LEHRBUCH DER DIFFERENTIAL- U. INTEGRAL RECHNUNG

III

DRITTE AUFLAGE

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematik**, der **Naturwissenschaften** und **Technik** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes, durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter dieser Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband Geschichte, Philosophie und Didaktik besprechen wird. Eine **französische Ausgabe**, von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica**, Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften, das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik**, Organ für angewandte Mathematik, die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter**, die **Monatshefte für den naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen**, die **Geographische Zeitschrift**, das **Archiv für Rassen- und Gesellschafts-Biologie**, ferner **Himmel und Erde**, illustrierte naturwissenschaftliche Monatsschrift u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“**. Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die in 31000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen. **Die Mitteilungen werden jedem Interessenten auf Wunsch regelmäßig bei Erscheinen umsonst und postfrei von mir übersandt.** Das ausführliche **„Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften“** 101. Ausgabe, mit eingehender systematischer und alphabetischer Bibliographie und einem Gedenktagebuch für Mathematiker, 10 Bildn altungsliteratur enthaltend [CXXXI eressenten umsonst und postfrei zur

Leipzig, Pos

G. Teubner.

M. V. s. 150 : 1108.

Dietrich Frhr. v. Zedlitz.

Dezember 1924.

J. A. SERRET

LEHRBUCH DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

NACH AXEL HARNACKS ÜBERSETZUNG

DRITTE AUFLAGE

NEU BEARBEITET VON

GEORG SCHEFFERS

DRITTER BAND

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND VARIATIONSRECHNUNG

MIT 63 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909

Vorwort.

In viel stärkerem Maße als die beiden ersten Bände wurde dieser dritte einer gründlichen Umarbeitung unterworfen. Nachdem in den früheren Bänden durchweg eine reinliche Scheidung zwischen den Betrachtungen im reellen und imaginären Gebiete ausgeführt worden war, ergab sich die Notwendigkeit, die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zunächst im reellen Bereiche vorzutragen. Auf diese Weise wurde erreicht, daß man nun leicht aus allen drei Bänden des Werkes diejenigen Kapitel herausfindet, in denen das Imaginäre vermieden wird. Dies ist dem jungen Studierenden, der noch keine Funktionentheorie kennt, erwünscht. Außerdem dürfte es auch im Hinblicke auf die Anwendungen auf Probleme der Mechanik und Physik gerechtfertigt sein, daß die reelle Theorie für sich entwickelt wird.

Es erschien ferner erwünscht, auch die auf die Anwendung der infinitesimalen Transformationen beruhenden Lieschen Integrationsmethoden heranzuziehen, da sie an theoretischer Wichtigkeit mit den Methoden, die sich an die Multiplikatoren anschließen, mindestens auf gleicher Stufe stehen, praktisch aber ihnen überlegen sind. Ansätze dazu fanden sich schon in der zweiten Auflage, und die neue Bearbeitung entwickelt diese Theorien soweit, als über den Begriff der eingliedrigen Gruppe nicht hinausgegangen zu werden braucht. Da aber hierbei die Fülle des Stoffes zu einer knappen Darstellung nötigte, ist dafür Sorge getragen worden, daß die Nummern, die von den Lieschen Methoden handeln, beiseite gelassen werden können.

Im übrigen darf wohl ein Fortschritt auch darin erblickt werden, daß die neue Bearbeitung großes Gewicht auf schärfere Definitionen der Begriffe legt, so z. B. des Begriffes der singulären Lösungen, der auf den Begriff singulärer Elemente (x, y, y') usw. zurückgeführt wird. Ferner ist mehreres neu aufgenommen worden, so die Cauchysche Darstellung der Integration eines d'Alembertschen Systems im allgemeinen Falle, die Integration vollständiger Systeme und im Anschlusse hieran auch der Jacobische Multiplikator mit dem Prinzipe des letzten

Multiplikators. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wird jetzt auch nach der Cauchyschen Methode unter grundsätzlicher Benutzung des Lieschen Begriffes der charakteristischen Streifen dargestellt, und ferner wird, wenn auch nur kurz, auf die Mongeschen Differentialgleichungen eingegangen.

Die Reihenfolge des Stoffes ist, wie es übrigens in der Natur der Sache liegt, im wesentlichen die alte geblieben. An den Anfang wurde aber ein orientierendes Kapitel über die verschiedenen Arten von Differentialgleichungen gesetzt. Die Anzahl der Beispiele ist größer geworden, allerdings immer noch nicht so groß, wie es eigentlich zu wünschen wäre. Fast alle in der zweiten Auflage enthaltenen Beispiele kehren wieder, zum Teil an anderen Stellen, wo sie besser am Platze sind.

Da das Buch nicht gar zu stark werden sollte, mußte vom früheren Inhalte etwas geopfert werden. Ich habe in der Hauptsache nur einige Ausführungen über die Berechnung bestimmter Integrale und die Summation einer unendlichen Reihe mittels einer Differentialgleichung fortgelassen, die in der Tat einen nur episodenhaften Charakter hatten, und außerdem die Betrachtungen über partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung. Dies glaube ich wohl verantworten zu können in der Erwägung, daß z. B. die neugebrachte Theorie der vollständigen Systeme zunächst viel wichtiger ist, daß ferner die partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung eigentlich den Rahmen eines Lehrbuches für die Studierenden der drei ersten Semester überschreiten, und daß schließlich auch diejenigen Entwicklungen, die bisher darüber gebracht wurden, doch immer nur Einzelheiten gaben. Den von *Harnack* herrührenden Anhang „Zur Integration der partiellen Differentialgleichung in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen“ durfte ich fortlassen, da er sich im wesentlichen mit seiner Abhandlung „Anwendung der Fourierschen Reihe auf die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen“ im 21. Bande der Mathematischen Annalen, S. 305—326, deckt und daher allgemein zugänglich ist.

Auch das letzte Kapitel, dem jetzt übrigens eine bescheidenere Überschrift gegeben worden ist, erfuhr eine Umarbeitung, hat aber den Inhalt in demselben Umfange wie früher behalten. Die zweite Auflage ließ hier die Definition der Extremwerte von Integralen vermissen, die jetzt gebracht wird. Um dabei Schwierigkeiten zu umgehen, die sich bei den Integralen mit veränderlichen Grenzen ergeben, wurden solche Integrale mittels geeigneter Substitutionen in Integrale mit festen Grenzen verwandelt.

Man wird vielleicht zweifeln, ob das Buch nun noch als *Serret*sches bezeichnet werden darf. Da aber der alte Text auch der neuen Bearbeitung als Leitfaden diente, wobei aus ihm fast alle Beispiele übernommen wurden, und da dieser Band — wie ich hoffe — mit den beiden ersten einheitlich zusammenhängt, dürfte es dem Buche doch wohl gestattet sein, den alten Autornamen als Ehrenschild weiterzuführen.

Wie im ersten und zweiten Bande habe ich auch in diesem dritten alle Figuren neu gezeichnet und photomechanisch übertragen lassen. Ein ausführliches alphabetisches Sachregister ist auch dieses Mal beigegeben.

Dies Vorwort ist schon lang genug, so daß ich auf die Mängel meiner neuen Bearbeitung, soweit sie mir zu Bewußtsein gekommen sind, hier nicht auch noch eingehen will. Immerhin bitte ich wie im Vorworte zum zweiten Bande, darauf Rücksicht nehmen zu wollen, daß ich versucht habe, mich soweit möglich an die bisherigen Bearbeitungen anzuschließen. Man wolle also dies Buch nicht an sich, sondern in Vergleichung mit seinen früheren Auflagen beurteilen. Auf zwei Punkte muß aber doch mit Rücksicht auf Äußerungen in Rezensionen eingegangen werden: Weshalb die in der zweiten Auflage am Schlusse hinzugefügten literarischen Hinweise fortgelassen worden sind, wurde von mir schon früher begründet, aber in Besprechungen des Werkes beanstandet. Deshalb sei bemerkt, daß auch deshalb darauf verzichtet werden mußte, weil die Bände sonst noch umfangreicher geworden wären; man möge bedenken, daß es nicht geringe Schwierigkeiten machte, trotz der Einschaltung vieler neuer Dinge den alten Umfang einigermaßen beizubehalten. Ferner hoffte ich seinerzeit, dem dritten Bande geschichtliche Nachweise hinzufügen zu können. Aber das hätte eine bedeutende weitere Verzögerung der Ausgabe dieses Bandes zur Folge gehabt, die ich im Hinblicke darauf, daß die zweite Auflage längst vergriffen ist, nicht verantworten konnte.

Schließlich erwähne ich noch dankbar das mir immer gezeigte Entgegenkommen des Verlagshauses und die treue, unauffällige und selbstlose Kleinarbeit, die darin liegt, daß mein werter Freund und Kollege *Dingeldey* in Darmstadt auch dieses Mal eine Korrektur mit gelesen hat.

Steglitz, im April 1909.

Georg Scheffers

Inhalt.[1])

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.[2])

---

1) Ein alphabetisch geordnetes Sachregister befindet sich am Schlusse des Bandes.

2) Beim ersten Studium kann man nach der Anweisung in der Anmerkung zu S. 30 vorgehen.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Systeme erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Fünftes Kapitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung.

---

1) Dieser Paragraph kann überschlagen werden.

Siebentes Kapitel.

Achtes Kapitel.

---

1) Diese Nummer kann überschlagen werden.

Erstes Kapitel.

Übersicht über die Arten von Differentialgleichungen.

§ 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

661. Gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung. Die Grundaufgabe der Integralrechnung, die nach Nr. 399 darin besteht, eine solche Funktion y von einer Veränderlichen x zu ermitteln, deren erste Ableitung y' eine gegebene Funktion von x ist, kann so verallgemeinert werden:

Es soll eine solche Funktion y von x ermittelt werden, deren r^{te} Ableitung $y^{(r)}$ eine gegebene Funktion von x, von y und von den $r-1$ Ableitungen niedrigerer Ordnung $y', y'', \ldots y^{(r-1)}$ ist:

$$y^{(r)} = f(x, y, y', \ldots y^{(r-1)}). \tag{1}$$

Wenn die Bedingungsgleichung nicht gerade in dieser nach $y^{(r)}$ aufgelösten Form vorliegt, hat sie die allgemeinere Gestalt:

$$F(x, y, y', \ldots y^{(r)}) = 0. \tag{2}$$

Sie heißt nach Nr. 88 eine *gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung*, vorausgesetzt, daß sie wirklich $y^{(r)}$ enthält.

Eine Funktion $y = \varphi(x)$, die der Gleichung (2) Genüge leistet, wie auch die unabhängige Veränderliche x in einem gewissen Intervalle gewählt sein mag, wird eine *Lösung* der Differentialgleichung genannt. Die vorgelegte Differentialgleichung r^{ter} Ordnung *vollständig integrieren* heißt, alle ihre Lösungen berechnen. Bei der oberflächlichen Übersicht, die wir in diesem ersten Kapitel geben, wollen wir noch gar nicht auf diejenigen Voraussetzungen eingehen, die in bezug auf die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen zu machen sind, vielmehr annehmen, daß alle in der Folge auszuführenden Operationen des Eliminierens, Substituierens und Differenzierens gestattet seien.

Aus der Gleichung (2) ergibt sich durch *vollständige* Differentiation nach x, weil y eine Funktion von x sein soll:

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} y^{(r+1)} = 0.$$

Wenn die linke Seite der Gleichung (2) nicht frei von $y^{(r)}$ ist, muß $\partial F : \partial y^{(r)} \neq 0$ sein, so daß also $y^{(r+1)}$ in (3) gewiß nicht fehlt. Die Gleichung (3) stellt also eine solche gewöhnliche Differentialgleichung $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung vor, die von allen Lösungen y der vorgelegten Differentialgleichung r^{ter} Ordnung (2) befriedigt wird. Sie kann abermals vollständig nach x differenziert werden. Dadurch ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung $(r+2)^{\text{ter}}$ Ordnung, die ebenfalls von allen Lösungen y der vorgelegten Gleichung (2) erfüllt wird, usw. Weil die hervorgehenden Gleichungen nach $y^{(r+1)}$, $y^{(r+2)}$, ... aufgelöst werden können, ist infolge der vorgelegten Gleichung (2) jede Ableitung von y von der $(r+1)^{\text{ten}}$ Ordnung an eine bekannte Funktion von x, y und den niedrigeren Ableitungen, und weil die Gleichung (2) selbst die Ableitung r^{ter} Ordnung als Funktion von $x, y, y', \ldots y^{(r-1)}$ definiert, sind mithin alle Ableitungen der gesuchten Funktion y von der r^{ten} Ordnung an vorgeschriebene Funktionen von $x, y, y', \ldots y^{(r-1)}$.

Man sagt, daß die durch beliebig oft wiederholte vollständige Differentiation der gegebenen Differentialgleichung (2) gewonnenen Gleichungen (3) usw., sowie diejenigen Gleichungen, die sich weiterhin durch Elimination und Substitution aus ihnen ergeben, *Folgen* der Gleichung (2) seien. Das Wort *Folge* wird hierbei in weiterem Sinne als in Nr. 79 gebraucht, wo wir nur Eliminationen und Substitutionen, aber keine Differentiationen anwandten.

662. System r^{ter} Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Werden m noch unbekannte Funktionen von x mit $y_1, y_2, \ldots y_m$ bezeichnet, so kann man sich die Aufgabe stellen, diese Funktionen so zu bestimmen, daß sie einem vorgeschriebenen Systeme von Gleichungen zwischen den Größen $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$ und den Ableitungen von

$y_1, y_2, \ldots, y_m$ bis zu denen von der r^{ten} Ordnung genügen. Ein solches Gleichungensystem bestehe etwa aus den s Gleichungen:

$$(1) \qquad F_i(x, y_1, \ldots y_m, y_1', \ldots y_m', \ldots y_1^{(r)}, \ldots y_m^{(r)}) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots s).$$

Es heißt ein *System r^{ter} Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen*, sobald wenigstens eine der m Ableitungen r^{ter} Ordnung $y_1^{(r)}, \ldots y_m^{(r)}$ wirklich in ihm vorkommt. Ein *System von Lösungen* dieses Systems (1) heißt jedes solche System von Funktionen $y_1 = \varphi_1(x), \ldots y_m = \varphi_m(x)$, durch dessen Substitution alle Gleichungen (1) befriedigt werden, wenn x innerhalb eines Intervalles willkürlich bleibt. Das System (1) *vollständig integrieren* heißt, alle vorhandenen Systeme von Lösungen ermitteln.

Wie bei einer einzigen gewöhnlichen Differentialgleichung gelangt man auch bei dem Systeme (1) durch beliebig oft wiederholte *vollständige* Differentiation nach x zu Differentialgleichungen *höherer* Ordnung, denen alle Lösungensysteme von (1) genügen und die man daher *Folgen* des Systems (1) nennt.

Häufig werden Systeme (1) ausdrücklich als Systeme von *gleichzeitigen* oder *simultanen* Differentialgleichungen bezeichnet. Jedoch dürfte es meistens überflüssig sein, den Umstand besonders zu betonen, daß *alle* Gleichungen des Systems zusammen gelten sollen.

663. Zurückführung eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf ein System erster Ordnung. Ein Verfahren, das wir schon in Nr. 88 angedeutet haben, gestattet die Verwandlung eines Systems höherer Ordnung in eines von der ersten Ordnung.

Liegt nämlich zunächst *nur eine* gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung wie in Nr. 661 vor:

$$(1) \qquad F(x, y, y', \ldots y^{(r)}) = 0,$$

so sind mit y auch die Ableitungen $y', y'', \ldots y^{(r-1)}$ unbekannte Funktionen von x, und wir können sie mit $z_1, z_2, \ldots z_{r-1}$ bezeichnen:

$$(2) \qquad y' = z_1, \quad y'' = z_2, \quad \ldots \; y^{(r-1)} = z_{r-1}.$$

Alsdann ist:

(3) $$y' = z_1, \quad z_1' = z_2, \quad z_2' = z_3, \quad \ldots \quad z'_{r-2} = z_{r-1}.$$

Außerdem ergibt sich wegen der letzten Gleichung (2):

(4) $$y^{(r)} = z'_{r-1}.$$

Wenn wir nun für $y', y'', \ldots y^{(r)}$ die Werte (2) und (4) in (1) substituieren, so geht hervor:

$$F(x, y, z_1, \ldots z_{r-1}, z'_{r-1}) = 0.$$

Fügen wir hierzu die $r - 1$ Gleichungen (3), so besagt das hervorgehende System von r Gleichungen:

(5) $$\begin{cases} F(x, y, z_1, \ldots z_{r-1}, z'_{r-1}) = 0, \\ \qquad y' = z_1, \\ \qquad z_1' = z_2, \\ \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad z'_{r-2} = z_{r-1} \end{cases}$$

für die Funktion y von x genau dasselbe wie die vorgelegte Differentialgleichung (1). Denn nach der zweiten Gleichung (5) bedeutet z_1 die erste Ableitung von y, nach der dritten also z_2 die zweite Ableitung von y usw., schließlich nach der letzten z_{r-1} die $(r-1)^{\text{te}}$ Ableitung von y, so daß z'_{r-1} die Ableitung $y^{(r)}$ sein muß und folglich die erste Gleichung (5) nichts anderes als die vorgelegte Differentialgleichung (1) vorstellt.

In (5) liegt nun aber nach Nr. 662 ein System *erster* Ordnung von r gewöhnlichen Differentialgleichungen mit den r unbekannten Funktionen $y, z_1, z_2, \ldots z_{r-1}$ von x vor. Bedeutet nun:

$$y = \varphi(x), \quad z_1 = \psi_1(x), \quad z_2 = \psi_2(x), \quad \ldots \quad z_{r-1} = \psi_{r-1}(x)$$

irgend ein System Lösungen von (5), so ist wegen der $r - 1$ letzten Gleichungen (5):

$$\psi_1(x) = \varphi'(x), \quad \psi_2(x) = \varphi''(x), \quad \ldots \quad \psi_{r-1}(x) = \varphi^{(r-1)}(x)$$

und $y = \varphi(x)$ folglich wegen der ersten Gleichung (5) eine Lösung von (1). Umgekehrt: Bedeutet $y = \varphi(x)$ irgend eine

Lösung von (1), so ist:

$$y = \varphi(x), \quad z_1 = \varphi'(x), \quad z_2 = \varphi''(x), \ldots z_{r-1} = \varphi^{(r-1)}(x)$$

ein System Lösungen von (5). Man sagt deshalb, daß die Differentialgleichung (1) durch das System (5) *ersetzt* werden kann, ebenso umgekehrt das System (5) durch die Differentialgleichung (1). Man braucht dafür auch das Wort: *Äquivalenz*, indem man sich so ausdrückt:

Satz 1: Jede gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung mit einer unbekannten Funktion ist äquivalent einem gewissen Systeme erster Ordnung von r gewöhnlichen Differentialgleichungen mit r unbekannten Funktionen.

Dasselbe Verfahren läßt sich nun auch dann anwenden, wenn ein *System* höherer Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen vorliegt. Ist nämlich wie in Nr. 662 ein System r^{ter} Ordnung:

$$(6) \qquad F_i(x, y_1, \ldots y_m, y_1', \ldots y_m', \ldots y_1^{(r)}, \ldots y_m^{(r)}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

gegeben, so führen wir für alle hierin vorkommenden Ableitungen der unbekannten Funktionen, *abgesehen immer von der Ableitung höchster Ordnung, in der die betreffende Funktion auftritt*, neue Bezeichnungen ein und fügen alsdann zu dem Systeme entsprechend den Gleichungen (3) noch eine Reihe von Gleichungen hinzu. Liegt z. B. ein System von nur zwei Differentialgleichungen mit zwei unbekannten Funktionen y_1 und y_2 von x vor, in dem die höchste Ordnung der vorkommenden Ableitungen von y_1 bzw. y_2 die r^{te} und n^{te} ist:

$$(7) \quad \begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(r-1)}, y_1^{(r)}, y_2, y_2', \ldots y_2^{(n-1)}, y_2^{(n)}) = 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(r-1)}, y_1^{(r)}, y_2, y_2', \ldots y_2^{(n-1)}, y_2^{(n)}) = 0, \end{cases}$$

so setzen wir:

$$y_1' = z_1, \quad y_1'' = z_2, \ldots y_1^{(r-1)} = z_{r-1},$$

$$y_2' = u_1, \quad y_2'' = u_2, \ldots y_2^{(n-1)} = u_{n-1},$$

so daß:

$$y_1' = z_1, \quad z_1' = z_2, \ldots z_{r-2}' = z_{r-1},$$

$$y_2' = u_1, \quad u_1' = u_2, \ldots u_{n-2}' = u_{n-1}$$

wird, und erhalten an Stelle des Systems (7):

$$
(8)\quad \begin{cases} F_1(x,\, y_1,\, z_1, \ldots z_{r-1},\, z'_{r-1},\, y_2,\, u_1, \ldots u_{n-1},\, u'_{n-1}) = 0, \\ F_2(x,\, y_1,\, z_1, \ldots z_{r-1},\, z'_{r-1},\, y_2,\, u_1, \ldots u_{n-1},\, u'_{n-1}) = 0, \\ \qquad y_1' = z_1, \quad z_1' = z_2, \quad \ldots \quad z'_{r-2} = z_{r-1}, \\ \qquad y_2' = u_1, \quad u_1' = u_2, \quad \ldots \quad u'_{n-2} = u_{n-1}. \end{cases}
$$

Dies System von $r + n$ Gleichungen enthält außer x die $r + n$ unbekannten Funktionen $y_1, z_1, \ldots z_{r-1}, y_2, u_1, \ldots u_{n-1}$ von x nebst ihren Ableitungen *erster* Ordnung, ist also ein *System erster Ordnung* von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die vollständige Integration von (8) zieht die von (7) nach sich und umgekehrt; beide Systeme nennt man deshalb *äquivalent.*

Allgemein ergibt sich überhaupt:

Satz 2: Jedes System höherer Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist einem gewissen Systeme erster Ordnung äquivalent, bei dem allerdings die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der unbekannten Funktionen größer ist.

1. Beispiel: Es liege eine solche gewöhnliche Differentialgleichung *zweiter* Ordnung:

$$
(9)\qquad y'' = \varphi(x, y')
$$

vor, in der die unbekannte Funktion y selbst nicht auftritt. Wir führen die neue unbekannte Funktion $z = y'$ ein und erhalten das äquivalente System erster Ordnung mit *zwei* unbekannten Funktionen y und z:

$$
(10)\qquad z' = \varphi(x, z), \quad y' = z.
$$

Z. B. sei:

$$
(11)\qquad y'' = -\frac{2y'}{x}
$$

die gegebene Gleichung (9). Dann ist:

$$
z' = -\frac{2z}{x}, \quad y' = z
$$

das äquivalente System (10). Es ist übrigens leicht, dies System vollständig zu integrieren, denn seine erste Gleichung gibt:

$$
\frac{d \ln z}{dx} = -\frac{2}{x}, \quad \text{d. h.} \quad \ln z = -2 \ln x + \text{konst.}
$$

oder.

$$z = \frac{A}{x^2},$$

wo A eine beliebige Konstante vorstellt. Da nun $y' = z$ ist, so folgt weiter:

$$y = \int z\,dx = \int \frac{A}{x^2}\,dx = -\frac{A}{x} + B,$$

wo B eine beliebige Konstante bedeutet. Hiermit sind alle Lösungen y der Differentialgleichung (11) gefunden.

2. *Beispiel:* Es ist:

(12) $$y_1'' + y_2'' = 2x, \quad y_1' - y_2' = 0$$

ein System *zweiter* Ordnung mit *zwei* unbekannten Funktionen y_1 und y_2 von x. Wir führen für y_1' und y_2' neue Bezeichnungen z und u ein und erhalten das äquivalente System erster Ordnung mit *vier* unbekannten Funktionen y_1, y_2, z und u:

(13) $$z' + u' = 2x, \quad z - u = 0, \quad y_1' = z, \quad y_2' = u.$$

Die zweite Gleichung (13) ist frei von Ableitungen und besagt einfach, daß u dieselbe Funktion wie z bedeutet, so daß verbleibt:

(14) $$z' = x, \quad y_1' = z, \quad y_2' = z.$$

Dies ist ein System erster Ordnung mit nur noch *drei* unbekannten Funktionen y_1, y_2 und z. Nach der ersten Gleichung wird:

$$z = \int x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + A,$$

wobei A eine willkürliche Konstante vorstellt. Die zweite Gleichung (14) liefert weiter:

$$y_1 = \int z\,dx = \int (\tfrac{1}{2}x^2 + A)\,dx = \tfrac{1}{6}x^3 + Ax + B$$

und die dritte entsprechend:

$$y_2 = \tfrac{1}{6}x^3 + Ax + C.$$

Auch B und C sind willkürliche Konstanten. Hiermit ist das vorgelegte System (12) vollständig integriert. Man möge sich durch Einsetzen der für y_1 und y_2 gefundenen Funktionen in die Gleichungen (12) überzeugen, daß das System (12) durch diese Funktionen befriedigt wird, wie auch immer die Konstanten A, B, C gewählt seien.

664. Reduktion der Systeme erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Nach den Sätzen der letzten Nummer läßt sich jedes System höherer Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf ein System erster Ordnung zurückführen, so daß wir annehmen dürfen, es liege nur noch ein System erster Ordnung vor. Es bestehe aus s Gleichungen und enthalte m unbekannte Funktionen $y_1, y_2, \dots y_m$ von x:

$$F_i(x, y_1, y_2, \dots y_m, y_1', y_2', \dots y_m') = 0 \tag{1}$$
$$(i = 1, 2, \dots s).$$

Wie in § 1, 4. Kapitel des 1. Bandes, wollen wir nun dieses Gleichungensystem Schritt für Schritt nach in ihm vorkommenden Ableitungen y' auflösen, wobei wir uns gar nicht darum kümmern, daß die y' Ableitungen der y sein sollen. Vielmehr betrachten wir die s Gleichungen (1) nur als ein solches System von Gleichungen, durch das insgesamt $2m + 1$ Veränderliche $x, y_1, \dots y_m, y_1', \dots y_m'$ miteinander verknüpft werden. Gerade so wie in Nr. 79 möge sich durch schrittweise Auflösung und Substitution der Auflösungen in die jeweils noch übrig gebliebenen Gleichungen nach der Reihe ergeben:

$$(2) \quad \begin{cases} y_1' = \varphi_1(x, y_1, \dots y_m, y_2', y_3', y_4', \dots y_m'), \\ y_2' = \varphi_2(x, y_1, \dots y_m, y_3', y_4', \dots y_m'), \\ y_3' = \varphi_3(x, y_1, \dots y_m, y_4', \dots y_m'), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = \varphi_n(x, y_1, \dots y_m, y_{n+1}', \dots y_m'). \end{cases}$$

Hierbei ist die Anzahl n höchstens gleich m, und wir wollen annehmen, daß weiterhin keine Auflösungen nach den Größen y' möglich seien, d. h. daß die Substitution der Werte (2) in alle noch nicht benutzten Gleichungen (1) nur noch solche Gleichungen liefere, die von allen y' frei sind. Es seien dies die ν Gleichungen:

$$\psi_k(x, y_1, \dots y_m) = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots \nu). \tag{3}$$

Das vorgelegte System (1) ist hierdurch auf die Form der $n + \nu$ Gleichungen (2) und (3) gebracht worden.

Unter den Gleichungen (3) können unverträgliche vorhanden sein (vgl. Nr. 79). Dann leidet das gegebene System (1) an einem inneren Widerspruche und ist sinnlos. Hierzu gehört auch die Möglichkeit, daß sich insbesondere eine Gleichung $x =$ konst. ergibt, die der Voraussetzung widerspricht, daß x die unabhängige Veränderliche ist. Wir nehmen an, daß keine Widersprüche in den Gleichungen (3) vorkommen.

Es kann sein, daß sich gar keine Gleichungen (3) ergeben. Treten aber solche auf, so werden sie nach einigen der y auflösbar sein (nach dem in Nr. 79 durchgeführten Verfahren). Sind sie z. B. nach $y_\alpha, y_\beta, \dots y_\mu$ auflösbar, so stellen sich diese Größen als *bekannte* Funktionen von x und den übrigen Größen y dar. Indem wir sie vollständig nach x differenzieren, werden auch $y_\alpha', y_\beta', \dots y_\mu'$ *bekannte* Funktionen von x und den übrigen Größen y und ihren Ableitungen. Setzen wir dann die so gefundenen Funktionen für $y_\alpha, y_\beta, \dots y_\mu$ und $y_\alpha', y_\beta', \dots y_\mu'$ in das vorgelegte System (1) ein, so wird es frei von $y_\alpha, y_\beta, \dots y_\mu$ und ihren Ableitungen, d. h. es wird *vereinfacht*.

Das so gewonnene einfachere System behandeln wir nun nach derselben Methode wie vorhin das System (1), d. h. wir stellen fest, ob es wiederum Gleichungen enthält, die wie die Gleichungen (3) frei von Ableitungen sind. Ist dies der Fall, so wird eine abermalige Vereinfachung möglich usw. Schließlich aber muß doch einmal, wenn nicht überhaupt alle Gleichungen des gegebenen Systems (1) von Ableitungen gänzlich frei sind, dies Verfahren ein Ende nehmen. Alsdann bleibt ein System übrig, das wie das vorgelegte System (1) beschaffen ist, aber weniger Gleichungen und weniger unbekannte Funktionen enthält. Wenn wir nun dies System gerade so wie das System (1) behandeln, ergeben sich mithin zwar Gleichungen analog den Gleichungen (2), *jedoch gar keine analog den Gleichungen* (3).

Ist das zuletzt hervorgehende System vollständig integriert, so gilt dasselbe vom gegebenen Systeme (1), denn alle diejenigen Funktionen y, die in dem vereinfachten Systeme nicht mehr vorkommen, sind ja bekannte Funktionen der übrigen y und der unabhängigen Veränderlichen x.

[**664**

665. Normalform eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir haben soeben gesehen, daß jedes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen durch Elimination, Differentiation und Substitution auf ein System zurückgeführt werden kann, das nur Gleichungen von der Form (2) der letzten Nummer enthält. Mithin betrachten wir weiterhin nur noch ein solches System. Wenn wir den letzten Wert $y_n' = \varphi_n$ in die $n-1$ ersten Gleichungen einsetzen, alsdann den für y_{n-1}' aus der $(n-1)^{\text{ten}}$ Gleichung hervorgehenden Wert in die $n-2$ ersten Gleichungen usw., so nimmt das System die folgende Form an:

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1' = \chi_1(x, y_1, \ldots y_m, y_{n+1}', \ldots y_m'), \\ y_2' = \chi_2(x, y_1, \ldots y_m, y_{n+1}', \ldots y_m'), \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ y_n' = \chi_n(x, y_1, \ldots y_m, y_{n+1}', \ldots y_m'), \end{cases}$$

wobei $n \leqq m$ ist. *Die links stehenden Ableitungen* $y_1', y_2', \ldots y_n'$ *treten rechts gar nicht auf.*

Betrachten wir zunächst den Fall $n = m$. In ihm treten auch $y_{n+1}', \ldots y_m'$ auf der rechten Seite nicht mehr auf, so daß das System die Gestalt hat:

$$(2)\qquad \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots y_n), \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots y_n). \end{cases}$$

Dies System hat folgende charakteristische Eigenschaften: *Es enthält gerade so viele unbekannte Funktionen* $y_1, \ldots y_n$ *als Gleichungen und ist nach den Ableitungen* $y_1', \ldots y_n'$ *der unkannten Funktionen aufgelöst.* Ein solches System nennen wir die *Normalform eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen.* Auch im Falle $n < m$ gelangen wir schließlich zu einem Systeme mit denselben charakteristischen Eigenschaften, wie jetzt gezeigt werden soll:

Im Falle $n < m$ werden durch die Gleichungen (1) zwar den n Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ Bedingungen auferlegt, den übrigen $m - n$ Funktionen $y_{n+1}, \ldots y_m$ jedoch nicht. Wenn in (1) für $y_{n+1}, \ldots y_m$ *irgendwelche* differenzierbare Funktionen von x eingesetzt werden, so kommen auf der rechten Seite außer x nur noch $y_1, y_2, \ldots y_n$ vor, d. h. das System (1) nimmt, alsdann die Form (2) an. Hierbei ist hinzuzufügen: Wir werden im zweiten Kapitel sehen, daß das System (2) unter gewissen Voraussetzungen über Stetigkeit und Differenzierbarkeit der vorkommenden Funktionen stets Systeme von Lösungen hat, und deshalb gilt dies auch vom Systeme (1), sobald wir darin für $y_{m+1}, \ldots y_n$ willkürliche differenzierbare Funktionen von x setzen, die nur gewissen Beschränkungen hinsichtlich der Stetigkeit zu unterwerfen sind, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

Das Ergebnis der drei letzten Nummern läßt sich jetzt in dem Satze zusammenfassen:

Satz 3: Die Aufgabe, ein vorgelegtes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu integrieren, läßt sich mittels Elimination, Substitution und Differentiation auf die Aufgabe zurückführen, ein System in der Normalform:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \end{aligned}$$

zu integrieren, d. h. ein System erster Ordnung, das gerade so viele Gleichungen wie unbekannte Funktionen enthält und nach den Ableitungen der unbekannten Funktionen aufgelöst ist.

666. Geometrische Deutung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Im einfachsten Falle $n = 1$ hat das System in der Normalform die Gestalt:

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

also die Form einer einzigen nach y' aufgelösten *gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung* für eine unbekannte Funktion y von x. Deuten wir x und y als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, so wird jede Lösung $y = \varphi(x)$ der Gleichung (1) durch eine *Kurve* dargestellt. Ist τ der Winkel, den die Tangente der Kurve mit der positiven x-Achse bildet (vgl. Nr. 169), so sagt die Gleichung (1) aus:

$$\operatorname{tg} \tau = f(x, y), \tag{2}$$

d. h. eine Kurve $y = \varphi(x)$ ist dann und nur dann das geometrische Bild einer Lösung, wenn sie in jedem ihrer Punkte (x, y) die durch (2) vorgeschriebene Tangentenrichtung hat. Ist auch von vornherein keine Lösung $y = \varphi(x)$ bekannt, so läßt sich doch auf Grund der Gleichung (2) von jedem Punkte (x, y) aus eine Richtung ziehen, die mit der positiven x-Achse den vorgeschriebenen Winkel τ bildet, denn $f(x, y)$ ist eine gegebene Funktion von x und y. *Durch die vorgelegte Differentialgleichung* (1) *wird demnach jedem Punkte M oder* (x, y) *der Ebene eine Richtung zugeordnet.* Siehe Fig. 1. Nennen wir den Inbegriff eines Punktes und einer von ihm ausgehenden Richtung ein *Linienelement*, so können wir sagen: *Die Differentialgleichung* (1) *ordnet jedem Punkte der Ebene ein Linienelement zu*, so daß sie eine gewisse *Schar von Linienelementen* definiert. Wir sagen ferner, *daß eine Kurve ein bestimmtes Linienelement enthält*, oder *daß das Element der Kurve angehört*, wenn die Kurve durch den Punkt des Elements geht und die Tangente dieses Punktes dieselbe Richtung wie das Element hat. Siehe Fig. 2.

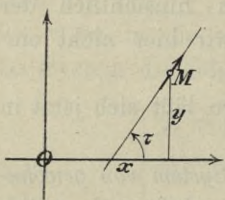

Fig. 1.


Fig. 2.

Hiernach wird jede Lösung $y = \varphi(x)$ der Differentialgleichung (1) in der xy-Ebene durch eine Kurve dargestellt, der überall nur solche Linienelemente angehören, die in der vermöge der Differentialgleichung gegebenen Schar von Linienelementen enthalten sind. Das Bild einer Lösung $y = \varphi(x)$, d. h. die zugehörige Kurve, heißt eine *Integralkurve* der Differentialgleichung.

Die Integralkurven der Differentialgleichung (1) *sind demnach alle die Kurven, deren Linienelemente sämtlich zur Schar derjenigen Linienelemente gehören, die durch die Differentialgleichung definiert werden.*

Wir können auch sagen: Ein *beweglicher* Punkt beschreibt eine Integralkurve, wenn er an jeder Stelle, die er erreicht, gerade diejenige Fortschreitungsrichtung hat, die durch das der Stelle vermöge (2) zugeordnete Linienelement angegeben wird. Wenn also wie in Fig. 3 hinreichend viele Linienelemente der Differentialgleichung konstruiert worden sind, so kann man leicht den ungefähren Verlauf von Integralkurven feststellen, indem man einen Punkt derjenigen *stationären Strömung* unterwirft, die von den Elementen angedeutet wird. Wir entlehnen hier der Mechanik ein anschauliches Bild und fügen nur noch hinzu, daß die Strömung *stationär* genannt wird, weil sie an jeder Stelle der Ebene eine zeitlich unveränderliche Richtung hat. Im allgemeinen ist dagegen die Richtung von Ort zu Ort eine andere. Bei dieser Deutung erscheinen die Integralkurven als *Stromlinien.*

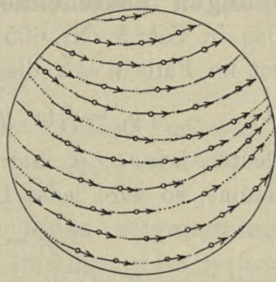

Fig. 3.

Beispiel: Es liege die Differentialgleichung

$$(3) \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

vor. Das Linienelement, das sie einem Punkte M oder (x, y) zuordnet, für das also $\operatorname{tg} \tau = -x : y$ ist, steht augenscheinlich auf dem Radiusvektor OM von M senkrecht, da der Tangens des Winkels, den OM mit der x-Achse bildet, gleich $y : x$, also gleich $-\operatorname{ctg} \tau$ ist. Siehe Fig. 4. Ein Punkt M beschreibt demnach eine Integralkurve, wenn er sich stets senkrecht zum jeweiligen Radiusvektor OM bewegt. Schon hieraus schließt man, daß die Integralkurven die *Kreise* mit dem Mittelpunkte O sind. In der Tat, ein solcher Kreis mit dem Radius C ist das Bild der Funktion:

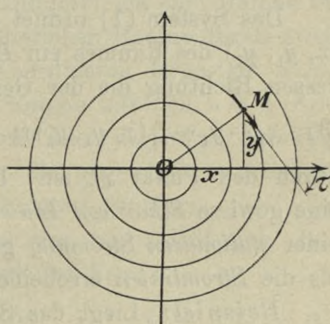

Fig. 4.

$$y = \sqrt{C^2 - x^2},$$

für die sich:

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{C^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

wie in (3) ergibt. Wir werden auf dies Beispiel noch einmal zurückkommen (in Nr. 676).

667. Geometrische Deutung eines aus zwei Gleichungen bestehenden Systems in der Normalform. Das in Satz 3, Nr. 665, erwähnte System in der Normalform hat im Falle $n = 2$ die Gestalt:

(1) $$y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \quad y_2' = f_2(x, y_1, y_2).$$

Deuten wir x, y_1 und y_2 als rechtwinklige Koordinaten im Raume, so wird jedes Lösungensystem:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x)$$

durch eine *Kurve* dargestellt; man nennt sie eine *Integralkurve*. Infolge von (1) ist dieser Kurve an jeder Stelle (x, y_1, y_2) des Raumes eine bestimmte Tangentenrichtung vorgeschrieben, denn nach (6) in Nr. 252 hat die Tangente der Kurve an der Stelle (x, y_1, y_2) in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ die Gleichungen:

(2) $$\mathfrak{y}_1 - y_1 = y_1'(\mathfrak{x} - x), \quad \mathfrak{y}_2 - y_2 = y_2'(\mathfrak{x} - x),$$

und nach (1) sind hier y_1' und y_2' gegebene Funktionen von x, y_1 und y_2.

Das System (1) ordnet also wieder jedem Punkte M oder (x, y_1, y_2) des Raumes ein *Linienelement* zu, nämlich dasjenige, dessen Richtung die der Geraden:

(3) $$\mathfrak{y}_1 - y_1 = f_1(x, y_1, y_2)(\mathfrak{x} - x), \quad \mathfrak{y}_2 - y_2 = f_2(x, y_1, y_2)(\mathfrak{x} - x)$$

durch den Punkt M ist. Demnach definiert das System (1) eine gewisse *Schar von Linienelementen* im Raume, die das Bild einer *stationären Strömung* gewähren, wobei die Integralkurven als die *Stromlinien* erscheinen.

Beispiel: Liegt das System vor:

(4) $$y_1' = \frac{y_1}{x}, \quad y_2' = \frac{y_2}{x},$$

so hat die Gerade (3) in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ die Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{x} - x}{x} = \frac{\mathfrak{y}_1 - y_1}{y_1} = \frac{\mathfrak{y}_2 - y_2}{y_2}$$

und ist daher diejenige Gerade, die den Punkt M oder (x, y_1, y_2)

mit dem Anfangspunkte O verbindet. Jeder Punkt M erfährt also eine Fortschreitung längs OM, d. h. die Integralkurven sind alle Strahlen von O aus. Dies läßt sich rechnerisch bestätigen: Eine beliebige Gerade durch O hat in den laufenden Koordinaten x, y_1, y_2 die Gleichungen:

$$y_1 = Ax, \quad y_2 = Bx$$

mit beliebigen Konstanten A, B. Für diese beiden Funktionen y_1 und y_2 von x ist $y_1' = A$, $y_2' = B$, so daß sie den Differentialgleichungen (4) genügen.

668. Geometrische Deutung eines allgemeinen Systems in der Normalform. Liegt ein allgemeines System von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform

(1) $$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

vor, so können wir es wie im Falle $n = 2$ geometrisch deuten, sobald wir den abstrakten Begriff eines *Raumes von* $n+1$ *Dimensionen* benutzen, vgl. Nr. 605, indem wir $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ als Koordinaten in diesem Raume auffassen.

In Nr. 605 wurde allerdings nur von den *Punkten* eines solchen Raumes geredet. Deshalb deuten wir an, wie man den Begriff einer *Geraden* und *Kurve* definiert: Da eine Gerade in der Ebene durch eine und im gewöhnlichen Raume durch zwei lineare Gleichungen zwischen den Koordinaten dargestellt wird, definieren wir als eine Gerade im Raume mit den $n+1$ Koordinaten $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ den Inbegriff aller derjenigen Punkte, d. h. Wertsysteme $x, y_1, y_2, \ldots y_n$, die gegebenen n voneinander unabhängigen linearen Gleichungen genügen. Sind die Gleichungen insbesondere nicht frei von x, so läßt sich also die Gerade durch n Gleichungen von der Form:

(2) $$y_i = a_i x + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

darstellen, wobei die a_i und b_i Konstanten bedeuten.

Unter einer *Kurve* im Raume von $n+1$ Dimensionen wird allgemein der Inbegriff aller derjenigen Wertsysteme $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ verstanden, die irgend welchen n voneinander unabhängigen Gleichungen zwischen den $n+1$ Veränderlichen genügen. Jedoch setzen wir dabei voraus, daß diese Gleichungen n der Veränderlichen als differenzierbare

Funktionen der einen noch übrig gebliebenen Veränderlichen definieren. Ist x diese unabhängige Veränderliche, so sind:

(3) $$y_i = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

die Gleichungen einer Kurve, falls die n Funktionen φ_1, φ_2, $\ldots \varphi_n$ von x innerhalb eines Intervalles bestimmte endliche Ableitungen haben.

Insbesondere heißt diejenige Gerade, die in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, $\ldots \mathfrak{y}_n$ durch die n linearen Gleichungen:

(4) $$\mathfrak{y}_i - y_i = \varphi_i'(x)\,(\mathfrak{x} - x) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

gegeben wird, die *Tangente* der Kurve (3) im Punkte $(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$. Die Gleichungen (3) bzw. (4) sind die Verallgemeinerungen der Gleichungen (5) und (6) in Nr. 252 für eine Kurve und ihre Tangente im gewöhnlichen Raume. Wenn $\mathfrak{x}$ variiert, so sind $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, $\ldots \mathfrak{y}_n$ nach (4) ganze lineare Funktionen von $\mathfrak{x}$ mit den Ableitungen:

(5) $$\frac{d\mathfrak{y}_i}{d\mathfrak{x}} = \varphi_i'(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Das vorgelegte System (1) deuten wir nun geometrisch so: Durch jeden Punkt $(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$ des Raumes sei diejenige Gerade gelegt worden, deren Gleichungen in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, $\ldots \mathfrak{y}_n$ sind:

(6) $$\mathfrak{y}_i - y_i = f_i(x, y_1, \ldots y_n)\,(\mathfrak{x} - x) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Der Inbegriff des Punktes und der Geradenrichtung heiße wieder ein *Linienelement.* Alsdann definiert das System (1) im Raume von $n + 1$ Dimensionen eine gewisse *Schar von Linienelementen.* Wir sagen wie in Nr. 666, daß eine Kurve ein Linienelement enthält, wenn der Punkt des Elements der Kurve angehört und die Tangente dieses Punktes die Richtung des Elements hat. Liegt irgend ein Lösungensystem (3) des Systems (1) vor, so ist es geometrisch als eine Kurve, eine sogenannte *Integralkurve,* zu deuten. Da nun aber die Lösungen (3) dem Systeme (1) genügen müssen, so fallen die Gleichungen (4) mit den Gleichungen (6) infolge der Substitution der Werte (3) zusammen. Dies bedeutet: Die Integralkurven sind diejenigen Kurven, deren Linienelemente sämtlich der gegebenen Schar von Linienelementen angehören. Weiterhin bleibe es dem

Leser überlassen, nunmehr auch den Begriff der *stationären Strömung* auf den Raum von $n+1$ Dimensionen zu übertragen Dabei gelangt man wieder zur Auffassung der Integralkurven als *Stromlinien.*

§ 2. Partielle Differentialgleichungen.

669. Partielle Differentialgleichungen und Systeme von solchen Gleichungen. Während wir bisher eine einzige unabhängige Veränderliche x annahmen, mögen jetzt die n Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ unabhängige Veränderliche bedeuten. Ferner sei y eine Funktion von ihnen. Alsdann können wir uns die Aufgabe stellen, diejenigen Funktionen y von x_1, x_2, $\ldots x_n$ zu berechnen, die eine Bedingung erfüllen von der Form:

$$(1)\quad F\left(x_1 \ldots x_n,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial y}{\partial x_n},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_2}, \cdots \frac{\partial^r y}{\partial x_n^r}\right) = 0,$$

d. h. eine solche Gleichung, in der außer den n unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, $\ldots x_n$ die unbekannte Funktion y und ihre partiellen Ableitungen etwa bis zur r^{ten} Ordnung auftreten. Eine solche Bedingung heißt eine *partielle Differentialgleichung r^{ter} Ordnung* für die Funktion y.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung sind uns z. B. schon in Nr. 89, 90 und 92 und Nr. 345—349 und solche von zweiter und dritter Ordnung in Nr. 329, 350 und 353 begegnet.

Eine Funktion y, die der Bedingung (1) innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches von x_1, x_2, $\ldots x_n$ genügt, heißt eine *Lösung* der partiellen Differentialgleichung (1). Diese Gleichung *vollständig integrieren* soll bedeuten, *alle* ihre Lösungen y berechnen.

Durch *vollständige* Differentiation der Gleichung (1) nach irgend einer der n unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, $\ldots x_n$ geht eine partielle Differentialgleichung $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung für y hervor, die von allen Lösungen der Gleichung (1) erfüllt wird und daher eine *Folge* der Gleichung (1) heißt. Durch wiederholte Differentiation kann man so zu beliebig vielen partiellen Differentialgleichungen von immer höherer Ordnung gelangen, die infolge von (1) bestehen.

Man kann auch *Systeme von partiellen Differentialgleichungen* betrachten. Bedeuten nämlich die m Größen $y_1, y_2, \ldots y_m$ noch unbekannte Funktionen der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und sind $F_1, F_2, \ldots F_s$ etwa s gegebene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, von $y_1, y_2, \ldots y_n$ und von den partiellen Ableitungen der y nach den x, so ist:

$$(2) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots F_s = 0$$

ein derartiges System. Wenn die Gleichungen partielle Ableitungen von r^{ter} Ordnung wirklich enthalten, aber keine von höherer als r^{ter} Ordnung, so nennt man sie ein *System r^{ter} Ordnung von partiellen Differentialgleichungen.* Wieder heißt ein System von Funktionen:

$$(3) \qquad y_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots m),$$

das den s Gleichungen (2) für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches genügt, ein *System von Lösungen*, und die Aufgabe, das System (2) *vollständig zu integrieren*, ist gleichbedeutend mit der, alle Lösungensysteme zu berechnen. Wie aus einer einzigen partiellen Differentialgleichung (1) kann man auch aus dem Systeme (2) durch wiederholte *vollständige* Differentiation nach irgend welchen der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ solche Gleichungen in beliebiger Anzahl gewinnen, die als *Folgen* des Systems (2) bezeichnet werden, da jedes Lösungensystem (3) auch den so gebildeten Gleichungen genügt.

670. Beispiele.

1. Beispiel: Es ist

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

eine partielle Differentialgleichung *zweiter* Ordnung für die unbekannte Funktion z der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y. Sie läßt sich in den beiden Formen:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

schreiben und besagt demnach, daß die Ableitung $\partial z : \partial x$ frei von y und die Ableitung $\partial z : \partial y$ frei von x sein muß, so daß das vollständige Differential von z die Form:

$$dz = \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$$

hat, wo φ nur von x und ψ nur von y abhängt. In der Tat ist dieser Ausdruck ein vollständiges Differential, und Satz 1, Nr. 609, gibt daher:

$$z = \int_a^x \varphi(x)\,dx + \int_b^y \psi(y)\,dy.$$

Weil das erste Integral eine Funktion X von x allein und das zweite eine Funktion Y von y allein ist, kommt schließlich:

$$z = X(x) + Y(y).$$

Man erkennt sofort, daß *jede* Funktion z von dieser Form die vorgelegte partielle Differentialgleichung (1) erfüllt, so daß also die vollständige Integration von (1) geleistet worden ist. $X(x)$ und $Y(y)$ sind dabei *willkürliche differenzierbare Funktionen* von x bzw. y allein.

2. Beispiel: Vorgelegt sei das System *erster* Ordnung von zwei partiellen Differentialgleichungen:

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

mit den beiden unbekannten Funktionen u und v von x und y. Die Größen x und y bedeuten hier die unabhängigen Veränderlichen. Weil sich die Gleichungen so schreiben lassen:

$$\frac{\partial(u+v)}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial(u-v)}{\partial y} = x,$$

folgt durch Integration:

$$u + v = xy + Y(y), \quad u - v = xy + X(x),$$

wobei X nur von x und Y nur von y abhängt. Addition und Subtraktion liefert:

$$u = xy + \tfrac{1}{2}X(x) + \tfrac{1}{2}Y(y), \quad v = -\tfrac{1}{2}X(x) + \tfrac{1}{2}Y(y).$$

Hiermit ist das System (2) vollständig integriert. Es sind wieder X und Y *willkürliche differenzierbare Funktionen* von x bzw. y allein.

3. Beispiel: Vorgelegt sei das System *erster* Ordnung von zwei partiellen Differentialgleichungen:

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

mit den beiden unbekannten Funktionen u und v der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y. Beschränken wir uns auf das reelle Gebiet, so folgt aus Nr. 623, da die vorliegenden Gleichungen die Cauchy-Riemannschen sind, daß das System (3) in folgender Weise integriert wird: Man nehme irgend eine monogene Funktion f der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ an und zerlege sie in ihren reellen und ihren rein imaginären Bestandteil:

$$f(x) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Alsdann sind u und v Lösungen des Systems (3). Wie man sieht, sind die Lösungen noch in hohem Maße willkürlich, da für f eine beliebige monogene Funktion angenommen werden kann.

§ 3. Totale Differentialgleichungen.

671. Systeme von totalen Differentialgleichungen. Außer den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen gibt es noch eine dritte Art von Differentialgleichungen, die *totalen*. Ein Hauptunterschied ist hier der, daß von vornherein nicht ausgemacht wird, welche Größen die unabhängigen und welche die abhängigen Veränderlichen bedeuten sollen. Vielmehr wird nur das eine vorausgesetzt, daß $x_1, x_2, \ldots x_n$ gewisse n Veränderliche sein sollen, zwischen denen noch unbekannte Gleichungen bestehen. Gegeben sei nun eine Anzahl von Gleichungen in $x_1, x_2, \ldots x_n$ und ihren Differentialen dx_1, $dx_2, \ldots dx_n$:

$$(1) \qquad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots x_n, dx_1, dx_2, \ldots dx_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots x_n, dx_1, dx_2, \ldots dx_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_s(x_1, x_2, \ldots x_n, dx_1, dx_2, \ldots dx_n) = 0. \end{cases}$$

Sie heißen ein *System von totalen Differentialgleichungen.* Die Aufgabe, die durch ein solches System gestellt wird, ist diese:

Es sollen Gleichungen:

$$(2) \qquad \varphi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

zwischen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gefunden werden, aus denen sich die Gleichungen (1) als *Folgen* ergeben. Doch ist noch zu erläutern, was als eine Folge der Gleichungen (2) verstanden werden soll: Wenn zwischen den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gewisse m Gleichungen (2) und sonst keine Beziehungen bestehen, so sind ihre Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ den m Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots m) \tag{3}$$

und keiner weiteren Bedingung unterworfen. Wir verlangen also, daß die *gegebenen* Gleichungen (1) aus den *gesuchten* Gleichungen (2) und den aus diesen folgenden Gleichungen (3) allein durch Elimination und Substitution hervorgehen.

Jedes Gleichungensystem (2), das in diesem Sinne alle s gegebenen Gleichungen (1) zur Folge hat, heißt ein *System von Lösungen.*

Man kann auch so sagen: Infolge der gesuchten Gleichungen (2) werden gewisse unter den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ Funktionen der übrigen, die völlig unabhängig bleiben. Die Aufgabe, das System (1) *vollständig zu integrieren*, ist daher diese: Es sollen auf alle möglichen Weisen gewisse der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ so als Funktionen der übrigen, etwa von $x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\mu$, bestimmt werden:

$$x_i = \psi_i(x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\mu), \tag{4}$$

daß die Gleichungen (1) befriedigt sind, sobald darin für die Veränderlichen x diese Funktionen von $x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\mu$ allein und für ihre Differentiale die Funktionen:

$$dx_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\beta} dx_\beta + \cdots + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu} dx_\mu \tag{5}$$

von $x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\mu$ und $dx_\alpha, dx_\beta, \ldots dx_\mu$ gesetzt werden, wie man auch die Veränderlichen $x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\mu$ innerhalb eines Variabilitätsbereiches wählen mag und welche Werte auch die Differentiale $dx_\alpha, dx_\beta, \ldots dx_\mu$ haben mögen.

Die Gleichung (4) ist wohlbemerkt nur der Repräsentant einer Reihe von Gleichungen, in denen links der Reihe nach alle x mit Ausnahme von $x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\mu$ auftreten, und das Entsprechende gilt von der Gleichung (5).

Da die Gleichungen (3) die einzigen sind, die aus den Gleichungen (2) für die Differentiale hervorgehen, und da sie sich nicht ändern, wenn alle Differentiale mit derselben beliebigen Zahl multipliziert werden, und da entsprechendes von den Gleichungen (5) und (4) statt (3) und (2) gilt, so schließen wir: Das System (1) ist überhaupt sinnlos, d. h. es hat gar keine Integralgleichungen, wenn nicht das System (1) ungeändert bleibt, sobald die Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ sämtlich mit derselben beliebigen Zahl multipliziert werden.

Mithin müssen wir voraussetzen, *daß die Gleichungen* (1) *homogen in $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ seien*, womit wir eben meinen, daß sie nach dem Ersetzen aller dx_i durch $t dx_i$ doch von t befreit werden können, wie auch t gewählt sein mag.

Die erste Schwierigkeit, die nun ein solches vorgelegtes System (1) von totalen Differentialgleichungen darbietet, besteht darin, daß man von vornherein gar nicht weiß, welche der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ als unabhängig betrachtet werden dürfen, d. h. welches die vorhin mit $x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\mu$ bezeichneten Größen sind. Man wird also alle verschiedenen Möglichkeiten durchprüfen. Nimmt man z. B. an, daß $x_1, x_2, \ldots x_m$ die unabhängigen Veränderlichen und $x_{m+1}, \ldots x_n$ Funktionen von ihnen seien, so kann man setzen:

$$(6)\quad \begin{cases} dx_{m+1} = \dfrac{\partial x_{m+1}}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial x_{m+1}}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial x_{m+1}}{\partial x_m} dx_m, \\ dx_{m+2} = \dfrac{\partial x_{m+2}}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial x_{m+2}}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial x_{m+2}}{\partial x_m} dx_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_n = \dfrac{\partial x_n}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial x_n}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial x_n}{\partial x_m} dx_m. \end{cases}$$

Durch die Substitution dieser Werte in (1) gehen alsdann Gleichungen in $x_1, x_2, \ldots x_n$, in den partiellen Ableitungen erster Ordnung von $x_{m+1}, \ldots x_n$ und in $dx_1, dx_2, \ldots dx_m$ hervor, und es ist zu fordern, daß sie für *alle* Werte der völlig beliebigen Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_m$ der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_m$ bestehen. Dies hat zur Folge, daß sie in eine Reihe von Gleichungen zerfallen müssen, die nur noch $x_1, x_2, \ldots x_n$ und die partiellen Ableitungen erster Ordnung von $x_{m+1}, \ldots x_n$ enthalten, d. h. *das System* (1) *wird auf ein System erster Ordnung von partiellen Differentialgleichungen für die $n-m$ unbekannten Funktionen $x_{m+1}, \ldots x_n$*

von $x_1, x_2, \ldots x_m$ *zurückgeführt.* Hat dies System kein Lösungensystem $x_{m+1}, \ldots x_n$, so folgt, daß die Annahme unzulässig war, unter der man zu dem Systeme gelangt ist, die Annahme nämlich, daß gerade $x_1, x_2, \ldots x_m$ voneinander unabhängige Veränderliche seien.

Statt $x_1, x_2, \ldots x_m$ kann man bei dieser Überlegung natürlich irgend welche unter den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und zwar in beliebiger Anzahl annehmen und dann alle möglichen Fälle durchprüfen.

672. Beispiele. Die allgemeinen Erörterungen sollen durch zwei sehr einfache Beispiele erläutert werden.

1. Beispiel: Es seien a, b, c gegebene Zahlen, und es liege eine totale Differentialgleichung vor von der Form:

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0. \tag{1}$$

In der Tat ist sie homogen in dx, dy, dz. Welche Beziehungen auch zwischen den drei Veränderlichen x, y, z bestehen mögen, stets besagt die Gleichung, daß das vollständige Differential von $ax + by + cz$ verschwindet, woraus nach Satz 8, Nr. 74, folgt:

$$ax + by + cz = C. \tag{2}$$

Hier ist C eine Konstante. Umgekehrt: Ist C eine beliebig gewählte Konstante, so zieht die Gleichung (2) stets die Gleichung (1) nach sich. Hieraus folgt: Die Gleichung (1) wird in allgemeinster Weise dadurch integriert, daß man eine Gleichung (2) mit einer willkürlichen Konstanten C ansetzt. Dazu darf man aber noch beliebige andere Gleichungen zwischen x, y, z hinzufügen, vorausgesetzt, daß sie weder einander noch der Gleichung (2) widersprechen.

Fügen wir gar keine Gleichung zu (2) hinzu, so heißt dies bei der geometrischen Deutung im Raume mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z: Jede der unendlich vielen parallelen *Ebenen* $ax + by + cz =$ konst. stellt eine Lösung dar. Fügen wir eine Gleichung zu (2) hinzu:

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

so gibt sie zusammen mit (2) irgend eine Kurve in einer jener Ebenen. Jede *Kurve in einer der Ebenen* $ax + by + cz =$ konst.

stellt demnach auch eine Lösung vor. Wenn wir schließlich noch zwei Gleichungen außer (2) annehmen, so werden alle drei Größen x, y, z Konstanten, d. h. es geht irgend ein *Punkt* des Raumes als Lösung hervor. Man muß aber sagen — und zwar, weil es nicht nur in diesem Beispiele, sondern entsprechend für jedes System von totalen Differentialgleichungen gilt —, daß die durch $x =$ konst., $y =$ konst., $z =$ konst. dargestellte Lösung *trivial* ist.

2. Beispiel: Zu ganz anderen Ergebnissen führt die totale Differentialgleichung:

$$(3) \qquad y\,dx - x\,dy + dz = 0,$$

deren linke Seite kein vollständiges Differential ist. Nehmen wir zunächst an, es bestehe nur eine (gesuchte) Gleichung zwischen x, y, z, so definiert sie entweder z als Funktion von x und y oder ist frei von z. Im ersten Falle setzen wir:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

in (3) ein und fordern, daß die hervorgehende Gleichung:

$$\left(y + \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(-x + \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = 0$$

für alle Werte von dx und dy bestehe, d. h. daß einzeln:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

sei, wodurch die totale Gleichung (3) auf ein System erster Ordnung von partiellen Differentialgleichungen für eine unbekannte Funktion z von x und y zurückgeführt worden ist. Aber eine Funktion z, die diesen beiden Gleichungen genügt, gibt es nicht, weil die Bedingung:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

hier nicht erfüllt ist. Die Annahme, daß z eine Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y sei, darf daher nicht gemacht werden.

Wir kommen zu dem Falle, daß eine und nur eine (gesuchte) Gleichung zwischen x und y allein bestehe, z. B. $f(x, y) = 0$. Sie würde geben:

$$f_x dx + f_y dy = 0,$$

und hiervon kann die Gleichung (3) keine Folge sein, weil sie noch dz enthält. Also ist auch diese Annahme falsch.

Deshalb nehmen wir jetzt an, daß zwischen den drei Größen x, y, z insgesamt *zwei* voneinander unabhängige Gleichungen bestehen. Entweder werden sie y und z als Funktionen von x definieren, oder sie bestehen aus einer Gleichung $x = \text{konst.}$ und einer Gleichung zwischen y und z allein. Im ersten Falle sind $dy : dx$ und $dz : dx$ die Ableitungen y' und z' von y und z nach der einzigen unabhängigen Veränderlichen x, so daß aus (3) hervorgeht:

$$y - xy' + z' = 0 \quad \text{oder} \quad z' = xy' - y.$$

Setzen wir hierin für y irgend eine differenzierbare Funktion X von x ein, so kommt:

$$(4) \qquad y = X(x), \qquad z = \int (xX' - X)\, dx + C,$$

wobei C eine willkürliche Konstante bedeutet. Diese beiden Gleichungen definieren im Raume eine *Kurve*, die noch in hohem Maße willkürlich ist, weil außer der Konstanten C auch die Funktion X von x willkürlich gewählt werden kann. Daß die Gleichungen (4) die vorgelegte totale Differentialgleichung (3) nach sich ziehen, ist sofort zu bestätigen, denn die aus (4) folgenden Werte:

$$dy = X'dx, \qquad dz = (xX' - X)\, dx$$

erfüllen zusammen mit $y = X$ die Gleichung (3).

Es bleibt noch die Annahme zu untersuchen, daß x eine Konstante A ist und außerdem eine Gleichung zwischen y und z besteht. Alsdann gibt (3):

$$-A\, dy + dz = 0,$$

d. h. $z - Ay = \text{konst.}$, so daß die Gleichungen:

$$x = A, \qquad z = Ay + B$$

mit willkürlichen Konstanten A und B ebenfalls eine Lösung der totalen Differentialgleichung (3) vorstellen. Im Raume definieren sie eine beliebige *Gerade*, die der yz-Ebene parallel läuft.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß $x = \text{konst.}$, $y = \text{konst.}$, $z = \text{konst.}$ eine *triviale* Lösung von (3) ist.

[672

Während sich im ersten Beispiele die nicht trivialen Lösungen geometrisch als Ebenen und Kurven darstellen, sind sie im zweiten Beispiele nur Kurven. *Im ersten Beispiele gibt es Lösungen, die aus nur einer Gleichung zwischen x, y, z bestehen, im zweiten nicht.*

§ 4. Nachträgliche Bemerkungen.

673. Die Hauptaufgabe. In Nr. 671 sahen wir, daß sich die totalen Differentialgleichungen auf partielle zurückführen lassen. Man kann nun auch, wie wir später sehen werden, die partiellen auf gewöhnliche zurückführen. Nach Satz 2 in Nr. 663 ist ferner jedes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen in eines von der ersten Ordnung zu verwandeln, ja nach Satz 3 in Nr. 665 gelingt es durch Elimination, Substitution und Differentiation, jedes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen in ein solches System von der ersten Ordnung zu verwandeln, das wir eine *Normalform* nannten:

$$(1) \qquad y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots y_n) \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Nicht immer wird ein solches System gerade in dieser nach allen Ableitungen y_i' der unbekannten Funktionen y_i aufgelösten Form (1) vorliegen, sondern allgemeiner als ein System von n Gleichungen:

$$(2) \qquad F_i(x, y_1, y_2, \dots y_n, y_1', y_2', \dots y_n') = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

deren linke Seiten voneinander unabhängige Funktionen hinsichtlich $y_1', y_2', \dots y_n'$ sind.

Daher wird es unsere Hauptaufgabe sein, Systeme von der Form (1) oder der allgemeineren Form (2) zu untersuchen.

Im einfachsten Falle $n = 1$ liegt nur eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung vor, entweder in der nach y' aufgelösten Form:

$$(3) \qquad y' = f(x, y)$$

oder in der nicht aufgelösten Form:

$$(4) \qquad F(x, y, y') = 0.$$

Wir werden daher die Differentialgleichungen (3) und (4) besonders gründlich untersuchen.

674. Integration, Quadratur, Existenzbeweise. Unter Integration wurde im zweiten Bande die Auswertung eines einfachen oder mehrfachen Integrals verstanden oder auch die Bestimmung einer Funktion, deren vollständiges Differential gegeben ist, da auch diese Bestimmung nach Nr. 609 bis 611 auf die Auswertung einer Anzahl von Integralen zurückkommt.

Dagegen haben wir im gegenwärtigen Kapitel unter Integration die Berechnung aller Lösungensysteme von vorgelegten Systemen von Differentialgleichungen verstanden. Dies ist eine bedeutende *Verallgemeinerung* des Begriffes der Integration (vgl. Nr. 661). In der Tat ist auch die Aufgabe, z. B. ein einfaches Integral $y = \int f(x)\,dx$ auszuwerten, hierunter enthalten, denn sie bedeutet nichts anderes als die Bestimmung aller Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung von der speziellen Form:

$$y' = f(x).$$

Es wird sich später das Bedürfnis herausstellen, für den engeren Begriff der Integration, der im zweiten Bande ausschließlich maßgebend war, einen unterscheidenden Namen zu haben. Wir werden daher für die Auswertung eines einfachen Integrals die Bezeichnung *Quadratur* nach Nr. 530 anwenden. Die Auswertung eines mehrfachen Integrals und die Integration eines vollständigen Differentials besteht alsdann in der Ausführung einer Anzahl von Quadraturen.

Die *älteren*, sogenannten klassischen Integrationsmethoden für Differentialgleichungen haben als Hauptziel, *die Bestimmung aller Lösungen bzw. Lösungensysteme mittels Elimination, Substitution und Differentiation soweit wie möglich auf bloße Quadraturen zurückzuführen.* Abgesehen davon, daß dies nicht immer möglich ist, können sich den dabei nötigen Eliminationen und Substitutionen erhebliche Schwierigkeiten in den Weg stellen, denn sie erfordern eine gründlichere Untersuchung der Frage, inwieweit die dabei zu berechnenden Funktionen wirklich bestimmt werden können, stetig und differenzierbar sind usw.

Die *neuere* Richtung in der Behandlung von Differentialgleichungen geht dahin, *unmittelbar aus den vorgelegten Gleichungen oder Systemen von Gleichungen die Eigenschaften der Lösungensysteme zu erkennen.* Es ist dies die *funktionentheoretische* Richtung im Gegensatze zu der vorhin gekennzeichneten *formalen* Richtung. Das ganze letzte Kapitel des vorigen Bandes ist eigentlich nur ein Beispiel zu dieser funktionentheoretischen Behandlungsweise, denn es beschäftigt sich mit denjenigen reellen, stetigen und differenzierbaren Funktionen u und v von zwei reellen Veränderlichen x und y, die den beiden Cauchy-Riemannschen Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

genügen. (Vgl. das 3. Beispiel in Nr. 670). Obgleich wir damals die Theorie der monogenen Funktionen $u + iv$ nur in ihren Hauptzügen gegeben haben, sieht man doch schon, was für eine Fülle schwieriger Aufgaben die funktionentheoretische Behandlung eines verhältnismäßig einfachen Systems von Differentialgleichungen nach sich ziehen kann. Die diesem Werke gezogenen Grenzen gestatten deshalb auch nur ein gelegentliches Eingehen auf Untersuchungen in dieser zweiten Richtung. Unsere Hauptaufgabe wird die *formale* Behandlung der Differentialgleichungen bleiben. Ihr Ziel kann noch erweitert werden: Es ist auch schon als ein Gewinn zu betrachten, wenn es gelingt, zu zeigen, daß ein vorgelegtes System von Differentialgleichungen vollständig integriert werden kann, sobald man ein gewisses einfacheres System zu integrieren vermag.

In einer Hinsicht soll aber doch die funktionentheoretische Untersuchung bis zu einem gewissen Abschlusse durchgeführt werden. Es soll nämlich bewiesen werden, daß die vorgelegten Systeme von Differentialgleichungen in der Tat stetige und differenzierbare Lösungen haben, sobald man über die in den Systemen auftretenden gegebenen Funktionen vernünftige Voraussetzungen macht.

Solcher *Existenzbeweise,* wie sie genannt werden, gibt es zweierlei Arten, je nachdem man sich grundsätzlich auf das *reelle* Gebiet beschränkt oder *komplexe* Veränderliche zuläßt. Im nächsten Kapitel werden wir die Existenzbeweise im reellen

Gebiete erledigen, die im komplexen Bereiche sollen erst später gegeben werden. Nach den Auseinandersetzungen in Nr. 673 kommt es im wesentlichen darauf an, die Existenzbeweise insbesondere für die Systeme erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu geben, sei es nun, daß sie in der *Normalform*, d. h. nach den Ableitungen aufgelöst, oder nicht nach den Ableitungen aufgelöst vorliegen.

675. Einige Bezeichnungen. Im vorhergehenden wurde streng zwischen den Worten: *Auflösung* und *Lösung* unterschieden, und es ist nützlich, dies auch künftig zu tun. Unter der *Auflösung* von Gleichungen verstehen wir die Bestimmung solcher Größen oder Funktionen, die sich aus einem gegebenen Systeme von Gleichungen allein durch Elimination und Substitution ergeben (vgl. § 1, 4. Kap. des 1. Bandes). Dagegen sagen wir *Lösung* zur Bestimmung derjenigen Funktionen bzw. Funktionensysteme, die einem gegebenen Systeme von Differentialgleichungen genügen. So z. B. gibt die *Auflösung* einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, y') = 0$$

nach y' eine Gleichung:

$$y' = f(x, y)$$

oder einige solche Gleichungen, während ihre *Lösung* erfordert, diejenigen Funktionen $y = \varphi(x)$ zu berechnen, die für alle Werte von x in einem gewissen Bereiche der Gleichung genügen:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0.$$

Den Gegensatz zu den Differentialgleichungen bilden die sogenannten *endlichen Gleichungen*, d. h. diejenigen Gleichungen, in denen zwar gesuchte Funktionen, aber nicht ihre Ableitungen auftreten. Solche Gleichungen ergaben sich z. B. auch bei der Untersuchung eines Systems von Differentialgleichungen in Nr. 664 unter (3). Wenn man wie z. B. in Nr. 71 (insbesondere Satz 6 ebenda) unter der *Ableitung nullter Ordnung* einer Funktion $f(x)$ diese Funktion selbst verstehen will, so kann man die endlichen Gleichungen auch *Differentialgleichungen nullter Ordnung* nennen.

Zweites Kapitel.[1])

Existenzbeweise im reellen Bereiche.

§ 1. Vorbereitende Betrachtungen.

676. Verwandlung von $y' = f(x, y)$ in eine totale Differentialgleichung. Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, die nach der Ableitung der unbekannten Funktion y von x aufgelöst ist, hat die allgemeine Form:

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Wir betrachten sie nur innerhalb eines solchen *Bereiches der beiden Veränderlichen x und y, in dem die Funktion $f(x, y)$ stetig ist,* und beschränken uns also auf die Untersuchung von *stetigen* Lösungen $y = \varphi(x)$, die diesem Bereiche angehören. Aus der Bedingung für die Lösungen:

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \tag{2}$$

erhellt, daß wir *Differenzierbarkeit der Lösungen fordern* müssen, und (2) zeigt, daß auch *die Ableitungen der Lösungen stetig* sein werden.

Es sei hervorgehoben, daß wir bis auf weiteres alle Veränderlichen und Funktionen auf *reelle* Bereiche beschränken (vgl. Nr. 674). Ferner wird es vielleicht gut sein, besonders zu bemerken, daß wir wie immer von solchen Funktionen, die

1) Dies Kapitel bereitet vielleicht vorläufig Schwierigkeiten. Zum Verstehen des Späteren braucht man in diesem Falle zunächst nur den ersten Paragraphen zu studieren und von den Lehrsätzen des Restes ohne Beweise Kenntnis zu nehmen. Hat man alsdann nach Beendigung des dritten Kapitels größere Vertrautheit mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen erlangt, so kehre man zum vollständigen Studium dieses zweiten Kapitels zurück.

mehrwertig sind (vgl. § 5, 8. Kap. des 2. Bandes), absehen, solange es nicht ausdrücklich anders gesagt wird. Alle Funktionen sollen also entsprechend den grundlegenden Definitionen in Nr. 6 in ihren Bereichen *eindeutig* sein.

Werden x und y als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene aufgefaßt, so definiert die Differentialgleichung (1) an jeder Stelle M oder (x, y) des Bereiches der Funktion f nach Nr. 666 ein *Linienelement*, nämlich dasjenige, dessen Richtung mit der positiven x-Achse einen Winkel τ bildet, für den

$$\operatorname{tg} \tau = f(x, y) \tag{3}$$

ist. Die Lösungen $y = \varphi(x)$ werden alsdann durch *Integralkurven* dargestellt, nämlich durch diejenigen Kurven, die lauter Linienelemente von dieser Art enthalten.

Durch die Voraussetzung, daß $f(x, y)$ stetig sei, werden solche Linienelemente ausgeschlossen, die zur Abszissenachse senkrecht sind. Daß dies nicht immer der geometrischen Deutung einer Differentialgleichung angemessen ist, zeigt das folgende

Beispiel: Liegt als Gleichung (1) die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y}$$

vor, so ist f die Funktion $-x : y$. Demnach ist jede Stelle (x, y) der Ebene zulässig, abgesehen von den Stellen der x-Achse $y = 0$. Nun aber sind die Integralkurven die Kreise um den Anfangspunkt O als Mittelpunkt (vgl. das Beispiel in Nr. 666). Ein solcher Kreis vom Radius C, siehe Fig. 5, stellt aber zwei verschiedene Funktionen:

$$y = \left|\sqrt{C^2 - x^2}\right|, \quad y = -\left|\sqrt{C^2 - x^2}\right|$$

dar, je nachdem man seine obere oder untere Hälfte ins Auge faßt, und wenn man die Kurven im Sinne wachsender Werte der unabhängigen Veränderlichen x durchläuft (vgl. Nr. 169), so haben die Halbkreise entgegengesetzten Sinn. Die Stellen A und B, an denen der Kreis die x-Achse schneidet, d. h. wo die Linienelemente auf der x-Achse senkrecht stehen,

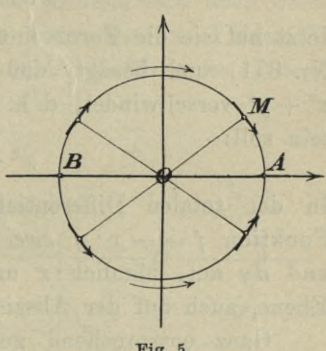

Fig. 5.

sind nach der Voraussetzung über die Funktion $f = -x : y$ ausgeschlossen. Dies ist ebensowenig wie die Teilung des Kreises in Halbkreise der einfachen geometrischen Bedeutung der Differentialgleichung angemessen, denn die Gleichung besagt, daß jeder Stelle M das zum Radiusvektor OM senkrechte Linienelement zugeordnet werden soll. Vom geometrischen Standpunkte aus wäre es danach vielmehr das Natürlichste, als Integralkurven alle Vollkreise um O mit einheitlichem Drehsinne zu bezeichnen, wobei die Stellen auf der x-Achse durchaus keinerlei Ausnahmerolle spielen.

Solange die Größe x als unabhängige Veränderliche dient, können wir die analytische Betrachtung dieser geometrischen Auffassung nicht anpassen, weil die Größe x als unabhängige Veränderliche an solchen Stellen einer Kurve versagt, wo die Tangente zur x-Achse senkrecht ist. *Wir behalten uns daher vor, ob wir x oder y als unabhängige Veränderliche auffassen wollen und ersetzen demgemäß die Ableitung y' durch den Differentialquotienten $dy : dx$,* so daß die Differentialgleichung des Beispiels übergeht in:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

oder, wenn wir alle Nenner entfernen, in:

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Jetzt hat sie die Form einer *totalen* Differentialgleichung (vgl. Nr. 671) und besagt, daß das vollständige Differential von $x^2 + y^2$ verschwindet, d. h. $x^2 + y^2$ konstant, etwa gleich C^2, sein soll:

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

In der totalen Differentialgleichung treten statt der einen Funktion $f = -x : y$ *zwei* Funktionen als Faktoren von dx und dy auf, nämlich x und y, und sie sind in der ganzen Ebene, auch auf der Abszissenachse, stetig.

Ganz entsprechend gehen wir bei einer beliebigen vorgelegten gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form (1) vor. Zunächst wird darin die Ableitung y' durch den Differentialquotienten $dy : dx$ ersetzt:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{4}$$

Zunächst wird die Funktion $f(x, y)$ in einen Quotienten von zwei Funktionen:

$$f(x, y) = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)} \tag{5}$$

zerlegt. Dies kann in mannigfacher Weise geschehen. Insbesondere kann man es häufig ebenso wie in dem Beispiele einrichten, so daß da, wo $f(x, y)$ unstetig wird, dennoch sowohl X als auch Y stetig bleibt. Wenn man nun den Quotienten (5) für f in (4) einführt und alle Nenner entfernt, so *geht die vorgelegte gewöhnliche Differentialgleichung in die totale Differentialgleichung über:*

$$X(x, y)\,dy - Y(x, y)\,dx = 0. \tag{6}$$

Nunmehr lassen wir als erlaubten Bereich ein solches Gebiet zu, in dem *die beiden Funktionen X und Y von x und y stetig sind.* Es ist dies der alte Bereich, aber zu ihm treten bei passender Zerlegung von f in $Y : X$ noch solche Stellen (x, y), für die f unstetig, nämlich unendlich wird, d. h. solche Stellen, deren Linienelemente zur Abszissenachse senkrecht sind. Das zum Punkt (x, y) gehörige Linienelement hat die durch:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\sin \tau}{\cos \tau} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)} \tag{7}$$

gegebene Richtung, und wir können insbesondere noch festsetzen, *daß* $\sin \tau$ *bzw.* $\cos \tau$ *dasselbe Vorzeichen wie Y bzw. X haben soll.* Alsdann ist auch der *Sinn der Richtung des Linienelements* vollkommen festgelegt.

In dem Beispiele besagt diese Festsetzung, daß $\sin \tau$ dasselbe Vorzeichen wie $Y = x$ und $\cos \tau$ dasselbe wie $X = -y$ haben soll. Demnach haben jetzt die Richtungen der Linienelemente, die ja in diesem Beispiele zu den Radienvektoren senkrecht sind, die in Fig. 6 angedeuteten Sinne. Man sieht, daß nunmehr die Integralkurven, nämlich die Kreise mit dem Mittelpunkte O, überall einen einheitlichen Fortschreitungssinn haben.

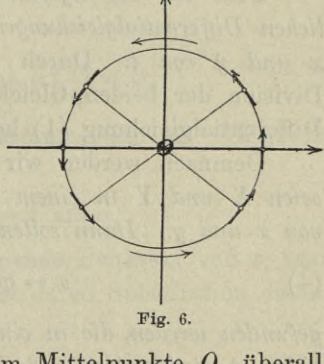

Fig. 6.

677. Verwandlung der totalen Differentialgleichung in ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die allgemeinste Art, eine Kurve in der xy-Ebene darzustellen, besteht nach Nr. 168 darin, daß man beide Koordinaten x und y als stetige und differenzierbare Funktionen einer Hilfsveränderlichen t betrachtet. Die totale Differentialgleichung:

(1) $$X(x, y)\,dy - Y(x, y)\,dx = 0$$

besagt daher, daß eine Kurve dann und nur dann eine Integralkurve ist, wenn x und y solche stetige und differenzierbare Funktionen von t sind, deren Ableitungen $dx : dt$ und $dy : dt$ der Gleichung genügen:

(2) $$X(x, y)\frac{dy}{dt} - Y(x, y)\frac{dx}{dt} = 0.$$

Erinnern wir uns daran, daß $f = Y : X$ nur eine der unzählig vielen möglichen Arten der Zerlegung der Funktion f in einen Quotienten darstellt, so folgt, daß die Allgemeinheit der analytischen Darstellung der Integralkurven nicht beschränkt wird, wenn wir insbesondere $dx : dt = X$ setzen. Aber dann folgt aus (2) sofort noch $dy : dt = Y$. Wir gelangen somit zu den Gleichungen:

(3) $$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y).$$

Dies ist ein *System erster Ordnung von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit zwei unbekannten Funktionen x und y von t.* Durch Elimination von t, nämlich durch Division der beiden Gleichungen (3), geht wieder die totale Differentialgleichung (1) hervor.

Demnach werden wir zu folgender Aufgabe geführt: *Es seien X und Y in einem gewissen Bereiche stetige Funktionen von x und y. Dann sollen alle Funktionenpaare:*

(4) $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

gefunden werden, die in einem gewissen Intervalle der Veränderlichen t stetig sind und bestimmte endliche Ableitungen erster Ordnung haben, die überdies Stellen (x, y) jenes Bereiches geben *und die außerdem in dem Intervalle überall den beiden Gleichungen:*

$$(5) \qquad \varphi'(t) = X(\varphi(t), \psi(t)), \qquad \psi'(t) = Y(\varphi(t), \psi(t))$$

genügen. Aus (5) folgt sofort, daß jedes derartige *Lösungensystem* (4) nicht nur bestimmte endliche, sondern auch *stetige* Ableitungen erster Ordnung hat.

Nach wie vor ordnet das Gleichungensystem (3) jedem Punkte (x, y) des Bereiches in der xy-Ebene ein bestimmtes Linienelement zu, nämlich dasjenige, dessen Richtung mit der positiven x-Achse den durch:

$$\sin\tau : \cos\tau = Y(x, y) : X(x, y)$$

gegebenen Winkel τ bildet, wobei $\sin\tau$ bzw. $\cos\tau$ dasselbe Vorzeichen wie Y bzw. X haben soll. Wenn die durch (4) dargestellte *Integralkurve* im Sinne wachsender Werte der Hilfsveränderlichen t durchlaufen wird (wie in Nr. 169), so hat sie in jedem Punkte nicht nur dieselbe Richtung, sondern auch denselben Sinn wie das zugehörige Linienelement.

Beispiel: Nehmen wir wieder die schon mehrfach betrachtete Differentialgleichung:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

an, indem wir $X = -y$ und $Y = x$ wählen, so ergibt sich das System (3) in der Form:

$$(6) \qquad \frac{dx}{dt} = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = x.$$

Infolge hiervon ist:

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dt} = 2\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

d. h. $x^2 + y^2 = C^2$, wo C eine Konstante bedeutet. Hiernach kann gesetzt werden:

$$x = C\cos\omega, \qquad y = C\sin\omega.$$

Alsdann ist ω die noch zu bestimmende Funktion von t, und aus den beiden Gleichungen (6) geht durch Substitution dieser Werte dieselbe Gleichung:

$$\frac{d\omega}{dt} = 1, \quad \text{d. h.} \quad \omega = t + c$$

hervor, wobei c eine Konstante vorstellt. Somit erhalten wir:

$$(7) \qquad x = C\cos(t+c), \quad y = C\sin(t+c).$$

In der Tat sind dies die Gleichungen eines Kreises um den Anfangspunkt O als Mittelpunkt, ausgedrückt mittels der Hilfsveränderlichen t, und mittels dieser Gleichungen (7) wird das System (6) vollständig integriert.

§ 2. Existenzbeweis beim Systeme $dx:dt=X,\ dy:dt=Y.$

678. Voraussetzungen. Wir finden es zweckmäßig, statt der Frage nach der Existenz von Lösungen der Gleichung $y'=f(x,y)$ zunächst die Frage nach der Existenz von Lösungensystemen des Systems:

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = X(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x,y)$$

zu erledigen. Es wird nämlich nachher (in Nr. 686) leicht sein, auch die erste Frage zu beantworten.

Wenn wir uns auf einen Bereich von Stellen (x, y) beschränken, in dem X und Y stetig sind und *bestimmte endliche partielle Ableitungen erster Ordnung haben*, können wir einer bestimmt gewählten Stelle (x_0, y_0) im Innern des Bereiches eine Umgebung:

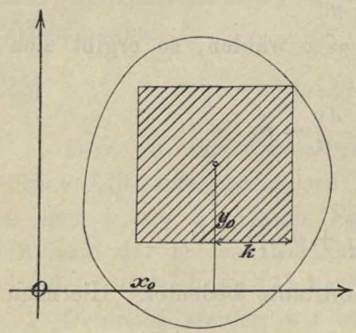

Fig. 7.

$$(2) \qquad |x-x_0|<k, \quad |y-y_0|<k$$

zuschreiben, die völlig dem Bereiche angehört, siehe Fig. 7. Alsdann gibt es zwei (endliche) positive Zahlen g und g' derart, daß in der Umgebung (2) überall die Ungleichungen gelten:

$$(3) \qquad |X|<g, \quad |Y|<g,$$

$$(4) \qquad |X_x|<g', \quad |X_y|<g', \quad |Y_x|<g', \quad |Y_y|<g'.$$

Die Zahlen g und g' werden in der folgenden Beweisführung eine wichtige Rolle spielen.

Sind (x, y) und $(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y)$ zwei Stellen in der Umgebung (2), so gibt es nach dem Mittelwertsatze 28 von Nr. 137 zwei positive echte Brüche θ und ϑ derart, daß:

$$\varDelta X = X(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y) - X(x,y) = (X_x \varDelta x + X_y \varDelta y)_{x+\theta\varDelta x,\ y+\theta\varDelta y},$$
$$\varDelta Y = Y(x+\varDelta x, y+\varDelta y) - Y(x,y) = (Y_x \varDelta x + Y_y \varDelta y)_{x+\vartheta\varDelta x,\ y+\vartheta\varDelta y}$$

wird, wobei die Indizes angeben, welche Werte statt x und y eingesetzt werden sollen. Die Stellen $(x + \theta\varDelta x,\ y + \theta\varDelta y)$ und $(x + \vartheta\varDelta x, y + \vartheta\varDelta y)$ gehören ebenfalls der Umgebung (2) an. Daher folgt aus (4) nach Satz 2, Nr. 4, daß überall in der Umgebung (2) die Ungleichungen gelten:

$$(5) \qquad |\varDelta X| < g'(|\varDelta x| + |\varDelta y|), \qquad |\varDelta Y| < g'(|\varDelta x| + |\varDelta y|).$$

Diese Ungleichungen werden wir später benutzen.

679. Ersatz einer Integralkurve durch ein Polygon. Das System:

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

ordnet jedem Punkte (x, y) des Bereiches, wenn wir wieder x und y als rechtwinklige Koordinaten deuten, ein bestimmtes Linienelement zu. Weil nun eine durch den Punkt (x, y) gehende Integralkurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ die Richtung des zugehörigen Linienelements zur Tangentialrichtung hat, so liegt es nahe, zur Annäherung an eine der noch völlig unbekannten Integralkurven ein *Polygon* zu konstruieren: Von M_0 oder (x_0, y_0) aus, siehe Fig. 8, wird die Richtung des zugehörigen Linienelements bis zu einem benachbarten Punkte M_1 oder (x_1, y_1) verfolgt. Von M_1 wird darauf in der Richtung desjenigen Linienelements, das dem Punkte M_1 zugeordnet ist, bis zu einem benachbarten Punkte M_2 weiter gegangen, usw. Es ist dann zu vermuten, daß das entstehende Polygon $M_0 M_1 M_2 \ldots$ einer Integralkurve um so näher kommt, je kürzer alle Strecken $M_0 M_1$, $M_1 M_2, \ldots$ gewählt werden. Dies werden wir in der Tat in den folgenden Nummern beweisen. Wir gehen dabei

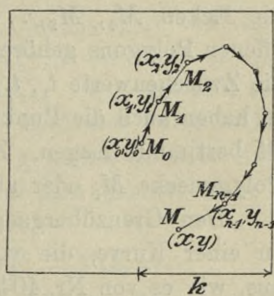

Fig. 8.

entsprechend der in Nr. 7 aufgestellten Forderung rein analytisch vor, wenn wir auch die geometrische Veranschaulichung der größeren Deutlichkeit halber heranziehen. Die Konstruktion wird analytisch so wiedergegeben:

Es seien t_0 und t zwei irgendwie, aber bestimmt gewählte Werte, und *vorerst sei* $t > t_0$ *gewählt*, weil dies für den Ausdruck der Formeln etwas bequemer ist. Das Intervall von t_0 bis t teilen wir durch irgendwelche wachsende Zwischenwerte $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ in etwa n Teile. Nun berechnen wir x_1, y_1, alsdann x_2, y_2 usw. und schließlich x_{n-1}, y_{n-1} und ein letztes Wertepaar x, y mit Hilfe der folgenden Gleichungen:

$$(2)\begin{cases} x_1 - x_0 = X_0(t_1 - t_0), & y_1 - y_0 = Y_0(t_1 - t_0), \\ x_2 - x_1 = X_1(t_2 - t_1), & y_2 - y_1 = Y_1(t_2 - t_1), \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} - x_{n-2} = X_{n-2}(t_{n-1} - t_{n-2}), & y_{n-1} - y_{n-2} = Y_{n-2}(t_{n-1} - t_{n-2}), \\ x - x_{n-1} = X_{n-1}(t - t_{n-1}), & y - y_{n-1} = Y_{n-1}(t - t_{n-1}). \end{cases}$$

Hierin sollen allgemein X_i und Y_i die Werte von X und Y für die Stelle (x_i, y_i) bedeuten. Es leuchtet ein, daß die beiden ersten Gleichungen die Koordinaten x_1, y_1 eines Punktes M_1 auf der Geraden desjenigen Linienelements geben, das dem Punkte M_0 oder (x_0, y_0) zugeordnet ist, usw. Insgesamt werden n Wertepaare x_1, y_1; x_2, y_2; $\ldots x_{n-1}, y_{n-1}$; x, y definiert, zu denen die Ecken $M_1, M_2, \ldots M_{n-1}, M$ eines in M_0 beginnenden offenen Polygons gehören. Wenn die Zerlegung von $t - t_0$ durch die Zwischenwerte $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ bestimmt gewählt worden ist, so haben auch die Punkte $M_1, M_2, \ldots M_{n-1}$ und der *Endpunkt* M bestimmte Lagen. Zu jedem Zwischenwerte t_i gehört eine Polygonecke M_i oder also ein Wertepaar x_i, y_i.

Den Grenzübergang vom Polygon $M_0 M_1 M_2 \ldots M_{n-1} M$ zu einer Kurve, die von M_0 ausgeht, führen wir gerade so aus, wie es von Nr. 404 an im zweiten Bande beim Nachweise der Existenz eines Integrals geschah: Wir schalten zwischen t_0 und t immer mehr Zwischenwerte und zwar so ein, daß *alle* Teilintervalle nach Null streben und dementsprechend ihre Anzahl, also auch die Anzahl der Gleichungen (2) über jede Zahl wächst. Es soll vor allem gezeigt werden, daß dann die Endwerte x, y, die sich aus den letzten Gleichungen (2) ergeben, nach bestimmten endlichen Werten streben. Ist dies geschehen, so wird daraus weiter die Existenz von Integralkurven bzw. Lösungensystemen folgen.

Zunächst muß untersucht werden, ob die Stellen (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_{n-1}, y_{n-1}) und (x, y) wirklich in der in voriger Nummer angegebenen Umgebung der Stelle (x_0, y_0) liegen. Aus den beiden ersten Gleichungen (2) folgt wegen der Ungleichungen (3) der vorigen Nummer:

$$|x_1 - x_0| < g(t_1 - t_0), \quad |y_1 - y_0| < g(t_1 - t_0).$$

Also liegt die Stelle (x_1, y_1) gewiß in der Umgebung, wenn $g(t_1 - t_0) < k$ ist. In diesem Falle sind auch $|X_1|$ und $|Y_1|$ kleiner als g. Nun folgt weiter aus den vier ersten Gleichungen (2) durch Addition je zweier:

$$x_2 - x_0 = X_1(t_2 - t_1) + X_0(t_1 - t_0), \quad y_2 - y_0 = Y_1(t_2 - t_1) + Y_0(t_1 - t_0)$$

und hieraus:

$$|x_2 - x_0| < g(t_2 - t_0), \quad |y_2 - y_0| < g(t_2 - t_0).$$

Daher liegt auch die Stelle (x_2, y_2) in der Umgebung, wenn $g(t_2 - t_0) < k$ ist, usw. Weil $t_1 - t_0$, $t_2 - t_0$, ... $t_{n-1} - t_0$ sämtlich keiner als $t - t_0$ sind, so ergibt sich:

Sobald t so gewählt wird, daß:

(3) $$0 < t - t_0 < \frac{k}{g}$$

ist, liegen alle Stellen (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_{n-1}, y_{n-1}) und (x, y) in der Umgebung $|x - x_0| < k$, $|y - y_0| < k$ der Stelle (x_0, y_0), wie auch immer die Zwischenwerte t_1, t_2, ... t_{n-1} gewählt sein mögen, vorausgesetzt nur, daß sie eine *wachsende* Folge bilden.

Es bedeute τ eine beliebig klein gewählte positive Zahl. Nach Satz 1, Nr. 570, gibt es alsdann eine positive Zahl σ_1 derart, daß die *Schwankung:*

$$|\Delta X| = |X(x + \Delta x, y + \Delta y) - X(x, y)|$$

der Funktion X in jener Umgebung kleiner als τ ist für $|\Delta x| < \sigma_1$, $|\Delta y| < \sigma_1$. Ebenso gibt es eine solche auf die Schwankung der Funktion Y bezügliche positive Zahl σ_2. Wird die kleinere der beiden Zahlen σ_1 und σ_2 mit σ bezeichnet, so ist in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0) stets:

(4) $|\Delta X| < \tau$, $|\Delta Y| < \tau$ *infolge von* $|\Delta x| < \sigma$, $|\Delta y| < \sigma$.

[679

Werden nun alle Teilintervalle $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1, \ldots t - t_{n-1}$ *kleiner als* $\sigma : g$ *angenommen*, so sind die absoluten Beträge aller Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots x - x_{n-1}$ und $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1, \ldots y - y_{n-1}$ nach (2) kleiner als σ, wegen $|X| < g$, $|Y| < g$. Also gibt (4):

$$(5) \quad \begin{cases} |X_1 - X_0| < \tau, & |X_2 - X_1| < \tau, \ldots |X - X_{n-1}| < \tau, \\ |Y_1 - Y_0| < \tau, & |Y_2 - Y_1| < \tau, \ldots |Y - Y_{n-1}| < \tau. \end{cases}$$

680. Eine endlose Folge von Polygonen. Wir nehmen eine endlose Folge von lauter solchen abnehmenden positiven Zahlen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ an, die eine *konvergente* Reihe $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdots$ bilden (wie z. B. die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$). Nach Satz 3, Nr. 103, streben diese Zahlen nach Null. Zu jeder Zahl τ_i gibt es eine positive Zahl σ_i derart, daß die Ungleichungen (4) der letzten Nummer bestehen, wenn darin τ und σ durch τ_i und σ_i ersetzt werden.

Wir konstruieren nun statt des bisher betrachteten Polygons eine endlose Folge von Polygonen, die sämtlich von der Stelle M_0 oder (x_0, y_0) ausgehen. Zuerst teilen wir das Intervall von t_0 bis t durch Zwischenwerte $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ in lauter Teile, die kleiner als $\sigma_1 : g$ sind; zweitens schalten wir zwischen diesen Werten noch neue ein und zwar so, daß alle Teilintervalle kleiner als $\sigma_2 : g$ werden, drittens schalten wir noch mehr Zwischenwerte zwischen den schon angenommenen ein und zwar so, daß alle Intervalle kleiner als $\sigma_3 : g$ werden, usw. Das Wesentliche ist hierbei, daß *wir bei jeder folgenden, feineren Zerlegung von* $t - t_0$ *alle schon eingeführten Zwischenwerte beibehalten und neue zu ihnen hinzufügen.* Zu jeder Teilung gehört nach dem Vorhergehenden ein bestimmtes von M_0 ausgehendes Polygon und also auch ein bestimmtes Endwertepaar x, y, und alle Polygone liegen in der Umgebung $|x - x_0| < k$, $|y - y_0| < k$ der Stelle (x_0, y_0). Zu allen Zwischenwerten, die bei einer Teilung benutzt worden sind, gehören nicht nur alle Ecken des durch diese Teilung bestimmten Polygons, sondern auch Ecken aller folgenden Polygone, jedoch *nicht* notwendig *alle* Ecken der folgenden Polygone.

Es seien wie in voriger Nummer (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$ (x_{n-1}, y_{n-1}) und (x, y) die Ecken des *ersten* Polygons, die zu den Werten $t_1, t_2, \dots t_{n-1}$ und t gehören. *Sämtliche* Zwischenwerte der *zweiten* Teilung seien mit $t_1', t_2', \dots$ bezeichnet, und die zugehörigen Ecken des zweiten Polygons mögen die Ecken $(x_1', y_1'), (x_2', y_2'), \dots$ sein. Die Werte $t_1, t_2, \dots t_{n-1}$ gehören nach Voraussetzung auch zu den Werten $t_1', t_2', \dots$. Es sei also etwa:

$$t_i = t'_m, \quad t_{i+1} = t'_{m+r}, \tag{1}$$

d. h. wir nehmen an, daß bei der zweiten Teilung zwischen t_i und t_{i+1} insgesamt $r-1$ Werte $t'_{m+1}, t'_{m+2}, \dots t'_{m+r-1}$ eingeschaltet worden seien.

Die Gleichungen (2) der vorigen Nummer gelten für die Ecken des ersten Polygons. Entsprechende Gleichungen bestehen für die Ecken des zweiten Polygons, und von ihnen wollen wir nur diejenigen angeben, die sich auf das Intervall von t'_m bis t'_{m+r} beziehen:

$$(2)\begin{cases} x'_{m+1}-x'_m = X'_m(t'_{m+1}-t'_m), & y'_{m+1}-y'_m = Y'_m(t'_{m+1}-t'_m), \\ x'_{m+2}-x'_{m+1} = X'_{m+1}(t'_{m+2}-t'_{m+1}), & y'_{m+2}-y'_{m+1} = Y'_{m+1}(t'_{m+2}-t'_{m+1}), \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x'_{m+r}-x'_{m+r-1} = X'_{m+r-1}(t'_{m+r}-t'_{m+r-1}), & y'_{m+r}-y'_{m+r-1} = Y'_{m+r-1}(t'_{m+r}-t'_{m+r-1}). \end{cases}$$

Hierin sollen X_k' und Y_k' allgemein die Werte $X(x_k', y_k')$ und $Y(x_k', y_k')$ bedeuten. Da $t'_{m+r}-t'_m$ oder, was nach (1) dasselbe ist, $t_{i+1}-t_i$ kleiner als $\sigma_1 : g$ ist und also umsomehr alle Teilintervalle der zweiten Teilung kleiner als $\sigma_1 : g$ sind, ergibt sich nach den Formeln (5) der letzten Nummer:

$$|X'_{m+1}-X'_m| < \tau_1, \quad |X'_{m+2}-X'_m| < \tau_1, \dots |X'_{m+r-1}-X'_m| < \tau_1.$$

so daß wir schreiben können:

$$X'_{m+1} = X'_m \pm \theta_1\tau_1,\ X'_{m+2} = X'_m \pm \theta_2\tau_1, \dots X'_{m+r-1} = X'_m \pm \theta_{r-1}\tau_1, \tag{3}$$

wobei $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{r-1}$ positive echte Brüche sind und es dahingestellt bleibt, mit welchen Vorzeichen sie auftreten. Addition aller in (2) links stehenden Gleichungen gibt mithin:

$$x'_{m+r}-x'_m = X'_m(t'_{m+r}-t'_m) + \\ + \tau_1\{\pm\theta_1(t'_{m+2}-t'_{m+1}) \pm \cdots \pm \theta_{r-1}(t'_{m+r}-t'_{m+r-1})\}.$$

Die in der geschweiften Klammer stehende Summe ist absolut genommen kleiner als $t'_{m+r}-t'_{m+1}$, umsomehr nach (1) kleiner als $t_{i+1} - t_i$. Folglich können wir schreiben:

(4) $$x'_{m+r} - x'_m = X(x'_m, y'_m)(t_{i+1} - t_i) \pm \tau_1 \vartheta_1 (t_{i+1} - t_i),$$

wenn wieder ϑ_1 einen positiven echten Bruch vorstellt.

Diese Formel (4) *bezieht sich auf die Differenz der Abszissen* x'_m *und* x'_{m+r} *derjenigen beiden Eckpunkte des zweiten Polygons, die zu den unmittelbar aufeinander folgenden Zwischenwerten* t_i *und* t_{i+1} *der ersten Teilung gehören, und eine entsprechende Formel ergibt sich für die Ordinaten.*

Ehe wir hieraus Schlüsse ziehen, schalten wir wegen einer später zu machenden Anwendung ein: Sind $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t} + \Delta\mathfrak{t}$ zwei unmittelbar aufeinander folgende Zwischenwerte zwischen t_0 und t bei der $(s-1)^{\text{ten}}$ Teilung und gehören zu ihnen die Eckpunkte $(\mathfrak{x}_s, \mathfrak{y}_s)$, $(\mathfrak{x}_s + \Delta\mathfrak{x}_s, \mathfrak{y}_s + \Delta\mathfrak{y}_s)$ des s^{ten} Polygons, so ergibt sich entsprechend:

(5) $$\begin{cases} \Delta\mathfrak{x}_s = X(\mathfrak{x}_s, \mathfrak{y}_s)\Delta\mathfrak{t} \pm \tau_{s-1}\vartheta_{s-1}\Delta\mathfrak{t}, \\ \Delta\mathfrak{y}_s = Y(\mathfrak{x}_s, \mathfrak{y}_s)\Delta\mathfrak{t} \pm \tau_{s-1}\vartheta'_{s-1}\Delta\mathfrak{t}, \end{cases}$$

wobei ϑ_{s-1} und ϑ'_{s-1} positive echte Brüche vorstellen. Denn das s^{te} Polygon steht zur $(s-1)^{\text{ten}}$ Teilung in derselben Beziehung wie das zweite Polygon zur ersten Teilung.

681. Grenzlage der Endpunkte aller Polygone. Beim ersten Polygon gilt nach (2) in Nr. 679 die Gleichung:

$$x_{i+1} - x_i = X(x_i, y_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Ziehen wir sie von der Gleichung (4) der letzten Nummer ab, so kommt:

$$x'_{m+r} - x_{i+1} = x'_m - x_i + (t_{i+1} - t_i)\{X(x'_m, y'_m) - X(x_i, y_i) \pm \tau_1\vartheta_1\}$$

so daß:

$$|x'_{m+r} - x_{i+1}| < |x'_m - x_i| + (t_{i+1} - t_i)|X(x'_m, y'_m) - X(x_i, y_i)| + \tau_1(t_{i+1} - t_i),$$

also nach (5) in Nr. 678:

$$|x'_{m+r} - x_{i+1}| < |x'_m - x_i| + (t_{i+1} - t_i)g'\{|x'_m - x_i| + |y'_m - y_i|\} + \tau_1(t_{i+1} - t_i)$$

ist. Ebenso gilt die auf die Ordinatendifferenz bezügliche Ungleichung:

$$|y'_{m+r} - y_{i+1}| < |y'_m - y_i| + (t_{i+1} - t_i)g'\{|x'_m - x_i| + |y'_m - y_i|\} + \tau_1(t_{i+1} - t_i).$$

Addition der beiden letzten Formeln ergibt:

$$|x'_{m+r} - x_{i+1}| + |y'_{m+r} - y_{i+1}| < \\ \{1 + 2g'(t_{i+1} - t_i)\}\{|x'_m - x_i| + |y'_m - y_i|\} + 2\tau_1(t_{i+1} - t_i).$$

Es ist zur Erzielung einer größeren Übersichtlichkeit zweckmäßig, von jetzt an diejenigen n Ecken des *zweiten* Polygons, die insbesondere zu den schon bei der *ersten* Teilung benutzten Werten $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}, t$ gehören, mit

$$(\xi_1, \eta_1),\ (\xi_2, \eta_2), \ldots \ldots (\xi_{n-1}, \eta_{n-1}),\ (\xi, \eta)$$

zu bezeichnen (siehe Fig. 9). Alsdann lautet die letzte Ungleichung so:

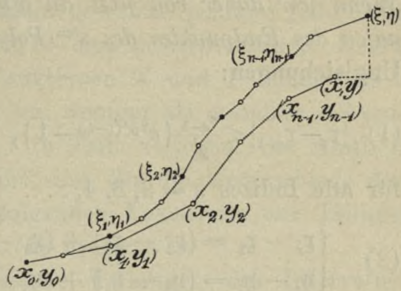

Fig. 9.

$$|\xi_{i+1} - x_{i+1}| + |\eta_{i+1} - y_{i+1}| < \{1 + 2g'(t_{i+1} - t_i)\}\{|\xi_i - x_i| + |\eta_i - y_i|\} + 2\tau_1(t_{i+1} - t_i).$$

Sie wird etwas übersichtlicher und ist leichter zu handhaben, wenn wir beiderseits $\tau_1 : g'$ addieren und alsdann rechts die Zahl $1 + 2g'(t_{i+1} - t_i)$ durch die nach Nr. 117 größere Zahl

$$e^{2g'(t_{i+1} - t_i)} = 1 + 2g'(t_{i+1} - t_i) + \cdots$$

ersetzen. Es kommt nämlich so:

$$|\xi_{i+1} - x_{i+1}| + |\eta_{i+1} - y_{i+1}| + \frac{\tau_1}{g'} < \left\{|\xi_i - x_i| + |\eta_i - y_i| + \frac{\tau_1}{g'}\right\} e^{2g(t_{i+1} - t_i)}.$$

Diese Ungleichung gilt für $i = 0, 1, 2, \ldots n-1$. Natürlich sind $t_n, x_n, y_n, \xi_n, \eta_n$ durch t, x, y, ξ, η zu ersetzen; es sind dies die auf die Endpunkte beider Polygone bezüglichen Größen. Außerdem ist $\xi_0 = x_0$ und $\eta_0 = y_0$, weil beide Polygone an der Stelle (x_0, y_0) beginnen. Multiplizieren wir alle n Ungleichungen miteinander, so ergibt sich infolgedessen einfach:

$$|\xi - x| + |\eta - y| < \frac{\tau_1}{g'}\{e^{2g'(t-t_0)} - 1\},$$

so daß umsomehr einzeln:

$$|\xi - x| < \frac{\tau_1}{g'}\{e^{2g'(t-t_0)} - 1\}, \qquad |\eta - y| < \frac{\tau_1}{g'}\{e^{2g'(t-t_0)} - 1\},$$

ist. Die linken Seiten sind die absoluten Beträge der Differenzen zwischen den Koordinaten der Endpunkte des zweiten und ersten Polygons, siehe Fig. 9.

Die Beziehung zwischen den Endpunkten der beiden ersten Polygone ist dieselbe wie die zwischen den Endpunkten irgend zweier aufeinanderfolgender Polygone aus der endlosen Reihe von Polygonen, die wir in Nr. 680 konstruiert haben. *Wenn wir daher von jetzt an allgemein mit* $\mathfrak{x}_s$, $\mathfrak{y}_s$ *die Koordinaten des Endpunktes des* s^{ten} *Polygons bezeichnen,* so gelten die Ungleichungen:

$$(1)\quad |\mathfrak{x}_s-\mathfrak{x}_{s-1}|<\frac{\tau_{s-1}}{g'}\{e^{2g'(t-t_0)}-1\},\quad |\mathfrak{y}_s-\mathfrak{y}_{s-1}|<\frac{\tau_{s-1}}{g'}\{e^{2g'(t-t_0)}-1\}$$

für alle Indizes $s=2,3,4,\ldots$. Nun aber ist:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}_s-\mathfrak{x}_1=(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_1)+(\mathfrak{x}_3-\mathfrak{x}_2)+\cdots+(\mathfrak{x}_s-\mathfrak{x}_{s-1}), \\ \mathfrak{y}_s-\mathfrak{y}_1=(\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y}_1)+(\mathfrak{y}_3-\mathfrak{y}_2)+\cdots+(\mathfrak{y}_s-\mathfrak{y}_{s-1}). \end{cases}$$

Die rechten Seiten werden für $\lim s=\infty$ unendliche Reihen und sind dann wegen Satz 8, Nr. 104, *unbedingt konvergent,* denn die absoluten Beträge ihrer Glieder sind nach (1) kleiner als die Glieder der nach Nr. 680 konvergenten Reihe $\tau_1+\tau_2+\cdots$, nachdem man diese mit

$$\frac{1}{g'}\{e^{2g'(t-t_0)}-1\}$$

multipliziert hat. Folglich haben $\mathfrak{x}_s-\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_s-\mathfrak{y}_1$ für $\lim s=\infty$ bestimmte endliche Grenzwerte, daher auch $\mathfrak{x}_s$ und $\mathfrak{y}_s$ selbst. Wir haben also gefunden:

Die Koordinaten des Endpunktes $(\mathfrak{x}_s, \mathfrak{y}_s)$ *des* s^{ten} *Polygons streben für* $\lim s=\infty$ *nach bestimmten endlichen Werten, und zwar liegt die zugehörige Stelle mit allen Ecken aller Polygone in der Umgebung:*

$$|x-x_0|<k,\qquad |y-y_0|<k$$

des Anfangspunktes (x_0, y_0) *aller Polygone.*

682. Vervollständigung der Betrachtung. Die Herstellung der immer feiner werdenden Teilungen des Intervalles von t_0 bis t, die wir in Nr. 680 ausführten, ist von besonderer Art, weil bei jeder folgenden Teilung alle Zwischenwerte der vorhergehenden Teilung mit benutzt wurden. (Vgl. die entsprechende Bemerkung in Nr. 407.) Es soll jetzt gezeigt werden, daß man immer zu denselben Grenzwerten der Endkoordinaten der Polygone kommt, von welcher Teilung des Intervalles man auch ausgehen mag, vorausgesetzt, daß *alle*

Teilintervalle nach Null streben und ihre Anzahl demgemäß über jede Zahl wächst.

Es sei τ eine beliebig klein gewählte positive Zahl. Zu ihr gibt es nach (4) in Nr. 679 eine positive Zahl σ derart, daß die Schwankungen der Funktionen X und Y kleiner als τ werden, sobald sich x und y um weniger als σ ändern. Wenn wir das Intervall von t_0 bis t in Teile zerlegen, die sämtlich kleiner als $\sigma : g$ sind, so trifft dies für die Unterschiede der Koordinaten der aufeinanderfolgenden Ecken des zur Teilung gehörigen Polygons zu, nach (5) in Nr. 679.

Nun seien *zwei* verschiedene Teilungen des Intervalles von t_0 bis t angenommen und durch Einschaltung hinreichend vieler Zwischenwerte so weit verfeinert worden, bis alle Teildifferenzen kleiner als $\sigma : g$ geworden sind. Die Koordinaten der Endpunkte der beiden zugehörigen Polygone seien $\mathfrak{x}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{y}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{x}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{y}_{\mathrm{II}}$. Ein *dritte* Teilung sei dadurch hergestellt, daß alle Zwischenwerte der ersten und alle Zwischenwerte der zweiten Teilung zusammen benutzt werden, und es seien $\mathfrak{x}_{\mathrm{III}}$, $\mathfrak{y}_{\mathrm{III}}$ die Koordinaten des Endpunktes des zugehörigen Polygons.

Weil hiernach die dritte Teilung sowohl aus der ersten als auch aus der zweiten durch eine solche Verfeinerung der Zerlegung gewonnen worden ist, bei der auch alle Zwischenwerte der ersten bzw. zweiten Teilung zur Verwendung kommen, so sind nach (1) in voriger Nummer sowohl

$$|\mathfrak{x}_{\mathrm{III}} - \mathfrak{x}_{\mathrm{I}}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{y}_{\mathrm{III}} - \mathfrak{y}_{\mathrm{I}}|$$

als auch

$$|\mathfrak{x}_{\mathrm{III}} - \mathfrak{x}_{\mathrm{II}}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{y}_{\mathrm{III}} - \mathfrak{y}_{\mathrm{II}}|$$

kleiner als

$$\frac{\tau}{g'}\left\{e^{2g'(t-t_0)} - 1\right\}.$$

Infolge des Satzes 2 von Nr. 4 sind demnach $|\mathfrak{x}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{x}_{\mathrm{I}}|$ und $|\mathfrak{y}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{y}_{\mathrm{I}}|$ kleiner als das Doppelte dieser Größe, die aber für $\lim \tau = 0$ verschwindet. Demnach ist in der Tat beim Grenzübergange nur der eine Umstand wesentlich, daß *alle* Teilintervalle von $t - t_0$ nach Null streben und dementsprechend ihre Anzahl über jede Zahl wächst.

Hieraus folgt noch mehr: Ist t' irgend ein Wert zwischen t_0 und t, so können wir ihn von vornherein als Zwischen-wert wählen und bei allen Verfeinerungen der Teilung beibehalten, so daß also zu ihm Ecken *aller* Polygone gehören. Daraus folgt weiter: Was wir für das ganze Intervall von t_0 bis t bewiesen haben, gilt auch für jedes bei t_0 beginnende Teilintervall, d. h. nicht nur zum Endwerte t ergibt sich eine Grenzlage der Polygonecken, sondern auch zu jedem zwischen t_0 und t gelegenen Werte. Die Größe t war nach (3) in Nr. 679 einzig und allein der Bedingung $0 < t - t_0 < k : g$ unterworfen. Folglich ergibt sich zu jedem Werte t im Intervalle:

$$t_0 < t < t_0 + \frac{k}{g} \tag{1}$$

ein bestimmtes endliches Wertepaar x, y als das Paar derjenigen Grenzwerte, nach denen die Koordinaten der zu t gehörigen Polygonecken streben, und zwar liegt dies Paar im Bereiche $|x - x_0| < k$, $|y - y_0| < k$. Mit anderen Worten:

Es gibt im Intervalle zwei solche *Funktionen:*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{2}$$

die für $t = t_0$ die Werte x_0, y_0 haben und deren geometrisches Bild eine Linie ist, nach der alle Ecken aller von der Stelle (x_0, y_0) aus konstruierbaren Polygone bei dem Grenzübergange streben.

Der größeren Bequemlichkeit des Ausdrucks wegen setzten wir in Nr. 679 insbesondere $t > t_0$ voraus. Hätten wir $t < t_0$ gewählt, so hätte es genügt, die neue unabhängige Veränderliche $T = -t$ einzuführen, um zu der bisher gemachten Annahme zurückzukehren. *Der Variabilitätsbereich der Funktionen* (2) *von t ist demnach der Bereich:*

$$|t - t_0| < \frac{k}{g}. \tag{3}$$

683. Existenz eines Systems von Lösungen. Wir müssen nun beweisen, daß die Funktionen:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{1}$$

deren Vorhandensein im Intervalle $|t - t_0| < k : g$ feststeht, ein Lösungensystem des in Nr. 678 vorgelegten Systems:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \tag{2}$$

von gewöhnlichen Differentialgleichungen bilden.

Es sei t irgend ein erlaubter Wert, ebenso $t + \Delta t$ und $\Delta t > 0$. Doch sei Δt kleiner als $\sigma_{s-1} : g$ gewählt, wobei σ_{s-1} die auf die $(s-1)^{\text{te}}$ Teilung in Nr. 680 bezügliche positive Zahl bedeutet. Wir dürfen dann annehmen, daß t und $t + \Delta t$ unmittelbar aufeinanderfolgende Zwischenwerte der $(s-1)^{\text{ten}}$ Teilung sind. Zu ihnen gehören Ecken $(\mathfrak{x}_s, \mathfrak{y}_s)$ und $(\mathfrak{x}_s + \Delta\mathfrak{x}_s, \mathfrak{y}_s + \Delta\mathfrak{y}_s)$ des s^{ten} Polygons, für die nach (5) in Nr. 680:

$$(3) \qquad \begin{cases} \Delta\mathfrak{x}_s = X(\mathfrak{x}_s, \mathfrak{y}_s)\,\Delta t \pm \tau_{s-1}\,\vartheta_{s-1}\,\Delta t, \\ \Delta\mathfrak{y}_s = Y(\mathfrak{x}_s, \mathfrak{y}_s)\,\Delta t \pm \tau_{s-1}\,\vartheta'_{s-1}\,\Delta t \end{cases}$$

ist. Dabei bedeuten ϑ_{s-1} und ϑ'_{s-1} positive echte Brüche, und es bleibt dahingestellt, mit welchen Vorzeichen sie in diesen Formeln auftreten.

In Nr. 680 setzten wir voraus, daß $\tau_1 + \tau_2 + \cdots$ eine konvergente Reihe von lauter positiven Gliedern sei. Sie bleibt konvergent, wenn wir die auf τ_{s-1} folgenden Glieder bis etwa zum Gliede τ_{n-1} streichen. Dies bedeutet: Wir können auf die $(s-1)^{\text{te}}$ Teilung unmittelbar die n^{te} folgen lassen, so daß für die zu t und $t + \Delta t$ gehörigen Ecken $(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n)$ und $(\mathfrak{x}_n + \Delta\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n + \Delta\mathfrak{y}_n)$ des n^{ten} Polygons entsprechend (3) die Formeln gelten:

$$(4) \qquad \begin{cases} \Delta\mathfrak{x}_n = X(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n)\,\Delta t \pm \tau_{s-1}\,\vartheta_{n-1}\,\Delta t, \\ \Delta\mathfrak{y}_n = Y(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n)\,\Delta t \pm \tau_{s-1}\,\vartheta'_{n-1}\,\Delta t, \end{cases}$$

in denen ϑ_{n-1} und ϑ'_{n-1} positive echte Brüche sind. Die Formeln gelten für jeden Index $n \geqq s$, sobald man nur die positive Größe $\Delta t < \sigma_{s-1} : g$ wählt. Wird dagegen Δt negativ angenommen, aber immer noch so, daß $|\Delta t| < \sigma_{s-1} : g$ ist, so geht die zu $t + \Delta t$ gehörige Ecke der zu t gehörigen voran, d. h. dann haben wir statt (4):

$$(5) \quad \begin{cases} -\Delta\mathfrak{x}_n = -X(\mathfrak{x}_n + \Delta\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n + \Delta\mathfrak{y}_n)\,\Delta t \mp \tau_{s-1}\,\vartheta_{n-1}\,\Delta t, \\ -\Delta\mathfrak{y}_n = -Y(\mathfrak{x}_n + \Delta\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n + \Delta\mathfrak{y}_n)\,\Delta t \mp \tau_{s-1}\,\vartheta'_{n-1}\,\Delta t. \end{cases}$$

Für $\lim n = \infty$ ist $\lim \tau_n = 0$ und nach (1):

$$\lim \mathfrak{x}_n = x = \varphi(t), \quad \lim \mathfrak{y}_n = y = \psi(t),$$

dagegen:

$$\lim (\mathfrak{x}_n + \Delta\mathfrak{x}_n) = \varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \Delta\varphi(t),$$
$$\lim (\mathfrak{y}_n + \Delta\mathfrak{y}_n) = \psi(t + \Delta t) = \psi(t) + \Delta\psi(t).$$

[683

Demnach folgt aus (4) für $\Delta t > 0$:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(t) = X(\varphi, \psi)\Delta t \pm \tau_{s-1}\theta\Delta t, \\ \Delta\psi(t) = Y(\varphi, \psi)\Delta t \pm \tau_{s-1}\theta'\Delta t \end{cases} \tag{6}$$

und aus (5) für $\Delta t < 0$:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(t) = X(\varphi + \Delta\varphi,\ \psi + \Delta\psi)\Delta t \pm \tau_{s-1}\theta\Delta t, \\ \Delta\psi(t) = Y(\varphi + \Delta\varphi,\ \psi + \Delta\psi)\Delta t \pm \tau_{s-1}\theta'\Delta t, \end{cases} \tag{7}$$

wobei θ und θ' zwischen 0 und 1 liegen. Für $\lim \Delta t = 0$ haben die rechten Seiten von (6) und (7) die Grenzwerte Null, d. h. *$\varphi(t)$ und $\psi(t)$ sind stetige Funktionen von t.*

Dividieren wir die Formeln (6) bzw. (7) mit Δt und lassen wir alsdann s zur Grenze ∞ übergehen, so ist auch $\lim \tau_{s-1} = 0$ und $\lim \Delta t = 0$, weil der Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zwischenwerten t und $t + \Delta t$ nach Null strebt. Da ferner X und Y stetige Funktionen sind, so folgt dabei sowohl aus (6) als auch aus (7):

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t} = X(\varphi, \psi), \quad \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta\psi(t)}{\Delta t} = Y(\varphi, \psi),$$

ob nun Δt von positiven oder negativen Werten aus nach Null strebt. Dies aber besagt: *Die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ haben die Ableitungen:*

$$\varphi'(t) = X(\varphi, \psi), \quad \psi'(t) = Y(\varphi, \psi). \tag{8}$$

Sie stellen daher ein System von Lösungen des Systems (2) *dar.* Überdies: *Die Ableitungen $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ sind stetig. Die Grenzlage der konstruierten Polygone ist demnach eine Integralkurve des Systems* (2).

Mithin können wir die Ergebnisse so zusammenfassen:

Satz 1: Es liege ein System erster Ordnung von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

mit zwei unbekannten Funktionen x und y der unabhängigen Veränderlichen t vor. Innerhalb der Umgebung:

$$|x - x_0| < k, \quad |y - y_0| < k$$

einer bestimmten Stelle (x_0, y_0) seien die beiden Funktionen X und Y von x und y stetig, so daß ihre absoluten Beträge unter-

halb einer gewissen endlichen Grenze g bleiben. Auch sollen die beiden Funktionen in dieser Umgebung überall bestimmte endliche partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Alsdann gibt es, wenn der Anfangswert t_0 von t beliebig gewählt wird, ein System von Lösungen:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

die für $t = t_0$ die Anfangswerte x_0 und y_0 haben und in dem Intervalle:

$$|t - t_0| < \frac{k}{g}$$

stetige Funktionen von t mit stetigen Ableitungen erster Ordnung sind. Für jeden Wert von t innerhalb des Intervalles liegt die zugehörige Stelle (x, y) in der angegebenen Umgebung der Stelle (x_0, y_0).

684. Die Lösungen als Funktionen der Anfangswerte. Statt der Anfangsstelle (x_0, y_0) nehmen wir jetzt eine andere Anfangsstelle (x_0', y_0') an, und zwar sei eine positive Zahl $h_0 < k$ gewählt und vorgeschrieben:

$$(1) \qquad |x_0' - x_0| \leqq h_0, \quad |y_0' - y_0| \leqq h_0.$$

Der neue Anfangspunkt M_0' oder (x_0', y_0') liegt alsdann im Innern oder auf dem Rande desjenigen der alten Anfangsstelle M_0 umschriebenen Quadrates, dessen Seiten den Achsen parallel sind und die Länge $2h_0 < 2k$ haben, siehe Fig. 10. Wir können, von M_0' ausgehend, wie in Nr. 679 ein Polygon konstruieren und werden beweisen, daß es ebenfalls innerhalb der Umgebung:

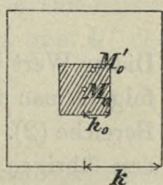

Fig. 10.

$$(2) \qquad |x - x_0| < k, \quad |y - y_0| < k$$

verbleibt, sobald nur solche Werte von t gestattet werden, die dem Intervalle angehören:

$$(3) \qquad |t - t_0| < \frac{k - h_0}{g}.$$

Es sei nämlich t irgendwo im Intervalle (3) gewählt. Zwischen t_0 und t schalten wir wie in Nr. 679 der Reihe nach beständig wachsende oder beständig abnehmende Zwischenwerte $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ ein (je nachdem $t > t_0$ oder $t < t_0$ ist) und betrachten gleichzeitig *zwei zugehörige Polygone,* indem wir einmal von der alten Anfangsstelle M_0 und dann von der neuen Anfangsstelle M_0' ausgehen. Zu jedem Zwischenwerte t_i gehört eine Ecke M_i bzw. M_i' des alten bzw. neuen Polygons, zu dem Endwerte t ein Endpunkt M bzw. M'. Die Koordinaten der Ecken des ersten Polygons werden durch die Gleichungen (2) von Nr. 679 bestimmt; entsprechende Gleichungen gelten beim zweiten Polygon. Wir wollen die auf das zweite Polygon bezüglichen Größen mit dem Akzent versehen und stellen hier nur diejenigen beiden Formelreihen einander gegenüber, die sich auf die *Abszissen* der Ecken beider Polygone beziehen:

$$(4)\begin{cases} x_1 - x_0 = X_0(t_1 - t_0), \\ x_2 - x_1 = X_1(t_2 - t_1), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x - x_{n-1} = X_{n-1}(t - t_{n-1}). \end{cases} \qquad (5)\begin{cases} x_1' - x_0' = X_0'(t_1 - t_0), \\ x_2' - x_1' = X_1'(t_2 - t_1), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x' - x_{n-1}' = X_{n-1}'(t - t_{n-1}). \end{cases}$$

Hierin hat X_i den Wert $X(x_i, y_i)$ und X_i' den Wert $X(x_i', y_i')$.

Weil die Stelle (x_0', y_0') in dem Bereiche (2) liegt, ist $|X_0'| < g$, nach (3) in Nr. 678, und da sich die erste Gleichung (5) in der Form:

$$x_1' - x_0 = x_0' - x_0 + X_0'(t_1 - t_0)$$

schreiben läßt, gibt sie also mit Rücksicht auf (1):

$$|x_1' - x_0| < h_0 + g\,|t_1 - t_0|.$$

Dieser Wert ist aber nach (3) kleiner als k. Das Entsprechende folgert man für $|y_1' - y_0|$, d. h. die Stelle (x_1', y_1') liegt in dem Bereiche (2). Mittels desselben Schlußverfahrens zieht man aus den übrigen Gleichungen (5) die Folgerung, daß überhaupt alle Ecken des neuen Polygons im Bereiche (2) gelegen sind, denn alle Werte $h_0 + g\,|t_i - t_0|$ sind kleiner als k, so auch der letzte Wert $h_0 + g\,|t - t_0|$.

Zur Abkürzung führen wir für die Differenzen zwischen den Werten der Größen, die sich auf das zweite und erste Polygon in gleicher Weise beziehen, die Zeichen ein:

$$(6)\begin{cases} \Delta x_0 = x_0' - x_0, & \Delta x_1 = x_1' - x_1, & \ldots \Delta x_{n-1} = x_{n-1}' - x_{n-1}, & \Delta x = x' - x, \\ \Delta y_0 = y_0' - y_0, & \Delta y_1 = y_1' - y_1, & \ldots \Delta y_{n-1} = y_{n-1}' - y_{n-1}, & \Delta y = y' - y, \\ \Delta X_0 = X_0' - X_0, & \Delta X_1 = X_1' - X_1, & \ldots \Delta X_{n-1} = X_{n-1}' - X_{n-1}, & \\ \Delta Y_0 = Y_0' - Y_0, & \Delta Y_1 = Y_1' - Y_1, & \ldots \Delta Y_{n-1} = Y_{n-1}' - Y_{n-1}. & \end{cases}$$

Nun liefert die Subtraktion entsprechender Gleichungen (4) und (5) sowie der auf die Ordinaten bezüglichen Gleichungen:

$$(7)\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta x_0 + \Delta X_0(t_1 - t_0), & \Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta Y_0(t_1 - t_0), \\ \Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta X_1(t_2 - t_1), & \Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta Y_1(t_2 - t_1), \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \Delta x = \Delta x_{n-1} + \Delta X_{n-1}(t - t_{n-1}), & \Delta y = \Delta y_{n-1} + \Delta Y_{n-1}(t - t_{n-1}). \end{cases}$$

Nach (5) in Nr. 678 ist aber allgemein:

$$(8) \quad |\Delta X_i| < g'\{|\Delta x_i| + |\Delta y_i|\}, \quad |\Delta Y_i| < g'\{|\Delta x_i| + |\Delta y_i|\}.$$

Demnach gibt die erste Gleichung (7) mit Rücksicht auf (1):

$$|\Delta x_1| < h_0 + 2g'h_0\,|t_1 - t_0|,$$

also umsomehr nach Nr. 117:

$$|\Delta x_1| < h_0 e^{2g'|t_1 - t_0|}.$$

Dieselbe Ungleichung gilt für Δy_1 statt Δx_1. Daher gibt die in (7) linksstehende zweite Gleichung mit Rücksicht auf (8):

$$|\Delta x_2| < h_0 e^{2g'|t_1 - t_0|}\{1 + 2g'|t_2 - t_1|\},$$

so daß umsomehr:

$$|\Delta x_2| < h_0 e^{2g'|t_2 - t_0|}$$

wird, usw. Schließlich finden wir ebenso für die Differenzen der Koordinaten x, y und x', y' der Endpunkte M und M' des alten und neuen Polygons die Ungleichungen:

$$(9) \qquad |\Delta x| < h_0 e^{2g'|t - t_0|}, \quad |\Delta y| < h_0 e^{2g'|t - t_0|}.$$

Da diese Ungleichungen von den benutzten Zwischenwerten $t_1, t_2, \dots t_{n-1}$ frei sind, gelten sie auch bei dem Grenzübergange, der von den Polygonen zu *Integralkurven* führt. Dies besagt: Es werde der Anfangspunkt M_0' oder (x_0', y_0') der zweiten Integralkurve in dem durch (1) bestimmten Quadrate um den Anfangspunkt M_0 oder (x_0, y_0) der ersten Integralkurve und t in dem Intervalle (3) gewählt. Alsdann ist der zu t gehörige Punkt M' oder (x', y') der zweiten Integralkurve in derjenigen Umgebung des zu t gehörigen Punktes M oder (x, y) der ersten Integralkurve gelegen, die durch:

$$(10) \qquad |x' - x| < h, \quad |y' - y| < h$$

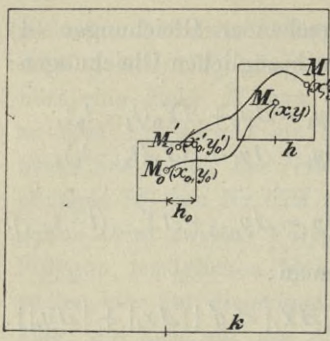

Fig. 11.

angegeben wird. Dabei bedeutet h die Zahl:

$$h = h_0 e^{2g'|t-t_0|}, \tag{11}$$

die für $t = t_0$ den Wert h_0 hat. Siehe Fig. 11.

Nach Satz 1 der vorigen Nummer werden die beiden Integralkurven durch Funktionen von t dargestellt, die nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetig sind. Da sich für verschiedene Anfangsstellen verschiedene Integralkurven ergeben, so sind diese Funktionen nicht nur von t, sondern auch von den Koordinaten der Anfangsstellen abhängig. Demgemäß seien:

$$x = \varphi(t, x_0, y_0), \quad y = \psi(t, x_0, y_0) \tag{12}$$

die Gleichungen der ersten und entsprechend:

$$x' = \varphi(t, x_0', y_0'), \quad y' = \psi(t, x_0', y_0')$$

die der zweiten Integralkurve. Die beiden letzten Gleichungen können wir nach (6) so schreiben:

$$x + \varDelta x = \varphi(t,\ x_0 + \varDelta x_0,\ y_0 + \varDelta y_0),$$
$$y + \varDelta y = \psi(t,\ x_0 + \varDelta x_0,\ y_0 + \varDelta y_0),$$

d. h. $\varDelta x$ und $\varDelta y$ sind diejenigen Zunahmen $\varDelta\varphi$ und $\varDelta\psi$, die den Funktionen (12) zukommen, wenn x_0 um $\varDelta x_0$ und y_0 um $\varDelta y_0$ wächst. Somit lassen sich die Ungleichungen (10) so schreiben:

$$|\varDelta\varphi| < h, \quad |\varDelta\psi| < h,$$

und zwar bestehen sie infolge von:

$$|\varDelta x_0| \leqq h_0, \quad |\varDelta y_0| \leqq h_0.$$

Da nun h nach (11) mit h_0 verschwindet, so folgt: *Es sind* $\varphi(t, x_0, y_0)$ *und* $\psi(t, x_0, y_0)$ *stetige Funktionen der beiden Anfangswerte* x_0 *und* y_0.

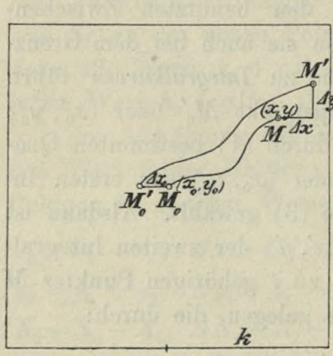

Fig. 12.

Wählen wir insbesondere $\varDelta y_0 = 0$, d. h. die neue Anfangsstelle M_0' auf der durch M_0 gehenden Parallele zur Abszissenachse, siehe Fig. 12, so können wir etwa $|\varDelta x_0| = h_0$ nach (1) annehmen. Alsdann folgt aus (9) durch Division mit $|\varDelta x_0|$:

$$(13) \qquad \left|\frac{\varDelta x}{\varDelta x_0}\right| < e^{2g'|t-t_0|}, \qquad \left|\frac{\varDelta y}{\varDelta x_0}\right| < e^{2g'|t-t_0|},$$

d. h. *diejenigen Differenzenquotienten der Funktionen* $\varphi(t, x_0, y_0)$ *und* $\psi(t, x_0, y_0)$, *die hervorgehen, wenn* x_0 *um* $\varDelta x_0$ *wächst, aber* y_0 *und* t *ungeändert bleibt, sind ihren absoluten Beträgen nach unterhalb einer endlichen Grenze gelegen, sobald* $|\varDelta x_0|$ *hinreichend klein gewählt worden ist.*

Aus diesen Ungleichungen (13) werden wir erst in Nr. 692 weitere Folgerungen ziehen. Vorläufig hat sich ergeben:

Satz 2: Es liege ein System erster Ordnung von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

mit zwei unbekannten Funktionen x *und* y *der unabhängigen Veränderlichen* t *vor. Innerhalb eines gewissen Bereiches seien die beiden Funktionen* X *und* Y *von* x *und* y *stetig und mit bestimmten endlichen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen. Alsdann gibt es, wenn der Anfangswert* t_0 *von* t *beliebig, aber bestimmt gewählt worden ist, in der Umgebung jeder Stelle* (x_0, y_0) *des Bereiches ein System von Lösungen:*

$$x = \varphi(t, x_0, y_0), \qquad y = \psi(t, x_0, y_0),$$

die für $t = t_0$ *die Anfangswerte* x_0 *und* y_0 *haben und für alle Werte von* t *innerhalb einer gewissen Umgebung des Wertes* t_0 *stetige Funktionen von* t *mit stetigen Ableitungen erster Ordnung sind. Überdies sind diese Funktionen* φ *und* ψ *auch stetige Funktionen der beiden Anfangswerte* x_0 *und* y_0.

685. Ein besonderer Fall. Es kann sein, daß die beiden Funktionen X und Y an der Stelle (x_0, y_0) verschwinden. Alsdann liefert die in Nr. 679 benutzte Konstruktion gar kein Polygon, da alle Ecken (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\dots (x_{n-1}, y_{n-1})$ und (x, y) mit der Stelle (x_0, y_0) nach den Gleichungen (2) ebenda zusammenfallen. Demnach ergibt sich auch beim Grenzübergange keine Integralkurve, sondern nur der *Punkt* (x_0, y_0). In der Tat werden die Gleichungen des Systems:

(1) $$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

unter der Voraussetzung:

(2) $$X(x_0, y_0) = 0, \quad Y(x_0, y_0) = 0$$

durch das Lösungensystem befriedigt:

(3) $$x = x_0, \quad y = y_0,$$

das aus zwei *Konstanten* besteht. Denn hier ist $dx : dt = 0$ und $dy : dt = 0$. Man muß also den Punkt (x_0, y_0) in diesem Falle als ein *Integralgebilde* bezeichnen.

Dies entspricht auch der geometrischen Deutung: Im vorliegenden Falle nämlich ordnet das System (1) dem Punkte (x_0, y_0) nicht ein bestimmtes Linienelement, sondern *alle* Linienelemente zu, die von ihm ausgehen, da für den Winkel τ des Elements mit der x-Achse:

$$\sin\tau : \cos\tau = Y(x, y) : X(x, y)$$

ist (vgl. Nr. 677) und sich also infolge von (2) für die Stelle (x_0, y_0) ergibt:

$$\sin\tau : \cos\tau = 0 : 0.$$

Wenn man will, kann man einen Punkt (x_0, y_0) als die Grenzlage einer zusammengeschrumpften geschlossenen Kurve auffassen, so daß die Grenzlagen der Linienelemente der Kurve alle Linienelemente des Punktes sind.

Beispiel: Das System

(4) $$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y$$

ist leicht zu integrieren, denn es liefert:

$$\frac{d\ln x}{dt} = 1, \quad \frac{d\ln y}{dt} = 1,$$

d. h. $\ln x = t +$ konst., $\ln y = t +$ konst. oder:

(5) $$x = Ae^t, \quad y = Be^t,$$

wobei A und B willkürliche Konstanten bedeuten. Diese Gleichungen ziehen $x : y = A : B$ nach sich und stellen also einen beliebigen Strahl vom Anfangspunkte O des Koordinatensystems aus vor, siehe Fig. 13. Alle Strahlen von O aus sind demnach Integralkurven. Für den Anfangspunkt selbst aber sind die rechten Seiten der Gleichungen (4) gleich Null, d. h. der Punkt O ist für sich ein Integralgebilde. Die Linienelemente, die das System (4) den Punkten der Ebene zuordnet, liegen samt und sonders auf den Strahlen durch O; dem Punkte O selbst gehören *alle* von ihm ausgehenden Elemente infolge von (4) zu.

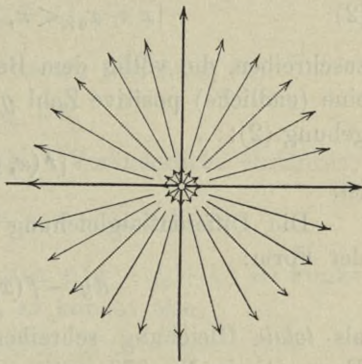

Fig. 13.

Bei diesem Beispiele ist nun Eines hervorzuheben: Das Lösungensystem (5) stellt zwar einen Strahl von O aus vor, jedoch sobald A und B nicht beide gleich Null sind, *gehört der Punkt O selbst nicht zu dieser Integralkurve*, weil ja e^t für keinen endlichen Wert von t verschwindet. Wenn aber $A = B = 0$ gewählt wird, stellt (5) gar nicht mehr eine Gerade, sondern für alle Werte von t nur den Punkt O vor. Man beachte auch den Sinn der Richtungen der Linienelemente, der sich daraus ergibt, daß $\sin\tau : \cos\tau = y : x$ ist und $\sin\tau$ bzw. $\cos\tau$ dasselbe Vorzeichen wie y bzw. x hat.

Es wurden wohlbemerkt nicht die Vollgeraden durch O, sondern nur die von O ausgehenden *Strahlen* als Integralkurven bezeichnet. In der Tat stellen die Gleichungen (5) bei gegebenen Werten von A und B nur einen solchen Strahl dar.

§ 3. Existenzbeweis bei der Gleichung $y' = f(x, y)$.

686. Anwendung der Ergebnisse auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in aufgelöster Form. Wir kehren zur Betrachtung der gewöhnlichen Differentialgleichung:

(1) $$y' = f(x, y)$$

zurück (vgl. Nr. 676) und setzen voraus, daß die Funktion $f(x, y)$ der beiden Veränderlichen x und y in einem gewissen

Bereiche stetig sei und bestimmte endliche partielle Ableitungen erster Ordnung habe. Wird eine Stelle (x_0, y_0) im Innern des Bereiches beliebig, aber bestimmt gewählt, so kann man ihr eine Umgebung:

$$(2)\qquad |x - x_0| < k, \quad |y - y_0| < k$$

zuschreiben, die völlig dem Bereiche angehört. Es gibt daher eine (endliche) positive Zahl g derart, daß überall in der Umgebung (2):

$$|f(x, y)| < g$$

ist.

Die Differentialgleichung (1) läßt sich insbesondere in der Form:

$$dy - f(x, y)\,dx = 0$$

als *totale* Gleichung schreiben und ordnet sich somit der Form (1) in Nr. 677 unter, wenn darin $X = 1$, $Y = f(x, y)$ gesetzt wird, so daß sie nach (3) in Nr. 677 zu dem Systeme:

$$(3)\qquad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y)$$

führt, in dem t die unabhängige Veränderliche ist und x und y unbekannte Funktionen von t bedeuten. Auf das System (3) läßt sich der Satz 1 von Nr. 683 anwenden. Danach gibt es ein System von Lösungen:

$$(4)\qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

die für $t = t_0$ die Anfangswerte x_0 und y_0 haben und in dem Intervalle

$$(5)\qquad |t - t_0| < \frac{k}{g}$$

stetige Funktionen mit stetigen Ableitungen erster Ordnung sind. Überdies gehört jedes durch (4) bestimmte Wertepaar x, y der Umgebung (2) an.

Wegen der ersten Gleichung (3) muß aber:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = 1, \quad \text{d. h.} \quad \varphi(t) = t + C$$

sein, wo C eine Konstante bedeutet. Da $\varphi(t_0) = x_0$ ist, so kommt:

$$t_0 + C = x_0 \quad \text{oder} \quad C = x_0 - t_0.$$

Also lautet das System (4) insbesondere so:

(6) $$x = t - t_0 + x_0, \quad y = \psi(t).$$

Daher ist nach der zweiten Gleichung (3):

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = f(t - t_0 + x_0, \psi(t))$$

oder, wenn wir entsprechend der ersten Gleichung (6):

(7) $$t = x - x_0 + t_0$$

setzen, d. h. x statt t als unabhängige Veränderliche einführen:

$$\frac{d\psi(x - x_0 + t_0)}{dx} = f(x, \psi(x - x_0 + t_0)).$$

Wenn wir von jetzt an die Funktion $\psi(x - x_0 + t_0)$ als Funktion von x mit $\varphi(x)$ bezeichnen, so kommt also:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)),$$

d. h. $y = \varphi(x)$ *ist eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung* (1).

Zur Bestimmung desjenigen Intervalles der Veränderlichen x, in dem sich die Lösung stetig verhält und eine stetige Ableitung erster Ordnung hat, muß man auf die erste Ungleichung (2) und die Ungleichung (5) zurückblicken, in der für t der Wert (7) einzusetzen ist. Sie liefern die Bedingungen:

$$|x - x_0| < k, \quad |x - x_0| < \frac{k}{g}.$$

Wenn $g < 1$ ist, wird die zweite Bedingung überflüssig, dagegen die erste, wenn $g > 1$ ist. Wir haben gefunden:

Satz 3: Es liege eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' = f(x, y)$$

mit einer unbekannten Funktion y der unabhängigen Veränderlichen x vor. Die Funktion $f(x, y)$ der beiden Veränderlichen x und y verhalte sich in der Umgebung:

$$|x - x_0| < k, \quad |y - y_0| < k$$

einer bestimmten Stelle (x_0, y_0) stetig, so daß ihr absoluter Betrag unterhalb einer endlichen Grenze g bleibt; auch habe $f(x, y)$ [686 *in jener Umgebung überall bestimmte endliche partielle Ableitungen erster Ordnung. Alsdann gibt es eine Lösung:*

$$y = \varphi(x),$$

die für $x = x_0$ den Anfangswert y_0 hat und in demjenigen Intervalle, das durch:

$$|x - x_0| < k \quad \textit{und} \quad |x - x_0| < \frac{k}{g}$$

bestimmt wird, nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetig ist und überdies nur solche Werte annimmt, die von y_0 um weniger als k abweichen.

Später wird sich zeigen, daß die Voraussetzung des Vorhandenseins der Ableitung f_x überflüssig ist. (Siehe Satz 7 in Nr. 689.)

687. Die Lösung als Funktion der Anfangswerte. In derselben Weise läßt sich der Satz 2 von Nr. 684 übertragen, so daß wir finden:

Satz 4: Es liege eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' = f(x, y)$$

mit einer unbekannten Funktion y der unabhängigen Veränderlichen x vor. Innerhalb eines gewissen Bereiches sei die Funktion $f(x, y)$ der beiden Veränderlichen x und y stetig und mit bestimmten endlichen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen. Alsdann gibt es in der Umgebung einer jeden Stelle (x_0, y_0) des Bereiches eine Lösung:

$$y = \varphi(x, x_0, y_0),$$

die für $x = x_0$ den Anfangswert y_0 hat und für alle Werte von x innerhalb einer gewissen Umgebung des Wertes x_0 eine stetige Funktion von x mit stetiger Ableitung erster Ordnung ist. Überdies ist die Lösung auch eine stetige Funktion der beiden Anfangswerte x_0 und y_0.

Wir werden später (in Nr. 691) sehen, daß diese Lösung die einzige Lösung ist, die für $x = x_0$ den vorgeschriebenen Anfangswert y_0 hat. Vorher jedoch wollen wir die Ergebnisse verallgemeinern.

§ 4. Existenzbeweis bei Systemen in der Normalform.

688. Systeme, in denen die unabhängige Veränderliche nicht auftritt. Die in § 2 durchgeführte Untersuchung läßt sich ganz ebenso anstellen, wenn es sich um ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen handelt, das die Form hat:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = X_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{dx_n}{dt} = X_n(x_1, x_2, \ldots x_n). \end{cases}$$

Hier sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ die unbekannten Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t, und das System hat gerade so wie das in § 2 betrachtete die besondere Eigenschaft, daß die unabhängige Veränderliche t in den Funktionen $X_1, X_2, \ldots X_n$ nicht vorkommt.

Die Betrachtungen des § 2 sind nämlich rein analytischer Natur, wenn wir uns auch der größeren Anschaulichkeit halber zum Teil einer geometrischen Redeweise bedient haben. Anstatt in Nr. 679 von einem Polygon zu sprechen, hätten wir ja auch von einer Folge von Wertepaaren x_0, y_0; x_1, y_1; $\ldots$ x_{n-1}, y_{n-1} und x, y reden können, die durch die damals aufgestellten Gleichungen (2) bedingt werden. Der einzige Umstand, der bei der Verallgemeinerung der in § 2 durchgeführten Betrachtung von $n = 2$ auf beliebiges n hervorzuheben ist, aber die Schlußfolgerungen nirgends wesentlich beeinflußt, besteht darin, daß in den Ungleichungen, die in Nr. 681 abgeleitet wurden, statt $2\tau_1$ bzw. $2\tau_{s-1}$ jetzt $n\tau_1$ bzw. $n\tau_{s-1}$ vorkommt, was nach sich zieht, daß auch in den späteren Formeln die Zahl n statt 2 auftritt.

Entsprechend dem Satze 1 von Nr. 683 gilt demnach

Satz 5: Es liege ein System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

mit n unbekannten Funktionen $x_1, x_2, \ldots x_n$ *der unabhängigen Veränderlichen t vor. Innerhalb der Umgebung:*

$$|x_1 - x_1^0| < k, \quad |x_2 - x_2^0| < k, \ldots |x_n - x_n^0| < k$$

einer bestimmten Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ *seien die n Funktionen* $X_1, X_2, \ldots X_n$ *von* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *stetig, so daß ihre absoluten Beträge unterhalb einer gewissen endlichen Grenze g bleiben. Auch sollen die n Funktionen in dieser Umgebung überall bestimmte endliche partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Alsdann gibt es, wenn der Anfangswert* t_0 *von t beliebig gewählt wird, ein System von Lösungen:*

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ldots x_n = \varphi_n(t),$$

die für $t = t_0$ *die Anfangswerte* $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ *haben und in dem Intervalle:*

$$|t - t_0| < \frac{k}{g}$$

stetige Funktionen von t mit stetigen Ableitungen erster Ordnung sind. Für jeden Wert von t innerhalb des Intervalles liegt die zugehörige Stelle $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *in der angegebenen Umgebung der Stelle* $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$.

Ferner finden wir entsprechend dem Satze 2 von Nr. 684:

Satz 6: Es liege ein System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

mit n unbekannten Funktionen $x_1, x_2, \ldots x_n$ *der unabhängigen Veränderlichen t vor. Innerhalb eines gewissen Bereiches seien die n Funktionen* $X_1, X_2, \ldots X_n$ *von* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *stetig und mit bestimmten endlichen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen. Alsdann gibt es, wenn der Anfangswert* t_0 *von t beliebig gewählt worden ist, in der Umgebung einer jeden Stelle* $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ *des Bereiches ein System von Lösungen:*

$$x_i = \varphi_i(t, x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

die für $t = t_0$ *die Anfangswerte* $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ *haben und für alle Werte von t innerhalb einer gewissen Umgebung des Wertes* t_0 *stetige Funktionen von t mit stetigen Ableitungen erster Ordnung sind. Überdies sind diese Lösungen* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ *auch stetige Funktionen der n Anfangswerte* $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$.

689. Systeme in der Normalform. Es liege nunmehr ein System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform (vgl. Nr. 665) vor:

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Hier sind $y_1, y_2, \ldots y_n$ die unbekannten Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x. Die rechten Seiten der Gleichungen (1) sind aber nicht mehr frei von der unabhängigen Veränderlichen selbst, sodaß die Sätze der letzten Nummer zunächst nicht anwendbar sind. Die grundlegenden Betrachtungen des zweiten Paragraphen gestatten jedoch noch eine andere Verallgemeinerung außer der in voriger Nummer besprochenen.

Von Nr. 678 an handelte es sich nämlich um die Integration des Systems:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

mit zwei unbekannten Funktionen x und y der unabhängigen Veränderlichen t. Statt dieses Systems soll jetzt eines von der allgemeineren Form:

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = X(t, x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(t, x, y)$$

ins Auge gefaßt werden. Hier hängen X und Y nicht nur von x und y, sondern auch von t ab. Es werde vorausgesetzt, daß die beiden Funktionen X und Y in der Umgebung:

$$(3) \qquad |t - t_0| < k, \quad |x - x_0| < k, \quad |y - y_0| < k$$

des Wertsystems t_0, x_0, y_0 stetig seien und bestimmte endliche partielle Ableitungen erster Ordnung *hinsichtlich* x *und* y haben. Dagegen soll das Vorhandensein von partiellen Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich t *nicht* vorausgesetzt werden. Man erkennt nämlich, daß auch jetzt infolge dieser Annahmen die Ungleichungen (3), (4) und (5) von Nr. 678 gelten. In den Ungleichungen (5) handelt es sich dabei wohlbemerkt um Differenzen von der Form:

$$\Delta X = X(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - X(t, x, y),$$
$$\Delta Y = Y(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - Y(t, x, y),$$

bei denen also Minuend und Subtrahend *denselben Wert* von t enthalten. Es ist nun leicht zu sehen, daß auch in den folgenden Betrachtungen von Nr. 679 an, wenn sie entsprechend auf das allgemeinere System (2) angewandt werden, nur Differenzen von dieser besonderen Art vorkommen:

In den Gleichungen (2) von Nr. 679 bedeuten jetzt X_i und Y_i natürlich die Werte $X(t_i, x_i, y_i)$ und $Y(t_i, x_i, y_i)$. Nun kommt in Nr. 681 die Differenz von $X(x'_m, y'_m)$ und $X(x_i, y_i)$ vor. Dabei bedeutet (x_i, y_i) die zu t_i gehörige Ecke des ersten und (x'_m, y'_m) die zu *demselben Werte* t_i gehörige Ecke des zweiten Polygons, vgl. (1) in Nr. 680. Bei dem allgemeineren Systeme (2) hat diese Differenz mithin die Form:

$$X(t_i, x'_m, y'_m) - X(t_i, x_i, y_i),$$

d. h. die Form der oben mit $\varDelta X$ bezeichneten Differenz, sodaß die Anwendung der Ungleichungen von Nr. 678 jetzt genau so wie damals statthaft bleibt. Dasselbe gilt von den weiteren Betrachtungen des zweiten Paragraphen bei allen vorkommenden Differenzen von Funktionswerten, insbesondere z. B. von denen in Nr. 684. Daher steht der Verallgemeinerung jener Betrachtungen auf das System (2) nichts im Wege. Noch sei erwähnt, daß jetzt in den Gleichungen (6) und (7) von Nr. 683 bei den Funktionen X und Y noch die Veränderliche t bzw. $t + \varDelta t$ eintritt, was jedoch ohne Einfluß auf die Folgerungen ist. Wie in Nr. 682 unter (2) ergibt sich, daß t auf das Intervall:

$$|t - t_0| < \frac{k}{g}$$

beschränkt werden muß.

