7. 58.

B. G. TEUBNER'S SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BAND IV, 1.

THEORETISCHE ARITHMETIK

VON

DR. OTTO STOLZ
O. PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT INNSBRUCK.

UND

DR. J. A. GMEINER
PRIVATDOCENT A. D. UNIVERSITÄT U. TECHN. HOCHSCHULE U. REALSCHULPROFESSOR IN WIEN.

I. ABTHEILUNG:

ALLGEMEINES. DIE LEHRE VON DEN RATIONALEN ZAHLEN.

ZWEITE UMGEARBEITETE AUFLAGE
DER ABSCHNITTE I—IV DES I. THEILES DER VORLESUNGEN
UEBER ALLGEMEINE ARITHMETIK VON O. STOLZ.

MIT SECHS FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathem. Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen.

Im Teubnerschen Verlage erscheint unter obigem Titel in zwangloser Folge eine längere Reihe von zusammenfassenden Werken über die wichtigsten Abschnitte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen.

Die anerkennende Beurteilung, welche der Plan, sowie die bis jetzt erschienenen Aufsätze der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften gefunden haben, die allseitige Zustimmung, welche den von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veranlafsten und herausgegebenen eingehenden Referaten über einzelne Abschnitte der Mathematik zu teil geworden ist, beweisen, wie sehr gerade jetzt, wo man die Resultate der wissenschaftlichen Arbeit eines Jahrhunderts zu überblicken bemüht ist, sich das Bedürfnis nach zusammenfassenden Darstellungen geltend macht, durch welche die mannigfachen Einzelforschungen auf den verschiedenen Gebieten mathematischen Wissens unter einheitlichen Gesichtspunkten geordnet und einem weiteren Kreise zugänglich gemacht werden.

Die erwähnten Aufsätze der Encyklopädie ebenso wie die Referate in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beabsichtigen in diesem Sinne in knapper, für eine rasche Orientierung bestimmter Form den gegenwärtigen Inhalt einer Disciplin an gesicherten Resultaten zu geben, wie auch durch sorgfältige Litteraturangaben die historische Entwickelung der Methoden darzulegen. Darüber hinaus aber mufs auf eine eingehende, mit Beweisen versehene Darstellung, wie sie zum selbständigen, von umfangreichen Quellenstudien unabhängigen Eindringen in die Disciplin erforderlich ist, auch bei den breiter angelegten Referaten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in welcher hauptsächlich das historische und teilweise auch das kritische Element zur Geltung kommt, verzichtet werden. Eine solche ausführliche Darlegung, die sich mehr in dem Charakter eines auf geschichtlichen und litterarischen Studien gegründe[illegible] bewegt und neben den rein wissenschaftlichen auch p[illegible]tigt, erscheint aber bei der raschen E[illegible]des zu einem grofsen Teil nur in Mono[illegible]chaus wichtig,

B. G. TEUBNER'S SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BAND IV, 1.

THEORETISCHE ARITHMETIK

VON

DR. OTTO STOLZ
O. PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT INNSBRUCK.

UND

DR. J. A. GMEINER
PRIVATDOCENT A. D. UNIVERSITÄT U. TECHN. HOCHSCHULE U. REALSCHULPROFESSOR IN WIEN.

I. ABTHEILUNG:

ALLGEMEINES. DIE LEHRE VON DEN RATIONALEN ZAHLEN.

ZWEITE UMGEARBEITETE AUFLAGE
DER ABSCHNITTE I—IV DES I. THEILES DER VORLESUNGEN
UEBER ALLGEMEINE ARITHMETIK VON O. STOLZ.

MIT SECHS FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1900.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Einleitung. Begriff der Grösse und Zahl.

II. Abschnitt.

Die natürlichen Zahlen.

III. Abschnitt.

Analytische Theorie der rationalen Zahlen.

Analytische Schöpfung des Systems der rationalen Zahlen.

IV. Abschnitt.

Synthetische Theorie der rationalen Zahlen. Die systematischen Brüche.

I. Abschnitt.

Einleitung. Begriff der Grösse und Zahl.

1. Die Grundlage der reinen Mathematik bildet das Rechnen, d. i die Verknüpfung der Grössen und insbesondere der Zahlen.

Das Wort „Grösse (μέγεθος)“ kommt in Euclid's Elementen vom 5. Buche an vor, doch den Begriff der Grösse erklärt er nirgends. Als Grössen sind zu betrachten die begrenzten geometrischen Gebilde: Linien, Winkel, Flächen, Körper; jedoch wohl auch die natürlichen Zahlen.[1]) Allen gemeinsam sind die folgenden Merkmale, auf denen das Rechnen mit ihnen beruht: man kann die gleichartigen unter ihnen vergleichen, addiren, subtrahiren und im Allgemeinen jede Grösse in mit ihr gleichartige Theile zerlegen. Den Grössen stellt die Geometrie der Alten die geometrischen Verhältnisse gegenüber, obwohl sie selbst auch ihnen das erste der obigen Merkmale beilegt, wozu, wie wir sehen werden, die übrigen treten können. Indem wir von den geometrischen Grössen, der natürlichen Zahl und dem Euclid'schen Verhältnisse zur nächst höheren Gattung aufsteigen, gelangen wir zur absoluten Grösse im engern Sinne (vgl. V. 1). Nichts hindert, noch allgemeinere Begriffe aufzustellen. Wenn wir nur das erste aus der obigen Gruppe von Merkmalen festhalten, so ergiebt sich der weiteste Begriff, von welchem auch H. Grassmann ausgeht. Geben wir ihm den Namen „Grösse“, so wird die Grösse ein Begriff von der Art sein, dass je zwei der darunter enthaltenen Dinge entweder als gleich oder als ungleich erklärt sind. In diesem Sinne verstehen wir die Grassmann'sche Definition: „Grösse heisst ein jedes Ding, welches einem anderen gleich oder ungleich gesetzt werden soll.“[2]) Von den Dingen, welche unter einem und demselben Begriffe enthalten sind, sagen wir, dass sie ein System bilden. Solche Dinge werden in der Mathematik mit Buchstaben bezeichnet, insbesondere sollen $a\, b\, c \cdots$ im Folgenden Dinge eines Systemes bedeuten.

---

1) Euclid selbst sagt das freilich nicht. Vgl. Hankel, Zur Gesch. d. Math., 1874, S. 391.

2) H. Grassmann, Lehrbuch d. Arithm., 1861, S. 1.

Dass a gleich b ist, wird kurz durch die Gleichung $a = b$ angedeutet. $=$ ist das Zeichen der Gleichheit, $a\, b$ heissen die Seiten der Gleichung. Dass a und b ungleich sind, drückt man durch die Ungleichung $a \neq b$ aus. $\neq$ oder $\gtrless$ ist das Zeichen der Ungleichheit, $a\, b$ heissen die Seiten der Ungleichung. Formel, Beziehung, Relation sind gemeinsame Namen für die Gleichungen und Ungleichungen.

2. Gleiche und ungleiche Grössen. — Unter welcher Bedingung zwei einem Systeme angehörige Dinge gleich oder ungleich heissen sollen, wird in jedem Falle durch eine besondere Erklärung angegeben. D. h. es werden zwei Thatsachen festgesetzt, deren eine man durch die Aussage, dass die zwei Dinge gleich sind, die andere durch die Aussage, dass sie ungleich sind, anzeigt. Dabei ist man weiter an keine Schranken gebunden, als dass die in Rede stehende Erklärung den folgenden Bedingungen Genüge leisten muss.

1) Es muss jedes Ding auch zufolge jener Erklärung sich selbst gleich sein. Wenn gemäss der Erklärung $a = b$ ist, so muss eben deswegen $b = a$ sein. Desgleichen wenn a und b ungleich sind, so auch b und a.

2) Je zwei Dinge des Systemes müssen entweder gleich oder ungleich sein.

3) Wenn der Erklärung zufolge $a = b$ und $b = c$ ist, so muss eben deswegen $a = c$ sein. — Corollare. 1) Wenn von einer Reihe von Dingen bekannt ist, dass jedes dem folgenden gleich ist, so sind irgend zwei derselben einander gleich. — 2) Ist $a = b$, und b und c ungleich (oder: sind a und b ungleich, $b = c$), so sind a und c ungleich. (Beweis indirect.)

Lässt sich für ein System von Dingen eine die vorstehenden Forderungen befriedigende Erklärung aufstellen, so heissen diese Dinge zu je zweien vergleichbar und werden Grössen und zwar gleichartige (homogene) genannt. Gleichartige Grössen sind also Dinge, von denen je zwei mit einander verglichen sind.

Man sagt gewöhnlich: „Gleich heissen zwei Dinge, wenn man in jeder Aussage statt des einen das andere setzen kann.“ Darüber ist Folgendes zu bemerken. Nachdem die Erklärung abgegeben ist, unter welchen Umständen zwei Dinge eines Systemes als gleich zu betrachten seien, hat man nachzuweisen, dass sie einander vertreten können. Dies versteht sich von selbst hinsichtlich der identischen Grössen. Man kann nämlich jede Grösse beliebig oft setzen, wie die Begriffe der Logik. Wenn aber gleiche Grössen in einigen Merkmalen sich von einander unterscheiden können, so muss man zeigen, dass sie in den Ausdrücken (s. Nr. 4) für einander gesetzt werden dürfen, ohne dass diese eine Aenderung erfahren. Dies lässt sich in der Art erreichen, dass ein Ausdruck stets so gebildet wird, dass er bei Ersetzung einer in ihm vorkommenden Grösse durch eine ihr gleiche ungeändert bleibt.

Der Begriff der Gleichheit stammt aus der räumlichen Anschauung, indem congruente Figuren d. h. solche, die sich zur Deckung bringen lassen, als gleich bezeichnet werden (Euclid Elem. I. Axiom 7).

3. Beispiele. Obwohl wir in diesem Werke mehrfach Gelegenheit haben werden, Grössensysteme aufzustellen, so mögen doch schon hier einige Beispiele zur Erläuterung des in der vorigen Nummer Bemerkten angeführt werden.

Zwei geradlinige Strecken AB, $A'B'$ in der Ebene heissen in der Geometrie der Alten gleich oder ungleich, je nachdem sie zur Deckung gebracht werden können oder nicht. Wir nennen diese Grössen die absoluten Strecken. Die neuere Geometrie bezeichnet eine der beiden Richtungen, in welcher eine jede Gerade durchlaufen werden kann, als die positive, die andere als die negative. Und es heissen in ihr zwei Strecken AB, $A'B'$ dann und nur dann einander gleich, wenn sowohl die absoluten Strecken AB, $A'B'$ einander gleich, als auch die Richtung von A bis B und die von A' bis B' gleichnamig sind. (V. 9.) Diese Grössen nennt man die relativen Strecken. Endlich werden die Strecken der Ebene noch als Vectoren betrachtet. Jetzt heissen AB und $A'B'$ dann und nur dann einander gleich, wenn sie im absoluten Sinne einander gleich und dabei parallel und zwar gleichgerichtet sind. Diese drei Erklärungen entsprechen, wie leicht zu sehen, vollkommen den drei in Nr. 2 aufgestellten Forderungen. Hingegen dürfte man nicht je zwei Strecken von gleicher Länge, welche aufeinander senkrecht stehen, als einander gleich bezeichnen. Denn diese Erklärung schliesst nicht als besonderen Fall die Gleichheit einer jeden Strecke mit sich selbst ein. — Wenn Strecken AB nebeneinander im dreifachen Sinne vorkommen, so werden die absoluten mit $|AB|$, die relativen mit $\overline{AB}$, die Vectoren mit AB bezeichnet. Dagegen kann man für die dreifache Gleichheit das nämliche Zeichen $=$ anwenden, ohne undeutlich zu werden. Wollte man aber für die Strecken in jedem der drei Fälle dieselbe Bezeichnung AB gebrauchen, so müsste man zur Unterscheidung des dritten von den beiden übrigen ein neues Gleichheitszeichen festsetzen (vgl. S. 97, 3. 4.).

Zwei Rechtecke von derselben Grundlinie g können als gleich oder ungleich bezeichnet werden, je nachdem ihre Höhen im absoluten Sinne gleich sind oder nicht; desgleichen zwei Rechtecke von der nämlichen Höhe h als gleich oder ungleich, je nachdem ihre Grundlinien im absoluten Sinne gleich sind oder nicht. Demnach erscheinen einerseits die Rechtecke von der Grundlinie g als homogene Grössen, andererseits die von der Höhe h. Man darf aber nicht ohne weiteres diese beiden Reihen von Rechtecken, obwohl in jeder das Rechteck von der Grundlinie g und der Höhe h vorkommt, zu einem System homogener Grössen zusammenfassen. Bevor dieses geschehen kann, muss erst eine Regel über die Vergleichung von je zwei Rechtecken mit beliebigen Grundlinien und Höhen aufgestellt werden. (V. 5.)

Eines der bemerkenswerthesten Beispiele von abstracten Grössen bieten die Euclid'schen Verhältnisse dar.[1])

Wenn wir auch ein jedes auf Grund einer den formalen Forderungen von Nr. 2 entsprechenden Erklärung aufgestellte Grössensystem als zulässig erklären, so folgt daraus keineswegs, dass es auch Beachtung verdient. So wäre z. B. formell nichts dagegen einzuwenden, wenn wir je zwei begrenzte Flächenstücke in der Ebene als gleich erklären würden, wenn sie gleiche Umfänge besitzen. Allein diese Festsetzung wäre völlig unfruchtbar und ist daher ohne Bedeutung.

Die Unterordnung mehrerer Begriffe unter einen allgemeineren gilt in jeder Wissenschaft als ein Fortschritt. Mit Recht betrachten wir daher gegenwärtig als specielle Fälle der Gleichheit (ἰσότης): die ταυτότης oder ὁμοίοτης der Euclid'schen Verhältnisse, die Aequivalenz der Flächen nach Legendre, die Aequipollenz der Strecken nach Bellavitis. Es wird in jedem dieser Fälle nur die Vergleichung an einer anderen Art von Objecten vollzogen.

4. Die Verknüpfungen der Grössen. — Unter einer eindeutigen Verknüpfung der Grössen $a\,b\,c \cdots$ versteht man eine Regel, nach welcher entweder jeder oder doch einigen Zusammenstellungen $a\,b$ je eine und die ihr gleichen Grössen dieses oder eines anderen Systems zugeordnet werden.[2]) Allgemeine Zeichen, die jede beliebige Verknüpfung bedeuten können, sind $\circ$ $\odot$ u. dgl.[3]) Im Falle dass die Verknüpfung $\circ$ der Grössen $a\,b\,c \cdots$ wieder auf Grössen dieses Systemes führt, schreibt man $a \circ b = c$ und liest: „a mit b ist c".[4]) Die eindeutige Verknüpfung von je zwei unter den Grössen $a\,b\,c \cdots$ eines Systemes muss so erklärt werden, dass ihr Ergebniss ungeändert bleibt, wenn eine von ihnen durch eine ihr gleiche ersetzt wird. Ist $a = a'$, $b = b'$, so soll demnach stets

$$a \circ b = a' \circ b'$$

sein.

In dem soeben erwähnten Falle, dass das Ergebniss der Verknüpfung $\circ$ wieder eine der Grössen $a\,b\,c \cdots$ ist, kann man eine Grösse a fortschreitend mit mehreren Grössen des Systemes

1) Vgl. VI 2. Es ist gewiss merkwürdig, dass das in Nr. 2 und 5 auseinandergesetzte Verfahren schon im 5. Buche der Euclid'schen Elemente auftritt. Unter dem überwältigenden Eindrucke des algebraischen Formalismus wurde in den letzten Jahrhunderten die Euclid'sche Methode, neue Grössen einzuführen, nicht gehörig gewürdigt; sie hätte vor den bei Aufstellung der unendlich kleinen Grössen begangenen Irrthümern bewahren können. Wir halten es für unerlässlich, der Euclid'schen Verhältnisslehre als dem klassischen Muster der Grössenbildung einen Platz in diesem Werke einzuräumen.

2) Das Ergebniss einer eindeutigen Verknüpfung ist ein besonderer Fall der eindeutigen Function von zwei unabhängigen Veränderlichen.

3) Nach R. Grassmann, Die Formenlehre oder Math., 1872, S. 8.

4) Hier erscheint also das Zeichen $=$ in einer zweiten Bedeutung, es besagt nämlich soviel als „ist erklärt durch" oder auch „ist zugeordnet".

$bc \cdots z$ verknüpfen, d. h. man verknüpfe zuerst a mit b, das Ergebniss $a \circ b$ mit c u. s. f. — Wenn die als Resultat der Verknüpfung zweier Grössen ab erklärte Grösse $a \circ b$ bei einer Verknüpfung zu verwenden ist, so hat man $a \circ b$ in Klammern zu setzen. Das Resultat der fortschreitenden Verknüpfung $\circ$ von a mit $b\,c \cdots z$ wird aber anstatt mit $(\cdot((a \circ b) \circ c) \cdot) \circ z$ mit $a \circ b \circ c \circ \cdots z$ bezeichnet. — Die Darstellung einer Grösse durch andere mittelst der Verknüpfungs- oder Rechenzeichen heisst ein Ausdruck.

Es giebt zwei primäre oder thetische Grössenverknüpfungen, die Addition und die Multiplication. Zu ihnen gesellen sich als sekundäre oder lytische Verknüpfungen ihre Umkehrungen und zwar in der gewöhnlichen[1]) Arithmetik je eine, die Subtraction und die Division. Anderer als dieser vier Verknüpfungen bedarf die Arithmetik nicht. Das Zeichen der Addition ist $+$, das der Subtraction ist $-$, das der Multiplication $\times$ oder $\cdot$ oder blosse Nebeneinanderstellung der beiden zu verknüpfenden Grössen, das der Division :, nach Einführung der Brüche in III. 11 auch der Bruchstrich /. Das Ergebniss der Addition heisst Summe, das der Subtraction Unterschied oder Differenz, das der Multiplication Product, das der Division Quotient.

Eine allgemeine Erklärung giebt es weder für die Addition, noch für die Multiplication. Diese Benennungen werden vielmehr nur nach gewissen formalen Gesichtspunkten angewendet. In diesem Abschnitte bedeutet die Addition zweier Grössen a, b weiter nichts, als zwischen a und b unter Aufrechterhaltung dieser Anordnung das Zeichen $+$ setzen. Aehnlich verhält es sich mit der Erklärung der Multiplication.

Das Rechnen beruht darauf, dass die dabei verwendeten Zeichen und Zeichengruppen entweder stets oder doch für eine bestimmte Entwickelung einen und denselben Sinn bewahren. Dieses Princip lässt sich freilich nicht völlig aufrecht erhalten, indem sich mehrdeutige Zeichengruppen nicht ganz vermeiden lassen. Wir werden es indess wenigstens in dem Umfange festhalten, dass Ausdrücke, in denen lediglich die Zeichen der obigen vier Fundamentalverknüpfungen vorkommen, stets eindeutig sein sollen.

5. Die grössere und die kleinere Grösse. — Wenn von je zwei ungleichen Grössen $a\,b$ die eine als die grössere von der andern als der kleinern unterschieden werden soll, so müssen auch dafür eigene Erklärungen aufgestellt werden. Dass von zwei ungleichen Grössen a, b die erstere die grössere (kleinere) heisst, bezeichnet man durch die Ungleichung $a > b$ $(a < b)$. Die Grössen a, b werden die

1) In der allgemeinen Arithmetik kann es zwei Subtractionen und zwei Divisionen geben. So giebt es z. B. in der Arithmetik der Quaternionen zwei Divisionen.

Seiten dieser Ungleichung genannt. Unter zwei *einander entsprechenden* oder *simultanen* Beziehungen werden solche verstanden, in welchen zwei beliebige von den Zeichen $=$, $>$, $<$ oder selbst alle drei über einander auftreten und zwar in der Art, dass je einem Zeichen in der ersteren Beziehung das gleichstellige in der zweiten entspricht. Z. B. „Neben $a \gtrless b$ ist entsprechend $a' \gtrless b'$“ bedeutet, dass neben $a > b$ auch $a' > b'$ und neben $a < b$ auch $a' < b'$ ist. „Neben $a \gtrless b$ ist entsprechend $a' \lessgtr b'$“ hat dagegen den Sinn, dass mit $a > b$ zugleich $a' < b'$ und mit $a < b$ zugleich $a' > b'$ ist.

Die Prädicate „grösser, kleiner“ dürfen nur so ertheilt werden, dass kein Verstoss eintritt gegen solche Sätze, welche bei anschaulich ausführbarer Vergleichung z. B. bei der der Strecken im Raume, beobachtet werden. Es können aber diese Sätze formal zurückgeführt werden auf die folgenden, welche somit nothwendige Bedingungen darstellen, denen die Erklärungen der grösseren und der kleineren Grösse zu entsprechen haben.

1) Wenn nach der einen Erklärung $a > b$ ist, so muss nach der anderen $b < a$ sein und umgekehrt.

2) Von je zwei ungleichen Grössen muss die eine als die grössere, die andere als die kleinere erklärt sein. D. h. die unter den Grössen $a\,b\,c \cdots$ aufgestellte Disjunction: gleich, grösser, kleiner muss sich auf *alle* Paare $a\,b$ erstrecken, d. i. *vollständig* sein.

3) Wenn $a = b$, $b > c$, so muss $a > c$ sein.

4) Wenn $a > b$, $b > c$, so muss $a > c$ sein.

Daraus ergeben sich in der That die übrigen *vier* Sätze über die Vergleichung von zwei Grössen $a\,c$, deren Beziehungen zu einer dritten b bekannt sind. — a) „Neben $a < b$, $b = c$ ist $a < c$“. — Denn aus $c = b$ $b > a$ folgt nach 3) $c > a$ also nach 1) $a < c$. Auf dieselbe Art findet man aus 4): b) „Neben $a < b$, $b < c$ ist $a < c$“. c) Dass „wenn $a = b$, $b < c$ ist, dann $a < c$ ist“, wird indirect bewiesen. Wäre nämlich $a \geqq c$, so hätte man jedenfalls $a > b$, was der Voraussetzung widerspricht. Daraus folgt wie a) aus 3) d) „Wenn $a > b$, $b = c$, so ist $a > c$“.

Wenn zwischen zwei Grössen mehr als eine eingeschaltet ist, so schafft man zunächst die Gleichungen weg. Fehlen aber solche, so ist die mittelbare Vergleichung nur in der folgenden Form möglich: „Wenn die einander *entsprechenden* Ungleichungen $a \gtrless b$, $b \gtrless c \cdots y \gtrless z$ bestehen, so hat man *entsprechend* $a \gtrless z$“.

Die Erfüllung der vorstehenden Forderungen berechtigt jedoch noch nicht dazu, die in Rede stehenden Definitionen zuzulassen. Vgl. III. 16. Es tritt jedenfalls noch die folgende hinzu:

5) „Wenn für die Grössen $abc\cdots$ eine Addition erklärt ist, so darf, falls $a \geqq a'$ $b \geqq b'$, jedoch nicht gerade $a = a'$ $b = b'$ ist, die Summe $a + b$ nicht kleiner als $a' + b'$ sein.[1]) In der gewöhnlichen Arithmetik ist unter den angegebenen Umständen $a + b$ stets grösser als $a' + b'$.

Es springt in die Augen, dass wenn die Forderungen 1)—5) erfüllt sind, sie es auch noch bleiben, wenn man die Prädicate „grösser, kleiner" vertauscht. Eine allgemeine hier entscheidende Bedingung lässt sich jedoch nicht formuliren.

6. Die Zahlen. — Unter den Begriff der Grösse fallen die verschiedenen Arten von Zahlen. Der Zahlbegriff ist im Laufe der Zeiten schrittweise erweitert worden. Bei den Alten auf die Bedeutung „natürliche Zahl" beschränkt, wurde das Wort Zahl seit dem Ende des 17. Jahrhunderts zumeist, so insbesondere von Newton[2]), nur im Sinne von absoluter Zahl gebraucht. Auch Cauchy hielt an diesem engen Zahlbegriffe fest.[3]) Gegenwärtig sind die Bezeichnungen „negative, reelle, complexe Zahl" schon in weiten Kreisen verbreitet

Ein Zahlensystem ist ein System von Grössen, für welche sich die vier Rechnungsarten d. i. die in Nr. 4 erwähnten Verknüpfungen Addition u. s. w. erklären lassen und zwar in der Art, dass in allen Fällen, wo sie überhaupt erklärt sind, das Ergebniss wieder eine Grösse dieses Systemes ist. Es wird jedoch nicht verlangt, dass für eine jede von diesen Verknüpfungen gerade die nämlichen Regeln, wie in der gewöhnlichen Arithmetik gelten. Ausserdem ist erforderlich, dass die genannten Grössen sich sämmtlich mit Hilfe einer endlichen oder selbst einer unbegrenzten Anzahl von Zeichen, deren jedes beliebig oft verwendet werden darf, darstellen lassen.

Ein Grössensystem wird durch ein Zahlensystem dargestellt, wenn es möglich ist, jeder Grösse eine Zahl des Systemes

---

1) Man kann diese Forderung nach R. Betazzi (Teoria delle grandesse 1890, S. 17) durch die allgemeinere ersetzen: „Ist $a \geqq a'$ $b \geqq b'$, jedoch nicht gerade $a = a'$ $b = b'$, so soll $a \circ b \geqq a' \circ b'$ sein". Wenn Betazzi aber ein System von Grössen, welches den in Nr. 5 angegebenen Bedingungen genügt, als ein solches von einer Dimension bezeichnet, so scheint dies in Widerspruch damit zu stehen, dass sich auch unter je zwei ungleichen complexen Zahlen, welche doch ein System von zwei Dimensionen bilden, eine als die grössere erklären lässt (vgl. X. 4).

2) Vgl. Newton, Arithmetica universalis, ed. Gravesande 1716, S. 4. Positive und negative Zahlen heissen daselbst Quantitates. Wie gekünstelt diese Unterscheidung ist, ergiebt sich am besten aus dem genannten Werke selbst, das auf S. 180 von einer negativen, auf S. 182 sogar von einer unmöglichen Zahl spricht.

3) Vgl. Cauchy, Cours d'Analyse, 1821, S. 1.

zuzuordnen und umgekehrt. Die hierzu erforderliche Regel muss jedenfalls so beschaffen sein, dass gleichen Grössen gleiche Zahlen entsprechen und umgekehrt. Solche Grössen kann man Zahlgrössen nennen. Wir wollen dafür die Bezeichnung „Grösse" so lange beibehalten, als von der soeben erwähnten Darstellung abgesehen wird. — Dass den Grössen $a, b, c \cdots$ von einer Art die Zahlen einer Art und zwar bezw. $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ entsprechen, wird durch das Zeichen $=$ ausgedrückt: $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma \cdots$.

7. Ausgehend von den natürlichen Zahlen gelangt man in der gewöhnlichen Arithmetik zunächst zu dem Systeme der rationalen Zahlen, welches noch einer zweimaligen, dann aber keiner ferneren Erweiterung in dem Sinne fähig ist, dass die Gesammtheit der Rechnungsregeln erhalten bleibt. So werden wir zuerst zum System der reellen, hernach zu dem der gemeinen complexen Zahlen geführt, dessen Entwickelung die eigentliche Aufgabe der Arithmetik bildet. Hierbei kann man sowohl analytisch als synthetisch vorgehen. Wie man es auch machen mag, stets lassen sich in dieser Entwickelung zwei scharf getrennte Stufen unterscheiden. Die synthetische Darstellung schreitet von den discreten zu den stetigen Grössen fort. Bei der analytischen gehen wir, nachdem jede rationale Zahl durch eine endliche Anzahl von Zeichen erklärt ist, dazu über, eine endlose, aber gesetzmässig fortschreitende Folge solcher Zahlen in gewissen Fällen durch ein Zeichen auszudrücken. Man kann diesen Vorgang als die Einführung des Unendlichen in die reine Mathematik bezeichnen und ihn als den eigentlichen Wendepunkt in der systematischen Entwickelung derselben erklären. In der That bieten, nachdem die Lehre von den irrationalen Zahlen begründet ist, alle anderen Grenzprocesse keine theoretische Schwierigkeit mehr dar. Da die irrationalen Zahlen gewöhnlich als Summen von unendlich vielen rationalen Zahlen aufgefasst werden, so schliesst sich an sie unmittelbar die Lehre von den unendlichen Reihen, so dass ihre Aufnahme in dieses Werk passend erschienen ist.

8. **Regeln über die Unterdrückung von Klammern.**[1]) — In Nr. 4 haben wir bemerkt, dass, wenn das bloss angezeigte Ergebniss einer Verknüpfung zweier Grössen in einen Ausdruck eintritt, es mit

1) Vgl. E. Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra I. (einziger) Bd., 1873, S. 219. Der zur Deutung von Ausdrücken, in denen keine Klammern vorkommen, aufgestellten Regeln, welche Schröder die erste und zweite Konvention nennt, sind früher zu wenig beachtet worden. Beide sind bereits richtig angegeben in den Resultaten zur Aufgabensammlung von E. Bardey, 1871, S. 2.

Klammern einzuschliessen ist. Man ist jedoch, wie a. a. O. schon für den fortschreitend mittelst einer und derselben Verknüpfung zu berechnenden Ausdruck hervorgehoben ist, übereingekommen, zur Vereinfachung der Schreibweise die Klammern in gewissen Fällen wegzulassen.

Die vier Rechnungsarten oder -operationen, auch Species genannt, gliedern sich in zwei Stufen, die Addition und Subtraction einer- und die Multiplication mit der Division andererseits. Viele Lehrbücher fügen hierzu eine dritte Stufe, bestehend aus dem Potenziren und seinen beiden Umkehrungen, dem Wurzelziehen und dem Logarithmiren. Die Bezeichnungen dieser Verknüpfungen sind bezw.:

$$a^b \quad \sqrt[b]{a} \quad {}^b\log a.$$

Es ist jedoch nicht zweckmässig, dieselben ihrem Wesen nach als solche zu betrachten (vgl. III. 17). Nur in formaler Beziehung, was die Schreibweise ihrer Ergebnisse und der Ausdrücke anlangt, mögen sie mit den vier Species zusammengestellt werden.

Ausdrücke, in welchen keine Klammern vorkommen, sind nach den beiden folgenden Regeln zu deuten.

1. Regel. Ein Ausdruck ohne Klammern, in welchem bloss Rechenzeichen einer und derselben Stufe vorkommen, ist fortschreitend zu berechnen. D. h. es ist, von links nach rechts gerechnet, zunächst die erste Zahl gemäss des ersten Verknüpfungszeichens mit der zweiten, dann das Ergebniss dieser Verknüpfung gemäss des zweiten Zeichens mit der dritten zu verknüpfen und so fort, bis die letzte Zahl erreicht ist.

2. Regel. „Kommen in einem klammerlosen Ausdruck Zeichen von Verknüpfungen zweier Stufen vor, so sind zuerst alle Verknüpfungen der höheren und erst hierauf die der niedrigeren Stufe auszuführen. Kommen in einem solchen gar Rechenzeichen aller drei Stufen vor, so sind zuerst alle Verknüpfungen der dritten, hierauf alle der zweiten und zuletzt alle der ersten Stufe auszuführen“. So ist z. B.

$$a : b + c : d \quad \text{soviel wie} \quad (a : b) + (c : d)$$
$$a^m \cdot b^n + c^m \cdot d^n \quad \text{soviel wie} \quad ((a^m) \cdot (b^n)) + ((c^m) \cdot (d^n)).$$

Die vorstehenden Regeln wurden nicht bei Einführung des Rechnens mit Buchstaben aufgestellt, sondern haben sich in der mehrhundertjährigen Praxis desselben gebildet. Man darf sich daher nicht wundern, dass auch Ausnahmen von der ersten Regel begegnen. So versteht man unter $a : b \cdot c$ allgemein $a : (b \cdot c)$, nicht, wie man nach der ersten Regel sollte, $(a : b) \cdot c$ und a^{b^c} bedeutet nicht $(a^b)^c = a^{b\,c}$, sondern $a^{(b^c)}$.

9. Eigene Bezeichnungen für gewisse Ausdrücke. — Ein Ausdruck, der aus Zahlen nur mittelst der Rechenzeichen der zweiten und dritten Stufe gebildet ist, heisst Monom.

Ein aus Monomen bezw. eingeklammerten Ausdrücken mittelst der Rechenzeichen + und — oder bloss eines von beiden gebildeter Ausdruck heisst Aggregat, diese Monome, bezw. Ausdrücke selbst die Glieder desselben. Nach der Anzahl der Glieder wird das Aggregat Binom, Trinom ... und allgemein Polynom genannt.

Für die Ausdrücke, welche aus Zahlen bezw. eingeklammerten Ausdrücken mittelst der beiden Rechenzeichen der zweiten Stufe (·, :) gebildet sind, giebt es keinen eigenen Namen.[1])

10. Das Hauber'sche Theorem über die Umkehrbarkeit der Sätze.[2]) — Da bei mathematischen Untersuchungen häufig die Frage nach der Umkehrung von Sätzen auftritt, so ist es zweckmässig, ein für alle Mal einen Fall hervorzuheben, in welchem sie stets zulässig ist.

Satz. „Bilden die Fälle A, $A' \cdots A^{(n)}$ eine vollständige Disjunction d. h. die Gesammtheit der Möglichkeiten, bedeuten ferner B, $B' \cdots B^{(n)}$ eben so viele von einander verschiedene und einander gegenseitig ausschliessende Fälle und weiss man, dass, wenn A eintritt, B zutrifft; wenn A' so $B' \cdots$; wenn $A^{(n)}$, so $B^{(n)}$; so kann man schliessen, dass aus B umgekehrt A, aus B', $A' \cdots$, aus $B^{(n)}$ $A^{(n)}$ folgt".[3])

Der Satz ist leicht zu beweisen. Dem B muss einer der Fälle A, $A' \cdots A^{(n)}$ entsprechen wegen ihrer Vollständigkeit. Es kann aber weder A', $\cdots$ noch $A^{(n)}$ sein, indem aus diesen ja beziehentlich $B' \cdots B^{(n)}$ folgen würde. Also muss dem B A entsprechen. — Auf ähnliche Weise wird geschlossen, dass auch die Disjunction B, $B' \cdots B^{(n)}$ vollständig sein muss. Denn gäbe es ausser diesen Fällen noch einen, $B^{(n+1)}$, so müsste ihm doch einer der Fälle A, $A' \cdots A^{(n)}$ entsprechen, da es andere nicht giebt. Das ist aber nicht möglich, da dem A bloss B, dem A' bloss B' u. s. w. zugeordnet ist.

Offenbar gilt der Satz auch dann noch, wenn die Reihen A, $A' \cdots$ und B, $B' \cdots$ unbegrenzt sind und jedem A ein und nur ein B entspricht.

---

1) Die hierfür von J. H. T. Müller (Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik, 1855, S. 64) vorgeschlagene Bezeichnung „Composita" hat keinen Anklang gefunden.

2) F. C. Hauber, Scholae logico-mathematicae, 1825, § 291.

3) Anwendungen dieses Satzes finden sich z. B. in III. 5, IV. 8.

Auf ähnliche Art erkennt man, in welcher Weise man einen einzelnen Satz, dem wir die Form geben wollen: „Der Thatsache A entspricht eine andere B“, umkehren kann. A und Nicht-A einer-, B und Nicht-B andererseits bilden eine vollständige Disjunction. Dem Falle A entspricht nun nach Annahme B, dem Falle Nicht-A muss natürlich entweder B oder Nicht-B entsprechen. Man ersieht daraus, dass dem Falle Nicht-B der Fall Nicht-A zugeordnet ist. Wir gelangen somit zum Satze: „Aus der Thatsache Nicht-B folgt nothwendig Nicht-A.“

II. Abschnitt.

Die natürlichen Zahlen.

1. Nach Euclid (Elem. VI. B. Def. 2) ist die natürliche Zahl eine aus Einheiten bestehende Menge. Dadurch wird aber nicht eine bestimmte Zahl erklärt; es ist lediglich eine gemeinsame Eigenschaft aller natürlichen Zahlen angegeben. Die Euclid'sche Erklärung der Zahl[1]) erschöpft das Wesen derselben nicht; sie drückt nicht aus, dass die Zahlen eine fortlaufende Folge bilden. Auf diesen Mangel derselben haben erst Mathematiker der neuesten Zeit hingewiesen, zuerst vielleicht Helmholtz und Kronecker.[2]) Viel gründlicher geht R. Dedekind[3]) zu Werke. Er betrachtet zunächst das System von Elementen d. i. den Inbegriff von einzelnen Dingen im Allgemeinen und gelangt dann zur Unterscheidung des unendlichen und endlichen Systems. Hierauf wird das einfach unendliche System erklärt, das, wenn man von der besonderen Beschaffenheit der Elemente absieht, in die Zahlenreihe übergeht. Dieselbe wird dabei durch die nämlichen Eigenschaften charakterisirt, die G. Peano[4]) axiomatisch an die Spitze seiner Darstellung der Lehre von den natürlichen Zahlen gestellt hat (s. Nr. 2).

Die gewöhnliche Erklärung des endlichen Systems (oder der endlichen Menge) zieht den Begriff der Zeit heran. Denn nach ihr heisst ein System von Dingen endlich, wenn der Versuch, jedes der im Systeme enthaltenen Dinge für sich (also eines nach dem andern) aufzufassen, zu Ende geführt werden kann. Lässt man diesen Begriff zu, so kann man ihn zu einem Grössenbegriff machen. Zwei endliche Mengen sollen nämlich einander gleich heissen, wenn sich jedem Dinge der ersteren je eines der letzteren

---

1) In diesem Abschnitte bedeutet „Zahl" stets „natürliche Zahl".

2) Die Abhandlungen von Helmholtz: „Zählen und Messen" und von Kronecker: „Ueber den Zahlbegriff" befinden sich in der Sammlung: „Philosophische Aufsätze, E. Zeller zu seinem 50jährigen Jubiläum gewidmet" (1887); die letztere auch im 101. Bande des Journals f. r. u. ang. Mathematik (S. 337).

3) „Was sind und was sollen die Zahlen?" Braunschweig 1888, 2. Aufl., 1893.

4) Vgl. G. Peano, Arithmetices principia nova methodo exposita. Turin 1889, Sul concetto di numero (Rivista di Matem. I. S. 87), Formulaire de Mathématiques T. II. Nr. 2, Turin 1898. Differentialrechnung und Grundzüge d. Integralr., deutsch von Bohlmann u. Scheep, 1899, S. 353.

zuordnen lässt und keines von diesen unverbunden bleibt. Und grösser von zwei Mengen sei diejenige, von welcher, nachdem jedes Ding der anderen (der kleineren) je einem von ihr zugeordnet ist, noch einige Dinge (ein Rest) unverbunden bleiben.

Fügt man zu den Dingen einer Menge die einer andern, so heisst die so entstandene Menge die Summe aus der ersten und zweiten Menge. Der Rest, welcher bei Vergleichung einer Menge mit einer kleineren übrig bleibt, erscheint als die Differenz der letzteren von der ersteren.

