$

Analiza tego równania da nam dosyć orginalny obraz ruchu tego wahadła. Jeżeli np. $p_u = 0$; to otrzymamy, że okres ten jest równy okresowi wahadła zwykłego i wzór powyższy przyjmie postać wzoru 109-ego.

Jeżeli p_u jest dodatne t. j. jeżeli przyspieszenie unoszące zwrócone jest ku dołowi, ten bowiem zwrot przyjęliśmy za dodatny, to wahadło dane będzie miało dłuższe okresy wahnięć niż wahadło, pozostające w spoczynku; i zegar np. wahadłowy, opuszczany z takiem przyśpieszeniem, będzie się w tych warunkach opóźniał. W chwili zaś zwalniania ruchu unoszącego, przyśpieszenie unoszące jest odjemne, a okresy wahnięć zegara będą krótsze, zegar będzie się śpieszył.

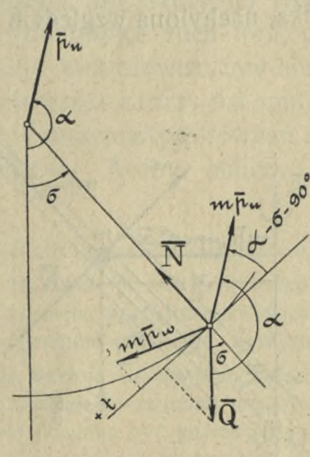
Jeżeli $p_u > g$, to czas wahnięcia jest urojony; przyjmijmy jednakże dla l znak odjemny, a otrzymamy wartości okresów wahnięć rzeczywiste. Przypadek ten zachodzi, gdy wahadło ma symetryczne położenie względem poprzedniego; i przypadek ten przedstawia wahadło, którego punkt zawieszenia jest niżej punktu ruchomego. Jeżeli, przedstawimy sobie ruch tego punktu po kole; to w tym przypadku punkt ruchomy wahać się będzie około wierzchołka koła.

Uogólnijmy to zadanie w ten sposób, że nadajmy wahadłu w jego płaszczyźnie ruch postępowy z przyśpieszeniem stałem, którego kierunek tworzy z pionem kąt α. Równanie dynamiczne tego ruchu posiada postać równania 153-ego; rzut zaś jego na styczną do toru będzie miał nieco zmienioną postać; a mianowicie, porów. rys. 49-ty:

$$Q\sin\sigma = mp_{w,t} - mp_u\sin(\alpha - \sigma).$$

W celu porównania tego wzoru z poprzednim, przyjmijmy, że przyśpieszenie unoszące jest zgodne z kierunkiem siły Q; a otrzymamy z niego równ., wyżej napisane.

Ażeby wytworzyć sobie dokładny obraz ruchu tego wahadła, znajdźmy położenie jego



Rys 49.

równowagi względnej, które określimy kątem σ', jaki tworzy z kierunkiem pionowym promień, przeprowadzony do tego położenia. W tym celu podstawimy w równanie powyższe $p_{w,t} = 0$, a otrzymamy po skróceniu przez m:

$$g \sin \sigma' = -p_u \cdot \sin (\alpha - \sigma') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (154)$$

z którego obliczymy kąt σ'; lub znajdziemy go wykreślając z trójkąta, zestawionego ze znanych wektorów $\overline{g}$ i $\overline{p_u}$.

C. Ruch punktu materyalnego po torze, będącym w ruchu obrotowym.

69. Równanie dynamiczne tego ruchu. W § 93-cim tomu I-go wykazaliśmy, że przyśpieszenie wypadkowe $\overline{p_b}$ punktu, poruszającego się po torze, będącym w ruchu obrotowym, równa się sumie z przyśpieszenia względnego $\overline{p_w}$, z przyśpieszenia $\overline{p_u}$ unoszącego, i z przyśpieszenia złożonego, określonego wzorem wektorowym $2\,\mathrm{V}\,\overline{v_w}\,.\,\overline{\varphi}$; a wynikającego ze zmiany położeń wektorów prędkości punktu, zachodzącej podczas obrotu toru; a zatem mamy równanie kinematyczne:

$$\overline{p_b} = \overline{p_w} + \overline{p_u} + 2\,\mathrm{V}\,\overline{v_w}\,.\,\overline{\varphi}\,;$$

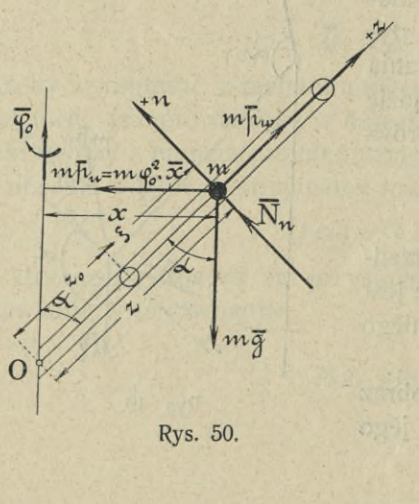
z którego otrzymamy dynamiczne, gdy przemnożymy je przez m, i zamiast iloczynu $m\overline{p_b}$ podstawimy siły zewnętrzne, działającą na dany punkt; a zatem mamy:

$$\overline{P} = m\overline{p_w} + m\overline{p_u} + 2\,m\,\mathrm{V}\,\overline{v_w}\,.\,\overline{\varphi}\,.$$

Jeżeli chcemy obliczyć ruch względny lub siłę względną, t. j. siłę która by wywoływała taki sam ruch danego punktu po torze, pozostającym w spoczynku, jaki ten punkt posiadał podczas ruchu toru, to napiszemy z tego równania:

$$m\overline{p_w} = \overline{P} - (m\overline{p_u} + 2\,m\,\mathrm{V}\,\overline{v_w}\,\overline{\varphi}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (155)$$

70. Przykład. Torem unoszącym jest rurka prosta wewnątrz doskonale gładka, nachylona względem osi pionowej pod kątem α; rurka ta obraca się około tej osi z prędkością stałą $\overline{\varphi_0}$, rys. 50-ty; w rurce umieszczony jest punkt materyalny ciężki; mogący poruszać się w niej bez tarcia. Obliczyć ruch względny tego punktu, jego tor bezwzględny oraz siłę odporową; gdy oś rurki przecina oś obrotu.



Rys. 50.

Na dany punkt działają przeto siły:

$$m\overline{g} \text{ oraz } \overline{N};$$

i wywołują przyśpieszenie, złożone z trzech wyżej określonych poszczególnych przyśpieszeń; równanie zatem dynamiczne tego ruchu jest nast.:

$$m\overline{g} + \overline{N} = m\overline{p_w} + m\overline{p_u} + 2m\,\mathrm{V}\,\overline{v_w}\,.\,\overline{\varphi_0} \quad (156)$$

Przyśpieszenie unoszące $\overline{p}_u$ jest w danym razie wynikiem ruchu punktu po kole poziomem o promieniu x, na którem w danej chwili znajduje się punkt ruchomy, jest zwrócone ku osi i równa się:

$$\overline{p}_u = \varphi^2 \cdot \overline{x}.$$

Przyśpieszenie zaś $2\,\mathrm{V}\,\overline{v}_w \cdot \overline{\varphi}_0$, w myśl danego określenia, jest prostopadłe do kierunku prędkości względnej i do kierunku osi obrotu, czyli jest prostopadłe do płaszczyzny, przechodzącej przez chwilowe położenie rurki i jest zwrócone zgodnie ze zwrotem obrotu; ponieważ rys. 50-ty przedstawia tę płaszczyznę, a więc przyśpieszenie to jest prostopadłe do tej płaszczyzny i jest zwrócone ku czytelnikowi [1]); a wartość jego równa się:

$$2\, v_w \varphi_0 \sin \alpha.$$

Z tego wynika, że wielobok wektorowy, przedstawiony przez powyższe równanie dynamiczne, nie leży w jednej płaszczyźnie; bo chociaż wektory

$$m\overline{g} \text{ i } m\overline{p}_u \quad \text{oraz} \quad m\overline{p}_u$$

leżą w płaszczyźnie biegunowej, lecz wektor przyśpieszenia złożonego, a więc i wektor siły odporowej, wielobok bowiem musi być zamknięty, wychodzą z tej płaszczyzny.

Równanie powyższe, jako równanie wektorowe, może być zastąpione w ogóle przez trzy równania algebraiczne, w których mogą być trzy algebraiczne niewiadome. Jedną niewiadomą jest przyśpieszenie p_w, które, ze względu na to, że znamy jego kierunek, przedstawia jedną niewiadomę algebraiczną. Nieznana zaś prędkość v_w pozostaje w związku kinematycznym z przyśpieszeniem $\overline{p}_w$, nie przedstawia zatem nowej niewiadomej; natomiast jest jeszcze nieznany wektor siły $\overline{N}$, który przedstawia w danym razie dwie tylko niewiadome algebraiczne; położenie bowiem płaszczyzny, w której on się znajduje, jest nam znane z warunku gładkości toru; a dla wyznaczenia jego położenia w danej płaszczyźnie, wystarcza znajomość dwóch algebraicznych wielkości, wyrażających np. rzuty tej siły na dwie obrane osi. Siły zewnętrzne oraz wielkości, wyznaczające ruch toru, przyjęliśmy za znane; mamy zatem w powyższem równaniu wektorowem trzy niewiadome algebraiczne, które obliczymy z rzutów tego równania na trzy osi spółrzędnych. Osi te obierzmy w ten sposób, ażeby w każde z otrzymanych równań algebraicznych wchodziła możliwie jedna tylko niewiadoma. Ażeby obliczyć np.

---

[1]) Powstanie i zwrót przyśpieszenia tego można bezpośrednio unaocznić wyobraziwszy sobie, że wektor $\overline{v}_w$ jest sztywno związany z torem ruchomym, a zwrot przesunięcia końca tego wektora, jakiego on dozna podczas obrotu wraz z torem, jest zwrotem przyśpieszenia złożonego; przesunięcie to bowiem jest w geometrycznej zależności od przyrostów prędkości, wynikających z obrotu toru. W przykładzie przeto powyższym, rys. 50, koniec wektora $\overline{v}_w$, sztywno związanego z torem ruchomym, zakreśli, podczas cząstkowego obrotu rurki, odcinek ze zwrotem prostopadłym do płaszczyzny biegunowej; dla wywołania przeto tego przyrostu powinna być pewna siła; siłą tą jest, w danym przypadku składową, w kierunku prostopadłym do płaszczyzny biegunowej, siły odporowej rurki.

przyśpieszenie względne, zrzutujmy powyższe równanie na kierunek toru; przyśpieszenie bowiem $\overline{p}_w$ zrzutuje się w rzeczywistej wielkości, a wektor siły normalnej jak również wektor przyśpieszenia złożonego, zrzutuje się jako zero; mamy przeto równanie algebraiczne, porów. rys. 50-ty:

$$- mg \cos \alpha = mp_w - m \varphi^2_0 \,.\, x \,.\, \sin \alpha;$$

z którego:

$$p_w = \varphi^2_0 \,.\, x \,.\, \sin \alpha - g \,.\, \cos \alpha.$$

Oznaczmy literą z odległość punktu ruchomego od miejsca przecięcia się osi rurki z osią obrotu; a równanie powyższe, po podstawieniu w nie:

$$x = z \,.\, \sin \alpha,$$

przedstawi się w postaci:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = m \,.\, \varphi^2_0 \,.\, z \sin^2 \alpha - m \,.\, g \,.\, \cos \alpha \,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (157)$$

Równanie to można przedstawić sobie fizycznie, w ten sposób, że ruch punktu po danym torze odbywa się tak, jakgdyby tor pozostawał w spoczynku, a punkt był pod działaniem jednej siły stałej:

$$mg \cos \alpha,$$

ze zwrotem odjemnym; i drugiej siły z kierunkiem dodatnym:

$$m \,.\, \varphi^2_0 \,.\, z \,.\, \sin^2 \alpha,$$

proporcyonalnej do odległości punktu od obranego początku. Z powyższego równania wynika, że przyśpieszenie względne może być dodatne lub odjemne, zależnie od wielkości siły zmiennej, t. j. zależnie od położenia punktu na torze.

Szczególnem miejscem na torze jest miejsce, w którem punkt ruchomy posiada przyśpieszenie $\overline{p}_w = 0$. Oznaczmy odległość tego miejsca od początku układu przez z_0, a obliczymy ją z równania poprzedniego, po podstawieniu: $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$; a zatem:

$$0 = \varphi^2_0 \,.\, z_0 \,.\, \sin^2 \alpha - g \,.\, \cos \alpha;$$

skąd:

$$z_0 = \frac{g}{\varphi^2_0} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (158)$$

Jeśli np. punkt ruchomy umieścimy w miejscu z_0 i nie nadamy mu prędkości względnej, lecz nadamy mu prędkość unoszącą, to pozostawać on będzie podczas obrotu toru w spoczynku. Obierzmy to miejsce za początek drogi, i określmy każde inne położenie tego punktu przez odległość ξ od tego początku; to równanie ruchu uprości się o tyle, że niebędzie w niem wyrazu stałego; po podstawieniu bowiem $\xi = 0$, przybrać ono powinno postać:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0;$$

co też otrzymamy, gdy podstawimy: $z = z_0 + \xi$, oraz wartości z_0 z równ. 158-ego. Równanie te jest następujące:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \varphi^2_0 . \sin^2 \alpha . \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (159)$$

Równanie to można uważać za równanie ruchu punktu, odpychanego od środka, siłą proporcyonalną do odległości; położenie zaś środka odpychania wyznacza wielkość z_0. Ruch takiego punktu rozpatrywaliśmy już w § 10-ym; napiszemy przeto szukane rownanie ruchu względnego, utożsamiając równanie 159-te z równaniem 31-em; i podstawiwszy np. w równ. 35-te:

$$\frac{k}{m} = \varphi^2_0 . \sin^2 \alpha;$$

otrzymamy równanie ruchu względnego, dla takich samych warunków początkowych, dla jakich zestawione jest to równanie t. j. dla:

$$\xi = 0; \; v_w = v_{w,0}, \; t = 0;$$

równanie to jest nast.:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\, v_{w,0} . \frac{1}{\varphi_0 . \sin \alpha} \left(e^{t.\varphi_0.\sin\alpha} - e^{-t.\varphi_0.\sin\alpha}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (160)$$

Z równania tego obliczymy prędkość względną v_w, różniczkując je względem t; a zatem:

$$v_w = \tfrac{1}{2}\, v_{w,0} \left(e^{t.\varphi_0.\sin\alpha} + e^{-t.\varphi_0.\sin\alpha}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (161)$$

Z równania tego wynika, że zwrot ruchu punktu po torze jest zgodny ze zwrotem prędkości, jaką on posiada w miejscu równowagi względnej; i że wartość prędkości bardzo szybko rośnie z biegiem czasu; zmienna bowiem t jest w wykładniku.