Wenn nun aber x, y, t mit y_1, y_2, x sowie X und Y mit f_1 und f_2 bezeichnet werden, nimmt das System (2) die Gestalt:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \qquad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2)$$

an und wird daher ein System in der Normalform (1) für den Fall $n = 2$.

Der Verallgemeinerung vom Falle $n = 2$ auf den Fall $n > 2$ stellen sich weiterhin, wie schon in voriger Nummer erläutert wurde, keinerlei wesentliche Schwierigkeiten in den

Weg. Daher dürfen wir hier sofort den auf das System (1) bezüglichen Satz formulieren, der eine Verallgemeinerung des Satzes 5 der letzten Nummer ist:

Satz 7: Es liege ein System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

mit n unbekannten Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ *der unabhängigen Veränderlichen x vor. Die Funktionen* $f_1, f_2, \ldots f_n$ *der* $n+1$ *Veränderlichen* $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ *seien in der Umgebung:*

$$|x - x_0| < k, \quad |y_1 - y_1^0| < k, \ \ldots \ |y_n - y_n^0| < k$$

einer bestimmten Stelle $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ *stetig, so daß ihre absoluten Beträge unterhalb einer endlichen Grenze g bleiben; auch sollen sie überall in der Umgebung bestimmte endliche partielle Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich der n Größen* $y_1, y_2, \ldots y_n$ *haben. Alsdann gibt es ein System von Lösungen:*

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \ \ldots \ y_n = \varphi_n(x),$$

die für $x = x_0$ *die Anfangswerte* $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ *haben und in demjenigen Intervalle, das durch:*

$$|x - x_0| < k \quad \text{und} \quad |x - x_0| < \frac{k}{g}$$

bestimmt wird, nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetig sind. Überdies liegen ihre Wertsysteme $y_1, y_2, \ldots y_n$ *in dem Bereiche:*

$$|y_1 - y_1^0| < k, \quad |y_2 - y_2^0| < k, \ \ldots \ |y_n - y_n^0| < k.$$

Hiernach darf in Satz 3 von Nr. 686 die Voraussetzung, daß $f(x, y)$ eine bestimmte endliche partielle Ableitung erster Ordnung hinsichtlich der unabhängigen Veränderlichen x habe, unterdrückt werden.

Ferner ergibt sich die folgende Verallgemeinerung des Satzes 6 von Nr. 688:

Satz 8: Es liege ein System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

mit n unbekannten Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ *der unabhängigen Veränderlichen x vor. Innerhalb eines gewissen Bereiches seien* *die Funktionen* $f_1, f_2, \ldots f_n$ *der* $n+1$ *Veränderlichen* $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ *stetig und mit bestimmten endlichen partiellen Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich der* n *Größen* $y_1, y_2, \ldots y_n$ *versehen. Alsdann gibt es in der Umgebung einer jeden Stelle* $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ *des Bereiches ein System von Lösungen:*

$$y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

die für $x = x_0$ *die Anfangswerte* $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ *haben und für alle Werte von* x *innerhalb einer gewissen Umgebung des Wertes* x_0 *stetige Funktionen von* x *mit stetigen Ableitungen erster Ordnung sind. Überdies sind diese Lösungen auch stetige Funktionen der* n *Anfangswerte* $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$.

690. Betrachtung eines besonderen Falles. Mit den beiden letzten Sätzen sind wir zu einem gewissen Abschlusse gelangt, da wir die Existenz von Lösungensystemen für Systeme von Differentialgleichungen in der Normalform erkannt haben. Aber wir beabsichtigen überdies zu beweisen, daß *nur ein* System von Lösungen zu den gegebenen Anfangswerten vorhanden ist. Zur Vorbereitung bedürfen wir dabei der Untersuchung eines besonderen Falles, dem die gegenwärtige Nummer gewidmet werden soll.

Es liege ein System in der Normalform im Falle $n = 2$ vor:

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \qquad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2).$$

Die beiden Funktionen f_1 und f_2 seien stetig in dem Bereiche:

$$\text{(2)} \qquad |x - x_0| < k, \quad |y_1 - y_1^0| < k, \quad |y_2 - y_2^0| < k$$

und sollen überall im Bereiche nicht nur bestimmte endliche, sondern auch *stetige* partielle Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich y_1 und y_2 haben.

Zu diesen Voraussetzungen fügen wir noch eine besondere Voraussetzung hinzu: *Für alle erlaubten Werte von* x *soll:*

$$\text{(3)} \qquad f_1(x, y_1^0, y_2^0) = 0 \quad \textit{und} \quad f_2(x, y_1^0, y_2^0) = 0$$

sein. Wir untersuchen also eine Verallgemeinerung des in Nr. 685 betrachteten Falles. Wie dort ergibt sich auch hier, daß die beiden *Konstanten*:

$$y_1 = y_1^0, \quad y_2 = y_2^0$$

ein System von Lösungen vorstellen, denn für sie ist ja:

$$\frac{dy_1}{dx} = 0, \quad \frac{dy_2}{dx} = 0,$$

so daß die Gleichungen (1) infolge von (3) durch die Substitution dieser konstanten Werte erfüllt werden.

Wir wollen beweisen, daß das System (1) in dem Bereiche (2) außer diesen beiden Konstanten kein anderes System von Lösungen zuläßt, die für $x = x_0$ die Anfangswerte y_1^0 und y_2^0 haben und in der Umgebung von x_0 differenzierbar sind. Entgegen dem, was wir zeigen wollen, nehmen wir an, es gebe doch ein solches System von Lösungen:

$$(4) \qquad y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x),$$

sodaß nach (1) für jeden erlaubten Wert von x:

$$(5) \qquad \varphi_1'(x) = f_1(x, \varphi_1, \varphi_2), \quad \varphi_2'(x) = f_2(x, \varphi_1, \varphi_2)$$

ist, woraus folgt, daß die Ableitungen φ_1' und φ_2' in der Umgebung von x_0 stetige Funktionen von x sein müssen. Insbesondere soll dabei $\varphi_1(x_0) = y_1^0$ und $\varphi_2(x_0) = y_2^0$ sein.

Da $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ nicht alle beide bloß die Konstanten y_1^0 und y_2^0 sind, gibt es Werte $\varDelta x$ mit hinreichend kleinen absoluten Beträgen derart, daß $\varphi_1(x_0 + \varDelta x)$ und $\varphi_2(x_0 + \varDelta x)$ nicht beide gleich y_1^0 und y_2^0 werden, also nicht beide Differenzen:

$$(6) \quad \varDelta y_1 = \varphi_1(x_0 + \varDelta x) - \varphi_1(x_0), \quad \varDelta y_2 = \varphi_2(x_0 + \varDelta x) - \varphi_2(x_0)$$

verschwinden. Nach dem Mittelwertsatze 28 von Nr. 137 (für $n = 1$) gibt es einen positiven echten Bruch θ, für den die Gleichung gilt:

$$f_1(x_0 + \varDelta x, y_1^0 + \varDelta y_1, y_2^0 + \varDelta y_2) - f_1(x_0 + \varDelta x, y_1^0, y_2^0) =$$

$$\varDelta y_1 \frac{\partial f_1(x_0 + \varDelta x, y_1^0 + \theta \varDelta y_1, y_2^0 + \theta \varDelta y_2)}{\partial y_1^0} + \varDelta y_2 \frac{\partial f_1(x_0 + \varDelta x, y_1^0 + \theta \varDelta y_1, y_2^0 + \theta \varDelta y_2)}{\partial y_2^0}.$$

Der links stehende Subtrahend ist nach (3) gleich Null. Da ferner f_1 und f_2 im Bereiche (2) stetige partielle Ableitungen hinsichtlich y_1 und y_2 haben, bleiben die absoluten Beträge dieser Ableitungen unterhalb einer endlichen Grenze g'. Also ergibt sich:

$$(7) \quad |f_1(x_0 + \varDelta x, y_1^0 + \varDelta y_1, y_2^0 + \varDelta y_2)| < g' \{ |\varDelta y_1| + |\varDelta y_2| \}.$$

Ebenso kommt:

(8) $$|f_2(x_0+\varDelta x,\ y_1^0+\varDelta y_1,\ y_2^0+\varDelta y_2)| < g'\{|\varDelta y_1|+|\varDelta y_2|\}.$$

Nun aber ist nach (5):

$$f_1(x_0+\varDelta x,\ y_1^0+\varDelta y_1,\ y_2^0+\varDelta y_2)=\varphi_1'(x_0+\varDelta x),$$
$$f_2(x_0+\varDelta x,\ y_1^0+\varDelta y_1,\ y_2^0+\varDelta y_2)=\varphi_2'(x_0+\varDelta x).$$

Außerdem gibt es nach dem Mittelwertsatze 3 von Nr. 28 zwei positive echte Brüche ϑ_1 und ϑ_2, die *kleiner als Eins* sind und mit deren Hilfe die Differenzen (6) die Formen bekommen:

$$\varDelta y_1=\varDelta x\,\varphi_1'(x_0+\vartheta_1\varDelta x),\quad \varDelta y_2=\varDelta x\,\varphi_2'(x_0+\vartheta_2\varDelta x).$$

Setzen wir alle diese Werte in (7) und (8) ein, so kommt:

$$|\varphi_1'(x_0+\varDelta x)| < g'|\varDelta x|\{|\varphi_1'(x_0+\vartheta_1\varDelta x)|+|\varphi_2'(x_0+\vartheta_2\varDelta x)|\},$$
$$\varphi_2'(x_0+\varDelta x)| < g'|\varDelta x|\{|\varphi_1'(x_0+\vartheta_1\varDelta x)|+|\varphi_2'(x_0+\vartheta_2\varDelta x)|\}.$$

Wir können immer annehmen, daß $|\varDelta x|$ kleiner als $1:2g'$ sei. Daraus folgt:

Für hinreichend kleines $|\varDelta x|$ gibt es zwei positive echte und von Eins verschiedene Brüche ϑ_1 und ϑ_2 derart, daß die Ungleichungen gelten:

(9) $$\begin{cases} 2|\varphi_1'(x_0+\varDelta x)| < |(\varphi_1'(x_0+\vartheta_1\varDelta x)|+|\varphi_2'(x_0+\vartheta_2\varDelta x)|, \\ 2|\varphi_2'(x_0+\varDelta x)| < |(\varphi_1'(x_0+\vartheta_1\varDelta x)|+|\varphi_2'(x_0+\vartheta_2\varDelta x)|. \end{cases}$$

Es sind $\varphi_1'(x_0+\varDelta x)$ und $\varphi_2'(x_0+\varDelta x)$ in der Umgebung von $\varDelta x=0$ stetige Funktionen von $\varDelta x$, und für $\varDelta x=0$ haben sie nach (5) wegen (3) den Wert Null. Es mögen nun τ_1 und τ_2 die größten Werte sein, die

(10) $$|\varphi_1'(x_0+\varDelta x)| \quad \text{und} \quad |\varphi_2'(x_0+\varDelta x)|$$

in dem für $\varDelta$ erlaubten Intervalle erreichen. Dabei sei τ_1 nicht kleiner als τ_2. Der kleinste Wert von $|\varDelta x|$, für den die erste Größe (10) den Maximalwert τ_1 erreicht, sei h_1. Nun steht folgendes fest: Für $|\varDelta x| < h_1$ sind beide Werte (10) kleiner als τ_1. An mindestens einer der Grenzen dieses Intervalles dagegen, etwa für $\varDelta x=h_1$, wird der erste Wert gerade gleich τ_1 und der zweite nicht größer als τ_1. Wenn wir jetzt in der ersten Ungleichung (9) insbesondere $\varDelta x=h_1$ wählen, wird die linke Seite gleich $2\tau_1$, dagegen die rechte, weil ϑ_1 und ϑ_2 kleiner als Eins sind, kleiner als $2\tau_1$. Dies ist mit der Ungleichung unvereinbar, da ihre linke Seite kleiner als die rechte sein soll. Nur im Falle $\tau_1 = 0$ ergibt sich kein Widerspruch. In diesem Falle wird auch $\tau_2 = 0$, weil τ_2 nicht größer als τ_1 ist. Im ganzen Intervalle $|\Delta x| < h_1$ sind alsdann die beiden Größen (10) gleich Null, also $\varphi_1(x_0 + \Delta x)$ und $\varphi_2(x_0 + \Delta x)$ konstant und daher gleich $\varphi_1(x_0)$ und $\varphi_2(x_0)$ oder y_1^0 und y_2^0. Dies aber wollten wir gerade beweisen.

Wären wir von der Annahme $\tau_2 > \tau_1$ ausgegangen, so hätten wir statt der ersten Ungleichung (9) die zweite benutzen müssen, um zu demselben Ergebnisse zu gelangen.

Es hat sich also gezeigt, daß das System (1) *unter den Voraussetzungen* (3) *nur ein Lösungensystem hat, das sich für* $x = x_0$ *auf die Anfangswerte* y_1^0 *und* y_2^0 *reduziert, und zwar eben das System dieser beiden Konstanten:*

$$y_1 = y_1^0, \quad y_2 = y_2^0.$$

Das Beispiel in Nr. 685 steht nur scheinbar hiermit im Widerspruche. Denn wenn wir statt der dort gebrauchten Zeichen t, x, y jetzt die Zeichen x, y_1, y_2 wählen, so lautet das System:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_2. \tag{11}$$

Insbesondere ist hier also $f_1 = y_1$ und $f_2 = y_2$, so daß die Bedingungen (3) für $y_1^0 = 0$, $y_2^0 = 0$ erfüllt sind. Wir setzten jedoch schon damals auseinander, daß das allgemeine Lösungensystem, das jetzt so lautet:

$$y_1 = Ae^x, \quad y_2 = Be^x,$$

für keinen endlichen Anfangswert x_0 von x die Anfangswerte $y_1^0 = 0$ und $y_2^0 = 0$ hat, es sei denn, daß die beiden Konstanten A und B gleich Null gewählt werden. Dann aber reduziert sich dies Lösungensystem für *jeden* Wert von x auf $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Es gibt also tatsächlich auch in diesem Beispiele nur ein Lösungensystem mit den Anfangswerten $y_1^0 = 0$ und $y_2^0 = 0$, nämlich die beiden *Konstanten* $y_1 = 0$, $y_2 = 0$.

691. Nur ein Lösungensystem mit vorgeschriebenen Anfangswerten. Die in der letzten Nummer gemachten besonderen Annahmen (3) lassen wir jetzt wieder fallen, behalten aber die übrigen Voraussetzungen über die Funktionen f_1 und f_2 bei, die in dem Systeme:

$$(1)\qquad \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \quad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2)$$

auftreten. Wir wissen dann nach Satz 7 in Nr. 689, daß es ein System von Lösungen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ gibt, die für $x = x_0$ die Anfangswerte y_1^0 und y_2^0 haben und in der Umgebung von $x = x_0$ stetig und differenzierbar sind.

Wenn wir nun statt y_1 und y_2 die neuen abhängigen Veränderlichen:

$$(2)\qquad z_1 = y_1 - \varphi_1(x), \quad z_2 = y_2 - \varphi_2(x)$$

einführen wollen, so haben wir zu berechnen:

$$\frac{dz_1}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \varphi_1'(x), \quad \frac{dz_2}{dx} = \frac{dy_2}{dx} - \varphi_2'(x).$$

Hierin sind für $dy_1 : dx$ und $dy_2 : dx$ die Werte (1) und für y_1 und y_2 nach (2) die Werte $z_1 + \varphi_1(x)$ und $z_2 + \varphi_2(x)$ einzusetzen, während überdies nach (1):

$$\varphi_1'(x) = f_1(x, \varphi_1, \varphi_2), \quad \varphi_2'(x) = f_2(x, \varphi_1, \varphi_2)$$

ist, so daß für die neuen unbekannten Funktionen z_1 und z_2 von x das System von Differentialgleichungen hervorgeht:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = f_1(x, z_1 + \varphi_1(x), z_2 + \varphi_2(x)) - f_1(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)), \\ \dfrac{dz_2}{dx} = f_2(x, z_1 + \varphi_1(x), z_2 + \varphi_2(x)) - f_2(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)). \end{cases}$$

Weil sich φ_1 und φ_2 für $x = x_0$ auf y_1^0 und y_2^0 reduzieren, sind die rechten Seiten stetige Funktionen von x, z_1 und z_2 in der Umgebung des Wertsystems $x = x_0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ und ebenda mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich z_1 und z_2 versehen, so daß insbesondere diejenigen Voraussetzungen, die wir stets bei Systemen von Differentialgleichungen machen, in der Umgebung der Stelle $(x_0, 0, 0)$ erfüllt sind.

Nun aber sind *die rechten Seiten der Gleichungen* (3) *für jeden Wert von x gleich Null, sobald nur $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$ gesetzt wird.* Demnach liegt ein System von der besonderen Art vor, die in voriger Nummer betrachtet wurde. Es hat also nur ein System von Lösungen z_1 und z_2 mit den Anfangswerten Null, nämlich die Konstanten:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Dies zieht nach (2) nach sich:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x),$$

d. h. außer dem Lösungensystem $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ von (1), das für $x = x_0$ die Anfangswerte y_1^0 und y_2^0 hat, gibt es kein anderes Lösungensystem von (1) mit denselben Anfangswerten.

Da sich die Betrachtungen der vorigen und dieser Nummer ohne Mühe vom Falle zweier unbekannter Funktionen auf den Fall von n unbekannten Funktionen, definiert durch ein System von n Differentialgleichungen, verallgemeinern lassen, und da wir nach Satz 7 von Nr. 689 wissen, daß wenigstens ein Lösungensystem mit gegebenen Anfangswerten vorhanden ist, so können wir die Ergebnisse von Nr. 689 nunmehr etwas schärfer formulieren:

Satz 9: Es liege ein System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

mit n unbekannten Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ der unabhängigen Veränderlichen x vor. Innerhalb eines gewissen Bereiches seien die Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ der $n+1$ Veränderlichen $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ stetig und mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich der n Größen $y_1, y_2, \ldots y_n$ versehen. Alsdann gibt es, wenn irgend eine Stelle $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ des Bereiches ausgewählt worden ist, in der Umgebung des Wertes $x = x_0$ von x ein und nur ein System von Lösungen:

$$y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

die für $x = x_0$ die Anfangswerte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ haben. Diese Lösungen sind stets in einer gewissen Umgebung von $x = x_0$ stetig und mit stetigen Ableitungen erster Ordnung nach x versehen; überdies sind sie stetige Funktionen der n Anfangswerte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$.

Man bemerkt, daß in der Formulierung dieses Satzes nicht von vornherein verlangt worden ist, daß das System von Lösungen mit den vorgeschriebenen Anfangswerten stetig sei. In der Tat ist diese Forderung nicht nötig, denn wenn $y_1, y_2, \ldots y_n$ ein System von Lösungen ist, so müssen sie die Differentialgleichungen befriedigen. Dies besagt, daß sie für jedes x in der Umgebung von x_0 bestimmte endliche Ableitungen erster Ordnung haben, woraus nach Satz 1, Nr. 27, unmittelbar ihre Stetigkeit folgt.

692. Die Ableitungen der Lösungen nach den Anfangswerten. Wir sind jetzt in der Lage, zu beweisen, daß die Lösungen eines vorgelegten Systems in der Normalform bestimmte endliche Ableitungen nach den Anfangswerten haben. Dabei wollen wir auf die Betrachtungen des zweiten Paragraphen zurückgehen, also das System:

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

mit den beiden unbekannten Funktionen x und y der unabhängigen Veränderlichen t annehmen, wobei die rechten Seiten von t frei sind.

Um alle Schwierigkeiten zu vermeiden, setzen wir wie in den beiden letzten Nummern über die Funktionen X und Y voraus: In dem Bereiche:

$$(2) \qquad |x - x_0| < k, \quad |y - y_0| < k$$

sollen X, Y *und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sein.* Es gibt dann wieder eine positive Zahl g derart, daß im Bereiche (2) sowohl $|X|$ als auch $|Y|$ kleiner als g bleibt.

Wie bei der letzten Betrachtung in Nr. 684 (siehe Fig. 12, S. 52) nehmen wir außer den Anfangswerten x_0 und y_0 noch die Anfangswerte $x_0 + \Delta x_0$ und y_0 an und betrachten die beiden zugehörigen Lösungensysteme. Dabei wollen wir x und y im zweiten Systeme zum Unterschiede mit $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ bezeichnen. Es seien also:

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \varphi(t, x_0, y_0), & y = \psi(t, x_0, y_0); \\ x + \Delta x = \varphi(t, x_0 + \Delta x_0, y_0), & y + \Delta y = \psi(t, x_0 + \Delta x_0, y_0) \end{cases}$$

die beiden Lösungensysteme. In Nr. 684 hatten wir zum Schlusse unter h_0 die Größe $|\Delta x_0|$ verstanden. Deshalb sind die beiden Lösungensysteme nach (3) in Nr. 684 stetig und mit stetigen Ableitungen nach t versehen in dem Intervalle:

$$|t-t_0| < \frac{k-|\varDelta x_0|}{g}.$$

Auch gehören sie dem Bereiche (2) an. Nach (13) in Nr. 684 kommt nun:

$$(4)\qquad \left|\frac{\varDelta x}{\varDelta x_0}\right| < e^{2g'|t-t_0|}, \quad \left|\frac{\varDelta y}{\varDelta x_0}\right| < e^{2g'|t-t_0|}.$$

Die Differenzenquotienten $\varDelta x : \varDelta x_0$ und $\varDelta y : \varDelta x_0$ sind also *endlich;* wir wollen aber beweisen, daß sie für $\lim \varDelta x_0 = 0$ nicht nur endliche, sondern insbesondere *bestimmte* Grenzwerte erreichen.

Wenn im folgenden immer unter x, y und $x+\varDelta x$, $y+\varDelta y$ die Funktionen (3) von t verstanden werden, so gelten außer (1) die Gleichungen:

$$\frac{d(x+\varDelta x)}{dt} = X(x+\varDelta x, y+\varDelta y), \quad \frac{d(y+\varDelta y)}{dt} = Y(x+\varDelta x, y+\varDelta y).$$

Aus der ersten folgt durch Subtraktion der ersten Gleichung (1) und Division mit $\varDelta x_0$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\varDelta x}{\varDelta x_0} = \frac{X(x+\varDelta x, y+\varDelta y) - X(x,y)}{\varDelta x_0}.$$

Nach dem Mittelwertsatze 28 von Nr. 137 (für $n=1$) ist dieser Wert für einen gewissen positiven echten Bruch θ gleich:

$$\frac{\partial X(x+\theta\varDelta x,\ y+\theta\varDelta y)}{\partial x}\frac{\varDelta x}{\varDelta x_0} + \frac{\partial X(x+\theta\varDelta x,\ y+\theta\varDelta y)}{\partial y}\frac{\varDelta y}{\varDelta x_0}.$$

Weil mit $\varDelta x_0$ auch $\varDelta x$ und $\varDelta y$ infolge von (4) nach Null streben und X_x und X_y nach Voraussetzung *stetig* sind, so folgt, wenn wir noch zur Abkürzung:

$$(5)\qquad \lim\frac{\varDelta x}{\varDelta x_0} = u, \quad \lim\frac{\varDelta y}{\varDelta x_0} = v \qquad \text{für } \lim \varDelta x = 0$$

setzen, daß u die Bedingung erfüllt:

$$\frac{du}{dt} = X_x u + X_y v.$$

Entsprechend schließen wir für v. Danach genügen u und v den Gleichungen:

$$(6)\qquad \frac{du}{dt} = X_x u + X_y v, \quad \frac{dv}{dt} = Y_x u + Y_y v.$$

Da die Funktionen (3) für $t = t_0$ die Anfangswerte x_0, y_0 bzw. $x_0 + \varDelta x_0$, y_0 haben, so hat $\varDelta x : \varDelta x_0$ für $t = t_0$ den Wert *Eins* und $\varDelta y : \varDelta x_0$ den Wert *Null*. Nach (5) muß demnach auch u für $t = t_0$ den Wert Eins und v den Wert Null haben.

Weil x und y die unter (3) angegebenen Funktionen von t sind, liegt in (6) ein System erster Ordnung von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen für die beiden unbekannten Funktionen u und v von t vor, das den Voraussetzungen des Satzes 9 der letzten Nummer in der Umgebung des Wertsystems $t = t_0$, $u = 1$, $v = 0$ genügt, denn die rechten Seiten sind für alle Werte von u und v und für die erlaubten Werte von t stetige Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich u und v. Daher gibt es ein und nur ein Paar Funktionen u und v von t, die für $t = t_0$ die Anfangswerte Eins und Null haben und in der Umgebung von t_0 den Gleichungen (6) genügen. Sie sind in dem für t erlaubten Intervalle stetig.

Wegen der Bedeutung (5) von u und v haben demnach die beiden Funktionen:

$$x = \varphi(t, x_0, y_0), \qquad y = \psi(t, x_0, y_0)$$

bestimmte endliche und zwar stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich x_0:

$$u = \frac{\partial x}{\partial x_0}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial x_0}.$$

Ebenso beweist man das Vorhandensein stetiger partieller Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich y_0.

Wie in Nr. 688 und 689 auseinander gesetzt wurde, läßt sich auch dies Ergebnis sofort verallgemeinern, sodaß wir es so formulieren können:

Satz 10: Die Lösungen des in Satz 9, Nr. 691, betrachteten Systems von Differentialgleichungen haben stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach den Anfangswerten $y_1^0, y_2^0, \dots y_n^0$.

Mit den beiden Sätzen 9 und 10 sind die Existenzbeweise für Systeme von Differentialgleichungen in der Normalform beendet.

§ 5. Existenzbeweise für unentwickelte Funktionen.

693. Vorbemerkungen. Bis jetzt haben wir Differentialgleichungen betrachtet, die in aufgelöster Form vorlagen, wie z. B. $y' = f(x, y)$. Es wird sich aber nun darum handeln, die Beweise für die Existenz von Lösungen auch für den Fall zu führen, wo die Differentialgleichungen nicht in der aufgelösten Form vorliegen, wie z. B. für die Gleichung $F(x, y, y') = 0$. Dabei ist es zunächst erforderlich, Sätze über die Existenz unentwickelter Funktionen aufzustellen, was in diesem Paragraphen geschehen soll; die Anwendung dieser Sätze wird uns alsdann im nächsten Paragraphen die Existenzbeweise für Lösungen jener Differentialgleichungen liefern.

Der gegenwärtige Paragraph stellt somit eine *Einschaltung* dar, die nicht allein für die Theorie der Differentialgleichungen, sondern auch als Vervollständigung der Betrachtungen im vierten Kapitel des ersten Bandes von Bedeutung ist.

Wir brauchen dabei eine einfache Verallgemeinerung des Satzes 4 von Nr. 21 für den Fall von n Veränderlichen, die schon hin und wieder (z. B. in Nr. 154) benutzt wurde und jetzt ausdrücklich formuliert werden soll. Es sei unter f eine stetige reelle Funktion der n reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ verstanden. Zum Überflusse erinnern wir nochmals daran, daß wir mit dem Funktionsbegriffe stets den der Eindeutigkeit wie in Nr. 6 verbinden (was auch in Nr. 676 betont wurde). Der Variabilitätsbereich der Funktion f enthalte die Umgebung der Stelle $(a_1, a_2, \dots a_n)$; die Funktion f habe an dieser Stelle *einen von Null verschiedenen Wert* b. Ist σ eine beliebig klein gewählte positive Zahl, so gibt es nach Satz 7, Nr. 22, eine positive Zahl h derart, daß für jedes Wertsystem innerhalb des Bereiches:

$$a_1 - h \leqq x_1 \leqq a_1 + h, \quad \dots \quad a_n - h \leqq x_n \leqq a_n + h$$

auch:

$$|f(x_1, x_2, \dots x_n) - b| < \sigma$$

wird. Ist nun $\sigma < |b|$, so folgt, daß f innerhalb jenes Bereiches stets von Null verschieden bleibt. Also gilt die Verallgemeinerung des Satzes 4 von Nr. 21:

Satz 11: Wenn die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *an der Stelle* $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ *stetig und von Null verschieden ist, läßt sich die Umgebung der Stelle soweit einschränken, daß die Funktion auch an keiner Stelle in dieser Umgebung verschwindet, vielmehr dort überall dasselbe Vorzeichen wie an der Stelle* $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ *hat.*

694. Eine unentwickelte Funktion von einer Veränderlichen. Es sei $F(x, y)$ eine stetige Funktion von x und y innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches, und sie habe eine stetige partielle Ableitung erster Ordnung hinsichtlich y. Insbesondere gehöre die Stelle $x = 0$, $y = 0$ dem Bereiche an, und an dieser Stelle sei F gleich Null, dagegen F_y *nicht gleich Null.* Es soll nun untersucht werden, ob die Gleichung:

$$F(x, y) = 0,$$

die nach den Voraussetzungen für $x = 0$ insbesondere durch den Wert $y = 0$ erfüllt wird, die Veränderliche y auch in der Umgebung der Stelle $x = 0$ als Funktion von x definiert.

Da F_y stetig und für $x = y = 0$ nach Annahme von Null verschieden ist, gibt es nach Satz 11 der vorigen Nummer eine positive Zahl h derart, daß für:

$$(1) \qquad -h \leqq x \leqq h, \quad -h \leqq y \leqq h$$

auch stets $F_y \neq 0$ und von demselben Vorzeichen wie an der Stelle $(0, 0)$ ist. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir sagen, F_y sei positiv.

Die Funktion $F(0, y)$ von y allein, die durch die Substitution des Wertes $x = 0$ in $F(x, y)$ hervorgeht, ist im Intervalle $-h \leqq y \leqq h$ stetig und hat nach dem, was wir soeben sagten, daselbst überall eine positive Ableitung, so daß sie nach Satz 9, Nr. 30, mit y wächst. Aus $F(0, 0) = 0$ folgt daher, daß $F(0, y)$ für $y < 0$ negativ und für $y > 0$ positiv sein muß. Also ist insbesondere:

$$(2) \qquad F(0, -h) < 0, \quad F(0, h) > 0.$$

Die Funktion $F(x, h)$ von x allein ist für $x = 0$ nach der letzten Ungleichung positiv, und da sie stetig ist, gibt es nach Satz 4, Nr. 21, eine positive Zahl $k_1 \leqq h$ derart, daß

$F(x, h)$ im Intervalle $-k_1 \leqq x \leqq k_1$ überall positiv bleibt. Ebenso finden wir: Es gibt eine positive Zahl $k_2 \leqq h$ derart, daß die Funktion $F(x, -h)$, die für $x = 0$ nach (2) negativ ist, überall im Intervalle $-k_2 \leqq x \leqq k_2$ negativ bleibt. Ist k die kleinere der beiden Zahlen k_1 und k_2, so wird demnach für:

$$(3) \qquad -k \leqq x \leqq k$$

stets:

$$(4) \qquad F(x, h) > 0, \quad F(x, -h) < 0.$$

Es sei x_0 irgend ein bestimmter Wert von x im Intervalle (3), und es werde nun die Funktion $F(x_0, y)$ von y allein betrachtet. Sie ist nach (4) für $y = h$ positiv und für $y = -h$ negativ. Weil sie sich im Intervalle von $-h$ bis $+h$ stetig verhält, gibt es also nach Satz 5, Nr. 21, mindestens einen Wert y_0 innerhalb des Intervalles, für den $F(x_0, y_0) = 0$ ist. Einen zweiten solchen Wert y_1 kann es nicht geben. Denn nach dem Mittelwertsatze 2, Nr. 28, müßte es sonst einen Wert y' zwischen y_0 und y_1 derart geben, daß:

$$\frac{F(x_0, y_1) - F(x_0, y_0)}{y_1 - y_0} = \frac{\partial F(x_0, y')}{\partial y'}$$

wäre. Aber wegen $F(x_0, y_1) = 0$ und $F(x_0, y_0) = 0$ würde hieraus folgen, daß im Bereiche (1) eine Stelle (x_0, y') vorhanden wäre, an der F_y verschwindet, während doch F_y in diesem Bereiche nirgends gleich Null ist.

Bezeichnen wir jetzt den bestimmt gewählt gedachten Wert x_0 mit x, so folgt: Zu *jedem* Werte x im Intervalle (3) gibt es im Intervalle von $-h$ bis $+h$ einen und nur einen Wert y derart, daß $F(x, y) = 0$ ist, d. h. *im Intervalle* (3) *wird y durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ implizite als Funktion von x definiert, vorausgesetzt, daß noch ein Intervall $-h \leqq y \leqq h$ vorgeschrieben wird.* Dabei ist $k \leqq h$.

Diese unentwickelte Funktion y von x ist aber auch stetig. Daß dies zunächst an der Stelle $x = 0$ selbst gilt, ergibt sich so: Die vorhergehende Betrachtung bleibt richtig, wie klein wir auch die positive Zahl h wählen mögen. Wählen wir für h eine beliebig kleine positive Zahl σ, so wird, weil $k \leqq h$ ist, auch statt k eine gewisse positive Zahl $k' \leqq \sigma$ auf-

[**694**

treten, derart, daß die Gleichung $F(x, y) = 0$ für jedes x im Intervalle $-k' \leqq x \leqq k'$ eine und nur eine Auflösung y hat, für die $-\sigma \leqq y \leqq \sigma$ ist. Für $x = 0$ ergibt sich insbesondere $y = 0$. Die zu einem x gehörige Auflösung y weicht deshalb von Null um weniger als σ ab, sobald x von Null um weniger als k' abweicht, was nach Satz 3, Nr. 20, bedeutet, daß y an der Stelle $x = 0$ stetig ist.

Die Funktion y verhält sich auch an jeder anderen Stelle x_0 im Intervalle (3) stetig. Denn wenn die Gleichung $F(x_0, y) = 0$ für y im Intervalle von $-h$ bis $+h$ durch den Wert y_0 erfüllt wird, so führen wir die neuen Veränderlichen:

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0$$

ein. Dadurch geht $F(x, y)$ in eine Funktion $F(\xi + x_0, \eta + y_0)$ von ξ und η über, die in der Umgebung der Stelle $\xi = 0$, $\eta = 0$ stetig ist und an dieser Stelle verschwindet, weil $F(x_0, y_0) = 0$ ist. Diese Funktion hat eine partielle Ableitung erster Ordnung hinsichtlich η:

$$\frac{\partial F(\xi + x_0, \eta + y_0)}{\partial \eta} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y},$$

die an der Stelle $\xi = 0$, $\eta = 0$ das Pluszeichen hat, weil F_y an der Stelle (x_0, y_0) positiv ist. Die Funktion $F(\xi + x_0, \eta + y_0)$ erfüllt also an der Stelle $\xi = 0$, $\eta = 0$ genau dieselben Voraussetzungen wie die Funktion $F(x, y)$ an der Stelle $x = 0$, $y = 0$. Die Schlüsse, die wir vorhin für die Stelle $x = 0$, $y = 0$ zogen, gelten demnach entsprechend für die Stelle $\xi = 0$, $\eta = 0$ oder (x_0, y_0). Somit ergibt sich der

Satz 12: Ist $F(x, y)$ eine in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ stetige Funktion von x und y mit einer stetigen partiellen Ableitung erster Ordnung hinsichtlich y und verschwindet die Funktion an der Stelle $x = 0$, $y = 0$, während ihre Ableitung F_y daselbst von Null verschieden ist, so gibt es zwei positive Zahlen h und $k \leqq h$ derart, daß zu jedem Werte x im Intervalle:

$$-k \leqq x \leqq k$$

ein und nur ein solcher Wert y im Intervalle:

$$-h \leqq y \leqq h$$

vorhanden ist, der die Gleichung:

$$F(x, y) = 0$$

befriedigt. Die dadurch definierte Funktion y von x ist im Intervalle $|x| \leqq k$ stetig und verschwindet für $x = 0$.

Nur der Bequemlichkeit des Ausdruckes halber sind wir von dem Wertepaare $x = 0$, $y = 0$ ausgegangen. Genau ebenso hätte sich allgemeiner ergeben:

Satz 13: Ist $F(x, y)$ eine in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0) stetige Funktion von x und y mit einer stetigen partiellen Ableitung erster Ordnung hinsichtlich y und verschwindet die Funktion an der Stelle (x_0, y_0), während ihre Ableitung F_y daselbst von Null verschieden ist, so gibt es zwei positive Zahlen h und $k \leqq h$ derart, daß zu jedem Werte x im Intervalle $|x - x_0| \leqq k$ ein und nur ein solcher Wert y im Intervalle $|y - y_0| \leqq h$ vorhanden ist, der die Gleichung:

$$F(x, y) = 0$$

befriedigt. Die dadurch definierte Funktion y von x ist im Intervalle $|x - x_0| \leqq k$ stetig und hat für $x = x_0$ den Wert y_0.

695. Die Ableitung der unentwickelten Funktion. Wir benutzen wieder der einfacheren Ausdrucksweise wegen das Wertepaar $x = 0$, $y = 0$ und fügen zu den Voraussetzungen des Satzes 12 der letzten Nummer noch die hinzu, daß auch die partielle Ableitung erster Ordnung von F hinsichtlich x stetig sein soll.

Im Intervalle $|x| \leqq k$ seien x und $x + \varDelta x$ beliebig gewählt. Es gibt dann im Intervalle $|y| \leqq h$ bestimmte zugehörige Werte y und $y + \varDelta y$ derart, daß:

$$(1) \qquad F(x, y) = 0, \quad F(x + \varDelta x,\, y + \varDelta y) = 0$$

ist. Nach dem Mittelwertsatze 28 in Nr. 137 (für $n = 1$) gibt es ferner einen positiven echten Bruch θ derart, daß:

$$F(x + \varDelta x,\, y + \varDelta y) - F(x, y) = \varDelta x\,[F_x] + \varDelta y\,[F_y]$$

wird. Die eckigen Klammern sollen andeuten, daß x und y in F_x und F_y durch die Werte $x + \theta\varDelta x$ und $y + \theta\varDelta y$ ersetzt werden müssen. Die linke Seite der letzten Gleichung ist nach (1) gleich Null, während $[F_y] \neq 0$ ist, wie wir in voriger Nummer sahen. Demnach ergibt sich durch Division mit Δx und $[F_y]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{[F_x]}{[F_y]}.$$

Da F_x und F_y nach Voraussetzung stetig sind, nehmen $[F_x]$ und $[F_y]$ für $\lim \Delta x = 0$ die Werte F_x und F_y an, so daß die stetige Ableitung hervorgeht:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Wenn wir wieder statt des Wertepaares $x = 0$, $y = 0$, für das F verschwindet, ein anderes Wertepaar x_0, y_0 gewählt hätten, für das $F(x_0, y_0) = 0$ wird, hätten wir gerade so schließen können. Demnach läßt sich der letzte Satz so ergänzen:

Satz 14: Die nach Satz 13 von Nr. 694 vorhandene implizite definierte Funktion y von x hat, vorausgesetzt, daß der Funktion F in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0) auch eine stetige partielle Ableitung erster Ordnung hinsichtlich x zukommt, in dem Intervalle $|x - x_0| \leq k$ eine stetige Ableitung, und der Wert der Ableitung ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

In Nr. 54 wurde vorausgesetzt, daß eine Gleichung zwischen x und y eine solche Funktion y von x definiere, die eine Ableitung hat, und alsdann wurde die Ableitung berechnet. Durch die jetzigen Überlegungen ist jenen Betrachtungen die sichere Grundlage gegeben.

696. Eine unentwickelte Funktion von mehreren Veränderlichen. Es sei F eine solche Funktion von $n + 1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und y, die sich in einer gewissen Umgebung der Stelle $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$ $x_n = 0$, $y = 0$ stetig verhält und in dieser Umgebung eine stetige partielle Ableitung F_y hat. Außerdem verschwinde F an der Stelle $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$ $x_n = 0$, $y = 0$, während F_y *daselbst von Null verschieden* sei. Alsdann entsteht die Frage, ob die Gleichung:

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, y) = 0,$$

die im Falle $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$ $x_n = 0$ durch den Wert $y = 0$ befriedigt wird, die Veränderliche y als reelle Funktion von

$x_1, x_2, \ldots x_n$ definiert und ob diese Funktion stetig ist. Die Beantwortung dieser Frage läßt sich wie in Nr. 694 durchführen. Wir deuten das Wesentliche für den Fall $n = 2$ an, in dem die Gleichung:

$$F(x_1, x_2, y) = 0$$

vorliegt.

Nach Satz 11, Nr. 693, gibt es eine positive Zahl h derart, daß die Ableitung F_y in dem Bereiche:

$$(1) \qquad -h \leqq x_1 \leqq h, \quad -h \leqq x_2 \leqq h, \quad -h \leqq y \leqq h$$

überall von Null verschieden und etwa positiv ist. Dann folgt wie in Nr. 694, daß:

$$F(0, 0, y) > 0 \quad \text{für} \quad y > 0,$$
$$F(0, 0, y) < 0 \quad \text{für} \quad y < 0$$

wird. Da also $F(x_1, 0, h)$ für $x_1 = 0$ positiv ist, dagegen $F(x_1, 0, -h)$ negativ und da das Entsprechende für $F(0, x_2, h)$ und $F(0, x_2, -h)$ gilt, folgt aus Satz 4, Nr. 21, daß es positive Zahlen k_1, k_1', k_2, k_2' gibt, die h nicht übersteigen, so daß im Intervalle:

$$\begin{array}{ll} -k_1 \leqq x_1 \leqq k_1 & F(x_1, 0, h) > 0, \\ -k_1' \leqq x_1 \leqq k_1' & F(x_1, 0, -h) < 0, \\ -k_2 \leqq x_2 \leqq k_2 & F(0, x_2, h) > 0, \\ -k_2' \leqq x_2 \leqq k_2' & F(0, x_2, -h) < 0 \end{array}$$

wird. Bedeutet k die kleinste dieser vier Zahlen k_1, k_1', k_2, k_2', so folgt, daß im Intervalle:

$$(2) \quad -k \leqq x_1 \leqq k \quad F(x_1, 0, h) > 0, \quad F(x_1, 0, -h) < 0,$$
$$(3) \quad -k \leqq x_2 \leqq k \quad F(0, x_2, h) > 0, \quad F(0, x_2, -h) < 0$$

wird. Dabei ist $k \leqq h$.

Nun sei x_2^0 irgend ein bestimmter Wert von x_2 im Intervalle von $-k$ bis $+k$. Die Funktion $F(x_1, x_2^0, h)$ von x_1 allein ist nach (3) für $x_1 = 0$ positiv. Nach Satz 4, Nr. 21, gibt es mithin eine positive Zahl $\varkappa \leqq k$ derart, daß die Funktion für $|x_1| \leqq \varkappa$ stets positiv wird. Dabei kann $\varkappa$ für verschiedene Stellen x_2^0 verschieden ausfallen. Deshalb wollen wir unter $\varkappa$ die kleinste aller dieser Zahlen verstehen, so daß in den Intervallen:

$$-\varkappa \leqq x_1 \leqq \varkappa, \quad -k \leqq x_2^0 \leqq k \quad F(x_1, x_2^0, h) > 0$$

wird. Weil $\varkappa \leqq k$ und x_2^0 irgend eine Zahl im Intervalle von $-k$ bis $+k$ ist, ergibt sich ferner, daß umsomehr in den Intervallen:

$$-\varkappa \leqq x_1 \leqq \varkappa, \quad -\varkappa \leqq x_2 \leqq \varkappa \quad F(x_1, x_2, h) > 0$$

wird. Ebenso schließen wir, daß es eine positive Zahl $\varkappa' < k$ gibt, so daß in den Intervallen:

$$-\varkappa' \leqq x_1 \leqq \varkappa', \quad -\varkappa' \leqq x_2 \leqq \varkappa' \quad F(x_1, x_2, -h) < 0$$

wird. Bedeutet k von jetzt an die kleinere der beiden Zahlen $\varkappa$ und $\varkappa'$, so folgt:

Es gibt eine positive Zahl $k \leqq h$ derart, daß infolge von:

(4) $$-k \leqq x_1 \leqq k, \quad -k \leqq x_2 \leqq k$$

stets auch:

(5) $$F(x_1, x_2, h) > 0, \quad F(x_1, x_2, -h) < 0$$

wird.

Wenn nun x_1 und x_2 in den Intervallen (4) bestimmt gewählt werden, so ist $F(x_1, x_2, y)$ eine Funktion von y, die nach (5) für $y = -h$ negativ und für $y = h$ positiv wird, also, weil sie stetig ist, nach Satz 5, Nr. 21, für einen gewissen Wert von y zwischen $-h$ und h verschwindet:

$$F(x_1, x_2, y) = 0.$$

Es gibt keinen zweiten solchen Wert y zwischen $-h$ und h, weil sonst wie in Nr. 694 aus dem Mittelwertsatze 2 von Nr. 28 folgen würde, daß F_y für ein Wertsystem verschwände, das dem Bereiche (1) angehört, während F_y doch in diesem Bereiche überall von Null verschieden ist.

Alles übrige folgt nun gerade so wie in Nr. 694, auch wird es keine Schwierigkeiten machen, diese Betrachtung für $n = 2$ auf ein beliebiges $n > 2$ zu verallgemeinern. Außerdem gilt auch hier die Bemerkung, daß nur der Bequemlichkeit des Ausdruckes halber von den Werten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y = 0$ ausgegangen wurde. Demnach gilt der

Satz 15: Ist $F(x_1, x_2, \ldots x_n, y)$ eine in der Umgebung der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, y_0)$ stetige Funktion aller $n+1$ Veränderlichen mit einer stetigen partiellen Ableitung erster Ordnung hinsichtlich y und verschwindet die Funktion an der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, y_0)$, während ihre Ableitung F_y daselbst von

Null verschieden ist, so gibt es zwei positive Zahlen h und $k \leqq h$ derart, daß zu jedem Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ des Bereiches:

$$|x_1 - x_1^0| \leqq k, \quad |x_2 - x_2^0| \leqq k, \ \ldots \ |x_n - x_n^0| \leqq k$$

ein und nur ein solcher Wert y im Intervalle $|y - y_0| \leqq h$ vorhanden ist, der die Gleichung:

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, y) = 0$$

befriedigt. Die dadurch in jenem Bereiche definierte Funktion y von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist stetig und hat an der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ den Wert y_0.

Wie in Nr. 695 können wir hinzufügen:

Satz 16: Die nach Satz 15 vorhandene implizite definierte Funktion y von $x_1, x_2, \ldots x_n$ hat, vorausgesetzt, daß der Funktion F in der Umgebung der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, y_0)$ auch stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_n$ zukommen, in dem Bereiche:

$$|x_1 - x_1^0| \leqq k, \quad |x_2 - x_2^0| \leqq k, \ \ldots \ |x_n - x_n^0| \leqq k$$

stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich aller n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, und die Werte dieser Ableitungen sind:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{F_{x_1}}{F_y}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{F_{x_2}}{F_y}, \ \ldots \ \frac{\partial y}{\partial x_n} = -\frac{F_{x_n}}{F_y}.$$

697. Mehrere unentwickelte Funktionen. Es seien $F_1, F_2, \ldots F_m$ reelle stetige Funktionen von $n + m$ reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $y_1, y_2, \ldots y_m$ innerhalb eines gewissen Bereiches. Dem Bereiche gehöre insbesondere die Stelle:

$$(1) \quad x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ldots x_n = 0, \ y_1 = 0, \ y_2 = 0, \ldots y_m = 0$$

an. In der Umgebung dieser Stelle sollen auch alle partiellen Ableitungen erster Ordnung aller m Funktionen stetig sein. Dasselbe gilt alsdann von der *Funktionaldeterminante* (vgl. Nr. 80):

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \ldots & F_m \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{pmatrix}.$$

Es soll nun noch vorausgesetzt werden, daß an der Stelle (1) alle m Funktionen $F_1, F_2, \ldots F_m$ verschwinden, dagegen *nicht* diese Determinante. Es sei also:

$$(2) \qquad \mathfrak{D}_0 \neq 0.$$

Der Index Null soll hier und im Folgenden die Substitution der Werte (1) andeuten.

Wir wünschen zu beweisen, daß die m Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_m) = 0 \end{cases}$$

unter diesen Voraussetzungen die m Größen $y_1, y_2, \dots y_m$ in der Umgebung der Stelle (1) als stetige reelle Funktionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung definieren. Aus dem Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante haben wir zwar früher nach Satz 4, Nr. 80, und Satz 3, Nr. 79, geschlossen, daß die Gleichungen (3) nach $y_1, y_2, \dots y_m$ *auflösbar* sind, jedoch nur auf Grund der in Nr. 77 aufgestellten Forderung $\mathfrak{C}$. Was wir jetzt beweisen wollen, ist, daß diese Forderung tatsächlich von dem Systeme (3) erfüllt wird.

Den Beweis führen wir durch m-malige Anwendung der beiden letzten Sätze, indem wir die Gleichungen (3) nach und nach hinsichtlich der m Größen $y_1, y_2, \dots y_m$ auflösen.

Wären die m Ableitungen

$$\left(\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial F_m}{\partial y_2}\right)_0, \dots \left(\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\right)_0$$

sämtlich gleich Null, so wäre auch $\mathfrak{D}_0 = 0$ entgegen der Annahme (2). Wir dürfen daher etwa:

$$(4)\qquad \left(\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\right)_0 \neq 0$$

voraussetzen, denn wenn nicht diese Ableitung, sondern etwa die nach y_k von Null verschieden wäre, würde es genügen, y_k mit y_m und y_m mit y_k zu benennen, um doch zur Annahme (4) zurückzukommen. Nach den Sätzen der letzten Nummer läßt sich nun die Umgebung der Stelle:

$$(5)\qquad x_1 = 0, \dots x_n = 0, \; y_1 = 0, \dots y_{m-1} = 0$$

soweit einschränken, daß die letzte Gleichung (3) ebenda in einem gewissen Intervalle

$$-h_m \leqq y_m \leqq h_m$$

die Größe y_m als stetige Funktion von $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_{m-1}$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung definiert:

$$(6)\qquad y_m = \varphi_m(x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_{m-1}),$$

wobei insbesondere

$$(\varphi_m)_0 = 0$$

ist. Setzen wir die Funktion (6) in die Gleichungen (3) ein, so werden die $m-1$ ersten Gleichungen frei von y_m, während die letzte identisch erfüllt wird. Die durch diese Substitution aus $F_1, F_2, \ldots F_{m-1}$ hervorgehenden Funktionen mögen Φ_1, $\Phi_2, \ldots \Phi_{m-1}$ heißen. Alsdann ist:

(7) $\Phi_k = F_k(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_{m-1}, \varphi_m)$ $(k = 1, 2, \ldots m-1)$,

dagegen:

(8) $$0 = F_m(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_{m-1}, \varphi_m),$$

so daß von nun an das System von nur noch $m-1$ Gleichungen:

(9) $\Phi_k(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_{m-1}) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots m-1)$

vorliegt. Nach Satz 8, Nr. 22, sind die $m-1$ Funktionen Φ_k in der vorhin erwähnten eingeschränkten Umgebung der Stelle (5) stetig. Außerdem haben sie daselbst nach Satz 22, Nr. 42, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Da ferner φ_m an der Stelle (5) verschwindet, gilt dasselbe nach (7) für jede Funktion Φ_k. Wir behaupten ferner, daß die Funktionaldeterminante:

$$\mathfrak{D}' = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \ldots & \Phi_{m-1} \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_{m-1} \end{pmatrix}$$

an der Stelle (5) von Null verschieden ist.

In der Tat, nach (7) und (8) ergibt sich:

(10) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} = \dfrac{\partial F_k}{\partial y_i} + \dfrac{\partial F_k}{\partial y_m}\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} & (k = 1, 2, \ldots m-1), \\ 0 = \dfrac{\partial F_m}{\partial y_i} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} \end{cases}$$

für $i = 1, 2, \ldots m-1$, sobald nur rechts überall y_m durch φ_m ersetzt wird. Die Funktionaldeterminante $\mathfrak{D}$ ändert ihren Wert nicht, wenn man zu ihrer i^{ten} Reihe die mit $\partial\varphi_m : \partial y_i$ multiplizierte letzte Reihe addiert. Dabei werden die $m-1$ ersten Glieder der i^{ten} Reihe die Ableitungen von Φ_k nach $y_1, y_2, \ldots y_{m-1}$; aber ihr letztes Glied wird gleich Null, infolge von (10). Verfährt man so für $i = 1, 2, \ldots m-1$, so ergibt sich mithin:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' \frac{\partial F_m}{\partial y_m},$$

sobald überall y_m durch die Funktion φ_m ersetzt worden ist. Nach (2) und (4) folgt hieraus:

$$\mathfrak{D}_0' \neq 0.$$

Die Gleichungen (9) erfüllen demnach, abgesehen davon, daß ihre Anzahl nur noch $m-1$ ist und sie nur noch $m-1$ Größen y enthalten, in der Umgebung der Stelle (5) genau dieselben Voraussetzungen wie die ursprünglich vorgelegten Gleichungen (3) in der Umgebung der Stelle (1). Deshalb läßt sich dasselbe Schlußverfahren wiederholen. So kommen wir Schritt für Schritt zu Auflösungen:

$$(11)\qquad \begin{cases} y_m = \varphi_m\,(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_{m-2}, y_{m-1}), \\ y_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_{m-2}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1), \\ y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \end{cases}$$

der Gleichungen (3). Dabei gibt es $m+1$ positive Zahlen $h_1, h_2, \ldots h_m$ und k, wobei k keine der Zahlen h übersteigt, derart, daß die Variabilitätsbereiche für jede der m Funktionen $\varphi_m, \varphi_{m-1}, \ldots \varphi_2, \varphi_1$ durch die Ungleichungen:

$$(12)\qquad -k \leqq x_1 \leqq k, \ \ldots\ -k \leqq x_n \leqq k$$

und diejenigen unter den Ungleichungen:

$$(13)\qquad -h_1 \leqq y_1 \leqq h_1, \ \ldots\ -h_m \leqq y_m \leqq h_m$$

angegeben werden, die sich auf solche Veränderliche y beziehen, die in den Funktionen vorkommen. Die übrigen Ungleichungen (13) geben dabei an, in welchen Intervallen die Auflösungen $y_m, y_{m-1}, \ldots y_1$ vorhanden sind. Alle m Funktionen haben stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich aller ihrer Veränderlichen. Außerdem verschwinden sie sämtlich, wenn alle ihre Veränderlichen den Wert Null annehmen.

Setzt man nun $y_1 = \varphi_1$ in die $m-1$ ersten Gleichungen (11) ein, darauf den für y_2 hervorgehenden Wert in die $m-2$ ersten Gleichungen usw., so geht ein Gleichungensystem von der Form:

$$(14)\qquad y_i = \psi_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

hervor. Insbesondere ist ψ_1 dieselbe Funktion wie φ_1. Die Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$ sind nach Satz 8, Nr. 22, im Bereiche (12) stetig und nach Satz 21, Nr. 41, mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen; ferner verschwinden sie sämtlich an der Stelle $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots x_n = 0$. Außerdem geben sie die einzigen Werte der m Größen $y_1, y_2, \ldots y_m$ an, die den vorgelegten Gleichungen (3) im Bereiche (12) unter den Bedingungen (13) genügen.

Indem wir wieder das Wertsystem $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$, $y_1 = 0, \ldots y_m = 0$ durch ein anderes ersetzen, finden wir schließlich den

Satz 17: Sind $F_1, F_2, \ldots F_m$ solche m Funktionen der $n + m$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m$, die in der Umgebung der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_m^0)$ nebst allen ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind und insbesondere an jener Stelle selbst verschwinden, während die Funktionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \ldots & F_m \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{pmatrix}$$

daselbst nicht gleich Null ist, so definieren die m Gleichungen:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots F_m = 0$$

in einem gewissen Variabilitätsbereiche:

$$|x_1 - x_1^0| \leqq k, \quad |x_2 - x_2^0| \leqq k, \ldots |x_n - x_n^0| \leqq k$$

*die m Größen $y_1, y_2, \ldots y_m$ als stetige Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung in der Art, daß diese m Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ für $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \ldots x_n = x_n^0$ die Werte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_m^0$ annehmen und für jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ innerhalb des angegebenen Variabilitätsbereiches **alle** diejenigen Wertsysteme $y_1, y_2, \ldots y_m$ liefern, die den vorgelegten m Gleichungen zusammen mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ in der Umgebung der Stellen $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ und $(y_1^0, y_2^0, \ldots y_m^0)$ genügen.*

Hiermit sind die Betrachtungen von Nr. 78—80 vollständig geworden, indem sich gezeigt hat, daß die in Nr. 77 aufgestellte Forderung $\mathfrak{C}$ unter den im Satze 17 angegebenen Bedingungen in der Tat erfüllt ist.

[697

698. Die zu m gegebenen Funktionen inversen Funktionen. Insbesondere liege ein Gleichungensystem vor:

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots x_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots m),$$

durch das m Größen $y_1, y_2, \ldots y_m$ als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_m$ definiert werden. Dies System kann in der Form:

$$y_k - f_k(x_1, x_2, \ldots x_m) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

dem im letzten Satze betrachteten Systeme untergeordnet werden, indem gesetzt wird:

$$F_k = y_k - f_k(x_1, x_2, \ldots x_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots m).$$

Wenn wir nun die Gleichungen nach $x_1, x_2, \ldots x_m$ aufzulösen wünschen, haben wir bei Anwendung jenes Satzes die Rolle der x und y zu vertauschen. Insbesondere ist außerdem $n = m$. Wegen der besonderen Form, die hier die Funktionen F haben, werden die Voraussetzungen, unter denen der letzte Satz anwendbar ist, einfacher, so daß sich ergibt:

Satz 18: Liegt ein System von solchen m Funktionen:

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots x_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

von m Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_m$ vor, die in der Umgebung einer Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind und an dieser Stelle die Werte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_m^0$ annehmen, und ist überdies die Funktionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{pmatrix}$$

*an jener Stelle von Null verschieden, so sind auch umgekehrt infolge der m Gleichungen $y_k = f_k$ die m Größen $x_1, x_2, \ldots x_m$ in einer gewissen Umgebung der Stelle $(y_1^0, y_2^0, \ldots y_m^0)$ solche stetige Funktionen von $y_1, y_2, \ldots y_m$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung, die für $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0, \ldots y_m = y_m^0$ die Werte $x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0$ annehmen und überhaupt für jedes Wertsystem $y_1, y_2, \ldots y_m$ innerhalb dieser Umgebung **alle** diejenigen Werte von $x_1, x_2, \ldots x_m$ liefern, die mit jenen Werten $y_1, y_2, \ldots y_m$ zusammen in einer gewissen Umgebung der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$ die m Gleichungen $y_k = f_k$ befriedigen.*

Dies ist der Satz über die Existenz der zu m gegebenen und voneinander unabhängigen Funktionen gehörigen *m inversen Funktionen*, von denen in Nr. 81 die Rede war.

699. Die Ableitungen höherer Ordnung der unentwickelten Funktionen. Wir betrachten wieder das Geichungensystem:

$$(1) \qquad F_k(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

des Satzes 17 der vorletzten Nummer unter den dort angegebenen Voraussetzungen. Außerdem fügen wir die Voraussetzung hinzu, daß die Funktionen $F_1, F_2, \ldots F_m$ in der Umgebung der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_m^0)$ auch lauter stetige partielle Ableitungen *zweiter* Ordnung haben. Es läßt sich alsdann leicht erkennen, daß auch die durch das System (1) definierten Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung haben müssen. Denn zunächst gelten in Hinsicht auf die Ableitungen erster Ordnung nach x_i die k Gleichungen:

$$(2) \qquad \frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F_k}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_k}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots m).$$

Sie ergeben für die partiellen Ableitungen erster Ordnung von $y_1, y_2, \ldots y_m$ nach x_i gebrochene rationale Funktionen der partiellen Ableitungen erster Ordnung von $F_1, F_2, \ldots F_m$. Da aber $F_1, F_2, \ldots F_m$ nach Voraussetzung stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung haben, so lassen sich die gefundenen Werte nach Satz 22, Nr. 42, nochmals nach irgend einer der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ partiell differenzieren. Allgemein gelangt man durch Wiederholung des Schlusses zu dem folgenden Zusatze zu Satz 17 der vorletzten Nummer:

Satz 19: Fügt man zu den Voraussetzungen des Satzes 17, Nr. 697, noch hinzu, daß die Funktionen $F_1, F_2, \ldots F_m$ in der Umgebung der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_m^0)$ lauter stetige partielle Ableitungen bis zur r^{ten} Ordnung einschließlich haben, so gilt dasselbe von den durch das Gleichungensystem $F_1 = 0, F_2 = 0, \ldots F_m = 0$ definierten Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ von $x_1, x_2, \ldots x_n$.

§ 6. Existenzbeweis bei allgemeinen Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

700. Lösungen der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$. Die Ergebnisse des letzten Paragraphen setzen uns in stand, die in § 3 und § 4 entwickelten Existenzbeweise auch auf solche gewöhnliche Differentialgleichungen oder Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung auszudehnen, die nicht in der nach den Ableitungen aufgelösten Form vorliegen. Es ist zweckmäßig, dies in dem einfachsten Falle genauer zu erläutern.

Es liege die Differentialgleichung vor:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Wir kümmern uns vorläufig nicht darum, daß y eine Funktion von x und daß y' die Ableitung dieser Funktion sein soll, und machen über die Funktion F der *drei* Veränderlichen x, y, y' die folgenden Annahmen: Sie verschwinde für ein bestimmtes Wertsystem $x = a$, $y = b$, $y' = c$ und sei in der Umgebung der Stelle (a, b, c) stetig; sie habe ferner in dieser Umgebung eine stetige partielle Ableitung erster Ordnung nach y', doch sei die Ableitung an jener Stelle (a, b, c) nicht gleich Null. Alsdann ist die Gleichung (1) nach Satz 15, Nr. 696, in der Umgebung der Stelle (a, b, c) nach y' auflösbar, d. h. es gibt eine Funktion:

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

die für $x = a$, $y = b$ den Wert c annimmt, ferner in der Umgebung der Stelle (a, b) stetig ist und drittens zu jedem Wertepaare x, y in dieser Umgebung denjenigen *einzigen* Wert von y' vorstellt, der die Gleichung (1) befriedigt, sobald die Werte y' auf eine gewisse Umgebung von $y' = c$ beschränkt werden.

Die neue Gleichung (2) ist wie die alte eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die unbekannte Funktion y von x. Hieraus folgt:

Es sei das Wertepaar x_0, y_0 in der Umgebung des Wertepaares a, b beliebig gewählt. Zu $x = x_0$, $y = y_0$ gehört alsdann infolge von (1) ein Wert $y' = y_0'$ in der Umgebung von $y' = c$, nämlich der Wert $y_0' = f(x_0, y_0)$. Soll nun $y = \varphi(x)$

eine solche Lösung der Differentialgleichung (1) sein, die für $x = x_0$ den Anfangswert y_0 hat, während ihrer Ableitung der Anfangswert y_0' vorgeschrieben wird, so muß $y = \varphi(x)$ auch eine solche Lösung der Differentialgleichung (2) sein, die für $x = x_0$ den Anfangswert y_0 hat. Umgekehrt: Wird die Stelle (x_0, y_0) in der Umgebung der Stelle (a, b) gewählt, so ist eine solche Lösung $y = \varphi(x)$ der Gleichung (2), die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, notwendig eine Lösung der Gleichung (1).

Nach dem allgemeinen Satze 9 von Nr. 691 gibt es nun, sobald $f(x, y)$ gewissen Voraussetzungen genügt, eine und nur eine Lösung $y = \varphi(x)$ der Gleichung (2), die für $x = x_0$ den Wert y_0 hat, aber es wäre irrig, wollte man hieraus schließen, daß auch der vorgelegten Gleichung (1) nur eine Lösung $y = \varphi(x)$ mit dem für $x = x_0$ vorgeschriebenen Anfangswerte y_0 zukäme. Denn die Gleichung (2) stellt ja die Auflösung der Gleichung (1) nach y' in der Umgebung der Stelle (a, b) nur unter der Voraussetzung dar, daß y' auf eine gewisse Umgebung des Wertes c beschränkt wird. Es ist aber möglich und kommt oft genug vor, daß die Gleichung (1) nach der Substitution der Werte $x = a$, $y = b$ nicht nur durch einen einzigen Wert $y' = c$ befriedigt wird.

Wir müssen demnach unterscheiden, ob es sich darum handelt, die vorgelegte Differentialgleichung (1) *in der Umgebung des Wertepaares* $x = a$, $y = b$ oder *in der Umgebung des Wertsystems* $x = a$, $y = b$, $y' = c$ vollständig zu integrieren. Nur die zweite Aufgabe ist identisch mit der, die neue Differentialgleichung (2) in der Umgebung des Wertepaares $x = a$, $y = b$ vollständig zu integrieren. Wenn die Gleichung:

$$(3) \qquad F(a, b, y') = 0$$

durch verschiedene Werte $y' = c_1, c_2, \ldots$ befriedigt wird und sonst alle gemachten Annahmen zutreffen, so führt sie nicht nur zu einer Gleichung (2), sondern zu mehreren:

$$(4) \qquad y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \ \ldots.$$

Die vollständige Integration der vorgelegten Gleichung (1) *in der Umgebung des Wertepaares* $x = a$, $y = b$ ist erst dann geleistet, wenn *jede* einzelne unter den Gleichungen (4) in der Umgebung dieses Wertepaares vollständig integriert worden ist.

[700

Deuten wir x und y als rechtwinklige Koordinaten in der xy-Ebene, so sind x, y und y' die Bestimmungsstücke eines Linienelements (vgl. Nr. 666). Die Differentialgleichung (1) definiert alsdann eine Schar von Linienelementen, aber dem Punkte (a, b) können sehr wohl *mehrere* Linienelemente zugehören, nämlich dann, wenn sich aus (3) mehrere Werte $y' = c_1, c_2, \ldots$ ergeben. Sollen nun alle Integralkurven *in der Umgebung des Punktes* (a, b) gefunden werden, so muß man alle Integralkurven *in den Umgebungen der einzelnen Linienelemente* (a, b, c_1), $(a, b, c_2), \ldots$ bestimmen. Dabei braucht kaum erklärt zu werden, was damit gemeint ist, daß eine Kurve in der Umgebung eines Linienelements (a, b, c) liegt. Es bedeutet natürlich, daß die Bestimmungsstücke x, y, y' der Linienelemente der Kurve in der Umgebung des Wertsystems a, b, c enthalten sein sollen.

Wenn man voraussetzt, daß die Funktion F in der Umgebung der Stelle (a, b, c) auch stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach x und y hat, so kann man außer dem Satze 15 noch den Satz 16 von Nr. 696 heranziehen, woraus folgt, daß die rechte Seite der Gleichung (2) in der Umgebung der Stelle (a, b) eine stetige Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung ist. Auf die Gleichung (2) läßt sich nunmehr der Satz 9 von Nr. 691 anwenden. Also können wir sagen:

Satz 20: Es liege eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, y') = 0$$

mit einer unbekannten Funktion y der unabhängigen Veränderlichen x vor. Die Funktion F der drei Veränderlichen x, y, y' verschwinde für $x = a$, $y = b$, $y' = c$ und verhalte sich nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in der Umgebung der Stelle (a, b, c) stetig; doch sei die Ableitung $\partial F : \partial y'$ an dieser Stelle von Null verschieden. Alsdann gibt es in der Umgebung der Stelle (a, b) eine und nur eine solche Lösung:

$$y = \varphi(x),$$

der für $x = a$ der Anfangswert b zukommt, während ihrer Ableitung für $x = a$ der Anfangswert c vorgeschrieben ist. Diese

Lösung verhält sich nebst ihrer Ableitung erster Ordnung in einer gewissen Umgebung von $x = a$ stetig.

701. Lösungen eines Systems erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Ganz entsprechende Überlegungen gelten für ein solches System erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen für n unbekannte Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ von x, das sich nach dem Satze 17 von Nr. 697 nach den n Ableitungen $y_1', y_2', \ldots y_n'$ auflösen läßt. Wir begnügen uns damit, nur die folgende Verallgemeinerung des letzten Satzes zu formulieren.

Satz 21: Es liege ein System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$F_i(x, y_1, y_2, \cdots y_n, y_1', y_2', \cdots y_n') = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

für n unbekannte Funktionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ der unabhängigen Veränderlichen x vor. Alle n Funktionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ sollen für das Wertsystem:

$$x = a, \quad y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2, \cdot\cdot, \; y_n = b_n,$$
$$y_1' = c_1, \quad y_2' = c_2, \cdots \; y_n' = c_n$$

gleich Null sein und sich nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in der Umgebung dieses Wertsystems stetig verhalten; doch sei die Funktionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \ldots F_n \\ y_1' & y_2' \cdots y_n' \end{pmatrix}$$

für dieses Wertsystem nicht gleich Null. Alsdann gibt es in der Umgebung des Wertsystems:

$$x = a, \quad y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2, \; \ldots \; y_n = b_n$$

ein und nur ein solches System von Lösungen:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \; \cdots \; y_n = \varphi_n(x),$$

die für $x = a$ die Werte $b_1, b_2, \ldots b_n$ haben, während ihren Ableitungen für $x = a$ die Werte $c_1, c_2, \ldots c_n$ vorgeschrieben sind. Die Lösungen verhalten sich nebst ihren Ableitungen erster Ordnung in einer gewissen Umgebung von $x = a$ stetig.

702. Lösungen eines Systems höherer Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. In Nr. 663 hat sich gezeigt, daß jedes solche System von gewöhnlichen

Differentialgleichungen, in denen Ableitungen höherer Ordnung der unbekannten Funktionen auftreten, in ein System erster Ordnung verwandelt werden kann, vgl. den Satz 2 ebenda, und zwar stehen dieser Überführung keinerlei Schwierigkeiten im Wege, da nur Substitutionen und keine Eliminationen zu leisten sind. Die gegebenen Existenzbeweise lassen sich alsdann auf das gewonnene System erster Ordnung anwenden, und auf diese Art ist man imstande, auch die Existenz von Lösungen des vorgelegten Systems zu beweisen. Doch wollen wir uns vorläufig mit diesen wenigen Bemerkungen darüber begnügen.

Drittes Kapitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 1. Allgemeine und singuläre Lösungen.

703. Allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Liegt eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für eine unbekannte Funktion y der unabhängigen Veränderlichen x in der Form:

$$(1) \qquad y' = f(x, y)$$

vor, so soll ein für allemal hier festgesetzt werden, daß wir sie nur in einem solchen Bereiche der Veränderlichen x und y betrachten, *innerhalb dessen die Funktion $f(x, y)$ stetig ist und eine stetige partielle Ableitung erster Ordnung hinsichtlich y hat.* Nach Satz 9 von Nr. 691 und Satz 10 von Nr. 692 gibt es eine und nur eine Lösung y der Differentialgleichung, die für $x = x_0$ einen vorgeschriebenen Anfangswert y_0 hat. Es sei dies:

$$(2) \qquad y = \varphi(x, x_0, y_0).$$

Sie ist einerseits eine stetige Funktion von x mit stetiger Ableitung y' und andererseits auch eine solche stetige Funktion von y_0, der eine stetige Ableitung nach y_0 zukommt.

Die Gesamtheit aller Lösungen der Differentialgleichung (1) in dem festgesetzten Bereiche heißt ihre *allgemeine Lösung.* Sie wird durch (2) dargestellt, solange x_0 und y_0 willkürliche Konstanten bleiben. Wenn dagegen x_0 und y_0 bestimmt gewählt werden, so heißt (2) eine *Partikularlösung. Die allgemeine Lösung ist die Gesamtheit aller Partikularlösungen.*

Bisher haben wir noch keine Methode entwickelt, nach der man imstande ist, die allgemeine Lösung einer vorgelegten

Differentialgleichung (1) wirklich zu berechnen. Auch im gegenwärtigen Paragraphen genügt uns vorläufig die Tatsache ihrer Existenz. Unter Umständen kann man ohne Rechnung bei einer gegebenen Differentialgleichung wenigstens eine Partikularlösung ausfindig machen, z. B. bei dieser:

$$y' = \frac{(x+y)y}{x^2+y^2+1},$$

denn hier ist augenscheinlich die Konstante $y = 0$ eine Lösung, weil mit $y = 0$ auch $y' = 0$ ist und die Gleichung durch $y = 0$, $y' = 0$ befriedigt wird.

Werden x und y wie in Nr. 666 als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene gedeutet, so sind die geometrischen Bilder der Partikularlösungen von (1) *Integralkurven.* Es sind dies die Kurven, die in jedem ihrer Punkte (x, y) dasjenige Linienelement haben, dessen Winkel τ mit der positiven x-Achse durch:

$$\operatorname{tg} \tau = f(x, y)$$

bestimmt wird. Die allgemeine Lösung wird durch die Gesamtheit der Integralkurven dargestellt, und da von jeder Anfangsstelle (x_0, y_0) eine und nur eine Integralkurve ausgeht, so sagen wir, *daß die Gesamtheit der Integralkurven den Bereich der Differentialgleichung überall einfach überdeckt.* Nirgends schneiden oder berühren sich zwei verschiedene Integralkurven.

704. Integrationskonstante. Im folgenden beschränken wir uns, um den Schlüssen volle Strenge zu geben, auf die Umgebung einer bestimmt gewählten Stelle $x = a$, $y = b$ des Bereiches der Differentialgleichung:

$$(1) \qquad y' = f(x, y).$$

Wenn also:

$$(2) \qquad y = \varphi(x, x_0, y_0)$$

die allgemeine Lösung vorstellt, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, so sollen nur solche Anfangswertepaare x_0, y_0 betrachtet werden, die der Umgebung der Stelle (a, b) angehören.

Zunächst enthält die allgemeine Lösung (2) *zwei* willkürliche Konstanten x_0 und y_0. *Alle* Partikularlösungen in der

Umgebung der Stelle (a, b) oder, was dasselbe ist, *alle* Integralkurven in der Umgebung des Punktes (a, b) ergeben sich aber auch schon dann, wenn für x_0 der bestimmte Wert a gesetzt wird und nur y_0 einen noch willkürlichen Wert C behält:

$$y = \varphi(x, a, C).$$

Diejenige Integralkurve (2) nämlich, die von irgend einem bestimmt gewählten Punkte (x_0, y_0) in der Umgebung des Punktes (a, b) ausgeht, hat für $x = a$ eine bestimmte Ordinate $y = C$; es ist dies die Ordinate ihres Schnittpunktes mit der Geraden $x = a$ (siehe Fig. 14):

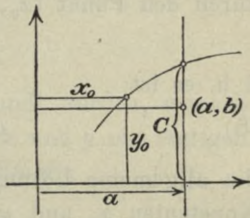

Fig. 14.

(3) $$C = \varphi(a, x_0, y_0).$$

Andererseits steht fest, daß durch den Schnittpunkt (a, C) *nur eine* Integralkurve geht, d. h. daß zu dem Anfangswertepaare a, C nur eine Partikularlösung vorhanden ist, nämlich diejenige, die von der allgemeinen Lösung (2) bei der Annahme $x_0 = a$, $y_0 = C$ geliefert wird. *Demnach ist die Funktion:*

$$y = \varphi(x, x_0, y_0)$$

notwendig dieselbe wie die Funktion:

(4) $$y = \varphi(x, a, C),$$

sobald unter C die Konstante (3) *verstanden wird.* Weil die Stelle (x_0, y_0) irgendwo in der Umgebung der Stelle (a, b) gewählt werden kann, bleibt die durch (3) bestimmte Konstante C noch willkürlich, so daß die Funktion (4) noch eine willkürliche Konstante C enthält, während a einen bestimmten Wert hat.

Die allgemeine Lösung wird somit in der Form (4) *durch eine Funktion dargestellt, die nur noch eine willkürliche Konstante C enthält.* Diese Konstante heißt die *Integrationskonstante.*

In vielen Fällen, in denen die Integration der Differentialgleichung mittels elementarer Funktionen geleistet werden kann, gilt diese Schlußfolgerung nicht nur für die Umgebung einer bestimmten Stelle (a, b) des Bereiches, sondern für den ganzen Bereich. Man erkennt ja, daß sie gewiß für denjenigen Teil des Bereiches besteht, der von den Integralkurven bedeckt wird, die mit der gewählten Geraden $x = a$ Punkte gemein haben.

Beispiel: Die Integralkurven der schon in Nr. 666 betrachteten Differentialgleichung:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

sind alle konzentrischen Kreise um den Anfangspunkt O. Der durch den Punkt (x_0, y_0) gehende Kreis hat die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2,$$

d. h. es ist:

(5) $$y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x^2},$$

die allgemeine Lösung. Sie enthält vorerst *zwei* willkürliche Konstanten x_0 und y_0, aber man sieht hier sofort, daß nur die eine Konstante $x_0^2 + y_0^2$ wesentlich ist, so daß auch:

(6) $$y = \sqrt{C^2 - x^2}$$

die allgemeine Lösung vorstellt. Es ist nützlich, dies mittels des oben angewandten allgemeinen Verfahrens zu zeigen. Wir wählen z. B. die Konstante $a = 0$, bestimmen also die Ordinate C des Schnittpunktes des Kreises (5) mit der Geraden $x = 0$ (wobei wir uns etwa auf den Bereich $y > 0$ beschränken). Diese Ordinate hat nach (5) den Wert:

(7) $$C = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Da jeder Kreis um O die Gerade $x = 0$ trifft, können wir die Anfangsstellen aller Integralkurven auf dieser Geraden wählen, d. h. in (5) einfach $x_0 = 0$ und $y_0 = C$ setzen, ohne dadurch die Allgemeinheit der Lösung (5) zu beschränken. So geht wieder die Form (6) hervor, die aber auch durch Substitution des Wertes (7) in (5) gewonnen wird.

Wir kehren zur allgemeinen Betrachtung zurück. In der Form (4) enthält die allgemeine Lösung außer der Veränderlichen x nur noch eine willkürliche Konstante C, während a eine bestimmte Zahl bedeutet, die künftig nicht besonders unter dem Funktionszeichen angemerkt zu werden braucht.

Danach sei von jetzt an die allgemeine Lösung mit:

$$(8) \qquad y = \varphi(x, C)$$

bezeichnet. Es steht fest (nach Satz 10, Nr. 692), daß diese Funktion nicht nur eine stetige Ableitung nach x, sondern auch eine stetige partielle Ableitung erster Ordnung nach der Integrationskonstante C hat. Diese Ableitung ist nicht gleich Null, weil die Funktion sonst für alle Werte von C dieselbe wäre, d. h. nur eine Partikularlösung darstellen würde.

705. Integral. Infolge der letzten Bemerkungen können auf die Gleichung:

$$(1) \qquad y = \varphi(x, C)$$

die Sätze 15 und 16 von Nr. 696 angewandt werden, wonach die Gleichung C als stetige Funktion von x und y mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung definiert:

$$(2) \qquad C = \omega(x, y).$$

Mithin gilt der

Satz 1: Die Gesamtheit der Lösungen y einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form $y' = f(x, y)$ wird in der Umgebung einer Stelle (a, b) ihres Bereiches implizite durch eine Gleichung:

$$\omega(x, y) = C$$

dargestellt, wobei $\omega(x, y)$ in der Umgebung der Stelle (a, b) eine stetige Funktion von x und y mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung ist, während C eine in der Umgebung des Wertes $\omega(a, b)$ willkürliche Konstante bedeutet.

Eine Funktion von x und y, die, gleich einer willkürlichen Konstanten gesetzt, implizite alle Lösungen der Differentialgleichung:

$$(3) \qquad y' = f(x, y)$$

in der Umgebung einer Stelle (a, b) des Bereiches definiert, heißt allgemein ein *Integral der Differentialgleichung* (3). Demnach folgt

Satz 2: In der Umgebung einer Stelle (a, b) des Bereiches einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form $y' = f(x, y)$ gibt es stets ein solches Integral $\omega(x, y)$ der

Differentialgleichung, das ebenda eine stetige Funktion von x und y mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung ist.

Beispiel: Im ersten Beispiele von Nr. 40 handelte es sich um die Integration der Differentialgleichung:

$$y' = \frac{p}{y},$$

wo p eine gegebene Konstante bedeutet. Die Integralkurven, nämlich die Kurven mit der konstanten Subnormale p, sind die Parabeln:

$$y = \sqrt{2px + C}.$$

Beschränken wir uns auf den Bereich $y > 0$, so ist die Wurzel positiv anzunehmen. Es ist dann $y = \sqrt{2px + C}$ die allgemeine Lösung und C die Integrationskonstante. Auflösung nach C gibt:

$$C = y^2 - 2px.$$

Demnach stellt $y^2 - 2px$ ein Integral der Differentialgleichung vor. Dies Integral ist in der ganzen xy-Ebene, nicht nur in der Umgebung einer Stelle, eine stetige Funktion von x und y mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung.

Die Sätze 1 und 2 gelten überhaupt sehr oft bei solchen Differentialgleichungen, die mittels der elementaren Funktionen integriert werden können, nicht nur für die Umgebung einer Stelle (a, b), sondern für den ganzen Bereich der Differentialgleichung.

706. Verschiedene Formen der allgemeinen Lösung, der Integrationskonstante und des Integrals. Wenn die Differentialgleichung:

$$(1) \qquad y' = f(x, y)$$

in der Umgebung der Stelle (a, b) ihres Bereiches die allgemeine Lösung:

$$(2) \qquad y = \varphi(x, C)$$

mit einer willkürlichen Konstante, der Integrationskonstante C, hat, ist es leicht, die allgemeine Lösung auf eine andere Form zu bringen. Es sei nämlich etwa $\alpha < C < \beta$ dasjenige Intervall, in dem die Konstante C gewählt werden muß, damit (2) alle Lösungen in der Umgebung der Stelle (a, b) darstellt. Wenn nun $\psi(C')$ eine solche Funktion einer Größe C' ist, die bei geeigneter Wahl eines Intervalles $\alpha' < C' < \beta'$ alle Werte im Intervalle von α bis β annimmt, so stellt augenscheinlich:

$$(3) \qquad y = \varphi(x, \psi(C'))$$

ebenfalls die allgemeine Lösung (2) dar. Wenn insbesondere $\psi(C')$ eine stetige Funktion von C' mit stetiger Ableitung erster Ordnung ist, so hat die allgemeine Lösung in der neuen Form (3) ebenfalls eine stetige partielle Ableitung hinsichtlich C'.

Dadurch also, daß man die Integrationskonstante C durch eine noch in hohem Maße beliebig wählbare Funktion einer *neuen Integrationskonstante* C' ersetzt, kann man *die allgemeine Lösung auf eine andere Form* bringen.

Wenn die Auflösung der Gleichung (2) nach C das Integral $\omega(x, y) = C$ und also $\omega(x, y) = \psi(C')$ liefert und χ die zu ψ inverse Funktion ist, so nimmt das Integral durch Auflösung nach der neuen Integrationskonstante C' die neue Form:

$$(4) \qquad \chi(\omega(x, y)) = C'$$

an. *Jede Funktion $\chi(\omega)$ eines Integrals ω ist demnach wiederum ein Integral derselben Differentialgleichung.* Bei geeigneter Wahl der noch in hohem Maße willkürlichen Funktion χ kann man erreichen, daß das neue Integral ebenfalls in der Umgebung der Stelle (a, b) eine stetige Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung wird.

Umgekehrt: Es seien $\omega(x, y)$ und $\Omega(x, y)$ zwei Integrale derselben Differentialgleichung, und zwar seien sie nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in einem gewissen Bereiche stetig. Alsdann müssen die beiden Gleichungen:

$$\omega_x + \omega_y y' = 0, \qquad \Omega_x + \Omega_y y' = 0$$

durch denselben Wert (1) von y' befriedigt werden, was aber nur dann angeht, wenn:

$$\begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y \\ \Omega_x & \Omega_y \end{vmatrix} = 0$$

ist. Daraus folgt nach Satz 4, Nr. 80:

Satz 3: Nicht nur ist jede Funktion eines Integrals der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung $y' = f(x, y)$ wiederum ein Integral der Gleichung, sondern es gilt auch das

Umgekehrte: Alle Integrale der Differentialgleichung sind voneinander abhängig.

Beispiel: Die Differentialgleichung:

$$y' = -\frac{y}{x}$$

läßt sich in der Form:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

sofort integrieren. Es ist danach:

$$\ln x + \ln y = C$$

ein Integral. Wird es als das Integral ω gewählt und unter $\chi(\omega)$ die Funktion e^{ω} verstanden, so lautet die neue Form (4) des Integrals:

$$xy = C'.$$

Die Integralkurven sind diejenigen Hyperbeln, deren Asymptoten mit den Koordinatenachsen zusammenfallen.

707. Verallgemeinerung für den Fall einer Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$. Wir wollen die in den vorhergehenden Nummern entwickelten Begriffe auch auf solche gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung:

(1) $$F(x, y, y') = 0$$

ausdehnen, die nicht nach y' aufgelöst sind.

Es möge $x = a$, $y = b$ ein bestimmtes Wertepaar sein, und es seien $y' = c_1, c_2, \ldots$ alle diejenigen voneinander verschiedenen Werte von y', die der Gleichung:

$$F(a, b, y') = 0$$

genügen. Ferner sei die Funktion $F(x, y, y')$ in den Umgebungen der Stellen (a, b, c_1), (a, b, c_2), ... nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. Insbesondere werde vorausgesetzt, daß die Ableitung $\partial F : \partial y'$ an keiner der Stellen (a, b, c_1), (a, b, c_2), ... gleich Null sei. Dann hat die Gleichung (1) eine Anzahl von Auflösungen nach y':

(2) $$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \ldots$$

die für $x = a$, $y = b$ die Werte $c_1, c_2, \ldots$ annehmen. Sie liefern alle diejenigen Werte von y', die der Gleichung (1) genügen, falls (x, y) irgend eine Stelle in der Umgebung der Stelle (a, b) bedeutet. Vgl. Nr. 700.

Die Differentialgleichung (1) wird somit in der Umgebung des Punktes (a, b) der xy-Ebene durch eine Anzahl von aufgelösten Differentialgleichungen (2) ersetzt. Da die Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ in der Umgebung der Stelle (a, b) stetig sind und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben, kommt jeder Differentialgleichung (2) in der Umgebung der Stelle (a, b) eine allgemeine Lösung zu:

$$(3) \qquad y = \varphi_1(x, C), \quad y = \varphi_2(x, C), \ldots$$

Ihre Gesamtheit stellt die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) *in der Umgebung der Stelle* (a, b) *dar.* Weil jede einzelne Gleichung (3) eine Schar von Integralkurven bestimmt, von denen die Umgebung des Punktes (a, b) einfach überdeckt wird (vgl. Nr. 703), *so überdeckt die Gesamtheit aller Integralkurven der vorgelegten Differentialgleichung die Umgebung des Punktes* (a, b) *gerade so vielfach, als einzelne Gleichungen* (2) *hervorgegangen sind,* d. h. durch irgend einen Punkt (x, y) dieser Umgebung geht je eine Integralkurve einer jeden einzelnen Differentialgleichung (2).

Alle von einem solchen Punkte (x, y) ausgehenden Integralkurven haben daselbst verschiedene Tangenten, wenn jene Umgebung hinreichend beschränkt wird. Denn es stellen z. B. die beiden Gleichungen:

$$(4) \qquad y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y)$$

diejenigen Auflösungen der Gleichung (1) nach y' dar, die *alle* Werte von y' in einer gewissen Umgebung des Wertes c_1 bzw. c_2 erschöpfen, falls nur die Stelle (x, y) in der Umgebung der Stelle (a, b) liegt. (Vgl. Satz 15, Nr. 696.) Weil die Differenz $f_1 - f_2$ an der Stelle (a, b) gleich $c_1 - c_2 \neq 0$ ist, gibt es nach Satz 11, Nr. 693, eine solche Umgebung der Stelle (a, b), innerhalb derer *überall* $f_1 \neq f_2$ ist. Da f_1 bzw. f_2 den Tangens des Winkels bedeutet, den die Integralkurve der ersten bzw. zweiten Differentialgleichung (4) mit der positiven x-Achse bildet, so folgt mithin, daß in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes (a, b) keine Integralkurve der ersten Gleichung eine der zweiten Gleichung berühren kann. Dasselbe gilt für die Integralkurven aller Differentialgleichungen (2).

Dies Ergebnis wollen wir als Satz formulieren. Wir bemerken dabei ein für allemal vorweg, daß wir uns bei der Betrachtung einer Differentialgleichung von der Form $F(x, y, y') = 0$ stets stillschweigend auf einen solchen Bereich beschränken, *innerhalb dessen die Funktion* $F(x, y, y')$ *der drei Veränderlichen* x, y, y' *nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig ist.* Wird dies im Auge behalten, so gilt der

Satz 4: Wenn die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, y') = 0$$

an der Stelle $x = a$, $y = b$ *nur durch solche Werte von* y' *befriedigt wird, für die* $\partial F : \partial y'$ *von Null verschieden ist, so gibt es eine Umgebung des Punktes* (a, b) *der* xy*-Ebene, in der keine zwei verschiedenen Integralkurven der Differentialgleichung einander berühren.*

Daraus folgt, daß eine Berührung zwischen Integralkurven gewiß nur an solchen Stellen $x = a$, $y = b$ denkbar ist, zu denen infolge von $F(a, b, y') = 0$ wenigstens ein Wert von y' gehört, für den $\partial F : \partial y'$ verschwindet. Hierauf kommen wir in der nächsten Nummer zurück.

Ist die Anzahl der Differentialgleichungen (2), die durch die Auflösung der Gleichung (1) in der Umgebung des Wertepaares $x = a$, $y = b$ hervorgehen, begrenzt, etwa gleich n, so kann man alle n Lösungen (3) in einer Gleichung zusammenfassen:

$$[y - \varphi_1(x, C)]\,[y - \varphi_2(x, C)] \cdots [y - \varphi_n(x, C)] = 0,$$

die implizite die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) in der Umgebung der Stelle (a, b) darstellt. Bei denjenigen Differentialgleichungen (1), die man durch die elementaren Funktionen zu integrieren imstande ist, ergibt sich häufig, daß die allgemeine Lösung y durch eine einzige, aber *mehrwertige* Funktion ausgedrückt werden kann. In der Theorie aber sehen wir, wie schon oft gesagt wurde, von mehrwertigen Funktionen ab.

Durch Auflösung der Gleichungen (3) nach C gehen Integrale:

$$\omega_1(x, y) = C, \quad \omega_2(x, y) = C, \ \ldots$$

der einzelnen Differentialgleichungen (2) hervor. Erst ihre Gesamtheit wird man als *Integral der vorgelegten Differentialgleichung* (1) bezeichnen.

Unter einer *Partikularlösung* der Differentialgleichung (1) versteht man irgend eine der Lösungen (3) für irgend einen erlaubten und *bestimmten* Wert der willkürlichen Konstante C.

708. Singuläre Lösungen. Bisher wurde angenommen, daß für ein solches Wertsystem $x = a$, $y = b$, $y' = c$, das der vorgelegten Differentialgleichung:

$$(1) \qquad F(x, y, y') = 0$$

genügt, insbesondere $\partial F : \partial y' \neq 0$ sei, denn nur dann war die Anwendung des Satzes 15 von Nr. 696 gestattet, nach dem die Gleichung (1) eine Auflösung von der Form $y' = f(x, y)$ hat. Nun soll der bisher ausgeschlossene Fall erörtert werden, in dem $\partial F : \partial y'$ für ein Wertsystem verschwindet, das der Gleichung (1) genügt. Es empfiehlt sich, alle diejenigen Wertsysteme x, y, y' oder also alle diejenigen Linienelemente (x, y, y') in der xy-Ebene als *singulär* zu bezeichnen, für die zugleich die beiden Gleichungen gelten:

$$(2) \qquad F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Dann folgt aus dem Satze 4 der letzten Nummer sofort:

Satz 5: Wenn zwei Integralkurven der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, y') = 0$ einander berühren, so ist ihr gemeinsames Linienelement singulär.

Zunächst ist es denkbar, daß die zweite Gleichung (2) bloß eine Folge der ersten Gleichung (2) vorstellt. Wenn z. B. die gegebene Differentialgleichung die Form:

$$(3) \qquad [y' - f(x, y)]^2 = 0$$

hat, so bedeutet F ihre linke Seite, so daß die zweite Gleichung (2) diese wird:

$$(4) \qquad y' - f(x, y) = 0.$$

Hier ist es ganz klar, daß man die vorgelegte Differentialgleichung nicht in der Form (3), sondern von vornherein in der Form (4) betrachten wird, und dann tritt dieser besondere Fall nicht mehr ein. Wir wollen voraussetzen, daß die Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ immer nur in solcher Form gegeben sei, wobei die zweite Gleichung (2) nicht bloß eine Folge der ersten Gleichung (2) ist, d. h. *nicht alle Linienelemente der Differentialgleichung sollen der zweiten Gleichung* (2) *genügen.*

Gibt es nun überhaupt unbegrenzt viele Linienelemente (x, y, y'), die beide Gleichungen (2) befriedigen, so brauchen sie nicht notwendig Kurven zu bilden. Ein Beispiel zeigt dies sofort: Man betrachte alle diejenigen Linienelemente, die von den Punkten einer Kurve ausgehen und zu den Tangenten der Punkte senkrecht sind, siehe Fig. 15.

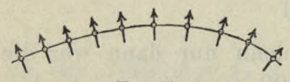
Fig. 15.

Wenn aber singuläre Linienelemente in unbegrenzter Anzahl vorhanden sind und eine Kurve bilden, muß man die Kurve als eine Integralkurve bezeichnen. Denn alle Linienelemente (x, y, y') einer Kurve $y = \psi(x)$ werden durch die beiden Gleichungen $y = \psi(x)$, $y' = \psi'(x)$ gegeben. Wenn nun ihre Bestimmungsstücke den beiden Gleichungen (2) genügen, so muß insbesondere nach der ersten Gleichung (2) für alle Werte von x (innerhalb eines gewissen Intervalles):

$$F(x, \psi(x), \psi'(x)) = 0$$

sein, d. h. $y = \psi(x)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung (1).

Alle diejenigen Integralkurven, deren Linienelemente singulär sind, heißen *singuläre Integralkurven.* Analytisch ausgedrückt: Eine differenzierbare Funktion $y = \psi(x)$ heißt eine *singuläre Lösung* der Differentialgleichung (1), wenn die beiden Gleichungen (2) durch die Substitutionen $y = \psi(x)$, $y' = \psi'(x)$ befriedigt werden.

Es erhellt, daß die Differentialgleichung (1) außer den in voriger Nummer betrachteten Lösungen und den etwa vorhandenen singulären Lösungen keine anderen Lösungen haben kann. Die nicht singulären Lösungen bzw. Integralkurven heißen *regulär.* Es leuchtet ferner ein, daß durch einen Punkt (x, y) gewiß keine singuläre Integralkurve geht, sobald sich aus der Forderung $F(x, y, y') = 0$ nur solche Werte von y' ergeben, für die $\partial F : \partial y' \neq 0$ ist.

Wenn $y = \psi(x)$ eine singuläre Lösung vorstellt, müssen die Werte $y = \psi(x)$ und $y' = \psi'(x)$, wie schon gesagt, den beiden Gleichungen (2) genügen. Anders ausgedrückt: Eine singuläre Lösung y ist vorhanden, wenn die beiden Gleichungen (2) durch zwei Funktionen y und y' von x befriedigt werden, von denen die zweite die Ableitung der ersten ist. Nun aber gibt die vollständige Differentiation der ersten Gleichung (2):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} = 0$$

oder einfacher wegen des Bestehens der zweiten Gleichung (2):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Also ist zu fordern, daß der hieraus zu berechnende Wert von $dy:dx$ mit y' übereinstimme. Daher gilt der

Satz 6: Die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, y') = 0$ hat dann und nur dann eine singuläre Lösung, wenn es eine stetige und differenzierbare Funktion y von x gibt, die zusammen mit ihrer Ableitung y' den drei Gleichungen:

vgl. 777, S. 299.

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Genüge leistet.

Hieraus folgt, *daß alle etwa vorhandenen singulären Lösungen allein durch Elimination und Substitution, d. h. ohne jedes Integrationsverfahren berechnet werden können.*

709. Beispiel. Die Schar aller Kreise vom Radius r, deren Mittelpunkte auf der Geraden $x = y$ liegen (siehe Fig. 16), hat die Gleichung:

$$(x - C)^2 + (y - C)^2 = r^2$$

mit der willkürlichen Konstante C. Vollständige Differentiation nach x gibt:

$$x - C + y'(y - C) = 0.$$

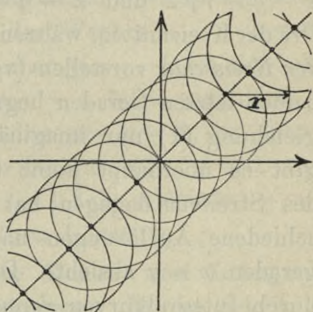

Fig. 16.

Alle Linienelemente (x, y, y') aller dieser Kreise genügen mithin derjenigen Gleichung, die aus den beiden vorhergehenden Gleichungen durch Elimination von C gewonnen wird. Dadurch ergibt sich die Differentialgleichung:

$$(1) \qquad F = (x-y)^2(1+y'^2) - r^2(1+y')^2 = 0,$$

und zu ihren Integralkurven gehören die Kreise der gegebenen Schar. (Vgl. die Methode, mittels derer in Nr. 86 die Differentialgleichung einer gegebenen Kurvenschar gewonnen wurde.) Die Funktion F von x, y, y' ist nebst ihren partiellen Ableitungen überall stetig. Insbesondere wird:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2[(x-y)^2 - r^2]y' - 2r^2.$$

Die Differentialgleichung (1) ist hinsichtlich y' quadratisch und hat daher zwei Auflösungen nach y':

$$(2) \qquad y' = \frac{r^2 \pm (x-y)\sqrt{2r^2-(x-y)^2}}{(x-y)^2 - r^2},$$

und für diese Auflösungen wird:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \pm 2(x-y)\sqrt{2r^2-(x-y)^2}.$$

Beide Auflösungen (2) sind nur dann reell und verschieden, wenn $x-y \neq 0$ und $(x-y)^2 < 2r^2$ ist, ferner reell und gleich, wenn entweder $x-y=0$ oder $(x-y)^2 = 2r^2$ ist, und drittens imaginär, wenn $(x-y)^2 > 2r^2$ ist. Die Punkte (x, y), für die beide Auflösungen reell und gleich werden, sind also diejenigen, für die $\partial F : \partial y' = 0$ wird, nämlich die der drei Geraden $x = y$, $x - y = r\sqrt{2}$ und $x - y = -r\sqrt{2}$. Die erste Gerade ist der Ort der Kreismitten, während die beiden anderen die *Einhüllenden der Kreisschar* vorstellen (vgl. Nr. 210). Außerhalb des von den beiden letzten Geraden begrenzten Streifens hat die Differentialgleichung (1) nur imaginäre Auflösungen nach y', d. h. dort gibt es überhaupt keine (reellen) Integralkurven. Innerhalb des Streifens dagegen hat die Gleichung (1) zwei reelle verschiedene Auflösungen nach y', sobald man von der Mittelgeraden $x = y$ absieht. Dies Gebiet wird somit nach Nr. 707 durch Integralkurven *doppelt* überdeckt. In der Tat tun es die Kreise der Schar. Daher stellen sie *alle* regulären Integralkurven vor. Der Satz 4 von Nr. 707 wird bestätigt: In dem Streifen, abgesehen von seiner Mittellinie, für deren Stellen ja $\partial F : \partial y' = 0$ ist, berühren keine zwei der Kreise einander.

709]

Die *singulären* Linienelemente, d. h. diejenigen, für die $\partial F : \partial y' = 0$ ist, gehen von den Punkten der drei Geraden aus. Insbesondere für diejenigen, deren Punkte (x, y) auf den Geraden $x - y = r\sqrt{2}$ und $x - y = -r\sqrt{2}$ liegen, ergibt sich aus (1) oder (2) der Wert $y' = 1$, d. h. es sind die Linienelemente der beiden Geraden selbst, siehe Fig. 17. Dagegen geht für diejenigen singulären Linienelemente, deren Punkte (x, y) auf der Mittelgeraden $x = y$ liegen, $y' = -1$ hervor, d. h. diese Linienelemente sind zur Mittelgeraden senkrecht. Kurven werden also nur von den singulären Linienelementen der beiden Geraden $x - y = \pm r\sqrt{2}$ gebildet, die also die einzigen *singulären Integralkurven* vorstellen, d. h. die beiden Funktionen $y = x \mp r\sqrt{2}$ sind die einzigen *singulären Lösungen.*

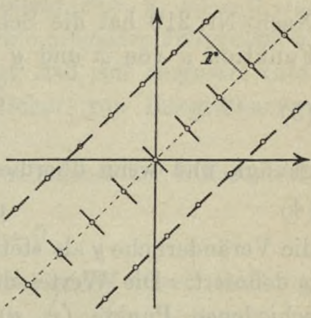

Fig. 17.

Wir wollen sie nach Satz 6 der letzten Nummer auch analytisch bestimmen. Die Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

ergibt hier:

(3) $$(x - y)(1 + y'^2)(1 - y') = 0,$$

d. h. $y = x$ oder $y' = 1$, weil von imaginären Werten abgesehen wird. Ist $y = x$, so geht aus (1) der Wert $y' = -1$ hervor. Zwar wird dann auch $\partial F : \partial y' = 0$, aber $y' = -1$ ist nicht die Ableitung von $y = x$. Deshalb ist $y = x$ keine singuläre, ja überhaupt gar keine Lösung. Ist dagegen $y' = 1$, so folgen aus (1) die Werte $y = x \mp r\sqrt{2}$, für die auch $\partial F : \partial y' = 0$ wird. Da außerdem die Funktionen $y = x \mp r\sqrt{2}$ die Ableitung $y' = 1$ haben, sind sie die einzigen singulären Lösungen.

710. Die Einhüllende einer Schar von Integralkurven als singuläre Integralkurve. Es ist leicht zu zeigen, daß eine etwa vorhandene Einhüllende einer Schar von Integralkurven stets eine singuläre Integralkurve sein muß.

Stellt nämlich:

(1) $$y = \varphi(x, C)$$

eine Schar von Integralkurven der Differentialgleichung $F(x, y, y')$ $= 0$ vor, wobei die Veränderliche x und die willkürliche Konstante C gewissen Intervallen angehören, so ist:

$$F\left(x,\ \varphi(x, C),\ \frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial x}\right) = 0. \tag{2}$$

Nach Nr. 210 hat die Schar eine Einhüllende, wenn es eine Funktion α von x und y gibt, die der Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \tag{3}$$

genügt, und wenn überdies:

$$y = \varphi(x, \alpha) \tag{4}$$

die Veränderliche y als stetige und differenzierbare Funktion von x definiert. Die Werte, die dabei der Funktion α für die verschiedenen Punkte (x, y) der Einhüllenden (4) zukommen, sind diejenigen Werte, die der willkürlichen Konstante C in der Schar (1) gestattet sind.

Die Ableitung der Funktion (4), nämlich:

$$y' = \frac{\partial \varphi(x, \alpha)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x, \alpha)}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dx},$$

nimmt nach (3) den Wert an:

$$y' = \frac{\partial \varphi(x, \alpha)}{\partial x}. \tag{5}$$

Da nun die Gleichung (2) für alle Werte x und C (in den erlaubten Intervallen) gilt und da die Funktion α dieselben Werte annimmt, die der willkürlichen Konstante C gestattet sind, so gilt die Gleichung (2) auch nach der Substitution von α statt C; alsdann aber besagt sie nach (4) und (5), daß die Funktion (4) in der Tat eine Lösung der Differentialgleichung ist. Die Einhüllende muß demnach eine Integralkurve sein.

Geometrisch ergibt sich dasselbe so: Alle Linienelemente aller Integralkurven (1) gehören zu denen der Differentialgleichung, und weil die Einhüllende (4) mit jeder Integralkurve nach Satz 17, Nr. 212, ein Linienelement gemein hat, gehören folglich alle ihre Linienelemente zu denen der Differentialgleichung, d. h. sie ist ebenfalls eine Integralkurve.

Daß die Einhüllende eine *singuläre* Integralkurve sein muß, folgt sofort daraus, daß durch jeden ihrer Punkte zwei verschiedene Integralkurven gehen, die einander dort berühren, nämlich erstens die Einhüllende und zweitens eine Kurve der Schar (1); mithin sind alle Linienelemente der Einhüllenden nach Satz 5, Nr. 708, singulär.

Satz 7: Hat eine Schar von Integralkurven der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, y') = 0$ eine Einhüllende, so ist die Einhüllende eine singuläre Integralkurve.

Es ist aber hiermit nicht gesagt, daß jede singuläre Integralkurve eine Einhüllende einer Schar von Integralkurven sein müßte. Zum Belege diene das

Beispiel: Die singulären Linienelemente der Differentialgleichung:

$$F = y'^2 + y^2 e^x = 0$$

sind diejenigen, deren Bestimmungsstücke x, y, y' dieser Gleichung und der Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' = 0$$

genügen. Für sie wird $y' = 0$ und $y = 0$, d. h. die x-Achse ist die einzige singuläre Integralkurve. Im übrigen aber gibt es gar keine Integralkurven, auch keine regulären, denn die Gleichung $F = 0$ gibt nach y' aufgelöst:

$$y' = y\sqrt{-e^x},$$

also nur imaginäre Werte, abgesehen vom Falle $y = 0$.

711. Diskriminantenort der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$. Wenn die beiden Gleichungen:

$$(1) \qquad F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

denen alle singulären Linienelemente der Differentialgleichung $F = 0$ genügen, durch Elimination von y' zu einer Gleichung:

$$(2) \qquad \Phi(x, y) = 0$$

führen, gibt diese Gleichung den Ort der Punkte aller singulärer Linienelemente der Differentialgleichung $F = 0$ an.

Ist insbesondere F eine ganze rationale Funktion von x, y und y', so gilt dasselbe von $\partial F : \partial y'$. Alsdann gelingt es durch Determinantenbildung, y' aus den beiden Gleichungen (1) zu eliminieren, wodurch eine Gleichung $\Phi(x, y) = 0$ hervorgeht, deren linke Seite Φ eine ganze rationale Funktion von x und y

ist. Man nennt diese Funktion Φ die *Diskriminante* der Funktion F hinsichtlich y' und die Gleichung $\Phi = 0$ die *Diskriminantengleichung*.

Indem man diese Bezeichnung verallgemeinert, nennt man auch sonst die durch Elimination von y' aus den Gleichungen (1) gewonnene Gleichung (2) die *Diskriminantengleichung der Differentialgleichung* $F = 0$. Dementsprechend soll im folgenden der geometrische Ort der Punkte aller singulärer Linienelemente der Differentialgleichung $F = 0$ der *Diskriminantenort der Differentialgleichung* heißen. Es ist nicht gesagt, daß er stets durch eine Gleichung (2) darstellbar sei, vielmehr kann er aus einzelnen Kurven und aus einzelnen Punkten bestehen.

Differentialgleichungen von der Form $y' = f(x, y)$ haben, da hier $F = y' - f$ und also $\partial F : \partial y' = 1$ ist, nie einen Diskriminantenort wie überhaupt nie eine singuläre Lösung (in ihrem Bereiche, vgl. Nr. 707). Obgleich eine Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ nach Nr. 707 in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y = b$ auf eine Anzahl von Gleichungen von dieser Form $y' = f(x, y)$ zurückkommt, darf doch nicht geschlossen werden, daß ihre regulären Integralkurven nirgends Stellen mit dem Diskriminantenorte gemein hätten, denn die Betrachtungen bezogen sich immer nur auf eine Umgebung einer Stelle (a, b).

Eine Integralkurve ist vielmehr nach Nr. 708 nur soweit als regulär zu bezeichnen, als ihre Linienelemente nicht singulär sind. Es kann sehr wohl vorkommen, daß eine Lösung $y = \varphi(x)$ auch dann noch stetig und differenzierbar bleibt, wenn x einen Wert erreicht, für den $y = \varphi(x)$ und $y' = \varphi'(x)$ ein singuläres Linienelement bestimmen. Dies war z. B. bei den Kreisen in Nr. 709 da der Fall, wo sie die Geraden $y = x \mp r\sqrt{2}$ berühren, und da, wo sie die Gerade $y = x$ schneiden. Ebenso ist es stets der Fall bei einer Schar von Integralkurven, die eine Einhüllende hat, nach Satz 7, Nr. 710.

In einem Intervalle, in dem die Integralkurve $y = \varphi(x)$ regulär bleibt, hat $\varphi(x)$ überall eine stetige Ableitung, folglich tritt dort nirgends ein *singulärer Punkt* (vgl. Nr. 187 und 191) auf. Aber es kann sein, daß die Integralkurve an den Grenzen des Intervalles singuläre Punkte hat, indem sie zugleich aufhört, regulär zu sein, d. h. indem sie dort singuläre Linienelemente hat. Alsdann aber liegen diese singulären Punkte als Punkte von singulären Linienelementen auf dem Diskriminantenorte.

Demnach sagen wir zusammenfassend:

Satz 8: Dem Diskriminantenorte der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, y') = 0$ gehören alle etwa vorhandenen Berührungspunkte zwischen Integralkurven, alle etwa vorhandenen singulären Punkte von Integralkurven, alle etwa vorhandenen Einhüllenden von Scharen von Integralkurven sowie alle etwa vorhandenen singulären Integralkurven an.

1. Beispiel: Nach (4) in Nr. 232 ist:

$$F = yy'^2 - 2a + y = 0$$

die Differentialgleichung derjenigen *gemeinen Zykloiden*, die durch Rollen eines Kreises vom Radius a längs der oberen Seite der Abszissenachse hervorgehen. Weil $\partial F : \partial y'$ den Wert $2yy'$ hat, ist für den Diskriminantenort entweder $y = 0$ oder $y' = 0$. Im Falle $y = 0$ geht aus der Differentialgleichung, die ja:

$$y' = \pm\sqrt{\frac{2a - y}{y}}$$

ergibt, noch $y' = \pm\infty$ hervor, im Falle $y' = 0$ dagegen $y = 2a$. Der Diskriminantenort besteht demnach aus den beiden Geraden $y = 0$ und $y = 2a$, doch sind die von den Punkten beider Geraden ausgehenden singulären Linienelemente von verschiedener Art, denn diejenigen, deren Punkte auf der Abszissenachse $y = 0$ liegen, stehen auf der Achse senkrecht, während diejenigen, deren Punkte auf der Parallelen $y = 2a$ zur Abszissenachse liegen, die Richtung dieser Achse haben. Deshalb bilden nur die Elemente der zweiten Art eine singuläre Integralkurve,

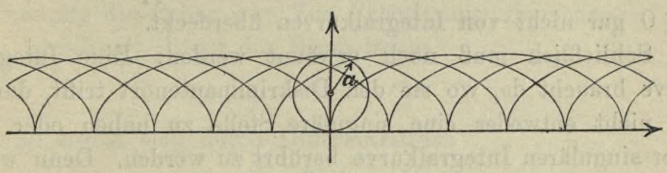

Fig. 18.

nämlich die Gerade $y = 2a$, die Einhüllende aller Zykloiden. Die Abszissenachse dagegen ist der *Ort der Spitzen* aller Zykloiden. Siehe Fig. 18.

Die Differentialgleichungen von der Form $y' = f(x, y)$ haben, wie schon bemerkt wurde, gar keine singuläre Integralkurve; aber auch dann, wenn die Integralkurven einer Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ einen Bereich mehrfach überdecken (vgl. Nr. 707), braucht nicht stets eine singuläre Integralkurve vorhanden zu sein. Vielmehr kann der Diskriminantenort aus lauter singulären Punkten bestehen. Als Beleg diene das

2. Beispiel: Die Differentialgleichung:

$$F = 4y'^2 - 9x = 0$$

gibt, nach y' aufgelöst:

$$y' = \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Demnach stellt:

$$y = \pm \tfrac{3}{2}\int \sqrt{x}\, dx = \pm x\sqrt{x} + C$$

die allgemeine Lösung dar. Alle Integralkurven gehen aus der Kurve $y = \pm x\sqrt{x}$ oder $y^2 - x^3 = 0$, die in Nr. 184 untersucht und daselbst in Fig. 33 wiedergegeben wurde, durch Verschiebung längs der y-Achse um willkürlich gewählte Strecken C hervor, siehe Fig. 19. Wegen $\partial F : \partial y' = 8y'$ ist der Diskriminantenort die Gerade $x = 0$, die alle Spitzen der Kurven enthält. Die singulären Linienelemente, die von den Punkten der Geraden $x = 0$ ausgehen, sind zur x-Achse parallel. Es gibt demnach keine singuläre Integralkurve. Das Gebiet $x > 0$ wird doppelt, das Gebiet $x < 0$ gar nicht von Integralkurven überdeckt.

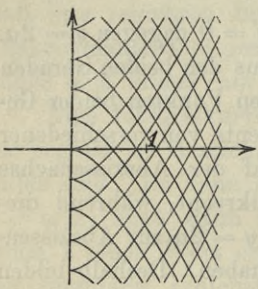

Fig. 19.

Schließlich muß noch erwähnt werden: Eine Integralkurve braucht da, wo sie den Diskriminantenort trifft, durchaus nicht entweder eine singuläre Stelle zu haben oder von einer singulären Integralkurve berührt zu werden. Denn wenn der Punkt $x = a$, $y = b$ auf dem Diskriminantenorte liegt, besagt dies zwar, daß die Gleichungen:

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

für $x = a$, $y = b$ eine gemeinsame Auflösung $y' = c$ haben, so daß das Linienelement (a, b, c) singulär ist; aber die Gleichung $F = 0$ kann für $x = a$, $y = b$ außer $y' = c$ noch wenigstens eine andere Auflösung y' haben, für die $\partial F : \partial y'$ *nicht* verschwindet. Alsdann geht durch den Punkt (a, b) eine reguläre Integralkurve, die dort den Diskriminantenort schneidet.

Das Beispiel, das die nächste Nummer bringt, dient auch zur Erläuterung dieser Erscheinung.

712. Singuläre Integralkurven als Grenzlagen von regulären Integralkurven. Stellt:

$$(1) \qquad y = \varphi(x, C)$$

eine Schar von regulären Lösungen der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ so lange vor, als die willkürliche Konstante C auf das Innere eines Intervalles $\alpha < C < \beta$ beschränkt wird, so kann der Fall eintreten, daß dieselbe Funktion für $C = \alpha$ oder $C = \beta$ eine singuläre Lösung wird. In einem solchen Falle zu sagen, daß die singuläre Lösung zugleich eine Partikularlösung sei, ist durchaus nicht korrekt, denn die Partikularlösungen sind nach den Definitionen in Nr. 703 und 707 stets regulär.

Es kann sein, daß die besprochene für $C = \alpha$ oder $C = \beta$ etwa vorhandene singuläre Lösung $y = \varphi(x, \alpha)$ oder $y = \varphi(x, \beta)$ überdies eine Einhüllende der Schar (1) vorstellt. Dann ist es ebenfalls nicht korrekt zu sagen, daß die Einhüllende zur Schar der regulären Integralkurven (1), d. h. zur allgemeinen Lösung der Differentialgleichung gehöre.

Man darf nur sagen, daß die für $C = \alpha$ oder $C = \beta$ hervorgehende singuläre Lösung aus den regulären Lösungen beim *Grenzübergange* $\lim C = \alpha$ oder $\lim C = \beta$ entsteht, also eine *Grenze* für die Schar ist. Zur Erläuterung diene das

Beispiel: Liegt die Parabelschar:

$$(2) \qquad y = C(x - C)^2$$

vor, so ergibt sich durch Differentiation:

$$(3) \qquad y' = 2C(x - C),$$

daher durch Elimination von y' aus beiden Gleichungen die Differentialgleichung:

$$(4) \qquad F = y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0,$$

die *alle* Parabeln der Schar (2) zu Integralkurven hat. Aber nicht alle diese Kurven sind reguläre Integralkurven. Um dies zu erkennen, bestimmen wir den Diskriminantenort. Da:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 3y'^2 - 4xy$$

ist, so muß $y'^2 = \frac{4}{3}xy$ in (4) eingesetzt werden, wodurch zunächst:

$$y(y - \tfrac{1}{3}xy') = 0$$

hervorgeht. Für die singulären Linienelemente ist deshalb entweder:

(5) $$y = 0, \quad y' = 0$$

oder:

$$y = \tfrac{1}{3}xy', \quad y'^2 = \tfrac{4}{3}xy.$$

Die beiden letzten Gleichungen, in denen $y' \neq 0$ gewählt werden muß, weil sie sonst auf (5) zurückkommen, ergeben:

(6) $$y = \tfrac{4}{27}x^3, \quad y' = \tfrac{4}{9}x^2.$$

Sowohl in (5) als auch in (6) ist der für y' gefundene Wert die Ableitung des für y gefundenen Wertes. Demnach sind die Abszissenachse $y = 0$ und die Kurve dritter Ordnung $y = \frac{4}{27}x^3$ singuläre Integralkurven. Beide zusammen bilden den Diskriminantenort. Nun geht die Gleichung $y = 0$ auch aus (2) im Falle $C = 0$ hervor. Demnach sind alle Parabeln (2), abgesehen von der Geraden $y = 0$, reguläre Integralkurven.

Die Einhüllende der Parabelschar (2) geht hervor, wenn die Gleichung (2) nach C differenziert wird:

$$(x - C)^2 - 2C(x - C) = 0,$$

worauf die hieraus folgenden Werte $C = x$ oder $C = \frac{1}{3}x$ in (2) zu substituieren sind (nach Nr. 210). Dadurch ergeben sich wieder die beiden singulären Integralkurven $y = 0$ und $y = \frac{4}{27}x^3$.

Die Gleichung der Einhüllenden der regulären Integralkurven geht also beim Grenzübergange lim $C = 0$ *aus der Gleichung dieser Kurven hervor, definiert aber eine singuläre Integralkurve.* Siehe Fig. 20.

Die Differentialgleichung (4) ist in bezug auf y' vom dritten Grade und hat für

(7) $\quad x > 0, \quad 0 < y < \frac{4}{27}x^3 \quad$ und $\quad x < 0, \quad \frac{4}{27}x^3 < y < 0$

drei verschiedene reelle Wurzeln y', so daß also die beiden durch (7) bestimmten Gebiete, die in Fig. 20 nicht schraffiert sind, *dreifach* von Integralkurven überdeckt werden. Das in Fig. 20 schraffierte Gebiet dagegen gehört zu Wertepaaren x, y, für die sich aus (4) nur ein reeller Wert und zwei konjugiert komplexe Werte von y' ergeben. Dieser Bereich wird von den Parabeln (2) *einfach* überdeckt. Die Kurve $y = \frac{4}{27} x^3$ ist der Ort derjenigen Punkte (x, y), für die die Gleichung (4) eine reelle Doppelwurzel y' und eine davon verschiedene einfache Wurzel y' hat, womit im Einklange steht, daß durch jeden solchen Punkt zwei einander berührende Integralkurven außer einer dritten Parabel der Schar (2) gehen. Diese Parabel ist, obwohl sie dort den Diskriminantenort schneidet, dennoch ebenda eine reguläre Integralkurve (vgl. die letzte Bemerkung in der vorigen Nummer). Schließlich fallen alle drei Wurzeln y' der Gleichung (4) in eine reelle Wurzel zusammen, falls $y = 0$ ist. In der Tat gehen durch jeden Punkt $x = a$, $y = 0$ der Abszissenachse drei Integralkurven, die einander dort berühren, nämlich außer der Geraden $y = 0$ selbst noch eine doppelt zählende Parabel (2), weil (2) für $x = a$, $y = 0$ eine Doppelwurzel $C = a$ hat.

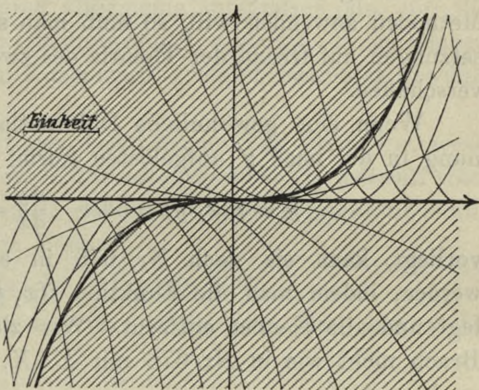

Fig. 20.

§ 2. Integration einiger Klassen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

713. Vollständige Differentiale, insbesondere getrennte Veränderliche. Nachdem wir die allgemeinen Grundlagen der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen entwickelt haben, besprechen wir einige Methoden, mittels derer die Integration gewisser Klassen von solchen Gleichungen auf Quadraturen (vgl. Nr. 674), unter Umständen verbunden mit Eliminationen, zurückführbar ist. Auf die Frage, ob die Quadraturen oder Eliminationen wirklich geleistet werden können, gehen wir nicht ein wie überhaupt auch nicht auf die Erörterung derjenigen Voraussetzungen, die über die auftretenden Funktionen zu machen sind. Liegt eine bestimmte Differentialgleichung vor, auf die man eine der zu entwickelnden Methoden anwenden will, so muß man sich über diese Voraussetzungen auf Grund der Theorie des zweiten Kapitels Klarheit verschaffen.

Wenn eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in der nach y' aufgelösten Form:

$$y' = f(x, y) \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

vorliegt, kann sie nach Nr. 676 in eine totale verwandelt werden, indem man die Funktion $f(x, y)$ in einen Bruch zerlegt und alle Nenner entfernt. Wir ziehen es hier vor, den Bruch nicht wie in Nr. 676 mit $Y : X$, sondern mit $-U : V$ zu bezeichnen:

$$f(x, y) = -\frac{U(x, y)}{V(x, y)},$$

sodaß die totale Differentialgleichung die Form annimmt:

$$(1) \qquad U(x, y)\,dx + V(x, y)\,dy = 0.$$

Der einfachste Fall ist nun dieser:

Die linke Seite der Gleichung (1) *kann ein vollständiges Differential sein.* Dazu ist nach Satz 1, Nr. 609, erforderlich, daß die beiden Funktionen U und V der Bedingung genügen:

$$(2) \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Ist sie erfüllt, so kann man nach jenem Satze durch zwei Quadraturen eine Funktion:

$$(3) \qquad \omega = \int\limits_a^x U(x, y)\,dx + \int\limits_b^y V(a, y)\,dy$$

finden, deren vollständiges Differential $d\omega$ mit der linken Seite von (1) identisch ist, so daß $d\omega = 0$ die Differentialgleichung vorstellt. Also wird gefordert: Es soll y eine Funktion von x

sein, nach deren Substitution die Funktion $\omega(x, y)$ das Differential Null bekommt, daher konstant wird. (Vgl. Satz 8, Nr. 74.) Die Gleichung:

$$\omega(x, y) = C, \tag{4}$$

in der C eine willkürliche Konstante bedeutet, definiert also implizite die Lösungen y der Differentialgleichung. Oder auch, nach Nr. 705: *Die Funktion* $\omega(x, y)$ *ist ein Integral der Differentialgleichung* (1), deren allgemeine Integration also nur die Ausführung der beiden Quadraturen (3) verlangt. Dabei können die in (3) auftretenden Konstanten a und b bestimmt gewählt werden.

Insbesondere liegt der besprochene Fall stets vor, *wenn die Veränderlichen in der Differentialgleichung* (1) *getrennt sind,* d. h. wenn die Funktion U nur von x und die Funktion V nur von y abhängt, also im Falle:

$$U(x)\,dx + V(y)\,dy = 0, \tag{5}$$

da alsdann die Bedingung (2) erfüllt ist. Hier lautet das Integral:

$$\int_a^x U(x)\,dx + \int_b^y V(y)\,dy = C. \tag{6}$$

Es definiert y im Falle $C = 0$ implizite als diejenige Lösung, die für $x = a$ den Wert $y = b$ hat. Wenn also für C der Wert Null gesetzt, aber b willkürlich gelassen wird, so definiert (6) immer noch die allgemeine Lösung. Alsdann ist b die Integrationskonstante.

Es ist öfters möglich, eine Differentialgleichung, in der die Veränderlichen nicht getrennt sind, durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion auf die Form (5) zu bringen.

1. Beispiel: Die Differentialgleichung

$$(1 - x^2)y' + (1 - y^2) = 0 \tag{7}$$

läßt sich sofort auf jene Form bringen, indem man sie so schreibt:

$$\frac{dx}{1 - x^2} + \frac{dy}{1 - y^2} = 0.$$

Nach (6) hat sie demnach das Integral:

$$\tfrac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = C \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}\ln\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = C.$$

[713

Nach Nr. 706 ist folglich auch:

$$(8) \qquad \frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = c$$

ein Integral. Auflösung nach y gibt die allgemeine Lösung. Wenn man darin die willkürliche Konstante $(c+1):(c-1)$ mit k bezeichnet, so nimmt die allgemeine Lösung die bequemere Form an:

$$y = \frac{kx-1}{x-k}.$$

Ihre Auflösung nach k muß wieder ein Integral geben. Es lautet:

$$(9) \qquad \frac{xy+1}{x+y} = k,$$

und die linke Seite von (8) ist, wie es sein muß, eine Funktion dieses Integrals, da sie sich so schreiben läßt:

$$\frac{\dfrac{xy+1}{x+y}+1}{\dfrac{xy+1}{x+y}-1} = c.$$

2. Beispiel: Bei welchen Kurven in der Ebene ist die Tangente, gemessen vom Berührungspunkte M bis zum Schnittpunkte T mit einer festen Geraden, von konstanter Länge a? Eine solche Kurve beschreibt ein Endpunkt M eines schweren Stabes MT auf einer wagerechten Ebene, falls der andere

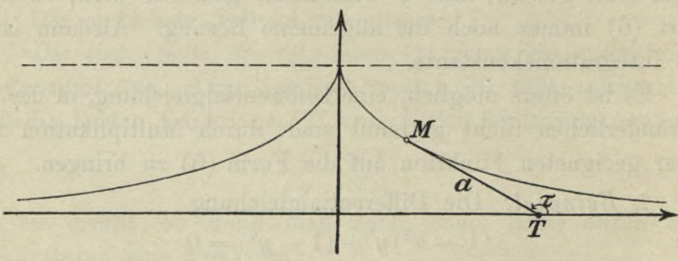

Fig. 21.

Endpunkt T die feste Gerade durchläuft, siehe Fig. 21. Deshalb heißen die gesuchten Kurven *Schleppkurven oder Traktrizen mit gerader Leitlinie.*

Wird die feste Gerade als Abszissenachse gewählt, so zeigt der in Nr. 170 angegebene Wert von MT, daß:

$$\frac{y^2}{y'^2}(1+y'^2)=a^2$$

die analytische Bedingung der Aufgabe ist. Sie stellt eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung vor:

(10) $$(a^2-y^2)y'^2-y^2=0,$$

deren Auflösung nach y' liefert:

(11) $$y'=\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

wobei die Wurzel positiv oder negativ sein kann. Reell kann eine Integralkurve demnach nur im Bereiche $|y|\leqq a$ sein; dies leuchtet auch geometrisch ein. In der Form:

$$\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy-dx=0$$

sind die Veränderlichen getrennt. Die Ausführung der Quadratur gibt mittels der Substitution $t^2=a^2-y^2$ und mit Rücksicht auf Nr. 461 das Integral:

$$a\ln\left(\pm\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)+\sqrt{a^2-y^2}-x=C.$$

Weil $a-\sqrt{a^2-y^2}$ nie negativ wird, gilt beim Numerus das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem $y>0$ oder <0 ist. Wir beschränken uns auf das Gebiet $y>0$ oberhalb der x-Achse. Wird die Hilfsveränderliche τ vermöge $y=a\sin\tau$ eingeführt, so ist alsdann τ auf den Bereich $0\leqq\tau\leqq\pi$ zu beschränken, und es geht die Parameterdarstellung der Traktrizen in der Form:

(12) $$x=a(\cos\tau+\ln\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau)-C,\quad y=a\sin\tau$$

hervor. Insbesondere stellt die Fig. 21 die zu $C=0$ gehörige Traktrix:

(13) $$x=a(\cos\tau+\ln\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau),\quad y=a\sin\tau$$

dar; alle übrigen gehen aus dieser durch Verschieben längs der x-Achse hervor. Sie überdecken das Gebiet $0<y<a$ *doppelt*, was damit im Einklange steht, daß die Differentialgleichung (10) in diesem Gebiete zwei verschiedene reelle Wurzeln y' hat (vgl. Nr. 707). Die Hilfsveränderliche τ ist übrigens wegen $y=a\sin\tau$ der Tangentenwinkel der Traktrix (vgl. Nr. 169).

[713

Durchläuft τ den ersten Quadranten, so wächst x von $-\infty$ bis 0, durchläuft τ den zweiten, so wächst x weiter von 0 bis $+\infty$. Die Kurve (13) ist zur y-Achse symmetrisch und hat auf der y-Achse eine *Spitze.* Dies entspricht dem Satz 8, Nr. 711, denn der Diskriminantenort der Differentialgleichung (10) wird durch Elimination von y' aus (10) und aus derjenigen Gleichung:

$$(a^2 - y^2) y' = 0$$

gewonnen, die durch Differentiation von (10) nach y' hervorgeht. Für die singulären Linienelemente ist demnach entweder $y' = 0$ oder $y = a$. Im Falle $y' = 0$ gibt (10) noch $y = 0$, also die Abszissenachse als Ort singulärer Linienelemente. Die Abszissenachse ist daher eine singuläre Integralkurve. Ferner ergibt sich für $y = a$ aus (10) oder (11) der Wert $y' = \infty$, so daß auch alle diejenigen Linienelemente singulär sind, deren Punkte auf der Geraden $y = a$ liegen und deren Richtungen zu dieser Geraden senkrecht sind. Die Gerade $y = a$ ist folglich keine singuläre Integralkurve, dagegen ist sie der Ort der Spitzen aller Integralkurven. Nach Nr. 171 erkennt man leicht, daß die Abszissenachse eine Asymptote ist.

Nebenbei sei bemerkt, daß die Evolute der Traktrix (13) die *Kettenlinie* (vgl. Nr. 225) ist:

$$y = \tfrac{1}{2} a \left(e^{x:a} + e^{-x:a}\right).$$

3. Beispiel: Es liege die Differentialgleichung vor:

$$\left(\frac{y}{x} + \ln y\right) dx + \left(\frac{x}{y} + \ln x\right) dy = 0.$$

Hier sind die Veränderlichen nicht getrennt; sie lassen sich auch nicht durch Multiplikation der Gleichung mit einer passend gewählten Funktion trennen. Aber die linke Seite ist ein vollständiges Differential, weil die Bedingung (2) erfüllt ist. Wird in der allgemeinen Integralformel (3) insbesondere $a = b = 1$ gewählt, was geschehen darf, so sind die Quadraturen auszuführen:

$$\int_1^x \left(\frac{y}{x} + \ln y\right) dx = y \ln x + x \ln y - \ln y, \qquad \int_1^y \frac{dy}{y} = \ln y,$$

so daß das Integral:

$$y \ln x + x \ln y = C$$

hervorgeht, das sich durch das Integral:

$$x^y \cdot y^x = c$$

ersetzen läßt.

714. Einführung von neuen Veränderlichen. Sehr oft macht man von dem Umstande Gebrauch, daß eine vorgelegte Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ durch die Einführung geeignet gewählter neuer Veränderlicher $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ anstelle von x und y auf eine für das Integrationsgeschäft bequemere Form gebracht werden kann. Die dabei auszuführende Rechnung wurde schon in Nr. 94 besprochen, weshalb wir uns hier ganz kurz fassen.

Wenn x und y als voneinander unabhängige Funktionen der neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gegeben werden:

$$(1) \qquad x = X(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad y = Y(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}).$$

so kommt:

$$(2) \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{Y_{\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x} + Y_{\mathfrak{y}}\, d\mathfrak{y}}{X_{\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x} + X_{\mathfrak{y}}\, d\mathfrak{y}} = \frac{Y_{\mathfrak{x}} + Y_{\mathfrak{y}}\, \mathfrak{y}'}{X_{\mathfrak{x}} + X_{\mathfrak{y}}\, \mathfrak{y}'},$$

wenn $\mathfrak{y}'$ den Differentialquotienten $d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x}$ bezeichnet. Mithin geht die Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ vermöge der Einführung der neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ über in:

$$(3) \qquad F\left(X(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad Y(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad \frac{Y_{\mathfrak{x}} + Y_{\mathfrak{y}}\, \mathfrak{y}'}{X_{\mathfrak{x}} + X_{\mathfrak{y}}\, \mathfrak{y}'}\right) = 0.$$

Dies aber ist eine Gleichung in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}'$, d. h. eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für eine unbekannte Funktion $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{x}$.

Wenn man die Gleichung (3), die unter Umständen einfacher als die ursprünglich vorgelegte Gleichung $F(x, y, y') = 0$ sein kann, zu integrieren vermag, wenn also z. B. $\mathfrak{y} = \Phi(\mathfrak{x})$ eine ihrer Lösungen ist, so braucht man hierin nur rückwärts wieder die alten Veränderlichen x und y einzuführen, um zu einer Gleichung in x und y zu gelangen, die y implizite als Lösung der vorgelegten Differentialgleichung $F = 0$ definiert. Denn man kann die Einführung der neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als *die Einführung eines neuen, im allgemeinen krumm-*

linigen Koordinatensystems in der Ebene deuten, so daß also der Punkt (x, y) genau derselbe wie der Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ist, sobald die Gleichungen (1) bestehen. Dann aber werden die Kurven der Ebene, insbesondere die Integralkurven der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ durch die Einführung der neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nicht geändert, sie bekommen eben nur eine andere analytische Darstellung.

Z. B. wird es sich bei manchen geometrischen Aufgaben empfehlen, statt der rechtwinkligen Koordinaten x und y Polarkoordinaten ω und ϱ einzuführen (wie in Nr. 94). Alsdann ist statt (1) und (2) zu setzen:

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega, \quad y' = \frac{\varrho' \sin \omega + \varrho \cos \omega}{\varrho' \cos \omega - \varrho \sin \omega}, \tag{4}$$

wobei ϱ' den Differentialquotienten $d\varrho : d\omega$ bezeichnet.

Beispiel: Welche Kurven in der Ebene schneiden alle Radienvektoren unter dem gegebenen Winkel μ? Da der Radiusvektor des Punktes (x, y) mit der positiven x-Achse einen Winkel bildet, dessen Tangens den Wert $y : x$ hat, während y' den Tangens des Winkels bedeutet, den die Kurventangente mit der positiven x-Achse bildet, so ist zu fordern:

$$\frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + y' \frac{y}{x}} = \operatorname{tg} \mu. \tag{5}$$

Dies ist die Differentialgleichung des Problems. Sie wird durch die Einführung der Polarkoordinaten bedeutend vereinfacht, denn dann geht sie nach (4) über in:

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \operatorname{tg} \mu \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho'}{\varrho} = \operatorname{ctg} \mu,$$

was nach (4) in Nr. 206 vorauszusehen war. In der neuen Form der Differentialgleichung, die auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \operatorname{ctg} \mu \cdot d\omega,$$

sind die Veränderlichen ϱ und ω getrennt. Also ergibt sich durch Quadratur:

$$\ln \varrho = \omega \operatorname{ctg} \mu + \text{konst.}$$

oder

$$\varrho = C e^{\omega \operatorname{ctg} \mu}.$$

Die gesuchten Kurven sind demnach *logarithmische Spiralen*, was nach Nr. 247 vorauszusehen war. Es ist auch:

$$\varrho^2 e^{-2\omega \operatorname{ctg} \mu} = C^2$$

ein Integral. Werden wieder x und y eingeführt, so folgt, daß

$$(x^2 + y^2)\, e^{-2 \operatorname{ctg} \mu \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}} = C^2$$

ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung (5) ist. —

Oben wurde die *allgemeinste* Art der Einführung neuer Veränderlicher $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ statt x und y besprochen. Sehr oft ist es zweckmäßig, nur statt y eine neue Funktion einzuführen und die unabhängige Veränderliche x beizubehalten. In einem solchen Falle sei die neue Funktion z genannt. Sie soll vermöge einer Annahme:

$$(6) \qquad y = Y(x, z)$$

eingeführt werden. Alsdann ist mit y auch z eine Funktion von x, so daß vollständige Differentiation nach x liefert:

$$y' = Y_x + Y_z z',$$

demnach die Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ übergeht in:

$$(7) \qquad F(x,\ Y(x, z),\quad Y_x + Y_z z') = 0,$$

nämlich in eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion z von x.

Ein anderer spezieller Fall ist der, durch den ein Wechsel zwischen den Rollen herbeigeführt wird, die x und y spielen. Wird nämlich gesetzt:

$$(8) \qquad x = \mathfrak{y}, \quad y = \mathfrak{x},$$

so kommt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{y}} = \frac{1}{\mathfrak{y}'},$$

so daß die Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ übergeht in:

$$(9) \qquad F\left(\mathfrak{y},\ \mathfrak{x},\ \frac{1}{\mathfrak{y}'}\right) = 0.$$

Nach (8) bedeutet dies diejenige Differentialgleichung, in die sich die vorgelegte verwandelt, wenn nicht x, sondern y als die unabhängige Veränderliche und dementsprechend nicht y, sondern x als die gesuchte Funktion aufgefaßt wird.

Die Einführung neuer Veränderlicher entspricht der Substitutionsmethode bei der Berechnung von Quadraturen (vgl. Nr. 417). Im zweiten Bande kamen öfters Quadraturen vor, die erst nach und nach, d. h. nach Ausführung einer Anzahl von einzelnen Substitutionen, auf eine berechenbare Form gebracht wurden. Entsprechendes gilt auch hier: Da man bei einer vorgelegten Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ von vornherein nicht weiß, welche Substitutionen neuer Veränderlicher zweckmäßig sind, wird man schrittweise vorgehen und bei jedem einzelnen Schritte nur möglichst einfach gebaute Substitutionen anwenden. Alsdann kann man sich nach jedem einzelnen Schritte überlegen, ob ein Fortschritt erzielt wurde oder nicht.

In den folgenden Nummern werden wiederholt verhältnismäßig einfache Substitutionen neuer Veränderlicher angewandt werden.

715. Homogene Differentialgleichungen. Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ heißt *homogen*, wenn $f(x, y)$ eine homogene Funktion *nullten* Grades von x und y, d. h. nach Nr. 91 eine Funktion von $y : x$ allein ist:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

Hier empfiehlt es sich, $y : x$ als neue unbekannte Funktion z einzuführen, also zu setzen:

$$y = xz, \qquad y' = z + xz', \tag{2}$$

wodurch (1) übergeht in:

$$z + xz' = f(z) \qquad \text{oder} \qquad xz' = f(z) - z.$$

Denn wenn man z' wieder mit $dz : dx$ bezeichnet, so sieht man daß die Veränderlichen x und z in der neuen Differentialgleichung in der Form:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z - f(z)} = 0$$

getrennt sind (vgl. Nr. 713). Durch Quadratur ergibt sich somit das Integral:

(3) $$\ln x + \int \frac{dz}{z - f(z)} = C.$$

Ist die Quadratur erledigt worden, so führt man nachträglich wieder $z = y : x$ ein. Dann geht ein Integral der vorgelegten homogenen Differentialgleichung (1) hervor.

Die Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ heißt *homogen*, sobald sie eine Auflösung von der Form (1) zuläßt. Dies ist der Fall, wenn F hinsichtlich x und y eine homogene Funktion von irgend einem Grade m ist. Denn dann läßt sich die Gleichung nach Nr. 91 in der Form:

$$x^m F\left(1, \frac{y}{x}, y'\right) = 0$$

schreiben, und der Faktor x^m kann gestrichen werden.

Beispiel: Bei welchen Kurven in der Ebene ist jeder Kurvenpunkt gerade so weit wie der Schnittpunkt seiner Tangente mit der y-Achse vom Anfangspunkte entfernt? Weil $y - xy'$ die Ordinate des Schnittpunktes der Tangente des Kurvenpunktes (x, y) mit der y-Achse ist, besteht die Forderung in der Differentialgleichung:

(4) $$(y - xy')^2 - (x^2 + y^2) = 0,$$

deren linke Seite vom zweiten Grade homogen in x und y ist. Die Substitution (2) gibt die Gleichung:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = 0,$$

wobei die Wurzel positiv oder negativ sein kann. Da jetzt die Veränderlichen getrennt sind, ergibt sich durch Quadratur (mit Rücksicht auf Nr. 461) das Integral:

$$\ln x - \ln\left[\pm\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right)\right] = \text{konst.}$$

Man sieht aber, daß hieraus, wie auch das Vorzeichen des zweiten Numerus gewählt sein mag, stets folgt:

$$\frac{x}{z + \sqrt{1 + z^2}} = C,$$

wo C eine Konstante bedeutet. Wird die Wurzel durch geeignetes Quadrieren entfernt und wieder $z = y : x$ sustituiert so nimmt die allgemeine Lösung die Gestalt an:

$$y = \frac{x^2 - C^2}{2C},$$

so daß sich diejenigen *Parabeln* ergeben, die den Anfangspunkt zum Brennpunkte und die y-Achse zur Achse haben. Die Ableitung der linken Seite von (4) nach y' ist gleich Null für $x = 0$ und für $y = xy'$. Daraus folgt nach Nr. 708: Die singulären Linienelemente sind alle diejenigen, deren Punkte auf der y-Achse liegen. Mithin ist die y-Achse die einzige singuläre Integralkurve. Aber auch jeder einzelne Punkt der y-Achse kann, da *alle* von ihm ausgehenden Linienelemente singulär sind, als eine Lösung der Aufgabe bezeichnet werden, wenn man ihn als Grenzform einer Kurve betrachtet (vgl. Nr. 685). Alle Geraden durch den Punkt hat man nämlich dann als die Tangenten aufzufassen, und sie erfüllen die in der Aufgabe gestellte Bedingung, weil für sie der Berührungspunkt und der Schnittpunkt mit der y-Achse zusammenfallen.

716. Lineare Differentialgleichungen. Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung heißt *linear*, wenn sie die Ableitung y' der gesuchten Funktion y als eine ganze lineare Funktion von y definiert, deren Koeffizienten noch von x abhängen können:

$$y' = f_0(x)\, y + f_1(x). \tag{1}$$

Zwischen ihr und einer anderen Differentialgleichung besteht, wie wir nachher sehen werden, eine wichtige Beziehung. Wenn man nämlich das Glied $f_1(x)$ streicht, so geht die *zugehörige verkürzte lineare Differentialgleichung* hervor:

$$y' = f_0(x)\, y. \tag{2}$$

Natürlich sind ihre Lösungen y andere als die der Gleichung (1). Zunächst wollen wir die verkürzte Gleichung (2) betrachten.

Sie ist in der Form:

$$\frac{dy}{y} = f_0(x)\, dx,$$

weil die Veränderlichen hier getrennt sind, durch Quadratur integrierbar:

$$\ln y = \int_a^x f_0(x)\, dx + \text{konst.} \tag{3}$$

Wenn die Quadratur auf der rechten Seite von einer *bestimmt* gewählten unteren Grenze a an ausgeführt wird, so stellt:

(4) $$u = e^{\int\limits_a^x f_0(x)\,dx}$$

eine Partikularlösung von (2) vor, und die Gleichung (3) oder:

$$y = Ce^{\int\limits_a^x f_0(x)\,dx} = Cu$$

lehrt: Die allgemeine Lösung der verkürzten linearen Differentialgleichung (2) ist gleich irgend einer ihrer Partikularlösungen, multipliziert mit einer willkürlichen Konstante C.

Dies ist eine Eigenschaft, die nur den verkürzten linearen Differentialgleichungen zukommt. Soll nämlich eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung $y' = f(x, y)$ eine allgemeine Lösung von der Form $y = Cu(x)$ haben, wo C die Integrationskonstante bedeutet, die in $u(x)$ nicht auftritt, so geht die Differentialgleichung durch Elimination von C aus:

$$y = Cu(x) \quad \text{und} \quad y' = Cu'(x)$$

hervor in der Form:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Wird nun $u'(x) : u(x)$ mit $f_0(x)$ bezeichnet, so ergibt sich $y' = f_0(x)y$ wie in (2). Demnach gilt der

Satz 9: Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ist dann und nur dann eine verkürzte lineare, wenn ihre allgemeine Lösung aus einer Partikularlösung durch Multiplikation mit einer willkürlichen Konstante hervorgeht.

Wir wenden uns nun zur *allgemeinen* linearen Differentialgleichung (1). Wir behaupten, daß sie integriert werden kann, sobald man eine Partikularlösung $u(x)$ der zugehörigen verkürzten linearen Differentialgleichung (2) kennt. Wenn nämlich eine Funktion $u(x)$ bekannt ist, die der Bedingung:

(5) $$u'(x) = f_0(x)\,u(x)$$

genügt, so werde in (1) die neue unbekannte Funktion z vermöge der Substitution:

(6) $$y = u(x)\,z, \qquad y' = u'(x)\,z + u(x)\,z'$$

eingeführt, wodurch sie übergeht in:

$$u'(x)z + u(x)z' = f_0(x)u(x)z + f_1(x).$$

Diese Gleichung aber wird wegen (5) *frei von den Gliedern, die mit z behaftet sind*, so daß bleibt:

$$z' = \frac{f_1(x)}{u(x)}.$$

Eine Quadratur gibt demnach:

$$z = \int_b^x \frac{f_1(x)}{u(x)}\,dx + C,$$

wobei die untere Grenze b *bestimmt* gewählt werden darf, oder nach Multiplikation mit $u(x)$ wegen (6):

$$(7)\qquad y = u(x)\left\{\int_b^x \frac{f_1(x)}{u(x)}\,dx + C\right\}.$$

Dies also ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1). Da $u(x)$ die Form (4) hat, kann die allgemeine Lösung von (1) auch so geschrieben werden:

$$(8)\qquad y = e^{\int\limits_a^x f_0(x)\,dx}\left\{\int_b^x f_1(x)\,e^{-\int\limits_a^x f_0(x)\,dx}\,dx + C\right\}.$$

Es ist einerlei, ob die Grenze b bestimmt und C willkürlich gelassen, oder ob b willkürlich gelassen und C etwa gleich Null gesetzt wird. Deshalb läßt sich die allgemeine Lösung von (1) auch so schreiben:

$$(9)\qquad y = e^{\int\limits_a^x f_0(x)\,dx}\cdot\int_c^x f_1(x)\,e^{-\int\limits_a^x f_0(x)\,dx}\,dx.$$

Hier ist a eine zwar beliebig, aber bestimmt wählbare Grenze, dagegen c die willkürlich bleibende Integrationskonstante.

Für die praktische Anwendung ist es jedoch *vorteilhafter, sich statt der umständlichen Endformel nur die Methode zur Integration der allgemeinen linearen Differentialgleichung zu merken.* Sie besteht, kurz zusammengefaßt, in folgendem:

Es wird $y = uz$ substituiert und dadurch z als neue unbekannte Funktion eingeführt, während die passende Wahl der Funktion u von x vorbehalten bleibt. Dann geht (1) über in:

$$(10) \qquad u'z + uz' = f_0(x)\,uz + f_1(x).$$

Man wählt nun u so, daß sich die mit z behafteten Glieder fortheben, d. h. man unterwirft u der Bedingung:

$$u' = f_0(x)\,u,$$

aus der sofort:

$$\frac{d \ln u}{dx} = f_0(x), \qquad \text{also} \qquad u = e^{\int\limits_a^x f_0(x)\,dx}$$

folgt, wobei a *bestimmt* gewählt werden darf. Nunmehr ist von (10) übriggeblieben:

$$uz' = f_1(x), \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{f_1(x)}{u},$$

woraus sich z durch Quadratur mit *willkürlich* gelassener unterer Grenze ergibt. Multiplikation von z mit u liefert schließlich die gesuchte allgemeine Lösung y der vorgelegten linearen Differentialgleichung (1).

Da die Differentialgleichung:

$$(11) \qquad F_0(x) + F_1(x)\,y + F_2(x)\,y' = 0$$

durch Division mit $F_2(x)$ auf die Form (1) gebracht werden kann, gehört sie zu den linearen und ist ebenso zu behandeln.

Beispiel: Die lineare Differentialgleichung:

$$(1 + x^2)\,y' - xy = 1$$

geht vermöge der Substitution $y = uz$ über in:

$$(1 + x^2)(u'z + uz') - xuz = 1.$$

Nullsetzen des Koeffizienten von z gibt:

$$(1 + x^2)\,u' - xu = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{d \ln u}{dx} = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Also darf $\ln u$ gleich $\ln \sqrt{1 + x^2}$, d. h. $u = \sqrt{1 + x^2}$ gewählt werden. Nunmehr ist noch zu integrieren:

$$(1 + x^2)\,uz' = 1 \qquad \text{oder} \qquad z' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}^{\,3}}.$$

Hieraus folgt:

$$z = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Multiplikation mit $u = \sqrt{1+x^2}$ gibt die gesuchte allgemeine Lösung:

$$y = x + C\sqrt{1+x^2}.$$

Die Form (8) der allgemeinen Lösung der linearen Differentialgleichung (1) zeigt, daß die Lösung eine ganze lineare Funktion der Integrationskonstante C ist. Dies ist eine für die linearen Differentialgleichungen charakteristische Eigenschaft. Denn wenn die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ eine allgemeine Lösung von der Form:

(12) $$y = C\varphi(x) + \psi(x)$$

mit der Integrationskonstante C hat, geht die Differentialgleichung selbst durch Elimination von C aus dieser Gleichung und der Gleichung

$$y' = C\varphi'(x) + \psi'(x)$$

in der Form:

$$\begin{vmatrix} y - \psi(x) & \varphi(x) \\ y' - \psi'(x) & \varphi'(x) \end{vmatrix} = 0$$

hervor. Diese Gleichung ordnet sich aber der allgemeinen Gleichung (11) unter. Somit gilt der

Satz 10: Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ist dann und nur dann linear, wenn ihre allgemeine Lösung als eine Funktion dargestellt werden kann, die hinsichtlich der Integrationskonstante ganz und linear ist.

Es muß nämlich beachtet werden, daß es leicht ist, die allgemeine Lösung auf eine Form zu bringen, in der sie nicht mehr eine ganze lineare Funktion der Integrationskonstante vorstellt. Denn in (12) läßt sich ja eine neue Integrationskonstante c vermöge einer Substitution $C = \chi(c)$ einführen (vgl. Nr. 706).