Näher auf die Begründung dieser Erklärungen einzugehen, halte ich jetzt hier nicht mehr für nöthig. Vgl. über sie E. Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, I. B., 1873, S. 8, 14 und die 1. Auflage dieser Vorlesungen I. T. II. 1—4.

2. Die natürlichen Zahlen. — Das soeben erwähnte Verfahren von R. Dedekind, diese Zahlen einzuführen und damit den Grund für das System der Arithmetik zu legen, erscheint als ziemlich umständlich. Bei diesem Umstande wird der gewöhnliche Vorgang, die natürlichen Zahlen als solche an die Spitze dieses Systems zu stellen, stets seine Berechtigung behalten.

Eine fertige Definition einer bestimmten natürlichen Zahl lässt sich nicht geben; man kann nur die Lehre von den natürlichen Zahlen nach Peano[1]) auf die folgenden Grundsätze zurückführen.

1) Die Einheit 1 ist eine Zahl.

2) Auf jede Zahl folgt eine andere. Bezeichnet a eine Zahl, so soll $a+$ die „auf a folgende“ Zahl bezeichnen.

3) Die Zahl, welche auf irgend eine Zahl folgt, ist niemals 1.

4) Jede Zahl heisst sich selbst gleich.[2])

5) Wenn auf zwei Zahlen a und b dieselbe Zahl folgt, so sind sie einander gleich. Oder: In der Zahlenreihe kehrt niemals dieselbe Zahl wieder.[3]) Die Zahl $a+$ ist von der Zahl a und allen ihren Vorgängern verschieden und zwar heisst sie grösser als jeder von ihnen.[4])

6) „Wenn ein System von Zahlen, zu welchem die Zahl 1 gehört, die Eigenschaft hat, dass in demselben neben jeder darin vorkommenden Zahl die darauf folgende erscheint, so enthält es jede Zahl“. — Dieser Grundsatz kommt bei dem Bernoulli'schen Verfahren der

---

1) Vgl. a. d. a. O. An den beiden letzten Orten lässt Peano die Zahlreihe mit Null beginnen, indem er die endgiltige Darstellung der Lehre von den natürlichen Zahlen im Auge hat. Wir wollen dieselbe jedoch aus ihren Anfängen entwickeln. Satz 4) haben wir hier eingeschaltet.

2) Von gleichen natürlichen Zahlen spricht man nur insofern, als man sich irgend eine solche Zahl, wie jeden Begriff, beliebig oft gesetzt denken kann. Arithmetisch besteht zwischen ihnen kein Unterschied.

3) Die Zahlenreihe, in der die Einheit wiederkehrt und zwar periodisch, betrachtet E. Schulze, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, 25 B., S. 21.

4) Die formalen Bedingungen in I. 5 werden durch diese Erklärung erfüllt.

Induction, dem sogenannten „Schlusse von n auf $n+1$“, von welchem wir sofort umfassenden Gebrauch machen werden, zur Geltung.

Corollar. „Wenn ein System von Zahlen die Eigenschaft hat, dass in demselben neben jeder darin vorkommenden Zahl die darauf folgende erscheint, so enthält es jede Zahl von einer bestimmten an.“ Enthält das System 1, so fällt der Satz mit 6) zusammen. Enthält das System die Zahlen von 1 bis a nicht, während $a+$ darin vorkommt, so füge man sie ihm bei. Das neue System enthält nach dem Grundsatze 6) alle Zahlen, folglich das ursprüngliche alle von $a+$ an.

Bezeichnung der Zahlen. Als Zeichen für die ersten acht auf 1 folgenden Zahlen können wir schon hier die arabischen Ziffern einführen.

Es sei also

$$1+=2 \qquad 2+=3 \qquad 3+=4 \qquad 4+=5 \qquad 5+=6$$
$$6+=7 \qquad 7+=8 \qquad 8+=9.$$

Für die Zehner, Hunderter u. s. w. wollen wir uns vorläufig der lateinischen Bezeichnungsweise[1]) bedienen, weil das dekadische Zahlensystem die Kenntniss der Addition, Multiplication und Potenzirung der natürlichen Zahlen und ausserdem die Einführung der Null voraussetzt (vgl. Nr. 10). Es sei also

$$9+=X \qquad X+=X1 \qquad X1+=X2 \quad \text{u. s. w.}$$

3. Addition der natürlichen Zahlen. — Unter der Summe $a+b$ zweier Zahlen a, b versteht man die b-te auf a folgende Zahl d. i. die Zahl, welche man erhält, wenn man in der Zahlenreihe von a aus um b Schritte vorwärts geht. Demnach ist

$$a+1=a+ \tag{1}$$
$$a+2=(a+)+=(a+1)+1 \quad \text{u. s. w.}$$

Es bedarf zur Erklärung der Summe neben der Festsetzung (1) nur noch der folgenden[2]):

$$a+(b+1)=(a+b)+1. \tag{2}$$

Damit können wir nicht bloss jede besondere Summe berechnen, sondern auch die Gesetze der Addition nachweisen. Um z. B. $5+4$ zu ermitteln, hat man

1) Bequemer wäre die griechische Bezeichnung der Zehner, Hunderter u. s. w.

2) Dass aus den Festsetzungen 1) und 2) alle Regeln der Addition und Multiplication der natürlichen Zahlen folgen, hat H. Grassmann erkannt (vgl. dessen Lehrbuch d. Arithm., 1861 und H. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme § 9). Diese Zahlen sind durch die sechs Grundsätze auf S. 13, die beiden genannten Festsetzungen über die Summe und die Erklärung ihrer Produkte in Nr. 6 vollständig bestimmt.

$$5+4=5+(3+1)=(5+3)+1$$
$$5+3=5+(2+1)=(5+2)+1$$
$$5+2=5+(1+1)=(5+1)+1.$$

Es ist nun nach (1) $5+1=6$, also ebenfalls nach (1)

$$5+2=6+1=7$$
$$5+3=7+1=8$$
$$5+4=8+1=9.$$

Die Regeln über die Addition der natürlichen Zahlen folgen sämmtlich aus fünf Sätzen durch Schlüsse, welche von der besonderen Natur sowohl dieser Zahlen, als auch der Addition als Verknüpfung derselben gänzlich unabhängig sind.

Bedeuten $a\,b\,c$ beliebige Zahlen, so sind die fünf Hauptsätze dieser Addition:

1) Aus $a=a'$ $b=b'$ folgt $a+b=a'+b'$.

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$. (3)

3) $a+b=b+a$. (4)

4) $a+b>a$. (5)

5) Aus $a>a'$ folgt $a+b>a'+b$.

Von ihnen ist der erste selbstverständlich, da zwischen gleichen Zahlen arithmetisch hier kein Unterschied besteht.[1]) Der 4. Satz ergiebt sich unmittelbar aus dem Grundsatze 5) auf S. 13. Die übrigen drei Sätze lassen sich durch den schon oben erwähnten Schluss „von n auf $n+1$“ beweisen.

Der Satz 2) geht bei der Annahme $c=1$ in die Formel (2) über, trifft also dann zu. Sehen wir nun die Formel (3) als richtig an und bilden durch dreimalige Anwendung der Gleichung (2)

$$(a+b)+(c+1)=[(a+b)+c]+1$$
$$a+[b+(c+1)]=a+[(b+c)+1]=[a+(b+c)]+1,$$

so finden wir, dass auch

$$(a+b)+(c+1)=a+[b+(c+1)]$$

sein muss. Nun gilt die Formel (3) für $c=1$, folglich auch für $c=2$ u. s. w. also für jeden Werth von c.

Um den Satz 3) zu zeigen, hat man zuerst nachzuweisen, dass

$$a+1=1+a \tag{6}$$

ist. Für $a=1$ ist die Formel (6) eine Identität. Lassen wir sie für ein beliebiges a gelten, so erhalten wir nach (2)

1) Das Nämliche gilt von den Sätzen 1) in Nr. 4 und 7 und dem Satze 5) in Nr. 6. Für andere Zahlenarten verstehen sich indess diese Sätze nicht von selbst, weil gleiche Zahlen vermöge ihrer Erklärung verschiedenen arithmetischen Ausdruck haben können (z. B. 2/3 und 4/6).

$$(a+1)+1=(1+a)+1=1+(a+1)$$

d. i. die Formel (6) gilt auch, wenn $a+1$ an Stelle von a tritt. Wir sehen somit, dass die Formel (4) für $b=1$ richtig ist. Wenn wir sie nun für irgend ein b als richtig betrachten, so ergiebt sich nach (2), (6) und (3), dass auch

$$\begin{aligned} a+(b+1)=(a+b)+1=(b+a)+1&=1+(b+a)\\ &=(1+b)+a=(b+1)+a \end{aligned}$$

ist. Demnach gilt auch die Formel (4) allgemein.

Beweis des Satzes 5). Wenn $a>a'$ ist, so ist $a \geqq a'+1$. Daher ist nach (5) $a+1>a\geqq a'+1$, also $a+1>a'+1$ (7). Der Satz 5) besteht somit für $b=1$. Lassen wir nun bei irgend einem b $a+b>a'+b$ sein, so finden wir nach (7)

$$(a+b)+1>(a'+b)+1. \tag{8}$$

Es ist aber nach (2)

$$a+(b+1)=(a+b)+1 \quad a'+(b+1)=(a'+b)+1,$$

mithin nach (8)

$$a+(b+1)>a'+(b+1).$$

Der Satz 5) gilt also auch, wenn wir b durch $b+1$ ersetzen, somit nach dem bekannten Schlusse allgemein.

Die weiteren Additionsregeln bestehen in der Ausdehnung der obigen fünf Sätze auf Summen aus beliebig vielen Zahlen. Der Satz 2) bildet den einfachsten Fall des associativen Gesetzes[1]), das man auch „Gesetz der Gruppirung“ nennen kann. Es lautet allgemein ausgesprochen: „Ist eine Reihe von beliebig vielen Zahlen $a\,b\,c\cdots$ vorgelegt, so kommt stets das nämliche Ergebniss heraus, wie auch dieselben zunächst zu zweien oder mehreren addirt werden, wenn nur im schliesslichen, sie alle enthaltenden Summenausdrucke die ursprüngliche Folge $a, b, c\cdots$ festgehalten ist.“ Das gemeinsame Ergebniss aller dieser Additionen wird mit $a+b+c+\cdots$ bezeichnet, welcher Ausdruck nach I. 4 zunächst bloss das Ergebniss der fortschreitenden Addition der Zahlen $a, b, c\cdots$ bedeutet. Bei drei Zahlen a, b, c sind nur die beiden Ausdrücke $(a+b)+c$ und $a+(b+c)$ möglich, welche nach dem Satze 2) einander gleich sind und daher fortan ohne Unterschied durch $a+b+c$ dargestellt werden. Bei vier Zahlen a, b, c, d kann man die Summen

$$(a+b+c)+d \quad (a+b)+(c+d) \quad a+(b+c+d)$$

1) Die associative Eigenschaft der gewöhnlichen Summe und des gewöhnlichen Productes wurde erst im 19. Jahrhundert beachtet. Der Name „associativ“ dürfte nach Hankel (a. a. O. S. 3) von W. R. Hamilton eingeführt worden sein.

bilden. Sie sind ebenfalls einander gleich und daher sämmtlich durch $a + b + c + d$ zu bezeichnen. In der That ist nach (3)

$$\begin{aligned}(a + b) + (c + d) &= [(a + b) + c] + d = (a + b + c) + d \\ a + (b + c + d) &= a + [(b + c) + d] = [a + (b + c)] + d \\ &= (a + b + c) + d.\end{aligned}$$

In ähnlicher Art wird das associative Gesetz der Addition allgemein gezeigt, wie man aus dem Beweise des 1. Satzes in III. 2 entnehmen kann. — Nunmehr erscheint jede Zahl als Summe von Einern: $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$ u. s. w. Die auf S. 12 erwähnte Euclid'sche Erklärung der Zahl erweist sich mithin als eine Folgerung aus unseren Grundsätzen und den Festsetzungen (1) und (2).

Der Satz (4) ist der einfachste Fall des zweiten Gesetzes der gewöhnlichen Addition, des commutativen[1]), auch Gesetz der Vertauschung genannt. „Die Summe ändert ihren Werth bei beliebiger Vertauschung der Glieder nicht." So bestehen neben (4) die Gleichungen

$$\begin{aligned}a + b + c = a + c + b = b + a + c &= b + c + a \\ = c + a + b &= c + b + a.\end{aligned}$$

In der That ist nach (3) und (4)

$$\begin{aligned}a + b + c &= a + (b + c) = a + (c + b) = a + c + b \\ &= (b + c) + a = b + c + a \\ &= (a + b) + c = (b + a) + c = b + a + c \\ &= c + (a + b) = c + a + b \\ &= c + (b + a) = c + b + a.\end{aligned}$$

Der allgemeine Beweis dieses Gesetzes ist in dem des 2. Satzes in III. 2 enthalten.

Der 4. Satz gehört zur Regel: „Die Summe von natürlichen Zahlen ist grösser als jedes Glied derselben und jede aus einem Theile der Glieder gebildete Summe". Sie folgt ebenfalls unmittelbar aus dem 5. Grundsatze auf S. 13.

Zum 5. Satze fügen wir zunächst den nachstehenden: „Ist $a > a'$ $b > b'$, so ist $a + b > a' + b'$", welcher sich durch zweimalige Anwendung des ersteren ergiebt. Allgemein hat man: „Wenn von den Zahlen $a, b, c, d \cdots$ keine kleiner ist als die gleichlautende von den Zahlen a' b', c', d' $\cdots$, jedoch mindestens eine grösser als die ihr entsprechende der zweiten Reihe, so ist

$$a + b + c + d + \cdots > a' + b' + c' + d' + \cdots."$$

Der Beweis wird geführt durch den Schluss von den n-gliederigen Summen auf die $(n + 1)$ gliederigen.

---

1) Die Bezeichnung „commutativ" rührt von Servois her (vgl. Gergonne's Ann., Bd. V. 1814, S. 93).

4. Subtraction der natürlichen Zahlen. — Wir legen uns nun die Gleichung $b + x = a$ vor, worin $a\,b$ gegebene, x die zu ermittelnde Zahl bedeutet.

Satz. „Ist die Zahl $a > b$, so giebt es eine und nur eine Zahl d, welche für x gesetzt, die Gleichung $b + x = a$ befriedigt. Im Falle dass $a \leqq b$ ist, hat diese Gleichung keine Lösung.“

Beweis. Verstehen wir unter x eine beliebige Zahl, so besteht nach der Formel (2) auf S. 14 die Beziehung

$$b + (x + 1) = (b + x) + 1,$$

d. h. das System der Zahlen $b + x$ enthält neben jeder ihm angehörigen Zahl die folgende. Demnach kommt darin zufolge des Corollars auf S. 14 jede Zahl, welche grösser als b ist, somit auch die Zahl a vor. Es giebt also eine solche Zahl d, dass $b + d = a$ ist. Dass es nur eine derartige Zahl giebt, schliesst man daraus, dass nach dem Satze 5) auf S. 15, wenn $x \gtrless d$ ist, entsprechend

$$b + x \gtrless b + d \quad \text{d. i} \quad b + x \gtrless a$$

ist. — Ist $a \leqq b$, so ist nach dem Satze 4) auf S. 15 für jede beliebige Zahl x $b + x > a$. In diesem Falle giebt es also keine solche Zahl x, dass $b + x = a$ ist.

a heisst der Minuend, b der Subtrahend, d die Differenz oder der Unterschied derselben. Er wird mit $a - b$ bezeichnet, so dass die Formel besteht:

$$b + (a - b) = (a - b) + b = a. \tag{9}$$

Die Zahl $a - b$ ist also kleiner als a.

Zunächst bemerken wir die folgenden Sätze. Die darin vorkommenden Differenzen sind als möglich vorauszusetzen oder nachzuweisen.

1) „Gleiche Zahlen von gleichen subtrahirt, geben gleiche Unterschiede.“

2) „Aus $a + b = a + b'$ folgt $b = b'$.“ Wäre nämlich $b \gtrless b'$, so wäre entsprechend $a + b \gtrless a + b'$.

3) „Aus $a - b = a' - b$ folgt $a = a'$; aus $a - b = a - b'$ folgt $b = b'$.“ Aus der ersten Gleichung folgt durch beiderseitige Addition von b in der That $a = a'$. Setzt man ferner $a - b = a - b' = d$, so hat man $a = b + d$, $a = b' + d$. Da die Gleichung $a = x + d$ nur eine Lösung hat, so muss $b = b'$ sein.

4) „Je nachdem a gleich, grösser, kleiner als $b - c$, ist $a + c$ gleich, grösser, kleiner als b und umgekehrt, wobei im 2. ~~und 3.~~ Falle $b - c$ als möglich vorauszusetzen ist.“

5) „Je nachdem $a - b$ gleich, grösser, kleiner als $a' - b'$, ist $a + b'$ gleich, grösser, kleiner als $a' + b$ und umgekehrt, wobei im

1. Falle eine von den Differenzen $a - b$, $a' - b'$, im 2. ~~und 3. Falle beide~~ als möglich vorauszusetzen ~~sind~~ ist.“ — Der erste Theil durch Addition von $b + b'$ auf beiden Seiten der Relationen, der zweite nach I. 10.

6) „Wenn $a > a' > b$, so hat man $a - b > a' - b$.“

7) „Wenn $a > b' > b$, so hat man $a - b > a - b'$.“

8) „Wenn $a > a' > b' > b$, so hat man $a - b > a' - b'$.“

Die Beweise von 6) und 7) indirect aus den Sätzen 1) und 5) in Nr. 3. Aus ihnen ergiebt sich dann der 8. Satz.

9) $(a + b) - b = a$.

10) $a - (a - b) = b \quad (a > b)$.

11) $(a + m) - (b + m) = a - b \quad (a > b)$.

12) $(a - m) - (b - m) = a - b \quad (a > b > m)$.

13) $(a - b) + c = c + (a - b) = (a + c) - b \quad (a > b)$.

14) $(a - b) - c = a - (b + c) \quad (a > b + c)$.

15) $a - (b - c) = (a + c) - b \quad (c < b < a + c)$.

Diese Sätze sind leicht zu beweisen. Handelt es sich z. B. um die letzte Formel, so bemerke man zunächst, dass weil $c < b < a + c$ ist, nach dem 6. Satze $b - c < a$ ist. $a - (b - c)$ ist mithin eine Zahl y. Aus der Gleichung

$$a - (b - c) = y$$

folgt aber

$$a = y + (b - c) = (b + y) - c \quad \text{(nach Formel 13))}$$

und daraus

$$b + y = a + c \quad \text{d. i.} \quad y = (a + c) - b \quad \text{w. z. b. w.}$$

Auf ähnliche Art erhält man die Formeln

16) $(a - b) + (a' - b') = (a + a') - (b + b') \quad (a > b \;\; a' > b')$.

17) $(a - b) - (a' - b') = (a + b') - (b + a')$

$(a > b \;\; a' > b' \;\; a - b > a' - b' \;\; \text{d. i.} \;\; a + b' > b + a')$.

Setzt man in der That z. B. den zufolge der angegebenen Bedingungen einen Sinn habenden Ausdruck

$$(a - b) - (a' - b') = y,$$

so folgt

$$a - b = y + (a' - b'),$$

also, wenn man beiderseits $b + b'$ addirt, nach (9).

$$a + b' = y + a' + b \quad \text{d. i.} \quad y = (a + b') - (b + a').$$

5. Berechnung der Aggregate. Wegschaffen der Klammern. — Unter 'Aggregat' versteht man nach I. 9 hier einen Ausdruck, der aus einer endlichen Anzahl von natürlichen Zahlen, welche die Glieder des Aggregats heissen, nur mittelst der Operationszeichen $+$ und $-$ gebildet ist. Dabei wird angenommen, dass er von links nach rechts fortschreitend zu berechnen sei d. h. dass zunächst die erste Zahl gemäss des ersten Rechenzeichens mit der zweiten, dann das Ergebniss gemäss des zweiten Rechenzeichens mit der dritten zu verknüpfen sei u. s. w., alle einzelnen Schritte als möglich vorausgesetzt. So bedeutet

$$\left.\begin{aligned} a + b - c &= (a + b) - c \\ a - b + c &= (a - b) + c = (a + c) - b \text{ (nach 13))} \\ a - b - c &= (a - b) - c = a - (b + c) \text{ (nach 14)),} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

wobei bez. vorauszusetzen ist

$$a + b > c, \quad a > b, \quad a - b > c.$$

Das Endresultat wird angegeben durch den folgenden Satz: „Ein Aggregat ist gleich dem Unterschiede: Summe des ersten Gliedes und aller, vor denen das Rechenzeichen $+$ steht, weniger der Summe aller Glieder, vor denen das Rechenzeichen $-$ steht.“ Der Satz ergiebt sich durch wiederholte Anwendung der Formeln (10), welche besondere Fälle desselben bilden. — Die Formeln (9) und (11) in Nr. 4 geben noch die Bemerkung an die Hand: „Kommen in dem Ausdrucke gleiche Glieder hinter den Rechenzeichen $+$ und $-$ vor, so heben sie sich auf.“

Aus dem vorstehenden Satze folgt, dass das Endresultat eines Aggregates von der Aufeinanderfolge seiner Glieder (ein jedes mit dem vor ihm stehenden Rechenzeichen und das Anfangsglied mit dem Zeichen $+$ fest verbunden gedacht) nicht abhängt, vorausgesetzt nur, dass auch bei der neuen Anordnung derselben ein möglicher Ausdruck herauskommt, was nicht immer der Fall ist. Es ist z. B. $7 + 2 - 8 = 9 - 8 = 1$, $7 - 8 + 2$ hat jedoch keinen Sinn.

Die Aufgabe, einen Ausdruck, dessen Glieder sämmtlich oder theilweise Aggregate sind, in einen fortschreitend zu berechnenden zu verwandeln, wird durch die Regel gelöst: „Steht ein Aggregat am Anfange des Ausdruckes oder hinter einem $+$, so lässt man die Klammern weg; steht es hinter einem $-$, so ist bei Entfernung der Klammern vor das erste Glied desselben das Rechenzeichen $-$ zu setzen und es sind vor allen folgenden $+$ und $-$ mit einander zu vertauschen. Dabei ist jedoch im zweiten Falle vorauszusetzen, dass der so erhaltene Ausdruck möglich sei, was nicht immer zutrifft.“ Z. B. es ist $7 - (8 - 2) = 7 - 6 = 1$; der Ausdruck $7 - 8 + 2$ hat jedoch, wie schon bemerkt, keine Bedeutung.

Zum Beweise dieses Satzes genügt es einen Ausdruck zu betrachten, in welchem neben etwaigen für sich stehenden Gliedern bloss eingeklammerte Aggregate von einfachen Gliedern vorkommen, in welchen also keine Klammern mehr auftreten. Die in dem vorgelegten Ausdrucke erscheinenden Klammern lassen sich nun nacheinander beseitigen, wobei man von links nach rechts fortschreitet. Beginnt er mit einem eingeklammerten Aggregate, so können die Klammern desselben unterdrückt werden, ohne dass sein Werth sich ändert. Ist das geschehen, so brauchen wir nur mehr zu zeigen, dass derjenige Theil des Ausdruckes, welcher aus den einfachen Anfangsgliedern und dem ersten eingeklammerten Aggregate besteht, den nämlichen Werth besitzt, wie das aus dem genannten Theile mittelst der vorstehenden Regel abgeleitete klammerlose Aggregat, dasselbe als möglich vorausgesetzt. Dies lässt sich mit Hilfe der Formeln 13)—17) in Nr. 4 leicht einsehen. Nehmen wir sogleich an, dass sowohl ausserhalb als innerhalb der Klammern Glieder, vor denen das Rechenzeichen $+$ und solche, vor denen das Zeichen $-$ steht, vorkommen, so liefern sowohl die Glieder vor dem eingeklammerten Aggregate, als auch dieses selbst eine Differenz. Die erstere sei $A - B$, die letztere $A' - B'$, unter A, A' bezw. die Summe aus dem Anfangsgliede und den mit $+$ behafteten Gliedern, unter B, B' bezw. die Summe der mit $-$ behafteten Glieder verstanden. Der in Rede stehende Theil unseres Ausdrucks erscheint nunmehr entweder in der Form $A - B + (A' - B')$ oder $(A - B) - (A' - B')$; er liefert im ersten Falle $(A + A') - (B + B')$, im zweiten $(A + B') - (B + A')$. Das nämliche Ergebniss erlangen wir aus dem Aggregate, welches aus jenem Theile nach der obigen Regel hergestellt wird. — Auf dieselbe Art wird in dem vorgelegten Ausdrucke das zweite Paar der in seinem Innern befindlichen Klammern beseitigt u. s. f. (Vgl. auch III. 8.)

6. Multiplication der natürlichen Zahlen. — Die associative Eigenschaft der Summe von natürlichen Zahlen bewirkt, dass der Werth einer Summe von unter einander gleichen Zahlen a bloss von diesem a und der Anzahl (b) derselben abhängt. Er kann somit als das Ergebniss einer Verknüpfung dieser beiden Zahlen a und b betrachtet werden. Sie heisst Multiplication, a der Multiplicand, b der Multiplicator, das Ergebniss das b-fache von a oder das Product aus a in b, endlich jede von den Zahlen a, b ein Factor desselben. Das Zeichen der Multiplication ist $\times$ oder $\cdot$, welche Zeichen bei Buchstaben gewöhnlich weggelassen werden. Der Multiplicator steht immer rechts. Das Product $a \times b$ wird also durch die Gleichung

$$a \times b = a \cdot b = \overset{1}{\breve{a}} + \overset{2}{\breve{a}} + \cdots + \overset{b}{\breve{a}} \tag{1}$$

erklärt.

Uebersichtlicher gestaltet sich die recurrente Erklärung des Productes. Es ist

$$\left.\begin{array}{c} a\cdot 1 = a \quad a\cdot 2 = a\cdot 1 + a \quad a\cdot 3 = a\cdot 2 + a \cdots \\ a\cdot(b+1) = a\cdot b + a. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Die Regeln über die Multiplication der natürlichen Zahlen lassen sich auf die nachstehenden fünf Hauptsätze zurückführen, worin $a\,b\,c$ beliebige solche Zahlen bedeuten.

1) Aus $a = a'$, $b = b'$ folgt $a\,.\,b = a'\cdot b'$.

2) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c,\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c.$ (3)

3) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c).$ (4)

4) $a\cdot b = b\cdot a.$ (5)

5) Aus $a > a'$ folgt $a\cdot b > a'\cdot b$.

Der erste Satz ist hier selbstverständlich. Die vier Formeln 2)—5) können entweder independent d. i. auf Grund der Erklärung (1) des Productes oder recurrent mittelst der Formeln (2) bewiesen werden. Das letztere Verfahren lässt sich leichter übersehen als das erstere, welches indessen auch vollkommen ausreichen würde.[1]) Halten wir uns an das letztere[2]), so haben wir die Richtigkeit der Beziehungen 2)—4) durch den Schluss von c auf $c+1$ u. dgl. zu erhärten.

Die erste der Formeln (3) gilt zufolge der ersten der Formeln (2) bei der Annahme $c = 1$. Sehen wir sie nun als richtig an und bilden $(a+b)\cdot(c+1)$, so finden wir nach (2), dass

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(c+1) &= (a+b)\cdot c + a + b = a\cdot c + b\cdot c + a + b \\ &= a\cdot(c+1) + b\cdot(c+1)\end{aligned}$$

ist, dass also die erste der Formeln (3) auch gilt, wenn wir c durch $c+1$ ersetzen. Sie gilt also allgemein. — Die zweite der Formeln (3) ist richtig für $c = 1$. Gilt sie bei einem beliebigen c, so erweist sich nach (2)

$$\begin{aligned}a\cdot(b+[c+1]) &= a\cdot([b+c]+1) = a\cdot(b+c) + a = a\cdot b + a\cdot c + a \\ &= a\cdot b + a\cdot(c+1).\end{aligned}$$

Auch diese Formel bleibt somit richtig, wenn $c+1$ an Stelle von c tritt; auch sie gilt demnach allgemein.

Die Formel 3) ist nach (2) richtig für $c = 1$. Wird sie bei einem beliebigen c als richtig angenommen, so ergiebt sich, dass nach (2)

$$(a\cdot b)\cdot(c+1) = (a\cdot b)\cdot c + a\cdot b = a\cdot(b\cdot c) + a\cdot b,$$

also nach der zweiten der Formeln (3) gleich

$$a\cdot(b\cdot c + b) = a\cdot[b\cdot(c+1)]$$

1) In der 1. Auflage dieses Werkes (S. 16) wurde das independente Verfahren benutzt.

2) Vgl. Hankel (a. a. O. S. 39).

ist, dass also die Formel (4) auch giltig bleibt, wenn wir c durch $c+1$ ersetzen, somit allgemein gilt.

Um die Formel (5) zu zeigen, hat man zuerst zu beweisen, dass

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a \tag{6}$$

ist. Für $a = 1$ gilt sie. Es sei also $a \cdot 1 = 1 \cdot a$, so ist zufolge der beiden Formeln (3)

$$(a+1) \cdot 1 = a \cdot 1 + 1 = 1 \cdot a + 1 = 1 \cdot (a+1).$$

Formel (6) gilt somit allgemein. Ist ferner $a \cdot b = b \cdot a$, so findet man nach der zweiten der Formeln (3), nach (6) und der ersten der Formeln (3)

$$a \cdot (b+1) = a \cdot b + a \cdot 1 = b \cdot a + 1 \cdot a = (b+1) \cdot a.$$

Es gilt also die Gleichung (5) allgemein, da sie für $b = 1$ gilt. — Wenn einer der beiden Factoren eines Productes eine bestimmte Zahl ist, so setzt man ihn gewöhnlich an die erste Stelle und nennt ihn Coefficient des andern. Man schreibt also z. B. statt $a \cdot 2$ $2a$.

Sehen wir den Satz 5) als richtig an, so können wir auf Grund der 2. der Formeln (3) und des letzten Satzes in Nr. 3 schliessen, dass

$$a \cdot (b+1) = a \cdot b + a > a' \cdot b + a' = a'(b+1),$$
$$\text{also } a \cdot (b+1) > a'(b+1)$$

ist. Da nun der Satz 5) gilt für $b = 1$, so gilt er mithin allgemein.

7. Fortsetzung. — Die Regeln über die Multiplication der natürlichen Zahlen lassen sich, von den Ungleichungen abgesehen, in den einen Satz zusammenfassen, dass das Product dem distributiven, associativen und commutativen Gesetze, wovon die obigen Formeln 2)—4) die einfachsten Fälle darstellen, gehorcht. Was die beiden letzteren Gesetze betrifft, so können wir auf das bei Gelegenheit der Addition in Nr. 3 Gesagte verweisen; wir brauchen nur an Stelle des Rechenzeichens $+$ den Punkt $(\cdot)$ zu setzen.

Die Formeln 2) in Nr. 6 heissen die beiden Seiten des distributiven[1]) Gesetzes. Dieselben lassen sich durch den Schluss von n von $n+1$ sofort auf Summen von beliebig vielen Gliedern ausdehnen. Sieht man nämlich die Formel

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot c = a_1 \cdot c + a_2 \cdot c + \cdots + a_n \cdot c\,^{2)} \tag{7}$$

als richtig an, so findet man nach (3) sofort

1) Nach Servois, s. Note auf S. 17.

2) Verschiedene Zahlen werden anstatt mit $a\,b\,c\,\cdots$ manchmal bequemer mit $a_1\,a_2\,a_3\,\cdots$ bezeichnet. Die dem Buchstaben a rechts unten beigefügten Ziffern heissen Zeiger oder Indices. Daneben sind zu demselben Zwecke auch die Bezeichnungen $a\,a'\,a''\,a'''\,\cdots$ und $a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}\,\cdots$ üblich.

$$\begin{aligned}(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1})\cdot c &= ([a_1+\cdots+a_n]+a_{n+1})\cdot c\\ &= [a_1+\cdots+a_n]\cdot c+a_{n+1}\cdot c\\ &= a_1\cdot c+\cdots+a_n\cdot c+a_{n+1}\cdot c.\end{aligned}$$

Auf ähnliche Art kann man die Formel

$$a\cdot(b_1+b_2+\cdots+b_n)=a\cdot b_1+a\cdot b_2+\cdots+a\cdot b_n \tag{8}$$

beweisen.

Durch aufeinander folgende Anwendung der Formeln (7) und (8) lässt sich das Product zweier oder mehrerer Summen entwickeln. „Das Product zweier Summen ist gleich der Summe der Producte aus jedem Gliede des einen Factors in jedes des anderen“ z. B.

$$(a+b)\cdot(c+d)=(a+b)\cdot c+(a+b)\cdot d=a\cdot c+b\cdot c+a\cdot d+b\cdot d$$

„Um das Product mehrerer Summen zu erhalten, bildet man alle Producte von je einem Gliede des ersten, je einem des zweiten $\cdots$ je einem des letzten Factors und addiert sie.“

Weitere distributive Formeln sind die nachstehenden. „Ist $a>b$, so hat man

$$(a-b)\cdot c=c\cdot(a-b)=a\cdot c-b\cdot c.\text{“} \tag{9}$$

Denn setzt man $a-b=d$, so ist $a=b+d$, also $a\cdot c=b\cdot c+d\cdot c$, mithin $d\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$. — Aus (9) folgt, dass wenn $a>b$, $c>d$ ist,

$$\begin{aligned}(a-b)\cdot(c-d) &= a\cdot(c-d)-b\cdot(c-d)\\ &= (a\cdot c-a\cdot d)-(b\cdot c-b\cdot d)\end{aligned}$$

und nach 17) in Nr. 4

$$\begin{aligned} &= (a\cdot c+b\cdot d)-(a\cdot d+b\,.\,c)\\ &= a\cdot c+b\cdot d-a\cdot d-b\cdot c\end{aligned} \tag{10}$$

sein muss.

Es sind höchstens acht und mindestens sechs verschiedene Anordnungen der vier Glieder des Ausdruckes (10) zulässig; denn die Aggregate

$$a\cdot c-a\cdot d-b\cdot c+b\cdot d,\quad a\cdot c-b\cdot c-a\cdot d+b\cdot d$$

haben nur dann einen Sinn, wenn $a\cdot c>a\cdot d+b\cdot c$ d. i. $(a-b)\cdot(c-d)>b\cdot d$ ist.

Der Satz 5) lässt sich in ähnlicher Weise ausdehnen, wie der mit derselben Nummer versehene auf S. 15. Insbesondere besteht der Satz: „Ist $a>a'$, $b>b'$, so ist $a\cdot b>a'\cdot b'$.“

8. Division der natürlichen Zahlen. — Wir legen uns nun die Aufgabe vor, eine Zahl x zu bestimmen, welche mit einer gegebenen b multiplicirt, ein gegebenes Product a liefern soll: $b\cdot x=x\cdot b=a$.

Zunächst bemerken wir den folgenden Satz: „Wenn $a>b>1$, so ist a entweder ein Vielfaches von b, oder a liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Vielfachen von b. Im ersten Falle hat man $a=qb$, im zweiten $a=qb+r$, wo r eine Zahl kleiner als b ist.“ —

Denn unter den a Zahlen $b, 2b \cdots ab$, von denen die erste kleiner, die letzte grösser als a ist, kommt a entweder vor oder nicht. Im letzteren Falle müssen wir die Reihe $1, 2 \cdots a$ durchlaufend, zu einer Zahl $1 \leqq q < a$ gelangen, sodass $qb < a < (q+1)\,b$. Fassen wir beide Fälle zusammen, so können wir sagen, dass, wenn $a \geqq b$ ist, es stets eine Zahl q giebt, derart dass

$$qb \leqq a < (q+1)\,b \tag{11}$$

ist.

Die Gleichung $b \cdot x = a$ hat nur dann eine (und zwar nach dem 5. Satze in Nr. 6 nur eine) Auflösung nach x, wenn a ein Vielfaches von b ist. Man bezeichnet sie mit $a:b$. Sie heisst (vollständiger) Quotient, a Dividend, b Divisor. Ist a kein Vielfaches von b, so hat die Gleichung $b \cdot x = a$ keine Auflösung. Nun ist $a = qb + r$; die Division geht nicht auf und es bleibt der Rest r. Die Zahl q heisst dann der unvollständige Quotient der Zahlen a und b und wird häufig mit $\left[\frac{a}{b}\right]$ oder $[a:b]$ bezeichnet.[1])

Wenn wir in den Sätzen 1)—17) in Nr. 4 und in den beiden von Nr. 5 die Operationszeichen $+$ $-$ bez. durch $\cdot$ $:$ ersetzen und, soweit es nöthig ist, annehmen, dass die darin erscheinenden Quotienten möglich d. i. natürliche Zahlen seien, so erhalten wir Sätze über die Quotienten. In der That beruhen die formalen Beweise der genannten Sätze lediglich auf solchen Eigenschaften der Summe, welche auch dem Producte zukommen, und auf der Eindeutigkeit der Differenz. Im folgenden Verzeichnisse sind die neuen Sätze mit denselben Nummern versehen, wie die ihnen a. a. O. entsprechenden.

1) Gleiche Zahlen durch gleiche dividirt geben gleiche Quotienten.

2) Aus $a \cdot b = a \cdot b'$ folgt $b = b'$.

3) Aus $a:b = a':b$ folgt $a = a'$, aus $a:b = a:b'$ folgt $b = b'$.

4) Je nachdem a gleich, grösser, kleiner als die Zahl $b:c$, ist ac gleich, grösser, kleiner als b und umgekehrt, wobei im 2. und 3. Falle $b:c$ als ganze Zahl vorauszusetzen ist.

5) Wenn $a:b$, $a':b'$ Zahlen sind, so ist, je nachdem $a:b$ gleich, grösser, kleiner als $a':b'$, $a \cdot b'$ gleich, grösser, kleiner als $a' \cdot b$ und umgekehrt, wobei im ersten Falle einer von den Quotienten $a:b$, $a':b'$, im 2. und 3. Falle beide als ganze Zahlen vorauszusetzen sind.

Wenn $a:b$, $a':b'$ (bez. $a':b$, $a:b'$) Zahlen bedeuten, so hat man

---

1) Ist a ein Vielfaches von b, so denkt man sich natürlich $\left[\frac{a}{b}\right] = a:b$.

6) Neben $a > a'$ $a : b > a' : b$.

7) Neben $b < b'$ $a : b > a : b'$.

8) Neben $a > a'$ $b < b'$ $a : b > a' : b'$.

9) $(a \cdot b) : b = a$.

10) $a : (a : b) = b$, wenn $a : b$ eine Zahl ist.

11) $(a \cdot m) : (b \cdot m) = a : b$, wenn $a : b$ eine Zahl ist.

12) $(a : m) : (b : m) = a : b$, unter $a : b$, $a : m$, $b : m$ Zahlen verstanden.