Tor bezwzględny wyznaczyć możemy bezpośrednio na powierzchni stożka, zakreślonego przez oś obracającą się. W tym celu powierzchnię stożka, o otworze $2\,\alpha$, rozwiniemy na płaszczyznę rysunku i z jego wierzchołka wyprowadzimy dla różnych wartości t pęk promieni, odpowiadających położeniom osi ruchomej, mając przytem na uwadze, że obrót osi, zgodnie z warunkami zadania, jest jednostajny; i następnie na tych promieniach odetniemy długości $z_0 + \xi$, obliczone z powyższych równań; a końce ich wyznaczą pewną krzywę płaską; która, po nawinięciu jej na stożek obrotowy, przedstawi w przestrzeni tor bezwzględny danego punktu ruchomego.

W celu unaocznienia sobie postaci toru bezwzględnego, można obliczyć również rzut jego na płaszczyznę poziomą. Najprostszą postać równania, przedstawiającego tę krzywę, otrzymamy, stosując spółrzędne biegunowe; i w tym celu oznaczymy promień wodzący literą r,—kąt biegunowy literą σ; promień przeto r jest rzutem odległości $(z_0 + \xi)$ na tę płaszczyznę; a $\sigma = \varphi_0 . t$. Z tych dwóch równań wyrugujemy zmienną t i otrzymamy w spółrzędnych biegunowych równanie rzutu toru właściwego na płaszczyznę poziomą; z tego rzutu sądzić można o właściwościach samego toru i ruchu po nim.

W celu obliczenia siły odporowej N, weźmy pod uwagę, że siła ta, wskutek zupełnej gładkości toru, działa w płaszczyźnie normalnej do toru, nie znane przeto jest położenie w tej płaszczyźnie, i jej wartość. Niewiadome te wyrazimy rzutami jej na osi, przeprowadzone w płaszczyźnie normalnej do toru, przechodzącej przez miejsce, w którem chcemy obliczyć siłę odporową; jedną z tych osi obierzemy prostopadle do płaszczyzny biegunowej, i oznaczymy literą b (binormalna); drugą—w płaszczyźnie biegunowej, prostopadle do osi obracającego się toru; oś tę oznaczymy literą n; zrzutujmy następnie na te osi wielobok, przedstawiony równaniem 156-em; a otrzymamy jej rzuty. Rzut na normalną b daje równanie:

$$1)\quad N_b = 2m \,.\, v_w \,.\, \varphi_0 \,.\, \sin\alpha \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \quad (162)$$

Rzut zaś na normalną n da równanie:

$$-mg \sin\alpha + N_n = m\varphi_0^2 \,.\, x \,.\, \cos\alpha;$$

z którego po podstawieniu $x = z \sin\alpha$, otrzymamy:

$$2)\quad N_n = m\varphi_0^2 \,.\, z \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha + mg \sin\alpha \,.\,.\,.\,.\,.\, \quad (163)$$

Z tych dwóch równań obliczymy siłę odporową toru, oraz jej położenie w płaszczyźnie normalnej.

W szczególnym przypadku, gdy punkt ruchomy znajduje się w miejscu równowagi względnej; t. j. gdy znajduje się w miejscu z_0, obliczymy te wielkości, gdy podstawimy w powyższe równania wartości z_0, oraz $v_w = 0$; a otrzymamy następujące wzory rzutów siły odporowej w tem miejscu:

$$N_b' = 0; \quad N_n' = mg\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + mg \sin\alpha = \frac{mg}{\sin\alpha},$$

z których wynika, że siła odporowa toru w miejscu równowagi punktu, leży w płaszczyźnie biegunowej i jest większą od ciężaru punktu. Wynik ten zdaje się być w sprzeczności z zasadami statyki; w statycznych bowiem pojęciach odpór ten posiada wartość $mg \sin\alpha$; sprzeczność tę wytłumaczymy sobie bezwładnością punktu materyalnego; podczas bowiem jego obrotu działa na niego siła dośrodkowa, której składową w kierunku osi n przedstawia wyraz $mg\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$; a ta dopiero łącznie ze statyczną składową $mg \sin\alpha$, daje siłę odporową N_n.

W szczególnym przypadku, gdy $\alpha = 90^0$ t. j.; gdy tor obraca się w płaszczyźnie poziomej około jednego ze swych punktów: a punkt materyalny może się poruszać tylko po tej prostej; wtedy otrzymamy ze wzoru powyższego $z_0 = 0$; t. j. położenie równowagi punktu jest wtedy w miejscu przecięcia się toru z osią obrotu, co jest fizycznie łatwem do zrozumienia. Równanie toru bezwzględnego można w tym razie bezpośrednio wykreślić lub obliczyć z wyprowadzonych wyżej wzorów. Siła odporowa w tym przypadku, posiada następujące dwa rzuty:

$$N_b = 2m \,.\, v_w \,.\, \varphi_0; \text{ oraz } N_n = mg.$$

Z których N_n jest wynikiem tylko statycznego działania ciężaru; a N_b wyraża wpływ obrotu toru na zmianę prędkości względnej.

71. Przykład. Przyjmijmy teraz, że prędkość obrowa φ jest zmienną; lecz o kierunku stałym. W celu zestawienia równań ruchu tego punktu zauważymy, że w równaniu dynamicznem przykładu poprzedniego zmieni się tylko przyśpieszenie unoszące; do poprzednich bowiem wielkości dojdzie przyśpieszenie styczne do równoleżnika, na którym chwilowo znajduje się punkt ruchomy; wartość tego przyśpieszenia jest:

$$\frac{d v_u}{d t} \text{ inaczej } x . \frac{d \varphi}{d t};$$

pozostałe zaś wyrazy poprzedniego równania dynamicznego nie zmienią się. W celu np. obliczenia ruchu względnego tego punktu, zrzutujmy na kierunek osi rurki równanie dynamiczne, jakieśmy to uczynili poprzednio, a zważywszy, że rzut tego nowego przyśpieszenia na tor obracający się równa się zeru, otrzymamy te same równania różniczkowe ruchu względnego, jakie mieliśmy w poprzednim przykładzie.

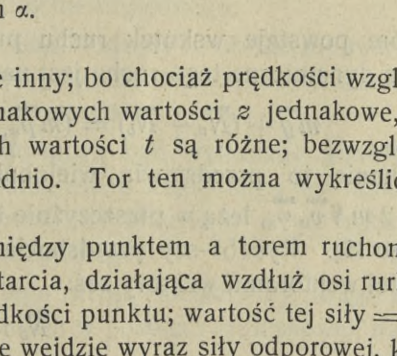
Ruch przeto względny punktu ruchomego w przypadku zmiennej prędkości obrotowej jest ten sam, jaki był podczas odrotu jednostajnego. Siła natomiast odporowa podczas obrotu niejednostajnego się zmieni; a mianowicie zmieni się jej składowa $\overline{N}_b$; przybędzie bowiem do poprzedniej wartości przyśpieszenie styczne.

$$m \frac{d \varphi}{d t} z . \sin \alpha.$$

Również ruch bezwzględny jest w tym razie inny; bo chociaż prędkości względne w obydwóch przypadkach ruchu są dla jednakowych wartości z jednakowe, lecz położenia toru unoszącego dla tych samych wartości t są różne; bezwzględny przeto tor będzie także inny niż był poprzednio. Tor ten można wykreślić lub obliczyć w sposób wyżej wskazany.

W razie uwzględnienia siły tarcia, pomiędzy punktem a torem ruchomym, przybędzie do równania dynamicznego siła tarcia, działająca wzdłuż osi rurki ze zwrotem przeciwnym zwrotowi względnej prędkości punktu; wartość tej siły $= \mu . N$. W równanie ruchu względnego w danym razie wejdzie wyraz siły odporowej, który do pewnego stopnia utrudni nieco rachunek; nie sprawi jednakże żadnych zasadniczych trudności. W celu zresztą uproszczenia tego rachunku można zastosować wzory przybliżone, wskazane w § 57-ym.

72. Przykład. Koło o promieniu r, które wyobrazić sobie możemy jako oś rurki, obraca się ruchem jednostajnym około swej średnicy, pionowo ustawionej; na obwodzie tego koła (lub wewnątrz rurki) znajduje się punkt materyalny o ciężarze mg, mogący się po nim suwać bez tarcia. Obliczyć ruch względny tego punktu.



Rys. 51.

Punkt ruchomy znajduje się w danym razie pod działaniem siły ciążenia i siły odporowej, leżącej w płaszczyźnie normalnej do toru poruszającego się; przyśpieszenie zaś tego punktu jest złożone, rys. 51-szy: 1) z przyśpieszenia, wywołanego względnym ruchem punktu po kole. Przyśpieszenie to wyobrazimy sobie złożonem z przyśpieszenia normalnego $\overline{p}_{w,n}$ po promieniu koła ze zwrotem ku środkowi koła; a którego wartość równa się:

$$\frac{v^2_w}{r},$$

i z przyśpieszenia $\overline{p}_{w,t}$, stycznego do toru, i zwróconego zgodnie ze zwrotem ruchu punktu po torze, a którego wartość równa się

$$\frac{d\,v_w}{d\,t}.$$

2) z przyśpieszenia unoszącego, złożonego z przyśpieszenia wzdłuż promienia h równoleżnika, na którym leży chwilowo dany punkt; wartość tego przyśpieszenia wyraża wzór:

$$\overline{p}_u = \varphi^2 . \overline{h};$$

3) z przyśpieszenia, którego wartość wyrażamy wzorem:

$$2 \, V \overline{v}_w . \overline{\varphi},$$

i które powstaje wskutek ruchu punktu po obracającym się torze. Równanie zatem dynamiczne tego ruchu jest nast:

$$m\overline{g} + (\overline{N}_n + \overline{N}_b) = (m\overline{p}_{w,n} + m\overline{p}_{w,t}) + (m\overline{p}_u + 2\,m\,V\,\overline{v}_w\,\overline{\varphi}_0).$$

Równanie to przedstawia wielobok wektorowy, którego boki, oprócz boków $\overline{N}_b$ i $2\,m\,V\,\overline{v}_w\,\overline{\varphi}_0$, leżą w płaszczyźnie biegunowej, t. j w płaszczyźnie koła obracającego się. Rys. 51-szy przedstawia płaszczyznę biegunową ze znajdującymi się na niej wektorami; wektory zaś:

$$\overline{N}_b \text{ i } 2\,m\,V\,\overline{v}_w\,\overline{\varphi}_0 .$$

nie są naniesione na ten rysunek, gdyż są prostopadłe do jego płaszczyzny.

Ażeby obliczyć ruch względny punktu, obliczymy przyśpieszenie styczne do koła i w tym celu zrzutujemy wszystkie wektory, przedstawione przez powyższe równanie, na styczną do toru, a otrzymamy jedno równanie z jedną niewiadomą $p_{w,t}$; gdyż rzuty pozostałych nieznanych wielkości będą równe zeru; a zatem otrzymamy równanie algebraiczne:

$$mg \sin \sigma = m\varphi_0{}^2 r \,.\, \sin \sigma \,.\, \cos \sigma + mp_{w,t}; \text{ z którego:}$$

$$p_{w,t} = g \sin \sigma - \varphi_0{}^2 r \,.\, \sin \sigma \cos \sigma; \quad \ldots\ldots \quad (164)$$

a ponieważ

$$p_{w,t} = \frac{d\,v_w}{d\,t} = -\,r\,\frac{d^2\,\sigma}{d\,t^2};$$

przeto, po podstawieniu tej wartości, otrzymamy równanie ruchu względnego:

$$-\,r\,\frac{d^2\,\sigma}{d\,t^2} = g \sin \sigma - \varphi_0{}^2 r \,.\, \sin \sigma \,.\, \cos \sigma \quad \ldots\ldots \quad (165)$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu, które po scałkowaniu da związek pomiędzy σ i t, t. j. da równanie ruchu względnego. Porównywując powyższe równanie z takimże równaniem ruchu wahadła w płaszczyźnie nieruchomej, zauważymy, że przybył obecnie nowy wyraz:

$$\varphi_0^2 r \,.\, \sin \sigma \,.\, \cos \,.\, \sigma,$$

wynikający z obrotu toru. W szczególnym przypadku, gdy $\varphi_0 = 0$, wtedy otrzymamy równanie ruchu wahadła płaskiego. Z powyższego równania, po jego scałkowaniu, obliczymy prędkość względną:

$$v_w = - l \frac{d\sigma}{dt},$$

a z tej wartości obliczymy:

$$p_{w,n} = \frac{v^2_w}{r};$$

t. j. przyśpieszenie normalne ruchu względnego; a wreszcie z tych dwóch przyśpieszeń $p_{w,t}$ i $p_{w,n}$ — przyśpieszenie całkowite ruchu względnego.

Z rzutu równania dynamicznego na promień wodzący r obliczymy rzut N_n siły odporowej; a z rzutu jej na normalną b obliczymy składową N_b; z tych wreszcie dwóch rzutów obliczymy wartość i położenie siły odporowej.

Nie wszystkie jednakże wskazane rachunki mogą być wykonane zwykłymi sposobami matematycznymi. Całka np. równania ruchu względnego jest funkcyą eliptyczną i może być obliczoną tylko z pewnem przybliżeniem w ten sposób, w jaki wykonaliśmy obliczenie ruchu wahadła pospolitego.

Ażeby otrzymać choć przybliżony obraz tego ruchu, zastosujemy uwagi, wyłożone w § 63-cim, odnoszące się do równania ruchu w postaci rózniczkowej; napiszemy przeto równanie danego ruchu w postaci:

$$r \frac{d^2\sigma}{dt^2} + (g - \varphi^2_0 \,.\, r \,.\, \cos \sigma) \sin \sigma = 0;$$

i zważywszy, że wartość $\sin \sigma$ dla wszystkich kątów σ nie zmienia postaci tego równania; gdyż dla $0 < \sigma < \pi$ $\sin \sigma$ jest dodatny; a dla $\sigma < 0$ wszystkie wyrazy tego równania zmieniają swój znak, wywnioskujemy, że o rodzaju ruchu rozstrzyga znak wyrazu w nawiasach; i jeżeli:

$$g - \varphi_0^2 \,.\, r \,.\, \cos \sigma > 0; \text{ t. j. jeżeli } \varphi_0 > \sqrt{\frac{g}{r \cos \sigma}}; \quad . \quad . \quad . \quad (166)$$

to ruch będzie wahadłowy około położenia równowagi, wyznaczonego kątem $\sigma = 0$. Ruch ten jednakże nie będzie, ściśle biorąc, jednakowy z ruchem wahadłowym, opisanym w § 47-ym; równania bowiem tych dwóch ruchów są nie jednakowe; a zresztą rozpatrując ten ruch ze stanowiska fizycznego, zauważymy, że i siły działające na punkt ruchomy są różne; lecz ruch ten może być nazwany ruchem wahadłowym w ogólniejszem znaczeniu. Zauważyć następnie należy, ze zmiana znaku wartości kąta σ nie wpływa na warunek, wyrażony wzorem 165-tym; punkt przeto, puszczony ze wszystkich miejsc toru, wykona w tych warunkach ruch wahadłowy.