717. Differentialgleichungen, die auf lineare zurückgeführt werden können. Hierher gehören zunächst die *Bernoullischen Differentialgleichungen,* nämlich die von der Form:

(1) $$y' = f_0(x)y + f_1(x)y^n,$$

worin n eine Konstante bedeutet, die von Null und Eins verschieden angenommen werden kann, denn im Falle $n = 0$ wäre die Gleichung eine *lineare* und im Falle $n = 1$ eine verkürzte lineare. Wird eine neue unbekannte Funktion z mittels der Substitution:

$$(2) \qquad y = z^{-\frac{1}{n-1}}, \quad y' = -\frac{1}{n-1} z^{-\frac{n}{n-1}} z'$$

eingeführt, so geht die *lineare* Differentialgleichung für z hervor:

$$z' = (1-n) f_0(x) z + (1-n) f_1(x).$$

Ferner gehören hierher die *verallgemeinerten homogenen Differentialgleichungen*, nämlich diejenigen von der Form:

$$(3) \qquad \varphi(x, y)(xy' - y) + \chi(x, y) y' + \psi(x, y) = 0,$$

deren linke Seiten also ganze lineare Funktionen von $xy' - y$ und y' sind, während die Koeffizienten φ, χ, ψ solche Funktionen von x und y sein sollen, *deren Verhältnisse homogene Funktionen von gleichem Grade sind.* Zunächst gibt die Division mit $\varphi(x, y)$ eine Differentialgleichung von der Form:

$$xy' - y + u(x, y) y' + v(x, y) = 0,$$

worin u und v homogene Funktionen gleichen Grades bedeuten, etwa vom Grade m. Wie in Nr. 715 machen wir die Substitution:

$$(4) \qquad y = xz, \qquad y' = z + xz'.$$

Dabei gehen u und v nach (1) in Nr. 91 über in Funktionen von der Form $x^m \Phi(z)$ und $x^m \Psi(z)$, so daß kommt:

$$z' + x^{m-2} \Phi(z)(z + xz') + x^{m-2} \Psi(z) = 0.$$

Nun werde ein Wechsel in der Bedeutung von x und z eingeführt, d. h. von jetzt an soll z als die unabhängige Veränderliche und x als die unbekannte Funktion von z betrachtet werden, vgl. (8) und (9) in Nr. 714. Zu diesem Zwecke wird z' durch $dz : dx$ ersetzt und die Gleichung nach $dx : dz$ aufgelöst:

$$(5) \qquad \frac{dx}{dz} = -\frac{\Phi}{z\Phi + \Psi} x - \frac{1}{z\Phi + \Psi} x^{2-m}.$$

Da hier Φ und Ψ nur die unabhängige Veränderliche z enthalten, liegt jetzt für die unbekannte Funktion x von z eine

Bernoullische Differentialgleichung vor, deren Integration oben besprochen wurde.

Hat man x als Funktion von z und einer Integrationskonstante C gefunden, so gibt nach (4) die Substitution $z = y : x$ eine Gleichung zwischen x, y und C, deren Auflösung nach y die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung (3) liefert. Nur im Falle, wo $z\Phi + \Psi$ gleich Null ist, versagt diese Methode. Man erkennt leicht, daß die vorgelegte Differentialgleichung (3) alsdann auf die einfache Form $xy' - y = 0$ zurückkommt, deren allgemeine Lösung $y = Cx$ ist.

718. Allgemeine Riccatische Differentialgleichungen. Um die Sätze 9 und 10 von Nr. 716 zu verallgemeinern, suchen wir die Form derjenigen gewöhnlichen Differentialgleichungen, die eine allgemeine Lösung von der Gestalt haben:

$$(1) \qquad y = \frac{C\varphi_1(x) + \psi_1(x)}{C\varphi_2(x) + \psi_2(x)},$$

d. h. eine allgemeine Lösung, die hinsichtlich der Integrationskonstante C eine *gebrochene lineare* Funktion ist. Ein spezieller und schon durch Satz 10 von Nr. 716 erledigter Fall liegt vor, wenn diese Funktion *ganz* ist.

Statt (1) kann man schreiben:

$$[y\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, C + y\psi_2(x) - \psi_1(x) = 0,$$

und hieraus geht durch vollständige Differentiation nach x hervor:

$$[y'\varphi_2 + y\varphi_2' - \varphi_1']\, C + y'\psi_2 + y\psi_2' - \psi_1' = 0.$$

Elimination von C aus den beiden letzten Gleichungen gibt diejenige Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} y\varphi_2 - \varphi_1 & y\psi_2 - \psi_1 \\ y'\varphi_2 + y\varphi_2' - \varphi_1' & y'\psi_2 + y\psi_2' - \psi_1' \end{vmatrix} = 0,$$

deren allgemeine Lösung durch (1) dargestellt wird. Multipliziert man die Determinante aus, so heben sich die Glieder mit yy' fort, und es ergibt sich eine Differentialgleichung, die sich der folgenden Form unterordnet:

$$(2) \qquad y' = f_0(x)y^2 + 2f_1(x)y + f_2(x).$$

Jede Differentialgleichung von dieser Form heißt eine *Riccatische.*

Man kann nun umgekehrt nachweisen, daß ihre allgemeine Lösung stets, wie auch die Funktionen $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ gewählt sein mögen, auf die Form (1) gebracht werden kann. Mit diesem Nachweise verbinden wir zugleich die Methode, mittels derer die Riccatische Gleichung (2) integriert werden kann, *vorausgesetzt, daß irgend eine ihrer Partikularlösungen schon bekannt ist.*

Es sei nämlich $u(x)$ eine schon bekannte Funktion von x, die der Riccatischen Differentialgleichung (2) genügt, d. h. es sei:

$$u' = f_0(x)u^2 + 2\,f_1(x)\,u + f_2(x). \tag{3}$$

Wird nun in (2) vermöge $y - u = z$ oder:

$$y = u + z, \qquad y' = u' + z' \tag{4}$$

die neue unbekannte Funktion z eingeführt, so kommt:

$$u' + z' = f_0(x)\,(u^2 + 2\,uz + z^2) + 2\,f_1(x)\,(u + z) + f_2(x).$$

Da u' den Wert (3) hat, verbleibt nur:

$$z' = f_0(x)z^2 + 2[f_0(x)\,u(x) + f_1(x)]\,z. \tag{5}$$

Dies ist wieder eine Riccatische Differentialgleichung für z, aber von spezieller Form: Es fehlt rechts das von z freie Glied. Außerdem ist dies aber auch eine Bernoullische Differentialgleichung, vgl. (1) in Nr. 717, worin jetzt $n = 2$ angenommen werden muß. Entsprechend der dort unter (2) gemachten Substitution führen wir demnach eine neue unbekannte Funktion Z statt z ein vermöge:

$$z = Z^{-1}, \qquad z' = -\,Z^{-2}\,Z', \tag{6}$$

wodurch (5) übergeht in:

$$Z' = -\,f_0(x) - 2\,[f_0(x)\,u(x) + f_1(x)]\,Z. \tag{7}$$

Hier liegt nun eine *lineare* Differentialgleichung für Z vor, die wir nach Nr. 716 zu integrieren vermögen.

Nach Satz 10 in Nr. 716 läßt sich die allgemeine Lösung der Gleichung (7) auf die Form einer Funktion bringen, die hinsichtlich der Integrationskonstante C ganz und linear ist. Wenn also etwa:

$$Z = C\varphi(x) + \psi(x)$$

die allgemeine Lösung von (7) vorstellt, so folgt, da nach (4) und (6):

$$y = u + \frac{1}{Z} \tag{8}$$

ist, daß die allgemeine Lösung der Riccatischen Gleichung (2) die Form erhält:

$$y = u(x) + \frac{1}{C\varphi(x) + \psi(x)}$$

oder:

$$y = \frac{Cu(x)\,\varphi(x) + u(x)\,\psi(x) + 1}{C\varphi(x) + \psi(x)}.$$

Dies aber ist eine gebrochene lineare Funktion von C.

Mit Rücksicht auf Satz 10 von Nr. 716 läßt sich somit der Satz aussprechen:

Satz 11: Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung kann dann und nur dann auf die Form einer Funktion gebracht werden, die hinsichtlich der Integrationskonstante C linear ist:

$$y = \frac{C\varphi_1(x) + \psi_1(x)}{C\varphi_2(x) + \psi_2(x)},$$

wenn die Differentialgleichung eine Riccatische ist, d. h. die Form hat:

$$y' = f_0(x)y^2 + 2\,f_1(x)y + f_2(x).$$

Die in Rede stehende lineare Funktion ist insbesondere dann und nur dann eine ganze lineare Funktion von C, wenn die Differentialgleichung linear ist, d. h. wenn $f_0(x)$ verschwindet.

Zugleich haben wir erkannt, daß und wie die Riccatische Differentialgleichung *integriert werden kann, sobald eine Partikularlösung von ihr bekannt ist.*

Beispiel: Die Differentialgleichung:

$$y' = (y - k)(Py + Q),$$

in der P und Q Funktionen von x sein sollen und k eine Konstante bedeute, ist eine Riccatische. Man sieht sofort, daß die Konstante $y = k$ selbst eine Lösung ist, denn für sie ist $y' = 0$. Folglich läßt sich die vorliegende Gleichung allgemein integrieren. In der Substitutionsformel (8) ist $u = k$ zu setzen, d. h. wir führen die neue unbekannte Funktion Z vermöge:

$$y = k + \frac{1}{Z}, \quad y' = -\frac{Z'}{Z^2}$$

ein und erhalten die für Z lineare Differentialgleichung:

$$Z' = -P - (Pk + Q)Z,$$

deren allgemeine Lösung nach (1) und (9) in Nr. 716 sofort mittels Quadraturen gefunden wird. Man findet aus ihr schließlich als allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichuug:

$$y = k - \frac{e^{\int\limits_a^x (Pk+Q)\,dx}}{\int\limits_c^x P e^{\int\limits_a^x (Pk+Q)\,dx}\, dx}.$$

Hier ist a bestimmt wählbar und c die willkürliche Integrationskonstante.

719. Die spezielle Riccatische Differentialgleichung. Darunter versteht man die von *Riccati* selbst untersuchte Differentialgleichung:

$$y' + ay^2 = bx^m, \tag{1}$$

in der a, b und m Konstanten bedeuten. Man bemerkt, daß sich diese Gleichung der allgemeinen Form (2) in voriger Nummer unterordnet, indem hier $f_0 = -a$, $f_1 = 0$ und $f_2 = bx^m$ ist. Da keine Partikularlösung der Gleichung (1) bekannt ist, kann die in der letzten Nummer entwickelte Integrationsmethode nicht benutzt werden.

Im Falle $a = 0$ ist die Integration allerdings sofort zu leisten, ebenso wenn $a \neq 0$ und $m = 0$ ist, denn in diesem Falle liegt die Gleichung vor:

$$y' + ay^2 = b, \tag{2}$$

in der sich die Veränderlichen in der Form:

$$\frac{dy}{y^2 - \frac{b}{a}} + a\,dx = 0$$

trennen lassen. Ist $b : a > 0$, etwa $b = ak^2$, so kommt:

$$\int \frac{dy}{(y-k)(y+k)} + ax = \text{konst.}$$

oder, wenn die Quadratur ausgeführt, die Integrationskonstante mit aC bezeichnet und die Gleichung nach y aufgelöst wird:

(3) $$y = k\,\frac{e^{ka(x-C)} + e^{-ka(x-C)}}{e^{ka(x-C)} - e^{-ka(x-C)}}.$$

Ist dagegen $b : a < 0$, etwa $b = -ak^2$, so kommt:

$$\int \frac{dy}{y^2 + k^2} + ax = \text{konst.},$$

woraus ebenso folgt:

(4) $$y = -k\,\mathrm{tg}\,[ka(x - C)].$$

Wenn endlich $b = 0$ ist, ergibt sich noch einfacher:

$$y = \frac{1}{a(x - C)}.$$

Die spezielle Riccatische Gleichung (1) ist aber noch in gewissen anderen Fällen mittels Exponentialfunktionen oder goniometrischer Funktionen integrierbar, und zwar gelingt dies dadurch, daß man in diesen anderen Fällen die Gleichung (1) durch geeignete Substitutionen auf die soeben besprochene besondere Form (2) bringt.

Es seien nämlich unter u und v Funktionen von x verstanden, deren geeignete Wahl noch vorbehalten bleibt. Vermöge

$$y = uz + v, \quad y' = uz' + u'z + v'$$

werde die neue unbekannte Funktion z in (1) eingeführt:

$$uz' + (u' + 2auv)z + au^2z^2 + (v' + av^2 - bx^m) = 0.$$

Insbesondere lassen sich u und v so wählen, daß:

$$v' + av^2 = 0, \quad u' + 2auv = 0$$

wird; denn die erste Bedingung ist bei der Annahme $v = 1 : ax$ erfüllt und infolge davon die zweite bei der Annahme $u = 1 : x^2$. Also soll in (1) die Substitution gemacht werden:

(5) $$y = \frac{z}{x^2} + \frac{1}{ax},$$

wodurch hervorgeht:

(6) $$z' + a\,\frac{z^2}{x^2} - bx^{m+2} = 0.$$

Insbesondere im Falle $m = -2$ ist dies eine homogene Differentialgleichung für z, die also nach Nr. 715 durch eine Quadratur integriert werden kann. Ist dagegen $m \neq -2$, so liegt eine Differentialgleichung für z vor, die zwar nicht mehr die Form der speziellen Riccatischen Gleichung hat, jedoch durch eine geeignete neue Substitution wieder auf diese Form gebracht werden kann. Einerseits werde als neue unabhängige Veränderliche x_1 die Potenz x^{m+3} und anderseits als neue unbekannte Funktion y_1 der reziproke Wert von z eingeführt, d. h. es werde gesetzt:

$$(7) \qquad x = x_1^{\frac{1}{m+3}}, \quad z = \frac{1}{y_1}.$$

Dabei ist:

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{-\frac{1}{y_1^2}\, dy_1}{\frac{1}{m+3}\, x_1^{-\frac{m+2}{m+3}}\, dx_1} = -(m+3)\frac{x_1^{\frac{m+2}{m+3}}}{y_1^2}\,\frac{dy_1}{dx_1},$$

so daß aus (6) hervorgeht:

$$(8) \qquad \frac{dy_1}{dx_1} + \frac{b}{m+3}\, y_1^2 = \frac{a}{m+3}\, x_1^{-\frac{m+4}{m+3}}.$$

Dies ist wieder eine spezielle Riccatische Gleichung von der Form (1). Fassen wir die beiden Substitutionen (5) und (7) zusammen, so folgt:

Wird in die spezielle Riccatische Gleichung (1) *eine neue unabhängige Veränderliche x_1 und eine neue unbekannte Funktion y_1 vermöge:*

$$(9) \qquad x = x_1^{\frac{1}{m+3}}, \quad y = \frac{1}{x^2 y_1} + \frac{1}{ax}$$

eingeführt, so geht wieder eine spezielle Riccatische Gleichung:

$$(10) \qquad \frac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x_1^{m_1}$$

hervor, und zwar haben hier die drei Konstanten die Werte:

$$(11) \qquad a_1 = \frac{b}{m+3}, \quad b_1 = \frac{a}{m+3}, \quad m_1 = -\frac{m+4}{m+3}.$$

Dies Verfahren ist wiederholt anwendbar, d. h. weiterhin setzen wir entsprechend (9):

$$x_1 = x_2^{\frac{1}{m_1+3}}, \quad y_1 = \frac{1}{x_1^2 y_2} + \frac{1}{a_1 x_1}$$

und führen dadurch x_2 und y_2 ein, usw. Nach insgesamt k Anwendungen desselben Verfahrens geht eine spezielle Riccatische Gleichung:

(12) $$\frac{dy_k}{dx_k} + a_k y_k^2 = b_k x_k^{m_k}$$

hervor, und zwar gelten dabei nach der letzten Gleichung (11) die Rekursionsformeln:

$$m_1 = -\frac{m+4}{m+3}, \quad m_2 = -\frac{m_1+4}{m_1+3}, \cdots m_k = -\frac{m_{k-1}+4}{m_{k-1}+3},$$

woraus man leicht findet:

(13) $$m_k = -\frac{(2k-1)m+4k}{km+(2k+1)}.$$

Da nun die spezielle Riccatische Gleichung (1) im Falle $m = 0$ integriert werden kann, so folgt: Die k-malige Anwendung des Verfahrens führt zu einer mittels Exponentialfunktionen oder goniometrischer Funktionen integrierbaren Gleichung, wenn $m_k = 0$ wird, d. h. *wenn die Zahl* m *die Form hat:*

(14) $$m = \frac{4k}{1-2k},$$

wo k *eine ganze Zahl bedeutet.* Daß hier k auch eine *negative* ganze Zahl sein darf, folgt daraus, daß das angewandte Verfahren auch umgekehrt werden kann: Wenn nämlich x, y, a, b und m mit x_1, y_1, a_1, b_1 und m_1 vertauscht werden, so folgt aus (9) und (11):

(15) $$x = x_1^{-\frac{1}{m+1}}, \quad y = \frac{b}{x_1(bx_1y_1+m+1)},$$

und vermöge dieser Substitution geht die spezielle Riccatische Gleichung (1) in die Gleichung (10) über, wobei aber jetzt statt (11) die Formeln gelten:

(16) $$a_1 = -\frac{b}{m+1}, \quad b_1 = -\frac{a}{m+1}, \quad m_1 = -\frac{3m+4}{m+1}.$$

Hier geht statt (13) bei k-maliger Anwendung des Verfahrens

$$m_k = -\frac{(2k+1)m+4k}{km+(2k-1)}$$

hervor, so daß $m_k = 0$ für $m = -4k:(1+2k)$ wird. Dieser Wert ergibt sich aber aus (14), wenn darin k durch $-k$ ersetzt wird.

720. Clairautsche Differentialgleichungen. So heißen Differentialgleichungen, die eine Beziehung zwischen $y - xy'$ und y' allein ausdrücken. Sie lauten in der nach $y - xy'$ aufgelösten Form:

(1) $$y - xy' = f(y') \quad \text{oder:} \quad y = xy' + f(y').$$

Die Differentialgleichung (1) ordnet einem Punkte M_0 oder (x_0, y_0) ein Linienelement (x_0, y_0, y_0') zu, für das:

(2) $$y_0 = x_0 y_0' + f(y_0')$$

ist. Dies Element liegt auf der Geraden:

(3) $$y - y_0 = y_0'(x - x_0),$$

geschrieben in den laufenden Koordinaten x, y. Wegen (2) läßt sich diese Gleichung so schreiben:

(4) $$y - y_0' x = f(y_0').$$

Ist nun M oder (x, y) irgend ein Punkt der Geraden, so gehört auch ihm vermöge der Differentialgleichung (1) ein Linienelement (x, y, y') zu. Die Vergleichung von (1) und (4) lehrt aber, daß die Gleichung (1) durch den Wert $y' = y_0'$ befriedigt wird, d. h. die Differentialgleichung ordnet *jedem* Punkte M der Geraden (3) ein Linienelement zu, das auf derselben Geraden liegt (siehe Fig. 22). Mithin ist *die Gerade* (3) *oder* (4) *eine Integralkurve.*

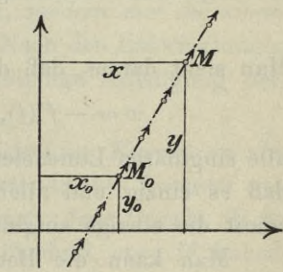

Fig. 22.

Wir können aber auch rein analytisch bestätigen, *daß die Clairautsche Differentialgleichung lauter Geraden zu regulären Integralkurven hat.* Denn die ganze lineare Funktion:

$$y = Cx + a$$

hat die Ableitung $y' = C$. Einsetzen beider Werte in (1) gibt nun einfach $a = f(C)$. Demnach ist die ganze lineare Funktion:

(5) $$y = Cx + f(C)$$

für jeden Wert der Konstante C eine Lösung.

Vergleichung von (1) und (5) lehrt, daß sich die Clairautsche Differentialgleichung (1) sofort in ihre allgemeine Lösung (5) umwandelt, *wenn man die Ableitung y' durch die Integrationskonstante C ersetzt.*

Die Geradenschar (5) hat eine Einhüllende. Zu ihrer Bestimmung ist die Gleichung (5) nach C zu differenzieren:

$$0 = x + f'(C) \tag{6}$$

und dann die hieraus folgende Funktion C von x in (5) einzusetzen. Oder auch: Wenn statt C in (5) und (6) eine Veränderliche t geschrieben wird, geht die Darstellung:

$$x = -f'(t), \quad y = f(t) - tf'(t) \tag{7}$$

der Einhüllenden mittels einer Hilfsveränderlichen t hervor. Die Einhüllende ist nach Satz 7, Nr. 710, eine *singuläre* Integralkurve, und man erkennt, daß t den Tangens ihres Tangentenwinkels bedeutet.

Um alle singulären Linienelemente zu bestimmen, bilden wir nach Nr. 708 die durch Differentiation von (1) nach y' hervorgehende Gleichung:

$$x = -f'(y').$$

Man sieht daraus, daß durch:

$$x = -f'(t), \quad y = f(t) - tf'(t), \quad y' = t$$

alle singulären Linienelemente (x, y, y') dargestellt werden und daß es einzig und allein die der Einhüllenden (7) sind, die somit die einzige singuläre Integralkurve ist.

Man kann die Betrachtung umkehren: *Jede gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, die eine Schar von Geraden zu Integralkurven hat, ist eine Clairautsche.* In der Tat wird eine Geradenschar allgemein in der Form:

$$y = Cx + f(C)$$

mit einer willkürlichen Konstante C dargestellt. Hieraus aber folgt $y' = C$, so daß zwischen x, y, y' die Gleichung (1) besteht.

721. Beispiele von Clairautschen Differentialgleichungen. Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, y') = 0$ drückt eine Eigenschaft aus, die den Linienelementen (x, y, y') einer Kurvenschar, der Schar der Integralkurven, zukommt, d. h. eine *Eigenschaft, die den Punkten* (x, y) *der Kurven und ihren Tangenten zukommt.* Insbesondere aber kann diese Eigenschaft von der Lage des Berührungspunktes der Tangente unabhängig, also eine *Eigenschaft der Tangente allein* sein. Da die Gleichung der Tangente des Kurvenpunktes (x, y) in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ lautet:

$$(1) \qquad \mathfrak{y} - y = y'(\mathfrak{x} - x) \quad \text{oder:} \quad \mathfrak{y} = y'\mathfrak{x} + (y - xy'),$$

hängt die Lage der Tangente nur von y' und $y - xy'$ ab. Die in Rede stehende Eigenschaft wird somit durch eine Gleichung zwischen y' und $y - xy'$ allein, also *durch eine Clairautsche Differentialgleichung ausgedrückt.* Von vornherein ist dann klar, daß alle Geraden, denen diese Tangenteneigenschaft zukommt, zu den Kurven mit der vorgeschriebenen Eigenschaft gehören. Sie bieten geringeres Interesse als die krummlinigen Kurven denen die Eigenschaft zukommt. Dies aber sind nach voriger Nummer die Einhüllenden der Geraden.

Aufgaben also, in denen es sich um die Ermittelung von solchen Kurven handelt, deren Tangenten eine von ihren Berührungspunkten unabhängige Eigenschaft haben, bieten das Eigentümliche, daß *nicht die regulären, sondern nur die singulären Lösungen die interessanten sind.* Nach den Entwicklungen der letzten Nummer verlangt die vollständige Erledigung derartiger Aufgaben keinerlei Integration.

1. Beispiel: Gesucht werden diejenigen Kurven in der Ebene, bei denen das Produkt der Abstände der Tangente von zwei festen Punkten F und F' konstant ist. Jede Gerade, deren Abstände von F und F' das gegebene Produkt, etwa b^2, haben, ist eine Lösung der Aufgabe. Die Schar dieser Geraden umhüllt die einzige krummlinige gesuchte Kurve. Obgleich sie ohne die Theorie der Differentialgleichungen nach Nr. 210 gefunden werden kann, soll doch die Clairautsche Differentialgleichung des Problems aufgestellt werden: Das Achsenkreuz sei so gewählt, daß F und F' auf der Abszissenachse liegen und die Abszissen $\pm c$ haben. Die Gleichung der Tangente (1) lautet in der Normalform:

$$\frac{y'\mathfrak{x} - \mathfrak{y} + y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0,$$

so daß die linke Seite für $\mathfrak{x} = \pm c, \mathfrak{y} = 0$ die Abstände von F und F' angibt. Diese Abstände können verschiedene Vorzeichen haben.

Daher setzen wir das Produkt gleich $\pm b^2$. So gehen die beiden Clairautschen Differentialgleichungen des Problems hervor:

$$\frac{(y-xy')^2-c^2y'^2}{1+y'^2}=\pm b^2.$$

Auflösung nach $y-xy'$ gibt, wenn noch $c^2\pm b^2=a^2$ gesetzt wird:

$$y-xy'=\sqrt{a^2y'^2\pm b^2}.$$

Wird y' durch die Integrationskonstante C ersetzt, so geht die allgemeine Lösung:

$$y=Cx+\sqrt{a^2C^2\pm b^2}$$

hervor, die lauter Geraden darstellt. Nach (7) in voriger Nummer geben die Gleichungen:

$$x=\frac{-a^2t}{\sqrt{a^2t^2\pm b^2}},\quad y=\frac{\pm b^2}{\sqrt{a^2t^2\pm b^2}}$$

die singuläre Lösung, und Elimination der Hilfsveränderlichen t zeigt, daß sie eine *Ellipse* oder *Hyperbel:*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

mit den Brennpunkten F und F' ist.

2. *Beispiel: Gesucht werden diejenigen Kurven in der Ebene, von deren Tangenten die Koordinatenachsen eine Strecke von konstanter Länge a abschneiden.* Zunächst ist jede Gerade, von der die Achsen diese Strecke abschneiden, eine triviale Lösung der Aufgabe. Die einzige interessante Lösung ist die Einhüllende dieser Gerade, nämlich nach Nr. 249 die *Astroide:*

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

Die Behandlung der Aufgabe mittels der zugehörigen Clairautschen Differentialgleichung:

$$y-xy'=\frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

sei dem Leser überlassen.

722. Einführung der Ableitung y' als neuer unabhängiger Veränderlicher. Schließlich soll ein Integrationsverfahren besprochen werden, das auf der Idee beruht, die Ableitung y' der gesuchten Funktion y von x als neue unabhängige Veränderliche einzuführen. Wenn nämlich die Integralkurven der vorgelegten Differentialgleichung:

(1) $$F(x, y, y') = 0$$

keine Geraden sind, d. h. die Differentialgleichung *keine* Clairautsche (vgl. Nr. 720) ist, stellt sich eine allgemeine Lösung y als eine solche Funktion von x dar, deren Ableitung y' *nicht* konstant, vielmehr eine Funktion von x ist und daher als unabhängige Veränderliche benutzt werden darf. Es fragt sich nur, wie dies analytisch zu erreichen ist. Zunächst empfiehlt es sich, die Ableitung y' bequemer zu bezeichnen, etwa mit p:

(2) $$\frac{dy}{dx} = p.$$

Die Differentialgleichung (1) hat alsdann die Form:

(3) $$F(x, y, p) = 0,$$

und vollständige Differentiation gibt:

(4) $$F_x dx + F_y dy + F_p dp = 0.$$

Nach (2) ist außerdem:

$$dy = p\,dx.$$

Werden die beiden letzten Gleichungen mit dp dividiert, so gehen zwei lineare Gleichungen für $dx:dp$ und $dy:dp$ hervor, deren Auflösung ergibt:

(5) $$\frac{dx}{dp} = \frac{-F_p}{F_x + pF_y}, \quad \frac{dy}{dp} = \frac{-pF_p}{F_x + pF_y}.$$

Dies sind die Werte, die den Ableitungen von x und y nach y' oder p zukommen.

Die Größe p als unabhängige Veränderliche zu benutzen, empfiehlt sich nun insbesondere dann, wenn die vorgelegte Differentialgleichung (1) in der nach y oder x aufgelösten Form:

$$y = f(y', x) \quad \text{bzw.} \quad x = f(y', y)$$

gegeben ist.

Wenn nämlich die Differentialgleichung:

(6) $$y = f(y', x)$$

vorliegt, ist F gleich $y - f(y', x)$ oder $y - f(p, x)$ zu setzen, sodaß die erste Gleichung (5) liefert:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f_p}{p - f_x}. \tag{7}$$

Rechts treten nur p und x auf, d. h. in (7) liegt *eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die unbekannte Funktion x von p* vor. Wenn $x = \varphi(p, C)$ ihre allgemeine Lösung mit der Integrationskonstante C vorstellt, folgt aus (6) oder $y = f(p, x)$ durch Substitution des Wertes $\varphi(p, C)$ für x auch der Ausdruck von y durch p und C, d. h. man gelangt zu Gleichungen:

$$x = \varphi(p, C), \quad y = \psi(p, C), \tag{8}$$

vermöge derer *die gesuchten Integralkurven mittels der Hilfsveränderlichen p oder y' dargestellt* werden.

Entsprechende Schlüsse lassen sich machen, wenn die vorgelegte Differentialgleichung (1) in der nach x aufgelösten Form gegeben ist:

$$x = f(y', y). \tag{9}$$

Denn dann ist F gleich $x - f(y', y)$ oder $x - f(p, y)$ zu setzen, sodaß die zweite Gleichung (5) liefert:

$$\frac{dy}{dp} = \frac{pf_p}{1 - pf_y}. \tag{10}$$

Hier treten rechts nur p und y auf, d. h. dies ist *eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die unbekannte Funktion y von p.* Läßt sich ihre allgemeine Lösung $y = \psi(p, C)$ finden, so gibt die Substitution dieses Wertes in $x = f(y', y)$ oder $x = f(p, y)$ auch x als Funktion von p und C, sodaß man wieder zu einer Darstellung der gesuchten Integralkurven in der Form (8) gelangt.

Die vorgelegte Differentialgleichung auf eine Differentialgleichung zwischen p und x bzw. zwischen p und y in der Form (7) bzw. (10) zurückzuführen, wird sich natürlich nur dann empfehlen, wenn die neue Differentialgleichung nach einer der früheren Methoden integriert werden kann. Da das Verfahren wesentlich auf der Benutzung der durch Differentiation gewonnenen Gleichung (4) beruht, so bezeichnet man es gelegentlich nicht ganz zutreffend als *Methode der Integration durch Differentiation.*

Weil p oder y' den Tangens des Winkels τ bedeutet, den die Kurventangente mit der positiven x-Achse bildet, so geben die Gleichungen (8) oder:

$$(11) \qquad x = \varphi(\operatorname{tg}\tau, C), \quad y = \psi(\operatorname{tg}\tau, C)$$

eine *Darstellung der Integralkurven mittels des Tangentenwinkels* τ (wie in Nr. 213).

723. Differentialgleichungen, die in beiden Veränderlichen linear sind. Die soeben entwickelte Methode dient insbesondere zur Integration solcher Differentialgleichungen $F(x, y, y') = 0$, bei denen die linke Seite in x und y linear ist:

$$(1) \qquad \varphi(y')x + \chi(y')y + \psi(y') = 0.$$

Da diese Gleichung für jeden bestimmten Wert c von y' eine Gerade der Geradenschar:

$$\varphi(c)x + \chi(c)y + \psi(c) = 0$$

darstellt, sind ihre Integralkurven diejenigen Kurven, die jede einzelne Gerade dieser Schar in einer vorgeschriebenen Richtung durchsetzen. Diese Richtung ist im allgemeinen von Gerade zu Gerade eine andere.

Wenn zunächst $\chi(y') = 0$ ist, ergibt sich eine Differentialgleichung von der Form:

$$(2) \qquad x = f(y') = f(p),$$

und dieser Fall ordnet sich der Gleichung (9) der letzten Nummer unter; insbesondere ist hier $f(p)$ in der dort angegebenen Differentialgleichung (10) zwischen p und y frei von y, sodaß eine Quadratur liefert:

$$(3) \qquad y = \int \frac{pf'}{1 - pf'}\, dp + C.$$

Die Gleichungen (2) und (3) stellen zusammen die regulären Integralkurven dar, ausgedrückt mittels der Hilfsveränderlichen p.

Wenn dagegen $\chi(y')$ in (1) nicht gleich Null ist, läßt sich die Gleichung auf die Form bringen:

$$(4) \qquad y = x\lambda(y') + \mu(y').$$

Sie ordnet sich der Form (6) der letzten Nummer unter, sodaß die dort angegebene Differentialgleichung (7) zwischen p und x hervorgeht. Weil hier $f(p)$ gleich $x\lambda(p) + \mu(p)$ zu setzen ist, kommt:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x\lambda' + \mu'}{p - \lambda},$$

also eine *lineare* Differentialgleichung für die gesuchte Funktion x von p, vgl. (1) in Nr. 716, worin x, y und y' durch p, x und $dx : dp$ sowie f_0 und f_1 durch $\lambda' : (p - \lambda)$ und $\mu' : (p - \lambda)$ zu ersetzen sind, sodaß die dort unter (8) angegebene allgemeine Lösung jetzt lautet:

$$x = e^{\int\limits_a^p \frac{\lambda' dp}{p-\lambda}} \left[\int\limits_b^p \frac{\mu'}{p - \lambda} e^{-\int\limits_a^p \frac{\lambda' dp}{p-\lambda}} dp + C \right]. \tag{5}$$

Wird dieser Wert von x in (4) eingesetzt, so wird auch y als Funktion von p und C gefunden.

Jedoch im Falle, wo sich $\lambda(p)$ auf p selbst reduziert, versagt dies Verfahren, weil $p - \lambda$ in den Nennern der Integranden auftritt. Dies ist nicht überraschend, denn dann ist (4) eine Clairautsche Differentialgleichung (nach Nr. 720), bei der die Methode der letzten Nummer ja überhaupt nicht angewandt werden kann.

Beispiel: Die Differentialgleichung:

$$y - 2xy' - y'^2 = 0 \tag{6}$$

gehört zu denen von der Form (4). Da hier $\lambda = 2p$, $\mu = p^2$ zu setzen ist, ergeben die Quadraturen für $a = 1$ und $b = 0$:

$$\int \frac{\lambda' dp}{p - \lambda} = \int \frac{2\,dp}{-p} = -2 \ln p,$$

$$\int \frac{\mu'}{p - \lambda} e^{-\int \frac{\lambda' dp}{p - \lambda}} dp = \int -2 e^{2 \ln p} dp = \int -2p^2 dp = -\tfrac{2}{3} p^3$$

nach (5) und (6):

$$x = \frac{C}{p^2} - \tfrac{2}{3} p, \quad y = \frac{2C}{p} - \tfrac{1}{3} p^2.$$

Wird $3C$ mit c bezeichnet, so lauten die Gleichungen der Integralkurven:

$$x = \frac{c - 2p^3}{3p^2}, \quad y = \frac{2c - p^3}{3p}. \tag{7}$$

Durch Elimination von p geht die in x und y algebraische Gleichung hervor:

$$3x^2y^2 - 4cx^3 + 4y^3 - 6cxy - c^2 = 0; \tag{8}$$

die Integralkurven sind demnach *algebraische Kurven vierter Ordnung* (nach Nr. 187). Man kann sie auch so darstellen:

$$(3xy + 2x^3 + c)^2 = 4(y + x^2)^3.$$

Die singulären Linienelemente (x, y, y') der Differentialgleichung (6) genügen außer dieser Gleichung (6) noch der durch Differentiation nach y' hervorgehenden; sie gibt $y' = -x$, sodaß durch:

$$y = -x^2, \quad y' = -x$$

alle singulären Elemente dargestellt werden. Sie sind aber *nicht* die Linienelemente der Kurve $y = -x^2$, des Ortes ihrer Punkte, weil $y' = -x$ nicht die Ableitung von $y = -x^2$ ist. Eine singuläre Lösung gibt es also nicht. Der Diskriminantenort $y = -x^2$ ist vielmehr eine Parabel, auf der die singulären Punkte (Spitzen) der Integralkurven (8) liegen. In der Tat: Nach Nr. 191 erfüllen die singulären Punkte (x, y) der Kurven (8) außer der Gleichung (8) noch die beiden aus (8) durch partielle Differentiation nach x bzw. y hervorgehenden Gleichungen:

$$xy^2 - 2cx^2 - cy = 0,$$
$$x^2y + 2y^2 - cx = 0.$$

Alle drei Gleichungen ergeben:

$$x = \sqrt[3]{c}, \quad y = -\sqrt[3]{c^2}. \tag{9}$$

Zu jedem Werte von c gehört eine Integralkurve (8), und sie hat die durch (9) bestimmte Spitze. Der Ort aller Spitzen geht aus (9) in der Form $y = -x^2$

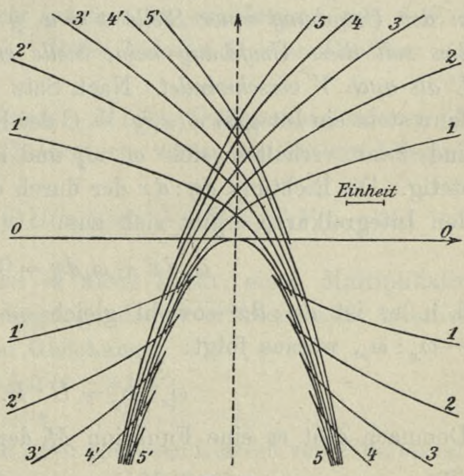

Fig. 23.

hervor und ist demnach, wie zu erwarten war, der Diskriminantenort.

In Fig. 23 sind einige Integralkurven dargestellt, zusammengehörige Zweige tragen die gleiche Nummer. Für $c = 0$ zerfällt die Integralkurve in die doppeltzählende x-Achse und die Parabel $y = -\frac{3}{4}x^2$.

§ 3. Multiplikatoren gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

724. Existenzbeweis für die Multiplikatoren. Wenn die linke Seite der Differentialgleichung:

$$U(x, y)dx + V(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

kein vollständiges Differential ist, kann man die Gleichung doch nach Nr. 713 mittels zweier Quadraturen integrieren, sobald sich ihre linke Seite durch Multiplikation mit einer passend gewählten Funktion M, d. h. mit einem sogenannten *Eulerschen Integrabilitätsfaktor* oder *Multiplikator*, zu einem vollständigen Differential machen läßt. Schon in Nr. 612 wurde die Bedingung für einen Multiplikator aufgestellt. Es soll jetzt noch gezeigt werden, daß es stets Multiplikatoren gibt.

Dabei werde vorausgesetzt, *daß die Funktionen U und V von x und y nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y = b$ stetig seien. Überdies soll diese Umgebung keine Stelle enthalten, an der sowohl U als auch V verschwindet.* Nach Satz 1, Nr. 705, gibt es alsdann stets ein Integral $\omega(x, y) = C$ der Differentialgleichung (1), und zwar verhalten sich ω, ω_x und ω_y in jener Umgebung stetig. Die Richtung $dy : dx$ der durch den Punkt (x, y) gehenden Integralkurve ergibt sich aus:

$$\omega_x dx + \omega_y dy = 0,$$

d. h. es ist $dy : dx$ sowohl gleich $-U : V$ als auch gleich $-\omega_x : \omega_y$, woraus folgt:

$$\omega_x : \omega_y = U : V.$$

Demnach gibt es eine Funktion M derart, daß:

$$\omega_x = MU, \quad \omega_y = MV \tag{2}$$

wird. Mithin geht die linke Seite von (1) durch Multiplikation mit M in das vollständige Differential $d\omega$ über, d. h. M ist ein Multiplikator. Weil $M = \omega_x : U = \omega_y : V$ ist, verhält sich M unter den gemachten Annahmen in der Umgebung der Stelle (a, b) stetig. Mithin gilt der

Satz 12: Liegt die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$U(x, y)dx + V(x, y)dy = 0$$

vor und sind U und V nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in der Umgebung einer Stelle stetige Funktionen von x und y, während U und V an keiner Stelle der Umgebung gleichzeitig verschwinden, so gibt es einen in dieser Umgebung stetigen Multiplikator der Differentialgleichung.

Zu jedem Multiplikator M der Differentialgleichung (1) gehört ein Integral $\omega(x, y)$, nämlich dasjenige, dessen vollständiges Differential $M(Udx + Vdy)$ ist. Jede Funktion von ω stellt nach Satz 3, Nr. 706, wiederum ein Integral vor; umgekehrt ist auch jedes Integral eine Funktion von ω allein. Nach den Sätzen von Nr. 614 ergibt sich daher der

Satz 13: Ist M ein Multiplikator und ω ein Integral der Differentialgleichung $Udx + Vdy = 0$, so ist jede Funktion von der Form $\Omega(\omega) \cdot M$ ebenfalls ein Multiplikator; andererseits hat jeder Multiplikator diese Form. Der Quotient zweier Multiplikatoren stellt, wenn er nicht konstant ist, ein Integral vor, d. h. er ist von der Form $\Omega(\omega)$. Dabei bedeutet Ω eine Funktion von ω allein.

Wenn ein Multiplikator M der Differentialgleichung (1) bekannt ist, liefern zwei Quadraturen wie in Nr. 713 ein Integral:

$$(3) \qquad \omega(x, y) = \int_a^x M(x, y)\, U(x, y)\, dx + \int_b^y M(a, y)\, V(a, y)\, dy.$$

Aber im allgemeinen ist es nicht leicht, einen Multiplikator zu finden, weil die Bedingung, die er erfüllen muß, nämlich nach (3) in Nr. 612 die Gleichung:

$$(4) \qquad \frac{\partial M U}{\partial y} = \frac{\partial M V}{\partial x},$$

keine einfache Gestalt hat. Bei gewissen Klassen von Differentialgleichungen, die schon im vorigen Paragraphen besprochen wurden, gelingt es aber doch. Man kommt so zu anderen Methoden, jene Differentialgleichungen zu integrieren; aber daß man dabei zu denselben Ergebnissen gelangen muß, ist selbstverständlich. Wir führen im folgenden zwei Beispiele vor.

725. Multiplikator einer homogenen Differentialgleichung. Nach Nr. 715 heißt die Differentialgleichung:

$$(1) \qquad U dx + V dy = 0$$

homogen, wenn $U : V$ eine homogene Funktion nullten Grades von $y : x$ ist. Man kann dann durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion immer erreichen, daß *U und V homogene Funktionen gleichen Grades m* werden.

Unter dieser Voraussetzung läßt sich nun leicht ein Multiplikator M finden. Man wird nämlich vermuten, daß ein homogener Multiplikator vorhanden sei. Demnach bedeute M eine homogene Funktion n^{ten} Grades von x und y, sodaß MU homogen vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade wird, also nach Satz 9, Nr. 91, die Gleichung besteht:

$$x \frac{\partial MU}{\partial x} + y \frac{\partial MU}{\partial y} = (m+n) MU.$$

Nach der in voriger Nummer angegebenen Bedingung (4) für einen Multiplikator kann $\partial MU : \partial y$ durch $\partial MV : \partial x$ ersetzt werden, sodaß kommt:

$$x \frac{\partial MU}{\partial x} + y \frac{\partial MV}{\partial x} = (m+n) MU.$$

Die linke Seite wäre nun die partielle Ableitung von $M(Ux + Vy)$, wenn noch der Summand MU aufträte. Demnach addieren wir ihn beiderseits und erhalten:

$$\frac{\partial M(Ux + Vy)}{\partial x} = (m + n + 1) MU.$$

Ebenso kommt:

$$\frac{\partial M(Ux + Vy)}{\partial y} = (m + n + 1) MV.$$

Über den Grad n des gesuchten homogenen Multiplikators steht noch die Verfügung frei. Wird er gleich $-m-1$ gewählt, so lehren beide Gleichungen, daß $M(Ux + Vy)$ konstant sein muß. Da ein konstanter Faktor beim vollständigen Differential $M(U dx + V dy)$ unwesentlich ist, kann er auch beim

Multiplikator bestimmt gewählt werden. Somit schließen wir auf den Multiplikator:

$$M = \frac{1}{Ux + Vy}. \tag{2}$$

In der Tat ist dies eine homogene Funktion vom Grade $-m-1$, und man bestätigt leicht, daß dieser Multiplikator die Bedingung (4) der letzten Nummer erfüllt. *Hiernach ist die linke Seite der Gleichung:*

$$\frac{Udx + Vdy}{Ux + Vy} = 0 \tag{3}$$

ein vollständiges Differential, falls U und V homogene Funktionen gleichen Grades sind. Zwei Quadraturen liefern also das Integral.

Bei dem Verfahren in Nr. 715 wurde $y = xz$ substituiert und dadurch die Trennung der Veränderlichen bewirkt. Das jetzige Verfahren führt zu demselben Ergebnisse, denn dort wurde die Differentialgleichung in der Form:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

angenommen, sodaß, wie die Vergleichung mit (1) lehrt:

$$\frac{U}{V} = -f\left(\frac{y}{x}\right)$$

kommt und die linke Seite von (3) die Form annimmt:

$$\frac{-f\left(\frac{y}{x}\right)dx + dy}{-f\left(\frac{y}{x}\right)x + y}.$$

Sie ist nach wie vor ein vollständiges Differential und bleibt es auch, wenn $y = xz$, d. h. $dy = zdx + xdz$ substituiert wird. Alsdann ergibt sich das vollständige Differential:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z - f(z)}$$

einer Funktion von x und z, so daß man in der Tat zu demselben Integral (3) wie in Nr. 715 gelangt.

Es kann sein, daß die linke Seite der homogenen Differentialgleichung (1) selbst schon ein vollständiges Differential ist. Dies tritt ein, wenn die homogenen Funktionen m^{ten} Grades U und V die Bedingungen

(4) $$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

erfüllen. Alsdann ist außer dem Multiplikator (2) noch der Multiplikator $M = 1$ bekannt. Der Quotient von beiden, also die Funktion $Ux + Vy$, muß nach Satz 13 der letzten Nummer ein Integral sein, falls er keine Konstante ist.

Wenn also die homogene Differentialgleichung (1) *so beschaffen ist, daß die Gleichung* (4) *besteht und* $Ux + Vy$ *nicht konstant wird, so ist* $Ux + Vy$ *ein Integral,* so daß man die vollständige Lösung ohne Integrationsverfahren gewinnt.

Noch ist hinzuzufügen: Wenn die beiden homogenen Funktionen gleichen Grades U und V so beschaffen sind, daß $Ux + Vy$ konstant ist, so liefert (2) den Multiplikator $M =$ konst, d. h. die linke Seite der Differentialgleichung (1) ist in diesem Falle ein vollständiges Differential.

726. Multiplikator einer linearen Differentialgleichung. Die Differentialgleichung:

$$y' = f_0(x)y + f_1(x),$$

vgl. Nr. 716, lautet, als totale Differentialgleichung geschrieben, so:

$$(f_0 y + f_1)dx - dy = 0.$$

Hier ist $U = f_0 y + f_1$ und $V = -1$. Weil $U_y = f_0(x)$ und $V_x = 0$ ist, vermuten wir, daß sich die Bedingung (4) in Nr. 724 für den Multiplikator, die hier die Form hat:

$$\frac{\partial M(f_0 y + f_1)}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0$$

durch eine nur von x abhängige Funktion M erfüllen läßt. In der Tat geht sie für eine solche Funktion über in:

$$Mf_0 + \frac{dM}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d \ln M}{dx} = -f_0,$$

so daß:

$$M = e^{-\int\limits_a^x f_0(x)\,dx}$$

einen Multiplikator vorstellt. Daher ist die linke Seite der Differentialgleichung:

$$e^{-\int\limits_a^x f_0(x)\,dx}\left[(f_0 y + f_1)dx - dy\right] = 0$$

ein vollständiges Differential, nämlich das von:

$$\int\limits_b^x f_1 e^{-\int\limits_a^x f_0 dx} dx - y e^{-\int\limits_a^x f_0 dx}.$$

Wird dies Integral gleich $-C$ gesetzt, so ergibt sich durch Auflösung nach y die in Nr. 716 gefundene allgemeine Lösung (8) der linearen Differentialgleichung.

727. Ermittelung eines Multiplikators aus seiner geometrischen Deutung. Wenn $\omega(x, y) = C$ ein Integral der Differentialgleichung:

$$(1) \qquad U dx + V dy = 0$$

ist, lehrt der Satz 4 von Nr. 613, worin wir f durch ω und $\varDelta\alpha$ als Zuwachs von f durch $\varDelta\omega$ ersetzen wollen, daß der zugehörige Multiplikator M als Grenzwert:

$$(2) \qquad M = \lim_{h=0} \frac{\varDelta\omega}{h\sqrt{U^2 + V^2}}$$

dargestellt werden kann. Hierin bedeutet $\varDelta\omega$ den Zuwachs, den die Funktion $\omega(x, y)$ erfährt, wenn ein Punkt (x, y) einer Integralkurve $\omega = C$ längs ihrer Normale um eine Strecke h bis zu einem Punkte $(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y)$ weiter wandert.

Bei geometrischen Problemen, in denen man aus den Forderungen etwas über den *Abstand* zwischen Integralkurven ermitteln kann, ehe die Kurven selbst bestimmt worden sind, gelingt es zuweilen, mittels dieses Grenzwertes (2) einen Multiplikator ausfindig zu machen. Hierzu ein

Beispiel: Angenommen, es sei (1) die Differentialgleichung einer *Schar von Parallelkurven.* Unter einer solchen Schar wird Folgendes verstanden: Ist k_0 eine Kurve der Schar, so soll jede andere Kurve k der Schar aus ihr dadurch hervorgehen, daß man alle Punkte von k_0 längs der Normalen um ein und dieselbe beliebige Strecke C wandern läßt, siehe Fig. 24. Wenn nun γ die Evolute von k_0 ist, so leuchtet nach Nr. 201 ein, *daß die Parallelkurvenschar aus allen Evolventen ein und derselben Kurve γ besteht.* Weil zu jedem Werte von C eine Kurve k der Schar gehört, so dürfen wir annehmen, daß $\omega(x, y) = C$ die Gleichung der Schar sei. Allerdings ist das Integral $\omega(x, y)$

noch unbekannt. Es sei nun (x, y) ein Punkt einer Kurve k oder $\omega(x, y) = C$, und er wandere längs ihrer Normale um eine Strecke h weiter bis zu einem Punkte $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

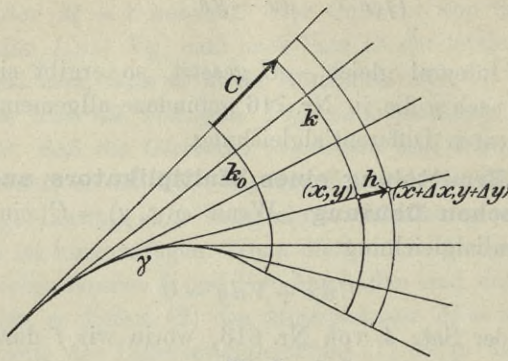

Fig. 24.

Dieser neue Punkt liegt alsdann auf der zu $C + h$ gehörigen Kurve der Schar, was bedeutet, daß ω den Zuwachs $\Delta\omega = h$ erfährt. Die Formel (2) wird somit frei von h und ergibt:

Satz 14: Wenn die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$U(x, y)\,dx + V(x, y)\,dy = 0$$

in der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x und y eine Schar von Parallelkurven definiert, so ist:

$$M = \frac{1}{\sqrt{U^2 + V^2}}$$

ein Multiplikator der Gleichung.

Es ist besonders bemerkenswert, daß sich dies ergeben hat, obgleich die Form der Differentialgleichung selbst noch nicht gefunden ist. Sie läßt sich aber leicht angeben. Denn die Tangenten der Evolute γ müssen nach Nr. 720 die regulären Integralkurven einer Clairautschen Differentialgleichung:

$$y = xy' + f(y')$$

sein. Weil nun die Kurven k alle diese Tangenten senkrecht schneiden, geht ihre Differentialgleichung einfach dadurch hervor, daß man y' durch $-1 : y'$ ersetzt:

$$y = -\frac{x}{y'} + f\left(-\frac{1}{y'}\right).$$

727]

Diese Differentialgleichung hat die allgemeine Form:

$$(3)\qquad F(y', x + yy') = 0.$$

Will man eine Differentialgleichung von dieser Form auf Grund des Satzes 14 integrieren, so muß man sie natürlich zunächst in eine totale Differentialgleichung (1) überführen.

Daß diese Differentialgleichung einer Schar von Parallelkurven durch Quadraturen integrierbar ist, war übrigens vorauszusehen: Denn wenn y' in ihr durch $-1 : y'$ ersetzt wird, ergibt sich diejenige Clairautsche Differentialgleichung, deren Integralkurven die Normalen der Schar sind. Die Einhüllende der Normalen ist nach Nr. 720 ohne jede Quadratur zu bestimmen; sie ist die Evolute γ der gesuchten Kurven. Wenn man ihre Bogenlänge bestimmt hat, was nach Nr. 542 durch eine Quadratur zu erreichen ist, kann man die Evolventen nach Nr. 201 ohne Integration ermitteln.

728. Differentialgleichungen mit Multiplikatoren von gegebener Form. Um zu Klassen von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu gelangen, die mittels Multiplikatoren durch Quadraturen zu integrieren sind, kann man so vorgehen: Man nimmt von vornherein die Gestalt des Multiplikators M der fraglichen Differentialgleichung:

$$(1)\qquad U dx + V dy = 0$$

an, sei es als eine Funktion von x und y oder als eine Funktion, die auch von U und V abhängt, und versucht alsdann zu ermitteln, welche Form die Differentialgleichung (1) haben muß. Die Bedingung dafür ist nach (4) in Nr. 724:

$$(2)\qquad \frac{\partial M U}{\partial y} = \frac{\partial M V}{\partial x} \quad \text{oder} \quad M(U_y - V_x) = V M_x - U M_y,$$

also eine *partielle* Differentialgleichung erster Ordnung für die beiden Funktionen U und V von x und y (siehe Nr. 669). Zuweilen gelingt es, die gesuchten Formen von U und V in allgemeinster Weise zu finden oder wenigstens *einige* Formen von U und V zu erkennen, die der Bedingung (2) bei gegebenem M genügen. Hierfür einige Beispiele.

1. Beispiel: Es soll ein Multiplikator M vorhanden sein, der nur von x abhängt. In diesem Falle gibt (2):

(3) $$\frac{U_y - V_x}{V} = \frac{M'}{M} = \frac{d \ln M}{dx}$$

wo die rechte Seite nur von x abhängt. Sobald also $(U_y - V_x) : V$ eine Funktion von x allein ist, gibt es einen Multiplikator, der ebenfalls nur von x abhängt. Er wird dann durch die Quadratur gewonnen:

(4) $$M = e^{\int \frac{U_y - V_x}{V} dx}.$$

Insbesondere gilt dies bei den linearen Differentialgleichungen, vgl. Nr. 726.

2. *Beispiel: Es soll ein Multiplikator vorhanden sein, der das Produkt von einer Funktion von x allein mit einer Funktion von y allein ist.* Er kann in der Form:

$$M = \frac{1}{\varphi(x)\psi(y)}$$

angenommen werden, und Einsetzen dieses Wertes in (2) gibt:

$$U_y - V_x = U\frac{d \ln \psi}{dy} - V\frac{d \ln \varphi}{dx}.$$

Wird die Ableitung von $\ln \varphi$ mit $X(x)$ und die von $\ln \psi$ mit $Y(y)$ bezeichnet, so kommt:

(5) $$U_y - V_x = UY - VX.$$

Sobald also $U_y - V_x$ auf die Form $UY - VX$ gebracht werden kann, in der X nur von x und Y nur von y abhängt, ist ein Multiplikator von der gesuchten Art vorhanden. Nämlich dann kommt:

$$\ln \varphi = \int X dx, \quad \ln \psi = \int Y dy,$$

d. h. es ist:

(6) $$M = e^{-\int X dx - \int Y dy}$$

ein Multiplikator der Differentialgleichung.

Liegt z. B. die Differentialgleichung vor:

$$[Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(A+H)x + 2(B+K)y + 2(H+L)]dx +$$
$$[Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(B+H)x + 2(C+K)y + 2(K+L)]dy = 0,$$

wo A, B, C, H, K, L Konstanten bedeuten, so läßt sich die Bedingung (5) durch die Annahme $X = Y = -1$ erfüllen, so daß nach (6):

$$M = e^{x+y}$$

ein Multiplikator ist. Als zugehöriges Integral geht durch Quadratur hervor:

$$e^{x+y}[Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Hx + Ky + L)] = \text{konst.}$$

3. Beispiel: Die Differentialgleichung (1) *soll einen Multiplikator von der Form:*

$$M = \frac{1}{U^2 + V^2} \tag{7}$$

haben. Einsetzen dieses Wertes in (2) liefert die Bedingung, die U und V erfüllen müssen:

$$2\,UV(U_x - V_y) = (U^2 - V^2)(U_y + V_x). \tag{8}$$

Natürlich läßt sich *jede* Differentialgleichung (1) durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor auf eine solche Form bringen, bei der (7) einen Multiplikator gibt. Denn die Differentialgleichung irgend einer Kurvenschar $\omega(x, y) = C$ läßt sich in der Form:

$$\frac{\omega_x dx + \omega_y dy}{\omega_x^2 + \omega_y^2} = 0 \tag{9}$$

schreiben, worin also:

$$U = \frac{\omega_x}{\omega_x^2 + \omega_y^2}, \quad V = \frac{\omega_y}{\omega_x^2 + \omega_y^2}$$

d. h.

$$\frac{1}{U^2 + V^2} = \omega_x{}^2 + \omega_y{}^2$$

ist, sodaß die Differentialgleichung (9) durch Multiplikation mit dem Multiplikator (7) in der Tat die Form $d\omega = 0$ eines gleich Null gesetzten vollständigen Differentials annimmt.

Jedoch die Aufgabe, einen geeigneten Faktor zu finden, der eine vorgelegte Differentialgleichung auf eine Form bringt, bei der die Bedingung (8) besteht, ist als ebenso schwer zu bezeichnen wie die Aufgabe, einen Multiplikator der Differentialgleichung zu ermitteln. Aber ein besonderes Interesse bietet hier ein spezieller Fall, in dem die Bedingung (8) erfüllt ist, nämlich der Fall, in dem U und V den Gleichungen genügen:

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x.$$

Diesen Fall besprechen wir in der nächsten Nummer.

[728

729. Differentialgleichung einer Isothermenschar. Soeben wurde erkannt, daß die Differentialgleichung:

$$(1) \qquad U(x, y)\,dx + V(x, y)\,dy = 0,$$

bei der U und V die beiden Bedingungen:

$$(2) \qquad U_x = V_y, \quad U_y = -V_x$$

erfüllen, stets den Multiplikator:

$$(3) \qquad M = \frac{1}{U^2 + V^2}$$

hat und daher durch Quadraturen integriert werden kann.

Die Bedingungen (2) haben die Form der Cauchy-Riemannschen Gleichungen (2) in Nr. 623, d. h. *es ist* $U + iV$ *eine monogene Funktion der komplexen Veränderlichen* $x + iy$. Um die Bedeutung dieses Umstandes zu erklären, betreten wir hier *ausnahmsweise* den Bereich der komplexen Veränderlichen.

Wenn $U + iV$ etwa die monogene Funktion $F(z)$ von $z = x + iy$ ist, so bedeutet $U - iV$ die Funktion $F(\bar{z})$, worin $\bar{z}$ die zu z konjugiert komplexe Veränderliche $x - iy$ sein soll. Aus:

$$x + iy = z, \quad x - iy = \bar{z}$$

folgt:

$$2x = z + \bar{z} \quad \text{und} \quad 2y = -iz + i\bar{z}.$$

Werden z und $\bar{z}$ in (1) als Veränderliche statt x und y eingeführt, so kommt also:

$$U(dz + d\bar{z}) + V(-i\,dz + i\,d\bar{z}) = 0$$

oder:

$$(U - iV)\,dz + (U + iV)\,d\bar{z} = 0,$$

d. h.:

$$F(\bar{z})\,dz + F(z)\,d\bar{z} = 0$$

oder schließlich:

$$(4) \qquad \frac{dz}{F(z)} + \frac{d\bar{z}}{F(\bar{z})} = 0.$$

In dieser Form (4) sind die Veränderlichen getrennt. Wenn nun die monogene Funktion $f(z)$ ein Integral von $1 : F(z)$ ist (vgl. Satz 15, Nr. 633), so bedeutet $f(\bar{z})$ ein Integral von $1 : F(\bar{z})$, sodaß die Integration der Differentialgleichung (4) liefert:

$$(5) \qquad f(z) + f(\bar{z}) = \text{konst.}$$

Dies also wird das Integral der Differentialgleichung (1) sein, jedoch geschrieben in den beiden konjugiert komplexen Veränderlichen z und $\bar{z}$ oder $x + iy$ und $x - iy$. Es ist leicht, das Integral auf eine reelle Form zu bringen: Wir zerlegen die monogene Funktion $f(z)$ in ihren reellen und rein imaginären Teil:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Alsdann ist:

$$f(\bar{z}) = u(x, y) - iv(x, y),$$

sodaß aus (5) die reelle Form des Integrals von (1) folgt:

$$u(x, y) = \text{konst.} \tag{6}$$

Da wir eine Integration im komplexen Bereiche ausgeführt haben, muß dies Ergebnis nachträglich auf reellem Wege bestätigt werden: Es war angenommen worden, daß $F(z)$ gleich $U + iV$ sei, also:

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{1}{U + iV} = \frac{U}{U^2 + V^2} - i\frac{V}{U^2 + V^2}.$$

Nach (3) in Nr. 629 ist demnach der reelle Teil $u(x, y)$ des Integrals $f(z)$ von $1 : F(z)$ dieser:

$$u = \int\limits_k \frac{U dx + V dy}{U^2 + V^2},$$

wobei k einen Integrationsweg bezeichnet. Weil aber $1 : (U^2 + V^2)$ nach (3) ein Multiplikator ist, stellt dieser Wert in der Tat das Integral vor.

Aus der Form (6) des Integrals kann man auch die geometrische Bedeutung der vorgelegten Differentialgleichung (1) erkennen:

Da $u + iv$ eine monogene Funktion ist, vermitteln die Gleichungen:

$$u(x, y) = \mathfrak{x}, \quad v(x, y) = \mathfrak{y}$$

nach Satz 6 und Satz 7, Nr. 626 und 627, eine *konforme Abbildung* der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y. Insbesondere sind *die Integralkurven* (6) *in der xy-Ebene die Bilder der parallelen Geraden $\mathfrak{x} = $ konst. der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene.* Solche Kurven (6) spielten zuerst in der Wärmetheorie eine Rolle als Kurven konstanter Temperatur, und deshalb nennt man sie eine *Schar von Isothermen.*

Satz 15: Die Differentialgleichung:

$$U(x, y)\,dx + V(x, y)\,dy = 0$$

definiert in der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y *dann und nur dann eine Isothermenschar, wenn* $U + iV$ *eine monogene Funktion der komplexen Veränderlichen* $x + iy$ *vorstellt, d. h. wenn:*

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x$$

ist. Die Differentialgleichung hat alsdann den reziproken Wert von $U^2 + V^2$ *oder* $(U + iV)(U - iV)$ *als Multiplikator.*

Beispiel: Wird z^3 oder $(x + iy)^3$ als die monogene Funktion $U + iV$ gewählt, so ist $U = x^3 - 3xy^2$ und $V = 3x^2y - y^3$. Demnach definiert die Differentialgleichung:

$$(x^3 - 3xy^2)\,dx + (3x^2y - y^3)\,dy = 0$$

eine Isothermenschar, und sie hat den Multiplikator:

$$M = \frac{1}{(x+iy)^3(x-iy)^3} = \frac{1}{(x^2+y^2)^3}.$$

Durch Quadraturen ermittelt man leicht das Integral:

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = \text{konst.}$$

730. Die Eulersche Differentialgleichung. Man versteht hierunter die Differentialgleichung:

$$(1) \qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0,$$

wo die Wurzeln etwa positiv seien und k^2 eine positive Konstante kleiner als Eins bedeuten soll. Diese Differentialgleichung bietet die schon von *Euler* erkannte Merkwürdigkeit, daß einerseits die Veränderlichen in ihr getrennt sind und daß sich andererseits ein Multiplikator ermitteln läßt, der nicht bloß eine Konstante ist. Mithin kann man das Integral in zwei verschiedenen Formen darstellen, und daraus fließt ein wichtiger Satz über die Addition elliptischer Integrale.

Da die Veränderlichen x und y in (1) getrennt sind, genügt diejenige Lösung y, die für $x = 0$ den willkürlichen Anfangswert z hat, der Gleichung:

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int\limits_z^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0,$$

worin das erste Integral den Anfangswert 0, das zweite Integral den Anfangswert z hat. Das zweite Integral kann in der Form:

$$\int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} - \int\limits_0^z \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

geschrieben werden. Dabei dürfen wir im letzten Integranden y durch z ersetzen. Somit folgt: *Diejenige Lösung y der Differentialgleichung* (1), *die für $x = 0$ den willkürlich gewählten Anfangswert z hat, genügt der Gleichung:*

$$(2)\quad \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Hier treten nach Nr. 445 *drei elliptische Normalintegrale erster Gattung mit demselben Modul k* auf.

Um nun den erwähnten Multiplikator zu ermitteln, setzen wir zur Abkürzung:

$$(3)\quad X = (1-x^2)(1-k^2x^2), \quad Y = (1-y^2)(1-k^2y^2),$$

sodaß die Differentialgleichung (1) die Form annimmt:

$$(4)\quad \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0.$$

Multipliziert man sie mit $\sqrt{X}\sqrt{Y}$ und einer Funktion T, deren geeignete Wahl noch vorbehalten bleibe, so kommt:

$$T\sqrt{Y}dx + T\sqrt{X}dy = 0.$$

Nun aber ist für irgend drei Funktionen X, Y und T von x und y:

$$T\sqrt{Y}dx = d(xT\sqrt{Y}) - \frac{xT}{2\sqrt{Y}}dY - x\sqrt{Y}dT,$$

$$T\sqrt{X}dy = d(yT\sqrt{X}) - \frac{yT}{2\sqrt{X}}dX - y\sqrt{X}dT,$$

sodaß die Differentialgleichung die Form erhält:

$$\frac{1}{T}\,d(xT\sqrt{Y}+y\,T\sqrt{X})=\frac{y}{2\sqrt{X}}\,dX+ \tag{5}$$
$$+\frac{x}{2\sqrt{Y}}\,dY+(x\sqrt{Y}+y\sqrt{X})\,\frac{dT}{T}.$$

Nach (3) ist:

$$dX=-\,2x(1+k^2-2k^2x^2)\,dx,$$
$$dY=-\,2y\,(1+k^2-2k^2y^2)\,dy,$$

und wenn:

$$T=\frac{1}{1-k^2x^2y^2} \tag{6}$$

gewählt wird, kommt außerdem:

$$\frac{dT}{T}=\frac{2k^2xy\,(y\,dx+x\,dy)}{1-k^2x^2y^2}.$$

Demnach hat dx bzw. dy auf der rechten Seite der Gleichung (5) als Koeffizienten den Wert, der aus:

$$S=\frac{xy}{1-k^2x^2y^2}\,[2k^2xy\sqrt{X}\sqrt{Y}-1-k^2+2k^2(x^2+y^2)-$$
$$-\,k^2(1+k^2)\,x^2y^2]$$

durch Dividieren mit $\sqrt{X}$ bzw. $\sqrt{Y}$ hervorgeht. Somit ergibt sich als neue Form der Differentialgleichung diese:

$$d(xT\sqrt{Y}+yT\sqrt{X})=ST\left(\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}\right).$$

Demnach macht die Multiplikation der Eulerschen Gleichung (1) oder (4) mit dem Faktor ST die linke Seite der Gleichung zu einem vollständigen Differential, nämlich zu dem von $xT\sqrt{Y}+yT\sqrt{X}$, d. h. $1:ST$ *ist ein Multiplikator der Eulerschen Differentialgleichung* (1) *und*

$$xT\sqrt{Y}+yT\sqrt{X}=C$$

ein Integral. Soll das Integral insbesondere y als diejenige Lösung definieren, die für $x=0$ den Anfangswert z hat, so ist die Integrationskonstante C gleich z zu wählen. Demnach wird die Lösung implizite gegeben durch die Gleichung:

$$xT\sqrt{Y}+yT\sqrt{X}=z.$$

Wegen der Bedeutungen (3) und (6) der Funktionen X, Y und

T ist diese Gleichung in x, y und z *algebraisch* (vgl. Nr. 6), nämlich diese:

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=z. \tag{7}$$

Da aber die Differentialgleichung (1) nach Satz 9, Nr. 691, nur eine Lösung y hat, der für $x=0$ der Anfangswert z zukommt, so ist der Schluß zu ziehen, daß die Gleichungen (2) und (7) *dieselbe* Funktion y von x implizite definieren. Hieraus folgt der

Satz 16: Die Summe des bis x und des bis y erstreckten elliptischen Normalintegrals erster Gattung:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

ist wiederum ein elliptisches Normalintegral erster Gattung:

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

und zwar ist die obere Grenze z dieses Integrals die algebraische Funktion von x und y:

$$z=\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}.$$

Dies ist das *Eulersche Additionstheorem für die elliptischen Normalintegrale erster Gattung.*

Insbesondere wird das bis x erstreckte elliptische Normalintegral erster Gattung gleich

$$\arcsin x \quad \text{bzw.} \quad \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

wenn der Modul k gleich Null oder Eins wird (nach Nr. 449, 450). Daher gelten insbesondere die Additionstheoreme:

$$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin z,$$

wenn

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=z$$

ist, und:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln\frac{1+y}{1-y}=\ln\frac{1+z}{1-z},$$

wenn

$$\frac{x+y}{1+xy} = z$$

ist. Das erste besagt nichts anderes als die bekannte Formel der Goniometrie für den Sinus einer Summe und das zweite nichts anderes als den Satz, nach dem der Logarithmus eines Produktes gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren ist.

§ 4. Infinitesimale Transformationen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

731. Gruppeneigenschaft der Lösungen des Systems $dx : dt = X$, $dy : dt = Y$. Die von *Euler* entwickelte Theorie der Multiplikatoren ist wesentlich analytisch, denn auch die geometrische Deutung der Multiplikatoren (siehe Satz 4, Nr. 613, und Nr. 727) ist nicht frei von analytischen Bestandteilen. Dieser Theorie stellt sich die von *Lie* entwickelte Theorie der infinitesimalen Transformationen an die Seite, die den Vorteil hat, auch eine rein geometrische Auffassung zuzulassen. Soweit nötig, soll sie hier in ihren Grundzügen dargestellt werden. Die nächsten Nummern dienen zur Vorbereitung, erst von Nr. 738 an beginnt die Anwendung auf das Problem der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Vorerst liege ein System erster Ordnung vor von der besonderen Form:

$$\text{(1)} \qquad \frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

und im folgenden beschränken wir uns auf Untersuchungen in einem Bereiche, in dem *die von t freien Funktionen X* und Y nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind. Nach Satz 9, Nr. 691, gibt es ein und nur ein System von Lösungen x und y, die für irgend einen bestimmt gewählten Anfangswert t_0 von t die ebenfalls irgendwie bestimmt gewählten Anfangswerte x_0 und y_0 haben. Die Lösungen sind dabei in einem Intervalle um t_0 herum stetige Funktionen von t mit stetigen Ableitungen erster Ordnung; außerdem sind sie nach Satz 10, Nr. 692, hinsichtlich der Anfangswerte x_0 und y_0

stetig und mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung nach x_0 und y_0 versehen.

Das Lösungensystem hängt außer von t von den drei willkürlich gewählten Anfangswerten x_0, y_0 und t_0 ab. Aber t_0 tritt nur in Verbindung mit t in der Differenz $t - t_0$ auf. Denn wenn $t - t_0 = \tau$ als neue unabhängige Veränderliche in (1) eingeführt wird, bleibt das System (1) ungeändert, abgesehen davon, daß $d\tau$ statt dt zu setzen ist. Weil τ für $t = t_0$ den Wert Null annimmt, muß also das betrachtete Lösungensystem mit demjenigen Lösungensystem dieses neuen Systems (1) übereinstimmen, das für $\tau = 0$ die Anfangswerte x_0 und y_0 hat, also nur von $\tau = t - t_0$, x_0 und y_0 abhängt. Hiernach darf das allgemeine Lösungensystem von (1) in der Form geschrieben werden:

(2) $$x = \varphi(x_0, y_0, t - t_0), \quad y = \psi(x_0, y_0, t - t_0).$$

Wird für t ein *bestimmter* Wert t_1 gesetzt, so mögen x und y die Werte x_1 und y_1 annehmen:

(3) $$x_1 = \varphi(x_0, y_0, t_1 - t_0), \quad y_1 = \psi(x_0, y_0, t_1 - t_0).$$

Dasjenige Lösungensystem von (1), das für $t = t_1$ die Anfangswerte x_1 und y_1 hat, muß die Form haben, die aus (2) hervorgeht, wenn x_0, y_0 und t_0 durch x_1, y_1 und t_1 ersetzt werden:

$$x = \varphi(x_1, y_1, t - t_1), \quad y = \psi(x_1, y_1, t - t_1).$$

Sowohl das Lösungensystem (2) als auch dies neue Lösungensystem nimmt für $t = t_1$ die Werte x_1 und y_1 an; es gibt aber nur eines, das für $t = t_1$ die Anfangswerte x_1 und y_1 hat (nach Satz 9, Nr. 691). Wenn also für t irgend ein anderer bestimmter Wert t_2 gewählt wird, liefern die neuen Gleichungen dasselbe Wertepaar x_2 und y_2 wie die Gleichungen (2), d. h. es ist sowohl:

(4) $$x_2 = \varphi(x_1, y_1, t_2 - t_1), \quad y_2 = \psi(x_1, y_1, t_2 - t_1)$$

als auch:

(5) $$x_2 = \varphi(x_0, y_0, t_2 - t_0), \quad y_2 = \psi(x_0, y_0, t_2 - t_0),$$

d. h. durch Substitution der Werte (3) *von x_1 und y_1 in* (4) *müssen die Werte* (4) *in die Werte* (5) *übergehen.* Diese Eigentümlichkeit der Funktionen φ und ψ heißt ihre *Gruppeneigenschaft*; was das bedeutet, soll aber erst in der nächsten Nummer erörtert werden.

Das Schlußverfahren läßt sich ebenso um beliebig viele Schritte weiter führen. Wenn also nacheinander:

$$(6)\quad \begin{cases} x_1 = \varphi(x_0, y_0, t_1 - t_0), & y_1 = \psi(x_0, y_0, t_1 - t_0), \\ x_2 = \varphi(x_1, y_1, t_2 - t_1), & y_2 = \psi(x_1, y_1, t_2 - t_1), \\ x_3 = \varphi(x_2, y_2, t_3 - t_2), & y_3 = \psi(x_2, y_2, t_3 - t_2), \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x_n = \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}, t_n - t_{n-1}), & y_n = \psi(x_{n-1}, y_{n-1}, t_n - t_{n-1}) \end{cases}$$

gesetzt und darauf das Wertepaar x_1, y_1 aus den beiden ersten Gleichungen in die beiden nächsten Gleichungen, alsdann das hervorgehende Wertepaar x_2, y_2 in die folgenden beiden Gleichungen usw. substituiert wird, muß schließlich das Wertepaar hervorgehen:

$$(7)\qquad x_n = \varphi(x_0, y_0, t_n - t_0), \quad y_n = \psi(x_0, y_0, t_n - t_0).$$

Dabei ist t_1 auf ein Intervall $|t_1 - t_0| \leqq h_0$, t_2 auf ein Intervall $|t_2 - t_1| \leqq h_1$ usw. beschränkt, nach Satz 1, Nr. 683. Diese Zahlen $h_0, h_1, \dots$ sind für alle Anfangsstellen (x_i, y_i) *innerhalb* des Bereiches nicht kleiner als eine gewisse positive Zahl h. Wenn nun $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_1 + h$ usw. oder $t_1 = t_0 - h$, $t_2 = t_1 - h$ usw. gewählt wird, so kommt $t_n = t_0 \pm nh$. Die Anzahl n der erlaubten Schlußfolgerungen (6) ist dabei nur insoweit beschränkt, als der Bereich von den gefundenen Stellen (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\dots$ (x_n, y_n) nicht verlassen werden darf. Die Vergleichung von (7) mit (2) lehrt also:

Die Gleichungen (2) stellen das allgemeine Lösungensystem von (1) nicht nur in dem beschränkten Intervalle $|t - t_0| \leqq h_0$ vor, sondern t darf darin von t_0 an solange beständig wachsen oder beständig abnehmen, als die zugehörige Stelle (x, y) noch innerhalb des Bereiches liegt. Somit gilt der

Satz 17: Es liege ein System erster Ordnung von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen vor:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

wobei X, Y, X_x, X_y, Y_x, Y_y innerhalb eines Bereiches stetige Funktionen von x und y allein seien. Das allgemeine Lösungensystem, das für einen beliebig, aber bestimmt gewählten Anfangswert t_0 von t irgendwelche bestimmte Anfangswerte x_0 und y_0 innerhalb des Bereiches annimmt, besteht aus Funktionen von x_0, y_0 und $t - t_0$ allein:

$$x = \varphi(x_0, y_0, t - t_0), \quad y = \psi(x_0, y_0, t - t_0),$$

und t darf darin von t_0 an beständig wachsend oder beständig abnehmend soweit variieren, als die zugehörige Stelle (x, y) noch dem Bereiche angehört. Ferner hat das Lösungensystem die Gruppeneigenschaft, d. h.: Die Substitution der Werte:

$$x_1 = \varphi(x_0, y_0, t_1 - t_0), \quad y_1 = \psi(x_0, y_0, t_1 - t_0)$$

in:

$$x_2 = \varphi(x_1, y_1, t_2 - t_1), \quad y_2 = \psi(x_1, y_1, t_2 - t_1)$$

gibt stets:

$$x_2 = \varphi(x_0, y_0, t_2 - t_0), \quad y_2 = \psi(x_0, y_0, t_2 - t_0).$$

732. Geometrische Bedeutung der Gruppeneigenschaft. Werden x und y als Koordinaten in der Ebene gedeutet, so stellt das Lösungensystem:

(1) $$x = \varphi(x_0, y_0, t - t_0), \quad y = \psi(x_0, y_0, t - t_0)$$

die vom Punkte (x_0, y_0) oder M_0 ausgehende *Integralkurve* k des Systems:

(2) $$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

dar. Zu jedem Werte von t gehört ein Punkt (x, y) oder M dieser Kurve k, zu t_0 der Punkt M_0 selbst.

Wird nun $t - t_0$ bestimmt gewählt, aber der Punkt M_0 oder (x_0, y_0) veränderlich gelassen, so *ordnen die Gleichungen* (1) *jedem Punkte M_0 einen neuen Punkt M zu.* Dies soll Fig. 25 andeuten, worin wir statt M_0 mehrere Punkte M_0, M_0', M_0'', ... angenommen haben, um die Veränderlichkeit des Punktes M_0 zu betonen. Zu jedem dieser Punkte wird vermöge (1) ein

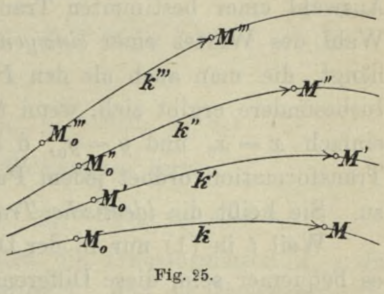

Fig. 25.

neuer Punkt M, M', M'', ... zugeordnet. Dabei liegt M auf der von M_0 ausgehenden Integralkurve k, M' auf der von M_0' ausgehenden Integralkurve k', usw.

Umgekehrt: *Wird irgend ein Punkt M oder (x, y) ausgewählt, so gibt es einen Punkt M_0 oder (x_0, y_0), dem er vermöge* (1) *zugeordnet ist.* Wir behaupten also: *Die Gleichungen* (1) *sind nach x_0 und y_0 auflösbar.*

Dies folgt sofort aus dem letzten Satze. Wenn nämlich darin $t_2 = t_0$ angenommen wird, so sind x_2 und y_2 nach der letzten Formelreihe des Satzes nichts anderes als x_0 und y_0 selbst, so daß also die vorletzte Formelreihe gibt:

$$x_0 = \varphi(x_1, y_1, t_0 - t_1), \quad y_0 = \psi(x_1, y_1, t_0 - t_1)$$

und zwar als Folge von:

$$x_1 = \varphi(x_0, y_0, t_1 - t_0), \quad y_1 = \psi(x_0, y_0, t_1 - t_0).$$

Dies aber bedeutet: Die Auflösungen der Gleichungen (1) nach x_0 und y_0 lauten:

(3) $$x_0 = \varphi(x, y, t_0 - t), \quad y_0 = \psi(x, y, t_0 - t).$$

Diese Gleichungen liefern denjenigen Punkt M_0, dem ein Punkt M vermöge (1) zugeordnet ist.

Eine solche Zuordnung von Punkten M zu den Punkten M_0 heißt eine *Punkt-Transformation*, analytisch eine *Transformation der Wertepaare x, y.* Die Gleichungen (1) stellen nun aber für jeden einzelnen bestimmten Wert von $t - t_0$ eine gewisse Transformation dar; mithin liegt hier eine *Schar von Transformationen* vor. Sie wird *einfach unendlich* genannt, weil die Auswahl einer bestimmten Transformation der Schar von der Wahl des Wertes einer *einzigen* Hilfsveränderlichen $t - t_0$ abhängt, die man auch als den *Parameter* der Schar bezeichnet. Insbesondere ergibt sich, wenn $t - t_0 = 0$ gewählt wird, aus (1) einfach $x = x_0$ und $y = y_0$, d. h. die zu $t - t_0 = 0$ gehörige Transformation ordnet jedem Punkte M_0 den Punkt M_0 selbst zu. Sie heißt die *identische Transformation.*

Weil t in (1) nur in der Differenz $t - t_0$ vorkommt, wird es bequemer sein, diese Differenz mit τ zu bezeichnen, so daß die Gleichungen:

(4) $$x = \varphi(x_0, y_0, \tau), \quad y = \psi(x_0, y_0, \tau)$$

732]

die Schar der Transformationen darstellen. Diejenige Transformation der Schar, die zu irgend einem Werte τ gehört, sei mit $\mathfrak{T}_\tau$ bezeichnet. Dann bedeutet $\mathfrak{T}_0$ die identische Transformation.

Nach (3) sind:

$$x_0 = \varphi(x, y, -\tau), \quad y_0 = \psi(x, y, -\tau) \tag{5}$$

die Auflösungen der Gleichungen (4) nach x_0 und y_0. Wird aber in (4) statt τ der entgegengesetzte Wert $-\tau$ eingesetzt, so ergibt sich die Transformation $\mathfrak{T}_{-\tau}$:

$$x = \varphi(x_0, y_0, -\tau), \quad y = \psi(x_0, y_0, -\tau),$$

und ihre Vergleichung mit (5) lehrt, daß sie gerade das Entgegengesetzte bewirkt wie $\mathfrak{T}_\tau$. Denn wenn $\mathfrak{T}_\tau$ den Punkt M_0 in den Punkt M transformiert, so führt $\mathfrak{T}_{-\tau}$ den Punkt M nach M_0 zurück. Daher heißt $\mathfrak{T}_{-\tau}$ *die zu* $\mathfrak{T}_\tau$ *inverse Transformation.*

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, daß es für die geometrische Natur der Transformationen ganz gleichgültig ist, wie man die Koordinaten der ursprünglichen und die der neuen Punkte bezeichnet, wenn man nur an der Regel festhält, daß die auf der linken Seite der Gleichungen stehenden Größen die Koordinaten der *neuen* Punkte sein sollen.

Da $t - t_0 = \tau$ gesetzt worden war, stellt sich die in Satz 17 der letzten Nummer ausgesprochene *Gruppeneigenschaft,* sobald $t_1 - t_0 = \tau_1$, $t_2 - t_1 = \tau_2$, also $t_2 - t_0 = \tau_1 + \tau_2$ gesetzt wird, so dar:

Wenn die Werte:

$$x_1 = \varphi(x_0, y_0, \tau_1), \quad y_1 = \psi(x_0, y_0, \tau_1) \tag{6}$$

in die Gleichungen:

$$x_2 = \varphi(x_1, y_1, \tau_2), \quad y_2 = \psi(x_1, y_1, \tau_2) \tag{7}$$

substituiert werden, gehen die Gleichungen hervor:

$$x_2 = \varphi(x_0, y_0, \tau_1 + \tau_2), \quad y_2 = \psi(x_0, y_0, \tau_1 + \tau_2). \tag{8}$$

Die Gleichungen (6) stellen die Transformation $\mathfrak{T}_{\tau_1}$, die Gleichungen (7) die Transformation $\mathfrak{T}_{\tau_2}$ und die Gleichungen (8) die Transformation $\mathfrak{T}_{\tau_1+\tau_2}$ vor. $\mathfrak{T}_{\tau_1}$ führt den beliebig gewählten Punkt M_0 oder (x_0, y_0) in den Punkt M_1 oder (x_1, y_1)

über, weiterhin transformiert $\mathfrak{T}_{\tau_2}$ den Punkt M_1 in den Punkt M_2 oder (x_2, y_2), und die Gleichungen (8) besagen nun, daß M_2 auch unmittelbar aus M_0 durch die Ausübung einer einzigen Transformation, nämlich $\mathfrak{T}_{\tau_1+\tau_2}$, hervorgeht; und zwar gilt dies, wo auch der ursprüngliche Punkt M_0 gewählt sein mag. Vgl. Fig. 26, worin wieder, zum Ausdrucke der beliebigen Annahme des Punktes M_0, statt seiner mehrere Punkte M_0, M_0', M_0'', ... angenommen worden sind. Dabei liegen M_1 und M_2 auf der von M_0 ausgehenden Integralkurve k, ebenso M_1' und M_2' auf der von M_0' ausgehenden Integralkurve k', usw.

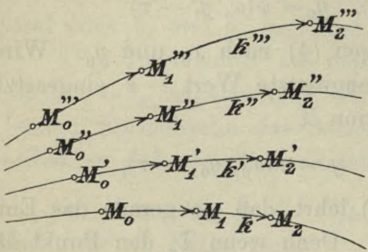

Fig. 26.

Die Gruppeneigenschaft bedeutet hiernach: Die Aufeinanderfolge irgend zweier Transformationen $\mathfrak{T}_{\tau_1}$ und $\mathfrak{T}_{\tau_2}$ der Schar liefert dasselbe Endergebnis wie eine einzige Transformation der Schar, nämlich dasselbe wie $\mathfrak{T}_{\tau_1+\tau_2}$. Dies spricht man kürzer so aus: *Die Aufeinanderfolge der Transformationen* $\mathfrak{T}_{\tau_1}$ *und* $\mathfrak{T}_{\tau_2}$ *ist der Transformation* $\mathfrak{T}_{\tau_1+\tau_2}$ *äquivalent.* Deshalb heißt die durch (4) dargestellte Schar von Transformationen eine *Gruppe von Transformationen.* Allgemein nämlich wird eine Schar von Operationen eine *Gruppe* genannt, sobald die Aufeinanderfolge irgend zweier Operationen der Schar dasselbe Endergebnis liefert wie eine einzige Operation derselben Schar.

Ob zuerst $\mathfrak{T}_{\tau_1}$ und danach $\mathfrak{T}_{\tau_2}$ ausgeführt wird oder umgekehrt zuerst $\mathfrak{T}_{\tau_2}$ und dann $\mathfrak{T}_{\tau_1}$, ist gleichgültig, denn beide Aufeinanderfolgen sind wegen $\tau_1 + \tau_2 = \tau_2 + \tau_1$ derselben Transformation $\mathfrak{T}_{\tau_1+\tau_2}$ äquivalent. Man sagt deshalb: die Transformationen der hier betrachteten Gruppe sind paarweise *vertauschbar.* Da ferner alle Transformationen der Gruppe irgend einen Punkt M_0 stets nur in Punkte ein und derselben Kurve, nämlich der von M_0 ausgehenden Integralkurve k, überführen, so heißen die Integralkurven die *Bahnkurven der Gruppe.*

Ob $t - t_0$ mit τ bezeichnet oder $t_0 = 0$ gesetzt und die Bezeichnung t beibehalten wird, ist gleichgültig. Deshalb fassen wir die Ergebnisse so zusammen:

Satz 18: Innerhalb eines Bereiches, in dem sich die Funktionen X und Y von x und y nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig verhalten, sei dasjenige allgemeine Lösungensystem des Systems:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

das für $t = 0$ die Anfangswerte x_0 und y_0 hat, durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$x = \varphi(x_0, y_0, t), \quad y = \psi(x_0, y_0, t).$$

Diese Gleichungen stellen für jeden bestimmten Wert t eine Transformation $\mathfrak{T}_t$ der Wertepaare x_0, y_0 oder Punkte (x_0, y_0) in neue Wertepaare x, y oder Punkte (x, y) dar. Die einfach unendliche Schar aller Transformationen $\mathfrak{T}_t$ bildet eine Gruppe, indem nämlich die Aufeinanderfolge irgend zweier Transformationen $\mathfrak{T}_{t_1}$ und $\mathfrak{T}_{t_2}$ der Schar äquivalent ist der Transformation $\mathfrak{T}_{t_1+t_2}$ derselben Schar. Die Gruppe enthält die identische Transformation $\mathfrak{T}_0$ sowie zu jeder Transformation $\mathfrak{T}_t$ die inverse $\mathfrak{T}_{-t}$. Außerdem sind ihre Transformationen vertauschbar. Die Bahnkurven der Gruppe sind die Integralkurven des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen.

733. Beispiele. Zunächst geben wir zwei in geometrischer Hinsicht besonders einfache Beispiele.

1. Beispiel: Das System

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x \tag{1}$$

wurde in dem Beispiele von Nr. 677 in der Form $x = C\cos(t + c)$, $y = C\sin(t + c)$ integriert. Soll das Lösungensystem für $t = 0$ die Werte x_0 und y_0 haben, so muß $C\cos c = x_0$ und $C\sin c = y_0$ gesetzt werden, so daß kommt:

$$x = x_0\cos t - y_0\sin t, \quad y = x_0\sin t + y_0\cos t. \tag{2}$$

Sind x und y rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, so ordnen die Gleichungen (2) für einen bestimmt gewählten Wert von t irgend einem Punkte M_0 denjenigen Punkt M zu, der aus M_0 durch Drehung des Radiusvektors OM_0 um den Winkel t hervorgeht. Die Gruppe (2) besteht demnach aus allen *Drehungen um den Anfangspunkt O.* Hier leuchtet nun die Gruppeneigenschaft sofort ein, da die Aufeinanderfolge der Drehungen um O mit den Winkeln t_1 und t_2 der Drehung mit dem Winkel $t_1 + t_2$ äquivalent ist, siehe Fig. 27. Die Bahn-

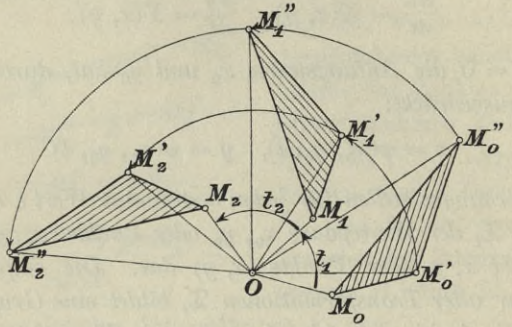

Fig. 27.

kurven sind die Kreise mit dem Mittelpunkte O, die ja nach Nr. 677 in der Tat zugleich die Integralkurven des Systems (1) vorstellen.

2. Beispiel: Die Integration des Systems:

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y \tag{3}$$

gibt nach dem Beispiele in Nr. 685, wenn darin $A = x_0$ und $B = y_0$ gesetzt wird:

$$x = x_0 e^t, \quad y = y_0 e^t. \tag{4}$$

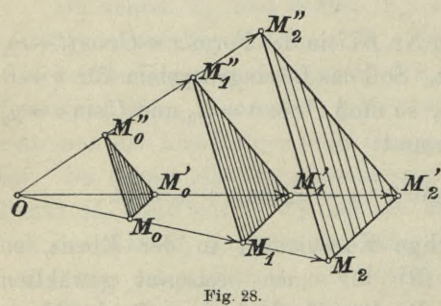

Fig. 28.

Diese Werte sind gleich x_0 und y_0 für $t = 0$. Für jeden bestimmten Wert von t stellen die Gleichungen (4) eine ähnliche Vergrößerung der Ebene vom Anfangspunkte O aus (ohne Drehung) dar, indem ein Punkt M_0 vermöge (4) in denjenigen Punkt M übergeht, dessen Radiusvektor OM auf OM_0 liegt und das e^t-fache von OM_0 beträgt. Diese Transformation heißt eine *Streckung von O aus.* Die Gruppeneigenschaft der Schar aller Streckungen von O aus erhellt sofort: Werden nämlich zunächst alle Radienvektoren mit a, alsdann die hervorgehenden Radienvektoren mit b multipliziert, so ist das Ergebnis dasselbe, wie wenn alle Radienvektoren sofort mit ab multipliziert worden wären. Siehe Fig. 28. Die Bahnkurven sind alle Strahlen von O aus, was damit im Einklange steht, daß diese Strahlen nach Nr. 685 die Integralkurven des Systems (3) bilden.

Es ist nützlich, an einem Beispiele zu zeigen, *daß nicht jede einfach unendliche Schar von Transformationen eine Gruppe bildet.* Dazu diene das

3. Beispiel: Die Gleichungen:

$$x = x_0(t+1), \quad y = y_0 + t \tag{5}$$

stellen für jeden Wert von t eine Transformation vor, insbesondere für $t = 0$ die identische: $x = x_0$ und $y = y_0$. Um zu untersuchen, ob die Transformationen (5) eine Gruppe bilden, stellt man analog den Gleichungen (6) und (7) der vorigen Nummer die Gleichungen auf:

$$x_1 = x_0(t_1+1), \quad y_1 = y_0 + t_1,$$
$$x_2 = x_1(t_2+1), \quad y_2 = y_1 + t_2$$

und substituiert x_1 und x_2 aus den beiden ersten in die beiden letzten. Dann kommt:

$$x_2 = x_0(t_1 t_2 + t_1 + t_2 + 1), \quad y_2 = y_0 + t_1 + t_2.$$

Aber es gibt keinen Wert von t, für den dies eine Transformation der Schar (5), d. h. ein Gleichungensystem von der Form:

$$x_2 = x_0(t+1), \quad y_2 = y_0 + t$$

wäre, denn die hervorgehenden Bedingungen $t = t_1 t_2 + t_1 + t_2$ und $t = t_1 + t_2$ widersprechen einander, wenn t_1 und t_2 irgendwie gewählt worden sind. *Demnach ist die Schar* (5) *keine Gruppe.* Sie stellt in der Tat gar nicht das Lösungensystem eines Systems von Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y$$

dar, dessen rechte Seiten X und Y von t frei sind. Denn aus (5) ergibt sich durch Differentiation nach t:

$$\frac{dx}{dt} = x_0, \quad \frac{dy}{dt} = 1$$

oder, wenn x_0 mittels (5) eliminiert wird:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t+1}, \quad \frac{dy}{dt} = 1,$$

und hier ist die rechte Seite der ersten Gleichung *nicht* frei von t.

Da die Bestätigung der Gruppeneigenschaft nicht immer geometrisch so einleuchtend wie in den beiden ersten Beispielen ist, wird noch ein Beispiel gegeben, in dem dies analytisch zu zeigen ist.

4. Beispiel: Die erste Gleichung des Systems:

$$(6) \qquad \frac{dx}{dt} = x^2, \quad \frac{dy}{dt} = xy$$

gibt:

$$\frac{dx}{x^2} = dt, \quad \text{d. h.} \quad -\frac{1}{x} = t + A,$$

wo A eine Konstante bedeutet. Wird hieraus $x = -1 : (t + A)$ berechnet und in die zweite Gleichung (6) eingeführt, so kommt:

$$d \ln y = -\frac{dt}{t+A}, \quad \text{d. h.} \quad y = \frac{B}{t+A},$$

wo B eine Konstante bedeutet. Insbesondere haben x und y für $t = 0$ die Werte x_0 und y_0, wenn $A = -1 : x_0$ und $B = -y_0 : x_0$ gewählt wird. Demnach ist:

$$(7) \qquad x = \frac{-x_0}{x_0 t - 1}, \quad y = \frac{-y_0}{x_0 t - 1}$$

dasjenige Lösungensystem, das für $t = 0$ die Anfangswerte x_0 und y_0 hat. Zur Bestätigung der Gruppeneigenschaft werden die Gleichungen gebildet:

$$x_1 = \frac{-x_0}{x_0 t_1 - 1}, \quad y_1 = \frac{-y_0}{x_0 t_1 - 1},$$

$$x_2 = \frac{-x_1}{x_1 t_2 - 1}, \quad y_2 = \frac{-y_1}{x_1 t_2 - 1}$$

und die Werte von x_1 und y_1 aus den beiden ersten in die beiden letzten eingesetzt. Dann kommt:

$$x_2 = \frac{-x_0}{x_0(t_1+t_2)-1}, \quad y_2 = \frac{-y_0}{x_0(t_1+t_2)-1}.$$

Diese Gleichungen stellen in der Tat eine Transformation der Schar (7) dar, nämlich die zu $t = t_1 + t_2$ gehörige.

734. Eingliedrige Gruppe und ihre infinitesimale Transformation. Um späteren Unbequemlichkeiten in den Bezeichnungen auszuweichen, wollen wir die bisher X und Y genannten Funktionen von jetzt an mit ξ und η bezeichnen. Es soll also die betrachtete Gruppe von Transformationen durch dasjenige allgemeine Lösungensystem:

(1) $$x = \varphi(x_0, y_0, t), \quad y = \psi(x_0, y_0, t)$$

des Systems erster Ordnung:

(2) $$\frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y)$$

dargestellt sein, das für $t = 0$ die beliebig angenommenen Anfangswerte x_0 und y_0 hat.

Man kann sagen, daß die Gruppe von dem System (2) *erzeugt* wird, und zwar kann man der Art der Erzeugung eine geometrische Deutung beilegen, wenn man die Betrachtung unendlich kleiner oder infinitesimaler Größen zuläßt. Das soll hier nur ganz *vorübergehend* geschehen und zwar bloß deshalb, weil nur so eine von *Lie* eingeführte Bezeichnung verständlich wird.

Ein Wert t_1 von t sei bestimmt gewählt; er werde in beliebig viele, etwa in n Teile $\Delta_1 t, \Delta_2 t, \ldots \Delta_n t$ zerlegt:

(3) $$t_1 = \Delta_1 t + \Delta_2 t + \cdots + \Delta_n t.$$

Zu jeder Zahl $\Delta_1 t, \Delta_2 t, \ldots \Delta_n t$ gehört eine Transformation:

(4) $$\mathfrak{T}_{\Delta_1 t}, \quad \mathfrak{T}_{\Delta_2 t}, \ldots \mathfrak{T}_{\Delta_n t}$$

der Gruppe. Die Aufeinanderfolge der beiden ersten ist der zu $\Delta_1 t + \Delta_2 t$ gehörigen Transformation der Gruppe äquivalent; die Aufeinanderfolge von dieser und der dritten ist der zu $\Delta_1 t + \Delta_2 t + \Delta_3 t$ gehörigen Transformation der Gruppe äquivalent, usw. Schließlich ergibt sich, daß die Aufeinanderfolge der n Transformationen (4) derjenigen Transformation der Gruppe äquivalent ist, die zur Summe t_1 aller Teilbeträge Δt gehört, d. h. der Transformation $\mathfrak{T}_{t_1}$.

Wenn nun alle Teile Δt dasselbe Vorzeichen wie t_1 haben und nach Null streben, demgemäß ihre Anzahl n über jede Zahl wächst, streben alle einzelnen n Transformationen nach sogenannten *infinitesimalen Transformationen*, nämlich nach solchen, deren Parameter nach Null strebt, und die Transformation $\mathfrak{T}_{t_1}$ der Gruppe erscheint bei dieser Auffassung als das Erzeugnis der Aufeinanderfolge einer endlosen Anzahl von infinitesimalen Transformationen der Gruppe. Wir werden sogleich erkennen, daß diese infinitesimalen Transformationen sämtlich denselben analytischen Ausdruck haben, so daß wir zu der *Auffassung der ganzen Gruppe als des Erzeugnisses einer infinitesimalen Transformation* gelangen.

Daß in der Tat alle jene infinitesimalen Transformationen denselben analytischen Ausdruck haben, sieht man so ein: Es möge eine Summe von Teilwerten $\Delta_1 t, \Delta_2 t, \ldots$ bis zu einem gewissen Teilwerte gleich t sein, und Δt sei der nächste Teilwert. Die Aufeinanderfolge der zu jenen zuerst genannten Teilwerten gehörigen Transformationen der Gruppe ist alsdann der Transformation $\mathfrak{T}_t$ äquivalent, und alsdann ist die Transformation $\mathfrak{T}_{\Delta t}$ auszuführen. Nun sei der Punkt (x_0, y_0) vermöge $\mathfrak{T}_t$ in den Punkt (x, y) und dieser Punkt (x, y) vermöge $\mathfrak{T}_{\Delta t}$ weiterhin in den Punkt $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ übergegangen. Es bestehen dann für x und y die Gleichungen (1). Da die Aufeinanderfolge von $\mathfrak{T}_t$ und $\mathfrak{T}_{\Delta t}$ der zu $t + \Delta t$ gehörigen Transformation äquivalent ist und den Punkt (x_0, y_0) in den Punkt $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ verwandelt, bestehen ferner die Gleichungen:

$$x + \Delta x = \varphi(x_0, y_0, t + \Delta t), \qquad y + \Delta y = \psi(x_0, y_0, t + \Delta t).$$

Zieht man hiervon die Gleichungen (1) ab, so kommt:

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} \Delta x &= \varphi(x_0, y_0, t + \Delta t) - \varphi(x_0, y_0, t), \\ \Delta y &= \psi(x_0, y_0, t + \Delta t) - \psi(x_0, y_0, t). \end{aligned}\right.$$

Bei der Transformation $\mathfrak{T}_{\Delta t}$ erfahren also die Koordinaten eines Punktes (x, y) diese Zunahmen Δx und Δy. Sie streben zwar mit Δt nach Null, aber es wird:

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d\varphi(x_0, y_0, t)}{dt}, \quad \lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{d\psi(x_0, y_0, t)}{dt},$$

d. h. weil $x = \varphi$, $y = \psi$ die Lösungen des Systems (2) bedeuten:

(6) $$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \xi(x, y), \quad \lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \eta(x, y).$$

Sobald also Δt nach Null strebt, erfahren x und y bei der Transformation $\mathfrak{T}_{\Delta t}$ ebenfalls nach Null strebende Zunahmen, aber die Quotienten aus diesen Zunahmen und aus Δt streben nach den bestimmten endlichen Werten $\xi(x, y)$ und $\eta(x, y)$. Die Gleichungen (6) sind der analytische Ausdruck der infinitesimalen Transformation. Wenn man unter δx, δy, δt unendlich kleine Größen versteht, kann man sie in der von *Lie* gebrauchten Weise ausdrücken:

(7) $$\delta x = \xi(x, y)\, \delta t, \quad \delta y = \eta(x, y)\, \delta t.$$

Die Gleichungen (7) sind, abgesehen davon, daß hier das Zeichen δ statt d steht, dieselben Gleichungen wie die des vorgelegten Systems (2), dem also hiermit die angekündigte geometrische Deutung als Ausdruck der infinitesimalen Transformation der Gruppe gegeben ist.

Die Gruppe (1), das Erzeugnis der infinitesimalen Transformation (7) oder des Systems (2), bezeichnet man als eine *eingliedrige* Gruppe. Es gibt nämlich auch Gruppen, die aus mehrfach unendlichen Scharen von Transformationen bestehen und von mehreren *verschiedenen* infinitesimalen Transformationen erzeugt werden.

Es ist nützlich, diejenige anschauliche Deutung zu erwähnen, die man von der eingliedrigen Gruppe erhält, wenn man t als das Maß der *Zeit* auffaßt. Dann stellen die Gleichungen (1) eine *stationäre Strömung* in der Ebene dar (vgl. Nr. 666). Bei ihr beschreiben alle Punkte *Stromlinien*, nämlich die Bahnkurven der Gruppe oder Integralkurven des Systems (2). Da der zur Zeit t an der Stelle (x, y) gelegene Punkt im nächsten Zeitteilchen Δt in den Punkt $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ übergeht, so zeigen die Gleichungen (6), daß ξ und η die Komponenten der *Geschwindigkeit* der Strömung an der Stelle (x, y) sind, die, wie es bei jeder stationären Strömung der Fall ist, nur vom Orte (x, y) und nicht von der Zeit t abhängen.

735. Symbol der infinitesimalen Transformation. Bei vielen Untersuchungen, in denen eingliedrige Gruppen vorkommen, braucht man nicht die Gleichungen ihrer Transformationen:

$$x = \varphi(x_0, y_0, t) \quad y = \psi(x_0, y_0, t) \tag{1}$$

zu kennen. Vielmehr genügt dabei das Bekanntsein der infinitesimalen Transformation der Gruppe. Sie wird durch die beiden Funktionen $\xi(x, y)$ und $\eta(x, y)$ oder auch durch das zugehörige System:

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y). \tag{2}$$

gegeben. Besonders bequem aber erweist sich ein einziger für die infinitesimale Transformation von *Lie* eingeführter Ausdruck. Zu diesem Symbol gelangt man so:

Es sei $f(x, y)$ eine *beliebig* gewählte differenzierbare Funktion von x und y. Bei derjenigen Transformation der Gruppe, die zu irgend einem beliebig kleinen Werte Δt von t gehört, erfahren x und y Zunahmen Δx und Δy, so daß auch f eine Zunahme Δf erfährt:

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Division mit Δt gibt:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t}.$$

Hierbei sind x und y die Funktionen (1) von t. Mithin ergibt sich für $\lim \Delta t = 0$:

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

d. h. nach (2):

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{3}$$

Man kann demnach sagen, daß die Funktion $f(x, y)$ bei der infinitesimalen Transformation der Gruppe — siehe (7) in voriger Nummer — den unendlich kleinen Zuwachs:

$$\delta f = \left(\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}\right) \delta t$$

erfährt. Jedoch wollen wir, wie gesagt, mit unendlich kleinen Größen nicht rechnen. Daher drücken wir uns so aus:

Infolge der Transformationen der Gruppe gehen nicht nur aus den Wertepaaren x_0, y_0 solche Wertepaare x, y hervor, die Funktionen des Parameters t sind, vielmehr wird auch aus jeder Funktion von x_0 und y_0 eine Funktion f von x und y, also — da x und y Funktionen von t sind — ebenfalls eine Funktion von t. Dabei ist:

$$\frac{df}{dt} = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{4}$$

Oder auch: Wenn x und y die durch das System (2) definierten Funktionen von t sind, wird auch jede differenzierbare Funktion f von x und y eine Funktion von t, und zwar hat sie die Ableitung (4). Der Ausdruck:

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{5}$$

in dem also f eine *beliebige* differenzierbare Funktion von x und y bedeutet, heißt nun das *Symbol der infinitesimalen Transformation* der eingliedrigen Gruppe.

1. Beispiel: Die eingliedrige Gruppe aller Drehungen um den Anfangspunkt O wird nach dem ersten Beispiele in Nr. 733 durch das System:

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x$$

erzeugt. Hier ist $\xi = -y$, $\eta = x$, d. h. das *Symbol der infinitesimalen Drehung um O* lautet:

$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

2. Beispiel: Bei der eingliedrigen Gruppe aller Streckungen vom Anfangspunkte O aus haben ξ und η nach dem zweiten Beispiele in Nr. 733 die Werte x und y, daher ist das *Symbol der infinitesimalen Streckung von O aus*:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

3. Beispiel: Die im vierten Beispiele von Nr. 733 betrachtete eingliedrige Gruppe:

$$x = -\frac{x_0}{x_0 t - 1}, \quad y = -\frac{y_0}{x_0 t - 1}$$

hat die infinitesimale Transformation:

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y}.$$

4. Beispiel: Die Gleichungen:

(6) $$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt,$$

in denen a und b *bestimmt* gewählte Konstanten sein sollen, stellen eine Gruppe dar. Denn vermöge (6) wird jeder Punkt (x_0, y_0) soweit verschoben, bis seine Abszisse bzw. Ordinate um at und bt gewachsen sind, d. h. für jeden bestimmten Wert von t ist (6) der Ausdruck einer *Schiebung* aller Punkte der Ebene um dieselbe Strecke $t\sqrt{a^2 + b^2}$ und in einer *von t unabhängigen* Richtung, die mit der positiven x-Achse einen Winkel τ bildet, dessen Tangens gleich $b:a$ ist. Zwei solche Schiebungen in derselben Richtung, nach einander ausgeübt, lassen sich augenscheinlich durch eine Schiebung in derselben Richtung ersetzen, so daß hier die Gruppe aller Schiebungen in der angegebenen Richtung vorliegt. Wächst t um Δt, so kommt:

$$\Delta x = a\Delta t, \quad \Delta y = b\Delta t,$$

also:

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = a, \quad \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = b,$$

so daß $\xi = a$, $\eta = b$ ist. Folglich lautet das *Symbol der infinitesimalen Schiebung in der durch* $\operatorname{tg}\tau = b:a$ *angegebenen Richtung* so:

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Insbesondere sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}$$

die Symbole der infinitesimalen Schiebungen parallel der x- bzw. y-Achse. Daß die Gleichungen (6) in der Tat das Lösungensystem von:

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b$$

vorstellen, sieht man sofort.

736. Die bei der Gruppe invarianten einfach unendlichen Kurvenscharen. Es seien wieder:

(1) $$x = \varphi(x_0, y_0, t), \quad y = \psi(x_0, y_0, t)$$

die Gleichungen der von der infinitesimalen Transformation:

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

oder also von dem Systeme:

$$(2)\qquad \frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y)$$

erzeugten eingliedrigen Gruppe.

Ein Punkt (x_0, y_0) bleibt bei allen Transformationen der Gruppe in Ruhe, wenn für ihn die Gleichungen (1), wie auch t gewählt sein mag, beständig $x = x_0$ und $y = y_0$ liefern, d. h. wenn von dem Punkte (x_0, y_0) gar keine Integralkurve des Systems (2) ausgeht, vielmehr das *Konstantenpaar* $x = x_0$, $y = y_0$ eine Lösung des Systems (2) ist, d. h. wenn $\xi(x_0, y_0) = 0$ und $\eta(x_0, y_0) = 0$ ist, vgl. Nr. 685. Gibt es ein Wertepaar x, y, für das $\xi(x, y)$ und $\eta(x, y)$ verschwinden, so heißt es *invariant* bei der Gruppe (1), oder auch: der *Punkt* (x, y) heißt *invariant*.

So war in dem 1., 2. und 4. Beispiele von Nr. 733 der Anfangspunkt O invariant. Es kann auch unzählig viele invariante Punkte geben. So sind im 4. Beispiele von Nr. 733 alle Punkte (x, y), deren Abszisse verschwindet, d. h. alle Punkte der y-Achse invariant.

Wenn der Punkt (x_0, y_0) *nicht invariant* ist, beschreibt er bei der Ausführung aller Transformationen der Gruppe die durch ihn gehende Integralkurve k des Systems (2). Da jeder Punkt dieser Kurve ebenfalls nur in Punkte derselben Kurve übergeht, so werden zwar alle Punkte der Kurve bei den Transformationen der Gruppe in andere übergeführt, aber die Kurve k im ganzen genommen bleibt ungeändert. Deshalb heißen die Bahnkurven der Gruppe *invariante Kurven*. Außer ihnen kann es nur noch solche invariante Kurven geben, deren einzelne Punkte bei der Gruppe invariant sind, wie im 4. Beispiele in Nr. 733 die y-Achse.

Nun sei K_0 eine *nicht invariante* beliebig gewählte Kurve. Vermöge der allgemeinen Transformationen $\mathfrak{T}_t$ der Gruppe (1) gehe sie in die Kurven K_t über. Die Gesamtheit aller Kurven K_t, zu denen auch die Kurve K_0 selbst gehört, bildet eine *einfach unendliche Kurvenschar*, weil sie von *einem* Parameter t abhängt. Es sei K_{t_1} irgend eine Kurve der Schar; sie ist aus K_0 durch die Ausführung der Transformation $\mathfrak{T}_{t_1}$ entstanden. Führt man auf K_{t_1} irgend eine andere Transformation $\mathfrak{T}_{t_2}$ der Gruppe aus, so ist das Ergebnis diejenige Kurve, die aus K_0 durch die Aufeinanderfolge von $\mathfrak{T}_{t_1}$ und $\mathfrak{T}_{t_2}$ hervorgeht. Weil aber diese Aufeinanderfolge der Transformation $\mathfrak{T}_{t_1+t_2}$ der Gruppe äquivalent ist, geht dieselbe neue Kurve durch Ausführung von $\mathfrak{T}_{t_1+t_2}$ auf K_0 hervor und ist also die Kurve $K_{t_1+t_2}$ *derselben* einfach unendlichen Schar. Also gilt der

Satz 19: Die Gesamtheit derjenigen Kurven, in die eine Kurve bei der Ausführung aller Transformationen einer Gruppe übergeht, bleibt bei allen Transformationen der Gruppe dieselbe, indem jede Kurve der Schar bei jeder Transformation der Gruppe in eine Kurve derselben Schar übergeführt wird.

Aus dem Beweise ist zu ersehen, daß der Satz wesentlich auf der Gruppeneigenschaft beruht; z. B. gilt er nicht bei jener Schar von Transformationen, die im 3. Beispiele von Nr. 733 betrachtet wurde.

Nach Satz 19 geht aus jeder beliebig gewählten Kurve K_0 durch Ausübung aller Transformationen der eingliedrigen Gruppe eine sogenannte *invariante Kurvenschar* hervor. Außerdem gibt es nur noch eine einfach unendliche Schar, die invariant ist, nämlich die aller Bahnkurven, von denen jede für sich invariant bleibt.

737. Kennzeichen der Invarianz einer einfach unendlichen Kurvenschar. In dem Bereiche, wo ξ, η und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind, bedeute $\omega(x, y) =$ konst. eine invariante Kurvenschar. Vorausgesetzt wird, daß auch ω, ω_x und ω_y stetig seien. Insbesondere sei K_0 die Kurve:

$$\omega(x_0, y_0) = c_0 \tag{1}$$

mit den laufenden Koordinaten x_0 und y_0. Durch Ausführung der Transformation $\mathfrak{T}_t$ der Gruppe:

$$x = \varphi(x_0, y_0, t), \quad y = \psi(x_0, y_0, t) \tag{2}$$

geht die Kurve K_0 nach Annahme wieder in eine Kurve der Schar über, d. h. durch Elimination von x_0 und y_0 aus den drei Gleichungen (1) und (2) soll eine Gleichung hervorgehen von der Form:

$$\omega(x, y) = c_t. \tag{3}$$

Zu jedem Werte von t gehört daher ein Wert der Konstante c_t;

also ist c_t eine Funktion $\lambda(t)$ von t. Da nun für die Funktionen (2):

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y) \tag{4}$$

ist, liefert (3), wenn x und y darin als diese Funktionen (2) von t betrachtet werden:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial x}\xi + \frac{\partial \omega}{\partial y}\eta = \frac{d\lambda(t)}{dt}. \tag{5}$$

Hiernach hat $\lambda(t)$ eine stetige Ableitung. Die Gleichung (3) oder $\omega = \lambda(t)$ definiert mithin auch t als stetige Funktion von ω, nach Satz 13, Nr. 694. Wird sie in (5) auf der rechten Seite eingeführt, so geht eine Formel hervor:

$$\xi\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} + \eta\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} = \Omega(\omega), \tag{6}$$

deren rechte Seite eine Funktion von ω allein bedeutet. Es wird sich zeigen, daß eine solche Gleichung nicht nur notwendig, sondern auch *hinreichend* für die Invarianz der Kurvenschar $\omega(x, y) =$ konst. bei der Gruppe (2) ist.

Vorher jedoch soll die Bedingung noch vereinfacht werden. Insbesondere ist zunächst die Schar aller Bahnkurven, d. h. aller Integralkurven des Systems (4) invariant. Stellt $\omega =$ konst. diese Schar vor, so muß die Gleichung

$$\omega_x dx + \omega_y dy = 0$$

eine Folge des Systems (4) sein, d. h. infolge von $dy : dx = \eta : \xi$ bestehen, so daß sich eine Gleichung (6) ergibt, deren rechte Seite gleich Null ist. Wenn also $\Omega(\omega)$ in (6) nicht verschwindet, besteht die Schar $\omega =$ konst. sicher nicht aus allen Bahnkurven. In diesem Falle gibt es eine stetige Funktion $F(\omega)$, deren Ableitung $1 : \Omega(\omega)$ ist, so daß wir haben:

$$F'(\omega) = \frac{1}{\Omega(\omega)}, \tag{7}$$

denn die linke Seite von (6) ist ja stetig. Insbesondere kommt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F'(\omega)\omega_x = \frac{\omega_x}{\Omega(\omega)}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F'(\omega)\omega_y = \frac{\omega_y}{\Omega(\omega)}. \tag{8}$$

Dies sind ebenfalls stetige Funktionen von x und y. Die Kurvenschar $\omega =$ konst. wird aber auch durch die Gleichung:

$$F(\omega(x, y)) = \text{konst.}$$

dargestellt. Nun aber gibt (8) und (6):

$$\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\xi \omega_x + \eta \omega_y}{\Omega} = 1.$$

Wenn also $\omega(x, y) =$ konst. eine invariante Kurvenschar vorstellt und daher eine Bedingung von der Form (6) erfüllt ist, so *läßt sich die Gleichung der Schar insbesondere auf eine solche Form* $\omega(x, y) =$ konst. *bringen, für die entweder:*

(9) $$\xi \omega_x + \eta \omega_y = 0 \quad \textit{oder} \quad \xi \omega_x + \eta \omega_y = 1$$

ist, je nachdem die Schar aus allen Bahnkurven besteht oder nicht.

Jetzt soll die Betrachtung umgekehrt werden. Es sei also $\omega(x, y)$ eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion von x und y, die einer der beiden Bedingungen (9) genügt; alsdann soll gezeigt werden, daß $\omega =$ konst. eine invariante Kurvenschar darstellt.

Werden unter x und y die Funktionen (2) von t verstanden, so ist:

$$\frac{d\omega(x, y)}{dt} = \omega_x \frac{dx}{dt} + \omega_y \frac{dy}{dt},$$

also nach (4) gerade gleich dem in (9) links stehenden Ausdrucke. Mithin folgt aus (9):

$$\frac{d\omega(x,y)}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\omega(x,y)}{dt} = 1,$$

d. h. $\omega(x, y)$ ist entweder frei von t, also nur von x_0 und y_0 abhängig, oder $\omega(x, y)$ ist gleich t, vermehrt um eine nur von x_0 und y_0 abhängige Funktion. Da außerdem x und y für $t = 0$ die Werte x_0 und y_0 annehmen, folgt also:

(10) $$\omega(x, y) = \omega(x_0, y_0) \quad \text{oder} \quad \omega(x, y) = t + \omega(x_0, y_0).$$

Sobald die erste oder zweite Bedingung (9) erfüllt ist und unter x und y die Funktionen (2) verstanden werden, besteht demnach die erste oder zweite Gleichung (10). Dies besagt: Vermöge einer Transformation $\mathfrak{T}_t$ der Gruppe geht die Kurve $\omega(x_0, y_0) = c_0$ entweder in die Kurve $\omega(x, y) = c_0$, d. h. *in sich selbst*, oder in die Kurve $\omega(x, y) = t + c_0$, d. h. *in eine andere Kurve der Schar* $\omega(x, y) =$ konst. über. Mithin gilt der

Satz 20: Eine einfach unendliche Kurvenschar $\omega(x, y) =$ konst. *bleibt bei der von der infinitesimalen Transformation:*

$$\xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}$$

erzeugten eingliedrigen Gruppe dann und nur dann invariant, wenn eine Gleichung von der Form:

$$\xi(x, y)\frac{\partial \omega}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial \omega}{\partial y} = \Omega(\omega)$$

besteht, in der $\Omega(\omega)$ *eine Funktion von* ω *allein ist. Vorausgesetzt wird dabei ein Bereich, in dem* ξ, η, ω *und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind. Insbesondere besteht die Schar* $\omega =$ konst. *aus allen einzeln invarianten Bahnkurven der Gruppe, wenn* $\Omega(\omega)$ *verschwindet. Ist dies nicht der Fall, so kann die Gleichung der invarianten Kurvenschar stets in einer solchen Form* $\omega =$ konst. *angenommen werden, für die insbesondere* $\Omega = 1$, *also:*

$$\xi(x, y)\frac{\partial \omega}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial \omega}{\partial y} = 1$$

wird.

Es ist bemerkenswert, daß das gefundene Kennzeichen für die Invarianz einer einfach unendlichen Kurvenschar auch schon dann aufgestellt werden kann, *wenn man nur die infinitesimale Transformation der Gruppe, also die Funktionen* $\xi(x, y)$ *und* $\eta(x, y)$ *kennt,* so daß die Integration des Systems (4) nicht nötig ist. Man kann daher sagen: Die Kurvenschar $\omega =$ konst. bleibt bei allen Transformationen der Gruppe invariant, wenn sie bei der infinitesimalen Transformation invariant ist. Wenn wir nämlich für den Augenblick wie in Nr. 734 unendlich kleine Größen benutzen und die infinitesimale Transformation wie damals unter (7) in der Form:

$$\delta x = \xi(x, y)\delta t, \quad \delta y = \eta(x, y)\delta t$$

schreiben, erfährt $\omega(x, y)$ bei dieser infinitesimalen Transformation den unendlich kleinen Zuwachs:

$$\delta\omega(x, y) = \omega_x \delta x + \omega_y \delta y = (\xi\omega_x + \eta\omega_y)\delta t,$$

der infolge der letzten Formel des Satzes 20 gleich δt ist, so daß also

$$\omega(x, y) = t \;\text{ in }\; \omega(x + \delta x, y + \delta y) = t + \delta t$$

übergeht, d. h. die infinitesimale Transformation führt jede Kurve $\omega = t$ der Schar in eine unendlich benachbarte Kurve der Schar über. Doch wollen wir, wie schon in Nr. 734 hervorgehoben wurde, von unendlich kleinen Größen keinen Gebrauch machen. Vielmehr soll diese Abschweifung nur eine oft gebrauchte Redeweise begründen: Man sagt, *daß die Kurvenschar* $\omega(x, y) =$ konst. *bei der infinitesimalen Transformation invariant bleibt*, wenn die in Satz 20 aufgestellte analytische Bedingung erfüllt ist. Demnach besteht das wesentliche des Satzes darin, *daß die Kurvenschar* $\omega =$ konst. *bei der Gruppe invariant bleibt, sobald sie bei der infinitesimalen Transformation der Gruppe invariant ist.*

Anstatt zu sagen, daß die Kurvenschar bei der Gruppe bzw. bei ihrer infinitesimalen Transformation invariant ist, drückt man sich auch so aus: *Die Kurvenschar gestattet die Gruppe bzw. ihre infinitesimale Transformation*, oder auch: *Sie läßt sie zu.*

738. Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, die eine bekannte infinitesimale Transformation gestattet. Nunmehr kann die Theorie auf unser eigentliches Problem, das der Integration einer vorgelegten gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, angewandt werden. Diese Differentialgleichung sei wie in Nr. 676 in der Form geschrieben:

$$X(x, y)dy - Y(x, y)dx = 0 \tag{1}$$

Man sagt, daß die Differentialgleichung die infinitesimale Transformation:

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2}$$

gestattet oder bei ihr invariant bleibt, wenn die einfach unendliche Schar der Integralkurven $\omega(x, y) =$ konst. der Differentialgleichung die infinitesimale Transformation zuläßt. Nach den letzten Erörterungen steht dann fest, daß die Schar aller Integralkurven auch alle Transformationen der zugehörigen eingliedrigen Gruppe gestattet, so daß man alsdann auch sagen kann, *daß die Differentialgleichung bei der eingliedrigen Gruppe invariant bleibt.*

Wir nehmen an, die Schar der Integralkurven $\omega(x, y) =$ konst. der vorgelegten Differentialgleichung (1) sei noch unbekannt, das Integral $\omega(x, y)$ sei also noch nicht gefunden. Dagegen soll (2) eine *bekannte* infinitesimale Transformation sein, *bei der die Differentialgleichung invariant bleibt.* Dabei wird vorausgesetzt, daß X, Y, ξ, η und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung in einem gemeinsamen Bereiche stetig seien.

Unter diesen Umständen kann man zwei Bedingungen angeben, die von den noch unbekannten Ableitungen ω_x und ω_y des Integrals ω erfüllt werden müssen. Einerseits nämlich stellt $\omega =$ konst. dann und nur dann das Integral vor, wenn die Gleichung:

$$\omega_x dx + \omega_y dy = 0$$

infolge von (1), d. h. infolge von $dy : dx = Y : X$ besteht, so daß:

$$X\omega_x + Y\omega_y = 0 \tag{3}$$

sein muß. Andererseits muß das in Satz 20 der letzten Nummer aufgestellte Kennzeichen der Invarianz erfüllt sein. Indem wir uns daran erinnern, daß nach Satz 3 von Nr. 706 auch jede Funktion von ω ein Integral bedeutet, sehen wir, daß das Kennzeichen in der Form:

$$\xi\omega_x + \eta\omega_y = 0 \quad \text{oder} \quad \xi\omega_x + \eta\omega_y = 1 \tag{4}$$

geschrieben werden kann.

Liegt zunächst der erste Fall vor:

$$\xi\omega_x + \eta\omega_y = 0, \tag{5}$$

so wissen wir, daß jede einzelne Kurve $\omega(x, y) =$ konst. bei der infinitesimalen Transformation invariant bleibt, d. h. dann sind die Integralkurven von (1) die Bahnkurven der Gruppe. Die Gleichungen (3) und (5) können aber nur dann zusammen bestehen, wenn ihre Determinante:

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ \xi & \eta \end{vmatrix} = 0,$$

also:

$$\xi = \varrho X, \quad \eta = \varrho Y$$

ist, wo ϱ irgend eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion von x und y bedeutet. Demnach werden alle diejenigen infinitesimalen Transformationen, die jede einzelne Integralkurve der Differentialgleichung (1) invariant lassen, durch das Symbol:

$$\varrho(x, y)\left[X(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + Y(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}\right] \tag{6}$$

dargestellt. Sie sind bekannt, sobald nur die Differentialgleichung (1) vorliegt. Aus diesem Grunde ist es nicht überraschend, daß solche infinitesimale Transformationen für die Aufgabe, die Differentialgleichung (1) zu integrieren, keinen Vorteil mit sich bringen. Man nennt sie *triviale* infinitesimale Transformationen der Differentialgleichung (1). Sie lassen sich auch so charakterisieren: Eine triviale infinitesimale Transformation führt jeden Punkt (x, y) um unendlich wenig in derjenigen Richtung vorwärts, die durch das Linienelement angegeben wird, das dem Punkte vermöge der Differentialgleichung nach (7) in Nr. 734 zugeordnet wird, da ξ und η hier zu X und Y proportional sind.

Bedeutet dagegen (2) eine *nicht* triviale bekannte infinitesimale Transformation, bei der die Differentialgleichung (1) invariant bleibt, so gibt es ein Integral $\omega(x, y)$, das der Gleichung (3) und der zweiten Gleichung (4) genügt. Aus beiden lassen sich, da jetzt die Determinante $X\eta - Y\xi \neq 0$ ist, ω_x und ω_y berechnen. Es kommt:

$$\omega_x = \frac{-Y}{X\eta - Y\xi}, \quad \omega_y = \frac{X}{X\eta - Y\xi}. \tag{7}$$

Also ist das vollständige Differential $d\omega$ des Integrals ω bekannt, so daß sich ω mittels Quadraturen bestimmen läßt. Mithin gilt der von *Lie* herrührende

Satz 21: Gestattet die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$X(x, y)dy - Y(x, y)dx = 0$$

die nicht triviale infinitesimale Transformation:

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

so ist:

$$d\omega = \frac{X dy - Y dx}{X\eta - Y\xi} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ X & Y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ X & Y \end{vmatrix}}$$

das vollständige Differential eines Integrals, d. h. es ist dann:

$$\frac{1}{X\eta - Y\xi}$$

ein Multiplikator der Differentialgleichung. Vorausgesetzt ist dabei ein Bereich, in dem X, Y, ξ, η und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind.

739. Beispiele. Eine infinitesimale Transformation:

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{1}$$

bei der die Differentialgleichung:

$$X(x, y)dy - Y(x, y)dx = 0 \tag{2}$$

invariant bleibt, nennt man häufig einfacher eine *infinitesimale Transformation der Differentialgleichung.* Manche Aufgaben, die auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung hinauskommen, sind so beschaffen, daß man von vornherein eine nicht triviale infinitesimale Transformation der Differentialgleichung anzugeben vermag und zwar schon, bevor man die Differentialgleichung selbst überhaupt aufgestellt hat, so daß man dann von vornherein weiß, daß die Lösung des Problems mittels Quadraturen möglich ist. Die folgenden Beispiele sowie Beispiele in den späteren Nummern zeigen dies.

1. Beispiel: Gesucht werden diejenigen Kurven in der Ebene, deren Bogenlänge s als Funktion der rechtwinkligen Koordinaten x und y in der Form:

$$s = \varphi(x) + y + \text{konst.} \tag{3}$$

gegeben ist. Jede solche Kurve geht vermöge einer Transformation, bei der sich $\varphi(x) + y$ nur um eine additive Konstante ändert, in eine ebensolche Kurve über. Solche Transformationen sind offenbar die Schiebungen parallel der y-Achse:

$$x = x_0, \quad y = y_0 + t, \tag{4}$$

wo t eine beliebige Konstante bedeutet. Denn infolge dieser Transformation ist:

$$\varphi(x) + y = \varphi(x_0) + y_0 + t.$$

Die infinitesimale Transformation der eingliedrigen Gruppe von Schiebungen (4) parallel der y-Achse hat nach dem 4. Beispiele in Nr. 735 das Symbol:

$$\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Hier wird insbesondere $\xi = 0, \eta = 1$. Wenn die Gleichung (2) die Differentialgleichung des vorliegenden Problems ist, muß daher nach dem letzten Satze $1 : X$ ein Multiplikator der Differentialgleichung sein. Nun ergibt sich die Differentialgleichung aus (3) nach (1) in Nr. 193 durch Differentiation in der Form:

$$\sqrt{1+y'^2} = \varphi'(x) + y'$$

oder, wenn die Gleichung nach y' aufgelöst und dann y' durch $dy : dx$ ersetzt wird:

$$2\varphi'(x)\,dy - [1-\varphi'(x)^2]\,dx = 0.$$

Hier ist $X = 2\varphi'(x)$, und die Division mit X gibt in der Tat das vollständige Differential:

$$dy - \frac{1-\varphi'(x)^2}{2\varphi'(x)}\,dx$$

des Integrals:

$$y - \int \frac{1-\varphi'(x)^2}{2\varphi'(x)}\,dx = \text{konst.}$$

2. Beispiel: Ist die Differentialgleichung (2) *homogen*, vgl. Nr. 715, 725, so dürfen wir annehmen, daß X und Y homogene Funktionen von gleichem Grade m seien. Die Richtung des einem Punkte (x, y) zugeordneten Linienelements, die sich aus:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}$$

ergibt, hängt daher von $y : x$ allein ab. Allen Punkten (x, y) ein und desselben Strahls vom Anfangspunkte O aus sind demnach *parallele* Linienelemente zugeordnet. Also sind die Linienelemente etwa so gelagert, wie es Fig. 29 andeutet. Wird irgend eine Kurve ins Auge gefaßt, so weiß man, daß eine *Streckung* vom Anfangspunkte O aus (vgl. das 2. Beispiel in Nr. 733) die Kurve in eine ähnliche Kurve verwandelt und zwar so, daß die neue Kurve irgend einen Strahl von O aus unter demselben Winkel schneidet wie die alte Kurve. Hieraus schließt man, daß jede Integralkurve k der homogenen Differentialgleichung bei allen Streckungen von O aus stets wieder in Integralkurven k', k'', ... übergeht. Die Differentialgleichung gestattet demnach die infinitesimale Streckung von O aus, deren Symbol nach dem 2. Beispiele in Nr. 735 ist:

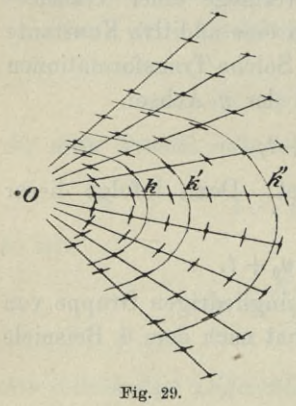

Fig. 29.

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Nach Satz 21 muß deshalb der reziproke Wert von $Xy - Yx$ ein Multiplikator sein. Dasselbe ergab sich in Nr. 725, wo X und Y mit V und $-U$ bezeichnet wurden.

3. Beispiel: Es liege eine Differentialgleichung vor von der Form:

$$\frac{xy'-y}{x+yy'}=\varphi(x^2+y^2) \tag{5}$$

oder:

$$(x-y\varphi)dy-(y+x\varphi)dx=0, \tag{6}$$

wo φ eine Funktion von x^2+y^2 allein sein soll. Ist τ bzw. ω der Winkel, den ein Linienelement (x, y, y') der Differentialgleichung bzw. der Radiusvektor des Punktes (x, y) dieses Elements mit der positiven x-Achse bildet, so folgt aus (5):

$$\frac{\operatorname{tg}\tau-\operatorname{tg}\omega}{1+\operatorname{tg}\tau\operatorname{tg}\omega}=\varphi,\quad \text{d. h.}\quad \operatorname{tg}(\tau-\omega)=\varphi.$$

Da φ nur von x^2+y^2 abhängt, sind allen Punkten eines Kreises mit dem Mittelpunkte O solche Linienelemente zugeordnet, die mit dem Kreise denselben Winkel bilden. Die Lagerung der Linienelemente ist also etwa so, wie es Fig. 30 andeutet. Irgend eine *Drehung um O* ändert dies Bild nicht. Deshalb gestattet die Differentialgleichung (6) die eingliedrige Gruppe aller Drehungen um O, deren infinitesimale Transformation nach dem 1. Beispiele in Nr. 735 das Symbol hat:

$$-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

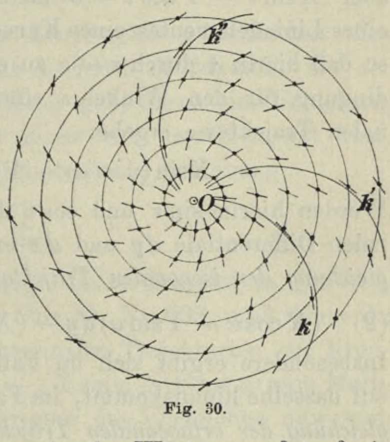

Fig. 30.

Nach Satz 21 ist folglich der reziproke Wert von x^2+y^2 ein Multiplikator. In der Tat geht die linke Seite von (6) durch Division mit x^2+y^2 in das vollständige Differential über:

$$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\frac{\varphi(x^2+y^2)}{x^2+y^2}(xdx+ydy),$$

so daß eine Quadratur das Integral:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{\varphi(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \, d(x^2 + y^2) = \text{konst.}$$

liefert. Dabei ist $x^2 + y^2$ die Veränderliche des Integranden.

740. Anwendung auf das Problem der isogonalen Trajektorien. Diejenigen Kurven k, die alle Kurven γ einer einfach unendlichen Schar in der Ebene unter einem konstanten Winkel α schneiden, heißen die zum Winkel α gehörigen *isogonalen Trajektorien der Schar* γ, siehe Fig. 31. Wenn die Schar γ aus den Integralkurven der Differentialgleichung:

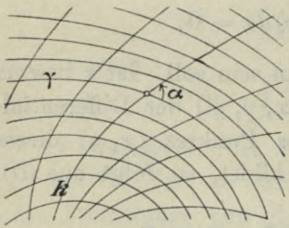

Fig. 31.

(1) $\quad X(x, y)\, dy - Y(x, y)\, dx = 0$

besteht, kann man daraus die Differentialgleichung jener Trajektorien in sehr einfacher Weise gewinnen. Denn die Linienelemente der Trajektorien gehen aus denen der Kurven γ hervor, wenn man diese um ihre Punkte herumdreht und zwar um den Winkel α. Nach (1) ist aber $X \sin\tau - Y \cos\tau = 0$ die Bedingung für den Winkel τ eines Linienelementes einer Kurve γ mit der positiven x-Achse, so daß hierin τ durch $\tau - \alpha$ zu ersetzen ist, damit sich die Bedingung für den Winkel τ eines Linienelements einer isogonalen Trajektorie ergebe:

$$X \sin(\tau - \alpha) - Y \cos(\tau - \alpha) = 0.$$

Werden hierin $\sin\tau$ und $\cos\tau$ durch die zu ihnen proportionalen Differentiale dy und dx ersetzt, so geht die *Differentialgleichung der isogonalen Trajektorien* hervor:

(2) $\quad (X \cos\alpha - Y \sin\alpha)\, dy - (X \sin\alpha + Y \cos\alpha)\, dx = 0.$

Insbesondere ergibt sich im Falle $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ oder, was übrigens auf dasselbe hinauskommt, im Falle $\alpha = -\frac{1}{2}\pi$ die *Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien:*

(3) $$Y dy + X dx = 0.$$

Man kann eine ausgedehnte Klasse von Differentialgleichungen von der Form (2) angeben, die sich mittels Quadraturen integrieren lassen. Die gegebene Kurvenschar γ gestatte nämlich eine eingliedrige Gruppe von lauter *konformen* oder *winkeltreuen* Transformationen, d. h. von Transformationen, *bei denen zwei Kurven, die einander schneiden, stets in solche zwei Kurven übergehen, die denselben Winkel mit einander bilden wie die ursprünglichen.* Dann werden die Transformationen dieser Gruppe auch jede Kurve, die alle Kurven γ unter dem Winkel α schneidet, in ebensolche Kurven verwandeln, so daß die Differentialgleichung (2) die eingliedrige Gruppe gestattet und sich nach Satz 21, Nr. 738, mittels Quadraturen integrieren läßt. Eingliedrige Gruppen von der erwähnten Art sind z. B. die Gruppe aller Schiebungen nach einer bestimmten Richtung hin, die Gruppe aller Drehungen um einen Punkt O und die Gruppe aller Streckungen von einem Punkte O aus. Ein hierhergehöriges Beispiel wurde schon in Nr. 714 besprochen, nämlich die Bestimmung der isogonalen Trajektorien aller Strahlen von O aus, d. h. der *logarithmischen Spiralen* mit dem Pole O. In diesem Falle ist die Gruppe aller Streckungen von O aus in der soeben auseinandergesetzten Weise anzuwenden.

Zunächst geben wir drei Beispiele, in denen die drei genannten speziellen Gruppen auftreten.

1. Beispiel: Die gegebene Kurvenschar γ bestehe aus allen denjenigen Kreisen vom Radius a, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Jeder solche Kreis geht durch eine Schiebung parallel der x-Achse in einen Kreis von derselben Art über, so daß also die Schar γ die infinitesimale Schiebung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

parallel der x-Achse zuläßt (vgl. das 4. Beispiel in Nr. 735). Hier ist $\xi = 1$, $\eta = 0$. Nach Satz 21, Nr. 738, muß daher die Differentialgleichung (2) der isogonalen Trajektorien der Kreisschar den reziproken Wert von $-(X \sin\alpha + Y \cos\alpha)$ zum Multiplikator haben. Hierbei ist übrigens das Vorzeichen unwesentlich, weil ein Multiplikator mit einer beliebigen Konstante multipliziert werden darf. Um nun die Differentialgleichung (2) im vorliegenden Falle zu bilden, stellt man zuerst die Gleichung:

$$(x - C)^2 + y^2 = a^2$$

der Kreisschar auf, differenziert sie und eliminiert aus beiden Gleichungen C, wodurch man die Differentialgleichung (1) in der Form gewinnt:

$$y\,dy + \sqrt{a^2 - y^2}\,dx = 0.$$

Folglich ist $X = y$, $Y = -\sqrt{a^2 - y^2}$ zu setzen, so daß sich als Differentialgleichung (2) der isogonalen Trajektorien ergibt:

$$(y \cos\alpha + \sqrt{a^2 - y^2} \sin\alpha)\,dy - (y \sin\alpha - \sqrt{a^2 - y^2} \cos\alpha)\,dx = 0.$$

Der Wert von $X \sin\alpha + Y \cos\alpha$ ist hier $y \sin\alpha - \sqrt{a^2 - y^2} \cos\alpha$. Der reziproke Wert stellt einen Multiplikator vor. Die Gleichung der gesuchten isogonalen Trajektorie ergibt sich mithin in der Form:

$$\int \frac{y \cos\alpha + \sqrt{a^2 - y^2} \sin\alpha}{y \sin\alpha - \sqrt{a^2 - y^2} \cos\alpha}\,dy - x = \text{konst.}$$

Die noch erforderliche Quadratur ist mittels der Substitutionen $y = a \sin z$ und $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2} z$ (siehe Nr. 452) leicht zu leisten. Insbesondere geht für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ die Gleichung der orthogonalen Trajektorien hervor, die übrigens, wie man sofort aus der konstanten Tangentenlänge a sieht, die im 2. Beispiele von Nr. 713 berechneten *Traktrizen* mit der x-Achse als Leitlinie sind.

2. *Beispiel: Die gegebene Kurvenschar γ bestehe aus den konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten:*

$$Ax^2 + By^2 = \text{konst.}, \tag{4}$$

wo A und B gegebene Konstanten sind. Jede Streckung vom Anfangspunkte O aus führt jeden Kegelschnitt der Schar in einen Kegelschnitt derselben Schar über. Die Differentialgleichung (2) der isogonalen Trajektorien läßt folglich in diesem Falle die infinitesimale Streckung:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$$

zu (vgl. das 2. Beispiel in Nr. 735) und hat daher nach Satz 21, Nr. 738, als Multiplikator den reziproken Wert von:

$$(X \cos\alpha - Y \sin\alpha) y - (X \sin\alpha + Y \cos\alpha) x.$$

Durch Differentiation von (4) ergibt sich sofort die Differentialgleichung der Kegelschnittschar:

$$Ax\,dx + By\,dy = 0,$$

also $X = By$, $Y = -Ax$, so daß die Differentialgleichung (2) der isogonalen Trajektorien lautet:

$$(By\cos\alpha + Ax\sin\alpha)dy - (By\sin\alpha - Ax\cos\alpha)dx = 0.$$

Sie hat demnach den Multiplikator:

$$\frac{1}{(A-B)xy\sin\alpha + (Ax^2 + By^2)\cos\alpha}.$$

Übrigens liegt hier eine *homogene* Differentialgleichung vor (nach Nr. 715). Insbesondere gibt die Annahme $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ die *orthogonalen* Trajektorien der Kegelschnittschar (4) in der Form:

$$\frac{A}{B-A}\ln y - \frac{B}{B-A}\ln x = \text{konst.} \quad \text{oder} \quad y = \text{konst.}\, x^{\frac{B}{A}}.$$

3. *Beispiel: Die gegebene Kurvenschar γ bestehe aus allen Kreisen vom Radius a, deren Mittelpunkte auf einem Kreise K liegen.* Diese Kreisschar gestattet die Gruppe aller Drehungen um den Mittelpunkt O des Kreises K, so daß also die Differentialgleichung der isogonalen Trajektorien die infinitesimale Drehung:

$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$$

zuläßt (vgl. das 1. Beispiel in Nr. 735), falls O als Anfangspunkt gewählt wird. Die weitere Berechnung sei dem Leser überlassen.

Nicht immer weiß man von vornherein die anzuwendende infinitesimale *konforme* Transformation:

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} \tag{5}$$

anzugeben, vielmehr muß man sie unter Umständen erst suchen. Dabei ist zu beachten, daß die Winkeltreue der infinitesimalen Transformation darin zum Ausdrucke kommt, daß der Übergang von den Punkten (x, y) zu den Punkten $(x + \xi\delta t,\ y + \eta\delta t)$ eine *konforme Abbildung* bedeutet, also $x + \xi\delta t + i(y + \eta\delta t)$ oder $\xi + i\eta$ eine monogene Funktion $f(x + iy)$ von $x + iy$ ist (siehe Nr. 626). Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn ξ und η die Cauchy-Riemannschen Gleichungen von Nr. 623 erfüllen:

$$\xi_x = \eta_y, \quad \xi_y = -\eta_x. \tag{6}$$

Dann kann das System, das die Gruppe erzeugt, nämlich:

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y)$$

in einer Gleichung:

$$\frac{d(x + iy)}{dt} = f(x + iy)$$

zusammengefaßt werden. Bedeutet $F(x + iy)$ eine monogene Funktion, deren Ableitung gleich $1 : f(x + iy)$ ist, so gibt die letzte Gleichung $F(x + iy) = t +$ konst., also, da $x + iy$ für $t = 0$ den Wert $x_0 + iy_0$ haben soll:

$$F(x + iy) = F(x_0 + iy_0) + t.$$

Hiernach ist $x + iy$ eine monogene Funktion von $x_0 + iy_0$. Wenn also die Bedingungen (6) erfüllt sind, besteht auch die von der infinitesimalen Transformation (5) erzeugte eingliedrige Gruppe aus lauter winkeltreuen oder konformen Transformationen.

4. *Beispiel: Die gegebene Kurvenschar γ bestehe aus allen konzentrischen gleichseitigen Hyperbeln mit einem gemeinsamen Durchmesser PP'.* Wird der Mittelpunkt O der Hyperbeln als Anfangspunkt, die Gerade OP als x-Achse gewählt und die Strecke OP mit a bezeichnet, so ist:

$$x^2 - y^2 - a^2 + 2Cxy = 0 \tag{7}$$

die Gleichung der Hyperbelschar. Vollständige Differentiation nach x und Elimination von C gibt ihre Differentialgleichung:

$$x\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right)dy - y\left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right)dx = 0. \tag{8}$$

Dies ist hier die Gleichung (1). Die Differentialgleichung der isogonalen Trajektorien lautet nach (2):

$$\begin{cases} \left[x \cos\alpha - y \sin\alpha - \dfrac{a^2}{x^2 + y^2}(x \cos\alpha + y \sin\alpha)\right]dy \\ -\left[x \sin\alpha + y \cos\alpha - \dfrac{a^2}{x^2 + y^2}(x \sin\alpha - y \cos\alpha)\right]dx = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Diese Differentialgleichung könnte man integrieren, wenn eine solche infinitesimale konforme Transformation bekannt wäre, bei der die Schar der Hyperbeln invariant bleibt. Am einfachsten ist es, zu verlangen, daß jede einzelne Hyperbel invariant bleibe, d. h. daß die gesuchte infinitesimale Transformation für die Differentialgleichung (8) *trivial* sei. Dann haben ξ und η nach (6) in Nr. 738 die Form:

$$\xi = \varrho x\left(1 - \frac{a^2}{x^2+y^2}\right), \quad \eta = \varrho y\left(1 + \frac{a^2}{x^2+y^2}\right).$$

Nun sollen aber ξ und η die Bedingungen (6) erfüllen, die einfach $\varrho_x = \varrho_y = 0$, also $\varrho =$ konst. geben. Wählt man z. B. $\varrho = 1$, so folgt also, daß die Differentialgleichung (9) die infinitesimale konforme Transformation:

$$x\left(1 - \frac{a^2}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + y\left(1 + \frac{a^2}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial f}{\partial y}$$

gestattet. Nach Satz 21 von Nr. 738 ist deshalb ein Multiplikator bekannt, nämlich:

$$-\frac{x^2+y^2}{\sin\alpha\,[(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + a^4]}.$$

Wird zur Abkürzung:

$$\psi = (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + a^4 \tag{10}$$

gesetzt, so ist mithin auch $4(x^2+y^2):\psi$ ein Multiplikator. Die Gleichung (9) nimmt nach Multiplikation mit ihm die Form an:

$$\frac{\psi_y dx - \psi_x dy}{\psi}\cos\alpha + \frac{\psi_x dx + \psi_y dy}{\psi}\sin\alpha = 0. \tag{11}$$

Der mit $\sin\alpha$ multiplizierte Bruch ist das vollständige Differential von $\ln\psi$. Im Falle $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ergibt sich somit, daß $\psi =$ konst. die Schar der *orthogonalen* Trajektorien vorstellt. Da wir wissen, daß sich im Falle $\alpha = 0$ die Schar der Hyperbeln selbst ergeben muß, die nach (7) in der Form:

$$\varphi = \frac{x^2-y^2-a^2}{xy} = \text{konst.} \tag{12}$$

darstellbar ist, muß der in (11) mit $\cos\alpha$ multiplizierte Bruch das vollständige Differential einer Funktion von φ allein sein. In der Tat ist nach (12) und (10):

$$d\varphi = \frac{\psi_y dx - \psi_x dy}{4x^2y^2} \quad \text{und} \quad \psi = x^2y^2(\varphi^2+4),$$

so daß jener Ausdruck die Form $d\varphi : (\frac{1}{4}\varphi^2 + 1)$ hat, also das vollständige Differential von $2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{2}\varphi$ ist. Mithin stellt:

$$2\,\mathrm{arc\,tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi\cdot\cos\alpha + \ln\psi\cdot\sin\alpha = \text{konst.}$$

die Schar der *isogonalen* Trajektorien der Hyperbeln (7) dar. Werden Polarkoordinaten ω und ϱ eingeführt, so geht die Gleichung $\psi =$ konst. der *orthogonalen* Trajektorien über in:

$$\varrho^4 - 2a^2\varrho^2 \cos 2\omega = \text{konst.}$$

Dies sind nach (1) in Nr. 554 *Cassinische Kurven*, wobei die damals mit F_1 und F_2 bezeichneten Punkte die beiden gemeinsamen Punkte der Hyperbeln (7) sind, nämlich der Punkt P und sein Gegenpunkt P'.

741. Bedingung dafür, daß die Differentialgleichung eine infinitesimale Transformation gestattet. Ist ein Integral $\omega(x, y)$ der Differentialgleichung:

$$X(x, y)dy - Y(x, y)dx = 0 \tag{1}$$

bekannt, so vermag man auf Grund des Satzes 20 von Nr. 737 zu entscheiden, ob die Differentialgleichung eine gegebene infinitesimale Transformation:

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2}$$

zuläßt. Es entsteht aber die Frage, wie man dies entscheidet, wenn das Integral ω noch nicht bekannt ist. Zur Beantwortung schlagen wir den Weg ein, den der Satz 21 von Nr. 738 unmittelbar bietet.

Danach ist zu fordern, daß:

$$d\omega = \frac{X dy - Y dx}{X\eta - Y\xi} \tag{3}$$

ein vollständiges Differential, also:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{X}{X\eta - Y\xi} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{Y}{X\eta - Y\xi} = 0$$

sei. Dies gibt ausgerechnet:

$$Y(\xi X_x + \eta X_y - X\xi_x - Y\xi_y) - X(\xi Y_x + \eta Y_y - X\eta_x - Y\eta_y) = 0. \tag{4}$$

Erfüllen ξ und η diese Bedingung, so ist (3) ein vollständiges Differential, daher:

$$\omega_x = \frac{-Y}{X\eta - Y\xi}, \quad \omega_y = \frac{X}{X\eta - Y\xi},$$

mithin:

$$\xi\omega_x + \eta\omega_y = 1,$$

so daß die Schar der Integralkurven $\omega(x, y) = \text{konst.}$ in der Tat nach Satz 20, Nr. 737, die infinitesimale Transformation (2) gestattet. Folglich haben wir den

Satz 22: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Differentialgleichung:

$$X(x, y)dy - Y(x, y)dx = 0$$

die infinitesimale Transformation:

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

gestattet, lautet:

$$Y(\xi X_x + \eta X_y - X\xi_x - Y\xi_y) - X(\xi Y_x + \eta Y_y - X\eta_x - Y\eta_y) = 0.$$

Sie gilt auch für die *trivialen* infinitesimalen Transformationen (vgl. (6) in Nr. 738), da sie durch die Annahmen $\xi = \varrho X$, $\eta = \varrho Y$ erfüllt wird, welche Funktion von x und y auch ϱ sein mag.

1. Beispiel: Die *lineare Differentialgleichung:*

$$y' = f_0(x)y + f_1(x), \tag{5}$$

siehe Nr. 716, lautet, als totale Gleichung geschrieben:

$$dy - (f_0 y + f_1)dx = 0. \tag{6}$$

Hier ist $X = 1$, $Y = f_0 y + f_1$. Weil f_0 und f_1 nur von x abhängen, gibt die Bedingung des Satzes:

$$(f_0 y + f_1)[\xi_x + (f_0 y + f_1)\xi_y] + \\ \xi(f_0' y + f_1') + \eta f_0 - \eta_x - (f_0 y + f_1)\eta_y = 0.$$

Wünscht man die Gleichung (5) zu integrieren, so braucht man nicht alle ihre infinitesimalen Transformationen zu kennen, sondern es genügt eine und zwar eine nicht triviale. Demnach wird man versuchen, besonders einfache Funktionen $\xi(x, y)$ und $\eta(x, y)$ zu finden, die der aufgestellten Bedingung genügen. Z. B. bleibt bei der Annahme $\xi = 0$ für η die Bedingung übrig:

$$\eta f_0 - \eta_x - (f_0 y + f_1)\eta_y = 0,$$

und da f_0 und f_1 nur von x abhängen, kann man sie durch eine nur von x abhängige Funktion η befriedigen, denn für eine solche Funktion bleibt übrig:

$$\eta' = f_0(x)\eta. \tag{7}$$

Daher gestattet die lineare Differentialgleichung (5) die infinitesimale Transformation mit dem Symbol:

$$\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y},$$

falls η eine Funktion von x ist, die der Differentialgleichung (7) genügt, d. h. der zur vorgelegten linearen Differentialgleichung (5) gehörigen *verkürzten* Gleichung (siehe (2) in Nr. 716). Aus (7) folgt sofort, daß:

$$\eta = e^{\int_a^x f_0(x)\,dx}$$

gesetzt werden kann, wobei die untere Grenze a des Integrals bestimmt gewählt werden darf. Nach Satz 21, Nr. 738, ist daher:

$$M = \frac{1}{X\eta - Y\xi} = e^{-\int_a^x f_0(x)\,dx}$$

ein Multiplikator von (5). Dasselbe ergab sich in Nr. 726.