13) $(a : b) \cdot c = c \cdot (a : b) = (a \cdot c) : b = a \cdot c : b$.

14) $(a : b) : c = a : (b \cdot c)$.

15) $a : (b : c) = (a \cdot c) : b = a \cdot c : b$.

16) $(a : b) \cdot (a' : b') = (a \cdot a') : (b \cdot b')$.

17) $(a : b) : (a' : b') = (a \cdot b') : (a' \cdot b)$.

Die letzten Formeln sind so zu verstehen: 13) Ist $a : b$ eine Zahl, so auch $(a \cdot c) : b$ und sie ist gleich $(a : b) \cdot c$ u. s. w. Ueberhaupt genügt, die linke Seite der Gleichungen als möglich vorauszusetzen.

Endlich sind noch die folgenden distributiven Formeln zu erwähnen

$$a : m + b : m = (a + b) : m$$
$$a : m - b : m = (a - b) : m.$$

$a : m$, $b : m$ müssen natürliche Zahlen und in der zweiten Formel muss $a > b$ sein. — Die erste kann auf eine Summe von beliebig vielen Gliedern ausgedehnt werden (vgl. III. 6).

9. Die Potenz. — Die associative Eigenschaft des Productes bewirkt, dass das Product aus lauter gleichen Factoren a nur von dieser Zahl a und der Anzahl (n) der Factoren abhängt. Auf diese Weise kommt eine dritte thetische Verknüpfung je zweier Zahlen a, n zu Stande, deren Ergebniss die n-te Potenz der Basis a heisst und mit a^n bezeichnet wird. Unter a^1 versteht man die Basis a selbst. Die zweite Potenz von a heisst auch das Quadrat, die dritte auch der Cubus der Zahl a. Die Potenz wird recurrent durch die Formeln

$$a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a^2 \cdot a \quad \cdots \quad a^{n+1} = a^n \cdot a$$

erklärt. Die letzte Formel lässt sich dahin verallgemeinern, dass

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{12}$$

ist, welche Gleichung sich durch den Schluss von n auf $n + 1$ erhärten lässt. Man hat nämlich, wenn die Gleichung (12) gilt,

$$a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot (a^n \cdot a) = (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^{m+n} \cdot a = a^{m+n+1}.$$

Ersetzt man in (12) m durch $m - n$ $(m > n)$, so erhält man

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^m; \text{ daher ist } a^{m-n} = a^m : a^n \quad (m > n). \tag{13}$$

Aus (12) folgt sofort, dass

$$a^{m+n+p+\cdots} = a^m \cdot a^n \cdot a^p \cdots$$

ist. Setzt man hier $m = n = p = \cdots$, so erhält man die Gleichung

$$(a^m)^k = a^{mk}$$

Ausserdem bestehen die distributiven Formeln

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \quad (a : b)^m = a^m : b^m,$$

wovon die erste durch den Schluss vom m auf $m + 1$ gezeigt wird, die zweite aus der ersten folgt.

Die neue Verknüpfung ist weder associativ noch commutativ, denn es sind schon $(a^2)^3 = a^6$ und $a^{(2^3)} = a^8$, sowie $2^3 = 8$ und $3^2 = 9$ von einander verschieden.

Aus (12) ergiebt sich nämlich ferner, dass falls $a > 1$ ist, dann

$$a^{m+n} > a^m$$

ist. Es bilden also die Potenzen $a, a^2 \cdots a^m \cdots$ eine steigende Folge. Dabei kann m so gewählt werden, dass a^m irgend eine gegebene Zahl b überschreitet. Zum Beweise dieser Behauptung bedürfen wir des Satzes: „Wenn $m > 1$ ist, so ist

$$(1 + d)^m > 1 + md.\text{“} \tag{14}$$

Er wird durch den Schluss von m auf $m + 1$ gezeigt. Lassen wir die Beziehung (14) gelten, so ergiebt sich, dass in der That

$$(1+d)^{m+1} > (1+d)(1+md) = 1 + (m+1)d + md^2 > 1 + (m+1)d$$

ist. Nun gilt die Ungleichung für $m = 2$ (indem

$$(1 + d)^2 = 1 + 2d + d^2$$

ist), somit gilt sie allgemein.

Setzt man nun den vollständigen oder unvollständigen Quotienten $\left[\frac{b-1}{a-1}\right] = q$, so ist $b - 1 < (q + 1)(a - 1)$ also $b < 1 + (q + 1)(a - 1)$ und daher nach (14) für $d = a - 1$

$$b < a^{q+1}.$$

10. Die Zahlensysteme. Einführung der Null. — Es sei e eine fest gewählte Zahl $\geqq 2$ und a eine beliebige Zahl $\geqq e$. Aus dem in Nr. 9 hervorgehobenen Umstande, dass die Potenzen $e, e^2 \cdots$ beständig und über jede gegebene Zahl wachsen, ergiebt sich, dass a entweder eine Potenz von e ist — $a = e^m$ — oder zwischen zwei aufeinander folgenden Potenzen von e liegt — $e^m < a < e^{m+1}$. Nach Nr. 8 hat man im zweiten Falle a entweder gleich pe^m oder $pe^m + r$, wo $p < e$ und $r < e^m$ sein muss. Auf ähnliche Art findet man, dass wenn $r \geqq e$, r entweder gleich ist $p'e^{m'}$ oder $p'e^{m'} + r'$, wo $m' < m$

$$1 \leqq p' < e \quad r' < e^{m'};$$

wenn $r' \geqq e$, r' entweder gleich ist $p'' e^{m''}$ oder $p'' e^{m''} + r''$, wo $m'' < m'$

$$1 \leqq p'' < e \quad r'' < e^{m''}$$

u. s. f. Im ungünstigsten Falle ist

$$m' = m - 1 \quad m'' = m - 2 \cdots,$$

so dass man nach m-maliger Wiederholung des vorstehenden Schlusses sicher bei einem Reste $r^{(m)} < e$ anlangt. Man findet daher allgemein

$$a = pe^m + p'e^{m'} + p''e^{m''} + \cdots + r^{(k)} \quad (k \leqq m),$$

wobei die rechte Seite höchstens aus $m + 1$ Gliedern besteht.

Mit Hilfe von e Ziffern d. i. der Zeichen für die Zahlen von eins bis $e - 1$ und des Zeichens 0 (Null) dafür, dass eine der Potenzen e^{m-1}, $e^{m-2} \cdots e$ oder das Glied, welches kleiner als e ist, im Ausdrucke von a fehlt, lässt sich jede Zahl $a\,(e^m \leqq a < e^{m+1})$ durch $m + 1$ Zeichen $[p, p_1 \cdots p_m]$ anschreiben, da die Anzahl der Zeichen, die hinter einem geltenden (d. i. von 0 verschiedenen) von ihnen stehen, den Exponenten der Potenz von e angiebt, mit welcher dieses zu multipliciren ist.

Schon aus I. 10 folgt, dass umgekehrt jede Summe

$$b = qe^m + q'e^{m'} + q''e^{m''} + \cdots \quad (m > m' > m'' > \cdots),$$

worin q, q', q'' $\cdots$ Ziffern bedeuten, zwischen e^m und e^{m+1} liegen muss. Direct ergiebt sich das durch die Bemerkung, dass

$$e^m \leqq b \leqq (e-1)\,e^m + (e-1)\,e^{m-1} + (e-1)\,e^{m-2} + \cdots \\ + (e-1) = e^{m+1} - 1.$$

Zunächst ist die Null als blosses Zeichen gedacht. Allein es liegt sehr nahe, dieselbe sowie die $e - 1$ geltenden Ziffern als Zahl zu behandeln. Dies hat unter den folgenden Voraussetzungen zu geschehen.

1) 0 ist kleiner als jede natürliche Zahl a.

2) $a + 0 = 0 + a = a \quad 0 + 0 = 0.$

3) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \qquad 0 \cdot 0 = 0.$

Ein Blick auf die fünf Hauptformeln der Addition in Nr. 3 und auf die fünf Hauptformeln der Multiplication in Nr. 6 zeigt, dass dieselben ihre Giltigkeit behalten, wenn unter den darin vorkommenden Zahlen Nullen erscheinen. Aus den Gleichungen 2) folgt weiter, dass

$$a - 0 = a \quad 0 = a - a = 0 - 0,$$

und aus der ersten der Gleichungen 3), dass der Quotient

$$0 : a = 0$$

ist, immer unter a eine natürliche Zahl verstanden. Die Division durch 0 ist unzulässig (s. III. 15).

Endlich bemerke man, dass unter a^0 1 verstanden wird.

Nach Einführung der Null als Zahl können manche unter den vorstehenden Formeln zusammengefasst werden. So mag man, anstatt wie auf S. 24 zwei Fälle zu unterscheiden, jetzt allgemein schreiben:

$$a = qb + r \quad (0 \leqq r \leqq b - 1). \tag{15}$$

Ja diese, sowie die Formel (11) auf S. 25, gilt auch, falls $a < b$ ist; man braucht dann nur $q = 0$ zu setzen. Demgemäss versteht man unter $[a : b]$ im Falle dass $a < b$ ist, Null. Für die $(m + 1)$-ziffrige Zahl a dürfen wir allgemein die Formel

$$a = pe^m + p_1 e^{m-1} + \cdots + p_{m-1} e + p_m$$

ansetzen, worin die p alle Werthe von 0 bis $e - 1$ annehmen können.

Das Zahlensystem mit der Grundzahl $e = 2$ heisst dyadisch, das mit der Grundzahl $e = 3$ triadisch u. s. f., das mit der Grundzahl $e = 10$ dekadisch oder decimal. Das letzte wird jetzt ausschliesslich benutzt. Spuren des uralten babylonischen[1]) Sexagesimalsystems mit der Grundzahl $e = 60$ weist noch die Theilung der Stunde und des Grades auf.

11. Die vier Rechnungsarten mit den dekadischen Zahlen. — Die Regeln für die Addition und Multiplication der dekadischen Zahlen sind unmittelbare Folgerungen aus den in den Nrn. 3, 6, 7 angeführten Sätzen, so dass wir hier nicht näher darauf eingehen.

Auch die Ableitung des Verfahrens der Subtraction zweier dekadischen Zahlen möge dem Leser überlassen bleiben.

Dagegen scheint es angebracht, das Verfahren der Division zweier solcher Zahlen genau zu begründen, weil dasselbe meistens rein empirisch behandelt wird, wiewohl es sich in strenger und dabei einfacher Weise aus dem Begriffe dieser Zahlen ableiten lässt.

Die numerische Division der dekadischen Zahlen beruht auf folgenden drei Sätzen. — „Es sei a eine m-ziffrige, b eine n-ziffrige Zahl und zwar $a > b$. also $m \geqq n$. Ferner sei nach der Formel (15) in Nr. 10

$$a = qb + r \ . \ (0 \leqq r \leqq b - 1).“ \tag{1}$$

1) „Der vollständige und unvollständige Quotient q ist kleiner als 10^{m-n+1}, aber, wenn nur $m > n$ ist, nicht kleiner als 10^{m-n-1}.“

2) „Der Quotient q hat $m - n$ oder $m - n + 1$ Ziffern, je nachdem die ersten n Ziffern des Dividenden a eine Zahl a' bilden, welche kleiner als b ist oder nicht.“

3) „Zur Ermittelung der ersten Ziffer von q dient die Regel: α) Ist $a' < b$, also $q = c_0 10^{m-n-1} + c_1 10^{m-n-2} + \cdots$, so setze man

1) Vgl. M. Cantor, Gesch. d. Math., I., 2. Aufl., S. 80.

$$a = (10a' + a_n)\,10^{m-n-1} + a''', \quad (0 \leqq a''' < 10^{m-n-1}) \tag{2}$$

wobei a_n die $(n+1)$-te Ziffer von a, von links nach rechts gezählt, bedeutet. Alsdann ist c_0 diejenige Ziffer, wofür

$$c_0 b \leqq 10a' + a_n < (c_0 + 1)\, b$$

ist.“

β) „Ist $a' \geqq b$, also $q = c_0 10^{m-n} + c_1 10^{m-n-1} + \cdots$, so ist c_0 diejenige Ziffer, wofür

$$c_0 b \leqq a' < (c_0 + 1)\, b \quad \text{ist.“}$$

Beweis: Zu 1). Wir haben

$$10^{m-1} \leqq a < 10^m \quad 10^{n-1} \leqq b < 10^n$$

und vermöge (1)

$$qb \leqq a < (q+1)\, b. \tag{3}$$

Demnach ist

$$10^{n-1} q \leqq bq \leqq a < 10^m, \text{ somit } 10^{n-1} q < 10^m, \text{ also } q < 10^{m-n+1}.$$

Dagegen ist

$$10^n (q+1) > b(q+1) > a \geqq 10^{m-1}, \text{ somit } 10^n (q+1) > 10^{m-1}.$$

Ist $m \geqq n+1$, so folgt aus der letzten Beziehung, dass

$$q + 1 > 10^{m-n-1} \text{ d. i. } q \geqq 10^{m-n-1}.$$

Wir haben also gefunden, dass

$$10^{m-n-1} \leqq q < 10^{m-n+1} \text{ ist.} \tag{4}$$

Zu 2). Wir haben

$$a = a' \cdot 10^{m-n} + a'' \quad (0 \leqq a'' < 10^{m-n}) \tag{5}$$

d. i.

$$a' 10^{m-n} \leqq a < (a' + 1)\, 10^{m-n}. \tag{6}$$

Ist $a' < b$, also $a' + 1 \leqq b$, so hat man nach (3) und (6)

$$qb < (a' + 1)\, 10^{m-n} \leqq 10^{m-n} b \quad \text{d. i.} \quad q < 10^{m-n}.$$

Daraus schliesst man mit Rücksicht auf (4), dass q $m - n$ Ziffern hat.

Ist $a' \geqq b$, so hat man nach (6) und (3)

$$10^{m-n} b \leqq 10^{m-n} a' \leqq a < (q+1)\, b \text{ d. i. } 10^{m-n} b < (q+1)\, b,$$

also $10^{m-n} < q + 1$ oder $10^{m-n} \leqq q$. Da nun nach (4) $q < 10^{m-n+1}$ ist, so muss q jetzt genau $m - n + 1$ Ziffern haben.

Zu 3). α) Ist $a' < b$, so ist,

$$c_0 10^{m-n-1} \leqq q < (c_0 + 1)\, 10^{m-n-1}, \tag{7}$$

somit nach (3) und (2)

$$b c_0 10^{m-n-1} \leqq bq \leqq a < (10a' + a_n + 1)\, 10^{m-n-1}.$$

Demnach ist

$$bc_0 \cdot 10^{m-n-1} < (10a' + a_n + 1)\, 10^{m-n-1}, \text{ also } bc_0 < 10a' + a_n + 1$$
$$\text{d. i. } bc_0 \leqq 10a' + a_n.$$

Dagegen hat man nach (7), (3) und (2)

$$b(c_0+1)\,10^{m-n-1} \geqq b(q+1) > a \geqq (10a' + a_n)\,10^{m-n-1},$$

somit

$$b(c_0+1) > 10a' + a_n.$$

β) Ist $a' \geqq b$, so ist

$$c_0 10^{m-n} \leqq q < (c_0+1)\,10^{m-n}, \tag{8}$$

somit nach (3) und (6)

$$bc_0 10^{m-n} \leqq bq \leqq a < (a'+1)\,10^{m-n}.$$

Man hat demnach

$$bc_0 < a' + 1 \quad \text{d. i.} \quad bc_0 \leqq a'.$$

Dagegen ist nach (8), (3) und (6)

$$b(c_0+1)\,10^{m-n} \geqq b(q+1) > a \geqq a' 10^{m-n}, \text{ mithin } b(c_0+1) > a'.$$

Hat man auf die angegebene Weise die erste Ziffer c_0 des Quotienten q d. i.

$$\left[\frac{a}{b}\right] = c_0 10^h + c_1 10^{h-1} + \cdots + c_h \quad (h = m - n - 1 \text{ oder } m - n)$$

ermittelt, so erhält man zufolge der Gleichung (1)

$$a - c_0 10^h b = (c_1 10^{h-1} + \cdots + c_h)\, b + r.$$

Die Ziffer c_1 ergiebt sich demnach ebenfalls durch den obigen Satz 3); man braucht nur a durch die Differenz $a - c_0 10^h b$ zu ersetzen. U. s. f.

Falls die Zahlen ab vielziffrig sind, kann man sich zur Ermittelung von q mit Vortheil der Fourier'schen geordneten Division (vgl. S. 95) bedienen.

12. Hilfssätze aus der Zahlentheorie. — Wenn a ein Vielfaches von b ist, so heisst a theilbar durch b. Jede durch 2 theilbare Zahl heisst gerade, jede durch 2 nicht theilbare Zahl heisst ungerade. Aus dem Begriffe des Vielfachen fliessen unmittelbar die folgenden Sätze: „Ist a theilbar durch b, so auch das Product ac. Ist a theilbar durch b, b durch c, so auch a durch c. Soll a durch das Product bc theilbar sein, so muss a durch b und der Quotient $a:b$ durch c theilbar sein. Sind a und b durch eine Zahl c theilbar, so auch jede Zahl $ax \pm by$." Aus dem letzten ergiebt sich mit Hilfe der aus (1) der vorigen Nummer folgenden Gleichung $r = a - qb$ der Satz: „Haben der Dividend und der Divisor einen gemeinsamen Theiler, so ist auch der Rest durch ihn theilbar." — Nun kann man den grössten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen ab ermitteln. Es sei $a > b$. Ist a durch b theilbar, so ist er b. Andernfalls findet man durch die Division von a durch b

$$a = qb + b' \qquad (b' < b),$$

wo b' theilbar ist durch jeden gemeinsamen Theiler von a und b. Ist b ein Vielfaches von b', so auch a und es ist b' die gesuchte Zahl. Sonst findet man durch die Division von b durch b'

$$b = q'b' + b'' \qquad (b'' < b'),$$

worin b'' durch jeden gemeinsamen Theiler von a und b theilbar ist. Ist b' ein Vielfaches von b'', so auch b und a und es ist b'' die gesuchte Zahl; sonst findet man durch die Division von b' durch b''

$$b' = q''b'' + b''' \qquad (b''' < b'').$$

U. s. f. Da die Reste $b', b'', b''' \cdots$ beständig abnehmen, so muss die Reihe einmal abbrechen. Der Schluss der Kette von Gleichungen möge also sein:

$$b^{(n-3)} = q^{(n-2)} b^{(n-2)} + b^{(n-1)} \qquad (b^{(n-1)} < b^{(n-2)})$$
$$b^{(n-2)} = q^{(n-1)} b^{(n-1)} + b^{(n)} \qquad (1 \leqq b^{(n)} < b^{(n-1)}), \quad b^{(n-1)} = q^{(n)} b^{(n)}.$$

Ein jeder der Reste $b, b' \cdots b^{(n)}$ ist durch den grössten gemeinsamen Theiler von a und b theilbar. Wenn der letzte Rest $b^{(n)} = 1$, so haben a und b keinen Theiler ausser 1 gemein. Dann nennt man $a\,b$ relative Primzahlen oder theilerfremde Zahlen. Wenn die Zahl $b^{(n)}$ grösser als 1 ist, so ist sie nicht bloss Theiler von $b^{(n-1)}$, sondern auch von $b^{(n-2)}, b^{(n-3)} \cdots b', b, a$ folglich der grösste gemeinsame Theiler von $a\,b$ d. h. man hat

$$a = b^{(n)} a_1 \quad b = b^{(n)} b_1,$$

wo $a_1\, b_1$ relativ prim zu einander sein müssen.

Um die vorstehende Kette von Gleichungen auch im Falle dass $a < b$ ist, benutzen zu können, braucht man bloss $q = 0$ $b' = a$ zu setzen.

Hauptsatz. Sind $a\,b$ relative Primzahlen und es ist das Product ak durch b theilbar, so muss k durch b theilbar sein.

Denn aus den soeben erwähnten Gleichungen, worin nun $b^{(n)} = 1$ zu setzen ist, d. i,

$$a = qb + b' \quad b = q'b' + b'' \quad b' = q''b'' + b''' \cdots$$
$$b^{(n-2)} = q^{(n-1)} b^{(n-1)} + 1, \qquad (9)$$

folgt durch Multiplication mit k

$$ak = qbk + b'k \quad bk = q'b'k + b''k \quad b'k = q''b''k + b'''k \cdots$$
$$b^{(n-2)}k = q^{(n-1)} b^{(n-1)} k + k,$$

woraus ersichtlich ist, dass neben ak auch

$$b'k, \quad b''k, \quad b'''k \cdots b^{(n-2)}k, \quad b^{(n-1)}k, \quad k$$

durch b theilbar sind.

Folgesätze. 1) „Haben das Product $a\,a'\,a'' \cdots a^{(n)}$ und die Zahl b einen Theiler m gemein, so muss mindestens einer der Factoren

$a, a' \cdots a^{(n)}$ einen Theiler mit b gemein haben." — Sind a und b relative Primzahlen, so auch a und m. Also muss nach dem Hauptsatze das Product $a' a'' \cdots a^{(n)}$ durch m theilbar sein. Sind a' und b ebenfalls relative Primzahlen, so auch a' und m. Also muss nach demselben Satze das Product $a'' \cdots a^{(n)}$ durch m theilbar sein u. s. f. Nimmt man selbst an, dass jede von den Zahlen $a, a' \cdots a^{(n-1)}$ relative Primzahl zu b sei, so folgt auf diese Weise, dass $a^{(n)}$ durch m theilbar ist, also mit b einen Theiler gemein hat.

Daraus ergiebt sich durch Umkehrung (vgl. I. 10) der Satz:

2) „Das Product zweier oder mehrerer Zahlen, deren jede relative Primzahl gegen eine Zahl b ist, ist gleichfalls relative Primzahl zu b."

3) „Sind a und b relative Primzahlen, so auch a^n und b^n."

Jede Zahl, ausser 1, die nur durch 1 und durch sich selbst theilbar ist, heisst Primzahl; jede, die ausser diesen noch andere Theiler hat, zusammengesetzt — eine Bezeichnung, welche durch den Satz gerechtfertigt wird: „Jede zusammengesetzte Zahl lässt sich stets und nur auf eine Weise als Product einer endlichen Anzahl von Primzahlen darstellen." — Dividirt man nämlich eine vorgelegte Zahl $a > 1$ nach einander durch die Zahlen $2, 3 \cdots a - 1$, so kann nur Folgendes eintreten. Entweder ist a durch keine derselben theilbar, also eine Primzahl oder es giebt darunter Theiler von a, deren kleinster p eine Primzahl sein muss. Im zweiten Falle ermittelt man die Zahl $a' = a : p$ und schliesst wie soeben: entweder ist a' eine Primzahl oder durch eine Primzahl $p' \geqq 2$ theilbar. Im zweiten dieser Fälle sucht man die Zahl $a'' = a' : p'$, worüber Aehnliches gilt u. s. f. Da die Zahlen $a, a', a'' \cdots$ beständig abnehmen, so muss die Reihe einmal abbrechen. Somit erscheint a, wenn es nicht selbst Primzahl ist, als Product von Primzahlen $a = pp' \cdots$. — Und zwar ist das die einzig mögliche Zerlegung von a in Primfactoren. Denn angenommen, es sei überhaupt $a = qq' \cdots$, wo $q, q' \cdots$ Primzahlen bedeuten, so muss $pp' \cdots$ durch q theilbar, also vermöge des 1. Folgesatzes q einer der Zahlen $p, p' \cdots$ gleich sein. Setzt man $q = p$, so folgt $p' \cdots = q' \cdots$, woraus man auf dieselbe Weise schliessen kann, dass $q' = p'$ u. s. f.

Die Reihe der Primzahlen hat kein Ende (Eucl. IX. 20). Angenommen, es gebe nur eine bestimmte Anzahl von Primzahlen, $p_1, p_2 \cdots p_m$, so müsste jede andere Zahl ausser 1 durch eine von ihnen theilbar sein. Dies trifft aber bei der Zahl $p_1 p_2 \cdots p_m + 1$ nicht zu. Folglich giebt es keine bestimmte Anzahl von Primzahlen.

Gemeinschaftliche Vielfache von zwei und mehreren Zahlen $a, b, c \cdots$. Um alle Zahlen zu finden, welche durch $a, b, c \cdots$ theilbar sind, ermittelt man, durch Zerlegung einer jeden in ihre Primfactoren, zunächst alle Primzahlen $p, p' \cdots$, durch die irgend eine der gegebenen Zahlen theilbar ist. Hat man dann noch festgestellt, dass der Factor p $(p' \cdots)$ in derjenigen der Zahlen $a, b, c \cdots$ wo er am häufigsten vorkommt, r $(r' \cdots)$ Male enthalten ist, so erhält man die gesuchten Zahlen, wenn man in

$$kp^r p'^{r'} \cdots$$

für k alle Zahlen 1, 2 $\cdots$ setzt. Denn jede von ihnen muss durch p^r, $p'^{r'}$ $\cdots$ theilbar sein. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $a, b, c \cdots$ ist $p^r p'^{r'} \cdots$ (vgl. auch Satz 7) auf S. 35).

Uebungen zum II. Abschnitt.

1) Man schreibe die fünf weiteren stets möglichen Anordnungen der Glieder des Ausdrucks (10) auf S. 24 an.

2) Man beweise, jedoch bloss mit Benutzung von natürlichen Zahlen, die folgenden Sätze über beliebige d. h. vollständige oder unvollständige Quotienten, welche den mit den gleichen Nummern versehenen Sätzen über die vollständigen Quotienten in Nr. 8 entsprechen.

4) „Je nachdem a grösser als $\left[\frac{b}{c}\right]$ ist oder nicht, ist ac grösser als b oder nicht und umgekehrt.“

5) „Je nachdem $\left[\frac{a}{b}\right]$ $(= q)$ grösser oder kleiner als $\left[\frac{a'}{b'}\right]$ $(= q')$ ist, ist ab' grösser oder kleiner als $a'b$. Umgekehrt: Ist $ab' > a'b$, so $q \geqq q'$; ist $ab' < a'b$, so ist $q \leqq q'$; ist endlich $ab' = a'b$, so ist $q = q'$.“

6) „Ist $a > a'$, so ist $\left[\frac{a}{b}\right] \geqq \left[\frac{a'}{b}\right]$. Ist a durch b theilbar, so ist stets $\left[\frac{a}{b}\right] > \left[\frac{a'}{b}\right]$.“

7) „Ist $b < b'$, so ist $\left[\frac{a}{b}\right] \geqq \left[\frac{a}{b'}\right]$.“

8) „Ist $a > a'$ $b < b'$, so ist $\left[\frac{a}{b}\right] \geqq \left[\frac{a'}{b'}\right]$.“

11) $\left[\frac{am}{bm}\right] = \left[\frac{a}{b}\right]$.

12) „Sind a und b durch m theilbar, so ist $\left[\frac{a:m}{b:m}\right] = \left[\frac{a}{b}\right]$.“

13) $\left[\frac{a}{b}\right] c \leqq \left[\frac{ac}{b}\right] \leqq \left(\left[\frac{a}{b}\right] + 1\right) c - 1$.

14) $\left[\left[\frac{a}{b}\right] : c\right] = \left[\frac{a}{bc}\right]$.

15) $\left[a : \left(\left[\frac{b}{c}\right] + 1\right)\right] \leqq \left[\frac{ac}{b}\right] \leqq \left[a : \left[\frac{b}{c}\right]\right]$. In der Beziehung rechts muss $b \geqq c$ sein.

16) $\left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{a'}{b'}\right] \leqq \left[\frac{aa'}{bb'}\right] \leqq \left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{a'}{b'}\right] + \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{a'}{b'}\right]$.

17) $\left[\frac{[a:b]}{[a':b'] + 1}\right] \leqq \left[\frac{ab'}{a'b}\right] \leqq \left[\left[\frac{a}{b}\right] : \left[\frac{a'}{b'}\right]\right]$. In der Beziehung rechts muss $a' \geqq b'$ sein.

18) $\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{a'}{b}\right]\leqq\left[\frac{a+a'}{b}\right]\leqq\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{a'}{b}\right]+1.$

19) „Ist $a>a'$ und $\left[\frac{a}{b}\right]>\left[\frac{a'}{b}\right]$, so hat man

$$\left[\frac{a}{b}\right]-\left[\frac{a'}{b}\right]-1\leqq\left[\frac{a-a'}{b}\right]\leqq\left[\frac{a}{b}\right]-\left[\frac{a'}{b}\right].“$$

Um eine Anleitung zu geben, nehmen wir den Satz *6)* vor. Setzt man $[a:b]=q$ $[a':b]=q'$, so hat man

$$qb\leqq a<(q+1)\,b,\quad q'b\leqq a'<(q'+1)\,b.$$

Demnach ist wegen $a>a'$

$$(q+1)\,b>q'b,\quad \text{also}\quad q+1>q'\quad \text{d. i.}\quad q\geqq q'.$$

3) „Das Product einer m-zifferigen Zahl a und einer n-zifferigen b hat entweder $m+n-1$ oder $m+n$ Ziffern.“ (Folgt aus den Beziehungen $10^{m-1}\leqq a<10^m$, $10^{n-1}\leqq b<10^n$ mit Hilfe des Satzes am Schlusse von Nr. 7.)

4) „Zwei beliebige dekadische Zahlen in dyadischer Form anzuschreiben und zu multipliciren, sowie die grössere durch die kleinere zu dividiren.“

5) „Es sei $a>b$ und q der vollständige oder unvollständige Quotient der Division $a:b$. Lässt man auf der rechten Seite der Zahlen a, b die nämliche Anzahl (k) Ziffern weg, wodurch man die Zahlen a', b' ($a'\geqq b'$) erhält, so bestehen die Beziehungen:

$$\left[\frac{a'}{b'+1}\right]\leqq\left[\frac{a}{b}\right]\leqq\left[\frac{a'}{b'}\right].“$$

(J. Tannery, Leçons d'Arithmétique théor. et pratique, Paris 1894, S. 88.)

Der Beweis ist bloss mit Benützung der natürlichen Zahlen zu führen. Die Beziehung links folgt schon aus dem Satze 7) in 2). Um die Beziehung rechts zu erhalten bemerke man, dass

$$qb\leqq a<(q+1)\,b,\quad a'\cdot 10^k\leqq a<(a'+1)\,10^k$$
$$b'\cdot 10^k\leqq b<(b'+1)\,10^k$$

ist. Setzt man $[a'/b']=q'$ so ist $q'b'\leqq a'<(q'+1)\,b'$.

Demnach ist

$$q\cdot b'10^k\leqq qb\leqq a<(a'+1)\,10^k,\ \text{also}\ q\cdot b'<a'+1$$

d. i. $q\cdot b'\leqq a'$. Somit hat man $qb'<(q'+1)\,b'$, also $q<q'+1$ d. i. $q\leqq q'$.

6) „Ist $a>b$ und falls b gerade ist, a kein Vielfaches von $b:2$, so lassen sich zwei Zahlen q_1, r_1 so bestimmen, dass

$$a=q_1b\pm r_1\quad \text{und}\quad 0\leqq r_1\leqq\left[\frac{b-1}{2}\right]\quad \text{ist.“}$$

7) „Ist m der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen a, b, also $a=ma'$ $b=mb'$, wobei a' und b' relative Primzahlen sind, so ist $ma'b'$ ($=ab'=ab:m$) das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen a und b.“ — Denn jedes Vielfache von a ist von

der Form kma', jedes von b lmb'. Nun soll $kma' = lmb'$ sein, folglich muss $k = qb'$ $l = qa'$ sein.

„Bezeichnet man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen a, b mit V, so ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der drei Zahlen a b c Vc', wenn man unter c' den Quotienten von c durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler von V und c versteht.“ U. s. f.

Man beweise durch den Schluss von $n - 1$ auf n die nachstehenden drei Sätze.

8) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n beträgt $\frac{1}{2} n (n + 1)$.

9) Die Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen von 1 bis n beträgt $\frac{1}{6} n (n + 1)(2n + 1)$.

10) Die Summe der Cuben aller natürlichen Zahlen von 1 bis n beträgt $\frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$.

11) Der Grundsatz 6) auf S. 13 lässt sich ersetzen durch den Grundsatz der Subtraction: „Ist die Zahl $a > b$, so giebt es eine solche Zahl x, dass die Gleichung $b + x = a$ besteht.“ Derselbe wäre aber nach der Addition, also zu Beginn von Nr. 4 einzuschalten.

III. Abschnitt.

Analytische Theorie der rationalen Zahlen.

1. Wir haben an den natürlichen Zahlen Verknüpfungen (Operationen, Rechnungsarten) zunächst von zwei Stufen kennen gelernt: Addition und Subtraction einer-, Multiplication und Division andererseits. Die Addition und Multiplication nennt man directe oder thetische Operationen, da die Summe und das Product von je zwei Grössen einer Art eben zu erklären sind. Aus ihnen gehen die beiden anderen Rechnungsarten durch Umkehrung hervor und heissen darum inverse oder lytische Operationen.

Formal betrachtet, befindet sich in jeder Stufe eine Thesis und ihre Lysis. Die erstere gehorcht sowohl dem associativen, als auch dem commutativen Gesetze, die letztere ist, wenn überhaupt möglich, eindeutig. Schon diese Analogie lässt es als wünschenswerth erscheinen, ein für alle Male festzustellen, was aus gewissen formalen Voraussetzungen über eine Verknüpfung gefolgert werden könne. Dazu kommt, dass es ausser den natürlichen Zahlen noch andere Grössen und insbesondere Zahlen giebt, mit denen gerechnet werden kann, theils nach den Regeln, die im vorigen Abschnitte aufgeführt sind, theils nach anderen, mehr oder weniger davon abweichenden. Daher werden uns Untersuchungen ähnlich den soeben erledigten, noch öfters begegnen. Man darf also geradezu behaupten, dass wenn man die Rechnungsregeln nicht von einem Falle, wo sie erwiesen sind, versuchsweise auf einen anderen übertragen, sondern durchaus sicher begründen will, die folgende Untersuchung unentbehrlich ist. Denn ohne sie würde die Darstellung in eine ermüdende Breite verfallen.

Voraussetzung A.) „Es sei gegeben ein System von Grössen $a, b, c \cdots$ (I). Demnach besteht eine Definition, nach welcher zu entscheiden ist, ob irgend zwei unter ihnen als gleich oder ungleich anzusehen sind. Je zwei der Grössen (a, b) lassen sich eindeutig verknüpfen und zwar ist das Resultat eine Grösse (c) des Systemes, wofür wir nach I. 4 die Bezeichnung

$$a \circ b = c$$

anwenden. Die Verknüpfung $\circ$ wird als Thesis bezeichnet. Wir haben noch anzunehmen, dass in dieser Gleichung c durch jede ihr gleiche Grösse c' ersetzt werden dürfe — und dass neben

$$a = a' \quad b = b' \quad a \circ b = a' \circ b'$$

sei.“[1])

Dieser Satz lässt sich in zwei zerlegen: 1) Ist $a = a'$, so ist $a \circ b = a' \circ b$; 2) ist $b = b'$, so ist $a \circ b = a \circ b'$. Wenn nun $a = a'$ $b = b'$ ist, so hat man nach 1) $a \circ b = a' \circ b$ und nach 2) $a' \circ b = a' \circ b'$, mithin $a \circ b = a' \circ b'$.

Corollar. „Wenn man in einem aus Grössen des Systemes (I) mittelst des Rechenzeichens $\circ$ gebildeten Ausdrucke eine oder mehrere Grössen durch ihnen gleiche ersetzt, so bleibt das Ergebniss unverändert.“

Denn ein solcher Ausdruck entsteht dadurch, dass zuerst zwei von den darin vorkommenden Grössen verknüpft werden, hierauf das dadurch erzielte Ergebniss mit einer dritten oder auch mit dem Ergebnisse der Verknüpfung $\circ$ von einer dritten mit einer vierten Grösse u. s. f., bis alle Grössen aufgebracht sind. Es werden also stets nur zwei Grössen verknüpft, wobei eine jede von ihnen zufolge der Voraussetzung A.) durch eine ihr gleiche ersetzt werden kann, ohne dass dadurch das Ergebniss eine Aenderung erfährt.

Wir werden nunmehr die Thesis $\circ$ nacheinander dem associativen und commutativen Gesetze unterwerfen, wobei hervorzuheben ist, dass dieselben von einander völlig unabhängig sind.[2])

---

1) Die in Nr. 1—6 durchgeführte Untersuchung wurde mit Ausnahme der darin vorkommenden Vergleichungen von H. Grassmann begonnen (vgl. die lineale Ausdehnungslehre von 1844, 2. Aufl. 1878, § 5 f.) und von Hankel (Theorie der complexen Zahlensysteme 1867, § 4 und 5) vollendet. Grassmann benutzt für die allgemeine Thesis und Lysis die Bezeichnungen $a \frown b$ $a \smile b$, welche neben einander wegen ihrer grossen Aehnlichkeit unbequem sind. Ich behielt daher nur die letztere Bezeichnung bei, während ich das Zeichen $\frown$ durch das von R. Grassmann eingeführte $\circ$ ersetzte. Hankel gebraucht für Thesis und Lysis die fremdartigen und schleppenden Bezeichnungen $\Theta(a, b)$ $\lambda(a, b)$. R. Bettazzi (Theoria delle grandezze 1890) schreibt $S(a, b)$, $D(a, b)$. Eigene Bezeichnungen sind dem Gebrauche von $+$ — oder $\cdot$: im allgemeinen Sinne wenigstens für den Anfang vorzuziehen. Hankel liess den formalen Gebrauch der Begriffe „grösser, kleiner“ nicht zu (vgl. a. a. O. S. 46), obwohl er schon im V. Buche von Euclid vorkommt.

2) So braucht eine associative Multiplication nicht commutativ zu sein (vgl. X. 8). Umgekehrt ist das arithmetische Mittel zweier reellen Zahlen a, b eine commutative, aber nicht associative Thesis. Denn ist $a \circ b = \frac{a+b}{2}$, so ist wohl $a \circ b = b \circ a$, aber

$$(a \circ b) \circ c = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + c\right)$$

$$a \circ (b \circ c) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b+c}{2}\right)$$

sind nur dann gleich, wenn $a = c$ ist (Hankel a. a. O. S. 21).

2. **I. Satz.** Ist die dreigliederige Thesis associativ, so ist die Thesis aus beliebig vielen Gliedern associativ.

Ist eine Folge von drei Grössen a, b, c gegeben, so lassen sich daraus unter Einhaltung der vorgeschriebenen Anordnung nur die Ausdrücke $(a \circ b) \circ c$, $a \circ (b \circ c)$ bilden. Wir nehmen an

Voraussetzung B.)