Jeżeli zaś $g - \varphi_0^2 r < 0$; to wyraz $(g - \varphi_0^2 r \cos \sigma)$ może być $\gtrless 0$, zależnie od wartości $\cos \sigma$. Jeżeli np. dla pewnych wartości kąta σ wyraz ten jest odjemny, to dla innych wartości σ może być dodatny; z czego wynika, że punkt ruchomy w różnych swych położeniach na kole jest odpychany lub też przyciągany do położenia pionowego; tylko dla $\pi > \sigma > \frac{\pi}{2}$ wyraz ten będzie zawsze dodatny, t. j. punkt ruchomy będzie w tej ćwiartce koła posiadał zawsze ruch skierowany ku położeniu pionowemu.

Ponieważ punkt dany, znajdując się w pierwszej ćwiartce koła, $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$, w różnych jego miejscach, posiada prędkości różnie skierowane; przeto powstaje pytanie, czy nie waha się on około pewnego położenia równowagi względnej, które jest nam dotychczas nieznane.

Miejsca, w których następuje równowaga względna, odznaczają się tem, że punkt ruchomy przechodzi przez nie z przyśpieszeniem względnem $= 0$. Jeżeli miejsca to określimy kątem σ', licząc go od położenia pionowego, to z równania ruchu napiszemy równanie:

$$(g - \varphi_0^2 \,.\, r \,.\, \cos \sigma') \,.\, \sin \sigma' = 0;$$

z którego:

$$\sin \sigma' = 0; \text{ lub } \cos \sigma' = \frac{g}{\varphi^2 r};$$

a z nich otrzymamy cztery wartości dla σ':

$$\sigma_1' = 0; \ \sigma_2' = 180^0, \text{ oraz}$$

$$\sigma'_{3,4} = \pm \text{ arc cos} \left(\frac{g}{\varphi^2 r}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (167)$$

Posiadamy przeto w tych warunkach ruchu cztery położenia względnej równowagi punktu na kole; dwa z nich leżą na końcach średnicy pionowo przeprowadzonej, drugie zaś dwa leżą symetrycznie względem tejże średnicy; i te dwa położenia występują dopiero przy warunku $g < \varphi_0^2 r$; lub inaczej, gdy $\varphi_0 > \sqrt{\frac{g}{r}}$; położenie zaś równowagi, znajdujące się na końcach średnicy pionowej, występują przy wszelkich wartościach prędkości obrotowej koła.

Cztery te miejsca równowagi względnej mają przeto tę wspólną właściwość, że punkt ruchomy, umieszczony w nich bez prędkości względnej, lecz z prędkością unoszącą, pozostanie w spoczynku podczas obrotu koła. Porównywując ten przykład z przykładem, przytoczonym w § 70-tym, gdy torem ruchomym była prosta obracająca się, zauważymy, że w przykładzie z prostą mieliśmy jedno tylko położenie równowagi względnej; w danym zaś przykładzie mamy ich cztery.

W celu otrzymania pewnych ilościowych stosunków danego ruchu, weźmy pod uwagę, że siła styczna, której wyrazem jest prawa strona równ. 165-tego, jest mniejsza, niż takaż siła wahadła, którego płaszczyzna pozostaje w spoczynku, ruch przeto względny danego wahadła będzie wolniejszy. Z pewnem przybliżeniem obliczymy ruch względny tego wahadła, gdy przyjmiemy, że kąt początkowego odchylenia jest dostatecznie mały; wtedy bowiem:

$$\sin \sigma = \sigma; \ \cos \sigma = 1;$$

i otrzymamy równanie:

$$-r \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = (g - \varphi^2{}_0 r) \, . \, \sigma \, . \quad \ldots \ldots \quad (168)$$

które jest jednakowe z równ. 103-ciem, gdy zastąpimy wielkość g wielkością $(g - \varphi_0{}^2 r)$. Okres np. podwójnego wahnięcia tego ruchu otrzymamy, po podstawieniu tych wartości do równ. 109-tego:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g - \varphi_0{}^2 r}} \quad \ldots \ldots \quad (169)$$

Równaniu temu można nadać pewne dynamiczne znaczenie; dla małych np. kątów odchylenia można uważać kierunek przyśpieszenia dośrodkowego $\varphi_0{}^2 r$ za zlewający się z kierunkiem pionowym; a wtedy na punkt dany działa siła $m\,(g - \varphi_0{}^2 r)$ w kierunku pionowym, porówn. § 68-my; której rzut na styczną jest:

$$m(g - \varphi_0{}^2 r) \sin \sigma;$$

lub w skróceniu:

$$m(g - \varphi_0{}^2 r) \, . \, \sigma.$$

W przypadku

$$g = \varphi_0{}^2 r;$$

otrzymamy siłę styczną $= 0$, a to znaczy, że w tym przypadku punkt, odchylony z położenia równowagi, pozostanie w spoczynku na kole lub też—w ruchu jednostajnym.

Jeżeli zaś:

$$g < \varphi_0{}^2 r,$$

to równ. 168-me przedstawia ruch punktu, odpychanego od położenia równowagi siłą proporcyonalną do odchylenia σ; punkt przeto w tych warunkach wykona znaczne odchylenia; a do zbadania tego ruchu, nie może być stosowane uproszczone równ. 168-me, a tylko równanie dokładne, t. j. równ. 165-te. Jeżeli przeto $\varphi_0 > \sqrt{\frac{g}{r}}$, to położenie pionowe wahadła jest położeniem równowagi nietrwałej, punkt bowiem odchylony z tego położenia będzie się od niego oddalał.

W tenże sposób obliczymy ruch punktu, gdy wyprowadzimy go z położenia równowagi względnej, wyznaczonej kątem σ_3 lub σ_4. W tym celu podstawmy w równanie 165-te, jako w równanie ogólne danego ruchu:

$$\sigma = \sigma' + \triangle \sigma',$$

gdzie kąt $\triangle \sigma'$ oznacza odchylenie punktu od położenia równowagi, określonego kątem σ', a otrzymamy równanie:

$$-r \frac{d^2(\sigma' + \triangle \sigma')}{dt^2} = g \sin(\sigma' + \triangle \sigma') - \varphi_0{}^2 r \,.\, \sin(\sigma' + \triangle \sigma') \,.\, \cos(\sigma' + \triangle \sigma').$$

Nawiasy tego równania możemy rozwiązać, a przyrównawszy, wobec małych kątów $\triangle \sigma'$:

$$\sin \triangle \sigma' = \triangle \sigma'; \text{ oraz } \cos \triangle \sigma' = 1;$$

i usunąwszy wartości nieskończeuie małe drugiego rzędu, otrzymamy związek pomiędzy położeniem punktu, określonem kątem zmiennym $\triangle \sigma'$, a przyśpieszeniem jego. Przekształcenie to prędzej jednakże wykonamy, gdy odejmiemy od tego równania równanie 165-te; wtedy bowiem otrzymamy zupełną różniczkę równ. 165-tego względem zmiennej σ'; w ten sposób otrzymamy bezpośrednio szukane równanie. Zróżniczkujmy przeto równanie 165-te; a otrzymamy:

$$-r \frac{d^2(\triangle \sigma')}{dt^2} = g \cos \sigma' \,.\, \triangle \sigma' - \varphi_0{}^2 r \,.\, \cos 2\sigma' \,.\, \triangle \sigma';$$

a po podstawieniu:

$$g = \varphi_0{}^2 \,.\, r \,.\, \cos \sigma'; \text{ mamy:}$$

$$-r \frac{d^2(\triangle \sigma')}{dt^2} = (\cos^2 \sigma' - \cos 2\sigma') \,.\, \varphi_0{}^2 r \,.\, \triangle \sigma';$$

i wreszcie po przekształceniu otrzymamy równanie ruchu punktu, względem jego położenia równowagi:

$$\frac{d^2(\triangle \sigma')}{dt^2} + \sin^2 \sigma' \,.\, \varphi_0{}^2 \,.\, \triangle \sigma' = 0.$$

W równaniu tem spółczynnik przy zmiennej $\triangle \sigma'$ jest zawsze dodatny, równanie to, porówn. § 63-ci, wyraża przeto zawsze ruch wahadłowy około położenia równowagi, wyznaczonego kątem σ'. Okres np. podwójnego wahnięcia danego ruchu obliczymy ze wzoru np. 28-go, po podstawieniu w niego:

$$\frac{k}{m} = \sin^2 \sigma' \,.\, \varphi_0{}^2,$$

lub ze wzoru 109-tego po podstawieniu $\left(\frac{g}{r}\right) = \sin^2 \sigma \,.\, \varphi_0{}^2$; i otrzymamy dla małych odchyleń:

$$T_{3,4} = \frac{2\pi}{\sin \sigma' \,.\, \varphi_0}.$$

Przedstawmy sobie obecnie całokształt ruchu danego punktu, przy różnych wartościach prędkości obrotowej φ_0:

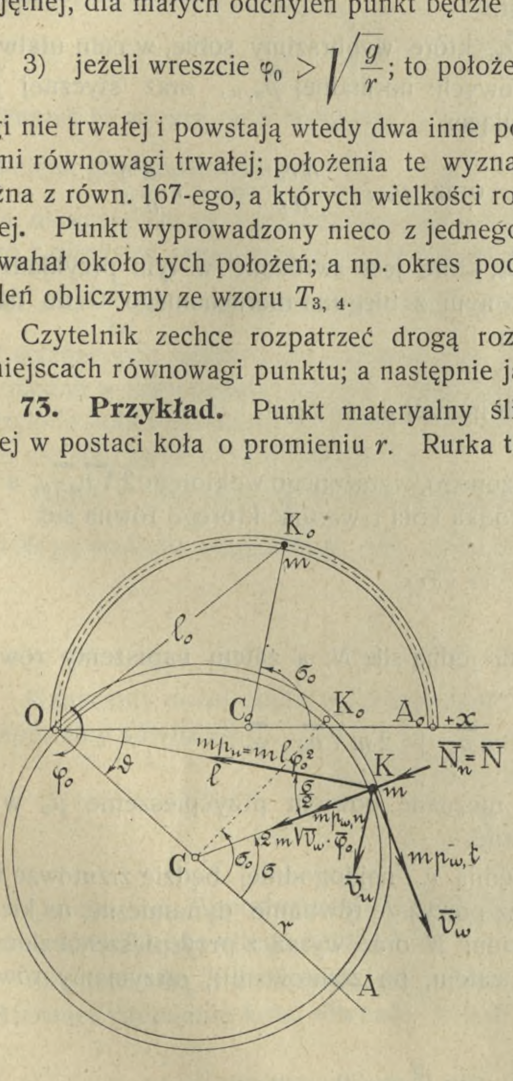
1) jeżeli $\varphi_0 < \sqrt{\frac{g}{r}}$, to punkt ruchomy, odchylony z położenia pionowego, będzie się około tego położenia wahał; i np. okres jego podwójnego wahnięcia dla małych odchyleń obliczymy z równ. 169-ego. Położenie pionowe wahadła jest w danym przypadku położeniem równowagi trwałej. Przy tych warunkach ruchu obrotowego niema innych położeń równowagi.

2) jeżeli $\varphi_0 = \sqrt{\frac{g}{r}}$; położenie pionowe staje się położeniem równowagi obojętnej, dla małych odchyleń punkt będzie pozostawał na kole w spoczynku.

3) jeżeli wreszcie $\varphi_0 > \sqrt{\frac{g}{r}}$; to położenie pionowe jest położeniem równowagi nie trwałej i powstają wtedy dwa inne położenia równowagi, które są położeniami równowagi trwałej; położenia te wyznaczone są kątami $\sigma_{3,4}$, które obliczyć można z równ. 167-ego, a których wielkości rosną z powiększeniem prędkości obrotowej. Punkt wyprowadzony nieco z jednego z tych położeń równowagi, będzie się wahał około tych położeń; a np. okres podwójnego wahnięcia dla małych odchyleń obliczymy ze wzoru $T_{3,4}$.

Czytelnik zechce rozpatrzeć drogą rozumową właściwości siły odporowej w miejscach równowagi punktu; a następnie ją obliczyć.

73. Przykład. Punkt materyalny ślizga się wewnątrz rurki gładkiej, wygiętej w postaci koła o promieniu r. Rurka ta obraca się w płaszczyźnie poziomej ze stałą prędkością kątową φ_0 około nieruchomego bieguna O, obranego na obwodzie koła rys. 52-gi. Obliczyć ruch względny, i ruch bezwzględny punktu, oraz siłę odporową rurki.



Rys. 52.

Położenie koła na płaszczyźnie nieruchomej określimy kątem ϑ, jaki tworzy jego średnica OA z osią x, nieruchomo obraną na tej płaszczyźnie; położenie zaś punktu ruchomego na kole określimy kątem σ, jaki tworzy promień wodzący, wyprowadzony ze środka koła z obracającą się razem z kołem średnicą OA. Przyjmiemy następnie, że w początkowem położeniu koła:

$$t = 0; \ \vartheta = 0; \ \sigma = \sigma_0;$$

a po upływie czasu t średnica OA_0 przyjmie położenie OA i utworzy z osią nieruchomą x kąt ϑ; punkt zaś ruchomy podczas tego obrotu, przesunie się po kole z miejsca K_0 do miejsca K, wyznaczonego kątem środkowym σ. Jeżeli znane są ϑ i σ w chwili t, to położenie punktu ruchomego jest wyznaczone jak na kole tak i na płaszczyźnie nieruchomej.

Przyjąć można, że na punkt ruchomy w tym przykładzie nie działa żadna siła zewnętrzna; ciężar bowiem punktu, jest zrównoważony siłą odporową płaszczyzny poziomej, po której porusza się rurka; lub też jest zrównoważony siłami odporowemi osi obrotu, jeżeli rurka przymocowaną jest do osi pionowej. Podczas jednakże obrotu rurki około bieguna O wywołana zostaje bezwładnością punktu siła odporowa N, normalna do koła. Przyśpieszenia zaś, jakie otrzymuje punkt ruchomy, podczas obrotu rurki, są nast.:

1) przyśpieszenie względne $\overline{p}_w$, które wyobrazimy sobie, w celu ułatwienia rozpatrywań, w postaci dwóch składowych: normalnej $\overline{p}_{w,n}$, oraz stycznej $\overline{p}_{w,t}$, wartości tych składowych są następujące:

$$p_{w,n} = \frac{v^2_w}{r} = r\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2; \text{ oraz } p_{w,t} = \frac{dv_w}{dt} = -r\frac{d^2\sigma}{dt^2} \quad . \quad . \quad (170)$$

2) przyśpieszenie unoszące $\overline{p}_u$, które jest zwrócone w tym przykładzie po promieniu wodzącym l, wyprowadzonym z bieguna nieruchomego O do danego punktu; wartość tego przyśpieszenia:

$$p_u = \frac{v_u^2}{l}; \text{ lub inaczej } p_u = l\varphi_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171)$$

3) z przyśpieszenia ruchu złożonego, wyrażonego wektorem $2\,V\overline{v}_w\overline{\varphi}_0$; a które jest zwrócone po promieniu do środka koła i wartość którego równa się:

$$2\,v_w \cdot \varphi_0;$$

kąt bowiem $(\overline{v}_w, \overline{\varphi}_0) = 90^0$.