Schließlich werde noch die Bedingung des Satzes 22 auf diejenige Form gebracht, die in der von *Lie* entwickelten Theorie der Transformationsgruppen gebräuchlich ist. Dazu bedürfen wir des sogenannten *Klammerausdrucks.* Unter dem Klammerausdruck:

$$\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y},\ \ X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{8}$$

versteht man folgendes: Zuerst soll der Ausdruck:

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} \tag{9}$$

für den Fall berechnet werden, wo f darin durch den Wert:

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} \tag{10}$$

ersetzt wird; dann soll der Ausdruck (10) für den Fall berechnet werden, wo f darin durch den Wert (9) ersetzt wird, schließlich soll das zweite Ergebnis vom ersten abgezogen werden. Der Klammerausdruck (8) soll also bedeuten:

$$\xi\frac{\partial}{\partial x}\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \eta\frac{\partial}{\partial y}\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$- X\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}\right) - Y\frac{\partial}{\partial y}\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Werden alle Differentiationen ausgeführt, so heben sich alle diejenigen Glieder fort, in denen partielle Ableitungen *zweiter* Ordnung von f auftreten; mithin bleibt als Definition des Klammerausdrucks zweier Symbole übrig:

$$(11)\begin{cases} \left(\xi\dfrac{\partial f}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad X\dfrac{\partial f}{\partial x}+Y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)= \\ (\xi X_x+\eta X_y-X\xi_x-Y\xi_y)\dfrac{\partial f}{\partial x}+(\xi Y_x+\eta Y_y-X\eta_x-Y\eta_y)\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

Der Klammerausdruck zweier Symbole ist demnach wieder ein Symbol einer infinitesimalen Transformation.

Nun ist insbesondere:

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}$$

eine triviale infinitesimale Transformation der Differentialgleichung (1), nach (6) in Nr. 738. Wenn die Differentialgleichung die infinitesimale Transformation:

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

zuläßt, so besagt die dafür in Satz 22 aufgestellte Bedingung, daß die Koeffizienten von $\partial f:\partial x$ und $\partial f:\partial y$ in dem in (11) gefundenen Symbol zu X und Y proportional, also von der Form ϱX und ϱY sein müssen, d. h. daß das durch die Klammerbildung hervorgehende Symbol die Form:

$$\varrho\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

haben muß. Dies aber ist die allgemeine Form einer trivialen infinitesimalen Transformation der Differentialgleichung (1). Hiernach läßt sich der Satz 22 so aussprechen:

Satz 23: Die Differentialgleichung:

$$X(x,y)\,dy-Y(x,y)\,dx=0$$

gestattet die infinitesimale Transformation:

$$\xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

dann und nur dann, wenn der Klammerausdruck aus dieser und aus der trivialen infinitesimalen Transformation:

$$X(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+Y(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

der Differentialgleichung wieder eine triviale infinitesimale Transformation der Differentialgleichung gibt, d. h. wenn eine Gleichung besteht von der Form:

$$\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y},\quad X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\varrho(x,y)\cdot\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

2. Beispiel: Ist die Differentialgleichung *homogen*, d. h. sind X und Y homogene Funktionen gleichen Grades m von x und y, so gestattet die Gleichung nach dem 2. Beispiele in Nr. 739 die infinitesimale Streckung:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\cdot$$

Der Klammerausdruck liefert hier:

$$\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y},\quad X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}\right)=$$

$$(xX_x+yX_y-X)\frac{\partial f}{\partial x}+(xY_x+yY_y-Y)\frac{\partial f}{\partial y}\cdot$$

Weil aber nach Satz 9, Nr. 91:

$$xX_x+yX_y=mX,\quad xY_x+yY_y=mY$$

ist, erhält der Klammerausdruck den Wert:

$$(m-1)\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot$$

Hier ist also ϱ die Konstante $m-1$.

742. Neue Veränderliche in einer eingliedrigen Gruppe. Es seien φ und ψ zwei voneinander unabhängige stetige Funktionen von x und y mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung, so daß die Gleichungen:

$$\text{(1)}\qquad \bar{x}=\varphi(x,y),\quad \bar{y}=\psi(x,y)$$

auch umgekehrt x und y als Funktionen von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ definieren, vgl. Satz 18, Nr. 698. Alsdann sei die Aufgabe gestellt, in diejenige eingliedrige Gruppe, die von der infinitesimalen Transformation:

$$\text{(2)}\qquad \xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

erzeugt wird, die neuen Veränderlichen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ einzuführen.

Da man $\bar{x}$ und $\bar{y}$ als neue, krummlinige Koordinaten der Punkte der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x und y auffassen kann, bewirkt die Einführung der neuen Veränderlichen nicht etwa eine Umwandlung der Gruppe in eine andere, sondern nur eine andere analytische Darstellung der Gruppe. Die Transformationen der Gruppe sind als diejenigen Lösungensysteme des Systems:

$$\text{(3)}\qquad \frac{dx}{dt}=\xi(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=\eta(x,y)$$

definiert, die für $t = 0$ die Anfangswerte x_0 und y_0 haben. Setzt man entsprechend (1) noch:

$$\bar{x}_0 = \varphi(x_0, y_0), \quad \bar{y}_0 = \psi(x_0, y_0),$$

so gehen diese Lösungensysteme durch Einführung von $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x}_0$ und $\bar{y}_0$ in diejenigen Lösungensysteme eines neuen Systems in $\bar{x}$, $\bar{y}$ und t über, die für $t = 0$ die Anfangswerte $\bar{x}_0$ und $\bar{y}_0$ haben. Das neue System von Differentialgleichungen aber wird so gewonnen: Nach (1) und (3) ist:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \xi\varphi_x + \eta\varphi_y, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \xi\psi_x + \eta\psi_y.$$

Auf den rechten Seiten sind noch für x und y die zu den Funktionen (1) inversen Funktionen von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ einzuführen. Wenn sich dadurch die Funktionen:

$$\bar{\xi}(\bar{x}, \bar{y}) = \xi\varphi_x + \eta\varphi_y, \quad \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{y}) = \xi\psi_x + \eta\psi_y \tag{4}$$

ergeben, lautet das gesuchte neue System so:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{y}), \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{y}). \tag{5}$$

In der neuen Gestalt hat die Gruppe demnach die infinitesimale Transformation:

$$\bar{\xi}(\bar{x}, \bar{y})\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} + \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{y})\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}}. \tag{6}$$

Hierin bedeutet $\bar{f}$ eine beliebige differenzierbare Funktion von $\bar{x}$ und $\bar{y}$.

Zu derselben neuen Form (6) der infinitesimalen Transformation kommt man aber auch, wenn man direkt in dem Symbol (2) die neuen Veränderlichen einführt, wodurch f in eine Funktion $\bar{f}$ von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ übergeht. Denn dann ist nach (1):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}\varphi_x + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}}\psi_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}\varphi_y + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}}\psi_y,$$

und diese Werte sind in (2) einzusetzen, so daß in der Tat wegen der Bedeutung (4) von $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ gerade das Symbol (6) hervorgeht.

Übrigens wird die neue Gestalt des Symbols übersichtlicher, wenn man eine abkürzende Bezeichnung einführt. Man bemerkt nämlich, daß $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ nach (4) gerade diejenigen Werte sind, die das Symbol (2) annimmt, wenn darin f durch φ bzw. ψ ersetzt wird. Wenn also das Symbol (2) zur Abkürzung mit Uf bezeichnet wird, so sind $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ die Ausdrücke $U\varphi$ und $U\psi$, worin natürlich x, y mittels (1) noch durch $\bar{x}$, $\bar{y}$ auszudrücken sind. Die neue Form (6) des Symbols ist also, da φ und ψ mit $\bar{x}$ und $\bar{y}$ bezeichnet worden sind, einfach diese:

$$U\bar{x} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} + U\bar{y} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}} \cdot$$

Fassen wir alles zusammen, so können wir sagen:

Satz 24: Führt man in diejenige eingliedrige Gruppe, die von der infinitesimalen Transformation:

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

erzeugt wird, neue Veränderliche vermöge einer Substitution:

$$\bar{x} = \varphi(x, y), \quad \bar{y} = \psi(x, y)$$

ein, so wird die Gruppe in einer neuen Art dargestellt, nämlich von derjenigen infinitesimalen Transformation erzeugt, deren Symbol aus dem Symbol Uf durch direkte Einführung der neuen Veränderlichen hervorgeht und also die Form hat:

$$U\bar{x} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} + U\bar{y} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}} \cdot$$

Vorausgesetzt ist dabei ein Bereich, in dem ξ, η, φ, ψ und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind und die Funktionaldeterminante $\varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y$ nicht verschwindet.

Da $\bar{f}$ ebenso wie f irgendeine Funktion darstellt und $\bar{f} = f$ ist, werden wir künftig $\bar{f}$ mit f bezeichnen.

Beispiel: In die eingliedrige Gruppe aller Drehungen um den Anfangspunkt O sollen *Polarkoordinaten* ω, ϱ eingeführt werden. Die infinitesimale Drehung hat das Symbol:

$$Uf = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y},$$

siehe das 1. Beispiel in Nr. 735. Hier sind $\bar{x}$ und $\bar{y}$ die Größen:

$$\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nun wird:

$$U\omega = -y\frac{\partial \operatorname{arc\,tg}(y:x)}{\partial x} + x\frac{\partial \operatorname{arc\,tg}(y:x)}{\partial y} = 1,$$

$$U\varrho = -y\frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} + x\frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial y} = 0.$$

Folglich hat die infinitesimale Drehung um O in Polarkoordinaten ω, ϱ das Symbol:

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}.$$

In der Tat lautet das hierzu gehörige System von Differentialgleichungen, das die Gruppe definiert, so:

$$\frac{d\omega}{dt} = 1, \quad \frac{d\varrho}{dt} = 0$$

und gibt integriert:

$$\omega = \omega_0 + t, \quad \varrho = \varrho_0.$$

Dies ist die einfachste analytische Darstellung der Gruppe aller Drehungen um O.

743. Integration durch Einführung kanonischer Veränderlicher. Wir machen von dem Vorhergehenden eine besondere Anwendung. Die vorgelegte Differentialgleichung:

$$(1) \qquad X(x, y)dy - Y(x, y)dx = 0$$

gestatte eine bekannte infinitesimale Transformation:

$$(2) \qquad Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dann läßt sich zwar nach Satz 21, Nr. 738, das vollständige Differential eines Integrals ω angeben, aber die zur Berechnung von ω noch erforderlichen Quadraturen sind häufig unbequem, weil ω_x und ω_y *beide* Veränderliche x und y enthalten. Ein bequemeres Integrationsverfahren ist möglich, *wenn man erstens die Schar der Bahnkurven* $\varphi(x, y) =$ konst. *der von* Uf *erzeugten eingliedrigen Gruppe und zweitens eine andere bei dieser Gruppe invariante einfach unendliche Kurvenschar* $\psi(x, y) =$ konst. *schon kennt* (vgl. Nr. 736). Das ist in der Tat oft der Fall, denn wenn man eine infinitesimale Transformation Uf der vorgelegten Differentialgleichung zu ermitteln vermag, wird diese Transformation meistens von sehr einfacher Natur sein.

Das neue Verfahren ergibt sich so: Nach Satz 20, Nr. 737, bestehen zwei Gleichungen:

$$(3) \qquad \xi\varphi_x + \eta\varphi_y = 0, \quad \xi\psi_x + \eta\psi_y = \Omega(\psi),$$

wobei Ω eine nicht verschwindende Funktion von ψ allein ist. Daraus folgt, daß auch die Funktionaldeterminante $\varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y$ nicht verschwindet, also φ und ψ voneinander unabhängig sind.

Wenn sich φ und ψ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung ebenso wie X, Y, ξ, η und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig verhalten, kann mithin das neue Veränderlichenpaar:

$$\bar{x} = \varphi(x, y), \quad \bar{y} = \psi(x, y)$$

eingeführt werden. Dabei möge die Differentialgleichung (1) die neue Form annehmen:

$$\overline{X}(\bar{x}, \bar{y})\, d\bar{y} - \overline{Y}(\bar{x}, \bar{y})\, d\bar{x} = 0. \tag{4}$$

Nach (3) ist nun $U\varphi = U\bar{x} = 0$ und $U\psi = U\bar{y} = \Omega(\psi) = \Omega(\bar{y})$. Nach dem Satze der letzten Nummer nimmt somit das Symbol Uf in den neuen Veränderlichen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ die einfache Form

$$\Omega(\bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \tag{5}$$

an. Weil die Differentialgleichung (4) die infinitesimale Transformation (5) gestattet, liefert die in Satz 22, Nr. 741, aufgestellte Bedingung, in der X, Y, ξ, η, x, y durch $\overline{X}$, $\overline{Y}$, 0, $\Omega(\bar{y})$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ zu ersetzen sind, die Gleichung:

$$\overline{Y}\Omega\frac{\partial \overline{X}}{\partial \bar{y}} - \overline{X}\left(\Omega\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \bar{y}} - \overline{Y}\Omega'\right) = 0,$$

die sich in der Form:

$$\Omega\left(\overline{X}\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \bar{y}} - \overline{Y}\frac{\partial \overline{X}}{\partial \bar{y}}\right) - \overline{X}\,\overline{Y}\,\Omega' = 0$$

oder nach Division mit $\Omega\overline{X}^2$ in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\ln\frac{\overline{Y}}{\Omega\overline{X}} = 0$$

schreiben läßt. Hiernach muß $\overline{Y} : \Omega\overline{X}$ eine Funktion Φ von $\bar{x}$ allein sein, d. h. $\overline{Y}$ hat die Form $\Omega(\bar{y})\,\Phi(\bar{x})\overline{X}$. Die Differentialgleichung (4) lautet demnach nach Division mit $\Omega\overline{X}$ so:

$$\frac{d\bar{y}}{\Omega(\bar{y})} - \Phi(\bar{x})\, d\bar{x} = 0.$$

Hier aber sind die Veränderlichen getrennt, so daß die Integration nur zwei Quadraturen verlangt, wobei jedes Integral nur noch eine der beiden Veränderlichen enthält (vgl. Nr. 713).

Hiermit sind wir zu einer neuen, ebenfalls von *Lie* angegebenen Integrationsmethode gelangt:

Satz 25: Gestattet eine vorgelegte gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in x und y eine bekannte infinitesimale

Transformation Uf und kennt man sowohl die Schar $\varphi(x,y) =$ konst. *der Bahnkurven der von Uf erzeugten eingliedrigen Gruppe als auch eine andere bei der Gruppe invariante einfach unendliche Kurvenschar* $\psi(x, y) =$ konst., *so geht die Differentialgleichung bei Einführung der neuen Veränderlichen* $\bar{x} = \varphi(x, y)$ *und* $\bar{y} = \psi(x, y)$ *in eine solche über, in der die Veränderlichen getrennt sind.*

Dies Integrationsverfahren heißt die *Integration mittels kanonischer Veränderlicher.*

744. Beispiele. Die folgenden Beispiele zeigen, *daß die kanonischen Veränderlichen als solche bezeichnet werden können, die dem jeweiligen Integrationsprobleme besonders gut angepaßt sind.*

Die Anwendung der neuen Methode auf die älteren Beispiele in § 2 führt in der Tat gerade zu den dort gefundenen Integrationsverfahren. Man kann also sagen, daß die neue Methode in die verschiedenen Hilfsmittel, die man bei der Integration angewandt hat, einen einheitlichen Grundgedanken bringt.

1. Beispiel: Die *homogene* Differentialgleichung:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

siehe Nr. 715, gestattet, wie schon in dem 2. Beispiele in Nr. 739 erwähnt wurde, die infinitesimale Streckung vom Anfangspunkte O aus:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Die Bahnkurven sind alle Strahlen $y : x =$ konst. Außerdem führen alle Streckungen von O aus jede Gerade $x =$ konst. wieder in eine Gerade $x =$ konst. über. Demnach ist hier $\varphi = y : x$ und $\psi = x$ zu setzen, d. h. wir führen die neuen Veränderlichen:

$$\bar{x} = \frac{y}{x}, \quad \bar{y} = x$$

ein. Genau dasselbe geschah in Nr. 715, wo wir statt $\bar{y}$ das alte Zeichen x beibehielten, dagegen $\bar{x}$ mit z bezeichneten.

2. Beispiel: Die lineare Differentialgleichung:

$$y' = f_0(x)y + f_1(x)$$

gestattet nach dem 1. Beispiele in Nr. 741 die infinitesimale Transformation:

$$Uf = \eta \frac{\partial f}{\partial y},$$

wobei:

$$\eta = e^{\int\limits_a^x f_0(x)\,dx}$$

ist. Diese infinitesimale Transformation und die von ihr erzeugte eingliedrige Gruppe läßt x invariant, d. h. $x =$ konst. stellt die Bahnkurven vor. Ferner ist:

$$\frac{y}{\eta} = y e^{-\int\limits_a^x f_0(x)\,dx} = \text{konst.}$$

eine invariante Kurvenschar, denn es ist:

$$U\frac{y}{\eta} = \eta \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\eta} = 1.$$

Also werden die neuen Veränderlichen:

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y e^{-\int\limits_a^x f_0(x)\,dx}$$

eingeführt. Dasselbe geschah in Nr. 716, wo statt $\bar{x}$ das alte Zeichen x beibehalten und η mit $u(x)$ und $\bar{y}$ mit z bezeichnet wurde.

3. Beispiel: Die Differentialgleichung:

$$\frac{xy' - y}{x + yy'} = \varphi(x^2 + y^2)$$

gestattet nach dem 3. Beispiele in Nr. 739 die infinitesimale Drehung um O:

$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Die Bahnkurven der Gruppe aller Drehungen um O sind die Kreise mit dem Mittelpunkte O, die sich in der Form:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \text{konst.}$$

darstellen lassen. Außerdem geht jede Gerade durch O bei der Gruppe wieder in eine Gerade durch O über, so daß:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \text{konst.}$$

eine invariante Geradenschar vorstellt. Deshalb führt man hier die Polarkoordinaten ϱ und ω ein, wie es im 3. Beispiele von Nr. 739 in der Tat geschah, wenn es auch dort nicht besonders hervorgehoben wurde. Als spezieller Fall gehört auch das Beispiel in Nr. 714 hierher, ebenso das 3. Beispiel in Nr. 740, das der Leser durch Einführung der kanonischen Veränderlichen ϱ und ω von neuem behandeln möge.

745. Erweiterte Punkt-Transformationen. In Nr. 742 stellten wir uns vor, vermöge einer Substitution:

$$\bar{x} = \varphi(x, y), \quad \bar{y} = \psi(x, y) \tag{1}$$

seien in der xy-Ebene statt der rechtwinkligen Koordinaten x und y neue, krummlinige Koordinaten $\bar{x}$ und $\bar{y}$ eingeführt worden, so daß also dadurch an der geometrischen Auffassung nichts geändert, wohl aber die analytische Darstellung eine andere wird.

Man kann aber auch annehmen, daß die Gleichungen (1) eine Abbildung der Punkte einer xy-Ebene in einer neuen $\bar{x}\bar{y}$-Ebene vorstellen, wobei $\bar{x}$ und $\bar{y}$ in der zweiten Ebene rechtwinklige Koordinaten bedeuten. Vgl. Nr. 593. Alsdann zieht die Einführung der neuen Veränderlichen in eine eingliedrige Gruppe auch eine neue geometrische Auffassung dieser Gruppe nach sich. Wenn z. B. in die eingliedrige Gruppe aller Drehungen um O:

$$x = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y = x_0 \sin t + y_0 \cos t,$$

siehe (2) in Nr. 733, Polarkoordinaten ω und ϱ eingeführt werden, also:

$$\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \quad \omega_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{y_0}{x_0}, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varrho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

gesetzt wird, so ist:

$$\omega = \omega_0 + t, \quad \varrho = \varrho_0$$

nur eine andere analytische Darstellung derselben Gruppe von Drehungen. Werden dagegen ω und ϱ als rechtwinklige Koordinaten $\bar{x}$ und $\bar{y}$ in einer neuen Ebene betrachtet, so gehen die Gleichungen:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + t, \quad \bar{y} = \bar{y}_0$$

hervor, die die eingliedrige Gruppe aller Schiebungen parallel der $\bar{x}$-Achse vorstellen.

In der neuen Auffassung bedeutet also die Einführung der neuen Veränderlichen $\bar{x}$ und $\bar{y}$, *daß auch die Transformationen in der xy-Ebene Abbilder in der $\bar{x}\bar{y}$-Ebene haben und daß* *insbesondere die Abbilder aller Transformationen einer eingliedrigen Gruppe wiederum die Gesamtheit aller Transformationen einer eingliedrigen Gruppe ausmachen.*

Da die Punkte (x, y) als Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ abgebildet werden, hat auch irgend eine Kurve der xy-Ebene ein Abbild in der $\bar{x}\bar{y}$-Ebene, folglich auch jedes Linienelement (x, y, y') der xy-Ebene. Der analytische Ausdruck hierfür ergibt sich, wenn man noch berechnet, wie sich $\bar{y}'$, nämlich $d\bar{y} : d\bar{x}$, vermöge (1) durch x, y und y' oder $dy : dx$ ausdrückt. Es kommt (vgl. auch Nr. 714):

$$(2) \qquad \bar{y}' = \frac{\psi_x + \psi_y y'}{\varphi_x + \varphi_y y'},$$

so daß sich zusammen mit (1) die drei Gleichungen ergeben:

$$(3) \qquad \bar{x} = \varphi(x, y), \quad \bar{y} = \psi(x, y), \quad \bar{y}' = \frac{\psi_x + \psi_y y'}{\varphi_x + \varphi_y y'}.$$

Dies wurde auch schon in Nr. 595 erörtert, vgl. die dort gefundene Formel (3) mit der obenstehenden Gleichung (2).

Die Formeln (3) gelten übrigens auch, falls man die alte Auffassung beibehält, bei der $\bar{x}$ und $\bar{y}$ nur neue krummlinige Koordinaten der alten Punkte (x, y) in der Ebene vorstellen. Alsdann sind $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{y}'$ *die Bestimmungsstücke der Linienelemente* (x, y, y') *im neuen krummlinigen Koordinatensysteme.* So dienen im Systeme der Polarkoordinaten ω und ϱ die drei Größen ω, ϱ und $d\varrho : d\omega$ oder ϱ' zur Bestimmung eines Linienelements. Während ω und ϱ den Punkt M des Elements festlegen, liefert der Wert von ϱ' die Richtung des Elements nach Nr. 207, wie folgt (siehe Fig. 32): Auf dem Radiusvektor OM wird in O das Lot $ON = \varrho'$ errichtet. Alsdann ist die Richtung des Elements senkrecht zu MN. Die Vorzeichenbestimmung für ON ist dabei die seinerzeit angegebene.

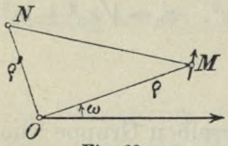

Fig. 32.

Wird dagegen angenommen, daß $\bar{x}$ und $\bar{y}$ rechtwinklige Koordinaten in einer neuen $\bar{x}\bar{y}$-Ebene seien, so stellt (3) eine Abbildung aller Punkte und aller Linienelemente der xy-Ebene in der $\bar{x}\bar{y}$-Ebene dar.

Wir können aber nunmehr die neue Ebene mit der alten

Ebene und die neuen Achsen mit den alten Achsen zusammenfallen lassen. Alsdann kommen wir abermals zu einer anderen Auffassung:

Die Gleichungen (1) *stellen dann eine Transformation der Punkte* (x, y) *der Ebene in Punkte* $(\bar{x}, \bar{y})$ *derselben Ebene dar.* Dabei wird jede Kurve in eine Kurve transformiert, also auch jedes Linienelement (x, y, y') in ein Linienelement $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}')$, und wie dies geschieht, sagen die Gleichungen (3) aus. Man nennt daher die durch die Gleichungen (3) definierte Transformation *die erweiterte Punkt-Transformation* (1).

746. Erweiterte infinitesimale Punkt-Transformationen. Insbesondere möge nunmehr eine jede Transformation:

$$(1) \qquad x = \varphi(x_0, y_0, t), \quad y = \psi(x_0, y_0, t)$$

einer eingliedrigen Gruppe, nämlich der von der infinitesimalen Transformation

$$(2) \qquad \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

erzeugten eingliedrigen Gruppe, erweitert werden.

Die zu einem bestimmten Werte von t gehörige Transformation (1) oder $\mathfrak{T}_t$ führt jeden Punkt (x_0, y_0) in einen neuen Punkt (x, y) und infolgedessen jedes Linienelement (x_0, y_0, y_0') in ein neues Linienelement (x, y, y') über. Dabei bedeuten x_0, y_0 und x, y Koordinaten in ein und demselben Systeme.

Beschreibt der Punkt (x_0, y_0) eine beliebige Kurve k_0, so sind x_0 und y_0 als irgendwelche differenzierbare Funktionen einer Hilfsveränderlichen τ zu betrachten. Nach (1) sind alsdann auch x und y für jeden bestimmten Wert von t Funktionen von τ, und sie gelten für diejenige Kurve k_t, in die k_0 vermöge der Transformation $\mathfrak{T}_t$ verwandelt wird. Das dritte Bestimmungsstück y_0' eines Linienelements (x_0, y_0, y_0') der Kurve k_0 hat die Bedeutung:

$$(3) \qquad y_0' = \frac{d y_0 : d\tau}{d x_0 : d\tau}$$

und entsprechend das dritte Bestimmungsstück y' des Elements (x, y, y') der Kurve k_t die Bedeutung:

(4) $$y' = \frac{\partial y : \partial \tau}{\partial x : \partial \tau}.$$

Hier sind *partielle* Differentiationszeichen angewandt, weil x und y nach (1) nicht nur von τ, sondern auch von t abhängen.

Nun genügen die Funktionen (1) den Gleichungen:

(5) $$\frac{\partial x}{\partial t} = \xi(x, y), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \eta(x, y),$$

wobei ebenfalls statt der geraden Differentiationszeichen jetzt runde zu setzen sind. Wir fragen, welchen Wert die partielle Ableitung $\partial y' : \partial t$ der durch (4) definierten Größe y' hat. Nach (4) ist:

$$\frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{y_\tau}{x_\tau} = \frac{y_{t\tau} x_\tau - x_{t\tau} y_\tau}{x_\tau^2}.$$

Hierin sind die aus (5) folgenden Werte:

$$x_{t\tau} = \xi_x x_\tau + \xi_y y_\tau, \quad y_{t\tau} = \eta_x x_\tau + \eta_y y_\tau$$

einzusetzen. Dann kommt:

$$\frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{(\eta_x x_\tau + \eta_y y_\tau) x_\tau - (\xi_x x_\tau + \xi_y y_\tau) y_\tau}{x_\tau^2}.$$

Wird die Division mit x_τ^2 überall durchgeführt und beachtet, daß $y_\tau : x_\tau$ nach (4) gleich y' ist, so kommt:

(6) $$\frac{\partial y'}{\partial t} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2.$$

Wenn wir also die Transformationen $\mathfrak{T}_t$ oder (1) der Gruppe durch Hinzunahme derjenigen Transformationen erweitern, die dabei y_0' erfährt, d. h. wenn wir nach (3) in voriger Nummer die *erweiterte eingliedrige Gruppe*:

(7) $$x = \varphi(x_0, y_0, t), \quad y = \psi(x_0, y_0, t), \quad y' = \frac{\psi_{x_0} + \psi_{y_0} y_0'}{\varphi_{x_0} + \varphi_{y_0} y_0'}$$

bilden und x_0, y_0 als Funktionen einer Hilfsveränderlichen τ, demnach auch y_0' als Funktion von τ betrachten, so genügen x, y und y', aufgefaßt als Funktionen von t und τ, den drei Gleichungen (5) und (6). Die Gleichungen (5) und (6) sind aber von τ frei. Sie gelten also für *alle* Linienelemente (x, y, y'). Dies bedeutet:

Satz 26: Liegt eine eingliedrige Gruppe von Punkttransformationen:

$$x = \varphi(x_0, y_0, t), \quad y = \psi(x_0, y_0, t)$$

in der xy-Ebene vor, erzeugt von dem Systeme:

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y),$$

und erweitert man alle Transformationen der Gruppe durch Hinzunahme der Transformationen, die dabei den Linienelementen (x_0, y_0, y_0') *zukommen, so daß sich:*

$$x = \varphi(x_0, y_0, t), \quad y = \psi(x_0, y_0, t), \quad y' = \frac{\psi_{x_0} + \psi_{y_0} y_0'}{\varphi_{x_0} + \varphi_{y_0} y_0'}$$

ergibt, so stellen diese Gleichungen dasjenige allgemeine Lösungensystem des Systems von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y), \quad \frac{dy'}{dt} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2$$

für drei Funktionen x, y, y' *von* t *vor, das für* $t = 0$ *die Anfangswerte* x_0, y_0, y_0' *hat.*

Hierbei ist zu bemerken: Wenn ξ und η nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind, gelten für das System:

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y)$$

die Sätze 9 und 10 von Nr. 691, 692, so daß x und y insbesondere stetige Funktionen von t sind. Werden diese Funktionen in die dritte Gleichung:

$$\frac{dy'}{dt} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2$$

substituiert, so wird hier die rechte Seite eine stetige Funktion von t und y' mit einer stetigen partiellen Ableitung nach y', so daß auch für diese Differentialgleichung, die y' als Funktion von t bestimmt, jene Sätze bestehen.

Das in Satz 26 betrachtete System von Funktionen x, y, y' von t wird für $t = 0$ gleich x_0, y_0, y_0' selbst. Wird *vorübergehend* unter δt eine nach Null strebende Größe verstanden, so erfahren x_0, y_0, y_0' bei der infinitesimalen, nämlich zu δt gehörigen, Transformation der erweiterten Gruppe die Zunahmen:

$$\delta x = \xi(x_0\, y_0)\delta t, \qquad \delta y = \eta(x_0, y_0)\delta t,$$
$$\delta y' = [\eta_x^0 + (\eta_y^0 - \xi_x^0)y_0' - \xi_y^0 y_0'^2]\delta t,$$

wobei die Indizes 0 die Substitution der Werte x_0 und y_0 andeuten. Werden die Bestimmungsstücke der ursprünglichen Linienelemente mit x, y, y' statt mit x_0, y_0, y_0' bezeichnet, so stellt sich daher die infinitesimale Transformation der erweiterten Gruppe so dar:

$$\delta x = \xi\,\delta t, \quad \delta y = \eta\,\delta t, \quad \delta y' = [\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2]\,\delta t.$$

Analog dem Symbole:

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

führt man deshalb für sie das Symbol:

$$(8) \qquad U'f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2] \frac{\partial f}{\partial y'},$$

ein. Dies *Symbol $U'f$ der infinitesimalen Transformation der erweiterten Gruppe* oder auch *der erweiterten infinitesimalen Transformation Uf der Gruppe* hat (vgl. Nr. 735) die folgende Bedeutung:

Der mit t dividierte Zuwachs, den irgend eine differenzierbare Funktion f der drei Veränderlichen x, y, y' bei der zu einem allgemeinen Werte von t gehörigen Transformation der erweiterten Gruppe erfährt, hat für $\lim t = 0$ *den Grenzwert $U'f$.*

1. Beispiel: Bei der infinitesimalen *Schiebung*:

$$a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}$$

ist $\xi = a$, $\eta = b$, also

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2 = 0.$$

Daher erfährt y' gar keine Änderung. In der Tat wird jedes Linienelement bei allen Schiebungen in ein *paralleles* Linienelement übergeführt.

2. Beispiel: Bei der infinitesimalen *Streckung* vom Anfangspunkte O aus:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$$

ist $\xi = x$, $\eta = y$, daher ebenfalls:

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2 = 0.$$

In der Tat wird auch hier jedes Linienelement in ein *paralleles* übergeführt.

3. Beispiel: Anders ist es bei der infinitesimalen *Drehung* um O:

$$-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Hier ist $\xi=-y,\ \eta=x$, d. h.

$$\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-\xi_y y'^2=1+y'^2.$$

Die dritte Gleichung des Systems von Differentialgleichungen lautet demnach:

$$\frac{dy'}{dt}=1+y'^2 \quad \text{oder} \quad \frac{dy'}{1+y'^2}=dt$$

und gibt integriert $\operatorname{arc\,tg} y'=t+C$ oder $y'=\operatorname{tg}(t+C)$. Da $y'=y_0'$ für $t=0$ sein soll, so ist $\operatorname{tg} C=y_0'$ zu setzen, so daß kommt:

(9) $$y'=\frac{\operatorname{tg} t+y_0'}{1-y_0'\operatorname{tg} t}=\frac{\sin t+y_0'\cos t}{\cos t-y_0'\sin t}.$$

Diese Gleichung und die schon im 1. Beispiele von Nr. 733 angegebenen Gleichungen:

$$x=x_0\cos t-y_0\sin t,\quad y=x_0\sin t+y_0\cos t$$

stellen zusammen die zur allgemeinen Drehung um O gehörige Transformation der Linienelemente vor. Es handelt sich hier um eine Drehung mit dem Winkel t. (Siehe Fig. 33.) Wenn das alte Linienelement (x_0, y_0, y_0') mit der positiven x-Achse den Winkel τ_0 und das neue Element (x, y, y') mit ihr den Winkel τ bildet, wird $y_0'=\operatorname{tg}\tau_0$, $y'=\operatorname{tg}\tau$, so daß (9) besagt:

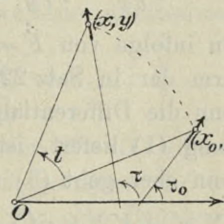

Fig. 33.

$$\tau=\tau_0+t,$$

was mit der geometrischen Auffassung im Einklange steht.

747. Bedingung für eine infinitesimale Transformation der Differentialgleichung $F(x, y, y')=0$. Wenn die Differentialgleichung:

(1) $X(x,y)\,dy-Y(x,y)\,dx=0$ oder $X(x,y)\,y'-Y(x,y)=0$

die infinitesimale Transformation:

$$Uf=\xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

gestattet, so bedeutet dies, daß jede Integralkurve bei allen Transformationen der zugehörigen eingliedrigen Gruppe wieder in eine Integralkurve übergeht, nach Nr. 738. Die Integralkurven aber sind die Orte derjenigen Linienelemente (x, y, y'), die durch die Differentialgleichung (1) bestimmt werden. Man kann also auch sagen, daß jedes Linienelement der Differentialgleichung vermöge der *erweiterten* Transformationen der Gruppe stets wieder in Linienelemente derselben Gleichung übergeht. Die erweiterte Gruppe wird aber von der erweiterten infinitesimalen Transformation:

$$U'f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2] \frac{\partial f}{\partial y'}$$

erzeugt, vgl. (8) in voriger Nummer.

Liegt nun die Differentialgleichung in der Form vor:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

so ist die Schar ihrer Linienelemente (x, y, y') eben durch diese Gleichung $F = 0$ charakterisiert. Deshalb muß $U'f$, auf F ausgeübt, einen Ausdruck $U'F$ geben, der infolge der Gleichung $F = 0$ ebenfalls verschwindet, d. h. es muß:

$$\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2] \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{3}$$

sein infolge von $F = 0$. In der Tat ist dies nur eine andere Form der in Satz 22, Nr. 741, gefundenen Bedingung. Denn wenn die Differentialgleichung (2), nach y' aufgelöst, die Gleichung (1) liefert, ist F in (3) durch $Xy' - Y$ zu ersetzen. Dann aber geht (3) über in:

$$\xi(X_x y' - Y_x) + \eta(X_y y' - Y_y) + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2] X = 0.$$

Diese Gleichung soll nun infolge von $Xy' - Y = 0$ bestehen. Wird demgemäß $y' = Y : X$ in ihr substituiert, so geht die in Satz 22, Nr. 741, aufgestellte Bedingung hervor.

Mit Rücksicht auf die Bedingungen, unter denen die Gleichung (2) eine Auflösung y' hat, vgl. Nr. 700 und Nr. 707, ergibt sich also der

Satz 27: Liegt die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung vor:

$$F(x, y, y') = 0$$

und hat sie in einem Bereiche, in dem F eine stetige Funktion von x, y, y' mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung ist, *Auflösungen y', für die die partielle Ableitung $\partial F : \partial y'$ nicht verschwindet, so gestattet sie die infinitesimale Transformation:*

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

in der ξ und η nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sein sollen, dann und nur dann, wenn die erweiterte infinitesimale Transformation:

$$U'f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2]\frac{\partial f}{\partial y'},$$

ausgeübt auf F, eine Funktion $U'F$ liefert, die für die Auflösungen y' der Gleichung $F = 0$ und für beliebige Werte von x und y innerhalb des Bereiches verschwindet.

Kurz gesagt: *$F = 0$ gestattet Uf, wenn $U'F = 0$ infolge von $F = 0$ ist.*

Beispiel: Die Differentialgleichung:

$$F = y'^2 - 2xy' + 2y = 0$$

gestattet die infinitesimale Transformation:

$$Uf = \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Denn hier ist $\xi = 1$, $\eta = x$, so daß die erweiterte infinitesimale Transformation das Symbol hat:

$$U'f = \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Daher wird $U'F = 0$ nicht nur infolge von $F = 0$, sondern schon an sich. Die infinitesimale Transformation Uf hat leicht zu bestimmende Bahnkurven, denn für eine Bahnkurve muß:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} = x, \quad \text{also} \quad dy = x\,dx$$

sein, und dies ist für die Parabeln $y - \frac{1}{2}x^2 =$ konst. der Fall. Außerdem bleibt augenscheinlich die Geradenschar $x =$ konst. invariant, da $Ux = 1$ ist (vgl. Satz 20, Nr. 737). Folglich sind x und $z = y - \frac{1}{2}x^2$ kanonische Veränderliche (vgl. Nr. 743). Wird dementsprechend:

$$y = z + \tfrac{1}{2}x^2, \quad \text{d. h.} \quad y' = z' + x$$

gesetzt, so geht die vorgelegte Differentialgleichung über in:

$$z'^2 + 2z = 0$$

und gibt:

$$\frac{dz}{\sqrt{-2z}} - dx = 0,$$

so daß:

$$\sqrt{-2z} + x = C$$

die Integralkurven darstellt. Wird wieder $z = y - \frac{1}{2}x^2$ substituiert, so kommt die Gleichung:

$$2Cx - 2y = C^2.$$

Die Integralkurven sind also Geraden. In der Tat ist nämlich die vorgelegte Gleichung $F = 0$ eine *Clairautsche Differentialgleichung* (Nr. 720). Ihre regulären Integralkurven sind die Tangenten der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$, die ihrerseits die singuläre Integralkurve vorstellt.

§ 5. Projektive Transformationen und Jacobische Differentialgleichungen.

748. Projektive Transformationen einer Veränderlichen. Mit dem auch sonst in der Analysis wichtigen Begriffe der *projektiven Transformation* steht die Theorie der schon in Nr. 718 behandelten *Riccatischen Differentialgleichung* sowie die einer ebenfalls besonders merkwürdigen gewöhnlichen Differentialgleichung, der sogenannten *Jacobischen,* im engsten Zusammenhange. Dieser Zusammenhang soll in dem gegenwärtigen Paragraphen in seinen Hauptzügen dargestellt werden.

Der Begriff der projektiven Transformation beruht auf dem des *Doppelverhältnisses* von vier Zahlen a, b, c, d:

$$(abcd) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b},$$

den man auf vier Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 einer Geraden übertragen kann, indem man als die vier Zahlen die Strecken zwischen den Punkten einführt, mit Vorzeichen gemessen in einem einheitlichen, aber für den Wert gleichgültigen Fortschreitungssinne:

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{M_3 M_1}{M_3 M_2} : \frac{M_4 M_1}{M_4 M_2}.$$

Augenscheinlich ist das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden gleich dem ihrer Abszissen und gleich dem ihrer Ordinaten.

Eine Transformation $x = \varphi(x_0)$, vermöge derer die Veränderliche x_0 in eine neue Veränderliche x übergeht, heißt *projektiv*, wenn sie stets beliebige vier Werte von x_0 in solche vier Werte x verwandelt, die dasselbe Doppelverhältnis wie jene vier Werte haben. Wenn die Transformation drei bestimmt angenommene Werte a_0, b_0, c_0 etwa in a, b, c überführt, während x_0 willkürlich gelassen wird, muß hiernach für die zu x_0 gehörige Veränderliche x die Gleichung gelten:

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{x-a}{x-b} = \frac{c_0-a_0}{c_0-b_0} : \frac{x_0-a_0}{x_0-b_0},$$

deren Auflösung nach x *eine gebrochene lineare Funktion von* x_0 liefert:

$$x = \frac{\alpha x_0 + \beta}{\gamma x_0 + \delta}. \tag{1}$$

Sie ist nur dann nicht frei von x_0, wenn $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ist. Umgekehrt: Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgendwelche vier Konstanten, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht verschwindet, so gehören infolge von (1) zu vier beliebig gewählten Werten von x_0 solche Werte von x, die dasselbe Doppelverhältnis wie jene haben. Dies lehrt eine einfache Ausrechnung. *Mithin ist* (1) *die allgemeine Form einer projektiven Transformation einer Veränderlichen.* Werden x_0 und x als Abszissen von Punkten M_0 und M auf einer Geraden gedeutet, so stellt (1) eine derartige Transformation der Punkte der Geraden vor, die irgendwelche vier Punkte stets in vier Punkte mit demselben Doppelverhältnisse verwandelt.

Führt man nacheinander zwei projektive Transformationen aus, indem man zuerst x_0 in x_1 und dann x_1 in x_2 vermöge:

$$x_1 = \frac{\alpha_1 x_0 + \beta_1}{\gamma_1 x_0 + \delta_1}, \quad x_2 = \frac{\alpha_2 x_1 + \beta_2}{\gamma_2 x_1 + \delta_2}$$

verwandelt, so lehrt die Substitution des ersten Wertes in den zweiten, daß x_2 wieder eine gebrochene lineare Funktion von x_0 wird. Die Aufeinanderfolge zweier projektiver Transformationen ist demnach einer einzigen projektiven Transformation äquivalent, mit anderen Worten: *Alle projektiven Transformationen* (1) *bilden eine Gruppe*, vgl. die in Nr. 732 gegebene allgemeine Definition des Gruppenbegriffs. Jedoch ist dies keine eingliedrige Gruppe, vielmehr wird sich in Nr. 751 zeigen, daß die Schar aller projektiven Transformationen unbegrenzt viele eingliedrige Gruppen enthält.

749. Nochmals die allgemeine Riccatische Differentialgleichung. Nach Satz 11, Nr. 718, ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung dann und nur dann eine Riccatische:

$$(1) \qquad y' = f_0(x)y^2 + 2f_1(x)y + f_2(x),$$

wenn ihre allgemeine Lösung bei passender Wahl der Integrationskonstante C eine gebrochene lineare Funktion dieser willkürlichen Konstante wird:

$$(2) \qquad y = \frac{\varphi_1(x)C + \psi_1(x)}{\varphi_2(x)C + \psi_2(x)}.$$

Dabei muß $\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 \neq 0$ sein, weil die Lösung sonst von C frei wäre. Wenn y_0 der Anfangswert ist, den y für einen *bestimmten* Anfangswert x_0 von x hat:

$$y_0 = \frac{\varphi_1(x_0)C + \psi_1(x_0)}{\varphi_2(x_0)C + \psi_2(x_0)},$$

läßt sich hieraus C als eine gebrochene lineare Funktion von y_0 berechnen, deren Substitution in (2) zeigt, daß sich y auch als eine gebrochene lineare Funktion von y_0 darstellt:

$$(3) \qquad y = \frac{\alpha(x)y_0 + \beta(x)}{\gamma(x)y_0 + \delta(x)},$$

wobei wieder $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ist.

Diese Gleichung (3) aber stellt, sobald x *bestimmt* gewählt wird, eine *projektive Transformation von y_0 in y* dar. Sind x und y rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, so ergibt sich also, daß der Satz 11, Nr. 718, die folgende geometrische Fassung erhalten kann:

Satz 28: Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ einer einfach unendlichen Kurvenschar in der xy-Ebene ist dann und nur dann eine Riccatische, wenn irgendwelche vier Integralkurven von allen Parallelen zur y-Achse in vier Punkten mit demselben Doppelverhältnisse geschnitten werden, dessen Wert eben nur von der Auswahl der vier Kurven abhängt.

Eine Kurvenschar von dieser Art ist in Fig. 34 dargestellt, worin $(M_1 M_2 M_3 M_4)$ denselben Wert wie $(M_1^0 M_2^0 M_3^0 M_4^0)$ hat.

Beispiel: Die einfach unendliche Schar aller Hyperbeln, die durch drei gegebene Punkte gehen und *eine* gemeinsame

Asymptotenrichtung haben, weist die in Satz 28 ausgesprochene Eigenschaft auf, falls die y-Achse in der gemeinsamen Asymptotenrichtung gewählt wird. Deshalb sind diese Hyperbeln die Integralkurven einer gewissen Riccatischen Differentialgleichung, deren wirkliche Aufstellung dem Leser überlassen bleibe.

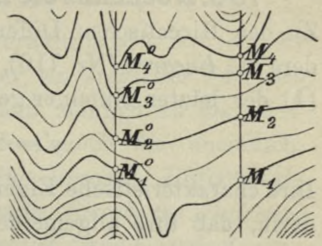

Fig. 34.

Es ist nicht nötig, daß x und y rechtwinklige Koordinaten vorstellen, denn das Ergebnis läßt sich auch rein analytisch formulieren:

Satz 29: Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung $y' = f(x, y)$ ist dann und nur dann eine Riccatische, wenn vier Partikularlösungen, die für $x = x_0$ irgendwelche Anfangswerte a_0, b_0, c_0, d_0 haben, für jeden Wert von x solche Werte a, b, c, d annehmen, deren Doppelverhältnis $(abcd)$ gleich dem Doppelverhältnisse $(a_0 b_0 c_0 d_0)$ der Anfangswerte ist.

Führt man in die Riccatische Differentialgleichung (1) statt y eine neue unbekannte Funktion z ein vermöge einer Substitution von der Form:

$$z = \frac{\alpha(x) y + \beta(x)}{\gamma(x) y + \delta(x)},$$

worin α, β, γ, δ irgendwelche Funktionen von x sind, für die $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ist, so geht eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für z hervor. Ihre allgemeine Lösung gewinnt man durch Substitution des Wertes (2) von y in der Form:

$$z = \frac{(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)C + (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)}{(\gamma\varphi_1 + \delta\varphi_2)C + (\gamma\psi_1 + \delta\psi_2)}.$$

Da sie wieder eine gebrochene lineare Funktion der Integrationskonstante C ist, muß die Differentialgleichung für z nach Satz 11, Nr. 718, auch eine Riccatische sein. Also gilt der

Satz 30: Führt man in eine Riccatische Differentialgleichung:

$$y' = f_0(x) y^2 + 2 f_1(x) y + f_2(x)$$

eine neue unbekannte Funktion z von der Form:

$$z = \frac{\alpha(x) y + \beta(x)}{\gamma(x) y + \delta(x)}$$

ein, wobei $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ist, so geht eine Riccatische Differentialgleichung für z hervor.

750. Nochmals die linearen Differentialgleichungen. Zu den Riccatischen Differentialgleichungen gehören insbesondere die *linearen* (Nr. 716), denn aus der Riccatischen Gleichung (1) der letzten Nummer geht im Falle $f_0 = 0$ die lineare hervor:

$$y' = 2f_1(x)y + f_2(x).$$

Ihre charakteristische Eigenschaft besteht nach Satz 10, Nr. 716, darin, daß ihre allgemeine Lösung y bei passender Wahl der Integrationskonstante C eine *ganze* lineare Funktion dieser willkürlichen Konstante C wird:

$$y = \varphi(x)C + \psi(x).$$

Analog (3) in voriger Nummer geht durch Elimination von C vermöge:

$$y_0 = \varphi(x_0)C + \psi(x_0)$$

hieraus eine ganze lineare Funktion des Anfangswertes y_0 hervor:

$$y = \alpha(x)y_0 + \beta(x).$$

Werden y_0 irgendwelche drei Werte a_0, b_0, c_0 gegeben und sind a, b, c die zugehörigen Werte von y, so findet man sofort:

$$\frac{c-a}{c-b} = \frac{c_0 - a_0}{c_0 - b_0};$$

also gilt der

Satz 31: Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ einer einfach unendlichen Kurvenschar in der xy-Ebene ist dann und nur dann linear, wenn irgendwelche drei Integralkurven von allen Parallelen zur y-Achse in drei Punkten geschnitten werden, deren gegenseitige Entfernungen ein konstantes, d. h. nur von der Auswahl der drei Kurven abhängiges Verhältnis haben.

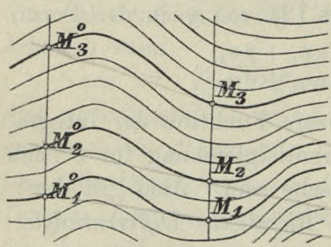

Fig. 35.

In Fig. 35 sind derartige Kurven dargestellt, dabei ist $M_1M_2 : M_2M_3$ gerade so groß wie $M_1^0M_2^0 : M_2^0M_3^0$.

Hier handelt es sich zwar nicht um ein Doppelverhältnis, sondern nur um ein einfaches Verhältnis. Dies kann aber durch einen Kunstgriff in ein Doppelverhältnis verwandelt werden. Denn das Doppelverhältnis:

$$(abcd) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

geht für $\lim d = \infty$ in das einfache Verhältnis $(c-a):(c-b)$ über. Mithin ist der Satz 31 doch nur ein spezieller Fall des Satzes 28 der vorigen Nummer; man muß nämlich zu den drei in Satz 31 ausgewählten Integralkurven noch die unendlich ferne *Gerade* $y = \infty$ hinzufügen. *Die linearen Differentialgleichungen erscheinen demnach als solche Riccatische Differentialgleichungen, die insbesondere die unendlich ferne Gerade* $y = \infty$ *als eine Integralkurve haben.* Man könnte diese Aussage durch Einführung homogener Koordinaten wie in Nr. 175 auch analytisch exakt machen. Sie läßt den eigentlichen Sinn der in Nr. 718 für die Riccatische Differentialgleichung gefundenen Integrationsmethode hervortreten: Wenn nämlich $u(x)$ eine bekannte Partikularlösung der Riccatischen Differentialgleichung:

$$y' = f_0(x)y^2 + 2f_1(x)y + f_2(x)$$

bedeutet, wird nach (8) in Nr. 718 die Substitution:

$$Z = \frac{1}{y - u(x)}$$

gemacht. Sie ordnet sich der in Satz 30 der vorigen Nummer angegebenen allgemeinen Substitution unter, d. h. für Z ergibt sich wieder eine Riccatische Gleichung. Da aber $Z = \infty$ für $y = u(x)$ wird, muß die neue Riccatische Gleichung für Z eine solche sein, die eine Partikularlösung $Z = \infty$ hat, und deshalb ist es nach dem Vorhergehenden nicht mehr überraschend, daß sich für Z in Nr. 718 eine lineare Differentialgleichung ergab.

751. Infinitesimale projektive Transformationen einer Veränderlichen. Fragt man nach den *eingliedrigen Gruppen von projektiven Transformationen einer Veränderlichen*, so hat man von einer solchen Differentialgleichung zwischen x und t auszugehen (statt von zweien für Funktionen x und y von t, wie in Nr. 734), die $dx : dt$ als eine *von t freie Funktion* von x darstellt:

(1) $$\frac{dx}{dt} = \xi(x).$$

Die Frage ist nun, *wie $\xi(x)$ gewählt werden muß, damit sich diejenige Lösung x, die für $t = 0$ den Anfangswert x_0 hat, als gebrochene lineare Funktion von x_0 darstellt,* deren Koeffizienten noch von t abhängen:

$$(2) \qquad x = \frac{\alpha(t)\,x_0 + \beta(t)}{\gamma(t)\,x_0 + \delta(t)}.$$

Diese Gleichung (2) bringt gerade die charakteristische Eigenschaft einer solchen Riccatischen Differentialgleichung zum Ausdrucke, in der t die unabhängige Veränderliche und x die unbekannte Funktion bedeutet. Folglich hat die gesuchte Gleichung (1) notwendig die Form:

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = ax^2 + 2bx + c,$$

worin aber jetzt *a, b, c Konstanten* sind, weil ξ von t frei sein soll.

Demnach ist:

$$(ax^2 + 2bx + c)\frac{df}{dx}$$

das *Symbol der allgemeinsten infinitesimalen projektiven Transformation einer Veränderlichen.* (Hier wird $df : dx$ statt $\partial f : \partial x$ geschrieben, weil nur eine Veränderliche vorkommt.) *Dies Symbol setzt sich linear mit beliebigen konstanten Koeffizienten aus den Symbolen von drei speziellen infinitesimalen projektiven Transformationen zusammen, nämlich aus:*

$$x^2\frac{df}{dx}, \quad x\frac{df}{dx}, \quad \frac{df}{dx}.$$

752. Projektive Transformationen von zwei Veränderlichen. Unter einer projektiven Transformation, die zwei Veränderliche x_0 und y_0 in neue Werte x und y überführt, versteht man eine von der Form:

$$(1) \qquad x = \frac{a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3}{c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3}, \quad y = \frac{b_1 x_0 + b_2 y_0 + b_3}{c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3},$$

die also x und y als gebrochene lineare Funktionen von x_0 und y_0 *mit gleichen Nennern* darstellt. Die neun Konstanten a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ können beliebig gewählt werden mit der einzigen Beschränkung, daß die Gleichungen (1) nach x_0 und y_0 auflösbar sein sollen. Um die Bedingung hierfür zu finden, setzen wir:

(2) $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

und verstehen unter A_i, B_i, C_i die zu a_i, b_i, c_i gehörigen zweireihigen Unterdeterminanten von Δ, d. h. es soll:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \quad C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

sein, und die übrigen A_i, B_i, C_i sollen hieraus durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 hervorgehen. Dann haben die Funktionen (1) von x_0 und y_0 die Funktionaldeterminante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} \end{vmatrix} = \frac{(A_2 B_3 - A_3 B_2)x_0 + (A_3 B_1 - A_1 B_3)y_0 + (A_1 B_2 - A_2 B_1)}{(c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3)^4}.$$

Nach einem bekannten Determinantensatze ist aber:

$$A_2 B_3 - A_3 B_2 = c_1 \Delta, \quad A_3 B_1 - A_1 B_3 = c_2 \Delta, \quad A_1 B_2 - A_2 B_1 = c_3 \Delta,$$

so daß kommt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{(c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3)^3}.$$

Nach Satz 4, Nr. 80, lassen sich also die Gleichungen (1) nach x_0 und y_0 auflösen, *wenn die Determinante Δ der neun Koeffizienten von Null verschieden ist.* Durch die Annahme $\Delta \neq 0$ wird auch die Möglichkeit $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ausgeschlossen. Die Auflösungen findet man am bequemsten, wie folgt. Wird der gemeinsame Nenner in (1) mit N bezeichnet, so hat man:

$$Nx = a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3,$$
$$Ny = b_1 x_0 + b_2 y_0 + b_3,$$
$$N = c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3.$$

Die rechten Seiten sind als ganze lineare homogene Funktionen von x_0, y_0 und 1 zu betrachten, so daß die Auflösung gibt:

$$x_0 = \frac{N(A_1 x + B_1 y + C_1)}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{N(A_2 x + B_2 y + C_2)}{\Delta},$$
$$1 = \frac{N(A_3 x + B_3 y + C_3)}{\Delta}.$$

Wird der Wert von N aus der letzten Gleichung in die beiden ersten eingesetzt, so geht die gesuchte Auflösung der Gleichungen (1) hervor:

$$(3)\qquad x_0 = \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{A_3 x + B_3 y + C_3}, \quad y_0 = \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{A_3 x + B_3 y + C_3}.$$

Dies ist die zur Transformation (1) *inverse* Transformation (nach Nr. 732); sie ist wie (1) selbst projektiv.

Werden x_0, y_0 und ebenso x, y als rechtwinklige Koordinaten in demselben Achsenkreuze gedeutet, so liefert die Ausführung der Transformation (1) auf die Punkte (x_0, y_0) einer beliebig gewählten *Geraden:*

$$(4)\qquad u_0 x_0 + v_0 y_0 + w_0 = 0$$

diejenige Kurve, deren Gleichung hieraus durch die Substitution der Werte (3) hervorgeht und daher in x und y linear ist:

$$(A_1 u_0 + A_2 v_0 + A_3 w_0)x + (B_1 u_0 + B_2 v_0 + B_3 w_0)y \\ + (C_1 u_0 + C_2 v_0 + C_3 w_0) = 0.$$

Die projektive Transformation (1) *führt also jede Gerade in eine Gerade über.*

Man kann zeigen, daß jede Transformation in der Ebene, vermöge derer jede Gerade in eine Gerade übergeht, die Form (1) hat, daß also die projektiven Transformationen als diejenigen Transformationen der Punkte der Ebene definiert werden können, die jede Gerade in eine Gerade verwandeln. Darauf gehen wir hier aber nicht ein.

Führt man nacheinander zwei projektive Transformationen aus, wobei die erste das Wertepaar x_0, y_0 in ein Paar x_1, y_1 verwandelt und die zweite das neue Paar x_1, y_1 weiterhin in ein Paar x_2, y_2 verwandelt, so erkennt man, daß sich x_2 und y_2 wieder als gebrochene lineare Funktionen von x_0 und y_0 mit gleichen Nennern darstellen lassen, was bedeutet, daß die Aufeinanderfolge zweier projektiver Transformationen stets einer projektiven Transformation äquivalent ist, mit anderen Worten: *Alle projektiven Transformationen der Ebene bilden eine Gruppe.*

Die Gleichungen:

$$(5)\qquad \mathfrak{x}_0 = x_0 + \alpha t, \quad \mathfrak{y}_0 = y_0 + \beta t$$

stellen in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_0$ eine Gerade durch den Punkt (x_0, y_0) dar, falls t veränderlich ist. Indem man t vier bestimmte Werte t_1, t_2, t_3, t_4 beilegt, bestimmt man vier Punkte der Geraden, und das *Doppelverhältnis* dieser vier Punkte ist gleich dem ihrer Abszissen, daher auch gleich $(t_1 t_2 t_3 t_4)$, weil sich $\mathfrak{x}_0$ linear durch t ausdrückt. Bei einer projektiven Transformation (1) geht der Punkt (x_0, y_0) in einen neuen Punkt (x, y) und die Gerade (5) in eine Gerade durch den Punkt (x, y) über. Die laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ der neuen Geraden drücken sich dabei gerade so durch $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_0$ aus wie x und y nach (1) durch x_0 und y_0. Insbesondere ist also:

$$\mathfrak{x} = \frac{a_1 \mathfrak{x}_0 + a_2 \mathfrak{y}_0 + a_3}{c_1 \mathfrak{x}_0 + c_2 \mathfrak{y}_0 + c_3},$$

und wenn man hierin nach (5) die Werte $x_0 + \alpha t$ und $y_0 + \beta t$ für $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_0$ substituiert, wird $\mathfrak{x}$ eine gebrochene lineare Funktion von t. Daher ist das Doppelverhältnis derjenigen vier Punkte, die aus den vorhin betrachteten vermöge der projektiven Transformation hervorgehen, ebenfalls gleich $(t_1 t_2 t_3 t_4)$. Eine projektive Transformation der Ebene führt also stets vier Punkte einer Geraden in solche vier Punkte einer anderen Geraden über, *die dasselbe Doppelverhältnis wie jene haben,* so daß das *Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden invariant ist.*

Ferner sei an den Satz erinnert, wonach vier Geraden der Ebene, die von *einem* Punkte ausgehen, von allen Geraden in vier Punkten mit demselben Doppelverhältnisse geschnitten werden, das deshalb das *Doppelverhältnis der vier Geraden* heißt. Man schließt aus dem Vorhergehenden und diesem Satze sofort, daß eine projektive Transformation auch *das Doppelverhältnis von vier durch einen Punkt gehenden Geraden invariant* läßt.

753. Die Jacobische Differentialgleichung. In sehr naher Beziehung zu den soeben besprochenen projektiven Transformationen steht nun die sogenannte *Jacobische Differentialgleichung.* Sie hat die Form:

$$(1)\quad (\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)(x\,dy - y\,dx) \\ - (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3)dy + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3)dx = 0,$$

worin die neun Größen α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ irgend welche Konstanten bedeuten. Sie läßt sich auch so schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 - y(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)}{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 - x(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)}$$

und ist daher nach Nr. 677 durch das System ersetzbar:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 - x(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 - y(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3). \end{cases}$$

Sind x und y rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, so definieren die Lösungen dieses Systems (2) die Integralkurven der Jacobischen Differentialgleichung mittels der Hilfsveränderlichen t. Eine elegantere Darstellung ergibt sich, wenn man wie in Nr. 175 statt x und y *drei homogene Koordinaten* x_1, x_2, x_3 vermöge:

$$(3) \qquad x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

einführt. Denn dann gibt (2):

$$x_3 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dx_3}{dt} = x_3(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) - x_1(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3),$$

$$x_3 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_3}{dt} = x_3(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) - x_2(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3).$$

Dies sind nur *zwei* Differentialgleichungen für die *drei* Funktionen x_1, x_2, x_3 von t, was nicht überrascht, weil ja nur die Verhältnisse $x_1 : x_3$ und $x_2 : x_3$ in Betracht kommen. Man kann deshalb noch die Forderung:

$$\frac{dx_3}{dt} = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$$

hinzufügen. Alsdann ergibt sich das System:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3. \end{cases}$$

Umgekehrt: Wenn x_1, x_2, x_3 solche Funktionen von t sind, die diesen drei Gleichungen (4) genügen, so folgt, daß $x = x_1 : x_3$ und $y = x_2 : x_3$ solche Funktionen von t werden, die dem Systeme (2) genügen. In homogenen Koordinaten stellt also dasjenige Lösungensystem x_1, x_2, x_3 von (4), das für $t = 0$ die Anfangswerte x_1^0, x_2^0, x_3^0 hat, diejenige Integralkurve der Jacobischen

Differentialgleichung (1) dar, die von dem Punkte mit den Koordinaten:

$$(5) \qquad x_0 = \frac{x_1{}^0}{x_3{}^0}, \quad y_0 = \frac{x_2{}^0}{x_3{}^0}$$

ausgeht.

Nun möge dasjenige Lösungensystem von (4), das für $t = 0$ die Anfangswerte 1, 0, 0 hat, mit $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \chi_1(t)$, $x_3 = \psi_1(t)$ bezeichnet sein. Ferner sei dasjenige Lösungensystem, das für $t = 0$ die Anfangswerte 0, 1, 0 hat, mit $x_1 = \varphi_2(t)$, $x_2 = \chi_2(t)$, $x_3 = \psi_2(t)$ bezeichnet. Schließlich sei noch $x_1 = \varphi_3(t)$, $x_2 = \chi_3(t)$, $x_3 = \psi_3(t)$ dasjenige Lösungensystem, das für $t = 0$ die Anfangswerte 0, 0, 1 hat. Alsdann ist:

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi_i}{dt} = \alpha_1 \varphi_i + \alpha_2 \chi_i + \alpha_3 \psi_i, \\[2ex] \dfrac{d\chi_i}{dt} = \beta_1 \varphi_i + \beta_2 \chi_i + \beta_3 \psi_i, \\[2ex] \dfrac{d\psi_i}{dt} = \gamma_1 \varphi_i + \gamma_2 \chi_i + \gamma_3 \psi_i. \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Hieraus folgt aber, daß:

$$(7) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1 x_1{}^0 + \varphi_2 x_2{}^0 + \varphi_3 x_3{}^0, \\ x_2 = \chi_1 x_1{}^0 + \chi_2 x_2{}^0 + \chi_3 x_3{}^0, \\ x_3 = \psi_1 x_1{}^0 + \psi_2 x_2{}^0 + \psi_3 x_3{}^0 \end{cases}$$

dasjenige Lösungensystem von (4) vorstellt, das für $t = 0$ die Anfangswerte $x_1{}^0$, $x_2{}^0$, $x_3{}^0$ hat. In der Tat, daß zunächst $x_1{}^0$, $x_2{}^0$, $x_3{}^0$ die Werte dieser Funktionen für $t = 0$ sind, ergibt sich sofort aus den über die Anfangswerte der φ_i, χ_i, ψ_i gemachten Annahmen. Ferner ist nach der ersten Gleichung (7):

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} x_1{}^0 + \frac{d\varphi_2}{dt} x_2{}^0 + \frac{d\varphi_3}{dt} x_3{}^0.$$

Dieser Wert wird nun nach der ersten Gleichung (6) gleich:

$$(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \chi_1 + \alpha_3 \psi_1) x_1{}^0 + (\alpha_1 \varphi_2 + \alpha_2 \chi_2 + \alpha_3 \psi_2) x_2{}^0 \\ + (\alpha_1 \varphi_3 + \alpha_2 \chi_3 + \alpha_3 \psi_3) x_3{}^0,$$

daher kommt nach (7):

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

wie es die erste Gleichung (4) verlangt. Ebenso bestätigt man das Bestehen der zweiten und dritten Gleichung (4) für die durch (7) definierten Funktionen x_2 und x_3.

Nach (3) und (5) ergibt sich weiterhin aus (7), daß:

$$(8)\qquad x = \frac{\varphi_1 x_0 + \varphi_2 y_0 + \varphi_3}{\psi_1 x_0 + \psi_2 y_0 + \psi_3}, \quad y = \frac{\chi_1 x_0 + \chi_2 y_0 + \chi_3}{\psi_1 x_0 + \psi_2 y_0 + \psi_3}$$

dasjenige Lösungensystem x, y des Systems (2) vorstellt, das für $t = 0$ die Anfangswerte x_0 und y_0 hat.

Mithin wird diejenige Integralkurve der Jacobischen Differentialgleichung (1), die von einem beliebig gewählten Punkte (x_0, y_0) ausgeht, mittels der Hilfsveränderlichen t durch die Gleichungen (8) dargestellt.

Für jeden bestimmten Wert von t bedeutet aber das Gleichungenpaar (8) eine *projektive Transformation* der Punkte (x_0, y_0) in Punkte (x, y), nach (1) in voriger Nummer. Dabei ist noch zu bemerken, daß die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

nicht identisch gleich Null ist, weil sie für $t = 0$ den Wert Eins hat. Nun steht nach Nr. 734 fest, daß das System (2) eine eingliedrige Gruppe von Transformationen erzeugt. Folglich ergibt sich, daß das System (2) oder also die zugehörige *infinitesimale Transformation* mit dem Symbol:

$$[\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 - x(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)]\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$+ [\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 - y(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)]\frac{\partial f}{\partial y}$$

eine eingliedrige Gruppe von lauter *projektiven* Transformationen erzeugt.

Umgekehrt: Wir fragen nach denjenigen Systemen:

$$(9)\qquad \frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y),$$

die eingliedrige Gruppen von lauter projektiven Transformationen erzeugen, d. h. deren Lösungensysteme sich in der Form:

$$(10)\qquad x = \frac{\varphi_1 x_0 + \varphi_2 y_0 + \varphi_3}{\psi_1 x_0 + \psi_2 y_0 + \psi_3}, \quad y = \frac{\chi_1 x_0 + \chi_2 y_0 + \chi_3}{\psi_1 x_0 + \psi_2 y_0 + \psi_3}$$

als gebrochene lineare Funktionen der Anfangswerte x_0 und y_0 mit gleichen Nennern darstellen, wobei die neun Koeffizienten

φ_i, χ_i, ψ_i $(i = 1, 2, 3)$ natürlich Funktionen von t sind. Zunächst müssen φ_1, χ_2 und ψ_3 für $t = 0$ einen gleichen Wert $a \neq 0$, alle übrigen Funktionen φ_i, χ_i, ψ_i aber den Wert Null haben, weil nur dann x und y für $t = 0$ die Werte x_0 und y_0 annehmen. Man kann alsdann alle Koeffizienten in (10) mit a dividieren, also $\varphi_i : a$, $\chi_i : a$ und $\psi_i : a$ mit φ_i, χ_i und ψ_i bezeichnen, so daß folgt: Man darf annehmen, daß φ_1, χ_2 und ψ_3 für $t = 0$ den Wert *Eins* und alle anderen Funktionen φ_i, χ_i, ψ_i für $t = 0$ den Wert Null haben. Nun sollen die Gleichungen (10) das allgemeine Lösungensystem der noch unbekannten Gleichungen (9) vorstellen. Es soll also, wenn der Akzent die Differentiation nach t andeutet, der Wert:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(\varphi_1' x_0 + \varphi_2' y_0 + \varphi_3')(\psi_1 x_0 + \psi_2 y_0 + \psi_3) - (\psi_1' x_0 + \psi_2' y_0 + \psi_3')(\varphi_1 x_0 + \varphi_2 y_0 + \varphi_3)}{(\psi_1 x_0 + \psi_2 y_0 + \psi_3)^2}$$

in die von t freie noch unbekannte Funktion $\xi(x, y)$ übergehen, sobald x_0 und y_0 hieraus vermöge (10) eliminiert werden. Wenn:

$$\Phi_1 = \begin{vmatrix} \chi_2 & \chi_3 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}, \quad X_1 = \begin{vmatrix} \psi_2 & \psi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix}, \quad \Psi_1 = \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_3 \\ \chi_2 & \chi_3 \end{vmatrix}$$

gesetzt wird und Φ_2, X_2, Ψ_2 sowie Φ_3, X_3, Ψ_3 diejenigen Funktionen von t bedeuten, die sich aus Φ_1, X_1, Ψ_1 durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 ergeben, liefert die Auflösung der Gleichungen (10) nach x_0 und y_0 analog den Gleichungen (3) der vorigen Nummer:

$$(11) \qquad x_0 = \frac{\Phi_1 x + X_1 y + \Psi_1}{\Phi_3 x + X_3 y + \Psi_3}, \quad y_0 = \frac{\Phi_2 x + X_2 y + \Psi_2}{\Phi_3 x + X_3 y + \Psi_3}.$$

Folglich wird nach einem bekannten Determinantensatze:

$$(12) \qquad \begin{cases} \varphi_1 x_0 + \varphi_2 y_0 + \varphi_3 = \dfrac{x\Delta}{\Phi_3 x + X_3 y + \Psi_3}, \\ \psi_1 x_0 + \psi_2 y_0 + \psi_3 = \dfrac{\Delta}{\Phi_3 x + X_3 y + \Psi_3}, \end{cases}$$

so daß sich durch Substitution der Werte (12) und (11) in den vorhin berechneten Wert von $dx : dt$ ergibt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Sigma\varphi_i' \Phi_i}{\Delta} x + \frac{\Sigma\varphi_i' X_i}{\Delta} y + \frac{\Sigma\varphi_i' \Psi_i}{\Delta} - x\left(\frac{\Sigma\psi_i' \Phi_i}{\Delta} x + \frac{\Sigma\psi_i' X_i}{\Delta} y + \frac{\Sigma\psi_i' \Psi_i}{\Delta}\right).$$

[753

Ebenso kommt:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\Sigma\chi_i'\Phi_i}{\Delta}x + \frac{\Sigma\chi_i'X_i}{\Delta}y + \frac{\Sigma\chi_i'\Psi_i}{\Delta}$$
$$-y\left(\frac{\Sigma\psi_i'\Phi_i}{\Delta}x + \frac{\Sigma\psi_i'X_i}{\Delta}y + \frac{\Sigma\psi_i'\Psi_i}{\Delta}\right).$$

Dabei sind die Summen Σ über alle drei Werte $i = 1, 2, 3$ zu erstrecken.

Es wird somit verlangt, daß das gesuchte System (9) aus diesen beiden Gleichungen bestehe. Weil nun ξ und η von t frei sein sollen, müssen alle neun Summen Σ, dividiert mit Δ, *Konstanten* sein. Werden sie mit α_i, β_i, γ_i bezeichnet, indem man setzt:

$$\frac{\Sigma\varphi_i'\Phi_i}{\Delta} = \alpha_1, \quad \frac{\Sigma\varphi_i'X_i}{\Delta} = \alpha_2, \quad \frac{\Sigma\varphi_i'\Psi_i}{\Delta} = \alpha_3,$$
$$\frac{\Sigma\chi_i'\Phi_i}{\Delta} = \beta_1, \quad \frac{\Sigma\chi_i'X_i}{\Delta} = \beta_2, \quad \frac{\Sigma\chi_i'\Psi_i}{\Delta} = \beta_3,$$
$$\frac{\Sigma\psi_i'\Phi_i}{\Delta} = \gamma_1, \quad \frac{\Sigma\psi_i'X_i}{\Delta} = \gamma_2, \quad \frac{\Sigma\psi_i'\Psi_i}{\Delta} = \gamma_3,$$

so nimmt daher das gesuchte System (9) die Form an:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 - x(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3),$$
$$\frac{dy}{dt} = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 - y(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3).$$

Dies aber ist das System (2), von dem wir schon wissen, daß sein allgemeines Lösungensystem die Form (8) oder (10) hat. Mithin gilt der

Satz 32: Liegt in der xy-Ebene eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$X(x, y)dy - Y(x, y)dx = 0$$

vor, so läßt sich die von irgend einem Punkte (x_0, y_0) *ausgehende Integralkurve mittels einer Hilfsveränderlichen t dann und nur dann in der Form:*

$$x = \frac{\varphi_1(t)x_0 + \varphi_2(t)y_0 + \varphi_3(t)}{\psi_1(t)x_0 + \psi_2(t)y_0 + \psi_3(t)}, \quad y = \frac{\chi_1(t)x_0 + \chi_2(t)y_0 + \chi_3(t)}{\psi_1(t)x_0 + \psi_2(t)y_0 + \psi_3(t)}$$

darstellen, wenn die Differentialgleichung eine Jacobische ist, d. h. die Form hat:

$$(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)(x\,dy - y\,dx)$$
$$-(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3)dy + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3)dx = 0,$$

worin die neun Koeffizienten α_i, β_i, γ_i *irgendwelche Konstanten bedeuten.*

Man kann dem Satze auch folgende Fassung geben:

Satz 33: Die infinitesimale Transformation:

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

erzeugt dann und nur dann eine eingliedrige Gruppe von lauter projektiven Transformationen, wenn ξ *und* η *die Formen haben:*

$$\xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 - x(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3),$$
$$\eta = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 - y(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3),$$

worin die neun Koeffizienten α_i, β_i, γ_i *irgendwelche Konstanten bedeuten.*

Oder auch:

Satz 34: Sämtliche Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der xy*-Ebene sind dann und nur dann die Bahnkurven einer eingliedrigen Gruppe von lauter projektiven Transformationen, wenn die Differentialgleichung eine Jacobische ist.*

754. Infinitesimale projektive Transformationen von zwei Veränderlichen. Nach Satz 33 ist eine infinitesimale Transformation:

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

dann und nur dann projektiv, d. h. sie erzeugt dann und nur dann eine eingliedrige Gruppe von lauter projektiven Transformationen, wenn ihr Symbol die Form hat:

$$[\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 - x(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)]\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$+ [\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 - y(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)]\frac{\partial f}{\partial y},$$

worin die neun Konstanten α_i, β_i, γ_i irgendwie gewählt werden können. Da γ_3 nur in den Differenzen $\alpha_1 - \gamma_3$ und $\beta_2 - \gamma_3$ vorkommt, sind jedoch nur *acht* Konstanten von wesentlicher Bedeutung, indem *die allgemeinste infinitesimale projektive Transformation linear mit beliebigen konstanten Faktoren aus den folgenden acht speziellen infinitesimalen projektiven Transformationen zusammengesetzt werden kann:*

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}, \quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}, \quad x\dfrac{\partial f}{\partial y}, \quad y\dfrac{\partial f}{\partial x}, \quad y\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ x^2\dfrac{\partial f}{\partial x} + xy\dfrac{\partial f}{\partial y}, \quad xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

Wenn in dem allgemeinen Symbole insbesondere $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ gewählt wird, geht die spezielle infinitesimale projektive Transformation hervor:

$$(2)\qquad (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3)\frac{\partial f}{\partial x} + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

In diesem Falle ergibt die dritte Gleichung des Systems (6) der vorigen Nummer $d\psi_i : dt = 0$, so daß dann $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 1$ ist, weil ψ_1, ψ_2 und ψ_3 für $t = 0$ die Anfangswerte 0, 0, 1 haben sollen. Folglich werden die dort mit (8) bezeichneten Gleichungen jetzt diese:

$$(3)\qquad x = \varphi_1 x_0 + \varphi_2 y_0 + \varphi_3, \quad y = \chi_1 x_0 + \chi_2 y_0 + \chi_3.$$

Die Determinante Δ, von der wir wissen, daß sie nicht gleich Null ist, reduziert sich hier auf

$$\varphi_1 \chi_2 - \varphi_2 \chi_1.$$

Die Gleichungen (3) stellen für jeden Wert von t eine solche projektive Transformation von x_0, y_0 in x, y dar, bei der x und y *ganze* lineare Funktionen von x_0 und y_0 sind. Solche projektive Transformationen heißen *lineare Transformationen.* Demnach ist (2) das Symbol einer *allgemeinen infinitesimalen linearen Transformation,* und zu den Sätzen der vorigen Nummer lassen sich die speziellen Sätze hinzufügen:

Satz 35: Liegt in der xy-Ebene eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$X(x, y)dy - Y(x, y)dx = 0$$

vor, so läßt sich die von irgend einem Punkte (x_0, y_0) ausgehende Integralkurve mittels einer Hilfsveränderlichen t dann und nur dann in der Form:

$$x = \varphi_1(t)x_0 + \varphi_2(t)y_0 + \varphi_3(t), \quad y = \chi_1(t)x_0 + \chi_2(t)y_0 + \chi_3(t)$$

darstellen, wenn die Differentialgleichung die Form hat:

$$(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3)dy - (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3)dx = 0,$$

worin die sechs Koeffizienten α_i und β_i irgend welche Konstanten bedeuten.

Satz 36: Eine infinitesimale Transformation in der xy-Ebene erzeugt dann und nur dann eine eingliedrige Gruppe von lauter linearen Transformationen, wenn sie die Form hat:

$$(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3)\frac{\partial f}{\partial x} + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3)\frac{\partial f}{\partial y},$$

worin die sechs Koeffizienten α_i und β_i irgend welche Konstanten bedeuten.

Satz 37: Sämtliche Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der xy-Ebene sind dann und nur dann die Bahnkurven einer eingliedrigen Gruppe von lauter linearen Transformationen, wenn die Differentialgleichung die Form hat:

$$(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3)dy - (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3)dx = 0,$$

worin die sechs Koeffizienten α_i und β_i irgend welche Konstanten bedeuten.

755. Charakteristische Eigenschaft der linearen Transformationen. Es ist nützlich, zu zeigen, welche *geometrische* Eigenschaft die linearen Transformationen vor den übrigen projektiven Transformationen auszeichnet. Vermöge einer projektiven Transformation:

$$(1) \qquad x = \frac{a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3}{c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3}, \quad y = \frac{b_1 x_0 + b_2 y_0 + b_3}{c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3}$$

geht die Schar derjenigen Geraden, die einen Punkt auf der Geraden:

$$c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3 = 0$$

gemein haben, in eine Schar von parallelen Geraden über. Denn in den laufenden Koordinaten x_0, y_0 stellt:

$$(2) \qquad h(c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3) + k(m_1 x_0 + m_2 y_0 + m_3) = 0$$

eine derartige Geradenschar dar, wenn m_1, m_2, m_3 bestimmt und h und k willkürlich gewählte Konstanten bedeuten. Nun gibt die Auflösung der Gleichungen (1) nach x_0 und y_0 wie in (3), Nr. 752:

$$(3) \qquad x_0 = \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{A_3 x + B_3 y + C_3}, \quad y_0 = \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{A_3 x + B_3 y + C_3},$$

wo die A_i, B_i, C_i die in Nr. 752 angegebene Bedeutung haben. Hieraus aber folgt nach einem bekannten Determinantensatze:

$$c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3 = \frac{\Delta}{A_3 x + B_3 y + C_3},$$

wenn Δ wie in Nr. 752 die Determinante der a_i, b_i, c_i vorstellt. Andererseits geht durch Substitution der Werte (3) die ganze lineare Funktion:

$$m_1 x_0 + m_2 y_0 + m_3$$

in eine Funktion von der Form:

$$\frac{M_1 x + M_2 y + M_3}{A_3 x + B_3 y + C_3}$$

über, worin M_1, M_2, M_3 konstant sind. Folglich geht die Geradenschar (2) vermöge der projektiven Transformation (1) über in:

$$h\Delta + k(M_1 x + M_2 y + M_3) = 0$$

oder:

$$M_1 x + M_2 y + M_3 = \text{konst.},$$

d. h. in der Tat in eine Schar von *Parallelen*.

Man kann ebenso zeigen, daß jede Schar von parallelen Geraden vermöge der projektiven Transformation (1) in eine Schar von Geraden übergeht, die einen Punkt auf der Geraden:

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

gemein haben.

Benutzt man wie in Nr. 175 den Begriff des unendlich fernen Punktes einer Geraden, so kann man also sagen, *daß die projektive Transformation* (1) *jeden Punkt der Geraden:*

$$c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3 = 0 \tag{4}$$

in einen unendlich fernen Punkt verwandelt, dagegen jeden unendlich fernen Punkt in einen Punkt der Geraden:

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = 0 \tag{5}$$

überführt.

Wenn die Transformation (1) insbesondere *linear* ist, d. h. wenn $c_1 = c_2 = 0$ ist (wobei dann $c_3 = 1$ gesetzt werden darf, da es in (1) nur auf die Verhältnisse der Konstanten ankommt), stellt die Gleichung (2) mit den willkürlichen Konstanten h und k selbst schon eine Schar von parallelen Geraden dar:

$$m_1 x_0 + m_2 y_0 + m_3 = \text{konst.},$$

d. h. *eine lineare Transformation führt jede Schar von parallelen Geraden wieder in eine Schar von parallelen Geraden über.* Anders ausgedrückt: *Eine lineare Transformation verwandelt jeden* *unendlich fernen Punkt wieder in einen unendlich fernen Punkt,* oder: *Sie läßt die unendlich ferne Gerade invariant.*

756. Ausführung einer projektiven Transformation auf eine Jacobische Differentialgleichung. In eine vorgelegte Jacobische Differentialgleichung:

$$(1)\quad (\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)(x dy - y dx) - (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3) dy + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3) dx = 0$$

sollen *neue Veränderliche* $\bar{x}$, $\bar{y}$ vermöge einer projektiven Transformation:

$$(2)\qquad \bar{x} = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + c_3}, \quad \bar{y} = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + c_3}$$

eingeführt werden. Alsdann geht eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in $\bar{x}$ und $\bar{y}$ hervor. Wenn nun wie in Satz 32, Nr. 753:

$$(3)\quad x = \frac{\varphi_1(t) x_0 + \varphi_2(t) y_0 + \varphi_3(t)}{\psi_1(t) x_0 + \psi_2(t) y_0 + \psi_3(t)}, \quad y = \frac{\chi_1(t) x_0 + \chi_2(t) y_0 + \chi_3(t)}{\psi_1(t) x_0 + \psi_2(t) y_0 + \psi_3(t)}$$

das allgemeine Lösungensystem von (1) ist, geht daraus das allgemeine Lösungensystem $\bar{x}$, $\bar{y}$ der neuen Differentialgleichung hervor, sobald man erstens die Werte (3) in (2) substituiert und zweitens die Anfangswerte x_0 und y_0 vermöge der zu (2) analogen Gleichungen:

$$\bar{x}_0 = \frac{a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3}{c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3}, \quad \bar{y}_0 = \frac{b_1 x_0 + b_2 y_0 + b_3}{c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3}$$

eliminiert. Weil diese Gleichungen nach (3) in Nr. 752 die Auflösungen haben:

$$x_0 = \frac{A_1 \bar{x}_0 + B_1 \bar{y}_0 + C_1}{A_3 \bar{x}_0 + B_3 \bar{y}_0 + C_3}, \quad y_0 = \frac{A_2 \bar{x}_0 + B_2 \bar{y}_0 + C_2}{A_3 \bar{x}_0 + B_3 \bar{y}_0 + C_3},$$

stellen sich $\bar{x}$ und $\bar{y}$ wieder als gebrochene lineare Funktionen der neuen Anfangswerte $\bar{x}_0$ und $\bar{y}_0$ mit gleichen Nennern dar, so daß also die charakteristische Eigenschaft der Jacobischen Differentialgleichung, die in Satz 32 von Nr. 753 ausgesprochen wurde, erhalten bleibt. Daraus folgt der

Satz 38: Werden in die Jacobische Differentialgleichung:

$$(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)(x dy - y dx) - (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3) dy + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3) dx = 0$$

neue Veränderliche $\bar{x}$ *und* $\bar{y}$ *vermöge einer projektiven Transformation:*

$$\bar{x} = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + c_3}, \quad \bar{y} = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + c_3}$$

eingeführt, so geht wieder eine Jacobische Differentialgleichung in den neuen Veränderlichen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ hervor.

Die Koeffizienten der neuen Jacobischen Differentialgleichung werden allerdings im allgemeinen andere Werte als die in der ursprünglichen Gleichung haben.

Entsprechend läßt sich in Anknüpfung an Satz 35, Nr. 754, der allerdings fast augenscheinliche Satz formulieren:

Satz 39: Eine Differentialgleichung von der Form:

$$(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3)dy - (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3)dx = 0,$$

worin die sechs Koeffizienten α_i und β_i Konstanten sind, geht bei der Einführung neuer Veränderlicher $\bar{x}$ und $\bar{y}$ vermöge einer linearen Transformation:

$$\bar{x} = a_1 x + a_2 y + a_3, \quad \bar{y} = b_1 x + b_2 y + b_3$$

wieder in eine Differentialgleichung von derselben allgemeinen Form über.

757. Vereinfachung der Jacobischen Differentialgleichung. Wenn die Koeffizienten γ_1 und γ_2 in der Jacobischen Differentialgleichung:

$$(1) \quad (\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)(x dy - y dx) \\ - (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3)dy + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3)dx = 0$$

gleich Null sind, reduziert sie sich auf eine Gleichung:

$$X(x, y)dy - Y(x, y)dx = 0,$$

in der X und Y *ganze* lineare Funktionen von x und y sind. Dieselbe Vereinfachung kann man, wie jetzt gezeigt werden soll, auch dann erreichen, wenn γ_1 und γ_2 nicht beide gleich Null sind, und zwar durch Einführung von neuen Veränderlichen vermöge einer geeigneten projektiven Transformation.

Die Gleichung (1) ist zunächst wie in Nr. 753 durch das System ersetzbar:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 - x(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 - y(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3). \end{cases}$$

Wenn γ_1 und γ_2 nicht beide gleich Null sind, gibt es, behaupten wir, mindestens eine *Gerade:*

$$c_1 x + c_2 y + c_3 = 0, \tag{3}$$

die eine Integralkurve der Jacobischen Differentialgleichung ist. Denn dazu ist nach (2) notwendig und hinreichend, daß die Gleichung:

$$\begin{aligned} c_1 [(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3) - x(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)] \\ + c_2 [(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3) - y(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)] = 0 \end{aligned}$$

infolge von (3) bestehe. Wird hierin nach (3) für $c_1 x + c_2 y$ der Wert $-c_3$ eingeführt, so kommt die in x und y *lineare* Gleichung:

$$c_1(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3) + c_2(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3) + c_3(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3) = 0,$$

und diese ist dann und nur dann eine Folge von (3), falls ihre linke Seite mit der linken Seite von (3), abgesehen von einem konstanten Faktor ϱ, übereinstimmt. Somit ergibt die Vergleichung die drei Bedingungen:

$$\left\{ \begin{aligned} (\alpha_1 - \varrho)c_1 + \beta_1 c_2 + \gamma_1 c_3 = 0, \\ \alpha_2 c_1 + (\beta_2 - \varrho)c_2 + \gamma_2 c_3 = 0, \\ \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 + (\gamma_3 - \varrho)c_3 = 0. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Dies sind drei in c_1, c_2, c_3 lineare homogene Gleichungen, und bekanntlich gibt es dann und nur dann drei *nicht sämtlich verschwindende* Werte c_1, c_2, c_3, die ihnen genügen, wenn:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \varrho & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \varrho & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 - \varrho \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

ist. Hierin aber liegt eine *kubische* Gleichung für ϱ vor, die mindestens eine reelle Wurzel hat. Wird diese Wurzel benutzt, so sind von den drei aus (4) für c_1, c_2, c_3 hervorgehenden Werten, von denen übrigens nur die Verhältnisse bestimmt werden und für die Gerade (3) in Betracht kommen, die beiden ersten gewiß nicht beide gleich Null, denn sonst würde sich aus den beiden ersten Gleichungen (4) auch $c_3 = 0$ ergeben, weil γ_1 und γ_2 nicht beide gleich Null sind. Die Gleichung (3) ist demnach nicht von x und y frei, stellt also in der Tat eine *Integralgerade* dar.

Nun führt man in die Jacobische Differentialgleichung (1) neue Veränderliche $\bar{x}$ und $\bar{y}$ vermöge einer projektiven Transformation:

$$(6)\qquad \bar{x} = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + c_3}, \quad \bar{y} = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + c_3}$$

ein, *worin die Nenner gleich der linken Seite von* (3) *sind.* Es ist leicht zu sehen, welche Form die neue Differentialgleichung annimmt, von der schon nach Satz 38 der vorigen Nummer bekannt ist, daß sie wieder eine Jacobische Differentialgleichung sein muß. Durch Multiplikation der beiden Gleichungen (2) mit c_1 bzw. c_2 und Addition ergibt sich nämlich mit Rücksicht auf (4):

$$(7)\qquad \frac{d(c_1 x + c_2 y + c_3)}{dt} = (c_1 x + c_2 y + c_3)(\varrho - \gamma_1 x - \gamma_2 y - \gamma_3).$$

Daher liefert die Differentiation der Werte (6) von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ nach t, wenn darin für $dx : dt$ und $dy : dt$ die Werte aus dem Systeme (2) substituiert werden, zwei gebrochene *lineare* Funktionen von x und y mit gleichen Nennern. Wenn beide Werte miteinander dividiert werden, geht folglich auch für $d\bar{y} : d\bar{x}$ eine gebrochene lineare Funktion von x und y hervor. Hieraus sind nun noch x und y vermöge (6) zu eliminieren. Nach (3) in Nr. 752 aber bestimmen die Gleichungen (6) die Veränderlichen x und y als gebrochene lineare Funktionen von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ mit gleichen Nennern. Mithin wird schließlich $d\bar{y} : d\bar{x}$ eine gebrochene lineare Funktion von $\bar{x}$ und $\bar{y}$. Somit gilt der

Satz 40: Die Jacobische Differentialgleichung:

$$(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)(x\,dy - y\,dx) \\ - (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3)dy + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3)dx = 0$$

läßt sich durch Einführung neuer Veränderlicher $\bar{x}$ *und* $\bar{y}$ *vermöge einer geeigneten reellen projektiven Transformation stets in eine solche Jacobische Differentialgleichung verwandeln, in der das Glied mit* $\bar{x}\,d\bar{y} - \bar{y}\,d\bar{x}$ *fehlt, d. h. in eine von der Form:*

$$(\bar{\alpha}_1 \bar{x} + \bar{\alpha}_2 \bar{y} + \bar{\alpha}_3)d\bar{y} - (\bar{\beta}_1 \bar{x} + \bar{\beta}_2 \bar{y} + \bar{\beta}_3)d\bar{x} = 0.$$

Nach den Erörterungen in Nr. 755 ist der geometrische Sinn der erreichten Vereinfachung dieser: Vermöge der projektiven Transformation (6) wird eine *Gerade* (3), die eine Integralkurve vorstellt, ins Unendlichferne übergeführt.

758. Integration der Differentialgleichung $Xdy - Ydx = 0$, worin X und Y ganze lineare Funktionen sind. Das Problem, irgendeine Jacobische Differentialgleichung wirklich zu integrieren, ist hiernach gelöst, sobald man jede solche Differentialgleichung:

(1) $$Xdy - Ydx = 0,$$

in der X und Y *ganze* lineare Funktionen:

(2) $$X = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3, \quad Y = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3$$

sind, zu integrieren vermag. Wie dies zu geschehen hat, sei in aller Kürze angedeutet.

Wenn $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$ ist, kann man stets erreichen, daß die Glieder α_3 und β_3 fortfallen. Sind sie nämlich nicht beide gleich Null, so gibt es zwei Konstanten m und n derart, daß

$$\alpha_1 m + \alpha_2 n = \alpha_3, \quad \beta_1 m + \beta_2 n = \beta_3$$

wird, und durch Einführung der neuen Veränderlichen $\bar{x} = x + m$ und $\bar{y} = y + n$ geht die Differentialgleichung (1) über in:

$$(\alpha_1 \bar{x} + \alpha_2 \bar{y}) d\bar{y} - (\beta_1 \bar{x} + \beta_2 \bar{y}) d\bar{x} = 0.$$

Diese Gleichung aber ist *homogen*, daher nach Nr. 715 in allen Fällen leicht zu integrieren, indem man zunächst die Funktion $z = \bar{y} : \bar{x}$ von x bestimmt. Es tritt dabei eine Quadratur von der Form

$$\int \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{\alpha z^2 + \beta z + \gamma} dz$$

auf, die in jedem Falle nach § 1, 2. Kap. des 2. Bandes, zu leisten ist.

Wenn dagegen $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$ ist, sind $\alpha_1 x + \alpha_2 y$ und $\beta_1 x + \beta_2 y$ einander proportional, so daß die Differentialgleichung (1) die speziellere Form:

$$[h(\alpha x + \beta y) + \alpha_3] dy - [k(\alpha x + \beta y) + \beta_3] dx = 0$$

hat, worin alle Koeffizienten konstant sind. Wenn hierin $\alpha x + \beta y$ überhaupt fehlt, ist die Integration sofort auszuführen. Andernfalls erreicht man durch Einführung von x und $\alpha x + \beta y$ oder von y und $\alpha x + \beta y$ als neuen Veränderlichen, daß die Veränderlichen in der neuen Form der Differentialgleichung getrennt werden, so daß nur noch leicht ausführbare Quadraturen zu leisten sind (vgl. Nr. 713.)

Führt man alle diese Rechnungen durch, so erhält man für das Integral der Differentialgleichung (1) insgesamt vier typische Formen, nämlich, wenn U und V ganze lineare Funktionen von x und y bedeuten und a und b Konstanten sind, die folgenden:

$$(3)\quad \begin{cases} U^a V^b = \text{konst.}, \quad \sqrt{U^2+V^2}\, e^{a \operatorname{arc\,tg}(V:U)} = \text{konst.}, \\ U^2 - V = \text{konst.}, \quad U e^{\frac{V}{U}} = \text{konst.} \end{cases}$$

759. Die typischen Formen der Integralkurven Jacobischer Differentialgleichungen. In Nr. 757 wurde die allgemeine Jacobische Differentialgleichung:

$$(1)\quad (\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)(x\,dy - y\,dx) \\ - (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3)\,dy + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3)\,dx = 0$$

vermöge einer geeigneten projektiven Transformation in eine Differentialgleichung verwandelt, deren Integration die vorige Nummer gewidmet war. Will man wieder zur Jacobischen Differentialgleichung zurückkehren, so muß man statt x und y gebrochene lineare Funktionen von x und y mit gleichen Nennern einsetzen. Dabei verwandeln sich zwei ganze lineare Funktionen U und V in gebrochene lineare Funktionen mit gleichen Nennern. Somit ergibt sich aus (3) in voriger Nummer, daß folgende typische Formen für das Integral einer Jacobischen Differentialgleichung vorkommen können:

$$(2)\quad \begin{cases} U^a V^b W^{-a-b} = \text{konst.}, \quad \dfrac{\sqrt{U^2+V^2}}{W}\, e^{a \operatorname{arc\,tg}(V:U)} = \text{konst.}, \\ \dfrac{U^2 - VW}{W^2} = \text{konst.}, \quad \dfrac{U}{W}\, e^{\frac{V}{U}} = \text{konst.}, \end{cases}$$

worin U, V, W ganze lineare Funktionen von x und y bedeuten und a und b konstant sind.

Man kann umgekehrt zeigen, daß jede Gleichung (2) bei beliebiger Wahl der ganzen linearen Funktionen U, V, W und der Konstanten a und b in der Tat alle Integralkurven einer Jacobischen Differentialgleichung vorstellt. Denn wenn man vermöge der projektiven Transformation:

$$(3)\qquad \bar{x} = \frac{U}{W}, \quad \bar{y} = \frac{V}{W}$$

in die Gleichungen (2) neue Veränderliche $\bar{x}$ und $\bar{y}$ einführt, ergeben sich die Kurvenscharen:

$$\bar{x}^a \bar{y}^b = \text{konst.}, \quad \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}\, e^{a \operatorname{arc\,tg} (\bar{y} : \bar{x})} = \text{konst.},$$
$$\bar{x}^2 - \bar{y} = \text{konst.}, \quad \bar{x} e^{\bar{y} : \bar{x}} = \text{konst.},$$

d. h. die Integralkurven der vier Differentialgleichungen:

$$a\bar{y}\,d\bar{x} + b\bar{x}\,d\bar{y} = 0, \quad (\bar{x} - a\bar{y})d\bar{x} + (\bar{y} + a\bar{x})d\bar{y} = 0,$$
$$2\bar{x}\,d\bar{x} - d\bar{y} = 0, \quad (\bar{x} - \bar{y})d\bar{x} + \bar{x}\,d\bar{y} = 0,$$

die ihrerseits spezielle Jacobische Differentialgleichungen sind. Wenn man wieder x und y auf Grund der Gleichungen (3) in sie einführt, gehen also nach Satz 38, Nr. 756, vier Jacobische Differentialgleichungen hervor, deren Integrale die Funktionen (2) vorstellen.

Wir gelangen daher zu folgender Übersicht:

Satz 41: Jede Jacobische Differentialgleichung:

$$(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)(x\,dy - y\,dx)$$
$$- (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3)dy + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3)dx = 0$$

läßt sich durch Einführung neuer Veränderlicher $\bar{x}$ und $\bar{y}$ vermöge einer geeigneten reellen projektiven Transformation auf eine der folgenden vier Formen bringen:

$$a\bar{y}\,d\bar{x} + b\bar{x}\,d\bar{y} = 0, \quad (\bar{x} - a\bar{y})d\bar{x} + (\bar{y} + a\bar{x})d\bar{y} = 0,$$
$$2\bar{x}\,d\bar{x} - d\bar{y} = 0, \quad (\bar{x} - \bar{y})d\bar{x} + \bar{x}\,d\bar{y} = 0,$$

deren Integrale sind:

$$\bar{x}^a \bar{y}^b = \text{konst.}, \quad \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}\, e^{a \operatorname{arc\,tg} (\bar{y} : \bar{x})} = \text{konst.},$$
$$\bar{x}^2 - \bar{y} = \text{konst.}, \quad \bar{x} e^{\bar{y} : \bar{x}} = \text{konst.}$$

Nach Satz 34, Nr. 753, sind die Integralkurven der Jacobischen Differentialgleichung (1) die Bahnkurven einer eingliedrigen projektiven Gruppe. Deshalb kommen ihnen viele merkwürdige geometrische Eigenschaften zu, die systematisch zuerst von *Klein* und *Lie* abgeleitet wurden, von denen sie den allerdings wenig bezeichnenden Namen *W-Kurven* erhalten haben.

Nach dem Vorhergehenden haben wir also die Bahnkurven aller eingliedrigen projektiven Gruppen der Ebene auf vier typische Formen zurückgeführt, indem wir die Ebene jedesmal in einer geeigneten Weise mittels einer reellen projektiven Transformation abgebildet haben. Das Integrationsverfahren, das wir dabei benutzten, war in zwei Schritte zerlegt worden, indem die Jacobische Differentialgleichung zuerst in eine spezielle verwandelt (in Nr. 757) und alsdann diese (in Nr. 758) integriert wurde. Man kann aber auch direkt vorgehen, und dies soll hier wenigstens in einem Falle gezeigt werden, den man den *Hauptfall* nennen kann. Im Übrigen kommen wir auf die allgemeine Integration im zweiten Paragraphen des nächsten Kapitels gelegentlich (in Nr. 775) zurück.

In Nr. 757 ergab sich, daß die Jacobische Differentialgleichung (1) insbesondere eine Gerade als Integralkurve hat, und zwar folgte dies daraus, daß der kubischen Gleichung (5) in Nr. 757 wenigstens eine reelle Wurzel ϱ zukommt. Dies läßt sich nun in dem *Falle, wo die kubische Gleichung drei verschiedene reelle Wurzeln* ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 *hat,* noch weiter ausnutzen. *Alsdann nämlich gibt es drei Geraden:*

$$(4)\qquad a_1x+a_2y+a_3=0,\quad b_1x+b_2y+b_3=0,\quad c_1x+c_2y+c_3=0,$$

die Integralkurven sind, und es ist leicht zu sehen, daß dabei die Determinante der a_i, b_i, c_i nicht verschwindet. Folglich stellen die Gleichungen:

$$(5)\qquad \bar{x}=\frac{a_1x+a_2y+a_3}{c_1x+c_2y+c_3},\quad \bar{y}=\frac{b_1x+b_2y+b_3}{c_1x+c_2y+c_3}$$

eine projektive Transformation dar, vermöge derer man neue Veränderliche $\bar{x}$ und $\bar{y}$ in die Jacobische Differentialgleichung (1) einführen kann. Analog der Gleichung (7) von Nr. 757 ist nun bei dem Systeme:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3-x(\gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=\beta_1x+\beta_2y+\beta_3-y(\gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3), \end{cases}$$

das die Differentialgleichung (1) ersetzt, auch:

$$\frac{d(a_1x+a_2y+a_3)}{dt}=(a_1x+a_2y+a_3)(\varrho_1-\gamma_1x-\gamma_2y-\gamma_3),$$

$$\frac{d(b_1x+b_2y+b_3)}{dt}=(b_1x+b_2y+b_3)(\varrho_2-\gamma_1x-\gamma_2y-\gamma_3),$$

$$\frac{d(c_1x+c_2y+c_3)}{dt}=(c_1x+c_2y+c_3)(\varrho_3-\gamma_1x-\gamma_2y-\gamma_3).$$

Berechnet man auf Grund dieser Gleichungen die Ableitungen der Funktion (5) nach t, so kommt sehr einfach:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = (\varrho_1 - \varrho_3)\bar{x}, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = (\varrho_2 - \varrho_3)\bar{y},$$

und hieraus ergibt sich durch Division die neue Form der Jacobischen Differentialgleichung:

$$(7) \qquad (\varrho_2 - \varrho_3)\frac{d\bar{x}}{\bar{x}} + (\varrho_3 - \varrho_1)\frac{d\bar{y}}{\bar{y}} = 0,$$

deren Integration liefert:

$$\bar{x}^{\varrho_2 - \varrho_3}\bar{y}^{\varrho_3 - \varrho_1} = \text{konst.}$$

Werden für $\bar{x}$ und $\bar{y}$ wieder die Werte (5) eingesetzt, so ergibt sich als Integral der Jacobischen Differentialgleichung (1):

$$(8) \quad (a_1x + a_2y + a_3)^{\varrho_2 - \varrho_3}(b_1x + b_2y + b_3)^{\varrho_3 - \varrho_1}(c_1x + c_2y + c_3)^{\varrho_1 - \varrho_2} = \text{konst.}$$

Wenn man die drei ganzen Funktionen mit U, V, W und $\varrho_2 - \varrho_3$ mit a, $\varrho_3 - \varrho_1$ mit b bezeichnet, nimmt das Integral die erste typische Form in (2) an.

Wenn von den drei verschiedenen Wurzeln ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 zwei imaginär, also konjugiert komplex sind, etwa ϱ_2 und ϱ_3, so kann man immer noch drei Integralgeraden (4) bestimmen, aber die zweite und dritte werden imaginär, indem sich für b_1 und c_1, ebenso für b_2 und c_2 und schließlich auch für b_3 und c_3 konjugiert komplexe Werte ergeben. Alsdann kann man aber das Integral (8), nachdem man seinen Logarithmus gebildet hat, mit Hilfe der Formel (2) von Nr. 376 auf eine reelle Form bringen, und so ergibt sich die zweite unter (2) angegebene typische Form. Die beiden anderen Fälle in (2) ergeben sich, wenn die kubische Gleichung für ϱ nicht lauter verschiedene Wurzeln hat.

760. Eine Eigenschaft der Integralkurven einer allgemeinen Jacobischen Differentialgleichung. In dem *Hauptfalle*, wo die drei Wurzeln ϱ der kubischen Gleichung reell und voneinander verschieden sind, besagt die Existenz der drei Integralgeraden, siehe (4) in der letzten Nummer, daß diejenige eingliedrige projektive Gruppe, die von der infinitesimalen Transformation:

$$(1) \qquad [\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 - x(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)]\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$+ [\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 - y(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)]\frac{\partial f}{\partial y}$$

erzeugt wird, *drei gerade Linien invariant läßt, die ein wirkliches Dreieck bilden.* Die Ecken A, B, C des Dreieckes sind deshalb *invariante Punkte* (siehe Fig. 36). Vermöge der projektiven Transformation (5) in der letzten Nummer werden die beiden ersten Geraden in die Geraden $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$ verwandelt, während für die dritte Gerade $\bar{x} = \bar{y} = \infty$ wird; sie wird also ins Unendlichferne transformiert. Die drei Punkte A, B, C

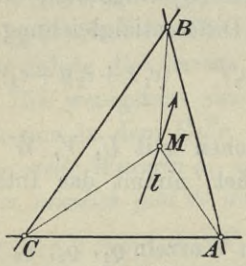

Fig. 36.

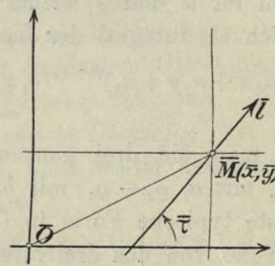

Fig. 37.

sind daher im neuen Achsenkreuze der Anfangspunkt $\bar{O}$ und die beiden unendlich fernen Punkte der $\bar{x}$- und $\bar{y}$-Achse. Bedeutet nun $\bar{M}$ einen beliebigen Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$, siehe Fig. 37, so seien von ihm die drei Geraden nach diesen drei Punkten gezogen, d. h. die Gerade $\bar{M}\bar{O}$ und die Parallelen zu beiden Achsen. Die Differentialgleichung (7) in der letzten Nummer ordnet $\bar{M}$ ein Linienelement zu, das mit der $\bar{x}$-Achse einen Winkel $\bar{\tau}$ bildet, für den

$$\operatorname{tg} \bar{\tau} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\varrho_2 - \varrho_3}{\varrho_1 - \varrho_3}\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

ist. Es sei $\bar{l}$ die Gerade dieses Elements. Nun gehen von $\bar{M}$ vier Geraden aus, deren Winkel mit der $\bar{x}$-Achse die vier Tangens haben:

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x}}, \quad 0, \quad \infty, \quad \frac{\varrho_2 - \varrho_3}{\varrho_1 - \varrho_3}\frac{\bar{y}}{\bar{x}}.$$

Das *Doppelverhältnis* von vier von einem Punkte $\bar{M}$ ausgehenden Geraden (vgl. Nr. 752) ist aber, wie man leicht erkennt, das der vier Tangens, also hier:

$$\frac{\infty - \frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{\infty - 0} : \frac{\frac{\varrho_2 - \varrho_3}{\varrho_1 - \varrho_3}\frac{\bar{y}}{\bar{x}} - \frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{\frac{\varrho_2 - \varrho_3}{\varrho_1 - \varrho_3}\frac{\bar{y}}{\bar{x}} - 0}.$$

Der erste Bruch wird, weil ∞ im Zähler und Nenner dieselbe Bedeutung hat, gleich Eins, so daß sich der Wert:

$$\frac{\varrho_2 - \varrho_3}{\varrho_2 - \varrho_1}$$

ergibt, der *konstant* ist.

Kehren wir nun zur Fig. 36 zurück, d. h. führen wir die vorhin angewandte projektive Transformation rückwärts aus, so tritt an die Stelle des beliebig gewählten Punktes $\bar{M}$ ein beliebiger Punkt M oder (x, y), dem die Jacobische Differentialgleichung ein Linienelement zuordnet, dessen Gerade die Gerade l sei. Die vier Geraden, von denen vorhin die Rede war, werden nun in die Geraden MA, MB, MC und l verwandelt, und da die angewandte projektive Transformation das Doppelverhältnis ungeändert läßt (nach Nr. 752), so folgt:

$$(2) \qquad (MA, MB, MC, l) = \frac{\varrho_2 - \varrho_3}{\varrho_2 - \varrho_1}.$$

Die Integralkurven der Jacobischen Differentialgleichung haben also im Hauptfalle die Eigenschaft, *daß in allen Punkten M dieser Kurven das Doppelverhältnis, das die Kurventangente l daselbst mit den Geraden MA, MB, MC bildet, ein und denselben Wert hat.* Die drei Punkte A, B, C sind dabei diejenigen, die bei der infinitesimalen projektiven Transformation (1) in Ruhe bleiben; ihre Koordinaten genügen also den beiden Bedingungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 - x(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3) = 0, \\ \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 - y(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3) = 0, \end{cases}$$

die zwei Kegelschnitte mit einer gemeinsamen Asymptotenrichtung darstellen, so daß die Kegelschnitte in der Tat drei im Endlichen gelegene Punkte A, B, C gemein haben.

Da die Jacobische Differentialgleichung in der Form:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 - y(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)}{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 - x(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3)}$$

geschrieben werden kann, sieht man auch, daß die Integralkurven nirgends *singuläre Stellen* haben können, abgesehen von denjenigen Stellen, wo die rechte Seite dieser Gleichung unbestimmt wird, und dies sind gerade die gemeinsamen Punkte A, B, C der beiden Kegelschnitte (3).

Die vorhin gefundene Eigenschaft (2) der Integralkurven oder W-Kurven (vgl. Nr. 759) gestattet noch mancherlei andere Eigenschaften derselben Kurven zu ermitteln. Auch läßt sich eine analoge Eigenschaft in den anderen Fällen finden, wo die kubische Gleichung für ϱ nicht drei verschiedene reelle Wurzeln hat. Aber wir müssen uns mit diesen Andeutungen begnügen.

Viertes Kapitel.

Systeme erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

---

§ 1. Systeme in der Normalform.

761. System der Hauptlösungen und allgemeines Lösungensystem. Unter dem Bereiche eines Systems erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform (vgl. Nr. 665):

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

wird ein Variabilitätsbereich verstanden, innerhalb dessen f_1, $f_2, \ldots f_n$ solche stetige Funktionen aller $n+1$ Veränderlichen $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ sind, denen stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich der n Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots y_n$ zukommen. Das System (1) soll nur in diesem Bereiche untersucht werden. Wenn die Werte:

$$(2) \qquad x = a, \quad y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2, \; \ldots \; y_n = b_n$$

eine *bestimmte* Stelle im Bereiche definieren und wenn x_0 sowie $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ in gewissen Umgebungen von a und von b_1, $b_2, \ldots b_n$ *beliebig* gewählt werden, ist nach Satz 9, Nr. 691, ein und nur ein Lösungensystem:

$$(3) \qquad y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

vorhanden, das für $x = x_0$ die Anfangswerte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ hat. Es sind dies in einer gewissen Umgebung von x_0 stetige Funktionen von x mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung; übrigens kann man $|x_0 - a|$ so klein wählen, daß insbesondere $x = a$ dieser Umgebung von x_0 angehört. Die Lösungen sind ferner stetige Funktionen der n Anfangswerte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ und haben nach Satz 10, Nr. 692, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich dieser Anfangswerte.

Da dem Lösungensysteme (3) für $x = x_0$ gerade die Werte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ zukommen, heißt es *das zu den Anfangswerten* $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ *gehörige System von Hauptlösungen*. Da es ferner, so lange x_0 und $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ in Umgebungen der Stelle $x = a$ bzw. $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ willkürlich bleiben, die Gesamtheit aller dort vorhandenen Lösungensysteme umfaßt, heißt es auch *das allgemeine Lösungensystem in der Umgebung der Stelle* (2). Werden dagegen die Anfangswerte bestimmt gewählt, so liegt nur ein *partikulares Lösungensystem* vor.

Da jedes partikulare Lösungensystem (3) für $x = a$ ein gewisses Wertsystem $C_1, C_2, \ldots C_n$ in der Umgebung der Stelle $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ wird, stellt (3) auch dann noch alle Lösungensysteme in der Umgebung der Stelle (2) dar, wenn darin $x = a$ gesetzt und nur noch für $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ willkürliche Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ angenommen werden:

$$y_i = \varphi_i(x, a, C_1, C_2, \ldots C_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Die bestimmte Zahl a braucht aber unter dem Funktionszeichen nicht vermerkt zu werden. Demnach sei das allgemeine Lösungensystem in der Umgebung der Stelle (2) von jetzt an so dargestellt:

$$(4) \qquad y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, \ldots C_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Die darin enthaltenen n willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$, die sogenannten *Integrationskonstanten*, bedeuten diejenigen Werte, die dem Lösungensysteme für $x = a$ zukommen, und deshalb sind die Funktionen (4) nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich $C_1, C_2, \ldots C_n$ stetig. Andererseits sind sie nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich x stetig. Hieraus folgert man leicht, daß sie hinsichtlich aller $n + 1$ Größen $x, C_1, C_2, \ldots C_n$ stetig sein müssen. Denn wenn x die Zunahme $\varDelta x$ erfährt und $C_1, C_2, \ldots C_n$ um $\varDelta C_1, \varDelta C_2, \ldots \varDelta C_n$ wachsen, bekommt y_i nach (4) die Zunahme:

$$\varDelta y_i = \varphi_i(x + \varDelta x, C_1 + \varDelta C_1, \ldots C_n + \varDelta C_n) - \varphi_i(x, C_1, \ldots C_n),$$

die sich nach Subtraktion und Addition von $\varphi_i(x + \varDelta x, C_1, \ldots C_n)$ auch so darstellen läßt:

$$(5)\quad \varDelta y_i = \varphi_i(x+\varDelta x, C_1+\varDelta C_1, \ldots C_n+\varDelta C_n) - \varphi_i(x+\varDelta x, C_1, \ldots C_n)$$
$$+ \varphi_i(x+\varDelta x, C_1, \ldots C_n) - \varphi_i(x, C_1, \ldots C_n).$$

Weil nun ein partikulares Lösungensystem (4) überall in der Umgebung der Stelle (2) vorhanden ist, sind auch die n Funktionen $\varphi_i(x+\varDelta x, C_1, \ldots C_n)$ hinsichtlich $C_1, C_2, \ldots C_n$ stetig. Demnach hat die in der ersten Zeile von (5) stehende Differenz für $\lim \varDelta C_1 = 0, \ldots \lim \varDelta C_n = 0$ den Grenzwert Null, und dasselbe gilt von der in der zweiten Zeile stehenden Differenz für $\lim \varDelta x = 0$. Folglich ist $\lim \varDelta y_i = 0$ für $\lim \varDelta x = 0$ und $\lim \varDelta C_1 = 0, \ldots \lim \varDelta C_n = 0$, was zu beweisen war.

Die partiellen Ableitungen der n Funktionen (4) nach $C_1, C_2, \ldots C_n$ haben insbesondere an der Stelle $x = a$ leicht zu berechnende Werte, weil die Funktionen selbst dort gleich $C_1, C_2, \ldots C_n$ werden. Denn wenn z. B. nur C_1 um $\varDelta C_1$ wächst und $\varDelta y_i$ die zugehörige Zunahme von y_i bedeutet, hat der Zähler des Differenzenquotienten:

$$\frac{\varDelta y_i}{\varDelta C_1} = \frac{\varphi_i(x, C_1+\varDelta C_1, C_2, \ldots C_n) - \varphi_i(x, C_1, C_2, \ldots C_n)}{\varDelta C_1}$$

an der Stelle $x = a$ für $i \neq 1$ den Wert $C_i - C_i = 0$, dagegen für $i = 1$ den Wert $C_1 + \varDelta C_1 - C_1 = \varDelta C_1$. Folglich ist der Differenzenquotient an der Stelle $x = a$ gleich Eins oder Null, je nachdem $i = 1$ oder $i \neq 1$ ist. Für $\lim \varDelta C_1 = 0$ ergibt sich dasselbe für den Differentialquotienten $\partial y_i : \partial C_1$. Ebenso erkennt man, daß überhaupt allgemein $\partial y_i : \partial C_k$ an der Stelle $x = a$ gleich Eins oder Null wird, je nachdem $i = k$ oder $i \neq k$ ist. Weiterhin folgt hieraus, daß die *Funktionaldeterminante:*

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ C_1 & C_2 & \ldots & C_n \end{pmatrix}$$

an der Stelle $x = a$ den Wert Eins hat. Deshalb läßt sich die Umgebung der Stelle $x = a$ nach Satz 11, Nr. 693, soweit einschränken, daß überall in ihr die Funktionaldeterminante von Null verschieden bleibt und mithin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ *von einander unabhängig hinsichtlich* $C_1, C_2, \ldots C_n$ sind.

Deutet man $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ wie in Nr. 668 als Koordinaten der Punkte in einem Raume von $n+1$ Dimensionen, so ordnet das System (1) jedem Punkte des Bereiches ein und nur ein bestimmtes *Linienelement* zu. Jedes Lösungensystem wird alsdann durch eine sogenannte *Integralkurve* dargestellt, deren Linienelemente sämtlich der Schar dieser Elemente angehören. Insbesondere definiert das allgemeine Lösungensystem (4) die Gesamtheit derjenigen Integralkurven, die in der Umgebung des Punktes (2) verlaufen. Diese Gesamtheit erfüllt die Umgebung *einfach*, d. h. *durch jeden Punkt der Umgebung geht eine und nur eine Integralkurve* (vgl. Nr. 703).

762. Integrale. Unter einem *Integral* des Systems:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

versteht man eine Funktion Ω der $n+1$ Veränderlichen x, $y_1, y_2, \ldots y_n$, die für jedes solche Lösungensystem von (1) konstant ist, das dem Variabilitätsbereiche von Ω angehört. Vorausgesetzt wird natürlich, daß der Variabilitätsbereich von Ω in dem Bereiche des Systems (1) gelegen sei.

Der Satz 17 von Nr. 697 lehrt, angewandt auf das allgemeine Lösungensystem (4) in der vorigen Nummer, daß dies Lösungensystem Auflösungen hinsichtlich $C_1, C_2, \ldots C_n$ hat:

$$C_k = \omega_k(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots n), \tag{2}$$

die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in der Umgebung der Stelle $(a, b_1, b_2, \ldots b_n)$ stetig sind. Die n Funktionen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ sind folglich für jedes Lösungensystem in dieser Umgebung konstant und deshalb Integrale des Systems (1). Man kann $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ als die zu $y_1 = \varphi_1, \ldots y_n = \varphi_n$ inversen Funktionen (vgl. Nr. 698) bezeichnen, wenn man von der in den ω und φ noch vorkommenden Veränderlichen x absieht. Die Funktionaldeterminante von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ hinsichtlich $y_1, y_2, \ldots y_n$ ist deshalb nach Satz 6, Nr. 81, der reziproke Wert der in voriger Nummer betrachteten Funktionaldeterminante. Mithin sind $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ von einander unabhängig hinsichtlich $y_1, y_2, \ldots y_n$. Wenn man von *unabhängigen Integralen* spricht, meint man stets, daß sie *hinsichtlich der gesuchten Funktionen* $y_1, y_2, \ldots y_n$ von einander unabhängig sein sollen.

Wenn Ω ein differenzierbares Integral des Systems (1) bedeutet, wie z. B. $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ differenzierbare Integrale sind, so hat Ω, falls darin unter $y_1, y_2, \ldots y_n$ ein System von Lösungen von (1) und daher Funktionen von x verstanden werden, als Funktion von x die Ableitung:

$$\frac{d\Omega}{dx} = \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial\Omega}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial\Omega}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx},$$

die nach (1) den Wert annimmt:

$$\frac{d\Omega}{dx} = \frac{\partial\Omega}{\partial x} + f_1\frac{\partial\Omega}{\partial y_1} + f_2\frac{\partial\Omega}{\partial y_2} + \cdots + f_n\frac{\partial\Omega}{\partial y_n}.$$

Weil nun für jedes Lösungensystem $\Omega =$ konst., d. h. $d\Omega : dx = 0$ sein soll, ergibt sich der

Satz 1: Eine differenzierbare Funktion Ω von $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ stellt dann und nur dann ein Integral des Systems von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

dar, wenn sie eine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} + f_1\frac{\partial\Omega}{\partial y_1} + f_2\frac{\partial\Omega}{\partial y_2} + \cdots + f_n\frac{\partial\Omega}{\partial y_n} = 0$$

für die Funktion Ω der $n+1$ unabhängigen Veränderlichen x, $y_1, y_2, \ldots y_n$ ist.

Insbesondere also wird diese partielle Differentialgleichung erster Ordnung durch die n Funktionen $\Omega = \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ befriedigt. Es leuchtet wie in Nr. 706 ein, daß jede Funktion F von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ ein Integral ist, da sie mit $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ für jedes Lösungensystem konstant wird. Dies läßt sich nun umkehren: Wenn man in einem Integral Ω für $y_1, y_2, \ldots y_n$ das allgemeine Lösungensystem (4) aus voriger Nummer substituiert, geht zunächst eine Funktion von x und den n Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ hervor. Sie muß aber als Integral von x frei sein, d. h. sie ist eine Funktion von $C_1, C_2, \ldots C_n$ allein. Die gemachte Substitution wird wieder rückgängig gemacht, wenn für $C_1, C_2, \ldots C_n$ die Funktionen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ gesetzt werden. Dadurch ergibt sich, daß Ω eine Funktion von ω_1, $\omega_2, \ldots \omega_n$ allein sein muß. Mithin gilt der

Satz 2: Das System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

hat in der Umgebung einer Stelle seines Bereiches stets n unabhängige Integrale, die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in dieser Umgebung stetig sind. Jede Funktion dieser Integrale ist ebenfalls ein Integral, und andere Integrale gibt es nicht.

Hieraus folgt noch ein Satz über diejenige partielle Differentialgleichung, von der in Satz 1 die Rede war, nämlich

Satz 3: Es liege eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + f_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + f_2 \frac{\partial \Omega}{\partial y_2} + \cdots + f_n \frac{\partial \Omega}{\partial y_n} = 0$$

für eine Funktion Ω von $n+1$ unabhängigen Veränderlichen $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ vor. Dabei seien $f_1, f_2, \ldots f_n$ in der Umgebung einer Stelle $x = a, y_1 = b_1, y_2 = b_2, \ldots y_n = b_n$ stetige Funktionen von $x, y_1, y_2, \ldots y_n$, und insbesondere seien auch ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich der n Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots y_n$ in dieser Umgebung stetig. Alsdann gibt es n Lösungen $\Omega = \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in jener Umgebung stetig und insbesondere hinsichtlich $y_1, y_2, \ldots y_n$ von einander unabhängig sind. Ferner ist jede Funktion von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ allein ebenfalls eine Lösung, und sonst gibt es keine Lösung mehr.

Man erkennt hieraus, daß die Aufgabe, das System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen (1) vollständig zu integrieren, der Aufgabe *äquivalent* ist, diese partielle Differentialgleichung erster Ordnung vollständig zu integrieren.

763. Verschiedene Formen des allgemeinen Lösungensystems, der Integrationskonstanten und der Integrale. Hat das System:

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

wie in Nr. 761 in der Umgebung einer Stelle $(a, b_1, b_2, \ldots b_n)$ das allgemeine Lösungensystem:

$$(2) \qquad y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, \ldots C_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wobei $C_1, C_2, \ldots C_n$ diejenigen Werte bedeuten, die $y_1, y_2, \ldots y_n$

für $x = a$ annehmen, so ist es leicht, den Funktionen (2) eine andere Form zu geben, indem man statt $C_1, C_2, \ldots C_n$ dadurch *n neue Integrationskonstanten* $c_1, c_2, \ldots c_n$ einführt, daß man allgemein:

(3) $$C_i = \psi_i(c_1, c_2, \ldots c_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

setzt. Hier sollen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ solche n Funktionen sein, die denjenigen Bedingungen genügen, unter denen nach Satz 18, Nr. 698, zugehörige inverse Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ vorhanden sind, so daß:

(4) $$c_i = \Psi_i(C_1, C_2, \ldots C_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

die Auflösungen der Gleichungen (3) nach $c_1, c_2, \ldots c_n$ vorstellen. Vermöge der Substitutionen (3) geht eine *neue Form des allgemeinen Lösungensystems* (2) hervor:

(5) $$y_i = \Phi_i(x, c_1, c_2, \ldots c_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Wenn die Auflösungen der Gleichungen (2) nach $C_1, C_2, \ldots C_n$ wie in Nr. 762 die Form haben:

(6) $$C_i = \omega_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

erkennt man leicht, daß auch die Gleichungen (5) Auflösungen nach $c_1, c_2, \ldots c_n$ haben. Denn die Auflösungen ergeben sich aus (4) und (6) in der Form:

(7) $$c_i = \Psi_i(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Demnach sind diese Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ ebenfalls n *unabhängige* Integrale. Einerseits nämlich sind sie hinsichtlich $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ von einander unabhängig, und andererseits sind $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ hinsichtlich $y_1, y_2, \ldots y_n$ von einander unabhängig (vgl. Satz 5, Nr. 81).

Die Auflösung der Gleichungen (5) des neuen allgemeinen Lösungensystems gibt somit n neue unabhängige Integrale:

(8) $$\Omega_i = \Psi_i(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Da die Auswahl der n Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ nur durch jene Bedingungen beschränkt ist, die man nach Nr. 698 solchen Funktionen auferlegen muß, zu denen es inverse geben soll, erkennt man also, daß das allgemeine Lösungensystem (2) auf sehr verschiedenartige neue Formen (5) gebracht werden kann. Zu jedem erlaubten Wertsysteme der Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ gehört dabei ein Wertsystem der Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ derart, daß die n Funktionen (2) mit den n Funktionen (5) übereinstimmen.

Umgekehrt werde jetzt angenommen, daß $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$ *irgendwelche* solche n unabhängige Integrale des Systems (1) in der Umgebung der Stelle $x = a$, $y_1 = b_1, \ldots y_n = b_n$ seien, die sich nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig verhalten. Nach Satz 2 der letzten Nummer sind sie Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ der n Integrale $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ wie in (8). Ferner ist nach Satz 5, Nr. 81:

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \ldots & \Omega_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \ldots & \Omega_n \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix}.$$

Da die linksstehende Funktionaldeterminante und die zweite rechtsstehende von Null verschieden ist, ergibt sich hieraus, daß die Funktionen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$ auch hinsichtlich $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ von einander unabhängig sind. Indem man nun $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$ oder, was dasselbe ist, $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ gleich n willkürlichen Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ setzt, gelangt man rückwärts von den Gleichungen (7) oder (4) zu den Gleichungen (3).

Mithin gilt der

Satz 4: Es seien $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$ solche n unabhängige Integrale des Systems erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y_1 = b_1, \ldots y_n = b_n$ des Bereiches des Systems stetig sind. Alsdann definieren die n Gleichungen:

$$\Omega_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

das allgemeine Lösungensystem in jener Umgebung, falls die n Integrationskonstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ in einer Umgebung derjenigen Werte willkürlich gewählt werden, die den n Funktionen Ω_1, $\Omega_2, \ldots \Omega_n$ an der Stelle $x = a$, $y_1 = b_1, \ldots y_n = b_n$ zukommen.

Solche n Integrale $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$ wie die in diesem Satze erwähnten heißen ein *vollständiges System von Integralen.* Man kann nämlich sagen, daß die Aufgabe, das vorgelegte System von Differentialgleichungen zu integrieren, im wesentlichen gelöst ist, wenn ein vollständiges System von Integralen Ω_1, Ω_2,

$\ldots \Omega_n$ ermittelt worden ist, denn dann kommt es nur noch darauf an, die n Gleichungen $\Omega_i =$ konst. nach $y_1, y_2, \ldots y_n$ aufzulösen. Jede Funktion der n Integrale $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$ ist nach Satz 2, Nr. 762, ebenfalls ein Integral, und außerdem gibt es keines.

Dasjenige vollständige System von Integralen, das sich zuerst in voriger Nummer ergab, nämlich $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, ist von besonderer Art. Denn in:

$$\omega_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{9}$$

sind $C_1, C_2, \ldots C_n$ diejenigen Werte, die $y_1, y_2, \ldots y_n$ für $x = a$ annehmen.

Jede Gleichung, die man aus den Gleichungen (9) durch Elimination und Substitution gewinnen kann, heißt eine *Integralgleichung*.

764. Geometrische Deutung im Falle zweier abhängiger Veränderlicher. Das Notwendigste über die geometrische Deutung eines Systems erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform wurde in Nr. 667, 668 und gelegentlichen Bemerkungen der Nr. 761 gebracht. Aber es dürfte angemessen sein, insbesondere im Falle $n = 2$, wo zur Deutung von x, y_1 und y_2 als Koordinaten der gewöhnliche Raum zur Verfügung steht, die geometrische Veranschaulichung noch etwas genauer zu besprechen.

Das System:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \quad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \tag{1}$$

ordnet einem Punkte M mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y_1, y_2 dasjenige *Linienelement* zu, dessen Richtungskosinus nach Nr. 667 zu dx, dy_1, dy_2 oder also zu 1, f_1, f_2 proportional sind. Jedes Lösungensystem y_1, y_2 besteht aus zwei Funktionen von x und wird durch eine *Integralkurve* veranschaulicht, nämlich durch eine Kurve, der lauter Linienelemente von der erwähnten Art angehören. Jede Aufgabe also, die verlangt, solche Raumkurven zu bestimmen, denen in jedem Punkte eine bestimmte Tangentenrichtung vorgeschrieben ist, findet ihren analytischen Ausdruck in einem Systeme von der Form (1).

Bedeutet:

(2) $$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2), \quad y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2)$$

das allgemeine Lösungensystem von (1) in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$, so definiert es für jedes erlaubte Wertepaar der Integrationskonstanten C_1, C_2 eine Integralkurve k in der Umgebung des Punktes M_0 oder (a, b_1, b_2), und die Gesamtheit dieser Integralkurven k erfüllt die Umgebung von M_0 *einfach*, d. h. durch jeden Punkt der Umgebung geht eine und nur eine Integralkurve, so daß also auch keine zwei verschiedene einander berühren können. Ihre Schar wird *zweifach unendlich* genannt, weil die Individuen der Schar von zwei willkürlichen Konstanten C_1, C_2 abhängen.

Bedeutet $\Omega(x, y_1, y_2)$ ein Integral des Systems (1), so definiert die Gleichung $\Omega =$ konst. eine einfach unendliche Schar von *Flächen, und jede Fläche der Schar wird durch eine einfach unendliche Schar von Integralkurven k überdeckt.* Denn durch jeden Punkt der Fläche geht eine und nur eine Integralkurve, und diese Kurve verbleibt auf der Fläche, weil Ω für jedes Lösungensystem konstant ist. Sind Ω_1 und Ω_2 zwei unabhängige Integrale, so daß sie ein vollständiges System von Integralen bilden, so definiert jede der beiden Gleichungen

$$\Omega_1 = \text{konst.}$$

und $$\Omega_2 = \text{konst.}$$

eine einfach unendliche Flächenschar, s. Fig. 38. Durch irgend einen Punkt M in der Umgebung von M_0 geht je eine Fläche der ersten und zweiten Schar und außerdem eine Integralkurve k. Diese Integralkurve k muß der ersten und zweiten Fläche angehören, daher ihre Schnittkurve sein. *Die zweifach unendliche Schar aller Integralkurven wird somit als Durchschnitt der beiden einfach unendlichen Scharen von Flächen $\Omega_1 =$ konst. und $\Omega_2 =$ konst. erzeugt.*

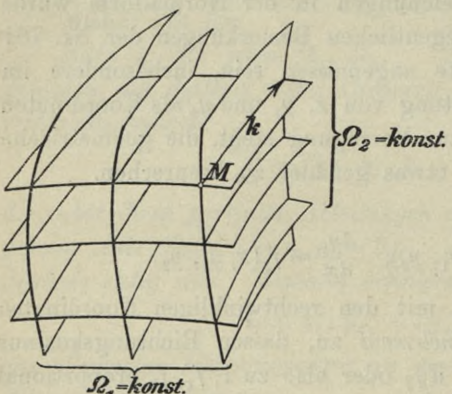

Fig. 38.

Wenn alle Integralkurven bekannt sind, kann man jedes Integral $\Omega(x, y_1, y_2)$ geometrisch konstruieren: Man wählt eine einfach unendliche Schar von Raumkurven c aus, d. h. eine Schar, die von einer willkürlichen Konstanten abhängt, jedoch so, daß diejenigen Integralkurven, die von den Punkten irgend einer Kurve c ausgehen, nicht auch die anderen Kurven c treffen. Alsdann erzeugen jedesmal alle von einer Kurve c ausgehenden Integralkurven k eine Fläche, siehe Fig. 39, und die Gesamtheit dieser Flächen wird durch eine Gleichung $\Omega(x, y_1, y_2) = \text{konst.}$ dargestellt, deren linke Seite Ω ein Integral des Systems (1) ist.

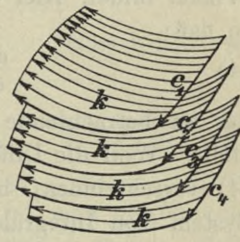

Fig. 39.

1. Beispiel: Irgend einem Punkte M oder (x, y_1, y_2) sei dasjenige Linienelement zugeordnet, das auf dem Radiusvektor OM liegt, so daß dx, dy_1, dy_2 zu x, y_1, y_2 proportional sind und demnach:

$$(3) \qquad \frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1}{x}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{y_2}{x}$$

das zu betrachtende System von Differentialgleichungen ist. Dies Beispiel wurde schon in Nr. 667 gebracht, wo sich ergab, daß die Integralkurven *alle Strahlen vom Anfangspunkte O aus* sind. Dieser Punkt selbst ist auszuschließen, weil für ihn die Funktionen $y_1 : x$ und $y_2 : x$ unstetig werden. Eine von lauter Integralkurven erzeugte Fläche ist eine *Kegelfläche* mit der Spitze O; sie wird nach Nr. 346 durch eine Gleichung zwischen $y_1 : x$ und $y_2 : x$ dargestellt. Jedes Integral Ω des Systems (3) ist deshalb eine Funktion von $y_1 : x$ und $y_2 : x$ allein, und jede Funktion von $y_1 : x$ und $y_2 : x$ allein ist ein Integral. Dies steht mit Satz 2, Nr. 762, im Einklange, denn es sind insbesondere $y_1 : x$ und $y_2 : x$ Integrale. In der Tat wird die partielle Differentialgleichung, die in Satz 1, Nr. 762, für alle Integrale Ω des Systems angegeben wurde und hier so lautet:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{y_1}{x}\frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + \frac{y_2}{x}\frac{\partial \Omega}{\partial y_2} = 0,$$

durch die Annahmen $\Omega = y_1 : x$ und $\Omega = y_2 : x$ erfüllt. Die beiden Flächenscharen $y_1 : x = \text{konst.}$ und $y_2 : x = \text{konst.}$ sind die *Scharen aller Ebenen durch die y_2-Achse bzw. y_1-Achse*; ihr Durchschnitt besteht in der Tat aus allen Strahlen von O aus.

2. Beispiel: Irgend einem Punkte M oder (x, y_1, y_2) sei dasjenige Linienelement zugeordnet, das der xy_1-Ebene parallel ist und mit dem Lote von M auf die y_2-Achse einen rechten Winkel bildet. Hier muß $dy_2 = 0$ und $dy_1 : dx = -x : y_1$ sein, so daß:

$$(4) \qquad \frac{dy_1}{dx} = -\frac{x}{y_1}, \quad \frac{dy_2}{dx} = 0$$

das zu betrachtende System von Differentialgleichungen vorstellt. Weil die Differentiale von $x^2 + y_1^2$ und y_2 infolge von (4) verschwinden, bilden $x^2 + y_1^2$ und y_2 ein vollständiges System von Integralen. Gleich willkürlichen Konstanten gesetzt stellen sie die *Schar aller Rotationszylinder mit der y_2-Achse* und *die Schar aller Ebenen senkrecht zur y_2-Achse* dar; ihr Durchschnitt besteht aus allen *Kreisen, deren Mittelpunkte auf der y_2-Achse liegen und deren Ebenen zur y_2-Achse senkrecht sind.* Diese Kreise sind somit die Integralkurven. Eine Fläche wird von lauter Integralkurven erzeugt, wenn sie eine *Rotationsfläche* mit der y_2-Achse ist, so daß ihre Gleichung nach Nr. 348 eine Gleichung zwischen $x^2 + y_1^2$ und y_2 allein sein muß. Jedes Integral ist deshalb eine Funktion von $x^2 + y_1^2$ und y_2 allein, und dies steht wieder im Einklange mit Satz 2 von Nr. 762. Jede Funktion Ω von $x^2 + y_1^2$ und y_2 allein genügt der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{x}{y_1} \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0,$$

wie es nach Satz 1, Nr. 762, sein muß.

765. Einige Integrationsmethoden. Wie in § 2 des dritten Kapitels kann man auch für gewisse Klassen von Systemen erster Ordnung in der Normalform besondere Integrationsmethoden entwickeln. Je größer jedoch die Anzahl n der gesuchten Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ wird, um so mannigfaltiger und unübersichtlicher gestalten sich diese speziellen Verfahren. Wir begnügen uns daher mit einigen wenigen Hinweisen.

Systeme von der Form:

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

bei denen also jede einzelne Gleichung die Ableitung einer der gesuchten Funktionen y_i als Funktion von x und y_i allein gibt, integriert man, indem man jede einzelne Gleichung für sich als eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y_i behandelt. Man erkennt, daß das allgemeine Lösungensystem die Form hat:

$$y_i = \varphi_i(x, C_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Systeme von der Form:

$$(2) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

bei denen also die i^{te} Gleichung frei von $y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots y_n$ ist, behandelt man so: Die erste Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y_1 allein. Hat man ihre allgemeine Lösung $y_1 = \varphi_1(x, C_1)$ gefunden, so wird sie in alle $n - 1$ übrigen Gleichungen substituiert. Das hervorgehende System von nur noch $n - 1$ Gleichungen:

$$(3) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, \varphi_1, y_2, y_3, \ldots y_i) \qquad (i = 2, 3, \ldots n)$$

hat nun wieder die charakteristische Form des Systems (2), doch ist die Zahl n auf $n - 1$ verringert. Diesem Vorteile steht der Nachteil gegenüber, daß rechts in φ noch eine willkürliche Konstante C_1 vorkommt. Das neue System wird nach derselben Methode behandelt, usw. Man erkennt, daß das allgemeine Lösungensystem die Form hat:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, \ldots C_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wo also die i^{te} Funktion von den $n - i$ Integrationskonstanten $C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots C_n$ frei ist.

1. Beispiel: Das System:

$$\frac{dy_1}{dx} = 2\frac{y_1}{x} - 1, \qquad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{y_1}{x^3} + \frac{y_2}{x},$$

$$\frac{dy_3}{dx} = \frac{1}{x^3} - \frac{y_1}{x^4} - \frac{y_2}{x^2} + \frac{y_3}{x}$$

gehört zu denen von der Form (2). Die erste Gleichung ist eine *lineare* Differentialgleichung für y_1 und hat nach Nr. 716 die allgemeine Lösung:

$$y_1 = x + C_1 x^2$$

mit der Integrationskonstante C_1. Wird sie in die zweite und dritte Gleichung substituiert, so kommt:

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{y_2}{x} - \frac{C_1}{x}, \quad \frac{dy_3}{dx} = \frac{y_3}{x} - \frac{y_2}{x^2} - \frac{C_1}{x^2}.$$

Dies System für y_2 und y_3 hat wieder die Form des Systems (2), und die erste Gleichung ist wieder eine *lineare* Differentialgleichung für y_2 mit der allgemeinen Lösung:

$$y_2 = C_1 + C_2 x$$

und der Integrationskonstante C_2. Substitution dieser Lösung in die letzte Differentialgleichung gibt:

$$\frac{dy_3}{dx} = \frac{y_3}{x} - \frac{2C_1}{x^2} - \frac{C_2}{x}.$$

Auch dies ist eine *lineare* Differentialgleichung für y_3 mit der allgemeinen Lösung:

$$y_3 = \frac{C_1}{x} + C_2 + C_3 x$$

und der Integrationskonstante C_3. Folglich stellt:

$$y_1 = x + C_1 x^2, \quad y_2 = C_1 + C_2 x, \quad y_3 = \frac{C_1}{x} + C_2 + C_3 x$$

das allgemeine Lösungensystem vor.

Ein sehr allgemeines Integrationsverfahren, über das sich jedoch keine besonderen Vorschriften machen lassen, besteht darin, daß man vermöge einfacher Substitutionen passende Funktionen von $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ als *neue unbekannte Funktionen* anstelle von $y_1, y_2, \ldots y_n$ einführt.

2. Beispiel: Gesucht werden im Raume (x, y_1, y_2) *die orthogonalen Trajektorien aller Kugeln, die im Anfangspunkte O die* $y_1 y_2$*-Ebene berühren.* Die Gleichung einer solchen Kugel ist:

$$F = x^2 - 2ax + y_1^2 + y_2^2 = 0.$$

Das einem Punkte (x, y_1, y_2) der Kugel zugehörige Linienelement der gesuchten orthogonalen Trajektorie liegt in der Normale der Kugel. Nach (8) in Nr. 253 müssen daher dx, dy_1, dy_2 zu F_x, F_{y_1}, F_{y_2} proportional sein, so daß sich ergibt:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1}{x-a}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{y_2}{x-a}.$$

Eliminiert man hieraus a vermöge der Gleichung $F = 0$ der Kugel, so findet man das System:

$$(4) \qquad \frac{dy_1}{dx} = \frac{2xy_1}{x^2 - y_1^2 - y_2^2}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{2xy_2}{x^2 - y_1^2 - y_2^2},$$

dessen Integralkurven die gesuchten orthogonalen Trajektorien sind. Statt y_1 und y_2 sollen die neuen unbekannten Funktionen:

$$z_1 = \frac{y_1}{y_2}, \quad z_2 = \frac{y_2}{x}$$

eingeführt werden, d. h. es soll:

$$y_1 = x z_1 z_2, \quad y_2 = x z_2$$

gesetzt werden. Das alsdann hervorgehende System lautet:

$$\frac{dz_1}{dx} = 0, \quad \frac{dz_2}{dx} = \frac{1 + z_2^2 + z_1^2 z_2^2}{1 - z_2^2 - z_1^2 z_2^2} \cdot \frac{z_2}{x}.$$

Nach der ersten Gleichung ist z_1 konstant, gleich C_1. Demnach geht für z_2 die Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen hervor:

$$\frac{1 - (1 + C_1^2) z_2^2}{1 + (1 + C_1^2) z_2^2} \frac{dz_2}{z_2} - \frac{dx}{x} = 0,$$

die sich mittels Quadratur sofort integrieren läßt:

$$\ln z_2 - \ln [1 + (1 + C_1^2) z_2^2] - \ln x = \text{konst.},$$

woraus folgt:

$$\frac{z_2}{1 + (1 + C_1^2) z_2^2} \cdot \frac{1}{x} = C_2.$$

Wird wieder $z_2 = y_2 : x$ und $C_1 = z_1 = y_1 : y_2$ substituiert, so gelangt man zu den beiden unabhängigen Integralen:

$$\frac{y_1}{y_2} = C_1, \quad \frac{y_2}{x^2 + y_1^2 + y_2^2} = C_2.$$

Das erste stellt die Schar aller Ebenen durch die x-Achse dar und das zweite die Schar aller Kugeln, die im Anfangspunkte die xy_1-Ebene berühren. Die Durchschnitte beider liefern die Integralkurven; demnach sind die orthogonalen Trajektorien der Schar aller Kugeln, die im Anfangspunkte die $y_1 y_2$-Ebene berühren, diejenigen *Kreise, die im Anfangspunkte die x-Achse berühren.*

Angenommen, es sei von dem Systeme:

$$(5) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

schon ein Integral $\Omega(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$ bekannt. Alsdann kann man mit Hilfe der Gleichung:

$$\Omega(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_1$$

etwa y_1 als Funktion von $x, y_2, \ldots y_n$ und C_1 berechnen und diesen Wert in die $n-1$ letzten Gleichungen des Systems einsetzen. Dadurch geht ein System von nur noch $n-1$ Gleichungen hervor, in dem $y_2, y_3, \ldots y_n$ die noch unbekannten Funktionen sind, während y_1 gar nicht auftritt. Dagegen kommt in dem neuen Systeme noch eine willkürliche Konstante C_1 vor.

Sind mehrere unabhängige Integrale $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_m$ schon bekannt, wobei $m < n$ sei, so kann man ebenso mit Hilfe der m Gleichungen:

$$\Omega_k(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_k \qquad (k = 1, 2, \ldots m) \tag{6}$$

m Unbekannte, etwa $y_1, y_2, \ldots y_m$, als Funktionen von x, den übrigen Unbekannten $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots y_n$ und den willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_m$ berechnen und in die $n-m$ letzten Gleichungen des Systems substituieren. Dadurch geht ein System erster Ordnung in der Normalform hervor, das nur noch $n-m$ Gleichungen hat, aber m willkürliche Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_m$ enthält. Ist es vollständig integriert worden, d. h. hat man $n-m$ unabhängige Integrale $\omega_{m+1}, \omega_{m+2}, \ldots \omega_n$ dieses Systems ermittelt, so werden sie außer $x, y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots y_n$ noch $C_1, C_2, \ldots C_m$ enthalten. Setzt man sie gleich willkürlichen Konstanten $C_{m+1}, C_{m+2}, \ldots C_n$, so definieren die $n-m$ Gleichungen:

$$\omega_j(x, C_1, C_2, \ldots C_m, y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots y_n) = C_j \tag{7}$$
$$(j = m+1, m+2, \ldots n)$$

zusammen mit den m Gleichungen (6) implizite das allgemeine Lösungensystem von (5).

Wie man mitunter aus der Gestalt eines vorgelegten Systems von Differentialgleichungen das Vorhandensein gewisser Integrale erkennen kann, beleuchtet das

3. *Beispiel:* Das System:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{\lambda(x)}{(y_3 - y_1)(y_1 - y_2)}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{\lambda(x)}{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)},$$
$$\frac{dy_3}{dx} = \frac{\lambda(x)}{(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)},$$

in dem $\lambda(x)$ eine gegebene Funktion von x sei, ist in bezug auf y_1, y_2, y_3 symmetrisch gebaut. Daher ist zu vermuten, daß es Integrale hat, die symmetrische Funktionen von y_1, y_2, y_3 sind. Die einfachsten symmetrischen Funktionen sind nun

$$y_1 + y_2 + y_3, \quad y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2, \quad y_1 y_2 y_3,$$

und man sieht leicht, daß die vollständigen Differentiale der beiden ersten infolge des Systems verschwinden, dagegen das der letzten nicht. Folglich sind:

$$\Omega_1 = y_1 + y_2 + y_3 \quad \text{und} \quad \Omega_2 = y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2$$

Integrale des Systems; dagegen ist $y_1 y_2 y_3$ keines. Wenn man nun mittels $\Omega_1 = C_1$ und $\Omega_2 = C_2$ etwa y_1 und y_2 aus dem Systeme eliminiert, wird sich zwar eine gewöhnliche Differentialgleichung für y_3 ergeben; aber es geht dabei die Symmetrie verloren. Daher tut man besser, zur Ermittlung eines dritten Integrals die neue unbekannte symmetrische Funktion:

$$z = y_1 y_2 y_3$$

einzuführen, für die sich aus dem Systeme ergibt:

$$\frac{dz}{dx} = \lambda(x) \frac{y_2 y_3 (y_2 - y_3) + y_3 y_1 (y_3 - y_1) + y_1 y_2 (y_1 - y_2)}{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)}.$$

Der Bruch ist aber gleich -1, also geht hervor:

$$dz = -\lambda(x) dx, \text{ d. h. } z = -\int \lambda(x) dx + C_3,$$

wobei die Quadratur von einer bestimmten unteren Grenze an auszuführen ist, während C_3 eine willkürliche Konstante bedeutet. Hiernach sind:

$$y_1 + y_2 + y_3 = C_1, \quad y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2 = C_2,$$
$$y_1 y_2 y_3 + \int \lambda(x) dx = C_3$$

drei unabhängige Integrale. Nach einem bekannten Satze der Algebra sind daher die Lösungen y_1, y_2, y_3 die Wurzeln der in y kubischen Gleichung:

$$y^3 - C_1 y^2 + C_2 y - C_3 + \int \lambda(x) dx = 0.$$

766. Systeme, in denen die unabhängige Veränderliche nicht vorkommt. Unter den bisher betrachteten Systemen:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

sind diejenigen besonders bemerkenswert, *deren rechte Seiten von x selbst frei sind.* Wie in Nr 688 mag die unabhängige Veränderliche in diesem Falle mit t statt x bezeichnet sein, während für die unbekannten Funktionen die Zeichen $x_1, x_2,$

$\dots x_n$ benutzt werden sollen. Um deutlich zu machen, daß alsdann die rechten Seiten nur von $x_1, x_2, \dots x_n$ abhängen, verwenden wir für sie die Funktionszeichen $X_1, X_2, \dots X_n$, so daß also ein System von der Form vorliege:

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Deutet man nicht alle $n + 1$ Veränderliche, sondern nur $x_1, x_2, \dots x_n$ als Koordinaten der Punkte in einem Raume, so braucht man dazu einen Raum von nur n Dimensionen. Die unabhängige Veränderliche t spielt bei dieser Deutung die Rolle einer Hilfsveränderlichen, die man, wenn man will, z. B. als das *Maß der Zeit* auffassen kann. Jedes Lösungensystem:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots \; x_n = \varphi_n(t)$$

bedeutet eine Kurve, eine sogenannte *Integralkurve*, ausgedrückt mittels der Hilfsveränderlichen t.

Das System, das sich im Falle $n = 2$ ergibt, wurde in Nr. 731 besprochen. Die dort durchgeführten Betrachtungen lassen sich ohne jedes Hindernis für das System (1) verallgemeinern. Gerade so wie damals zeigt sich, daß das System der *Hauptlösungen*, d. h. nach Nr. 761 dasjenige System von Lösungen, das für $t = t_0$ die Anfangswerte $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$ hat, aus Funktionen besteht, in denen t und t_0 nur in der Differenz $t - t_0$ auftreten:

$$(2) \qquad x_i = \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0, t - t_0) \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Die Verallgemeinerung des Satzes 17, Nummer 731, gibt den

Satz 5: Es liege ein System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen vor:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

wobei $X_1, X_2, \dots X_n$ und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung innerhalb eines Bereiches stetige Funktionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ allein seien. Das allgemeine Lösungensystem, das für einen beliebig, aber bestimmt gewählten Anfangswert t_0 von t irgendwelche bestimmte Anfangswerte $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$ innerhalb des Bereiches annimmt, besteht aus Funktionen von $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$ und $t - t_0$ allein:

$$x_i = \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0, t - t_0) \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

und t darf darin von t_0 an beständig wachsend oder beständig abnehmend soweit variieren, als die zugehörige Stelle $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ noch dem Bereiche angehört. Ferner hat das Lösungensystem die Gruppeneigenschaft, d. h.: Die Substitution der Werte:

$$x_i^I = \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, t_1 - t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

in:

$$x_i^{II} = \varphi_i(x_1^I, x_2^I, \ldots x_n^I, t_2 - t_1) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

gibt stets:

$$x_i^{II} = \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, t_2 - t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

767. Eingliedrige Gruppe von Transformationen von n Veränderlichen. Es ist ein Leichtes, die Deutung der Gruppeneigenschaft, die in Nr. 732 vorgenommen wurde, für den vorliegenden Fall zu verallgemeinern. Man kann dabei rein analytisch vorgehen, nämlich die Gleichungen:

$$(1) \qquad x_i = \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, t - t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

als die einer *Transformation* $\mathfrak{T}_t$ der n Veränderlichen x_1^0, x_2^0, $\ldots x_n^0$ in die n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ auffassen, deren besondere Art alsdann noch von dem Werte von $t - t_0$ abhängt, so daß (1) eine *Schar von Transformationen von n Veränderlichen* definiert, der die Gruppeneigenschaft zukommt, und die man deshalb eine *eingliedrige Gruppe* nennt, weil die Schar von nur einem Parameter $t - t_0$ abhängt. Man kann aber auch wie in voriger Nummer die n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ als die Koordinaten eines Punktes M in einem Raume von n Dimensionen betrachten und dadurch zu einer geometrischen Auffassung der Transformationen der eingliedrigen Gruppe gelangen. Wenn z. B. $n = 3$ ist, reicht dazu der gewöhnliche Raum aus. Wir raten dem Leser, die Betrachtungen in Nr. 732 auf diesen Fall $n = 3$ in allen Einzelheiten zu übertragen.