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Jede der beiden Seiten dieser Gleichung kann man mit $a \circ b \circ c$ bezeichnen, ohne dadurch eine Unklarheit hervorzurufen. — Um den Satz zu beweisen, nehmen wir ihn als richtig an für die Verknüpfungen aus $3, 4, 5 \cdots n-1$ Grössen und zeigen, dass er alsdann auch besteht für solche aus n Grössen $a_1, a_2 \cdots a_n$. Wie auch $r \leqq n-1$ Grössen unter ihnen z. B. $a_1, a_2 \cdots a_r$, ohne diese Aufeinanderfolge abzuändern, zunächst in Gruppen von höchstens zwei vertheilt und innerhalb derselben verknüpft werden, die so erhaltenen Resultate unter der nämlichen Beschränkung wieder in Gruppen von höchstens zwei zusammentreten und innerhalb derselben verknüpft werden u. s. f., bis endlich noch zwei Ausdrücke vorhanden sind, die in gehöriger Ordnung verknüpft das Endresultat liefern; diese Ergebnisse sollen immer einander gleich sein. Dann aber kann in den Bezeichnungen eine ausserordentliche Vereinfachung eintreten, indem für jede der genannten gleichen Grössen $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_r$ geschrieben werden darf. Unter der obigen Annahme geben somit die n Grössen $a_1, \cdots a_n$ nur noch Veranlassung zu den folgenden $n-1$ Ausdrücken

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 \circ (a_2 \circ a_3 \circ \cdots \circ a_n) \\
x_2 &= (a_1 \circ a_2) \circ (a_3 \circ \cdots \circ a_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_r &= (a_1 \circ a_2 \cdots \circ a_r) \circ (a_{r+1} \circ \cdots \circ a_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-1} &= (a_1 \circ a_2 \cdots \circ a_{n-1}) \circ a_n.
\end{aligned}$$

Zufolge B.) ergiebt sich aber sofort, dass $x_r = x_{r+1}$. Denn setzt man

$$(1 \leqq r \leqq n-1)\; a_1 \circ \cdots \circ a_r = s_r, \quad a_{r+1} \circ \cdots \circ a_n = t_r,$$

so ist

$$s_r \circ (a_{r+1} \circ t_{r+1}) = (s_r \circ a_{r+1}) \circ t_{r+1}$$

d. i.

$$s_r \circ t_r = s_{r+1} \circ t_{r+1}.$$

Demnach hat man

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1}$$

w. z. b. w. Daher kann der gemeinsame Werth der Ausdrücke $x_1 \cdots x_{n-1}$ mit

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$$

bezeichnet werden. Ein solcher Ausdruck wird manchmal als eine thetische Form bezeichnet.

Wenn die Verknüpfung $\circ$ associativ ist, so ist die durch die Verknüpfung $\circ$ von n gleichen Grössen a erzeugte Grösse:

$$\overset{1}{\breve{a}} \circ \overset{2}{\breve{a}} \circ \cdots \circ \overset{n}{\breve{a}}$$

durch die Grösse a und die Anzahl n vollständig bestimmt. Sonst wäre es ungewiss, ob auch nur die Grössen $(a \circ a) \circ a$ und $a \circ (a \circ a)$ einander gleich sind u. s. f. Diese Bemerkung haben wir bereits bei Einführung der Begriffe des Vielfachen na und der Potenz a^n angewendet (vgl. II. 6 und 9).

II. Satz. Jede associative Thesis ist commutativ, wenn die zweigliedrige Thesis es ist.

Voraussetzung C.)

$$a \circ b = b \circ a.$$

Es sei

$$a_1 \circ a_2 \cdots \circ a_n = x.$$

Man kann aus der Anordnung $a_1, a_2 \cdots a_n$ jede beliebige dadurch ableiten, dass man nur je zwei benachbarte Buchstaben vertauscht. Wir haben somit nur zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} x &= a_2 \circ a_1 \circ a_3 \cdots \circ a_n \\ &= a_1 \circ \cdots \circ a_{r-1} \circ a_{r+1} \circ a_r \circ a_{r+2} \cdots \circ a_n \\ &= a_1 \circ a_2 \cdots \circ a_n \circ a_{n-1}. \end{aligned}$$

Es ist aber nach C.)

$$\begin{aligned} x &= s_{r-1} \circ (a_r \circ a_{r+1}) \circ t_{r+1} \\ &= s_{r-1} \circ (a_{r+1} \circ a_r) \circ t_{r+1} \\ &= s_{r-1} \circ a_{r+1} \circ a_r \circ t_{r+1}. \end{aligned}$$

Aehnlich ergeben sich auch die beiden anderen Umformungen von x.

Anmerkung. Unter Voraussetzung C.) folgt aus dem Satze: „Neben $a = a'$ ist $a \circ b = a' \circ b$“ der allgemeine Satz in A.): „Neben $a = a'$ $b = b'$ ist $a \circ b = a' \circ b'$.“ Denn man hat nacheinander

$$a \circ b = a' \circ b = b \circ a' = b' \circ a' = a' \circ b'.$$

3. Die Lysis oder die Umkehrung der Thesis. — Machen wir zunächst nur die Voraussetzung A.) und lassen a, b beliebige gegebene Grössen des Systems (I) sein, so treten zwei Gleichungen

$$x \circ b = a, \quad b \circ y = a$$

auf. Haben beide Lösungen unter den genannten Grössen, so werden dieselben in der Regel ungleich sein. Eine Thesis lässt also im Allgemeinen zwei Umkehrungen oder Lysen, eine vordere und eine hintere, zu. Halten wir aber die Annahmen B.) C.) ebenfalls fest, so fallen die vorstehenden Gleichungen in die einzige

$$x \circ b = b \circ x = a$$

zusammen. Es giebt jedenfalls nur eine Lysis. Dabei sind drei Fälle denkbar: entweder giebt es eine oder gar keine oder mehr als eine Grösse in (I), die für x gesetzt die letzte Gleichung befriedigt. Dass ihr neben einer Grösse x auch jede Grösse $x' = x$ genügt, folgt unmittelbar aus A.). Indess werden alle der Lösung x einer Gleichung gleichen Grössen zusammen nur als eine Lösung derselben gerechnet.

Voraussetzung D.). „Die Gleichung

$$x \circ b = b \circ x = a$$

werde entweder, was immer auch a, b für Grössen des Systemes (I) sein mögen, oder doch bei bestimmten Werthen derselben durch eine und nur eine Grösse dieses Systemes befriedigt, wofür wir die Bezeichnung

$$x = a \smile b$$

gebrauchen — gesprochen: „von a getrennt b" oder kurz „a ab (weg) b". Demnach ist

$$(a \smile b) \circ b = b \circ (a \smile b) = a. \qquad (\alpha)$$

Der lytische Ausdruck oder die lytische Form $a \smile b$ wird wie $a \circ b$ als eindeutiges Symbol angesehen, da es nur unter sich gleiche Grössen bedeutet. Daher betrachten wir in solchen Fällen, wo es ungleiche Grössen im Systeme (I) giebt, welche die Gleichung $b \circ x = a$ befriedigen, das Symbol $a \smile b$ als unzulässig." Die letzte, zumeist nicht ausdrücklich hervorgehobene Festsetzung erscheint nur als selbstverständlich; denn die erste Vorbedingung für das Rechnen ist die Einführung eines Systems von Zeichen, deren jedes eine, völlig bestimmte Bedeutung hat, und von Zeichengruppen, deren jede ebenfalls einen und nur einen Sinn hat.

III. Satz. Aus den Voraussetzungen A.)—D.) ergeben sich folgende Regeln für das Rechnen nach den Operationen $\circ$ und $\smile$.

1) „Ist $a = a'$, $b = b'$ so existirt neben $a \smile b$ auch $a' \smile b'$ und zwar ist $a \smile b = a' \smile b'$." — Aus $a \smile b = x$ folgt $a = b \circ x$, also nach A.) $a' = b \circ x$. Da $b \circ x = b' \circ x$, so hat man $a' = b' \circ x$. Diese Gleichung kann nur eine Lösung haben, da aus ihr wieder $b \circ x = a$ folgt; somit ist $x = a' \smile b'$.

2) „Aus $a \smile b = a' \smile b$ folgt $a = a'$." Denn bezeichnet man den gemeinsamen Werth der beiden als möglich und eindeutig vorausgesetzten lytischen Ausdrücke mit d, so ist $a = b \circ d$, $a' = b \circ d$, folglich $a = a'$.

3) „Aus $a \smile b = a \smile b'$ folgt $b = b'$, wenn die Gleichung

$$y \circ (a \smile b) = a \qquad (\beta)$$

nur die einzige Lösung $y = b$ zulässt." Denn neben der Gleichung (α) besteht die Gleichung $b' \circ (a \smile b) = b' \circ (a \smile b') = a$.

4) „Es ist $(a \circ b) \smile b = a$ unter Voraussetzung, dass die Gleichung $a \circ b = x \circ b$ nur die eine Lösung $x = a$ hat.“

„Unter der nämlichen Voraussetzung folgt aus der Gleichung $a' \circ b = a \circ b$ $a = a'$.“

5) Es ist $a \smile (a \smile b) = b$, die linke Seite als möglich und eindeutig vorausgesetzt.“ Folgt unmittelbar aus (α), wenn eben die Gleichung (β) nur die Lösung $y = b$ hat.

6) „Es ist $(a \circ m) \smile (b \circ m) = a \smile b$, wenn die Gleichungen

$$a \circ m = (b \circ m) \circ z, \quad a \circ m = y \circ m, \quad b \circ x = a \qquad (\gamma)$$

je nur eine Lösung nach der Unbekannten zulassen.“[1]) Stellen wir nämlich die erste in der Form

$$a \circ m = (b \circ z) \circ m$$

dar, so ergiebt sich nunmehr aus 4), dass $a = b \circ z$, folglich $z = a \smile b$ ist.

7) „Es ist $(a \smile m) \smile (b \smile m) = a \smile b$, wenn jede der hier vorkommenden lytischen Formen möglich und eindeutig ist.“ — Setzt man

$$a \smile m = p, \quad b \smile m = q, \quad p \smile q = r,$$

so hat man $p = q \circ r$, also $p \circ m = (q \circ m) \circ r$ d. i. $a = b \circ r$, folglich $r = a \smile b$.

„Die Formeln:

8) $(a \smile b) \circ c = (a \circ c) \smile b$

9) $(a \smile b) \smile c = a \smile (b \circ c)$

10) $a \smile (b \smile c) = (a \circ c) \smile b$

gelten unter der Voraussetzung, dass alle darin auftretenden lytischen Ausdrücke möglich und eindeutig sind.“

Die Beweise derselben bieten keine Schwierigkeit dar. $a \smile b$ als möglich und eindeutig angenommen, ist auch $(a \smile b) \circ c$ eine Grösse y unseres Systemes. Man hat $b \circ y = a \circ c$, kann also, wenn diese Gleichung nicht mehr als eine Lösung y hat, schreiben $y = (a \circ c) \smile b$. U. s. f.

„Man hat ferner die Formeln

11) $(a \smile b) \circ (a' \smile b') = (a \circ a') \smile (b \circ b')$

12) $(a \smile b) \smile (a' \smile b') = (a \circ b') \smile (a' \circ b)$

und zwar ebenfalls unter der Voraussetzung, dass alle darin vorkommenden lytischen Ausdrücke möglich und eindeutig sind.“

Denn sind $a \smile b$, $a' \smile b'$ Grössen des Systemes (I), so auch

$$(a \smile b) \circ (a' \smile b') = z.$$

1) Will man die rechte Seite der Formel 6) in die linke überführen, so genügt die Annahme, dass die 1. und 2. der Gleichungen (γ) je nur eine Lösung hat. So können auch bei den folgenden Formeln, wenn man die rechte Seite derselben in die linke überzuführen sucht, andere Vorbehalte als die i. T. gemachten auftreten.

Demnach findet man

$$z \circ (b \circ b') = a \circ a',$$

sodass wenn diese Gleichung nur eine Lösung für z zulässt,

$$z = (a \circ a') \smile (b \circ b')$$

gesetzt werden kann. U. s. f.

Die vorstehenden Sätze erscheinen wegen der mannigfachen in ihnen auftretenden Vorbehalte ziemlich umständlich. Die gemeine Arithmetik bedarf ihrer übrigens nicht, da hier eine einfachere Annahme als die obige D.) völlig ausreicht. Wir gehen nunmehr zu derselben über.

4. **Voraussetzung D$_1$.)** „Es giebt entweder eine und dann nur eine oder gar keine Grösse des Systemes (I), welche für x gesetzt, die Gleichung $b \circ x = a$ erfüllt."

Satz III$_1$.) „Dann ergeben sich ausser dem 1. und 2. Satze in Nr. 3 zunächst die folgenden:

3) „Aus $a \smile b = a \smile b'$ folgt $b = b'$."

4) „$(a \circ b) \smile b = a$ oder aus der Gleichung $a \circ b = a' \circ b$ folgt nothwendig $a = a'$."

5) „Ist $a \smile b = a' \smile b'$, so hat man $a \circ b' = a' \circ b$ und umgekehrt: besteht die letztere Gleichung und ist einer von den Ausdrücken $a \smile b$, $a' \smile b'$ möglich, so ist es auch der andere und zwar hat man $a \smile b = a' \smile b'$." — Um den ersten Theil zu zeigen, verknüpft man beide Seiten der Gleichung $a \smile b = a' \smile b'$ mit $b \circ b'$. Besteht aber $a \circ b' = a' \circ b$ und ist $a = b \circ x$, so folgt

$$b \circ (x \circ b') = a' \circ b$$

also nach 4)

$$x \circ b' = a', \quad x = a' \smile b'.$$

Hieraus folgt vermöge der Formel $a \circ b = b \circ a$, dass $a \smile a = b \smile b$ ist, natürlich vorausgesetzt, dass die Gleichung $a \circ x = a$ eine Lösung im Systeme (I) hat.

6) „$a \smile (a \smile b) = b$."

„Daran schliessen sich als Nr. 7—13 die 6.—12. Formel der vorigen Nummer, wobei bloss von den auf den linken Seiten derselben erscheinenden lytischen Ausdrücken anzunehmen ist, dass sie möglich sind d. h. Grössen des Systemes (1) darstellen.

14) Der „fortschreitend" zu berechnende Ausdruck

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots a_{r_1} \smile b_1 \smile b_2 \smile \cdots b_s \circ a_{r_1+1} \circ \cdots \qquad (\delta)$$

liefert, wenn bei Ausführung der aufeinander folgenden Verknüpfungen a_1 mit a_2, $a_1 \circ a_2$ mit a_3 u. s. f. kein Widersinn zu Tage tritt, nach 8) und 9) in Nr. 3 als Endresultat $A \smile B$, unter A das Resultat der thetischen Verknüpfung von a_1 mit allen hinter einem $\circ$ stehenden

Grössen, unter B das Resultat der thetischen Verknüpfung aller hinter einem $\smile$ stehenden Grössen verstanden. Dabei können je zwei gleiche Grössen hinter verschiedenen Operationszeichen nebst diesen selbst gestrichen werden. — Daraus erhellt, dass das Endresultat von der Anordnung der in (δ) vorgeschriebenen Operationen unabhängig ist, woferne der Ausdruck nur auch bei der neuen Anordnung derselben einen Sinn hat.

15) Ist ein Ausdruck, welcher eingeklammerte Parthien enthält, in einen fortschreitend zu berechnenden zu verwandeln, so können die Klammern am Anfange oder hinter einem $\circ$ wegbleiben; bei Entfernung derselben hinter einem $\smile$ ist vor das erste Glied hinter der Klammer das Operationszeichen $\smile$ zu setzen und es sind vor allen folgenden Gliedern die Zeichen $\circ$ und $\smile$ zu vertauschen. Dabei ist jedoch vorauszusetzen, dass die nun vorzunehmende fortschreitende Berechnung auch möglich sei. [Den Beweis wolle man aus Nr. 8 entnehmen.]

5. Verbinden wir mit den Annahmen A.) B.) C.) noch die

Voraussetzung E.) „1) Unter je zwei ungleichen Grössen des Systemes (I) sei die eine als die grössere, die andere als die kleinere erklärt, (so dass anzunehmen ist, dass wenn $a \geqq b$, $b > c$ ist, alsdann $a > c$ ist). 2) Es sei neben

$$a > a' \qquad a \circ b > a' \circ b\text{“}, \tag{ε}$$

so ergiebt sich sofort der

Satz IV. „Wenn

$$a_1 \geqq b_1 \quad a_2 \geqq b_2 \;\cdots\; a_n \geqq b_n \quad (n \geqq 2)$$

und wenigstens in einer dieser Relationen das Zeichen $>$ steht, so ist

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots a_n > b_1 \circ b_2 \circ \cdots b_n.\text{“}$$

„~~Wenn neben diesen Annahmen noch die Möglichkeit der Lysis, wenigstens bedingungsweise, feststeht~~, dann kann aus E.) geschlossen werden

1) die Eindeutigkeit der Lysis (d. i. der Satz D_1); ferner das Bestehen der Sätze:

2) Neben $a > a'$ ist $a \smile b > a' \smile b$.

3) Neben $b < b'$ ist $a \smile b > a \smile b'$.

4) Neben $a > a' \quad b < b'$ ist $a \smile b > a' \smile b'$.

Dabei ist die Existenz der Grössen $a \smile b$, $a' \smile b$, $a \smile b'$, $a' \smile b'$, vorausgesetzt.“ Die Sätze 1)—4) werden indirect gezeigt. Wäre nämlich $a \smile b \leqq a' \smile b$, so würde durch Verknüpfung beider Seiten mit b, nach dem Satze in A.) (S. 38) oder nach dem Satze (ε) $a \leqq a'$ folgen, was der Annahme, $a > a'$, widerspricht. U. s. w.

Wir werden später noch die folgenden Sätze gebrauchen:

„5) Neben $a \smile b \gtrless c$ hat man entsprechend $a \gtrless b \circ c$ und umgekehrt, immer $a \smile b$ als im Systeme (I) vorhanden gedacht.

6) Existiren $a \smile b$, $a' \smile b'$, so folgt aus $a \smile b \gtrless a' \smile b'$ entsprechend $a \circ b' \gtrless a' \circ b$ und umgekehrt."

Die ersten Theile folgen aus E.), indem man beide Seiten der Relationen mit b, bez. $b \circ b'$ verknüpft; die Umkehrungen nach I. 10.

Satz V. „Weiss man, dass neben A.) B.) C.) E. 1.) die Regel „$a \circ b > a$" gilt, so ergiebt sich, dass $a_1 \circ a_2 \circ \cdots a_n$ grösser ist als das Resultat der Verknüpfung eines Theiles der Grössen $a_1 \cdots a_n$, sowie als jede einzelne."

6. Distributive Formeln. — Wir betrachten nun zwei Verknüpfungen $\circ$ und $\odot$, welche verschiedenen Stufen angehören.

Satz VI. „1) Besteht die Formel

$$(a \circ b) \odot c = (a \odot c) \circ (b \odot c), \tag{ζ}$$

so hat man

$$(a_1 \circ a_2 \circ \cdot a_m) \odot c = (a_1 \odot c) \circ (a_2 \odot c) \circ \cdots (a_m \odot c)." \tag{η}$$

Beweis. Man zerlege den fortschreitend zu berechnenden Ausdruck

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdot a_m = (a_1 \circ a_2 \circ \cdot a_{m-1}) \circ a_m$$

und setze in (ζ)

$$a = a_1 \circ a_2 \circ \cdots a_{m-1}, \quad b = a_m.$$

Hierauf zerlege man $a_1 \circ a_2 \circ \cdots a_{m-1}$ u. s. f.

2) „Desgleichen folgt aus der Formel

$$a \odot (b \circ c) = (a \odot b) \circ (a \odot c) \tag{ϑ}$$

$$a \odot (b_1 \circ b_2 \circ \cdots b_n) = (a \odot b_1) \circ (a \odot b_2) \cdots (a \odot b_n)." \tag{ι}$$

Die Formeln (ζ) und (ϑ) heissen distributiv.[1]) Sie gelten allgemein d. h. mögen die Verknüpfungen $\circ$, $\odot$ thetische oder lytische sein. Nur muss im letzteren Falle vorausgesetzt werden, dass die bezüglichen lythischen Ausdrücke möglich seien d. h. Grössen des Systemes (I) bedeuten. Von diesem Gesichtspunkte aus können von den im II. Abschnitte aufgeführten Formeln als besondere Fälle der Formel (η) die folgenden

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$
$$(a + b) : c = a : c + b : c \qquad (a - b) : c = a : c - b : c$$
$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \qquad (a : b)^m = a^m : b^m,$$

1) Wesentlich an diesen Formeln ist, dass jedes von den zwei Verknüpfungszeichen auf beiden Seiten derselben vorkommt. Die Formel $(a^m)^n = a^{mn}$ gehört daher nicht zu den distributiven Formeln.

als besondere Fälle der Formel (ι) die beiden

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

betrachtet werden.

3) Wenn die Formeln (ζ) und (ϑ) zugleich Geltung haben, so heissen sie die beiden Seiten des distributiven Gesetzes der Verknüpfung $\odot$. Alsdann lässt sich jeder Ausdruck

$$s = (a_1 \circ a_2 \circ \cdots a_m) \odot (b_1 \circ b_2 \circ \cdots b_n)$$

in doppelter Weise entwickeln. Setzt man

$$a_r \odot b_s = c_{r,s} \quad (r = 1 \cdots m,\ s = 1 \cdots n),$$

so findet man, zuerst (ζ) dann (ϑ) anwendend,

$$s = [c_{11} \circ c_{12} \circ \cdots c_{1n}] \circ [c_{21} \circ c_{22} \circ \cdots c_{2n}] \circ \cdots \circ [c_{m1} \circ c_{m2} \circ \cdots c_{mn}], \quad (\varkappa)$$

dagegen in umgekehrter Ordnung vorgehend,

$$s = [c_{11} \circ c_{21} \circ \cdots c_{m1}] \circ [c_{12} \circ c_{22} \circ \cdots c_{m2}] \circ \cdots \circ [c_{1n} \circ c_{2n} \circ \cdots c_{mn}]. \quad (\lambda)$$

Nunmehr wollen wir uns auf die einfachere Annahme beschränken, dass beide Verknüpfungen $\circ \odot$ thetische und zwar die erstere ($\circ$) associativ sei. Alsdann können die Klammern auf der rechten Seite von ($\varkappa$) und (λ) gestrichen werden. Wir erhalten demnach z. B.

$$\left.\begin{aligned}(a_1 \circ a_2) \odot (b_1 \circ b_2) &= c_{11} \circ c_{12} \circ c_{21} \circ c_{22} \\ &= c_{11} \circ c_{21} \circ c_{12} \circ c_{22}\end{aligned}\right\} \quad (\mu)$$

4) Aus der Gleichung (μ) ergiebt sich der folgende Satz.[1])

„Wenn die Verknüpfung $\circ$ associativ ist und jede von den Gleichungen

$$x \circ b = a \quad b \circ y = a \quad (\nu)$$

höchstens eine Auflösung nach der bezüglichen Unbekannten hat, wenn es ferner im Systeme (I) zu jeder Grösse c zwei solche Grössen $u\,v$ giebt, dass $u \odot v = c$ ist; dann folgt aus den beiden Seiten des distributiven Gesetzes d. i. den Formeln (ζ) und (ϑ), dass die Operation $\circ$ commutativ ist.“ — Unter der Voraussetzung, dass die Verknüpfung $\circ$ associativ ist, können wir nämlich die Gleichung (μ) so schreiben:

$$c_{11} \circ (c_{12} \circ c_{21} \circ c_{22}) = c_{11} \circ (c_{21} \circ c_{12} \circ c_{22}).$$

Da die Gleichung $s = c_{11} \circ y$ nur eine Lösung nach y zulassen soll, so muss

$$c_{12} \circ c_{21} \circ c_{22} = c_{21} \circ c_{12} \circ c_{22} \text{ d. i.}$$
$$(c_{12} \circ c_{21}) \circ c_{22} = (c_{21} \circ c_{12}) \circ c_{22}$$

sein, woraus sich durch einen ähnlichen Schluss hier die Beziehung

$$c_{12} \circ c_{21} = c_{21} \circ c_{12} \quad (\pi)$$

1) Hankel a. a. O. S. 32.

ergiebt. Da c_{12} und c_{21} bei gehöriger Bestimmung von a_1, a_2, b_1, b_2 beliebige Grössen des Systems (I) sein können, so gilt die Gleichung (π) allgemein, somit besteht für die Thesis $\circ$ das commutative Gesetz.

Neben einer Multiplication, wofür die beiden Seiten des distributiven Gesetzes Geltung haben, muss also die Addition, wenn sie nur associativ ist, commutativ sein.

5) „Bezeichnet man im Falle, dass eine jede der Gleichungen (ν) nur je eine Lösung zulässt, dieselben bezw. mit

$$x = a \smile b, \quad y = a \mathbin{\underline{\smile}} b,$$

so bestehen neben den Formeln (ζ) und (ϑ) bezw. die Gleichungen

$$\begin{aligned} (a \smile b) \odot c &= (a \odot c) \smile (b \odot c) \\ c \odot (a \mathbin{\underline{\smile}} b) &= (c \odot a) \mathbin{\underline{\smile}} (c \odot b). \end{aligned} \tag{ϱ}$$

Wenn unter der Voraussetzung, dass eine jede der Gleichungen

$$x \odot c = a \qquad c \odot y = a$$

nur eine Lösung hat, dieselben durch die Formeln

$$x = a \mathbin{\dot{\smile}} c \qquad y = a \mathbin{\underline{\dot{\smile}}} c$$

dargestellt werden, so hat man ferner neben (ζ) und (ϑ) bezw. die Formeln

$$\begin{aligned} (a \circ b) \mathbin{\dot{\smile}} c &= (a \mathbin{\dot{\smile}} c) \circ (b \mathbin{\dot{\smile}} c) \\ (a \circ b) \mathbin{\underline{\dot{\smile}}} c &= (a \mathbin{\underline{\dot{\smile}}} c) \circ (b \mathbin{\underline{\dot{\smile}}} c). \end{aligned} \tag{σ}$$

Diese vier Formeln ergeben sich unmittelbar aus (ζ) und (ϑ). Um z. B. die erste zu beweisen, setze man $a \smile b = x$. Dann ist nach (ζ)

$$a \odot c = (x \circ b) \odot c = (x \odot c) \circ (b \odot c),$$

somit $x \odot c = (a \odot c) \smile (b \odot c)$. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass die Gleichung $a \odot c = z \circ (b \odot c)$ nur eine Lösung nach z hat.

7. **Ableitung neuer Grössen aus denen des Systemes (I) auf S. 37 durch Paarung derselben. Für die neuen Grössen ist auch die Lysis $\smile$ stets möglich und eindeutig.**

Aus dem von den Grössen a, b, $c \cdots$ gebildeten Systeme (I), das den Voraussetzungen A.) B.) C.) D_1.) unterworfen sei, lassen sich durch Paarung von je zweien von ihnen neue Grössen ableiten.

1. Definition. „Der Zusammenstellung von je zwei Grössen a, b des Systemes (I) mit Rücksicht auf ihre Anordnung werde ein neues Ding, das ‘Grössenpaar ab’, das wir mit (a, b) bezeichnen, zugeordnet.“

Da die neuen Dinge noch keine Eigenschaften besitzen, so können ihnen solche nach Belieben beigelegt werden, wenn sie nur zu keinem Widerspruche, sei es untereinander oder mit den Voraussetzungen A.) B.) C.) D_1.) führen. Zunächst machen wir diese Dinge zu Grössen durch Unterscheidung von gleichen und ungleichen unter ihnen.

2. Definition. „Zwei neue Dinge (a, b) und (a', b') seien dann und nur dann einander gleich, wenn

$$a \circ b' = a' \circ b \tag{1}$$

ist. — Die Definition ist zulässig. Denn ist nach ihr

$$(a, b) = (a', b') \quad (a', b') = (a'', b''),$$

so ist nach ihr auch $(a, b) = (a'', b'')$. Wir haben nämlich

$$a \circ b' = a' \circ b \quad a' \circ b'' = a'' \circ b'$$

also

$$(a \circ b') \circ (a' \circ b'') = (a' \circ b) \circ (a'' \circ b')$$

d. i.

$$(a' \circ b') \circ (a \circ b'') = (a' \circ b') \circ (a'' \circ b),$$

also nach dem 4. Satze in Nr. 4 $a \circ b'' = a'' \circ b$.

Da $a \circ b = b \circ a$ sein soll, so ist zufolge der 2. Definition $(a, a) = (b, b)$, was a, b für Grössen des Systemes (I) auch sein mögen.

Die Grössen (a, b) und (b, a) sind im Allgemeinen ungleich, weil $a \circ a$ und $b \circ b$ in der Regel von einander verschieden sein werden.

Wenn die Gleichung $b \circ x = a$ eine Lösung nach x im Systeme (I) zulässt und $(a, b) = (a', b')$ ist d. h. die Grössen $a'\, b'$ die Gleichung (1) erfüllen, so hat zufolge des 5. Satzes in Nr. 4 auch die Gleichung $b' \circ x = a'$ eine Lösung nach x und zwar ist

$$a \smile b = a' \smile b'.$$

Wir setzen nun weiter fest:

3. Definition. Falls die Gleichung $b \circ x = a$ eine und gemäss der Voraussetzung D_1) nur eine Lösung nach x im Systeme (I) besitzt, so sei unter (a, b) diese Grösse verstanden; es sei also in diesem Falle $(a, b) = a \smile b$, das letztere Zeichen in dem in Nr. 3 festgesetzten Sinne genommen. Wenn $(a', b') = (a, b)$ ist, so ist nach dem, was gerade bemerkt wurde, auch $a' \smile b'$ eine Grösse x' des Systemes (I) und zwar besteht die Gleichung $b \circ x' = a$.

Somit zerfällt das System der Grössen (a, b), welches wir im folgenden als System (II) bezeichnen werden, in zwei Theile. Es gehören dazu sämmtliche Grössen des Systems (I), denn eine jede solche Grösse a lässt sich auf die Form $(a \circ c) \smile c$ bringen. Hierzu treten aber neue Grössen, nämlich die Paare (a, b), wenn a und b so gewählt sind, dass die Gleichung $b \circ x = a$ keine Lösung nach x im Systeme (I) zulässt. — Der Kürze halber werden wir auch die Grössen des Systemes (II) manchmal mit einzelnen Buchstaben und zwar mit den griechischen $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ bezeichnen.

Wir wollen auch für die Grössen (II) die Verknüpfung $\circ$ erklären. Um dazu zu gelangen, braucht man sich nur an die Formel (11) in Nr. 3 und 4 zu erinnern, worin man der 3. Erklärung zufolge $a \smile b$, $a' \smile b'$ bezw. durch (a, b) und (a', b') ersetzen darf. Allein diese Erwägung hat bloss didaktischen Werth. Vom Standpunkte der Logik aus ist sie ohne Bedeutung; es würde vielmehr dem Wesen der Sache besser entsprechen, wenn man die 3. Erklärung erst auf die 4. folgen lassen würde.

4. Definition. Für die neuen Grössen (a, b) wird die Verknüpfung $\circ$ durch die Formel

$$(a, b) \circ (a', b') = (a \circ a', \; b \circ b') \tag{2}$$

erklärt, worin die Grösse rechts auch durch jede ihr gleiche ersetzt werden darf.

Dann gilt der nachstehende Satz.

Satz VII. „Es bestehen auch für diese Verknüpfung $\circ$ die Regeln, worin $\alpha \; \alpha' \cdots$ Grössen des Systems (II) bedeuten:

1) Ist $\alpha = \alpha' \quad \beta = \beta'$, so ist

$$\alpha \circ \beta = \alpha' \circ \beta'. \tag{3}$$

2) Die genannte Verknüpfung ist associativ und commutativ.

3) Die Gleichung

$$\xi \circ \beta = \alpha$$

hat stets eine, aber nur eine Lösung nach ξ. Wir werden auch sie mit $\alpha \smile \beta$ bezeichnen, wobei das Rechenzeichen $\smile$ die Umkehrung der neuen Verknüpfung $\circ$ anzeigt.“

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Den Theilsatz 1) zerlegen wir der Kürze wegen in die beiden Sätze: „Ist $\alpha = \alpha'$, so ist $\alpha \circ \beta = \alpha' \circ \beta$“ und „ist $\beta = \beta'$, so ist $\alpha' \circ \beta = \alpha' \circ \beta'$.“ Lassen wir

$$\alpha = (a, b), \quad \alpha' = (a', b'), \quad \beta = (c, d), \quad \beta' = (c' \, d')$$

sein, so soll also

$$a \circ b' = a' \circ b, \quad c \circ d' = c' \circ d \tag{4}$$

sein. Nun ist

$$\alpha \circ \beta = (a \circ c, \; b \circ d), \quad \alpha' \circ \beta = (a' \circ c, \; b' \circ d). \tag{5}$$

Es ist aber nach der ersten der Gleichungen (4)

$$(a \circ b') \circ (c \circ d) = (a' \circ b) \circ (c \circ d) \quad \text{d. i.}$$
$$(a \circ c) \circ (b' \circ d) = (a' \circ c) \circ (b \circ d),$$

also zufolge der 2. Definition

$$\alpha \circ \beta = \alpha' \circ \beta.$$

Auf ähnliche Art wird die zweite Hälfte des Theilsatzes 1) bewiesen.

Zum Nachweise des Theilsatzes 2) reicht es nach Nr. 2 hin, zu zeigen, dass die beiden Formeln

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma) \tag{6}$$

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha \tag{7}$$

allgemeine Giltigkeit besitzen. $\alpha \circ \beta$ entnehmen wir aus (5). Ist dann $\gamma = (e, f)$, so ist

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = ((a \circ c) \circ e,\ (b \circ d) \circ f).$$

Nach B.) auf S. 39 ist aber

$$(a \circ c) \circ e = a \circ (c \circ e) \qquad (b \circ d) \circ f = b \circ (d \circ f),$$

somit, da

$$\beta \circ \gamma = (c \circ e,\ d \circ f) \quad \alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (a \circ (c \circ e),\ b \circ (d \circ f))$$

ist, $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$. Die Formel (7) folgt unmittelbar aus der 4. Definition, indem nach C.) auf S. 40 $a \circ c = c \circ a$, $b \circ d = d \circ b$ sein soll.

Legen wir uns nun die Gleichung $\xi \circ \beta = \alpha$ vor Setzen wir $\xi = (x, y)$, so ist $\xi \circ \beta = (x \circ c,\ y \circ d)$. Es soll also

$$(x \circ c,\ y \circ d) = (a, b) \tag{8}$$

sein. Dies tritt zufolge der 2. Definition dann und nur dann ein, wenn

$$(x \circ c) \circ b = (y \circ d) \circ a \quad \text{d. i.} \quad x \circ (b \circ c) = y \circ (a \circ d) \tag{9}$$

ist. Die Gleichung (9) wird durch die Annahme $x = a \circ d$, $y = b \circ c$ erfüllt, aber auch dadurch, dass wir

$$y = (x \circ b \circ c) \smile (a \circ d)$$

setzen, wobei wir x bloss so zu beschränken brauchen, dass die Gleichung (9) eine Lösung nach y im Systeme (I) zulässt. Es ist jedoch nach der 2. Definition auch im letzteren Falle

$$(x, y) = ((a \circ d),\ (b \circ c));$$

denn wir haben

$$x \circ (b \circ c) = \{(x \circ b \circ c) \smile (a \circ d)\} \circ (a \circ d).$$

Ersetzen wir im Ausdrucke $\xi \circ \beta$ ξ durch $((a \circ d),\ (b \circ c))$, so finden wir zufolge der Formeln (2) und (1) in der That

$$((a \circ d),\ (b \circ c)) \circ (c, d) = (a \circ c \circ d,\ b \circ c \circ d) = (a, b).$$

Nach der 3. Erklärung erscheinen auch die Grössen des Systemes (I) unter denen des neuen Systems (II). Zufolge der 4. Definition ergiebt sich als Ergebniss der Verknüpfung einer Grösse a des Systems (I) mit einem Grössenpaare (a', b').

$$a \circ (a', b') = (a \circ c, c) \circ (a', b') = (a \circ c \circ a', c \circ b') = (a \circ a', b'), \tag{10}$$

denn es ist $(a \circ c \circ a') \circ b' = (c \circ b') \circ (a \circ a')$. Das Ergebniss ist, wie es nach der Formel (3) zu erwarten war, von der nach Belieben unter den Grössen (I) zu wählenden Grösse c unabhängig.

Legen wir uns nun die Gleichung $\xi \circ b = a$ vor. Dabei haben wir uns $a = (a \circ c, c)$ $b = (b \circ d, d)$ zu denken, unter c, d beliebige Grössen des Systems (I) verstanden. Die Gleichung

$$\xi \circ (b \circ d, d) = (a \circ c, c) \tag{11}$$

hat zufolge des Satzes VII. eine und nur eine Lösung nach ξ. Und zwar ist

$$\xi = (a \circ c \circ d,\ b \circ d \circ c) = (a \circ (c \circ d),\ b \circ (c \circ d)).$$

Diese Grösse ist nach der 2. Definition gleich (a, b). Somit hat die Gleichung (11), was c, d auch für Grössen des Systems (I) sein mögen, stets die nämliche Lösung $\xi = (a, b)$. Man darf somit nunmehr anstatt (a, b) $a \smile b$ schreiben, wobei das Rechenzeichen $\smile$ den allgemeineren, im Satze VII. festgesetzten Sinn besitzt. Thatsächlich verzichtet man manchmal auf die ursprüngliche Bezeichnung der durch Paarung der Grössen des Systems (I) entstandenen Grössen und ersetzt sie durch das soeben erwähnte lytische Symbol. Dann erscheinen die Definitionen 2) und 4) in der folgenden Form:

2) Es ist $a \smile b = a' \smile b'$ dann und nur dann, wenn $a \circ b' = a' \circ b$ ist.

$$4)\ (a \smile b) \circ (a' \smile b') = (a \circ a') \smile (b \circ b').$$

Insbesondere ist nach (10)

$$a \circ (a' \smile b') = (a \circ a') \smile b'.$$

Das Verfahren der Grössenpaarung wurde von W. R. Hamilton ersonnen (vgl. X. 1). Später benutzte es C. Weierstrass zur Ableitung der relativen Zahlen aus den absoluten (vgl. H. Padé, Premières leçons d'algèbre élém., 1892, S. XII und C. Bourlet, Leçons d'algèbre, 1894, S. 59). Endlich wurde es von J. Tannery dazu verwendet, um von den natürlichen Zahlen zu den absoluten rationalen Zahlen zu gelangen (vgl. S. 57 Note). L. Couturat (De l'Infini mathématique, 1896, S. 5f.) bezeichnet das in Rede stehende Verfahren als die „arithmetische“ Verallgemeinerung des Zahlbegriffs und stellt ihm die ältere analytische Theorie der rationalen Zahlen als „algebraische“ Verallgemeinerung des Zahlbegriffs gegenüber.