Przyśpieszenia te są wywołane jedną siłą N; a zatem napiszemy równanie dynamiczne:

$$\overline{N} = m\overline{p}_w + m\overline{p}_u + 2\,m\,V\,\overline{v}_w \cdot \overline{\varphi}_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172)$$

w którem niewiadome są N i v_w; nieznane bowiem przyśpieszenie p_w wyrazić można zmienną v_w; lub też i odwrotnie.

Ażeby obliczyć prędkość względną v_w, najdogodniej będzie zrzutować wielobok wektorowy, przedstawiony przez powyższe równanie dynamiczne, na kierunek tejże prędkości v_w; niewiadoma bowiem N oraz wyraz z przyśpieszenia złożonego nie wejdzie do równania rzutów; a zatem, po zrzutowaniu, otrzymamy równanie algebraiczne; porów. rys. 52-gi:

$$mp_{w,t} - mp_u \cdot \sin\frac{\sigma}{2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173)$$

Wyraźmy następnie przyśpieszenie względne spółrzędną σ; w tym celu podstawimy w powyższe równanie:

$$p_u = l\varphi_0^2;$$

a ponieważ z rys. 52-go odczytamy:

$$l = 2r\cos\frac{\sigma}{2}; \text{ przeto:}$$

$$p_u = 2r\varphi_0^2 \, . \cos\frac{\sigma}{2}; \text{ i } p_{w,t} = \frac{dv_w}{dt} = -r\frac{d^2\sigma}{dt^2};$$

a po podstawieniu tych wielkości w równ. 173-cie i po skróceniu przez r i przez m, otrzymamy:

$$-\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \varphi_0^2 \sin\sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (174)$$

Równanie to wyraża ruch wahadłowy, jest ono bowiem jednakowe z równaniem 103-ciem, gdy podstawimy w nie $\frac{g}{l} = \varphi_0^2$. Ruch zatem punktu materyalnego po kole, obracającem się z jednostajną prędkością w płaszczyźnie poziomej około jednego z punktów swego obwodu, jest ruchem jednakowym z ruchem wahadła o długości $l = \frac{g}{\varphi_0^2}$ i o początkowem odchyleniu σ_0; a którego położenie równowagi jest wyznaczone średnicą OA, sztywno związaną z kołem. Ruch ten unaocznić sobie można w następujący sposób: wyobraźmy sobie żeśmy umieścili się w płaszczyźnie koła i obracamy się razem z tą płaszczyzną; a wtedy ruch punktu wyda nam się jako zwykły ruch wahadłowy.

Okres T' podwójnego wahnięcia (dla małych odchyleń σ_0), obliczymy ze wzoru 109-go wahadła pospolitego; gdy podstawimy w niego: $\frac{g}{l} = \varphi_0^2$, a zatem:

$$T' = \frac{2\pi}{\varphi_0}.$$

Oznaczmy okres czasu, w którym koło ruchome wykona pełny obrót literą T, a napiszemy równanie:

$$\varphi_0 T = 2\pi; \text{ z którego:}$$

$$T = \frac{2\pi}{\varphi_0}.$$

Okres zatem T' podwójnego wahnięcia punktu po kole, przy małem σ_0, równa się okresowi T całkowitego obrotu koła.

Siłę normalną N obliczymy, gdy zrzutujemy powyższe równanie dynamiczne na kierunek promienia koła; równanie to jest nast.:

$$N_n = mp_{w,n} + mp_u \cos\frac{\sigma}{2} + 2mv_w\varphi_0;$$

podstawimy w nie odpowiednie wartości i otrzymamy:

$$N_n = mr\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + 2mr\varphi^2_0 . \cos^2\frac{\sigma}{2} - 2mr\varphi_0\left(\frac{d\sigma}{dt}\right).$$

Ponieważ rzut równania dynamicznego na oś, prostopadłą do płaszczyzny koła, daje równanie:

$$N_b = 0; \text{ zatem } N = N_n.$$

W celu obliczenia siły N w miejscu σ, należy $\frac{d\sigma}{dt}$ wyrazić funkcyą kąta σ; a w tym celu należy scałkować równanie ruchu względnego, t. j. równ. 174-te. Całkę tę obliczyliśmy już w § 47-ym; napiszemy ją przeto bezpośrednio z równ. 106-tego, po podstawieniu w nie $\frac{g}{l} = \varphi_0{}^2$; oraz $v = -r\frac{d\sigma}{dt}$; a zatem mamy:

$$-\frac{d\sigma}{dt} = \pm\varphi_0\sqrt{2(\cos\sigma - \cos\sigma_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie i po zastąpieniu wyrazu:

$$\cos^2\frac{\sigma}{2} \text{ wyrazem } \frac{1+\cos\sigma}{2};$$

otrzymamy po uporządkowaniu:

$$N = mr\varphi_0{}^2(3\cos\sigma + 1 - 2\cos\sigma_0 \pm 2\sqrt{2(\cos\sigma - \cos\sigma_0)}).$$

Wybór znaku pierwiastka zależy od zwrotu prędkości v_w; jeżeli punkt przebiega ze zwrotem, wskazanym na rys. 52-gim, to zwrót przyśpieszenia $2\mathbf{V}\bar{v}_w\bar{\varphi}$ ruchu złożonego, skierowany jest w myśl danego określenia po promieniu ku środkowi koła; należy zatem przyjąć znak dodatny, jeżeli zaś punkt ruchomy zmieni zwrot swej prędkości, co nastąpi podczas powrotu punktu ruchomego do położenia początkowego, wtedy przyśpieszenie to jest zwrócone na zewnątrz koła, i należy wtedy wziąć znak odjemny; porów. prawidło, podane w § 66-tym. Nierówność wartości tego odporu dla tych samych położeń σ punktu ruchomego na kole wynika z niesymetryczności jego ruchu; punkt bowiem posiada jeden ruch symetryczny względem *OA* dający jednakowe wartości dla tych samych położeń punktu; oraz posiada jednocześnie ruch niesymetryczny—jednozwrotny, wynikający z obrotu koła.

Szczególne przypadki:

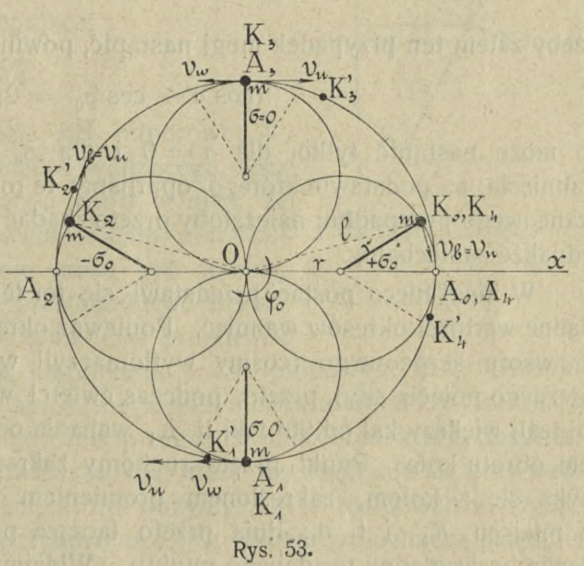
1) jeżeli przyjmiemy $\varphi_0 = 0$; to $N = 0$. Wynik ten jest zrozumiały bezpośrednio; koło bowiem się nie obraca, siły zewnętrzne nie działają na dany punkt, przeto niepowstają i siły odporowe;

2) gdy $\sigma_0 = 0$, wtedy N może mieć wartości rzeczywiste tylko dla $\sigma = 0$; i w tym razie $N = 2mr\varphi_0{}^2$. Wynik ten wypowiemy: gdy punkt ruchomy umieścimy bez prędkości względnej, lecz z prędkością, unoszącą, na końcu średnicy,

przechodzącej przez biegun obrotu; to pozostanie on w tem miejscu bez ruchu względem koła; a siła odporowa koła równa się sile dośrodkowej.

3) Jeżeli $\sigma_0 = \pi$; to dla $\sigma = 0$; $N = N_{max} = mr\varphi_0^2 (6 \pm 4)$; t. j. gdy punkt ruchomy rozpoczyna ruch z bieguna obrotu zgodnie ze zwrotem obrotu koła; wtedy po dojściu do miejsca, wyznaczonego przez koniec średnicy koła OA, wywołuje on siłę odporową $10\, mr\varphi^2$, gdy zaś następnie, przy dalszym obrocie koła, powróci do tegoż miejsca, to wywoła siłę odporową $2\, mr\varphi_0^2$.

Określmy obecnie choć w przybliżeniu tor bezwzględny i prędkość punktu ruchomego po nim. Jeżeli przyjmiemy, że odchylenie początkowe wahadła σ_0 jest dosyć małe, to, np. po zrobieniu przez koło ćwierci obrotu, wahadło zrobi ćwierć podwójnego wahnięcia i punkt ruchomy po przejściu koła z położenia OA_0 do OA_1 przejdzie z miejsca K_0 do miejsca K_1, pokrywającego się z końcem A_1 średnicy koła; okresy bowiem ćwierci wahnięcia wahadła równają się w przybliżeniu okresowi ćwierci obrotu koła. Następnie, gdy średnica koła obróci się o 180^0, to punkt zrobi połowę podwójnego wahnięcia, t. j. znajdzie się w położeniu K_2; w tenże sposób rozumując, dojdziemy do wniosku, że K_3 pokryje się z A_3 i t. d. Krzywa ciągła, łącząca punkty K_0, K_1, K_2, K_3, jest torem bezwzględnym danego punktu, przy warunku, że kąt σ_0 jest dostatecznie mały. Styczne do tego toru wyznaczymy wogóle z równania:



Rys. 53.

$$\bar{v}_b = \bar{v}_w + \bar{v}_u.$$

W miejscu np. K_0:

$$\bar{v}_w = 0, \text{ przeto } \bar{v}_b = \bar{v}_u, \text{ a } \bar{v}_u = V\bar{l}\bar{\varphi},$$

i jest prostopadła do promienia wodzącego l, wyprowadzonego z bieguna obrotu; a zwrot jej jest zgodny ze zwrotem obrotu φ_0. Prostopadła przeto do OK_0 jest styczną do toru bezwzględnego w miejscu K_0;—tak samo będzie w miejscu K_2 toru. W miejscach zaś K_1 i K_3 kierunki prędkości unoszącej i względnej zlewają się, są więc styczne do średnicy $2\,r$; prędkość np. w K_1:

$$v_{b,1} = 2\,r\,\varphi_0 + v_w,$$

a w K_3:

$$v_{b,3} = 2\,r\,\varphi_0 - v_w.$$

Z tych rozpatrywań wynika, że tor nie jest symetryczny względem osi x; co wynika z niesymetryczności ruchu względem tejże osi.

Następnie zwrócimy uwagę, że w pewnych miejscach toru bezwzględnego prędkość punktu składa się z różnicy dwóch prędkości; nasuwa się przeto pytanie, czy nie nastąpi taki przypadek, w którym $v_b \leqq 0$; t. j. w którym punkt zatrzyma się lub cofać się będzie po torze.

Prędkość względna jest największa dla $\sigma = 0$; przeto v_b może równać się zeru tylko w miejscu K_3. Prędkość ta zależy od początkowego odchylenia σ_0 wahadła, i rośnie razem z tym kątem. Obliczymy przeto kąt σ_0 ze wzoru 175-ego dla przypadku, w którym:

$$2 r \varphi_0 = v_w;$$

i napiszemy ze wzoru 175-ego:

$$2 r \varphi_0 = r \varphi_0 \sqrt{2 (\cos \sigma - \cos \sigma_0)};$$

ażeby zatem ten przypadek mógł nastąpić, powinno być:

$$(\cos \sigma - \text{ces } \sigma_0) = 2;$$

co może nastąpić tylko; dla $\sigma = 0$ i dla $\sigma_0 = 180$. Lecz wzór podwójnego wahnięcia, na podstawie którego oparliśmy te rozwiązania, nie stosuje się do tego krańcowego przypadku; należałoby przeto zbadać równanie dokładne; badania tego jednakże zaniechamy.

W innej nieco postaci przedstawi się tor tego punktu jeżeli zastosujemy dokładne wartości okresów wahnięć. Ponieważ okresy te są większe od obliczonych ze wzoru skróconego (cośmy wytłomaczyli w § 49-tym na podstawie dynamicznego pojęcia siły), przeto, podczas ćwierci wahnięcia wahadła, średnica koła zakreśli większy kąt od 90^0 tak, iż K_1 wahadła odsunie się od A_1 zgodnie ze zwrotem obrotu koła. Punkt przeto ruchomy zakreśla z miejsca K_0 pewien tor, który styka się z kołem, zakreślonem promieniem $2r$, w miejscu K'_1; następnie w miejscu K_3' i t. d.; linia przeto łącząca punkty K_0, K_1', K_3', i t. d. przedstawia bezwzględny tor danego punktu. Widzimy z tego, że dany punkt zakreśla tor bezwzględny wogóle niezamknięty, a zamknięty tylko przy szczególnych odchyleniach, dla których okresy wahnięć są współmiernie z wielkością $\frac{2\pi r}{\varphi_0}$. Z powiększeniem odchylenia σ_0, okresy wahnięć się powiększają; a w blizkości $\sigma_0 = 180^0$ okres połowy wahnięcia zbliża się do ∞, § 48-my; punkt przeto zakreśla w tym razie spiralę, biorącą początek w biegunie obrotu koła, a kończącą się na obwodzie koła zakreślonego z bieguna O promieniem $2r$. Ilość zwojów tej spirali ze zbliżaniem odchylenia σ_0 do 180^0, nadzwyczaj prędko się zwiększa, t. j. ze zbliżeniem początkowego położenia punktu ruchomego do bieguna obrotu; a prędkość bezwzględna punktu zbliża się od bardzo małej prędkości $(l_0 \varphi_0)$, (l_0 bowiem jest bardzo małe); do prędkości:

$$\text{lim. } v_b = 2 r \varphi_0 + r \varphi_0 + r \varphi_0 \sqrt{2 (\cos 0^0 - \cos 180^0} = 2 r \varphi_0 + 2 r \varphi_0 = 4 r \varphi_0.$$

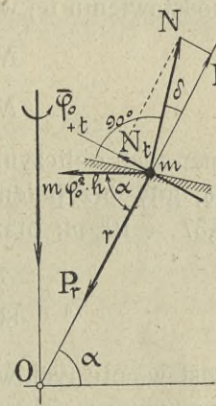
74. Wpływ dziennego obrotu ziemi na kształt jej powierzchni i na ciężar brył materyalnych, znajdujących się na niej. Wszystkie bryły materyalne, znajdujące się w spoczynku na powierzchni ziemi, są w stanie równowagi względnej;—zestawmy warunki tej równowagi. Na każdą taką bryłę działa siła przyciągania ziemskiego, której kierunek zlewa się z promieniem wodzącym danej bryły, wyprowadzonym ze środka przyciągania; siłę tę oznaczymy literą P_r, rys. 54-ty, oraz siła odporowa N powierzchni, na której bryła dana spoczywa. Bryła, pozostająca w spoczynku względem ziemi posiada tylko przyśpieszenie unoszące, które wyrazimy wzorem:

$$\overline{p_u} = \varphi_0{}^2 \overline{h};$$

w którym h jest promieniem równoleżnika, na którym bryła w danej chwili się znajduje, φ_0 — prędkość kątowa dziennego obrotu ziemi. Równanie równowagi względnej jest w tym razie następujące:

$$\overline{P_r} + \overline{N} = m\varphi_0{}^2 \overline{h}.$$

z którego wynika, że kierunek siły odporowej $\overline{N}$, nie zlewa się z kierunkiem promienia wodzącego, lecz tworzy z nim pewien kąt; z czego znów wynika, że powierzchnia bryły ziemskiej, utworzona np. przez powierzchnię wody spokojnej, nie może być kulistą; wszystkie bowiem jej cząstki są prostopadłe do kierunku, nie zlewającego się z kierunkiem promienia.