Ebenso steht der Verallgemeinerung der Betrachtungen in Nr. 734 und Nr. 735 nichts im Wege. Wenn wir wie in Nr. 734 statt $X_1, X_2, \ldots X_n$ die Funktionszeichen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n$ benutzen, gelangen wir so zunächst zu der Verallgemeinerung des Satzes 18 von Nr. 732:

Satz 6: Innerhalb eines Bereiches, in dem sich die Funktionen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n$ von $x_1, x_2, \ldots x_n$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig verhalten, sei dasjenige allgemeine Lösungensystem des Systems:

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

das für $t = 0$ die Anfangswerte $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ hat, durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$x_i = \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Diese Gleichungen stellen für jeden bestimmten Wert von t eine Transformation $\mathfrak{T}_t$ der Wertsysteme $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ in neue Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ dar. Die einfach unendliche Schar aller Transformationen $\mathfrak{T}_t$ bildet eine eingliedrige Gruppe, indem nämlich die Aufeinanderfolge irgend zweier Transformationen $\mathfrak{T}_{t_1}$ und $\mathfrak{T}_{t_2}$ der Schar äquivalent ist der Transformation $\mathfrak{T}_{t_1+t_2}$ derselben Schar. Die Gruppe enthält die identische Transformation $\mathfrak{T}_0$ sowie zu jeder Transformation $\mathfrak{T}_t$ die inverse $\mathfrak{T}_{-t}$. Außerdem sind ihre Transformationen vertauschbar. Werden $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Koordinaten der Punkte in einem Raume von n Dimensionen gedeutet, so liegt eine eingliedrige Gruppe von Punkt-Transformationen vor. Dabei sind die Bahnkurven der Punkte die Integralkurven des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen.

Wie in Nr. 734 kommt man ebenfalls leicht zu der Auffassung, daß das System:

$$(2) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \xi_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

von dem die Gruppe erzeugt wird, als der Ausdruck einer *infinitesimalen Transformation* zu deuten ist, bei der $x_1, x_2, \ldots x_n$ die mit δt nach Null strebenden Zunahmen:

$$(3) \qquad \delta x_i = \xi_i(x_1, x_2, \ldots x_n)\,\delta t \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

erfahren, so daß *die Gruppe als das Erzeugnis einer infinitesimalen Transformation* erscheint. Eine beliebige differenzierbare Funktion von $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ geht vermöge der Transformation (1) in eine Funktion f von $x_1, x_2, \ldots x_n$ über, die nach (1) als eine Funktion von t zu betrachten ist. Wie in Nr. 735 erkennt man, daß der Quotient aus dem Zuwachs Δf, den f bei der Ausübung der Transformation $\mathfrak{T}_{\Delta t}$ der Gruppe auf $x_1, x_2, \ldots x_n$ erfährt, und aus Δt, d. h. also, daß der Differenzenquotient $\Delta f : \Delta t$ für $\lim \Delta t = 0$ den Grenzwert hat:

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Deshalb dient der Ausdruck:

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

auch jetzt als das *Symbol der infinitesimalen Transformation der eingliedrigen Gruppe.* Dabei bedeutet also f eine *beliebige* differenzierbare Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$, während $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ die *gegebenen* Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind.

1. Beispiel: Im Raume mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z liege das System vor:

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b, \quad \frac{dz}{dt} = c,$$

worin a, b, c gegebene Konstanten seien. Das System der Hauptlösungen für $t = 0$ ist:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct.$$

Es stellt für jeden bestimmten Wert von t eine *Schiebung* aller Punkte (x_0, y_0, z_0) oder M_0 nach neuen Punkten (x, y, z) oder M vor, denn alle Strecken M_0M sind parallel, gleichlang und gleichgerichtet. Die Richtung ist dabei von t unabhängig, indem ihre Richtungskosinus proportional a, b, c sind. Augenscheinlich bilden (wie in der Ebene, vgl. 4. Beispiel von Nr. 735) alle Schiebungen nach derselben Richtung hin eine Gruppe. Die *infinitesimale Schiebung* in derjenigen Richtung, deren Kosinus proportional a, b, c sind, hat das Symbol:

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z},$$

und insbesondere sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

die Symbole der infinitesimalen Schiebungen parallel den drei Koordinatenachsen.

2. Beispiel: Offenbar bilden alle *Drehungen* um ein und dieselbe feste Achse im Raume eine Gruppe. Z. B. werden alle Drehungen um die z-Achse durch:

$$x = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y = x_0 \sin t + y_0 \cos t, \quad z = z_0$$

dargestellt, vgl. das 1. Beispiel in Nr. 733. Dabei ist t der Drehwinkel. Diese Gleichungen stellen die Hauptlösungen des Systems:

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x, \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

für $t = 0$ dar, und es ist:

$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$$

das Symbol der *infinitesimalen Drehung* um die z-Achse. Ebenso sind:

$$-z\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial z}, \quad -x\frac{\partial f}{\partial z} + z\frac{\partial f}{\partial x}$$

die Symbole der infinitesimalen Drehungen um die x- bzw. y-Achse.

3. Beispiel: Die *Streckungen* im Raume vom Anfangspunkte O aus definiert man wie in der Ebene, siehe das 2. Beispiel in Nr. 733. Es leuchtet ein, daß ihre Gesamtheit eine eingliedrige Gruppe bildet, und man erkennt wie im 2. Beispiele von Nr. 735, daß sie von der *infinitesimalen Streckung:*

$$x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

erzeugt werden.

768. System von totalen Differentialgleichungen. Mit den in Nr. 766 betrachteten Systemen erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen stehen die Systeme von *totalen Differentialgleichungen* (vgl. Nr. 671) von der besonderen Form:

$$(1) \quad \frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

in engem Zusammenhange. Dies sind $n-1$ Gleichungen zwischen den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und ihren Differentialen. Wenn von den n Veränderlichen mehr als eine unabhängig wäre, würde mehr als ein Differential willkürlich bleiben, was den Vorschriften widerspricht, die das System (1) angibt, denn wenn $x_1, x_2, \ldots x_n$ und etwa dx_1 gegeben sind, so bestimmt (1) auch $dx_2, dx_3, \ldots dx_n$. Folglich müssen $n-1$ der n Veränderlichen Funktionen der noch übrig bleibenden sein. Faßt man z. B. $x_2, x_3, \ldots x_n$ als Funktionen von x_1 auf, so kann man eine $(n+1)^{\text{te}}$ Veränderliche t vermöge der Gleichung:

$$(2) \quad \frac{dt}{dx_1} = \frac{1}{X_1(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

definieren, die nach einer Quadratur auch t als Funktion von x_1 ergeben würde. Man kann nun umgekehrt x_1 als Funktion von t und daher auch $x_2, x_3, \ldots x_n$ als Funktionen von t auffassen. Die Vergleichung von (2) mit (1) lehrt, daß alsdann allgemein:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{3}$$

wird. Wenn man also dies System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen für n unbekannte Funktionen $x_1, x_2, \ldots x_n$ von t vollständig integriert hat und aus den Integralgleichungen t eliminiert, bleiben diejenigen $n-1$ Gleichungen zwischen $x_1, x_2, \ldots x_n$ allein übrig, die infolge des Systems (1) von $n-1$ totalen Differentialgleichungen bestehen müssen.

Das System (1) *von* $n-1$ *totalen Differentialgleichungen ist somit durch das System erster Ordnung* (3) *von* n *gewöhnlichen Differentialgleichungen ersetzbar oder ihm äquivalent.* In Nr. 677 wurde dieselbe Betrachtung im Falle $n = 2$ angestellt.

Das System (3) ist nun gerade das in Nr. 766 betrachtete System.

Im Raume von n Dimensionen mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_n$ definieren $n-1$ Gleichungen zwischen $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine sogenannte *Kurve* (vgl. Nr. 668). Solche $n-1$ Gleichungen, die infolge des Systems (1) bestehen müssen, geben daher eine *Integralkurve des Systems* (1). Die Einführung der Hilfsveränderlichen t und die Überführung des Systems (1) in das System (3) kann also, wenn man t *als Maß der Zeit* deutet (wie es schon in Nr. 766 geschah), begrifflich so auffassen: *Die Integralkurven des Systems* (1) *werden als Bahnkurven beweglicher Punkte betrachtet.* Nach den Ergebnissen der vorigen Nummer *sind die Integralkurven von* (1) *die Bahnkurven derjenigen eingliedrigen Gruppe, die von der infinitesimalen Transformation*

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

erzeugt wird.

§ 2. Lineare Systeme.

769. Charakteristische Eigenschaft eines linearen homogenen Systems. Es soll hier die Frage beantwortet werden, unter welchen Umständen dem Systeme:

$$\frac{d y_i}{d x} = f_i(x, y_1, y_2, \dots y_n) \qquad (i = 1, 2, \dots n) \tag{1}$$

die Eigenschaft zukommt, daß sich aus irgend zwei partikularen Lösungensystemen:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \dots \; y_n = \varphi_n(x) \tag{2}$$

und:

$$y_1 = \psi_1(x), \quad y_2 = \psi_2(x), \quad \dots \; y_n = \psi_n(x) \tag{3}$$

durch Addition stets wieder ein Lösungensystem:

$$y_1 = \varphi_1(x) + \psi_1(x), \; y_2 = \varphi_2(x) + \psi_2(x), \dots y_n = \varphi_n(x) + \psi_n(x) \tag{4}$$

ergibt.

Nach Annahme ist:

$$\varphi_i' = f_i(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n), \quad \psi_i' = f_i(x, \psi_1, \psi_2, \dots \psi_n) \tag{5}$$
$$(i = 1, 2, \dots n),$$

und es wird gefordert:

$$\varphi_i' + \psi_i' = f_i(x, \varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2, \dots \varphi_n + \psi_n)$$
$$(i = 1, 2, \dots n).$$

Werden hierin für φ_i' und ψ_i' die Werte (5) eingesetzt, so kommt:

$$f_i(x, \varphi_1, \dots \varphi_n) + f_i(x, \psi_1, \dots \psi_n) = f_i(x, \varphi_1 + \psi_1, \dots \varphi_n + \psi_n)$$
$$(i = 1, 2, \dots n).$$

Weil es nun im Bereiche des Systems (1) partikulare Lösungensysteme gibt, die für einen angenommenen Wert von x irgend welche vorgeschriebene Werte, sagen wir $y_1, y_2, \dots y_n$ oder $z_1, z_2, \dots z_n$, haben, wird also gefordert, daß stets:

$$f_i(x, y_1, \dots y_n) + f_i(x, z_1, \dots z_n) = f_i(x, y_1 + z_1, \dots y_n + z_n) \tag{6}$$
$$(i = 1, 2, \dots n)$$

sei. Differentiation nach y_k zeigt, daß dann

$$\frac{\partial f_i(x, y_1, y_2, \dots y_n)}{\partial y_k} = \frac{\partial f_i(x, y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots y_n + z_n)}{\partial (y_k + z_k)}$$

sein muß, d. h. daß sich die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen $f_i(x, y_1, y_2, \dots y_n)$ hinsichtlich $y_1, y_2, \dots y_n$ nicht ändern dürfen, wenn $y_1, y_2, \dots y_n$ geändert werden, so daß diese Ableitungen nur von x abhängen können, woraus weiterhin folgt, daß die Funktionen $f_i(x, y_1, y_2, \dots y_n)$ selbst hinsichtlich $y_1, y_2, \dots y_n$ ganz und linear sein müssen. Sie müssen überdies homogen sein, denn wenn $f_i(x, y_1, y_2, \dots y_n)$ einen von $y_1, y_2, \dots y_n$ freien Summanden $\omega_i(x)$ hätte, würde aus (6) sofort $2\omega_i = \omega_i$ oder $\omega_i = 0$ folgen. Das System (1) muß somit die Form haben:

$$\frac{dy_i}{dx} = A_{i1}(x)\,y_1 + A_{i2}(x)\,y_2 + \cdots + A_{in}(x)\,y_n \qquad (i = 1, 2, \dots n). \tag{7}$$

Solche Systeme heißen *lineare homogene Systeme erster Ordnung.*

Satz 7: Die linearen homogenen Systeme:

$$\frac{dy_i}{dx} = A_{i1}(x)\,y_1 + A_{i2}(x)\,y_2 + \cdots + A_{in}(x)\,y_n \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

sind die einzigen Systeme erster Ordnung in der Normalform, denen die Eigenschaft zukommt, daß aus irgend zwei partikularen Lösungensystemen:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \dots y_n = \varphi_n(x)$$

und:

$$y_1 = \psi_1(x), \quad y_2 = \psi_2(x), \dots y_n = \psi_n(x)$$

stets durch Addition wieder ein Lösungensystem:

$$y_1 = \varphi_1(x) + \psi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x) + \psi_2(x), \dots y_n = \varphi_n(x) + \psi_n(x)$$

hervorgeht.

Ferner ergibt sich sofort

Satz 8: Bedeutet:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \dots y_n = \varphi_n(x)$$

irgend ein partikulares Lösungensystem des linearen homogenen Systems:

$$\frac{dy_i}{dx} = A_{i1}(x)\,y_1 + A_{i2}(x)\,y_2 + \cdots + A_{in}(x)\,y_n \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

so ist auch:

$$y_1 = C\varphi_1(x), \quad y_2 = C\varphi_2(x), \dots y_n = C\varphi_n(x)$$

ein Lösungensystem, wie auch immer die Konstante C gewählt sein mag.

Diese Eigenschaft kommt aber einer ausgedehnteren Klasse von Systemen zu. Denn das System (1) hat sie, wenn infolge von (1) auch stets:

$$\frac{dCy_i}{dx} = C\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, Cy_1, Cy_2, \ldots Cy_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

ist. Wird der Wert (1) von $dy_i : dx$ eingeführt, so geht die Forderung hervor:

$$Cf_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = f_i(x, Cy_1, Cy_2, \ldots Cy_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

die nach Nr. 91 nur dann erfüllt wird, wenn $f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$ eine in bezug auf $y_1, y_2, \ldots y_n$ *homogene Funktion ersten Grades* ist. Somit kommt der

Satz 9: Dem Systeme erster Ordnung in der Normalform:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

kommt die Eigenschaft, daß aus jedem partikularen Lösungensysteme durch Multiplikation mit einer willkürlichen Konstante stets wieder ein Lösungensystem hervorgeht, dann und nur dann zu, wenn $f_1, f_2, \ldots f_n$ homogene Funktionen ersten Grades hinsichtlich $y_1, y_2, \ldots y_n$ sind.

Dies ist eine Verallgemeinerung des Satzes 9 von Nr. 716. Die linearen homogenen Systeme (7) sind spezielle Fälle, in denen der Satz gilt.

770. Das allgemeine Lösungensystem eines linearen homogenen Systems. Es liege das lineare homogene System vor:

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = A_{i1}(x)y_1 + A_{i2}(x)y_2 + \cdots + A_{in}(x)y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

und es seien schon n partikulare Lösungensysteme:

$$(2) \qquad y_1 = \varphi_{k1}(x), \quad y_2 = \varphi_{k2}(x), \ \ldots \ y_n = \varphi_{kn}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

bekannt. Nach den Sätzen 7 und 8 der letzten Nummer ist dann auch:

$$(3) \qquad y_i = C_1\varphi_{1i}(x) + C_2\varphi_{2i}(x) + \cdots + C_n\varphi_{ni}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

ein Lösungensystem, wie auch die n Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$

gewählt sein mögen. Dieses Lösungensystem ist dann und nur dann ein allgemeines, wenn es nach den n willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ auflösbar ist (vgl. Nr. 763). Dazu aber ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{21}(x) & \ldots & \varphi_{n1}(x) \\ \varphi_{12}(x) & \varphi_{22}(x) & \ldots & \varphi_{n2}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \varphi_{1n}(x) & \varphi_{2n}(x) & \ldots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet.

Man nennt solche n Funktionensysteme (2), für die diese Determinante nicht verschwindet, *linear unabhängig*, weil es keine n Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ derart gibt, daß alle n Summen (3) verschwinden, es sei denn, daß $C_1, C_2, \ldots C_n$ selbst sämtlich gleich Null sind.

Nun seien umgekehrt irgend welche n linear unabhängige Funktionensysteme (2) gegeben. Soll alsdann (3) das allgemeine Lösungensystem eines Systems erster Ordnung in der Normalform:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

sein, so müssen die linken Seiten $f_1, f_2, \ldots f_n$ dieses Systems aus

$$\frac{dy_i}{dx} = C_1\varphi'_{1i}(x) + C_2\varphi'_{2i}(x) + \cdots + C_n\varphi'_{ni}(x)$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

durch Elimination von $C_1, C_2, \ldots C_n$ vermöge der n Gleichungen (3) hervorgehen. Wegen des Nichtverschwindens der Determinante (4) sind aber die Auflösungen der Gleichungen (3) nach $C_1, C_2, \ldots C_n$ homogene ganze lineare Funktionen von $y_1, y_2, \ldots y_n$ mit von x abhängigen Koeffizienten. Folglich werden auch $f_1, f_2, \ldots f_n$ homogene ganze lineare Funktionen hinsichtlich $y_1, y_2, \ldots y_n$. Demnach haben wir den

Satz 10: Ein System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform hat dann und nur dann die Eigenschaft, daß sich sein allgemeines Lösungensystem aus irgend welchen n linear unabhängigen partikularen Lösungensystemen:

$$y_1 = \varphi_{k1}(x), \quad y_2 = \varphi_{k2}(x), \ldots y_n = \varphi_{kn}(x)$$
$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

durch Multiplikation mit n willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ *und Addition in der Form:*

$$y_i = C_1\varphi_{1i}(x) + C_2\varphi_{2i}(x) + \cdots + C_n\varphi_{ni}(x)$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

bilden läßt, wenn es ein lineares homogenes System ist, d. h. die Form hat:

$$\frac{dy_i}{dx} = A_{i1}(x)y_1 + A_{i2}(x)y_2 + \cdots + A_{in}(x)y_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

771. D'Alembertsches System. Wenn insbesondere die n^2 Koeffizienten $A_{ik}(x)$ *Konstanten* a_{ik} sind, liegt ein sogenanntes *d'Alembertsches System:*

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

vor. Da hier die rechten Seiten von der unabhängigen Veränderlichen x frei sind, ordnet sich dies System den in Nr. 766 betrachteten Systemen unter. Wir wollen daher wie damals die unabhängige Veränderliche mit t statt mit x und die unbekannten Funktionen mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ statt mit $y_1, y_2, \ldots y_n$ bezeichnen, also das System betrachten:

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Das Integrationsverfahren beruht hier auf dem Umstande, daß es partikulare Lösungensysteme von der Form:

$$(2) \qquad x_1 = c_1 e^{\varrho t}, \quad x_2 = c_2 e^{\varrho t}, \ldots x_n = c_n e^{\varrho t}$$

gibt, wo $c_1, c_2, \ldots c_n$ und ϱ Konstanten bedeuten.

Denn wenn diese Werte in (1) eingesetzt werden, gehen n von t freie Bedingungen:

$$(3) \qquad \varrho c_i = a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

hervor, nämlich n *lineare homogene* Gleichungen für die n Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$. Da (2) nur dann ein Lösungensystem vorstellen kann, wenn die n Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ nicht sämtlich gleich Null sind, muß man den Satz der Algebra benutzen, wonach den Bedingungen (3) nur dann durch nicht sämtlich verschwindende Werte von $c_1, c_2, \ldots c_n$ Genüge geleistet werden kann, wenn ihre Determinante hinsichtlich $c_1, c_2, \ldots c_n$ gleich Null ist:

$$
(4) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0.
$$

Dies aber ist eine *Gleichung n^{ten} Grades für die Unbekannte* ϱ. Sie heißt die *charakteristische Gleichung des Systems* (1).

Wir betrachten zunächst den Fall, *wo diese Gleichung n verschiedene reelle Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ hat.* Alsdann wird diejenige Gleichung, die aus (4) durch Differentiation nach ϱ folgt, nach Satz 22, Nr. 378, gewiß nicht von irgend einer der Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ befriedigt. Mithin können nicht alle $(n-1)$-reihigen Unterdeterminanten der Determinante (4) für irgend eine der Wurzeln verschwinden, denn die linke Seite derjenigen Gleichung, die aus (4) durch Differentiation nach ϱ folgt, ist eine Summe von solchen Unterdeterminanten. Mithin bestimmen die n Gleichungen (3) nach einem bekannten Satze der Algebra für jeden der n Werte $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ von ϱ eindeutig die Verhältnisse der Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$. Es kommt aber auch nur auf diese Verhältnisse an, denn nach Satz 8 oder 9, Nr. 769, darf ein partikulares Lösungensystem mit irgend einer Konstante multipliziert werden. Folglich gibt es n partikulare Lösungensysteme von der Form (2). Wir wollen beweisen, daß sie linear unabhängig sind, so daß sich aus ihnen nach Satz 10 der vorigen Nummer das allgemeine Lösungensystem durch Multiplikation mit willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ und Addition bilden läßt.

Um dies zu beweisen, seien insbesondere solche n nicht sämtlich verschwindende Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$, die den Gleichungen (3) für $\varrho = \varrho_k$ genügen, mit $c_{k1}, c_{k2}, \ldots c_{kn}$ bezeichnet, so daß:

$$
(5) \qquad \varrho_k c_{ki} = a_{i1}c_{k1} + a_{i2}c_{k2} + \cdots + a_{in}c_{kn}
$$
$$
(i = 1, 2, \ldots n, \quad k = 1, 2, \ldots n)
$$

ist und:

$$x_1 = c_{k1} e^{\varrho_k t}, \quad x_2 = c_{k2} e^{\varrho_k t}, \ldots x_n = c_{kn} e^{\varrho_k t} \tag{6}$$
$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

die n partikularen Lösungensysteme vorstellen. Wären sie nicht linear unabhängig, so müßte es n nicht sämtlich verschwindende Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ derart geben, daß die n Gleichungen:

$$C_1 c_{1i} e^{\varrho_1 t} + C_2 c_{2i} e^{\varrho_2 t} + \cdots + C_n c_{ni} e^{\varrho_n t} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

für beliebige Werte von t beständen. Es müßten also auch diejenigen Gleichungen gelten, die hieraus durch wiederholte Differentiation nach t folgen:

$$\varrho_1 \; C_1 c_{1i} e^{\varrho_1 t} + \varrho_2 \; C_2 c_{2i} e^{\varrho_2 t} + \cdots + \varrho_n \; C_n c_{ni} e^{\varrho_n t} = 0,$$
$$\varrho_1^2 C_1 c_{1i} e^{\varrho_1 t} + \varrho_2^2 C_2 c_{2i} e^{\varrho_2 t} + \cdots + \varrho_n^2 C_n c_{ni} e^{\varrho_n t} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Man könnte so n Gleichungen aufstellen, die in den n Größen:

$$C_1 c_{1i} e^{\varrho_1 t}, \quad C_2 c_{2i} e^{\varrho_2 t}, \ldots C_n c_{ni} e^{\varrho_n t} \tag{7}$$

linear und homogen sind und die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \cdot & \cdot & \varrho_n \\ \varrho_1^2 & \varrho_2^2 & \varrho_3^2 & \cdot & \cdot & \varrho_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_1^{n-1} & \varrho_2^{n-1} & \varrho_3^{n-1} & \cdot & \cdot & \varrho_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

haben, die bekanntlich nur dann verschwindet, wenn zwei der Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ übereinstimmen. Da dies nicht der Fall ist, müßten also alle Größen (7) gleich Null sein. Weil aber $C_1, C_2, \ldots C_n$ nicht sämtlich verschwinden sollen, würde weiterhin folgen, daß wenigstens eine Wertereihe:

$$c_{k1}, \quad c_{k2}, \ldots c_{kn}$$

aus lauter Nullen bestehen müßte, was aber nicht der Fall ist.

Folglich ist in der Tat:

$$x_i = C_1 c_{1i} e^{\varrho_1 t} + C_2 c_{2i} e^{\varrho_2 t} + \cdots + C_n c_{ni} e^{\varrho_n t} \tag{8}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

das allgemeine Lösungensystem von (1) mit den n Integrationskonstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$.

Dies gilt auch, *wenn nicht alle n Wurzeln* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ *der Gleichung* n^{ten} *Grades* (4) *reell sind.* Wenn nämlich z. B. ϱ_1 und ϱ_2 konjugiert komplex sind, ergeben sich aus den Forderungen (5) auch für die Wertereihen $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{1n}$ und $c_{21}, c_{22}, \ldots c_{2n}$ konjugiert komplexe Werte. Wählt man alsdann für C_1 und C_2 ebenfalls konjugiert komplexe Werte, so werden die in (8) auftretenden Summanden:

$$C_1 c_{1i} e^{\varrho_1 t} + C_2 c_{2i} e^{\varrho_2 t} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

doch wieder reell, nach (6) in Nr. 373, indem alsdann statt der Exponentialfunktionen goniometrische Funktionen auftreten.

772. Allgemeine Integration eines d'Alembertschen Systems. Die Betrachtungen der letzten Nummer werden ungültig, wenn die charakteristische Gleichung für ϱ nicht bloß lauter einfache Wurzeln hat. Man kann durch einen von *Euler* und *d'Alembert* angegebenen Grenzübergang auch in solchen Fällen das allgemeine Lösungensystem gewinnen. Wir ziehen es aber vor, eine sehr elegante Darstellung des allgemeinen Lösungensystems zu beweisen, die von *Cauchy* herrührt und in *jedem* Falle richtig ist. Dabei bedürfen wir eines Satzes über gebrochene rationale Funktionen, den wir zunächst in aller Kürze ableiten.

Es seien $F(x)$ und $f(x)$ zwei ganze rationale Funktionen vom $(n-1)^{\text{ten}}$ bzw. n^{ten} Grade. *Insbesondere habe* x^n *in* $f(x)$ *den Koeffizienten Eins.* Ferner seien $a, b, \ldots l$ sämtliche verschiedene Nullstellen von $f(x)$; sie mögen bzw. α-fach, β-fach, $\ldots \lambda$-fach auftreten, so daß die Summe von $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ gleich n ist und $f(x)$ die Form hat:

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda.$$

Wir wenden nun die in Satz 2, Nr. 383, angegebene *Partialbruchzerlegung* an, bei der hier die additive ganze Funktion $G(x)$ fortfällt, weil $F(x)$ von niedrigerem Grade als $f(x)$ ist, vgl. Satz 4, Nr. 384. Wie schon gelegentlich in Nr. 431 bemerkt wurde, ist die Summe der in der Zerlegungsformel vorkommenden Konstanten $A_{\alpha-1}, B_{\beta-1}, \ldots L_{\lambda-1}$ der Koeffizient von x^{n-1} in $F(x)$, den wir mit c bezeichnen wollen. Wird nun x

in jener Zerlegungsformel durch $a + h$ ersetzt, wo h eine Veränderliche sei, so kommt:

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{A}{h^\alpha} + \frac{A_1}{h^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{h}$$

$$+ \frac{B}{(a-b+h)^\beta} + \frac{B_1}{(a-b+h)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{a-b+h}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{L}{(a-l+h)^\lambda} + \frac{L_1}{(a-l+h)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{a-l+h}.$$

Alle Glieder rechter Hand lassen sich, wenn $|h|$ hinreichend klein ist, nach *ganzen* Potenzen von h entwickeln. Die Glieder der ersten Zeile liefern dabei *negative* Potenzen:

$$Ah^{-\alpha} + A_1 h^{-\alpha+1} + \cdots + A_{\alpha-1} h^{-1},$$

dagegen die der andern Zeilen nur *positive*, weil sie auf Grund der allgemeinen Formel:

$$\frac{1}{(m+h)^r} = \frac{1}{m^r}\left(1 + \frac{h}{m}\right)^{-r} = \frac{1}{m^r}\left[1 - \frac{r}{1}\frac{h}{m} + \frac{r(r+1)}{1\cdot 2}\frac{h^2}{m^2} - \cdots\right]$$

nach der Binomialreihe (vgl. Nr. 125) zu entwickeln sind. Demnach ergibt sich rechts nur ein Glied mit h^{-1}, nämlich $A_{\alpha-1}h^{-1}$. Dies soll so ausgedrückt werden:

$$\left[\frac{F(a+h)}{f(a+h)}\right]_{h^{-1}} = A_{\alpha-1}.$$

Der Einschluß eines von h abhängigen Ausdrucks in eckige Klammer mit angehängtem Index h^{-1} soll nämlich bedeuten, daß nur der Koeffizient von h^{-1} in der Entwicklung des Ausdrucks nach ganzen Potenzen von h genommen wird. Ebenso kommt:

$$\left[\frac{F(b+h)}{f(b+h)}\right]_{h^{-1}} = B_{\beta-1}, \quad \cdots \quad \left[\frac{F(l+h)}{f(l+h)}\right]_{h^{-1}} = L_{\lambda-1}.$$

Da nun die Summe von $A_{\alpha-1}, B_{\beta-1}, \ldots L_{\lambda-1}$ gleich dem Koeffizienten c von x^{n-1} in $F(x)$ ist, *gilt mithin für jede gebrochene rationale Funktion von der Form:*

$$(1) \qquad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{cx^{n-1} + \cdots}{x^n + \cdots}$$

die Formel:

$$(2) \qquad \left[\frac{F(a+h)}{f(a+h)} + \frac{F(b+h)}{f(b+h)} + \cdots + \frac{F(l+h)}{f(l+h)}\right]_{h^{-1}} = c,$$

sobald unter $a, b, \ldots l$ sämtliche verschiedene Nullstellen von $f(x)$ verstanden werden. Dieser Satz ist es, der bei dem Cauchyschen Integrationsverfahren für ein d'Alembertsches System gebraucht wird.

Es liege nämlich jetzt das *d'Alembertsche System* vor:

$$\text{(3)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Die Anfangswerte t_0, x_1^0, x_2^0, $\ldots x_n^0$ von t, x_1, x_2, $\ldots x_n$ seien irgendwie gewählt. Alsdann werden zunächst n Funktionen ψ_1, $\psi_2, \ldots \psi_n$ einer Veränderlichen ϱ aus den n linearen Gleichungen:

$$\text{(4)} \qquad \left\{\begin{array}{l} (a_{11} - \varrho)\psi_1 + a_{12}\psi_2 + \cdots + a_{1n}\psi_n = -x_1^0, \\ a_{21}\psi_1 + (a_{22} - \varrho)\psi_2 + \cdots + a_{2n}\psi_n = -x_2^0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}\psi_1 + a_{n2}\psi_2 + \cdots + (a_{nn} - \varrho)\psi_n = -x_n^0 \end{array}\right.$$

berechnet. Wenn

$$\text{(5)} \qquad \triangle(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} - \varrho \end{vmatrix}$$

gesetzt wird, und $A_{ik}(\varrho)$ die zum i^{ten} Elemente der k^{ten} Zeile gehörige $(n-1)$reihige Unterdeterminante bedeutet, sind die Auflösungen von (4) nach einem bekannten Satze der Algebra diese:

$$\text{(6)} \qquad \psi_i(\varrho) = \frac{(-1)^{n+1}\sum_1^n{}_k\, x_k^0 A_{ik}(\varrho)}{(-1)^n \Delta(\varrho)} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Hier ist im Zähler und Nenner der Faktor $(-1)^n$ hinzugefügt worden; dadurch wird erreicht, daß im Nenner, der ja nach (5) eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von ϱ ist, der Koeffizient der höchsten Potenz ϱ^n gerade den Wert Eins bekommt. Auch $A_{ik}(\varrho)$ ist eine ganze rationale Funktion von ϱ und zwar vom $(n-2)^{\text{ten}}$ bzw. $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, je nachdem $k \neq i$ oder $k = i$ ist. Im Falle $k = i$ hat dabei die höchste Potenz ϱ^{n-1} den Koeffizienten $(-1)^{n-1}$. Demnach ist der Zähler in (6) eine ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von ϱ, worin ϱ^{n-1} den Koeffizienten x_i^0 hat. Wenn $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\mu$ alle verschiedenen Wurzeln der *charakteristischen Gleichung* $\triangle(\varrho) = 0$ bedeuten, treten bei der Anwendung von (2) auf die gebrochene rationale Funktion (6) an die Stelle von $x, a, b, \ldots l$ und c die Größen $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\mu$ und x_i^0, so daß sich ergibt:

$$[\psi_i(\varrho_1 + h) + \psi_i(\varrho_2 + h) + \cdots + \psi_i(\varrho_\mu + h)]_{h^{-1}} = x_i^0$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

oder kürzer:

$$(7) \qquad \Big[\sum_1^\mu {}^j \psi_i(\varrho_j + h)\Big]_{h^{-1}} = x_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Nunmehr wird behauptet, *daß die n Funktionen von t:*

$$(8) \qquad x_i = \Big[\sum_1^\mu {}^j \psi_i(\varrho_j + h) e^{(\varrho_j + h)(t - t_0)}\Big]_{h^{-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

dasjenige Lösungensystem des d'Alembertschen Systems (3) *vorstellen, das für $t = t_0$ die Anfangswerte $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ hat.*

Daß diese n Funktionen in der Tat für $t = t_0$ die Anfangswerte $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ haben, ist leicht zu sehen, denn wenn man sie für einen bestimmten Wert von t berechnen will, darf man diesen bestimmten Wert *innerhalb* der eckigen Klammer einsetzen; folglich geht für $t = t_0$ aus (8) gerade der Wert (7) hervor.

Nun muß noch gezeigt werden, daß die n Funktionen (8) dem Systeme (3) genügen. Weil die Differentiation der Funktionen (8) nach t *innerhalb* der eckigen Klammer ausgeführt werden darf, ergibt die Substitution der Werte (8) in (3) die Formel:

$$\Big[\sum_1^\mu {}^j (\varrho_j + h)\psi_i(\varrho_j + h) e^{(\varrho_j + h)(t - t_0)}\Big]_{h^{-1}} =$$
$$\sum_1^n {}^k a_{ik} \Big[\sum_1^\mu {}^j \psi_k(\varrho_j + h) e^{(\varrho_j + h)(t - t_0)}\Big]_{h^{-1}},$$

die sich so zusammenfassen läßt:

$$\sum_1^\mu {}^j \Big[\Big\{(\varrho_j + h)\psi_i(\varrho_j + h) - \sum_1^n {}^k a_{ik}\psi_k(\varrho_j + h)\Big\} e^{(\varrho_j + h)(t - t_0)}\Big]_{h^{-1}} = 0$$

und sofort weiter vereinfacht werden kann, weil nach der i^{ten}

Gleichung (4), die ja für alle Werte von ϱ, also auch für $\varrho_j + h$ gilt, die Summe:

$$\sum_1^n{}^k a_{ik}\psi_k(\varrho_j + h) = (\varrho_j + h)\,\psi_i(\varrho_j + h) - x_i^0$$

wird, so daß nur noch die Behauptung übrig bleibt:

$$\sum_1^\mu{}^j \left[x_i^0 e^{(\varrho_j + h)(t - t_0)}\right]_{h^{-1}} = 0.$$

Diese Gleichung aber ist deshalb richtig, weil die Entwicklung des Inhalts der eckigen Klammer nach ganzen Potenzen von h gar kein Glied mit h^{-1} liefert. Folglich gilt der

Satz 11: Das System derjenigen Hauptlösungen des d'Alembertschen Systems:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

das für $t = t_0$ die Anfangswerte $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ hat, besteht aus den Funktionen:

$$x_i = \Big[\sum_1^\mu{}^j \psi_i(\varrho_j + h)\, e^{(\varrho_j + h)(t - t_0)}\Big]_{h^{-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Hierin soll die rechte Seite den Koeffizienten bedeuten, den h^{-1} bei der Entwicklung des Inhaltes der eckigen Klammer nach ganzen Potenzen von h bekommt. Ferner bezeichnen $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_\mu$ alle verschiedenen Wurzeln ϱ der charakteristischen Gleichung n^{ten} Grades:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

während $\psi_1(\varrho), \psi_2(\varrho), \ldots \psi_n(\varrho)$ diejenigen Funktionen von ϱ bedeuten, die aus dem linearen Gleichungensysteme:

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \varrho)\psi_1(\varrho) + a_{12}\psi_2(\varrho) + \cdots + a_{1n}\psi_n(\varrho) = -x_1^0, \\ &a_{21}\psi_1(\varrho) + (a_{22} - \varrho)\psi_2(\varrho) + \cdots + a_{2n}\psi_n(\varrho) = -x_2^0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &a_{n1}\psi_1(\varrho) + a_{n2}\psi_2(\varrho) + \cdots + (a_{nn} - \varrho)\psi_n(\varrho) = -x_n^0 \end{aligned}$$

berechnet werden können.

Bedenkt man, daß nach Nr. 117:

$$e^{(\varrho_j+h)(t-t_0)} = e^{\varrho_j(t-t_0)}\left\{1+\frac{h(t-t_0)}{1!}+\frac{h^2(t-t_0)^2}{2!}+\cdots\right\}$$

ist und die Partialbruchentwicklung, die oben benutzt wurde, für $\psi_i(\varrho_j+h)$ einen Ausdruck von der Form:

$$\psi_i(\varrho_j+h)=\frac{\text{konst.}}{h^{m_j}}+\frac{\text{konst.}}{h^{m_j-1}}+\cdots+\frac{\text{konst.}}{h}+\text{konst.}\,h+\text{konst.}\,h^2+\cdots$$

liefert, wenn die Wurzel ϱ_j von $\triangle(\varrho)=0$ gerade m_j-fach ist, so übersieht man, daß sich alle n Funktionen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die das System der Hauptlösungen vorstellen, linear und homogen mit konstanten Koeffizienten aus den Funktionen:

$$(9)\qquad \begin{cases} e^{\varrho_1 t}, & te^{\varrho_1 t}, & t^2e^{\varrho_1 t}, & \ldots\; t^{m_1-1}e^{\varrho_1 t}, \\ e^{\varrho_2 t}, & te^{\varrho_2 t}, & t^2e^{\varrho_2 t}, & \ldots\; t^{m_2-1}e^{\varrho_2 t}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ e^{\varrho_\mu t}, & te^{\varrho_\mu t}, & t^2e^{\varrho_\mu t}, & \ldots\; t^{m_\mu-1}e^{\varrho_\mu t}, \end{cases}$$

zusammensetzen. Dies sind gerade n Funktionen, weil die Summe von $m_1, m_2, \ldots m_\mu$ gleich n ist. Demnach gilt der

Satz 12: Liegt das d'Alembertsche System:

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

vor und hat seine charakteristische Gleichung n^{ten} Grades $\triangle(\varrho)=0$ gerade μ verschiedene Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\mu$, die bzw. m_1-fach, m_2-fach, $\ldots m_\mu$-fach sind, so besteht das allgemeine Lösungensystem aus solchen Funktionen, die sich linear und homogen mit konstanten Koeffizienten aus den n Funktionen

$$e^{\varrho_j t},\quad te^{\varrho_j t},\quad t^2e^{\varrho_j t}, \ldots\; t^{m_j-1}e^{\varrho_j t} \qquad (j=1,2,\ldots \mu)$$

zusammensetzen.

Anstatt also die Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ zu berechnen, kann man auch von vornherein für $x_1, x_2, \ldots x_n$ Funktionen von der soeben bezeichneten Art ansetzen, in denen man dann nachträglich die Koeffizienten in allgemeinster Weise so bestimmt, daß die Gleichungen des Systems befriedigt werden.

Falls die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\triangle(\varrho)=0$ zum Teil oder sämtlich imaginär sind, gilt wieder die Schlußbemerkung der letzten Nummer.

773. Beispiele.

1. Beispiel: Liegt das d'Alembertsche System:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = x_1 \tag{1}$$

vor, so lautet die charakteristische Gleichung:

$$\triangle(\varrho) = \begin{vmatrix} -\varrho & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\varrho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = \varrho^4 - 1 = 0,$$

und sie hat vier *einfache* Wurzeln $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = -1$, $\varrho_3 = i$, $\varrho_4 = -i$. Demnach kann hier die Methode der Nr. 771 benutzt werden. Danach bildet man ein partikulares Lösungensystem, indem man

$$x_1 = c_1 e^{\varrho t}, \quad x_2 = c_2 e^{\varrho t}, \quad x_3 = c_3 e^{\varrho t}, \quad x_4 = c_4 e^{\varrho t}$$

setzt, für ϱ eine der vier Wurzeln wählt und durch Substitution in (1) ermittelt, welche Beziehungen zwischen den Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4 bestehen müssen. So ergeben sich, wenn man stets $c_1 = 1$ wählt, die vier partikularen Lösungensysteme:

	x_1	x_2	x_3	x_4
1)	e^t	e^t	e^t	e^t
2)	e^{-t}	$-e^{-t}$	e^{-t}	$-e^{-t}$
3)	e^{it}	ie^{it}	$-e^{it}$	$-ie^{it}$
4)	e^{-it}	$-ie^{-it}$	$-e^{-it}$	ie^{-it}

Multipliziert man sie bzw. mit C_1, C_2, $\frac{1}{2}(C_3 + iC_4)$ und $\frac{1}{2}(C_3 - iC_4)$, so liefert ihre Addition mit Rücksicht auf die Formeln (6) von Nr. 373 das allgemeine Lösungensystem in der reellen Form:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t - C_4 \sin t, \\ x_2 &= C_1 e^t - C_2 e^{-t} - C_3 \sin t - C_4 \cos t, \\ x_3 &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ x_4 &= C_1 e^t - C_2 e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t \end{aligned}$$

mit den vier Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3, C_4.

2. Beispiel: Liegt das d'Alembertsche System vor:

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2, \tag{2}$$

so lautet die charakteristische Gleichung:

$$\triangle(\varrho) = \begin{vmatrix} 3-\varrho & 1 \\ -1 & 1-\varrho \end{vmatrix} = \varrho^2 - 4\varrho + 4 = (\varrho - 2)^2 = 0$$

und hat also die Doppelwurzel $\varrho = 2$. Soll der Satz 11 von Nr. 772 benutzt werden, so sind ψ_1 und ψ_2 aus den Gleichungen:

$$(3-\varrho)\psi_1 + \psi_2 = -x_1^0,$$
$$-\psi_1 + (1-\varrho)\psi_2 = -x_2^0$$

zu berechnen. Es kommt:

$$\psi_1(\varrho) = \frac{(\varrho-1)x_1^0 + x_2^0}{(\varrho-2)^2}, \quad \psi_2(\varrho) = \frac{-x_1^0 + (\varrho-3)x_2^0}{(\varrho-2)^2}.$$

Hier gelten die Partialbruchzerlegungen (vgl. Satz 2 in Nr. 383):

$$\psi_1(\varrho) = \frac{x_1^0 + x_2^0}{(\varrho-2)^2} + \frac{x_1^0}{\varrho - 2}, \quad \psi_2(\varrho) = -\frac{x_1^0 + x_2^0}{(\varrho-2)^2} + \frac{x_2^0}{\varrho-2},$$

so daß sich für $\varrho = 2 + h$ ergibt:

$$\psi_1(2+h) = \frac{x_1^0 + x_2^0}{h^2} + \frac{x_1^0}{h}, \quad \psi_2(2+h) = -\frac{x_1^0 + x_2^0}{h^2} + \frac{x_2^0}{h}.$$

Folglich hat h^{-1} in den Entwicklungen von

$$\psi_1(2+h)\,e^{(2+h)(t-t_0)} \quad \text{und} \quad \psi_2(2+h)\,e^{(2+h)(t-t_0)}$$

die Koeffizienten:

$$x_1 = \{x_1^0 + (x_1^0 + x_2^0)(t-t_0)\}\,e^{2(t-t_0)},$$
$$x_2 = \{x_2^0 - (x_1^0 + x_2^0)(t-t_0)\}\,e^{2(t-t_0)}.$$

Dies ist also dasjenige Lösungensystem von (2), das für $t = t_0$ die Anfangswerte x_1^0 und x_2^0 hat.

3. Beispiel: Bedeutet s die Summe $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, so wird die Anwendung der allgemeinen Methode auf das d'Alembertsche System:

$$(3) \qquad \frac{dx_i}{dt} = s - x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

sehr unbequem. Man wird daher besser den folgenden Weg einschlagen. Addition aller Gleichungen des Systems gibt:

$$\frac{ds}{dt} = (n-1)s,$$

woraus durch Integration folgt:

$$(4) \qquad s = Ce^{(n-1)t}.$$

Dabei ist C eine willkürliche Konstante. Wird der Wert (4) in (3) eingesetzt, so kommt:

$$(5) \qquad \frac{dx_i}{dt} = Ce^{(n-1)t} - x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Dies ist kein d'Alembertsches System mehr, da rechts eine Funktion von t auftritt. In der nächsten Nummer wird aber gezeigt werden, wie man solche Systeme integrieren kann, und alsdann soll auch dieses Beispiel vollständig erledigt werden.

774. Lineare Systeme. Ein System erster Ordnung in der Normalform:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

heißt *linear*, wenn $f_1, f_2, \ldots f_n$ hinsichtlich $y_1, y_2, \ldots y_n$ ganze lineare Funktionen sind, wenn es also die Form hat:

$$(1) \quad \frac{dy_i}{dx} = A_{i1}(x)y_1 + A_{i2}(x)y_2 + \cdots + A_{in}(x)y_n + B_i(x)$$
$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Als das *zugehörige verkürzte System* bezeichnet man dasjenige *lineare homogene* System, das aus (1) hervorgeht, wenn $B_1(x)$, $B_2(x), \ldots B_n(x)$ durch Null ersetzt werden. Dies verkürzte System hat natürlich andere Lösungensysteme als das System (1) selbst.

Wenn:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \ldots \quad y_n = \varphi_n(x)$$

irgend ein schon bekanntes partikulares Lösungensystem von (1) vorstellt, kann man in (1) statt $y_1, y_2, \ldots y_n$ die n Größen $y_i - \varphi_i(x)$ als neue unbekannte Funktionen:

$$(2) \quad z_1 = y_1 - \varphi_1(x), \quad z_2 = y_2 - \varphi_2(x), \quad \ldots \quad z_n = y_n - \varphi_n(x)$$

einführen. Infolge von (1) und wegen:

$$\varphi_i'(x) = A_{i1}(x)\varphi_1(x) + A_{i2}(x)\varphi_2(x) + \cdots + A_{in}(x)\varphi_n(x) + B_i(x)$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

ergibt sich für sie das System:

$$(3) \qquad \frac{dz_i}{dx} = A_{i1}(x) z_1 + A_{i2}(x) z_2 + \cdots + A_{in}(x) z_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots n),$$

d. h. das zugehörige *verkürzte* System. Wenn man also imstande ist, dies verkürzte System vollständig zu integrieren, braucht man nach (2) zu seinem allgemeinen Lösungensysteme $z_1, z_2, \ldots z_n$ nur die n Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$ zu addieren, um das allgemeine Lösungensystem von (1) zu bekommen.

Man kann das System (1) mittels Quadraturen aber auch dann vollständig integrieren, wenn man das verkürzte System (3) schon vollständig integriert hat, und zwar ohne Kenntnis eines partikularen Lösungensystems von (1). Denn nach Satz 10, Nr. 770, kann das als bekannt vorauszusetzende allgemeine Lösungensystem von (3) in der Form angenommen werden:

$$(4) \qquad z_i = C_1 \varphi_{1i}(x) + C_2 \varphi_{2i}(x) + \cdots + C_n \varphi_{ni}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wobei die Determinante aller n^2 Funktionen φ von Null verschieden ist. Das anzuwendende Verfahren von *Lagrange*, die sogenannte *Methode der Variation der Konstanten*, besteht darin, daß man die n Integrationskonstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ durch n noch unbekannte *Funktionen* $u_1, u_2, \ldots u_n$ und ferner $z_1, z_2, \ldots z_n$ durch $y_1, y_2, \ldots y_n$ ersetzt, d. h. daß man vermöge der nach $u_1, u_2, \ldots u_n$ auflösbaren Gleichungen:

$$(5) \qquad y_i = \varphi_{1i}(x) u_1 + \varphi_{2i}(x) u_2 + \cdots + \varphi_{ni}(x) u_n \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

in (1) die neuen n unbekannten Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ einführt. Die Substitution der Werte (5) in (1) gibt:

$$\sum_1^n {}^k \left[\varphi'_{ki}(x) u_k + \varphi_{ki}(x) \frac{du_k}{dx} \right] = \sum_1^n {}^k \left[\sum_1^n {}^j A_{ij}(x) \varphi_{kj}(x) \right] u_k + B_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Hierin ist aber allgemein:

$$\varphi'_{ki}(x) = \sum_1^n {}^j A_{ij}(x) \varphi_{kj}(x),$$

weil nach (4) die Werte:

$$z_1 = \varphi_{k1}(x), \quad z_2 = \varphi_{k2}(x), \quad \ldots \; z_n = \varphi_{kn}(x)$$

dem verkürzten Systeme (3) genügen. Also bleibt das System übrig:

$$\varphi_{1i}(x) \frac{du_1}{dx} + \varphi_{2i}(x) \frac{du_2}{dx} + \cdots + \varphi_{ni}(x) \frac{du_n}{dx} = B_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Da die Determinante der n^2 Funktionen φ_{ki} von Null verschieden ist, läßt sich das System nach den Ableitungen der n unbekannten Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ auflösen. Dadurch ergeben sich für diese Ableitungen *bekannte* Funktionen $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots \psi_n(x)$, so daß das neue System die Form annimmt:

$$\frac{du_i}{dx} = \psi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Mittels *Quadraturen* ergibt sich hieraus:

$$u_i = \int \psi_i(x)\, dx + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wobei die Integrale von bestimmten unteren Grenzen an erstreckt und $c_1, c_2, \ldots c_n$ die Integrationskonstanten sind. Bezeichnen wir die Integrale von $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots \psi_n(x)$ mit $\Psi_1(x), \Psi_2(x), \ldots \Psi_n(x)$, so gibt die Substitution der Werte:

$$u_i = \Psi_i(x) + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

in (5) das allgemeine Lösungensystem:

$$\begin{gathered} y_i = \varphi_{1i}(x)\, \Psi_1(x) + \varphi_{2i}(x)\, \Psi_2(x) + \cdots + \varphi_{ni}(x)\, \Psi_n(x) \\ + c_1 \varphi_{1i}(x) + c_2 \varphi_{2i}(x) + \cdots + c_n \varphi_{ni}(x) \\ (i = 1, 2, \ldots n) \end{gathered}$$

des vorgelegten Systems (1). In der Tat ist das gefundene Lösungensystem allgemein, weil es nach den n Integrationskonstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ auflösbar ist.

Beispiel: Im 3. Beispiele der vorigen Nummer trat das noch zu integrierende lineare System auf:

$$(6) \qquad \frac{dx_i}{dt} = Ce^{(n-1)t} - x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

das jetzt erledigt werden soll. Zu diesem Zwecke wird das zugehörige *verkürzte* System (3) gebildet, das hier so lautet:

$$\frac{dz_i}{dt} = -z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Dies ist wieder ein d'Alembertsches System, das sofort in der Form:

$$z_i = C_i e^{-t} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

integriert ist. Nun wird in (6) analog (5), worin jetzt $y_1, y_2, \ldots y_n$ und x durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ und t zu ersetzen sind, die Substitution gemacht:

$$(7) \qquad x_i = u_i e^{-t} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wodurch das System hervorgeht:

$$\frac{du_i}{dt} = Ce^{nt} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

das sich sofort integrieren läßt:

$$u_i = \frac{C}{n} e^{nt} + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Hier sind $c_1, c_2, \ldots c_n$ die Integrationskonstanten. Substitution dieser Werte in (7) liefert das allgemeine Lösungensystem von (6):

$$x_i = \frac{C}{n} e^{(n-1)t} + c_i e^{-t} \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{8}$$

Das System (6) ergab sich im 3. Beispiele der vorigen Nummer, wo das d'Alembertsche System:

$$\frac{dx_i}{dt} = s - x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{9}$$

integriert werden sollte, in dem s die Summe $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ vorstellte. Demnach liefern die Funktionen (8) erst dann das allgemeine Lösungensystem von (9), wenn noch die Gleichung (4) von voriger Nummer berücksichtigt wird, nach der

$$s = Ce^{(n-1)t}$$

ist. Die Addition aller n Gleichungen (8) gibt nämlich:

$$s = Ce^{(n-1)t} + (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)e^{-t}.$$

Folglich muß:

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0 \tag{10}$$

angenommen werden. Die Funktionen (8) stellen also dann und nur dann das allgemeine Lösungensystem des d'Alembertschen Systems (9) dar, wenn darin zwar die $n + 1$ Konstanten $C, c_1, c_2, \ldots c_n$ willkürlich sind, aber so, daß $c_1, c_2, \ldots c_n$ der Bedingung (10) genügen.

775. Eingliedrige Gruppe von linearen homogenen Transformationen von n Veränderlichen. Nachdem in den vorhergehenden Nummern die wichtigsten Betrachtungen über allgemeine lineare Systeme erledigt sind, kehren wir zum *d'Alembertschen System:*

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

zurück, um ihm eine geometrische Deutung zu geben. Ein spezielles d'Alembertsches System, nämlich im Falle $n = 3$, begegnete uns schon in Nr. 753 unter (4) bei der Betrachtung der Jacobischen Differentialgleichung. Damals gingen wir von n, nämlich drei, partikularen Lösungensystemen aus und konstruierten daraus durch Multiplikation mit willkürlichen Konstanten und Addition das allgemeine Lösungensystem, vgl. (7) in Nr. 753. Auf Grund des Satzes 10 von Nr. 770, der ja insbesondere auch für d'Alembertsche Systeme gilt, kann dieselbe Betrachtung beim Systeme (1) gemacht werden. Was sich dann ergibt, kann aber auch aus der in Satz 11, Nr. 772, angegebenen Form des Systems der Hauptlösungen geschlossen werden, denn die Funktionen $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$, die damals auftraten und den in jenem Satze angegebenen linearen Gleichungen genügen, sind augenscheinlich in $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$ homogene ganze lineare Funktionen.

Mithin hat das System derjenigen Hauptlösungen von (1), die für $t = 0$ die Werte $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$ annehmen, die Form:

$$(2) \qquad x_i = \varphi_{i1}(t)\, x_1^0 + \varphi_{i2}(t)\, x_2^0 + \dots + \varphi_{in}(t)\, x_n^0$$
$$(i = 1, 2, \dots n).$$

Nach Satz 12, Nr. 772, folgt noch, daß sich die Funktionen φ_{i1}, $\varphi_{i2}, \dots \varphi_{in}$ linear und homogen mit konstanten Koeffizienten aus den n Funktionen

$$(3) \qquad e^{\varrho_j t},\ t e^{\varrho_j t},\ t^2 e^{\varrho_j t}, \dots t^{m_j - 1} e^{\varrho_j t} \qquad (j = 1, 2, \dots \mu)$$

zusammensetzen, wenn die charakteristische Gleichung $\triangle(\varrho) = 0$ insgesamt μ verschiedene Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_\mu$ hat, die bzw. m_1-fach, m_2-fach, $\dots m_\mu$-fach auftreten.

Da nun die Gleichungen (2) für jeden Wert von t auch nach $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$ auflösbar sind, stellen sie für jeden Wert von t eine sogenannte *lineare homogene Transformation* $\mathfrak{T}_t$ der n Veränderlichen $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$ in die n Veränderlichen x_1, $x_2, \dots x_n$ vor.

Nach Satz 6 von Nr. 767 ist die Gesamtheit aller linearen homogenen Transformationen $\mathfrak{T}_t$, die durch (2) für die verschiedenen Werte von t dargestellt werden, *eine eingliedrige Gruppe von linearen homogenen Transformationen*, die von derjenigen infinitesimalen Transformation:

$$(4) \qquad \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

erzeugt wird, in der die Koeffizienten $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ die Werte:

$$(5) \qquad \xi_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

haben.

Wenn *umgekehrt* ein vorgelegtes System:

$$(6) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \xi_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

eine eingliedrige Gruppe von lauter linearen homogenen Transformationen erzeugen soll, muß das System der Hauptlösungen von (6), das für $t = 0$ die Anfangswerte $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ hat, die Form:

$$(7) \qquad x_i = \varphi_{i1}(t)\, x_1^0 + \varphi_{i2}(t)\, x_2^0 + \cdots + \varphi_{in}(t)\, x_n^0$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

haben, so daß das System (6) selbst durch Elimination von $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ aus den n Gleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_{i1}'(t)\, x_1^0 + \varphi_{i2}'(t)\, x_2^0 + \cdots + \varphi_{in}'(t)\, x_n^0$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

mittels der n Gleichungen (7) hervorgehen muß. Nun aber sind die Auflösungen von (7) nach $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ ganze lineare homogene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Das hervorgehende System (6) muß deshalb rechts lauter ganze lineare homogene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ haben, mithin ein d'Alembertsches System (1) sein.

Diese Ergebnisse fassen wir zusammen in den folgenden Sätzen:

Satz 13: Eine infinitesimale Transformation von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ erzeugt dann und nur dann eine eingliedrige Gruppe von lauter linearen homogenen Transformationen, wenn sie die Form hat:

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

worin $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ganze lineare homogene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind:

$$\xi_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Satz 14: Diejenigen Hauptlösungen eines Systems von der Form:

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_i(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

die für $t = 0$ *die Anfangswerte* $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$ *haben, sind dann und nur dann ganze lineare homogene Funktionen von* $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$*, wenn das System ein d'Alembertsches ist:*

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Wegen des Satzes 13 nennt man *eine infinitesimale Transformation linear und homogen*, wenn sie die in diesem Satze angegebene Form hat.

Nach Nr. 768 können wir noch hinzufügen:

Satz 15: Die allgemeinen Integralkurven des Systems von totalen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots x_n)},$$

die von den Punkten $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$ *des Raumes mit den* n *Koordinaten* $x_1, x_2, \dots x_n$ *ausgehen, lassen sich dann und nur dann mittels einer Hilfsveränderlichen* t *in der Form:*

$$x_i = \varphi_{i1}(t)\,x_1^0 + \varphi_{i2}(t)\,x_2^0 + \dots + \varphi_{in}(t)\,x_n^0$$
$$(i = 1, 2, \dots n)$$

darstellen, wenn das System auf eine Form gebracht werden kann, in der $X_1, X_2, \dots X_n$ *ganze lineare homogene Funktionen von* $x_1, x_2, \dots x_n$ *sind:*

$$X_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Man muß nämlich beachten, daß man die n Funktionen $X_1, X_2, \dots X_n$, ohne dadurch das System der totalen Differentialgleichungen zu ändern, mit einer willkürlichen Funktion multiplizieren darf, weil nur ihre Verhältnisse in Betracht kommen.

Schließlich sei noch bemerkt, daß das in Nr. 772 gegebene allgemeine Verfahren zur Integration eines d'Alembertschen Systems insbesondere auf das System (4) in Nr. 753 angewandt werden kann. *Dadurch geht eine neue Methode hervor, die Jacobische Differentialgleichung* (1) *jener Nummer vollständig zu integrieren.*

[775

§ 3. Allgemeine Systeme erster Ordnung.

776. Allgemeine Lösungensysteme. Es handelt sich jetzt darum, die Betrachtungen des ersten Paragraphen auf solche Systeme erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen auszudehnen, die zwar nicht in der Normalform (vgl. Nr. 665) vorliegen, aber Auflösungen nach den Ableitungen $y_1', y_2', \dots y_n'$ der unbekannten Funktionen $y_1, y_2, \dots y_n$ der unabhängigen Veränderlichen x zulassen. Demnach wird ein System von n Gleichungen:

$$(1) \qquad F_i(x, y_1, y_2, \dots y_n, y_1', y_2', \dots y_n') = 0 \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

angenommen und vorausgesetzt, daß es einen *Bereich* gebe, innerhalb dessen alle n Funktionen $F_1, F_2, \dots F_n$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig hinsichtlich aller $2n+1$ Veränderlicher $x, y_1, y_2, \dots y_n$ und $y_1', y_2', \dots y_n'$ sind. Stets soll sich die Betrachtung auf diesen Bereich beziehen. Außerdem wird vorausgesetzt, daß die Funktionaldeterminante:

$$(2) \qquad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \end{pmatrix}$$

nicht für alle diejenigen Wertsysteme der $2n+1$ Veränderlichen verschwinde, die den n Gleichungen (1) Genüge leisten.

Wenn nun:

$$(3) \qquad x = a, \quad y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2, \dots y_n = b_n$$

ein bestimmtes Wertsystem ist, nach dessen Substitution in (1) diese Gleichungen durch eine Anzahl von Wertsystemen:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1' = c_{11}, \quad y_2' = c_{12}, \dots y_n' = c_{1n}; \\ y_1' = c_{21}, \quad y_2' = c_{22}, \dots y_n' = c_{2n}; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_1' = c_{r1}, \quad y_2' = c_{r2}, \dots y_n' = c_{rn} \end{array} \right.$$

befriedigt werden, von denen keins mit den übrigen völlig übereinstimmt, so hat das Gleichungensystem (1) in der Umgebung der Wertsysteme Auflösungen nach $y_1', y_2', \dots y_n'$, vorausgesetzt, daß die Funktionaldeterminante $\mathfrak{D}$ für keines der Wertsysteme gleich Null wird, nach Satz 17 von Nr. 697. Es ergeben sich so insgesamt entsprechend den r Wertsystemen (4) gerade r einzelne Systeme in der Normalform, von denen ein jedes in der Umgebung der Stelle (3) ein allgemeines Lösungensystem hat. Vgl. auch Satz 21 von Nr. 701. Demnach lassen sich die Betrachtungen in Nr. 707 verallgemeinern. Wir brauchen jedoch nicht auf alle Einzelheiten einzugehen.

Werden $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ als Koordinaten der Punkte in einem Raume von $n+1$ Dimensionen gedeutet, so wird jedes partikulare Lösungensystem durch eine *Integralkurve* dargestellt. Es zeigt sich dann, daß die Umgebung des Punktes $(a, b_1, b_2, \ldots b_n)$ von der Gesamtheit aller Integralkurven des vorgelegten Systems (1) *gerade so vielfach überdeckt wird, als es Wertsysteme* (4) *gibt.* Dies bedeutet analytisch: Die Anzahl derjenigen partikularen Lösungensysteme, die für $x = x_0$ die Anfangswerte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ haben, ist, vorausgesetzt, daß die Stelle $(x^0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ in der Umgebung der Stelle $(a, b_1, b_2, \ldots b_n)$ liegt und daß dabei stets $\mathfrak{D} \neq 0$ ist, gerade so groß wie die Anzahl der Wertsysteme (4), die den Gleichungen (1) für $x = a, \ y_1 = b_1, \ldots y_n = b_n$ genügen. Entsprechend dem Satze 4 von Nr. 707 ergibt sich auch jetzt der

Satz 16: Wenn das System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$F_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n, y_1', y_2', \ldots y_n') = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

an der Stelle:

$$x = a, \quad y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2, \ \ldots y_n = b_n$$

nur durch solche Werte von $y_1', y_2', \ldots y_n'$ befriedigt wird, für die die Funktionaldeterminante:

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \ldots F_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist, gibt es eine solche Umgebung der Stelle $(a, b_1, b_2, \ldots b_n)$, in der keine zwei verschiedene partikulare Lösungensysteme, die für $x = x_0$ dieselben Anfangswerte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ haben, an dieser Anfangsstelle völlig übereinstimmende Werte ihrer Ableitungen haben.

Die Gesamtheit aller partikularen Lösungensysteme in der Umgebung der Stelle $(a, b_1, b_2, \ldots b_n)$ heißt ein *allgemeines Lösungensystem.* Es besteht, entsprechend den r möglichen Auflösungen des Gleichungensystems (1) hinsichtlich $y_1', y_2', \ldots y_n'$, aus den r allgemeinen Lösungensystemen, die den durch diese Auflösungen zu findenden r Systemen in der Normalform in der Umgebung derselben Stelle zukommen.

777. Singuläre Lösungensysteme. Wenn dasselbe System wie soeben vorliegt:

$$(1) \quad F_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n, y_1', y_2', \ldots y_n') = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

so werden wir, auch wenn keine geometrische Deutung in einem Raume von $n + 1$ Dimensionen vorgenommen wird, doch von den *Linienelementen* sprechen, die vermöge (1) irgend einem Wertsysteme $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ zugeordnet werden. Wir verstehen darunter die Gesamtheit aller Wertsysteme $x, y_1, y_2, \ldots y_n, y_1'$, $y_2', \ldots y_n'$, die den Gleichungen (1) genügen, falls x, y_1, y_2, $\ldots y_n$ bestimmt gewählt worden sind. *Singulär soll ein Linienelement des Systems* (1) *heißen, wenn die Funktionaldeterminante:*

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \ldots & F_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \end{pmatrix}$$

für die Bestimmungsstücke des Elements den Wert Null hat. Dem Satze 16 der letzten Nummer kann man dann die Form geben: *Nur singuläre Linienelemente können mehreren verschiedenen partikularen Lösungensystemen angehören.* Geometrisch ausgedrückt: Nur durch singuläre Linienelemente können mehrere verschiedene Integralkurven gehen. Vgl. Nr. 708.

Ein System von stetigen und differenzierbaren Funktionen:

$$(2) \quad y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \ldots y_n = \varphi_n(x)$$

heißt ein *singuläres Lösungensystem* von (1), wenn es den Gleichungen (1) innerhalb eines gewissen Intervalles von x genügt und wenn außerdem die Werte (2) und:

$$(3) \quad y_1' = \varphi_1'(x), \quad y_2' = \varphi_2'(x), \quad \ldots y_n' = \varphi_n'(x)$$

die Funktionaldeterminante $\mathfrak{D}$ zum Verschwinden bringen. Stellt dagegen (2) ein Lösungensystem vor, bei dem $\mathfrak{D} \neq 0$ ist, so heiße es ein *reguläres.* Außer den regulären und singulären Lösungensystemen gibt es keine. Es entsprechen ihnen bei der geometrischen Deutung die *regulären und singulären Integralkurven. Ein System in der Normalform:*

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

hat keine singulären Lösungensysteme, denn hier ist $F_i = y_i' - f_i$ und daher $\mathfrak{D} = 1 \neq 0$.

Unter dem *Diskriminantenorte* verstehen wir wie in Nr. 711 die Gesamtheit aller Wertsysteme $x, y_1, y_2, \dots y_n$, zu denen es Werte $y_1', y_2', \dots y_n'$ gibt, die sowohl dem Systeme (1) genügen als auch die Funktionaldeterminante $\mathfrak{D}$ zum Verschwinden bringen. Es ist dies der Ort der Punkte $(x, y_1, y_2, \dots y_n)$ aller singulären Linienelemente.

Die Bedingungen, unter denen ein singuläres Lösungensystem vorhanden ist, lassen sich verschärfen. Soll nämlich ein solches System existieren, so heißt dies: Es sollen Funktionen $y_1, y_2, \dots y_n$ und $y_1', y_2', \dots y_n'$ von x vorhanden sein, die *erstens* dem Systeme (1) Genüge leisten, *zweitens* die Gleichung $\mathfrak{D} = 0$ erfüllen und *drittens* so beschaffen sind, daß die Ableitungen von $y_1, y_2, \dots y_n$ mit den Funktionen $y_1', y_2', \dots y_n'$ übereinstimmen. Nun gibt die vollständige Differentiation der Gleichungen (1) nach x:

$$(4)\quad \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} + \frac{\partial F_i}{dy_1'}\frac{dy_1'}{dx} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial y'_n}\frac{dy_n'}{dx} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Diese Gleichungen lassen sich aber von den Ableitungen von $y_1', y_2', \dots y_n'$ befreien. Denn es bedeute A_{ik} diejenige $(n-1)$-reihige Unterdeterminante von $\mathfrak{D}$, die zu dem Elemente $\partial F_i : \partial y_k'$ von $\mathfrak{D}$ gehört. Wird nun die i^{te} Gleichung (4) mit A_{ik} multipliziert und alsdann die Summierung über i von 1 bis n ausgeführt, so kommt, da:

$$A_{1k}\frac{\partial F_1}{\partial y_j'} + A_{2k}\frac{\partial F_2}{\partial y_j'} + \dots + A_{nk}\frac{\partial F_n}{\partial y_j'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathfrak{D} \end{Bmatrix} \quad \text{für} \quad \begin{Bmatrix} j \neq k \\ j = k \end{Bmatrix}$$

ist:

$$(5)\quad \sum_1^n {}^i A_{ik}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}\right) + \mathfrak{D}\,\frac{dy_k'}{dx} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots n).$$

Nach der zweiten Bedingung aber muß $\mathfrak{D} = 0$ sein. Ferner sollen die Ableitungen von $y_1, y_2, \dots y_n$ nach x infolge der dritten Bedingung die Funktionen $y_1', y_2', \dots y_n'$ sein. Demnach müssen die n Gleichungen bestehen:

$$(6)\qquad \sum_1^n {}^i A_{ik}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}y_1' + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}y_n'\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots n).$$

Die gesuchten $2n$ Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ und $y_1', y_2', \ldots y_n'$ von x müssen somit den n Gleichungen (1), der Gleichung $\mathfrak{D} = 0$ und den n Gleichungen (6) genügen.

Jedoch für solche $2n$ Funktionen, die dies tun, kann hieraus doch nicht geschlossen werden, daß $y_1', y_2', \ldots y_n'$ wirklich die Ableitungen von $y_1, y_2, \ldots y_n$ sind. Denn für die Ableitungen gelten die Gleichungen (5), worin $\mathfrak{D} = 0$ ist, so daß die Subtraktion entsprechender Gleichungen (5) und (6) gibt:

$$(7)\quad \sum_1^n {}^i A_{ik} \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\left(\frac{dy_1}{dx} - y_1'\right) + \cdots + \sum_1^n {}^i A_{ik} \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - y_n'\right) = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots n),$$

und aus diesen n Gleichungen folgt das Gewünschte nur dann, wenn ihre Determinante von Null verschieden ist. Aber diese Determinante ist das Produkt der Determinante

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \ldots & F_n \\ y_1 & y_2 \ldots & y_n \end{pmatrix}$$

mit der Determinante aller $(n-1)$-reihigen Unterdeterminanten A_{ik} von $\mathfrak{D}$, die nach einem bekannten Satze gleich $\mathfrak{D}^{n-1}$ ist. Für das fragliche Funktionensystem ist aber gerade $\mathfrak{D} = 0$. Im Falle $n > 1$ sind also die aufgestellten Bedingungen nicht hinreichend. Auf den Fall $n = 1$, wo $\mathfrak{D}^{n-1}$ durch Eins zu ersetzen ist, kommen wir sogleich zurück. Vorher soll das Ergebnis formuliert werden. Die Bedingungen (6) und die Gleichung $\mathfrak{D} = 0$ lassen sich übersichtlich zusammenfassen. Es ergibt sich nämlich der

Satz 17: Jedes singuläre Lösungensystem $y_1, y_2, \ldots y_n$ des Systems erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$F_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n, y_1', y_2', \ldots y_n') = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

bringt zusammen mit seinen Ableitungen $y_1', y_2', \ldots y_n'$ alle diejenigen $n+1$ Determinanten zum Verschwinden, die aus der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}y_1'+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial y_n}y_n' & \frac{\partial F_1}{\partial y_1'} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2'} & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_1}{\partial y_n'} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y_1}y_1'+\cdots+\frac{\partial F_2}{\partial y_n}y_n' & \frac{\partial F_2}{\partial y_1'} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2'} & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_2}{\partial y_n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial x}+\frac{\partial F_n}{\partial y_1}y_1'+\cdots+\frac{\partial F_n}{\partial y_n}y_n' & \frac{\partial F_n}{\partial y_1'} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2'} & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_n}{\partial y_n'} \end{vmatrix}$$

durch Streichen je einer Reihe hervorgehen.

Diese *Matrix*, wie man überhaupt eine solche Tafel von Elementen nennt, in der die Anzahl der Reihen nicht mit der Anzahl der Zeilen übereinstimmt, hat an sich keine Bedeutung. Sie soll nur zur bequemen Zusammenfassung von $n+1$ Determinanten dienen, denn nach dem Streichen irgend einer Reihe geht jedesmal eine Determinante hervor.

Insbesondere im Falle $n=1$ lauten die Bedingungen für eine singuläre Lösung der Differentialgleichung:

$$F(x, y, y') = 0$$

so:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y' = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Sie wurden schon in Satz 6, Nr. 708, angegeben; und wir benutzen die Gelegenheit, diesen Satz, der nicht ganz exakt ist, zu verbessern:

In diesem Falle kommt nur die eine Gleichung (7) vor:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}-y'\right) = 0;$$

daß also y' wirklich die Ableitung von y ist, kann nur bei der Annahme:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$$

geschlossen werden. Diese Voraussetzung ist in Satz 6, Nr. 708, übersehen worden und also hinzuzufügen.

778. Singuläre Lösungensysteme, die durch Einhüllung hervorgehen. Wenn von dem Systeme:

(1) $\quad F_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n, y_1', y_2', \ldots y_n') = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$

ein solches Lösungensystem:

(2) $\quad y_1 = \varphi_1(x, c), \quad y_2 = \varphi_2(x, c), \ldots y_n = \varphi_n(x, c)$

schon bekannt ist, in dem eine (innerhalb eines gewissen Intervalles) willkürliche Integrationskonstante c auftritt, so kennt man eine *einfach* unendliche Schar von partikularen Lösungensystemen oder Integralkurven im Raume mit den $n+1$ Koordinaten $x, y_1, y_2, \ldots y_n$. Es ist nun möglich, daß diese Schar eine sogenannte *Einhüllende* hat (vgl. Nr. 710 im Falle $n=1$), d. h. analytisch ausgesprochen, daß es ein System von differenzierbaren Funktionen:

$$(3) \qquad y_1 = \psi_1(x), \quad y_2 = \psi_2(x), \ldots y_n = \psi_n(x)$$

gibt, die so beschaffen sind, daß sie und ihre Ableitungen erster Ordnung für jeden erlaubten Wert von x mit den Funktionen (2) und ihren Ableitungen erster Ordnung übereinstimmen, sobald man der Konstante c in (2) einen gewissen bestimmten Wert erteilt hat, der mit x variiert und also eine Funktion α von x sein muß. Mit anderen Worten: Es ist denkbar, daß es eine Funktion $\alpha(x)$ derart gibt, daß die Funktionen (3) für jedes erlaubte x mit den Funktionen:

$$(4) \quad y_1 = \varphi_1(x, \alpha(x)), \quad y_2 = \varphi_2(x, \alpha(x)), \ldots y_n = \varphi_n(x, \alpha(x))$$

und die Ableitungen dieser Funktionen zugleich mit:

$$\frac{\partial \varphi_1(x, \alpha)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_2(x, \alpha)}{\partial x}, \ldots \frac{\partial \varphi_n(x, \alpha)}{\partial x}$$

übereinstimmen. Da die Ableitungen der Funktionen (3) oder (4) die Werte:

$$y_i' = \frac{\partial \varphi_i(x, \alpha)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i(x, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha(x)}{dx} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

haben, falls $\alpha(x)$, wie wir annehmen wollen, differenzierbar ist, so existieren die fraglichen Funktionen (3) oder (4) dann und nur dann, wenn es eine differenzierbare Funktion $\alpha(x)$ derart gibt, daß die n Gleichungen:

$$(5) \qquad \frac{\partial \varphi_i(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

für alle Werte von x im erlaubten Intervalle bestehen.

Ist dies der Fall, so sagt man, *daß die einfach unendliche Kurvenschar* (2) *eine Einhüllende* (4) *habe*, denn dann gibt es eine Kurve (4), die jede einzelne der Kurven (2) in je einem Punkte berührt. Man wird diese Bezeichnung auch beibehalten, wenn man von der geometrischen Deutung absieht, also sagen, *daß die einfach unendliche Schar* (2) *von Funktionensystemen ein einhüllendes Funktionensystem* (4) *habe, wenn die* n *Bedingungen* (5) *durch eine differenzierbare Funktion* $\alpha(x)$ *erfüllbar sind.*

Da alsdann jedes Wertsystem $y_1, y_2, \ldots y_n, y_1', y_2', \ldots y_n'$, das sich aus (4) für ein beliebiges x im erlaubten Intervalle ergibt, mit dem entsprechenden Wertsysteme der Funktionen (2) und ihrer Ableitungen für dasselbe x übereinstimmt, falls darin für c der zugehörige Wert von $\alpha(x)$ gewählt wird, so genügen alle Wertsysteme $x, y_1, \ldots y_n, y_1', \ldots y_n'$, die sich aus (4) gewinnen lassen, dem vorgelegten Systeme (1). Folglich muß (4) ebenfalls ein Lösungensystem sein. Weil nun aber jedes Linienelement $(x, y_1, \ldots y_n, y_1', \ldots y_n')$, das zu (4) gehört, auch einem der Lösungensysteme (2) angehört, folgt aus Satz 16, Nr. 776, daß (4) ein *singuläres* Lösungensystem darstellen muß. Wir haben demnach den

Satz 18: Wird unter den partikularen Lösungensystemen des Systems erster Ordnung von n *gewöhnlichen Differentialgleichungen:*

$$F_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n, y_1', y_2', \ldots y_n') = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

eine solche einfach unendliche Schar:

$$y_1 = \varphi_1(x, c), \quad y_2 = \varphi_2(x, c), \ldots y_n = \varphi_n(x, c)$$

ausgewählt, zu der ein einhüllendes Funktionensystem gehört, d. h. zu dem es eine differenzierbare Funktion $\alpha(x)$ *derart gibt, daß die* n *Gleichungen:*

$$\frac{\partial \varphi_i(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

bestehen, so ist das einhüllende Funktionensystem:

$$y_1 = \varphi_1(x, \alpha(x)), \quad y_2 = \varphi_2(x, \alpha(x)), \ldots y_n = \varphi_n(x, \alpha(x))$$

ein singuläres Lösungensystem.

Dies ist die Verallgemeinerung des Satzes 7 von Nr. 710.

779. Weitere Ausführung bei Systemen von zwei Differentialgleichungen. Im Falle $n = 2$ sollen die Betrachtungen weitergeführt werden. Die unbekannten Funktionen seien mit y und z (statt mit y_1 und y_2) bezeichnet, und das zu betrachtende System erster Ordnung von Differentialgleichungen sei:

$$(1)\qquad \Phi(x, y, z, y', z') = 0, \quad \Psi(x, y, z, y', z') = 0.$$

Ferner möge das allgemeine Lösungensystem durch die beiden Funktionen:

$$(2)\qquad y = \varphi(x, a, b), \quad z = \psi(x, a, b)$$

mit den beiden Integrationskonstanten a, b dargestellt sein. Werden x, y, z als rechtwinklige Koordinaten im Raume gedeutet, so gehört zu jedem erlaubten Konstantenpaare a, b eine *Integralkurve*, dargestellt durch (2). Insgesamt liegt eine *zweifach* unendliche Schar von Integralkurven vor. Nebenbei bemerkt nennt man eine zweifach unendliche Schar von Kurven im Raume, die nicht etwa nur eine Fläche erfüllen, auch eine *Kurvenkongruenz*. Bei den folgenden Betrachtungen, die nur darüber Aufklärung geben sollen, wie die einhüllenden singulären Integralkurven *im allgemeinen* gelagert sind, wird vorausgesetzt, daß die auszuführenden Operationen sämtlich erlaubt seien.

Aus der zweifach unendlichen Schar (2) aller Integralkurven wird in allgemeinster Weise eine einfach unendliche herausgegriffen, wenn man a als willkürliche Konstante c beibehält und für b irgend eine Funktion λ von c setzt:

$$(3)\qquad y = \varphi(x, c, \lambda(c)), \quad y = \psi(x, c, \lambda(c)).$$

Allerdings wird dabei von der einen Schar, die sich ergibt, wenn a festgehalten wird und nur b willkürlich bleibt, abgesehen. Sie würde aber sofort hervorgehen, wenn wir die Rollen von a und b vertauschten. Die Ergebnisse werden jedoch in Hinsicht auf a und b symmetrisch ausfallen, so daß ihre Allgemeinheit trotzdem nicht beeinträchtigt wird.

Nach Satz 18 der vorigen Nummer hat nun die Schar (3) eine Einhüllende, falls es eine Funktion $\alpha(x)$ gibt derart, daß:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi(x, \alpha, \lambda(\alpha))}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \varphi(x, \alpha, \lambda(\alpha))}{\partial \lambda} \lambda'(\alpha) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \psi(x, \alpha, \lambda(\alpha))}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \psi(x, \alpha, \lambda(\alpha))}{\partial \lambda} \lambda'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

wird. Diese beiden Gleichungen können nur dann zusammen bestehen, wenn ihre Determinante:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi(x, \alpha, \lambda(\alpha))}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial \varphi(x, \alpha, \lambda(\alpha))}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial \psi(x, \alpha, \lambda(\alpha))}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial \psi(x, \alpha, \lambda(\alpha))}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = 0$$

ist, und zwar wird dann eine überflüssig.

Man kann hieraus im allgemeinen $\alpha(x)$ und $\lambda(\alpha)$ finden. Denn (5) ist eine Gleichung zwischen x, α und $\lambda(\alpha)$ allein und etwa die erste Gleichung (4) eine zwischen x, α, $\lambda(\alpha)$, $\lambda'(\alpha)$, so daß also zwei Gleichungen:

$$\Omega(x, \alpha, \lambda) = 0, \quad \lambda'(\alpha) = \omega(x, \alpha, \lambda)$$

vorliegen. Durch vollständige Differentiation von $\Omega = 0$ kommt noch:

$$\Omega_x + [\Omega_\alpha + \Omega_\lambda \lambda'(\alpha)]\, \alpha'(x) = 0.$$

Setzt man hierin den Wert $\lambda' = \omega(x, \alpha, \lambda)$ ein und eliminiert dann λ mittels $\Omega(x, \alpha, \lambda) = 0$, so ergibt sich eine *gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für* $\alpha(x)$:

$$\alpha'(x) = f(x, \alpha(x)).$$

Ihre Integration liefert $\alpha(x)$, und aus $\Omega(x, \alpha, \lambda) = 0$ kann man nun auch λ berechnen. *Durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung und Eliminationen und Substitutionen lassen sich somit die einhüllenden singulären Integralkurven bestimmen* und zugleich diejenigen einfach unendlichen Scharen (3) von Integralkurven ermitteln, die solche Einhüllende haben. Denn da jetzt α und $\lambda(\alpha)$ bekannt sind, ist auch $\lambda(c)$ in (3) bekannt.

Nun wissen wir, daß die zu einer solchen Schar (3) gehörige Einhüllende:

$$(6)\qquad y = \varphi(x, \alpha(x), \lambda(\alpha)), \quad z = \psi(x, \alpha(x), \lambda(\alpha))$$

so beschaffen ist, daß zu jedem erlaubten Werte von x ein Wert von $\alpha(x)$ existiert derart, daß (3) und (6) denselben Punkt geben, sobald in (3) für c gerade dieser Wert von $\alpha(x)$ gewählt wird. Demnach lehrt (5), wenn man c und $\lambda(c)$ wieder mit a und b bezeichnet: Die Koordinaten eines solchen Punktes (x, y, z) einer Kurve (2), der einer Einhüllenden angehört, erfüllen auch die Gleichung:

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi(x,a,b)}{\partial a} & \dfrac{\partial\varphi(x,a,b)}{\partial b} \\ \dfrac{\partial\psi(x,a,b)}{\partial a} & \dfrac{\partial\psi(x,a,b)}{\partial b} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir nehmen an, aus dieser Gleichung in x, a, b lasse sich x als Funktion von a und b berechnen. Wird sie auch in (2) für x substituiert, so ergeben sich drei Gleichungen:

$$(8)\qquad x = A(a, b),\quad y = B(a, b),\quad z = C(a, b).$$

Für jedes Wertepaar a, b liefern sie einen Punkt (x, y, z), in dem eine hindurchgehende Integralkurve eine Einhüllende berühren kann. Die Gesamtheit der Punkte (8) wird im allgemeinen eine *Fläche* erfüllen, denn man kann a und b als jene beiden Hilfsveränderlichen deuten, die in Nr. 251 in den Gleichungen (6) mit u und v bezeichnet wurden.

Man kann sich auch vorstellen, daß a und b aus den drei Gleichungen (2) und (7) eliminiert werden, wodurch die Gleichung der Fläche in der Form $F(x, y, z) = 0$ hervorgeht. Diese Fläche heißt die *Brennfläche* der betrachteten zweifach unendlichen Kurvenschar (2).

Zu einem bestimmten Wertepaare a, b geben die Gleichungen (2) und (7) einen Punkt (x, y, z) der Brennfläche. Auf der Fläche sind also sowohl x, y, z als auch a, b veränderlich. Nach (2) bestehen dabei für die Differentiale dieser Größen die Gleichungen:

$$dy = \varphi_x dx + \varphi_a da + \varphi_b db,\quad dz = \psi_x dx + \psi_a da + \psi_b db.$$

Hieraus geht wegen (7) eine von da und db freie Gleichung hervor, indem man die erste mit ψ_a und die zweite mit φ_a multipliziert und dann beide von einander abzieht:

$$\psi_a dy - \varphi_a dz = (\varphi_x\psi_a - \psi_x\varphi_a)\, dx.$$

Folglich ist:

$$(9)\qquad \psi_a(\mathfrak{y} - y) - \varphi_a(\mathfrak{z} - z) = (\varphi_x\psi_a - \psi_x\varphi_a)(\mathfrak{x} - x)$$

in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichung der Tangentenebene der Brennfläche.

Andererseits ist längs der Kurve (2), d. h. wenn a und b konstant sind:

$$dy = \varphi_x dx,\quad dz = \psi_x dx.$$

Mithin stellen die Gleichungen:

$$(10)\qquad \mathfrak{y} - y = \varphi_x(\mathfrak{x} - x), \quad \mathfrak{z} - z = \psi_x(\mathfrak{x} - x)$$

in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Tangente der Integralkurve (2) dar. Ist insbesondere (x, y, z) derjenige Punkt, den die Kurve mit der Brennfläche gemein hat, so zeigen die Gleichungen (9) und (10), daß die Kurventangente der Tangentenebene angehört, d. h.: *Jede Integralkurve berührt die Brennfläche.*

Wir sagen, *daß ein Linienelement einer Fläche angehört,* wenn sein Punkt auf der Fläche liegt und seine Richtung in die zugehörige Tangentenebene fällt. Danach gibt es in jedem Punkte der Brennfläche mindestens ein der Fläche angehöriges Linienelement, das zugleich auf einer regulären Integralkurve (2) liegt. Dies soll durch Fig. 40 angedeutet werden, worin die Integralkurven (2) mit k_1, k_2, k_3, ... bezeichnet sind.

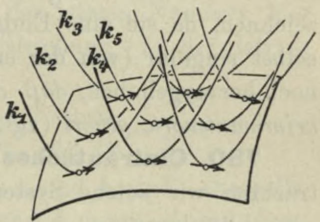

Fig. 40.

Nun können wir auf einem anderen Wege, als es oben geschehen, aufs neue erkennen, daß es in der Tat einfach unendliche Scharen von Integralkurven gibt, die Einhüllende haben: Projiziert man nämlich die besprochenen Linienelemente der Brennfläche auf die xy-Ebene, so wird jedem Punkte (x, y) der Ebene ein Linienelement (x, y, y') zugeordnet, d. h. es liegt eine *gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:*

$$f(x, y, y') = 0$$

vor. Ist c_1', c_2', c_3', ... die einfach unendliche Schar ihrer Integralkurven und geht man von der Projektion zur Fläche zurück, so ergibt sich aus c_1', c_2', c_3', ... eine einfach unendliche Schar von Flächenkurven c_1, c_2, c_3, ..., die nur solche Linienelemente enthalten, die auch den regulären Integralkurven k_1, k_2, k_3, ...

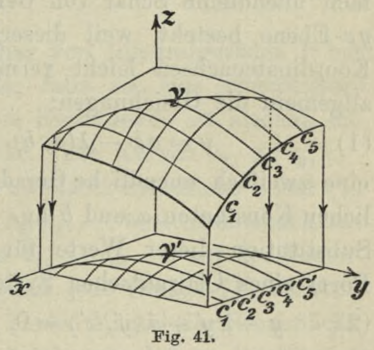

Fig. 41.

zukommen. Siehe Fig. 41. Jede Kurve $c_1, c_2, c_3, \ldots$ berührt demnach in jedem ihrer Punkte eine der Integralkurven k und ist folglich eine *einhüllende singuläre Integralkurve.*

Im allgemeinen also wird die Brennfläche von lauter singulären Integralkurven $c_1, c_2, c_3, \ldots$ in der Art überdeckt, daß durch jede Stelle der Fläche wenigstens eine geht.

Es kann sein, daß auch die Kurven $c_1', c_2', c_3', \ldots$ in der xy-Ebene eine Einhüllende γ' haben. Ihr wird auf der Brennfläche eine Kurve γ entsprechen, die alle singulären Integralkurven $c_1, c_2, c_3, \ldots$ einhüllt und daher ebenfalls eine singuläre Integralkurve des vorgelegten Systems (1) sein muß. Man kann sie als eine singuläre Integralkurve *zweiter Ordnung* bezeichnen, da sie eine Einhüllende von Integralkurven ist, die selbst singulär (von der ersten Ordnung) sind. Schließlich sei noch hervorgehoben, *daß die Brennfläche notwendig zum Diskriminantenorte gehört* (vgl. Nr. 777).

780. Clairautsches System. Als Beispiel hierzu betrachten wir solche Systeme erster Ordnung von zwei Differentialgleichungen:

$$\Phi(x, y, z, y', z') = 0, \quad \Psi(x, y, z, y', z') = 0,$$

die lauter *Geraden* als reguläre Integralkurven haben und deshalb mit Rücksicht auf Nr. 720 als *Clairautsche Systeme* bezeichnet werden können.

Wird von dem besonderen Falle abgesehen, wo die zweifach unendliche Schar von Geraden aus lauter Parallelen zur yz-Ebene besteht, weil dieser Fall durch andere Wahl der Koordinatenachsen leicht vermieden werden kann, so geben allgemein die Gleichungen:

$$(1) \qquad y = ax - \lambda(a, b), \quad z = bx - \mu(a, b)$$

eine zweifach unendliche Geradenschar mit den beiden willkürlichen Konstanten a und b an. Hieraus folgt $y' = a$ und $z' = b$. Substitution dieser Werte für a und b gibt die allgemeine Form eines Clairautschen Systems:

$$(2) \qquad y - xy' + \lambda(y', z') = 0, \quad z - xz' + \mu(y', z') = 0.$$

Umgekehrt erhellt sofort, daß die allgemeine Lösung des Systems (2) die Form (1) hat, also einfach dadurch hervorgeht, daß y' und z' durch willkürliche Konstanten a und b ersetzt werden (entsprechend wie in Nr. 720). Satz 17, Nr. 777, gibt für die singulären Lösungensysteme die Bedingungen, die durch Nullsetzen der Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} 0 & -x + \dfrac{\partial \lambda}{\partial y'} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial z'} \\ 0 & \dfrac{\partial \mu}{\partial y'} & -x + \dfrac{\partial \mu}{\partial z'} \end{vmatrix}$$

hervorgehen, also nur die eine Bedingung:

$$(3) \qquad x^2 - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y'} + \frac{\partial \mu}{\partial z'}\right) x + \frac{\partial \lambda}{\partial y'} \frac{\partial \mu}{\partial z'} - \frac{\partial \mu}{\partial y'} \frac{\partial \lambda}{\partial z'} = 0,$$

die mit der Bedingung $\mathfrak{D} = 0$ von Nr. 777 für die singulären Linienelemente identisch ist.

Weil die Funktionen φ und ψ der letzten Nummer hier die Funktionen (1) sind, hat die Gleichung (7) der letzten Nummer die Form:

$$(4) \qquad x^2 - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial b}\right) x + \frac{\partial \lambda}{\partial a} \frac{\partial \mu}{\partial b} - \frac{\partial \mu}{\partial a} \frac{\partial \lambda}{\partial b} = 0,$$

worin λ und μ jetzt Funktionen von a und b sind. Diese Bedingung geht in (3) über, wenn a und b durch y' und z' ersetzt werden. Daher macht die Brennfläche den ganzen Diskriminantenort aus. Zu jedem Wertepaare a, b liefert (4) zwei Werte von x, d. h. auf jeder Integralgeraden (1) liegen *zwei* Punkte, in denen sie die Brennfläche berührt. *Demnach besteht die Brennfläche aus zwei Mänteln.* Auf jedem Mantel liegt eine einfach unendliche Schar von singulären Integralkurven $c_1, c_2, c_3, \ldots$

Eine einfach unendliche Schar von Integralgeraden k hat aber nur dann eine Einhüllende, falls sie eine *abwickelbare Fläche* bilden (vgl. Nr. 282). Die Einhüllende ist alsdann die *Gratlinie* der abwickelbaren Fläche. Die Kurven $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sind also solche Gratlinien. Die zweifach unendliche Schar (1) aller regulären Integralkurven $k_1, k_2, k_3, \ldots$ besteht demnach aus den Tangenten einer Kurvenschar $c_1, c_2, c_3, \ldots$ auf der Brennfläche. Da die Brennfläche zweimal jede Gerade (1) berührt, liegt, wie gesagt, auf jedem der beiden Mäntel der Brennfläche eine solche Schar von Kurven c, und zwar haben die Kurven c die Eigenschaft, daß jede Tangente einer Kurve der einen Schar zugleich Tangente einer Kurve der zweiten Schar ist.

Die Fig. 42, in der nur drei Kurven jeder der beiden Scharen von Kurven c angegeben sind, deutet die Lagerung dieser Doppeltangenten, d. h. regulären Integralkurven des Clairautschen Systems an.

Wenn insbesondere die Geradenschar (1) aus allen *Normalen einer Fläche F* besteht, muß es hiernach auf der Fläche F zwei einfach unendliche Kurvenscharen geben, die so beschaffen sind, daß alle Flächennormalen der Punkte einer solchen Kurve eine abwickelbare Fläche bilden. Andererseits wissen wir nach Nr. 319, daß es auf jeder Fläche in der Tat solche Kurvenscharen gibt, nämlich die Scharen der *Krümmungskurven*. Nach Satz 15, Nr. 321, folgt ferner, daß die Kurven $c_1, c_2, c_3, \ldots$ der Brennfläche alle Krümmungsmittelpunkte aller Flächenpunkte enthalten. Die Brennfläche ist hier demnach der *Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Flächenpunkte von F*, die sogenannte *Zentrafläche*. Da zu jedem Flächenpunkte zwei Krümmungsmittelpunkte existieren, erhellt wiederum, daß die Brennfläche aus zwei Mänteln besteht.

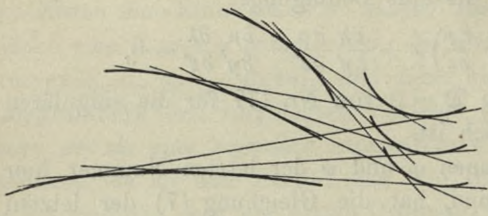

Fig. 42.

Fünftes Kapitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung.

---

§ 1. Differentialgleichungen in aufgelöster Form.

781. Existenz von Lösungen. Das in Nr. 702 angegebene Verfahren zum Nachweise von Lösungen eines Systems höherer Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist so einfach, daß es genügen wird, es hier nur für den einfachsten Fall genauer darzulegen, nämlich für den einer einzigen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

mit der unabhängigen Veränderlichen x und der abhängigen Veränderlichen y. Unter dem Bereiche der Differentialgleichung, der nie verlassen werden soll, wird ein Variabilitätsbereich verstanden, in dem f eine stetige Funktion der drei Veränderlichen x, y, y' ist und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich y und y' hat. Ferner sei eine bestimmte Stelle im Bereiche ausgewählt:

$$x = a, \quad y = b, \quad y' = b_1. \tag{2}$$

Die Gleichung (1) wird nach Nr. 663 durch Einführung der neuen unbekannten Funktion $z = y'$ in ein System erster Ordnung in der Normalform verwandelt:

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = f(x, y, z), \tag{3}$$

auf dessen Lösungensysteme die Betrachtungen in Nr. 761—763 anwendbar sind. Wenn also (x_0, y_0, z_0) eine Stelle in der Umgebung der Stelle:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = b_1 \tag{4}$$

bedeutet, gibt es ein und nur ein System von Lösungen:

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, z_0), \quad z = \psi(x, x_0, y_0, z_0), \tag{5}$$

das für $x = x_0$ die Anfangswerte y_0 und z_0 hat. Diese Funktionen sind nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung nach x in einem gewissen Intervalle um x_0 herum stetig; überdies sind sie stetige Funktionen von y_0 und z_0. Die erste Gleichung (3) lehrt, daß die erste Ableitung von φ nach x gleich z oder ψ ist; die zweite Gleichung (3) zeigt, daß die erste Ableitung von ψ nach x, folglich die zweite Ableitung von φ nach x gleich $f(x, \varphi, \psi)$ ist, worin ψ durch die erste Ableitung von φ ersetzt werden kann. Wenn y_0' statt z_0 geschrieben wird, folgt hieraus: Bedeutet (x_0, y_0, y_0') eine Stelle in der Umgebung der Stelle (2), so hat die Differentialgleichung (1) eine und nur eine Lösung:

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0'), \tag{6}$$

wenn an der Stelle x_0 für sie und ihre Ableitung y' die Werte y_0 und y_0' vorgeschrieben sind. So lange (x_0, y_0, y_0') eine beliebige Stelle in der Umgebung der Stelle (2) ist, bedeutet (6) die *allgemeine Lösung* von (1) in dieser Umgebung. Wie in Nr. 761 erkennt man, daß ihre Allgemeinheit nicht beschränkt wird, wenn man insbesondere $x_0 = a$ wählt, so daß alsdann in (6) nur noch *zwei* willkürliche Konstanten y_0 und y_0' vorkommen, die wir wieder als die *Integrationskonstanten* mit C_1 und C_2 bezeichnen. So gelangt man zu der Darstellung:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \tag{7}$$

der allgemeinen Lösung. Die beiden Gleichungen zusammen:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \quad y' = \varphi'(x, C_1, C_2) \tag{8}$$

treten hier an die Stelle des in Nr. 761 besprochenen Lösungensystems. Also sind φ und φ' in einem Intervalle um $x = a$ herum und in einem gewissen Variabilitätsbereiche von C_1 und C_2 um b und b_1 herum solche stetige Funktionen von allen drei Größen x, C_1, C_2, denen auch stetige Ableitungen erster Ordnung zukommen.

Auch die Übertragung der Betrachtungen in Nr. 762 ist einfach: Danach haben die Gleichungen (8) gewisse Auflösungen nach C_1 und C_2:

$$C_1 = \omega_1(x, y, y'), \quad C_2 = \omega_2(x, y, y'), \tag{9}$$

die sich in der Umgebung von (2) stetig verhalten und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Insbesondere sind. diese beiden Funktionen (9) hinsichtlich y und y' voneinander unabhängig. Wie in Nr. 762 heißen sie *unabhängige Integrale*

Ferner kann man mittels geeigneter Substitutionen:

$$C_1 = \psi_1(c_1, c_2), \quad C_2 = \psi_2(c_1, c_2)$$

wie in Nr. 763 *neue Integrationskonstanten* c_1 und c_2 in (8) einführen, wodurch etwa:

$$y = \Phi(x, c_1, c_2), \quad y' = \Phi'(x, c_1, c_2) \tag{10}$$

hervorgeht, also eine *neue Form der allgemeinen Lösung:*

$$y = \Phi(x, c_1, c_2)$$

gefunden wird. Auflösung der beiden Gleichungen (10) nach c_1 und c_2 gibt dann ein neues System von unabhängigen Integralen:

$$c_1 = \Omega_1(x, y, y'), \quad c_2 = \Omega_2(x, y, y');$$

dabei sind ω_1 und ω_2 Funktionen von Ω_1 und Ω_2 allein und umgekehrt.

782. Allgemeine Lösung, Integrationskonstanten und Integrale. In entsprechender Weise läßt sich die Untersuchung einer *gewöhnlichen Differentialgleichung* r^{ter} *Ordnung:*

$$y^{(r)} = f(x, y, y', \dots y^{(r-1)}) \tag{1}$$

an die Betrachtungen in Nr. 761—763 anschließen. Man hat dabei nur zu beachten, daß hier $y, y', \dots y^{(r-1)}$ die Rolle der damals mit $y_1, y_2, \dots y_n$ bezeichneten unbekannten Funktionen spielen und daß an die Stelle der damals mit $f_1, f_2, \dots f_n$ bezeichneten Funktionen hier die r Funktionen

$$y', y'', \dots y^{(r-1)}, \quad f(x, y, y', \dots y^{(r-1)})$$

treten.

Unter dem Bereiche der Differentialgleichung (1) wird dementsprechend ein Variabilitätsbereich verstanden, innerhalb dessen f eine stetige Funktion der $r+1$ Veränderlichen $x, y, y', \dots y^{(r-1)}$ ist und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich der r Veränderlichen $y, y', \dots y^{(r-1)}$ hat.

Während in Nr. 761—763 Lösungen*systeme* auftraten, braucht bei der Differentialgleichung (1) nur von *Lösungen* geredet zu werden. Denn mit $y = \varphi(x)$ sind auch die anderen Funktionen:

$$y' = \varphi'(x), \quad y'' = \varphi''(x), \ldots y^{(r-1)} = \varphi^{(r-1)}(x)$$

bekannt, die hier zusammen mit $y = \varphi(x)$ einem jener Lösungensysteme entsprechen. In der Umgebung einer Stelle:

(2) $$x = a, \quad y = b, \quad y' = b_1, \ldots y^{(r-1)} = b_{r-1}$$

des Bereiches gibt es eine und nur eine Lösung:

(3) $$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_r)$$

mit r willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$ derart, daß $y, y', \ldots y^{(r-1)}$ für $x = a$ die Werte $C_1, C_2, \ldots C_r$ annehmen. Dabei sind die r Funktionen $y, y', \ldots y^{(r-1)}$ stetig in bezug auf alle $n+1$ Größen $x, C_1, C_2, \ldots C_r$ und mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung nach ihnen versehen. Die Funktion (3) heißt eine *allgemeine Lösung.*

Integral von (1) heißt jede Funktion von $x, y, y', \ldots y^{(r-1)}$, die für jede Lösung der Differentialgleichung (1) in der Umgebung einer Stelle (2) konstant ist. *Unabhängig* nennt man r solche Integrale, falls sie hinsichtlich $y, y', \ldots y^{(r-1)}$ voneinander unabhängige Funktionen sind. Wie in dem Falle $r = 2$ in voriger Nummer erörtert wurde, bekommt man durch Auflösung der Gleichung (3) und der Gleichungen:

(4) $$y' = \varphi'(x, C_1, C_2, \ldots C_r), \ldots \quad y^{(r-1)} = \varphi^{(r-1)}(x, C_1, C_1, \ldots C_r)$$

nach $C_1, C_2, \ldots C_r$ ein System unabhängiger Integrale; ferner wurde dort auch angedeutet, wie man durch Einführung von r geeigneten neuen willkürlichen Integrationskonstanten $c_1, c_2, \ldots c_r$ zu *neuen Formen:*

$$y = \Phi(x, c_1, c_2, \ldots c_r)$$

der allgemeinen Lösung gelangt. Werden für die Konstanten bestimmte Werte gewählt, so liefert die allgemeine Lösung eine *partikulare.*

Wir dürfen nun ohne weiteres die Übertragungen der Sätze der Nummern 762 und 763 wie folgt formulieren:

Satz 1: Eine differenzierbare Funktion Ω von $x, y, y', \ldots y^{(r-1)}$ stellt dann und nur dann ein Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$y^{(r)} = f(x, y, y', \ldots y^{(r-1)})$$

dar, wenn sie eine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}+y'\frac{\partial \Omega}{\partial y}+y''\frac{\partial \Omega}{\partial y'}+\cdots+y^{(r-1)}\frac{\partial \Omega}{\partial y^{(r-2)}}+f\frac{\partial \Omega}{\partial y^{(r-1)}}=0$$

für die Funktion Ω *der* $r+1$ *Veränderlichen* $x, y, y', y'', \ldots y^{(r-1)}$ *ist.*

Satz 2: Die gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} *Ordnung:*

$$y^{(r)}=f(x, y, y', \ldots y^{(r-1)})$$

hat in der Umgebung einer Stelle:

$$x=a,\quad y=b,\quad y'=b_1,\quad y''=b_2,\quad \ldots\quad y^{(r-1)}=b_{r-1}$$

ihres Bereiches stets r unabhängige Integrale, die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in dieser Umgebung stetige Funktionen von $x, y, y', \ldots y^{(r-1)}$ *sind. Jede Funktion dieser Integrale ist ebenfalls ein Integral, und andere Integrale gibt es nicht.*

Satz 3: Es seien $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_r$ *solche r unabhängige Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichung* r^{ter} *Ordnung:*

$$y^{(r)}=f(x, y, y', \ldots y^{(r-1)}),$$

die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in der Umgebung einer Stelle:

$$x=a,\quad y=b,\quad y'=b_1,\quad y''=b_2,\quad \ldots\quad y^{(r-1)}=b_{r-1}$$

des Bereiches der Differentialgleichung stetig sind. Falls alsdann die r Integrationskonstanten $c_1, c_2, \ldots c_r$ *in einer Umgebung desjenigen Wertsystems willkürlich gewählt werden, das den r Integralen* $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_r$ *an dieser Stelle zukommt, definieren die r Gleichungen:*

$$\Omega_i(x, y, y', \ldots y^{(r-1)})=c_i \quad (i=1, 2, \ldots r)$$

die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung und ihre $r-1$ *ersten Ableitungen in der Umgebung jener Stelle.*

783. Geometrische Deutung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die nächstliegende geometrische Deutung der Differentialgleichung:

$$(1)\qquad y''=f(x, y, y')$$

gewinnt man, wenn man x und y als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene auffaßt. Der Bereich der Differentialgleichung, d. h. jener Variabilitätsbereich, innerhalb dessen f eine stetige Funktion von x, y, y' mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich y und y' ist, stellt dann einen *Bereich von Linienelementen* (x, y, y') vor. Wenn z. B. die Differentialgleichung vorliegt:

$$y'' = \frac{xy}{y'^2 - 1},$$

so sind nur die Werte $y' = \pm 1$ auszuschließen. Dies bedeutet: Der Bereich dieser Differentialgleichung besteht *entweder* aus allen Linienelementen (x, y, y'), bei denen $|y'| < 1$, d. h. der Winkel τ mit der x-Achse absolut genommen kleiner als $\frac{1}{4}\pi$ ist, *oder* aus allen Linienelementen (x, y, y'), bei denen $|y'| > 1$, d. h. der Winkel τ absolut genommen größer als $\frac{1}{4}\pi$ ist.

Eine Lösung $y = \varphi(x)$ der Differentialgleichung (1) wird durch eine Kurve, eine sogenannte *Integralkurve*, dargestellt. Die Gleichung (1) schreibt den Linienelementen der Integralkurve keinerlei Bedingung vor außer der selbstverständlichen, daß die Linienelemente dem Bereiche angehören sollen. Dagegen gibt sie zu jedem Linienelemente (x, y, y') einen bestimmten Wert von y''. Dies bedeutet nach Nr. 195 oder 197: Diejenige Integralkurve, die ein irgendwie bestimmt ausgewähltes Linienelement l oder (x, y, y') enthält, hat in dem Punkte M oder (x, y) des Elements eine gegebene *Krümmung*, denn der zugehörige Krümmungsmittelpunkt M_1 oder (x_1, y_1) hat nach (6) in Nr. 197 die Koordinaten:

$$(2) \qquad x_1 = x - \frac{1 + y'^2}{f(x, y, y')} y', \quad y_1 = y + \frac{1 + y'^2}{f(x, y, y')}.$$

Wird als *Normale* des Linienelements diejenige Gerade bezeichnet, die durch den Punkt des Elements geht und die zum Elemente senkrechte Richtung hat, so ist also infolge von (1) jedem Linienelemente l des Bereiches ein auf seiner Normale gelegener Krümmungsmittelpunkt M_1 zugeordnet, siehe Fig. 43. Deshalb wird man ein Wertsystem x, y, y', y'' ein *Krümmungselement* nennen können und sagen: *Die Differentialgleichung* (1) *ordnet jedem Linienelement* (x, y, y') *ihres Bereiches ein Krümmungselement* (x, y, y', y'') *zu, und eine Kurve ist dann und nur dann eine Integralkurve, wenn sie nur lauter solche Krümmungselemente enthält.* Damit ist dann

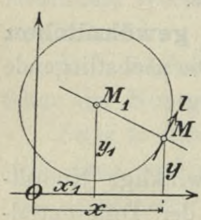

Fig. 43.

gemeint, daß zum Linienelement (x, y, y') der Kurve der Krümmungsmittelpunkt mit den Koordinaten:

$$x_1 = x - \frac{1+y'^2}{y''}y', \quad y_1 = y + \frac{1+y'^2}{y''} \tag{3}$$

gehören soll. Wir wissen ferner, daß es eine und nur eine Integralkurve gibt, die ein bestimmt gewähltes Linienelement des Bereiches enthält. Von einem Punkt M gehen also unzählig viele Integralkurven aus entsprechend denjenigen Linienelementen l von M, die zum Bereiche gehören. *Die Gesamtheit aller Integralkurven ist eine zweifach unendliche Schar*, vgl. Nr. 784, 782, *dagegen die Gesamtheit der durch einen bestimmten Punkt gehenden Integralkurven eine einfach unendliche Schar.*

1. Beispiel: Der Bereich der Differentialgleichung $y'' = 0$ ist unbeschränkt. Ihre Integration gibt sofort $y = C_1 x + C_2$; die Integralkurven sind die Geraden der Ebene. Die Gleichungen (2) geben hier $x_1 = \infty$ und $y_1 = \infty$, d. h. zu jedem Linienelement gehört ein unendlich ferner Krümmungsmittelpunkt, vgl. Satz 12, Nr. 196.

2. Beispiel: Bei der Differentialgleichung:

$$y'' = 2\frac{(1+y'^2)(xy'-y)}{x^2+y^2} \tag{4}$$

sind nur diejenigen Linienelemente vom Bereiche auszuschließen, für die $x = y = 0$ ist, d. h. die Linienelemente des Anfangspunktes O. Die Gleichungen (2) geben hier:

$$x_1 = \frac{(x^2-y^2)y' - 2xy}{2(xy'-y)}, \quad y_1 = \frac{x^2 - y^2 + 2xyy'}{2(xy'-y)}.$$

Demnach kommt:

$$2xx_1 + 2yy_1 = x^2 + y^2,$$

was besagt, daß der zu einem Linienelement (x, y, y') gehörige Krümmungsmittelpunkt M_1 auf der Mittelsenkrechten des Radiusvektors OM des Punktes M des Elements liegt, so daß der zugehörige Krümmungskreis derjenige Kreis ist, der durch O geht und das Element enthält,

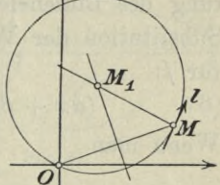

Fig. 44.

siehe Fig. 44. Weil nun augenscheinlich die Konstruktion für alle Elemente dieses Kreises eben denselben Krümmungskreis liefert, ist der Kreis selbst eine Integralkurve. Daß in der Tat *alle Kreise durch O die Integralkurven von* (4) *sind*, wird analytisch wie folgt bestätigt: Man geht von der Gleichung

$$x^2 - 2C_1x + y^2 - 2C_2y = 0$$

aller Kreise durch O aus, differenziert sie zweimal vollständig nach x:

$$x - C_1 + (y - C_2)y' = 0, \quad 1 + y'^2 + (y - C_2)y'' = 0$$

und eliminiert C_1 und C_2 aus allen drei Gleichungen, wodurch die Gleichung (4) hervorgeht. Weil durch jedes Linienelement der Ebene, abgesehen von den Elementen von O, nur eine Integralkurve geht, gibt es außer den Kreisen durch O keine Integralkurven.

3. Beispiel: Eine bemerkenswerte Klasse von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung geht hervor, wenn man sich fragt, wie die Gleichung (1) beschaffen sein muß, damit *alle zu einem beliebig gewählten Punkte M oder (x, y) gehörigen Krümmungskreise ein Büschel bilden,* d. h. außer M noch einen zweiten Punkt $\bar{M}$ gemein haben. Dies tritt ein, wenn die zu M gehörigen und durch (2) bestimmten Krümmungsmittelpunkte M_1 auf einer Geraden liegen, siehe Fig. 45. Es wird daher gefordert, daß x_1 und y_1 einer linearen Gleichung genügen:

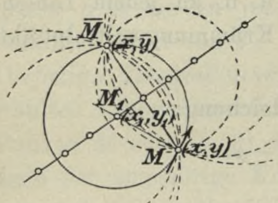

Fig. 45.

(5) $$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0,$$

deren Koeffizienten nur von x und y (nicht auch von der Richtung des Linienelements, d. h. nicht auch von y') abhängen. Substitution der Werte (2) von x_1 und y_1 gibt eine Gleichung für f:

(6) $$(\alpha x + \beta y + \gamma)f - (1 + y'^2)(\alpha y' - \beta) = 0.$$

Wenn man

$$\frac{\alpha}{\alpha x + \beta y + \gamma} = \lambda, \quad \frac{\beta}{\alpha x + \beta y + \gamma} = \mu$$

setzt, nimmt die Gleichung der Geraden (5) die Form:

(7) $$\lambda(x_1 - x) + \mu(y_1 - y) + 1 = 0$$

an, während (6) ergibt:

$$f = (1 + y'^2)(\lambda y' - \mu).$$

Folglich kommt den Differentialgleichungen von der Form:

$$(8) \qquad y'' = (1 + y'^2)(\lambda y' - \mu)$$

die verlangte Eigenschaft zu. Dabei können λ und μ irgendwie als *Funktionen von x und y allein* gewählt werden. Die zweifach unendliche Kurvenschar, die durch eine solche Differentialgleichung (8) definiert wird, hat also die besondere Eigentümlichkeit, daß allen denjenigen einfach unendlich vielen Kurven der Schar, die durch einen Punkt M gehen, in M solche Krümmungskreise zukommen, die außer M noch einen Punkt $\overline{M}$ gemein haben. Da $M\overline{M}$ die Gerade (7), den Ort der Mittelpunkte M_1 dieser Kreise, zur Mittelsenkrechten hat, findet man leicht als Koordinaten $\bar{x}$ und $\bar{y}$ von $\overline{M}$ die Werte:

$$(9) \qquad \bar{x} = x - \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \mu^2}, \quad \bar{y} = y - \frac{2\mu}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Die im zweiten Beispiele betrachtete Differentialgleichung (4) ist ein spezieller Fall von (8), geht nämlich hervor, wenn für λ und μ die Funktionen $2x : (x^2 + y^2)$ und $2y : (x^2 + y^2)$ angenommen werden. Dann gibt (9) einfach $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, d. h. alle Krümmungskreise aller Integralkurven von (4) gehen durch den Anfangspunkt O. In der Tat sind ja die Integralkurven von (4) sämtliche Kreise durch O.

4. Beispiel: Wie lautet die Differentialgleichung der Evolventen aller Kreise mit dem Mittelpunkte O? Ist γ irgendein Kreis mit der Mitte O und M_1 ein Punkt auf ihm, so soll M_1 Krümmungsmittelpunkt eines Punktes M einer Integralkurve, nämlich einer Evolvente von γ sein, siehe Nr. 199, d. h. M soll auf der Tangente von γ in M_1 liegen, und das Linienelement l von M soll zu MM_1 senkrecht sein, siehe Fig. 46. Daher muss OM_1 zu l parallel sein. Also wird verlangt:

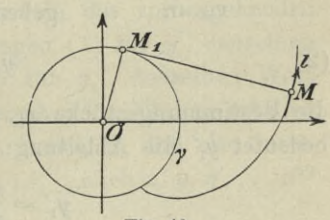

Fig. 46.

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = -\frac{1}{y'}, \quad \frac{y_1}{x_1} = y',$$

woraus folgt:

$$x_1 = \frac{x + yy'}{1 + y'^2}, \quad y_1 = \frac{x + yy'}{1 + y'^2}\, y'.$$

Durch Vergleichung mit (2) ergibt sich hieraus der Wert, den die Funktion $f(x, y, y')$ haben muß, und man findet: Die Differentialgleichung aller Evolventen aller Kreise mit der Mitte O lautet so:

$$y'' = \frac{(1 + y'^2)^2}{xy' - y}.$$

784. Geometrische Deutung einer gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung. Hier schicken wir einige *Bemerkungen über Evoluten und Evolventen* voraus. Wenn $y = \varphi(x)$ die Gleichung einer Kurve k ist und dieser Kurve ein gewisses Linienelement (x, y, y') oder l angehört, wird der Mittelpunkt M_1 oder (x_1, y_1) des zugehörigen Krümmungskreises wie in voriger Nummer durch die Formeln:

$$(1) \qquad x_1 = x - \frac{1 + y'^2}{y''}\, y', \quad y_1 = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

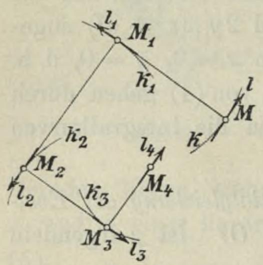

Fig. 47.

bestimmt. Er ist der zum Punkte M von l gehörige Punkt der *Evolute* k_1 von k, siehe Nr. 199, und liegt auf der Normale des Elements l. Dasjenige Linienelement l_1 von k_1, dessen Punkt M_1 ist, also das zu l gehörige Element l_1 der Evolute, liegt ebenfalls auf dieser Normale. Siehe Fig. 47. Demnach geben die Formeln (1) zusammen mit:

$$(2) \qquad y_1' = -\frac{1}{y'}$$

die Bestimmungsstücke x_1, y_1, y_1' dieses Elements l_1. Hierbei bedeutet y_1' die Ableitung:

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_1 : dx}{dx_1 : dx}.$$

Der Wert (2) kann übrigens auch hieraus mittels (1) berechnet werden. Das Linienelement l_1 der Evolute k_1 ist somit bekannt, wenn die Werte von x, y, y', y'' gegeben sind.

Die Evolute k_2 von k_1 heiße die *zweite* Evolute von k. Dem Element l_1 von k_1 entspricht ein Element l_2 von k_2; es liegt auf der Normale des Elements l_1. Sind x_2, y_2, y_2' die Bestimmungsstücke von l_2, so ist zunächst:

$$y_2' = -\frac{1}{y_1'} = y',$$

weil l_2 auf der Normale von l_1 und somit auf einer Parallelen zu l liegt. Außerdem ergibt sich entsprechend (1):

$$(3) \qquad x_2 = x_1 - \frac{1 + y_1'^2}{y_1''} y_1', \quad y_2 = y_1 + \frac{1 + y_1'^2}{y_1''}.$$

Dabei bedeuten y_1' und y_1'' die Ableitungen $dy_1 : dx_1$ und $d^2y_1 : dx_1^2$. Die Werte von x_2 und y_2 lassen sich aus (3) mit Hilfe von (1) und (2) berechnen, wenn y_1'' schon gefunden ist. Aber hierfür geht nach (2) und (1) der Wert hervor:

$$y_1'' = \frac{dy_1'}{dx_1} = \frac{dy_1' : dx}{dx_1 : dx} = \frac{d\left(-\frac{1}{y'}\right) : dx}{dx_1 : dx} = \frac{y''}{y'^2} \frac{1}{dx_1 : dx}$$

oder:

$$(4) \qquad y_1'' = \frac{y''^3}{y'^3[-3y'y''^2 + (1 + y'^2)y''']}.$$

Das Linienelement l_2 der zweiten Evolute k_2 von k ist somit bekannt, wenn die Werte von x, y, y', y'', y''' gegeben sind.

Diese Schlüsse lassen sich fortsetzen, indem man zur Evolute k_3 von k_2, der sogenannten *dritten* Evolute von k, übergeht, usw. Allgemein folgt: *Das zum Element l von k gehörige Element l_{r-1} der $(r-1)^{\text{ten}}$ Evolute k_{r-1} von k ist bekannt, wenn die Werte von $x, y, y', \ldots y^{(r)}$ gegeben sind.*

Umgekehrt: Wenn r Linienelemente (x, y, y'), (x_1, y_1, y_1'), $\ldots (x_{r-1}, y_{r-1}, y'_{r-1})$ oder $l, l_1, \ldots l_{r-1}$ so angenommen werden, daß jedes folgende auf der Normale des vorhergehenden gelegen ist, so geben beide Gleichungen (1) für y'' denselben Wert, ebenso beide Gleichungen (3) für y_1'' denselben Wert usw. Aus (4) findet man alsdann auch y'''. Ebenso erkennt man, daß sich $y^{\text{IV}}, \ldots y^{(r)}$ berechnen lassen, so daß also durch die Annahme jener r Elemente $l, l_1, \ldots l_{r-1}$ auch $x, y, y', \ldots y^{(r)}$ bestimmt werden.

Nach diesen notwendigen Vorbemerkungen betrachten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$(5) \qquad y^{(r)} = f(x, y, y', \ldots y^{(r-1)}).$$

Hier kann man $x, y, y', \ldots y^{(r-1)}$ im Bereiche der Gleichung willkürlich wählen. Dann gibt es eine und nur eine Lösung

$y = \varphi(x)$, die nebst ihren Ableitungen bis zur $(r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung für den angenommenen Wert von x die angenommenen Werte $y, y', \dots y^{(r-1)}$ hat. Das Bild der Funktion $y = \varphi(x)$ heißt eine *Integralkurve,* und auf Grund der vorhergehenden Betrachtungen läßt sich nun die charakteristische Eigenschaft der Integralkurven geometrisch ausdrücken. Denn wenn $x, y, y', \dots y^{(r-1)}$ im Bereiche willkürlich gewählt werden, bestimmt (5) noch $y^{(r)}$. Zu den $r+2$ Werten $x, y, y', \dots y^{(r)}$ gehören nun r Linienelemente $l, l_1, \dots l_{r-1}$ derart, daß jedes folgende auf der Normale des vorhergehenden gelegen ist. Sind $M, M_1, \dots M_{r-1}$ die Punkte der Elemente, so sei zunächst derjenige Kreis $\varkappa_0$ um M_{r-1} konstruiert, der durch M_{r-2} geht, also das Element l_{r-2} enthält, siehe Fig. 48 für den Fall $r = 4$. Nun werde diejenige Evolvente $\varkappa_1$ von $\varkappa_0$ konstruiert, die das Element l_{r-3} enthält, dann diejenige Evolvente $\varkappa_2$ von $\varkappa_1$, die das Element l_{r-4} enthält, usw. Schließlich gelangt man zu einer Kurve $\varkappa_{r-2}$, die das Element l enthält und eine *Evolvente* $(r-2)^{ter}$ *Ordnung des Kreises* $\varkappa_0$ heißen möge. Wenn $y = \psi(x)$ die Gleichung dieser Evolvente $\varkappa_{r-2}$ ist, sind diejenigen Werte, die $\psi(x), \psi'(x), \dots \psi^{(r)}(x)$ für den angenommenen Wert von x haben, gerade dieselben wie die für $y, y', \dots y^{(r-1)}$ angenommenen Werte und der aus (5) berechnete Wert $y^{(r)}$. Nach Nr. 214 besagt dies:

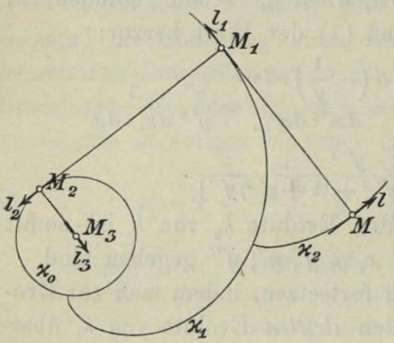

Fig. 48.

Es gibt eine und nur eine Integralkurve k, die im Punkte M von l die Kreisevolvente $(r-2)^{ter}$ Ordnung $\varkappa_{r-2}$ in mindestens r^{ter} Ordnung berührt.

Da $x, y, y', \dots y^{(r-1)}$ innerhalb des Bereiches beliebig gewählt werden können, gibt die vorhin durchgeführte Konstruktion *eine $(r+1)$-fach unendliche Schar von Kreisevolventen $(r-2)^{ter}$ Ordnung $\varkappa_{r-2}$ und auf jeder einen bestimmten Punkt M.* Umgekehrt aber gehört jeder Punkt M einer $(r-1)$-fach unendlichen Schar von solchen Kreisevolventen an, denn wenn

M oder (x, y) gewählt worden ist, können noch die $r-1$ Größen $y', y'', \ldots y^{(r-1)}$ beliebig angenommen werden.

Dadurch also, daß eine gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung (5) gegeben ist, wird in der Ebene eine $(r+1)$-fach unendliche Schar von Kreisevolventen $(r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\varkappa_{r-2}$ derart bestimmt, daß zu jedem Punkte M eine $(r-1)$-fach unendliche Schar solcher Evolventen gehört. *Eine Kurve ist nun dann und nur dann eine Integralkurve, wenn sie in jedem ihrer Punkte M eine der zugehörigen Evolventen in mindestens r^{ter} Ordnung berührt.*

Im Falle $r=2$, d. h. im Falle einer gewöhnlichen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung, treten an die Stelle der Evolventen $(r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung die Kreise $\varkappa_0$ selbst, nämlich die Krümmungskreise der Integralkurven.

785. Hilfsatz über linear abhängige Funktionen. Diese Nummer stellt eine Einschaltung dar, die sich mit der Frage beschäftigt, wie man analytisch feststellen kann, ob n Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ *linear abhängig oder unabhängig* sind. Man nennt nämlich wie in Nr. 770 die Funktionen linear abhängig, falls es eine *lineare* Gleichung:

$$(1) \qquad c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

zwischen ihnen gibt, worin $c_1, c_2, \ldots c_n$ *konstant*, aber nicht sämtlich gleich Null sind. Es leuchtet sofort ein, *daß n Funktionen linear abhängig sind, sobald dies von $n-1$ unter ihnen gilt*, denn eine Gleichung von der Form:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_{n-1} f_{n-1}(x) = 0$$

ordnet sich der Form (1) für $c_n = 0$ unter. Ferner folgen aus (1) durch $(n-1)$-malige Differentiation die $n-1$ Gleichungen:

$$c_1 f_1^{(i)}(x) + c_2 f_2^{(i)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(i)}(x) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots n-1),$$

die zusammen mit (1) das Verschwinden der Determinante:

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdot & \cdot & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdot & \cdot & f_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdot & \cdot & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

erfordern, weil $c_1, c_2, \ldots c_n$ nicht sämtlich gleich Null sind.

Nun gilt auch die Umkehrung hiervon: Wir wollen beweisen, daß $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$ linear abhängig sind, sobald $D = 0$ ist. Dies ist im Falle einer einzigen Funktion $f(x)$ richtig, denn dann ist $D = f(x)$. Nebenbei bemerkt haben wir es auch schon für $n = 3$ bewiesen, wie Satz 7 in Nr. 275 zeigt, jedoch wurden damals zum Beweise Betrachtungen über die Torsion von Raumkurven benutzt. Demgegenüber gehen wir hier rein analytisch vor. Jedenfalls darf der Schluß von $n - 1$ auf n gemacht werden, d. h. es darf vorausgesetzt werden, daß die zu beweisende Umkehrung für weniger als n Funktionen gelte.

Verschwände irgendeine derjenigen $(n - 1)$-reihigen Unterdeterminanten $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, ... $\omega_n(x)$ von D, die zu den Elementen der letzten Zeile gehören, wäre z. B. $\omega_n(x) = 0$, so würde die entsprechende Determinante für die $n - 1$ Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ verschwinden, so daß aus dem Satze (für $n - 1$) folgen würde, daß diese $n - 1$ Funktionen linear abhängig wären. Dies aber würde, wie gesagt, die lineare Abhängigkeit *aller* n Funktionen bedeuten. Folglich braucht der Satz nur noch unter der Voraussetzung bewiesen zu werden, daß alle $(n - 1)$-reihigen Unterdeterminanten $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, ... $\omega_n(x)$ der Elemente der letzten Zeile von D von Null verschieden sind. Die Summe ihrer Produkte mit den entsprechenden Elementen irgend einer Zeile ist gleich Null oder D, je nachdem die Elemente einer der $n - 1$ ersten Zeilen oder der letzten angehören. Da aber auch $D = 0$ vorausgesetzt wird, gelten *alle* n Gleichungen:

$$(3) \quad \omega_1(x) f_1^{(i)}(x) + \omega_2(x) f_2^{(i)}(x) + \cdots + \omega_n(x) f_n^{(i)}(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n - 1).$$

Dabei bedeuten die nullten Ableitungen die Funktionen selbst. Wird irgend eine Gleichung differenziert und von ihr die nächste Gleichung abgezogen, so gehen die $n - 1$ Gleichungen hervor:

$$\omega_1'(x) f_1^{(i)}(x) + \omega_2'(x) f_2^{(i)}(x) + \cdots + \omega_n'(x) f_n^{(i)}(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n - 2).$$

Infolge hiervon verhalten sich $\omega_1'(x)$, $\omega_2'(x)$, ... $\omega_n'(x)$ zueinander wie diejenigen $(n - 1)$-reihigen Determinanten, die durch Streichen je einer Reihe aus der *Matrix* (vgl. Nr. 777):

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdot & \cdot & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdot & \cdot & f_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^{(n-2)}(x) & f_2^{(n-2)}(x) & \cdot & \cdot & f_n^{(n-2)}(x) \end{vmatrix}$$

hervorgehen und nichts anderes als $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots \omega_n(x)$ sind. Mithin ist:

$$\frac{\omega_1'(x)}{\omega_1(x)} = \frac{\omega_2'(x)}{\omega_2(x)} = \cdots = \frac{\omega_n'(x)}{\omega_n(x)}.$$

Werden alle diese Brüche, deren Nenner sämtlich von Null verschieden sind, mit $\varrho(x)$ bezeichnet, so kommt:

$$\frac{d \ln \omega_i(x)}{dx} = \varrho(x), \quad \text{d. h.} \quad \omega_i(x) = c_i e^{\int \varrho(x)\,dx}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n),$$

wobei $c_i =$ konst. ist und die Quadratur von einer bestimmten unteren Grenze an vollzogen werden kann. Einsetzen der Werte von $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots \omega_n(x)$ in die erste Gleichung (3) liefert:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0,$$

wie zu beweisen war. Mithin haben wir den

Satz 4: Solche n Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ von x, die in einem gemeinsamen Intervalle bestimmte endliche Ableitungen bis zur $(n-1)^{ten}$ Ordnung einschließlich haben, sind dann und nur dann linear abhängig, wenn die Determinante:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdot & \cdot & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdot & \cdot & f_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdot & \cdot & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Werden unter $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ Funktionen verstanden, deren erste Ableitungen die bisher so bezeichneten Funktionen sind, so geht die folgende Form des Satzes hervor, die auch öfters gebraucht wird:

Satz 5: Zwischen solchen n Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ von x, die in einem gemeinsamen Intervalle bestimmte endliche Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung einschließlich haben, besteht dann und nur dann eine lineare Gleichung:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = \text{konst.}$$

mit nicht sämtlich verschwindenden konstanten Koeffizienten c_1, $c_2, \ldots c_n$, wenn die Determinante der Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung gleich Null ist:

$$\begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & \cdot & \cdot & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdot & \cdot & f_n''(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \cdot & \cdot & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Für $n = 3$ ist dies der Satz 7 von Nr. 275.

786. Wesentliche willkürliche Konstanten. Nun liege eine Funktion

$$(1) \qquad y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_r)$$

von x und r willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$ vor. In Nr. 782 erkannten wir, daß die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung eine solche Funktion ist. Wenn nun nicht eine Differentialgleichung, sondern eine Funktion (1) vorliegt, erhebt sich die Frage, ob bzw. unter welchen Umständen die Funktion in der Tat die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung ist. Dabei werde vorausgesetzt, daß es einen Variabilitätsbereich gebe, innerhalb dessen diese Funktion und ihre r ersten Ableitungen nach x stetig in bezug auf alle $r + 1$ Größen $x, C_1, C_2, \ldots C_r$ sind und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach $C_1, C_2, \ldots C_r$ haben.

Wenn die r folgenden Gleichungen, in denen der Akzent die Differentiation nach x andeutet:

$$(2) \qquad \begin{cases} y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_r), \\ y' = \varphi'(x, C_1, C_2, \ldots C_r), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y^{(r-1)} = \varphi^{(r-1)}(x, C_1, C_2, \ldots C_r) \end{cases}$$

Auflösungen nach $C_1, C_2, \ldots C_r$ haben, gibt die Substitution der Auflösungen in:

$$y^{(r)} = \varphi^{(r)}(x, C_1, C_2, \ldots C_r)$$

sofort die gewünschte gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$y^{(r)} = f(x, y, y', \dots y^{(r-1)}).$$

Nach Satz 17, Nr. 697, steht fest, daß es solche Auflösungen der r Gleichungen (2) nach $C_1, C_2, \dots C_r$ gibt, sobald die Funktionaldeterminante

$$D = \begin{pmatrix} \varphi & \varphi' & \dots & \varphi^{(r-1)} \\ C_1 & C_2 & \dots & C_r \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist. Alsdann gibt es auch keine gewöhnliche Differentialgleichung von niedrigerer als r^{ter} Ordnung, der die Funktion (1) genügt, da sich $C_1, C_2, \dots C_r$ aus (2) nicht eliminieren lassen.

Aber es steht noch völlig dahin, was sich ergibt, *wenn jene Funktionaldeterminante für die erlaubten Werte von x und $C_1, C_2, \dots C_r$ verschwindet.* Dies soll jetzt untersucht werden.

Wird zur Abkürzung:

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} = f_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} = f_2, \quad \dots \frac{\partial \varphi}{\partial C_r} = f_r$$

gesetzt, so lautet die Funktionaldeterminante so:

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdot & \cdot & f_r \\ f_1' & f_2' & \cdot & \cdot & f_r' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^{(r-1)} & f_2^{(r-1)} & \cdot & \cdot & f_r^{(r-1)} \end{vmatrix},$$

dabei sind $f_1, f_2, \dots f_r$ Funktionen von x, *die außerdem $C_1, C_2, \dots C_r$ enthalten.*

Es soll also $D = 0$ angenommen werden. Dabei sei zunächst vorausgesetzt, daß nicht alle diejenigen $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von D verschwinden, die zu den Elementen der letzten Zeile gehören. Weil die Reihenfolge in den Bezeichnungen der r willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \dots C_r$ ohne Belang ist, darf alsdann insbesondere angenommen werden, daß die $(r-1)$-reihige Unterdeterminante:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} f_2 & f_3 & \cdot & \cdot & f_r \\ f_2' & f_3' & \cdot & \cdot & f_r' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_2^{(r-2)} & f_3^{(r-2)} & \cdot & \cdot & f_r^{(r-2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

sei.

Aus $D = 0$ folgt nach Satz 4 der letzten Nummer, daß zwischen $f_1, f_2, \ldots f_r$ eine lineare homogene Gleichung mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten besteht:

$$(5) \qquad c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_r f_r = 0.$$

Die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots c_r$ sind zwar frei von x, werden aber im allgemeinen noch von den r willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$ abhängen. Man sieht leicht, daß $c_1 \neq 0$ ist und die Koeffizienten nach Division der Gleichung (5) mit c_1 *stetige* Funktionen von $C_1, C_2, \ldots C_r$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung werden. Denn $(r-2)$-malige Differentiation von (5) gibt die $r-2$ Gleichungen:

$$c_1 f_1^{(i)} + c_2 f_2^{(i)} + \cdots + c_r f_r^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots r-2),$$

die zusammen mit (5) besagen, daß sich $c_1, c_2, \ldots c_r$ wie diejenigen $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von D zueinander verhalten, von denen vorhin die Rede war. Die auf c_1 bezügliche ist die von Null verschiedene Determinante (4), und alle jene Unterdeterminanten sind in bezug auf $C_1, C_2, \ldots C_r$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig.

Mithin gibt (5) nach Division mit c_1 und mit Rücksicht auf (3) eine Gleichung von der Form:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_1} + \omega_2 \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} + \omega_3 \frac{\partial \varphi}{\partial C_3} + \cdots + \omega_r \frac{\partial \varphi}{\partial C_r} = 0,$$

wo $\omega_2, \omega_3, \ldots \omega_r$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktionen von $C_1, C_2, \ldots C_r$ sind. Hier aber liegt für die Funktion φ, sobald sie als eine Funktion von $C_1, C_2, \ldots C_r$ betrachtet wird, die außerdem noch eine willkürliche Größe x enthält, eine partielle Differentialgleichung vor, die nach Satz 3, Nr. 762, nur $r-1$ voneinander unabhängige Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{r-1}$ hat, indem jede andere Lösung φ eine Funktion von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{r-1}$ sein muß. Dabei sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{r-1}$ Funktionen von $C_1, C_2, \ldots C_r$ allein, aber φ enthält außerdem x. Demnach ergibt sich eine solche Darstellung von φ:

$$\varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_r) = \Phi(x, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{r-1}).$$

Werden nun $r-1$ neue willkürliche Konstanten $C_1', C_2', \ldots C_{r-1}'$ vermöge:

$$C_1' = \lambda_1(C_1, \ldots C_r), \ldots C_{r-1}' = \lambda_{r-1}(C_1, \ldots C_r)$$

eingeführt, so kommt:

$$\varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_r) = \Phi(x, C_1', C_2', \ldots C_{r-1}').$$

Ohne also die Allgemeinheit der Funktion φ mit r willkürlichen Konstanten zu beeinträchtigen, kann man die Anzahl der Konstanten dadurch um Eins erniedrigen, daß man $r - 1$ geeignete Funktionen von ihnen als neue willkürliche Konstanten einführt. Deshalb sagt man in diesem Falle, daß die r willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$ in der vorgelegten Funktion φ *nicht sämtlich wesentlich* sind.

In dem vorhin ausgeschlossenen Falle, wo die Determinante (4) gleich Null ist, läßt sich dasselbe in Hinsicht auf die $r - 1$ ersten Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_{r-1}$ auf demselben Wege schließen, so daß diese $r - 1$ Konstanten durch höchstens $r - 2$ ersetzt werden können, zu denen dann noch die Konstante C_r tritt. Also auch dann ist die Zahl der willkürlichen Konstanten mindestens um Eins zu erniedrigen. Mithin gilt allgemein der von *Jacobi* herrührende

Satz 6: Ist $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_r)$ eine Funktion von x und r willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$ derart, daß diese Funktion und ihre Ableitungen nach x bis zur $(r-1)^{ten}$ Ordnung einschließlich in einem gewissen Variabilitätsbereiche stetig in bezug auf alle $r + 1$ Größen $x, C_1, C_2, \ldots C_r$ sind und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich $C_1, C_2, \ldots C_r$ haben, so läßt sich die Funktion durch x und weniger als r willkürliche Konstante dann und nur dann ausdrücken, wenn die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial C_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial C_2} & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial \varphi}{\partial C_r} \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial C_1} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial C_2} & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial C_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial^r \varphi}{\partial x^{r-1} \partial C_1} & \dfrac{\partial^r \varphi}{\partial x^{r-1} \partial C_2} & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial^r \varphi}{\partial x^{r-1} \partial C_r} \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Man kann hinzufügen, daß folglich nur dann, wenn diese Determinante *nicht* verschwindet, die Funktion

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots C_r)$$

die *allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung* vorstellt. Ist dagegen die Determinante gleich Null, so ist die Funktion die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung von *niedrigerer als r^{ter} Ordnung.*

§ 2. Differentialgleichungen in allgemeiner Form.

787. Allgemeine Lösung. Unter dem Bereiche einer gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$(1) \qquad F(x, y, y', \dots y^{(r)}) = 0$$

wird ein Variabilitätsbereich verstanden, innerhalb dessen F und alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von F stetige Funktionen der $r+2$ Veränderlichen $x, y, y', \dots y^{(r)}$ sind. Dieser Bereich soll nie verlassen werden. Mit Hilfe der Sätze 15 und 16 von Nr. 696 kann man die Betrachtungen von Nr. 781 und 782 leicht auf die Gleichung (1) übertragen.

Wenn nämlich:

$$(2) \qquad x = a, \quad y = b, \quad y' = b_1, \dots y^{(r)} = b_r$$

ein solches bestimmtes Wertsystem innerhalb des Bereiches ist, das der Gleichung (1) genügt, für das aber $\partial F : \partial y^{(r)}$ *nicht* gleich Null wird, gibt es nach Satz 15, Nr. 696, eine und nur eine Auflösung der Gleichung (1) nach $y^{(r)}$:

$$(3) \qquad y^{(r)} = f(x, y, y', \dots y^{(r-1)}),$$

die innerhalb einer gewissen Umgebung:

$$(4) \qquad |x - a| \leqq k, \quad |y - b| \leqq k, \dots |y^{(r-1)} - b_{r-1}| \leqq k$$

der Stelle $(a, b, b_1, \dots b_{r-1})$ alle diejenigen Werte von $y^{(r)}$ definiert, die der Gleichung (1) in einem gewissen Intervalle

$$(5) \qquad |y^{(r)} - b_r| \leqq h$$

genügen. Dabei ist die Funktion (3) in der Umgebung (4) stetig. Nach Satz 16 derselben Nummer 696 kommen ihr ebenda stetige partielle Ableitungen erster Ordnung zu. Die Integration der Differentialgleichung (1) kommt also in der durch (4) und (5) bedingten Umgebung der Stelle (2) auf die der aufgelösten Differentialgleichung (3) zurück.

Nun kann es sein, daß zu den Werten:

(6) $$x = a, \quad y = b, \quad y' = b_1, \ldots y^{(r-1)} = b_{r-1}$$

innerhalb des Bereiches der Differentialgleichung (1) *mehrere* Werte b_r von $y^{(r)}$ gehören, die der Gleichung (1) genügen, und daß für alle diese Werte $\partial F : \partial y^{(r)} \neq 0$ wird. Dann gibt es *mehrere* aufgelöste Differentialgleichungen (3), und die vollständige Integration von (1) in der Umgebung der Stelle (6) ist erst dann geleistet, wenn *alle* so hervorgehenden Gleichungen (3) daselbst vollständig integriert worden sind.

Werden Anfangswerte:

(7) $$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y_0', \ldots y^{(r-1)} = y_0^{(r-1)}$$

in der gestatteten Umgebung der Stelle (6) beliebig angenommen, so gehört zu ihnen bei jeder einzelnen der hervorgehenden Differentialgleichungen (3) je eine Lösung $y = \varphi(x)$ in dem Sinne, daß $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\ldots$ $\varphi^{(r-1)}(x)$ für $x = x_0$ die Anfangswerte $y_0, y_0', \ldots y_0^{(r-1)}$ haben. Da nun die r^{te} Ableitung $y^{(r)}$ für $x = x_0$ bei jeder einzelnen Differentialgleichung (3) in einem gewissen Intervalle um den zugehörigen Wert b_r herum liegt, siehe (5), so schließt man wie in Nr. 707 (und in Nr. 776), daß man die Umgebung der Stelle (6) soweit beschränken kann, daß auch überall in der Umgebung die r^{ten} Ableitungen aller dieser Lösungen für $x = x_0$ voneinander verschieden sind. Entsprechend den Sätzen 4 und 16 von Nr. 707 und Nr. 776 gilt daher der

Satz 7: Wenn die gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$F(x, y, y', \ldots y^{(r)}) = 0$$

an der Stelle:

$$x = a, \quad y = b, \quad y' = b_1, \ldots y^{(r-1)} = b_{r-1}$$

nur durch solche Werte von $y^{(r)}$ befriedigt wird, für die $\partial F : \partial y^{(r)}$ nicht gleich Null wird, gibt es eine Umgebung dieser Stelle, in der nirgends für zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung alle Werte von $y, y', y'', \ldots y^{(r)}$ bei der einen mit denen bei der anderen übereinstimmen.

Wenn man x und y wie in Nr. 783 und 784 als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene deutet, heißt dies: *Keine zwei verschiedene Integralkurven haben an einer Stelle jener Umgebung eine Berührung in mindestens r^{ter} Ordnung,* es sei denn, daß sie überhaupt miteinander identisch sind, vgl. Nr. 214.

788. Singuläre Elemente r^{ter} Ordnung und singuläre Lösungen. Einen Inbegriff von Werten von $x, y, y', \ldots y^{(r)}$ nennen wir ein *Element r^{ter} Ordnung*, also ein Linienelement (x, y, y') ein Element erster und ein Krümmungselement (x, y, y', y'') — vgl. Nr. 783 — ein Element zweiter Ordnung. Wir sagen ferner: Der Funktion oder Kurve $y = \varphi(x)$ gehört ein bestimmtes Element r^{ter} Ordnung $(x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(r)})$ an, wenn $\varphi(x), \varphi'(x), \ldots \varphi^{(r)}(x)$ für $x = x_0$ die Werte $y_0, y_0', \ldots y_0^{(r)}$ haben.

Der Bereich der gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$F(x, y, y', \ldots y^{(r)}) = 0 \tag{1}$$

besteht nun aus lauter Elementen r^{ter} Ordnung, nämlich aus allen denjenigen, für die F und die partiellen Ableitungen erster Ordnung von F stetig sind. *Die Differentialgleichung selbst definiert innerhalb dieses Bereiches eine $(r+1)$-fach unendliche Schar von Elementen r^{ter} Ordnung,* weil die $r+1$ Größen $x, y, y', \ldots y^{(r-1)}$ beliebig gewählt werden können, während (1) die dazu gehörigen Werte von $y^{(r)}$ bestimmt. *Eine Kurve ist dann und nur dann eine Integralkurve, wenn sie lauter solche Elemente r^{ter} Ordnung hat, die der Differentialgleichung genügen.*

Singulär soll nun jedes Element r^{ter} Ordnung heißen, das der Differentialgleichung (1) *genügt und für das überdies $\partial F : \partial y^{(r)}$ gleich Null wird.* Aus den letzten Bemerkungen der vorigen Nummer ergibt sich dann als Verallgemeinerung des Satzes 5 von Nr. 708:

Satz 8: Zwei verschiedene Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung können einander an einer Stelle nur dann in höherer als $(r-1)^{ter}$ Ordnung berühren, wenn sie daselbst ein singuläres Element r^{ter} Ordnung gemein haben.

Eine *Lösung* der Differentialgleichung (1) soll *singulär* heißen, wenn sie lauter singuläre Elemente r^{ter} Ordnung enthält. Sie wird durch eine *singuläre Integralkurve* dargestellt.

Alle übrigen Lösungen bzw. Integralkurven, nämlich die in voriger Nummer betrachteten, heißen *regulär*. Eine Differentialgleichung von der Form:

$$y^{(r)} = f(x, y, y', \ldots y^{(r-1)})$$

hat, da hier $F = y^{(r)} - f$, also $\partial F : \partial y^{(r)} = 1$ ist, *keine* singulären Elemente r^{ter} Ordnung und keine singulären Lösungen.

Die Funktion $y = \varphi(x)$ ist eine singuläre Lösung von (1) wenn die Werte:

$$y = \varphi(x), \quad y' = \varphi'(x), \ldots y^{(r)} = \varphi^{(r)}(x)$$

nicht nur der Gleichung (1), sondern auch der Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y, y', \ldots y^{(r)})}{\partial y^{(r)}} = 0 \tag{2}$$

genügen. Da nun aus (1) durch vollständige Differentiation nach x die Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(r-1)}} y^{(r)} + \frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} y^{(r+1)} = 0$$

hervorgeht, liefert (2) für die singulären Lösungen noch die Bedingung:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(r-1)}} y^{(r)} = 0. \tag{3}$$

Diese Begriffe und Bedingungen gehen auch hervor, wenn man die Betrachtungen von Nr. 777 auf dasjenige System erster Ordnung anwendet, das der Differentialgleichung (1) nach Nr. 663 äquivalent ist.

Im Falle einer gewöhnlichen Differentialgleichung *erster* Ordnung zeigte sich in Nr. 711, daß eine singuläre Integralkurve unter Umständen ein Ort von singulären Punkten regulärer Integralkurven ist, während sich in Nr. 710 ergab, daß auch die Einhüllenden regulärer Integralkurven singulär sind. Etwas Entsprechendes gilt bei Differentialgleichungen höherer Ordnung. Wir wollen uns hier im folgenden auf die Betrachtung solcher singulärer Integralkurven beschränken, die Einhüllende von regulären Integralkurven sind. Dabei treten jedoch wesentlich neue Gesichtspunkte auf, deren Erörterung die folgenden Nummern gewidmet sind.

789. Einhüllende r^{ter} Ordnung als singuläre Integralkurven. Wir sagen, daß eine einfach unendliche Kurvenschar:

(1) $$y = \varphi(x, C)$$

mit einer willkürlichen Konstante C eine *Einhüllende von mindestens* r^{ter} *Ordnung* hat, wenn ihr nach Nr. 210 eine Einhüllende zukommt und wenn diese Einhüllende jede Kurve der Schar in mindestens r^{ter} Ordnung berührt. Die Bedingungen hierfür sind leicht aufzustellen. Nach Nr. 210 muß die Einhüllende eine Gleichung von der Form:

(2) $$y = \varphi(x, \alpha(x))$$

haben, so daß sie also an irgend einer Stelle $x = x_0$ einen Punkt mit derjenigen Kurve der Schar (1) gemein hat, für die C den Wert $\alpha(x_0)$ annimmt. Die Gleichung $y = \varphi(x, \alpha)$ stellt also die Einhüllende oder eine einzelne Kurve der Schar (1) dar, je nachdem man α in ihr als die Funktion von x oder als eine Konstante auffaßt. Nach Nr. 214 ist daher für eine Einhüllende in mindestens r^{ter} Ordnung das Bestehen der r Gleichungen erforderlich:

(3) $$\frac{d^i \varphi(x, \alpha)}{dx^i} = \frac{\partial^i \varphi(x, \alpha)}{\partial x^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots r).$$

Weil:

$$\frac{d\varphi(x, \alpha)}{dx} = \varphi_x + \varphi_\alpha \alpha'$$

ist, gibt die erste Bedingung wegen $\alpha' \neq 0$ die Gleichung:

(4) $$\varphi_\alpha = 0,$$

wie zu erwarten war, denn dies ist die schon in Nr. 210 in anderer Form angegebene Bedingung (4) für die fragliche Funktion α von x. Wenn α die Gleichung (4) befriedigt, reduziert sich die vollständige Ableitung von $\varphi(x, \alpha)$ nach x auf φ_x. Folglich wird:

$$\frac{d^2 \varphi(x, \alpha)}{dx^2} = \varphi_{xx} + \varphi_{x\alpha} \alpha'.$$

Mithin gibt die zweite Bedingung (3) sofort $\varphi_{x\alpha} = 0$. Ist auch diese Gleichung erfüllt, so reduziert sich die vollständige Ableitung zweiter Ordnung von $\varphi(x, \alpha)$ auf φ_{xx}, so daß:

$$\frac{d^3 \varphi(x, \alpha)}{dx^3} = \varphi_{xxx} + \varphi_{xx\alpha} \alpha'$$

wird, die dritte Bedingung (3) demnach noch $\varphi_{xx\alpha} = 0$ liefert, usw. Durch Fortsetzung dieser Schlüsse ergibt sich der

Satz 9: Die einfach unendliche Kurvenschar:

$$y = \varphi(x, C)$$

hat dann und nur dann eine Einhüllende von mindestens r^{ter} Ordnung:

$$y = \varphi(x, \alpha(x)),$$

wenn die Funktion $\alpha(x)$ den r Bedingungen genügt:

$$\frac{\partial \varphi(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi(x, \alpha)}{\partial x \partial \alpha} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial^r \varphi(x, \alpha)}{\partial x^{r-1} \partial \alpha} = 0.$$

Gibt es eine Einhüllende r^{ter} Ordnung, so hat sie mit jeder Kurve der Schar (1) ein Element r^{ter} Ordnung $(x, y, y', \ldots y^{(r)})$ gemein. Gehören nun die Kurven der Schar (1) zu den Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung, so befriedigen alle Elemente r^{ter} Ordnung der Kurven der Schar die Differentialgleichung, demnach auch alle Elemente r^{ter} Ordnung der Einhüllenden, die mithin ebenfalls eine Integralkurve ist. Aus Satz 8 der letzten Nummer folgt überdies, daß die Einhüllende eine *singuläre* Integralkurve sein muß. Somit gilt der

Satz 10: Gibt es unter den Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung eine solche einfach unendliche Schar, die eine Einhüllende von mindestens r^{ter} Ordnung hat, so ist die Einhüllende eine singuläre Integralkurve.