Nach der letzteren Theorie, welche in der ersten Auflage dieses Werkes vorgetragen ist, wird zuerst festgesetzt, dass wenn der Gleichung $b \circ x = a$ keine Grösse des Systemes (I) genügt, sie durch ein neues, im Systeme (I) nicht vorhandenes Ding x befriedigt werden solle, welches mit $a \smile b$ bezeichnet und die „angezeigte“ oder auch die „imaginäre“ (Couturat a. a. O. S. 82) Lysis genannt wird. Allein diese Aufstellung birgt den logischen Fehler in sich, dass von der Lysis $a \smile b$ vor der Vergleichung und vor der Verknüpfung $\circ$ der neuen Grössen die Rede ist.

Will man das „algebraische“ Verfahren davon befreien, so hat man mit den nämlichen zwei Definitionen wie oben auf S. 47 zu beginnen. Hierauf müssen folgende zwei Festsetzungen, besondere Fälle der neuen Thesis $\circ$ enthaltend, getroffen werden: „es sei

$$(a, b) \circ c = c \circ (a, b) = (a \circ c) \smile b, \tag{α}$$

falls die Gleichung $b \circ x = a \circ c$ im Systeme (I) eine Lösung besitzt, dagegen für den Fall, dass diese Bedingung nicht erfüllt ist,

$$(a, b) \circ c = c \circ (a, b) = (a \circ c, b).\text{“} \qquad (\beta)$$

Damit lässt sich nämlich zeigen, dass die Gleichung $b \circ x = a$ im Falle dass ihr keine Grösse des Systemes (I) genügt, nur die eine Lösung $x = (a, b)$ zulässt.[1]) Erst jetzt (vgl. S. 41) dürfen wir $(a, b) = a \smile b$ setzen. — Die Festsetzung der Formel (α) allein würde, wie Gmeiner bemerkt hat, die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $b \circ x = a$ nach x nicht verbürgen (vgl. Uebung 5) auf S. 98). Dagegen entfällt jetzt die 3. Definition auf S. 48.

Infolge dieses Zusatzes gestaltet sich das algebraische Verfahren etwas umständlicher und weniger übersichtlich, als das der Grössenpaarung. Das letztere ist daher vorzuziehen.

Die algebraische Ableitung des Systems der rationalen Zahlen wurde in Deutschland wohl zuerst von M. Ohm in der 1. Auflage seines „Versuchs eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik“ (1822) ausgeführt. Er hat richtig erkannt, dass für die allgemeinen Differenzen und Quotienten die Gleichheit eigens zu erklären sei. Doch fehlt bei ihm der Nachweis des associativen Gesetzes für die neuen Summen und Producte. Die Uebertragung dieses Verfahrens auf eine nur durch die auf S. 47 angegebenen Annahmen beschränkte Thesis und die zu ihr gehörige Lysis findet man bei Hankel (a. a. O. S. 26), welcher indess die 2. Definition nicht kennt.

8. Zufolge des Satzes VII. genügt das aus den Grössen $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ bestehende System (II) vollständig den im Satze III_1 auf S. 43 verlangten Bedingungen. Man kann daher in den darin aufgeführten Sätzen die $a, b, c \cdots$ ohne weiteres durch die $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ ersetzen und hat demnach:

1) Ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, so ist $\alpha \smile \beta = \alpha' \smile \beta'$.
2) Aus $\alpha \smile \beta = \alpha' \smile \beta$ folgt $\alpha = \alpha'$.
3) Aus $\alpha \smile \beta = \alpha \smile \beta'$ folgt $\beta = \beta'$.
4) $(\alpha \circ \beta) \smile \beta = \alpha$. Aus $\alpha \circ \beta = \alpha' \circ \beta$ folgt $\alpha = \alpha'$.
5) $\alpha \smile (\alpha \smile \beta) = \beta$.
6) $(\alpha \circ \mu) \smile (\beta \circ \mu) = \alpha \smile \beta$.

---

1) Setzt man nämlich, um x zu bestimmen, da die Gleichung $b \circ x = a$ im Systeme (I) keine Lösung hat, $x = (u, v)$, so muss, weil $b \circ (u, v)$ eine Grösse a des Systems (I) sein soll, gemäss der Formel (α)

$$b \circ (u, v) = (b \circ u) \smile v \quad \text{und} \quad (b \circ u) \smile v = a$$

sein. Daraus ergiebt sich aber $b \circ u = a \circ v$, so dass nach der 2. Definition $(u, v) = (a, b)$ ist. Da nun zufolge (α)

$$(a, b) \circ b = (a \circ b) \smile b = a \quad \text{[Formel 4) in Nr. 4]}$$

ist, so genügt die Grösse (a, b) in der That der Gleichung $b \circ x = a$ und zwar nur sie.

7) $(\alpha \smile \mu) \smile (\beta \smile \mu) = \alpha \smile \beta$.

8) $(\alpha \smile \beta) \circ \gamma = \gamma \circ (\alpha \smile \beta) = (\alpha \circ \gamma) \smile \beta$.

9) $(\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \circ \gamma)$.

10) $\alpha \smile (\beta \smile \gamma) = (\alpha \circ \gamma) \smile \beta$.

11) $(\alpha \smile \beta) \circ (\alpha' \smile \beta') = (\alpha \circ \alpha') \smile (\beta \circ \beta')$.

12) $(\alpha \smile \beta) \smile (\alpha' \smile \beta') = (\alpha \circ \beta') \smile (\alpha' \circ \beta)$.

Und zwar gelten alle diese Formeln ohne jegliche Beschränkung.

13) Der von links nach rechts fortschreitend zu berechnende Ausdruck

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_{r_1} \smile \beta_1 \smile \beta_2 \cdots \smile \beta_{s_1} \circ \alpha_{r_1+1} \circ \cdots \tag{12}$$

ist gleich $A \smile B$, worin A durch thetische Verknüpfung aller α, B durch thetische Verknüpfung aller β entstanden ist, und somit unabhängig von der Anordnung der in (12) vorgeschriebenen Operationen. Insbesondere hat der Ausdruck (δ) auf S. 43 jetzt ausnahmslos den dort angegebenen Werth.

14) „Jeder Ausdruck, der durch ineinander geschachtelte fortschreitend zu berechnende Ausdrücke gebildet ist, wird so auf einen ohne Klammern geschriebenen Ausdruck reducirt, dass man die Klammern am Anfange oder nach einem $\circ$ weglässt, nach einem $\smile$ aber bei Entfernung der Klammern vor das erste Glied $\smile$ setzt und vor den übrigen die Zeichen $\circ$ und $\smile$ mit einander vertauscht."

Beweis. Offenbar brauchen wir nur einen fortschreitenden Ausdruck X zu betrachten, dessen Glieder entweder theils einfache Grössen theils fortschreitende Ausdrücke oder sämmtlich solche Ausdrücke sind. Wir beseitigen die darin befindlichen Klammern nach einander und zwar in der Richtung von links nach rechts. Ist schon das erste Glied ein Ausdruck, so fallen seine Klammern einfach fort. Nachdem sie weggelassen sind, haben wir nur noch zu zeigen, dass derjenige Theil von X, welcher aus den einfachen Grössen, die seinen Anfang bilden, und dem ersten eingeklammerten Ausdrucke besteht, den nämlichen Endwerth besitzt, wie der aus dem genannten Theile (X_1) gemäss der vorstehenden Regel abgeleitete klammerlose Ausdruck. Es sind im Ganzen acht verschiedene Fälle möglich. Zunächst hat man zu unterscheiden, ob vor dem eingeklammerten Ausdrucke das Rechenzeichen $\circ$ oder $\smile$ steht, dann, ob bei den Gliedern vor der Klammer bloss das Zeichen $\circ$ oder beide Zeichen $\circ \smile$ und ebenso ob innerhalb der Klammern bloss das Zeichen $\circ$ oder beide Zeichen $\circ \smile$ vorkommen. Befindet sich in X_1 nur das Zeichen $\circ$, so fallen die beiden Klammern vermöge des für die Verknüpfung $\circ$ geltenden associativen Gesetzes weg. Das Nämliche gilt überhaupt, wenn vor dem eingeklammerten Ausdrucke und innerhalb desselben bloss das Zeichen $\circ$ vorkommt. Wenn dagegen vor dem eingeklammerten Ausdrucke das Zeichen $\smile$ und innerhalb desselben bloss das Zeichen $\circ$ steht, so zeigt die Formel 9), allenfalls mehrmals angewendet, dass der aus X_1 gemäss der vorstehenden Regel abgeleitete klammerlose Ausdruck den nämlichen Werth besitzt wie X_1. So ist, wenn wir unter A das Resultat der Verknüpfung $\circ$ aus allen vor der Klammer befindlichen Grössen, vor denen $\circ$ steht, unter B das aus allen vor der Klammer befindlichen Grössen, vor denen $\smile$ steht, verstehen,

$$A \smile B \smile \gamma_1 \smile \gamma_2 \smile \cdots \smile \gamma_p = A \smile B \smile (\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_p).$$

In den übrigen vier Fällen stehen innerhalb der Klammern beide Zeichen $\circ \smile$. Der innerhalb derselben befindliche Ausdruck liefere dann $A' \smile B'$, unter A' das Ergebniss der Verknüpfung $\circ$ des Anfangsgliedes mit allen, vor denen $\circ$ steht, unter B' das aller Glieder, vor denen $\smile$ steht, verstanden. Alsdann kann man mit Hilfe der Formeln 8) und 10)—12) leicht die Richtigkeit des Satzes 14) erweisen. Lassen wir sogleich auch vor der Klammer Glieder, vor welchen das Zeichen $\circ$, und solche, vor welchen das Zeichen $\smile$ steht, vorhanden sein so haben wir

$$X_1 = (A \smile B) \circ (A' \smile B') \quad \text{oder} \quad (A \smile B) \smile (A' \smile B'),$$

somit nach der Formel 11) oder 12)

$$X_1 = (A \circ A') \smile (B \circ B') \quad \text{oder} \quad (A \circ B') \smile (A' \circ B).$$

Den nämlichen Werth liefert aber zufolge des Satzes 13) der aus X_1 gemäss der vorstehenden Regel abgeleitete klammerlose Ausdruck. — Auf die nämliche Weise wird in dem vorgelegten Ausdrucke X das zweite in seinem Innern befindliche Paar von Klammern beseitigt u. s. f.

9. Der Modulus (die indifferente Grösse) der Thesis $\circ$ und die reciproke (inverse) Grösse. Wir haben bereits auf S. 48 bemerkt, dass $(a, a) = (b, b)$ ist. Diese Grösse, welche wir mit ν bezeichnen wollen, kann entweder zu den Grössen (I) oder zu den neuen gehören. Da $\nu = (a, a) = a \smile a$ ist, so finden wir $a \circ \nu = a$. Es ist indess, was immer α für eine Grösse des Systems (II) sein mag, $\alpha \circ \nu = \alpha$. Denn man hat nach den Formeln 8) und 4) in Nr. 8.

$$\alpha \circ \nu = \alpha \circ (a \smile a) = (\alpha \circ a) \smile a = \alpha.$$

Die Grösse ν, welche die Eigenschaft besitzt, bei der Verknüpfung $\circ$ mit irgend einer Grösse des erweiterten Systemes diese ungeändert zu lassen, bezeichnen wir als die indifferente Grösse oder den Modulus der Thesis $\circ$.[1]) — Aus $\alpha \circ \nu = \alpha$ folgt ferner $\alpha = \alpha \smile \nu$, mag α zu (I) oder (II) gehören.

Die Grösse $\nu \smile \alpha$ wird dagegen im Allgemeinen von α verschieden sein; wir wollen sie die zur Grösse α des erweiterten Systemes reciproke oder inverse nennen und mit $\bar{\alpha}$ bezeichnen. Nur dann ist $\alpha = \nu \smile \alpha$, wenn α eine Lösung der Gleichung $\alpha \circ \alpha = \nu$ ist, also

1) Die erste Bezeichnung nach H. Grassmann, der in der Ausdehnungslehre von 1844 (§ 7) ν als die indifferente Form bezeichnet, die zweite nach Hankel (a. a. O. S. 23).

jedenfalls für $\alpha = \nu$. Die zu gleichen Grössen reciproken sind auch gleich. Es ist $\bar{\nu} = \nu$. Die Reciproke zu $\bar{\alpha}$ ist α. Denn man hat dafür

$$\bar{\bar{\alpha}} = \nu \smile \bar{\alpha} = \nu \smile (\nu \smile \alpha) = (\nu \circ \alpha) \smile \nu = \alpha.$$

Die Reciproke zu $\alpha \circ \beta$ ist $\bar{\alpha} \circ \bar{\beta}$; die zu $\alpha \smile \beta$ ist $\beta \smile \alpha$. In der That ergiebt sich

$$\overline{\alpha \smile \beta} = \nu \smile (\alpha \smile \beta) = (\nu \circ \beta) \smile \alpha = \beta \smile \alpha.$$

Insbesondere sind die Grössen (a, b) und (b, a) reciprok. Endlich ist die Lysis $\alpha \smile \beta$ identisch mit der thetischen Verknüpfung von α mit der Reciproken zu β.

$$\alpha \circ \bar{\beta} = \alpha \circ (\nu \smile \beta) = (\alpha \circ \nu) \smile \beta = \alpha \smile \beta.$$

Im Innern eines fortschreitend zu berechnenden Ausdruckes, der stets als Resultat von Thesen angesehen werden kann, darf der Modulus nebst dem vor ihm stehenden Operationszeichen weggelassen werden, ohne dass der Ausdruck eine Aenderung erleidet. Desgleichen am Anfange, wenn auf ihn das Rechenzeichen $\circ$ folgt.

10. Bestehen über das Grössensystem (I) die Voraussetzungen A), B), C), D_1), E), so können wir noch folgendes festsetzen.

4. Definition. „Es sei die neue Grösse $\alpha = (m, n)$ grösser oder kleiner als a, und umgekehrt a kleiner oder grösser als α, je nachdem m grösser oder kleiner als $n \circ a$. Ueberhaupt sei das Grössenpaar $\alpha = (m, n)$ grösser oder kleiner als ein anderes $\beta = (p, q)$, je nachdem $m \circ q$ grösser oder kleiner als $n \circ p$.“ — Die zweite Erklärung schliesst die erste als besondern Fall ein. Nimmt man nämlich an, dass β eine Grösse a des Systems (I) sei, so hat man $a \circ q = p$; somit ist $n \circ p = n \circ a \circ q$ und daher, wenn $m \circ q$ z. B. grösser als $n \circ p$ ist, $m \circ q > (n \circ a) \circ q$, also nach dem 2. Satze in Nr. 5 und den 4. in Nr. 4 $m > n \circ a$.

Dass diese Definition keinen Widerspruch mit den bisher angenommenen Eigenschaften des Grössensystems (I) herbeiführt, zeigen die Sätze 5) und 6) in Nr. 5. — Ferner müssen die formalen Bedingungen in I. 5 erfüllt sein. In der That, mögen α, β beliebige Grössen des Systems (II) sein, so folgt aus $\alpha \gtrless \beta$ stets $\beta \lessgtr \alpha$. Und ist $\alpha \geqq \beta$, $\beta > \gamma$, so ist wirklich $\alpha > \gamma$. Ist nämlich $\alpha = (m, n)$, $\beta = (p, q)$, $\gamma = (r, s)$, so hat man nach Voraussetzung

$$m \circ q \geqq n \circ p, \quad p \circ s > q \circ r,$$

also nach Satz IV. in Nr. 5

$$m \circ q \circ p \circ s > n \circ p \circ q \circ r$$

und, wenn $p \circ q$ beiderseits abgetrennt wird,

$$m \circ s > n \circ r \quad \text{d. i.} \quad \alpha > \gamma.$$

Satz VIII. „Unter diesen Umständen hat man neben

$$\alpha > \alpha' \quad \alpha \circ \beta > \alpha' \circ \beta.“$$

Ist

$$\alpha = (m, n) \quad \alpha' = (m', n') \quad \beta = (p, q),$$

so folgt

$$\alpha \circ \beta = (m \circ p,\, n \circ q) \quad \alpha' \circ \beta = (m' \circ p,\, n' \circ q)$$

und wegen

$$m \circ n' > m' \circ n \quad m \circ n' \circ p \circ q > m' \circ n \circ p \circ q$$

d. i.

$$\alpha \circ \beta > \alpha' \circ \beta.$$

Einen besonderen Fall des vorstehenden Satzes bildet die Beziehung: „Es ist $\alpha \circ \beta \gtrless \alpha$, je nachdem $\beta \gtrless \nu$ oder $\beta = (p, q)$ gesetzt, je nachdem $p \gtrless q$ ist.“ Denn es ist $\alpha \circ \beta \gtrless \alpha \circ \nu = \alpha$. Und wenn $\nu = (a, a)$ gesetzt wird, so hat man $\beta \gtrless \nu$, je nachdem $a \circ p \gtrless q \circ a$ d. i. $p \gtrless q$ ist.

Nunmehr tritt der Satz IV auf S. 44 in Wirksamkeit, so dass auch für das erweiterte Grössensystem die in demselben angeführten Ungleichungen gelten. Diese sind:

1) Ist $\alpha_1 \geqq \beta_1$, $\alpha_2 \geqq \beta_2 \cdots \alpha_n \geqq \beta_n$ und steht wenigstens in einer dieser Beziehungen das Zeichen $>$, so ist

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \alpha_n > \beta_1 \circ \beta_2 \circ \cdots \beta_n.$$

2) Neben $\alpha > \alpha'$ ist $\alpha \smile \beta > \alpha' \smile \beta$.

3) Neben $\beta < \beta'$ ist $\alpha \smile \beta > \alpha \smile \beta'$.

4) Neben $\alpha > \alpha'$ $\beta < \beta'$ ist $\alpha \smile \beta > \alpha' \smile \beta'$.

11. Analytische Schöpfung des Systems der rationalen Zahlen. — Durch Anwendung der in den vorstehenden Nummern entwickelten Theorie kann man das System der natürlichen Zahlen dergestalt erweitern, dass die vier Species mit einer einzigen Ausnahme stets ausführbar sind. Die Gesammtheit der natürlichen Zahlen und der neu zu schaffenden Grössen nennen wir das System der rationalen Zahlen. Die hierzu erforderlichen Definitionen und Beweise lassen sich auf doppelte Weise anordnen, je nachdem das System der natürlichen Zahlen zuerst in Bezug auf die Subtraction oder auf die Division erweitert wird. Der letztere Weg ist etwas bequemer, weil für ihn die Sätze in Nr. 7—10 vollkommen ausreichen.[1])

1) Hankel ist (a. a. O. § 10 und 11) der anderen Anordnung gefolgt. Um diese Darstellung zu erhalten, hat man die Theile I, III einer- und II, IV andererseits untereinander zu vertauschen d. h. man führt zuerst die relativen ganzen Zahlen ein, erklärt dann ihre Multiplication, stellt hierauf die relativen gebrochenen Zahlen auf und erklärt schliesslich ihre Addition. Bei Vergleichung der gebrochenen relativen Zahlen lässt sich jedoch die 4. Definition auf S. 55 nicht mehr anwenden, weil der Satz: „Ist $a > a'$, so ist $a \cdot b > a' \cdot b$“ für die relativen ganzen Zahlen nicht allgemein gilt (vgl. S. 67). Charakteristisch für diese Darstellung ist ferner, dass man zunächst Brüche von der Gestalt $(\pm a)/(\pm b)$ benutzen muss und sie erst am Schlusse der ganzen Untersuchung in die Form $\pm(a/b)$ bringen kann. Auch dieser Umstand wurde von Hankel nicht berührt.

Die Untersuchung zerfällt in vier Theile.

I. Aufstellung der absoluten gebrochenen Zahlen. Es seien nun die Grössen (I) $a, b, c \cdots$ die natürlichen Zahlen. Die Gleichung $x \cdot b = a$ hat nach II. 8 entweder eine einzige oder gar keine Lösung unter den natürlichen Zahlen, wie die Theorie in Nr. 7 verlangt.

1. Definition.[1]) „Der Zusammenstellung von je zwei natürlichen Zahlen a, b mit Rücksicht auf ihre Anordnung, ordnen wir ein neues Ding zu, das mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet wird und ein Bruch heisst.

2. Definition. „Es seien zwei dieser Dinge a/b, a'/b' einander gleich, wenn $a \cdot b' = a' \cdot b$." — Demnach ist $a/b = a'/1$, wenn $a = a'b$ ist. Sind die Brüche a/b und a'/b' einander gleich und ist a ein Vielfaches von b, etwa $a = bq$, so ist auch $a' = b'q$. Wir verstehen nun im Falle dass a durch b theilbar oder $b = 1$ ist, unter a/b den Quotienten $a : b$, also die natürliche Zahl q und nennen daher $a : b$ einen uneigentlichen Bruch. Ist a durch b nicht theilbar, so heisst der Bruch a/b ein eigentlicher.

3. Definition. „Der eigentliche Bruch a/b heisst grösser oder kleiner als die natürliche Zahl c, je nachdem a grösser oder kleiner als $b \cdot c$ ist, und zugleich die letztere kleiner oder grösser als der erstere. Von den neuen Grössen a/b, a'/b' heisst überhaupt die erste die grössere oder kleinere, je nachdem $a \cdot b' \gtrless a' \cdot b$." (Vgl. Nr. 10.)

Die eigentlichen Brüche a/b, welche im folgenden mit $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ bezeichnet werden, bilden im Verein mit den natürlichen Zahlen das System der absoluten rationalen Zahlen. Oefters werden übrigens $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ absolute rationale Zahlen im Allgemeinen bedeuten.

Im Bruche a/b heisst a der Zähler, b der Nenner. Falls $a < b$, also $a/b < 1$ ist, so heisst der Bruch echt. Falls $a > b$, also $a/b > 1$ ist, so heisst er unecht und zwar liegt er zwischen q und $q + 1$, wenn q den unvollständigen Quotienten $[a : b]$ bezeichnet, sodass $qb < a < (q + 1)\,b$ ist.

Der Bruch a/b ist gleich ma/mb. Ist m der grösste gemeinschaftliche Theiler von a', b' so dass $a' = ma$, $b' = mb$, worin a, b relativ prim sind, so hat man demnach $a'/b' = a/b$. Jeder Bruch, in welchem Dividend und Divisor einen von der Einheit verschiedenen Theiler gemein haben, ist gleich einem solchen, in welchem Dividend und Divisor relativ prim sind. Er heisst die reducirte Form desselben. Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner keinen Theiler gemein haben, heisst reducirt oder irreducibel.

„Zwei gleiche Brüche a/b, a'/b' haben die nämliche reducirte Form." Es sei m der grösste gemeinschaftliche Theiler

---

1) Nach J. Tannery, Leçons d'Arithmétique, Paris 1894, S. 148.

von $a\,b$, m' der von $a'\,b'$, so dass $a = mp$ $b = mq$, $a' = m'p'$ $b' = m'q'$ gesetzt werden kann, wobei $p\,q$ einer- und $p'\,q'$ andererseits relative Primzahlen sind. Im Falle dass $a\,b$ oder $a'\,b'$ relative Primzahlen sind, nehme man m oder m' gleich 1. Aus der Gleichung $ab' = a'b$ folgt nunmehr $pq' = p'q$. Hieraus ergiebt sich, da q relativ prim zu p ist, dass p' durch p theilbar, also $p' = np$ ist. Setzt man diesen Werth für p' in der letzten Gleichung ein, so findet man unmittelbar $q' = nq$. Allein da $p'q'$ relative Primzahlen sind, so muss $n = 1$ sein. Mithin ist $p' = p$, $q' = q$.

Zwei oder mehrere Brüche können stets solchen Brüchen gleichgesetzt werden, die denselben Nenner haben. Sind die gegebenen Brüche in reducirter Form $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ $\cdots$, so werden sie zunächst verwandelt in $\frac{mp}{mq}$, $\frac{m'p'}{m'q'}$ $\cdots$. Soll nun

$$mq = m'q' = \cdots = N$$

sein, so muss N ein gemeinsames Vielfache der Nenner q, q' $\cdots$ sein, was auch ausreicht.

Von zwei Brüchen mit gleichem Nenner ist derjenige grösser, welcher den grösseren Zähler hat; von zwei Brüchen mit gleichem Zähler ist derjenige grösser, welcher den kleineren Nenner hat.

Nunmehr setzen wir als

4. Definition fest die Multiplicationsregel für die Brüche

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}, \tag{1}$$

wobei der Bruch rechts durch jeden ihm gleichen ersetzt werden darf.

Nach diesen Vereinbarungen ergiebt sich zufolge des Satzes VII unmittelbar, dass gleiche Brüche mit gleichen multiplicirt gleiche Producte geben, dass die Multiplication der Brüche associativ und commutativ ist, und dass endlich ihre Division stets möglich und eindeutig ist. Bei der Annahme $b' = 1$ entnehmen wir aus (1), dass insbesondere

$$\frac{a}{b} \cdot a' = \frac{aa'}{b}$$

ist. Hiernach hat man

$$\frac{a}{b} \cdot b = \frac{ab}{b} = a.$$

Die Gleichung $\xi \cdot b = a$ hat demnach die Lösung $\xi = a/b$ und zwar zufolge des soeben Bemerkten nur diese Lösung, welche auch unverändert bleibt, wenn wir in der genannten Gleichung $a\,b$ bez. durch ac/c bd/d ersetzen. Wir dürfen daher allgemein

$$\frac{a}{b} = a : b$$

setzen, also auch den eigentlichen Bruch als den Quotienten: Zähler dividirt durch den Nenner, betrachten. — Der Quotient $\alpha : \beta$ zweier Brüche α, β wird auch in der Form α/β geschrieben.

Das auf S. 58 angeführte Ergebniss des Satzes VII berechtigt zur Anwendung des Satzes III_1 (S. 43) auf die Multiplication und Division der Brüche (vgl. Nr. 8). Der Satz VIII liefert hier den Satz: „Ist $\alpha > \alpha'$, so ist $\alpha\beta > \alpha'\beta$“ mit dem besonderen Falle: „Je nachdem der Bruch α grösser oder kleiner als 1 ist $\alpha\beta$ grösser oder kleiner als β.“ Der erstere von diesen beiden Sätzen gestattet die Verwerthung des Satzes IV für die Multiplication und Division der Brüche. Daher können alle Regeln, die uns bei der Multiplication und Division der natürlichen Zahlen in II. 6, 8 entgegengetreten sind (die beiden Schlussformeln in Nr. 8 selbstverständlich ausgenommen) für die Brüche beibehalten werden und zwar in dem Sinne, dass sie jetzt allgemeine Giltigkeit besitzen.

Modulus der Multiplication ist 1, also eine Grösse des ursprünglichen Systemes. a und $1/a$, a/b und b/a sind reciproke (inverse) Zahlen, ungleich im ersten Falle wenn a nicht 1; im zweiten, wenn a und b ungleich sind. — Mit einem Bruche wird dividirt, indem man mit dem reciproken Bruche multiplicirt.

12. II. Addition und Subtraction der absoluten rationalen Zahlen. Wie die Summe zweier Brüche mit demselben Nenner zu definiren ist, legt die vorletzte Formel in II. 8 nahe.

Satz. „Bringt man zwei Brüche α, β auf einen gemeinsamen Nenner: $\alpha = m/n$, $\beta = p/n$, so ist der Werth des Bruches $(m+p)/n$ von der Wahl des Nenners n unabhängig.“

Denn ist auch

$$\alpha = m'/n' \quad \beta = p'/n'$$

so hat man

$$mn' = m'n \quad pn' = p'n,$$

also

$$n'(m+p) = n(m'+p')$$

d. h.

$$(m'+p')/n' = (m+p)/n.$$

5. Definition. „Unter der Summe $\alpha + \beta$ verstehen wir den soeben erwähnten Bruch $(m+p)/n$.“ — Insbesondere ist die Summe aus der natürlichen Zahl q und dem eigentlichen Bruche r/b die gemischte Zahl

$$q + r/b = (qb + r)/b.$$

Diese Formel dient umgekehrt zur Verwandlung des unechten Bruches a/b in eine gemischte Zahl. Man setzt nämlich nach S. 24 $a = qb + r$ $(r < b)$.

Die Bezeichnung „Summe“ ist völlig gerechtfertigt. Man hat nämlich, wie auf S. 15, die nachstehenden Sätze.

1) Aus $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ folgt $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$. — Bringt man

nämlich α, α', β, β' auf einen gemeinsamen Nenner n, so ist $\alpha = \alpha' = m:n$, $\beta = \beta' = p:n$, folglich ist auch $\alpha' + \beta' = (m+p):n$.

2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, wie sofort sich ergiebt, wenn man die drei Brüche auf den gemeinsamen Nenner n bringt.

3) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

4) Aus $\alpha > \alpha'$ folgt $\alpha + \beta > \alpha' + \beta$. — Ist n ein gemeinsamer Nenner von α, α', β und $\alpha' = m' : n$, so ist $m > m'$. Also ist $m + p > m' + p$, somit $(m+p)/n > (m'+p)/n$.

5) $\alpha + \beta > \alpha$. — Denn es ist $m + p > m$, somit auch $(m+p)/n > m/n$.

Satz. „Die Gleichung $\beta + \xi = \alpha$ hat eine und nur eine Lösung für ξ wenn $\alpha > \beta$, keine, wenn $\alpha \overline{\overline{<}} \beta$."

Ist $\alpha > \beta$, so genügt es $\xi = \frac{m-p}{n}$ $(m > p)$ zu setzen. Die Eindeutigkeit der Differenz folgt unmittelbar aus Satz 4).

Nunmehr können wir nach Satz III. und IV. schliessen, dass die Regeln über Addition und Subtraction der natürlichen Zahlen, die wir in II. 3—5 kennen gelernt haben, unverändert für die absoluten rationalen Zahlen gelten, da die Bedingung, unter welcher die Differenz als möglich erscheint, formell dieselbe geblieben ist.

Noch zu erweisen sind die Regeln über die Multiplication und Division der Summen und Differenzen von rationalen Zahlen (vgl. II. 7 u. 8).

1) $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$. Nach dem Vorstehenden hat man

$$\alpha + \beta = (m+p)/n,$$

also wenn $\gamma = q/r$,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot \gamma = q\,(m+p)/nr &= (qm + qp)/nr \\ &= qm/nr + qp/nr.\end{aligned}$$

Aus diesem Satze folgen nach Satz VI. die a. a. O. aufgestellten Regeln über die Multiplication der Summen und der Satz

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}.$$

2) Ist $\alpha > \beta$, so ist $(\alpha - \beta)\,\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma$. Beweis wie bei der vorhergehenden Formel 1). Nun ergiebt sich zunächst, wie aus (9) auf S. 24 die Formel (10) folgt, die Formel

$$(\alpha > \beta,\ \gamma > \delta) \quad (\alpha - \beta)(\gamma - \delta) = \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\delta - \beta\gamma \qquad (2)$$

und nach Satz 5) auf S. 47 die weitere:

$$\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma} \quad (\alpha > \beta).$$

Satz. „Wenn $\alpha > \beta$ ist, so ist α entweder gleich dem Producte von β mit einer natürlichen Zahl g oder es lässt sich in einziger Weise auf die Form bringen $\alpha = g\beta + \varrho$, wo g wieder eine natürliche Zahl und der Rest $\varrho < \beta$ ist, so dass nun $g\beta < \alpha < (g+1)\beta$ ist." — Bringt man nämlich α, β auf einen gemeinsamen Nenner n, so dass $\alpha = m : n$, $\beta = p : n$, so ist $p < m$, somit ist nach II. 8 m entweder ein Vielfaches von p $(m = gp)$ oder $m = gp + r$, wo r eine natürliche Zahl $< p$. Im ersten Falle hat man $\alpha = g\beta$, im zweiten $\alpha = g\beta + r : n$, wo $r : n < \beta$ ist.

13. III. Einführung der Null und der negativen Zahlen. Die Gleichung $\beta + \xi = \alpha$ hat im Systeme der absoluten rationalen Zahlen entweder eine einzige oder gar keine Lösung; demnach können die Definitionen von Nr. 7 und 10 nochmals benutzt werden.

6. Definition. „Je zweien Brüchen α, β wird mit Rücksicht auf ihre Anordnung ein neues Ding zugeordnet, das für einen Augenblick mit (α, β) bezeichnet wird."

7. Definition. „Es seien zwei dieser Dinge (α, β) (α', β') einander gleich, wenn $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$ ist." Wenn $\alpha > \beta$ ist, so sei (α, β) gleichbedeutend mit der Differenz $\alpha - \beta$. Demnach ist $(\alpha + \gamma, \gamma) = \alpha$.

8. Definition. „Die Addition der neuen Zahlen wird durch die Formel

$$(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta') \tag{3}$$

erklärt, wobei das Paar rechts durch jedes ihm gleiche ersetzt werden darf."

Nach diesen Vereinbarungen ergiebt sich zufolge des Satzes VII unmittelbar, dass gleiche Paare zu gleichen addirt gleiche Summen geben, dass die Addition dieser Paare associativ und commutativ ist, und endlich, dass ihre Subtraction stets möglich und eindeutig ist. Aus der Gleichung (3) folgt insbesondere, dass

$$(\alpha, \beta) + (\beta + \varepsilon, \varepsilon) = (\alpha + [\beta + \varepsilon],\ \beta + \varepsilon), \text{ somit } (\alpha, \beta) + \beta = \alpha$$

ist. Demnach dürfen wir für (α, β) in jedem Falle $\alpha - \beta$ schreiben:

$$(\alpha, \beta) = \alpha - \beta. \tag{4}$$

Die Bezeichnungsweise (α, β) lassen wir nun fallen und gebrauchen dafür die lytische Form $\alpha - \beta$. Dann lautet die 7. Definition so:

„Es sind die angezeigten Differenzen $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$ dann und nur dann einander gleich, wenn $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$ ist." Demnach ist $\alpha - \alpha = \beta - \beta$. Diese neue Zahl heisst Null und erhält das Zeichen 0. Ist $\alpha < \beta$, so ist $\alpha - \beta$ ebenfalls eine neue Zahl. Wenn $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$ und $\alpha < \beta$ ist, so ist $\beta' - \alpha' = \beta - \alpha$. Somit entspricht jeder absoluten Zahl γ eine und nur eine neue Zahl.

Hierzu fügen wir nun im Anschlusse an die 4. Definition in Nr. 10 die

9. Definition: „Die neue Zahl $\alpha - \beta$ heisst kleiner als eine jede absolute Zahl γ und letztere grösser als die erstere (wegen

$\beta + \gamma > \alpha$). Von den ungleichen neuen Zahlen $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$ heisst die erste grösser oder kleiner als die zweite, je nachdem $\alpha + \beta'$ grösser oder kleiner als $\alpha' + \beta$ ist. Insbesondere ist $\alpha - \beta$, wenn $\alpha < \beta$ ist, kleiner als 0."

Die 8. Definition geht jetzt in die Formel

$$(\alpha - \beta) + (\alpha' - \beta') = (\alpha + \alpha') - (\beta + \beta') \tag{5}$$

über. Insbesondere ist

$$(\alpha - \beta) + \gamma = \gamma + (\alpha - \beta) = (\alpha + \gamma) - \beta. \tag{6}$$

Nach diesen Annahmen ergiebt sich zufolge der Sätze VII. und VIII. sofort, dass auch für die neuen Zahlen die Sätze 1)—4) in Nr. 12 gelten, sodass ihre Addition ebenfalls associativ und commutativ ist, und ferner dass die Subtraction in jedem Falle möglich und eindeutig ist. Hiernach sind wir zur Anwendung der Sätze III_1 und IV auf die Addition und Subtraction der neuen Zahlen berechtigt (vgl. Nr. 8). Daher können alle Regeln, die uns bei der Addition und Subtraction der natürlichen Zahlen in II. 4 und 5 entgegengetreten sind, für die neuen Zahlen beibehalten werden und zwar in dem Sinne, dass sie jetzt allgemeine Giltigkeit besitzen.

Die Null ist der Modulus oder die indifferente Zahl für die Addition der neuen Zahlen.

An Stelle des Satzes 5) in Nr. 12 tritt jetzt der folgende: „Es ist $A + B \gtrless A$, je nachdem $B \gtrless 0$ ist." Er ist ein besonderer Fall des neuen Satzes 4), wonach neben $B \gtrless B'$ entsprechend $A + B \gtrless A + B'$ ist.

Wenn $\alpha < \beta$ ist, so dass $\beta - \alpha$ eine absolute Zahl δ ist, so hat man nach (6) $(\alpha - \beta) + \delta = (\alpha + \delta) - \beta = \beta - \beta = 0$, also $\alpha - \beta = 0 - \delta$. Die neue Zahl $\alpha - \beta$ ist somit die inverse Zahl zur absoluten Zahl $\delta = \beta - \alpha$. Die Differenz $0 - \delta$ stellt, wenn man δ irgend eine absolute Zahl sein lässt, alle neuen Zahlen ausser der Null dar.

Es ist üblich, 0 am Beginne eines jeden Aggregates zu unterdrücken. So schreibt man anstatt $0 - \delta$ bloss $-\delta$. Da mithin $(-\delta) + \delta = 0$ ist, so nennt man die Zahlen δ und $-\delta$ einander entgegengesetzt, und zwar die erstere positiv, die letztere negativ. Um den Gegensatz zwischen beiden hervorzuheben, schreibt man anstatt δ $+\delta$ d. i. $0 + \delta$. Jede positive Zahl ist grösser, jede negative Zahl ist kleiner als 0.

Das System der rationalen Zahlen besteht ausser der 0 aus zwei Reihen von Zahlen, den positiven und den negativen, von welchen eine jede zu einer der ersteren entgegengesetzt ist. Die natürlichen Zahlen und die ihnen entgegengesetzten bilden mit der 0 das System der ganzen Zahlen.

An einer rationalen Zahl $\pm\delta$ kommen in Betracht der absolute Betrag δ und das Vorzeichen (oder Zeichen): + oder —, welche Zeichen man jedoch nicht mit den Verknüpfungszeichen + und — verwechseln darf. Zur Vermeidung von Unterscheidungen legt man auch der Null einen absoluten Betrag bei, nämlich 0 und nennt ihn kleiner als jeden anderen. — Ist $m:n$ die reducirte Form von δ, so giebt $-\frac{m}{n}$ den Werth der negativen Zahl $-\delta$ an. — Bedeutet A eine beliebige von 0 verschiedene rationale Zahl, so wird auch unter $-A$ die Differenz $0-A$ verstanden. Man hat $-(-A)=A$.