Rys. 54.

Kierunek siły odporowej N jest kierunkiem t. zw. pionowym, t. j. kierunkiem, jaki przybierze nić zawieszona spokojnie z przymocowanym do jej końca ciężarem; kierunek zatem t. zw. pionowy nie przechodzi przez środek przyciągania ziemi, lecz go mija. Siła N jest również tą siłą, która uzewnętrznia się przy ważeniu brył materyalnych; bryły bowiem, które ważymy, są w równowadze względnej; ciężar przeto bryły równa się iloczynowi mg_α, w którem g_α oznacza przyśpieszenie ziemskie na szerokości geograficznej α.

W celu obliczenia siły N oraz kąta δ, o jaki odchyla się pion od promienia wodzącego; zrzutujmy na kierunek tego promienia wodzącego wielobok wektorowy, przedstawiony przez powyższe równanie; oraz na prostopadłą do tego promienia, a otrzymamy równania, rys. 54-ty:

$$-P_r + N_r = -m\varphi_0{}^2 r \cos^2 \alpha, \text{ oraz } N_t = m\varphi^2{}_0 r \,.\, \cos \alpha \,.\, \sin \alpha;$$

w których h zastąpiono wyrazem $r \cos \alpha$. Z tych równań obliczymy:

$$N_r = P_r - m\varphi_0{}^2 r \,.\, \cos^2 \alpha; \text{ oraz}$$

$$N_t = m\varphi_0{}^2 r \,.\, \cos \alpha \,.\, \sin \alpha \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (175)$$

Zmierzenie wielkości siły P_r przyciągania ziemskiego nie jest bezpośrednio możliwem; dla pomiarów bowiem są tylko przystępne wielkości siły odporowej N; gdy jednakże dla jednego miejsca powierzchni ziemi określimy siłę odporową N, wtedy obliczymy za pomocą powyższych równań siłę P_r, która jest stałą wielkością dla wszystkich miejsc powierzchni ziemi. Z ruchu wahadła obliczono, że na równiku przyśpieszenie $g_e = 9{,}780$ m./sek². (e-ekwator); a zatem $N_e = mg_e$; ażeby z tej wielkości obliczyć siłę P_r, podstawimy w równ. 175-te:

$$N_r = mg_e; \text{ oraz } N_t = 0;$$

a otrzymamy:

$$mg_e = P_r - m\varphi^2_0 \,.\, r; \text{ skąd: } P_r = mg_e + m\varphi^2_0 \,.\, r,$$

a po podstawieniu tej wartości w równ. 175-te i po uproszczeniu, otrzymamy:

$$N_r = mg_e + m\varphi^2_0 r \,.\, \sin^2\alpha; \text{ oraz}$$

$$N_t = m\varphi^2_0 r \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin\alpha.$$

Z równań tych obliczymy odchylenie δ kierunku t. zw. **pionowego od promienia wodzącego**, gdy przyjmiemy, stosownie do pomiarów, średnią długość promienia $r = 6{,}37 \times 10^6\, m$; oraz czas obrotu dziennego $= 23\,h\; 56\,m\; 4\,s = 86\,164$; skąd:

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}73 \times 10^{-4}; \text{ oraz } \varphi_0{}^2 r = 0{,}034. \quad . \;.\;.\; (176)$$

Po podstawieniu tych wartości w równania powyższe, obliczymy kąt δ z następującego wzoru; rys. 54-ty:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{N_t}{N_r} = \frac{0{,}034 \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin\alpha}{9{,}780 + 0{,}034 \,.\, \sin\alpha} \quad . \;.\;.\;.\;.\;. \; (177)$$

Ze wzoru tego wynika, że δ zależy tylko od szerokości geograficznej, o ile przyjmiemy, że długość promienia jest stałą wielkością dla wszystkich miejsc powierzchni ziemi.

Największą wartość δ obliczymy ze wzoru powyższego drogą, wskazaną odnośnym rachunkiem różniczkowym, i otrzymamy, że

$$\delta_{\text{max.}} \text{ jest dla: } \alpha = 44^0\, 52';$$

podstawiwszy nasrępnie wartość tego kąta we wzór powyższy, obliczymy wartość $\delta_{\text{max.}}$. Obliczeuie to wykonamy z przybliżeniem, nieprzekraczającem jednakże granic dokładności, posiadanych pomiarów; i w tym celu przyjmiemy $\alpha = 45^0$, a drugi dodajnik w mianowniku równ. 177-ego, przyjmiemy równy zeru; przyjmiemy również, że $9{,}78 \cong 10$; wtedy:

$$\operatorname{tg}\delta_{\text{max.}} = \delta_{\text{max.}} = \frac{0{,}034 \times 0{,}5}{10} = 0{,}0017 \text{ sek.}$$

Z tego wynika, że odchylenie to jest tak małe, iż dla celów praktycznych przyjąć można: $\delta = 0$, a $N_r \cong N$; t. j. przyjąć można: $\varphi_0{}^2 r = 0$.

Ponieważ N wyraża ciężar bryły materyalnej w danem miejscu powierzchni; przeto $N = mg_\alpha$, a po podstawieniu tej wartości w powyższe równanie dla siły

N_r, otrzymamy związek pomiędzy wartościami przyśpieszenia ziemskiego w różnych miejscach powierzchni ziemi; — związek ten jest wyrażony następującem równaniem:

$$g_\alpha = g_e + \varphi_0^2 r \,.\, \sin^2 \alpha.$$

Równanie to pozwala obliczyć przyśpieszenie na danej szerokości geograficznej α, ze znanego przyśpieszenia na równiku. Największa wartość g_α zachodzi dla $\alpha = 90^0$ t. j. znajduje się ona na biegunie; zaś najmniejsza wartość g_α zachodzi dla $\alpha = 0$; t. j. na równiku.

Z tych wyników obliczymy obecnie stosunek ciężarów jednej i tej samej bryły materyalnej, gdy ją umieścimy raz na biegunie i drugi raz na równiku; stosunek ten jest nast.:

$$\frac{g_{\max.}}{g_{\min.}} = \frac{g_e + \varphi_0^2 r}{g_c} = 1 + \frac{\varphi^2 r}{g_e} = 1 + \frac{0{,}034}{\sim 10} = 1{,}003;$$

t. j. bryła, która waży na równiku np. 1000 *kg*, waży na biegunie 1003 *kg*.

W rachunku powyższym przyjęliśmy, że promień r jest stały dla wszystkich miejsc powierzchni bryły ziemskiej; gdy tymczasem dowiedliśmy poprzednio, że powierzchnia ziemi nie może być kulistą, a więc długość promienia nie jest stałą; do wyników więc powyższych należałoby wnieść odnośną poprawkę. Nieprzeprowadzając szczegółowych rachunków ocenimy tę poprawkę w sposób następujący: ponieważ, w myśl poprzednich rozważań należy przyjąć, że długość promienia r jest mniejszą w biegunach, przeto siła przyciągania, stosownie do Newtonowskiego prawa, jest większą na biegunach, niż na równiku. a więc przyśpieszenie w biegunach jest nieco większe, niż obliczone wyżej; co też stwierdziły odnośne pomiary za pomocą wahadła.

W przykładzie powyższym przyjęliśmy, że bryła materyalna pozostaje w spoczynku na powierzchni ziemi, jest to zatem przykład równowagi względnej; weźmy teraz pod uwagę przypadek, w którym bryła dana porusza się po powierzchni ziemi; i obliczmy siły względne, działające na nią. Ograniczmy na razie nasze rozpatrywanie do przypadku, w którym bryła porusza się wzdłuż południka na półkuli północnej ze zwrotem od bieguna północnego ku równikowi. Przykładem tego ruchu jest bieg rzeki płynącej lub też—pociągu, biegnącego w tymże kierunku. W danym przykładzie należy wprowadzić do równania dynamicznego przyśpieszenie względne i prędkość względną. Zatrzymując oznaczenia, które przyjęliśmy w przykładzie poprzednim, równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące:

$$\overline{P} + \overline{N} = m\overline{p_w} + m\overline{p_u} + 2\,m\,\mathrm{V}\,\overline{v_w}\,\overline{\varphi_0}.$$

Wektory $\overline{P}$, $m\overline{p_w}$ i $m\overline{p_u}$ leżą w płaszczyźnie biegunowej, a dwa pozostałe wektory tego równania wychodzą z tej płaszczyzny. Obliczymy przedewszystkiem siłę prostopadłą do płaszczyzny biegunowej; i w tym celu zrzutujemy powyższe równanie na oś b, przeprowadzoną prostopadle do płaszczyzny biegunowej w miejscu chwilowego przebywania punktu ruchomego; a otrzymamy siłę:

$$N_b = 2\,m v_w \varphi_0 \cdot \sin(v_w, \varphi_0) = 2\,m v_w \varphi_0 \cdot \sin\alpha;$$

i zwróconą ku wschodowi; (porówn. rys. 119 str. 129 tomu I-ego, oraz treść § 66-tego tego tomu). A zatem, ażeby punkt materyalny mógł poruszać się z pewną prędkością na półkuli północnej wzdłuż południka od bieguna ku równikowi należy przyłożyć do niego oprócz sił, leżących w płaszczyźnie biegunowej, siłę prostopadłą do niej, zwróconą ku wschodowi. Jeżeli weźmiemy pod uwagę rzekę płynącą na półkuli północnej wzdłuż południka, to wobec powyższych wyników prawy jej brzeg powinien być szczególniej wzmocniony, gdyż siła odporowa tego brzegu wywołuje przyśpieszenie; w przeciwnym bowiem razie rzeka podmyje ten brzeg i koryto przesunie się ze wschodu ku zachodowi. Niektórzy technicy uważają, że w pociągach biegnących w opisanym kierunku prawe szyny więcej się zużywają, niż lewe; chociaż bowiem siła N_b, jak łatwo obliczyć, posiada bardzo małą wartość, jednakże z biegiem czasu może znacznie zmienić warunki fizyczne, w jakich odbywa się ruch.

Łatwo spostrzedz z powyższego wzoru, że największą wartość posiada ta siła przy biegunie; przy zbliżaniu się zaś punktu ruchomego ku równikowi maleje, a na równiku $= 0$.

Zgodność wyników tego rachunku ze zjawiskami fizycznemi, stwierdza słuszność naszych założeń; na jakich oparliśmy dany rachunek;—t. j. stwierdza, że punkt materyalny pozostawiony sam sobie zakreśli tor prostolinijny ruchem jednostajnym względem układu sztywno związanego z gwiazdami stałemi.

---

8. Metoda d'Alembert'a.

75. Określenie i rozwinięcie tej metody. Metoda ta ma na celu uproszczenie rozpatrywania ruchu punktów czy też brył materyalnych, i polega na tem, że iloczyn:

$$(-m\bar{p});$$

t. j. że iloczyn z masy poruszającego się punktu i jego przyśpieszenia w danej chwili z przeciwnym zwrotem uważać będziemy za siłę. Siłę tę wprowadzamy do naszych rozumowań w celu zastąpienia pojęcia kinetycznego, iloczynu z masy i przyśpieszenia, pojęciem statycznem. Siłę, określoną w ten sposób, nazwiemy siłą bezwładności danego punktu; siłę tę oznaczać będziemy literą $\bar{B}$; a geometrycznie wyrazimy ją wektorem $m\bar{p}$ z odwróconą strzałką.

Jeżeli przeto wyobrazimy sobie, że siłę:

$$\bar{B} = -m\bar{p},$$

przyłożymy do punktu ruchomego, posiadającego masę m i przyśpieszenie $\bar{p}$, to punkt dany będzie pozbawiony tego przyśpieszenia i pozostanie w spoczynku lub w ruchu jednostajnym; inaczej mówiąc, siły **zewnętrzne**, wywołujące dane przyśpieszenie, i **siła bezwładności** $\overline{B}$ **są w każdej chwili w równowadze.** Gdy warunek tej równowagi wyrazimy, zgodnie z § 104-tym tomu I-go, równaniem:

$$\overline{P} + \overline{B} = 0, \text{ lub inaczej } \overline{P} + (-m\overline{p}) = 0,$$

wtedy pod względem formalnym równania te różnią się od równania dynamicznego:

$$\overline{P} = m\overline{p},$$

tylko przeniesieniem wyrazu $m\overline{p}$; a pod względem ich znaczenia fizycznego różnią się sposobem pojmowania tych wyrazów.

Gdy wprowadzimy do rozpatrywań ruchu punktu materyalnego pojęcie siły bezwładności, wtedy możemy otrzymać równanie ruchu punktu z równania równowagi, po przyłożeniu do danego punktu siły bezwładności.