Dies ist die Verallgemeinerung des Satzes 7 von Nr. 710.

790. Ansatz zur Bestimmung der einhüllenden singulären Integralkurven. Es erübrigt jetzt die Beantwortung der Frage, wie man unter denjenigen Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

(1) $$F(x, y, y', \ldots . y^{(r)}) = 0,$$

die durch eine allgemeine Lösung:

(2) $$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_r)$$

mit den r Integrationskonstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$ dargestellt werden, eine solche einfach unendliche Schar zu ermitteln im stande ist, der eine Einhüllende r^{ter} Ordnung zukommt. In einem summarischen Überblicke soll hier die *Methode* angegeben werden, die anzuwenden ist, während wir auf die Frage, in wie weit die auszuführenden Operationen erlaubt sind, nicht eingehen. Während man bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung die Einhüllende durch Differentiation, Elimination und Substitution findet, siehe Nr. 710, bedarf es im Falle $r > 1$ noch der Integration von Differentialgleichungen, wie das Folgende zeigen wird.

Aus der Schar (2) wird eine einfach unendliche Schar dadurch herausgegriffen, daß man alle r Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$ gleich Funktionen einer einzigen Konstante C setzt. Gibt es dann eine Einhüllende der herausgegriffenen Schar, so geht sie hervor, sobald man diese eine Konstante C durch eine gewisse Funktion $\alpha(x)$ ersetzt. Dabei treten für alle r Größen $C_1, C_2, \ldots C_r$ gewisse Funktionen von x ein. Mithin kann man stets annehmen, daß die gesuchte Einhüllende durch eine Funktion von der Form:

$$(3) \qquad y = \varphi(x, \alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots \alpha_r(x))$$

dargestellt werden muß, wobei $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots \alpha_r(x)$ noch zu ermittelnde Funktionen von x bedeuten. Da für einen beliebigen, aber bestimmten Wert von x alle r Funktionen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ Konstanten werden, würde diese Einhüllende, falls sie vorhanden wäre, diejenigen Kurven der Schar (2) umhüllen, die durch die Gleichung:

$$y = \varphi(x, \alpha_1(C), \alpha_2(C), \ldots \alpha_r(C))$$

mit einer willkürlichen Konstanten C dargestellt sind.

Je nachdem man also in (3) unter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ noch zu bestimmende Funktionen von x oder Funktionen einer Konstante C versteht, stellt (3) die gesuchte Einhüllende oder eine der eingehüllten Kurven (2) vor. Für die Einhüllende von mindestens r^{ter} Ordnung bestehen somit nach Nr. 214 die r Bedingungen:

$$(4) \qquad \frac{d^i \varphi(x, \alpha_1, \ldots \alpha_r)}{dx^i} = \frac{\partial^i \varphi(x, \alpha_1, \ldots \alpha_r)}{\partial x^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots r).$$

Wenn zur Abkürzung:

$$\lambda = \frac{\partial \varphi(x, \alpha_1, \ldots \alpha_r)}{\partial \alpha_1} \alpha_1' + \cdots + \frac{\partial \varphi(x, \alpha_1, \ldots \alpha_r)}{\partial \alpha_r} \alpha_r'$$

gesetzt wird, zeigt genau dasselbe Schlußverfahren wie in voriger Nummer, daß sich die r Bedingungen (4) so umformen lassen:

$$\lambda = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = 0, \ldots \frac{\partial^{r-1} \lambda}{\partial x^{r-1}} = 0.$$

Sie lauten ausführlich geschrieben:

$$
(5)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}\,\alpha_1' + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}\,\alpha_2' + \cdots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_r}\,\alpha_r' = 0,\\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_1}\,\alpha_1' + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_2}\,\alpha_2' + \cdots + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_r}\,\alpha_r' = 0,\\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\[2ex]
\dfrac{\partial^r \varphi}{\partial x^{r-1} \partial \alpha_1}\,\alpha_1' + \dfrac{\partial^r \varphi}{\partial x^{r-1} \partial \alpha_2}\,\alpha_2' + \cdots + \dfrac{\partial^r \varphi}{\partial x^{r-1} \partial \alpha_r}\,\alpha_r' = 0.
\end{array}\right.
$$

Weil nicht alle r Funktionen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ konstant sein sollen, sind $\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_r'$ nicht sämtlich gleich Null. Demnach sind die Gleichungen (5) nur dann miteinander verträglich, wenn ihre Determinante:

$$
(6)\quad \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} & \cdot\ \cdot & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_r}\\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial \alpha_1} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial \alpha_2} & \cdot\ \cdot & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial \alpha_r}\\[2ex]
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\[2ex]
\dfrac{\partial^r \varphi}{\partial x^{r-1}\, \partial \alpha_1} & \dfrac{\partial^r \varphi}{\partial x^{r-1}\, \partial \alpha_2} & \cdot\ \cdot & \dfrac{\partial^r \varphi}{\partial x^{r-1}\, \partial \alpha_r}
\end{vmatrix}
$$

verschwindet. Die Determinante kann nicht für alle Funktionen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ von x gleich Null sein, denn sonst müßte sie auch dann verschwinden, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ durch willkürliche Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$ ersetzt würden, was aber nach Satz 6 von Nr. 786 besagen würde, daß nicht alle r Konstanten in der allgemeinen Lösung (2) wesentlich wären, somit die Funktion (2) einer Differentialgleichung von niedrigerer als r^{ter} Ordnung genügen müßte.

Wohl aber ist es denkbar, daß die Determinante (6) eine von Null verschiedene Konstante oder eine Funktion von x allein wird; im zweiten Falle gibt sie dann $x = \text{konst.}$ Beides aber ist absurd, d. h.: Wenn die Determinante (6) frei von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ ist, gibt es *keine* singuläre Lösung von der gesuchten Art.

Es bleibt die Annahme übrig, daß sich durch Nullsetzen der Determinante (6) eine Gleichung in $x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ ergibt, die *nicht* von allen Funktionen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ frei ist. Wird dann eine von ihnen, etwa α_r, aus ihr berechnet und sie nebst ihrer Ableitung in (5) für α_r und α_r' substituiert, so reduziert sich das Gleichungensystem (5) auf höchstens $r-1$ Gleichungen in x, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1}$ und $\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_{r-1}'$, die hinsichtlich $\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_{r-1}'$ linear sind. Betrachten wir nur den allgemeinsten Fall, wo sich diese Gleichungen nach $\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_{r-1}'$ auflösen lassen, so geht ein System von der Form:

$$\frac{d\alpha_j}{dx} = f_j(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1}) \qquad (j = 1, 2, \ldots r-1)$$

hervor, d. h. ein System von Differentialgleichungen in der *Normalform* für die $r-1$ Funktionen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1}$ von x. Ist es vollständig integriert worden, so sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1}$ als Funktionen von x und von $r-1$ willkürlichen Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_{r-1}$ ermittelt. Dann gilt dasselbe von α_r, weil dies eine schon bekannte Funktion von x und von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1}$ ist. Substitution der Werte aller r Funktionen α in (3) gibt schließlich *eine* $(r-1)$*fach unendliche Schar von singulären Integralkurven:*

$$(7) \qquad y = \psi(x, c_1, c_2, \ldots c_{r-1}),$$

die Einhüllende r^{ter} *Ordnung der regulären Integralkurven sind.*

Es kann sein, daß diese Schar ihrerseits Einhüllende zuläßt, insbesondere kann man ja durch Anwendung desselben Verfahrens auf die Schar (7) anstelle der Schar (2) Einhüllende von mindestens $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu ermitteln versuchen, da ja $r-1$ willkürliche Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_{r-1}$ in (7) auftreten. Jedoch nichts berechtigt zu der Annahme, daß diese neuen Einhüllenden ebenfalls singuläre Integralkurven sein müßten. *Dies ist vielmehr nur dann der Fall, wenn sie Einhüllende von mindestens* r^{ter} *Ordnung sind.*

791. Ein Beispiel. Die allgemeinen Entwicklungen der letzten Nummer sollen durch ein schon von *Lagrange* benutztes Beispiel erläutert werden.

Die Funktion:

$$(1) \qquad y = C_1 x^2 + C_2 x + 4C_1^2 + C_2^2$$

mit den beiden willkürlichen Konstanten C_1 und C_2 erfüllt eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, denn aus:

$$y' = 2C_1 x + C_2, \quad y'' = 2C_1$$

lassen sich C_1 und C_2 berechnen und in (1) substituieren, wodurch die Differentialgleichung hervorgeht:

$$(2) \qquad (1+x^2)y''^2 - \tfrac{1}{2}x(4y'+x)y'' + y'^2 + xy' - y = 0.$$

Um die einhüllenden singulären Integralkurven zu bestimmen, ersetzt man C_1 und C_2 in (1) durch zwei Funktionen α_1 und α_2 von x und unterwirft die Funktion:

$$(3) \qquad y = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + 4\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2$$

als Funktion $\varphi(x, \alpha_1, \alpha_2)$ den Bedingungen (5) der vorigen Nummer, die hier die beiden Gleichungen liefern:

$$(4) \qquad \begin{cases} (x^2 + 8\alpha_1)\alpha_1{}' + (x + 2\alpha_2)\alpha_2{}' = 0, \\ 2x\alpha_1{}' + \alpha_2{}' = 0. \end{cases}$$

Nullsetzen der Determinante gibt:

$$(5) \qquad \alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{x} - \tfrac{1}{4}x,$$

daher:

$$\alpha_2{}' = \frac{2\alpha_1{}'}{x} - \frac{2\alpha_1}{x^2} - \tfrac{1}{4}.$$

Werden diese Werte in (4) substituiert, so liefern beide Gleichungen (4) dieselbe Bedingung für α_1:

$$(1+x^2)\alpha_1{}' - \frac{\alpha_1}{x} = \tfrac{1}{8}x,$$

nämlich eine *lineare* Differentialgleichung, deren Integration nach Nr. 716 (mit Rücksicht auf das 1. Beispiel in Nr. 436 sowie auf Nr. 461) gibt:

$$\alpha_1 = \frac{x}{8\sqrt{1+x^2}}\left\{\ln\left[\pm\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right] + c\right\}.$$

Hier ist c die Integrationskonstante. Nun folgt aus (5) noch:

$$\alpha_2 = \frac{1}{4\sqrt{1+x^2}}\left\{\ln\left[\pm\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right] + c\right\} - \tfrac{1}{4}x.$$

Wird der Logarithmus zur Abkürzung mit X bezeichnet:

$$X = \ln\left[\pm\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right],$$

so geht durch die Substitution der Werte von α_1 und α_2 in (3) die gesuchte einfach unendliche Schar von Einhüllenden zweiter Ordnung hervor, also eine Schar von *singulären* Integralkurven:

$$(6) \qquad y = \tfrac{1}{16}(X+c)^2 + \tfrac{1}{8}x\sqrt{1+x^2}(X+c) - \tfrac{3}{16}x^2.$$

Auflösung der Gleichung nach der willkürlichen Konstante c gibt:

$$(7)\qquad \sqrt{16y+4x^2+x^4}-x\sqrt{1+x^2}-\ln\left[\pm\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]=c.$$

Die einfach unendliche Schar (6) hat ihrerseits wieder eine Einhüllende. Man bestimmt sie nach Nr. 210, indem man c durch eine Funktion $\alpha(x)$ ersetzt und dann verlangt, daß die Ableitung nach α verschwinde. Dies gibt:

$$\alpha(x)=-x\sqrt{1+x^2}-X,$$

und wenn man diesen Wert in (6) für c substituiert, kommt als Gleichung der Einhüllenden:

$$(8)\qquad y=-\tfrac{1}{16}x^2(4+x^2).$$

Diese Kurve (8) berührt jedoch jede Kurve (6) nur in der *ersten* Ordnung. Ginge sie nämlich mit ihr eine Berührung von der zweiten Ordnung ein, so müßte (8) eine Lösung der Differentialgleichung (2) sein, vgl. die letzte Bemerkung in voriger Nummer. Man sieht jedoch, daß die Funktion (8) die Differentialgleichung (2) *nicht* befriedigt.

792. Intermediäre Integralgleichungen. Es ist unter Umständen möglich, zu einer vorgelegten gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$(1)\qquad F(x,\ y,\ y',\ \dots\ y^{(r)})=0$$

eine solche gewöhnliche Differentialgleichung von *niedrigerer*, etwa s^{ter} Ordnung zu ermitteln:

$$(2)\qquad \Phi(x,\ y,\ y',\ \dots\ y^{(s)})=0 \qquad\qquad (s<r),$$

deren reguläre Lösungen sämtlich die vorgelegte Differentialgleichung (1) befriedigen. Jede solche Gleichung $\Phi=0$ heißt eine *intermediäre Integralgleichung* von (1), weil ihre Gewinnung einen Schritt auf dem Wege zur Integration darstellt.

Aus (2) folgt durch $r-s$ vollständige Differentiationen nach x eine Reihe von Gleichungen:

$$(3)\qquad \frac{d\Phi}{dx}=0,\quad \frac{d^2\Phi}{dx^2}=0,\ \dots\ \frac{d^{r-s}\Phi}{dx^{r-s}}=0,$$

von denen z. B. die erste ausführlich geschrieben so lautet:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'+\frac{\partial\Phi}{\partial y'}y''+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial y^{(s)}}y^{(s+1)}=0.$$

In allen hat die vorkommende höchste Ableitung $y^{(s+1)}$, $y^{(s+2)}, \ldots y^{(r)}$ den Koeffizienten $\partial \Phi : \partial y^{(s)}$. Wird nun ein Element s^{ter} Ordnung $(x, y, y', \ldots y^{(s)})$ herausgegriffen, das die Gleichung (2) befriedigt, aber für (2) nicht singulär ist, für das also $\partial \Phi : \partial y^{(s)}$ von Null verschieden ist, so bestimmen diese $r - s$ Gleichungen (3) auch $y^{(s+1)}, y^{(s+2)}, \ldots y^{(r)}$. Mithin stellt (2) dann und nur dann eine intermediäre Integralgleichung von (1) dar, wenn sich zu jedem *regulären* Elemente s^{ter} Ordnung der Differentialgleichung (2) aus (3) ein solches Element r^{ter} Ordnung ergibt, das der Gleichung (1) genügt.

Hiernach ist es erklärlich, daß, obgleich die regulären Lösungen von (2) ausnahmslos Lösungen von (1) sind, dennoch die *singulären* Lösungen von (2) *keine* Lösungen von (1) zu sein brauchen. Wenn z. B. eine singuläre Lösung von (2) als Einhüllende von mindestens s^{ter} Ordnung aus den regulären Lösungen von (2) hervorgeht (wie in Nr. 790), wird sie doch nur dann zugleich eine Lösung von (1) sein, wenn sie eine Einhüllende von mindestens r^{ter} Ordnung ist, was eben im allgemeinen nicht eintritt.

Die intermediäre Integralgleichung (2) *heißt singulär*, wenn ihre *regulären* Lösungen *singuläre* Lösungen von (1) sind. Andernfalls wird man sie, wenn es überhaupt angebracht erscheint, dies zu betonen, eine *reguläre* intermediäre Integralgleichung nennen.

Enthält die intermediäre Integralgleichung (2) keine oder weniger als $r - s$ willkürliche Konstanten, so ist die Gesamtheit ihrer regulären Lösungen weniger umfangreich als die der regulären Lösungen von (1). Wenn dagegen in (2) noch $r - s$ willkürliche Konstanten $C_{s+1}, C_{s+2}, \ldots C_r$ auftreten:

$$(4) \qquad \Phi(x, y, y', \ldots y^{(s)}, \ C_{s+1}, C_{s+2}, \ldots C_r) = 0$$

und sich die $r - s$ Konstanten aus dieser und den $r - s - 1$ Gleichungen:

$$(5) \qquad \frac{d\Phi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0, \ldots \frac{d^{r-s-1}\Phi}{dx^{r-s-1}} = 0$$

nicht eliminieren lassen, ist es gewiß, daß die Gesamtheit der regulären Lösungen von (4) keine solche gewöhnliche Differentialgleichung von niedrigerer als r^{ter} Ordnung erfüllen kann, die von willkürlichen Konstanten frei ist. Wird nun die Differentialgleichung $(r-s)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\frac{d^{r-s}\Phi}{dx^{r-s}} = 0 \tag{6}$$

hinzugefügt, so gibt die Elimination von $C_{s+1}, C_{s+2}, \ldots C_r$ aus allen $r-s+1$ Gleichungen (4), (5), (6) eine gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} und nicht niedrigerer Ordnung, so daß die Gesamtheit der Lösungen von (4) r-fach unendlich ist, also gerade so umfangreich wie die der Lösungen von (1). Alsdann nennt man (4) eine *allgemeine intermediäre Integralgleichung* s^{ter} Ordnung von (1). Alle nicht allgemeinen intermediären Integralgleichungen, die regulär sind, heißen *partikular*.

Damit also eine intermediäre Integralgleichung s^{ter} Ordnung allgemein sei, ist erforderlich, daß sie erstens eine mit $r-s$ willkürlichen Konstanten $C_{s+1}, C_{s+2}, \ldots C_r$ behaftete Gleichung (4) sei, daß zweitens die $r-s$ Gleichungen (4) und (5) hinsichtlich $C_{s+1}, C_{s+2}, \ldots C_r$ voneinander unabhängig seien und daß drittens die vorgelegte Gleichung (1) eine Folge der $r-s+1$ Gleichungen (4), (5) und (6) sei, also durch Elimination der willkürlichen Konstanten hervorgehe.

Eine allgemeine intermediäre Integralgleichung von (1) hat zwar eine r-fach unendliche Schar von regulären Lösungen wie (1) selbst, und alle diese Lösungen gehören zu denen von (1), jedoch daraus folgt nicht umgekehrt, daß jede reguläre Lösung von (1) auch eine Lösung der intermediären Integralgleichung sei. Denn man muß bedenken, daß eine Differentialgleichung (1), die in einer nicht nach $y^{(r)}$ aufgelösten Form vorliegt, nach Nr. 787 in der Umgebung einer Stelle mehrere Auflösungen:

$$y^{(r)} = f(x, y, y', \ldots y^{(r-1)})$$

haben kann, von denen jede eine r-fach unendliche Schar von Lösungen hat. Die allgemeine intermediäre Integralgleichung (4) braucht also z. B. nur die Lösungen einer von diesen aufgelösten Gleichungen zu liefern, dagegen die der anderen nicht.

Was die *Existenz* der allgemeinen intermediären Integralgleichungen anbetrifft, so ist zu bemerken:

Wenn:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_r) \tag{7}$$

eine allgemeine Lösung von (1) in einem gewissen Bereiche vorstellt, sind die r Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_r), \\ y' = \dfrac{d\varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_r)}{dx}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y^{(r-1)} = \dfrac{d^{r-1}\varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_r)}{dx^{r-1}} \end{cases}$$

hinsichtlich $C_1, C_2, \ldots C_r$ voneinander unabhängig. Folglich sind die s ersten Gleichungen (8) in bezug auf gewisse s Konstanten C, etwa in bezug auf $C_1, C_2, \ldots C_s$, voneinander unabhängig. Sind:

$$C_j = \psi_j(x, y, y', \ldots y^{(s-1)}, C_{s+1}, C_{s+2}, \ldots C_r)$$
$$(j = 1, 2, \ldots s)$$

die Auflösungen dieser s ersten Gleichungen nach $C_1, C_2, \ldots C_s$ so liefert ihre Substitution in die $(s+1)^{\text{te}}$ Gleichung (8) eine allgemeine intermediäre Integralgleichung s^{ter} Ordnung:

$$y^{(s)} = \lambda(x, y, y', \ldots y^{(s-1)}, C_{s+1}, C_{s+2}, \ldots C_r).$$

Beispiel: Es sei u eine gegebene Funktion von x und y allein. Liegt dann die Differentialgleichung zweiter Ordnung vor:

$$(9)\qquad y'' = (1 + y'^2)(u_x + y'u_y),$$

so läßt sie sich in der Form:

$$\frac{d \operatorname{arc\,tg} y'}{dx} = \frac{du(x, y)}{dx}$$

schreiben, was besagt, daß:

$$(10)\qquad \operatorname{arc\,tg} y' = u(x, y) + C$$

eine allgemeine intermediäre Integralgleichung erster Ordnung ist. Setzt man $\operatorname{tg} u(x, y)$ gleich $v(x, y)$, so geht:

$$(11)\qquad \frac{y' - v(x, y)}{1 + y'v(x, y)} = \operatorname{tg} C$$

hervor. Dies ist für jeden bestimmten Wert von C eine partikulare intermediäre Integralgleichung. Es mögen C zwei verschiedene Werte C_1 und C_2 erteilt und die Lösungen der beiden zugehörigen Differentialgleichungen erster Ordnung (11) mit y_1 und y_2 bezeichnet sein, so daß:

$$(12)\qquad \frac{y_1' - v(x, y_1)}{1 + y_1' v(x, y_1)} = \operatorname{tg} C_1, \qquad \frac{y_2' - v(x, y_2)}{1 + y_2' v(x, y_2)} = \operatorname{tg} C_2$$

wird. Beide Lösungen $y_1 = \varphi(x, \text{konst.})$ und $y_2 = \psi(x, \text{konst.})$ stellen je eine einfach unendliche Kurvenschar dar. Ist (x, y) der Schnittpunkt einer Kurve der einen mit einer Kurve der andern Schar, so stimmen y_1 und y_2 in (12) für diese Stelle überein, so daß aus (12) folgt:

$$y_1' = \frac{v + \operatorname{tg} C_1}{1 - v \operatorname{tg} C_1}, \quad y_2' = \frac{v + \operatorname{tg} C_2}{1 - v \operatorname{tg} C_2},$$

d. h.

$$\frac{y_1' - y_2'}{1 + y_1' y_2'} = \frac{\operatorname{tg} C_1 - \operatorname{tg} C_2}{1 + \operatorname{tg} C_1 \operatorname{tg} C_2} = \operatorname{tg}(C_1 - C_2).$$

Da nun y_1' und y_2' die Tangens der Winkel τ_1 und τ_2 sind, die von den Tangenten der beiden betrachteten Kurven an der Stelle (x, y) mit der positiven x-Achse gebildet werden, ergibt sich:

$$\operatorname{tg}(\tau_1 - \tau_2) = \operatorname{tg}(C_1 - C_2).$$

Hieraus folgt: Für jeden bestimmten Wert von C definiert die Differentialgleichung erster Ordnung (11) eine einfach unendliche Kurvenschar derart, daß alle Kurven einer solchen Schar alle Kurven einer anderen solchen Schar unter einem konstanten Winkel schneiden. Jede dieser Scharen besteht also aus *isogonalen Trajektorien* jeder anderen solchen Schar, vgl. Nr. 740. Alle Scharen zusammen sind die Integralkurven der vorgelegten Differentialgleichung (9). Wird etwa diejenige Schar ausgewählt, die zu $C = 0$ gehört, d. h. die Schar der Integralkurven der Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(13)\qquad y' = v(x, y) \quad \text{oder} \quad y' = \operatorname{tg} u(x, y),$$

so folgt: Die Gesamtheit der Integralkurven der Differentialgleichung (9) besteht aus allen Kurven, von denen jede die durch (13) definierte einfach unendliche Schar γ unter einem konstanten Winkel α durchsetzt. Der Winkel α kann dabei alle möglichen Werte haben, während er in Nr. 740 bestimmt gewählt wurde. Da die Differentialgleichung (9) zu den im 3. Beispiele von Nr. 783 betrachteten Gleichungen (8) gehört, ergibt sich im besonderen der Satz von *Cesàro,* nach dem alle diejenigen Kurven, die durch einen Punkt M gehen und eine gegebene einfach unendliche Schar γ unter konstanten Winkeln schneiden, in M solche Krümmungskreise haben, die ein Büschel bilden.

§ 3. Integrationsmethoden.

793. Wiederholte Quadraturen. In diesem Paragraphen sollen einige Klassen von gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung vorgeführt werden, die entweder durch Quadraturen oder durch Integration von Differentialgleichungen von niedrigerer Ordnung vollständig integrierbar sind.

Wir beginnen mit einer Differentialgleichung r^{ter} Ordnung von der besonderen Form:

$$(1) \qquad y^{(r)} = f(x),$$

in der nur $y^{(r)}$ und x vorkommt. Ihre allgemeine Integration erfordert r nacheinander auszuführende Quadraturen, die $y^{(r-1)}$, $y^{(r-2)}, \ldots y', y$ ergeben. Werden insbesondere für $x = x_0$ die Anfangswerte $y_0, y_0', \ldots y_0^{(r-1)}$ vorgeschrieben und wird die Funktion, die aus $f(x)$ durch k-malige Integration zwischen den Grenzen x_0 und x hervorgeht, mit $f_k(x)$ bezeichnet, so daß allgemein:

$$(2) \qquad f_{k+1}(x) = \int_{x_0}^{x} f_k(x)\,dx \quad \text{und} \quad f_1(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

ist, so kommt:

$$y^{(r-1)} = f_1(x) + y_0^{(r-1)},$$

$$y^{(r-2)} = f_2(x) + y_0^{(r-1)}(x - x_0) + y_0^{(r-2)},$$

$$y^{(r-3)} = f_3(x) + \frac{1}{2!}\, y_0^{(r-1)}(x - x_0)^2 + y_0^{(r-2)}(x - x_0) + y_0^{(r-1)}$$

usw. und schließlich, wenn noch die mit $x - x_0$ behafteten Glieder umgestellt werden:

$$(3) \qquad y = f_r(x) + y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{1}{2!}\, y_0''(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{(r-1)!}\, y_0^{(r-1)}(x - x_0)^{r-1}.$$

Die r aufeinander folgenden Quadraturen lassen sich durch eine einzige ersetzen, bei der allerdings der Integrand noch eine willkürliche Konstante enthält. Teilweise Integration gibt nämlich nach (1) in Nr. 415 für $u = f_1(x)$ und $v = x$:

$$f_2(x) = [x f_1(x)]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} f_1'(x)\, x\, dx = x \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\, x\, dx.$$

Unter den Integralzeichen darf die Veränderliche x mit z bezeichnet werden, so daß kommt:

$$f_2(x) = x \int_{x_0}^{x} f(z)\, dz - \int_{x_0}^{x} f(z)\, z\, dz = \int_{x_0}^{x} f(z)(x - z)\, dz.$$

Nun steht $f_3(x)$ zu $f_1(x)$ nach (2) in derselben Beziehung wie $f_2(x)$ zu $f(x)$; demnach ergibt sich ebenso:

$$f_3(x) = \int_{x_0}^{x} f_1(z)(x - z)\, dz.$$

Nach der Formel (1) in Nr. 415 für die teilweise Integration, worin jetzt x durch z, u durch $f_1(z)$ und v durch $-\frac{1}{2}(x-z)^2$ zu ersetzen ist, kann man hierfür schreiben:

$$f_3(x) = \left[-\frac{1}{2!}(x - z)^2 f_1(z) \right]_{z = x_0}^{z = x} + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^{x} f_1'(z)(x - z)^2 dz.$$

Das erste Glied rechts hat an der oberen Grenze $z = x$ wegen des Faktors $x - z$ und an der unteren Grenze $z = x_0$ wegen des Faktors $f_1(x_0)$ den Wert Null. Außerdem ist $f_1'(z) = f(z)$, so daß kommt:

$$f_3(x) = \frac{1}{2!} \int_{x_0}^{x} f(z)(x - z)^2 dz.$$

Man vermutet demnach, daß allgemein:

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^{x} f(z)\,(x - z)^{k-1} dz \tag{4}$$

sein wird. Diese Formel ist durch Schluß von k auf $k + 1$ sofort zu bestätigen.

Nach (3) ergibt sich demnach die gesuchte allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung (1) in der Form:

$$y = \frac{1}{(r-1)!} \int_{x_0}^{x} f(z)(x-z)^{k-1} dz + y_0 \tag{5}$$

$$+ \frac{1}{1!} y_0'(x - x_0) + \frac{1}{2!} y_0''(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{(r-1)!} y_0^{(r-1)}(x - x_0)^{r-1}.$$

Nebenbei bemerkt ist die Formel (4) in einer anderen Einkleidung schon in Nr. 421 enthalten.

794. Gleichungen zwischen $y^{(r)}$ und $y^{(r-1)}$ allein. Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung von der besonderen Form:

$$F(y^{(r-1)}, y^{(r)}) = 0 \tag{1}$$

kann man, *falls sie nach $y^{(r)}$ auflösbar ist:*

$$y^{(r)} = f(y^{(r-1)}) \tag{2}$$

so vorgehen: Es wird $y^{(r-1)}$ als neue Veränderliche z eingeführt, so daß:

$$\frac{dz}{f(z)} = dx \tag{3}$$

wird und also eine Quadratur:

$$x = \int \frac{dz}{f(z)} + C \tag{4}$$

liefert. Wenn die Quadratur ausführbar und die hervorgehende Gleichung nach z auflösbar ist, so daß sich z als Funktion von x und C darstellt, wird $y^{(r-1)}$ eine bekannte Funktion von x und C, so daß die weitere Integration so verläuft, wie es in voriger Nummer erörtert wurde. Aber auch, wenn man z nicht als Funktion von x bestimmen kann, gelingt die Integration durch eine Reihe aufeinander folgender Quadraturen, sobald man durchweg z statt x als unabhängige Veränderliche benutzt. Denn es ist:

$$dy^{(r-2)} = y^{(r-1)}dx = z\,dx$$

und daher nach (3):

$$dy^{(r-2)} = \frac{z\,dz}{f(z)},$$

woraus sich:

$$y^{(r-2)} = \int \frac{z\,dz}{f(z)} + \text{konst.}$$

ergibt. Nun kommt weiterhin:

$$dy^{(r-3)} = y^{(r-2)}dx = \frac{y^{(r-2)}dz}{f(z)},$$

also:

$$y^{(r-3)} = \int \left[\frac{1}{f(z)} \int \frac{z\,dz}{f(z)}\right] dz + \text{konst.}\ z + \text{konst.}$$

usw. Schließlich liefern insgesamt $r - 1$ Quadraturen eine Formel:

$$y = \varphi(z) + C_1 + C_2 z + \cdots + C_{r-1} z^{r-2},$$

während (4) etwa gibt:

$$x = \psi(z) + C.$$

Hiermit sind x und y als Funktionen von z und r Integrationskonstanten $C, C_1, C_2, \ldots C_{r-1}$ gefunden.

Falls die vorgelegte Differentialgleichung (1) *nicht nach* $y^{(r)}$, *aber nach* $y^{(r-1)}$ *auflösbar ist:*

$$y^{(r-1)} = f(y^{(r)}), \tag{5}$$

führt man $y^{(r)}$ als neue Veränderliche t ein und erhält:

$$y^{(r-1)} = f(t). \tag{6}$$

Nun ist:

$$\frac{dy^{(r-1)}}{dx} = t, \qquad \frac{dy^{(r-2)}}{dx} = y^{(r-1)},$$

also:

$$dx = \frac{dy^{(r-1)}}{t}, \quad dy^{(r-2)} = y^{(r-1)} dx = \frac{y^{(r-1)} dy^{(r-1)}}{t},$$

daher nach (6):

$$dx = \frac{f'(t)\,dt}{t}, \quad dy^{(r-2)} = \frac{f(t) f'(t)\,dt}{t},$$

so daß sich durch Quadraturen ergibt:

$$x = \int \frac{f'\,dt}{t} + \text{konst.}, \quad y^{(r-2)} = \int \frac{ff'}{t}\,dt + \text{konst.}$$

Ferner wird:

$$\frac{dy^{(r-3)}}{dx} = y^{(r-2)},$$

also:

$$dy^{(r-3)} = \frac{y^{(r-2)} f'(t)\,dt}{t}.$$

Da $y^{(r-2)}$ schon als Funktion von t berechnet worden ist, liefert eine abermalige Quadratur auch $y^{(r-3)}$ als Funktion von t. Fährt man so fort, indem man:

$$dy^{(r-4)} = y^{(r-3)} dx = \frac{y^{(r-3)} f'(t)\,dt}{t}$$

usw. setzt, so geht schließlich auch y als Funktion von t und von $r-1$ Integrationskonstanten hervor.

Wenn die Differentialgleichung (1) *weder nach* $y^{(r)}$ *noch nach* $y^{(r-1)}$ *auflösbar ist, es aber gelingt, diese Größen so als Funktionen einer Hilfsveränderlichen* τ *zu bestimmen, daß diese Funktionen:*

(7) $$y^{(r)} = \lambda(\tau), \quad y^{(r-1)} = \mu(\tau)$$

die Gleichung (1) *befriedigen*, so folgt aus:

$$\frac{dy^{(r-1)}}{dx} = y^{(r)}$$

sofort:

$$dx = \frac{\mu' \, d\tau}{\lambda},$$

so daß eine Quadratur x als Funktion von τ und einer Konstante gibt. Ferner ist:

$$dy^{(r-2)} = y^{(r-1)} dx = \frac{\mu \mu'}{\lambda} d\tau;$$

also liefert eine Quadratur für $y^{(r-2)}$ eine Funktion von τ und einer Konstante. Weiterhin wird:

$$dy^{(r-3)} = y^{(r-2)} dx = \frac{y^{(r-2)} \mu' \, d\tau}{\lambda}$$

usw., so daß schließlich auch y als Funktion von τ und $r-1$ Konstanten hervorgeht.

Beispiel: Bei welchen Kurven in der Ebene ist die Projektion des Krümmungsradius auf eine gegebene Gerade von konstanter Länge a? Wird die Gerade als y-Achse gewählt und bedenkt man, daß die Normale mit der y-Achse denselben Winkel bildet wie die Tangente mit der x-Achse, so erhält man nach (1) in Nr. 197 als Differentialgleichung des Problems:

(8) $$\frac{1 + y'^2}{y''} = a,$$

also eine Differentialgleichung, die sich der Form (1) für $r = 2$ unterordnet. Wir setzen wie zuerst $y' = z$ und erhalten:

$$z' = y'' = \frac{1 + y'^2}{a} = \frac{1 + z^2}{a},$$

daher:

$$a \int \frac{dz}{1 + z^2} = x,$$

also, wenn etwa $x = x_0$ für $z = 0$ sein soll:

$$a \operatorname{arc\,tg} z = x - x_0.$$

Mithin wird $z = \operatorname{tg} [(x - x_0) : a]$, so daß weiterhin kommt:

$$dy = z\,dx = \operatorname{tg} \frac{x - x_0}{a} \cdot dx$$

und, falls y für $x = x_0$ den Wert y_0 haben soll:

(9) $$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} \operatorname{tg} \frac{x - x_0}{a}\, dx = -a \ln \cos \frac{x - x_0}{a},$$

vgl. das 3. Beispiel in Nr. 452. Die Differentialgleichung (8) ordnet sich der im Beispiele zu Nr. 792 betrachteten Differentialgleichung (9) für den Fall $u = x : a$ unter. Demnach sind die Kurven (9) die isogonalen Trajektorien der Integralkurven der Differentialgleichung:

$$y' = \operatorname{tg} \frac{x}{a}$$

(vgl. (13) in Nr. 792), d. h. der Kurven:

(10) $$y = -a \ln \cos \frac{x}{a} + \text{konst.}$$

Nach dem 3. Beispiele in Nr. 783, worin jetzt $\lambda = 0$, $\mu = 1 : a$ zu setzen ist, haben alle diejenigen Kurven (9), die einen Punkt M oder (x, y) gemein haben, in M solche Krümmungskreise, die ein Büschel bilden, und zwar zeigt (9) in Nr. 783, daß der zweite gemeinsame Punkt dieser Krümmungskreise die Koordinaten $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y + 2a$ hat. Daraus ergibt sich eine sehr einfache Konstruktion der Krümmungskreise, insbesondere auch für die Kurve $y = -a \ln \cos (x : a)$.

795. Gleichungen zwischen $y^{(r)}$ und $y^{(r-2)}$ allein. Betrachten wir zunächst den Fall $r = 2$, d. h. eine Differentialgleichung von der Form:

(1) $$F(y, y'') = 0.$$

Solche Gleichungen spielen eine bedeutende Rolle in der Mechanik. Wenn x die Zeit und y eine mit der Zeit veränderliche Größe bedeutet, ist y' die Geschwindigkeit und y'' die *Beschleunigung*, und in manchen Problemen der Mechanik kommt es darauf an, y zu ermitteln, wenn eine Beziehung zwischen der Größe y selbst und ihrer Beschleunigung y'' bekannt, d. h. wenn eine Gleichung (1) gegeben ist.

Wenn die Gleichung (1) *nach* y'' *aufgelöst werden kann:*

(2) $$y'' = f(y),$$

ergibt sich durch Multiplikation mit $2y'$, weil $2y'y''$ die Ableitung von y'^2 ist:

$$d(y'^2) = 2f(y)dy,$$

mithin durch eine Quadratur:

(3) $$y'^2 - y_0'^2 = 2\int_{y_0}^{y} f(y)\,dy,$$

wobei wir annehmen, daß für $x = x_0$ die Anfangswerte y_0 und y_0' gegeben seien. Ist die Quadratur erledigt, so kennt man y' als Funktion von y, also auch den reziproken Wert $dx : dy$, so daß eine bekannte Gleichung besteht:

$$dx = \varphi(y)\,dy,$$

aus der sich durch eine Quadratur:

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \varphi(y)\,dy$$

auch x als Funktion von y ergibt.

Wenn die Gleichung (1) *nicht nach* y'', *aber nach* y *auflösbar ist:*

(4) $$y = f(y''),$$

tut man gut, y'' als unabhängige Veränderliche z einzuführen. Denn aus $d(y'^2) = 2y''dy$ und $dy = f'(z)dz$, sowie $y'' = z$ folgt dann:

$$d(y'^2) = 2zf'(z)\,dz,$$

so daß eine Quadratur liefert:

(5) $$y'^2 = 2\int zf'(z)\,dz + \text{konst.}$$

Durch ihre Erledigung wird y' eine bekannte Funktion von z. Aus:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{df(z)}{y'} = \frac{f'(z)\,dz}{y'},$$

worin für y' diese Funktion von z einzusetzen ist, ergibt sich durch noch eine Quadratur auch x als Funktion von z.

Wenn die Gleichung (1) *weder nach* y'' *noch nach* y *auflösbar ist, wohl aber durch zwei Funktionen:*

(6) $$y = \varphi(t), \quad y'' = \psi(t)$$

einer Hilfsveränderlichen t *befriedigt werden kann*, ergibt sich:

$$d(y'^2) = 2y''dy = 2\psi(t)\varphi'(t)\,dt,$$

d. h.:

(7) $$y'^2 = 2\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + \text{konst.}$$

Nachdem so y' als Funktion von t gefunden ist, berechnet man x aus:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{y'},$$

worin für y' die bekannte Funktion von t eingesetzt wird, mittels einer Quadratur.

Wir betrachten nun allgemeiner *eine gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung, die nur $y^{(r)}$ und $y^{(r-2)}$ enthält:*

$$(8) \qquad F(y^{(r-2)}, y^{(r)}) = 0.$$

Setzt man hierin $y^{(r-2)} = z$, so geht eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung für z:

$$F(z, z'') = 0$$

hervor, die nach den soeben angegebenen Methoden zu behandeln ist. Der dabei zuletzt besprochene Fall (6) ist der allgemeinste; wir nehmen deshalb an, es seien z und z'' oder $y^{(r-2)}$ und $y^{(r)}$ bekannte Funktionen der Hilfsveränderlichen t; auch sei schon wie vorhin x mittels zweier Quadraturen als Funktion von t ermittelt. Dann kennt man zwei Gleichungen von der Form:

$$x = \chi(t), \quad y^{(r-2)} = \psi(t).$$

Da nun:

$$dy^{(r-3)} = y^{(r-2)}dx = \psi(t)\chi'(t)\,dt$$

ist, gibt eine Quadratur auch $y^{(r-3)}$ als Funktion von t, ebenso eine weitere Quadratur $y^{(r-4)}$ usw., schließlich wird auch y als Funktion von t gewonnen.

1. Beispiel: Ist ein Punkt mit einer festen Stelle O *elastisch* verknüpft und wird er um eine Strecke a von O entfernt, so strebt er in die Ruhelage O zurück und beschreibt infolgedessen *Schwingungen*, die, wie die Mechanik lehrt, einer Differentialgleichung:

$$(9) \qquad y'' = -m^2 y$$

genüge leisten, worin y die Entfernung von O, gemessen mit Vorzeichen, und die unabhängige Veränderliche x die Zeit bedeutet, während m^2 eine positive Konstante vorstellt. Nach (3) kommt hier, weil $f(y) = -m^2 y$ ist:

$$y'^2 - y_0'^2 = m^2(y_0^2 - y^2),$$

also:

$$y' = \sqrt{y_0'^2 + m^2 y_0^2 - m^2 y^2}.$$

Wird die Zeit x von einem Augenblicke an gerechnet, in dem der Punkt die Stelle O passiert, so ist $y_0 = 0$ zu setzen, also:

$$y' = \sqrt{y_0'^2 - m^2 y^2}.$$

Aus $dx : dy = 1 : y'$ folgt weiter:

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y_0'^2 - m^2 y^2}} = \frac{1}{m} \operatorname{arc\,sin} \frac{my}{y_0'}$$

oder:

$$y = \frac{y_0'}{m} \sin mx.$$

Da a die Maximalentfernung des Punktes von O ist, hat man $a = y_0' : m$, d. h. $y_0' = am$ zu setzen. Also gibt:

$$y = a \sin mx$$

das gesuchte Gesetz an, das zeigt, daß es sich um sogenannte *Sinusschwingungen* handelt.

2. Beispiel: Bei welchen Kurven in der Ebene ist der Krümmungsradius dem Kubus der Normale proportional? Nach Nr. 170 ist die Normale gleich $-y\sqrt{1 + y'^2}$, und nach (1) in Nr. 197 wird demnach gefordert:

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''} = a y^3 \sqrt{1 + y'^2}^3,$$

wobei a konstant ist. Hieraus folgt für $ay''y^3$ der Wert Eins. Nach (2) ist daher $f(y)$ gleich $1 : ay^3$ zu setzen, so daß (3) gibt:

$$y'^2 = -\frac{1}{ay^2} + C_1,$$

wo C_1 konstant ist. Aus $dx : dy = 1 : y'$ folgt weiter, wenn $C_1 \neq 0$ ist:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - \frac{1}{ay^2}}} + \text{konst.} = \frac{1}{C_1} \sqrt{C_1 y^2 - \frac{1}{a}} + \text{konst.}$$

oder:

$$(C_1 x - \text{konst.})^2 - C_1 y^2 + \frac{1}{a} = 0.$$

Die Kurven sind demnach *Ellipsen* und *Hyperbeln*. Wenn dagegen $C_1 = 0$ ist, ergeben sich die *Parabeln:*

$$x = \tfrac{1}{2} y^2 \sqrt{-a} + \text{konst.}$$

796. Gleichungen, in denen die unbekannte Funktion oder die unabhängige Veränderliche nicht vorkommt. Wenn in einer gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung für y *die unbekannte Funktion y selbst nicht auftritt,* kann es sein, daß etwa auch y' fehlt, ebenso y'' usw. Um sogleich den allgemeinsten Fall zu betrachten, nehmen wir an, daß $y, y', y'', \ldots y^{(s)}$ fehlen, dagegen $y^{(s+1)}$ vorkomme, die Differentialgleichung also die Form habe:

$$(1) \qquad F(x, y^{(s+1)}, y^{(s+2)}, \ldots y^{(r)}) = 0.$$

Hier ergibt sich für $z = y^{(s+1)}$ sofort die Differentialgleichung $(r-s-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$F(x, z, z', \ldots z^{r-s-1}) = 0.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung, die wohlbemerkt von *niedrigerer* Ordnung als die vorgelegte ist, kann nicht umgangen werden. Bedeutet:

$$z = y^{(s+1)} = \varphi(x, C_{s+2}, C_{s+3}, \ldots C_r)$$

ihre allgemeine Lösung mit den $r-s-1$ Integrationskonstanten $C_{s+2}, C_{s+3}, \ldots C_r$, so liegt eine Differentialgleichung $(s+1)^{\text{ter}}$ Ordnung für y vor, die nach Nr. 793 durch Quadraturen zu erledigen ist, weil rechts nur die Veränderliche x auftritt.

Wenn eine Differentialgleichung r^{ter} Ordnung vorliegt, *in der die unabhängige Veränderliche x selbst fehlt:*

$$(2) \qquad F(y, y', \ldots y^{(r)}) = 0,$$

empfiehlt es sich, zunächst die Größe y', die wir mit p bezeichnen wollen, als Funktion von y zu berechnen. Es kommt nämlich:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp:dy}{dx:dy} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d\left(p\frac{dp}{dy}\right)}{dx} = \frac{d\left(p\frac{dp}{dy}\right):dy}{dx:dy} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$$

usw. Allgemein wird $y^{(r)}$ eine Funktion von p und den Ableitungen von p nach y bis zur $(r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung einschließlich. Demnach geht durch die Substitution dieser Werte der Ableitungen von y in (2) eine Differentialgleichung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für die Funktion p hervor, wobei y die unabhängige

Veränderliche ist; weil nämlich (2) von x frei ist, fehlt x auch in der neuen Gleichung. Die Integration dieser Differentialgleichung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für p ist nicht zu umgehen. Wenn:

$$p = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots C_{r-1})$$

ihre allgemeine Lösung mit den $r-1$ Integrationskonstanten $C_1, C_2, \ldots C_{r-1}$ ist, ergibt sich aus $dx = dy : p$ durch noch eine Quadratur auch x als Funktion von y.

In dieser Nummer sind zum ersten Male Integrationsmethoden gegeben, die erst dann auf Quadraturen führen, wenn man eine gewisse Differentialgleichung integriert hat, die von niedrigerer Ordnung als die vorgelegte ist. Der Vorteil dieser Methoden besteht also in der *Erniedrigung der Ordnungszahl.*

797. Beispiele aus der Theorie der ebenen Kurven.

1. Beispiel: Es sollen diejenigen Kurven in der Ebene gefunden werden, bei denen die Krümmung eine gegebene Funktion der Abszisse ist. Wenn $f(x)$ diese gegebene Funktion ist, lautet die Gleichung des Problems nach (1) in Nr. 195:

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3} = f(x).$$

Sie ist von y frei und daher eine Differentialgleichung erster Ordnung für y', aus der sich ergibt:

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}^3} = \int f(x)\,dx + \text{konst.}$$

oder:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int f(x)\,dx + \text{konst.}$$

Wird unter $F(x)$ eine Funktion verstanden, deren Ableitung die gegebene Funktion $f(x)$ ist:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

so folgt:

$$y' = \frac{F(x) + C_1}{\sqrt{1-(F(x)+C_1)^2}},$$

wo C_1 die Integrationskonstante bezeichnet. Abermalige Quadratur gibt:

$$y = \int \frac{F(x)+C_1}{\sqrt{1-(F(x)+C_1)^2}}\,dx + C_2.$$

Soll z. B. *die Krümmung der Kurve der Abszisse proportional* sein, wie es bei der sogenannten *elastischen Kurve* in der Mechanik der Fall ist, so hat man $f(x)$ gleich $2ax$, also $F(x)$ gleich ax^2 zu setzen, wobei a eine Konstante bedeutet. Dann geht für y ein *elliptisches Integral* hervor, vgl. Nr. 440.

2. Beispiel: Es sollen diejenigen Kurven in der xy-Ebene bestimmt werden, die der Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$(1) \qquad 3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''' = 0$$

genügen. Weil y fehlt, ist dies eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung für y'; weil ferner x fehlt, bestimmt man nach der zweiten Methode der letzten Nummer zunächst die Größe $z = dy' : dx$ oder y'' als Funktion von y'. Es ist dabei:

$$y''' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz : dy'}{dx : dy'} = z\frac{dz}{dy'},$$

so daß (1) gibt:

$$3y'z^2 - (1 + y'^2)z\frac{dz}{dy'} = 0.$$

Zunächst tritt der Faktor z heraus. Die Annahme $z = 0$ oder $y'' = 0$ liefert die *Geraden* der Ebene (vgl. 1. Beispiel in Nr. 783). Wenn dagegen $z \neq 0$ ist, bleibt die Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion z von y' übrig:

$$\frac{dz}{z} = \frac{3y'dy'}{1 + y'^2},$$

in der die Veränderlichen getrennt sind, so daß sich durch Quadratur:

$$z = C_1\sqrt{1 + y'^2}^3$$

ergibt. Dabei bedeutet C_1 die Integrationskonstante. Weil z die Ableitung $dy' : dx$ ist, folgt weiter aus dem reziproken Werte:

$$x = \int\frac{dy'}{C_1\sqrt{1 + y'^2}^3} = \frac{y'}{C_1\sqrt{1 + y'^2}} + \text{konst.}$$

und hieraus durch Auflösung nach y' eine Gleichung von der Form:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{C_1x + C_2}{\sqrt{1 - (C_1x + C_2)^2}},$$

worin C_2 konstant ist. Weil $z = y'' \neq 0$ sein soll, ist $C_1 \neq 0$, so daß abermalige Quadratur gibt:

$$y = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1 - (C_1x + C_2)^2} - C_3.$$

Dabei stellt C_3 die dritte Integrationskonstante vor. Demnach kommt:

$$(C_1 y + C_1 C_3)^2 + (C_1 x + C_2)^2 = 1.$$

Da jeder *Kreis* einer solchen Gleichung genügt, *wird die Differentialgleichung* (1) *nur von den Geraden und Kreisen der Ebene erfüllt,* was schon aus Satz 21 und 22 von Nr. 218 zu folgern war.

3. Beispiel: Gesucht werden diejenigen Kurven in der Ebene, bei denen Krümmungsradius der Normale proportional ist. Die Differentialgleichung des Problems lautet:

$$\frac{y''}{1+y'^2} = \frac{1}{ay}, \tag{2}$$

vgl. das 2. Beispiel in Nr. 795. Hier fehlt x, also ist die zweite Methode der vorigen Nummer anwendbar. Danach wird $y' = p$ eingeführt und $y'' = p\,dp : dy$ gesetzt, so daß sich ergibt:

$$\int \frac{p\,dp}{1+p^2} = \frac{\ln y}{a} + \text{konst.}$$

oder:

$$\sqrt{1+p^2} = \text{konst.}\, y^{\frac{1}{a}}.$$

Weil die linke Seite von Null verschieden ist, gilt dasselbe von dem konstanten Faktor, so daß man schreiben darf:

$$\sqrt{1+p^2} = \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{a}},$$

wobei c die Integrationskonstante ist. Auflösung nach $1 : p$ oder $dx : dy$ und Quadratur gibt schließlich:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{a}} - 1}} + \text{konst.} \tag{3}$$

Die Differentialgleichung (2) gehört zu denjenigen, die im 3. Beispiele von Nr. 783 besprochen wurden. Denn sie geht aus der Gleichung (8) jener Nummer bei der Annahme $\lambda = 0$, $\mu = -1 : ay$ hervor. Die zweifach unendliche Kurvenschar (3) hat somit die Eigenschaft, daß alle diejenigen Kurven der Schar, die durch einen gemeinsamen Punkt M oder (x, y) gehen, in M Krümmungskreise haben, die einen zweiten Punkt $\overline{M}$ gemein haben, dessen Koordinaten nach (9) in Nr. 783 sind:

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = (2a + 1)y.$$

Wir heben einige besondere Fälle hervor: Für $a = -1$ ergeben sich aus (3) *Kreise, deren Mitten auf der x-Achse liegen,* für $a = 2$ *Parabeln, deren Leitlinie die x-Achse ist,* für $a = -2$ nach dem 1. Beispiele in Nr. 711 *gemeine Zykloiden, deren Bahnkurve die x-Achse ist.* Besonders bemerkenswert ist noch die Annahme $a = 1$, die zu den *Kettenlinien:*

$$y = \pm \tfrac{1}{2} c \left(e^{\frac{x - x_0}{c}} + e^{-\frac{x - x_0}{c}} \right)$$

führt (vgl. Nr. 225 und das 2. Beispiel in Nr. 713). Es sind dies alle diejenigen *Kettenlinien, deren Evolventen Traktrizen mit der x-Achse als Leitkurve sind.*

798. Rotationsflächen konstanter Krümmung. Weitere Beispiele entnehmen wir der Flächentheorie. Dabei sei vorausgeschickt: Nach Nr. 348 sind die Meridiane und Breitenkreise einer Rotationsfläche ihre Krümmungskurven. Nach Nr. 321 ist deshalb der eine Hauptkrümmungsradius R eines Punktes M der Fläche gleich dem Krümmungsradius des Meridians und der andere gleich der Länge MN der Normale des Meridians, gemessen bis zum Schnittpunkte mit der Flächenachse. Wird diese Achse als x-Achse gewählt, so kann die Meridiankurve in der Form $y = f(x)$ dargestellt werden. Nach Nr. 170 und Nr. 197 ist nun:

$$MN = -y\sqrt{1 + y'^2}, \quad R = \frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''},$$

wobei die Quadratwurzel positiv sein soll. Das *Gaußische Krümmungsmaß* der Rotationsfläche ist also nach Nr. 318:

$$K = -\frac{y''}{y(1 + y'^2)^2}, \tag{1}$$

dagegen die sogenannte *mittlere Krümmung* nach Nr. 308:

$$H = \frac{1}{2} \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}^3} - \frac{1}{2y\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{yy'' - (1 + y'^2)}{2y\sqrt{1 + y'^2}^3}. \tag{2}$$

In dieser Nummer behandeln wir nun die Aufgabe:

Gesucht werden alle Rotationsflächen von konstanter Krümmung K.

Nach (1) handelt es sich zur Ermittlung der Meridiankurve um die Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(3)\qquad y'' + Ky(1 + y'^2)^2 = 0,$$

die nach der zweiten Methode in Nr. 796 zu behandeln ist, wonach $y' = p$ und $y'' = pdp : dy$ gesetzt wird, so daß kommt:

$$\frac{pdp}{(1+p^2)^2} = -Kydy.$$

Eine Quadratur gibt:

$$\frac{1}{1+p^2} = Ky^2 + C.$$

Dabei ist C die Integrationskonstante. Wird hieraus $1 : p$ oder $dx : dy$ berechnet, so ergibt eine zweite Quadratur:

$$(4)\qquad x = \int \sqrt{\frac{Ky^2 + C}{1 - Ky^2 - C}}\, dy + \text{konst.}$$

Wenn man die Fläche ähnlich vergrößert oder verkleinert, geht sie in eine andere Fläche konstanter Krümmung über, indem K mit einer *positiven* Konstanten multipliziert wird. Deshalb dürfen wir uns auf die drei Annahmen $K = 0, +1, -1$ beschränken. Der Fall $K = 0$ ist sofort erledigt, da er gibt:

$$x = \text{konst.}\, y + \text{konst.}$$

so daß hier die Meridiankurve eine Gerade, also die Fläche ein *Rotationskegel* ist. Die additive Konstante in (4) ist unwesentlich, da die Rotationsfläche ihre Gestalt nicht ändert, wenn sie längs der Drehungsachse verschoben wird. Deshalb ergeben sich in den Fällen $K = +1$ und $K = -1$ die beiden Gleichungen:

$$x = \int \frac{(y^2 + C)dy}{\sqrt{-(y^2 + C)(y^2 + C - 1)}}, \quad x = \int \frac{(C - y^2)dy}{\sqrt{-(y^2 - C + 1)(y^2 - C)}},$$

d. h. x wird ein *elliptisches Integral*, daß sich nach Nr. 443 und 445 auf Normalintegrale erster und zweiter Gattung zurückführen läßt. Im Falle $K = +1$ darf C nicht größer als Eins, im Falle $K = -1$ nicht kleiner als Null sein, weil sonst der Radikand imaginär wird. In beiden Fällen ergeben sich nach Nr. 443 je zwei verschiedene Arten der Zurückführung auf Normalintegrale. Dabei ist t in Nr. 443 durch y zu ersetzen, und die neu einzuführende Veränderliche, die in Nr. 443 mit x bezeichnet wurde, möge hier t heißen. Wir geben nun kurz die erforderlichen Substitutionen an:

Im Falle $K = +1$ und $0 < C < 1$ gilt Fall (4) von Nr. 443. Dabei ist $\lambda^2 = C$, $\mu^2 = 1 - C$, $k^2 = 1 - C$. Demnach kommt:

$$y^2 = k^2(1 - t^2), \quad x = k^2 \int \frac{t^2 dt}{T} - \int \frac{dt}{T}.$$

Hier und im folgenden soll nämlich sein:

$$T = \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}.$$

Im Falle $K = +1$ und $C < 0$ gilt Fall (2) von Nr. 443, indem $\lambda^2 = -C$, $\mu^2 = 1 - C$, $k^2 = 1 : (1 - C)$ zu setzen ist. Dann kommt:

$$y^2 = \frac{1}{k^2} - t^2, \quad x = k \int \frac{t^2 dt}{T} - k \int \frac{dt}{T}.$$

Im Falle $K = -1$ und $0 < C < 1$ gilt Fall (4) von Nr. 443 und $\lambda^2 = 1 - C$, $\mu^2 = C$, $k^2 = C$. Es kommt:

$$y^2 = k^2(1 - t^2), \quad x = -k^2 \int \frac{t^2 dt}{T}.$$

Im Falle $K = -1$ und $C > 1$ endlich liegt wieder der Fall (2) von Nr. 443 vor, indem $\lambda^2 = C - 1$, $\mu^2 = C$, $k^2 = 1 : C$ wird und sich ergibt:

$$y^2 = \frac{1}{k^2} - t^2, \quad x = -k \int \frac{t^2 dt}{T}.$$

Es ist einerlei, welches Vorzeichen man dem x gibt, denn der Wechsel dieses Zeichens bedeutet für die Fläche nur, daß die positive Richtung der Achse geändert wird. Macht man nun wie in Nr. 448 die Substitution:

$$t = \sin\varphi,$$

setzt:

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$

und benutzt die in Nr. 546 eingeführten Bezeichnungen:

$$E(\varphi) = \int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi, \quad F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

so gelangt man zu folgender *Übersicht über die typischen Formen von Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter Krümmung* $+1$ *oder* -1:

798]

$$(5)\quad \begin{cases} K=+1: & x=E(\varphi), & y=k\cos\varphi, \\ K=+1: & x=\frac{1}{k}E(\varphi)-\frac{1-k^2}{k}F(\varphi), & y=\frac{1}{k}\Delta\varphi, \\ K=-1: & x=F(\varphi)-E(\varphi), & y=k\cos\varphi, \\ K=-1: & x=\frac{1}{k}F(\varphi)-\frac{1}{k}E(\varphi), & y=\frac{1}{k}\Delta\varphi. \end{cases}$$

Hierbei ist k ein positiver echter Bruch. Die *Übergangsfälle* zwischen den beiden für $K=+1$ auftretenden Typen und zwischen den beiden für $K=-1$ auftretenden sind besonders interessant. Sie ergeben sich für $K=+1$ bei der Annahme $C=0$ und für $K=-1$ bei der Annahme $C=1$, d. h. sie gehen aus den vier Formelreihen (5) hervor, wenn man darin dem Modul k der elliptischen Integrale den Wert Eins erteilt, wobei die beiden ersten Formelreihen gleiches liefern, ebenso die beiden letzten. Es kommt dann, weil $E(\varphi)$ dabei gleich $\sin\varphi$ und $F(\varphi)$ gleich $\ln\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\pi)$ wird:

$$(6)\quad \begin{cases} K=+1: & x=\sin\varphi, & y=\cos\varphi, \\ K=-1: & x=\ln\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\pi)-\sin\varphi, & y=\cos\varphi. \end{cases}$$

Im ersten Falle (6) liegt der *Kreis*:

$$x^2+y^2=1$$

vor, d. h. die zugehörige Rotationsfläche ist die *Kugel vom Radius Eins.* Im zweiten Falle (6) dagegen zeigt die Substitution $\varphi=\tau-\frac{1}{2}\pi$, daß die Meridiankurve die *Traktrix*:

$$x=\cos\tau+\ln\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau,\quad y=\sin\tau$$

wird, deren Leitlinie die Achse der Rotationsfläche und deren konstante Tangentenlänge gleich Eins ist, siehe (13) in Nr. 713.

799. Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung. Ein zweites Beispiel aus der Flächentheorie liefert die Aufgabe:

Gesucht werden alle Rotationsflächen von konstanter mittlerer Krümmung H.

Nach (2) in voriger Nummer ist die Meridiankurve eine Integralkurve der Differentialgleichung:

$$(1)\quad \frac{yy''}{\sqrt{1+y'^2}^{\,3}}-\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}-2Hy=0.$$

Weil die Gleichung von x frei ist, wird wieder die zweite

Methode von Nr. 796 benutzt, nach der sich, wenn $p = dy:dx$ gesetzt wird, die Differentialgleichung erster Ordnung in p und y ergibt:

$$\frac{yp\,dp}{\sqrt{1+p^2}^3} - \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} + 2Hy\right) dy = 0,$$

deren linke Seite augenscheinlich ein vollständiges Differential ist, so daß das Integral:

$$(2)\qquad -\frac{y}{\sqrt{1+p^2}} - Hy^2 = \text{konst.}$$

hervorgeht.

Im Falle $H = 0$, der vorweg erledigt werden möge, kommt:

$$p = \sqrt{C^2y^2 - 1},$$

wobei C die Integrationskonstante ist. Wegen $p = dy : dx$ folgt nun:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C^2y^2 - 1}}.$$

Hieraus findet man die *Kettenlinie* (vgl. Nr. 225):

$$y = \frac{1}{2C}\left[e^{C(x-x_0)} + e^{-C(x-x_0)}\right].$$

Die von ihr durch Drehung um die x-Achse erzeugte Rotationsfläche mittlerer Krümmung Null heißt das *Katenoid.*

Nunmehr werde $H \neq 0$ angenommen. Dabei kann durch ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung der Fläche wie in voriger Nummer erreicht werden, *daß* $H = +1$ *oder* -1 *wird.* In beiden Fällen gibt (2):

$$1 + p^2 = \frac{y^2}{(y^2 + C)^2},$$

wobei C die Integrationskonstante ist. Durch Auflösung nach p geht wegen $p = dy : dx$ hervor:

$$(3)\qquad x = \int \frac{(y^2 + C)\,dy}{\sqrt{y^2 - (y^2 + C)^2}}.$$

Wie in voriger Nummer wird also x durch ein *elliptisches Integral* dargestellt. Anstatt es auf die verschiedenen möglichen typischen Formen zurückzuführen, wollen wir hier eine bemerkenswerte Eigenschaft der Integralkurven (3) ableiten.

Die Kettenlinie, die sich vorhin im Falle $H = 0$ ergab, wird nach Nr. 225 von dem Brennpunkte einer Parabel beschrieben, wenn diese ohne Gleiten auf einer festen Geraden rollt. Man kann nun, wie *Delaunay* zuerst bemerkte, die Kurven (3) ebenso erzeugen, indem man eine Ellipse oder Hyperbel statt der Parabel benutzt. In der Tat, es sei:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4}$$

die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf ihre Hauptachsen. Dabei sei $a > b$, so daß ein Brennpunkt F auf der positiven x-Achse liegt und die Abszisse $c=\sqrt{a^2-b^2}$ hat. Der zugehörige Scheitel der Ellipse sei S. Ist M oder (x, y), siehe Fig. 49, ein beliebiger Punkt auf der Ellipse, so möge die Länge s des Bogens von S bis M auf der Tangente von M bis J abgetragen werden, so daß MJ mit dem Bogen MS im Sinne der Fortschreitung übereinstimmt. Die Tangente hat in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Gleichung:

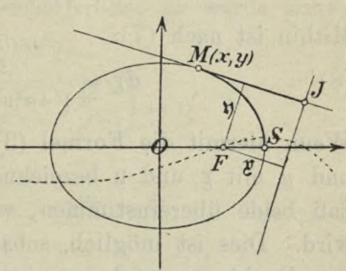

Fig. 49.

$$\frac{x\mathfrak{x}}{a^2}+\frac{y\mathfrak{y}}{b^2}=1$$

und das Lot, das in J auf der Tangente zu errichten ist, die Gleichung:

$$\frac{y\mathfrak{x}}{b^2}-\frac{x\mathfrak{y}}{a^2}=\frac{xyc^2+s\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}{a^2b^2}.$$

Der Brennpunkt F hat von diesem Lote und jener Tangente die Abstände:

$$\mathfrak{x}=s-\frac{cy(a^2-cx)}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}},\quad \mathfrak{y}=\frac{b^2(a^2-cx)}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}. \tag{5}$$

Auflösung der zweiten Gleichung nach x mit Rücksicht auf die Ellipsengleichung (4) ergibt:

$$x=\frac{a^2(b^2-\mathfrak{y}^2)}{c(b^2+\mathfrak{y}^2)},\quad y=\frac{b^2\sqrt{4a^2\mathfrak{y}^2-(b^2+\mathfrak{y}^2)^2}}{c(b^2+\mathfrak{y}^2)}. \tag{6}$$

Ferner liefert die erste Gleichung (5) mit Rücksicht auf die zweite und auf den soeben für y gefundenen Wert:

$$\mathfrak{x}=s-\frac{\mathfrak{y}\sqrt{4a^2\mathfrak{y}^2-(b^2+\mathfrak{y}^2)^2}}{b^2+\mathfrak{y}^2}. \tag{7}$$

Da x und y in (6) durch $\mathfrak{y}$ ausgedrückt sind, läßt sich die Ableitung von s nach $\mathfrak{y}$:

$$\frac{ds}{d\mathfrak{y}} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{d\mathfrak{y}} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\mathfrak{y}}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\mathfrak{y}}\right)^2}$$

daraus berechnen. Es kommt:

$$\frac{ds}{d\mathfrak{y}} = \frac{8a^2b^2\mathfrak{y}^2}{(b^2+\mathfrak{y}^2)^2\sqrt{4a^2\mathfrak{y}^2 - (b+\mathfrak{y}^2)^2}}.$$

Mithin ist nach (7):

(8) $$d\mathfrak{x} = \frac{b^2+\mathfrak{y}^2}{\sqrt{4a^2\mathfrak{y}^2-(b^2+\mathfrak{y}^2)^2}}\,d\mathfrak{y}.$$

Wenn hiermit die Formel (3) verglichen wird, worin auch x und y mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bezeichnet sein mögen, so erkennt man, daß beide übereinstimmen, wenn $C = b^2$ und $a = \frac{1}{2}$ gewählt wird. Dies ist möglich, sobald $C > 0$ ist.

Denkt man sich nun in Fig. 49 die Gerade MJ und das in J darauf errichtete Lot fest, dagegen die Ellipse beweglich, nämlich auf der Geraden MJ rollend, so beschreibt der Brennpunkt F, weil MJ gleich dem Bogen MS gewählt wurde, gerade diejenige Kurve, deren laufende Koordinaten in bezug auf das Achsensystem der beiden festen Geraden $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind.

Die Bahnkurve von F liefert also die Meridiankurve (3) *einer Rotationsfläche konstanter mittlerer Krümmung* ± 1, *bei der $C > 0$ ist, sobald die Halbachse $a = \frac{1}{2}$ gewählt wird.* Ersetzt man die Ellipse (4) durch die *Hyperbel:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so ändert sich in (8) nur das Vorzeichen von b^2. *Beim Abrollen der Hyperbel, bei der $a = \frac{1}{2}$ gewählt wird, beschreibt folglich der Brennpunkt F eine Meridiankurve* (3), *die zu einem negativen Werte der Konstante C gehört.*

800. Verschiedene Arten von homogenen Differentialgleichungen. Wenn eine Kurve in der xy-Ebene vorliegt und beide Koordinaten mit derselben Konstante c multipliziert werden, bleibt die Ableitung $y' = dy : dx$ ungeändert, während $y'' = dy' : dx$ mit c zu dividieren, folglich $y''' = dy'' : dx$ mit c^2 zu dividieren ist, usw.

Wenn dagegen nur y, nicht aber x mit einer Konstante c multipliziert wird, muß y' mit c, y'' also auch mit c usw. multipliziert werden.

Wird drittens nur x, nicht aber y mit einer Konstante c multipliziert, so ist y' mit c zu dividieren, y'' mit c^2 usw.

Diesen drei Möglichkeiten entsprechen *drei verschiedene Arten von homogenen Differentialgleichungen r^{ter} Ordnung.*

Bedeutet nämlich c eine *beliebige* Größe, so werde angenommen, daß entweder die Gleichung:

$$(1) \qquad F\left(cx,\, cy,\, y',\, \frac{y''}{c},\, \frac{y'''}{c^2}, \ldots \frac{y^{(r)}}{c^{r-1}}\right) = 0$$

oder die Gleichung:

$$(2) \qquad F(x,\, cy,\, cy',\, cy'', \ldots cy^{(r)}) = 0$$

oder die Gleichung:

$$(3) \qquad F\left(cx,\, y,\, \frac{y'}{c},\, \frac{y''}{c^2}, \ldots \frac{y^{(r)}}{c^r}\right) = 0$$

von c befreit werden könne, also mit der Gleichung:

$$(4) \qquad F(x,\, y,\, y',\, y'', \ldots y^{(r)}) = 0$$

identisch sei.

Für die Differentialgleichung (4) bedeutet dies im ersten Falle, daß aus jeder Integralkurve durch *Streckung* vom Anfangspunkte O aus (vgl. das 2. Beispiel in Nr. 733) stets wieder eine Integralkurve hervorgeht, im zweiten Falle, daß aus jeder Integralkurve durch Vergrößerung oder Verkleinerung der *Ordinaten*, dagegen im dritten Falle, daß aus jeder Integralkurve durch Vergrößerung oder Verkleinerung der *Abszissen* stets wieder eine Integralkurve hervorgeht.

In allen drei Fällen kann man die Differentialgleichung (4) *homogen* nennen. Die in Nr. 715 als homogen bezeichnete Differentialgleichung erster Ordnung gehört zum Falle (1). In jedem der drei Fälle ist es möglich, das Integrationsgeschäft zu vereinfachen.

Der erste Fall läßt sich sofort auf den dritten zurückführen, wenn man $z = y : x$ als unbekannte Funktion benutzt, weil diese Größe ungeändert bleibt, wenn man x und y mit c multipliziert. Übrigens läßt sich auch der zweite Fall in den dritten dadurch verwandeln, daß y statt x als die unabhängige Veränderliche behandelt wird.

Man kann aber im *zweiten* Falle auf direktem Wege zur Erniedrigung der Ordnung der Differentialgleichung gelangen, indem man die Größe:

$$z = \frac{y'}{y} \tag{5}$$

als unbekannte Funktion einführt. Dann ist nämlich zu setzen:

$$y' = yz, \quad y'' = y(z^2 + z'), \quad y''' = y(z^3 + 3zz' + z''), \dots \tag{6}$$

Allgemein wird $y^{(r)}$ gleich y, multipliziert mit einer ganzen rationalen Funktion von $z, z', \dots z^{(r-1)}$. Da sich nun die Gleichung (4) im Falle (2) nicht ändert, wenn $y, y', \dots y^{(r)}$ mit irgend einer Größe multipliziert werden, so folgt, wenn $1:y$ als diese Größe benutzt wird, daß (4) in eine Differentialgleichung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für z übergeht. Nachdem man sie integriert hat, erhält man auch y aus (5) mittels einer Quadratur:

$$y = e^{\int z\,dx}.$$

Im *dritten* Falle empfiehlt es sich, die Größe:

$$t = \ln x \tag{7}$$

als unabhängige Veränderliche zu benutzen. Dann ist zu setzen:

$$\begin{cases} x = e^t, \quad y' = \dfrac{dy:dt}{dx:dt} = e^{-t}\dfrac{dy}{dt}, \\ y'' = \dfrac{dy':dt}{dx:dt} = e^{-2t}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right) \end{cases} \tag{8}$$

usw. Allgemein wird $y^{(r)}$ gleich e^{-rt}, multipliziert mit einer ganzen rationalen Funktion der Ableitungen von y nach t bis zur r^{ten} Ordnung einschließlich. Weil sich nun die Differentialgleichung (4) im Falle (3) nicht ändert, wenn

$$x, y, y', y'', \dots \text{ bzw. mit } e^t, 1, e^{-t}, e^{-2t}, \dots$$

multipliziert werden, geht eine Differentialgleichung r^{ter} Ordnung von der Form:

$$F\left(1, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}, \dots\right) = 0$$

hervor, die von der unabhängigen Veränderlichen t frei ist, daher nach der zweiten Methode in Nr. 796 auf eine Differentialgleichung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und eine Quadratur zurückkommt.

Man kann also in allen drei Fällen der Homogenität eine Erniedrigung der Ordnung der Differentialgleichung um eine Einheit erreichen. Wenn die vorgelegte Differentialgleichung überdies von x oder y selbst frei ist, kann man die Reduktion nach Nr. 796 noch weiter treiben. Hierfür geben wir das

Beispiel: Bei welchen Kurven in der Ebene ist die Bogenlänge der entsprechenden Bogenlänge der Evoluten proportional? Bezeichnen x_1, y_1 die Koordinaten des zu einem Punkte (x, y) einer solchen Kurve gehörigen Punktes der Evolute, d. h. des Krümmungsmittelpunktes, so ist zu fordern:

$$a\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{x_1^0}^{x_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2}\,dx_1,$$

nach Satz 2, Nr. 542. Dabei ist a eine von Null verschiedene Konstante. Durch vollständige Differentiation nach x geht eine Gleichung hervor:

$$a\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2},$$

infolge deren jene Forderung besteht. Dies aber ist eine gewöhnliche Differentialgleichung *dritter* Ordnung in x und y, denn die rechts auftretenden Ableitungen von x_1 und y_1 haben die schon in Nr. 218 unter (5) berechneten Werte, deren Substitution die folgende Form der Differentialgleichung liefert:

$$(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 + ay''^2 = 0. \tag{9}$$

Sie ist einerseits von x selbst frei und andererseits homogen in der ersten Art (1). Deshalb kann die Reduktion hier weiter getrieben werden. Benutzt man y' als unabhängige Veränderliche und y'' als abhängige, so kommt, weil:

$$\frac{dy''}{dy'} = \frac{y'''}{y''}$$

ist, die Differentialgleichung *erster* Ordnung zwischen y' und y'':

$$(1+y'^2)\frac{dy''}{dy'} = (3y'-a)y'',$$

in der sich die Veränderlichen y' und y'' sofort trennen lassen:

$$\frac{dy''}{y''} = \frac{3y'-a}{1+y'^2}\,dy'.$$

Es ist bequemer, den Tangentenwinkel τ vermöge $y' = \operatorname{tg}\tau$ einzuführen. Dann kommt:

$$d \ln y'' = (3 \operatorname{tg}\tau - a) d\tau,$$

folglich:

(10) $$y'' = \frac{C_0 e^{-a\tau}}{\cos^3\tau},$$

wobei $C_0 =$ konst. ist. Nun haben wir:

$$\frac{dy'}{dx} = y'', \quad \text{d. h.} \quad dx = \frac{dy'}{y''} = \frac{d\tau}{y'' \cos^2\tau},$$

$$dy = y' dx = \frac{\operatorname{tg}\tau \, d\tau}{y'' \cos^2\tau},$$

so daß die Substitution des Wertes (10) und je eine Quadratur gibt:

$$x = C_1 + \frac{1}{C_0}\int e^{a\tau}\cos\tau \, d\tau, \quad y = C_2 + \frac{1}{C_0}\int e^{a\tau}\sin\tau \, d\tau$$

oder nach (3) und (4) in Nr. 454, wenn außerdem $a = \operatorname{ctg}\mu$ gesetzt wird:

$$x = C_1 + \frac{\sin\mu}{C_0}\cos(\tau - \mu) e^{\tau \operatorname{ctg}\mu},$$

$$y = C_2 + \frac{\sin\mu}{C_0}\sin(\tau - \mu) e^{\tau \operatorname{ctg}\mu}.$$

Alle diese Kurven gehen durch Streckungen vom Anfangspunkte O aus und durch Schiebungen aus der einen Kurve:

$$x = \cos(\tau - \mu) e^{\tau \operatorname{ctg}\mu}, \quad y = \sin(\tau - \mu) e^{\tau \operatorname{ctg}\mu}$$

hervor, die in Polarkoordinaten ω, ϱ die Gleichung:

$$\varrho = e^{(\omega + \mu)\operatorname{ctg}\mu}$$

hat und daher eine logarithmische Spirale ist, vgl. Nr. 247. *Die gesuchten Kurven sind folglich lauter logarithmische Spiralen.*

801. Differentialgleichungen, die in doppelter Weise homogen sind. Es kann vorkommen, daß eine Differentialgleichung zu zweien der in voriger Nummer besprochenen Fällen der Homogenität gehört. Dann tritt stets auch der dritte Fall ein, und die Integralkurven haben die Eigenschaft: Aus jeder Integralkurve geht wieder eine Integralkurve hervor, falls alle Abszissen mit irgend einer Zahl a und alle Ordinaten mit irgend einer Zahl b multipliziert werden. Die Differentialgleichung:

(1) $$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(r)}) = 0$$

hat diese Eigenschaft, falls die Gleichung:

$$(2)\qquad F\left(ax,\ by,\ \frac{b}{a}y',\ \frac{b}{a^2}y'',\ \ldots\ \frac{b}{a^r}y^{(r)}\right)=0$$

auf (1) zurückkommt, wie auch a und b gewählt sein mögen. Ihre Ordnung läßt sich um *zwei* Einheiten erniedrigen. Denn zunächst führe man:

$$(3)\qquad \mathfrak{x}=\ln x,\quad \mathfrak{y}=\ln y$$

als neue Veränderliche ein, d. h. man setze:

$$(4)\qquad \begin{cases} y'=\dfrac{de^{\mathfrak{y}}:d\mathfrak{x}}{de^{\mathfrak{x}}:d\mathfrak{x}}=e^{\mathfrak{y}-\mathfrak{x}}\dfrac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}},\\[2ex] y''=\dfrac{dy':d\mathfrak{x}}{de^{\mathfrak{x}}:d\mathfrak{x}}=e^{\mathfrak{y}-2\mathfrak{x}}\left[\dfrac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2}+\left(\dfrac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right)^2-\dfrac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right]\end{cases}$$

usw. Allgemein wird $y^{(r)}$ gleich $e^{\mathfrak{y}-r\mathfrak{x}}$, multipliziert mit einer ganzen rationalen Funktion der Ableitungen von $\mathfrak{y}$ nach $\mathfrak{x}$ bis zur r^{ten} Ordnung einschließlich. Weil nun in (2) insbesondere:

$$a=e^{-\mathfrak{x}},\quad b=e^{-\mathfrak{y}}$$

angenommen werden kann, geht vermöge der Substitutionen die Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$F\left(1,\ 1,\ \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}},\ \frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2}+\left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right)^2-\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}},\ \ldots\right)=0$$

hervor, die sowohl von $\mathfrak{x}$ als auch von $\mathfrak{y}$ frei ist. Indem man:

$$(5)\qquad \mathfrak{z}=\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}$$

als neue abhängige Veränderliche benutzt, gewinnt man für $\mathfrak{z}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die von der unabhängigen Veränderlichen $\mathfrak{x}$ frei ist. Nach Nr. 796 führt man daher die neue unbekannte Funktion:

$$(6)\qquad \mathfrak{p}=\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}=\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2}$$

ein und betrachtet $\mathfrak{z}$ als unabhängige Veränderliche, indem man:

$$(7)\qquad \frac{d^2\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}^2}=\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{p}}{d\mathfrak{z}},\quad \frac{d^3\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}^3}=\mathfrak{p}\left(\frac{d\mathfrak{p}}{d\mathfrak{z}}\right)^2+\mathfrak{p}^2\frac{d^2\mathfrak{p}}{d\mathfrak{z}^2}$$

usw. setzt. Alsdann geht eine Differentialgleichung $(r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung für $\mathfrak{p}$ hervor. Ihre Integration gibt $\mathfrak{p}$ als Funktion von $\mathfrak{z}$, so daß man nach (6) und (5) und nach (3) mittels Quadraturen auch:

(8) $$x = e^{\mathfrak{x}} = e^{\int \frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{p}}}, \quad y = e^{\mathfrak{y}} = e^{\int \frac{\mathfrak{z}\,d\mathfrak{z}}{\mathfrak{p}}}$$

als Funktionen von $\mathfrak{z}$ berechnen kann.

Beispiel: Hierher gehört die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

(9) $$y'y'' + \frac{2y'^2}{x^3} = 0,$$

die zu der Differentialgleichung *nullter* Ordnung für $\mathfrak{p}$ führt:

$$\mathfrak{z}\mathfrak{p} + \mathfrak{z}^3 - \mathfrak{z}^2 + 2 = 0,$$

aus der sich:

$$\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{z}^2 - \mathfrak{z}^3 - 2}{\mathfrak{z}}$$

ergibt. Nach (8) wird daher hier:

$$x = e^{\int \frac{\mathfrak{z}\,d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}^2 - \mathfrak{z}^3 - 2}}, \quad y = e^{\int \frac{\mathfrak{z}^2\,d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}^2 - \mathfrak{z}^3 - 2}}.$$

Da:

$$\mathfrak{z}^2 - \mathfrak{z}^3 - 2 = -(\mathfrak{z} + 1)(\mathfrak{z}^2 - 2\mathfrak{z} + 2)$$

ist, gibt die Partialbruchzerlegung mit Rücksicht auf (11) in Nr. 433:

$$x = \text{konst.}\, e^{-\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(\mathfrak{z}-1)} \sqrt[10]{\frac{(\mathfrak{z}+1)^2}{\mathfrak{z}^2 - 2\mathfrak{z} + 2}},$$

$$y = \text{konst.}\, e^{-\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(\mathfrak{z}-1)} \sqrt[5]{\frac{1}{(\mathfrak{z}+1)(\mathfrak{z}^2 - 2\mathfrak{z} + 2)^2}}.$$

802. Integration durch Bildung einer Differentialgleichung von höherer Ordnung. Aus einer vorgelegten Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

(1) $$F(x, y, y', \ldots y^{(r)}) = 0$$

kann man nach Nr. 661 durch vollständige Differentiation nach x Differentialgleichungen von höherer als r^{ter} Ordnung gewinnen, unter deren Lösungen die von (1) enthalten sind. Man kann auch aus diesen Differentialgleichungen und aus (1) durch Eliminationen und Substitutionen neue Differentialgleichungen höherer Ordnung ableiten, die infolge von (1) bestehen. Dabei kann es eintreten, daß die vollständige Integration einer solchen Differentialgleichung höherer Ordnung zu leisten ist. Alsdann braucht man nur noch ihre allgemeine Lösung, die mehr als r willkürliche Konstanten enthält, in (1) einzusetzen; auf diese Weise müssen sich Gleichungen zwischen den Konstanten allein ergeben, wodurch jene allgemeine Lösung soweit spezialisiert wird, daß sie zur allgemeinen Lösung der vorgelegten Gleichung (1) wird.

1. Beispiel: Die *Clairautsche Differentialgleichung:*

$$y - xy' = f(y'), \tag{2}$$

siehe Nr. 720, gibt, wenn sie vollständig nach x differenziert wird:

$$-xy'' = f'(y')y''. \tag{3}$$

Diese Gleichung (3) wird entweder durch die Annahme $y'' = 0$ oder durch die Annahme $x = -f'(y')$ erfüllt. Im ersten Falle $y'' = 0$ kommt sofort die Schar aller *Geraden:*

$$y = C_1 x + C_2.$$

Wird dieser Wert in (2) eingesetzt, so geht die Bedingung für die Integrationskonstanten hervor:

$$C_2 = f(C_1).$$

Mithin erhalten wir die einfach unendliche Schar von Geraden:

$$y = C_1 x + f(C_1),$$

vgl. (5) in Nr. 720. Im zweiten Falle:

$$x = -f'(y')$$

gibt (2) nach Substitution dieses Wertes:

$$y = f(y') - y'f'(y').$$

Die beiden letzten Gleichungen stellen die *singuläre* Lösung (7) in Nr. 720 dar, ausgedrückt mittels der Hilfsveränderlichen y'.

2. Beispiel: Es sollen die Krümmungskurven der Fläche zweiter Ordnung:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

bestimmt werden. Indem man z als die durch diese Gleichung definierte Funktion von x und y betrachtet, berechnet man durch Differentiationen nach x bzw. y die partiellen Ableitungen erster Ordnung p und q sowie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung r, s, t von z nach x und y und setzt ihre Werte in die Gleichung (6) von Nr. 319 ein, die ja die Differentialgleichung derjenigen Kurven in der xy-Ebene ist, die aus den Projektionen der Krümmungskurven besteht. Wenn man diese

Gleichung noch mit $dxdy$ dividiert und dann $dy:dx$ mit y' bezeichnet, lautet sie so:

(4) $$\mathsf{A}\left(x^2 - \frac{xy}{y'}\right) - \mathsf{B}(y^2 - xyy') + \Gamma = 0,$$

wobei zur Abkürzung:

$$\mathsf{A} = AB(C-A), \quad \mathsf{B} = AB(C-B), \quad \Gamma = (A-B)C$$

gesetzt ist. Vollständige Differentiation der Differentialgleichung (4) gibt nun:

$$\left(\frac{\mathsf{A}}{y'^2} + \mathsf{B}\right)(xyy'' + xy'^2 - yy') = 0.$$

Nullsetzen des ersten Faktors liefert, wie man leicht sieht, *nicht* die allgemeine Lösung von (4). Nullsetzen des zweiten Faktors gibt die Differentialgleichung:

$$\frac{yy'' + y'^2}{yy'} = \frac{1}{x},$$

deren linke Seite das vollständige Differential von $\ln(yy')$ ist, so daß ihre Integration $yy' = \text{konst.}\,x$ liefert und weiterhin:

$$y^2 = \text{konst.}\,x^2 + \text{konst.}$$

Die Integralkurven sind also *Kegelschnitte.* Werden sie in der Form:

(5) $$\frac{x^2}{C_1} + \frac{y^2}{C_2} = 1$$

dargestellt, so daß $yy' = -C_2 x : C_1$ wird, so gibt die Substitution von y^2 und yy' in (4) die Bedingung für C_1 und C_2:

(6) $$\mathsf{A}C_1 - \mathsf{B}C_2 + \Gamma = 0,$$

unter der (5) die Integralkurven von (4) vorstellt. Z. B. für das *Ellipsoid:*

(7) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist $A = 1 : a^2$, $B = 1 : b^2$ und $C = 1 : c^2$ zu setzen. Alsdann wird die Bedingung (6) in allgemeinster Weise durch:

$$C_1 = \frac{a^2(a^2-\alpha)}{a^2-c^2}, \quad C_2 = \frac{b^2(b^2-\alpha)}{b^2-c^2}$$

befriedigt, wenn α eine willkürliche Konstante bedeutet. Daher sind nach (5) die Kegelschnitte:

(8) $$\frac{a^2-c^2}{a^2(a^2-\alpha)}x^2 + \frac{b^2-c^2}{b^2(b^2-\alpha)}y^2 = 1$$

die Projektionen der Krümmungskurven des Ellipsoids (7). Dasselbe ergab sich in Nr. 334 unter (6) auf anderem Wege.

803. Differentialgleichungen höherer Ordnung, die der Clairautschen Gleichung entsprechen. Nach Nr. 783 schreibt eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

(1) $$y'' = f(x, y, y')$$

jedem Linienelemente (x, y, y') ihres Bereiches in der xy-Ebene einen bestimmten *Krümmungskreis* zu; denn es sind:

(2) $$x_1 = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y', \quad y_1 = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

die Koordinaten des Mittelpunktes, und es ist:

(3) $$R = \frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''}$$

der Radius dieses Kreises, und diese drei Größen sind bekannt, sobald x, y, y' gegeben werden und y'' durch (1) bestimmt wird. Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung drückt also eine solche *Eigenschaft* aus, *die den Punkten* (x, y) *der Kurven und ihren Krümmungskreisen zukommt.* Insbesondere aber kann diese Eigenschaft von der Lage des Berührungspunktes des Krümmungskreises unabhängig, also eine *Eigenschaft der Krümmungskreise allein* sein. Da die drei Bestimmungsstücke eines Kreises die Koordinaten x_1, y_1 seines Mittelpunktes und sein Radius R sind, wird eine solche Eigenschaft durch eine Gleichung zwischen den drei Größen (2) und (3) allein zum Ausdruck gebracht:

(4) $$\Phi\left(x - \frac{1 + y'^2}{y''} y', \quad y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''}\right) = 0.$$

Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung von dieser besonderen Form hat deshalb als reguläre Integralkurven lauter Kreise; diese Kreise bilden eine zweifach unendliche Schar, indem zwischen den Koordinaten x_1, y_1 ihrer Mittelpunkte und ihren Radien R die Gleichung besteht:

(5) $$\Phi(x_1, y_1, R) = 0,$$

infolge deren eines der drei Bestimmungsstücke durch die beiden anderen bedingt wird. *Integralkurven, die keine Kreise sind, ergeben sich hier nur als singuläre Integralkurven.*

Hiermit ist die Betrachtung in Nr. 721, die sich auf die Clairautsche Differentialgleichung bezog, verallgemeinert worden, und man kann deshalb eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form (4) in gewissem Sinne als eine Verallgemeinerung der Clairautschen Differentialgleichung bezeichnen. Es erübrigt die Beantwortung der Frage, wie man erkennt, ob eine vorgelegte Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{6}$$

auf die Form (4) gebracht werden kann. Dies geschieht so: Aus (2) und (3) ergibt sich durch Auflösung nach x, y und y'':

$$x = x_1 + \frac{R}{\sqrt{1+y'^2}}y', \quad y = y_1 - \frac{R}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad y'' = \frac{\sqrt{1+y'^2}^3}{R}.$$

Werden diese Werte in (6) eingesetzt, so kommt:

$$F\left(x_1 + \frac{R}{\sqrt{1+y'^2}}y', \quad y_1 - \frac{R}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad y', \quad \frac{\sqrt{1+y'^2}^3}{R}\right) = 0. \tag{7}$$

Demnach geht dann und nur dann eine Gleichung von der Form (5) oder (4) hervor, wenn die Gleichung (7) von der Größe y' befreit werden kann.

Wenn man die geometrische Deutung einer gewöhnlichen Differentialgleichung von höherer als zweiter Ordnung benutzt, die in Nr. 784 auseinandergesetzt wurde, kann man leicht zu weiteren Verallgemeinerungen der Clairautschen Differentialgleichung kommen; zunächst gelangt man dabei zu denjenigen *Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren reguläre Integralkurven lauter Kreisevolventen sind.* Wir wollen uns jedoch auf den Fall der Differentialgleichungen zweiter Ordnung (4) beschränken, deren reguläre Integralkurven lauter Kreise sind.

Ihre singulären Elemente zweiter Ordnung (x, y, y', y'') sind nach Nr. 788 der Bedingung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0$$

unterworfen. Wenn die Gleichung (4) in der Form (5) geschrieben wird, worin also x_1, y_1 und R die Größen (2) und (3) bedeuten, lautet diese Bedingung so:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{1+y'^2}{y''^2}y' - \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\frac{1+y'^2}{y''^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial R}\frac{\sqrt{1+y'^2}^3}{y''^2} = 0$$

oder:

$$(8)\qquad y'\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}-\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}-\sqrt{1+y'^2}\,\frac{\partial\Phi}{\partial R}=0.$$

Zu jedem Wertsysteme x_1, y_1, R, das der Gleichung (5) genügt, ergeben sich hieraus zwei zugehörige Werte von y', die übrigens imaginär sein oder zusammenfallen können. Allgemein gesagt also liegen auf jedem Kreise mit den Bestimmungsstücken x_1, y_1, R *zwei* Elemente zweiter Ordnung (x, y, y', y''), die singulär sind. Die Richtungen der Tangenten der zugehörigen Punkte des Kreises ergeben sich aus den beiden Wurzeln y' der Gleichung (8). Eine singuläre Integralkurve muß also, falls sie überhaupt vorhanden ist, überall Kreise aus der durch (5) bestimmten zweifach unendlichen Schar in der zweiten Ordnung berühren, d. h. *jede* singuläre Integralkurve ist eine Einhüllende zweiter Ordnung dieser Kreisschar. Das in Nr. 790 entwickelte Verfahren zur Bestimmung solcher Einhüllender setzte voraus, daß die Gleichung der regulären Integralkurven nach y aufgelöst sei. Da die Auflösung umständlich wäre, gehen wir hier anders vor:

Es seien x_1, y_1 und R Werte, die der Gleichung (5) genügen, so daß der Kreis mit den laufenden Koordinaten x, y:

$$(9)\qquad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=R^2$$

eine reguläre Integralkurve vorstellt. Für seine Linienelemente (x, y, y') ist:

$$(10)\qquad x-x_1+(y-y_1)y'=0.$$

Aus den vier Gleichungen (5), (8), (9) und (10) findet man alsdann durch Elimination von x_1, y_1 und R eine Gleichung zwischen x, y, y' allein:

$$(11)\qquad \Psi(x, y, y')=0,$$

der alle Linienelemente aller singulären Lösungen genügen. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, und ihre regulären Integralkurven sind die singulären Integralkurven der vorgelegten Differentialgleichung (4).

804. Beispiele. Aufgaben in der Ebene, bei denen es sich um die Ermittlung von Kurven auf Grund einer solchen Eigenschaft handelt, die ihren Krümmungskreisen allein vorgeschrieben wird, d. h. die unabhängig davon ist, wo die Berührungspunkte der Krümmungskreise liegen, führen stets auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von der in voriger Nummer besprochenen Art. Die regulären Lösungen der Gleichung werden durch lauter Kreise dargestellt, und deshalb sind in diesem Falle gerade so wie bei der Clairautschen Differentialgleichung in Nr. 721 *nicht die regulären, sondern die singulären Lösungen die einzig interessanten.* Die regulären Lösungen ergeben sich ohne jedes Integrationsverfahren, siehe (5) in voriger Nummer, während die Bestimmung der singulären die *Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung* erfordert, siehe (11) in voriger Nummer.

1. Beispiel: Gesucht werden diejenigen Kurven in der Ebene, deren Krümmungsmittelpunkte (x_1, y_1) *auf einer gegebenen Kurve:*

$$\Phi(x_1, y_1) = 0 \tag{1}$$

liegen. Von vornherein vermutet man, daß diese Aufgabe durch eine Differentialgleichung *erster* Ordnung ausgedrückt wird, weil ja die einfach unendliche Schar aller *Evolventen* der gegebenen Kurve die verlangte Eigenschaft hat, nach Nr. 199. Aber dies ist falsch. Denn man hat die Werte (2) der Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes aus voriger Nummer in die gegebene Gleichung $\Phi = 0$ einzusetzen und gelangt zu der Differentialgleichung *zweiter* Ordnung:

$$\Phi\left(x - \frac{1+y'^2}{y''}y', \quad y + \frac{1+y'^2}{y''}\right) = 0. \tag{2}$$

Die Lösung des Widerspruchs liegt einfach darin, daß die regulären Integralkurven dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung aus der zweifach unendlichen Schar aller Kreise bestehen, deren Mittelpunkte auf der gegebenen Kurve (1) liegen, während die Evolventen der Kurve (1) die singulären Lösungen von (2) sind. Nach den Vorschriften der vorigen Nummer, wobei man von der Gleichung (9) ganz absehen kann, weil sie nur R bestimmt, das in (1) nicht vorkommt, geht die Differentialgleichung erster Ordnung der Evolventen durch Elimination von x_1 und y_1 aus den drei Gleichungen:

$$\Phi(x_1, y_1) = 0, \quad y'\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0, \quad x - x_1 + (y - y_1)y' = 0 \tag{3}$$

hervor. Durch Elimination von y' aus der zweiten und dritten Gleichung ergibt sich:

$$(x - x_1)\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + (y - y_1)\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0,$$

d. h. nach (4) in Nr. 169 die Gleichung der Tangente des Punktes (x_1, y_1) der Kurve (1), geschrieben in den laufenden Koordinaten x, y; ferner besagt die zweite Gleichung (3), daß das Linienelement (x, y, y') zu dieser Tangente senkrecht ist. Mithin sind die singulären Lösungen von (2) die orthogonalen Trajektorien der Tangenten der Kurve (1), also in der Tat die Evolventen, nach Nr. 201. Wie man sie berechnen kann, wenn die Bogenlänge der Kurve (1) gefunden ist, erhellt aus Nr. 200 und 201. Vgl. auch das Beispiel in Nr. 727.

2. *Beispiel: Gesucht werden diejenigen Kurven in der Ebene, deren Krümmungskreise in bezug auf einen festen Punkt O eine Potenz haben, die dem Quadrate des Krümmungsradius proportional ist.* Wird O als Anfangspunkt gewählt und sind x_1, y_1, R wieder die Bestimmungsstücke des Krümmungskreises, so ist die Potenz gleich $x_1^2 + y_1^2 - R^2$. Daher wird verlangt:

$$x_1^2 + y_1^2 - R^2 = aR^2,$$

wo a konstant ist. Demnach ist:

$$\Phi = x_1^2 + y_1^2 - (1 + a)R^2 = 0 \tag{4}$$

die Gleichung $\Phi = 0$ der vorigen Nummer, so daß man zu der Differentialgleichung zweiter Ordnung kommt:

$$x^2 + y^2 - 2(xy' - y)\frac{1 + y'^2}{y''} - a\frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2} = 0. \tag{5}$$

Ihre regulären Integralkurven sind diejenigen Kreise, deren Mittelpunktskoordinaten x_1, y_1 und Radien R der Bedingung (4) Genüge leisten und also nur dann reell sind, wenn $a > -1$ ist. Die singulären Integralkurven von (5) sind die regulären Integralkurven derjenigen Differentialgleichung erster Ordnung, die man durch Elimination von x_1, y_1 und R aus der Gleichung (4) und aus den drei Gleichungen:

$$x_1 y' - y_1 + (1 + a)R\sqrt{1 + y'^2} = 0,$$
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2, \quad x - x_1 + (y - y_1)y' = 0$$

gewinnt, nämlich der Differentialgleichung:

$$\frac{xy' - y}{x + yy'} = \sqrt{\frac{-a}{1+a}}.$$

Sie sind nur dann reell, wenn a zwischen -1 und 0 liegt, und zwar ergeben sich nach dem Beispiele in Nr. 714 diejenigen *logarithmischen Spiralen*, die alle Radienvektoren unter einem konstanten Winkel μ schneiden, dessen Tangens einen der beiden Werte:

$$\operatorname{tg}\mu = \sqrt{\frac{-a}{1+a}}$$

hat.

805. Lineare Differentialgleichungen. Eine gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung für y heißt *linear*, wenn $y^{(r)}$ vermöge ihrer eine ganze lineare Funktion von $y, y', \ldots y^{(r-1)}$ ist:

$$(1) \qquad y^{(r)} = f_0(x)y + f_1(x)y' + \cdots + f_{r-1}(x)y^{(r-1)} + F(x).$$

Verwandelt man diese Differentialgleichung nach der Methode in Nr. 663 in ein System erster Ordnung in der Normalform, indem man außer y noch die $r-1$ Ableitungen $y', y'', \ldots y^{(r-1)}$ als unbekannte Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_{r-1}$ einführt:

$$y_1 = y', \quad y_2 = y'', \quad \cdots y_{r-1} = y^{(r-1)},$$

so ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \cdots \quad \frac{dy_{r-2}}{dx} = y_{r-1},$$

$$\frac{dy_{r-1}}{dx} = f_0(x)y + f_1(x)y_1 + \cdots + f_{r-1}(x)y_{r-1} + F(x).$$

Dies System gehört zu den in Nr. 774 betrachteten linearen Systemen. Das zugehörige verkürzte lineare System geht durch Streichen von $F(x)$ hervor. Dementsprechend heißt diejenige lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung, die aus (1) durch Streichen von $F(x)$ entsteht, die *zugehörige verkürzte lineare* Differentialgleichung. Weil ihre Lösungen nicht mit denen von (1) übereinstimmen werden, seien sie mit z bezeichnet, so daß also:

$$(2) \qquad z^{(r)} = f_0(x)z + f_1(x)z' + \cdots + f_{r-1}(x)z^{(r-1)}$$

die verkürzte Gleichung vorstellt.

Es ist nun leicht, die Betrachtung in Nr. 774, die sich auf lineare Systeme bezog, auf das oben gefundene System anzuwenden und dadurch auf die vorgelegte Differentialgleichung (1) zu übertragen, wodurch man erkennt, daß die Gleichung (1) vollständig integriert ist, sobald man die allgemeine Lösung z der verkürzten Gleichung (2) und irgend eine Partikularlösung $\varphi(x)$ von (1) kennt. Doch ist es ebenso einfach, dies direkt zu zeigen: Für $\varphi(x)$ gilt nach (1) die Gleichung:

$$\varphi^{(r)}(x) = f_0(x)\varphi(x) + f_1(x)\varphi'(x) + \cdots + f_{r-1}(x)\varphi^{(r-1)}(x) + F(x).$$

Wird sie von (1) subtrahiert und dann $y - \varphi(x) = z$ gesetzt, so geht für z sofort die verkürzte Gleichung (2) hervor, d. h.:

Satz 11: Ist $\varphi(x)$ eine Partikularlösung der linearen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$y^{(r)} = f_0(x)y + f_1(x)y' + \cdots + f_{r-1}(x)y^{(r-1)} + F(x)$$

und z die allgemeine Lösung der zugehörigen verkürzten linearen Gleichung:

$$z^{(r)} = f_0(x)z + f_1(x)z' + \cdots + f_{r-1}(x)z^{(r-1)},$$

so stellt $y = z + \varphi(x)$ die allgemeine Lösung der unverkürzten Gleichung vor.

Man kann aber auch die Gleichung (1) auf eine verkürzte Gleichung $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführen, indem man die Methode von Nr. 802 benutzt. Denn aus (1) folgt durch vollständige Differentiation nach x:

$$y^{(r+1)} = f_0'y + (f_1' + f_0)y' + \cdots + (f_{r-1}' + f_{r-2})y^{(r-1)} + f_{r-1}y^{(r)} + F'.$$

Wird hiervon die mit $F' : F$ multiplizierte Gleichung (1) abgezogen, so kommt:

$$(3)\quad y^{(r+1)} = \left(f_0' - \frac{F'}{F}f_0\right)y + \left(f_1' + f_0 - \frac{F'}{F}f_1\right)y' + \cdots$$
$$+ \left(f_{r-1}' + f_{r-2} - \frac{F'}{F}f_{r-1}\right)y^{(r-1)} + \left(f_{r-1} + \frac{F'}{F}\right)y^{(r)}.$$

Dies aber ist eine verkürzte lineare Differentialgleichung $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Wenn $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_{r+1})$ ihre allgemeine Lösung mit $r+1$ willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots, C_{r+1}$ bedeutet, gibt es also eine gewisse Bedingung, die man den Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_{r+1}$ auferlegen muß, damit sich daraus die allgemeine Lösung der vorgelegten Gleichung (1) ergibt.

Was nun die verkürzten linearen Differentialgleichungen betrifft, so kann man den Satz 10 von Nr. 770 leicht auf sie übertragen. Wenn wir bei der Formulierung des Ergebnisses wieder, wie gewöhnlich, y statt z schreiben, geht hervor:

Satz 12: Eine gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung für eine Funktion y von x hat dann und nur dann die Eigenschaft, daß sich ihre allgemeine Lösung linear mit r willkürlichen konstanten Koeffizienten $C_1, C_2, \ldots C_r$ aus irgend welchen r linear unabhängigen Partikularlösungen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots \varphi_r(x)$ in der Form:

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_r\varphi_r(x)$$

zusammensetzen läßt, wenn die Differentialgleichung eine verkürzte lineare ist, d. h. die Form hat:

$$y^{(r)} = f_0(x)y + f_1(x)y' + \cdots + f_{r-1}(x)y^{(r-1)}.$$

Übrigens ergibt sich dieser Satz auch leicht aus Satz 4 von Nr. 785.

Kennt man die allgemeine Lösung:

$$z = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_r\varphi_r(x) \tag{4}$$

der verkürzten linearen Differentialgleichung (2), so kann man die der nicht verkürzten Differentialgleichung (1) auch nach der schon in Nr. 774 entwickelten *Methode der Variation der Konstanten* durch Quadraturen ermitteln: Man ersetzt die Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$ durch r Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_r$ von x, betrachtet also die Funktion:

$$y = \varphi_1(x)u_1(x) + \varphi_2(x)u_2(x) + \ldots + \varphi_r(x)u_r(x) \tag{5}$$

und versteht unter $u_1, u_2, \ldots u_r$ solche r Funktionen, deren Ableitungen den r Bedingungen genügen:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1 u_1' + \varphi_2 u_2' + \cdots + \varphi_r u_r' = 0, \\ \varphi_1' u_1' + \varphi_2' u_2' + \cdots + \varphi_r' u_r' = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_1^{(r-2)} u_1' + \varphi_2^{(r-2)} u_2' + \cdots + \varphi_r^{(r-2)} u_r' = 0, \\ \varphi_1^{(r-1)} u_1' + \varphi_2^{(r-1)} u_2' + \cdots + \varphi_r^{(r-1)} u_r' = F(x). \end{array}\right. \tag{6}$$

Die durch (5) definierte Funktion hat dann die Ableitungen bis zur $(r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$y^{(k)} = \varphi_1^{(k)}u_1 + \varphi_2^{(k)}u_2 + \cdots + \varphi_r^{(k)}u_r \quad (k = 1, 2, \cdots r-1)$$

und die Ableitung r^{ter} Ordnung:

$$y^{(r)} = \varphi_1^{(r)}u_1 + \varphi_2^{(r)}u_2 + \cdots + \varphi_r^{(r)}u_r + F(x).$$

Hieraus folgt, daß y der Differentialgleichung (1) genügt, weil $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$ die verkürzte Gleichung (2) erfüllen. Nun lassen sich $u'_1, u_2', \ldots u_r'$ in der Tat aus (6) berechnen, weil die Determinante:

$$(7) \qquad D = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdot & \varphi_r \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdot & \varphi_r' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1^{(r-1)} & \varphi_2^{(r-1)} & \cdot & \varphi_r^{(r-1)} \end{vmatrix}$$

nach Satz 4, Nr. 785, von Null verschieden ist. Bezeichnet D_k die zum k^{ten} Elemente der letzten Zeile gehörige Unterdeterminante, so gibt (6):

$$u_k' = \frac{D_k}{D} F(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots r).$$

Wenn also:

$$(8) \qquad \psi_k(x) = \int \frac{D_k}{D} F(x) dx \qquad (k = 1, 2, \ldots r)$$

gesetzt wird, wobei alle Quadraturen von derselben bestimmten unteren Grenze aus erstreckt sein mögen, ist $u_k = \psi_k +$ Konst. zu setzen, d. h. nach (5) wird:

$$(9) \quad y = \varphi_1(x)\psi_1(x) + \cdots + \varphi_r(x)\psi_r(x) + C_1\varphi_1(x) + \cdot\cdot + C_r\varphi_r(x)$$

eine Lösung von (1). Dies ist die *allgemeine* Lösung, weil man die r willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$ aus dieser Gleichung und den $r - 1$ durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen für $y', y'', \ldots y^{(r-1)}$ wegen $D \neq 0$ berechnen kann.

Bezüglich der *verkürzten* linearen Differentialgleichung (2) sei noch bemerkt, daß sie zu denjenigen gehört, die nach der in Nr. 800 unter (2) betrachteten Art *homogen* sind, so daß sich ihre Ordnung um eine Einheit erniedrigen läßt, wenn man $z' : z$ als neue unbekannte Funktion einführt; jedoch ist die hervorgehende Differentialgleichung im allgemeinen nicht mehr linear. Beispielsweise ergibt sich aus der verkürzten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$z'' = f_0(x)z + f_1(x)z',$$

wenn man $Z = z' : z$ setzt, die *Riccatische Differentialgleichung* (vgl. Nr. 718):

$$Z' = f_0(x) + f_1(x)Z - Z^2.$$

806. Verkürzte lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wenn insbesondere eine solche verkürzte lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung vorliegt, in der die Koeffizienten *konstante* Werte $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$ haben:

$$(1) \qquad y^{(r)} = a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \cdots + a_{r-1} y^{(r-1)},$$

geht ein *d'Alembertsches System* (vgl. Nr. 771) hervor, sobald man wie in voriger Nummer $y', y'', \ldots y^{(r-1)}$ als unbekannte Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_{r-1}$ neben y selbst einführt, nämlich das System:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1, \quad \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \cdots \quad \dfrac{dy_{r-2}}{dx} = y_{r-1}, \\[2ex] \dfrac{dy_{r-1}}{dx} = a_0 y + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_{r-1} y_{r-1}. \end{cases}$$

Die charakteristische Gleichung dieses Systems ist (vgl. (4) in Nr. 771):

$$\begin{vmatrix} -\varrho & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & -\varrho & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & -\varrho & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & . & a_{r-2} & a_{r-1} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(3) \qquad \varrho^r = a_0 + a_1 \varrho + a_2 \varrho^2 + \cdots + a_{r-1} \varrho^{r-1}.$$

Deshalb heißt (3) auch *die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung* (1).

Wenn sie lauter verschiedene reelle Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r$ *hat,* ergibt sich aus Nr. 771 als die allgemeine Lösung von (1):

$$(4) \qquad y = C_1 e^{\varrho_1 x} + C_2 e^{\varrho_2 x} + \cdots + C_r e^{\varrho_r x}.$$

Dabei sind $C_1, C_2, \ldots C_r$ die Integrationskonstanten. In der Tat ist nach (4):

$$y^{(k)} = C_1 \varrho_1^{\,k} e^{\varrho_1 x} + C_2 \varrho_2^{\,k} e^{\varrho_2 x} + \cdots + C_r \varrho_r^{\,k} e^{\varrho_r x}$$
$$(k = 1, 2, \ldots r).$$

Substitution dieser Werte in (1) und Vergleichung der Koeffizienten von C_k auf beiden Seiten gibt dann:

$$\varrho_k^{\,r} = a_0 + a_1 \varrho_k + a_2 \varrho_k^{\,2} + \cdots + a_{r-1} \varrho_k^{\,r-1} \quad (k = 1, 2, \ldots r),$$

und diese Gleichung gilt, weil ϱ_k eine Wurzel der charakteristischen Gleichung (3) ist. Außerdem sind in (4) alle r Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$ wirklich wesentlich, denn sonst müßte nach Satz 6, Nr. 786, die Determinante:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & . & \varrho_r \\ \varrho_1^2 & \varrho_2^2 & \varrho_3^2 & . & \varrho_r^2 \\ . & . & . & . & . \\ \varrho_1^{r-1} & \varrho_2^{r-1} & \varrho_3^{r-1} & . & \varrho_r^{r-1} \end{vmatrix}$$

gleich Null sein, was aber bekanntlich nur dann der Fall ist, wenn zwei der r Werte $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r$ übereinstimmen. Dies wurde ausdrücklich ausgeschlossen.

Sind die Wurzeln ϱ der charakteristischen Gleichung zwar sämtlich verschieden, aber zum Teil imaginär, so treten stets konjugiert komplexe Wurzeln auf. Ist z. B. $\varrho_1 = \alpha + i\beta$, so ist eine zweite Wurzel $\varrho_2 = \alpha - i\beta$. Wenn man dann in (4) auch für C_1 und C_2 konjugiert komplexe Zahlen $A + iB$ und $A - iB$ setzt, haben die beiden ersten Glieder in dem Ausdrucke (4) die Summe:

$$(A + iB)e^{(\alpha+i\beta)x} + (A - iB)e^{(\alpha-i\beta)x},$$

die sich nach (5) in Nr. 373 in der reellen Form schreiben läßt:

$$2(A\cos\beta x - B\sin\beta x)e^{\alpha x}.$$

So kann man überhaupt stets, falls nur alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung voneinander verschieden sind, die allgemeine Lösung (4) auf eine reelle Form bringen.

Dagegen versagt die Formel (4), falls die charakteristische Gleichung (3) wenigstens eine Doppelwurzel hat. Hier stellt zwar (4) immer noch eine Lösung dar, aber nicht die allgemeine, weil in diesem Falle die Determinante (5) verschwindet und daher nicht alle r Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$ in (4) wesentlich sind. Aber aus den Ergebnissen von Nr. 772, vgl. insbesondere Satz 12 daselbst, folgt sofort:

Satz 13: Liegt die verkürzte lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$y^{(r)} = a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \cdots + a_{r-1} y^{(r-1)}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$ vor und hat ihre charakteristische Gleichung:

$$\varrho^r = a_0 + a_1\varrho + a_2\varrho^2 + \cdots + a_{r-1}\varrho^{r-1}$$

gerade μ *verschiedene Wurzeln* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\mu$, *die bzw.* m_1*-fach,* m_2*-fach,* ... m_μ*-fach sind, so setzt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung linear mit willkürlichen konstanten Koeffizienten aus den* r *Funktionen:*

$$e^{\varrho_j x}, \quad x e^{\varrho_j x}, \ldots x^{m_j - 1} e^{\varrho_j x} \qquad (j = 1, 2, \ldots \mu)$$

zusammen.

Wenn dabei imaginäre Wurzeln auftreten, kann man nach dem vorhin angegebenen Verfahren doch stets zu einer reellen Form der allgemeinen Lösung gelangen.

§ 4. Infinitesimale Transformationen gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung.[1])

807. Mehrmal erweiterte eingliedrige Gruppe von Punkt-Transformationen. In diesem Paragraphen soll ein kurzer Einblick in diejenigen von *Lie* herrührenden Integrationsmethoden gegeben werden, die man bei gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung mit bekannten infinitesimalen Transformationen anwenden kann. Zu diesem Zwecke bedarf es einiger Vorbereitungen.

Vermöge einer *Transformation:*

$$(1) \qquad x = \varphi(x_0, y_0), \quad y = \psi(x_0, y_0)$$

der Punkte (x_0, y_0) der Ebene in neue Punkte (x, y) geht jede Kurve in eine neue Kurve und daher auch jedes Element r^{ter} Ordnung $(x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(r)})$, vgl. Nr. 788, in ein neues Element r^{ter} Ordnung $(x, y, y', \ldots y^{(r)})$ über. Für die Linienelemente wurde dies schon in Nr. 745 erörtert. Versteht man unter x_0 und y_0 irgendwelche Funktionen einer Hilfsveränderlichen τ, so bedeuten sie die laufenden Koordinaten einer Kurve, und längs der Kurve ist y_0 als eine Funktion von x_0 aufzufassen.

1) Dieser ziemlich knapp gefaßte Paragraph kann ohne Nachteil für das Verstehen des Späteren überschlagen werden. Ausdrücklich sei bemerkt, daß in den Nummern 809—812 mehrfach begriffliche Schlußfolgerungen gemacht worden sind, deren Umsetzung in rein analytische Schlüsse zu viel Platz beansprucht hätte. Man findet diese analytischen Beweise in dem Werke von *Lie*: „*Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*", Leipzig 1891.

Die Ableitungen der Funktion y_0 nach x_0 sind alsdann durch die Formeln definiert:

$$(2)\qquad y_0' = \frac{dy_0 : d\tau}{dx_0 : d\tau},\quad y_0'' = \frac{dy_0' : d\tau}{dx_0 : d\tau},\ \dots\ y_0^{(r)} = \frac{dy_0^{(r-1)} : d\tau}{dx_0 : d\tau}.$$

Infolge von (1) sind aber auch x und y als Funktionen von τ aufzufassen, so daß es auch hier Ableitungen $y', y'', \dots y^{(r)}$ von y nach x gibt, definiert durch die Formeln:

$$(3)\qquad y' = \frac{dy : d\tau}{dx : d\tau},\quad y'' = \frac{dy' : d\tau}{dx : d\tau},\ \dots\ y^{(r)} = \frac{dy^{(r-1)} : d\tau}{dx : d\tau}.$$

Nach (1) ist nun zunächst:

$$y' = \frac{d\psi : d\tau}{d\varphi : d\tau} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x_0} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y_0}\,y_0'}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}\,y_0'},$$

vgl. (2) in Nr. 745 (wo x_0, y_0 mit x, y, dagegen x, y mit $\bar{x}, \bar{y}$ bezeichnet waren). Dieser Wert von y' ist eine Funktion von x_0, y_0 und y_0', die zur Abkürzung $\psi_1(x_0, y_0, y_0')$ heißen möge. Alsdann gibt die zweite Formel (3):

$$y'' = \frac{d\psi_1 : d\tau}{d\varphi : d\tau} = \frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_0} + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_0}\,y_0' + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_0'}\,y_0''}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}\,y_0'},$$

und dies ist eine Funktion ψ_2 von x_0, y_0, y_0', y_0''. So kann man fortfahren und allgemein $y^{(r)}$ als eine Funktion ψ_r von $x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(r)}$ darstellen. Dadurch gewinnt man diejenigen Gleichungen:

$$(4)\qquad y' = \psi_1(x_0, y_0, y_0'),\ \dots\ y^{(r)} = \psi_r(x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(r)}),$$

die man zu (1) hinzufügen muß, um den analytischen Ausdruck der *r-mal erweiterten Punkt-Transformationen* (1) zu bekommen, d. h. derjenigen *Transformation der Elemente* r^{ter} *Ordnung, die infolge dieser Punkt-Transformation stattfindet.* Wohlbemerkt kann man die Formeln (4), die von τ frei sind, aufstellen, ohne zu wissen, welche Funktionen von τ unter x_0 und y_0 verstanden werden. Sie gelten daher für ganz beliebige Kurven.

Ein System von der Form:

$$(5)\qquad \frac{dx}{dt} = \xi(x, y),\quad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y),$$

wobei ξ und η und ihre partiellen Ableitungen bis zur r^{ten} Ordnung einschließlich in einem gewissen Bereiche stetige Funktionen von x und y, aber *frei von* t sind, definiert nach Nr. 734 eine *eingliedrige Gruppe von Punkttransformationen* $\mathfrak{T}_t$, dargestellt durch das System derjenigen Hauptlösungen:

$$(6) \qquad x = \varphi(x_0, y_0, t), \quad y = \psi(x_0, y_0, t),$$

die für $t = 0$ die Anfangswerte x_0 und y_0 haben. Bei jeder Transformation $\mathfrak{T}_t$ dieser Gruppe werden alle Elemente r^{ter} Ordnung $(x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(r)})$ in neue Elemente r^{ter} Ordnung $(x, y, y', \ldots y^{(r)})$ verwandelt, und die Gleichungen für die r-mal erweiterten Transformationen der Gruppe lassen sich nach dem angegebenen Verfahren aus den Gleichungen (6) ableiten. Dabei tritt noch der Parameter t in die Formeln ein, die nach wie vor von τ frei sind. Die Gesamtheit der Formeln (6) und der aus ihnen abgeleiteten Formeln für $y', y'', \ldots y^{(r)}$ sei durch die Gleichungen dargestellt:

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \varphi(x_0, y_0, t), \quad y = \psi(x_0, y_0, t), \\ y' = \psi_1(x_0, y_0, y_0', t), \\ y'' = \psi_2(x_0, y_0, y_0', y_0'', t), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y^{(r)} = \psi_r(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots y_0^{(r)}, t). \end{array}\right.$$

Sie definieren für jeden Wert von t eine Transformation der Elemente r^{ter} Ordnung, und alle diese Transformationen bilden eine *Gruppe*. Denn die Aufeinanderfolge der zu zwei Werten t_1 und t_2 von t gehörigen Transformationen $\mathfrak{T}_{t_1}$ und $\mathfrak{T}_{t_2}$ der vorgelegten eingliedrigen Gruppe ist nach Satz 18, Nr. 732, durch die Transformation $\mathfrak{T}_{t_1+t_2}$ zu ersetzen, und da $\mathfrak{T}_{t_1}$, $\mathfrak{T}_{t_2}$ und $\mathfrak{T}_{t_1+t_2}$ diejenigen Transformationen der Elemente r^{ter} Ordnung nach sich ziehen, die durch (7) für $t = t_1$, $t = t_2$ und $t = t_1 + t_2$ dargestellt werden, muß dasselbe für die r-mal erweiterten Transformationen gelten. Weil zu $t = 0$ die identische Transformation gehört (vgl. Nr. 732), haben die Funktionen (7) für $t = 0$ die Werte $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots y_0^{(r)}$.

Werden x_0 und y_0 wie vorhin als Funktionen einer Hilfsveränderlichen τ betrachtet, wird also irgend eine Kurve mit den laufenden Koordinaten x_0 und y_0 ins Auge gefaßt, längs deren y_0 eine Funktion von x_0 mit den Ableitungen (2) ist, so sind

807]

x und y nach (6) Funktionen von t und τ. Deshalb wird man es bei dieser Auffassung vorziehen, das System (5) so zu schreiben:

$$(8) \qquad x_t = \xi(x, y), \quad y_t = \eta(x, y).$$

Man kann nun leicht auch die Ableitungen von y', y'', ... $y^{(r)}$ nach t berechnen, die wir durch Anhängen des Index t bezeichnen. Denn nach (3) ist:

$$(9) \qquad y_t' = \frac{y_{t\tau} x_\tau - x_{t\tau} y_\tau}{x_\tau^2}, \quad y_t'' = \frac{y'_{t\tau} x_\tau - x_{t\tau} y_\tau'}{x_\tau^2}, \ldots$$

Werden die Werte (8) in die erste Formel eingesetzt und wird $y_\tau : x_\tau$ wieder mit y' bezeichnet, so kommt (wie schon in Nr. 746):

$$y_t' = \eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2$$

oder auch:

$$(10) \qquad y_t' = \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx},$$

wenn das gerade Differentiationszeichen die vollständige Differentiation nach x andeutet. Der Wert von y_t' stellt sich daher als eine Funktion η_1 von x, y und y' dar, so daß die zweite Formel (9) mit Rücksicht auf die erste Gleichung (8) gibt:

$$y_t'' = \frac{x_\tau \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} - y_\tau' \frac{\partial \xi}{\partial \tau}}{x_\tau^2}$$

oder, wenn man dies ausrechnet und $y_\tau : x_\tau$ durch y' und $y_\tau' : x_\tau$ durch y'' ersetzt:

$$y_t'' = \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} y' + \frac{\partial \eta_1}{\partial y'} y'' - y'' \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} y' \right).$$

Hierfür kann man kürzer schreiben:

$$(11) \qquad y_t'' = \frac{d\eta_1}{dx} - y'' \frac{d\xi}{dx},$$

und es ist leicht, entsprechend den Formeln (10) und (11) zu denen für die Ableitungen von y''', ... $y^{(r)}$ nach t zu gelangen.

Erinnert man sich noch daran, daß die Funktionen x, y, y', ... $y^{(r)}$ von t, die (7) angibt, für $t = 0$ die Anfangswerte x_0, y_0, y_0', ... $y_0^{(r)}$ haben, so findet man mit Rücksicht auf Satz 6 von Nr. 767 den folgenden

Satz 14: Durch r-malige Erweiterung aller Transformationen der eingliedrigen Gruppe in zwei Veränderlichen x, y:

$$x = \varphi(x_0, y_0, t), \quad y = \psi(x_0, y_0, t),$$

die durch ein System:

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y),$$

erzeugt wird, ergibt sich eine eingliedrige Gruppe:

$$x = \varphi(x_0, y_0, t), \quad y = \psi(x_0, y_0, t), \quad y' = \psi_1(x_0, y_0, y_0', t),$$
$$y'' = \psi_2(x_0, y_0, y_0', y_0'', t), \ldots y^{(r)} = \psi_r(x_0, y_0, y_0', y_0'', \cdots y_0^{(r)}, t)$$

von Transformationen der Elemente r^{ter} Ordnung $(x_0, y_0, y_0', \cdots y_0^{(r)})$ in neue Elemente r^{ter} Ordnung $(x, y, y', \ldots y^{(r)})$, und zwar wird diese Gruppe in $r + 2$ Veränderlichen $x, y, y', \ldots y^{(r)}$ erzeugt von dem System:

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y), \qquad \frac{dy'}{dt} = \eta_1(x, y, y'),$$
$$\frac{dy''}{dt} = \eta_2(x, y, y', y''), \ldots \frac{dy^{(r)}}{dt} = \eta_r(x, y, y', y'', \cdots y^{(r)}),$$

wobei $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r$ vermöge der Rekursionsformeln:

$$\eta_1 = \frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx}, \quad \eta_2 = \frac{d\eta_1}{dx} - y''\frac{d\xi}{dx}, \ldots \eta_r = \frac{d\eta_{r-1}}{dx} - y^{(r)}\frac{d\xi}{dx}$$

hervorgehen. Vorausgesetzt ist ein Bereich, innerhalb dessen ξ und η und ihre partiellen Ableitungen bis zur r^{ten} Ordnung einschließlich stetige Funktionen von x und y sind.

Daß man nicht auch die Stetigkeit der Ableitungen $(r + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von ξ und η zu fordern braucht, ist gerade so wie in Nr. 746 für den Fall $r = 1$ einzusehen.

Die hervorgegangene Gruppe von Transformationen der Elemente r^{ter} Ordnung heißt die *r-mal erweiterte eingliedrige Gruppe der Punkt-Transformationen.*

Zur Vermeidung irriger Auffassungen dürfte es angebracht erscheinen, darauf besonders hinzuweisen, daß man in dem neuen System die $r + 2$ Größen $x, y, y', \ldots y^{(r)}$ als voneinander unabhängige Veränderliche aufzufassen hat. Denn man kann ihnen irgend welche bestimmte Werte $x_0, y_0, y_0', \cdots y_0^{(r)}$ erteilen, weil es stets eine Funktion $y = f(x)$ gibt, die so beschaffen ist, daß $f(x), f'(x), \ldots f^{(r)}(x)$ für $x = x_0$ gerade diese Werte $y_0, y_0', \cdots y_0^{(r)}$ annehmen. Man darf auch nicht etwa y' mit dem Werte $dy : dx$ verwechseln, der aus den beiden Gleichungen des vorgelegten Systems (5) hervorgeht, muß sich vielmehr daran erinnern, daß y' nach der unter (3) angegebenen Definition $y_\tau : x_\tau$ bedeutet, während der Wert $dy:dx$, der aus (5) folgt, gleich $y_t : x_t$ ist.

808. Beispiele.

1. Beispiel: Die eingliedrige Gruppe, die von dem System:

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = y$$

erzeugt wird:

$$(2)\qquad x = x_0, \quad y = y_0 e^t,$$

besteht aus allen denjenigen *Transformationen, die die Abszissen* x_0 *ungeändert lassen, dagegen alle Ordinaten* y_0 *nach einem konstanten Verhältnisse vergrößern oder verkleinern.* Hier ist $\xi = 0$, $\eta = y$; daher geben die Rekursionsformeln des Satzes 14:

$$\eta_1 = \frac{dy}{dx} = y', \quad \eta_2 = \frac{d\eta_1}{dx} = y'', \ldots \eta_r = \frac{d\eta_{r-1}}{dx} = y^{(r)}.$$

Die r-mal erweiterte Gruppe wird somit von dem System:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = y, \quad \frac{dy'}{dt} = y', \quad \frac{dy''}{dt} = y'', \ldots \frac{dy^{(r)}}{dt} = y^{(r)}$$

erzeugt, das offenbar das folgende System von Hauptlösungen hat:

$$x = x_0, \quad y = y_0 e^t, \quad y' = y_0' e^t, \quad y'' = y_0'' e^t, \ldots y^{(r)} = y_0^{(r)} e^t.$$

Dies also sind die Gleichungen der r-mal erweiterten Gruppe. Wird $e^t = c$ gesetzt, so folgt: Wenn man alle Ordinaten mit c multipliziert, geht irgend ein Element r^{ter} Ordnung $(x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(r)})$ einer Kurve in dasjenige Element r^{ter} Ordnung über, dessen Bestimmungsstücke sind:

$$x = x_0, \quad y = cy_0, \quad y' = cy_0', \quad y'' = cy_0'', \ldots y_0^{(r)} = cy_0^{(r)}.$$

Vgl. hierzu auch den Fall (2) in Nr. 800.

2. Beispiel: Bei der *eingliedrigen Gruppe aller Drehungen um den Anfangspunkt O*, die nach dem ersten Beispiele in Nr. 733 von dem System:

$$(3)\qquad \frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x$$

erzeugt wird, ist $\xi = -y$, $\eta = x$, so daß die Rekursionsformeln des Satzes 14 ergeben:

$$\eta_1 = \frac{dx}{dx} + y'\frac{dy}{dx} = 1 + y'^2, \quad \eta_2 = \frac{d(1+y'^2)}{dx} + y''\frac{dy}{dx} = 3y'y'',$$

$$\eta_3 = \frac{d\,3y'y''}{dx} + y'''\frac{dy}{dx} = 3y''^2 + 4y'y'''$$

usw. Die *zweimal* erweiterte Gruppe wird daher von dem System:

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x, \quad \frac{dy'}{dt} = 1 + y'^2, \quad \frac{dy''}{dt} = 3y'y''$$

erzeugt, dessen drei erste Gleichungen schon integriert wurden. Es kommt, vgl. das dritte Beispiel in Nr. 746:

$$x = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y = x_0 \sin t + y_0 \cos t, \quad y' = \frac{\sin t + y_0' \cos t}{\cos t - y_0' \sin t}.$$

Die vierte Gleichung des Systems gibt:

$$\ln \frac{y''}{y_0''} = 3\int_0^t \frac{\sin t + y_0' \cos t}{\cos t - y_0' \sin t}\, dt = -3 \ln(\cos t - y_0' \sin t),$$

so daß als vierte Gleichung der zweimal erweiterten Gruppe hervorgeht:

$$y'' = \frac{y_0''}{(\cos t - y_0' \sin t)^3}.$$

809. Differentialinvarianten. Wie bisher betrachten wir die eingliedrige Gruppe, die von einem System:

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y)$$

oder von der infinitesimalen Transformation:

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

(vgl. Nr. 735) erzeugt wird. Wieder sei ein Bereich vorausgesetzt, innerhalb dessen ξ und η nebst ihren partiellen Ableitungen bis zur r^{ten} Ordnung einschließlich stetig sind.

Die Gleichungen der r-mal erweiterten Gruppe sind diejenigen Hauptlösungen des Systems von $r+2$ Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \xi(x, y), \quad \dfrac{dy}{dt} = \eta(x, y), \quad \dfrac{dy'}{dt} = \eta_1(x, y, y'), \\[2ex] \dfrac{dy''}{dt} = \eta_2(x, y, y', y''), \ldots \dfrac{dy^{(r)}}{dt} = \eta_r(x, y, y', y'', \ldots y^{(r)}), \end{cases}$$

die für $t = 0$ die Anfangswerte $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots y_0^{(r)}$ haben. Wird die Umgebung einer Stelle (x, y) des Bereiches ins Auge gefaßt, während $y', y'', \ldots y^{(r)}$ beliebige Werte haben können, so erfüllt das System (2) die Bedingungen, unter denen die Betrachtungen von Nr. 762, 763 anwendbar sind.

Das System hat danach gerade $r+2$ unabhängige *Integrale.* Hier sollen nun insbesondere diejenigen Integrale J besprochen werden, *die von t selbst frei sind.* Nach Satz 1 von Nr. 762 ist die Bedingung für ein solches Integral J diese:

$$\xi\frac{\partial J}{\partial x}+\eta\frac{\partial J}{\partial y}+\eta_1\frac{\partial J}{\partial y'}+\cdots+\eta_r\frac{\partial J}{\partial y^{(r)}}=0. \tag{3}$$

Dividiert man die Gleichung (3) mit irgend einem der Koeffizienten, z. B. mit ξ, so geht eine solche partielle Differentialgleichung für J hervor:

$$\frac{\partial J}{\partial x}+\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial J}{\partial y}+\frac{\eta_1}{\xi}\frac{\partial J}{\partial y'}+\cdots+\frac{\eta_r}{\xi}\frac{\partial J}{\partial y^{(r)}}=0,$$

die sich der des Satzes 3 von Nr. 762 unterordnet, wenn dort $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ durch $x, y, y', \ldots y^{(r)}$ ersetzt werden. Danach sind die von t freien Integrale des Systems (2) identisch mit allen Integralen des Systems:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\eta}{\xi},\quad \frac{dy'}{dx}=\frac{\eta_1}{\xi},\ldots \frac{dy^{(r)}}{dx}=\frac{\eta_r}{\xi}, \tag{4}$$

das sich auch als totales System so schreiben läßt:

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dy'}{\eta_1}=\cdots=\frac{dy^{(r)}}{\eta_r}. \tag{5}$$

Wie zum Schlusse von Nr. 807 sei dabei hervorgehoben, daß man von der Deutung der Größen $y', y'', \ldots y^{(r)}$ als Ableitungen von y nach x abzusehen hat. Zu demselben System (5) wäre man auch gelangt, wenn man die Gleichung (3) statt mit ξ mit einem der andern Koeffizienten $\eta, \eta_1, \ldots \eta_r$ dividiert hätte. Daher ist nur noch eine Einschränkung zu machen: *Abgesehen wird von solchen Wertsystemen $x, y, y', \ldots y^{(r)}$, für die alle $r+2$ Funktionen $\xi, \eta, \eta_1, \ldots \eta_r$ verschwinden.*

Weil (4) oder (5) ein System erster Ordnung von $r+1$ Differentialgleichungen in der Normalform ist, hat es nach Satz 2, Nr. 762, gerade $r+1$ unabhängige Integrale. Demnach gibt es *gerade $r+1$ von t freie unabhängige Integrale J des vorgelegten Systems* (2). Jede Funktion von ihnen ist auch ein von t freies Integral, und sonst gibt es keines.

Wird r durch $r-1$ ersetzt, so wird das System (2) um eine Gleichung verkürzt. Da die Integrale des verkürzten Systems auch Integrale des Systems (2) sind, gibt es gerade $r-1$ unabhängige und von t freie Integrale von (2), die auch $y^{(r)}$ nicht enthalten. Ebenso gibt es gerade $r-2$, die von $y^{(r)}$ und $y^{(r-1)}$ frei sind usw. Es ist daher ein einziges unabhängiges Integral $J_0(x, y)$ vorhanden, das nur x und y enthält; ferner gibt es nur noch ein von J_0 unabhängiges $J_1(x, y, y')$, das nur x, y, y' enthält, usw. Demnach sind $r+1$ unabhängige Integrale von der Form:

$$J_0(x, y),\quad J_1(x, y, y'),\quad J_2(x, y, y', y''),\ \ldots\ J_r(x, y, y', y'', \ldots y^{(r)})$$

vorhanden, und dabei steht fest, daß allgemein J_k auch wirklich von $y^{(k)}$ abhängt. Jede Funktion von $J_0, J_1, J_2, \ldots J_r$ ist ein von t freies Integral des Systems (2), und sonst gibt es keines.

Weil das System (2) insgesamt $r+2$ unabhängige Integrale hat, tritt zu $J_0, J_1, J_2, \ldots J_r$ noch ein Integral Ω, das auch von t abhängt. Die $r+2$ Gleichungen:

$$\Omega(t, x, y, y', \ldots y^{(r)}) = \Omega(0, x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(r)}), \tag{6}$$

$$\left|\begin{aligned} J_0(x, y) &= J_0(x_0, y_0), \\ J_1(x, y, y') &= J_1(x_0, y_0, y_0'), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ J_r(x, y, y', \ldots y^{(r)}) &= J_r(x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(r)}) \end{aligned}\right. \tag{7}$$

definieren dann diejenigen Hauptlösungen des Systems (2), die für $t=0$ die Werte $x_0, y_0, y_0' \ldots y_0^{(r)}$ haben. Die letzten $r+1$ Gleichungen (7) besagen, da sie von t frei sind: Alle Elemente r^{ter} Ordnung $(x, y, y', \ldots y^{(r)})$, die aus einem beliebig gewählten Element r^{ter} Ordnung $(x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(r)})$ bei allen Transformationen der r-mal erweiterten Gruppe hervorgehen, haben die Eigenschaft, daß für sie jede Funktion J_k denselben Wert hat wie für das ursprüngliche Element; dasselbe gilt von allen denjenigen Funktionen, die von $J_0, J_1, \ldots J_r$ allein abhängen, sonst aber von keiner Funktion.

Demnach bleibt jede Funktion von $J_0, J_1, \ldots J_r$ allein und sonst keine Funktion bei allen Transformationen der r-mal erweiterten Gruppe ungeändert oder *invariant*. Da sie von x, y und denjenigen Differentialquotienten $y', y'', \ldots y^{(r)}$ abhängt, die y hinsichtlich x hat, sobald man y als irgend eine Funktion von x betrachtet, nennt man sie eine *Differentialinvariante*, und zwar eine Differentialinvariante von gerade r^{ter} Ordnung, wenn die höchste Ordnung der in ihr vorkommenden Ableitungen gerade die r^{te} ist.

Hiernach gilt der

Satz 15: Die von der infinitesimalen Transformation:

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

erzeugte Gruppe hat gerade $r+1$ unabhängige Differentialinvarianten von der nullten bis zur r^{ten} Ordnung. Insbesondere gibt es je eine Differentialinvariante $J_0, J_1, \ldots J_r$ von gerade nullter, erster, … r^{ter} Ordnung derart, daß jede Funktion von $J_0, J_1, \ldots J_r$ allein eine Differentialinvariante ist und sonst keine Differentialinvarianten von höchstens r^{ter} Ordnung vorhanden sind. Diese Differentialinvarianten sind die Integrale des Systems:

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = \frac{dy'}{\eta_1(x, y, y')} = \cdots = \frac{dy^{(r)}}{\eta_r(x, y, y', \ldots y^{(r)})},$$

worin $\eta_1, \ldots \eta_r$ die durch die Rekursionsformeln:

$$\eta_1 = \frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx}, \quad \eta_2 = \frac{d\eta_1}{dx} - y''\frac{d\xi}{dx}, \ldots \eta_r = \frac{d\eta_{r-1}}{dx} - y^{(r)}\frac{d\xi}{dx}$$

hervorgehenden Funktionen bedeuten, wenn hierin die Differentiationen nach x vollständig ausgeführt werden. Vorausgesetzt ist dabei eine solche Umgebung einer Stelle, wo ξ, η und ihre partiellen Ableitungen bis zur r^{ten} Ordnung einschließlich stetige Funktionen von x und y sind und nicht alle $r+2$ Funktionen $\xi, \eta, \eta_1, \ldots \eta_r$ zugleich verschwinden.

Wenn man die $r+1$ Werte von $x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(r-1)}$ willkürlich läßt und $y_0^{(r)}$ einer Bedingung:

(8) $$y_0^{(r)} = f(x_0, y_0, y_0', \cdots y_0^{(r-1)})$$

unterwirft, liegt *eine $(r+1)$fach unendliche Schar von Elementen* $(x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(r)})$ vor. Die Gleichungen (7) werden alsdann von allen Elementen $(x, y, y', \ldots y^{(r)})$ erfüllt, die aus diesen Elementen vermöge aller Transformationen der erwähnten Gruppe entstehen, vorausgesetzt, daß man in (7) für $y_0^{(r)}$ den Wert (8) einsetzt. Soll die Schar der durch (8) definierten Elemente bei der erweiterten Gruppe *invariant* sein, d. h. soll jedes Element, das die Gleichung (8) befriedigt, bei allen Transformationen dieser Gruppe immer wieder in Elemente übergehen, die dasselbe tun, so ist zu fordern, daß auch:

$$(9) \qquad y^{(r)} = f(x, y, y', \ldots y^{(r-1)})$$

werde, d. h. die Gleichungen (7) zusammen mit (8) müssen die Gleichung (9) zur Folge haben. Wenn nun $J_0(x, y)$ nicht frei von y ist, hat die erste Gleichung (7) eine Auflösung nach y. Ist dagegen J_0 von y frei, so gibt es eine Auflösung nach x. Es genügt, den ersten Fall zu betrachten. Die zweite Gleichung (7) ist nach y', die dritte nach y'' usw. auflösbar. Daraus folgt das Bestehen von Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned}
y &= \lambda(x, J_0^0),\\
y' &= \lambda_1(x, J_0^0, J_1^0),\\
y'' &= \lambda_2(x, J_0^0, J_1^0, J_2^0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(r)} &= \lambda_r(x, J_0^0, J_1^0, J_2^0, \ldots J_r^0),
\end{aligned}$$

worin $J_0^0, J_1^0, \ldots J_r^0$ die Differentialinvarianten, gebildet für $x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(r)}$, bedeuten. Damit die Schar (8) invariant sei, ist dann zu verlangen, daß die aus (9) durch diese Substitutionen hervorgehende Gleichung:

$$\lambda_r(x, J_0^0, J_1^0, \ldots J_r^0) =$$
$$f(x, \lambda(x, J_0^0), \lambda_1(x, J_0^0, J_1^0), \ldots \lambda_{r-1}(x, J_0^0, J_1^0, \ldots J_{r-1}^0))$$

infolge von (8) *allein* bestehe. Sie erhält jedoch außer $x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(r)}$ noch x, das in (8) gar nicht auftritt, darf also x nur scheinbar enthalten. Dann aber ist sie eine Gleichung in $J_0^0, J_1^0, \ldots J_r^0$ allein.

Demnach kann (8) nur dann eine invariante Elementenschar definieren, wenn die letzte Gleichung eine Gleichung zwischen $J_0^0, J_1^0, \ldots J_r^0$ allein wird. Bezeichnen wir die Bestimmungsstücke der Elemente mit $x, y, y', \ldots y^{(r)}$, so heißt dies:

Die durch:

$$y^{(r)} = f(x, y, y', \ldots y^{(r)})$$

definierte Elementenschar kann nur dann bei allen Transformationen der erweiterten Gruppe invariant sein, wenn die Gleichung in der Form einer Gleichung:

$$(10) \qquad \Phi(J_0, J_1, \ldots J_r) = 0$$

zwischen den $r+1$ Differentialinvarianten $J_0, J_1, \ldots J_r$ allein geschrieben werden kann. Daß *umgekehrt* jede solche Gleichung (10) eine Elementenschar bestimmt, die bei der erweiterten Gruppe ungeändert bleibt, liegt auf der Hand. Denn wenn irgend ein Element r^{ter} Ordnung die Gleichung (10) befriedigt, behalten $J_0, J_1, \ldots J_r$ für alle Elemente, die aus diesem Element bei den Transformationen hervorgehen, dieselben Werte bei, so daß diese Elemente der Gleichung (10) genügen und deshalb auch zur Schar gehören. Also ergibt sich der

Satz 16: Soll eine Gleichung zwischen $x, y, y', \ldots y^{(r)}$ eine solche Schar von Elementen r^{ter} Ordnung $(x, y, y', \ldots y^{(r)})$ definieren, die bei allen Transformationen derjenigen Gruppe invariant bleibt, die durch r-malige Erweiterung aus der von

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

erzeugten eingliedrigen Gruppe hervorgeht, so muß sie eine Gleichung zwischen den Differentialinvarianten $J_0, J_1, \ldots J_r$ von nullter, erster, ... r^{ter} Ordnung allein sein:

$$\Phi(J_0, J_1, \ldots J_r) = 0.$$

Jede solche Gleichung definiert eine invariante Schar von Elementen r^{ter} Ordnung.

810. Differentialgleichungen, die eine eingliedrige Gruppe gestatten. Es liege nunmehr eine *gewöhnliche Differentialgleichung* r^{ter} Ordnung vor:

(1) $$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(r)}) = 0,$$

außerdem eine infinitesimale Transformation:

(2) $$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, \eta)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

In der Umgebung einer Stelle $x, y, y', \ldots y^{(r)}$ sei F nebst den partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig, und ebenda seien auch ξ und η nebst ihren Ableitungen bis zur r^{ten} Ordnung einschließlich stetig. Doch soll ausdrücklich ausgeschlossen werden, daß ξ, η und die nach Satz 14, Nr. 807, aus ihnen abzuleitenden Funktionen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r$ sämtlich an einer Stelle der Umgebung verschwinden.

Man sagt nun, daß die Differentialgleichung die von Uf erzeugte eingliedrige Gruppe *gestattet* oder *zuläßt*, oder auch, daß sie bei der Gruppe *invariant* bleibt, wenn jede Integralkurve durch jede Transformation der Gruppe wieder in eine Integralkurve verwandelt wird.

Man kann die Gleichung (1) auch auffassen als eine Gleichung, die eine gewisse Schar von Elementen r^{ter} Ordnung $(x, y, y', \ldots y^{(r)})$ bestimmt, und die Integralkurven sind dann nach Nr. 788 als diejenigen Kurven zu definieren, die lauter Elemente r^{ter} Ordnung aus dieser Schar enthalten. Wie diese Elemente bei der Gruppe transformiert werden, lehrt die r-mal erweiterte Gruppe. Soll also die Differentialgleichung die eingliedrige Gruppe gestatten, so ist zu fordern, daß alle Transformationen der erweiterten Gruppe jedes Element der Schar wieder in Elemente der Schar verwandeln, d. h. daß (1) eine *invariante* Schar von Elementen r^{ter} Ordnung bestimme.

Dies aber ist ausreichend, denn bei irgendeiner Transformation der eingliedrigen Gruppe geht jede Kurve in eine neue Kurve über, und die zugehörige r-mal erweiterte Transformation verwandelt dabei alle Elemente r^{ter} Ordnung der alten Kurve in alle Elemente r^{ter} Ordnung der neuen Kurve. Eine Integralkurve, d. h. eine Kurve, deren Elemente r^{ter} Ordnung einer invarianten Elementschar (1) angehören, geht deshalb notwendig in eine Kurve über, deren Elemente dieselbe Eigenschaft haben, so daß die neue Kurve auch eine Integralkurve sein muß.

Der Satz 16 der letzten Nummer liefert nun das Kennzeichen für die Invarianz der durch (1) definierten Elementschar. Daraus ergibt sich der

Satz 17: Eine gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$F(x, y, y', \ldots y^{(r)}) = 0$$

bleibt bei der von einer infinitesimalen Transformation:

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

erzeugten eingliedrigen Gruppe von Punkt-Transformationen nur dann invariant, d. h. jede Integralkurve geht vermöge der Transformationen der Gruppe nur dann immer wieder in Integralkurven über, wenn die Differentialgleichung als eine Gleichung *zwischen den Differentialinvarianten $J_0, J_1, \ldots J_r$ nullter bis r^{ter} Ordnung der Gruppe geschrieben werden kann, also die Form hat:*

$$\Phi(J_0, J_1, \ldots J_r) = 0.$$

811. Berechnung der Differentialinvarianten nullter und erster Ordnung. Um aus dem letzten Satze Vorteile für die Integration von Differentialgleichungen ziehen zu können, die bekannte eingliedrige Gruppen zulassen, muß man vorher untersuchen, wie man die Differentialinvarianten berechnen kann. Das soll in dieser und der nächsten Nummer geschehen.

Die Differentialinvariante nullter Ordnung $J_0(x, y)$ der von

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

erzeugten eingliedrigen Gruppe ist ein Integral des in Satz 15, Nr. 809, angegebenen Systems für $r = 0$, d. h. der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in x und y:

$$(1) \qquad \frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)}.$$

Ist $J_1(x, y, y')$ eine Differentialinvariante erster Ordnung, so bilden J_0 und J_1 zusammen ein vollständiges System von Integralen des Systems:

$$(2) \qquad \frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = \frac{dy'}{\eta_1(x, y, y')},$$

worin η_1 nach der Rekursionsformel den Wert:

$$(3) \qquad \eta_1 = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2$$

hat. Bei der Integration des Systems (2) darf man, wie in Nr. 807 am Schlusse betont wurde, y' nicht mit dem aus (1) folgenden Werte von $dy : dx$ verwechseln; vielmehr hat man y und y' als zwei unbekannte Funktionen von x aufzufassen. Das System (2) kann wegen (3) so geschrieben werden:

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{\eta_x}{\xi} + \frac{\eta_y - \xi_x}{\xi}y' - \frac{\xi_y}{\xi}y'^2,$$

wenn $\xi \neq 0$ ist. Andernfalls bildet man $dx : dy$ und $dy' : dy$. Wir nehmen an, $J_0(x, y)$ sei schon bekannt, so daß:

$$(5) \qquad J_0(x, y) = C_0$$

die allgemeine Lösung y der ersten Gleichung (4) mit der willkürlichen Konstante C_0 definiert. Um die zweite Gleichung (4) zu integrieren, berechnet man y aus (5) als Funktion von x und setzt sie statt y ein. Dadurch geht für y' eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit der unabhängigen Veränderlichen x hervor. Sie ist frei von y, enthält aber noch die Konstante C_0, und sie ist augenscheinlich eine *Riccatische Gleichung* für y'. Also kann sie nach Nr. 718 durch eine Quadratur integriert werden, wenn man eine Partikularlösung kennt.

Dies ist in der Tat der Fall, denn durch (5) werden die Bahnkurven der eingliedrigen Gruppe definiert (vgl. auch Nr. 732), und die Elemente erster Ordnung (x, y, y') der Bahnkurven genügen der aus (5) durch Differentiation folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial J_0}{\partial x} + \frac{\partial J_0}{\partial y} y' = 0. \tag{6}$$

Sie bilden eine invariante Elementschar. Aber jede invariante Schar von Elementen erster Ordnung wird nach Satz 16, Nr. 809, durch eine Gleichung zwischen J_0 und J_1 bestimmt. Da nun $J_0 =$ konst., $J_1 =$ konst. das allgemeine Lösungensystem von (2) oder (4) ist, hier aber nur $J_0 = C_0$, d. h. gleich einer willkürlichen Konstante gesetzt worden ist, während dann J_1 durch jene Gleichung zwischen J_0 und J_1 bestimmt wird, folgt, daß (5) und (6) zusammen ein allerdings nicht allgemeines Lösungensystem y, y' des Systems (2) oder (4) definieren müssen. Der aus (5) folgende Wert von y war, wie wir annahmen, schon in die zweite Gleichung (4) substituiert worden, und deshalb muß die noch zu integrierende Riccatische Gleichung für y' diejenige Partikularlösung y' haben, die aus (6) zu berechnen ist, nachdem auch darin für y die aus (5) folgende Funktion von x (und C_0) eingesetzt worden ist. Mithin erfordert die allgemeine Integration der Riccatischen Gleichung für y' nur eine Quadratur, wobei eine neue Integrationskonstante C_1 auftritt. Die allgemeine Lösung wird außerdem C_0 enthalten. Wenn sie diese ist:

$$y' = \varphi(x, C_0, C_1),$$

so setze man wieder für C_0 nach (5) den Wert $J_0(x, y)$ ein und löse die Gleichung nach C_1 auf. Diese Auflösung ist alsdann eine Differentialinvariante J_1 von erster Ordnung.

Es wird zweckmäßig sein, dies Verfahren an einem Beispiele zu erläutern.

Beispiel: Es sei:

$$Uf = xy\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y},$$

d. h. $\xi = xy$, $\eta = y^2$, so daß das System (4) so lautet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{y - xy'}{xy}y'.$$

Die erste Gleichung hat das Integral $J_0 = y : x$. Nach (5) wird demnach $y = C_0 x$ in die zweite Gleichung eingesetzt:

$$(7) \qquad \frac{dy'}{dx} = \frac{C_0 - y'}{C_0 x}y'.$$

Aus (6) folgt $y' = y : x = C_0 x : x = C_0$, so daß $y' = C_0$ eine Partikularlösung von (7) sein muß, was in der Tat der Fall ist. Nach der allgemeinen Methode in Nr. 718, vgl. insbesondere Gleichung (8) daselbst, worin u die Partikularlösung, also C_0 bedeutet, wird Z statt y' eingeführt vermöge:

$$(8) \qquad y' = C_0 + \frac{1}{Z}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{Z^2}\frac{dZ}{dx}$$

gesetzt. Die für Z hervorgehende *lineare* Differentialgleichung:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{C_0 Z + 1}{C_0 x}$$

ist nach Nr. 716 durch Quadratur integrierbar. Man sieht hier sofort, daß

$$\frac{C_0 Z + 1}{x}$$

ein Integral ist. Wird nach (8) wieder $Z = 1 : (y' - C_0)$ und dann $C_0 = y : x$ eingeführt, so geht das Integral in die gesuchte Differentialinvariante erster Ordnung über:

$$J_1 = \frac{y'}{xy' - y}.$$

812. Berechnung der Differentialinvarianten höherer Ordnung. Es gilt der

Satz 18: Sind $P(x, y, y', \ldots)$ und $Q(x, y, y', \ldots)$ zwei Differentialinvarianten der von einer infinitesimalen Transformation Uf in x, y erzeugten eingliedrigen Gruppe, so ist auch:

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{Q_x + Q_y y' + Q_{y'} y'' + \cdots}{P_x + P_y y' + P_{y'} y'' + \cdots}$$

eine Differentialinvariante.