$|A|$ bedeutet den absoluten Betrag der relativen rationalen Zahl A.[1])

Die Formeln (5), (6) lassen sich nun so umgestalten. Setzt man in der letzteren $\beta=\alpha+\delta$, so geht sie über in:

$$(-\delta)+\gamma=\gamma+(-\delta)=(\alpha+\gamma)-(\alpha+\delta).$$

Die rechte Seite liefert, falls $\gamma>\delta$ ist, die positive Zahl $\gamma-\delta$, falls aber $\gamma<\delta$ ist, $\gamma-\delta$ d. i. die negative Zahl $-(\delta-\gamma)$. Wir gelangen somit zur Regel: Um die Summe zweier rationalen Zahlen von verschiedenem Zeichen und absolutem Betrage zu bilden, subtrahire man den Betrag der kleineren von dem der grösseren und gebe der Differenz das Zeichen der Zahl vom grösseren Betrage. Setzt man in (5) $\beta=\alpha+\delta$, $\beta'=\alpha'+\delta'$, so erhalten wir die Formel

$$(-\delta)+(-\delta')=(\alpha+\alpha')-(\alpha+\alpha'+\delta+\delta')=-(\delta+\delta').$$

Mehrmalige Anwendung derselben führt zu der Regel: Die Summe von zwei oder mehreren negativen Zahlen wird erhalten, indem man ihre absoluten Beträge addirt und dieser Summe das Zeichen — vorsetzt.

Endlich hat man den Satz (vgl. Nr. 9): „Die Differenz zweier rationaler Zahlen wird gebildet, indem man zum Minuend die dem Subtrahend entgegengesetzte Zahl addirt."

Wie schon oben bemerkt ist, gelten für die rationalen Zahlen die Subtractionsungleichungen 6)—8) auf S. 19 allgemein. Es ist mithin

1) wenn $A>A'$ ist, $A-B>A'-B$;

2) wenn $B<B'$ ist, $A-B>A-B'$;

3) wenn $A>A'$, $B<B'$ ist, $A-B>A'-B'$.

---

1) Die Bezeichnung $|A|$ wurde von Weierstrass eingeführt (vgl. Werke I. S. 67). Sie erscheint bequemer als die Cauchy'sche: mod A und zwar nicht allein, weil sie kürzer ist, sondern auch weil die Silbe mod seit Gauss schon in der Zahlentheorie heimisch ist. Es ist doch deutlicher zu schreiben $|x-a|-b\equiv 0 \pmod p$, als $\operatorname{mod}(x-a)-b\equiv 0 \pmod p$.

Der Kürze wegen sagen wir anstatt: „absoluter Betrag von A" oft bloss „Betrag von A".

Aus der ersten ergiebt sich, dass die Differenz $A - B$ positiv oder negativ ist, je nachdem A grösser oder kleiner als B ist. In der That hat man z. B. wenn $A > B$ ist, $A - B > B - B = 0$. Umgekehrt: Je nachdem $A - B$ positiv oder negativ ist, ist A grösser oder kleiner als B. Entweder nach II. 10 oder unmittelbar daraus, dass wenn z.B. $A - B > 0$ $(A - B) + B > 0 + B = B$ ist. Dieser Satz dient oft zur Entscheidung der Frage, welche von zwei ungleichen Zahlen A, B die grössere ist.

Hieran schliessen wir zwei wichtige Sätze über den absoluten Betrag einer Summe.

1. Satz. Der absolute Betrag der Summe von rationalen Zahlen kann nicht grösser sein als die Summe der absoluten Beträge derselben.

Der Satz gilt allgemein, wenn er für ein Binom richtig ist. Dass aber $|A + B| \leqq |A| + |B|$, folgt aus den vorstehenden Sätzen über die Summe zweier rationalen Zahlen unmittelbar.

2. Satz. Ist $|A| \geqq |B|$, so ist der absolute Betrag von $A + B$ nicht kleiner als $|A| - |B|$.

Beweis. Da $A = (A + B) + (-B)$ ist, so hat man nach dem 1. Satze $|A| \leqq |A + B| + |B|$, somit $|A| - |B| \leqq |A + B|$.

14. IV. a) Multiplication der rationalen Zahlen. Um an den bisherigen Formeln nach Möglichkeit festzuhalten, müssen wir die Regeln in Nr. 12 über die Multiplication von Differenzen zur Definition der neuen Producte verwenden.

10. Definition. „Bedeuten $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$ Null oder negative Zahlen, so sei

$$(\alpha - \beta) \cdot \gamma = \gamma \cdot (\alpha - \beta) = \alpha\gamma - \beta\gamma \tag{1}$$

$$(\alpha - \beta) \cdot (\alpha' - \beta') = (\alpha\alpha' + \beta\beta') - (\alpha\beta' + \beta\alpha'), \tag{2}$$

worin die rechten Seiten durch jede ihnen bez. gleiche Zahl ersetzt werden können."

Diese Verknüpfung genügt in der That den vier Hauptsätzen 1)—4) über die gewöhnliche Multiplication (vgl. S. 22) und verdient daher mit Recht den Namen „Multiplication". $A B \Gamma$ seien im Folgenden beliebige rationale Zahlen.

1) „Aus $A = A'$, $B = B'$ folgt $A \cdot B = A' \cdot B'$." (3)

Wir haben neben (1)

$$(\alpha' - \beta') \cdot \gamma' = \gamma' \cdot (\alpha' - \beta') = \alpha'\gamma' - \beta'\gamma'. \tag{4}$$

Ist nun $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$, so muss $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$ sein. Wenn dann noch $\gamma = \gamma'$ ist, so ist $\alpha\gamma + \beta'\gamma = \alpha'\gamma' + \beta\gamma'$, aber auch $\beta\gamma = \beta\gamma'$, $\beta'\gamma = \beta'\gamma'$. Demnach ist endlich $\alpha\gamma + \beta'\gamma' = \alpha'\gamma' + \beta\gamma$ d. i. nach der 7. Definition $\alpha\gamma - \beta\gamma = \alpha'\gamma' - \beta'\gamma'$.

Um den Satz 1) auch für die Verknüpfung (2) zu zeigen, zerlegen wir ihn in die beiden Sätze: „Ist $A = A'$, so ist $AB = A'B$ und ist $B = B'$, so ist $A'B = A'B'$." Wir brauchen dann nur den ersteren zu zeigen, da der Beweis des letzteren dem des ersteren völlig gleicht. Es sei also

$A = \alpha - \beta$ $(\alpha \leqq \beta)$, $A' = \alpha' - \beta'$ ($\alpha' \leqq \beta'$ und dabei $A = A'$, sodass

$$\alpha + \beta' = \alpha' + \beta \tag{5}$$

ist, endlich $B = \gamma - \delta$ $(\gamma \leqq \delta)$. Wir haben dann nach (2)

$$A \cdot B = (\alpha\gamma + \beta\delta) - (\alpha\delta + \beta\gamma), \quad A' \cdot B = (\alpha'\gamma + \beta'\delta) - (\alpha'\delta + \beta'\gamma).$$

Nun ist

$$\alpha\gamma + \beta\delta + \alpha'\delta + \beta'\gamma = (\alpha + \beta')\gamma + (\alpha' + \beta)\delta$$
$$\alpha'\gamma + \beta'\delta + \alpha\delta + \beta\gamma = (\alpha' + \beta)\gamma + (\alpha + \beta')\delta.$$

Vermöge der Beziehung (5) sind die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen einander gleich; daher ist in der That $A \cdot B = A' \cdot B$.

Nachdem der Satz 1) erwiesen ist, können wir aus den Formeln (1) und (2) die Producte der verschiedenen Arten von rationalen Zahlen ableiten. Für $\alpha = \beta$ folgt aus (1) $0 \cdot \gamma = \gamma \cdot 0 = 0$, aus (2) $0 \cdot (\alpha' - \beta') = 0$; endlich folgt für $\alpha' = \beta'$ aus (2) $(\alpha - \beta) \cdot 0 = 0$. Es ist daher, was A auch für eine rationale Zahl sein mag

$$0 \cdot A = A \cdot 0 = 0. \tag{6}$$

Setzen wir in (1) $\beta - \alpha = \delta$ und bemerken, dass

$$\alpha\gamma - \beta\gamma = -[\beta\gamma - \alpha\gamma] = -\delta\gamma \text{ ist,}$$

so erhalten wir als zweite Multiplicationsregel:

$$(-\delta) \cdot \gamma = \gamma \cdot (-\delta) = -\delta\gamma. \tag{7}$$

Die rechte Seite der Formel (2) ist, da $\alpha \leqq \beta$, $\alpha' \leqq \beta'$ sein soll, eine positive Zahl, was man leicht daraus erkennt, dass sie nach der Formel (2) auf S. 60 mit dem Producte $(\beta - \alpha)(\beta' - \alpha')$ übereinstimmt. Setzt man $\beta - \alpha = \delta$, $\beta' - \alpha' = \delta'$ so geht die Formel (2) über in

$$(-\delta) \cdot (-\delta') = \delta\delta' \text{ (dritte Regel).} \tag{8}$$

Die Formeln (7) und (8) gestatten die Verallgemeinerung zur algebraischen Zeichenregel: „Gleiche Zeichen geben bei der Multiplication $+$, ungleiche $-$" d. h. es ist

$$(-A) \cdot B = B \cdot (-A) = -A \cdot B, \quad (-A) \cdot (-B) = A \cdot B.$$

Man erkennt die Richtigkeit dieser Formeln in jedem der vier bezüglich A, B möglichen Fälle [$++$, $+-$, $-+$, $--$] unmittelbar.

Aus den Formeln (7) und (8) leitet man endlich die Regel ab: Der absolute Betrag des Productes zweier oder mehrerer rationaler Zahlen ist gleich dem Producte der absoluten Beträge der Factoren.

2) „Die beiden Seiten des distributiven Gesetzes sind erfüllt d. h. es bestehen die Formeln:

$$(A + B) \cdot \Gamma = A \cdot \Gamma + B \cdot \Gamma \tag{9}$$

$$A \cdot (B + \Gamma) = A \cdot B + A \cdot \Gamma.\text{“} \tag{10}$$

Dass sie richtig sind, wenn die Null unter den Zahlen $AB\Gamma$ vorkommt, ist leicht einzusehen. Auch dann, wenn AB gleichbezeichnet sind, springt die Giltigkeit der ersteren Formel in die Augen. $A \cdot \Gamma$ und $B \cdot \Gamma$ sind nunmehr unter einander und mit $(A + B) \cdot \Gamma$ gleichbezeichnet, daher haben beide Seiten von (9) das gleiche Zeichen. Zufolge der Formel 1) auf S. 60 sind auch ihre Beträge gleich. Haben AB verschiedenes Zeichen, so darf man annehmen, dass A positiv und B negativ ist: $A = \alpha$, $B = -\beta$. Dann hat man z. B. neben $\Gamma = \gamma$

$$(A + B) \cdot \Gamma = (\alpha - \beta) \cdot \gamma,\ 0,\ -[\gamma(\beta - \alpha)]$$

je nachdem α grösser, gleich oder kleiner als β ist. Den nämlichen Werth hat in jedem dieser Fälle die Summe

$$A \cdot \Gamma + B \cdot \Gamma = \alpha \cdot \gamma + [-\beta \cdot \gamma].$$

Auf dieselbe Weise wird die Formel (10) gezeigt.

3) Das associative Gesetz ist erfüllt d. h. es ist

$$(A \cdot B) \cdot \Gamma = A \cdot (B \cdot \Gamma).$$

Kommt unter den Zahlen $AB\Gamma$ die Null vor, so ist sowohl $(A \cdot B) \cdot \Gamma$ als auch $A \cdot (B \cdot \Gamma)$ Null, beide Ausdrücke sind somit einander gleich. Wenn keine von ihnen verschwindet, so sind je nach dem Zeichen der einzelnen Zahlen acht Fälle zu unterscheiden. Dass $(A \cdot B) \cdot \Gamma$ und $A \cdot (B \cdot \Gamma)$ gleiche absolute Beträge besitzen, leuchtet zufolge der obigen Regel über den absoluten Betrag des Productes von rationalen Zahlen und des associativen Gesetzes bei der Multiplication der absoluten Zahlen (Nr. 11) unmittelbar ein. Dass die genannten Ausdrücke auch gleichbezeichnet sind, wird man aus der nachstehenden Zusammenstellung ihrer Vorzeichen erkennen.

$$\begin{array}{l|l}
(+\cdot+)\cdot+ = +\cdot(+\cdot+) = + & (+\cdot+)\cdot- = +\cdot(+\cdot-) = - \\
(+\cdot-)\cdot+ = +\cdot(-\cdot+) = - & (+\cdot-)\cdot- = +\cdot(-\cdot-) = + \\
(-\cdot+)\cdot+ = -\cdot(+\cdot+) = - & (-\cdot+)\cdot- = -\cdot(+\cdot-) = + \\
(-\cdot-)\cdot+ = -\cdot(-\cdot+) = + & (-\cdot-)\cdot- = -\cdot(-\cdot-) = -.
\end{array}$$

4) $A \cdot B = B \cdot A$. — Durch die Erklärung (1) ist dieses Gesetz ausdrücklich angenommen; in der Formel (2) bleibt die rechte Seite ungeändert, wenn man α und α' einer-, β und β' andererseits mit einander vertauscht.

An Stelle des Satzes 5) a. a. O. tritt hier der folgende:

5) „Ist $A > A'$ und $B > 0$, so ist $AB > A'B$. Ist aber $B < 0$, so hat man $AB < A'B$.“

Der Satz folgt daraus, dass $AB - A'B = (A - A')\,B$ positiv oder negativ ist, je nachdem B positiv oder negativ ist (vgl. S. 65). Man darf also die Glieder der Ungleichung $A > A'$ nur mit einer positiven Zahl multipliciren, wenn das Zeichen $>$ noch weiter gelten soll.

Aus den obigen Sätzen 1)—4) folgt vermöge der Sätze I, II in Nr. 2 und des Satzes VI in Nr. 6, dass für die Multiplication der relativen rationalen Zahlen das distributive, associative und commutative Gesetz allgemeine Giltigkeit besitzen und dass ausserdem die Formeln (9) und (10) in II. 7 hier bedingungslos bestehen. Die erstere erscheint hier als besonderer Fall der Formel (9), indem

$$(A - B) \cdot \Gamma = (A + (-B)) \cdot \Gamma = A\Gamma + (-B)\Gamma = A\Gamma + (-B\Gamma)$$
$$= A\Gamma - B\Gamma$$

ist.

Ueber eine weitere Ungleichung s. Uebungen auf S. 97 Nr. 3.

15. IV. b) Division der rationalen Zahlen.

„Die Gleichung

$$X \cdot B = B \cdot X = A \tag{11}$$

hat, wenn B nicht 0 ist, eine und nur eine Auflösung $X = A : B$.“ — Ist A nicht 0, so sind mit Rücksicht auf das Zeichen von A, B vier Fälle möglich, in deren jedem der Satz unmittelbar sich ergiebt. Sind z. B. A, B beide negativ

$$A = -\gamma, \quad B = -\delta,$$

so muss X positiv sein: $X = \xi$ und weiter $\xi\delta = \gamma$ sein. Demnach muss $X = \frac{\gamma}{\delta}$ sein, welche Zahl in der That der vorgelegten Gleichung genügt.[1]) — So findet man ferner

$$(-\gamma) : \delta = \gamma : (-\delta) = -\frac{\gamma}{\delta}.$$

Ist in (11) $A = 0$ und $B \gtrless 0$, so muss $X = 0$ sein. Denn wäre X nicht Null, so kann zufolge der Formeln (7) und (8) auch das Product $X \cdot B$ nicht Null sein. Es besteht also der wichtige Satz: Ist das Product zweier rationalen Zahlen Null, so muss mindestens einer der Factoren gleich Null sein.

Wenn in (11) $A = B = 0$, so kann X jede beliebige Zahl sein nach (6). Der Quotient $0 : 0$ ist vieldeutig und daher unbrauchbar.

---

1) Die Eindeutigkeit des Quotienten folgt stets auch aus dem 5. Satze in Nr. 14.

Die Gleichung $X \cdot 0 = A$, wo $A \gtrless 0$, hat keine Lösung unter den rationalen Zahlen, denn was X auch für eine rationale Zahl sein mag, so ist nach (6) $X \cdot 0 = 0$. Man könnte nun meinen, dass das System der rationalen Zahlen noch einer Erweiterung fähig sei. Wir greifen, um eine solche womöglich zu erlangen, noch einmal zum Hilfsmittel der Paarung und zwar wenden wir es nunmehr auf die Gesammtheit der rationalen Zahlen in ähnlicher Weise an, wie in Nr. 11 auf die natürlichen Zahlen. Die Brüche A/B mit von Null verschiedenem Nenner lassen wir mit dem obigen Quotienten $A : B$ zusammenfallen; es kommen demnach als neu nur die Brüche mit dem Nenner 0 hinzu. Sind B und B' von Null verschieden, so besteht die Gleichung $A/B = A'/B'$ dann und nur dann, wenn $A \cdot B' = A' \cdot B$ ist. Um diesen Satz beizubehalten, erklären wir, dass zwei neue Brüche A/B, A'/B' dann und nur dann einander gleich sein sollen, wenn $A \cdot B' = A' \cdot B$ ist. Da nun für irgend zwei rationale Zahlen A, A' $A \cdot 0 = A' \cdot 0$, nämlich gleich Null ist, so haben wir je zwei Brüche $A/0$ und $A'/0$ als gleich anzusehen, den Bruch $0/0$ eingeschlossen. Wir sind also in Wirklichkeit nur zu einem neuen Bruch gelangt, den wir mit ∞ bezeichnen wollen. Entsprechend der für die Brüche mit nicht-verschwindenden Nennern geltenden Formel

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{A'}{B} = \frac{AA'}{BB}$$

wollen wir auch als Product des neuen Bruches $A/0$ mit 0 d. i. $0/1$ den Bruch $A \cdot 0/0 \cdot 1$ d. i. $0/0$ erklären. Wir haben also die Formel $\infty \cdot 0 = \infty$. Unsern Zweck, der Gleichung $X \cdot 0 = A$ eine Lösung zu verschaffen, haben wir jedoch nicht erreicht. Hätten wir von vornherein den Bruch $0/0$ weggelassen, so wäre das Product $(A/0) \cdot (0/1)$ gar ohne Sinn; also der genannte Zweck ebenfalls nicht verwirklicht. Wir sehen daher von der Schöpfung der neuen Zahl ∞ ab und erklären die Division durch die Null als unmöglich.

Zufolge der Sätze III_1. und VI. gelten nunmehr auch für die rationalen Zahlen die schon in Nr. 11 und 12 erwähnten Regeln über die Multiplication und Division, abgerechnet jedoch die Ungleichungen, und zwar allgemein mit der einzigen Beschränkung, dass kein Divisor Null sein darf.

Hinsichtlich der Ungleichungen beschränken wir uns auf den Satz: „Ist $A > A'$ und B eine positive Zahl, so ist $A : B > A' : B$; ist aber B eine negative Zahl, so ist $A : B < A' : B$.“ Man kann also die Glieder einer Ungleichung zwischen rationalen Zahlen nur durch eine positive Zahl dividiren, wenn man das zwischen denselben befindliche Zeichen erhalten will. — Der Satz folgt daraus, dass der Quotient $(A - A') : B$ mit B im Zeichen übereinstimmt.

Satz. „Ist A eine beliebige rationale, β irgend eine positive Zahl, so ist A entweder das Product von β mit einer ganzen Zahl oder es lässt sich A in einziger Weise auf die Form bringen $A = G \cdot \beta + \varrho$, worin G eine ganze und ϱ eine positive Zahl kleiner als β bedeutet; demnach liegt A zwischen $G\beta$ und $(G+1)\beta$. Wenn ϱ von $\frac{1}{2}$ verschieden ist, so hat man in einziger Weise auch $A = G' \cdot \beta + P$, unter G' eine ganze, unter P eine rationale Zahl zwischen $-\frac{1}{2}\beta$ und $\frac{1}{2}\beta$ verstanden." — Für ein positives A ist der erste Theil des Satzes schon auf S. 60 erwähnt. Wenn $A < 0$ und $|A| : \beta$ keine ganze Zahl ist, so hat man $A : \beta = -m : n = -\left(g + \frac{r}{n}\right)$, wo $1 \leqq r < n$, also $A = (-g-1)\beta + \varrho$, sodass $0 < \varrho < \beta$. — Ist $\varrho > \frac{1}{2}\beta$, so setzt man die erstere Form in $A = (-g)\beta + (\varrho - \beta)$ um.

Es ist nun ein System von Zahlen aufgestellt, in welchem die vier Species mit alleiniger Ausnahme der Division durch Null stets ausführbar sind; sonst gelten, abgesehen von den Ungleichungen der Multiplication und Division, alle Regeln und Formeln ohne irgend eine Einschränkung. Aus diesem Grunde kann man die rationalen Zahlen auch algebraische nennen; denn erst jetzt ist das Rechnen mit Buchstaben, die nicht eine bestimmte darunter bedeuten, möglich geworden. Eine Ausnahme bildet nur der Divisor, denn er ist als von Null verschieden zu denken.

Sowie das System der rationalen Zahlen hier abgeleitet worden ist, besteht es aus zwei verschiedenartigen Theilen. Der eine, die natürlichen Zahlen, hat nach dem II. Abschnitte eine reale Bedeutung; der andere existirt nur auf dem Papiere. Die Zahl $\frac{2}{3}$ ist nichts anderes als diese Zeichengruppe, die Zahl 0 nichts anderes, als eine der Zeichengruppen $1-1$, $2-2$ $\cdots$ u. s. f.

16. Wenn man bei Ertheilung der Prädicate grösser oder kleiner sich ausschliesslich an die Bedingungen 1)—4) in I. 5 halten würde, so könnten dieselben den rationalen Zahlen noch in anderer Weise verliehen werden, als es in Nr. 13 geschehen ist. Wir dürfen dann auch festsetzen: „Unter je zwei rationalen Zahlen von verschiedenem absoluten Betrage heisse diejenige grösser, welcher der grössere absolute Betrag zukommt. Und von je zwei entgegengesetzten Zahlen sei die positive grösser. Endlich heisse jede von 0 verschiedene Zahl grösser als 0." Wäre nämlich nach dieser Annahme $A > B$ und $B > C$, so müsste $|A| \geqq |B|$, $|B| \geqq |C|$ sein, woraus man aber, da es nur zwei ungleiche Zahlen vom nämlichen Betrage giebt, schliessen müsste, dass $|A| > |C|$, folglich in der That $A > C$ ist. — Aber unter dieser Voraussetzung würde der Satz: „Ist $A > A'$, so ist $A + B > A' + B$" nicht mehr allgemein gelten. (Es wäre z. B. $-7 > 6$, aber $-7 + 5 < 6 + 5$.) Daher kann die neue Ansicht nicht zugelassen werden.

17. Nachdem die Theorie der rationalen Zahlen vollendet ist, erhebt sich sofort eine unabsehbare Menge von Aufgaben, welche durch keine von ihnen gelöst werden. In der Regel wird es nämlich nicht möglich sein, eine rationale Zahl X zu bestimmen, welche die Gleichung

$$A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots + A_{m-1} X + A_m = 0 \tag{1}$$

erfüllt, worin $A_0, A_1 \cdots A_m$ ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler und X^r wie in II. 9 das Product von r gleichen Factoren X bedeutet. Schon die reine Gleichung $X^m = \alpha$, worin α, sowie im Folgenden $\beta, \gamma \cdots$, eine positive rationale Zahl ist, hat keine rationale Auflösung, wenn α nicht die m^{te} Potenz einer solchen Zahl ist. Sind nämlich in reducirter Form $\alpha = p : q$ und $X = x : y$, so hat man $qx^m = py^m$, also muss, da x^m, y^m relative Primzahlen sind (II. 12), q ein Vielfaches von y^m, $q = ky^m$, und somit $p = kx^m$, also, da p, q relative Primzahlen sind, $k = 1$ sein. Somit ergiebt sich $p = x^m$, $q = y^m$. In dem besonderen Falle, dass α eine natürliche Zahl p ist, findet man $q = 1$, $p = kx^m$, daher $1 = ky^m$, somit $k = y = 1$. Also muss $p = x^m$ d. i. die m^{te} Potenz einer natürlichen Zahl sein.

Man wird versuchen, neue Zahlen einzuführen, welche die noch ungelösten Gleichungen befriedigen und mit welchen zugleich so gerechnet werden kann wie mit den rationalen.

Zunächst nimmt man an, es gebe eine und nur eine Zahl, die absolute Quadratwurzel $\sqrt{\alpha}$[1]), welche die Gleichung $X^2 = \alpha$ im Falle dass α nicht das Quadrat einer rationalen Zahl ist, erfüllt; Quadratwurzeln aus gleichen rationalen Zahlen seien einander gleich und es sei $\sqrt{\alpha} \gtreqless \gamma$, je nachdem $\alpha \gtreqless \gamma^2$ und $\sqrt{\alpha} \gtreqless \sqrt{\beta}$, je nachdem $\alpha \gtreqless \beta$. Hierauf sind die vier Species für die neuen Zahlen aufzustellen und zwar ist zuerst die Multiplication zu erklären, was durch die Formeln

$$\sqrt{\alpha} \cdot \gamma = \gamma \cdot \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha\gamma^2}, \quad \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$$

geschieht. Um zur Addition zu gelangen, müssen wir die Summe

$$\gamma + \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha} + \gamma$$

als eine neue Zahl einführen, desgleichen die Summe

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha},$$

abgerechnet jedoch die Summe $\varkappa\sqrt{\varrho} + \lambda\sqrt{\varrho}$, welche durch $(\varkappa + \lambda)\sqrt{\varrho}$ erklärt wird. Es sei $\sqrt{\alpha} + \gamma = \sqrt{\alpha'} + \gamma'$ dann und nur dann, wenn $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$; $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha'} + \sqrt{\beta'}$ dann und nur dann, wenn $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ (natürlich den Fall dass $\alpha : \beta$ und $\alpha' : \beta'$ Quadrate von rationalen Zahlen sind, ausgenommen). Die weitere Vergleichung dieser neuen Zahlen unter einander und mit den absoluten rationalen Zahlen und Quadratwurzeln erheischt die nachstehenden Erklärungen.

1) Die Quadratwurzeln sind im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, stets als irrational anzusehen.

1) Vergleichung einer absoluten rationalen Zahl α mit einer Zahl von der Form $\beta + \sqrt{\gamma}$. „Ist $\alpha \leqq \beta$ oder $\alpha < \sqrt{\gamma}$, so heisst α kleiner als $\beta + \sqrt{\gamma}$. Ist aber α grösser als β und $\sqrt{\gamma}$, so heisst α kleiner oder grösser als $\beta + \sqrt{\gamma}$, je nachdem $\alpha - \beta$ kleiner oder grösser als $\sqrt{\gamma}$ ist."

2) Vergleichung einer Quadratwurzel $\sqrt{\alpha}$ mit einer Zahl von der Form $\beta + \sqrt{\gamma}$. „Ist $\sqrt{\alpha} < \beta$ oder $\sqrt{\alpha} \leqq \sqrt{\gamma}$, so heisst $\sqrt{\alpha}$ kleiner als $\beta + \sqrt{\gamma}$. Ist aber $\sqrt{\alpha}$ grösser als β und $\sqrt{\gamma}$, so heisst $\sqrt{\alpha}$ kleiner oder grösser als $\beta + \sqrt{\gamma}$, je nachdem $(\alpha - \gamma + \beta^2)^2$ kleiner oder grösser als $4\alpha\beta^2$ ist."[1]) — Der zweite Theil dieser und der nachstehenden Erklärungen wird auf folgende Weise erlangt. Stellen wir uns unter $\sqrt{\alpha}$ und $\sqrt{\gamma}$ rationale Zahlen vor, so ist

$$\sqrt{\alpha} \lesseqgtr \beta + \sqrt{\gamma},$$

worin $\alpha > \beta^2$ sein soll, je nachdem

$$\sqrt{\alpha} - \beta \lesseqgtr \sqrt{\gamma}, \text{ also je nachdem } \left(\sqrt{\alpha} - \beta\right)^2 \lesseqgtr \gamma \text{ d. i.}$$

$$\alpha - \gamma + \beta^2 \lesseqgtr 2\beta\sqrt{\alpha}$$

ist. Jede von den hier vereinigten Ungleichungen wird stattfinden, wenn entsprechend

$$(\alpha - \gamma + \beta^2)^2 \lesseqgtr 4\alpha\beta^2$$

ist. Diese Bedingungen haben auch einen Sinn, wenn α und γ nicht Quadrate von rationalen Zahlen sind; wir können sie also auch für diesen Fall festhalten und zur obigen Erklärung benutzen.

3)[2]) Vergleichung einer rationalen Zahl α mit einer Zahl von der

---

1) Ersetzt man hier α durch α^2, so kommt man auf den 2. Theil der Vergleichung 1).

2) Die Erklärungen in 3)—8) werden auf die nämliche Weise gewonnen wie die in 2). Die Aufstellung derselben bietet empfehlenswerthe Beispiele in der Rationalmachung von Ungleichungen dar.

In ähnlicher Art lassen sich auch die Erklärungen der Gleichheit zweier Zahlen von der Form $\alpha + \sqrt{\beta}$ und zweier von der Form $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ ableiten. Auch bestehen die folgenden Sätze, welche ebenfalls als Uebungen vorgelegt werden:

1) „Sind β und β' nicht Quadrate von rationalen Zahlen, so ist die Gleichung

$$(\beta + \beta' - (\alpha' - \alpha)^2)^2 = 4\beta\beta'$$

nur möglich, wenn $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ ist."

2) Ist keine von den Zahlen $\alpha\ \beta\ \alpha'\ \beta'$ das Quadrat einer rationalen Zahl und verstehen wir unter Δ den nämlichen Ausdruck wie auf S. 72, so ist die Gleichung

$$\Delta^2 = 64\alpha\alpha'\beta\beta'$$

nur möglich, entweder wenn

$$\sqrt{\alpha} = A\sqrt{\varkappa}, \quad \sqrt{\beta} = B\sqrt{\varkappa}, \quad \sqrt{\alpha'} = A'\sqrt{\varkappa}, \quad \sqrt{\beta'} = B'\sqrt{\varkappa}$$

und dabei bei gehöriger Wahl der Vorzeichen

$$\pm A \pm B = \pm A' \pm B'$$

ist, oder wenn $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ oder $\alpha = \beta'$, $\beta = \alpha'$ oder aber $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$ ist.

Form $\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$, wobei $\beta < \gamma$ sein soll. „Ist $\alpha < \sqrt{\beta}$, so heisst α auch kleiner als $\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$. Falls $\alpha > \sqrt{\beta}$ ist, so heisst α kleiner als $\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$, wenn entweder $\alpha^2 \leqq \gamma - \beta$ ist oder $\alpha^2 > \gamma - \beta$ und dabei $(\alpha^2 + \beta - \gamma)^2 < 4\alpha^2\beta$ ist, dagegen heisst α grösser als $\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$, wenn $\alpha^2 > \gamma - \beta$ und dabei $(\alpha^2 + \beta - \gamma)^2 > 4\alpha^2\beta$ ist."

4) Vergleichung einer Quadratwurzel $\sqrt{\alpha}$ mit einer Zahl $\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$ $(\beta < \gamma)$. Man ersetze in 3) α, α^2 bezw. durch $\sqrt{\alpha}$, α.

5) Vergleichung zweier ungleichen Zahlen $\alpha + \varkappa\sqrt{\beta}$ und $\alpha' + \varkappa'\sqrt{\beta}$. „Es sei $\alpha + \varkappa\sqrt{\beta} > \alpha' + \varkappa'\sqrt{\beta}$ (und die letztere Zahl kleiner als die erstere), wenn entweder zugleich $\alpha \geqq \alpha'$, $\varkappa \geqq \varkappa'$ (mit Ausschluss der Gleichungen $\alpha = \alpha'$, $\varkappa = \varkappa'$) oder neben $\alpha > \alpha'$, $\varkappa < \varkappa'$ $(\alpha - \alpha')^2 > (\varkappa' - \varkappa)^2\beta$ oder endlich neben $\alpha < \alpha'$, $\varkappa > \varkappa'$ $(\alpha' - \alpha)^2 < (\varkappa - \varkappa')^2\beta$ ist."

6) Vergleichung von zwei ungleichen Zahlen $\alpha + \sqrt{\beta}$ und $\alpha' + \sqrt{\beta'}$ im Falle dass $\beta\beta'$ nicht das Quadrat einer rationalen Zahl ist. „Wenn $\alpha \leqq \alpha'$, $\beta \leqq \beta'$ (ohne dass in beiden Beziehungen das Zeichen $=$ steht), so heisst $\alpha + \sqrt{\beta}$ kleiner als $\alpha' + \sqrt{\beta'}$. Ist $\alpha \geqq \alpha'$, $\beta \geqq \beta'$ (wobei jedoch das Zeichen $=$ nur einmal vorkommt), so heisst $\alpha + \sqrt{\beta}$ grösser als $\alpha' + \sqrt{\beta'}$. Ist aber $\alpha < \alpha'$, $\beta > \beta'$, so heisst $\alpha + \sqrt{\beta}$ kleiner als $\alpha' + \sqrt{\beta'}$ wenn entweder $\beta + \beta' < (\alpha' - \alpha)^2$ oder neben $\beta + \beta' \geqq (\alpha' - \alpha)^2$ $(\beta + \beta' - (\alpha' - \alpha)^2)^2 < 4\beta\beta'$ ist; dagegen heisst $\alpha + \sqrt{\beta}$ grösser als $\alpha' + \sqrt{\beta'}$, wenn neben $\beta + \beta' > (\alpha' - \alpha)^2$ $(\beta + \beta' - (\alpha' - \alpha)^2)^2 > 4\beta\beta'$ ist. Die auf den letzten Fall, dass $\alpha > \alpha'$, $\beta < \beta'$ ist, bezüglichen Erklärungen ergeben sich aus den soeben angeführten, indem man α und α', sowie β und β', mit einander vertauscht."

7) Vergleichung von zwei ungleichen Zahlen von der Form $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$. „Wenn $\alpha \leqq \alpha'$, $\beta \leqq \beta'$ ist, so heisst $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ kleiner als $\sqrt{\alpha'} + \sqrt{\beta'}$; wenn jedoch $\alpha \geqq \alpha'$, $\beta \geqq \beta'$ ist, so heisst $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ grösser als $\sqrt{\alpha'} + \sqrt{\beta'}$. Ist jedoch $\alpha < \alpha'$, $\beta > \beta'$ und wird zugleich angenommen, dass $\alpha > \beta$, $\alpha' > \beta'$ sei, so heisst $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ kleiner als $\sqrt{\alpha'} + \sqrt{\beta'}$, wenn entweder die Zahl

$$\Delta = 4(\alpha\alpha' + \beta\beta') - (\alpha + \alpha' - \beta - \beta')^2$$

nicht positiv oder bei positivem Δ

$$64\alpha\alpha'\beta\beta' > \Delta^2$$

ist. Dagegen heisst $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ grösser als $\sqrt{\alpha'} + \sqrt{\beta'}$, wenn neben $\Delta > 0$

$$64\alpha\alpha'\beta\beta' < \Delta^2$$

ist. Vertauscht man hier α mit α' und β mit β', so erhält man die Vergleichung unserer Zahlen im Falle dass $\alpha > \alpha'$, $\beta < \beta'$ ist."

8) Die Erklärungen über die Beziehung einer Zahl von der Form $\alpha + \sqrt{\beta}$ zu einer von der Form $\sqrt{\alpha'} + \sqrt{\beta'}$ lauten noch umständlicher, so dass wir uns hier darauf beschränken müssen, die Aufstellung derselben als eine nützliche Uebungsaufgabe zu empfehlen.

Auch die dreigliederigen Summen, wie

$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})+\sqrt{\gamma}=\sqrt{\alpha}+(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}),$$

müssten im Allgemeinen als neue Zahlen eingeführt werden u. s. f. Ist endlich jeder neuen Zahl die ihr entgegengesetzte zugeordnet, so darf man mit den Quadratwurzeln so rechnen, wie mit den rationalen Zahlen.

Aehnlich müssten nacheinander die dritten, vierten $\cdots$ Wurzeln geschaffen werden, entsprechend den Gleichungen $X^3=\alpha$, $X^4=\alpha$ $\cdots$. Dann wären auch andere Gleichungen (1) in Betracht zu ziehen, wobei es, wie bei $X^2+\alpha^2=0$, vorkommen kann, dass man die Vergleichung der neuen Zahlen mit den rationalen gar nicht zu Stande bringt. — Diejenigen unter den so gewonnenen Zahlen, welche mit den rationalen vergleichbar sind, heissen irrationale. Hat man irgend welche Classen derselben definirt und mit eigenen Bezeichnungen versehen, so stellen sich ähnliche Aufgaben ein, indem man jetzt annehmen wird, dass die Coefficienten in (1) Polynome seien, deren Glieder auch die neuen Zahlen enthalten. U. s. f. Es ist klar dass man nach der bis jetzt befolgten Methode der Zahlenbildung keine Uebersicht über die algebraischen irrationalen Zahlen erlangen kann.[1]) Wir werden aber sehen, dass alle irrationalen Zahlen aus einer Quelle hergeleitet werden können.

Wenn wir darauf verzichten, das Zahlensystem auf dem angegebenen Wege zu erweitern, so erklären wir damit zugleich, dass es ausser den vier Species keine Grundoperationen der Arithmetik gebe. Daher werden wir von der dritten Stufe derselben, bestehend aus den Operationen des Potenzirens, Radicirens, Logarithmirens, nicht weiter sprechen. Die Potenz soll vielmehr als eine Function des Exponenten aufgefasst werden.

Aus dem Vorstehenden wird man entnehmen, dass die beliebte Einführung der m-ten Wurzeln auf formalem Wege durchaus nicht befriedigen kann. Dieses Verfahren stösst nämlich, wenn es richtig dargestellt werden soll, schon am Beginne auf unbequeme Weitläufigkeiten und führt ausserdem zu keinem Abschlusse.

---

1) Hankel a. a. O. § 12.

IV. Abschnitt.

Synthetische Theorie der rationalen Zahlen. Die systematischen Brüche.