Na str. 143-ej tomu I dowiedliśmy np., że gdy siły, działające na punkt, są w równowadze, wtedy suma ich momentów równa się zeru; zastosujemy przeto to twierdzenie do punktu, będącego w ruchu, wywołanym siłą $\overline{P}$. W tym celu przyłożymy do niego siłę $\overline{B} = (-m\overline{p})$ i przyrównamy sumę momentów tych sił, wziętych względem dowolnie obranego bieguna, do zera; a otrzymamy równanie:

$$\overline{M}_P + \overline{M}_B = 0.$$

Moment $\overline{M}_B$ siły bezwładności $\overline{B}$ wyrazimy wzorem wektorowym:

$$-\mathrm{V}\,\frac{d(m\overline{v})}{dt}\,.\,\overline{r},$$

który na zasadzie rozważań, przytoczonych na str. 62-ej, zastąpimy następującym:

$$-\frac{d\overline{M}_v}{dt};$$

a po podstawieniu go w równanie poprzednie, otrzymamy równ. 76-te, wyrażające zasadę momentów. Warunek równowagi sił, wyrażony równaniem ich momentów $\Sigma\overline{M}_k = 0$, oraz równanie momentów w dynamice, równ. 76-te, mają również tę wspólną właściwość, że równanie momentów w obydwóch przypadkach nie określa jednoznacznie ani równowagi sił, ani też ruchu punktu; a wyraża tylko pewne właściwości, jak równowagi tak i ruchu, cośmy już wypowiedzieli w § 29-tym.

W tenże sposób warunek równowagi, wyrażony zasadą pracy wyobrażalnej, porów. § 213 tomu I-go, może być zastosowany do zestawienia równania dynamicznego ruchu. W tym celu przyrównamy do zera sumę wyobrażalnych prac sił zewnętrznych i siły bezwładności i napiszemy równanie:

$$dL_P + dL_B = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (178)$$

Pracę dL_B siły bezwładności wyrazimy zgodnie z danemi określeniami wzorem:

$$(-mp_t)\,.\,ds,$$

lub inaczej wzorem:

$$- m \frac{dv}{dt} . ds.$$

który, po podstawieniu $\frac{ds}{dt} = v$, przekształcimy na następujący:

$$- d (\tfrac{1}{2} m v^2).$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie, otrzymamy równanie, wyrażające zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej.

Z tych przykładów wynika, że moment siły bezwładności wyraża się pochodną względem czasu momentu ilości ruchu z odwrotnym znakiem; a praca wyobrażalna siły bezwładności—przyrostem energii kinetycznej danego punktu ze znakiem odjemnym; obydwa te wnioski wyrazimy wzorami:

$$\overline{M}_B = - \frac{d}{dt} V m \overline{v} . \overline{r}; \quad \ldots \ldots \quad (179)$$

oraz

$$d L_B = - d (\tfrac{1}{2} m v^2) . \quad \ldots \ldots \quad (180)$$

Jeżeli punkt jest nieswobodny, to dla siły bezwładności znajdziemy pewne fizyczne znaczenie; a mianowicie rzut jej na główną normalną do toru, lub do powierzchni, po której punkt się porusza, wyraża siłę parcia, jaką wywiera punkt ruchomy na dany tor czy też na daną powierzchnię; siłę tę, jako szczególny przypadek siły bezwładności, nazywają siłą odśrodkową.

Jeżeli np. punkt materyalny porusza się po danem kole ze stałą prędkością, to siła odporowa koła:

$$\overline{N} = m\overline{p}, \text{ a } \overline{B} = (- m\overline{p}); \text{ a więc: } \overline{B} = - \overline{N};$$

czyli siła odśrodkowa $\overline{B}$ jest siłą parcia, jaką wywiera punkt ruchomy na tor, po którym się porusza. Z tego widzimy, że siły bezwładności punktu nieswobodnego, będącego w ruchu, są miarą statycznego działania tego punktu na tor lub na powierzchnię, po której punkt się porusza.

Rozpatrzmy dla przykładu ruch punktu materyalnego, poruszającego się po kole pod działaniem siły ciążenia, gdy koło jest w ruchu postępowym w swej płaszczyźnie. Równanie statyczne ruchu tego punktu wyrazimy wzorem:

$$\overline{Q} + \overline{N} + \overline{B} = 0; \text{ w którym } \overline{B} = (- m\overline{p});$$

Równanie to wypowiemy: siła ciążenia punktu siła odporowa toru i siła bezwładności punktu są w równowadze w każdem miejscu toru; gdy punkt wyobrazimy sobie w spoczynku w danem miejscu koła.

Dla wyrażenia równowagi tych sił możemy stosować wszystkie sposoby, wyłożone w statyce. Wyraźmy np. warunek tej równowagi zasadą momentów sił; porów. § 107-my tomu I-go, a napiszemy:

$$M_Q + M_N + M_B = 0.$$

Obierzmy biegun momentów w środku koła, a po podstawieniu odpowiednich wartości, porów. rys. 33-ci str. 89 oraz wzór 179-ty; otrzymamy równanie:

$$Ql \sin \sigma + \left[-\frac{d}{dt} (mvl) \right] = 0;$$

które po przekształceniu da równ. 103-cie.

Można również wyrazić warunek równowagi zasadą pracy przystosowanej, porów. § 116-ty oraz wzór 193-ci tomu I-go; a napiszemy wtedy.

$$dL_Q + dL_N + dL_B = 0;$$

po podstawieniu zaś odpowiednich wartości mamy:

$$Qdy - d\left(\tfrac{1}{2} mv^2\right) = 0;$$

i wreszcie po scałkowaniu od y_0 do y, lub od σ_0 do σ, i od 0 do v, otrzymamy wzór 106-ty.

Przykłady te mają na celu wykazać różnorodnosć sposobów rozumowania, doprowadzających do równań ruchu.

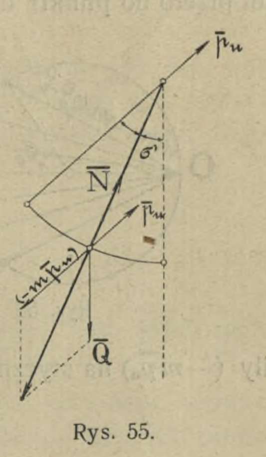
Jeżeli punkt jest w ruchu złożonym, to można przyjąć, że jego przyśpieszenie właściwe jest złożone z kilku przyśpieszeń; jeżeli przeto przyłożymy do tego punktu siły bezwładności, równe iloczynom z masy punktu i odwróconych przyśpieszeń, wynikających z pewnego rodzaju ruchu, to możemy uważać, że dany punkt jest pozbawiony tego rodzaju ruchu; lecz wykonywa on pozostałe ruchy, wskazane warunkami danego zadania. W ten sposób metoda d'Alembert'a daje sposób rozpatrywania właściwości **poszczególnych ruchów**, z jakich złożony jest ruch danego punktu.

Rozpatrzmy dla przykładu ruch punktu ciężkiego po kole, będącym w ruchu postępowym jednostajnie przyśpieszonym we własnej płaszczyźnie; ruch ten rozpatrywaliśmy już metodą dynamiczną w § 68-ym; ażeby zaś zastosować do tych rozpatrywań metodę d'Alembert'a, wyobraźmy sobie iloczyn $(-m\overline{p}_u)$ jako siłę i przyłóżmy ją do punktu ruchomego, a tor uważajmy za pozostający w spoczynku; wtedy napiszemy równanie:

$$[\overline{Q} + (-m\overline{p}_u)] + \overline{N} = m\overline{p}_w;$$

które przedstawia ruch wahadła zwykłego, poddanego stałej sile:

$$[\overline{Q} + (-m\overline{p}_u)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (181)$$



Rys. 55.

Kierunek przeto tej siły jest kierunkiem równowagi względnej danego wahadła. Łatwo spostrzedz, że wzór powyższy, z którego mamy wyznaczyć kierunek szukanej równowagi względnej, jest wyrazem wektorowym równania algebraicznego 154-ego. Ruch przeto względny wahadła, będącego w ruchu jednostajnie przyśpieszonym, jest ruchem wahadłowym około położenia równowagi, którego kierunek jest równoległy do kierunku wektora $(\overline{Q} - m\overline{p}_u)$.

Jeżeli tor jest w ruchu obrotowym; to w celu obliczenia względnego ruchu danego punktu materyalnego; należy przyłożyć do niego siłę:

$$\overline{B}_u = (-m\overline{p}_u); \text{ oraz siłę: } \overline{B}_C = (-2m\mathrm{V}\overline{v}_w\overline{\varphi});$$

a tor należy wyobrazić sobie pozostającym w spoczynku. Siły bezwładności łącznie z siłą ciężkości punktu oraz z siłą odporową toru, wywołują ten sam ruch punktu po danym torze, będącym w spoczynku, jaki wywołują siły zewnętrzne (bez sił bezwładności) po torze, obracającym się. Ażeby przeto obliczyć ruch względny punktu, pozostającego na torze ruchomym, należy do sił zewnętrznych oraz do sił odporowych dołączyć siły bezwładności $\overline{B}_u$ i $\overline{B}_C$ i obliczyć ruch punktu, będącego pod ich działaniem, po torze nieruchomym; do czego stosować można każde z twierdzeń, wyłożonych w rozdziałach poprzednich.

Ażeby np. unaocznić sobie ruch względny, opisany w przykładzie § 73-ciego, wyobraźmy sobie, że koło pozostaje w spoczynku, a do punktu ruchomego przyłożoną jest siła:

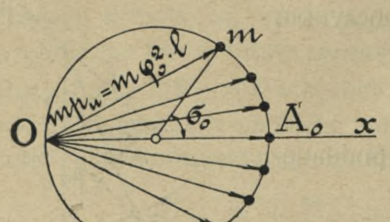
$$(-m\overline{p}_u), \text{ oraz siła } (-2m\mathrm{V}\overline{v}_w\overline{\varphi}_0);$$

a wtedy napiszemy równanie dynamiczne ruchu względnego:

$$\overline{N} + (-m\overline{p}_u) + (-2m\mathrm{V}\overline{v}_w\overline{\varphi}_0) = m\overline{p}_w;$$

które jest jednakowe z równ. 172-em; otrzymujemy przeto drogą tego rozumowania te same równanie, jakie otrzymaliśmy poprzednio; nadając inne znaczenie jego wyrazom.

Ruch punktu po kole tego przykładu wywołany jest siłami, posiadającemi składowe w kierunku stycznej do toru; siła przeto $\overline{N}$ i siła $(-2m\mathrm{V}\overline{v}_w.\overline{\varphi}_0)$, rys. 52-gi, nie wpływają na ruch punktu po kole; a jedynie siła $(-m\overline{p}_u)$; po przyłożeniu przeto do punktu danego siły $(-m\overline{p}_u)$ uważać będziemy, że punkt znajduje się na kole nieruchomem i że działają na niego siły środkowe, wychodzące ze środka, znajdującego się w biegunie obrotu; siły te odpychają dany punkt siłą $m\varphi_0{}^2 l$; t. j. siłą proporcyonalną do odległości od tegoż bieguna, rys. 56-ty. Ruch przeto jaki wykonywa dany punkt pod działaniem tych sił po kole nieruchomem, będzie jednakowy z ruchem, jaki on wykona podczas obrotu koła. Równanie tego ruchu otrzymamy z rzutu siły $(-m\overline{p}_u)$ na styczną do koła; równanie to jest następujące:



Rys. 56.

$$(-m\overline{p}_u)_t = mp_{w,t};$$

z którego, po podstawieniu odpowiednich wartości, otrzymamy rów. 174-te.

Mając na uwadze działanie tych sił wytłomaczymy sobie statycznie dla czego np. w tym przykładzie punkt ruchomy, umieszczony bez prędkości względnej na końcu średnicy, przechodzącej przez biegun, nieporuszy się; siła bowiem $(-m\overline{p}_u)$ jest w tem miejscu toru prostopadłą do toru i nie jest w stanie wywołać ruchu. Jest to wynik, do którego doszliśmy poprzednio drogą analizy równania ruchu.

76. Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej złożonego ruchu punktu materyalnego. W obliczeniach ruchu punktu po torze nieruchomym korzystaliśmy z zasady równowartości pracy sił i energii kinetycznej tego punktu; zasada ta dawała bezpośrednio związek pomiędzy prędkością punktu i położeniem jego na torze. Wskażemy obecnie sposób stosowania tej zasady do ruchu punktu po torze poruszającym się.

W tym celu wyobraźmy sobie dany tor (który jest w ruchu) pozostającym w spoczynku; a wzamian tego, w myśl metody d'Alembert'a, przyłóżmy do danego punktu siły:

$$\overline{B}_u = (-m\overline{p}_u); \text{ oraz } \overline{B}_C = (-2m\,\mathrm{V}\,\overline{v}_w\overline{\varphi});$$

w ten sposób sprowadzimy zadanie ruchu po torze, poruszającym się, do zadania ruchu punktu po torze nieruchomym, co da możność zastosowania zasady równowartości pracy i energii kinetycznej. Przyrównamy przeto pracę tych sił, jaką one wykonują podczas cząstkowego przesunięcia punktu po tym torze, do wartości przyrostu energii kinetycznej ruchu względnego; którą określimy wzorem:

$$\tfrac{1}{2}\, m v^2_w\,,$$

i nazwiemy energią kinetyczną ruchu względnego.

Pracę cząstkową dL_P siły zewnętrznej (P) obliczymy z iloczynu rzutu tej siły na styczną do toru w danem jego miejscu i z cząstki tego toru; t. j. obliczymy ją ze wzoru wektorowego:

$$dL_P = \overline{P}\,.\,d\overline{s}_w.$$

w którym $d\overline{s}_w$ oznacza przesunięcie punktu po torze względnym; lub też obliczymy ją ze wzoru rzutów siły i przesunięciu na osi prostokątne ξ, η, ζ, sztywno związane z torem poruszającym się (porów. wzór 144-ty lub 158-my tomu I-ego; wzór ten jest nast.:

$$dL_P = P_\xi\,.\,d\xi + P_\eta\,.\,d\eta + P_\zeta\,.\,d\zeta.$$

Praca cząstkowa siły odporowej podczas przesunięcia punktu po torze względnym, o ile nie uwzgędniamy tarcia, równa się zeru.

Pracę siły odśrodkowej $\overline{B}_u$ obliczymy w każdem miejscu toru, jeżeli znany jest ruch tego toru; pracę te oznaczymy literą L_u.

Praca wreszcie siły $\overline{B}_C$ (Coriolisa) równa się w danym razie zeru; kierunek jej bowiem jest prostopadły do kierunku prędkości względnej, a więc jest prostopadły do przesunięcia punktu po torze poruszającym się.

Zasadę przeto równowartości pracy i energii kinetycznej ruchu względnego wyrazimy następującem równaniem:

$$dL_P + dL_u = d(\tfrac{1}{2}\, m v^2_w) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (182)$$

które napiszemy po dodaniu wszystkich tych prac cząstkowych, porów. § 23, w postaci podobnej do postaci równ. 72-ego tego tomu:

$$L_{PA}^{B} + L_{uA}^{B} = \tfrac{1}{2}\, m v_{w,B}^2 - \tfrac{1}{2}\, m v_{w,A}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (183)$$

Równanie to wypowiemy w następujący sposób: praca sił zewnętrznych i praca sił odśrodkowych, podczas przesunięcia punktu po torze, będącym w ruchu, równa się przyrostowi energii kinetycznej względnego ruchu punktu, poruszającego się z miejsca A do miejsca B danego toru.