In der Tat nämlich definiert die Gleichung:

$$(1) \qquad Q - aP = b,$$

wenn a und b Konstanten sind, nach Satz 17 von Nr. 810, eine bei der erweiterten Gruppe invariante Differentialgleichung. Wird a bestimmt gewählt und b willkürlich gelassen, so sind alle Integralkurven aller zu den verschiedenen Werten von b gehörigen Differentialgleichungen identisch mit den Integralkurven der Differentialgleichung, die aus (1) durch vollständige Differentiation nach x hervorgeht, weil dann b fortfällt:

$$Q_x + Q_y y' + Q_{y'} y'' + \cdots - a(P_x + P_y y' + P_{y'} y'' + \cdots) = 0.$$

Demnach ist dies ebenfalls eine invariante Differentialgleichung und zwar für jeden Wert der Konstante a. Die Gleichung:

$$\frac{Q_x + Q_y y' + Q_{y'} y'' + \cdots}{P_x + P_y y' + P_{y'} y'' + \cdots} = a$$

muß sich also, wie man auch a als Konstante wählen mag, als eine Gleichung zwischen Differentialinvarianten allein schreiben lassen, nach Satz 17 von Nr. 810, woraus folgt, daß ihre linke Seite eine Differentialinvariante ist.

Indem wir den Satz 18 zunächst auf $P = J_0$ und $Q = J_1$ anwenden, ergibt sich aus den beiden schon berechneten Differentialinvarianten nullter und erster Ordnung, J_0 und J_1, die Differentialinvariante *zweiter* Ordnung:

$$J_2 = \frac{\dfrac{\partial J_1}{\partial x} + \dfrac{\partial J_1}{\partial y} y' + \dfrac{\partial J_1}{\partial y'} y''}{\dfrac{\partial J_0}{\partial x} + \dfrac{\partial J_0}{\partial y} y'},$$

denn y'' fällt nicht fort, weil $\partial J_1 : \partial y' \neq 0$ ist. Anwendung des Satzes auf $P = J_0$ und $Q = J_2$ gibt ferner eine Differentialinvariante *dritter* Ordnung:

$$J_3 = \frac{\dfrac{\partial J_2}{\partial x} + \dfrac{\partial J_2}{\partial y} y' + \dfrac{\partial J_2}{\partial y'} y'' + \dfrac{\partial J_2}{\partial y''} y'''}{\dfrac{\partial J_0}{\partial x} + \dfrac{\partial J_0}{\partial y} y'},$$

denn y''' fällt nicht fort, weil, wie sich soeben zeigte, $\partial J_2 : \partial y''$

$\neq 0$ ist. So kann man fortfahren. Daher lassen sich die Ergebnisse dieser und der vorigen Nummer so zusammenfassen:

Satz 19: Jede Differentialinvariante J_0 von nullter Ordnung der von der infinitesimalen Transformation:

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

erzeugten eingliedrigen Gruppe ist ein Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in x, y:

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)}.$$

Hat man ein solches Integral J_0 bestimmt, so kann man eine Differentialinvariante erster Ordnung J_1 durch eine bloße Quadratur, abgesehen von Eliminationen und Substitutionen, berechnen. Ferner geben dann die Rekursionsformeln:

$$J_2 = \frac{dJ_1}{dJ_0}, \quad J_3 = \frac{dJ_2}{dJ_0}, \ldots \; J_r = \frac{dJ_{r-1}}{dJ_0}$$

Differentialinvarianten zweiter bis r^{ter} Ordnung.

813. Integration einer Differentialgleichung mit bekannter infinitesimaler Transformation. Man sagt, daß eine gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$(1) \qquad F(x, y, y', \ldots y^{(r)}) = 0$$

eine bekannte infinitesimale Transformation:

$$(2) \qquad Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

gestattet oder zuläßt, wenn sie bei der von Uf erzeugten eingliedrigen Gruppe invariant bleibt. Man spricht dann auch kürzer von einer Differentialgleichung (1) mit einer bekannten infinitesimalen Transformation (2).

Es gibt manche Fälle, in denen man bei einem Probleme, das die Integration einer Differentialgleichung (1) erfordert, aus der Natur der Aufgabe sehen kann, daß die Differentialgleichung eine bekannte infinitesimale Transformation (2) gestattet. Jetzt soll gezeigt werden, welchen Vorteil man daraus nach *Lie* für das Integrationsgeschäft ziehen kann.

Nach Satz 17, Nr. 810, hat die Differentialgleichung die Form:

$$(3) \qquad \Phi(J_0, J_1, J_2, \ldots J_r) = 0.$$

Ihre Zurückführung auf diese Form erfordert bloß Eliminationen und Substitutionen, wenn man J_0 und J_1 schon kennt, weil man dann nach Satz 19 der letzten Nummer auch:

$$(4)\qquad J_2 = \frac{dJ_1}{dJ_0}, \quad J_3 = \frac{dJ_2}{dJ_0}, \quad \ldots \quad J_r = \frac{dJ_{r-1}}{dJ_0}$$

berechnen kann. Die gesuchten Lösungen y der Differentialgleichung (1) sind Funktionen von x, daher auch $y', y'', \ldots y^{(r)}$, mithin auch die Differentialinvarianten $J_0, J_1 \ldots$. Führt man nun:

$$(5)\qquad \mathfrak{x} = J_0(x, y), \quad \mathfrak{y} = J_1(x, y, y')$$

statt x und y als neue Veränderliche ein, so gibt (4):

$$J_2 = \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}, \quad J_3 = \frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2}, \quad \ldots \quad J_r = \frac{d^{r-1}\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^{r-1}},$$

d. h. die Differentialgleichung nimmt nach (3) die Form an:

$$(6)\qquad \Phi\left(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}, \frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2}, \ldots \frac{d^{r-1}\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^{r-1}}\right) = 0.$$

Sie ist also auf eine Differentialgleichung von nur noch $(r-1)^{ter}$ *Ordnung zurückgeführt.* Wenn man sie integriert und ihre allgemeine Lösung:

$$\mathfrak{y} = \varphi(\mathfrak{x}, C_1, C_2, \ldots C_{r-1})$$

mit $r-1$ Integrationskonstanten bestimmt hat, ist nach (5) noch die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in x und y:

$$(7)\qquad J_1(x, y, y') = \varphi(J_0(x, y), C_1, C_2, \ldots C_{r-1})$$

zu integrieren. Aber diese Differentialgleichung gestattet als Gleichung zwischen den beiden Differentialinvarianten J_0 und J_1 nach Satz 17, Nr. 810, die bekannte infinitesimale Transformation Uf, und zwar ist Uf für sie keine triviale Transformation (vgl. Nr. 738), da die Gleichung $r-1$ willkürliche Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$ enthält. Die Integration von (7) verlangt deshalb nach Satz 21, Nr. 738, außer Eliminationen nur noch die Berechnung eines vollständigen Integrals.

Wenn man bedenkt, daß $J_0 =$ konst. die Bahnkurven der von Uf erzeugten eingliedrigen Gruppe bestimmt, kann man daher das Ergebnis so aussprechen:

Satz 20: Gestattet eine gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} *Ordnung:*

$$F(x, y, y', \dots y^{(r)}) = 0$$

die von einer bekannten infinitesimalen Transformation:

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

erzeugte Gruppe und kennt man die Bahnkurven der Gruppe, so kann die Ordnung der Differentialgleichung mittels bloßer Eliminationen, Substitutionen und Quadraturen um eine Einheit erniedrigt werden.

814. Einführung kanonischer Veränderlicher. In solchen Fällen, in denen eine Aufgabe auf eine gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung führt und zugleich aus der Stellung des Problems ersehen werden kann, daß diese Gleichung eine gewisse bekannte infinitesimale Transformation gestattet, wird die infinitesimale Transformation zumeist von einfacher Form sein, so daß es wie in Nr. 743 möglich sein wird, die Schar der Bahnkurven und eine zweite bei Uf invariante einfach unendliche Kurvenschar zu ermitteln und wie damals *kanonische Veränderliche* $\bar{x}$, $\bar{y}$ einzuführen, d. h. die infinitesimale Transformation auf die Form (5) von Nr. 743 zu bringen:

$$Uf = \Omega(\bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}.$$

Hier lautet das System (2) von Nr. 811, das zur Bestimmung der Differentialinvarianten erster und zweiter Ordnung dient, wegen $\xi = 0$ und $\eta = \Omega$ so:

$$\frac{d\bar{x}}{0} = \frac{d\bar{y}}{\Omega(\bar{y})} = \frac{d\bar{y}'}{\Omega'(\bar{y})\bar{y}'},$$

so daß:

$$J_0 = \bar{x}, \quad J_1 = \frac{\bar{y}'}{\Omega(\bar{y})}$$

Differentialinvarianten nullter und erster Ordnung sind. Die Differentialgleichung muß dann in den neuen Veränderlichen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ die Form:

$$\Phi\left(J_0, J_1, \frac{dJ_1}{d\bar{x}}, \dots \frac{d^{r-1}J_1}{d\bar{x}^{r-1}}\right) = 0$$

annehmen. Ist diese Differentialgleichung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen J_0 und J_1 integriert worden, also etwa:

$$J_1 = \varphi(J_0, C_1, C_2, \dots C_{r-1})$$

gefunden, so handelt es sich noch um die Integration der Gleichung:

$$\frac{\bar{y}'}{\Omega(\bar{y})} = \varphi(\bar{x}, C_1, C_2, \dots C_{r-1}),$$

aus der sofort:

$$\int \frac{d\bar{y}}{\Omega(\bar{y})} = \int \varphi(\bar{x}, C_1, \dots C_{r-1}) d\bar{x} + C_r$$

hervorgeht.

Beispiel: Gesucht werden alle Kurven in der Ebene, bei denen eine gegebene Beziehung zwischen dem Radiusvektor ϱ, dem Krümmungsradius R und dem Winkel λ zwischen dem verlängerten Radiusvektor und dem Krümmungsradius besteht:

(1) $$F(\varrho, R, \lambda) = 0.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung *zweiter* Ordnung. Wenn man eine ihrer Integralkurven um den Anfangspunkt O dreht, geht eine Kurve hervor, bei der ϱ, R und λ dieselben Werte wie bei der ursprünglichen Kurve haben, d. h. eine Kurve, die ebenfalls die Bedingung (1) erfüllt und daher auch eine Integralkurve ist. Daher gestattet die Differentialgleichung die infinitesimale Drehung um O. Bei dieser infinitesimalen Drehung sind die Polarkoordinaten ω, ϱ kanonische Veränderliche, denn $\varrho =$ konst. stellt die Schar der Bahnkurven (Kreise um O) vor und $\omega =$ konst. eine invariante Kurvenschar (die der Radienvektoren). Man wird daher von vornherein Polarkoordinaten ω, ϱ einführen. Alsdann hat die infinitesimale Drehung um O nach dem Beispiele in Nr. 742 das Symbol

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}.$$

Hier ist also etwa $\bar{x} = \varrho$, $\bar{y} = \omega$ und $\Omega(\bar{y}) = 1$, d. h. $J_0 = \varrho$, $J_1 = \frac{d\omega}{d\varrho}$. Demnach nimmt die Differentialgleichung in Polarkoordinaten die Form an:

$$\Phi\left(\varrho, \frac{d\omega}{d\varrho}, \frac{d^2\omega}{d\varrho^2}\right) = 0.$$

Dies aber ist eine gewöhnliche Differentialgleichung *erster* Ordnung zwischen ϱ und $d\omega : d\varrho$. Wenn ihre Integration liefert:

$$\frac{d\omega}{d\varrho} = \varphi(\varrho, C_1),$$

so gibt eine Quadratur:

$$\omega = \int \varphi(\varrho,\, C_1)\, d\varrho + C_2$$

die gesuchten Kurven.

815. Eine Aufgabe über Fußpunktkurven. Die in Nr. 813 entwickelte Integrationstheorie läßt sich noch vervollkommnen. Die Grenzen, die wir uns gesteckt haben, erlauben uns jedoch nicht, darauf einzugehen, ebensowenig auf die allgemeine Untersuchung desjenigen Falles, in dem eine gewöhnliche Differentialgleichung *mehrere* bekannte infinitesimale Transformationen zuläßt. Es wird aber einleuchten, daß man alsdann noch weitere Vereinfachungen des Integrationsgeschäftes erzielen kann; wir begnügen uns mit der Behandlung eines Beispiels, das die Fußpunktkurven betrifft.

Ist eine Kurve k in der Ebene gegeben, so versteht man unter ihrer zu einem gegebenen Pol O gehörigen *Fußpunktkurve* den Ort $\mathfrak{k}$ der Fußpunkte $\mathfrak{M}$ der Lote von O auf die Tangenten der Punkte M der gegebenen Kurve, siehe Fig. 50.

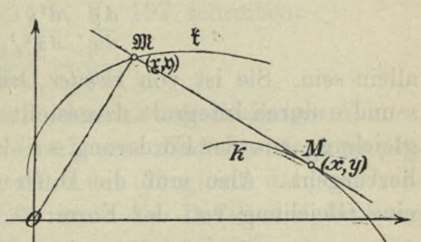

Fig. 50.

Es sollen nun diejenigen Kurven bestimmt werden, deren Bogenlänge s zur entsprechenden Bogenlänge $\mathfrak{s}$ der Fußpunktkurven proportional ist. Hat eine Kurve k diese Eigenschaft, so leuchtet ein, daß sie die Eigenschaft behält, wenn sie um O gedreht wird und auch dann, wenn sie durch Streckung von O aus ähnlich vergrößert oder verkleinert wird. Die Differentialgleichung, deren Integralkurven die gesuchten Kurven sind, gestattet deshalb sowohl die eingliedrige Gruppe aller Drehungen um O als auch die aller Streckungen von O aus. Diese beiden Gruppen haben ihren einfachsten analytischen Ausdruck, wenn man die Amplitude ω und den Logarithmus des Radiusvektors ϱ der Polarkoordinaten mit dem Pole O als Bestimmungsstücke der Punkte benutzt, denn bei einer Drehung um O bleibt $\ln \varrho$ ungeändert, während ω um eine additive Konstante wächst, und bei einer Streckung von O aus bleibt ω ungeändert, während $\ln \varrho$ um eine additive Konstante wächst. Setzt man also:

$$\bar{x} = \omega, \quad \bar{y} = \ln \varrho,$$

so hat die infinitesimale Drehung um O bzw. die infinitesimale Streckung von O aus das Symbol:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}.$$

Im ersten Falle ist $\xi = 1$, $\eta = 0$, also $\eta_1 = 0$ (nach Satz 14, Nr. 807), im zweiten Falle ist $\xi = 0$, $\eta = 1$, also auch $\eta_1 = 0$. Daraus erkennt man nach Satz 15, Nr. 809, daß:

$$\bar{y}, \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}, \quad \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}, \ldots$$

die Differentialinvarianten der ersten und:

$$\bar{x}, \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}, \quad \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}, \ldots$$

die der zweiten Gruppe sind. Nach Satz 17, Nr. 810, darf die Differentialgleichung des Problems nur die Differentialinvarianten der einen Art, aber auch nur die der zweiten Art enthalten, d. h. sie muß eine Gleichung zwischen

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}, \quad \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}, \ldots$$

allein sein. Sie ist von *zweiter* Ordnung, weil die Bogenlängen s und $\bar{s}$ durch Integrale dargestellt werden und die Differentialgleichung aus der Forderung $\bar{s} =$ konst. s durch Differentiation hervorgeht. Also muß die Differentialgleichung des Problems eine Gleichung von der Form:

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} = f\left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right) \quad \text{oder:} \quad \frac{d^2 \ln \varrho}{d\omega^2} = f\left(\frac{d \ln \varrho}{d\omega}\right)$$

sein. Wird $d \ln \varrho : d\omega$ für den Augenblick mit z bezeichnet, so folgt:

$$\int \frac{dz}{f(z)} = \omega + C_1.$$

Ist die Quadratur erledigt und dann z als eine gewisse Funktion φ von $\omega + C_1$ berechnet worden, so daß man:

$$\frac{d \ln \varrho}{d\omega} = z = \varphi(\omega + C_1)$$

gewonnen hat, so gibt eine abermalige Quadratur:

$$\ln \varrho = \int \varphi(\omega + C_1) d\omega + C_2.$$

Ohne also die Differentialgleichung des Problems aufgestellt zu haben, wissen wir doch schon, daß sie außer Eliminationen und Substitutionen nur zwei Quadraturen verlangt.

Nun gehen wir zur Ausrechnung über. Hat der Punkt M der Kurve k die Koordinaten x und y und der Fußpunkt $\mathfrak{M}$ des Lotes vom Anfangspunkte O auf die Tangente von M die Koordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, so ist:

$$\frac{\mathfrak{y}-y}{\mathfrak{x}-x}=y', \quad \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}=-\frac{1}{y'},$$

d. h.:

$$(1) \qquad \mathfrak{x}=\frac{xy'-y}{1+y'^2}y', \quad \mathfrak{y}=-\frac{xy'-y}{1+y'^2}.$$

Dabei bedeutet y' natürlich die Ableitung $dy:dx$. Für die Bogenelemente ist nach (2) in Nr. 193:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}, \quad d\mathfrak{s}=\sqrt{d\mathfrak{x}^2+d\mathfrak{y}^2}.$$

Berechnet man $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ aus (1), so folgt hieraus:

$$(2) \qquad \left(\frac{d\mathfrak{s}}{ds}\right)^2=\frac{y''^2(x^2+y^2)}{(1+y'^2)^3}.$$

Bezeichnet R den Krümmungsradius von M, so kann man hierfür mit Rücksicht auf (1) in Nr. 197 schreiben:

$$(3) \qquad \left(\frac{d\mathfrak{s}}{ds}\right)^2=\frac{\varrho^2}{R^2},$$

d. h. *die gesuchten Kurven sind identisch mit denjenigen Kurven, bei denen der Krümmungsradius R dem Radiusvektor ϱ proportional ist.* Indem man den Ausdruck (2) gleich dem Quadrate einer Konstante setzt, erhält man die Differentialgleichung zweiter Ordnung des Problems, ausgedrückt in den rechtwinkligen Koordinaten. Nach dem Vorhergehenden werden wir jedoch die Koordinaten ω und $\ln \varrho$ benutzen, also nach (3) von der Gleichung:

$$\varrho=aR$$

ausgehen, wo a eine gegebene Konstante bedeute. Nach Nr. 208 ist, wenn der Akzent die Ableitung nach ω andeutet:

$$R=\frac{\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}^3}{\varrho^2+2\varrho'^2-\varrho\varrho''}$$

oder wegen:

$$(\ln \varrho)'=\frac{\varrho'}{\varrho}, \quad (\ln \varrho)''=\frac{\varrho\varrho''-\varrho'^2}{\varrho^2}$$

auch:

$$\frac{R}{\varrho} = \frac{\sqrt{1+(\ln\varrho)'^2}^3}{1+(\ln\varrho)'^2-(\ln\varrho)''}.$$

Daher lautet die Differentialgleichung $\varrho : R = a$ nunmehr so:

$$1+(\ln\varrho)'^2-(\ln\varrho)'' = a\sqrt{1+(\ln\varrho)'^2}^3$$

oder, wenn $(\ln\varrho)' = z$ gesetzt wird:

$$\frac{dz}{1+z^2-a\sqrt{1+z^2}^3} = d\omega.$$

Außerdem ist jetzt:

$$d\ln\varrho = z\,d\omega, \quad \text{d. h.} \quad \ln\varrho = \int z\,d\omega.$$

Mithin ergibt sich durch zwei Quadraturen:

$$\omega = \text{konst.} + \int \frac{dz}{1+z^2-a\sqrt{1+z^2}^3},$$

$$\varrho = \text{konst.}\, e^{\int \frac{z\,dz}{1+z^2-a\sqrt{1+z^2}^3}}.$$

Noch bequemer ist es, eine neue Hilfsveränderliche t durch die Substitution $z = \operatorname{tg} t$ einzuführen. Dann kommt, weil die zweite Quadratur sofort erledigt werden kann:

$$\omega = \text{konst.} + \int \frac{\cos t\,dt}{\cos t - a}, \quad \varrho = \frac{\text{konst.}}{\cos t - a}.$$

Das in der ersten Formel noch vorkommende Integral ist nach Nr. 460 leicht zu berechnen. *Alle* Kurven gehen aus *einer* Kurve:

(4) $$\omega = \int \frac{\cos t\,dt}{\cos t - a}, \quad \varrho = \frac{1}{\cos t - a}$$

durch Drehungen um O und Streckungen von O aus hervor.

Von besonderem Interesse ist der Fall $a^2 = 1$, in dem sich *diejenigen Kurven ergeben, deren Bogenlänge gleich der entsprechenden Bogenlänge der Fußpunktkurven ist, d. h. diejenigen Kurven, deren Krümmungsradius gleich dem Radiusvektor ist.* Da die für $a = +1$ hervorgehenden Formeln dadurch, daß man t durch $t + \pi$ ersetzt, in die für $a = -1$ hervorgehenden verwandelt werden, darf man sich auf den Fall $a = -1$ beschränken, in dem sich aus (4) die Kurve ergibt:

(5) $$\omega = t - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t, \quad \varrho = \frac{1}{\cos t + 1}.$$

Alle anderen Kurven werden aus dieser gewonnen, wenn man sie um O dreht und von O aus ähnlich vergrößert oder verkleinert. Wird von O das Lot auf die *Normale* der Kurve gefällt, so hat der Fußpunkt des Lotes, wie man leicht nach Nr. 206 ausrechnet, die Polarkoordinaten:

$$\omega = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t, \quad \varrho = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t;$$

für den Ort dieser Fußpunkte ist daher $\varrho = \frac{1}{2}\pi - \omega$. Nach Nr. 245 kann man hieraus sofort schließen, *daß der Ort der Fußpunkte der Lote von O auf die Normalen der gefundenen Kurve eine archimedische Spirale ist.*

Sechstes Kapitel.

Existenzbeweise im komplexen Bereiche.

§ 1. Analytische Funktionen von mehreren Veränderlichen.

816. Vorbemerkung. Bisher wurde die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im reellen Bereiche entwickelt. Um sie auch auf den Bereich komplexer Veränderlicher ausdehnen zu können, muß man sich auf den Begriff der analytischen Funktionen von *mehreren* komplexen Veränderlichen und die Sätze über solche Funktionen stützen. Daher liegt es uns zunächst ob, in engem Anschlusse an das achte Kapitel des zweiten Bandes das Notwendigste hierüber beizubringen. Ist dies erledigt, so wird es sich darum handeln, die Existenzbeweise für Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen im komplexen Bereiche durchzuführen. Bei dieser Gelegenheit wird auch der Nachweis der Existenz implizite definierter Funktionen im komplexen Bereiche hervorgehen. Schließlich werden wir die Ergebnisse zur Entwicklung der Theorie der linearen Differtialgleichungen höherer Ordnung anwenden.

817. Definition der monogenen Funktionen von mehreren Veränderlichen. Es seien:

(1) $\quad z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \; \ldots \; z_n = x_n + iy_n$

n komplexe Veränderliche. Jede einzelne kann nach Nr. 355 durch einen Punkt in einer komplexen Zahlenebene, nämlich z_k durch den Punkt mit den reellen rechtwinkligen Koordinaten x_k und y_k, versinnlicht werden. Man tut dabei gut, die n Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots z_n$ in n *verschiedenen* Zahlenebenen zu deuten. Unter einem *Variabilitätsbereiche* wird nun folgendes verstanden: Jeder einzelnen der n Veränderlichen wird ein Bereich in seiner Ebene zugewiesen; alsdann soll der Variabilitätsbereich aus allen Wertsystemen $z_1, z_2, \ldots z_n$ bestehen, die durch Punkte $z_1, z_2, \ldots z_n$ in den einzelnen Bereichen dargestellt werden.

Wenn eine Vorschrift vorhanden ist, nach der jedem *bestimmten* Wertsysteme $z_1, z_2, \ldots z_n$ des Variabilitätsbereiches eine *bestimmte* komplexe Zahl $w = u + iv$ zugeordnet wird, heißt w nach der Definition in Nr. 6 eine *Funktion* der n Veränderlichen in dem vorgeschriebenen Variabilitätsbereiche. Diesen sehr allgemeinen Funktionsbegriff schränken wir aber zweckmäßig ein. Vgl. dabei Nr. 621.

Zunächst soll die Funktion w *stetig* sein. Dies bedeutet nach Nr. 20: Wird im Bereiche ein Wertsystem $z_1, z_2, \ldots z_n$ angenommen, dem man die Zunahmen erteilt:

$$(2) \qquad \varDelta z_1 = \varDelta x_1 + i\varDelta y_1, \quad \ldots \varDelta z_n = \varDelta x_n + i\varDelta y_n$$

und sind $\varDelta u$, $\varDelta v$ und $\varDelta w$ die zugehörigen Zunahmen von u, v und w, so soll es zu jeder beliebig klein gewählten positiven Zahl σ eine positive Zahl h derart geben, daß infolge von:

$$(3) \qquad |\varDelta z_1| < h, \quad |\varDelta z_2| < h, \quad \ldots \quad |\varDelta z_n| < h$$

stets auch $|\varDelta w| < \sigma$ wird. Nach (1) und (2) in Nr. 357 ist dann auch

$$|\varDelta u| < \sigma, \quad |\varDelta v| < \sigma,$$

und die Bedingungen (3) sind erfüllt, wenn:

$$|\varDelta x_1| < \frac{h}{\sqrt{2}}, \quad |\varDelta y_1| < \frac{h}{\sqrt{2}}, \quad \ldots \quad |\varDelta x_n| < \frac{h}{\sqrt{2}}, \quad |\varDelta y_n| < \frac{h}{\sqrt{2}}$$

angenommen wird (vgl. die letzte Bemerkung in Nr. 357). Folglich müssen u und v *stetige* reelle Funktionen sein. Man schließt ebenso leicht umgekehrt, daß w eine stetige Funktion der komplexen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots z_n$ ist, sobald u und v stetige Funktionen der reellen Veränderlichen $x_1, y_1, \ldots x_n, y_n$ sind.

Unter einer *monogenen* Funktion $w = u + iv$ der n Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots z_n$ wird nun eine solche stetige Funktion verstanden, der innerhalb des Variabilitätsbereiches auch stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hinsichtlich aller n Veränderlicher zukommen. Da man bei der Bildung einer partiellen Ableitung alle Veränderlichen bis auf eine bestimmt zu wählen hat, sind diese Ableitungen wie in Nr. 622 zu definieren. Aus Satz 3 von Nr. 623 folgt also: Werden alle Veränderlichen bis auf eine, etwa z_k, bestimmt gewählt, so wird w eine monogene Funktion von z_k allein. Daher genügen u und v nach (2) in Nr. 623 den *Cauchy-Riemannschen Gleichungen:*

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

und es sind nach (4) in Nr. 623:

$$(5)\qquad \frac{\partial w}{\partial z_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k} + i\frac{\partial v}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

die partiellen Ableitungen erster Ordnung von w. Mithin kann man die Bedingungen für eine monogene Funktion $w = u + iv$ der n Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots z_n$ oder $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots x_n + iy_n$ auch so formulieren:

Es sollen u und v nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung solche stetige reelle Funktionen von $x_1, y_1, \ldots x_n, y_n$ sein, die den $2n$ Cauchy-Riemannschen Gleichungen (4) *genügen,* natürlich innerhalb des Variabilitätsbereiches.

Gerade so wie der Satz 5 von Nr. 625 läßt sich der folgende allgemeine Satz über Funktionen von Funktionen beweisen:

Satz 1: Sind $w_1, w_2, \ldots w_m$ innerhalb eines gemeinsamen Bereiches monogene Funktionen von $z_1, z_2, \ldots z_n$ und ist W eine monogene Funktion von $w_1, w_2, \ldots w_m$ innerhalb eines solchen Bereiches, den jene m Funktionen $w_1, w_2, \ldots w_m$ von $z_1, z_2, \ldots z_n$ erfüllen, so ist W auch eine monogene Funktion von $z_1, z_2, \ldots z_n$ in dem zugehörigen Bereiche dieser Veränderlichen.

Im besonderen folgt hieraus leicht die Verallgemeinerung des Satzes 4 von Nr. 624 über Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von monogenen Funktionen für den Fall von mehreren Veränderlichen.

Hier möge noch ein gelegentlich anzuwendender Satz angemerkt werden, der nicht nur für monogene, sondern überhaupt für stetige Funktionen gilt.

Satz 2: Ist $f(z_1, z_2, \ldots z_n)$ in der Umgebung einer Stelle $(z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0)$ eine solche stetige Funktion der n komplexen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots z_n$, die an jener Stelle selbst einen von Null verschiedenen Wert hat, so gibt es eine Umgebung der Stelle, innerhalb derer die Funktion nirgends verschwindet.

Diesen Satz, die Ausdehnung des Satzes 11 von Nr. 693 auf den komplexen Bereich, beweist man so: Nach dem Vorhergehenden gibt es zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl σ eine positive Zahl h derart, daß:

$$(6)\qquad |f(z_1, z_2, \ldots z_n) - f(z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0)| < \sigma$$

infolge von

$$(7)\qquad |z_1 - z_1^0| < h, \quad |z_2 - z_2^0| < h, \ \ldots |z_n - z_n^0| < h$$

wird. Da nun $|f(z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0)|$ von Null verschieden ist, braucht man nur σ kleiner als diesen Wert zu wählen, um zu erreichen, daß f in der Umgebung (7) nirgends verschwindet, weil sonst die linke Seite von (6) größer als σ würde.

818. Verallgemeinerung des Cauchyschen Fundamentalsatzes. In Nr. 639 wurde der außerordentlich wichtige Cauchysche Satz 16 bewiesen, der in der Integralformel:

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_k \frac{f(z)}{z-c}\,dz = f(c)$$

zum Ausdrucke kommt. Dieser Satz soll zunächst auf monogene Funktionen $f(z_1, z_2)$ von *zwei* Veränderlichen z_1, z_2 übertragen werden.

Innerhalb der für z_1 und z_2 erlaubten Bereiche in der z_1- und z_2-Ebene seien Bereiche B_1 und B_2 abgegrenzt, deren Ränder Integrationswege k_1 und k_2 sind und sehr wohl in einzelne geschlossene Linien zerfallen können, wie z. B. in Fig. 95 von Nr. 639. Außerdem mögen innerhalb B_1 und B_2 *bestimmte* Stellen c_1 und c_2 angenommen sein. Wenn nun z_2 vorerst irgendwo innerhalb B_2 oder auf dem Rande von B_2 gewählt wird, ist $f(z_1, z_2)$ eine monogene Funktion von z_1 allein, auf die der Cauchysche Satz angewandt werden darf. Er liefert:

$$(1)\qquad \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{k_1} \frac{f(z_1, z_2)}{z_1 - c_1}\,dz_1 = f(c_1, z_2).$$

Hierbei wird längs k_1 in solchem Sinne integriert, daß die Fläche B_1 stets linkerhand liegt. Da nun $f(c_1, z_2)$ eine monogene Funktion von z_2 allein bedeutet, gibt die Anwendung des Cauchyschen Satzes auf diese Funktion:

$$(2) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{k_2}\frac{f(c_1, z_2)}{z_2 - c_2}\,dz_2 = f(c_1, c_2),$$

wobei über die Art der Integration längs k_2 Entsprechendes gilt wie vorhin. Wird der Wert (1) in (2) substituiert, so kommt:

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\int\limits_{k_2}\frac{1}{z_2 - c_2}\left(\int\limits_{k_1}\frac{f(z_1, z_2)}{z_1 - c_1}\,dz_1\right)dz_2 = f(c_1, c_2).$$

Weil $z_2 - c_2$ bei der ersten Integration konstant bleibt, verliert die Formel nichts an ihrer Richtigkeit und Verständlichkeit, wenn sie so geschrieben wird:

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\int\limits_{k_2}\int\limits_{k_1}\frac{f(z_1, z_2)}{(z_1 - c_1)(z_2 - c_2)}\,dz_1\,dz_2 = f(c_1, c_2).$$

Auch leuchtet ein, daß sich derselbe Wert $f(c_1, c_2)$ ergibt, wenn zuerst hinsichtlich z_2 längs k_2 und dann hinsichtlich z_1 längs k_1 integriert wird.

Da die weitere Verallgemeinerung dieses Ergebnisses auf der Hand liegt, formulieren wir mithin sofort den

Satz 3 (Verallgemeinerter Cauchyscher Fundamentalsatz): Es sei f eine monogene Funktion der n Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots z_n$. *Ferner seien* $B_1, B_2, \ldots B_n$ *Bereiche in der* z_1-*Ebene,* z_2-*Ebene,* $\ldots$ z_n-*Ebene und ihre Ränder Integrationswege* $k_1, k_2, \ldots k_n$. *Vorausgesetzt wird, daß diese Bereiche mit ihren Rändern zu dem Variabilitätsbereiche der Funktion f gehören. Außerdem sollen Stellen* $c_1, c_2, \ldots c_n$ *im Innern der Bereiche* B_1, $B_2, \ldots B_n$ *bestimmt gewählt sein. Dann ist:*

$$\frac{1}{(2i\pi)^n}\int\limits_{k_1}\int\limits_{k_2}\cdots\int\limits_{k_n}\frac{f(z_1, z_2, \ldots z_n)\,dz_1\,dz_2\ldots dz_n}{(z_1 - c_1)(z_2 - c_2)\ldots(z_n - c_n)} = f(c_1, c_2, \ldots c_n).$$

Hierbei sind die n Integrationen in einer für das Ergebnis gleichgültigen Reihenfolge längs der Ränder $k_1, k_2, \ldots k_n$ *der n Bereiche stets so auszuführen, daß die Bereiche linkerhand liegen, und die Formel gilt auch dann, wenn Integrationswege in mehrere geschlossene Linien zerfallen.*

819. Integrale als Funktionen ihrer oberen Grenzen. Um die Theorien des achten Kapitels des zweiten Bandes auf monogene Funktionen von mehreren Veränderlichen ausdehnen zu können, muß man noch die Verallgemeinerung des Satzes 15 von Nr. 633 beweisen. Wir nehmen zunächst an, daß $f(z_1, z_2)$ eine monogene Funktion von *zwei* Veränderlichen z_1 und z_2 sei, und setzen voraus, daß der für z_1 gestattete Bereich B_1 in der z_1-Ebene *einfach zusammenhängend* sei (vgl. Nr. 632). Alsdann mögen z_1^0 und Z_1 irgend zwei Stellen innerhalb B_1 bedeuten, während z_2 irgendwie im Bereiche B_2 der Veränderlichen z_2 gewählt sei. Innerhalb B_1 werde von z_1^0 nach Z_1 irgendein Integrationsweg k_1 gezogen.

Nach Satz 15 von Nr. 633 stellt das Integral:

$$(1) \qquad F = \int_{z_1^0}^{Z_1} f(z_1, z_2) dz_1,$$

wenn die Integration längs k_1 ausgeführt wird, eine monogene Funktion von Z_1 vor, deren Wert nicht von dem eingeschlagenen Integrationswege k_1 abhängt und deren Ableitung nach Z_1 gleich $f(Z_1, z_2)$ ist. Aber F hängt noch von z_2 ab, und daher muß noch bewiesen werden, daß F eine monogene Funkvon Z_1 und z_2 vorstellt.

Wenn $f(z_1, z_2) = u + iv$ gesetzt wird, läßt sich das Integral F nach (3) in Nr. 629 so schreiben:

$$(2) \qquad F = \int_k (u dx_1 - v dy_1) + i \int_k (v dx_1 + u dy_1).$$

Insbesondere nehmen wir zunächst den einfachsten Fall an, der in betreff des Integrationsweges k von z_1^0 bis Z_1 denkbar ist: Es möge die gerade Strecke von z_1^0 bis Z_1 dem Bereiche B_1 vollständig angehören. Dann kann man, wenn:

$$z_1^0 = x_1^0 + iy_1^0, \quad Z_1 = X_1 + iY_1$$

ist, insbesondere längs dieses Weges:

$$x_1 = x_1^0 + (X_1 - x_1^0)t, \quad y_1 = y_1^0 + (Y_1 - y_1^0)t$$

setzen und dadurch t statt x_1 und y_1 als die einzige Veränderliche in (2) einführen, hinsichtlich derer integriert wird, und zwar von $t = 0$ bis $t = 1$. In (2) liegen nunmehr zwei gewöhnliche reelle Quadraturen vor. Da u und v stetig in x_1, y_1, x_2 und y_2 sind, kann man gerade so wie Nr. 487 beweisen, daß die beiden in (2) auftretenden Integrale stetige Funktionen von X_1, Y_1, x_2, y_2 sind. Demnach verhält sich die durch (1) definierte Funktion F von Z_1 und z_2 *stetig*. Wenn es nicht möglich ist, die Stellen z_1^0 und Z_1 durch einen einzigen geradlinigen Integrationsweg zu verbinden, der dem Bereiche B_1 angehört, kann man einen Weg benutzen, der aus einigen geradlinigen Stücken besteht, und man gelangt daher auch dann zu demselben Ergebnisse.

Die stetige Funktion F von Z_1 und z_2 hat, wie wir schon wissen, eine stetige Ableitung nach Z_1, nämlich $f(Z_1, z_2)$. Um also dessen sicher zu sein, daß F eine monogene Funktion von Z_1 und z_2 vorstellt, braucht man nur noch zu zeigen, daß F auch eine stetige Ableitung nach z_2 hat. Daher nehmen wir an, daß z_2 um Δz_2 wachse; dabei möge F den Zuwachs ΔF erfahren. Alsdann ist nach (1):

$$\frac{\Delta F}{\Delta z_2} = \int\limits_{z_1^0}^{Z_1} \frac{f(z_1, z_2 + \Delta z_2) - f(z_1, z_2)}{\Delta z_2} dz_1.$$

Hieraus folgt für $\lim \Delta z_2 = 0$, weil $f(z_1, z_2)$ eine stetige Ableitung hinsichtlich z_2 hat:

$$\frac{\partial F}{\partial z_2} = \int\limits_{z_1^0}^{Z_1} \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2} dz_1.$$

Weil der Integrand stetig ist, läßt sich wieder wie vorhin beweisen, daß das Integral eine stetige Funktion von Z_1 und z_2 ist.

Die Verallgemeinerung auf Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen ist einleuchtend, so daß wir uns darauf beschränken dürfen, das Ergebnis zu formulieren:

Satz 4: Wenn f eine monogene Funktion von n Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots z_n$ ist und der Bereich der erlaubten Werte von z_1 einfach zusammenhängt sowie die Stellen z_1^0 und Z_1 enthält, bedeutet das Integral:

$$F = \int\limits_{z_1^0}^{Z_1} f(z_1, z_2, \ldots z_n) dz_1$$

eine monogene Funktion der n Veränderlichen $Z_1, z_2, \ldots z_n$. Ihr Wert ist unabhängig davon, welchen Weg man in dem Bereiche von z_1 bei der Integration einschlägt. Die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion F sind:

$$\frac{\partial F}{\partial Z_1} = f(Z_1, z_2, \ldots z_n), \quad \frac{\partial F}{\partial z_k} = \int\limits_{z_1^0}^{Z_1} \frac{\partial f(z_1, z_2, \ldots z_n)}{\partial z_k} dz_1$$

$$(k = 2, 3, \ldots n).$$

820. Die monogenen Funktionen als analytische Funktionen. Blickt man auf diejenigen Entwicklungen zurück, die in Nr. 641—647 gegeben wurden, so erkennt man nun, daß ihrer Verallgemeinerung auf monogene Funktionen von mehreren Veränderlichen kein Hindernis im Wege steht. Es würde zu weit führen, wollten wir dies in allen Einzelheiten erörtern; vielmehr begnügen wir uns damit, kurz auszusprechen, *daß diejenigen Sätze, die sich auf gleichmäßig konvergente unendliche Reihen und ihre gliedweise Differentiation und Integration beziehen, auf unendliche Reihen von monogenen Funktionen von mehreren Veränderlichen sinngemäß verallgemeinert werden können.*

Insbesondere ergibt sich als Verallgemeinerung des Satzes 19 von Nr. 643 der

Satz 5: Ist $f(z_1, z_2, \ldots z_n)$ eine monogene Funktion von $z_1, z_2, \ldots z_n$, bedeutet ferner $z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0$ irgend ein bestimmt gewähltes Wertsystem innerhalb ihres Bereiches und sind $k_1, k_2, \ldots k_n$ Kreise in der z_1-Ebene, z_2-Ebene, ... z_n-Ebene mit den Mittelpunkten $z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0$ und zwar Kreise, deren Flächen vollständig den Bereichen der einzelnen Veränderlichen angehören, so ist f innerhalb des durch diese Kreisflächen $k_1, k_2, \ldots k_n$ bestimmten Variabilitätsbereiches darstellbar durch eine daselbst gleichmäßig konvergente Potenzreihe:

$$f = c_0 + [c_{11}(z_1 - z_1^0) + c_{12}(z_2 - z_2^0) + \cdots + c_{1n}(z_n - z_n^0)]$$
$$+ [c_{211}(z_1 - z_1^0)^2 + 2c_{212}(z_1 - z_1^0)(z_2 - z_2^0) + \cdots + c_{2nn}(z_n - z_n^0)^2]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Eine Funktion aber, die als konvergente unendliche Reihe, fortschreitend nach den ganzen positiven Potenzen von $z_1 - z_1^0, z_2 - z_2^0, \ldots z_n - z_n^0$, darstellbar ist, nennt man — wie in Nr. 365 im Falle $n = 1$ — eine *analytische* Funktion. Der Sinn des letzten Satzes ist also dieser: *Jede monogene Funktion von $z_1, z_2, \ldots z_n$ ist in der Umgebung eines Wertsystems $z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0$ innerhalb ihres Variabilitätsbereiches eine* *analytische Funktion.* Umgekehrt: *Jede in der Umgebung des Wertsystems* $z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0$ *analytische Funktion ist ebenda eine monogene Funktion.* Denn die Potenzreihe ist gliedweise differenzierbar, so daß sich also die Funktion mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig verhält und deshalb nach Nr. 817 monogen sein muß.

Entsprechend dem Satze 20 von Nr. 643 gilt noch der

Satz 6: Eine monogene Funktion hat innerhalb ihres Bereiches überall Ableitungen beliebig hoher Ordnung, und diese Ableitungen sind in demselben Bereiche monogene Funktionen.

Die in Satz 5 auftretende unendliche Reihe ist natürlich nichts anderes als die *verallgemeinerte Taylorsche Reihe,* vgl. Satz 29, Nr. 137, für den Fall komplexer Veränderlicher.

Gebräuchlicher als die Bezeichnung: *monogene* Funktion ist der Name: *analytische* Funktion, weshalb wir künftig zumeist diesen Namen benutzen. Sehr bequem ist auch die Redeweise: *Die Funktion f von* $z_1, z_2, \ldots z_n$ *verhält sich in der Umgebung der Stelle* $(z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0)$ *regulär.* Dies soll bedeuten, daß sie in dieser Umgebung als eine gleichmäßig konvergente Potenzreihe wie in Satz 5 darstellbar, d. h. in der Umgebung eine analytische oder monogene Funktion ist. Man kann übrigens wie in § 5 des achten Kapitels, 2. Band, insbesondere Nr. 653 und Nr. 660, eine in einem Gebiete monogene Funktion *fortzusetzen* versuchen. Man gelangt auf diese Weise wie auch durch Integration (wie in Nr. 651, 652) zu *vieldeutigen* Funktionen. Wir betonen deshalb ausdrücklich, daß wir uns stets auf einen Variabilitätsbereich beschränken, in dem zu jedem Wertsysteme *nur ein* Wert der zu betrachtenden Funktion gehört, und außerdem soll sich die Funktion in der Umgebung eines jeden Wertsystems des Bereiches *regulär* verhalten.

821. Eine Vergleichungsfunktion. Unter den Voraussetzungen der in Nr. 818 bewiesenen Verallgemeinerung des Cauchyschen Fundamentalsatzes:

$$(1)\quad \frac{1}{(2i\pi)^n}\int\limits_{k_1}\int\limits_{k_2}\cdots\int\limits_{k_n}\frac{f(z_1, z_2, \ldots z_n)\,dz_1\,dz_2\ldots dz_n}{(z_1-c_1)\,(z_2-c_2)\ldots(z_n-c_n)} = f(c_1, c_2, \ldots c_n)$$

kann man ohne Mühe gerade so wie in Nr. 645 weitere Folgerungen ziehen, indem man dieselbe Formel auf den Fall anwendet, wo c_1 durch $c_1 + \varDelta c_1$ ersetzt wird. Das Ergebnis ist der

Satz 7: Die Formel des verallgemeinerten Cauchyschen Fundamentalsatzes 3 in Nr. 818 darf beliebig oft partiell hinsichtlich $c_1, c_2, \ldots c_n$ derart differenziert werden, daß man die Differentiationen auf der linken Seite unterhalb des Integralzeichens ausführt.

Nun läßt sich auch das Ergebnis von Nr. 648 verallgemeinern. Dies soll zunächst im Falle einer Funktion f von nur *zwei* Veränderlichen z_1 und z_2 gezeigt werden, die sich an der Stelle (c_1, c_2) regulär verhält. Es mögen r_1 und r_2 die Radien zweier solcher Kreise $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ in der z_1-Ebene und z_2-Ebene sein, innerhalb deren Flächen f überall regulär ist. Die Radien seien aber so gewählt, daß dasselbe auch noch auf den Umfängen der Kreise $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ gilt. Ferner sei M das Maximum und N das Minimum, das $|f(z_1, z_2)|$ erreicht, falls z_1 und z_2 irgendwie auf den Umfängen der Kreise variieren, d. h. im Falle $|z_1 - c_1| = r_1$ und $|z_2 - c_2| = r_2$. Nach dem letzten Satze folgt nun aus (1) bei der Annahme $n = 2$, wenn man α-mal hinsichtlich c_1 und β-mal hinsichtlich c_2 differenziert und die Kreisumfänge $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ als Integrationswege benutzt:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} f(c_1, c_2)}{\partial c_1{}^\alpha \partial c_2{}^\beta} = \frac{\alpha!\,\beta!}{(2i\pi)^2} \int\limits_{\varkappa_1}\int\limits_{\varkappa_2} \frac{f(z_1, z_2)\,dz_1\,dz_2}{(z_1 - c_1)^{\alpha+1}(z_2 - c_2)^{\beta+1}}$$

$$= \frac{\alpha!\,\beta!}{(2i\pi)^2} \int\limits_{\varkappa_1} \frac{1}{(z_1 - c_1)^{\alpha+1}} \left[\int\limits_{\varkappa_2} \frac{f(z_1, z_2)\,dz_2}{(z_2 - c_2)^{\beta+1}}\right] dz_1 .$$

Der absolute Betrag des Integranden des in der Klammer stehenden Integrals liegt zwischen $M : r_2{}^{\beta+1}$ und $N : r_2{}^{\beta+1}$. Der Kreis $\varkappa_2$ als Integrationsweg hat die Länge $2\pi r_2$. Mithin liegt der absolute Betrag jenes Integrals nach Satz 11, Nr. 630, zwischen $2\pi M : r_2{}^\beta$ und $2\pi N : r_2{}^\beta$. Weiter folgt hieraus, daß der absolute Betrag des Integranden des auf z_1 bezüglichen Integrals zwischen $2\pi M : r_1{}^{\alpha+1} r_2{}^\beta$ und $2\pi N : r_1{}^{\alpha+1} r_2{}^\beta$ liegt, und weil $2\pi r_1$ die Länge des Weges $\varkappa_1$ ist, folgt aus dem angegebenen Satze ebenso, daß der absolute Betrag des Doppelintegrals zwischen

$$\frac{(2\pi)^2 M}{r_1^{\alpha} r_2^{\beta}} \quad \text{und} \quad \frac{(2\pi)^2 N}{r_1^{\alpha} r_2^{\beta}}$$

liegt. Also geht die Formel hervor:

$$(2) \qquad \frac{\alpha!\,\beta!\,N}{r_1^{\alpha} r_2^{\beta}} \leqq \left| \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(c_1, c_2)}{\partial c_1^{\alpha} \partial c_2^{\beta}} \right| \leqq \frac{\alpha!\,\beta!\,M}{r_1^{\alpha} r_2^{\beta}}.$$

Dies Ergebnis gilt auch für $\alpha = 0$ und $\beta = 0$; alsdann sind $\alpha!$ und $\beta!$ durch Eins zu ersetzen. Die Verallgemeinerung auf den Fall von n Veränderlichen geschieht ebenso, so daß sich entsprechend dem Satze 25 von Nr. 648 ergibt:

Satz 8: Gehören die Flächen der Kreise $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ mit den Mittelpunkten $c_1, c_2, \ldots c_n$ und Radien $r_1, r_2, \ldots r_n$ sowie die Umfänge dieser Kreise in der z_1-Ebene, z_2-Ebene, $\ldots z_n$-Ebene vollständig dem Bereiche einer analytischen Funktion f von $z_1, z_2, \ldots z_n$ an und ist M das Maximum und N das Minimum von $|f(z_1, z_2, \ldots z_n)|$ für alle Wertsysteme $(z_1, z_2, \ldots z_n)$, die durch Punkte auf den Umfängen der n Kreise dargestellt werden, so ist:

$$\frac{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}{r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2}\ldots r_n^{\alpha_n}} N \leqq \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} f(c_1, c_2, \ldots c_n)}{\partial c_1^{\alpha_1} \partial c_2^{\alpha_2} \ldots \partial c_n^{\alpha_n}} \right| \leqq \frac{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}{r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2}\ldots r_n^{\alpha_n}} M.$$

Dies gilt auch, wenn eine der ganzen positiven Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ gleich Null gewählt wird, sobald nur $0!$ durch Eins ersetzt wird.

Nach dem Vorgange von *Cauchy* betrachten wir nun die Funktion:

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots z_n) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z_1 - c_1}{r_1}\right)\left(1 - \frac{z_2 - c_2}{r_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z_n - c_n}{r_n}\right)}.$$

Dies ist eine analytische Funktion von $z_1, z_2, \ldots z_n$ für alle Werte von $z_1, z_2, \ldots z_n$ innerhalb der Kreise $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ und auf ihren Umfängen, abgesehen von den Stellen:

$$z_1 = c_1 + r_1, \quad z_2 = c_2 + r_2, \quad \ldots z_n = c_n + r_n$$

auf den Kreisumfängen. Als die Ableitung:

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} \varphi(z_1, z_2, \ldots z_n)}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2} \ldots \partial z_n^{\alpha_n}}$$

ergibt sich:

$$\frac{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!\,M}{r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2}\ldots r_n^{\alpha_n}\left(1 - \frac{z_1 - c_1}{r_1}\right)^{\alpha_1+1}\left(1 - \frac{z_2 - c_2}{r_2}\right)^{\alpha_2+1}\cdots\left(1 - \frac{z_n - c_n}{r_n}\right)^{\alpha_n+1}}.$$

Daher hat sie an der Stelle $(c_1, c_2, \ldots c_n)$ den Wert:

$$\frac{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}{r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2}\ldots r_n^{\alpha_n}}\,M.$$

Folglich liefert der letzte Satz das gewünschte Ergebnis, nämlich den

Satz 9: Wenn f eine analytische Funktion von $z_1, z_2, \ldots z_n$ ist, wenn ferner die Stellen $z_1 = c_1$, $z_2 = c_2$, $\ldots z_n = c_n$ und die Flächen der Kreise mit den Mittelpunkten $c_1, c_2, \ldots c_n$ und den Radien $r_1, r_2, \ldots r_n$ vollständig dem Bereiche der Funktion angehören und M der größte Wert ist, den der absolute Betrag der Funktion f erreicht, falls $z_1, z_2, \ldots z_n$ auf den Umfängen der n Kreise variieren, so hat die im Innern der Kreise ebenfalls analytische Funktion:

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots z_n) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z_1 - c_1}{r_1}\right)\left(1 - \frac{z_2 - c_2}{r_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z_n - c_n}{r_n}\right)}$$

an der Stelle $(c_1, c_2, \ldots c_n)$ lauter positive partielle Ableitungen, und es ist an dieser Stelle der absolute Betrag von f nicht größer als der Wert von φ und ebenso der absolute Betrag jeder partiellen Ableitung von f nicht größer als der Wert der entsprechenden partiellen Ableitung von φ.

Dieser Satz, die Verallgemeinerung des Satzes 26 von Nr. 648, ist für den Nachweis von Lösungensystemen bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen von der größten Bedeutung, siehe Nr. 824.

§ 2. Existenzbeweis bei Systemen in der Normalform.

822. Partikulare Lösung einer speziellen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Der Nachweis für die Lösungensysteme von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen im komplexen Bereiche wird, wie das Spätere zeigt, wesentlich erleichtert, wenn man zunächst einen gewissen ganz speziellen Fall erledigt hat. Wir betrachten deshalb hier die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{\varrho}\right)^n}.$$

Dabei sollen M, r und ϱ drei gegebene *positive* Zahlen sein, während n eine *positive ganze* Zahl vorstelle. Dagegen sollen x und y nicht mehr wie im 2. und 3. Kapitel auf das reelle Gebiet beschränkt, vielmehr *komplexe* Veränderliche sein.

Die rechte Seite der Gleichung (1) ist in dem Bereiche:

$$(2) \qquad |x| < r, \quad |y| < \varrho$$

eine analytische Funktion von x und y. Es soll nun bewiesen werden, daß es eine und nur eine in der Umgebung von $x = 0$ analytische Funktion y von x gibt, die für $x = 0$ den Anfangswert Null hat und der Differentialgleichung (1) in dieser Umgebung genüge leistet. Dies läßt sich direkt zeigen, weil man die Veränderlichen in der Differentialgleichung (1) in der Form:

$$\left(1 - \frac{y}{\varrho}\right)^n dy - \frac{M\,dx}{1 - \frac{x}{r}} = 0$$

trennen kann. Wenn nämlich x und y in den durch (2) bestimmten Bereichen in der Zahlenebene der x bzw. y beliebig gewählt werden und jedesmal vom Nullpunkte aus ein Integrationsweg nach der Stelle x bzw. y so gezogen wird, daß er ebenfalls in dem Bereiche bleibt, ergibt sich durch Integration:

$$\int_0^y \left(1 - \frac{y}{\varrho}\right)^n dy - \int_0^x \frac{M\,dx}{1 - \frac{x}{r}} = 0.$$

Nach Satz 15, Nr. 633, sind beide Integrale monogene Funktionen der oberen Grenzen, und ihre Werte sind von den eingeschlagenen Integrationswegen unabhängig. Ist eine Lösung y der Differentialgleichung vorhanden, die den angegebenen Bedingungen genügt, so muß die letzte Gleichung erfüllt sein, sobald man darin die Lösung y substituiert und sich auf hinreichend kleine Umgebungen von $x = 0$ und $y = 0$ beschränkt.

Das erste Integral ist leicht auszuwerten, das zweite wird durch die Substitution:

$$(3) \qquad z = 1 - \frac{x}{r}$$

vereinfacht. Es kommt:

$$(4) \qquad \frac{\varrho}{n+1} - \frac{\varrho}{n+1}\left(1 - \frac{y}{\varrho}\right)^{n+1} + Mr\int_1^z \frac{dz}{z} = 0.$$

Wegen $|x| < r$ bedeutet z nach (3) eine solche komplexe Veränderliche, deren Bereich das Innere des Kreises vom Radius Eins mit dem Mittelpunkte $z = 1$ ist. Innerhalb dieses einfach zusammenhängenden Bereiches aber ist das in (4) auftretende Integral der *Hauptwert* des Logarithmus von z, nach Nr. 636, d. h. derjenige, der für $z = 1$ den Wert Null hat, da das Integral für $z = 1$ verschwindet. Dieser Hauptwert ist eine monogene Funktion $\ln z$ von z. Nun geht aus (4) wegen (3) hervor:

$$\left(1 - \frac{y}{\varrho}\right)^{n+1} = 1 + \frac{(n+1)Mr}{\varrho}\ln\left(1 - \frac{x}{r}\right).$$

Setzt man:

$$(5) \qquad t = 1 + \frac{(n+1)Mr}{\varrho}\ln\left(1 - \frac{x}{r}\right),$$

so kommt durch Ausziehen der $(n+1)^{\text{ten}}$ Wurzel:

$$(6) \qquad y = \varrho - \varrho\sqrt[n+1]{t},$$

und es bleibt noch zu erörtern übrig, was für eine monogene Funktion von t unter der $(n+1)^{\text{ten}}$ Wurzel verstanden werden muß.

Wenn t eine komplexe Veränderliche vorstellt, wird $\sqrt[n+1]{t}$ nach Nr. 655 nur dann eine einwertige monogene Funktion, wenn der Bereich von t in der Zahlenebene so weit eingeschränkt ist, daß es darin keinen vollständigen Umlauf um den Nullpunkt gibt. Da t nach (5) von x abhängt, kann man dies immer durch passende Einschränkung des Bereiches von x erlangen. Denn es genügt, dafür Sorge zu tragen, daß t für keinen erlaubten Wert von x *negative reelle* Werte annimmt, weil dann die negative reelle Achse in der Zahlenebene von t nicht überschritten werden kann. Nach (5) aber wird t nur dann reell, wenn x reell ist, und da aus (5) folgt:

$$1 - \frac{x}{r} = e^{\frac{\varrho}{(n+1)Mr}(t-1)},$$

würde sich für t nur dann ein negativer reeller Wert ergeben, wenn x reell und größer als

$$(7) \qquad r' = \left(1 - e^{-\frac{\varrho}{(n+1)Mr}}\right) r$$

wäre. Dieser Wert r' ist *kleiner* als r. Indem man also die komplexe Veränderliche x von jetzt an auf den kleineren Bereich:

$$(8) \qquad |x| < r'$$

beschränkt, erreicht man, daß die in (6) auftretende $(n+1)^{\text{te}}$ Wurzel eine eindeutige analytische Funktion von t, also nach (5) auch eine eindeutige analytische Funktion von x wird, vorausgesetzt, daß man angibt, welcher unter den $n+1$ Werten der Wurzel für einen bestimmten erlaubten Wert von t oder x angenommen werden muß. Für $x = 0$ wird $t = 1$ nach (5); es soll dann aber $y = 0$ werden. Mithin muß man nach (6) festsetzen, daß:

$$\sqrt[n+1]{1} = 1$$

sein soll. Alsdann geben (6) und (5) *die gesuchte monogene Funktion:*

$$(9) \qquad y = \varrho - \varrho \sqrt[n+1]{1 + \frac{(n+1)Mr}{\varrho} \ln\left(1 - \frac{x}{r}\right)}$$

als die einzige Lösung der vorgelegten Differentialgleichung (1) *mit dem Anfangswerte* $y = 0$ *für* $x = 0$ *und zwar in der Umgebung* (8) *von* x.

823. Satz über die Lösungensysteme eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform. Nach diesen Vorbereitungen, deren Ergebnisse wir in der nächsten Nummer anwenden, nehmen wir die Aufgabe in Angriff, den Beweis für die Existenz von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen im komplexen Bereiche zu führen.

Zunächst gilt der

Satz 10: Liegt ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform vor:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

und verhalten sich die n *Funktionen* $f_1, f_2, \ldots f_n$ *von* $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ *in der Umgebung der Stelle* $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ *regulär, so bilden* n *in der Umgebung von* x_0 *analytische Funktionen:*

$$y_i = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

die für $x = x_0$ die Werte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ haben, stets in dieser Umgebung ein Lösungensystem des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen, sobald nur ihre Ableitungen an der Stelle $x = x_0$ mit denjenigen Werten der Ableitungen übereinstimmen, die sich aus den Differentialgleichungen selbst und den durch wiederholte vollständige Differentiation nach x aus ihnen folgenden Gleichungen an der Stelle $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ ergeben.

Wenn man nämlich das System:

$$(1) \qquad y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

wiederholt vollständig nach x differenziert, gehen Gleichungen für die höheren Ableitungen der Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ hervor. So z. B. zunächst diese:

$$(2) \qquad y_i'' = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_i}{\partial y_2} y_2' + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n} y_n'$$
$$(i = 1, 2, \ldots n),$$

usw. Es wird nun behauptet, daß die als vorhanden vorausgesetzten analytischen Funktionen:

$$(3) \qquad y_i = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

stets ein Lösungensystem bilden, wenn nur ihre Ableitungen an der Anfangsstelle $x = x_0$ selbst mit denjenigen Werten übereinstimmen, die sich aus (1), (2) usw. an der Stelle $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ ergeben.

In der Tat, nach Satz 1, Nr. 817, werden die n Funktionen $f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$ in der Umgebung von $x = x_0$ analytische Funktionen von x allein, sobald darin für $y_1, y_2, \ldots y_n$ die Funktionen (3) von x eingesetzt werden. Dann aber lassen sich die Gleichungen (1), (2) sowie die weiteren durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen so schreiben:

$$y_i' = f_i, \quad y_i'' = \frac{df_i}{dx}, \quad y_i''' = \frac{d^2 f_i}{dx^2}, \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

und nach Annahme gelten sie für $x = x_0$. Nun aber ist:

$$y_i' = \left(\frac{dy_i}{dx}\right)_0 + \left(\frac{d^2 y_i}{dx^2}\right)_0 \frac{x - x_0}{1!} + \left(\frac{d^3 y_i}{dx^3}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots$$

und demnach:

$$y_i' = (f_i)_0 + \left(\frac{df_i}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1!} + \left(\frac{d^2 f_i}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots$$
$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Die rechte Seite ist aber nichts anderes als die Entwicklung von f_i nach Potenzen von $x - x_0$. Also sind die Gleichungen (1) in der Tat erfüllt.

824. Existenz eines Lösungensystems eines Systems von Differentialgleichungen in der Normalform. Um die Formeln bequemer zu gestalten, nehmen wir zunächst alle Anfangswerte gleich Null an und betrachten das System:

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

unter der Voraussetzung, daß sich die n Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ der $n + 1$ Veränderlichen $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ in der Umgebung der Werte Null regulär verhalten.

Soll es nun in der Umgebung von $x = 0$ ein Lösungensystem $y_1, y_2, \ldots y_n$ von (1) geben, das aus analytischen Funktionen besteht und für $x = 0$ die Anfangswerte Null hat, das also in der Form:

$$(2) \qquad y_i = c_{i1}\frac{x}{1!} + c_{i2}\frac{x^2}{2!} + c_{i3}\frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

darstellbar sein müßte, so liefert der letzte Satz ein Mittel zur Berechnung der Koeffizienten $c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, \ldots$. Denn dies müssen diejenigen Werte sein, die sich aus den Gleichungen:

$$(3)\left\{\begin{array}{l} y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n), \\ y_i'' = \dfrac{\partial f_i}{\partial x} + \dfrac{\partial f_i}{\partial y_1} y_1' + \dfrac{\partial f_i}{\partial y_2} y_2' + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial y_n} y_n', \quad (i = 1, 2, \ldots n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right.$$

für $y_i', y_i'', \ldots$ ergeben, wenn darin $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ sämtlich durch Null ersetzt werden. Hiernach sind die Reihenentwicklungen (2) bekannt, und es steht auch nach dem letzten Satze fest, daß sie das einzige Lösungensystem von der vorgeschriebenen Art darstellen, vorausgesetzt, daß diese Reihenentwicklungen wirklich analytische Funktionen bedeuten. Es muß also nur noch bewiesen werden, daß die Reihen (2) Konvergenzradien haben, die nicht gleich Null sind.

Dieser Beweis ist so zu führen: Nach Nr. 820 gibt es zwei von Null verschiedene positive Zahlen r und ϱ derart, daß die Entwicklungen der n analytischen Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ nach Potenzen von $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ in dem Bereiche:

(4) $\quad |x| \leqq r, \quad |y_1| \leqq \varrho, \quad |y_2| \leqq \varrho, \cdots |y_n| \leqq \varrho,$

möglich sind. Ferner sei M der größte Wert, den die absoluten Beträge von $f_1, f_2, \ldots f_n$ annehmen können, wenn x alle Werte mit dem absoluten Betrage r bekommt und $y_1, y_2, \ldots y_n$ alle Werte mit dem absoluten Betrage ϱ erhalten. Alsdann wird die Funktion gebildet:

(5) $$\psi(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y_1}{\varrho}\right)\left(1-\frac{y_2}{\varrho}\right)\cdots\left(1-\frac{y_n}{\varrho}\right)}$$

und statt (1) das folgende System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen betrachtet:

(6) $$\frac{dy_i}{dx} = \psi(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

In dem Bereiche:

(7) $\quad |x| < r, \quad |y_1| < \varrho, \quad |y_2| < \varrho, \cdots |y_n| < \varrho$

ist ψ eine analytische Funktion, und es ist leicht, dasjenige analytische Lösungensystem von (6) in der Umgebung von $x = 0$ zu finden, das für $x = 0$ die Anfangswerte Null hat. Denn da die rechten Seiten aller Gleichungen (6) übereinstimmen und die Anfangswerte aller Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ auch übereinstimmen sollen, müssen alle n Funktionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ gleich ein und derselben Funktion y werden, die der Differentialgleichung:

(8) $$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

genügt, wobei φ aus ψ hervorgeht, wenn $y_1, y_2, \ldots y_n$ durch y ersetzt werden. Es ist also:

$$\varphi(x, y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\varrho}\right)^n}.$$

Mithin ist die Differentialgleichung (8) die in Nr. 822 betrachtete. Damals wurde gezeigt, daß sie gerade eine Lösung:

$$y = a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

hat, die für $x = 0$ verschwindet und in der Umgebung von $x = 0$ eine analytische Funktion ist. Folglich hat das System (6) ein System von lauter gleichen Lösungen:

(9) $$y_i = a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

die für $x = 0$ die Anfangswerte Null haben und in der Umgebung von $x = 0$ analytische Funktionen von x sind, nämlich in dem Bereiche:

$$|x| < r',$$

wobei r' nach (7) in Nr. 822 den Wert hat:

$$r' = \left(1 - e^{-\frac{\varrho}{(n+1)Mr}}\right) r. \tag{10}$$

Nun lassen sich die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in (9) auch aus dem Systeme (6) selbst berechnen, denn sie müssen mit den Ableitungen:

$$\left\{\begin{array}{l} y_i' = \psi(x, y_1, y_2, \cdots y_n), \\ y_i'' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} y_2' + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} y_n', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right. \tag{11}$$

an der Stelle $x = y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ übereinstimmen, nach Satz 10, Nr. 823. Jetzt hat man sich daran zu erinnern, daß andererseits die Koeffizienten $c_{i1}, c_{i2}, \ldots$ in den Entwicklungen (2) mit den Werten der Ableitungen übereinstimmen, die sich aus (3) an derselben Stelle ergeben. Man kann nun den Satz 9 von Nr. 821 auf die Funktionen

$$f_i(x, y_1, y_2, \cdots y_n) \quad \text{und} \quad \psi(x, y_1, y_2, \cdots y_n)$$

anwenden. Denn wenn man in jenem Satze $z_1, z_2, \ldots z_n$ durch $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ und f durch f_i ersetzt, außerdem alle Größen c gleich Null wählt und schließlich noch $r_1, r_2, \ldots r_n$ durch r und ϱ ersetzt, wird die in dem Satze auftretende Funktion φ nach (5) gerade die jetzt mit ψ bezeichnete Funktion. Danach ist an der Stelle $x = y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ sowohl $|f_i| \leqq \psi$ als auch der absolute Betrag jeder Ableitung von f_i nicht größer als die entsprechende Ableitung von ψ. Die Ableitungen von ψ sind dabei ebenso wie ψ selbst positiv. Die ersten Gleichungen (3) und (10) lehren also, daß:

$$|c_{i1}| \leqq a_1$$

ist, darauf die zweiten Gleichungen (3) und (10), daß:

$$|c_{i2}| \leqq a_2$$

ist, usw., während $a_1, a_2, \ldots$ positiv sind. Mithin sind die absoluten Beträge der Koeffizienten in den n Entwicklungen (2) nicht größer als die durchweg positiven Koeffizienten in der Entwicklung (9), von der feststeht, daß sie im Bereiche $|x| < r'$ konvergiert. *Demnach konvergieren auch alle n Reihen* (2) *in diesem Bereiche,* nach Satz 10, Nr. 105, und nach Nr. 362.

Hiermit ist der Existenzbeweis für ein solches Lösungensystem von (1) beendet, das für $x = 0$ die Anfangswerte Null hat.

Nimmt man an, daß sich die Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ in dem vorgelegten Systeme:

$$\text{(11)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

in der Umgebung der Stelle $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ regulär verhalten, so ist leicht zu beweisen, daß es ein und nur ein System von Lösungen gibt, die für $x = x_0$ die Anfangswerte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ haben, in der Umgebung von $x = x_0$ analytisch sind und die Gleichungen (11) befriedigen. Denn wenn man die Substitutionen:

$$\text{(12)} \quad \xi = x - x_0, \; \eta_1 = y_1 - y_1^0, \; \eta_2 = y_2 - y_2^0, \; \ldots \eta_n = y_n - y_n^0$$

macht, geht das System:

$$\text{(13)} \qquad \frac{d\eta_i}{d\xi} = f_i(\xi + x_0, \eta_1 + y_1^0, \eta_2 + y_2^0, \ldots \eta_n + y_n^0)$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

hervor, das nach dem, was soeben bewiesen wurde, ein und nur ein Lösungensystem:

$$\text{(14)} \qquad \eta_i = \varphi_i(\xi) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

hat, dessen Anfangswerte für $\xi = 0$ sämtlich gleich Null sind und das in der Umgebung von $\xi = 0$ sowohl analytisch ist als auch die Gleichungen (13) befriedigt. Das fragliche Lösungensystem von (11) muß durch dieselben Substitutionen (12) in dieses System (14) übergehen. Mithin ergibt es sich aus (14), wenn man die Substitutionen (12) wieder aufhebt, in der Form:

$$y_i = y_i^0 + \varphi_i(x - x_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Somit gilt der

Satz 11: Es liege im komplexen Bereiche ein System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

mit n unbekannten Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ *der unabhängigen*

Veränderlichen x vor. Die n Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ sollen sich in der Umgebung der Stelle $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ regulär verhalten. Alsdann gibt es ein und nur ein System von Lösungen:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \ldots y_n = \varphi_n(x),$$

die für $x = x_0$ die Anfangswerte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ haben und sich in der Umgebung der Stelle $x = 0$ regulär verhalten.

825. Verhalten des Lösungensystems in bezug auf die Anfangswerte. Wieder liege das System in der Normalform vor:

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Setzt man voraus, daß sich $f_1, f_2, \ldots f_n$ in der Umgebung einer *bestimmten* Stelle $(a, b_1, b_2, \ldots b_n)$ regulär verhalten, so kann man die Anfangswerte $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ in dieser Umgebung *beliebig* wählen. Zu ihnen gehört nach dem letzten Satze ein System von Lösungen, und wenn man diese Lösungen als Reihen nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt:

$$\text{(2)} \quad y_i = y_i^0 + c_{i1}\frac{x - x_0}{1!} + c_{i2}\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

sind also $c_{i1}, c_{i2}, \ldots$ *Funktionen* von $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$, nämlich diejenigen, die sich aus den Gleichungen (3) der letzten Nummer nach den Substitutionen $x = x_0$, $y_1 = y_1^0$, $y_2 = y_2^0$, $\ldots y_n = y_n^0$ ergeben. Weil sich nun $f_1, f_2, \ldots f_n$ in der Umgebung der Stelle $(a, b_1, b_2, \ldots b_n)$ regulär verhalten, gilt dasselbe von ihren partiellen Ableitungen. Mithin verhalten sich $c_{i1}, c_{i2}, \ldots$ in der Umgebung dieser Stelle ebenfalls regulär. Nun gilt der Satz 21, Nr. 644, nach Nr. 820 auch für gleichmäßig konvergente unendliche Reihen von analytischen Funktionen *mehrerer* Veränderlicher, und deshalb verhalten sich auch die Funktionen (2) von x, von x_0 und von $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ in der Umgebung der Stelle $x = x_0 = a$, $y_1^0 = b_1, \ldots y_n^0 = b_n$ regulär. Zu dem Satze 11 der vorigen Nummer tritt also noch hinzu der

Satz 12: Verhalten sich die Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ von $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ in der Umgebung einer Stelle $(a, b_1, b_2, \ldots b_n)$ regulär und ist $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ irgend eine Stelle in dieser Umgebung, so besteht dasjenige Lösungensystem des Systems:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

das für $x = x_0$ die Anfangswerte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ hat, aus solchen Funktionen:

$$y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$$

von $x, x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$, die sich in der Umgebung der Stelle $x = a$, $x_0 = a$, $y_1^0 = b_1, \ldots y_n^0 = b_n$ ebenfalls regulär verhalten.

Zunächst hängt das Lösungensystem:

$$y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0) \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

von x und von den $n + 1$ Größen $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ ab, die man als *willkürliche Konstanten* bezeichnen kann. Aber da dies Lösungensystem für $x = a$ gewisse Werte $y_1 = C_1$, $y_2 = C_2$, $\ldots y_n = C_n$ hat, ist es identisch mit dem Lösungensysteme:

$$(3) \qquad y_i = \varphi_i(x, a, C_1, C_2, \ldots C_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

in dem außer der bestimmten Zahl a *nur noch n willkürliche Konstanten* $C_1, C_2, \ldots C_n$, die sogenannten *Integrationskonstanten*, auftreten. Insbesondere liegt in (3) das System der *Hauptlösungen* vor, nämlich dasjenige, das für $x = a$ gerade die Werte $C_1, C_2, \ldots C_n$ hat. Vgl. Nr. 761.

Hiernach sind wir imstande, auch die Betrachtungen von Nr. 762 und 763 auf den komplexen Bereich zu übertragen, sobald wir noch denjenigen Satz aufgestellt haben, der sich auf die Existenz unentwickelter Funktionen im komplexen Bereiche bezieht und auf Grund dessen auch Eliminationen wie in Nr. 763 statthaft werden. Diesen Satz werden wir in der nächsten Nummer beweisen. Es erscheint aber nicht nötig, die Entwicklungen von Nr. 762, 763 auch im komplexen Bereiche wiederzugeben, da sich keinerlei Schwierigkeiten einstellen.

§ 3. Die übrigen Existenzbeweise.

826. Unentwickelte Funktionen. Gegeben sei ein System von n Gleichungen:

$$(1) \qquad F_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

zwischen $n + 1$ komplexen Veränderlichen $x, y_1, y_2, \ldots y_n$. Die n Funktionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ mögen sich in der Umgebung der Stelle $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ regulär verhalten und an dieser

Stelle verschwinden, d. h. das System (1) möge für $x = x_0$ durch die Werte $y_1 = y_1^0$, $y_2 = y_2^0$, $\dots$ $y_n = y_n^0$ befriedigt werden. Dagegen soll die *Funktionaldeterminante* (vgl. Nr. 80):

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots y_n^0)$ *von Null verschieden* sein. Unter diesen Annahmen wollen wir beweisen, daß ein und nur ein System von Funktionen $y_1, y_2, \dots y_n$ vorhanden ist, die für $x = x_0$ die Werte $y_1^0, y_2^0, \dots y_n^0$ haben, in der Umgebung von x_0 regulär sind und die Gleichungen (1) befriedigen.

Ein solches Funktionensystem muß, wenn es existiert, auch diejenigen *Differential*gleichungen erfüllen, die aus (1) durch vollständige Differentiation nach x hervorgehen:

$$(2) \qquad \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial F_i}{\partial y_2} y_2' + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n} y_n' = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots n).$$

Weil die Determinante $\mathfrak{D}$ an der Stelle $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots y_n^0)$ von Null verschieden ist, gibt es nach Satz 2, Nr. 817, eine Umgebung dieser Stelle, wo $\mathfrak{D}$ überall von Null verschieden bleibt. In dieser Umgebung lassen sich deshalb die Gleichungen (2) nach den Ableitungen der y auflösen, wodurch ein System von Gleichungen in der Normalform hervorgeht:

$$(3) \qquad y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots y_n) \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

deren rechte Seiten sich in der Umgebung der Stelle $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots y_n^0)$ regulär verhalten. Nach Satz 11, Nr. 824, gibt es aber nur ein Lösungensystem von der gesuchten Art:

$$(4) \qquad y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \dots y_n = \varphi_n(x).$$

Es bleibt also nur noch übrig, zu beweisen, daß dies auch die Gleichungen (1) befriedigt. Setzt man die Funktionen (4) in $F_1, F_2, \dots F_n$ für $y_1, y_2, \dots y_n$ ein, so gehen Funktionen von x allein hervor, die in der Umgebung von x_0 regulär sind, und die linken Seiten der Gleichungen (2), die dasselbe wie die Gleichungen (3) besagen, gehen dabei in die Ableitungen dieser n Funktionen von x allein über:

$$\frac{dF_i}{dx} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Demnach werden $F_1, F_2, \ldots F_n$ *Konstanten*, und da die Funktionen (4) für $x = x_0$ die Werte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ haben, müssen diese Konstanten gleich den Werten von $F_1, F_2, \ldots F_n$ an der Stelle $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$, d. h. gleich Null sein. Folglich befriedigen die Funktionen (4) die Gleichungen (1).

Nachdem somit der Fall eines Systems (1) von n Gleichungen in $n+1$ Veränderlichen erledigt ist, betrachten wir den allgemeinen Fall eines Systems von n Gleichungen in $m+n$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_m$ und $y_1, y_2, \ldots y_n$:

$$(5) \qquad F_i(x_1, x_2, \ldots x_m, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0.$$

Die Voraussetzungen sind hier diese: Die n Funktionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ sollen sich in der Umgebung der Stelle $(x_1^0, \ldots x_m^0, y_1^0, \ldots y_n^0)$ regulär verhalten, sie sollen ferner an dieser Stelle selbst gleich Null sein, dagegen soll die Funktionaldeterminante:

$$(6) \qquad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \ldots & F_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix}$$

an dieser Stelle *von Null verschieden* sein. Unter diesen Voraussetzungen wollen wir beweisen, daß es ein und nur ein System von n Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ von $x_1, x_2, \ldots x_m$ gibt, die an der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$ die Werte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ annehmen, sich in der Umgebung dieser Stelle regulär verhalten und die Gleichungen (5) für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots x_m$ in dieser Umgebung befriedigen.

Dieser Fall ist auf den des Systems (1) zurückzuführen, indem man setzt:

$$(7) \qquad x_1 = x_1^0 + \xi_1 z, \quad x_2 = x_2^0 + \xi_2 z, \ \ldots \ x_m = x_m^0 + \xi_m z.$$

Bedeuten nämlich $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ Werte in dem Bereiche:

$$(8) \qquad |\xi_1| < 1, \quad |\xi_2| < 1, \ldots |\xi_m| < 1$$

und wird z auf einen hinreichend kleinen Bereich $|z| < r$ beschränkt, so gibt (7) irgend ein Wertsystem in der Umgebung der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$. Durch Einführung der Werte (7) in (5) geht ein Gleichungensystem hervor, dessen linke Seiten Funktionen von $z, y_1, y_2, \ldots y_n$ sind, die sich in der Umgebung der Stelle $(0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ regulär verhalten und an dieser Stelle verschwinden, während die Determinante $\mathfrak{D}$ daselbst nach wie vor von Null verschieden bleibt. Außerdem enthalten die Gleichungen noch die m unter den Bedingungen (8) willkürlichen Konstanten $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$. Nach dem, was beim Systeme (1) bewiesen wurde, gibt es ein und nur ein System von Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_m$. Da sie noch von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ abhängen, seien sie so geschrieben:

(9) $$y_i = \varphi_i(z, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Wenn man $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ mit irgend einer Zahl t multipliziert, deren absoluter Betrag kleiner als Eins ist, und zugleich z mit t dividiert, bleiben die Werte (7) ungeändert, und die Bedingungen (8) sind nach wie vor erfüllt. Also muß auch:

$$\varphi_i(z, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) = \varphi_i\left(\frac{z}{t}, \xi_1 t, \xi_2 t, \ldots \xi_m t\right)$$

sein. Da $r < 1$ angenommen werden darf, kann man insbesondere $t = z$ wählen. Dann aber kommt:

$$\varphi_i = (z, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) = \varphi_i(1, \xi_1 z, \xi_2 z, \ldots \xi_m z).$$

Mithin sind die n Funktionen (9) *Funktionen von* $\xi_1 z, \xi_2 z, \ldots \xi_m z$ *allein*. Da sie andererseits analytische Funktionen von z sind, lassen sie sich als Reihen nach Potenzen von z entwickeln, die folglich die allgemeine Form haben:

$$\begin{aligned} y_i = y_i^0 &+ [c_{i1}\xi_1 z + c_{i2}\xi_2 z + \cdots + c_{im}\xi_m z] \\ &+ [c_{i11}(\xi_1 z)^2 + 2c_{i12}\xi_1 z \cdot \xi_2 z + \cdots + c_{imm}(\xi_m z)^2] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Sie konvergieren unbedingt im Bereiche $|z| < r$, falls $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ irgendwie im Bereiche (8) gewählt werden. Aber man sieht, daß sie auch Reihen nach Potenzen der m Größen $\xi_1 z, \xi_2 z, \ldots \xi_m z$ sind, die den Bedingungen:

$$|\xi_1 z| < r, \quad |\xi_2 z| < r, \ldots |\xi_m z| < r$$

genügen. Nach (7) kann man diese m Größen mit $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots x_m - x_m^0$ bezeichnen. Somit kommt:

$$\begin{aligned} y_i = y_i^0 &+ [c_{i1}(x_1 - x_1^0) + c_{i2}(x_2 - x_2^0) + \cdots + c_{im}(x_m - x_m^0)] \\ &+ [c_{i11}(x_1 - x_1^0)^2 + 2c_{i12}(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) + \cdots \\ &\qquad + c_{imm}(x_m - x_m^0)^2] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(i = 1, 2, \ldots n), \end{aligned}$$

und dies sind in dem Bereiche:

$$|x_1 - x_1^0| < r, \quad |x_2 - x_2^0| < r, \ldots |x_m - x_m^0| < r$$

unbedingt konvergente Potenzreihen, daher *analytische* Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_m$.

Hiermit ist bewiesen der

Satz 13: Liegt ein System von n Gleichungen:

$$F_i(x_1, x_2, \ldots x_m, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

in den $m + n$ komplexen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_m, y_1, y_2, \ldots y_n$ vor, wird es insbesondere durch das Wertsystem $x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ befriedigt, verhalten sich ferner die linken Seiten der Gleichungen in der Umgebung der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ regulär und ist überdies die Funktionaldeterminante:

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \ldots & F_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix}$$

an dieser Stelle nicht gleich Null, so gibt es ein und nur ein System von Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ von $x_1, x_2, \ldots x_m$, die sich in der Umgebung der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$ regulär verhalten, an der Stelle selbst die Werte $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ haben und dem Gleichungensysteme für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots x_m$ in jener Umgebung genüge leisten.

827. Nachträgliche Bemerkungen. Soeben wurde die Verallgemeinerung des Satzes 17 von Nr. 697 auf den komplexen Bereich gewonnen. Es sei dabei auf einen Unterschied hingewiesen: Wenn man analytische Funktionen betrachtet, zieht der Nachweis ihrer Existenz stets von selbst den der Existenz ihrer Ableitungen nach sich; deshalb bedurfte es hier nicht wie z. B. in Nr. 696 besonderer Untersuchungen über die Ableitungen.

Ferner verweisen wir auf Nr. 187 zurück, wo die regulären und singulären Punkte von ebenen Kurven unterschieden wurden. Damals wurde unter einer Kurve in der Ebene der Inbegriff aller Punkte verstanden, deren Koordinaten x, y eine solche Funktion $F(x, y)$ gleich Null machen, die sich in der Umgebung eines Kurvenpunktes (x_0, y_0) nach Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ entwickeln läßt.

Diese Definition ersetzen wir jetzt durch folgende: Unter einer reellen Kurve in der Ebene wird der Inbegriff aller Punkte mit denjenigen reellen Koordinaten x und y verstanden, für die eine analytische Funktion F zweier im allgemeinen komplexer Veränderlicher x und y gleich Null wird:

$$(1) \qquad F(x, y) = 0.$$

Alsdann ist jene in Nr. 187 gemachte Annahme erfüllt. Wenn F in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ regulär und außerdem $F(0, 0) = 0$ ist, gilt eine Entwicklung wie die in Nr. 188 mit (1) bezeichnete und alles, was damals darüber gesagt wurde. Die Voraussetzung (4) von Nr. 188 ist in der Tat diejenige Bedingung, unter der die Gleichung (1) nach Satz 13 der letzten Nummer in der Umgebung von $x = 0$ nach y auflösbar ist, siehe (5) in Nr. 188.

Somit sind die in Nr. 188 gemachten Annahmen gerechtfertigt. Was dagegen einige Betrachtungen in Nr. 189 betrifft, wo es sich im wesentlichen darum handelte, die Gleichung (1) in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ auch im Falle:

$$F_y^{(0)} = 0$$

aufzulösen, so wollen wir nur bemerken, daß es zwar möglich ist, den Satz 13 der letzten Nummer etwa bei der Annahme einer einzigen Gleichung (1) auch auf solche Fälle zu erweitern, wo die Ableitung von F hinsichtlich y verschwindet, daß es aber nicht in unserer Absicht liegt, dies hier zu tun. Die notwendige Ausfüllung der in Nr. 189 gelassenen und dort ausdrücklich angegebenen Lücken findet man in den Lehrbüchern der Theorie der analytischen Funktionen.

828. Lösungen eines allgemeinen Systems erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Auf Grund des Satzes 13 von Nr. 826 läßt sich nun die Untersuchung der Lösungen eines allgemeinen Systems erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(1) \quad F_i(x, y_1, y_2, \dots y_n, y_1', y_2', \dots y_n') = 0 \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

auf die von Systemen in der Normalform zurückführen. Denn die Betrachtungen in Nr. 776 lassen sich jetzt für den Fall anstellen, wo die Veränderlichen komplex sind. Unter dem *Bereiche des Systems* (1) ist dabei ein solcher Bereich der $2n + 1$

komplexen Veränderlichen $x, y_1, y_2, \dots y_n, y_1', y_2', \dots y_n'$ zu verstehen, innerhalb dessen sich die n Funktionen $F_1, F_2, \dots F_n$ regulär verhalten; und dieser Bereich soll niemals verlassen werden. Alsdann gilt der Satz 16 von Nr. 776 auch für komplexe Veränderliche, sobald man sich auf solche Lösungensysteme beschränkt, die durch *analytische* Funktionen dargestellt werden. Es ist deshalb nicht nötig, das Ergebnis hier aufs neue zu formulieren.

829. Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung. Ganz dasselbe gilt von denjenigen Betrachtungen, die in Nr. 781, 782 für gewöhnliche Differentialgleichungen r^{ter} Ordnung in der aufgelösten Form:

$$y^{(r)} = f(x, y, y', \dots y^{(r-1)})$$

und in Nr. 787 für allgemeine gewöhnliche Differentialgleichungen r^{ter} Ordnung:

$$F(x, y, y', \dots y^{(r)}) = 0$$

angestellt wurden. Unter dem *Bereiche der Differentialgleichung* hat man dabei stets einen solchen Bereich der komplexen Veränderlichen zu verstehen, wo sich die Funktion f bzw. F regulär verhält, und dieser Bereich soll nie verlassen werden.

Wir müssen es dem Leser überlassen, auch alle anderen Betrachtungen der vorhergehenden Kapitel, wie die über singuläre Elemente, singuläre Lösungen und Lösungensysteme sowie über die eingliedrigen Gruppen von Punkttransformationen, in ihren Einzelheiten auf den komplexen Bereich zu übertragen. Die geometrischen, anschaulichen Deutungen gehen dabei allerdings verloren. Man pflegt aber auch in der Geometrie von *imaginären Kurven, Flächen* usw. zu sprechen, und wenn man dies tut, kann man doch in vielen Fällen den Wortlaut früherer geometrisch eingekleideter Ergebnisse auch noch im komplexen Bereiche beibehalten.

§ 4. Theorie der linearen Differentialgleichungen.

830. Voraussetzungen. Die Theorie soll insbesondere auf eine wichtige Klasse von gewöhnlichen Differentialgleichungen, auf die *linearen*, angewandt werden, von denen schon in Nr. 805 die Rede war. Bei diesen Differentialgleichungen nämlich kann man mit verhältnismäßig einfachen Mitteln Betrachtungen in derjenigen Richtung durchführen, die in Nr. 674 als die funktionentheoretische bezeichnet wurde. Nach Vorarbeiten von *Sturm* und *Liouville* ist ihre Theorie namentlich von *Fuchs* ausgebaut worden.

Nach Nr. 805 ist jede lineare Differentialgleichung einer *verkürzten* linearen Differentialgleichung äquivalent. Deshalb betrachten wir insbesondere die *verkürzten linearen Differentialgleichungen r^{ter} Ordnung*, also diejenigen von der Form:

$$(1)\quad p_0(x)y + p_1(x)y' + \cdots + p_{r-1}(x)y^{(r-1)} + p_r(x)y^{(r)} = 0,$$

die durch Auflösung nach $y^{(r)}$ in die Form:

$$(2)\qquad y^{(r)} = f_0(x)y + f_1(x)y' + \cdots + f_{r-1}(x)y^{(r-1)}$$

übergeht, wobei also:

$$(3)\qquad f_0(x) = -\frac{p_0(x)}{p_r(x)}, \cdots \quad f_{r-1}(x) = -\frac{p_{r-1}(x)}{p_r(x)}$$

ist. Solche Differentialgleichungen heißen auch *homogen linear*.

In betreff der Koeffizienten $p_0(x)$, $p_1(x)$, ... $p_r(x)$ könnte man z. B. die besonders einfache Verabredung treffen, darunter ganze rationale Funktionen der komplexen Veränderlichen x zu verstehen. Die Theorie, die bei dieser speziellen Annahme entwickelt werden kann, gilt aber in allem wesentlichen auch dann, wenn man etwas allgemeinere Annahmen macht, nämlich die folgenden:

Die Funktionen $p_0(x)$, $p_1(x)$, ... $p_r(x)$ sollen in einem gemeinsamen Bereiche monogen sein, so daß sie in der Umgebung einer jeden Stelle x_0 des Bereiches in der Form:

$$(4)\quad p_k(x) = c_{k0} + c_{k1}(x-x_0) + c_{k2}(x-x_0)^2 + \cdots \quad (k=0,1,\cdots,r)$$

entwickelbar sind. Wenn alle $r+1$ Funktionen etwa an der Stelle x_0 verschwinden, sind c_{00}, c_{10}, ... c_{r0} gleich Null. Beginnt nun die Reihe für $p_k(x)$ mit der n_k^{ten} Potenz von $x-x_0$ und ist n die kleinste der $r+1$ Zahlen n_0, n_1 ... n_r, so haben alle $r+1$ Funktionen den gemeinsamen Faktor $(x-x_0)^n$. Da er aus der Differentialgleichung (1) fortgehoben werden kann, dürfen wir voraussetzen: *An keiner Stelle des Bereiches verschwinden alle $r+1$ Funktionen $p_0(x), p_1(x)$, ... $p_r(x)$.* Sieht man von denjenigen Stellen des Bereiches ab, wo insbesondere $p_r(x)$ gleich Null wird, so lehren die Formeln (3), daß die Koeffizienten $f_0(x), f_1(x), \ldots f_{r-1}(x)$ der nach $y^{(r)}$ aufgelösten Differentialgleichung (2) sonst überall im Bereiche monogene Funktionen sind.

In betreff der Stellen, wo $p_r(x)$ verschwindet, ist zu bemerken: Wenn x_0 eine solche Stelle vorstellt und $n_0, n_1, \ldots n_r$ dieselbe Bedeutung wie vorher haben, ist $n_r \geqq 1$. Zu denjenigen Zahlen $n_0, n_1, \ldots n_{r-1}$, die mindestens gleich n_r sind, gehören Funktionen $p(x)$, die nach Division mit $p_r(x)$ auch für $x = x_0$ stetig bleiben. Sie liefern also in der Umgebung von x_0 monogene Koeffizienten der Gleichung (2). Da aber nicht alle r Funktionen $p_0(x), p_1(x), \ldots p_{r-1}(x)$ für $x = x_0$ verschwinden, trifft jene Annahme nicht für alle r Zahlen $n_0, n_1, \ldots n_{r-1}$ zu. Wenn z. B. $n_k < n_r$ ist, gibt die Division:

$$f_k(x) = -\frac{p_k(x)}{p_r(x)}$$

eine Funktion, die an der Stelle x_0 mit $1:(x-x_0)$ in der $(n_r - n_k)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich groß wird (vgl. Nr. 127). Man sagt dann auch, daß $f_k(x)$ an der Stelle x_0 eine solche Unstetigkeit hat, die durch Multiplikation mit einer passenden ganzen positiven Potenz von x *hebbar* ist, nämlich mit der $(n_r - n_k)^{\text{ten}}$, oder auch: daß x_0 eine *außerwesentlich* singuläre Stelle der Funktion $f_k(x)$ vorstellt. Demgegenüber hat z. B. $\ln x$ die *wesentlich* singuläre Stelle $x = 0$, denn es gibt keine ganze positive Zahl n derart, daß $x^n \ln x$ für $x = 0$ stetig wäre.

Jede Stelle x_0, wo $p_r(x) = 0$ wird, ist mithin für mindestens einen der Koeffizienten der Gleichung (2) außerwesentlich singulär. Alle diese Stellen heißen die *Pole* der Differentialgleichung im Gegensatze zu den übrigen *regulären* Stellen ihres Bereiches. Da sich der Bruch $p_r(x):(x-x_0)^{n_r}$ in der Umgebung von x_0 regulär verhält und für x_0 selbst nicht verschwindet, gibt es nach Satz 2, Nr. 817, eine solche Umgebung von x_0, wo der Bruch ebenfalls nirgends gleich Null wird. Dasselbe gilt dann von $p_r(x)$, falls nur von der Stelle x_0 selbst abgesehen wird.

Mithin gibt es in jedem Teile des Bereiches, der endliche Abmessungen hat, nur eine begrenzte Anzahl von Polen. In den Figuren, die im folgenden zur Erläuterung dienen, sollen die stark markierten Stellen immer die Pole bedeuten.

831. Lösung in der Umgebung einer regulären Stelle. Nach Nr. 829 gibt es in der Umgebung einer *regulären* Stelle x_0 stets eine und nur eine analytische Lösung der verkürzten linearen Differentialgleichung:

$$(1) \qquad y^{(r)} = f_0(x)y + f_1(x)y' + \cdots + f_{r-1}(x)y^{(r-1)},$$

sobald für $y, y', \ldots y^{(r-1)}$ an dieser Stelle x_0 bestimmte Anfangswerte vorgeschrieben sind. Die Andeutungen in Nr. 829, wonach dies Ergebnis aus den Betrachtungen in Nr. 824 zu gewinnen ist, dürften aber gerade bei dem besonders wichtigen Beispiele einer verkürzten linearen Differentialgleichung zweckmäßigerweise eine ausführlichere Erläuterung verdienen.

Aus dem Bereiche sei deshalb ein *Teilbereich* ausgewählt, der nicht nur im Innern, sondern *auch auf dem Rande nur reguläre Stellen* hat. Dies erreicht man z. B., indem man das Innere beliebig kleiner Kreise um die Pole ausschließt und beliebig nahe der Grenze des Bereiches eine engere Grenze zieht, siehe Fig. 51. Falls der Bereich unbegrenzt ist, kann man als äußeren Rand des Teilbereiches etwa einen Kreis von beliebig großem Radius um den Nullpunkt als Mittelpunkt annehmen. Jedenfalls soll der Teilbereich von *endlichen* Abmessungen sein. Es gibt nun eine positive Zahl m derart, daß die absoluten Beträge von $f_0(x), f_1(x), \ldots f_{r-1}(x)$ im Innern und auf dem Rande des Teilbereiches nirgends m übertreffen.

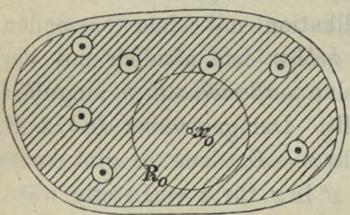

Fig. 51.

Setzt man wie in Nr. 805:

$$y' = y_1, \; y'' = y_2, \; \cdots \; y^{(r-1)} = y_{r-1},$$

und verwandelt man die Differentialgleichung (1) dadurch in ein System erster Ordnung in der Normalform:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1, \quad \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \; \cdots \; \dfrac{dy_{r-2}}{dx} = y_{r-1}, \\ \dfrac{dy_{r-1}}{dx} = f_0(x)y + f_1(x)y_1 + \cdots + f_{r-1}(x)y_{r-1} \end{cases}$$

mit den r unbekannten Funktionen $y, y_1, \ldots y_{r-1}$, so läßt sich die Betrachtung in Nr. 824 ohne weiteres auf dieses System anwenden. Es werde also x_0 im Teilbereiche bestimmt angenommen, und es seien irgendwelche Anfangswerte $y_0, y_1^0, \ldots y_{r-1}^0$ von $y, y_1, \ldots y_{r-1}$ für $x = x_0$ bestimmt gewählt. Ferner bedeute R_0 den Radius desjenigen größten Kreises um x_0, der vollständig dem Teilbereiche angehört. Außerdem sei noch eine positive Zahl ϱ beliebig groß gewählt. Alsdann verhalten sich die rechten Seiten der Gleichungen (2) als Funktionen von $x, y, y_1, \ldots y_{r-1}$ unter den Bedingungen:

(3) $|x-x_0| \leqq R_0,\ |y-y_0| \leqq \varrho,\ |y_1-y_1^0| \leqq \varrho, \cdots |y_{r-1}-y_{r-1}^0| \leqq \varrho$

regulär, und ihre absoluten Beträge sind für diejenigen Werte von $x, y, y_1, \ldots y_{r-1}$, die den Bedingungen:

$$|x-x_0| = R_0,\ |y-y_0| = \varrho,\ |y_1-y_1^0| = \varrho, \cdots |y_{r-1}-y_{r-1}^0| = \varrho$$

genügen, nicht größer als die r Werte:

$$|y_1^0| + \varrho,\ |y_2^0| + \varrho, \cdots |y_{r-1}^0| + \varrho,$$

$$m\{|y_0| + \varrho + |y_1^0| + \varrho + \cdots + |y_{r-1}^0| + \varrho\}.$$

Bedeutet σ eine Zahl größer als $|y_0|, |y_1^0|, \ldots |y_{r-1}^0|$, so sind alle $r-1$ Werte in der ersten Zeile kleiner als $\sigma + \varrho$, während der in der zweiten Zeile kleiner als $mr(\sigma+\varrho)$ ist; folglich sind alle r Werte kleiner als:

$$M = (m+1)\,r\,(\sigma+\varrho).$$

Diese Zahl darf demnach als die Zahl M in Nr. 824 benutzt werden. Die Betrachtungen jener Nummer gelten nämlich um so mehr, wenn darin M durch eine noch größere Zahl ersetzt wird. Außerdem tritt hier R_0 an die Stelle von r, und die Anzahl n muß hier durch die Anzahl r ersetzt werden. Der in Nr. 824 unter (10) angegebene Radius r' ist somit jetzt dieser:

$$R_0\left\{1 - e^{-\frac{\varrho}{r(r+1)(m+1)(\sigma+\varrho)}}\right\}.$$

Die positive Zahl ϱ war beliebig groß gewählt worden. Mit wachsendem ϱ nimmt der vorstehende Wert zu und zwar bis:

$$R_0' = R_0\left\{1 - e^{-\frac{1}{r(r+1)(m+1)}}\right\}, \tag{4}$$

vorausgesetzt, daß die Zahl σ größer als $|y_0|, |y_1^0|, \ldots |y_{r-1}^0|$

existiert, d. h., daß die absoluten Beträge der Anfangswerte von $y, y_1, \ldots y_{r-1}$ *endlich* sind. Der in der geschweiften Klammer stehende Faktor hat einen im gesamten Teilbereiche konstanten und von Null verschiedenen positiven Wert Θ kleiner als Eins.

Aus Nr. 824 entnehmen wir folglich das Ergebnis: In der Umgebung irgend einer Stelle x_0 des Teilbereiches gibt es ein und nur ein System von analytischen Lösungen $y, y_1, \ldots y_{r-1}$ des Systems erster Ordnung (2), sobald die Anfangswerte $y_0, y_1^0, \ldots y_{r-1}^0$ der Lösungen für $x = x_0$ irgendwie bestimmt und endlich gewählt worden sind. Dies Lösungensystem gilt dabei *mindestens* in der Umgebung:

$$|x - x_0| < \Theta R_0 \tag{5}$$

von x_0. Aus Satz 10 von Nr. 823 folgert man leicht: Soweit dasjenige Gebiet reicht, innerhalb dessen alle diese Funktionen $y, y_1, \ldots y_{r-1}$ monogen sind und zugleich nur reguläre Stellen der Differentialgleichung (1) liegen, genügen die Funktionen dem Systeme (2). Nach den $r-1$ ersten Gleichungen (2) sind aber $y_1, \ldots y_{r-1}$ die $r-1$ ersten Ableitungen von y. Wenn man also die Anfangswerte mit $y_0, y_0', \ldots y_0^{(r-1)}$ bezeichnet, folgt weiterhin:

In der Umgebung irgendeiner Stelle x_0 des Teilbereiches gibt es eine und nur eine analytische Lösung y der verkürzten linearen Differentialgleichung (1), sobald für $y, y', \ldots y^{(r-1)}$ an der Stelle $x = x_0$ irgendwelche bestimmte endliche Anfangswerte $y_0, y_0', \ldots y_0^{(r-1)}$ vorgeschrieben worden sind. Diese Lösung y gilt dabei *mindestens* in der Umgebung (5) von x_0, und soweit sie darüber hinaus noch in einem Gebiete von regulären Stellen eine monogene Funktion ist, genügt sie auch dort noch der Differentialgleichung (1).

832. Analytische Fortsetzung. Das Ergebnis gilt für jede Stelle x_0 im Teilbereiche. Nimmt man x_0 auf dem Rande des Teilbereiches an, so wird $R_0 = 0$, also auch $\Theta R_0 = 0$, so daß der Beweis versagt. Die Beschränkung von x_0 auf das *Innere* des Teilbereiches stellen wir so her: Eine positive Zahl τ wird beliebig klein gewählt; dann sollen nur solche Stellen im Teilbereiche betrachtet werden, die von seinen Rändern mindestens die Entfernung τ haben. Für jede derartige Stelle ist $R_0 \geqq \tau$, daher auch $\Theta R_0 \geqq \Theta\tau$. Wie man also auch die Stelle x_0 im Innern des Teilbereiches und wie man auch die Anfangswerte $y_0, y_0', \ldots y_0^{(r-1)}$ wählen mag, stets hat die vorgelegte verkürzte lineare Differentialgleichung:

$$(1) \qquad y^{(r)} = f_0(x)y + f_1(x)y' + \cdots + f_{r-1}(x)y^{(r-1)}$$

eine und nur eine zugehörige analytische Lösung:

$$(2) \qquad y = y_0 + y_0' \frac{x-x_0}{1!} + y_0'' \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots,$$

die innerhalb eines Kreises um x_0 gilt, dessen Radius wenigstens gleich $\Theta\tau$ ist. Die r ersten Koeffizienten in (2) sind die gegebenen Anfangswerte. Die übrigen kann man nacheinander aus der Gleichung (1) selbst und denjenigen Gleichungen berechnen, die aus (1) durch wiederholte Differentiation hervorgehen:

$$(3) \begin{cases} y^{(r+1)} = f_0'y + (f_0 + f_1')y' + \cdots + (f_{r-2} + f_{r-1}')y^{(r-1)} + f_{r-1}y^{(r)}, \\ y^{(r+2)} = f_0''y + (2f_0' + f_1'')y' + \cdots + (f_{r-2} + 2f_{r-1}')y^{(r)} + f_{r-1}y^{(r+1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

worin man die Werte $x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(r-1)}$ für $x, y, y', \ldots y^{(r-1)}$ zu substituieren hat.

Liegt x_1 im Innern des Kreises um x_0 mit dem Radius $\Theta\tau$, so ist nicht nur der Wert y_1 von y für $x = x_1$ auf Grund von (2) bestimmt, sondern dasselbe gilt für die Werte $y_1', y_1'', \ldots$ der Ableitungen der Potenzreihe (2) für $x = x_1$. Nach Satz 19, Nr. 643, stimmt alsdann die Potenzreihe:

$$(4) \qquad y = y_1 + y_1' \frac{x-x_1}{1!} + y_1'' \frac{(x-x_1)^2}{2!} + \cdots$$

mit der Reihe (2) an jeder Stelle x überein, die innerhalb desjenigen größten Kreises um x_1 liegt, der in dem Kreise um x_0 mit dem Radius $\Theta\tau$ enthalten ist. Mithin ist die Lösung y der Differentialgleichung, bei der für $x = x_0$ die Anfangswerte y_0, $y_0', \ldots y_0^{(r-1)}$ vorgeschrieben sind, identisch mit derjenigen, bei der für $x = x_1$ die Anfangswerte $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(r-1)}$ vorgeschrieben sind, und die mindestens innerhalb des Kreises um x_1 mit dem Radius $\Theta\tau$ gilt, also innerhalb eines Kreises, der über den Kreis um x_0 hinausgreift. In demjenigen Bereiche, den beide Kreisflächen bilden (siehe Fig. 52), liegt somit jetzt eine bestimmte monogene Lösung y der Differentialgleichung (1) vor,

[832

vgl. Nr. 660, wo diese sogenannte *analytische Fortsetzung* allgemein betrachtet wurde.

Diese Art der Erweiterung des Bereiches der monogenen Funktion y läßt sich wiederholt anwenden, aber in Nr. 660 wurde schon gezeigt, daß man dabei zu *Widersprüchen* gelangen kann. Deshalb sind einige weitere Schlüsse erforderlich.

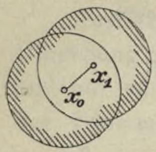

Fig. 52.

Dabei schicken wir eine einfache Bemerkung voraus: Außer x_0 seien zwei Stellen x_1 und ξ im Innern des Teilbereiches so gewählt, daß die Seiten des von x_0, x_1 und ξ gebildeten Dreiecks sämtlich kleiner als $\Theta\tau$ sind. Wenn dann $\eta, \eta', \eta'', \ldots$ diejenigen Werte sind, die sich aus dem Werte (2) von y und aus den zugehörigen Ableitungen $y', y'', \ldots$ für $x = \xi$ ergeben, kann die Funktion (2) auch nach der Stelle ξ hin fortgesetzt werden vermöge der Entwicklung:

$$(5) \qquad y = \eta + \eta' \frac{x-\xi}{1!} + \eta'' \frac{(x-\xi)^2}{2!} + \cdots.$$

Diese Reihe gilt im Kreise um ξ mit dem Radius $\Theta\tau$, und der Kreis enthält die Stelle x_1, siehe Fig. 53. Diejenigen Werte, die aus (5) und den Ableitungen von (5) für $y, y', y'', \ldots$ an der Stelle $x = x_1$ hervorgehen, sind dann nichts anderes als die in (4) auftretenden Werte y_1, $y_1', y_1'', \ldots$, wie man sofort durch Anwendung des Satzes 30 in Nr. 659 erkennt. Anstatt also die Funktion (2) direkt nach x_1 hin in der Form (4) fortzusetzen, kann man sie zuerst nach ξ hin in der Form (5) und dann von da aus nach x_1 hin fortsetzen. Man sagt: *Der Weg von x_0 nach x_1 ist durch die Folge der beiden Wege von x_0 nach ξ und von ξ nach x_1 ersetzbar.* Dies läßt sich umkehren: *Die Folge der beiden Wege von x_0 nach ξ und von ξ nach x_1 ist durch den Weg von x_0 nach x_1 ersetzbar.*

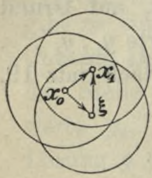

Fig. 53.

Nun sei außer x_0 eine Stelle X im Innern des Teilbereiches gegeben. Von x_0 aus werde ein (offenes) Polygon $x_0 x_1 x_2 \ldots x_n X$ bis X so konstruiert, daß alle Ecken im Innern des Teilbereiches liegen und alle Seiten des Polygons kleiner als $\Theta\tau$ sind siehe Fig. 54. Ferner sei von x_0 nach X ein zweites Polygon $x_0\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_m X$ mit denselben Eigenschaften konstruiert. Der Einfachheit halber werde vorerst angenommen, daß die beiden Polygone einander nicht schneiden, so daß sie ein Flächenstück F einschließen. Wenn dieses Flächenstück F *nur reguläre Stellen enthält, die sämtlich im Innern des Teilbereiches liegen*, so läßt sich nachweisen, daß die wiederholte analytische Fortsetzung der Funktion y, die durch (2) definiert wird, längs des durch das erste Polygon angegebenen Weges an der Stelle X denselben Wert von y liefert wie die wiederholte analytische Fortsetzung längs des durch das zweite Polygon angegebenen Weges. Diese beiden Arten der wiederholten Fortsetzung sind, nebenbei bemerkt, deshalb möglich, weil jede folgende Ecke eines der Polygone infolge der gemachten Voraussetzungen innerhalb desjenigen Kreises um die vorhergehende Ecke gelegen ist, dessen Radius den Wert $\Theta\tau$ hat.

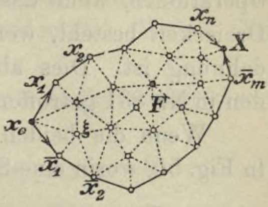

Fig. 54.

Zum Beweise überzieht man die Fläche F mit irgend einem Netze von lauter Dreiecken, deren Seiten kleiner als $\Theta\tau$ sind, wobei auch alle Ecken beider Polygone Ecken solcher Dreiecke werden sollen. Dies ist immer möglich. Da nach der vorausgeschickten Bemerkung die analytische Fortsetzung längs jeder Dreieckseite durch die Folge der beiden Fortsetzungen längs der beiden anderen Dreiecksseiten ersetzbar ist und umgekehrt, kann nun der Weg längs des zweiten Polygons Schritt für Schritt so verwandelt werden, daß er schließlich in den Weg längs des ersten Polygons übergeht. So z. B. ist in Fig. 54 der Weg von x_0 nach $\bar{x}_1$ durch die Folge der Wege von x_0 nach ξ und von ξ nach $\bar{x}_1$ ersetzbar; ferner ist die Folge der beiden Wege von ξ nach $\bar{x}_1$ und von $\bar{x}_1$ nach $\bar{x}_2$ durch den Weg von ξ nach $\bar{x}_2$ ersetzbar. An die Stelle des Polygons $x_0\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_m X$ tritt also das Polygon $x_0\xi\bar{x}_2\bar{x}_3\ldots\bar{x}_m X$, und es bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung, daß man ebenso schließlich das ganze zweite Polygon durch das erste ersetzen kann. Mithin ist der Wert, der sich für y an der Stelle $x = X$ auf dem durch das zweite Polygon angegebenen Wege ergibt, genau derselbe wie derjenige, der auf dem durch das erste Polygon angegebenen Wege hervorgeht.

Dieser Schluß erfordert nur eine *begrenzte* Anzahl von Operationen, wenn das Netz aus einer begrenzten Anzahl von Dreiecken besteht, wenn also die Fläche F von *endlicher* Ausdehnung ist. Dies aber trifft zu, weil der Teilbereich nach den in Nr. 831 getroffenen Maßnahmen endliche Abmessungen hat.

Wenn die beiden Polygone einander schneiden, wie z. B. in Fig. 55, worin eine Schnittstelle vorkommt, also zwei Flächenstücke F_1 und F_2 von ihnen eingeschlossen werden, kann man, wie man nun nachträglich ohne Mühe einsieht, genau ebenso schließen, sobald jene Flächenstücke nur reguläre Stellen enthalten, die von den Rändern des Teilbereiches um mehr als $\Theta\tau$ entfernt sind.

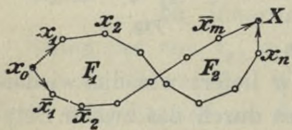

Fig. 55.

833. Zusammenfassung der Ergebnisse. Falls der Bereich der Differentialgleichung:

$$(1) \qquad y^{(r)} = f_0(x)y + f_1(x)y' + \cdots + f_{r-1}(x)y^{(r-1)}$$

endlos ist, geben wir ihm wie in Nr. 831 dadurch eine äußere Grenze, daß wir etwa um den Nullpunkt einen Kreis mit beliebig großem Radius ziehen. Wir betrachten die Lösungen der Differentialgleichung stets nur in einem solchen Bereiche, der außer Polen nur reguläre Stellen hat und dem endliche Abmessungen zukommen.

Ein endlicher Bereich enthält nach Nr. 830 nur eine begrenzte Anzahl von Polen. Man kann ihn daher in einen *einfach zusammenhängenden* verwandeln (vgl. Nr. 632), indem man z. B. einen Pol mit einem zweiten durch eine Linie verbindet, ebenso den zweiten mit einem dritten usw., schließlich den letzten Pol ebenso mit der äußeren Grenze des Bereiches und dann festsetzt, daß keine dieser Linien überschritten werden darf, siehe Fig. 56. Alsdann haben noch statthafte Wege von x_0 nach X stets die Eigenschaft, daß sie nur

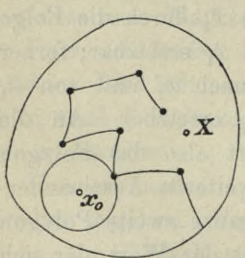

Fig. 56.

solche Flächenstücke einschließen können, die keine Pole enthalten. Mit diesen Wegen darf man aber auch beliebig nahe an die Grenzlinien herankommen, weil die Entfernung $\Theta\tau$ von den Rändern beliebig klein gemacht werden kann, da τ eine beliebig klein gewählte positive Zahl bedeutete. Mithin läßt sich das Ergebnis so aussprechen:

Satz 14: Liegt die verkürzte lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$y^{(r)} = f_0(x)y + f_1(x)y' + \cdots + f_{r-1}(x)y^{(r-1)}$$

vor, und wird innerhalb des Bereiches der Differentialgleichung ein einfach zusammenhängender Bereich hergestellt, der keinen Pol enthält und überdies von endlichen Abmessungen ist, so gibt es eine überall in diesem einfach zusammenhängenden Bereiche monogene Funktion y von x, die der Differentialgleichung genügt, und zwar ist eine derartige Funktion vollkommen bestimmt, sobald für $y, y', \ldots y^{(r-1)}$ an einer bestimmten Stelle x_0 im Innern irgendwelche bestimmte endliche Anfangswerte y_0, y_0', ..., $y_0^{(r-1)}$ vorgeschrieben werden.

Diese Funktion wird in der Umgebung von x_0 durch die Reihe:

$$(2) \qquad y = y_0 + y_0' \frac{x - x_0}{1!} + y_0'' \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots$$

als analytische Funktion dargestellt, und nach Satz 19, Nr. 643, gilt die Reihenentwicklung überall innerhalb desjenigen größten Kreises um x_0, der vollständig dem einfach zusammenhängenden Bereiche angehört. Man kann nun die vorhin willkürlich eingeführten neuen Grenzlinien immer so annehmen, daß dieser Kreis derselbe ist wie derjenige größte Kreis um x_0, der vollständig dem Bereiche der Differentialgleichung (nicht nur dem einfach zusammenhängenden Bereiche) angehört und keinen Pol enthält. Siehe die Fig. 56. Somit folgt:

Satz 15: Liegt die verkürzte lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$y^{(r)} = f_0(x)y + f_1(x)y' + \cdots + f_{r-1}(x)y^{(r-1)}$$

vor und ist x_0 eine reguläre Stelle, sind ferner für $y, y', \ldots y^{(r-1)}$ an dieser Stelle x_0 bestimmte Werte $y_0, y_0', \ldots y_0^{(r-1)}$ vorgeschrieben und werden schließlich noch die Werte $y_0^{(r)}, y_0^{(r+1)}, \ldots$ von

$y^{(r)}$, $y^{(r+1)}$, . . . an derselben Stelle aus der Differentialgleichung und denjenigen Gleichungen berechnet, die man durch wiederholte Differentiation der Differentialgleichung erhält, so konvergiert die Entwicklung der Lösung y:

$$y = y_0 + y_0' \frac{x - x_0}{1!} + y_0'' \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots$$

mindestens innerhalb desjenigen größten Kreises um x_0, der vollständig im Bereiche der Differentialgleichung liegt und keinen Pol enthält.

In Nr. 831 hatten wir nur einen kleineren Kreis festgestellt, innerhalb dessen diese Reihe konvergiert. Durch den letzten Satz wird daher das Ergebnis von Nr. 831 vervollständigt.

Besonders sei darauf aufmerksam gemacht, daß *nicht* bewiesen wurde, daß der Kreis, von dem in dem Satze die Rede ist, der wirkliche Konvergenzkreis ist; vielmehr kann dieser noch größer sein, und das kommt tatsächlich vor, wie das folgende einfache erste Beispiel schon zeigt.

1. Beispiel: Die Differentialgleichung erster Ordnung:

(3) $$y' = \frac{y}{x}$$

hat nur den Nullpunkt als Pol; alle anderen Stellen sind regulär. Diejenige Lösung, die für $x = x_0 \neq 0$ den Anfangswert y_0 hat, lautet:

$$y = \frac{y_0}{x_0} x$$

oder, als Reihe nach Potenzen von $x - x_0$ geschrieben:

$$y = y_0 + \frac{y_0}{x_0}(x - x_0).$$

Da die Reihe abbricht, konvergiert sie *überall* im Endlichen, auch im Pole $x = 0$.

2. Beispiel: Die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

(4) $$y'' = -y$$

hat gar keinen Pol; alle Stellen sind regulär. Ihre Lösungen sind deshalb überall im Endlichen monogen. In der Tat, wenn für $x = x_0$ die Anfangswerte y_0 und y_0' vorgeschrieben werden, ergibt sich aus der Differentialgleichung (3) und denjenigen

Gleichungen, die man durch wiederholte Differentiation von (4) erhält:

$$y_0'' = -y_0,\ y_0''' = -y_0',\ y_0^{\mathrm{IV}} = -y_0'' = y_0 \text{ usw.},$$

so daß die Lösung diese ist:

$$y = y_0 + y_0' \frac{x}{1!} - y_0 \frac{x^2}{2!} - y_0' \frac{x^3}{3!} + y_0 \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

oder also nach (2) in Nr. 373:

$$y = y_0 \cos x + y_0' \sin x.$$

3. Beispiel: Die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = -4\frac{y'}{x} - \frac{2y}{x^2} \tag{5}$$

hat nur den Pol $x = 0$; alle anderen Stellen sind regulär. Diejenige Lösung also, bei der für $x = x_0 \neq 0$ die Anfangswerte y_0 und y_0' vorgeschrieben werden, wird sich als Potenzreihe darstellen, die für $|x - x_0| < |x_0|$ konvergiert. Man kann leicht einsehen, daß sie keinen größeren Konvergenzkreis hat, denn die Gleichung (5) läßt sich so schreiben:

$$\frac{d^2(x^2y)}{dx^2} = 0$$

und liefert daher $x^2y = \text{konst.}\,x + \text{konst.}$, so daß man findet:

$$y = \frac{2x_0y_0 + x_0^2y_0'}{x} - \frac{x_0^2y_0 + x_0^3y_0'}{x^2}.$$

In der Tat sind $1 : x$ und $1 : x^2$ nach Nr. 657 in der Form:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}\left[1 - \frac{x - x_0}{x_0} + \left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^2 - \cdots\right],$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x_0^2}\left[1 - 2\frac{x - x_0}{x_0} + 3\left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^2 - \cdots\right]$$

entwickelbar, aber nur für $|x - x_0| < |x_0|$.

834. Analytische Fortsetzung um einen Pol herum. Liegt wie in voriger Nummer die verkürzte lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$y^{(r)} = f_0(x)y + f_1(x)y' + \cdots + f_{r-1}(x)y^{(r-1)} \tag{1}$$

und eine Lösung:

$$y = y_0 + y_0' \frac{x - x_0}{1!} + y_0'' \frac{x - x_0}{2!} + \cdots \tag{2}$$

in der Umgebung einer regulären Stelle x_0 vor, so ist dies die *allgemeine* Lösung, sobald die r Anfangswerte $y_0, y_0', \ldots y_0^{(r-1)}$

willkürliche Konstanten sind, vgl. Nr. 782. Die Gleichung (1) zeigt für $x = x_0$, daß sich $y_0^{(r)}$ als lineare ganze homogene Funktion von $y_0, y_0', \ldots y_0^{(r-1)}$ darstellt, und dasselbe gilt für $y_0^{(r+1)}, y_0^{(r+2)}, \ldots$, da sie aus denjenigen Gleichungen zu berechnen sind, die aus (1) durch Differentiation hervorgehen. Wenn man also in (2) die bzw. mit $y_0, y_0', \ldots y_0^{(r-1)}$ behafteten Glieder für sich zusammenfaßt und dann $y_0, y_0', \ldots y_0^{(r-1)}$ als willkürliche Konstanten mit $C_1, C_2, \ldots, C_r$ bezeichnet, nimmt die Lösung die Form an:

$$y = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \cdots + C_r \varphi_r(x). \tag{3}$$

Hier tritt der Satz 12 von Nr. 805 deutlich zutage, indem sich die allgemeine Lösung linear und homogen mit willkürlichen konstanten Koeffizienten aus r partikularen Lösungen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots \varphi_r(x)$ zusammensetzt. Allgemein ist hierbei $\varphi_k(x)$ eine Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$, die mit der $(k-1)^{\text{ten}}$ Potenz von $x - x_0$ anfängt.

Nimmt man für $C_1, C_2, \ldots C_r$ *bestimmte* Werte an und schlägt man längs eines von x_0 ausgehenden Polygons einen Weg der analytischen Fortsetzung ein, der schließlich nach x_0 zurückführt, so kommt man am Ende nach Nr. 832 zu genau derselben Lösung (3), falls das Polygon in einem einfach zusammenhängenden und von Polen freien Bereiche liegt. Nicht so braucht es sich zu verhalten, wenn das Polygon z. B. einen oder einige Pole einschließt. Allerdings ist auch dann die analytische Fortsetzung möglich, und man kommt schließlich in der Umgebung von x_0 wieder zu einer Lösung, aber nicht gerade zu derjenigen Lösung (3), von der man ausging. Da aber *alle* Partikularlösungen in der Umgebung von x_0 in der Form (3) darstellbar sind, kann das Ergebnis nur dieses sein:

Hat man $C_1, C_2, \ldots C_r$ bestimmt gewählt und die Lösung auf irgendeinem Wege von x_0 aus im regulären Teile des Bereiches fortgesetzt, bis man schließlich nach x_0 zurückgelangt, so geht eine gewisse neue Partikularlösung:

$$y = C_1' \varphi_1(x) + C_2' \varphi_2(x) + \cdots + C_r' \varphi_r(x)$$

hervor, in der $C_1', C_2', \ldots C_r'$ im allgemeinen andere Werte als $C_1, C_2, \ldots C_r$ haben. Zwischen den alten Werten C_1,

$C_2, \ldots C_r$ und den neuen Werten $C_1', C_2', \ldots C_r'$ der Konstanten bestehen Zusammenhänge. Ohne näher darauf einzugehen, bemerken wir, daß diese Zusammenhänge von der speziellen Art der Wege unabhängig und nur davon abhängig sind, wie die Wege die Pole einschließen, sowie daß man jeden Weg ersetzen kann durch die Folge einer Anzahl von Wegen, von denen jeder von x_0 nach x_0 zurückführt und nur je einen Pol enthält. Weiß man dann, wie sich auf jedem solchen Wege, einer sogenannten *Fundamentalschleife*, die Werte C_1, $C_2, \ldots C_r$ ändern, so kann man auch für jeden anderen von x_0 ausgehenden und nach x_0 zurückführenden Weg die neuen Werte der Konstanten bestimmen.

Es ist jedoch nicht unsere Absicht, diese Betrachtungen weiter zu verfolgen. Wir haben sie nur deshalb angedeutet, um einen Begriff von der Bedeutung der Pole für die Lösungen der Differentialgleichung zu geben. Vollständige Umläufe um die Pole bewirken eben im allgemeinen, daß die Lösungen nicht mehr monogen bleiben, *indem ihre Einwertigkeit aufhört.* Eine ähnliche Erscheinung wurde in § 5 des achten Kapitels des 2. Bandes an mehreren Funktionen studiert, insbesondere an der *Potenzfunktion*, vgl. Nr. 654.

835. Allgemeinere Problemstellung. Bisher haben wir die Frage, ob es monogene Lösungen *in der Umgebung eines Poles* gibt, nicht erörtert. Wir wollen ihr jetzt näher treten. Leicht kann man an Beispielen sehen, daß, wenn x_0 ein Pol ist, keine Lösungen zu existieren brauchen, die in der Umgebung von x_0 monogen sind. Da nun die Pole nach den letzten Andeutungen in voriger Nummer eine ähnliche Rolle spielen wie die Stelle $x = 0$ für die allgemeine Potenzfunktion x^α, liegt es aber nahe, zu untersuchen, ob es nicht in der Umgebung eines Poles x_0 eine Lösung gibt, die sich in der Form:

$$y = (x - x_0)^\alpha [c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \cdots]$$

darstellen läßt, wo α *irgend eine* bestimmte Konstante bedeutet.

Natürlich sind dann nur solche Werte der Konstanten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ brauchbar, für die der Inhalt der eckigen Klammer in einer gewissen Umgebung von x_0 konvergiert. Übrigens kann man dabei c_0 bestimmt wählen, weil mit y ja stets auch konst. y eine Lösung ist. Da die Annahme $c_0 = 0$ darauf hinauskommt, daß sich noch ein Faktor $x - x_0$ absondern läßt, also darauf, daß α durch $\alpha + 1$ ersetzt wird, darf $c_0 \neq 0$ und mithin gleich Eins gewählt werden:

(1) $$x = (x - x_0)^\alpha [1 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots]$$

Was ferner die α^{te} Potenz von $x - x_0$ anbetrifft, so sind die Bemerkungen in Nr. 654 noch zu ergänzen, weil wir auch *komplexe* Exponenten α zulassen wollen. Auch dann läßt sich x^α durch die Formel:

$$x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln x}$$

als Funktion von einer Funktion definieren, denn $\ln x$ ist ja nach dem Beispiele in Nr. 651 eine monogene Funktion, sobald man von $x = 0$ aus in der komplexen Zahlenebene eine Grenzlinie s zieht, die nicht überschritten werden darf. Zugleich erkennt man, daß auch die allgemeine Potenzregel gilt:

$$x^\alpha x^\beta = e^{\alpha \ln x + \beta \ln x} = e^{(\alpha + \beta)\ln x} = x^{\alpha + \beta},$$

und nach der Regel von der Differentiation einer Funktion von einer Funktion (vgl. Nr. 625) ist außerdem:

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \frac{de^{\alpha \ln x}}{dx} = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1},$$

so daß die elementare Regel für die Differentiation einer Potenz gültig bleibt. Entsprechendes gilt von der Potenz $(x - x_0)^\alpha$.

Die Frage, ob die verkürzte lineare Differentialgleichung in der Umgebung einer Stelle x_0 ihres Bereiches eine Lösung von der Form (1) hat, werden wir in der Folge unter gewissen Einschränkungen, aber unabhängig davon beantworten, ob x_0 eine reguläre Stelle oder ein Pol ist.

836. Normalform der Differentialgleichung. Wie in Nr. 830 nehmen wir die Differentialgleichung in der Form an:

(1) $$p_0(x)y + p_1(x)y' + \cdots + p_r(x)y^{(r)} = 0.$$

Es sei x_0 eine Stelle ihres Bereiches, die entweder regulär oder ein Pol ist, d. h. es seien $p_0, p_1, \ldots p_r$ in der Umgebung von x_0 nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ entwickelbar. Wird allgemein angenommen, daß die Entwicklung von $p_k(x)$ mit der n_k^{ten} Potenz von $x - x_0$ beginnt:

$$p_k(x) = \text{konst.}\,(x - x_0)^{n_k} + \text{konst.}\,(x - x_0)^{n_k + 1} + \cdots,$$

so muß wenigstens eine der $r+1$ ganzen positiven Zahlen $n_0, n_1, \ldots n_r$ gleich Null sein, weil sich sonst von der Gleichung (1) ein Faktor $x - x_0$ absondern ließe, was in Nr. 830 ausdrücklich ausgeschlossen wurde. Nun möge ϱ die kleinste ganze positive Zahl, unter Umständen die Null, bedeuten derart, daß:

$$n_0 + \varrho \geqq 0, \quad n_1 + \varrho \geqq 1, \quad \ldots \quad n_r + \varrho \geqq r$$

wird, sodaß also bei mindestens einer dieser Bedingungen das Gleichheitszeichen gilt. Dann sind die Produkte:

$$(2)\quad \begin{cases} q_0(x) = (x - x_0)^\varrho p_0(x), \\ \qquad q_1(x) = (x - x_0)^{\varrho - 1} p_1(x), \\ \qquad\qquad q_2(x) = (x - x_0)^{\varrho - 2} p_2(x), \\ \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad q_r(x) = (x - x_0)^{\varrho - r} p_r(x) \end{cases}$$

ebenfalls nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelbar. Wenn man also die Differentialgleichung (1) mit $(x - x_0)^\varrho$ multipliziert, nimmt sie die Form an:

$$(3)\quad q_0(x)y + (x - x_0)q_1(x)y' + (x - x_0)^2 q_2(x)y'' + \cdots \\ + (x - x_0)^r q_r(x) y^{(r)} = 0,$$

die man ihre *Normalform in bezug auf die Stelle* x_0 nennt.

1. Beispiel: Bei der im zweiten Beispiele von Nr. 833 betrachteten Differentialgleichung:

$$y + y'' = 0$$

sind für $x_0 = 0$ die Funktionen $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ gleich 1, 0, 1, d. h. hier wird $n_0 = 0$, $n_1 = \infty$, $n_2 = 0$, so daß $\varrho = 2$ gewählt werden muß. Multiplikation mit x^2 gibt demnach die Normalform in bezug auf die Stelle $x_0 = 0$:

$$x^2 y + x^2 y'' = 0,$$

so daß $q_0(x) = x^2$, $q_1(x) = 0$ und $q_2(x) = 1$ ist.

2. Beispiel: Soll die im dritten Beispiele von Nr. 833 betrachtete Differentialgleichung:

$$2y + 4xy' + x^2 y'' = 0$$

in bezug auf die Stelle $x_0 = 0$ auf die Normalform gebracht werden, so hat man hier wegen $p_0(x) = 2$, $p_1(x) = 4x$, $p_2(x) = x^2$ die Zahlenwerte $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, folglich $\varrho = 0$. Also liegt die Gleichung schon in der Normalform vor. Dabei ist $q_0(x) = 2$, $q_1(x) = 4$ und $q_2(x) = 1$.

837. Die determinierende Gleichung. Es liege nunmehr die Differentialgleichung in der zu einer Stelle x_0 ihres Bereiches gehörigen Normalform vor:

$$(1) \quad q_0(x)y + (x - x_0)q_1(x)y' + \cdots + (x - x_0)^r q_r(x)y^{(r)} = 0.$$

Wenn man ihr durch eine Funktion y genügen will, die eine Entwicklung von der Form:

$$(2) \qquad y = (x - x_0)^\alpha [1 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots]$$

hat, kann man unter der zunächst noch nicht bewiesenen Annahme, daß der Inhalt der eckigen Klammer einen von Null verschiedenen Konvergenzradius habe, die Werte:

$$(3)\begin{cases} \qquad y = (x - x_0)^\alpha + c_1(x - x_0)^{\alpha+1} + \cdots, \\ (x - x_0)y' = \alpha(x - x_0)^\alpha + c_1(\alpha + 1)(x - x_0)^{\alpha+1} + \cdots, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (x - x_0)^r y^{(r)} = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - r + 1)(x - x_0)^\alpha \\ \qquad + c_1(\alpha + 1)\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - r + 2)(x - x_0)^{\alpha+1} + \cdots \end{cases}$$

in (1) substituieren. Dann wird die linke Seite von (1) eine Entwicklung, die nach der α^{ten}, $(\alpha + 1)^{\text{ten}}$, $(\alpha + 2)^{\text{ten}}$, ... Potenz von $x - x_0$ fortschreitet. Demnach ist vor allem zu fordern, daß hierin einzeln die Koeffizienten dieser Potenzen verschwinden. Durch das Nullsetzen der Koeffizienten gehen also diejenigen Bedingungen hervor, denen die Konstanten α, c_1, $c_2, \cdots$ in (2) genügen müssen, damit die Entwicklung (2) die Differentialgleichung *formal* erfülle. Falls die Konstanten α, c_1, c_2, ... so gewählt worden sind, daß diesen Bedingungen genügt wird, ist schließlich noch der Nachweis zu führen, daß die in (2) in der eckigen Klammer stehende Entwicklung in der Umgebung von x_0 konvergiert.

Fürs nächste betrachten wir nur die *formale* Seite des Problems. Der Konvergenznachweis wird erst in Nr. 840 geführt werden.

Die erste von den nach der Substitution der Werte (3) in (1) hervorgehenden Bedingungen ergibt sich durch Nullsetzen des Koeffizienten von $(x - x_0)^\alpha$. Sie heißt *die zur Stelle* x_0 *gehörige determinierende Gleichung,* weil sie die Form hat:

$$(4)\quad q_0(x_0) + q_1(x_0)\,\alpha + q_2(x_0)\alpha(\alpha-1) + \cdots$$
$$+ q_r(x_0)\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1) = 0,$$

nämlich *eine Bedingung für α allein* ist, und daher diejenigen Werte von α bestimmt, die überhaupt einzig und allein in Betracht kommen können. Die determinierende Gleichung ist vom höchstens r^{ten} Grade in α und zwar gerade vom r^{ten} Grade, *wenn $q_r(x_0) \neq 0$ ist. In diesem Falle heißt x_0 eine Stelle der Bestimmtheit.* Wir werden den Nachweis von Lösungen (2) nur an solchen Stellen der Bestimmtheit führen.

Durch Nullsetzen des Koeffizienten von $(x-x_0)^{\alpha+n}$ ergibt sich eine Gleichung von der Form:

$$(5)\quad [q_0(x_0) + q_1(x_0)(\alpha+n) + q_2(x_0)(\alpha+n)(\alpha+n-1) + \cdots$$
$$+ q_r(x_0)(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+n-r+1)]\,c_n$$
$$+ b_{n0} + b_{n1}c_1 + b_{n2}c_2 + \cdots + b_{n,n-1}c_{n-1} = 0,$$

worin $b_{n0}, b_{n1}, \ldots b_{n,n-1}$ nur von den Koeffizienten der Entwicklungen von $q_0(x), q_1(x), \ldots q_r(x)$ abhängen und also *bekannte* Konstanten bedeuten. Da sich eine solche Formel (5) für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ergibt, lassen sich $c_1, c_2, \ldots$ auf Grund dieser Rekursionsformel nacheinander berechnen, vorausgesetzt, daß der Koeffizient von c_n in (5) für keinen dieser Werte von n verschwindet. Andernfalls ist es denkbar, daß sich Widersprüche ergeben. Der Koeffizient von c_n in (5) unterscheidet sich von der linken Seite der determinierenden Gleichung nur dadurch, daß $\alpha + n$ an der Stelle von α steht.

Wir wollen daher an einer Stelle x_0 der Bestimmtheit nur solche Wurzeln α der determinierenden Gleichung benutzen, zu denen es keine ganze positive Zahl n derart gibt, daß auch $\alpha + n$ eine Wurzel der determinierenden Gleichung wird. Unter diesen Voraussetzungen gibt es stets eine Lösung (2), wie wir in der Folge beweisen werden.

838. Vereinfachung des Problems. Wenn α eine Wurzel ist, die der soeben ausgesprochenen Bedingung genügt, lassen sich widerspruchslos $c_1, c_2, \ldots$ aus der Rekursionsformel berechnen, so daß die Differentialgleichung:

$$(1)\quad q_0(x)y + (x-x_0)q_1(x)y' + \cdots + (x-x_0)^r q_r(x)y^{(r)} = 0$$

von der Entwicklung:

(2) $$y = (x - x_0)^\alpha [1 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots]$$

formal erfüllt wird. Der Nachweis der Konvergenz der Reihe ist noch zu führen.

Wenn man nun die neue unabhängige Veränderliche $\bar{x} = x - x_0$ und die Funktion:

$$\bar{y} = 1 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

statt y in die Differentialgleichung einführt, also:

(3) $$x = \bar{x} + x_0, \quad y = \bar{x}^\alpha \bar{y}$$

setzt, nimmt sie augenscheinlich wieder dieselbe allgemeine Form an. Es möge also:

(4) $$\bar{q}_0(\bar{x})\bar{y} + \bar{x}\bar{q}_1(\bar{x})\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} + \cdots + \bar{x}^r \bar{q}_r(\bar{x})\frac{d^r\bar{y}}{d\bar{x}^r} = 0$$

die für $\bar{y}$ als Funktion von $\bar{x}$ hervorgehende Differentialgleichung sein. Dann wird sie notwendig durch die Funktion:

(5) $$\bar{y} = 1 + c_1\bar{x} + c_2\bar{x}^2 + \cdots$$

formal befriedigt. Umgekehrt: Wenn die Entwicklung (5) die Gleichung (4) formal befriedigt, muß auch die Entwicklung (2) die Gleichung (1) formal befriedigen.

Die Entwicklung (5) ordnet sich in ihrer Form der Entwicklung (2) für $\alpha = 0$ unter.

Demnach ist es keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir von vornherein annehmen, *die betrachtete Stelle sei die Stelle $x = 0$, und für sie habe die determinierende Gleichung insbesondere die Wurzel $\alpha = 0$,* die alsdann benutzt werden soll. Entsprechend der letzten Bemerkung von Nr. 837 wird vorausgesetzt, *daß $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit sei und die determinierende Gleichung keinen der Werte* 1, 2, 3 ... *als Wurzel habe.*

Nach (4) in voriger Nummer ist jetzt:

(6) $$q_0(0) + q_1(0)\alpha + q_2(0)\alpha(\alpha - 1) + \cdots \\ + q_r(0)\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - r + 1) = 0$$

die determinierende Gleichung. Da sie vom r^{ten} Grade sein soll, muß $q_r(0) \neq 0$ angenommen werden, und da sie die Wurzel $\alpha = 0$ haben soll, ist außerdem $q_0(0) = 0$ zu setzen. Also läßt sich der Faktor x von der Entwicklung von $q_0(x)$ nach ganzen positiven Potenzen von x absondern, und wegen $q_r(0) \neq 0$ sind die Funktionen:

$$Q_0(x) = \frac{q_0(x)}{x q_r(x)}, \quad Q_1(x) = \frac{q_1(x)}{q_r(x)}, \quad Q_2(x) = \frac{q_2(x)}{q_r(x)}, \cdots \quad Q_{r-1}(x) = \frac{q_{r-1}(x)}{q_r(x)}$$

auch an der Stelle $x = 0$ monogen, d. h. nach ganzen positiven Potenzen von x entwickelbar, so daß die Differentialgleichung (1), worin $x_0 = 0$ ist, durch Division mit $x q_r(x)$ die Form annimmt:

$$Q_0(x)y + Q_1(x)y' + x Q_2(x)y'' + \cdots$$
$$+ x^{r-2} Q_{r-1}(x) y^{(r-1)} + x^{r-1} y^{(r)} = 0.$$

Es ist für das Folgende etwas bequemer, von den Entwicklungen von $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ... $Q_{r-1}(x)$ nach ganzen positiven Potenzen von x die von x freien Glieder, die mit $a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$ bezeichnet seien:

$$Q_1(0) = a_1, \quad Q_2(0) = a_2, \quad \ldots \quad Q_{r-1}(0) = a_{r-1},$$

abzusondern und alle anderen Glieder auf die rechte Seite der Differentialgleichung zu bringen. Dabei setzen wir:

$$Q_0(x) = -P_0(x),$$
$$\frac{Q_1(x) - Q_1(0)}{x} = -P_1(x), \quad \ldots \quad \frac{Q_{r-1}(x) - Q_{r-1}(0)}{x} = -P_{r-1}(x).$$

Man bemerkt, daß $P_0(x)$, $P_1(x)$, ... $P_{r-1}(x)$ immer noch in der Umgebung von $x = 0$ nach ganzen positiven Potenzen von x entwickelbar sind. Die Differentialgleichung hat jetzt die Form:

$$\text{(7)} \quad a_1 y' + a_2 x y'' + \cdots + a_{r-1} x^{r-2} y^{(r-1)} + x^{r-1} y^{(r)}$$
$$= P_0(x) y + x P_1(x) y' + \cdots + x^{r-1} P_{r-1}(x) y^{(r-1)}.$$

Schließlich geben wir noch einmal die zugehörige Form der determinierenden Gleichung für α sowie der Rekursionsformel für die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$ der Entwicklung an, die jetzt gesucht wird, nämlich der Entwicklung:

$$\text{(8)} \qquad y = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

Die Rekursionsformel geht durch Substitution dieses Wertes y und der zugehörigen Werte von y', y'', ... $y^{(r)}$ in (7) und Vergleichung der Koeffizienten gleicher Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung (7) hervor. Statt (6) haben wir die *determinierende Gleichung:*

[838

$$(9) \quad a_1\alpha + \cdots + a_{r-1}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+2) + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1) = 0.$$

Sie hat, wie es sein muß, die Wurzel $\alpha = 0$ und ist vom r^{ten} Grade in α. Für c_n ergibt sich die Rekursionsformel:

$$(10) \quad [a_1 n + \cdots + a_{r-1}n(n-1)\cdots(n-r+2) + n(n-1)\cdots(n-r+1)]c_n = b_{n0} + b_{n1}c_1 + b_{n2}c_2 + \cdots + b_{n,n-1}c_{n-1}.$$

Nach Voraussetzung ist die Gleichung (9) für keine ganze positive Zahl n statt α richtig, d. h. der Faktor von c_n in (10) ist stets von Null verschieden, so daß sich die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$ nacheinander mittels dieser Rekursionsformel berechnen lassen. Die rechts auftretenden Größen $b_{n0}, b_{n1}, \ldots b_{n,n-1}$ sind, was besonders betont werden muß, ganze homogene lineare Funktionen der Koeffizienten der Entwicklungen von $P_0(x), P_1(x), \ldots P_{r-1}(x)$, und zwar haben diese linearen Funktionen ihrerseits lauter *positive* Koeffizienten. Nun aber sind die Koeffizienten der Entwicklungen von $P_0(x), P_1(x), \ldots P_{r-1}(x)$ nichts anderes als Ableitungen der Funktionen $P_0(x), P_1(x), \ldots P_{r-1}(x)$ für $x = 0$, dividiert mit gewissen Fakultäten. *Folglich bedeuten* $b_{n0}, b_{n1}, \ldots b_{n,n-1}$ *in der Rekursionsformel* (10) *gewisse ganze homogene lineare Funktionen der Werte der Ableitungen von* $P_0(x), P_1(x), \ldots P_{r-1}(x)$ *an der Stelle* $x = 0$, *und die Koeffizienten dieser Funktionen sind durchweg positiv.*

Es erübrigt, zu beweisen, daß die Entwicklung (8), worin für $c_1, c_2, \ldots$ die aus (10) zu berechnenden Werte eingesetzt worden sind, einen von Null verschiedenen Konvergenzradius hat. Ehe wir diesen Beweis führen, betrachten wir ein Beispiel.

839. Eine besondere verkürzte lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung. Bedeuten R und k zwei positive Konstanten, so ist:

$$(1) \quad \psi(x) = \frac{k}{1-\dfrac{x}{R}} = k\left(1 + \frac{x}{R} + \frac{x^2}{R^2} + \cdots\right)$$

eine Funktion, deren Entwicklung für $|x| < R$ konvergiert. Wir betrachten nun die verkürzte lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$(2)\quad y' + xy'' + \cdots + x^{r-2}y^{(r-1)} + x^{r-1}y^{(r)} = \psi(x)\,(y + xy' + \cdots + x^{r-1}y^{(r-1)}),$$

die sich der allgemeinen Form (7) in der letzten Nummer unterordnet, so daß es eine Entwicklung von y nach ganzen positiven Potenzen von x gibt, die der Gleichung (2) formal genügt. Ihre Koeffizienten wollen wir mit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ statt mit $c_1, c_2, \ldots$ bezeichnen:

$$(3)\qquad y = 1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots$$

Im vorliegenden Falle läßt sich statt derjenigen Rekursionsformel, die in voriger Nummer aufgestellt wurde, eine bequemere bilden, indem man die Differentialgleichung (2) zunächst mit $1 - x : R$ multipliziert:

$$\left(1 - \frac{x}{R}\right)(y' + xy'' + \cdots + x^{r-1}y^{(r)}) = k(y + xy' + \cdots + x^{r-1}y^{(r-1)})$$

und erst dann den Wert (3) sowie die daraus folgenden Werte von $y', y'', \ldots y^{(r)}$ substituiert. Die Rekursionsformel lautet dann so:

$$[n + n(n-1) + \cdots + n(n-1)\cdots(n-r+1)]\gamma_n$$
$$-\frac{1}{R}[(n-1) + (n-1)(n-2) + \cdots + (n-1)(n-2)\cdots(n-r)]\gamma_{n-1}$$
$$= k[1 + (n-1) + (n-1)(n-2) + \cdots + (n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)]\gamma_{n-1},$$

so daß:

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} = \frac{\frac{1}{R}n^r + \cdots}{n^r + \cdots}$$

wird, wobei die Punkte niedrigere Potenzen von n vertreten. Hiernach ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\gamma_n x^n}{\gamma_{n-1} x^{n-1}} = \frac{x}{R},$$

d. h. *die Entwicklung* (3) *konvergiert für* $|x| < R$, vgl. Satz 13, Nr. 105, und Satz 8, Nr. 362. Noch sei angemerkt, daß sich für $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ lauter *positive* Werte ergeben.

840. Der Nachweis der Konvergenz. Das soeben betrachtete Beispiel kann nun auch zum allgemeinen Nachweise der Konvergenz herangezogen werden. Wir werden nämlich erkennen, daß man die positiven Zahlen R und k in der Differentialgleichung der letzten Nummer immer so wählen kann, daß die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ nicht kleiner werden als die absoluten Beträge der Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots,$ von denen in der vorletzten Nummer die Rede war.

Es sei R der Radius eines solchen Kreises um $x = 0$, innerhalb dessen sowie auf dessen Umfange die Funktionen $P_0(x), P_1(x), \ldots P_{r-1}(x)$, die in der Differentialgleichung (7) von Nr. 838 vorkommen, monogen sind, so daß es auch eine positive Zahl M derart gibt, daß die absoluten Beträge von $P_0(x), P_1(x), \ldots P_{r-1}(x)$ für keine Stelle x auf dem Umfange dieses Kreises den Wert M übersteigen. Nach Satz 26, Nr. 648, ist dann jede Ableitung höherer Ordnung von irgendeiner der Funktionen $P_0(x), P_1(x), \ldots P_{r-1}(x)$ an der Stelle $x = 0$ absolut genommen nicht größer als die Ableitung derselben Ordnung von

$$(1) \qquad \varphi(x) = \frac{M}{1 - \frac{x}{R}}$$

an der Stelle $x = 0$. Die Funktion $\psi(x)$ in voriger Nummer unterscheidet sich von der Funktion $\varphi(x)$ nur um einen konstanten Faktor, und da die Zahl k dort irgendeine positive Zahl sein durfte, läßt sich die Differentialgleichung (2) der vorigen Nummer auch so schreiben:

$$(2)\ p[y' + xy'' + \cdots + x^{r-1}y^{(r)}] = \varphi(x)[y + xy' + \cdots + x^{r-1}y^{(r-1)}],$$

worin jetzt p irgendeine positive Zahl vorstellt. Dagegen betrachteten wir in Nr. 838 die Differentialgleichung:

$$(3) \quad a_1y' + a_2xy'' + \cdots + a_{r-1}x^{r-2}y^{(r-1)} + x^{r-1}y^{(r)} \\ = P_0(x)y + xP_1(x)y' + \cdots + x^{r-1}P_{r-1}(x)y^{(r-1)}.$$

Mithin geht die Differentialgleichung (2) aus (3) hervor, wenn man die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$ und 1 durch p und die Funktionen $P_0(x), P_1(x), \ldots P_{r-1}(x)$ durch $\varphi(x)$ ersetzt. Aus der Rekursionsformel (10) von Nr. 838, nämlich:

$$(4)\ [a_1n + \cdots + a_{r-1}n(n-1)\cdots(n-r+2) + n(n-1)\cdots(n-r+1)]c_n \\ = b_{n0} + b_{n1}c_1 + b_{n2}c_2 + \cdots + b_{n,n-1}c_{n-1}$$

geht deshalb die Rekursionsformel für die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ der in dem Kreise $|x| < R$ nach den Ergebnissen der vorigen Nummer konvergenten Entwicklung:

$$1 + \gamma_1x + \gamma_2x^2 + \cdots$$

in der Form hervor:

$$(5)\quad p[n+\cdots+n(n-1)\cdots(n-r+2)+n(n-1)\cdots(n-r+1)]\gamma_n = \beta_{n0}+\beta_{n1}\gamma_1+\beta_{n2}\gamma_2+\cdots+\beta_{n,n-1}\gamma_{n-1}.$$

Dies ist eine *andere* Rekursionsformel als die in voriger Nummer aufgestellte.

Zur Vereinfachung des Ausdruckes setzen wir nun:

$$(6)\quad \begin{cases} B_n = a_1 n+\cdots+a_{r-1}n(n-1)\cdots(n-r+2) \\ \qquad\qquad + n(n-1)\cdots(n-r+1), \\ \mathsf{B}_n = n+\cdots+n(n-1)\cdots(n-r+2) \\ \qquad\qquad + n(n-1)\cdots(n-r+1). \end{cases}$$

Dann nehmen (4) und (5) die einfacheren Formen an:

$$(7)\quad \begin{cases} B_n c_n = b_{n0}+b_{n1}c_1+\cdots+b_{n,n-1}c_{n-1}, \\ p\mathsf{B}_n\gamma_n = \beta_{n0}+\beta_{n1}\gamma_1+\cdots+\beta_{n,n-1}\gamma_{n-1}. \end{cases}$$

Nach Nr. 838 sind $b_{n0}, b_{n1}, \ldots b_{n,n-1}$ gewisse ganze lineare homogene Funktionen der Werte der Ableitungen von $P_0(x), P_1(x), \ldots P_{r-1}(x)$ für $x=0$, und zwar sind die Koeffizienten dieser Funktionen durchweg positiv. Also sind β_{n0}, $\beta_{n1}, \ldots \beta_{n,n-1}$ diejenigen Funktionen, die aus ihnen hervorgehen, wenn man die Ableitungen der Funktionen $P_0(x)$, $P_1(x), \ldots P_{r-1}(x)$ für $x=0$ durch die Ableitungen gleich hoher Ordnung von $\varphi(x)$ für $x=0$ ersetzt. Demnach gelten wegen der vorhin über diese Ableitungswerte gemachten Schlußfolgerung die Ungleichungen:

$$(8)\quad |b_{n0}|\leqq\beta_{n0},\ |b_{n1}|\leqq\beta_{n1},\ \ldots\ |b_{n,n-1}|\leqq\beta_{n,n-1}.$$

Dabei sei noch angemerkt, daß $\beta_{n0}, \beta_{n1}, \cdots \beta_{n,n-1}$ *positive* Konstanten sind und nach (6) auch B_n positiv ist.