1. Die absoluten gebrochenen Zahlen. Dieser Abschnitt kann unmittelbar an den zweiten angeschlossen werden. Wenn wir aus der dort eingeführten Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 $\cdots$ die Vielfachen einer von 1 verschiedenen Zahl b d. i. die Zahlen b, $2b \cdots ab \cdots$ herausgreifen und der Reihe nach mit [1], [2] $\cdots$ $[a]$ $\cdots$ bezeichnen, so haben wir damit die natürliche Zahlenreihe wieder erzeugt. Gegenüber der neuen Einheit [1] heisst die Einheit 1 die Untereinheit nach dem Nenner b und wird mit $[1]/b$ bezeichnet; desgleichen schreiben wir für irgend eine Zahl a der ursprünglichen Reihe nunmehr $[a]/b$. Die Gleichung $ab = [a]$ kann demnach auf die Form gebracht werden:

$$\frac{[a]}{b} \cdot b = b \cdot \frac{[a]}{b} = [a].$$

Schreiben wir dann anstatt 1, 2 $\cdots$ bezw. $1/b$, $2/b$ $\cdots$ und anstatt [1], [2] $\cdots$ bezw. 1, 2 $\cdots$, so nimmt die letzte Formel die Gestalt an

$$1)\qquad \frac{a}{b} \cdot b = b \cdot \frac{a}{b} = a.$$

Die Zahl a/b giebt also mit b multiplicirt a zum Product oder sie ist als der Quotient $a : b$ zu betrachten. Insbesondere hat man

$$2)\qquad \frac{1}{b} \cdot b = b \cdot \frac{1}{b} = 1.$$

Demgemäss wird die Untereinheit $1/b$ als der b-te Theil der Einheit 1 oder als der Stammbruch mit dem Nenner b bezeichnet. a/b (in Worten a b-tel) heisst der b-te Theil der natürlichen Zahl a oder der Bruch mit dem Zähler a und dem Nenner b. Eine anschauliche Vorstellung von den Brüchen mit dem Nenner b lässt sich auf einer Geraden geben. Eine bestimmte

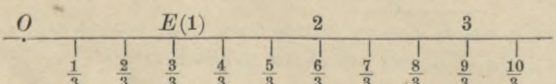

Fig. I. ($b = 3$)

Strecke OE auf derselben (Fig. I) werde als die Einheit 1 betrachtet; trägt man dieselbe mehrmals hinter einander auf, so erhält man eine

Abbildung der natürlichen Zahlenreihe 2, 3 $\cdots$. Die Geometrie lehrt nun, dass man die Strecke OE in eine beliebige Anzahl z. B. b gleiche Theile zerlegen kann. Der erste von ihnen stellt uns den Bruch $1/b$, der zweite den Bruch $2/b$ u. s. w. dar.

3) Der Bruch $\frac{ac}{b}$ zerfällt in c Gruppen von a b-tel, wir betrachten ihn daher als das c-fache von a/b oder als das Product von a/b mit c:

$$a/b \cdot c = \frac{ac}{b}.$$

Die Untereinheiten $1/bb'$, wo b' ebenfalls eine von 1 verschiedene natürliche Zahl bezeichnet, zerfallen in b Gruppen von je b' und in b' Gruppen von je b. Mithin ist

$$\frac{1}{b} = \frac{b'}{bb'}, \quad \frac{1}{b'} = \frac{b}{bb'}.$$

Demnach haben wir nach 3)

$$(\alpha) \qquad \frac{a}{b} = \frac{ab'}{bb'}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a'b}{bb'},$$

die zwei Brüche a/b, a'/b' sind demnach gleich oder ungleich, je nachdem die natürlichen Zahlen ab' und $a'b$ einander gleich sind oder nicht. Und zwar ist im letzteren Falle der erste Bruch grösser oder kleiner als der zweite, je nachdem ab' grösser oder kleiner als $a'b$ ist. — Zufolge der Erklärung der gleichen Brüche hat man, unter m irgend eine natürliche Zahl verstanden,

$$4) \qquad \frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

Es ist nun wie in III. 11 zu zeigen, dass gleichen Brüchen eine und dieselbe reducirte Form entspricht. Weiter ergiebt sich, dass wenn die reducirten Formen der ungleichen Brüche a/b, a'/b' von denen der erste z. B. grösser als der zweite sein möge, bezw. mit p/q, p'/q' bezeichnet werden, alsdann $pq' > p'q$ sein muss. Denn es soll $ab' > a'b$, ferner

$$a = kp, \quad b = kq, \quad a' = k'p', \quad b' = k'q'$$

sein, worin k, k' natürliche Zahlen bedeuten. Demnach muss

$$kk'pq' > kk'p'q \quad \text{d. i.} \quad pq' > p'q \text{ sein.}$$

5) „Zwei oder mehrere rationale Zahlen lassen sich auf einen gemeinsamen Nenner bringen“ d. h. als Vielheiten eines und desselben Stammbruches darstellen. Jedes gemeinschaftliche Vielfache der vorkommenden Nenner liefert einen für alle Zahlen passenden Nenner und wenn die Brüche in die reducirte Form gebracht sind, nur ein solches.

6) „Ein b'-tel von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{a}{bb'}$.“ D. i. $\frac{1}{b'}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{bb'}$.

Denn aus der Formel (α) ist ersichtlich, dass der Bruch a/b in b' Gruppen von je $a\,bb'$-tel zerfällt.

7) „$\frac{a'}{b'}$ von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{aa'}{bb'}$."

Denn man hat

$$\frac{a'}{b'}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{bb'}\cdot a'=\frac{aa'}{bb'}.$$

8) „Jede Zahl $\frac{c}{d}$ lässt sich als Bruch von jeder anderen $\frac{a}{b}$ auffassen." — Zufolge der Gleichung

$$\frac{bc}{ad}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{abc}{abd}=\frac{c}{d}.$$

2. Die Addition der absoluten rationalen Zahlen wird dadurch ausgeführt, dass man alle Summanden als Vielheiten einer Untereinheit darstellt d. h. man bringt sie auf einen gemeinsamen Nenner und addirt die neuen Zähler. Dass der Werth des so erhaltenen Resultates von der Wahl dieses Nenners nicht abhängt, ist bereits III. 12 bemerkt. Wir finden somit die nämlichen Regeln wie bei der Addition der natürlichen Zahlen. Ein Gleiches gilt von der Subtraction der neuen Zahlen. — Die Summe zweier Brüche wird auf der Geraden in Fig. I dargestellt, indem man von einem Endpunkte der dem ersteren Bruche entsprechenden Strecke aus auf der Verlängerung derselben die dem zweiten entsprechende aufträgt. Trägt man dagegen von einem Endpunkte einer Strecke aus auf dieser selbst eine zweite kleinere auf, so stellt der Rest den Unterschied der diesen Strecken entsprechenden Brüche dar.

Die Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl lehren die Regeln 1)—3) der Nr. 1. Die Multiplication mit einem Bruche wird häufig durch die Definition eingeführt: „$\frac{a}{b}$ mit $\frac{a'}{b'}$ multipliciren bedeute, eine Zahl aus $\frac{a}{b}$ so ableiten, wie der Multiplicator $\frac{a'}{b'}$ aus 1 entstanden ist." Dann zeigt die Formel 7) dass

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}=\frac{aa'}{bb'}$$

sein muss. Allein diese Erklärung des genannten Productes ist nicht anschaulich, sondern wieder formal. Synthetisch müsste unser Product als Flächenzahl abgeleitet werden zufolge des Satzes: Theilt man zwei parallele Seiten eines Rechteckes in je a, die beiden andern in je b gleiche Theile und zieht durch die Theilungspunkte Parallele zu den Seiten, so zerfällt das Rechteck in $a\cdot b$ congruente Rechtecke. Lässt man nun den Inhalt d. i. die Zahl eines Rechtecks stets das Product aus den Zahlen zweier benachbarten Seiten desselben sein, so leuchtet ein, dass $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ der ab^{te} Theil der Flächeneinheit sein muss u. s. f.[1])

3. Die relativen oder algebraischen ganzen Zahlen.[2])

Man kann die in II. 2 eingeführte natürliche Zahlenreihe 1, 2 $\cdots$ nach rückwärts verlängern, indem man der Einheit 1 die Zahl 0, dieser die Zahl $\bar{1}$, dieser die Zahl $\bar{2}$ u. s. f. vorausgehen lässt. Wir fügen also zu den a. a. O. gegebenen Erklärungen die folgenden

$$1 = 0 +, \quad 0 = \bar{1} +, \quad \bar{1} = \bar{2} + \text{ u. s. f.} \tag{1}$$

Die neben der Null eingeführten Zahlen heissen negative; ihnen gegenüber werden die natürlichen Zahlen als positiv bezeichnet. Alle diese Zahlen zusammen bilden die Reihe der relativen ganzen Zahlen oder der ganzen Zahlen schlechtweg. Eine jede von ihnen heisst grösser als alle ihre Vorgänger. Je zwei Zahlen a, $\bar{a}$ heissen einander entgegengesetzt oder kürzer: „Zahl und Gegenzahl“; a ihr absoluter Betrag.

Der leichteren Uebersicht halber mögen im Folgenden unter $a\ b\ c \cdots$ natürliche Zahlen, unter $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} \cdots$ negative, unter $A\ B\ \Gamma \cdots$ relative ganze Zahlen ohne Unterschied verstanden werden. Der allgemeine Typus der Formeln (1) von der dritten an ist mithin

$$\bar{a} = (\overline{a+1}) +. \tag{2}$$

Erklärung der Summe. Unter $A + 0$ ist A, unter $A + B$ diejenige Zahl der neuen Reihe zu verstehen, welche man erhält, wenn man von A aus um $|B|$ Schritte vor- oder rückwärts geht, je nachdem B positiv oder negativ ist. Diese Erklärungen lassen sich auf die folgenden vier zurückführen:

$$A + = A + 1 \quad (3) \qquad A = (A+1) + \bar{1} \quad (4)$$
$$A + (B+1) = (A+B) + 1 \quad (5) \qquad A + (B+\bar{1}) = (A+B) + \bar{1}, \quad (6)$$

1) Vgl. du Bois-Reymond, Allgemeine Functionentheorie I. (1882) S. 52.

2) Nach H. Grassmann, Lehrbuch der Arithmetik, 1861, Nr. 7—18. Neueren Ursprungs ist lediglich die Unterscheidung der beiden Vorzeichen der ganzen Zahlen von den Zeichen der Addition und Subtraction. Wie man die negativen Zahlen von den positiven bis zur Einführung der Vorzeichen unterscheidet, hat natürlich gar keine Bedeutung. Anstatt der von uns gebrauchten Bezeichnungen a, $\bar{a}$ schreibt C. Spitz (Lehrbuch der allg. Arithmethik, 1874, S. 12) bez. $(\leftarrow a)$, $(\rightarrow a)$, Ch. Méray (Leç. nouv. de l'Analyse infin. I. S. 11) bez. $\overset{\mapsto}{a}$, $\overset{\leftarrow}{a}$; H. Padé (Premières leç. d Algèbre élém., 1892, p. 5) mit Benützung von Indices bez. a_p, a_n.

Die in der ersten Auflage dieses Werkes Nr. IV. 4 gegebene Darstellung der Lehre von den rationalen Zahlen ist zwar formell ausreichend, dringt aber weniger tief in das Wesen der Sache ein.

wovon die beiden links uns schon aus II. 3 bekannt sind. Die letzte Formel lässt sich indess als eine Folgerung aus den übrigen darstellen. Aus der Identität $A+1=A+1$ ergiebt sich, indem wir rechts A durch die rechte Seite von (4) ersetzen, die neue Formel

$$A+1=[(A+1)+\bar{1}]+1,$$

wofür wir, da $A+1$ jede ganze Zahl B sein kann, schreiben dürfen:

$$B=[B+\bar{1}]+1. \tag{a}$$

Nun ist nach (4)

$$A+(B+\bar{1})=[\{A+(B+\bar{1})\}+1]+\bar{1}. \tag{b}$$

Weil dann nach (5) und (a)

$$\{A+(B+\bar{1})\}+1=A+[(B+\bar{1})+1]=A+B$$

ist, so folgt aus (b) unmittelbar die Formel (6).

Mit Hilfe der Formeln (3)—(6) gelangen wir in der That zu allen noch nicht bekannten Summen von zwei ganzen Zahlen.

Setzt man in (4) $A=0$, so erhält man die Summe $1+\bar{1}=0$. Demnach hat man mit Rücksicht auf (6) und (4)

$$A+0=A+(1+\bar{1})=(A+1)+\bar{1}=A. \tag{7}$$

Aehnlich ist

$$0+a=a \quad 0+\bar{a}=\bar{a}. \tag{8}$$

Die erste Formel gilt für $a=1$. Nehmen wir sie als richtig an, so folgt daraus nach (5), dass

$$0+(a+1)=(0+a)+1=a+1.$$

Folglich gilt sie allgemein. Die zweite der Formeln (8) wird auf die nämliche Art bewiesen. Für $\bar{a}=\bar{1}$ gilt sie nach (4). Und wenn wir sie als richtig ansehen, so haben wir nach (4) und (6)

$$0+\overline{a+1}=0+(\bar{a}+\bar{1})=(0+\bar{a})+\bar{1}=\bar{a}+\bar{1}=\overline{a+1}.$$

Nach (5) hat man, wenn $b\geqq 2$ ist,

$$\bar{a}+b=\bar{a}+[(b-1)+1]=[\bar{a}+(b-1)]+1. \tag{9}$$

Wenn $a>b$ ist, so wenden wir diese Formel $(b-1)$-mal an, wodurch wir schliesslich zu den Gleichungen

$$\bar{a}+3=(\bar{a}+2)+1,\ \bar{a}+2=(\bar{a}+1)+1=\overline{a-1}+1$$

gelangen. Wir finden somit rückwärts schreitend

$$\bar{a}+2=\overline{a-2},\ \bar{a}+3=\overline{a-3},\cdots \bar{a}+(b-1)=\overline{a-b+1} \tag{10}$$

und schliesslich nach (9)

$$\bar{a}+b=\overline{a-b} \quad (a>b). \tag{11}$$

Wenn $a = b$ ist, so geht die letzte der Formeln (10) in

$$\bar{a} + (a - 1) = \bar{1}$$

über, somit ist nach (9) und (3)

$$\bar{a} + a = [\bar{a} + (a - 1)] + 1 = \bar{1} + 1 = 0. \tag{12}$$

Ist endlich $a < b$, so wende man die Recursionsformel (9) $(b - a)$-mal an, wobei auf der rechten Seite $\bar{a} + a$ erscheint. Geht man zurück, so erhält man nacheinander die Summen

$$\bar{a} + (a + 1) = (\bar{a} + a) + 1 = 0 + 1 = 1 \cdots \bar{a} + b = b - a. \tag{13}$$

Durch die nämlichen Schlüsse wie die Formeln (11)—(13), nur dass an Stelle der Beziehungen (3) und (5) bezw. (4) und (6) treten, ergeben sich die nachstehenden Formeln:

$$\left.\begin{array}{ll} a + \bar{b} = a - b \quad (a > b), & a + \bar{a} = 0 \\ a + \bar{b} = \overline{b - a} \quad (a < b) & \end{array}\right\}. \tag{14}$$

Endlich gewinnen wir durch $(b - 1)$-malige Anwendung der Recursionsformel

$$\bar{a} + \bar{b} = (\bar{a} + \overline{b - 1}) + \bar{1}$$

und schrittweises Zurückgehen aus der Formel $\bar{a} + \bar{1} = \overline{a + 1}$ nacheinander die Summenformeln

$$\bar{a} + \bar{2} = \overline{a + 2}, \quad \bar{a} + \bar{3} = \overline{a + 3} \cdots \bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}. \tag{15}$$

Die Formeln (7), (8), (11)—(15) haben uns alle bis jetzt nicht bekannten Summen geliefert. Mit Hilfe derselben lässt sich nachweisen, dass für die Addition der relativen ganzen Zahlen die vier Hauptsätze 1)—3) und 5) auf S. 15 gelten. Der erste ist selbstverständlich; wir haben also noch zu beweisen, dass

1) $(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$, (16)
2) $A + B = B + A$, (17)
3) aus $A > A'$ $A + B > A' + B$ folgt. (18)

Dass die Beziehung (16) im Falle dass $\Gamma = 0$ ist, gilt, ist unmittelbar ersichtlich. Bei positivem Γ können wir sie wie a. a. O. durch den Schluss von Γ auf $\Gamma + 1$ erhärten. Auch bei negativem Γ, wenn also $\Gamma = \bar{c}$ ist, wenden wir die nämliche Schlussweise an. Setzen wir in der That die Gleichung

$$(A + B) + \bar{c} = A + (B + \bar{c}) \tag{19}$$

als richtig voraus, so erhalten wir durch dreimalige Benutzung der Formel (6)

$$\begin{aligned}(A + B) + \overline{c + 1} &= [(A + B) + \bar{c}] + \bar{1} = [A + (B + \bar{c})] + \bar{1} \\ &= A + \{(B + \bar{c}) + \bar{1}\} = A + \{B + (\bar{c} + \bar{1})\} = A + (B + \overline{c + 1}).\end{aligned}$$

Nun gilt die Gleichung (19) für $\bar{c} = \bar{1}$, also auch für $\bar{c} = \bar{2}$ u. s. f.

Die Richtigkeit der Formel (17) erkennt man unmittelbar durch einen Blick auf die obigen Summenformeln.

Was den Satz (18) betrifft, so springt seine Richtigkeit im Falle dass $B = 0$ ist, in die Augen. Für ein positives B reicht der Beweis aus, welchen wir auf S. 16 für den Fall dass auch A und A' positiv seien, erbracht haben. Aehnlich schliessen wir bei negativem B d. i. wenn $B = \bar{b}$ ist. Zunächst bemerke man, dass neben $A > A'$ $A + \bar{1} \geqq A'$ also wegen $A' > A' + \bar{1}$

$$A + \bar{1} > A' + \bar{1} \tag{20}$$

ist. Lassen wir nun bei irgend einem $\bar{b}$

$$A + \bar{b} > A' + \bar{b}$$

sein, so finden wir nach (20)

$$(A + \bar{b}) + \bar{1} > (A' + \bar{b}) + \bar{1}.$$

Nun ist nach (6)

$$(A+\bar{b})+\bar{1} = A+(\bar{b}+\bar{1}) = A+\overline{b+1},\ \ (A'+\bar{b})+\bar{1} = A'+\overline{b+1};$$

mithin ist in der That

$$A + \overline{b+1} > A' + \overline{b+1}.$$

Vermöge des soeben erwähnten Satzes dürfen wir behaupten, dass wenn die Gleichung $B + X = A$ überhaupt eine Lösung nach X hat, sie nur eine haben kann. Sie hat aber stets eine Lösung, und zwar ist, falls $B = 0$ ist, $X = A$, sonst aber $X = A + \bar{B}$, unter $\bar{B}$ die der Zahl B entgegengesetzte verstanden. In der That ist

$$B + (A + \bar{B}) = A + (B + \bar{B}) = A + 0 = A.$$

Die Subtraction ist also stets und zwar nur in einer Weise möglich. Insbesondere hat man wegen (12) $\bar{a} = 0 - a$, woraus die Bezeichnungsweise $\bar{a} = -a$ entspringt.

Die Multiplication der relativen ganzen Zahlen gründet H. Grassmann (a. a. O. Nr. 56—58) auf die drei Erklärungen

$$A \cdot (b + 1) = A \cdot b + A,\ \ A \cdot 0 = 0,\ \ A \cdot (-b) = -Ab.$$

Da dieses Verfahren ähnlich dem in III. 14 gegebenen rein formal ist, so gehen wir nicht näher darauf ein, sondern empfehlen die Ausführung dem Leser als eine Uebung.

4. Die relativen rationalen oder die algebraischen gebrochenen Zahlen.

Aus der nach beiden Seiten unbegrenzten Reihe der ganzen Zahlen leiten wir unmittelbar die zur Untereinheit $1/b$ gehörige Reihe her. In derselben kommen vor der Null die negativen Zahlen

$(\overline{a/b})$ und zwar zuerst die der Untereinheit $(1/b)$ entgegengesetzte $(\overline{1/b})$. Entsprechend der Formel $(-a)\cdot b = -ab$ schreiben wir (vgl. Nr. 1) auch hier

$$\left(\overline{\frac{a}{b}}\right)\cdot b = b\cdot\left(\overline{\frac{a}{b}}\right) = \bar{a} = -a \quad (a \geqq 1).$$

Es lässt sich demnach die Zahl $(\overline{a/b})$ als der Quotient $(-a)/b$ betrachten:

$$\left(\overline{\frac{a}{b}}\right) = \frac{-a}{b}.$$

Sowie a/b dann und nur dann gleich a'/b' ist, wenn $ab' = a'b$ ist, so kann auch nur unter derselben Voraussetzung

$$\frac{-a}{b} = \frac{-a'}{b'}$$

sein. — Das Zeichen $0/b$ bedeutet nichts Anderes als 0.

Die Gesammtheit der soeben eingeführten Zahlen bildet im Vereine mit den ganzen Zahlen das System der relativen rationalen Zahlen oder der rationalen Zahlen schlechtweg.

Addition der relativen rationalen Zahlen. Unter $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ seien im Nachstehenden positive, unter $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \cdots$ negative rationale Zahlen verstanden. Da wir je zwei aus einer oder aus beiden Reihen auf einen gemeinsamen Nenner bringen können, so lassen sich die in der vorigen Nummer gegebenen Erklärungen der verschiedenen Summen ohne Weiteres hierher übertragen. Wir erhalten demnach die folgenden Erklärungen:

1) Bedeutet A irgend eine, b eine positive ganze Zahl, so sei

$$\frac{A}{b} + 0 = 0 + \frac{A}{b} = \frac{A}{b}.$$

2) $\bar{\alpha} + \beta = \overline{\alpha - \beta}$, 0, $\beta - \alpha$ je nachdem α grösser, gleich oder kleiner als β ist. — Unter den nämlichen Bedingungen sei

3) $\alpha + \bar{\beta} = \alpha - \beta$, 0, $\overline{\beta - \alpha}$.

4) $\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \overline{\alpha + \beta}$.

Nur hat man sich davon zu überzeugen, dass die auf der rechten Seite der Formeln 2)—4) erscheinenden Zahlen dadurch sich nicht ändern, dass einer oder beide Summanden links durch ihnen gleiche Zahlen ersetzt werden. Dass dies nicht stattfindet, verbürgt der Umstand, dass weder die Summe noch die Differenz zweier absoluten Zahlen dadurch eine Veränderung erfährt, dass an Stelle eines ihrer Glieder eine ihm gleiche Zahl tritt (vgl. Nr. 2 und III. 12).

Für die Addition der relativen rationalen Zahlen gelten weiter die auf S. 79 erwähnten Hauptsätze 1)—3) wovon der zweite dem Vorstehenden zufolge sich von selbst versteht. Eigener Beweise bedarf es auch für die beiden andern nicht, da man an Stelle der

Reihe der ganzen Zahlen die aus der Einheit $1/b$ und ihrer Gegenzahl gebildete Reihe setzen kann.[1])

Bezüglich der Subtraction gilt das auf S. 80 Gesagte, wenn man nur AB beliebige rationale Zahlen sein lässt. Die Gleichung $X + B = A$ hat die Lösung $X = A + \overline{B}$ und nur diese. Da $A + \overline{A} = 0$ ist, so hat man $\overline{A} = 0 - A$, wofür $-A$ geschrieben wird. Hieran schliessen sich die Bemerkungen von S. 63 Z. 5 v. u. an bis zum Ende von Nr. III. 13.

Das Product $A \cdot B$ wird in der Regel durch die Definition: „A mit B multipliciren bedeute, aus der Zahl A und ihrer Gegenzahl $-A$ eine Zahl so ableiten, wie der Multiplicator B aus der Einheit und der Gegeneinheit entstanden ist“ eingeführt. Dabei ist es gleichgiltig, in welcher Weise der Multiplicator aus den beiden Einheiten abgeleitet wird. Dieses Verfahren hat, den Fall ausgenommen dass B eine natürliche Zahl ist, eigentlich formalen Charakter. Wir werden jedoch sogleich eine anschauliche Erklärung des in Rede stehenden Productes kennen lernen.

5. Darstellung der rationalen Zahlen durch die Zahlenlinie. Auf einer gegebenen Geraden XX' (Fig. II) wird ein fester Punkt O angenommen und ihm die Null zugeordnet, weswegen dieser

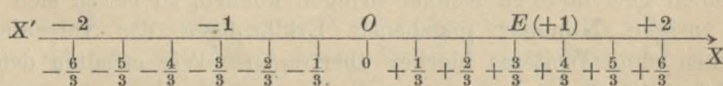

Fig. II.

Punkt der Nullpunkt der Skala heisst. Von den beiden Halbstrahlen, in welche der Punkt O die Gerade theilt, wird einer z. B. OX als der positive, der andere OX' als der negative bezeichnet. Einer bestimmten Strecke OE des ersteren wird die Zahl 1 zugeordnet und dann auf ihm in der bereits in Nr. 1 angegebenen Weise die Strecken construirt, denen die positiven Zahlen $2, 3 \cdots$, sowie diejenigen, welchen die Bruchzahlen $1/b, 2/b \cdots$ bei beliebig angenommenen Nenner $b (\geqq 2)$ entsprechen sollen. Die negativen ganzen Zahlen $-1, -2 \cdots$, sowie die negativen Bruchzahlen $-1/b, -2/b \cdots$ erscheinen auf dem negativen Halbstrahl OX' in gleichen Abständen vom Punkte O, wie die ihnen bezw. entgegengesetzten positiven Zahlen. Bedeutet alsdann P den Punkt auf XX', welchem die rationale Zahl A entspricht, so heisst A die Absscisse von P und wird mit OP bezeichnet. Desshalb wird die Zahlenlinie XX' auch Absscissenaxe genannt.

1) Von dieser Bemerkung nicht abhängige Beweise der den Sätzen 1) und 3) auf S. 79 hier entsprechenden findet man in der ersten Auflage dieses Werkes I. S. 62.

Diese Darstellung der rationalen Zahlen wird vollständig erst dann verwerthet, wenn man nach Möbius die Gesammtheit aller rationalen Strecken AB auf XX' unter Berücksichtigung des Sinnes der Bewegung von A bis B in Betrachtung zieht. Wir nehmen auf der Axe XX' (Fig. III) eine Richtung z. B. die von X' nach X als

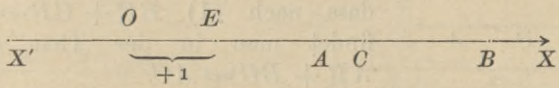

Fig. III.

die positive an. Dann heissen zwei zur Einheit commensurable Strecken AB und $A'B'$ dann und nur dann einander gleich, wenn ihnen dieselbe rationale Zahl A entspricht d. h. wenn beide aus gleichvielen Untereinheiten von demselben Nenner bestehen und ausserdem die Richtung von A nach B die nämliche ist, wie die von A' nach B'. Für die jetzt eingeführten Grössen AB[1]), welche die relativen Strecken heissen, ist also die Anordnung der beiden Buchstaben AB wesentlich. In der That bedeutet BA die entgegengesetzte Strecke zu AB, sodass nach den Additionsregeln in Nr. 3 und 4 die Beziehung

$$AB + BA = 0 \tag{1}$$

besteht. — Zu diesen Strecken gehört natürlich auch die oben erwähnte Absscisse OP. Thatsächlich ist sie eine positive oder negative Strecke, je nachdem P auf OX oder OX' liegt.

Von den zwei rationalen Strecken AB und AC heisst die erste die grössere, wenn B weiter gegen X vorgeschoben erscheint als C, d. i. wenn die Strecke BC negativ ist (Fig. III).

Die zweite Grundformel für das Rechnen mit den Strecken bildet die Summenformel

$$AB + BC = AC, \tag{2}$$

worin A, B, C Punkte einer Geraden XX' in rationalen Abständen bedeuten. Um ihre Richtigkeit zu erweisen, hat man sechs Fälle zu unterscheiden. Durchläuft man die Gerade XX' im positiven Sinne, so können die genannten Punkte eine der sechs Anordnungen

$$ABC\ BCA\ CAB,\ ACB\ BAC\ CBA$$

zeigen. Sie zerfallen in zwei Tripel, in deren jedem aus der ersten Anordnung die beiden andern durch cyklische Vertauschung der Buchstaben ABC hervorgehen. Wir wollen zunächst die Formel (2) für die Anordnungen ABC (Fig. IV 1)) und ACB (Fig. III) beweisen. Im ersten Falle erscheint sie, da AB und BC beide positiv sind,

1) Neben den im Abschnitte XI behandelten Strecken AB in der Ebene werden die relativen Strecken mit $\overline{AB}$ bezeichnet.

zufolge der Erklärung der Summe zweier absoluten Strecken in Nr. 2 selbstverständlich. Im zweiten Falle sind AC und CB positiv, man hat daher aus dem nämlichen Grunde

$$AB = AC + CB.$$

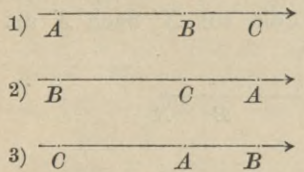

Fig. IV.

Addirt man beiderseits BC und beachtet, dass nach (1) $BC + CB = 0$ ist, so findet man in der That die Formel $AB + BC = AC$.

Ist die Formel (2) bei einer gewissen Anordnung der Punkte ABC richtig, so geht sie durch cyklische Vertauschung der Buchstaben ABC in die Formel

$$BC + CA = BA \tag{3}$$

über, die bei jener Anordnung dieser Punkte gilt, welche aus der gegebenen durch die genannte cyklische Vertauschung hervorgeht. (So gelangt man z. B. von der Anordnung 1) in Fig. IV zur Anordnung 2) und von dieser zu 3)). Addirt man in (3) beiderseits $AB + AC$, so erhält man vermöge der Beziehung (2) und der analogen, $AC + CA = 0$, wieder die Formel (2). Hiernach muss diese Formel auch in den vier übrigen Fällen richtig sein.

Die Gleichung (2) kann man durch beiderseitige Addition von CA auf die Form

$$AB + BC + CA = CA + AC = 0 \tag{4}$$

bringen. Aus (2) ergiebt sich auch die Formel

$$AC - AB = BC. \tag{5}$$

Um auch das Product zweier rationalen Strecken anschaulich darzustellen, muss man sich einer Construction in der Ebene bedienen. Wir nehmen in der gegebenen Ebene eine bestimmte Drehungsrichtung z. B. die von rechts nach links, welche dem Gange des Uhrzeigers entgegengesetzt ist, als positiv an und lesen ihr entsprechend die positiven Winkel ab. Nunmehr gehört zu jedem Halbstrahl x eine positive Normale d. h. eine Richtung y, welche mit x den Winkel $+ 90^0$ einschliesst: $\widehat{xy} = + 90^0$ (Fig. V).

Mit Hilfe der beiden einander entgegengesetzten Drehungssinne in der Ebene kann man aus den ebenen Flächen relative Grössen ableiten. Betrachten wir z. B. die gewöhnlichen Vierecke $ABCD$ d. h. solche, deren Umfang $ABCD$ sich selbst nicht schneidet. Wenn sich ein Beobachter innerhalb eines solchen aufstellt, so wird ihm der durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben $ABCD$ vorgeschriebene Umlauf längs des Umfangs des Vierecks entweder als positiv oder als negativ erscheinen. Im ersten Falle bezeichnen wir das Viereck $ABCD$ (wobei die Aufeinanderfolge der Buchstaben als wesentlich erscheint) als positiv, im letzteren als negativ. Hier wollen wir uns jedoch nur mit solchen relativen Flächen befassen, denen nach Festsetzung der absoluten Flächeneinheit rationale Zahlen (als Inhalte) entsprechen.

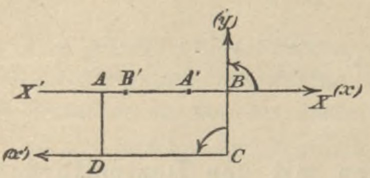

Fig. V.

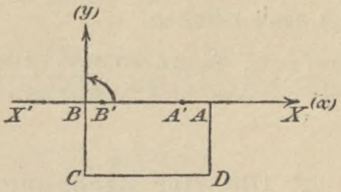

Fig. VI.

Das Product einer rationalen Strecke AB der Axe XX' (Fig. V) mit einer anderen $A'B'$, wird gebildet, indem man im Endpunkte von AB die positive Normale zur Richtung $X'X$, welche die positive in der Axe ist, errichtet, darauf BC der Länge und dem Zeichen nach gleich der Strecke $A'B'$ annimmt und mittelst der Parallelen AD zu BC und CD zu AB das Rechteck $ABCD$ construirt. Dieses Rechteck $ABCD$ mit seinem Zeichen stellt das Product $AB \cdot A'B' = AB \cdot BC$ dar. Sein absoluter Inhalt ist nämlich, wie wir in Nr. 2 festsetzten, das Product der absoluten Beträge der AB und $A'B'$ entsprechenden rationalen Zahlen. In Fig. V ist AB positiv, $A'B'$ negativ und das Rechteck $ABCD$ negativ; in Fig. VI sind AB, $A'B'$ beide negativ und $ABCD$ ist positiv. Kurz wir erhalten so alle Producte von zwei rationalen Zahlen, welche in III. 14 aufgestellt wurden. Dass diese Verknüpfung commutativ ist, erkennt man auch unmittelbar aus der Figur. Um z. B. in Fig. V $BC \cdot AB$ zu bilden, construirt man in C zur Richtung y die positive Normale, welche die zur Richtung $x \equiv X'X$ entgegengesetzte x' ist und nimmt auf ihr die positive Strecke $CD = AB$. Alsdann ist $BC \cdot AB = BCDA$, welches Rechteck dem obigen zufolge mit $ABCD$ zusammenfällt.

6. Die systematischen Brüche. — Versteht man wie in II. 10 unter e eine natürliche Zahl $\geqq 2$, unter c_0 eine ganze Zahl $\gtreqless 0$, unter $c_1, c_2 \cdots c_m$ Ziffern d. i.

$$0 \leqq c_n \leqq e - 1;$$

so nennt man den Bruch

$$A = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_m}{e^m} \tag{1}$$

einen systematischen. Bricht man bei dem Gliede

$$c_n : e^n \; (n < m)$$

ab, so ist der Rest kleiner als $1 : e^n$. Mit Hilfe der leicht zu beweisenden Formel (vgl. VIII. 1)

$$(\omega \gtrless 1) \quad \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} \tag{2}$$

findet man nämlich

$$\frac{c_{n+1}}{e^{n+1}} + \cdots + \frac{c_m}{e^m} \leqq \frac{e-1}{e^{n+1}} \left\{ 1 + \frac{1}{e} + \cdots + \frac{1}{e^{m-n-1}} \right\} = \frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^m} < \frac{1}{e^n}. \tag{3}$$

7. Die vier Rechnungsarten mit den Dezimalbrüchen d. i. den systematischen Brüchen zur Grundzahl $e = 10$.

Die Begründung der bekannten Regeln für die Addition, Subtraction und Multiplication der Dezimalbrüche möge dem Leser überlassen werden. Dagegen scheint es gerathen, die Division derselben eingehender zu behandeln. Um überflüssige Unterscheidungen zu vermeiden, verstehen wir schon im Folgenden unter 10^0 1, unter $10^{-p} (p > 0)$ $1 : 10^p$.

Satz. „α sei ein absoluter Dezimalbruch mit m von der ersten geltenden Ziffer, deren Ordnung $10^p \, (p \gtreqless 0)$ ist, ab gezählten Ziffern, β einer mit n von der ersten geltenden Ziffer, deren Ordnung $10^q \, (q \gtreqless 0)$ ist, ab gezählten Ziffern. Und zwar sei

$$\alpha = a_0 10^p + a_1 10^{p-1} + \cdots + a_{m-1} 10^{p-m+1} \tag{a}$$

$$\beta = b_0 10^q + b_1 10^{q-1} + \cdots + b_{n-1} 10^{q-n+1}. \tag{b}$$

a) „Der Quotient $\alpha : \beta$ liegt zwischen 10^{p-q-1} und 10^{p-q+1}."

b) „Es sei ferner a' die von den ersten n Ziffern von α, wieder von der ersten geltenden Ziffer ab gezählt, gebildete und allenfalls durch rechts angehängte Nullen vervollständigte ganze Zahl, endlich sei b die von den n Ziffern von β gebildete ganze Zahl, somit

$$b = b_0 10^{n-1} + b_1 10^{n-2} + \cdots + b_{n-1}.$$

Alsdann beginnt der Quotient $\alpha : \beta$ mit Einheiten von der Ordnung 10^{p-q-1} oder 10^{p-q}, je nachdem a' kleiner als b ist oder nicht."

c) „Ermittelung der ersten Ziffer des Quotienten $\alpha : \beta$. Ist erstens $a' < b$, also

$$\alpha : \beta = c_0 10^{p-q-1} + c_1 10^{p-q-2} + \cdots,$$

so setze man

$$\alpha = (10a' + a_n) 10^{p-n} + \alpha'' \quad (0 \leqq \alpha'' < 10^{p-n}), \tag{c}$$

wobei a_n die $(n+1)$-ste Ziffer von α, von der ersten geltenden an nach rechts gezählt, bedeutet. Dann ist c_0 diejenige Ziffer, wofür

$$c_0 b \leqq 10a' + a_n < (c_0 + 1) b \tag{d}$$

ist. — Ist **zweitens** $a' \geqq b$, ist also

$$\alpha : \beta = c_0 10^{p-q} + \cdots,$$

so ist c_0 diejenige Ziffer, wofür

$$c_0 b \leqq a' < (c_0 + 1)\, b \tag{e}$$

ist."

Der **Beweis** dieses Satzes, von dem der Satz in II. 11 über die Division der natürlichen Zahlen einen besonderen Fall bildet, gestaltet sich einfacher als der des letzteren.

ad a). Zufolge der Formeln (a) und (b) hat man

$$10^p \leqq \alpha < 10^{p+1}, \quad 10^q \leqq \beta < 10^{q+1},$$

demnach ist nach den Sätzen über die Quotienten in III. 11, bezw. II. 8

$$10^{p-q-1} < \alpha/\beta < 10^{p-q+1}.$$

α/β fängt also entweder mit der Stelle 10^{p-q-1} oder 10^{p-q} an.

ad b). Es ist

$$\alpha = a' 10^{p-n+1} + \alpha' \quad (0 \leqq \alpha' < 10^{p-n+1}) \tag{f}$$

$$\beta = b\, 10^{q-n+1} \tag{f*}$$

also

$$(a'/b)\, 10^{p-q} \leqq \alpha/\beta < [(a' + 1)/b]\, 10^{p-q}. \tag{g}$$

Ist $a' < b$ d. i. $a' + 1 \leqq b$ so ist mithin $\alpha/\beta < 10^{p-q}$, α/β muss demnach mit den Einheiten von der $(p - q - 1)$ten Ordnung beginnen. Ist aber $a' \geqq b$, so ist nach (g) $\alpha/\beta \geqq 10^{p-q}$, fängt also mit der Stelle 10^{p-q} an.

ad c). **Erster** Fall. Dann soll

$$c_0 10^{p-q-1} \leqq \alpha/\beta < (c_0 + 1)\, 10^{p-q-1}$$

sein. Multiplicirt man diese Beziehungen mit β, so findet man nach (f*)

$$c_0 b\, 10^{p-n} \leqq \alpha < (c_0 + 1)\, b\, 10^{p-n}.$$

Andererseits hat man nach (c)

$$(10 a' + a_n)\, 10^{p-n} \leqq \alpha < (10 a' + a_n + 1)\, 10^{p-n}.$$

Aus diesen zwei Systemen von Ungleichungen ergiebt sich, dass

$$c_0 b < 10 a' + a_n + 1, \quad 10 a' + a_n < (c_0 + 1)\, b$$

sein muss, d. i. die Beziehungen (d). — **Zweiter** Fall. Dann soll

$$c_0 10^{p-q} \leqq \alpha/\beta < (c_0 + 1)\, 10^{p-q}$$

sein. Daraus folgt jetzt durch Multiplication mit β, dass

$$c_0 b\, 10^{p-n+1} \leqq \alpha < (c_0 + 1)\, b\, 10^{p-n+1}$$

sein muss. Andererseits hat man nach (f)

$$a' 10^{p-n+1} \leqq \alpha < (a' + 1)\, 10^{p-n+1}.$$

Durch Zusammenfassung dieser zwei Systeme von Ungleichungen erhält man die Beziehungen

$$c_0 b < a' + 1 \quad a' < (c_0 + 1) b$$

welche mit den in (e) vereinigten übereinstimmen.[1])

8. Einschliessung einer rationalen Zahl, welche sich nicht in einen systematischen Bruch verwandeln lässt, zwischen zwei systematische Brüche von beliebig vielen Stellen.