W szczególnym przypadku; jeżeli ruch toru jest obrotowy o niezmiennej prędkości $\overline{\varphi}_0$; to siła:

$$\overline{B}_u = m \overline{h} \varphi_0{}^2;$$

gdzie h oznacza odległość punktu od osi obrotu ze zwrotem dodatnym, zgodnym z powiększającą się wartością tej odległości. Siła ta, zwana siłą odśrodkową normalną (często—wprost siłą odśr.), posiada funkcyę sił, i praca jej powstaje tylko wtedy, gdy punkt oddala się od osi obrotu lub zbliża się do niej; praca przeto tej siły:

$$L_{u,A}^{B} = \int_{h_A}^{h_B} m h \varphi^2{}_0 \,.\, dh = \tfrac{1}{2}\, m \varphi^2{}_0 (h_B^2 - h_A^2);$$

gdzie litery h_A i h_B oznaczają odległości punktu ruchomego od osi obrotu.

Jeżeli przytem siły zewnętrzne, działające na dany punkt, posiadają funkcyę sił, wyrażoną spółrzędnemi, określającemi położenie punktu względem danego toru;—t. j. spółrzędnemi względnemi (np. ξ, η, ζ), to napiszemy równanie pracy w postaci:

$$(U_B - U_A) + \tfrac{1}{2}\, m \varphi_0{}^2 (h_B^2 - h_A^2) = \tfrac{1}{2}\, m v_{w,B}^2 - \tfrac{1}{2} m v_{w,A}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (184)$$

Jeżeli przeto mamy obliczyć prędkość względną punktu w danem miejscu toru ruchomego, to równanie powyższe daje bezpośrednio możność tego obliczenia.

Obliczymy np. prędkość punktu ciężkiego, poruszającego się w rurce, doskonale wewnątrz gładkiej, obracającej się około osi pionowej; jakieśmy opisali w przykładzie na str. 138-ej, i przedstawili na rys. 50-tym. Przyjmijmy np., że punkt ruchomy otrzymał w miejscu z_1 danej osi prędkość $v_{w,1}$, to, po przejściu do miejsca z, dozna on odpowiedniego przyrostu energii kinetycznej, a zasada pracy da równanie:

$$- mg\,(z - z_1) \,.\, \cos \alpha + \tfrac{1}{2}\, m\varphi_0{}^2\,(x^2 - x^3{}_1) = \tfrac{1}{2}\, m v^2{}_w - \tfrac{1}{2}\, m v^2{}_{w,1}\,,$$

i po podstawieniu:

$$x = z \sin \alpha, \text{ oraz } x_1 = z_1 \sin \alpha,$$

otrzymamy równanie, z którego obliczyc można v_w w każdem miejscu z toru ruchomego.

Z równania przeto 184-tego wynika: gdy siły zewnętrzne posiadają funkcyę sił (w spółrzędnych względnych) i gdy tor jest w ruchu obrotowym jednostajnym, to prędkość względna punktu ruchomego zależy tylko od jego położenia względem ruchomego układu odniesienia, a nie zależy od postaci toru po jakim on przebył z jednego położenia do drugiego.

W przypadku, gdy tor ruchomy jest płaski i obraca się w płasczyźnie poziomej około bieguna, obranego na tejże płaszczyźnie, to praca siły ciążenia punktu podczas jego ruchu równa się zeru; przyrost więc jego energii kinetycznej zależy tylko od początkowej jej wartości i od odległości punktu od bieguna; a nie zależy od postaci toru, po jakim on przebył z początkowego położenia do położenia, w którem chcemy obliczyć jego prędkość; a więc nie zależy również od postaci geometrycznej obracającego się toru.

9. Ruch względny punktu materyalnego.

A. Kinematyka względnego ruchu punktu.

77. Określenia i twierdzenia. W celu unaocznienia ruchu względnego wyobraźmy sobie całą przestrzeń wypełnioną punktami matematycznymi, których wzajemne odległości niezmieniają się podczas naszych rozpatrywań. Przyjmijmy następnie, że zbiór tych punktów może przenikać bez oporów inne takież zbiory punktów; jak również każdy oddzielny punkt, nie należący do takiego zbioru, może również przenikać taki zbiór.

Jeżeli w takim zbiorze pewien punkt, nie należący do tego zbioru, zmienia swe położenie, to pokrywać się on będzie kolejno z różnymi jego punktami; geometryczne miejsce tych punktów nazwaliśmy już w kinematyce torem, a cały zbiór, w którym punkt dany wyznacza ten tor, nazwaliśmy **układem odniesienia** ruchu danego punktu.

Ze zmiany położenia punktu w danym układzie odniesienia nie jest możliwem sądzić o tem, czy punkt się porusza, — czy też układ; ażeby zaś o tem módz sądzić, należy odnieść tak ruch punktu jak i ruch danego układu do innego układu odniesienia.

Układy odniesienia bogą być w spoczynku, lub też w ruchu względem innego układu, który, dla uproszczenia rozpatrywań, przyjąć można za nieruchomy; choć zresztą i ten układ może być w ruchu względem innego—trzeciego układu i t. d.

Układ, który przyjmiemy za nieruchomy, nazywać będziemy **bezwzględnym**; a prędkości i przyśpieszenia z jakiemi punkt dany porusza się w takim układzie— **bezwzględnemi**; wielkości te oznaczymy litetami $\overline{v_b}$ i $\overline{p_b}$. Dotychczas mieliśmy tylko z temi wielkościami do czynienia, gdyż przyjmowaliśmy układ odniesienia za nieruchomy.

Przypomnieć należy, że chwilowy ruch układu odniesienia, jako ruch nieograniczonej bryły sztywnej, jest ściśle określony, porów. § 73-ci tomu I-ego, wektorem chwilowej prędkości kątowej $\overline{\varphi}$ oraz wektorem prędkości postępowej $\overline{v}$, i że te wektory należy wyobrazić sobie sztywno związanymi z układem, przyjętym za nieruchomy.

Jeżeli pewien punkt zakreśla tor w układzie odniesienia, będącym w ruchu względem innego układu, to nazwiemy go torem względnym; a stosunek długości cząstki łuku, łączącego dwa nieskończenie blizkie położenia tego punktu, do czasu w jakim on przebył tę cząstkę, nazwiemy prędkością względną; i w ten że sposób wprowadzimy pojęcie przyśpieszenia względnego: wielkości te oznaczymy literami $\overline{v}_w$ i $\overline{p}_w$.

Z tych rozpatrywań wynika, że może zajść taki szczególny przypadek, w którym dany punkt pozostaje w spoczynku względem tak zwanego układu bezwzględnego; a względem innego układu będzie w ruchu; przypadek ten nastąpi, gdy ten drugi układ będzie w ruchu względem układu bezwzględnego; przypadek ten wyrazimy nast. wzorami:

$$\overline{v}_b = 0; \text{ a } \overline{v}_w \gtrless 0.$$

Przez ruch przeto punktu w pewnym układzie odniesienia, rozumieć należy wogóle zmianę jego położenia w tym układzie, nie wchodząc w to, czy punkt jest w ruchu, a układ w spoczynku, czy też punkt jest w spoczynku, a układ w ruchu; czy też wreszcie punkt i układ są jednocześnie w ruchu. Stan ruchu tak punktu jak i układu w tych przypadkach odnosimy do innego układu, który w danej chwili przyjmujemy za nieruchomy,—za t. zw. bezwzględny.

Tory zatem i wogóle ruchy, jakie zakreśla dany punkt w pewnym układzie, zależą od ruchu tego punktu i od ruchu układu odniesienia względem układu nieruchomego. W szczególnym przypadku, gdy układ ruchomy pozostaje w spoczynku względem innego, przyjętego za nieruchomy — za bezwzględny; wtedy tor bezwzględny i względny tego punktu wzajemnie się zlewają; a prędkości i przyśpieszenia tego punktu są w każdej chwili jednakowe w obydwóch układach.

Z tych określeń wyprowadzić można dwa następujące bardzo ważne dla naszych rozpatrywań twierdzenia:

1) ruch punktu względem układu, będącego w ruchu, nie zmieni się, jeżeli udzielimy jednocześnie układowi oraz punktowi pewnego wspólnego przesunięcia. W celu unaocznienia sobie tego wniosku, wyobraźmy sobie, że zatrzymujemy chwilowo ruch układu odniesienia oraz ruch punktu, i nadajemy układowi pewnego dowolnego przesunięcia, niemającego nic wspólnego z ruchem układu i punktu; wskutek czego miejsce układu, w którym znajdował się w danej chwili punkt ruchomy, oddali się od tego punktu; ażeby zaś zatrzymać punkt ruchomy w tem samem miejscu danego układu, w którem znajdował się przed jego przesunięciem, nadajmy również temu punktowi takie same przesunięcie, jakiego doznało odnośne miejsce układu wskutek jego przesunięcia. Jeżeli np. miejsce układu, w którem znajduje się w danej chwili punkt ruchomy, wskutek pewnego przesunięcia całego układu, dozna przesunięcia $\triangle \overline{s}$; to należy punktowi ruchomemu, ażeby pozostawał on w temże miejscu układu odniesienia, nadać również takie same przesu-

nięcie $\triangle\bar{s}$. Jeżeli np. obrócimy dany układ o pewien dowolny kąt około dowolnie obranej osi, to i punkt ruchomy, ażeby pozostał on w tem samem miejscu danego układu, obrócić należy około tejże osi o tenże kąt. Przez takie jednoczesne przesunięcie układu i punktu ruchomego zmieniamy co prawda położenie punktu i układu względem innego układu,—bezwzględnego; t. j. wogóle zmieniamy łącznie ruch układu i punktu, lecz nie zmieniamy położenia danego punktu względem układu ruchomego.

2) ruch punktu względem poruszającego się układu niezmieni się, jeżeli wyobrazimy sobie układ ten w spoczynku, a punktowi nadamy w tejże chwili ruch odwrotny, jaki posiadało **miejsce**, w którem on się znajdował. Ażeby tego dowieść, wybierzmy z pomiędzy dowolnych przesunięć, jakie możemy nadać jednocześnie ruchomemu układowi odniesienia i punktowi danemu, przesunięcie, które jest równe, lecz przeciwne co do zwrotu, przesunięciu, jakie posiadał w danej chwili układ ruchomy; przez taki ruch układ ruchomy pozostanie w spoczynku; a punkt ruchomy będzie posiadał dwa ruchy: ruch, który już posiadał, t. j. — ruch bezwzględny; oraz ruch, jaki posiadało w danej chwili miejsce, w którem się on znajdował, lecz z przeciwnym zwrotem. Ażeby punktowi danemu udzielić tego ruchu, wyobrazimy sobie, że jest on sztywno połączony z układem bezwzględnym, i temu układowi razem z tym punktem nadamy ruch przeciwny ruchowi układu ruchomego.

Jeżeli np. układ ruchomy jest chwilowo w ruchu postępowym o prędkości $\bar{v}$, a punkt posiada pewien ruch, określony względem układu bezwzględnego; to wyobraźmy sobie poruszający się układ w spoczynku, a układ bezwzględny razem z punktem w ruchu postępowym o prędkości $(-\bar{v})$. Jeżeli zaś układ ruchomy ma chwilową prędkość obrotową $\bar{\varphi}$, to, po jednoczesnem nadaniu układowi bezwzględnemu, a więc i punktowi prędkości $(-\bar{\varphi})$, układ ruchomy pozostanie w spoczynku, a punkt nie zmieni swego ruchu **względem tego układu**. Gdy przeto nadamy układowi bezwzględnemu, z którym związany jest tor bezwzględny, ruch odwrotny ruchowi, jaki posiada w danej chwili układ ruchomy; wtedy ruch punktu będzie ruchem wypadkowym: z ruchu punktu po torze bezwzględnym i z ruchu, jaki posiada w danej chwili układ ruchomy, lecz z przeciwnym zwrotem. Tę właściwość ruchów nazwać można „przemiennością ruchów“; (Dualismus, Reciprocität).

Prawo przeto przemienności ruchów pozwala sprowadzić zadanie obliczenia ruchu danego punktu względem poruszającego się układu odniesienia do obliczenia ruchu złożonego tegoż punktu. Ruch przeto, jaki zakreśli dany punkt w ruchomym układzie odniesienia, może być uważany za ruch złożony; który rozpatrywaliśmy w § 92 i 93-cim tomu I-go.

Wzory przeto ruchu punktu w układzie, będącym w ruchu, wyprowadzimy bezpośrednio ze wzoru 71-ego i 72-ego tomu I-ego jako ze wzorów, wyrażających ruch wypadkowy, gdy zważymy, że tor ruchomy ruchu złożonego, nazwany tam względnym w rozpatrywaniach tego działu, jest bezwzględnym; jest on bowiem właściwie nieruchomym, a wyobrażamy go sobie tylko na zasadzie prawa przemienności ruchów — ruchomym; a ruch, który w ruchu złożonym nazwaliśmy bezwzględnym inaczej wypadkowym, jest w tych rozpatrywaniach ruchem względnym; ruch wreszcie, któryśmy w tamtych rozpatrywaniach nazywali unoszącym, w tych rozpatrywaniach jest odwrotnym ruchem układu ruchomego.

Po zastąpieniu przeto w równaniach tomu I-ego, wielkości:

$$\overline{v_b} \text{ przez } \overline{v_w},\ \overline{v_w} \text{ przez } \overline{v_b},\ \overline{v_u} \text{ przez } (-\overline{v_u}), \text{ oraz}$$

$$\overline{p_b}\ \text{„}\ \overline{p_w},\ \overline{p_w}\ \text{„}\ \overline{p_b},\ \overline{p_u}\ \text{„}\ \pm\overline{p_u},\ \overline{\varphi} \text{ przez } (-\overline{\varphi}),$$

otrzymamy szukane wzory ruchu wzgędnego:

$$\overline{v_w} = \overline{v_b} - \overline{v_u}\,; \qquad (185)$$

$$\overline{p_w} = \overline{p_b} \mp \overline{p_u} - 2\,\mathrm{V}\,\overline{v_b}\overline{\varphi}. \qquad (186)$$

Dwoisty znak przyśpieszenia unoszącego $(\mp\overline{p_u})$ oznacza, że zwrot przyśpieszenia nie zawsze się zmienia, gdy odwraca się zwrot ruchu układu. Jeżeli np. układ poruszający się jest w ruchu postępowym; to ze zmianą zwrotu ruchu następuje zmiana zwrotu przyśpieszenia, i w tym razie bierzemy $(-\overline{p_u})$; jeżeli zaś układ poruszający się był w ruchu obrotowym; to zmiana zwrotu obrotu niewpływa na znak przyśpieszenia; w danym bowiem razie przyśpieszenie jest zawsze dośrodkowe niezależnie od zwrotu obrotu.