1. Satz. „Jede rationale Zahl A (in die Form $a:b$ gebracht, wo b eine natürliche Zahl, die relative Primzahl zu a ist, bedeutet) ist entweder gleich einem systematischen Bruche oder es giebt neben der ganzen Zahl c_0, wofür

$$c_0 < A < c_0 + 1,$$

eine unbegrenzte Reihe von Ziffern $c_1, c_2 \cdots c_n$ — welche nicht von einer bestimmten an sämmtlich 0 sind —, so dass wie gross auch n sein mag, stets

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} < A < c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n + 1}{e^n}.\text{“} \tag{4}$$

„Von einem bestimmten Gliede an wird die Reihe $c_1, c_2 \cdots$ periodisch d. h. es wiederholt sich ununterbrochen eine aus höchstens $b - 1$ Ziffern bestehende Gruppe.“

Nach III. 15 hat man entweder $a = c_0 b$, wo c_0 eine ganze Zahl, oder $a = c_0 b + r_0$, worin r_0 eine natürliche Zahl $< b$ ist. Im ersten Falle ist $A = c_0$; im zweiten, wo

$$A = c_0 + r_0/b, \quad \text{also} \quad c_0 < A < c_0 + 1$$

ist, bildet man er_0 und findet entweder $er_0 = c_1 b$ oder

$$er_0 = c_1 b + r_1,$$

wo c_1 eine ganze Zahl: $0 \leqq c_1 \leqq e - 1$ und r_1 eine solche zwischen 0 und b bedeutet. Im ersten Falle ist

$$A = c_0 + \frac{c_1}{e};$$

im zweiten, wo

$$A = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{r_1}{be}, \quad \text{also} \quad c_0 + \frac{c_1}{e} < A < c_0 + \frac{c_1 + 1}{e}$$

ist, bildet man er_1 und vollzieht die analoge Disjunction. U. s. f. Hierbei kann sich nur Folgendes ergeben. Entweder geht eine der Divisionen

$$\frac{a}{b} = c_0 + \frac{r_0}{b}, \quad \frac{er_0}{b} = c_1 + \frac{r_1}{b}, \quad \frac{er_1}{b} = c_2 + \frac{r_2}{b}, \cdots,$$

$$\frac{e r_{n-1}}{b} = c_n + \frac{r_n}{b} \cdots$$

1) Die weiteren Stellen $c_1, c_2 \cdots$ des Quotienten α/β werden auf ähnliche Weise wie die erste gefunden (vgl. S. 31).

auf; dann ist A gleich einem systematischen Bruche. Oder es geht keine derselben auf, so dass die Reste $r_0, r_1 \cdots$ nur die Werthe $1, 2 \cdots b-1$ erhalten können. Demnach muss es in der Reihe der b Reste $r_0, r_1 \cdots r_{b-1}$ einen ersten r_m geben, der wiederkehrt. Ist aber $r_{m+h} = r_m$, so folgt auch

$$c_{m+h+1} = c_{m+1}, \quad r_{m+h+1} = r_{m+1} \cdots c_{m+2h} = c_{m+h},$$
$$r_{m+2h} = r_{m+h} = r_m.$$

U. s. f. In der Reihe $c_{m+1}, c_{m+2} \cdots$ wiederholen sich ohne Ende die $h \leqq b-1$ Ziffern

$$c_{m+1}, \quad c_{m+2} \cdots c_{m+h}.$$

Die Zahl

$$c_{m+1} e^{h-1} + c_{m+2} e^{h-2} + \cdots + c_{m+h}$$

heisst die zur Zahl A gehörige Periode. — Dabei ist

$$A = c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} + \frac{r_n}{b e^n} \quad (0 < r_n < b),$$

woraus die Beziehungen (4) unmittelbar sich ergeben.

2. Satz. „Die Zahl A ist dann und nur dann gleich einem systematischen Bruche, wenn ihr Nenner nur Primfactoren von e enthält."

Soll nämlich der reducirte Bruch a/b dem systematischen Bruche Q/e^m gleich sein, so muss $a e^m = bQ$ sein. Da a und b relative Primzahlen sind, so muss e^m durch jeden Primfactor von b theilbar sein, folglich e selbst.

3. Satz. „Beginnt die Periode mit c_1, so haben der reducirte Nenner b von A und die Grundzahl e keinen Theiler gemein. Gehen der Periode Ziffern voran, so müssen die Zahlen b und e einen Theiler gemein haben."

Ist $m = 0$, $r_h = r_0$, so folgt aus $a = c_0 b + r_0$, $r_{h-1} e = c_h b + r_0$

$$a - e r_{h-1} = b(c_0 - c_h);$$

demnach muss jeder gemeinsame Theiler von b, e in a aufgehen, also kann es ausser 1 keinen geben. — Ist $m \geqq 1$, so hat man neben

$$e r_{m-1} = c_m b + r_m \quad e r_{m+h-1} = c_{m+h} b + r_m,$$

also

$$e(r_{m-1} - r_{m+h-1}) = (c_m - c_{m+h}) b.$$

$|r_{m-1} - r_{m+h-1}|$ ist kleiner als b, kann also nur durch einen Theiler b' von b theilbar sein. Demnach muss der Theiler $b : b'$ von b in e aufgehen.

Aus dem 3. Satze folgt durch Umkehrung nach I. 10:

4. Satz. „Ist der reducirte Nenner b von A relative Primzahl zu e, so beginnt die Periode mit c_1. Sind die Primfactoren von b theils solche von e, theils nicht, so gehen der Periode Ziffern voran."

9. Der gemeine Bruch, welcher zu einem periodischen, beliebig weit fortsetzbaren systematischen Bruch gehört.

Es frägt sich noch, ob umgekehrt zu jeder unbegrenzten Reihe $c_0, c_1, c_2 \cdots$ welche die im 1. Satze angegebene Beschaffenheit hat, ein erzeugender gemeiner Bruch d. i. eine rationale Zahl A gehört, welche die Relationen (4) erfüllt.

5. Satz. „Neben der beliebigen ganzen Zahl c_0 sei gegeben die unbegrenzte Reihe von Ziffern $c_1, c_2 \cdots$, welche von dem Gliede c_{m+1} an gebildet wird durch Wiederholung der Gruppe $c_{m+1}, c_{m+2} \cdots c_{m+h}$ mit mindestens einer geltenden Ziffer, welche Gruppe die Periode

$$P = c_{m+1}e^{h-1} + c_{m+2}e^{h-2} + \cdots + c_{m+h-1}e + c_{m+h}$$

liefert. Alsdann ist, wenn

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_m}{e^m} = \frac{Q}{e^m}$$

ist, der zur genannten Reihe gehörige erzeugende Bruch

$$A = \frac{(Qe^h + P) - Q}{(e^h - 1)\,e^m}. \tag{5}$$

D. h. setzt man für $n = 0, 1, 2 \cdots$

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} = S_n, \tag{5*}$$

so findet man, falls nicht $h = 1$ und $P = e - 1$, stets, was auch n sein mag,

$$S_n < A < S_n + \frac{1}{e^n}.$$

In dem ausgeschlossenen Falle hat man, wenn $m \geqq 1$,

$$A = \frac{Q+1}{e^m}, \quad S_n < \frac{Q+1}{e^m} \leqq S_n + \frac{1}{e^n}, \tag{6}$$

worin rechts das obere Zeichen nur für $n < m$ steht."

„Beginnt die Periode $e - 1$ bei c_1, so hat man in (5) $m = 0$ $Q = c_0$ und wie auch sonst $e^0 = 1$ zu setzen. Demnach ist jetzt $A = c_0 + 1$ und es gehen die Beziehungen (6) über in

$$S_n < c_0 + 1 = S_n + \frac{1}{e^n}."$$

Beweis. Es ist unmittelbar ersichtlich dass

$$S_{n+k} \geqq S_n. \tag{7}$$

Dagegen hat man nach (3)

$$S_{n+k} + \frac{1}{e^{n+k}} \leqq S_n + \frac{1}{e^n}. \tag{8}$$

Setzt man $1 : e^h = \omega$, so folgt nach (2) und (5)

$$\begin{aligned} S_{m+rh} &= S_m + \frac{P}{e^{m+h}} + \frac{P}{e^{m+2h}} + \cdots + \frac{P}{e^{m+rh}} \\ &= S_m + \frac{P}{e^{m+h}} \cdot \frac{1-\omega^r}{1-\omega} = A - \frac{P}{(e^h-1)\, e^{m+rh}}, \end{aligned} \tag{9}$$

also $S_{m+rh} < A$. Da wie gross auch n sein mag, eine Zahl r zu finden ist, so dass $n < m + rh$, so hat man nach (7) $S_n \leqq S_{m+rh} < A$ d. h. $S_n < A$.

Es ergiebt sich ferner aus (9), dass

$$S_{m+rh} + \frac{1}{e^{m+rh}} = A + \frac{1}{e^{m+rh}}\left(1 - \frac{P}{e^h-1}\right). \tag{10}$$

Wenn nicht $h = 1$ und $P = e - 1$, so ist $P < e^h - 1$, somit

$$S_{m+rh} + \frac{1}{e^{m+rh}} > A,$$

also nach (8)

$$S_n + \frac{1}{e^n} > A.$$

Im Falle $h = 1$ $P = e - 1$ hat man nach (5)

$$A = (Q+1) : e^m = S_m + 1 : e^m$$

und nach (10)

$$S_{m+r} + \frac{1}{e^{m+r}} = A. \tag{11}$$

Wenn dabei $m \geqq 1$, so muss c_m von $e - 1$ verschieden sein; demnach ist nach (3)

$$(A =)\, S_m + \frac{1}{e^m} < S_n + \frac{1}{e^n} \quad (n < m).$$

Wenn aber $m = 0$ ist, so liefert die Formel (11)

$$S_r + \frac{1}{e^r} = c_0 + 1 \quad (r = 1, 2 \cdots).$$

10. Kann man die rationale Zahl A nicht in einen systematischen Bruch verwandeln, so lassen sich doch systematische Brüche S_n [s. (5*)] angeben, welche davon um weniger abweichen als eine beliebig vorgegebene positive rationale Zahl ε. Genauer: Zu jeder positiven rationalen Zahl ε gehört eine positive Zahl μ von der Beschaffenheit, dass

$$0 < A - S_n < \varepsilon$$

ist, wenn nur $n > \mu$ ist. In der That folgt aus (4), dass

$$0 < A - S_n < \frac{1}{e^n} < \frac{1}{1 + n(e-1)} \quad (e \geqq 2)$$

ist (zufolge der Beziehung (14) auf S. 27). Nimmt man nun n so an, dass

$$\frac{1}{1+n(e-1)}<\varepsilon$$

ist, also

$$n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon(e-1)},$$

so ist $1:e^n<\varepsilon$ und man hat in der That $A-S_n<\varepsilon$. Wir dürfen demnach

$$\mu\geqq\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon(e-1)},$$

setzen. Infolge dieses Verhaltens nennt man A den Grenzwerth des systematischen Bruches S_n bei unbegrenzt wachsendem n, was kurz durch die Formel

$$A=\lim_{n=+\infty} S_n \tag{12}$$

ausgedrückt wird.

Gewöhnlich schreibt man für die rechte Seite von (12)

$$c_0,\ c_1\ c_2\ \cdots\ c_m\dot{c}_{m+1}\,c_{m+2}\ \cdots\ \dot{c}_{m+h} \tag{13}$$

z. B.

$$3/37=0\cdot\dot{0}8\dot{1}.$$

Da man jeden systematischen Bruch von m Stellen auf die Form $(Q+1):e^m$, worin Q eine ganze Zahl vorstellt, bringen kann, so hat man nach (6) und (12) die Formel

$$\frac{Q+1}{e^m}=\lim_{r=+\infty}\left\{\frac{Q}{e^m}+\frac{e-1}{e^{m+1}}+\frac{e-1}{e^{m+2}}+\cdots+\frac{e-1}{e^{m+r}}\right\}$$

z. B.

$$1=\lim_{n=+\infty}\left\{\frac{e-1}{e}+\frac{e-1}{e^2}+\cdots+\frac{e-1}{e^n}\right\}.$$

Für $e=10$ ist z. B.

$$1=0\cdot\dot{9}\quad 0\cdot57=0\cdot56\dot{9}\ \text{u. s. f.}$$

Man mag die Zeichengruppe (13) einen unendlichen periodischen systematischen Bruch nennen; nur darf man sie nicht ohne Weiteres als eine Summe aus unendlich vielen Gliedern c_0, $\frac{c_1}{e}$, $\frac{c_2}{e^2}$, $\cdots$ betrachten. Dies kann erst geschehen, nachdem man an ihr alle jene Eigenschaften einer Summe, welche davon, dass dieselbe aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern besteht, unabhängig sind, nachgewiesen hat (vgl. IX. 7).

Uebungen zum III. und IV. Abschnitt.

1. Ueber die absoluten gemeinen Brüche.

1) Man wende beim Nachweise der Sätze über die Grenzen der unvollständigen Quotienten in 2) auf S. 34 die Brüche an, bediene sich also der Formeln

$$\left[\frac{a}{b}\right] \leqq \frac{a}{b} < \left[\frac{a}{b}\right] + 1 \qquad \frac{a}{b} - 1 < \left[\frac{a}{b}\right] \leqq \frac{a}{b}. \tag{1}$$

2) Der reducirte echte Bruch a/b, dessen Zähler grösser als 1, soll in die Summe von Stammbrüchen mit möglichst kleinen Nennern verwandelt werden. Ist

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_0 + 1} + \frac{1}{q_1 + 1} + \cdots + \frac{1}{q_{n-1} + 1} + \frac{1}{q_n}, \tag{2}$$

so hat man $q_0 = \left[\frac{b}{a}\right]$ und, wenn $a = a_0$, $b = b_0$ gesetzt wird und

$$\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} - \frac{1}{q_{k-1} + 1} = \frac{a_k}{b_k} \quad (k = 1, 2 \cdots n - 1)$$

ist, $q_k = \left[\frac{b_k}{a_k}\right]$ (für $k = 1, 2 \cdots n - 1$) und schliesslich

$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{1}{q_{n-1} + 1} = \frac{1}{q_n}.$$

Ist $b_k = a_k q_k + r_k$ $(k = 0, 1 \cdots n - 1)$, so ist $a_1 = a - r_0$, $a_2 = a_1 - r_1$ $\cdots$ $a_{n-1} = a_{n-2} - r_{n-2}$, $1 = a_{n-1} - r_{n-1}$.

3) Der nämliche Bruch a/b ist in die Theilbruchreihe

$$\frac{1}{q_0 + 1} + \frac{1}{(q_0 + 1)(q_1 + 1)} + \cdots + \frac{1}{(q_0 + 1) \cdots (q_{n-1} + 1)} + \\ + \frac{1}{(q_0 + 1) \cdots (q_{n-1} + 1) q_n}$$

mit möglichst kleinen Theilnennern $q_0 + 1$, $q_1 + 1$ $\cdots$ $q_{n-1} + 1$, q_n zu verwandeln. Dann nehmen dieselben mit wachsendem Zeiger $k = 0, 1, 2 \cdots n$ nicht ab.

q_0 hat denselben Werth wie in 2). Ferner ist neben

$$\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} - \frac{1}{q_{k-1} + 1} = \frac{1}{q_{k-1} + 1} \cdot \frac{a_k}{b_k} \qquad q_k = \left[\frac{b_k}{a_k}\right] \text{ (für } k = 1, 2 \cdots n - 1)$$

und

$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{1}{q_{n-1} + 1} = \frac{1}{q_{n-1} + 1} \cdot \frac{1}{q_n}.$$

4) Sind die Brüche a/b, a'/b' ungleich, so liegt der Bruch $\frac{a + a'}{b + b'}$ zwischen ihnen.

5) Erfüllen die Zähler und Nenner zweier reducirten Brüche a/b, a'/b' die Gleichung $a'b - b'a = 1$, so liegen zwischen ihnen nur Brüche,

deren reducirter Nenner nicht kleiner als $b + b'$ ist. — Folgt unmittelbar aus der Identität

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \left(\frac{a'}{b'} - \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} - \frac{a}{b}\right).$$

6) Ordnet man die reducirten echten Brüche, deren Nenner eine gegebene Zahl n nicht übersteigen, mit Zuziehung der uneigentlichen Brüche $0/1$, $1/1$, in eine steigende Reihe und bezeichnet mit a/b und a'/b' irgend zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder derselben, so hat man stets

$$a'b - b'a = 1.$$

Der Satz kann mit Hilfe der beiden vorhergehenden durch den Schluss von n auf $n + 1$ bewiesen werden.

7) a. Für die soeben erwähnten Brüche gilt ferner der Satz, dass stets $b + b' \geqq n + 1$ ist.

b. Sind a/b, a'/b', a''/b'' drei unmittelbar aufeinander folgende Brüche, der in 6) vorgeführten Reihe, so ist stets

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a + a''}{b + b''}.$$

c. Zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgende Glieder $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ der genannten Bruchreihe lässt sich dann und nur dann ein und zwar stets nur ein einziger Bruch mit dem Nenner $n + 1$ einschalten, wenn $b + b' = n + 1$ ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so lautet der betreffende Bruch $\frac{a + a'}{b + b'}$.

d. Schreibt man von den Brüchen der Reihe in 6) nur die Nenner an, so bilden dieselben eine von der Mitte aus, welche stets von der Zahl 2 eingenommen wird, nach beiden Seiten symmetrisch verlaufende Reihe von Zahlen.

e. Die Reihe in 6) beginnt stets mit den Brüchen

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \ldots, \frac{1}{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, \frac{2}{n}$$

und endet mit den Brüchen

$$\frac{n-2}{n}, \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, \frac{\left[\frac{n}{2}\right]+1}{\left[\frac{n}{2}\right]+2}, \ldots, \frac{n-3}{n-2}, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n}, \frac{1}{1},$$

wobei die beiden Brüche $\frac{2}{n}$ und $\frac{n-2}{n}$, falls n gerade ist, noch zu reduciren sind.

8) Unter welcher Bedingung hat die Summe oder Differenz zweier reducirten Brüche a/b, a'/b' in der reducirten Form den Nenner bb'?

9) Nimmt man bei den Divisionen, welche zur Ermittelung des grössten gemeinschaftlichen Theilers der Zahlen a und b erforderlich sind (II. 12), den Rest stets kleiner als die Hälfte des Divisors, so ist der n-te Rest kleiner als $b/2^n$.

10) Die Ungleichung (14) auf S. 27 gilt nebst dem dort gegebenen Beweise auch, wenn d einen Bruch bedeutet. Man zeige auf ähnliche Art, dass wenn d einen Bruch kleiner als $1/m$ bezeichnet, dann

$$(1-d)^m > 1 - md$$

ist.

11) „Es sei α eine absolute rationale Zahl, welche nicht die m-te Potenz einer andern ist. Wenn alsdann π_1 einen Bruch bedeutet, dessen m-te Potenz kleiner als α und π_2 einen, dessen m-te Potenz grösser als α ist, so giebt es sowohl Brüche grösser als π_1, deren m-te Potenz kleiner als α, als auch Brüche kleiner als π_2, deren m-te Potenz grösser als α ist.“

Der Beweis wird mit Hilfe der in 10) erwähnten Ungleichungen leicht geliefert. Wir haben solche Brüche ξ_1 und ξ_2 zu bestimmen, dass

$$(1)\quad (\pi_1+\xi_1)^m < \alpha, \qquad\qquad (2)\quad (\pi_2-\xi_2)^m > \alpha$$

ist. Nun ist, falls $\xi_1 < \pi_1$ ist,

$$1+\frac{\xi_1}{\pi_1} < 1 : \left(1-\frac{\xi_1}{\pi_1}\right)$$

und falls ξ_1 kleiner als π_1/m ist,

$$\left(1-\frac{\xi_1}{\pi_1}\right)^m > 1-\frac{m\xi_1}{\pi_1}.$$

Demnach hat man

$$(\pi_1+\xi_1)^m = \pi_1{}^m\left(1+\frac{\xi_1}{\pi_1}\right)^m < \pi_1{}^m : \left(1-\frac{m\xi_1}{\pi_1}\right).$$

Der letzte Bruch ist kleiner als α, wenn

$$\pi_1{}^m : \alpha \leqq 1-\frac{m\xi_1}{\pi_1} \quad \text{d. i.} \quad \xi_1 \leqq \frac{\pi_1(\alpha-\pi_1{}^m)}{m\alpha}.$$

Unter dieser Bedingung besteht also die Ungleichung (1). (2) ist sicher erfüllt, wenn

$$\xi_2 \leqq \frac{\pi_2{}^m-\alpha}{m\pi_2{}^{m-1}}.$$

2. Ueber die absoluten systematischen Brüche.

1) Man beweise die Sätze über die Division der Dezimalbrüche in IV. 7 durch Zurückführung derselben auf die entsprechenden Sätze in II. 11 für die natürlichen Zahlen

$$a = a_0 10^{m-1} + a_1 10^{m-2} + \cdots + a_{m-1}, \quad b = b_0 10^{n-1} + \cdots + b_{n-1},$$

wobei die Fälle zu unterscheiden sind, ob a grösser oder kleiner als b ist.

2) Beweis des Satzes 5) auf S. 35 mit Benutzung von gebrochenen Zahlen, also der Beziehungen (1) auf S. 93.

3) Fourier's geordnete Division (F. Analyse des équations 1831, S. 186). Dieses Verfahren dient dazu, um im Falle dass der Divisor β auf S. 86 viele Ziffern hat (d. i. die Zahl n beträchtlich ist) beliebig viele Stellen des Quotienten

$$\alpha : \beta = c_0 10^h + c_1 \cdot 10^{h-1} + \cdots + c_s 10^{h-s} + \cdots$$

(h ist entweder $p - q$ oder $p - q - 1$) genau zu ermitteln. Man dividirt α durch den auf k ($< n$) Stellen verkürzten Divisor und zieht das Product aus einer Stelle des Quotienten und einer des Divisors erst von demjenigen Theildividenden ab, welcher mit der Ziffer vom Range der Einheiten jenes Products schliesst. Ein Beispiel dürfte zur Erläuterung des Verfahrens genügen. Um den Quotienten $624 \cdot 1 : 72864 \cdot 2$ auf 7 Dezimalen zu entwickeln, hat man, wenn man den verkürzten Divisor 728 benutzt, die nachstehende Rechnung.

$$\begin{array}{l}
624{\cdot}1 : \overline{728}64 \cdot 2 = 0 \cdot 0085652 \cdots \\
582\,4 \\
\underline{\quad 48} \\
41\,22(0) \\
36\,40 \\
\underline{\quad\;\; 62} \\
\quad 4\,758(0) \\
\quad 4\,368 \\
\underline{\qquad\;\; 72} \\
\qquad 3828(0) \\
\qquad 3640 \\
\underline{\qquad\quad\; 64} \\
\qquad\quad 1816(0) \\
\qquad\quad 1456 \\
\underline{\qquad\qquad 44} \\
\qquad\qquad 3556
\end{array}$$

48	30	36	30	12
	32	20	24	20
		16	10	12
48	62	72	64	44

Vom ersten Theildividend $624 \cdot 1$ zieht man nicht allein $728 \times 8 = 5824$ ab, sondern auch den nunmehr ebenfalls bekannten Theil $6 \times 8 = 48$ der Hundertel, desgleichen vom 2. Theildividend 4122 nicht allein $728 \times 5 = 3640$, sondern auch den nunmehr auch schon bekannten Theil $6 \times 5 + 4 \times 8 = 62$ der Tausendstel u. s. f. Die Verbesserungen der aufeinanderfolgenden Theildividende sind in der obigen Tafel übersichtlich angeordnet. Am Schlusse unserer Rechnung erscheint der Divisionsrest $0 \cdot 003556$. Aus dieser Zahl ergiebt sich der wahre Rest durch Abzug der Einheiten der zwei Stellen, welche auf ihre letzte folgen. Diese sind

$$\begin{array}{rr}
2 \times 5 + 4 \times 2 = & 18 \\
2 \times 2 \quad & \underline{\;\;\,4} \\
 & 184.
\end{array}$$

Der wahre Rest ist mithin $0 \cdot 00355416$.

Bei mechanischer Nachahmung der soeben gegebenen Rechnung könnten Schwierigkeiten eintreten. Man muss bedenken, dass da der Schluss des Divisors β, welcher beim Ansetzen der von den Theildividenden wegzunehmenden Beträge nicht berücksichtigt wird, kleiner ist als eine Einheit der $(k+1)$-ten Stelle derselben d. i. kleiner als 10^{q-k}, der 2. Theildividend zu klein sein kann um beinahe

$$c_0 10^h \cdot 10^{q-k} < 10^{p-k+1}$$

d. i. 10 Einheiten der letzten in ihm vorkommenden Stelle. Demnach ist, falls er weniger als 10 betragen sollte, die für c_0 angesetzte Ziffer um 1 zu gross. U. s. f.

4) Man zeige 1) dass der reducirte Nenner des Bruches (S. 90)

$$P : (e^h - 1)$$

relative Primzahl zu e ist; 2) dass der des Bruches

$$(Qe^h + P - Q) : e^m (e^h - 1) \quad (m \geqq 1)$$

sowohl Primfactoren von e enthält, als auch solche, durch welche e nicht theilbar ist. Ausgeschlossen ist in beiden Fällen die Annahme $P = e - 1$.

3. Ueber die relativen rationalen Zahlen.

Zunächst seien nochmals die in Note [1]) auf S. 56 und am Schlusse von IV. 3 erwähnten Uebungen empfohlen.

1) „Sind $a\,b$ natürliche Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, so giebt es stets solche ganze Zahlen $x\,y$, dass

$$ay - bx = 1 \tag{1}$$

ist und zwar sind beide gleichbezeichnet." — Der Beweis ist herzuleiten aus der Kette von Gleichungen (9) auf S. 32, indem man in der letzten zuerst $b^{(n-1)}$ durch $b^{(n-2)}$ und $b^{(n-3)}$, hierauf $b^{(n-2)}$ durch $b^{(n-3)}$ und $b^{(n-4)}$ u. s. w. ersetzt.

Wie findet man, wenn ein Paar von Zahlen $x\,y$, welche die Gleichung (1) befriedigen, bekannt ist, alle übrigen?

2) Hat die ganzzahlige algebraische Gleichung (1) auf S. 70 $A_0 X^m + \cdots = 0$ eine rationale Wurzel, so muss ihr reducirter Nenner ein Theiler von A_0 sein. — Diese Wurzel muss eine ganze Zahl sein, falls $A_0 = \pm 1$ ist.

3) $A\,A'\,B\,B'$ seien irgendwelche rationale Zahlen, welche die Ungleichungen $A > A'$, $B > B'$ erfüllen; auch sollen weder A und B', noch A' und B zugleich verschwinden. Alsdann ist $AB > A'B'$, wenn entweder A und B' oder A' und B nicht negativ sind. Dagegen ist $AB < A'B'$, wenn entweder A und B' oder A' und B nicht positiv sind.

Anleitung. Man setze

$$AB - A'B' = A(B - B') + B'(A - A') \text{ u. s. w.}$$

4) Nach Gauss heissen zwei ganze Zahlen A, B congruent ($\equiv$) in Bezug auf eine dritte, den Modul p, oder nicht, je nachdem ihr Unterschied $A - B$ durch p theilbar ist oder nicht.

Man könnte A und B auch gleich oder ungleich in Bezug auf den Modul p nennen (I. 2). Dann würde aber die Bequemlichkeit fordern, für diese Art der Gleichheit der ganzen Zahlen ein neues Zeichen, festzusetzen. — Sind die Zahlen A, B congruent mod. p, so mögen $a\,b$ die kleinsten positiven Zahlen sein derart dass $A \equiv a \pmod{p}$, $B \equiv b \pmod{p}$. Ist $a > b$, so könnte man ferner A grösser in Bezug auf den Modul p nennen, als B. $a + b$ und jede dazu mod. p congruente Zahl könnte die Summe von $A + B$ in Bezug auf den Modul p heissen. U. s. f.

5) Zur Erläuterung der Bemerkung auf S. 52, dass die Festsetzung der Formel (α) allein noch nicht die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung $b \circ x = a$ verbürgt, diene das folgende Beispiel. — Es sei das System (I) das der natürlichen Zahlen, die Verknüpfung $\circ$ ihre Addition. Der Gleichung $b + x = a$ ordnen wir für den Fall, dass $a \leqq b$ ist, ein neues Ding (a, b) zu, welches durch die 7. Definition auf S. 61 zu einer Grösse gemacht sei. Es sei also $(a, b) = (a', b')$ dann und nur dann, wenn $a + b' = a' + b$ ist, woraus im Falle dass $a < b$ ist, folgt, dass auch $a' < b'$ und $b - a = b' - a'$ ist. Das Paar (a, a), welches gleich (a', a') ist, sei mit 0 bezeichnet. Nun erklären wir die Summe $(a, b) + c$ in folgender Art.

1) Falls $a + c > b$ ist, sei

$$(a, b) + c = (a + c) - b.$$

2) Falls $a + c \leqq b < a + c + 6$ ist, sei

$$(a, b) + c = (a + c + 6) - b$$

3) falls $b = a + c + 6$ ist, sei $(a, b) + c = 0$ und

4) falls $b > a + c + 6$ ist, sei

$$(a, b) + c = b - (a + c).$$

Man wird leicht erkennen, dass zufolge dieser Erklärungen neben $(a, b) = (a', b')$

$$(a, b) + c = (a', b') + c$$

ist. Ausserdem sei festgesetzt, dass stets

$$c + (a, b) = (a, b) + c$$

sein soll. Man zeige, dass gemäss dieser Erklärungen die Gleichung

$$x + 7 = 2$$

neben der Lösung $x = (2, 7)$ noch die davon verschiedene Lösung $x = (1, 12)$ besitzt.

NB. Das Paar (a, b) fällt nicht mit der negativen Zahl $-(b - a)$ zusammen. In der That ist nach 3)

$$(a, b + 6) + (b - a) = 0 \quad \text{also} \quad (a, b + 6) = 0 - (b - a).$$

Die Gleichung $x + (b - a) = 0$ hat nämlich nur die Lösung $x = (a, b + 6)$. Vgl. S. 41.

Genocchi, Angelo, Differentialrechnung und Anfangsgründe der Integralrechnung, herausgegeben von Giuseppe Peano. Autorisierte deutsche Übersetzung von Dr. G. Bohlmann, Privatdozent an der Universität Göttingen, und A. Schepp, Premierlieutenant a. D. in Wiesbaden. Mit einem Vorwort von A. Mayer. [VII u. 399 S.] gr. 8. 1899. In Leinwand geb. n. *M* 12.—

Harnack, Dr. **Axel,** o. Professor der Mathematik an dem Polytechnikum zu Dresden, die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Zur Einführung in das Studium dargestellt. Mit Figuren im Text. [VIII u. 409 S.] gr. 8. 1881. geh. n. *M* 7.60.

Netto, Dr. **Eugen,** o. ö. Prof. der Mathematik an der Universität Gießen, Vorlesungen über Algebra. 2 Bände. gr. 8. geh. n. *M* 28.—

Einzeln:

I. Band. [X u. 388 S.] 1896. n. *M* 12.—

II. Band. 1. Lieferung. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [192 S.] 1898. n. *M* 6.—

II. — 2. Lieferung. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [XII u. S. 193—519.] 1899. n. *M* 10.—

Pascal, Ernst, ord. Prof. an der Universität zu Pavia, Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Litteraturnachweise). Autorisierte deutsche Ausgabe von A. Schepp, Ingenieur und Oberleutnant a. D. zu Wiesbaden. In 2 Teilen. I. Teil: Die Analysis. 8. 1900. Biegsam in Leinw. geb.
[Der I. Teil erscheint im Juli d. J.; der II. (Schlufs-)Teil, die Geometrie behandelnd, zu Ostern 1901.]

Pasch, Dr. **Moritz,** Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung. [VII u. 188 S.] Mit Figuren im Text. gr. 8. 1882. geh. n. *M* 3.20.

Serret, J.-A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack. Drei Bände. Mit in den Text gedruckten Figuren. gr. 8. geh.

Einzeln:

I. Band: Differentialrechnung. Zweite, durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Privatdocent an der Universität zu Göttingen. Mit 85 in den Text gedr. Figuren. [XVI u. 570 S.] 1897. n. *M* 10.—

II. — Integralrechnung. Mit Unterstützung von H. Liebmann und E. Zermelo hrsg. von G. Bohlmann. [XII u. 428 S.] 1899. n. *M* 8.—

II. — 2. Hälfte: Differentialgleichungen. [VI u. 388 S.] 1885. n. *M* 7.20.
[Neue Auflage von II, 2, als III. Band, unter der Presse.]

Stolz, Dr. **Otto,** ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 3 Teilen. gr. 8. geh. n. *M* 24.—

Einzeln:

I. Teil. Reelle Veränderliche und Functionen. Mit 4 Figuren im Text. [X u. 460 S.] 1893. n. *M* 8.—

II. — Complexe Veränderliche und Functionen. Mit 33 Figuren im Text. [IX u. 338 S.] 1896. n. *M* 8.—

III. — Die Lehre von den Doppelintegralen. Eine Ergänzung zum I. Teile des Werkes. Mit 41 Figuren im Text. [VIII u. 296 S.] 1899. n. *M* 8.—

—— Grössen und Zahlen. Rede bei Gelegenheit der feierlichen Kundmachung der gelösten Preisaufgaben am 2. März 1891 zu Innsbruck gehalten. [30 S.] gr. 8. 1891. geh. n. *M* —.80.

zumal, im Vergleiche z. B. mit Frankreich, bei uns in Deutschland die mathematische Litteratur an Lehrbüchern über spezielle Gebiete der mathematischen Forschung nicht allzu reich ist.

Die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner giebt sich der Hoffnung hin, dafs sich recht zahlreiche Mathematiker, Physiker und Astronomen, Geodäten und Techniker, sowohl des In- als des Auslandes, in deren Forschungsgebieten derartige Arbeiten erwünscht sind, zur Mitarbeiterschaft an dem Unternehmen entschliefsen möchten. Besonders nahe liegt die Beteiligung den Herren Mitarbeitern an der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Die umfangreichen litterarischen und speziell fachlichen Studien, welche für die Bearbeitung von Abschnitten der Encyklopädie vorzunehmen waren, konnten in dem notwendig eng begrenzten Rahmen nicht vollständig niedergelegt werden. Hier aber, bei den Werken der gegenwärtigen Sammlung, ist die Möglichkeit gegeben, den Stoff freier zu gestalten und die individuelle Auffassung und Richtung des einzelnen Bearbeiters in höherem Mafse zur Geltung zu bringen. Doch ist, wie gesagt, jede Arbeit, die sich dem Plane der Sammlung einfügen läfst, im gleichen Mafse willkommen.

Bisher haben die folgenden Gelehrten ihre geschätzte Mitwirkung zugesagt, während erfreulicherweise stetig neue Anerbieten zur Mitarbeit an der Sammlung einlaufen, worüber in meinen „Mitteilungen" fortlaufend berichtet werden wird:

P. Bachmann, niedere Zahlentheorie.
M. Bôcher, über die reellen Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
G. Castelnuovo und **F. Enriques,** Theorie der algebraischen Flächen.
L. E. Dickson, Linear Groups with an exposition of the Galois Field theory. (Englisch.)
F. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.
F. Dingeldey, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.
F. Enriques, Prinzipien der Geometrie.
Ph. Furtwängler, die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen.
M. Grübler, Lehrbuch der hydraulischen Motoren.
J. Harkness, elliptische Funktionen.
L. Henneberg, Lehrbuch der graphischen Statik.
G. Jung, Geometrie der Massen.
G. Kohn, rationale Kurven.
A. Krazer, Handbuch der Lehre von den Thetafunktionen.
R. v. Lilienthal, Differentialgeometrie.
A. Loewy, Vorlesungen über die Theorie der linearen Substitutionsgruppen.

G. Loria, spezielle, algebraische und
Theorie und Geschichte. [Unter der
R. Mehmke, über graphisches Rechnen
über numerisches Rechnen.
W. Meyerhofer, die mathematischen
E. Netto, Kombinatorik.
W. F. Osgood, allgemeine Funktionentheorie.
E. Pascal, Determinanten. Theorie und Anwendungen. [Erschienen.]
S. Pincherle, Funktional-Gleichungen und -Operationen.
Fr. Pockels, Krystalloptik.
A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. (E
mentare Theorie der unendlichen Algorithmen und der analytisc
Funktionen einer komplexen Veränderlichen.) Bd. I. Zahlenle
Bd. II. Funktionenlehre.
C. Segre, Vorlesungen über algebraische Geometrie, mit besond
Berücksichtigung der mehrdimensionalen Räume.
D. Seliwanoff, Differenzenrechnung.
M. Simon, Elementargeometrie.
P. Stäckel, Lehrbuch der allgemeinen Dynamik.
P. Stäckel, Differentialgeometrie höherer Mannigfaltigkeiten.
O. Staude, Flächen und Flächensysteme zweiter Ordnung.
O. Stolz und **J. A. Gmeiner,** theoretische Arithmetik. [Abt. I erschiene
R. Sturm, Theorie der geometrischen Verwandtschaften.
R. Sturm, die kubische Raumkurve.
H. E. Timerding, Theorie der Streckensysteme und Schrauben.
K. Th. Vahlen, Geschichte des Fundamentalsatzes der Algebra.
K. Th. Vahlen, Geschichte des Sturmschen Satzes.
A. Voss, Principien der rationellen Mechanik.
A. Voss, Abbildung und Abwicklung der krummen Flächen.
E. v. Weber, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theo
der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung. [Erschienen.]
A. Wiman, endliche Gruppen linearer Transformationen.
W. Wirtinger, algebraische Funktionen und ihre Integrale.
W. Wirtinger, partielle Differentialgleichungen.
H. G. Zeuthen, die abzählenden Methoden der Geometrie.

☞ Mitteilungen über weitere Bände werden baldigst folgen.

Leipzig, Poststraſse 3.
Januar 1901.