Przyjmijmy np. że układ nieruchomy jast sztywno związany z gwiazdami stałemi; wtedy ruch bezwzględny każdej gwiazdy stałej wyrazi się wzorem:

$$\overline{v_b} = 0; \text{ a więc i } \overline{p_b} = 0;$$

a ruch jej w układzie, obracającym się np. z ziemią, wyrazimy wzorami:

$$\overline{v_w} = -\overline{v_u}; \quad \overline{p_w} = +\overline{p_u}\,.$$

A ponieważ przyśpieszenie unoszące jest zwrócone ku osi obrotu $i = h\varphi^2$; przeto każda gwiazda stała zakreśla w przestrzeni, związanej z ziemią, koło ruchem odwrotnym ruchowi unoszącemu. Zrozumiałem jest, że do tegoż wniosku dojść można bezpośrednio, stosując zasadę przemienności ruchów.

Równ. 186-te można jeszcze przekształcić na następujące. Podstawmy w równanie, odnoszące się do ruchu obrotowego układu, rów. 186-te z $(+\overline{p_u})$:

$$\overline{v_b} = \overline{v_w} + \overline{v_u}\,,$$

a otrzymamy, po rozwiązaniu nawias, równ. nast.:

$$\overline{p_w} = \overline{p_b} + \overline{p_u} - 2\,\mathrm{V}\,\overline{v_w}\overline{\varphi} - 2\,\mathrm{V}\,\overline{v_u}\overline{\varphi}\,;$$

a ponieważ:

$$\mathrm{V}\,\overline{v_u}\overline{\varphi} = \overline{p_u}\,;$$

przeto mamy:

$$\overline{p}_w = \overline{p}_b - \overline{p}_u - 2\,\mathrm{V}\,\overline{v}_w \overline{\varphi} \quad \dots\dots \quad (187)$$

Jest to równanie, które stosować można tak do postępowego, jak i do obrotowego ruchu układu; przedstawia ono jednakże tę niedogodność rachunkową, że po obydwóch stronach są niewiadome w postaci przyśpieszenia i prędkości ruchu względnego.

78. Przykład. Punkt materyalny jest swobodnie wyrzucony z powierzchni ziemi z prędkością $\overline{v}_{b,0}$; wyznaczyć tor, jaki on nakreśli na płaszczyźnie, poruszającej się w płaszczyźnie jego toru bezwzględnego ruchem postępowym z prędkością stałą $\overline{c}$; nie uwzględniając oporu powietrza, jakiego doznaje punkt podczas swego ruchu.

Wobec tego, że zjawisko tego ruchu jest krótkotrwałe i odbywa się na niewielkim obszarze, przyjmiemy, że układ bezwzględny (kinetyczny) jest sztywno związany z bryłą ziemską; przyjmiemy przeto, że bezwzględny ruch punktu odbywa się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez kierunek początkowej prędkości $\overline{v}_{b,0}$ i że tor jego jest parabolą, której osi sprzężone posiadają kierunki, wyznaczone kierunkami wektorów $\overline{g}$ i $\overline{v}_{b,0}$. Inny jednakże jest tor, jaki zakreśli ten punkt na płaszczyźnie, poruszającej się. Ażeby go obliczyć zastosujemy wzór:

$$\overline{v}_w = \overline{v}_b - \overline{c};$$

skąd obliczymy prędkość względną w początku ruchu:

$$\overline{v}_{w,0} = \overline{v}_{b,0} - \overline{c}.$$

W tenże sposób, ponieważ $\overline{g}$ jest przyśpieszeniem bezwzględnem; i zgodnie z założeniem, co do ruchu układu odniesienia:

$$\overline{p}_u = 0; \text{ oraz } \varphi = 0; \text{ mamy:}$$

$$\overline{p}_w = \overline{g}.$$

Przyśpieszenie przeto ruchu względnego danego punktu jest równe przyśpieszeniu ziemskiemu; a więc jest ono stałe i pionowo skierowane; tor przeto względny, t. j. tor, jaki zakreśli punkt dany na płaszczyźnie poruszającej się, jest parabolą o kierunkach osi sprzężonych, wyznaczonych kierunkami wektora $\overline{g}$ i wektora $(\overline{v}_{b,0} - \overline{c})$. Pozostawia się czytelnikowi nakreślić tę parabolę.

W celu zestawienia równania ruchu względnego tego punktu, zastosujemy układ spółrzędnych wektorowych i w tym celu przeprowadzimy z miejsca wyjścia punktu promienie wodzące do kolejnych położeń punktu, a równanie różniczkowe ruchu przedstawi się w tych spółrzędnych:

$$\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{g}.$$

Pierwsza całka tego równania (wobec niezmienności wektora $\overline{g}$) dla granic od $(\overline{v}_{b,0} - \overline{c})$ do $\frac{d\overline{r}}{dt}$ oraz od 0 do t jest nast.:

$$\frac{d\overline{r}}{dt} - (\overline{v}_{b,0} - \overline{c}) = \overline{g}\,t,$$

druga zaś całka dla granic od 0 do $\overline{r}$ i od 0 do t:

$$\overline{r} = (\overline{v}_{b,0} - \overline{c})\,.\,t + \tfrac{1}{2}\overline{g}\,t^2.$$

Z równania tego wyznaczymy na płaszczyźnie, poruszającej się, w każdej chwili t położenie punktu, gdy w miejscu początkowego położenia punktu ruchomego wystawimy wektor $(\overline{v}_{b,0} - \overline{c})\,t$ i dodamy do niego wektor $\frac{1}{2}\overline{g}\,t^2$; można do tych rozpatrywań zastosować rys. 14-ty. Zrzutowawszy następnie powyższe równanie wektorowe np. na osi ukośnokątne, równolegle do kierunków $(\overline{v}_0 - \overline{c})$ i do $\overline{g}$, otrzymamy algebraiczne równanie ruchu, wyrażone obranemi spółrzędnemi.

79. Przykład. Rozpatrzmy obecnie ruch, bez uwzględnienia oporów, punktu materyalnego, upuszczonego np. z pewnej wysokości w polu sił ciążenia względem układu, sztywno związanego z bryłą ziemską; uwzględniwszy obrót ziemi tylko około własnej osi, z prędkością kątową $\overline{\varphi}$. Pominięcie w tem obliczeniu ruchu ziemi około słońca pozostaje w danym razie bez wpływu na wynik obliczenia; zjawisko bowiem spadania punktu jest zbyt krótkotrwałe w porównaniu z okresem rocznego obiegu ziemi.

Przyjmiemy w tych rozpatrywaniach, że kinetyczny układ odniesienia jest sztywno związany ze słońcem; punkt przeto materyalny, swobodnie puszczony bez prędkości **względem ziemi**, posiada w danej chwili prędkość bezwzględną $\overline{v}_{b,0}$, równą prędkości unoszącej miejsca, z którego został on upuszczony; t. j.

$$v_b = h\varphi;$$

i jest zwróconą ku wschodowi; litera h oznacza promień równoleżnika tego miejsca.

Gdyby na ten punkt nie działała siła ciążenia, wtedy punkt, będąc oswobodzony od połączeń z ziemią, zakreślił by w układzie kinetycznym, w myśl przyjętego prawa bezwładności, tor prostolinijny ruchem jednostajnym, którego kierunek byłby styczny do równoleżnika w miejscu, w którem znajdował się ten punkt w chwili upuszczenia. Ruch ten jednakże byłby inny w przestrzeni, obracającej się razem z ziemią. Ażeby ten ruch obliczyć, wyobraźmy sobie bryłę ziemską zatrzymaną w swym obrocie, natomiast prostę, po której punkt przebiega z prędkością v_b, obracającą się z prędkością $(-\overline{\varphi})$; tor wtedy, jakiby zakreślił dany punkt w tym układzie, i ruch, z jakimby on go przebiegł, byłby taki sam, jaki by wykonał, gdyby ziema obracała się względem układu kinetycznego, a punkt zakreślał tor prostolinijny w tymże układzie. Nietrudno przedstawić sobie, że tor ten jest pewną linią spiralną, leżącą w płaszczyźnie równoleżnika początkowego położenia punktu. Obliczenie tego ruchu jest zbliżone do obliczenia, przytoczonego w przykładzie na str. 125-ej tomu I-go; z tą tylko zmianą, że biegun obrotu O obrać należy nie na prostej, obracającej się, jak to uczyniono w tym przykładzie, lecz na odległości h od niej, t. j. na odległości promienia równoleżnika początkowego położenia punktu.

Rozpatrywania te jak i wyniki ich będą nieco odmienne, gdy przyjmiemy, że upuszczony punkt jest przyciągany, w myśl hypotezy Newtona, przez bryłę ziemską. Ażeby obliczyć ten ruch, przyjmiemy, że siły przyciągania zbiegają się w jednym punkcie, w tak zwanym środku ziemi; na punkt dany, posiadający prędkość początkową:

$$v_{b,0} = h\varphi,$$

działają przeto siły środkowe, odwrotnie proporcyonalnie do odległości punktu ruchomego od środka przyciągania.

Ruch takiego punktu rozpatrywaliśmy już w § 33-cim tego tomu i obliczyliśmy, że tor jego jest płaski i przedstawia jedną z krzywych stożkowych; w której ognisku leży środek przyciągania. W § 35-tym zwróciliśmy uwagę na tę okoliczność, że w badaniach ruchów ziemskich na niewielkich obszarach można przyjąć ten tor za parabolę, a siły przyciągające za stałe. Wobec tego przyjmiemy, że tor bezwzględny punktu materyalnego, swobodnie upuszczonego z pewnej wysokości powierzchni ziemi, jest parabolą, której wierzchołek znajduje się w początkowem położeniu punktu, oś główna zlewa się z kierunkiem przyciągania ziemskiego, a płaszczyzna tej paraboli jest nieruchomą w przestrzeni kinetycznej t. j. w przestrzeni, sztywno związanej ze słońcem.

Ażeby następnie obliczyć tor i ruch po nim, jaki dany punkt wykona w przestrzeni, sztywno związanej z obracającą się bryłą ziemską, wyobraźmy sobie ziemię pozostającą w spoczynku, a punkt — w ruchu obrotowym $(-\bar{\varphi})$; punkt wtedy zakreśli w przestrzeni, sztywno związanej z ziemią, którą narazie wyobrażamy sobie nieruchomą, pewien tor i wykona ruch taki, jaki by wykonał w przestrzeni obracającej się. Ogólne równanie tego ruchu jest nast.:

$$\bar{p}_w = \bar{p}_b + \bar{p}_u - 2\,V\,\overline{v_b\varphi};$$

które można uprościć, mając na uwadze, pewne liczbowe stosunki wartości, odnoszących się do obrotu ziemi. Mianowicie, wziąwszy pod uwagę, że największa wartość przyśpieszenia unoszącego równa się, por. wzór. 176-ty:

$$p_u = 0{,}034 \text{ m./sek}^2.,$$

pominiemy ją wobec wartości przyśpieszenia ziemskiego, i przyśpieszenie bezwzględne przyjmiemy:

$$\bar{p}_b \cong \bar{g};$$

wobec czego otrzymamy równanie:

$$\overline{p}_w = \overline{g} - 2\,\mathrm{V}\,\overline{v}_b\overline{\varphi}.$$

Wielkości, stojące po prawej stronie tego równania, są znane; prędkość bowiem $\overline{v}_b$ możemy obliczyć z czasu t; zastąpiwszy przeto to równanie, równaniami algebraicznemi, otrzymamy po ich scałkowaniu szukane równania ruchu, jaki punkt dany wykona w przestrzeni obracającej wraz z ziemią.

Wartość prędkości bezwzględnej:

$$v_b = \sqrt{v^2_{b,0} + (g\,t)^2};$$

lecz już po upływie jednej sekundy wartość $v_{b,0}$ staje się bardzo małą w porównaniu z wartością $g\,t$; przyjmiemy przeto z pewnem przybliżeniem:

$$\overline{v}_b \cong \overline{g}\,t; \text{ a więc } v_b \cong g\,t;$$

a po podstawieniu w powyższe równanie otrzymamy:

$$\overline{p}_w = \overline{g} - 2\,t\,\mathrm{V}\,\overline{g}\overline{\varphi} \qquad \text{(188)}$$

Z równania tego wynika, że dwa wektory $\overline{g}$ i $2\,\mathrm{V}\overline{g}\,\overline{\varphi}$ leżą w jednej płaszczyźnie, — w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez kierunek bezwzględnej prędkości początkowej. Ruch przeto względny danego punktu, wobec postawionych założeń ($\overline{p}_u \cong 0$ oraz $\overline{v}_b \cong \overline{g}t$), jest płaski. W celu zastawieniu równań jego ruchu; przeprowadźmy w płaszczyźnie ruchu przez miejsce wyjścia danego punktu oś ξ z kierunkiem i zwrotem zgodnym z kierunkiem przyśpieszenia $\overline{g}$ i oś η — zgodnie z kierunkiem wektora $\overline{v}_{b,0}$.

Rzuty równania 188-ego na obrane osi dają następujące równania algebraiczne:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = g; \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\,2\,g\,t\,\varphi\cos\lambda.$$

Wprowadziwszy początkowe warunki ruchu dla $t = 0$; $\xi = 0$; $\eta = 0$:

$$\frac{d\xi}{dt} = 0; \quad \frac{d\eta}{dt} = v_w = 0;$$

otrzymamy po scałkowaniu równania ruchu:

$$\xi = \frac{1}{2}\,g\,t^2; \; \eta = \frac{1}{3}\,g\cos\lambda\,.\,t^3;$$

i równanie toru:

$$\eta = \frac{4}{3}\,\frac{1}{\sqrt{2g}}\cos\lambda\,.\,\varphi\,.\,\xi^{\frac{3}{2}}.$$

Swobodnie przeto z pewnej wysokości upuszczony ciężar zakreśli tor w układzie, obracającym się razem z ziemią, nie prostolinijny lecz krzywolinijny;

i upadnie na odległości η od miejsca, w jakim pion, przeprowadzony z miejsca wyjścia punktu, spotka odnośny poziom. Doświadczalnie znaleziono:

$$\text{dla } \xi = 158{,}5\ m; \quad \eta = 28{,}4\ {}^{m}/_{m};$$

a ze wzoru powyższego wypada:

$$\eta = 27{,}5\ {}^{m}/_{m}.$$

Zgodność tych wyników stwierdza założenie, że układ kinetyczny można uważać z dostateczną dokładnością dla zjawisk ziemskich za połączony sztywno ze słońcem i gwiazdami stałemi.

KONIEC CZĘŚCI PIERWSZEJ TOMU DRUGIEGO.

Część druga zawierać będzie dynamikę brył materyalnych.

30.00