Die positive Zahl p kann so klein gewählt werden, daß:

$$(9)\quad p\mathsf{B}_n < |B_n|$$

wird. Zum Beweise gehen wir davon aus, daß B_n und B_n nach (6) ganze rationale Funktionen r^{ten} Grades von n sind in denen n^r den Koeffizienten Eins hat. Deshalb ist:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\mathsf{B}_n}{|B_n|}=1,$$

d. h. es gibt einen Index m derart, daß für $n\geqq m$ stets:

$$\frac{\mathsf{B}_n}{|B_n|} < 1 + \sigma$$

ist, wenn σ eine beliebig klein angenommene positive Zahl vorstellt. Wird nun p kleiner als $1:(1+\sigma)$ gewählt, so besteht die Bedingung (9) für jeden Index $n \geqq m$. Damit sie auch für $n = 1, 2, \ldots m-1$ gelte, braucht man der positiven Zahl p nur noch die $m-1$ Bedingungen:

$$p < \frac{|B_1|}{\mathsf{B}_1}, \cdots p < \frac{|B_{m-1}|}{\mathsf{B}_{m-1}}$$

aufzuerlegen, was immer möglich ist, weil dies eine *begrenzte* Anzahl von Forderungen ist.

Nun folgt aus (7) für $n = 1$:

$$c_1 = \frac{b_{10}}{B_1}, \quad \gamma_1 = \frac{\beta_{10}}{p\mathsf{B}_1},$$

also nach (8) und (9) auch $|c_1| < \gamma_1$. Ferner liefert (7) für $n = 2$:

$$c_2 = \frac{b_{20} + b_{21}c_1}{B_2}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_{20} + \beta_{21}\gamma_1}{p\mathsf{B}_2}.$$

Infolge von (8), (9) und $|c_1| < \gamma_1$ ergibt sich hieraus auch $|c_2| < \gamma_2$, usw. Mithin sind die absoluten Beträge der Koeffizienten derjenigen Entwicklung:

$$y = 1 + c_1x + c_2x^2 + \cdots, \tag{10}$$

die der Differentialgleichung (3) formal genügt, kleiner als die entsprechenden durchweg positiven Koeffizienten derjenigen Entwicklung:

$$y = 1 + \gamma_1x + \gamma_2x^2 + \cdots,$$

die der Differentialgleichung (2) formal genügt und nach den Ergebnissen der vorigen Nummer für $|x| < R$ konvergiert. Um so mehr ist also die Entwicklung (10) für $|x| < R$ konvergent, nach Satz 10, Nr. 105, und nach Nr. 362.

841. Das Ergebnis. Hiernach können wir den Hauptsatz der Theorie der linearen Differentialgleichungen so aussprechen:

Satz 16: Es liege eine verkürzte lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung für eine Funktion y von x vor, und es sei $x = x_0$ eine Stelle in ihrem Bereiche und zwar eine Stelle der Bestimmtheit, d. h. die zu $x = x_0$ gehörige determinierende Gleichung sei vom r^{ten} und nicht von niedrigerem Grade. Insbesondere bedeute

α eine solche Wurzel der determinierenden Gleichung, aus der durch Addition einer ganzen positiven Zahl keine andere Wurzel derselben determinierenden Gleichung hervorgeht. Dann gibt es eine und nur eine Entwicklung von der Form:

$$y = (x - x_0)^\alpha [1 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots],$$

die der Differentialgleichung formal genügt, und zwar ist dabei der Inhalt der Klammer innerhalb desjenigen größten Kreises um x_0 konvergent, der nur reguläre Stellen der Differentialgleichung enthält, abgesehen von seinem Mittelpunkte x_0, der regulär oder ein Pol sein kann.

Der Kreis $|x| < R$ nämlich, der in der letzten Nummer auftrat, war dadurch charakterisiert, daß $P_0(x)$, $P_1(x)$, ... $P_{r-1}(x)$ innerhalb des Kreises und auf seinem Rande überall monogen sein sollten. Der Zusammenhang aber, in dem diese r Funktionen mit den Funktionen in der ursprünglichen Differentialgleichung:

(1) $$p_0(x)y + p_1(x)y' + \cdots + p_{r-1}(x)y^{(r-1)} + p_r(x)y^{(r)} = 0$$

stehen (vgl. dazu Nr. 836 und 838), zeigt, daß der Kreis $|x| < R$ definiert werden kann als ein Kreis, in dessen Innern und auf dessen Umfange $p_0(x)$, $p_1(x)$, ... $p_r(x)$ durchweg monogen sind, wenn von der Stelle $x = 0$ selbst abgesehen wird. Diesen Kreis kann man so groß wählen, wie es hiernach nur irgend möglich ist, und so kommt man zu demjenigen Kreise, von dem in Satz 16 die Rede ist, wenn man wieder $x - x_0$ statt x einführt.

Wenn $x = x_0$ insbesondere eine *reguläre* Stelle bedeutet, ist $p_r(x_0) \neq 0$ (nach Nr. 830), d. h. die Zahl n_r in Nr. 836 wird gleich Null und deshalb $\varrho = r$. Nach (2) in Nr. 836 werden also $q_0(x_0)$, $q_1(x_0)$, ... $q_{r-1}(x_0)$ gleich Null, dagegen $q_r(x_0)$ oder $p_r(x_0)$ nicht, so daß die determinierende Gleichung (4) in Nr. 837 die einfache Form hat:

$$\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - r + 1) = 0.$$

Ihre Wurzeln sind $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, ... $\alpha = r - 1$. Nach Satz 16 gibt es demnach zu $\alpha = r - 1$ gewiß eine Lösung:

$$y = (x - x_0)^{r-1}[1 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots],$$

während der Satz für die anderen Wurzeln versagt. Wir haben aber schon in Nr. 834 erkannt, daß es r partikulare Lösungen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_r(x)$ gibt, die bzw. mit der 0^{ten}, 1^{ten}, ... $(r-1)^{\text{ten}}$ Potenz von $x - x_0$ beginnen. Demnach gehört doch zu jeder Wurzel der determinierenden Gleichung eine Lösung, sobald x_0 kein Pol ist.

842. Eine besondere verkürzte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Als Beispiel zur Theorie wählen wir die Differentialgleichung:

$$(1)\qquad y'' = \frac{b-1}{x}\,y' - ay,$$

die öfters in der mathematischen Physik vorkommt. Darin sollen a und b Konstanten bedeuten; insbesondere sei $b \neq 1$. Dann ist der Nullpunkt $x = 0$ der einzige Pol, während alle anderen Stellen regulär sind. In der Umgebung einer beliebig gewählten Stelle x_0 gibt es also zwei Partikularlösungen, die als Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ fortschreiten, und man kann ihre Koeffizienten in bekannter Weise bestimmen. Von besonderem Interesse sind hier jedoch die Lösungen in der Umgebung des Poles $x = 0$. Zunächst wird die Differentialgleichung nach Multiplikation mit x auf diejenige Form:

$$(2)\qquad axy + (1-b)y' + xy'' = 0$$

gebracht, bei der nach (1) in Nr. 830:

$$p_0(x) = ax,\quad p_1(x) = 1 - b,\quad p_2(x) = x$$

ist. Die Zahlen n_0, n_1, n_2 (vgl. Nr. 836) sind also die Zahlen 1, 0, 1, d. h. es muß ϱ so gewählt werden, daß $1 + \varrho \geqq 0$, $\varrho \geqq 1$, $1 + \varrho \geqq 2$ wird. Die kleinste derartige ganze positive Zahl ist $\varrho = 1$. Mithin ergibt sich die in Nr. 836 aufgestellte Normalform (3) der Differentialgleichung durch Multiplikation von (2) mit x:

$$(3)\qquad ax^2y + (1-b)xy' + x^2y'' = 0,$$

so daß:

$$q_0(x) = ax^2,\quad q_1(x) = 1 - b,\quad q_2(x) = 1$$

wird. Weil demnach $q_0(0) = 0$, $q_1(0) = 1 - b$, $q_2(0) = 1$ ist, lautet die determinierende Gleichung (4) von Nr. 837 so:

$$(4)\qquad (1-b)\alpha + \alpha(\alpha - 1) = 0.$$

Sie hat die beiden Wurzeln $\alpha = 0$ und $\alpha = b$, und daher ist der Pol $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit. Der Satz 16 der letzten Nummer kann auf beide Wurzeln nur dann angewandt werden, *wenn ihre Differenz b keine ganze Zahl ist.* Zur Aufstellung der Rekursionsformel substituieren wir den Wert:

$$y = x^\alpha(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)$$

und seine beiden Ableitungen y' und y'' in (2) und setzen dann den Koeffizienten von $x^{\alpha+n-1}$ gleich Null. Es kommt so für $n = 1$ und $n = 2$:

$$(5) \quad (\alpha+1)(b-\alpha-1)c_1 = 0, \quad (\alpha+2)(b-\alpha-2)c_2 = a,$$

dagegen für $n > 2$:

$$(6) \qquad (\alpha + n)(b - \alpha - n)c_n = ac_{n-2}.$$

Weil b keine ganze Zahl sein soll, folgt aus der ersten Gleichung (5) und aus der Rekursionsformel (6) sowohl für $\alpha = 0$ als auch für $\alpha = b$, daß alle Koeffizienten c_i mit ungeraden Indizes i gleich Null sind. Dagegen ergibt sich im Falle $\alpha = 0$ für $n = 2m$ der Wert:

$$c_{2m} = \frac{a^m}{m!\, 2^m (b-2)(b-4)\cdots(b-2m)},$$

also die Lösung:

$$(7) \qquad y_1 = 1 + \frac{1}{b-2}\frac{\frac{1}{2}ax^2}{1!} + \frac{1}{(b-2)(b-4)}\frac{(\frac{1}{2}ax^2)^2}{2!} + \cdots$$

und im Falle $\alpha = b$ für $n = 2m$ der Wert:

$$c_{2m} = \frac{a^m}{m!\,(-2)^m (b+2)(b+4)\cdots(b+2m)},$$

also die Lösung:

$$(8)\ y_2 = x^b\left[1 - \frac{1}{b+2}\frac{\frac{1}{2}ax^2}{1!} + \frac{1}{(b+2)(b+4)}\frac{(\frac{1}{2}ax^2)^2}{2!} - \cdots\right].$$

Beide Lösungen gelten in der ganzen Ebene; die zweite aber ist nur dann monogen, wenn von $x = 0$ aus eine Grenzlinie gezogen wird, die nicht überschritten werden darf. Mithin stellt:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

mit den beiden willkürlichen Konstanten C_1 und C_2 die *allgemeine Lösung* der vorgelegten Differentialgleichung (1) dar, *vorausgesetzt, daß b keine ganze Zahl ist.*

[**842**

Die Fälle, wo b eine ganze ungerade oder ganze gerade Zahl ist, sollen in den beiden nächsten Nummern behandelt werden.

843. Fortsetzung des Beispiels, erster Spezialfall. Wenn b *eine ungerade ganze Zahl* bedeutet, ist der Satz 16 von Nr. 841 allerdings für eine der beiden Wurzeln $\alpha = 0$ und $\alpha = b$ der determinierenden Gleichung nicht mehr anwendbar und zwar nicht für $\alpha = 0$, wenn $b > 0$ ist, und nicht für $\alpha = b$, wenn $b < 0$ ist. Dennoch aber bleiben die in den Werten von y_1 und y_2 auftretenden Entwicklungen auch für ungerades b konvergent, und da sie der Differentialgleichung formal genügen, stellen y_1 und y_2 auch in diesem Falle Partikularlösungen vor und zwar nach wie vor zwei linear unabhängige.

Man kann aber in dem vorliegenden Falle die Partikularlösungen auch auf einem anderen Wege bestimmen, den wir in aller Kürze angeben. Wenn $b = 1 - 2k$ gesetzt wird, wobei k also eine ganze Zahl bedeutet, lautet die Differentialgleichung (4) der vorigen Nummer so:

$$y'' + \frac{2k}{x} y' + ay = 0. \tag{1}$$

Wird nun die neue unbekannte Funktion z vermöge:

$$y = z e^{i\sqrt{a}\,x} \tag{2}$$

eingeführt, so geht für z die Differentialgleichung hervor:

$$xz'' + (2i\sqrt{a}\,x + 2k)z' + 2ik\sqrt{a}\,z = 0. \tag{3}$$

Ist k insbesondere *positiv*, so kann man hieraus einen wichtigen Schluß ziehen, indem man die Gleichung so schreibt:

$$[xz'' + kz'] + [(2i\sqrt{a}\,x + k)z' + 2ik\sqrt{a}\,z] = 0.$$

Versteht man nämlich unter z die $(k-1)^{\text{te}}$ Ableitung einer Funktion u, so kommt:

$$[xu^{(k+1)} + ku^{(k)}] + [(2i\sqrt{a}\,x + k)u^{(k)} + 2ik\sqrt{a}\,u^{(k-1)}] = 0,$$

und hierbei ist der Inhalt der ersten Klammer die k^{te} Ableitung von xu' und der Inhalt der zweiten Klammer die k^{te} Ableitung von $(2i\sqrt{a}\,x + k)u$. Demnach muß:

$$\frac{d^k[xu' + (2i\sqrt{a}\,x + k)u]}{dx^k} = 0$$

sein, d. h.:

$$xu' + (2i\sqrt{a}\,x + k)u = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{k-1}x^{k-1},$$

wobei $A_0, A_1, \ldots A_{k-1}$ Konstanten bedeuten. Da wir nur eine partikulare Lösung suchen, wählen wir diese Konstanten gleich Null und erhalten:

$$\frac{d\ln u}{dx} + 2i\sqrt{a} + \frac{k}{x} = 0$$

oder:

$$\ln u + 2i\sqrt{a}\,x + k\ln x = \text{konst.}$$

Nimmt man die Konstante insbesondere gleich Null an, so kommt:

$$u = x^{-k}e^{-2i\sqrt{a}x}$$

und also, weil z die $(k-1)^{\text{te}}$ Ableitung von u bedeutete:

$$z = \frac{d^{k-1}x^{-k}e^{-2i\sqrt{a}x}}{dx^{k-1}}.$$

Somit liefert (2) die Partikularlösung:

$$y = e^{i\sqrt{a}x}\frac{d^{k-1}x^{-k}e^{-2i\sqrt{a}x}}{dx^{k-1}}$$

der vorgelegten Differentialgleichung (1). Da $\sqrt{a}$ durch $-\sqrt{a}$ ersetzt werden darf, ergibt sich noch eine zweite Partikularlösung und somit die allgemeine Lösung in der Form:

$$(4) \qquad y = C_1 e^{i\sqrt{a}x}\frac{d^{k-1}x^{-k}e^{-2i\sqrt{a}x}}{dx^{k-1}} + C_2 e^{-i\sqrt{a}x}\frac{d^{k-1}x^{-k}e^{2i\sqrt{a}x}}{dx^{k-1}},$$

wobei C_1 und C_2 die Integrationskonstanten sind.

Auch dann, wenn k eine *negative* ganze Zahl bedeutet, läßt sich die allgemeine Lösung in geschlossener Form darstellen. Man bemerkt nämlich, daß die Differentialgleichung (1), falls darin die neue unbekannte Funktion $\mathfrak{y}$ vermöge:

$$(5) \qquad y = x^{1-2k}\mathfrak{y}$$

eingeführt wird, übergeht in:

$$\mathfrak{y}'' + \frac{2(1-k)}{x}\mathfrak{y}' + a\mathfrak{y} = 0.$$

Diese Gleichung ordnet sich der Form (1) unter, indem jetzt an die Stelle von k die Zahl $1-k$ tritt, die *positiv* ist, wenn k eine *negative* ganze Zahl bedeutet. Demnach gibt (4), wenn darin k durch $1-k$ ersetzt wird, die allgemeine Lösung $\mathfrak{y}$ der neuen Differentialgleichung, und aus ihr geht nach (5) durch Multiplikation mit x^{1-2k} die allgemeine Lösung:

$$y = C_1 x^{1-2k} e^{i\sqrt{a}x} \frac{d^{-k} x^{k-1} e^{-2i\sqrt{a}x}}{dx^{-k}} + C_2 x^{1-2k} e^{-i\sqrt{a}x} \frac{d^{-k} x^{k-1} e^{2i\sqrt{a}x}}{dx^{-k}}$$

der vorgelegten Differentialgleichung (1) für den Fall hervor, *daß k eine negative ganze Zahl bedeutet.*

Die gefundenen Formen der allgemeinen Lösung, die der Differentialgleichung (1) in voriger Nummer zukommen, falls b eine ungerade ganze Zahl $1-2k$ bedeutet, gehen natürlich auch dadurch hervor, daß man die beiden in voriger Nummer mit y_1 und y_2 bezeichneten partikularen Lösungen (7) und (8) mit Konstanten multipliziert und addiert.

844. Fortsetzung des Beispiels, zweiter Spezialfall. Schließlich ist noch der Fall zu erledigen, wo b *eine gerade ganze Zahl* bedeutet. Von den beiden Wurzeln $\alpha = 0$ und $\alpha = b$ der determinierenden Gleichung ist dann bei der Anwendung des Satzes 16 von Nr. 841 die erste oder zweite unbrauchbar, je nachdem $b > 0$ oder < 0 ist. Man kann sich übrigens auf die zweite Annahme $b < 0$ beschränken. Denn vermöge der Substitution:

$$y = x^b z$$

geht die Differentialgleichung (1) von Nr. 842 über in:

$$z'' = \frac{-b-1}{x} z' - az,$$

d. h. in eine von derselben Form, wobei aber $-b$ statt b auftritt. Demnach nehmen wir $b = -2k$ an, indem wir unter k eine ganze positive Zahl verstehen, so daß die Differentialgleichung so lautet:

$$(1) \qquad y'' = -\frac{2k+1}{x} y' - ay.$$

Alsdann ist die Wurzel $\alpha = 0$ der determinierenden Gleichung zu brauchen, d. h. die Entwicklung (7) von y_1 in Nr. 842 gibt eine Partikularlösung:

$$(2) \qquad y_1 = 1 - \frac{1}{2k+2} \frac{\frac{1}{2}ax^2}{1!} + \frac{1}{(2k+2)(2k+4)} \frac{(\frac{1}{2}ax^2)^2}{2!} - \cdots.$$

Aus ihr kann man eine zweite von y_1 linear unabhängige Partikularlösung nach einer allgemeinen Methode gewinnen, die erst später (in Nr. 847) erörtert werden wird. Hier genügt es, wie folgt zu schließen:

Soll es eine Funktion $u(x)$ derart geben, daß auch $y = u(x) y_1$ der Differentialgleichung (1) genügt, so muß sein:

$$u'' y_1 + 2 u' y_1' + u y_1'' = -\frac{2k+1}{x}(u' y_1 + u y_1') - a u y_1.$$

Da aber nach (1):

$$y_1'' = -\frac{2k+1}{x} y_1' - a y_1$$

ist, heben sich die mit u behafteten Glieder fort, und es bleibt eine Gleichung, die nach Division mit $u' y_1$ gibt:

$$\frac{d \ln u'}{dx} + 2 \frac{d \ln y_1}{dx} + \frac{2k+1}{x} = 0.$$

Demnach darf:

$$\ln u' = -2 \ln y_1 - (2k+1) \ln x,$$

d. h.

$$(3) \qquad u' = \frac{1}{y_1^2 x^{2k+1}}$$

gewählt werden. Die Partikularlösung y_1 ist in der Umgebung von $x = 0$ monogen und verschwindet nicht für $x = 0$. Mithin läßt sich $1 : y_1^2$ nach ganzen positiven Potenzen von x entwickeln. Also ergibt sich eine Gleichung von der Form:

$$u' = \frac{1}{y_1^2 x^{2k+1}} = \frac{c_0}{x^{2k+1}} + \frac{c_1}{x^{2k}} + \cdots + \frac{c_{2k}}{x} + \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ gültige Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von x bedeutet und c_0, $c_1, \ldots c_{2k}$ die ersten $2k+1$ Koeffizienten in der Entwicklung von $1 : y_1^2$ sein sollen.

Nach Nr. 635 gibt die Integration längs eines Weges in der Umgebung von $x = 0$:

$$u = -\frac{c_0}{2k} x^{-2k} - \frac{c_1}{2k-1} x^{-2k+1} - \cdots - \frac{c_{2k-1}}{1} x^{-1} + c_{2k} \ln x + \omega(x),$$

wobei $\omega(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ gültige Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von x ist. Man kann diesen Wert so zusammenfassen:

$$(4) \qquad u = \frac{Y(x)}{x^{2k}} + \gamma \ln x + \omega(x),$$

wobei $Y(x)$ eine ganze rationale Funktion $2k^{\text{ten}}$ Grades von x

und γ eine Konstante bedeutet. Die Differentialgleichung (1) wird demnach, wenn man u noch mit y_1 multipliziert, eine Lösung von der Form:

$$(5)\qquad y_2 = y_1\left(\frac{Y(x)}{x^{2k}} + \gamma \ln x\right) + z$$

haben. Hier stellt z abermals eine in der Umgebung von $x = 0$ gültige Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von x vor. Diese Lösung ist, weil $\ln x$ auftritt, nach Nr. 636 monogen, wenn von der Stelle $x = 0$ aus eine Grenzlinie gezogen wird, die nicht überschritten werden darf, z. B. die negative reelle Achse.

Nachdem das Vorhandensein einer Lösung von der Form (5) feststeht, wird man, um ihre exakte Form zu finden, die Funktion (5) in (1) statt y einführen und dann durch Koeffizientenvergleichung die Werte der in $Y(x)$ und z auftretenden Konstanten ermitteln. Wir wollen *die Rechnung nur für den Fall* $k = 0$ *durchführen.* Alsdann ist nach (2):

$$(6)\qquad y_1 = 1 - \frac{ax^2}{2^2} + \frac{a^2x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{a^3x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots$$

Aus (4) folgt wegen $k = 0$, daß $Y = 0$ wird, also nach (5):

$$y_2 = \gamma y_1 \ln x + z.$$

Die Konstante γ muß von Null verschieden angenommen werden, weil diejenigen Partikularlösungen, die sich als Entwicklungen nach ganzen positiven Potenzen von x darstellen lassen, die Form konst. y_1 haben. Da ferner mit y_2 auch konst. y_2 eine Partikularlösung sein muß, darf $\gamma = 1$ gewählt werden. Demnach ist in der Differentialgleichung (1), die jetzt so lautet:

$$(7)\qquad y'' + \frac{y'}{x} + ay = 0,$$

die Substitution:

$$(8)\qquad y = y_1 \ln x + z$$

zu machen, wodurch die neue unbekannte Funktion z eingeführt wird, von der wir von vornherein wissen, daß sie sich in der Umgebung von $x = 0$ regulär verhält. Die Differentialgleichung für z lautet nun so:

$$y_1'' \ln x + \frac{2y_1'}{x} + z'' + \frac{y_1' \ln x}{x} + \frac{z'}{x} + ay_1 \ln x + az = 0,$$

und weil y_1 der Differentialgleichung (7) genügt, heben sich hier die mit $\ln x$ behafteten Glieder fort, so daß bleibt:

$$(9)\qquad z'' + \frac{z'}{x} + az = -\frac{2y_1'}{x}.$$

Nun setzen wir hierin eine Entwicklung:

$$(10)\qquad z = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

ein. Da nach (6):

$$y_1 = 1 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \cdots$$

ist, wenn man:

$$(11)\qquad A_n = \frac{(-1)^n a^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2}$$

setzt, so zeigt die Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung (9), daß b_1, $b_3, \ldots$ verschwinden. Daher macht man besser statt (10) die Substitution:

$$(12)\qquad z = B_0 + B_1 x^2 + B_2 x^4 + \cdots$$

Alsdann gibt die Vergleichung der Koeffizienten von x^{2n-2} auf beiden Seiten der Gleichung (9) die Rekursionsformel:

$$4n^2 B_n + aB_{n-1} = -4nA_n.$$

Weil nach (11):

$$A_n = -\frac{a}{4n^2} A_{n-1}$$

ist, läßt sie sich so schreiben:

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{1}{n},$$

und durch Addition aller dieser Formeln bis zu irgendeinem Index n ergibt sich:

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{B_0}{A_0} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Die Konstante B_0 wird hierdurch nicht bestimmt, und sie kann z. B. gleich Null gewählt werden. Dann folgt mit Rücksicht auf (11):

$$B_n = -\frac{(-1)^n a^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Nach (12) läßt sich jetzt z bilden und darauf nach (8) auch die gesuchte zweite Partikularlösung $y_1 \ln x + z$, nämlich:

$$y_2 = y_1 \ln x - \sum_1^\infty{}^n \frac{(-1)^n a^n x^{2n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2}.$$

845. Darstellung der Lösungen des Beispiels mittels bestimmter Integrale. Wir wollen noch zeigen, wie man die Partikularlösungen der in den letzten drei Nummern betrachteten Differentialgleichung:

$$(1) \qquad y'' = \frac{b-1}{x} y' - ay$$

für den Fall, daß a und b *reelle* Konstanten sind, mittels bestimmter Integrale darstellen kann.

Dabei schicken wir Bemerkungen über das bestimmte Integral:

$$(2) \qquad \varphi(n) = \int_0^\pi \cos^{2n}\omega \sin^{-b}\omega \, d\omega$$

voraus, worin n eine ganze positive Zahl bedeutet. Dies Integral ist wohldefiniert, wenn $b \leqq 0$ ist. Für $b > 0$ konvergiert es nach Satz 11, Nr. 471, sobald $b < 1$ ist. Wird also $b < 1$ angenommen und entsprechend (2) auch:

$$\varphi(n-1) = \int_0^\pi \cos^{2n-2}\omega \sin^{-b}\omega \, d\omega$$

gesetzt, so gibt die Formel (1) für die teilweise Integration in Nr. 415 für:

$$u = \frac{1}{2}\sin^2\omega, \quad v = \cos^{2n-1}\omega \sin^{-b-1}\omega$$

zunächst:

$$\varphi(n) = \frac{2n-1}{2}\int_0^\pi \cos^{2n-2}\omega \sin^{-b+2}\omega \, d\omega + \frac{b+1}{2}\varphi(n)$$

oder:

$$(1-b)\varphi(n) = (2n-1)\int_0^\pi \cos^{2n-2}\omega \sin^{-b+2}\omega \, d\omega,$$

also nach Addition von $(2n-1)\varphi(n)$, indem man $\cos^2\omega + \sin^2\omega$ durch Eins ersetzt:

$$(3) \qquad (2n-b)\varphi(n) = (2n-1)\varphi(n-1).$$

Nun ergab sich in Nr. 842 als Partikularlösung (7) unserer Differentialgleichung eine von der Form:

$$y_1 = 1 + c_2x^2 + c_4x^4 + \cdots,$$

wobei:

$$(2n-b)c_{2n} = -\frac{a}{2n}c_{2n-2}$$

war, vgl. (6) ebenda. Division mit der Gleichung (3) ergibt:

$$\frac{c_{2n}}{\varphi(n)} = -\frac{a}{2n(2n-1)}\frac{c_{2n-2}}{\varphi(n-1)},$$

und aus dieser Rekursionsformel folgt:

$$\frac{c_{2n}}{\varphi(n)} = \frac{(-a)^n}{(2n)!}\frac{1}{\varphi(0)}.$$

Da die Lösung y_1 mit einer Konstanten multipliziert werden darf, betrachten wir $\varphi(0)y_1$ statt y_1. Diese Partikularlösung hat alsdann eine Entwicklung:

$$y_1 = \gamma_0 + \gamma_2 x^2 + \gamma_4 x^4 + \cdots,$$

bei der:

$$\gamma_{2n} = \frac{(-a)^n}{(2n)!}\varphi(n)$$

ist, und kann deshalb so geschrieben werden:

$$y_1 = \sum_0^\infty{}_n \frac{(-a)^n}{(2n)!}\varphi(n)x^{2n}.$$

Wird hierin der Wert (2) von $\varphi(n)$ substituiert, so kommt:

$$y_1 = \int_0^\pi \sum_0^\infty{}_n \frac{(\sqrt{-a}\,x\cos\omega)^{2n}}{(2n)!}\sin^{-b}\omega\,d\omega.$$

oder nach (1) in Nr. 373:

$$y_1 = \int_0^\pi \frac{e^{\sqrt{-a}\,x\cos\omega} + e^{-\sqrt{-a}\,x\cos\omega}}{2}\sin^{-b}\omega\,d\omega.$$

Um eine zweite Partikularlösung y_2 zu bekommen, kann man die Bemerkung zu Beginn von Nr. 844 benutzen. Danach geht y_2 hervor, wenn man in y_1 die Zahl b durch $-b$ ersetzt und dann die Funktion mit x^b multipliziert:

$$y_2 = x^b\int_0^\pi \frac{e^{\sqrt{-a}\,x\cos\omega} + e^{-\sqrt{-a}\,x\cos\omega}}{2}\sin^b\omega\,d\omega;$$

dies Integral ist jedoch nur für Konstanten $b > -1$ zu gebrauchen. Die beiden Partikularlösungen y_1 und y_2 sind also anwendbar, wenn b eine Konstante zwischen -1 und $+1$ ist.

Wenn a eine positive Konstante bedeutet, sind übrigens die Integrale nur scheinbar komplex, da sich y_1 und y_2 nach (6) in Nr. 373 so darstellen lassen:

$$y_1 = \int_0^\pi \cos(\sqrt{a}\, x \cos\omega) \sin^{-b}\omega \, d\omega,$$

$$y_2 = x^b \int_0^\pi \cos(\sqrt{a}\, x \cos\omega) \sin^b\omega \, d\omega.$$

Im Falle $b = 0$ werden beide Partikularlösungen identisch mit:

$$\int_0^\pi \cos(\sqrt{a}\, x \cos\omega)\, d\omega.$$

Da aber:

$$\lim_{b=0} \frac{y_2 - y_1}{b} = \int_0^\pi \cos(\sqrt{a}\, x \cos\omega) \lim_{b=0} \frac{x^b \sin^b\omega - \sin^{-b}\omega}{b}\, d\omega$$

ist, ergibt sich im Falle $b = 0$ noch die zweite Partikularlösung:

$$\int_0^\pi \cos(\sqrt{a}\, x \cos\omega) \ln(x \sin^2\omega)\, d\omega.$$

Man kann übrigens leicht durch Anwendung der teilweisen Integration bestätigen, daß dies eine Lösung der Differentialgleichung:

$$y'' = -\frac{y'}{x} - ay$$

ist.

846. Die spezielle Riccatische Gleichung. Die Integration der in Nr. 719 betrachteten speziellen Riccatischen Differentialgleichung:

$$y' + ay^2 = bx^m \tag{1}$$

läßt sich auf das in den letzten Nummern erledigte Problem zurückführen. Führt man nämlich vermöge:

$$z = e^{\int ay\,dx}$$

eine neue unbekannte Funktion z ein, d. h. setzt man:

$$y = \frac{z'}{az}, \quad y' = \frac{z''}{az} - \frac{z'^2}{az^2},$$

so geht die verkürzte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für z hervor:

$$(2) \qquad z'' = abx^m z.$$

Kennt man zwei linear unabhängige partikulare Lösungen z_1 und z_2 von (2), so daß $C_1 z_1 + C_2 z_2$ ihre allgemeine Lösung mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2 vorstellt, so ist:

$$(3) \qquad y = \frac{1}{a} \frac{C_1 z_1' + C_2 z_2'}{C_1 z_1 + C_2 z_2}$$

die allgemeine Lösung von (1). Sie enthält in der Tat nur eine wesentliche willkürliche Konstante, nämlich den Quotienten $C_1 : C_2$.

Weiterhin kann man die Differentialgleichung (2) auf die in Nr. 842—845 betrachtete zurückführen, indem man als neue unabhängige Veränderliche die Größe:

$$(4) \qquad t = x^{\frac{1}{2}m+1}$$

benutzt. Denn dann geht hervor:

$$(5) \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{m}{m+2} \cdot \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} + \frac{4ab}{(m+2)^2} z.$$

In der Tat ordnet sich diese Gleichung der Differentialgleichung (1) in Nr. 842 unter, indem z und t statt y und x auftreten und a und b durch

$$-\frac{4ab}{(m+2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{2}{m+2}$$

ersetzt werden.

Noch sei angemerkt: Nach Nr. 842 läßt sich die Differentialgleichung (5) und daher auch die Riccatische Differentialgleichung (1) in geschlossener Form integrieren, wenn $2 : (m+2)$ eine ungerade ganze Zahl $1 - 2k$ bedeutet, d. h. wenn m die Form hat:

$$m = \frac{4k}{1-2k},$$

wo k eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt. Dasselbe ergab sich schon in Nr. 719, siehe (14) ebenda.

§ 5. Nachträge zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

847. Erniedrigung der Ordnung mittels partikularer Lösungen der verkürzten Gleichung. Hier ist die geeignete Stelle, um die in Nr. 805 und 806 über lineare Differentialgleichungen gemachten Bemerkungen nach einigen Richtungen hin zu vervollständigen.

Wie in Nr. 805 liege eine allgemeine lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung vor:

$$(1)\qquad y^{(r)} = f_0(x)y + f_1(x)y' + \cdots + f_{r-1}(x)y^{(r-1)} + F(x).$$

Damals wurde gezeigt, daß man sie mittels der Methode der Variation der Konstanten integrieren kann, sobald man die allgemeine Lösung z der zugehörigen *verkürzten* linearen Differentialgleichung:

$$(2)\qquad z^{(r)} = f_0(x)z + f_1(x)z' + \cdots + f_{r-1}(x)z^{(r-1)}$$

kennt. Aber auch dann, wenn nicht diese allgemeine Lösung z, sondern nur einige linear unabhängige Partikularlösungen

$$z = \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots \varphi_s(x)$$

von (2) bekannt sind, kann man daraus für die Integration der Diffentialgleichung (1) Vorteile ziehen, nämlich *die Ordnung der Gleichung* (1) *um so viele Einheiten erniedrigen, als die Anzahl s der bekannten Partikularlösungen von* (2) *beträgt*; *außerdem treten dann noch s Quadraturen auf.*

Wir verfahren ähnlich wie in Nr. 805, indem wir die Funktion bilden:

$$(3)\qquad y = \varphi_1(x)u_1(x) + \varphi_2(x)u_2(x) + \cdots + \varphi_s(x)u_s(x).$$

Dabei seien die s Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_s$ von x den $s-1$ Bedingungen unterworfen:

$$(4)\qquad \begin{cases} \varphi_1 u_1' + \varphi_2 u_2' + \cdots + \varphi_s u_s' = 0, \\ \varphi_1' u_1' + \varphi_2' u_2' + \cdots + \varphi_s' u_s' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_1^{(s-2)} u_1' + \varphi_2^{(s-2)} u_2' + \cdots + \varphi_s^{(s-2)} u_s' = 0, \end{cases}$$

während:

$$(5)\qquad \varphi_1^{(s-1)} u_1' + \varphi_2^{(s-1)} u_2' + \cdots + \varphi_s^{(s-1)} u_s' = Y(x)$$

gesetzt sei. Mit anderen Worten: Wenn

$$(6)\qquad D = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_s \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_s' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1^{(s-1)} & \varphi_2^{(s-1)} & \cdots & \varphi_s^{(s-1)} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird und D_i die zum i^{ten} Elemente der letzten Zeile gehörige Unterdeterminante bedeutet, sollen unter u_1', u_2', ... u_s' die s Funktionen verstanden werden:

$$(7)\qquad u_i' = \frac{D_i}{D} Y \qquad (i = 1, 2, \ldots s).$$

Die Determinante D ist ja von Null verschieden, weil $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_s$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind (vgl. Satz 4, Nr. 785). Über die Funktion Y von x behalten wir uns die Verfügung vor.

Für die Funktion y gelten nun nach (3) und mit Rücksicht auf (4) die Formeln:

$$(8)\qquad \begin{cases} y = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \cdots + \varphi_s u_s, \\ y' = \varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \cdots + \varphi_s' u_s, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ y^{(s-1)} = \varphi_1^{(s-1)} u_1 + \varphi_2^{(s-1)} u_2 + \cdots + \varphi_s^{(s-1)} u_s \end{cases}$$

Dagegen kommt mit Rücksicht auf (5):

$$(9)\qquad y^{(s)} = \varphi_1^{(s)} u_1 + \varphi_2^{(s)} u_2 + \cdots + \varphi_s^{(s)} u_s + Y.$$

Differenziert man diese Formel wiederholt, indem man die Werte (7) der Ableitungen von $u_1, u_2, \ldots u_s$ benutzt, so sieht man, daß sich die höheren Ableitungen von y so darstellen:

$$(10)\qquad y^{(s+k)} = \varphi_1^{(s+k)} u_1 + \varphi_2^{(s+k)} u_2 + \cdots + \varphi_s^{(s+k)} u_s + \omega_k,$$

wobei ω_k eine ganze lineare homogene Funktion von $Y, Y', \ldots Y^{(k)}$ ist mit solchen Koeffizienten, die bekannte Funktionen von x sind, weil sie sich durch $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_s$ und ihre Ableitungen ausdrücken. Insbesondere tritt $Y^{(k)}$ in ω_k mit dem Koeffizienten Eins auf.

Wir verlangen nun, daß die durch (3) definierte Funktion y von x die Differentialgleichung (1) erfülle, und machen deshalb die Substitution der Werte (8), (9) und (10) in (1). Dabei ist zu beachten, daß nach (2):

$$\varphi_i^{(r)} = f_0 \varphi_i + f_1 \varphi_i' + \cdots + f_{r-1} \varphi_i^{(r-1)} \quad (i = 1, 2, \ldots s)$$

ist. Infolgedessen heben sich in der hervorgehenden Gleichung die mit $u_1, u_2, \ldots u_s$ behafteten Glieder fort, so daß bleibt:

$$\omega_{r-s} = f_s Y + f_{s+1}\omega_1 + \cdots + f_{r-s-1}\omega_{r-s-1} + F. \tag{11}$$

Weil nun $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{r-s}$ die vorhin angegebenen Formen haben, ist dies eine *lineare Differentialgleichung von gerade* $(r-s)^{\text{ter}}$ *Ordnung für die Funktion* Y.

Hat man ihre allgemeine Lösung Y als Funktion von x und von $r-s$ willkürlichen Konstanten $C_{s+1}, C_{s+2}, \ldots C_r$ gefunden, so folgt aus (7):

$$u_i = \int \frac{D_i}{D} Y dx + C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots s), \tag{12}$$

wobei die Quadraturen von bestimmten unteren Grenzen an auszuführen sind und $C_1, C_2, \ldots C_s$ willkürliche Konstanten bedeuten. Nach (3) ist alsdann:

$$y = \sum_1^s {}_i\, \varphi_i \int \frac{D_i}{D} Y dx + \sum_1^s {}_i\, \varphi_i C_i \tag{13}$$

eine *Lösung der vorgelegten Differentialgleichung* (1).

Sie enthält allerdings r willkürliche Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_r$, von denen die $r-s$ letzten in Y auftreten. Aber daraus darf man nur dann folgern, daß sie die *allgemeine* Lösung von (1) ist, wenn die für $y, y', \ldots y^{(r-1)}$ hervorgehenden Werte voneinander hinsichtlich $C_1, C_2, \ldots C_r$ unabhängig sind. Dies läßt sich so beweisen: Für y und die Ableitungen $y', y'', \ldots y^{(r-1)}$ gelten die Gleichungen (8), (9) und (10). Die ersten s Gleichungen (8) sind wegen $D \neq 0$ nach $C_1, C_2, \ldots C_s$ auflösbar. Da diese s Konstanten nur in $u_1, u_2, \ldots u_s$ auftreten, eliminiert man sie, indem man $u_1, u_2, \ldots u_s$ aus den s Gleichungen (8) berechnet und in die übrigen Gleichungen einsetzt. Die verbleibenden $r-s$ Gleichungen haben nun die Form:

$$\begin{cases} y^{(s)} = \lambda_0 + Y, \\ y^{(s+1)} = \lambda_1 + \omega_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y^{(r-1)} = \lambda_{r-s-1} + \omega_{r-s-1}, \end{cases} \tag{14}$$

worin $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{r-s-1}$ von $y, y', \ldots y^{(s-1)}$ und von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_s$ sowie den Ableitungen der Funktionen φ bis zur $(s-1)^{\text{ten}}$ Ordnung abhängen, also jedenfalls von allen willkürlichen Konstanten frei sind. Die nach der Elimination von $C_1, C_2, \ldots C_s$ übrig gebliebenen $r - s$ Gleichungen (14) enthalten also die $r - s$ willkürlichen Konstanten $C_{s+1}, C_{s+2}, \ldots C_r$ nur noch in $Y, \omega_1, \ldots \omega_{r-s-1}$. Da nun ω_k allgemein als höchste Ableitung von Y die k^{te} mit dem Koeffizienten Eins linear enthält, lassen sich die Gleichungen (14) nach $Y, Y', \ldots Y^{(r-s-1)}$ auflösen. Aber $Y, Y', \ldots Y^{(r-s-1)}$ sind hinsichtlich $C_{s+1}, C_{s+2}, \ldots C_r$ voneinander unabhängig, weil Y die *allgemeine* Lösung der linearen Differentialgleichung $(r - s)^{\text{ter}}$ Ordnung (11) bedeutet. Mithin sind die Gleichungen (14) nach $C_{s+1}, C_{s+2}, \ldots C_r$ auflösbar, was allein noch zu beweisen war.

Somit gilt der

Satz 17: Die Integration einer allgemeinen linearen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung verlangt, falls schon s $(< r)$ linear unabhängige Partikularlösungen der zugehörigen verkürzten Gleichung bekannt sind, nur noch die Integration einer linearen Differentialgleichung $(r - s)^{\text{ter}}$ Ordnung und s Quadraturen.

Da die Funktionen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{r-s}$ in $Y, Y', \ldots Y^{(r-s)}$ linear und *homogen* sind, erkennt man, daß die Differentialgleichung (11) eine verkürzte ist, wenn F verschwindet. Demnach schließen wir:

Satz 18: Die Integration einer verkürzten linearen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung verlangt, falls schon s $(< r)$ linear unabhängige Partikularlösungen von ihr bekannt sind, nur noch die Integration einer verkürzten linearen Differentialgleichung $(r - s)^{\text{ter}}$ Ordnung und s Quadraturen.

Beispiel: Liegt eine allgemeine lineare Differentialgleichung *zweiter* Ordnung vor:

$$(15) \qquad y'' = f_0(x)y + f_1(x)y' + F(x)$$

und kennt man *eine* Partikularlösung $z = \varphi(x)$ der zugehörigen verkürzten Gleichung:

$$z'' = f_0(x)z + f_1(x)z',$$

so kommt die Integration nach Satz 17 auf die einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung zurück, die aber nach Nr. 716 durch Quadraturen geleistet werden kann. Demnach *sind in diesem Falle überhaupt nur Quadraturen erforderlich.*

Wie sich hier die allgemeine Methode darstellt, sei noch kurz angegeben: Nach (3) wird $y = \varphi u$ gesetzt und nach (5):

(16) $$\varphi u' = Y.$$

Nach (9) ist nun, weil jetzt $s = 1$ angenommen werden muß:

$$y' = \varphi' u + Y.$$

Hieraus folgt durch Differentiation mit Rücksicht auf (16):

$$y'' = \varphi'' u + \varphi' u' + Y' = \varphi'' u + \frac{\varphi'}{\varphi} Y + Y'.$$

Setzt man die Werte von y, y' und y'' in (15) ein, so heben sich die mit u behafteten Glieder fort, und es kommt für Y die lineare Differentialgleichung erster Ordnung:

$$Y' = \left(f_1 - \frac{\varphi'}{\varphi}\right) Y + F.$$

Hat man sie nach Nr. 716 mittels zweier Quadraturen vollständig integriert, wobei eine willkürliche Konstante C_2 auftritt, so wird mittels einer Quadratur nach (16) noch:

$$u = \int \frac{Y}{\varphi} dx + C_1$$

berechnet und schließlich $y = \varphi u$ gebildet.

Ein anderes Beispiel hierzu werden wir in Nr. 850 bringen.

848.*) **Ableitung desselben Ergebnisses mittels infinitesimaler Transformationen.** Wenn wieder die lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

(1) $$y^{(r)} = f_0(x) y + f_1(x) y' + \cdots + f_{r-1}(x) y^{(r-1)} + F(x)$$

vorliegt und s linear unabhängige Partikularlösungen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_s$ der zugehörigen verkürzten linearen Differentialgleichung:

(2) $$z^{(r)} = f_0(x) z + f_1(x) z' + \cdots + f_{r-1}(x) z^{(r-1)}$$

bekannt sind, ist zunächst $C_1 \varphi_1(x)$ eine Lösung von (2), wie auch die Konstante C_1 gewählt sein mag. Nach Satz 11 von Nr. 805 ist mit y also auch stets $y + C_1 \varphi(x)$ eine Lösung von (1). Aber die Gleichungen:

(3) $$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y + t\varphi_1(x)$$

stellen eine *eingliedrige Gruppe* dar (vgl. Nr. 731 u. 734), denn wenn man nacheinander ansetzt:

---

*) Diese Nummer kann überschlagen werden.

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + t_1 \varphi_1(x),$$
$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1 + t_2 \varphi_1(x_1),$$

gibt die Elimination von x_1 und x_2 aus den beiden letzten Gleichungen mittels der beiden ersten:

$$x_2 = x, \quad y_2 = y + (t_1 + t_2)\varphi_1(x),$$

und diese Gleichungen haben wieder die allgemeine Form (3). Da x bei der eingliedrigen Gruppe (3) ungeändert bleibt, kann man also sagen: Jede Lösung y von (1) geht bei allen Transformationen der eingliedrigen Gruppe wieder in Lösungen von (1) über. *Die Differentialgleichung* (1) *gestattet deshalb die infinitesimale Transformation einer Gruppe*, deren Symbol ist:

$$Uf = \varphi_1(x)\frac{\partial f}{\partial y},$$

indem hier $\xi = 0$ und $\eta = \varphi_1(x)$ wird. Nach (3) in Nr. 811 wird $\eta_1 = \varphi_1'(x)$, so daß man zur Berechnung der *Differentialinvarianten* J_0 und J_1 von nullter und erster Ordnung nach (2) ebenda das System hat:

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{\varphi_1(x)} = \frac{dy'}{\varphi_1'(x)},$$

dem offenbar die Integrale:

$$J_0 = x, \quad J_1 = y' - \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}y$$

zukommen. Indem man J_0 und J_1 als neue unabhängige und abhängige Veränderliche einführt, muß sich daher die Differentialgleichung (1) auf eine von nur noch $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung reduzieren, nach Nr. 813. Da J_0 gleich x selbst ist, heißt dies, daß man nur eine neue abhängige Veränderliche:

$$\mathfrak{y} = y' - \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}y = y' - y\frac{d\ln\varphi_1}{dx} \tag{4}$$

statt y einzuführen braucht. Weil sich $\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \ldots \mathfrak{y}^{(r-1)}$ hiernach als lineare homogene ganze Funktionen von $y, y', \ldots y^{(r)}$ darstellen, leuchtet ein, daß die für $\mathfrak{y}$ hervorgehende Differentialgleichung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung wieder linear sein muß und übrigens dasselbe letzte Glied $F(x)$ hat.

Zuerst lag die lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung für y vor, und es war uns bekannt, daß mit y auch stets

$$y + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_s\varphi_s(x)$$

[**848**

eine Lösung von ihr ist, wie auch die Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_s$ gewählt sein mögen. Jetzt gilt Entsprechendes: Für $\mathfrak{y}$ liegt eine lineare Differentialgleichung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vor, und aus (4) folgt, daß mit $\mathfrak{y}$ auch:

$$y' + C_1\varphi_1' + \cdots + C_s\varphi_s' - \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}(y + C_1\varphi_1 + \cdots + C_s\varphi_s)$$

oder also:

$$\mathfrak{y} + C_2\left(\varphi_2' - \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\varphi_2\right) + \cdots + C_s\left(\varphi_s' - \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\varphi_s\right)$$

eine Lösung von ihr ist. Demnach treten hier an die Stelle von y, r und s die Bezeichnungen $\mathfrak{y}$, $r-1$ und $s-1$ und an die Stelle der s Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_s$ die $s-1$ Funktionen:

$$\psi_2 = \varphi_2' - \varphi_2\frac{d\ln\varphi_1}{dx}, \ \ldots \ \psi_s = \varphi_s' - \varphi_s\frac{d\ln\varphi_1}{dx}.$$

Sie sind wiederum linear unabhängig. Sonst nämlich müßte es $s-1$ nicht sämtlich verschwindende Konstanten $c_2, c_3, \ldots c_s$ derart geben, daß:

$$c_2\psi_2 + \cdots + c_s\psi_s = 0$$

wäre, woraus sofort folgen würde:

$$\frac{d\ln(c_2\varphi_2 + \cdots + c_s\varphi_s)}{dx} = \frac{d\ln\varphi_1}{dx},$$

d. h.:

$$c_2\varphi_2 + \cdots + c_s\varphi_s = \text{konst.}\ \varphi_1,$$

was nicht sein kann, weil $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_s$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind.

Mithin liegt jetzt genau dieselbe Problemstellung wie zu Anfang vor, nur sind die Zahlen r und s um je eine Einheit verringert. Daher kann derselbe Schluß wiederholt werden, d. h. wenn man entsprechend (4) jetzt:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\,\frac{d\ln\psi_2}{dx}$$

als neue unbekannte Funktion einführt, geht für $\mathfrak{z}$ eine lineare Differentialgleichung $(r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung hervor, usw. Insgesamt kann man s-mal dieselbe Schlußfolgerung machen. Schließlich gelangt man dann zu einer linearen Differentialgleichung $(r-s)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dies Verfahren führt demnach zu demselben Ergebnisse wie das in voriger Nummer, zumal man

Schritt für Schritt dasselbe letzte Glied $F(x)$ bei der Differentialgleichung wieder bekommt.

849. Die Determinante bei einer verkürzten linearen Differentialgleichung. Es sei jetzt eine *verkürzte* lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung vorgelegt:

$$(1) \qquad y^{(r)} = f_0(x)y + f_1(x)y' + \cdots + f_{r-1}(x)y^{(r-1)},$$

und es mögen $y_1, y_2 \ldots y_r$ gerade r linear unabhängige Partikularlösungen sein, aus denen sich also die allgemeine Lösung linear mit willkürlichen konstanten Koeffizienten zusammensetzen läßt. Nach Satz 4, Nr. 785, ist alsdann die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_r \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_r' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_1^{(r-1)} & y_2^{(r-1)} & \cdots & y_r^{(r-1)} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden. Die Ableitung von D ergibt sich als die Summe derjenigen r Determinanten, von denen jede wie D selbst gebaut ist, abgesehen davon, daß die Elemente je einer Zeile durch die Ableitungen dieser Elemente zu ersetzen sind. Die $r-1$ ersten Determinanten haben zwei aufeinander folgende gleiche Zeilen und verschwinden, so daß bleibt:

$$\frac{dD}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_r \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_1^{(r-2)} & y_2^{(r-2)} & \cdots & y_r^{(r-2)} \\ y_1^{(r)} & y_2^{(r)} & \cdots & y_r^{(r)} \end{vmatrix}.$$

Aber nach (1) ist:

$$y_i^{(r)} = f_0 y_i + f_1 y_i' + \cdots + f_{r-1} y_i^{(r-1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots r).$$

Werden diese Werte in die letzte Zeile eingesetzt, so kommt einfach:

$$\frac{dD}{dx} = f_{r-1} D,$$

woraus folgt:

$$(2) \qquad D = \text{konst.}\, e^{\int f_{r-1}(x)\,dx}.$$

Demnach gilt der

Satz 19: Sind $y_1, y_2, \ldots y_r$ gerade r linear unabhängige Partikularlösungen der verkürzten linearen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$y^{(r)} = f_0(x)y + f_1(x)y' + \cdots + f_{r-1}(x)y^{(r-1)},$$

so ist:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_r \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_r' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_1^{(r-1)} & y_2^{(r-1)} & \cdots & y_r^{(r-1)} \end{vmatrix} = \text{konst. } e^{\int f_{r-1}(x)\,dx}.$$

Hiervon machen wir nach *Sturm* eine Anwendung auf eine verkürzte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(3) \qquad y'' = f_0(x)y + f_1(x)y',$$

wobei wir annehmen, daß $f_0(x)$ und $f_1(x)$ *reelle* Funktionen seien. Es mögen y_1 und y_2 zwei linear unabhängige *reelle* Partikularlösungen bedeuten. Dann ist nach dem Satze:

$$(4) \qquad y_1y_2' - y_2y_1' = \text{konst. } e^{\int f_1(x)\,dx}.$$

Die Exponentialfunktion ist positiv; folglich hat $y_1y_2' - y_2y_1'$ immer dasselbe Vorzeichen, vorausgesetzt, daß man sich auf ein Intervall für x beschränkt, in dem $f_1(x)$ stetig ist. In demselben Intervalle soll auch $f_0(x)$ stetig sein. Dann verschwinden y_1 und y_1' an keiner Stelle zugleich, denn sonst gilt dasselbe nach (3) von y'', also auch von y''' usw., weil die höheren Ableitungen von y aus (3) durch wiederholte Differentiationen hervorgehen. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir die Konstante in (4) positiv an, so daß stets:

$$y_1y_2' - y_2y_1' > 0$$

ist. Ferner seien $x = a$ und $x = b > a$ zwei Stellen, an denen y_1 verschwindet; doch soll y_1 dazwischen nirgends gleich Null sein. Für $x = a$ und $x = b$ ergibt sich dann $y_2y_1' < 0$, und dabei ist $y_1' \neq 0$. Nun aber hat y_1' für $x = a$ und für $x = b$ verschiedene Vorzeichen, weil y_1 von $x = a$ bis $x = b$ entweder zunächst wächst und zuletzt abnimmt oder umgekehrt zunächst abnimmt und zuletzt wächst. Mithin hat y_2 für $x = a$ und $x = b$ verschiedene Vorzeichen, d. h. zwischen a und b liegt eine Stelle, wo y_2 verschwindet.

So ergibt sich überhaupt: Die Stellen, wo y_1 und y_2 gleich Null werden, folgen abwechselnd aufeinander.

850. Anwendung der Integrationsmethode, die bei konstanten Koeffizienten gilt, auf einen anderen Fall. Nach Satz 13, Nr. 806, läßt sich eine verkürzte lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$(1)\qquad y^{(r)} = a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \cdots + a_{r-1} y^{(r-1)}$$

mit *konstanten* Koeffizienten stets mittels Exponentialfunktionen integrieren. Dabei braucht man die Wurzeln ϱ der charakteristischen Gleichung:

$$(2)\qquad \varrho^r = a_0 + a_1\varrho + a_2\varrho^2 + \cdots + a_{r-1}\varrho^{r-1}.$$

Ist z. B. eine m-fache Wurzel ϱ vorhanden, so sind:

$$e^{\varrho x},\ x e^{\varrho x},\ \ldots\ x^{m-1} e^{\varrho x}$$

m linear unabhängige Partikularlösungen. Demnach wird die Gleichung (1) befriedigt, wenn man darin die Funktion:

$$(3)\qquad y = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_{m-1} x^{m-1}) e^{\varrho x}$$

mit willkürlichen konstanten Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots c_{m-1}$ substituiert.

Wir lenken hier die besondere Aufmerksamkeit darauf, in welcher Weise diese Befriedigung der Gleichung (1) zustande kommt: Vermöge der Substitution (3) werden beide Seiten von (1) linear und homogen in $c_0, c_1, \ldots c_{m-1}$. Die mit irgendeinem c_i behafteten Glieder auf beiden Seiten der Gleichung sind ferner rationale ganze Funktionen von x, und die mit derselben Potenz von x und mit demselben c_i behafteten Glieder auf beiden Seiten der Gleichung stimmen deshalb überein, weil ϱ eine m-fache Wurzel der Gleichung (2) ist.

Hieraus läßt sich ein neuer Schluß ziehen:

Es liege eine verkürzte lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$(4)\qquad y^{(r)} = f_0(x) y + f_1(x) y' + \cdots + f_{r-1}(x) y^{(r-1)}$$

vor, deren Koeffizienten *nicht* konstant sind. Entsprechend (2) sei die Gleichung für ϱ gebildet:

$$(5)\qquad \varrho^r = f_0(x) + f_1(x)\varrho + \cdots + f_{r-1}(x)\varrho^{r-1}.$$

Im allgemeinen wird sie keine konstante Wurzel ϱ haben.

Wenn sie aber eine etwa m-fache *konstante* Wurzel ϱ hat, folgt wie vorher, daß

$$e^{\varrho x},\ x e^{\varrho x},\ \ldots\ x^{m-1} e^{\varrho x}$$

m linear unabhänge Partikularlösungen sind.

Dieser Schluß ist jedoch *nicht* statthaft für eine von x abhängige Wurzel ϱ, weil dann die Ableitung von $e^{\varrho x}$ nicht mehr einfach $\varrho e^{\varrho x}$ ist.

Der soeben gekennzeichnete Fall tritt in der Tat zuweilen ein, und dann kann man, weil m linear unabhängige Partikularlösungen bekannt sind, die Ordnung der Diffentialgleichung nach Nr. 847 um m Einheiten erniedrigen.

Beispiel: Bei der verkürzten linearen Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$(6)\qquad y^{\mathrm{IV}} = -xy + (3x+1)y' - 3(x+1)y'' + (x+3)y'''$$

lautet die Gleichung (5) so:

$$(\varrho - 1)^3(\varrho - x) = 0$$

und hat daher die dreifache *konstante* Wurzel $\varrho = 1$. Man kennt also die drei Partikularlösungen:

$$(7)\qquad \varphi_1 = e^x,\ \varphi_2 = xe^x,\ \varphi_3 = x^2 e^x.$$

Nach der Methode in Nr. 847 läßt sich daher die Ordnung der Differentialgleichung um drei Einheiten erniedrigen, d. h. man kommt zu einer verkürzten linearen Differentialgleichung erster Ordnung. Sie läßt sich durch eine Quadratur erledigen. Nach (6) in Nr. 847 ist:

$$D = e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1+x & 2x+x^2 \\ 1 & 2+x & 2+4x+x^2 \end{vmatrix} = 2e^{3x}$$

und:

$$D_1 = x^2 e^{2x},\quad D_2 = -2xe^{2x},\quad D_3 = e^{2x},$$

also nach (7) ebenda:

$$(8)\qquad u_1' = \frac{x^2}{2} e^{-x} Y,\ u_2' = -xe^{-x} Y,\ u_3' = \frac{1}{2} e^{-x} Y.$$

Nun setzen wir nach (9) in Nr. 847, weil $s = 3$ ist:

$$y''' = \varphi_1''' u_1 + \varphi_2''' u_2 + \varphi_3''' u_3 + Y$$

und erhalten hieraus durch Differentiation mit Rücksicht auf (7) und (8):

$$y^{\mathrm{IV}} = \varphi_1^{\mathrm{IV}} u_1 + \varphi_2^{\mathrm{IV}} u_2 + \varphi_3^{\mathrm{IV}} u_3 + 3Y + Y'.$$

Nach (10) in Nr. 847 ist also ω_1 gleich $3Y + Y'$, so daß die Differentialgleichung (11) in Nr. 847 hier so lautet:

$$3Y + Y' = (x+3)Y.$$

Mithin kommt:

$$\frac{d \ln Y}{dx} = x \quad \text{oder} \quad Y = C_4 e^{\frac{1}{2}x^2},$$

wobei C_4 eine willkürliche Konstante bedeutet. Nach (12) und (13) in Nr. 847 lautet deshalb die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (6) so:

$$y = C_4 e^x \left[\frac{1}{2} \int_0^x x^2 e^{\frac{1}{2}x^2 - x} dx - x \int_0^x x e^{\frac{1}{2}x^2 - x} dx + \frac{1}{2} x^2 \int_0^x e^{\frac{1}{2}x^2 - x} dx \right]$$
$$+ (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x.$$

Hier sind C_1, C_2, C_3 die drei übrigen Integrationskonstanten. Man kann die drei Quadraturen in eine zusammenfassen, nachdem man die Veränderliche unter dem Integralzeichen etwa mit z statt x benannt hat. Wenn man außerdem eine andere Konstante C_4 einführt, kommt schließlich:

$$y = e^x \left[C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \int_0^x (x-z)^2 e^{\frac{1}{2}(z-1)^2} dz \right].$$

851. Nicht verkürzte lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wenn eine lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

(1) $$y^{(r)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{r-1} y^{(r-1)} + F(x)$$

vorliegt, in der $a_0, a_1, \ldots a_{r-1}$ konstant sind, läßt sich die zugehörige verkürzte Gleichung:

(2) $$z^{(r)} = a_0 z + a_1 z' + \cdots + a_{r-1} z^{(r-1)}$$

nach Nr. 806 vollständig integrieren. Sind $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$ die somit bekannten r linear unabhängigen Lösungen von (2), so kann man nach der in Nr. 805 entwickelten Methode der Variation der Konstanten die allgemeine Lösung von (1) durch Quadraturen ermitteln.

Wenn z. B. die charakteristische Gleichung:

(3) $$\varrho^r = a_0 + a_1 \varrho + \cdots + a_{r-1} \varrho^{r-1}$$

von (2) lauter verschiedene Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r$ hat, ist:

$$\varphi_1 = e^{\varrho_1 x},\ \varphi_2 = e^{\varrho_2 x},\ \ldots\ \varphi_r = e^{\varrho_r x}.$$

Nach (7) in Nr. 805 setzt man:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_r \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \varrho_1^{r-1} & \varrho_2^{r-1} & \ldots & \varrho_r^{r-1} \end{vmatrix} e^{(\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_r)x}.$$

Die hierin auftretende Determinante ist bekanntlich gleich dem Produkte aller $\varrho_i - \varrho_k$, wobei $i < k$ ist, und für die Unterdeterminanten $D_1, D_2, \ldots D_r$ der Elemente der letzten Zeile von D gilt Ähnliches. Daraus folgt z. B.:

$$\frac{D_1}{D} = \frac{e^{-\varrho_1 x}}{(\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_3)\cdots(\varrho_1 - \varrho_r)},$$

also nach (8) in Nr. 805:

$$\psi_1(x) = \frac{\int F(x) e^{-\varrho_1 x} dx}{(\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_3)\cdots(\varrho_1 - \varrho_r)},$$

wobei das Integral von einer bestimmten unteren Grenze an genommen werden kann. Der hierin auftretende Nenner läßt sich kürzer schreiben. Setzt man nämlich:

$$(4) \qquad \omega(\varrho) = \varrho^r - a_{r-1}\varrho^{r-1} - \cdots - a_1\varrho - a_0,$$

so ist:

$$\omega(\varrho) = (\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)\ldots(\varrho - \varrho_r),$$

daher:

$$\omega'(\varrho_1) = (\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_3)\cdots(\varrho_1 - \varrho_r),$$

also:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\omega'(\varrho_1)} \int F(x) e^{-\varrho_1 x} dx.$$

Entsprechende Werte gehen für $\psi_2(x), \ldots \psi_r(x)$ hervor, so daß die allgemeine Lösung von (1) nach (9) in Nr. 805 so lautet:

$$(5) \qquad y = \sum_1^r {}_i\, C_i e^{\varrho_i x} + \sum_1^r {}_i\, \frac{e^{\varrho_i (x)}}{\omega'(\varrho_i)} \int F(x) e^{-\varrho_i x} dx.$$

Dabei sind $C_1, C_2, \ldots C_r$ die Integrationskonstanten.

Man kann auch für den Fall, wo die charakteristische Gleichung (3) mehrfache Wurzeln hat, den Ausdruck für die allgemeine Lösung von (1) entwickeln, doch verzichten wir darauf Man kommt in jedem einzelnen Falle nach der in Nr. 805 angegebenen Methode zum Ziele.

852. Eine besondere lineare Differentialgleichung. Vorgelegt sei die lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$(1)\qquad y^{(r)} + \frac{A_1}{ax+b}\, y^{(r-1)} + \cdots + \frac{A_r}{(ax+b)^r}\, y = F(x),$$

worin a, b, A_1, A_2, ... A_r Konstanten bedeuten und $y^{(k)}$ mit dem Divisor $(ax+b)^{r-k}$ behaftet sein soll.

Diese Gleichung läßt sich in eine mit konstanten Koeffizienten verwandeln, also nach Nr. 806 vollständig integrieren, indem man vermöge:

$$(2)\qquad ax + b = e^t$$

die neue unabhängige Veränderliche t einführt, denn es kommt:

$$y' = \frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dt},\quad y'' = \frac{a^2}{(ax+b)^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\ \text{usw.}$$

Es ist indessen nicht nötig, diese Transformation wirklich auszuführen. Man kann nämlich die allgemeine Lösung der zugehörigen verkürzten Gleichung:

$$(3)\qquad z^{(r)} + \frac{A_1}{ax+b}\, z^{(r-1)} + \cdots + \frac{A_r}{(ax+b)^r}\, z = 0$$

so gewinnen: Würde man hierin t statt x als unabhänge Veränderliche einführen, so ginge eine verkürzte lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten hervor, die also Parikularlösungen von der Form

$$e^{\varrho t},\ te^{\varrho t},\ \ldots\ t^{m-1}e^{\varrho t}$$

hätte, wenn ϱ eine m-fache Wurzel der charakteristischen Gleichung wäre. Nach (2) müßte also die Gleichung (3) Partikularlösungen von der Form:

$$(ax+b)^\varrho,\ (ax+b)^\varrho \ln(ax+b),\ \ldots,\ (ax+b)^\varrho \ln^{m-1}(ax+b)$$

haben. Man wird also von vornherein darauf ausgehen, alle Partikularlösungen von (3) von der Form:

$$z = (ax+b)^\varrho \ln^n (ax+b)$$

zu bestimmen, indem man diesen Wert direkt in (3) einsetzt. Nachdem so (3) vollständig integriert worden ist, kann man nach der in Nr. 805 angegebenen Methode die allgemeine Lösung von (1) durch Quadraturen bestimmen.

Beispiel: Die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$x^2 z'' - (2\alpha - 1) x z' + \alpha^2 z = 0, \tag{4}$$

worin α konstant sein soll, gehört zu denen von der Form (3), indem $ax + b$ hier gleich x ist. Man setzt deshalb

$$z = x^\varrho \ln^n x$$

in (4) ein und erhält, da der Faktor $x^\varrho \ln^{n-2} x$ herausfällt:

$$(\varrho - \alpha)^2 \ln^2 x + 2n(\varrho - \alpha) \ln x + n(n-1) = 0.$$

Diese Gleichung kann aber nur dann bestehen, wenn einzeln:

$$(\varrho - \alpha)^2 = 0, \quad n(\varrho - \alpha) = 0, \quad n(n-1) = 0$$

ist. Demnach muß $\varrho = \alpha$ und $n = 0$ oder $= 1$ sein, so daß x^α und $x^\alpha \ln x$ die beiden Partikularlösungen sind und

$$z = (C_1 + C_2 \ln x) x^\alpha$$

die allgemeine Lösung von (4) mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2 vorstellt.

Siebentes Kapitel.

Systeme erster Ordnung von linearen partiellen Differentialgleichungen.

§ 1. Theorie einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

853. Homogene lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Aufgabe, eine *partielle* Differentialgleichung zu integrieren, sucht man auf die Aufgabe zurückzuführen, ein System von *gewöhnlichen* Differentialgleichungen zu integrieren, denn auf ein solches System kann man die bisher entwickelten Theorien anwenden. Wir beginnen mit der Betrachtung der einfachsten, nämlich der *linearen* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ die n unabhängigen Veränderlichen, während z eine noch unbekannte Funktion von ihnen bedeuten soll, so heißt eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für z (vgl. Nr. 669) insbesondere *linear*, wenn sie auf die Form:

$$\alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} \\ = \beta(x_1, x_2, \ldots x_n, z)$$

gebracht werden kann, in der $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ und β gegebene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und von z sind.

Insbesondere heißt die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung *homogen*, wenn *erstens* $\beta = 0$ ist, also die Ableitungen von z homogen auftreten, und *zweitens* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ nur von $x_1, x_2, \ldots x_n$, d. h. *nicht von z abhängen*. Eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion z von n Veränderlichen hat also die allgemeine Form:

$$(1)\quad \alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \alpha_2(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *gegebene Funktionen von* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *allein* sind.

Unter dem *Bereiche der Differentialgleichung* (1) wird ein Variabilitätsbereich verstanden, innerhalb dessen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ monogene Funktionen der n komplexen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind. Eine Funktion z von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die sich innerhalb des Bereiches oder eines Teiles des Bereiches regulär verhält und die Gleichung (1) für alle erlaubten Werte der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ befriedigt, heißt eine *Lösung* von (1). Da aber insbesondere jede Konstante z die Gleichung (1) befriedigt, wird noch hinzuzufügen sein, *daß die Lösung z nicht bloß eine Konstante sein soll.*

Um die Existenz der Lösungen zu beweisen und zu zeigen, wie man sie findet, erinnern wir an die Betrachtungen in Nr. 762 über die Integrale eines Systems erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen und insbesondere an Satz 1 jener Nummer, der im komplexen Bereiche im wesentlichen gerade so wie damals zu beweisen ist. Benutzen wir als das dort betrachtete System insbesondere dieses:

$$(2)\quad \frac{dx_1}{\alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \frac{dx_2}{\alpha_2(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{\alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n)},$$

das sich ja z. B. in der Form:

$$(3)\quad \frac{dx_j}{dx_1} = \frac{\alpha_j(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n)} \qquad (j = 2, 3, \ldots n)$$

als System erster Ordnung von $n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen für $x_2, x_3, \ldots x_n$ schreiben läßt, falls etwa $\alpha_1 \neq 0$ ist, so folgt, daß die Integrale f des Systems identisch sind mit den Lösungen z der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

die durch Multiplikation mit α_1 in die vorgelegte lineare homogene partielle Differentialgleichung (1) übergeht. Wenn man von denjenigen unter Umständen vorhandenen Stellen im Bereiche absieht, wo alle n Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ der Gleichung (1) verschwinden, ist die Voraussetzung $\alpha_1 \neq 0$ unwesentlich, da dann wenigstens einer der Koeffizienten, etwa α_i, von

Null verschieden ist und also x_i an Stelle von x_1 benutzt werden kann.

Die Existenz von Integralen des Systems (3) ist im Falle reeller Veränderlicher und Funktionen in Nr. 762 bewiesen worden, und im komplexen Bereiche ist der Beweis im wesentlichen gerade so zu führen, weil in diesem Falle beim Systeme (3) die Sätze 11 und 12 von Nr. 824, 825 über die Existenz von Lösungensystemen gelten. Dabei ist Satz 13 von Nr. 826 heranzuziehen, da die Lösungensysteme nach den Anfangswerten aufzulösen sind, wenn man die Integrale des Systems (3) gewinnen will. Also gilt

Satz 1: Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ solche Funktionen der n komplexen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die sich in einem Variabilitätsbereiche regulär verhalten, so hat die lineare homogene partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \alpha_2(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

in der Umgebung einer jeden Stelle des Bereiches, wo nicht alle n Funktionen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ verschwinden, solche Lösungen z, die sich ebenda regulär verhalten. Diese Lösungen sind identisch mit den sich regulär verhaltenden Integralen eines Systems erster Ordnung von $n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen, das sich in symmetrischer Form als System von totalen Differentialgleichungen so darstellt:

$$\frac{dx_1}{\alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \frac{dx_2}{\alpha_2(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{\alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

Dies System erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen hat nach Nr. 762 gerade $n-1$ unabhängige Integrale $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$, die monogene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind; und jedes andere Integral ist eine Funktion von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ allein. Demnach sind die Lösungen z der vorgelegten linearen homogenen partiellen Differentialgleichung (1) die Funktionen:

$$z = f(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}) \tag{4}$$

von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ allein. Dabei ist die Funktion f soweit willkürlich zu wählen, als sie noch regulär bleibt. Mithin gilt der

Satz 2: Eine lineare homogene partielle Differentialgleichung für eine Funktion z von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$\alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \alpha_2(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

hat gerade $n-1$ voneinander unabhängige Lösungen; alle anderen Lösungen sind willkürliche Funktionen von ihnen.

854. Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Nunmehr betrachten wir eine *allgemeine lineare* partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine unbekannte Funktion z von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$(1) \qquad \alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = \beta(x_1, x_2, \ldots x_n, z).$$

Dabei bedeuten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ und β gegebene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und auch von z, und sie sollen sich in einem gewissen Variabilitätsbereiche, dem *Bereiche der Differentialgleichung* (1), regulär verhalten.

In der Umgebung einer Stelle:

$$(2) \qquad x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n,\ z = b$$

des Bereiches sei z eine solche reguläre Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die an der Stelle $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ den Wert b hat. Sie heißt eine *Lösung* von (1), falls die Gleichung (1) durch diese Funktion für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ in der Umgebung der Stelle $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ befriedigt wird. Da die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ und β auch von z abhängen, ist es denkbar, daß diese $n+1$ Funktionen für eine Lösung z sämtlich verschwinden. Umgekehrt: Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ und β für eine Funktion z von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sämtlich gleich Null werden, befriedigt z offenbar die Gleichung (1). Derartige Lösungen heißen *singulär;* ihre Berechnung erfordert nur Eliminationen und Substitutionen. Ausdrücklich sei bemerkt: Wenn z eine Lösung von (1) ist, für die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ verschwinden, ist für sie auch $\beta = 0$, d. h. man hat es dann mit einer singulären Lösung zu tun.

Nun möge ein bestimmtes Wertsystem $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, z_0$ in der Umgebung der Stelle (2) gewählt sein, und es bedeute

f eine Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z, die sich in der Umgebung der Stelle regulär verhält, aber nicht frei von z ist. Nach Satz 13, Nr. 826, definiert alsdann die Gleichung:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, z) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, z_0) \tag{3}$$

implizite eine in der Umgebung der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ reguläre Funktion z von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die an dieser Stelle selbst den Wert z_0 annimmt. Wir werfen die Frage auf, unter welchen Bedingungen diese Funktion z eine Lösung von (1) ist. Da aus (3) durch partielle Differentiation nach x_k folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_k} = 0 \quad \text{oder:} \quad \frac{\partial z}{\partial x_k} = -\frac{\partial f}{\partial x_k} : \frac{\partial f}{\partial z} \tag{4}$$
$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

und $\partial f : \partial z \neq 0$ ist, gibt die Substitution der Werte der partiellen Ableitungen von z in (1) die Bedingung:

$$\alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n, z)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \cdots x_n, z)\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ + \beta(x_1, x_2, \ldots x_n, z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

Es ist demnach zu verlangen, daß sie infolge von (3) bestehe.

Soll dies gelten, wie man auch die Anfangswerte $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ und z_0 in der Umgebung der Stelle (2) wählen mag, d. h. soll:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, z) = C \tag{6}$$

für beliebige Werte der Konstante C in der Umgebung desjenigen Wertes, den f an der Stelle (2) erhält, eine Lösung z von (1) definieren, so muß die Gleichung (5) an sich und nicht bloß infolge von (6) bestehen, weil durch (6) nur die in (5) gar nicht vorkommende willkürliche Größe C eingeführt wird. Die Forderung (5) ist aber nichts anderes als eine *homogene* lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion f der $n+1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z, wenn man alle $n+1$ Veränderliche als unabhängig betrachtet.

Die Bedingung dafür, daß $f =$ konst. lauter Lösungen z der vorgelegten linearen Differentialgleichung (1) *mit n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ definiere, besteht demnach darin, daß f eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung* (5) *mit $n+1$ unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z sein muß.*

[**854**

Dieser Schluß ist umkehrbar. Bedeutet nämlich f eine solche Lösung der homogenen Gleichung (5), die sich in der Umgebung der Stelle (2) regulär verhält und überdies nicht frei von z ist, so definiert (6) oder (3) lauter Funktionen z, für die die Gleichungen (4) bestehen, so daß die daraus folgenden Werte:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = -\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

in (5) substituiert werden können, wodurch dann in der Tat wieder die ursprünglich vorgelegte Differentialgleichung (1) für z hervorgeht.

Man könnte also sagen, daß die Differentialgleichungen (1) und (5) einander *äquivalent* sind, wenn nicht noch der folgende Einwand zu erheben wäre: Der Schluß von (1) auf (5) war nur dadurch möglich, daß wir die Konstante C in (6) willkürlich ließen. Es ist aber denkbar, daß die Differentialgleichung (1) eine Lösung z hat, die *nicht* zu einer *Schar* von solchen Lösungen z gehört, die man durch eine Gleichung (6) mit einer *willkürlichen* Konstante C definieren kann. Wir werden aber nunmehr zeigen, daß derartige Lösungen z von (1) nur *singuläre* Lösungen sein können.

Der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung (5), in der man $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z als $n+1$ unabhängige Veränderliche aufzufassen hat, kommt nach voriger Nummer gerade derselbe Bereich wie der vorgelegten linearen partiellen Differentialgleichung (1) zu. Nach Satz 2 der vorigen Nummer hat sie gerade n voneinander unabhängige Lösungen:

$$\omega_1(x_1, x_2, \ldots x_n, z),\ \omega_2(x_1, x_2, \ldots x_n, z), \ldots \omega_n(x_1, x_2, \ldots x_n, z),$$

die sich in der Umgebung der Stelle (2) regulär verhalten, so daß in dieser Umgebung *für alle Werte von* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *und* z die n Gleichungen:

$$\alpha_1 \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_n} + \beta \frac{\partial \omega_i}{\partial z} = 0 \tag{7}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

bestehen. Unter z sei nun eine Lösung von (1) verstanden, die ebenfalls in jener Umgebung existiert und sich als Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ regulär verhält. Setzt man sie in (7) überall für z ein, so bestehen die Gleichungen (7) nach wie vor. Aber dann wird die *vollständige* partielle Ableitung von ω_i nach x_k diese:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \omega_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots n).$$

Gerade diese Größen treten nun auf, wenn man zu den Gleichungen (7) die mit $\partial \omega_i : \partial z$ multiplizierte Gleichung (1) addiert, indem dann hervorgeht:

$$\alpha_1\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) + \cdots + \alpha_n\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_n} + \frac{\partial \omega_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Hier liegen nun n in den Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ lineare homogene Gleichungen vor. Ist die benutzte Lösung z von (1) *nicht* singulär, so sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ nicht sämtlich gleich Null. Folglich muß die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial \omega_i}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_k} \\ i = 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots n \end{vmatrix}$$

verschwinden. Dies aber ist nichts anderes als die Funktionaldeterminante von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_n$ für den Fall, daß man z in $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ als eine Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ auffaßt.

Wenn also $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ solche n Lösungen von (5) bedeuten, die sich in der Umgebung der Stelle (2) regulär verhalten und als Funktionen der $n + 1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z voneinander unabhängig sind, werden sie voneinander abhängig, sobald man in ihnen unter z eine ebenda sich regulär verhaltende Lösung von (1) substituiert, vorausgesetzt, daß dies keine singuläre Lösung von (1) ist. Dies aber bedeutet, daß alle in der Umgebung der Stelle (2) existierenden und sich regulär verhaltenden Lösungen von (1) durch Gleichungen zwischen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ definiert werden. Z. B. sei die Stelle $(x_1^0, \ldots x_n^0, z_0)$ in der Umgebung der Stelle (2) gewählt, und es bedeute z eine Lösung von (1), die für $x_1 = x_1^0, \ldots x_n = x_n^0$ den Wert z_0 annimmt. Außerdem mögen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ an der Stelle $(x_1^0, \ldots x_n^0, z_0)$ die Werte $\omega_1^0, \omega_2^0, \ldots \omega_n^0$ haben. Alsdann wird eine Gleichung:

$$F(\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n) = F(\omega_1^0, \omega_2^0, \dots \omega_n^0)$$

existieren, die von der Lösung z befriedigt wird. Ihre linke Seite ist als Funktion von $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ allein für alle Werte von $x_1, x_2, \dots x_n$ und z in der Umgebung der Stelle (2) eine Lösung f der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung (5), und wenn sie für $x_1 = x_1^0, \dots x_n = x_n^0, z = z_0$ den Wert C hat, kann man also schreiben:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n, z) = C.$$

Damit sind wir aufs neue zur Gleichung (6) gelangt.

Die Äquivalenz zwischen der Gleichung (1) und der Gleichung (5) besteht demnach in der Tat, *sobald man von den singulären Lösungen von* (1) *absieht.* Mithin gilt der

Satz 3: Die Bestimmung aller nicht singulären Lösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion z von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$:

$$\alpha_1(x_1, x_2, \dots x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \dots x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = \beta(x_1, x_2, \dots x_n, z)$$

kommt zurück auf die Bestimmung aller Lösungen der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion f der $n+1$ als unabhängig betrachteten Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ und z:

$$\alpha_1(x_1, x_2, \dots x_n, z)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \dots x_n, z)\frac{\partial f}{\partial x_n} + \beta(x_1, x_2, \dots x_n, z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

indem die Lösungen z der ersten Gleichung definiert werden durch:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n, z) = \text{konst.},$$

falls f irgend eine Lösung der zweiten Gleichung bedeutet.

Infolge von Satz 1 der vorigen Nummer ist hiermit zugleich der *Beweis für die Existenz* der Lösungen z der vorgelegten linearen Differentialgleichung (1) geliefert.

Es sei besonders darauf aufmerksam gemacht, daß die Funktion β in (1) auf der rechten, dagegen in (5) auf der linken Seite steht. Ferner weisen wir darauf hin, daß eine Differentialgleichung (1), in der $\beta = 0$ ist:

$$(8)\quad \alpha_1(x_1, x_2, \dots x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \dots x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

nicht zu den in voriger Nummer betrachteten homogenen Gleichungen gehört, es sei denn, daß $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ sämtlich von z frei sind. Enthält wenigstens einer der Koeffizienten noch z, so muß man vielmehr die Gleichung (8) nach Satz 3 in die äquivalente homogene Gleichung:

$$(9) \quad \alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n, z)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n, z)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

verwandeln, worin f als Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z betrachtet wird. Ihre Integration kommt nach Satz 1 der vorigen Nummer auf die des Systems:

$$(10) \qquad \frac{dx_1}{\alpha_1} = \frac{dx_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{dx_n}{\alpha_n} = \frac{dz}{0}$$

zurück, und dies System hat außer z noch $n-1$ unabhängige Integrale $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$, die $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z enthalten. Alsdann ergeben sich die Lösungen von (8) durch Auflösung der Gleichungen von der Form:

$$F(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}, z) = \text{konst.}$$

nach z, wobei also zu beachten ist, daß z auch in $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ vorkommt.

855. Homogene Funktionen. Indem wir zwei einfache Beispiele zu den Entwicklungen der beiden letzten Paragraphen bringen, werden wir zugleich instand gesetzt, den Eulerschen Satz 9 über homogene Funktionen in Nr. 91 zu vervollständigen. Wir betrachten nacheinander folgende Beispiele:

1. Beispiel: Es ist:

$$(1) \qquad x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

eine *homogene* lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Nach Satz 1 von Nr. 853 kommt ihre Integration zurück auf die des Systems:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \cdots = \frac{dx_n}{x_n},$$

von dem offenbar $x_1 : x_n, x_2 : x_n, \ldots x_{n-1} : x_n$ gerade $n-1$ unabhängige Integrale sind. Demnach sind die Lösungen von (1) die Funktionen von der Form:

$$z = f\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

d. h. die *homogenen Funktionen nullten Grades.*

2. Beispiel: Die lineare partielle Differentialgleichung:

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = mz, \tag{2}$$

worin m eine von Null verschiedene Konstante bedeute, ist nicht homogen. Nach Satz 3 ist sie aber der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung für f:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + mz \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

äquivalent. Diese wieder kommt nach Satz 1 von Nr. 853, worin z durch f und $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z zu ersetzen sind, auf das System:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \cdots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{mz}$$

zurück. Es hat die n unabhängigen Integrale:

$$\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{z}{x_n^m}.$$

Folglich gehen die Lösungen von (2) aus den Gleichungen von der Form:

$$F\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{z}{x_n^m}\right) = 0$$

durch Auflösung nach z hervor und sind also diese:

$$z = x_n^m f\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

wobei f eine willkürliche Funktion bedeutet. Dies aber sind *die homogenen Funktionen m^{ten} Grades von $x_1, x_2, \ldots x_n$.* Singuläre Lösungen hat die Gleichung (2) nicht, da die Funktionen $\alpha_1 = x_1, \ldots \alpha_n = x_n$ und $\beta = mz$ nicht sämtlich für eine Funktion z von $x_1, x_2, \ldots x_n$ verschwinden.

Der Satz 9 über homogene Funktionen in Nr. 91 läßt sich folglich so vervollständigen:

Satz 4: Eine Funktion z von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist dann und nur dann eine homogene Funktion m^{ten} Grades, wenn sie eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ist:

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = mz.$$

856. Geometrische Deutung einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei

unabhängigen Veränderlichen. Die Betrachtungen in Nr. 853 und 854 hätten auch im *reellen* Gebiete durchgeführt werden können. Man hätte alsdann statt der sich regulär verhaltenden Funktionen solche reelle Funktionen von reellen Veränderlichen annehmen müssen, die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind. Eine entsprechende Bemerkung gilt auch für spätere Stellen. Es wäre ermüdend, jedesmal die Beweisführung im reellen Gebiete zu wiederholen. Überall, wo wir geometrische Deutungen vornehmen, beschränken wir uns stillschweigend auf das reelle Gebiet. Man könnte aber auch die geometrischen Begriffe mittels ihrer analytischen Bestimmungsstücke im imaginären Gebiete definieren und folglich beibehalten.

Liegt eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen vor, so wird es sich empfehlen, x und y statt x_1 und x_2 zu schreiben. Alsdann kann man x, y und die Lösungen z als rechtwinklige Koordinaten im Raume deuten. Jede Lösung $z = \varphi(x, y)$ der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(1) \qquad \alpha(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + \beta(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = \gamma(x, y, z)$$

wird nun durch eine Fläche dargestellt, die man eine *Integralfläche* von (1) nennt. Stellt man eine Schar von Integralflächen durch eine nicht nach z aufgelöste Gleichung:

$$f(x, y, z) = \text{konst.}$$

dar, so lassen sich die Schlüsse in Nr. 854 wiederholen. Denn dann kommt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

und die Substitution der hieraus folgenden Werte von $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ in (1) führt zur zugehörigen *homogenen* linearen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(2) \qquad \alpha(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \beta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

für eine Funktion f der *drei* unabhängigen Veränderlichen x, y, z. Ebenso ist der umgekehrte Schluß von (2) auf (1) leicht zu wiederholen. Dabei haben nur solche Lösungen f von

(2) Bedeutung, die nicht frei von z sind, d. h. $f = $ konst. darf keine Schar von Zylindern parallel der z-Achse vorstellen.

Werden die Ableitungen von z nach x und y mit p und q bezeichnet (wie in Nr. 85), so kommt statt (1):

$$(3) \qquad \alpha(x, y, z)p + \beta(x, y, z)\, q - \gamma(x, y, z) = 0.$$

Die Tangentenebene eines Punktes M oder (x, y, z) einer Integralfläche hat in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ nach (5) in Nr. 253 die Gleichung:

$$(4) \qquad (\mathfrak{x} - x)p + (\mathfrak{y} - y)\, q - (\mathfrak{z} - z) = 0.$$

Diese Gleichung stellt andererseits *irgend* eine Ebene durch den Punkt M dar, wenn p und q irgend welche Werte haben (wobei nur von den zur z-Achse parallelen Ebenen abgesehen wird); dann bedeuten p und q die Tangens der Winkel σ und τ, unter denen die Schnittlinien der Ebene (4) mit der xz-Ebene und yz-Ebene zur xy-Ebene geneigt sind, siehe Fig. 57. Mithin bestimmen die Größen p und q die *Stellung* einer Ebene (4) durch den Punkt M. Infolge von (3) werden nun p und q einer *linearen* Bedingung unterworfen, wenn man einen *bestimmten* Punkt M oder (x, y, z) ins Auge faßt. Demnach gibt es eine nur einfach unendliche Schar von Ebenen (4) durch M, die in M Tangentenebenen von Integralflächen sein können. Die Gleichung (4) kommt insbesondere dann auf (3) zurück, wenn man:

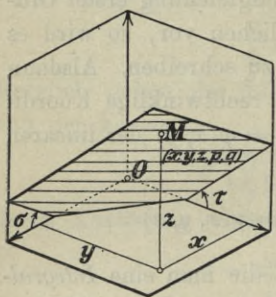

Fig. 57.

$$(5) \qquad \frac{\mathfrak{z} - z}{\mathfrak{x} - x} = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad \frac{\mathfrak{z} - z}{\mathfrak{y} - y} = \frac{\gamma}{\beta}$$

setzt, d. h. die durch (5) in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ dargestellte *Gerade* g, die von M ausgeht, liegt in *allen* denjenigen Ebenen (4) durch M, deren Bestimmungsstücke p und q der Gleichung (3) genügen. Alle Ebenen durch M, die in M Tangentenebenen von Integralflächen sein können, bilden somit ein *Ebenenbüschel* mit der von M ausgehenden Achse g; und die Richtungskosinus der Achse g sind nach (5) zu α, β, γ proportional. Der Inbegriff von M und g aber gibt ein *Linien-*

element l, und wenn wir sagen, eine Fläche enthalte ein Linienelement l, falls sie seinen Punkt M enthält und die Richtung des Elements die einer Tangente von M ist, so folgt:

Die lineare partielle Differentialgleichung (1) *ordnet jedem Punkte M oder (x, y, z) ein Linienelement l zu, nämlich dasjenige, dessen Richtungskosinus proportional α, β, γ sind, und eine Fläche ist dann und nur dann eine Integralfläche, wenn sie an jeder Stelle M das zugehörige Linienelement l enthält.*

Der Inbegriff eines Punktes und einer durch ihn gehenden Ebene heißt ein *Flächenelement.* Man sagt, daß eine Fläche ein solches Element hat oder enthält, wenn der Punkt des Elements auf der Fläche liegt und die Ebene des Elements daselbst die Tangentenebene ist. Dementsprechend sagt man auch, daß eine Fläche von allen ihren Flächenelementen *erzeugt* wird. Offenbar hat eine Fläche eine *zwei*fach unendliche Schar von Flächenelementen, weil sie eine zweifach unendliche Schar von Punkten hat. Irgend ein Flächenelement im Raume dagegen hängt von *fünf* Bestimmungsstücken ab, nämlich von den Koordinaten x, y, z seines Punktes M und von den Größen p und q, die die Stellung der Ebene des Elements festlegen. Dabei wird allerdings von Flächenelementen, die der z-Achse parallel sind, abgesehen. Will man sie auch berücksichtigen, so wird man außer x, y, z als Bestimmungsstücke etwa die drei Richtungskosinus der Normale des Elements benutzen, und weil die Summe der Quadrate der Richtungskosinus gleich Eins ist (nach Nr. 252), wird ein Element auch dann durch nur *fünf* unabhängige Größen festgelegt. Wir benutzen jedoch p und q, da hier keine zur z-Achse parallelen Flächenelemente in Betracht kommen.

Die Differentialgleichung (1) oder (3) legt den fünf Bestimmungsstücken der Flächenelemente ihrer Integralflächen eine Bedingung auf; *sie definiert daher eine vierfach unendliche Schar von Flächenelementen.* Wir sagen, daß ein Flächenelement der Differentialgleichung (1) oder (3) angehört, wenn seine Bestimmungsstärke x, y, z, p, q der Gleichung (3) genügen. Die Aufgabe, die Differentialgleichung zu integrieren, bedeutet geometrisch, *alle von solchen Elementen erzeugte Flächen zu ermitteln.* Dabei haben diese Elemente eine besondere Lagerung: *Alle diejenigen Flächenelemente, die denselben Punkt gemein haben, enthalten ein gemeinsames Linienelement l.* Nach den Sätzen 3 und 1 von Nr. 854 und 853 kommt die Integration der linearen partiellen Differentialgleichung (1) auf die des Systems:

$$\frac{dx}{\alpha(x,y,z)} = \frac{dy}{\beta(x,y,z)} = \frac{dz}{\gamma(x,y,z)} \tag{6}$$

zurück, das sich z. B. in der Form:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta(x,y,z)}{\alpha(x,y,z)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\gamma(x,y,z)}{\alpha(x,y,z)}$$

als System erster Ordnung von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen schreiben läßt. Sind $\omega_1(x,y,z)$ und $\omega_2(x,y,z)$ unabhängige Integrale, so stellen die Gleichungen:

$$\omega_1(x,y,z) = \text{konst.}, \quad \omega_2(x,y,z) = \text{konst.} \tag{7}$$

zusammen die *Integralkurven* des Systems (6) dar. Man kann auch eine längs der Integralkurven veränderliche Hilfsgröße t einführen und das System (6) demgemäß durch:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x,y,z), \quad \frac{dy}{dt} = \beta(x,y,z), \quad \frac{dz}{dt} = \gamma(x,y,z) \tag{8}$$

ersetzen, vgl. Nr. 768. Dann sind x, y, z längs der Integralkurven Funktionen von t. Diese Integralkurven von (6) oder (8) bilden nach (7) eine *zwei*fach unendliche Schar. Von jedem Punkte M oder (x, y, z) geht eine von ihnen aus, nämlich diejenige, die dort die Tangente hat, deren Richtungskosinus proportional α, β, γ sind. *Daher sind die Integralkurven identisch mit denjenigen Kurven, die von den Linienelementen l erzeugt werden, die vermöge der linearen partiellen Differentialgleichung* (1) *oder* (3) *den Punkten M zugeordnet sind.* Man nennt sie die *Charakteristiken* der linearen partiellen Differentialgleichung (1), und zwar aus folgendem Grunde:

Jede nicht singuläre Integralfläche von (1) wird durch eine Gleichung zwischen den Integralen ω_1 und ω_2 von (6) dargestellt:

$$F(\omega_1, \omega_2) = 0 \tag{9}$$

und enthält daher die *einfach* unendliche Schar derjenigen Integralkurven von (6), in deren Gleichungen:

$$\omega_1(x,y,z) = C_1, \quad \omega_2(x,y,z) = C_2$$

die beiden Konstanten C_1 und C_2 der Bedingung:

$$F(C_1, C_2) = 0$$

unterworfen sind. Man kann umgekehrt schließen: Es werde eine Kurve c ausgewählt, die keine Charakteristik ist; alle von c ausgehenden Charakteristiken k erzeugen eine Fläche, die in der Form (9) darstellbar und daher eine Integralfläche von (1) ist, vgl. Nr. 764.

Alle Integralflächen, die nicht singulär sind, werden somit von Charakteristiken erzeugt. Siehe auch Fig. 39 in Nr. 764.

Singulär sollen alle diejenigen Flächenelemente (x, y, z, p, q) *heißen,* deren Bestimmungsstücke der Differentialgleichung (3) in der Weise genügen, daß dabei $\alpha = \beta = \gamma = 0$ wird. Dann kann man nach Nr. 854 die *singulären Integralflächen als diejenigen Flächen definieren, die von lauter singulären Flächenelementen erzeugt werden.*

857. Beispiele.

1. Beispiel: Bei der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c \tag{1}$$

mit drei gegebenen Konstanten a, b, c ist $\alpha = a$, $\beta = b$ und $\gamma = c$. Deshalb gibt es keine singuläre Lösungen. Die den Punkten M oder (x, y, z) zugeordneten Linienelemente l mit den Achsen g haben überdies einerlei Richtung. Deshalb sind die Charakteristiken diejenigen Geraden, deren Richtungskosinus proportional a, b, c sind, woraus weiter folgt, daß die Integralflächen die *Zylinder* von derselben Richtung sein müssen, vgl. Satz 28, Nr. 345. Analytisch wird dies durch die Integration des Systems:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c} \tag{2}$$

bestätigt, das die Integrale $cx - az$ und $cy - bz$ hat, sodaß:

$$F(cx - az,\ cy - bz) = 0$$

alle Integralflächen darstellt, vgl. (2) in Nr. 345. Übrigens kann man auch $cx - az$ und $ay - bx$ als die Integrale von (2) benutzen. Dann stellen sich die Integralflächen so dar:

$$F(cx - az,\ ay - bx) = 0.$$

Auflösung nach z lehrt, daß die Lösungen von (1) diese sind:

$$z = \frac{c}{a} x + \varphi(ay - bx),$$

wobei φ eine willkürliche Funktion von $ay - bx$ bedeutet. Diese Darstellung ist im Falle $a = 0$ unbrauchbar. Man kann aber die Lösungen auch so ausdrücken:

$$z = \frac{c}{b} y + \psi(ay - bx),$$

und hier darf $a = 0$ sein.

2. Beispiel: Liegt die lineare partielle Differentialgleichung:

$$(3) \qquad (x - x_0)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0$$

mit den drei Konstanten x_0, y_0, z_0 vor, so lautet das äquivalente System:

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0}.$$

Das einem Punkte M oder (x, y, z) zugehörige Linienelement l hat daher Richtungskosinus proportional $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, sodaß die Gerade g des Elements von dem *festen* Punkte M_0 oder (x_0, y_0, z_0) nach M geht. Demnach sind die Charakteristiken alle Strahlen von M_0 aus; jede nicht singuläre Integralfläche ist ein *Kegel* mit der Spitze M_0, vgl. Satz 29, Nr. 346. Wir überlassen dem Leser die *analytische* Bestätigung dafür, daß die Gleichung (1) von Nr. 346:

$$F\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0$$

die Integralflächen von (3) definiert. Weil man die Integralflächen auch in der Form:

$$F\left(\frac{z - z_0}{x - x_0}, \frac{y - y_0}{x - x_0}\right) = 0$$

darstellen kann, ergibt sich durch Auflösung nach z, daß:

$$z = z_0 + (x - x_0)\,\varphi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right)$$

mit der willkürlichen Funktion φ die Lösungen von (3) gibt. Es ist nützlich, dies analytisch durch Substitution in (3) zu bestätigen. Auch in diesem Beispiele gibt es keine singulären Lösungen.

3. Beispiel: Es liege die lineare partielle Differentialgleichung vor:

$$(4) \qquad 2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2.$$

Sie ist dem System äquivalent:

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

Faßt man hierin z als die unabhängige Veränderliche auf, so läßt es sich wie folgt schreiben:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2xz}{z^2 - x^2 - y^2}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{2yz}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

Nach dem zweiten Beispiele in Nr. 765, worin x, y, z mit y_1, y_2, x bezeichnet wurden, sind daher die Charakteristiken alle Kreise, die im Anfangspunkte die z-Achse berühren und durch die beiden Gleichungen:

$$\frac{y}{x} = \text{konst.}, \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = \text{konst.}$$

dargestellt werden können. Jede nicht singuläre Integralfläche läßt sich mithin in der Form:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

oder:

$$z = \sqrt{y\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2}$$

mit einer willkürlichen Funktion φ darstellen. Auch hier gibt es keine singulären Integralflächen.

4. Beispiel: Es soll die lineare partielle Differentialgleichung:

$$(5) \qquad z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda(x, y)$$

integriert werden, in der λ eine gegebene Funktion von x und y allein bezeichnet. Hier ist $\alpha = x$, $\beta = y$ und $\gamma = z - \lambda$, so daß es keine singulären Lösungen gibt und das äquivalente System lautet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - \frac{\lambda(x, y)}{x}.$$

Es hat ein von z freies Integral, nämlich $y : x$. Demnach werde $y = C_1 x$ gesetzt und unter C_1 eine willkürliche Konstante verstanden (nach der in Nr. 765 angegebenen Integrationsmethode). Alsdann liefert die letzte Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - \frac{\lambda(x, C_1 x)}{x},$$

und dies ist eine gewöhnliche *lineare* Differentialgleichung erster Ordnung für z, die nach Nr. 716 die Lösung:

$$z = C_2 x - x \int_a^x \frac{\lambda(x, C_1 x)}{x^2}\, dx$$

mit der willkürlichen Konstanten C_2 hat. Dabei kann die untere Grenze a bestimmt gewählt werden. Hieraus würde nun ein von $y : x$ unabhängiges Integral hervorgehen, wenn man die Gleichung nach C_2 auflöste und wieder $C_1 = y : x$ einführte. Damit die Substitution $C_1 = y : x$ schon unter dem Integralzeichen gemacht werden kann, ersetzt man x unter dem Integralzeichen durch eine Veränderliche t und C_1 durch $y : x$. Dann kommt:

$$z = C_2 x - x \int_a^x \frac{\lambda\left(t, \frac{y}{x} t\right)}{t^2}\, dt. \tag{6}$$

Jede Gleichung zwischen $C_1 = y : x$ und dem aus (6) folgenden Werte von C_2 stellt eine Integralfläche dar, d. h. jede Lösung von (5) geht aus (6) hervor, wenn man darin C_2 als eine willkürliche Funktion φ von C_1 oder $y : x$ wählt:

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x \int_a^x \frac{\lambda\left(t, \frac{y}{x} t\right)}{t^2}\, dt. \tag{7}$$

Beispielsweise liege als Differentialgleichung (5) diese vor:

$$z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{cxy}{\sqrt{(c^2 + x^2)(c^2 + y^2)}}, \tag{8}$$

wobei c eine gegebene Konstante bedeute. Wenn man $a = 0$ wählt, geht hier als Lösung hervor:

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - cy \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(c^2 + t^2)\left(c^2 + \frac{y^2}{x^2} t^2\right)}}.$$

Das hierin vorkommende *elliptische* Integral läßt sich nach Nr. 485 in ein elliptisches Integral mit bestimmter oberer Grenze verwandeln, indem man $t = x\xi$, $dt = x d\xi$ einführt:

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - cxy \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(c^2 + x^2\xi^2)(c^2 + y^2\xi^2)}}. \tag{9}$$

858. Die charakteristischen Streifen. Die Charakteristiken der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(1)\qquad \alpha(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + \beta(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = \gamma(x, y, z),$$

nämlich die Integralkurven des äquivalenten Systems:

$$(2)\qquad \frac{dx}{\alpha(x, y, z)} = \frac{dy}{\beta(x, y, z)} = \frac{dz}{\gamma(x, y, z)},$$

unterscheiden sich von allen andern Kurven des Raumes dadurch, daß durch jede Charakteristik unbegrenzt viele Integralflächen gehen. Denn wenn k_0 eine Charakteristik und c *irgend eine* von einem Punkte M_0 von k_0 ausgehende Kurve vorstellt, bilden alle von c ausgehenden Charakteristiken nach Nr. 856 eine Integralfläche, und diese Fläche enthält insbesondere k_0. Da man beliebige von M_0 ausgehende Kurven c annehmen kann, gibt es also in der Tat unzählig viele Integralflächen, die k_0 enthalten. Nach Nr. 856 haben sie in irgend einem Punkte von k_0 solche Flächenelemente, die ein Büschel bilden, dessen Achse die Tangente von k_0 ist, die damals mit g bezeichnet wurde. Hieraus folgt auch, daß irgend zwei Integralflächen, die überhaupt einen Punkt gemein haben, einander längs derjenigen Charakteristik schneiden, die durch diesen Punkt geht. Dabei wird stets von den singulären Integralflächen abgesehen, die man ja nach Nr. 854 auf dem Wege der Elimination und Substitution findet, so daß sie nur in begrenzter Anzahl vorhanden sein können.

Greift man eine derjenigen Integralflächen heraus, die durch eine bestimmte Charakteristik k_0 gehen, so hat sie längs k_0 einen Streifen von Flächenelementen, den man nach *Lie* einen *charakteristischen Streifen* nennt. Eine ungefähre Vorstellung davon soll Fig. 58 geben, worin allerdings die Flächenelemente durch krumme Vierecke angedeutet werden mußten; die Ebenen der Elemente muß man sich als Tangentenebenen dieser krummen Flächenstücke vorstellen.

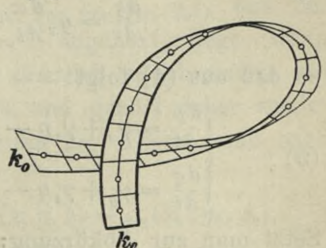

Fig. 58.

Wie in Nr. 856 kann man x, y, z längs der Charakteristik k_0

als Funktionen einer Hilfsveränderichen t betrachten, für die nach (2):

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = \alpha(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = \beta(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = \gamma(x, y, z)$$

ist. Längs k_0 werden nun auch die beiden übrigen Bestimmungsstücke p und q der Flächenelemente des charakteristischen Streifens Funktionen von t sein, und wir wollen feststellen, welchen Bedingungen diese Funktionen unterworfen sind.

Zunächst sind z und die Ableitungen $p = \partial z : \partial x$ und $q = \partial z : \partial y$ auf einer Integralfläche als Funktionen von x und y nach (1) der Gleichung:

$$\alpha p + \beta q = \gamma$$

unterworfen, aus der durch partielle Differentiation nach x und y folgt:

$$(\alpha_x + \alpha_z p) p + (\beta_x + \beta_z p) q + \alpha p_x + \beta q_x = \gamma_x + \gamma_z p,$$
$$(\alpha_y + \alpha_z q) p + (\beta_y + \beta_z q) q + \alpha p_y + \beta q_y = \gamma_y + \gamma_z q.$$

Da aber $p_y = \partial^2 z : \partial x \partial y = q_x$ ist, kann man hieraus folgern:

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha p_x + \beta p_y = \gamma_x + \gamma_z p - (\alpha_x + \alpha_z p) p - (\beta_x + \beta_z p) q, \\ \alpha q_x + \beta q_y = \gamma_y + \gamma_z q - (\alpha_y + \alpha_z q) p - (\beta_y + \beta_z q) q. \end{cases}$$

Beschränkt man sich nun aber auf die Flächenelemente (x, y, z, p, q) der Integralfläche längs einer Charakteristik, so gelten außerdem die Formeln (3), und deshalb wird:

$$\frac{dp}{dt} = p_x \frac{dx}{dt} + p_y \frac{dy}{dt} = \alpha p_x + \beta p_y,$$
$$\frac{dq}{dt} = q_x \frac{dx}{dt} + q_y \frac{dy}{dt} = \alpha q_x + \beta q_y,$$

so daß aus (4) folgt:

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \gamma_x + \gamma_z p - (\alpha_x + \alpha_z p) p - (\beta_x + \beta_z p) q, \\ \dfrac{dq}{dt} = \gamma_y + \gamma_z q - (\alpha_y + \alpha_z q) p - (\beta_y + \beta_z q) q. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(6) \quad F = \alpha p + \beta q - \gamma,$$

so daß F eine Funktion von x, y, z, p, q ist und $F = 0$ die vorgelegte lineare partielle Differentialgleichung (1) bedeutet, so lassen sich die Gleichungen (3) und (5) für die charakteristischen Streifen so darstellen:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=F_p, \quad \dfrac{dy}{dt}=F_q, \quad \dfrac{dz}{dt}=pF_p+qF_q, \\ \dfrac{dp}{dt}=-F_x-pF_z, \quad \dfrac{dq}{dt}=-F_y-qF_z. \end{cases}$$

Man kann sie von der Hilfsveränderlichen t befreien, indem man die Verhältnisse der Differentiale dx, dy, dz, dp, dq bildet. Dann liegt ein System erster Ordnung von vier gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform zwischen den fünf Veränderlichen x, y, z, p, q vor. Es hat also vier unabhängige Integrale. *Eines davon ist F selbst,* denn das vollständige Differential von F verschwindet infolge von (7). Zwei andere Integrale sind die des Systems (2), das ja in dem Systeme, das wir betrachten, mit enthalten ist, weil F_p und F_q gleich α und β sind. Diese beiden Integrale ω_1 und ω_2 sind also Funktionen von x, y, z allein, indem $\omega_1 =$ konst., $\omega_2 =$ konst. alle Charakteristiken darstellen, vgl. Nr. 856. Schließlich gibt es also nur noch ein Integral Ω, das von x, y, z, p und q abhängt. Da nun nach (1) und (6) noch $F=0$ gefordert werden muß, kommen für die charakteristischen Streifen nur diejenigen Wertsysteme x, y, z, p, q in Betracht, die den Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \omega_1(x,y,z) = \text{konst.}, \quad \omega_2(x,y,z) = \text{konst.}, \\ \qquad F = \alpha p + \beta q - \gamma = 0, \\ \qquad \Omega(x,y,z,p,q) = \text{konst.} \end{cases}$$

genügen. Ein Flächenelement $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, das der Differentialgleichung (1) oder $F=0$ angehört, liegt, wenn nicht α, β und γ für dies Element sämtlich verschwinden, auf einer nicht singulären Integralfläche und gehört daher wenigstens einem charakteristischen Streifen an. Dieser muß nach (8) durch:

$$\omega_1(x,y,z) = \omega_1(x_0,y_0,z_0), \quad \omega_2(x,y,z) = \omega_2(x_0,y_0,z_0),$$
$$\alpha p + \beta q = \gamma, \quad \Omega(x,y,z,p,q) = \Omega(x_0,y_0,z_0,p_0,q_0)$$

definiert werden. Auf diese Weise sieht man ein, daß die Gleichungen (7) unter der Bedingung $F=0$ nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedingungen für einen

[858

charakteristischen Streifen sind. Da in (8) drei willkürliche Konstanten vorkommen, gibt es insgesamt eine *dreifach unendliche Schar von charakteristischen Streifen*, während nach Nr. 856 eine nur *zweifach* unendliche Schar von Charakteristiken vorhanden ist. In der Tat gehen ja durch jede Charakteristik unzählig viele Integralflächen und demnach liegen längs ihrer auch unbegrenzt viele charakteristische Streifen. Sie bilden eine gerade *einfach* unendliche Schar, denn eine bestimmte Charakteristik wird ausgewählt, wenn man die beiden ersten willkürlichen Konstanten in (8) bestimmt wählt, so daß nur noch *eine* Konstante willkürlich bleibt.

Es möge jetzt ein Punkt M oder (x, y, z) bestimmt gewählt sein. Diejenigen Flächenelemente (x, y, z, p, q), die dem Punkte M und der Differentialgleichung (1) angehören, bilden nach Nr. 856 ein Büschel, dessen Achse die Tangente g der durch M gehenden Charakteristik k ist. Insbesondere seien *vier* solche Elemente ausgewählt, d. h. es seien vier Wertepaare p_i, q_i angenommen, die den Gleichungen:

$$\alpha p_i + \beta q_i - \gamma = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{9}$$

genügen. Ihre Ebenen haben in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nach (4) in Nr. 856 die Gleichungen:

$$(\mathfrak{x} - x)p_i + (\mathfrak{y} - y)q_i - (\mathfrak{z} - z) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

oder, wenn man q_i mittels (9) eliminiert, die Gleichungen:

$$[\beta(\mathfrak{x} - x) - \alpha(\mathfrak{y} - y)]p_i = \beta(\mathfrak{z} - z) - \gamma(\mathfrak{y} - y) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Da sie einem Büschel mit der Achse g angehören, werden sie von jeder Geraden in vier Punkten getroffen, deren Doppelverhältnis bekanntlich unabhängig von der Lage der Schnittgeraden ist und daher das *Doppelverhältnis der vier Ebenen* heißt. Nach der letzten Gleichung werden die vier Ebenen z. B. von der z-Achse in den Punkten mit den Koordinaten:

$$\mathfrak{z}_i = \frac{\beta z - \gamma y - (\beta x - \alpha y)p_i}{\beta}$$

geschnitten, und das Doppelverhältnis der vier Punkte ist deshalb gleich dem Doppelverhältnisse $(p_1\, p_2\, p_3\, p_4)$, weil sich z_1, z_2, z_3, z_4 in gleicher Art linear durch p_1, p_2, p_3, p_4 ausdrücken, vgl. Nr. 748.

Nun aber gehören die vier betrachteten Flächenelemente von M zu vier charakteristischen Streifen mit einer gemeinsamen Charakteristik k, nämlich mit der von M ausgehenden. Daher betrachten wir p_1, p_2, p_3, p_4 als veränderlich längs k, und dann gelten die Formeln (7). Es ist aber nach Nr. 748:

$$d \ln (p_1 p_2 p_3 p_4) = \frac{dp_3 - dp_1}{p_3 - p_1} + \frac{dp_4 - dp_2}{p_4 - p_2} - \frac{dp_3 - dp_2}{p_3 - p_2} - \frac{dp_4 - dp_1}{p_4 - p_1},$$

und hierin sind dp_1, dp_2, dp_3, dp_4 nach (7) proportional

$$-F_x - p_1 F_z, \quad -F_x - p_2 F_z, \quad -F_x - p_3 F_z, \quad -F_x - p_4 F_z.$$

Mithin folgt, daß längs der Charakteristik k:

$$\frac{d \ln (p_1 p_2 p_3 p_4)}{dt} = 0$$

wird, d. h.: *Vier nicht singuläre Integralflächen, die eine Charakteristik k gemein haben, sind stets so beschaffen, daß überall längs der Charakteristik das Doppelverhältnis der vier zugehörigen Tangentenebenen dasselbe bleibt.*

Insbesondere erkennt man noch leicht, *daß zwei nicht singuläre Integralflächen, die einander an einer Stelle M_0 berühren und daher die von M_0 ausgehende Charakteristik k gemein haben, einander überall längs k berühren.*

§ 2. Theorie des Jacobischen Multiplikators.

859. Erste Definition des Multiplikators. Da die Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung nach Satz 3, Nr. 854, auf die der *homogenen* zurückkommt, beschränken wir uns von jetzt an auf die Betrachtung homogener Gleichungen. Die unbekannte Funktion bezeichnet man dabei herkömmlich nicht mit z, sondern mit f, während $x_1, x_2, \ldots x_n$ wie immer die unabhängigen Veränderlichen bedeuten sollen. Wir betrachten also eine Gleichung von der Form:

(1) $$\alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

in der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ gegebene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ allein bedeuten. Eine solche Differentialgleichung für f hat nach Nr. 854 gar keine singuläre Lösung. Alle Lösungen sind vielmehr nach Satz 1, Nr. 853, identisch mit den Integralen des Systems:

$$(2)\qquad \frac{dx_1}{\alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \frac{dx_2}{\alpha_2(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{\alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

Um nun an die Theorie des *Euler*schen Multiplikators in § 3 des dritten Kapitels anzuknüpfen, nehmen wir zunächst $n = 2$ an. Das System (2) ist alsdann eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in x_1 und x_2:

$$\alpha_2(x_1, x_2)\, dx_1 - \alpha_1(x_1, x_2)\, dx_2 = 0.$$

Sie stimmt mit der Gleichung (1) in Nr. 724 überein, wenn man x_1, x_2, α_1, α_2 durch x, y, $-V$, U ersetzt. Die damals unter (4) angegebene Bedingung für einen Multiplikator M lautet demnach jetzt so:

$$\frac{\partial M\alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M\alpha_2}{\partial x_2} = 0.$$

Nach dem Vorgange von *Jacobi* definieren wir daher, indem wir dies verallgemeinern, als einen *Multiplikator von* (1) jede *von Null verschiedene* Funktion M von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die der Bedingung:

$$(3)\qquad \frac{\partial M\alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M\alpha_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial M\alpha_n}{\partial x_n} = 0$$

genügt. Da die Bedingung in der Form:

$$(4)\qquad \alpha_1 \frac{\partial \ln M}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial \ln M}{\partial x_n} = -\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} - \cdots - \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n}$$

als lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für $\ln M$ geschrieben werden kann, *steht die Existenz unbegrenzt vieler Jacobischer Multiplikatoren fest*, nach Satz 3, Nr. 854.

Sind M und N zwei Multiplikatoren, so besteht entsprechend (4) eine Gleichung in N statt M, und die Subtraktion beider Gleichungen voneinander zeigt sofort, daß $\ln(M:N)$ und daher auch $M:N$ die vorgelegte Differentialgleichung (1) befriedigt, also entweder eine Lösung von (1) oder bloß eine Konstante ist. Umgekehrt: Wenn f eine Lösung von (1) oder eine Konstante und M einen Multiplikator bedeutet, multipliziere man (1) mit M und (3) mit f. Alsdann gibt die Addition beider Gleichungen:

$$\frac{\partial f M\alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f M\alpha_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f M\alpha_n}{\partial x_n} = 0,$$

d. h. fM ist ein Multiplikator N. Entsprechend dem Satze 13 von Nr. 724 gilt somit der

Satz 5: Das Verhältnis zweier Multiplikatoren einer homogenen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ist entweder eine Lösung oder eine Konstante, und das Produkt aus einem Multiplikator und einer Lösung oder einer Konstanten ist wieder ein Multiplikator.

Im Falle $n = 2$, auf den wir noch einmal zurückgreifen, ist der Ausdruck $M(\alpha_2 dx_1 - \alpha_1 dx_2)$ nach der ursprünglichen Definition des Multiplikators M in Nr. 612 ein vollständiges Differential, nämlich das einer gewissen Lösung ω, so daß wie in (2), Nr. 724:

$$M\alpha_2 = \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \quad M\alpha_1 = -\frac{\partial \omega}{\partial x_2}$$

wird. Daher kommt dann, wenn f eine *beliebige* Funktion bedeutet:

$$M\left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \begin{pmatrix} \omega & f \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Im Falle $n = 2$ wird also die linke Seite der Differentialgleichung (1) nach Multiplikation mit M gleich der Funktionaldeterminante einer gewissen Lösung ω und der beliebigen Funktion f. Hiervon ausgehend, kann man die Definition des Multiplikators auf einem zweiten, ebenfalls von *Jacobi* angegebenen Wege verallgemeinern. In Nr. 861 wird sich aber ergeben, daß man dabei doch wieder zur Definition durch die Bedingung (3) gelangt.

860. Zweite Definition des Multiplikators. Vorweg machen wir eine Bemerkung, die sich auf beliebige Funktionaldeterminanten $\mathfrak{D}$ von n Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

bezieht. Wird die zum Element $\partial f_i : \partial x_k$ gehörige $(n-1)$-reihige Unterdeterminante $\mathfrak{D}_{ik}$ genannt, so ist, behaupten wir:

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{D}_{i2}}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{D}_{in}}{\partial x_n} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{2}$$

Aus $\mathfrak{D}_{ik}$ geht nämlich durch Differentiation nach x_k eine Summe von $n-1$ Determinanten hervor. In einer von ihnen tritt, wenn j ein von k verschiedener Index ist, die Reihe mit den Elementen

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_j \partial x_k}, \cdots \frac{\partial^2 f_{i-1}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial^2 f_{i+1}}{\partial x_j \partial x_k}, \cdots \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_j \partial x_k}$$

auf. Dasselbe gilt, wenn $\mathfrak{D}_{ij}$ nach x_j differenziert wird. Man bemerkt aber, daß die beiden mit dieser Elementenreihe behafteten Determinanten einander entgegengesetzt gleich sind, sich also in der Summe, die in (2) links steht, fortheben. Auf diesem Wege leuchtet ein, daß überhaupt die ganze Summe (2) gleich Null ist.

Nun seien $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ irgendwelche $n-1$ voneinander unabhängige Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Es gibt dann eine und nur eine homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{3}$$

die $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ zu Lösungen hat. Denn man braucht ja nur für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die $n-1$ Bedingungen:

$$\alpha_1 \frac{\partial \omega_j}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \omega_j}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial \omega_j}{\partial x_n} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots n-1) \tag{4}$$

aufzustellen, die gerade die Verhältnisse von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ bestimmen, weil $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ voneinander unabhängig sind. Die gesuchte Differentialgleichung für f geht also einfach dadurch hervor, daß man $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ aus den n Gleichungen (4) und (3) eliminiert, nämlich in der Form:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0.$$

In der Tat ist dies eine in $\partial f : \partial x_1, \ldots \partial f : \partial x_n$ homogene lineare Gleichung mit von $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängigen Koeffizienten. Sie besagt übrigens nichts anderes als Satz 2 von Nr. 853, wonach jede Lösung f eine Funktion der $n-1$ unabhängigen Lösungen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ ist. *Man kann demnach diejenige* *homogene lineare Differentialgleichung für f, die gegebene $n-1$ unabhängige Lösungen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ hat, in der Form:*

(5) $$\Delta = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & f \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} = 0$$

schreiben.

Bezeichnet Δ_i die zum Element $\partial f : \partial x_i$ gehörige Unterdeterminante von Δ, so kann man (5) auch so darstellen:

(6) $$\Delta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Delta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \Delta_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

In der Tat ist dies die Gleichung (3), weil $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die Bedingungen (4) erfüllen sollen. Aber die Differentialgleichung (3), die $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ zu Lösungen hat, kann sich von der Gleichung (6) noch um einen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängigen Faktor M unterscheiden, so daß:

(7) $$M\alpha_1 = \Delta_1, \quad M\alpha_2 = \Delta_2, \quad \ldots \quad M\alpha_n = \Delta_n$$

ist. Nach der vorausgeschickten Bemerkung gilt nun die Formel:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \Delta_n}{\partial x_n} = 0,$$

woraus nach (7) und nach der Definition (3) in voriger Nummer folgt, daß M ein *Multiplikator* von (3) sein muß. Aus (7) und (5) ergibt sich daher, daß ein Multiplikator M vorhanden ist derart, daß *für jede Funktion* f von $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Gleichung besteht:

(8) $$M\left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & f \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

Hiervon ausgehend kann man nun die angekündigte zweite Definition für die Multiplikatoren aufstellen:

Unter einem Multiplikator M der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung (3) *wird eine jede von Null verschiedene Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ verstanden, die so beschaffen ist, daß die linke Seite der Differentialgleichung durch Multiplikation mit M gleich der Funktionaldeterminante von $n-1$ Lösungen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ und von der beliebigen Funktion f wird.*

Daß $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ voneinander unabhängig sein sollen, wird dabei schon durch die Voraussetzung $M \neq 0$ bedingt.

Man hat nun nur noch zu zeigen, daß jeder der in voriger

Nummer definierten Multiplikatoren M auch dieser neuen Definition genügt.

861. Übereinstimmung beider Definitionen des Multiplikators. Es seien wieder $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ voneinander unabhängige Lösungen der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(1) \qquad \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

und es sei M ein Multiplikator nach der letzten Definition, d. h. für jede Funktion f von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bestehe die Gleichung:

$$(2) \qquad M\left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & f \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

Wie wir soeben sahen, ist alsdann M auch ein Multiplikator nach der ersten Definition in Nr. 859. Nun möge N irgend einen Multiplikator nach dieser ersten Definition bedeuten. Nach Satz 5 vor Nr. 859 gibt es alsdann eine Lösung Ω von (1) derart, daß $N = \Omega M$ wird. Aber Ω ist nach Satz 2 von Nr. 853 eine Funktion von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ allein. Also kommt nach (2):

$$(3) \qquad N\left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \\ = \Omega(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}) \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & f \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix},$$

und zwar gilt diese Formel für beliebige Funktionen f.

Zunächst könnte Ω nun aber auch eine bloße Konstante C sein. Dann kann man die letzte Gleichung so schreiben:

$$N\left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \begin{pmatrix} C\omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & f \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix},$$

und da $C\omega_1$ ebenso wie ω_1 selbst eine Lösung von (1) vorstellt, würde N in diesem Falle in der Tat der zweiten Definition des Multiplikators genügen. Dies gilt auch dann, wenn Ω keine Konstante ist, sondern etwa ω_1 wirklich enthält. Denn dann bilden wir eine Funktion:

$$\overline{\omega}_1 = \int \Omega(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1})\, d\omega_1,$$

die ebenfalls nur von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ abhängt und deshalb eine Lösung ist. Wegen:

$$\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial x_k} = \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \omega_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \omega_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \omega_{n-1}}\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_k}$$

und:

wird nun: $$\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \omega_1} = \Omega(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1})$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & f \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & f \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix},$$

so daß aus (3) folgt:

$$N\left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & f \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

Da $\bar{\omega}_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ Lösungen sind, genügt N mithin in der Tat der zweiten Definition des Multiplikators. Also gilt der

Satz 6: *Die Multiplikatoren M der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:*

$$\alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

d. h. diejenigen von Null verschiedenen Funktionen M, die der Bedingung:

$$\frac{\partial M\alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M\alpha_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial M\alpha_n}{\partial x_n} = 0$$

genügen, sind identisch mit denjenigen von Null verschiedenen Funktionen M, mit denen man die linke Seite der Differentialgleichung multiplizieren muß, um sie in die Funktionaldeterminante von $n-1$ Lösungen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ und von der als willkürlich betrachteten Funktion f zu verwandeln:

$$M\left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & f \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

Daß $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ voneinander unabhängig sein sollen, braucht nämlich nicht besonders betont zu werden, da die Annahme $M \neq 0$ dies schon verlangt.

862. Einführung neuer Veränderlicher. Es empfiehlt sich, die linke Seite einer vorgelegten homogenen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

(1) $$\alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

zur Abkürzung mit Af zu bezeichnen und *dies Symbol:*

(2) $$Af = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

auch dann zu benutzen, wenn f nicht gerade eine Lösung von (1), *sondern irgendeine Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bedeutet.* Danach ist, wenn man f durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ ersetzt:

$$Ax_1 = \alpha_1, \; Ax_2 = \alpha_2, \; \ldots \; Ax_n = \alpha_n.$$

Wir wollen nun neue Veränderliche $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$ vermöge eines Gleichungensystems:

$$\bar{x}_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{3}$$

einführen, das nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ auflösbar ist. Jede Lösung f von (1) geht dabei in eine Funktion von $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$ über, und wir fragen nach derjenigen Differentialgleichung in $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$, der alle diese Funktionen genügen. Infolge von (3) ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Multiplikation mit α_i und Summierung über i von 1 bis n zeigt, daß die aus (1) hervorgehende neue Differentialgleichung die Form hat:

$$A\varphi_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1} + A\varphi_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2} + \cdots + A\varphi_n \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_n} = 0. \tag{4}$$

Dabei hat man sich vorzustellen, daß auch in die Koeffizienten, nämlich in:

$$A\varphi_k = \alpha_1 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}$$
$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

die neuen Veränderlichen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$ vermöge (3) eingeführt worden seien. Man kann die neue homogene lineare partielle Differentialgleichung (4) in $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots . \bar{x}_n$ auch so schreiben:

$$A\bar{x}_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1} + A\bar{x}_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2} + \cdots + A\bar{x}_n \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_n} = 0. \tag{5}$$

Nun seien $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ voneinander unabhängige Lösungen von (1), und es bedeute M den nach dem letzten Satze durch:

$$M = \frac{\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & f \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}}{\alpha_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}} \tag{6}$$

definierten Multiplikator. Diese Formel (6) enthält f nur scheinbar, denn nach (7) in Nr. 860 sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ proportional denjenigen Koeffizienten, die den Ableitungen von f in der im Zähler stehenden Funktionaldeterminante zukommen.

Wenn man die neuen Veränderlichen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$ in diese Funktionaldeterminante einführt, werden $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ und f Funktionen von $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$, die ihrerseits nach (3) von $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängen. Nach Satz 5, Nr. 81, ist daher:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & f \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & f \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \ldots & \bar{x}_{n-1} & \bar{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}.$$

Der Nenner in (6) verwandelt sich in die linke Seite der Differentialgleichung (4) oder (5). Demnach folgt aus (6) durch Einführung der neuen Veränderlichen:

$$\frac{M}{\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & f \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \ldots & \bar{x}_{n-1} & \bar{x}_n \end{pmatrix}}{A\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1} + A\varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2} + \cdots + A\varphi_n \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_n}}.$$

Nun werden $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ nach Einführung der neuen Veränderlichen Lösungen der neuen Differentialgleichung (4), während f eine beliebige Funktion von $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$ bedeutet. Nach dem letzten Satze ist also die linke Seite der gewonnenen Gleichung ein Multiplikator der neuen Differentialgleichung (4). Da man $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ mit $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$ bezeichnen kann, ergibt sich somit der

Satz 7: Führt man in eine homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$Af = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

neue Veränderliche $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$ vermöge einer Substitution ein, so geht aus jedem Multiplikator M der Differentialgleichung durch Einführung der neuen Veränderlichen zwar nicht direkt ein Multiplikator der neuen Differentialgleichung:

$$A\bar{x}_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1} + A\bar{x}_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2} + \cdots + A\bar{x}_n \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_n} = 0$$

hervor, wohl aber wird der Bruch:

$$\frac{M}{\begin{pmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{pmatrix}}$$

ein Multiplikator der neuen Differentialgleichung.

863. Verwertung bekannter Lösungen. Von der Differentialgleichung:

$$(1)\qquad Af = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

mögen schon etwa m $(< n-1)$ voneinander unabhängige Lösungen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_m$ bekannt sein. Es ist keine sachliche Einschränkung, wenn wir voraussetzen, daß $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_m$ hinsichtlich $x_1, x_2, \dots x_m$ voneinander unabhängig seien. Alsdann führen wir vermöge der nach $x_1, x_2, \dots x_n$ auflösbaren Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \bar{x}_1 = \omega_1, & \bar{x}_2 = \omega_2, & \dots & \bar{x}_m = \omega_m, \\ \bar{x}_{m+1} = x_{m+1}, & \bar{x}_{m+2} = x_{m+2}, & \dots & \bar{x}_n = x_n \end{cases}$$

die neuen Veränderlichen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_n$ in (1) ein. Die hervorgehende Differentialgleichung lautet nach (4) in der letzten Nummer:

$$A\omega_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1} + A\omega_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2} + \dots + A\omega_m \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_m}$$

$$+ A x_{m+1} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_{m+1}} + A x_{m+2} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_{m+2}} + \dots + A x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_n} = 0,$$

Weil aber $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_m$ Lösungen von (1) sind, ist $A\omega_1 = 0$ $\dots A\omega_m = 0$. Ferner ist $A x_{m+1} = \alpha_{m+1}, \dots A x_n = \alpha_n$. Also kommt:

$$(3)\qquad \alpha_{m+1} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_{m+1}} + \alpha_{m+2} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_{m+2}} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_n} = 0.$$

Natürlich sind hierbei auch $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots \alpha_n$ in $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_n$ auszudrücken.

In dieser neuen homogenen linearen partiellen Differentialgleichung kommen die Ableitungen von f nach $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_m$ gar nicht vor. *Daher spielen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_m$ die Rolle von willkürlichen Konstanten,* und es liegt eine Differentialgleichung mit nur noch $n - m$ unabhängigen Veränderlichen $\bar{x}_{m+1}, \dots \bar{x}_n$ vor. Sie hat $n - m - 1$ Lösungen, die hinsichtlich gewisser

$n-m-1$ der $n-m$ Veränderlichen $\bar{x}_{m+1}, \ldots \bar{x}_n$ oder $x_{m+1}, \ldots x_n$ voneinander unabhängig sind. Zusammen mit den schon bekannten Lösungen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ von (1) machen sie ein System von gerade $n-1$ voneinander unabhängigen Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung (1) aus, wenn wieder überall $x_1, x_2, \ldots x_n$ eingeführt werden.

Das Bekanntsein von m voneinander unabhängigen Lösungen der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung (1) *mit n unabhängigen Veränderlichen gestattet also mittels Eliminationen und Substitutionen die Zurückführung auf eine ebensolche Gleichung mit nur noch $n-m$ unabhängigen Veränderlichen.*

864. Prinzip des letzten Multiplikators. Bei denselben Annahmen wie in der letzten Nummer sei überdies vorausgesetzt, daß ein Multiplikator M der vorgelegten Differentialgleichung bekannt sei. Da infolge der Gleichungen (2) der letzten Nummer:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \ldots & \bar{x}_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \ldots & \omega_m & x_{m+1} & \ldots & x_n \\ x_1 & \ldots & x_m & x_{m+1} & \ldots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_m \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{pmatrix}$$

wird, zeigt der Satz 7 von Nr. 862, daß:

$$\bar{M} = \frac{M}{\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_m \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{pmatrix}}$$

ein bekannter Multiplikator der neuen Differentialgleichung ist.

Wenn nun die Zahl $m = n-2$ ist, d. h. wenn man schon $n-2$ voneinander unabhängige Lösungen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-2}$ der vorgelegten Differentialgleichung kennt, und wenn außerdem ein Multiplikator M bekannt ist, lehrt die Methode der letzten Nummer, daß nach der Substitution der neuen Veränderlichen:

$$(1) \qquad \bar{x}_1 = \omega_1, \quad \ldots \quad \bar{x}_{n-2} = \omega_{n-2}, \quad \bar{x}_{n-1} = x_{n-1}, \quad \bar{x}_n = x_n$$

eine verkürzte lineare partielle Differentialgleichung:

$$(2) \qquad \alpha_{n-1}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_{n-1}} + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_n} = 0$$

hervorgeht, die den bekannten Multiplikator:

$$\bar{M} = \frac{M}{\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-2} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-2} \end{pmatrix}}$$

hat. Dies aber bedeutet (vgl. Nr. 859), daß die der Gleichung (2) äquivalente gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in $\bar{x}_{n-1}$ und $\bar{x}_n$:

$$\alpha_n d\bar{x}_{n-1} - \alpha_{n-1} d\bar{x}_n = 0 \tag{3}$$

den *Euler*schen Multiplikator $\overline{M}$ hat, d. h. daß:

$$\overline{M}\,(\alpha_n d\bar{x}_{n-1} - \alpha_{n-1} d\bar{x}_n)$$

das vollständige Differential eines Integrals ω_{n-1} von (3) oder also eine Lösung von (2) ist, *so daß dies letzte Integral* ω_{n-1} *durch Quadraturen gefunden werden kann.* Das vollständige Differential enthält auch $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_{n-2}$, aber diese Größen sind dabei als willkürliche Konstanten zu betrachten.

Hiernach gilt der

Satz 8: Sind $n-2$ voneinander unabhängige Lösungen der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

d. h. $n-2$ unabhängige Integrale des Systems von $n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dx_1}{\alpha_1(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \frac{dx_2}{\alpha_2(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{\alpha_n(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

bekannt und ist überdies auch ein Multiplikator M gefunden, so läßt sich die noch fehlende Lösung bzw. das noch fehlende Integral mittels Eliminationen, Substitutionen und Quadraturen bestimmen.

Dieser Satz ist der wesentliche Inhalt des von seinem Entdecker *Jacobi* als *Prinzip des letzten Multiplikators* bezeichneten Theorems.

Es soll an einem einfachen Beispiele erläutert werden, das man zwar auch leicht ohne Anwendung dieses Satzes erledigen kann, bei dem wir aber genau so wie in der entwickelten Theorie vorgehen wollen.

Beispiel: Liegt die Differentialgleichung:

$$Af = x(y-z)\frac{\partial f}{\partial x} + y(z-x)\frac{\partial f}{\partial y} + z(x-y)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

vor, so folgt, weil:

$$(y-z) + (z-x) + (x-y) = 0,$$
$$x(y-z) + y(z-x) + z(x-y) = 0$$

ist, erstens, daß die Bedingung für den Multiplikator, nämlich nach (3) in Nr. 859 die Gleichung:

$$\frac{\partial Mx(y-z)}{\partial x} + \frac{\partial My(z-x)}{\partial y} + \frac{\partial Mz(x-y)}{\partial z} = 0,$$

durch die Annahme $M = 1$ erfüllt wird, und zweitens, daß $x + y + z$ eine Lösung ω_1 von (4) ist. Mithin erfordert die Auffindung der noch fehlenden zweiten Lösung nur Eliminationen, Substitutionen und Quadraturen. Nach der Theorie wird:

(5) $$\bar{x} = x + y + z, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z$$

gesetzt. Dann ist $A\bar{x} = 0$, ferner:

$$A\bar{y} = Ay = y(z-x) = \bar{y}(-\bar{x} + \bar{y} + 2\bar{z}),$$
$$A\bar{z} = Az = z(x-y) = \bar{z}(\bar{x} - 2\bar{y} - \bar{z}),$$

so daß die neue Differentialgleichung nach Nr. 862 so lautet:

(6) $$\bar{y}(-\bar{x} + \bar{y} + 2\bar{z})\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} + \bar{z}(\bar{x} - 2\bar{y} - \bar{z})\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Nach (5) ist ferner die Funktionaldeterminante von $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ hinsichtlich x, y, z gleich Eins; daher geht aus dem Multiplikator $M = 1$ von (4) nach Satz 7, Nr. 862, der Multiplikator $\bar{M} = 1$ von (6) hervor, d. h. die linke Seite der mit (6) äquivalenten gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\bar{z}(\bar{x} - 2\bar{y} - \bar{z})d\bar{y} - \bar{y}(-\bar{x} + \bar{y} + 2\bar{z})d\bar{z} = 0$$

muß ein vollständiges Differential sein, *wenn $\bar{x}$ darin als Konstante betrachtet wird.* In der Tat ist sie das von $\bar{y}\bar{z}(\bar{x} - \bar{y} - \bar{z})$ woraus nach (5) die gesuchte zweite Lösung $\omega_2 = xyz$ von (4) hervorgeht. Die Lösungen von (4) sind somit die Funktionen von $x + y + z$ und xyz allein.

§ 3. Vollständige Systeme.

865. Unabhängigkeit homogener linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Wir wenden uns zu der Aufgabe, diejenigen Funktionen f von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu ermitteln, die zugleich Lösungen von *mehreren* homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(1) \qquad A_k f = \alpha_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{k2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_{kn} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots m)$$

sind. Hierbei sollen $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots \alpha_{kn}$ gegebene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sein, und die linken Seiten der m vorgelegten Gleichungen sollen zur Abkürzung mit $A_1 f, A_2 f, \ldots A_m f$ bezeichnet werden, und zwar für *jede* Funktion f.

Jede Gleichung von der Form:

$$(2) \qquad \lambda_1 A_1 f + \lambda_2 A_2 f + \cdots + \lambda_m A_m f = 0$$

besteht infolge von (1), wie auch $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ gewählt sein mögen. Derartige Gleichungen heißen von den Gleichungen (1) *abhängig.* Sie tragen nichts neues zur Ermittelung der gemeinsamen Lösungen der m Gleichungen (1) bei. Es kann sein, daß schon einige der Gleichungen (1), die alsdann überflüssig sind, von den übrigen abhängen. Dies erkennt man geradeso, wie in der Algebra die Abhängigkeit linearer homogener Gleichungen in n Unbekannten; an die Stelle der n Unbekannten treten hierbei die n partiellen Ableitungen von f nach $x_1, x_2, \ldots x_n$. Somit gilt der

Satz 9: Die m homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\alpha_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{k2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_{kn} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots m)$$

sind dann und nur dann voneinander unabhängig, wenn nicht alle m-reihigen in der Matrix

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}$$

enthaltenen Determinanten verschwinden.

Man kann auch so sagen:

Satz 10: Die m homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\alpha_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{k2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_{kn} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots m)$$

sind dann und nur dann voneinander unabhängig, wenn sie sich nach m partiellen Ableitungen von f auflösen lassen.

Liegt ein System von Gleichungen (1) vor, so wird man zuerst immer untersuchen, ob sie voneinander unabhängig sind, also die etwa unter ihnen vorhandenen von den übrigen abhängigen Gleichungen als überflüssig streichen. Es leuchtet ein, daß es höchstens n voneinander unabhängige Gleichungen $Af = 0$ geben kann.

866. Der Satz von Poisson. Hier schalten wir eine wichtige Bemerkung über diejenigen Funktionen f ein, die einem gegebenen Systeme von nur *zwei* Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} Af = \alpha_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ Bf = \beta_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \beta_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

genügen. Nach dem vorhergehenden ist jede Gleichung von der Form:

$$\lambda Af + \mu Bf = 0$$

eine Folge von (1), und sie besagt nichts neues. Aber es gibt noch ein anderes Mittel, aus den gegebenen Gleichungen (1) eine neue Gleichung zu gewinnen, die ebenfalls von ihren gemeinsamen Lösungen erfüllt wird und unter Umständen eine von den Gleichungen (1) unabhängige Gleichung sein kann.

Dies Mittel besteht in der Bildung des von *Poisson* eingeführten *Klammerausdrucks*, der durch die Formel definiert wird:

$$(2)\qquad (Af, Bf) = A(Bf) - B(Af),$$

eines Prozesses also, der in anderem Zusammenhange schon in Nr. 741 erwähnt wurde, worauf wir aber nicht zurückgreifen wollen. In (2) soll $A(Bf)$ derjenige Ausdruck sein, der aus Af hervorgeht, wenn darin f durch Bf ersetzt wird, und entsprechendes gilt von $B(Af)$. Berechnet man den Klammerausdruck, so findet man, daß sich alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f fortheben. Es verbleibt:

$$(3)\qquad (Af, Bf) =$$

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial \beta_1}{\partial x_n} - \beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} - \beta_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} - \cdots - \beta_n \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_n}\right) \frac{\partial f}{\partial x_1}$$
$$+ \left(\alpha_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial \beta_2}{\partial x_n} - \beta_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} - \cdots - \beta_n \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_n}\right) \frac{\partial f}{\partial x_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \left(\alpha_1 \frac{\partial \beta_n}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \beta_n}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial \beta_n}{\partial x_n} - \beta_1 \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_1} - \beta_2 \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_2} - \cdots - \beta_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n}\right) \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Die Ausrechnung gestaltet sich übrigens in jedem speziellen Falle einfacher, als es nach dieser allgemeinen Formel den Anschein hat. Denn da die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f fortfallen, kann man den Klammerausdruck (2) in der Weise bilden, daß man während der Ausrechnung die Ableitungen von f nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ wie Konstanten behandelt. In der Tat läßt sich ja die Formel (3) kürzer so schreiben:

$$(4) \quad (Af, Bf) = (A\beta_1 - B\alpha_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (A\beta_2 - B\alpha_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + (A\beta_n - B\alpha_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Der Klammerausdruck ist somit geradeso wie Af und Bf selbst eine homogene lineare ganze Funktion der partiellen Ableitungen erster Ordnung von f mit gewissen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängigen Koeffizienten. Stellt nun f insbesondere eine gemeinsame Lösung der beiden vorgelegten Gleichungen (1) dar, so verschwinden Af und Bf für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$, und (2) zeigt alsdann, daß dasselbe von dem Klammerausdrucke (Af, Bf) gilt.

Dies aber liefert den wichtigen Satz von *Poisson:*

Satz 11: Jede gemeinsame Lösung f der beiden homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$Af = \alpha_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$
$$Bf = \beta_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \beta_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

worin die α und β Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, befriedigt auch die durch Klammerbildung hervorgehende Gleichung:

$$(Af, Bf) = 0,$$

nämlich die homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(A\beta_1 - B\alpha_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (A\beta_2 - B\alpha_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + (A\beta_n - B\alpha_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Beispiel: In vier Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 seien die beiden Gleichungen gegeben:

$$(5) \quad \begin{cases} Af = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + x_1\dfrac{\partial f}{\partial x_3} + x_1\dfrac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \\ Bf = x_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

Hier liefert (4):

$$(Af, Bf) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4}.$$

Jede Funktion f, die den beiden Gleichungen (5) genügt, erfüllt somit auch die Gleichung:

$$Cf = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0.$$

Man kann $Af = 0$ und $Cf = 0$ durch:

$$\tfrac{1}{2}(Af + Cf) = 0 \text{ und } \tfrac{1}{2}(Af - Cf) = 0$$

ersetzen; dann liegen die drei Gleichungen vor:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0.$$

Nach den beiden ersten müssen $\partial f : \partial x_1$ und $\partial f : \partial x_2$ verschwinden. Also ist f von x_1 und x_2 frei. Demnach handelt es sich nur noch um die Bestimmung derjenigen Funktionen f von x_3 und x_4 allein, die der dritten Gleichung genügen, d. h. der Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\frac{dx_3}{1} = \frac{dx_4}{1},$$

die Funktionen von $x_3 - x_4$ allein sind. Jede Funktion also, die den beiden vorgelegten Gleichungen (5) genügt, ist eine Funktion von $x_3 - x_4$ allein, und umgekehrt erfüllt jede Funktion von $x_3 - x_4$ allein die Gleichungen (5).

867. Bildung und Begriff der vollständigen Systeme. Nach den letzten Bemerkungen in Nr. 865 nehmen wir nun an, daß $m\,(< n)$ *voneinander unabhängige* homogene lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung vorliegen:

$$(1) \quad A_k f = \alpha_{k1}(x_1, x_2, \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_{kn}(x_1, x_2, \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots m).$$

Nach dem letzten Satz sind ihre gemeinsamen Lösungen f zugleich Lösungen der homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(2) \qquad (A_k f, A_l f) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots m;\ l = 1, 2, \ldots m).$$

Unter ihnen können solche vorhanden sein, deren linke Seiten selbst gleich Null sind, oder auch solche, die von den m Gleichungen (1) abhängig sind. Derartige Gleichungen lassen wir als überflüssig beiseite. Es können aber auch Gleichungen (2) hervorgehen, die nicht von den ursprünglich gegebenen Gleichungen (1) abhängen, und *diese Gleichungen fügen wir zu dem vorgelegten Systeme* (1) *hinzu.* Es besteht alsdann aus mehr als m Gleichungen, und es handelt sich wieder um die Ermittelung ihrer gemeinsamen Lösungen.

Das neue System kann man nun gerade so behandeln, wie wir das vorgelegte System (1) behandelt haben, d. h. man kann wieder die Klammerausdrücke gleich Null setzen und zusehen, ob sich auf diese Weise neue, nämlich von den bisherigen Gleichungen unabhängige Gleichungen ergeben, usw. Da höchstens n Gleichungen voneinander unabhängig sein können, muß dies Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu Ende kommen.

Somit gelangt man von einem vorgelegten Systeme (1) schließlich zu einem Systeme von $r\,(\leqq n)$ voneinander unabhängigen homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen, aus dem durch Klammerbildung *keine* von den Gleichungen des Systems unabhängigen Gleichungen hervorgehen. Ein solches System heißt ein *vollständiges.* Hiernach gilt der

Satz 12: Liegt in n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein System von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für eine Funktion f vor, so sind die Lösungen f dieses Systems identisch mit den Lösungen eines gewissen vollständigen Systems:

$$A_k f = \alpha_{k1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{k2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_{kn}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots r),$$

d. h. eines Systems, das so beschaffen ist, daß alle $r\,(\leqq n)$ Gleichungen des Systems voneinander unabhängig, dagegen alle durch Klammerbildung zu gewinnenden Gleichungen:

$$(A_k f,\ A_l f) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots r;\ l = 1, 2, \ldots r)$$

von den Gleichungen des Systems abhängig sind. Die Aufstellung dieses vollständigen Systems erfordert nur eine begrenzte Anzahl von Differentiationen.

Nach Nr. 865 haben die Klammerausdrücke bei diesem vollständigen System deshalb, weil sie nur abhängige Gleichungen liefern, die Form:

(3) $(A_k f,\, A_l f) = \lambda_{kl1} A_1 f + \lambda_{kl2} A_2 f + \cdots + \lambda_{klr} A_r f,$

wobei die λ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bedeuten. Ein vollständiges System:

$$A_1 f = 0, \quad A_2 f = 0, \quad \ldots \quad A_r f = 0$$

besteht mithin aus r unabhängigen Gleichungen von der Art, daß sich die Klammerausdrücke ihrer linken Seiten linear und homogen mit von $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängigen Koeffizienten durch die linken Seiten selbst ausdrücken. Man nennt das System *r-gliedrig.*

Beispiel: Es mögen die beiden voneinander unabhängigen Differentialgleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} Af = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ Bf = x_1^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_2^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

vorliegen. Hier ist:

$$(Af, Bf) = 2\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Nullsetzen dieses Ausdrucks liefert eine von den Gleichungen (4) unabhängige Gleichung:

$$(5)\qquad Cf = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Demnach sind die Lösungen f des Systems (4) die gemeinsamen Lösungen der drei Gleichungen (4) und (5). Wir bilden nun:

$$(Af, Cf) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$(Bf, Cf) = x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_n}, \\ -2\left(x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Hiernach ist:

$$(Af,\, Cf) = Cf, \qquad (Bf,\, Cf) = -Bf.$$

Nullsetzen der Klammerausdrücke gibt daher keine von den drei Gleichungen (4) und (5) unabhängige Gleichung. Demnach bilden die Gleichungen (4) und (5) ein *dreigliedriges vollständiges System.* Wir kommen in Nr. 870 auf dies Beispiel zurück.

868. Involutionssysteme. Ein r-gliedriges vollständiges System in n Veränderlichen:

(1) $$A_1 f = 0, \quad A_2 f = 0, \ldots A_r f = 0,$$

bei dem also nach (3) in voriger Nummer für die Klammerausdrücke Gleichungen von der Form:

(2) $$(A_k f, A_l f) = \lambda_{kl1} A_1 f + \lambda_{kl2} A_2 f + \cdots + \lambda_{klr} A_r f$$
$$(k = 1, 2, \ldots r;\ l = 1, 2, \ldots r)$$

gelten, wobei die λ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, läßt sich in unbegrenzt vielen anderen Formen schreiben. Denn wenn man r^2 Funktionen μ so wählt, daß ihre Determinante:

(3) $$\begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1r} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mu_{r1} & \mu_{r2} & \cdots & \mu_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist, besagen die r Gleichungen:

(4) $$B_k f = \mu_{k1} A_1 f + \mu_{k2} A_2 f + \cdots + \mu_{kr} A_r f = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots r)$$

dasselbe wie die r Gleichungen (1), und sie sind wieder lauter homogene lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Nun liegt die Vermutung nahe, daß die Gleichungen auch in der neuen Form (4) ein vollständiges System bilden, d. h. daß alle Klammerausdrücke $(B_k f, B_l f)$ infolge von (4) verschwinden. Dies ist so zu beweisen:

Da ein Klammerausdruck nach seiner in Nr. 866 gegebenen Definition die Eigenschaft hat, daß stets:

$$(Af + Bf, Cf + Df) = (Af, Cf) + (Bf, Cf) + (Af, Df) + (Bf, Df)$$

und, falls λ und μ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, auch stets:

$$(\lambda Af, \mu Bf) = \lambda\mu(Af, Bf) + \lambda A\mu \cdot Bf - \mu B\lambda \cdot Af$$

wird, so ergibt sich, wenn man aus zweien der Summen Bf in (4) den Klammerausdruck herstellt, eine Summe, in der als Summanden die r Größen $A_1 f, \ldots A_r f$ und ihre Klammerausdrücke auftreten, multipliziert mit Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ (d. h. mit von f *freien* Funktionen). Setzt man darin die

Werte (2) ein, so wird $(B_k f,\ B_l f)$ eine Summe der r mit Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ multiplizierten Größen $A_1 f, A_2 f, \ldots A_r f$, die sich ihrerseits wegen (3) nach (4) linear durch $B_1 f, B_2 f, \ldots B_r f$ ausdrücken lassen. Schließlich zeigt sich also, daß sich $(B_k f, B_l f)$ als eine homogene ganze lineare Funktion von $B_1 f,\ B_2 f, \ldots B_r f$ mit von $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängigen Koeffizienten darstellt, d. h. daß jede Gleichung $(B_k f, B_l f) = 0$ von den r Gleichungen (4) abhängig ist.

In welcher Form (4) man also auch das System (1) schreiben mag, stets behält es die für ein r-gliedriges vollständiges System charakteristische Eigenschaft.

Insbesondere sagt man, daß die Gleichungen des Systems (4) in *Involution* sind oder daß das System (4) ein *Involutionssystem* ist, wenn alle Klammerausdrücke $(B_k f,\ B_l f)$ für beliebige Funktionen f identisch verschwinden. Nach einem Satze von *Clebsch* läßt sich das System (1) stets in ein Involutionssystem verwandeln. Dies kann man sehr einfach so beweisen:

Infolge des Satzes 10 von Nr. 865 sind die vorgelegten r Gleichungen (1) nach gewissen r der n partiellen Ableitungen von f auflösbar, etwa nach denjenigen hinsichtlich $x_1,\ x_2, \ldots x_r$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \beta_{k,\,r+1}\frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} + \beta_{k,\,r+2}\frac{\partial f}{\partial x_{r+2}} + \cdots + \beta_{k,\,n}\frac{\partial f}{\partial x_n}(k=1,2\ldots r),$$

wobei die β Funktionen von $x_1,\ x_2,\ \ldots x_n$ sind. Dann aber ist das System (1) auf die neue Form:

$$B_k f = \frac{\partial f}{\partial x_k} - \beta_{k,r+1}\frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} - \beta_{k,r+2}\frac{\partial f}{\partial x_{r+2}} - \cdots - \beta_{k,n}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0\ (k=1,2,\ldots r)$$

gebracht, in der es nach wie vor ein vollständiges ist, so daß jeder Klammerausdruck $(B_k f,\ B_l f)$ linear aus $B_1 f,\ B_2 f, \ldots B_r f$ zusammensetzbar sein muß. Wegen der besonderen Gestalt der $B_k f$ erhellt jedoch, daß $(B_k f,\ B_l f)$ von den Ableitungen von f hinsichtlich $x_1,\ x_2, \ldots x_r$ frei wird, während in jedem $B_k f$ eine von ihnen mit dem Faktor Eins auftritt. Demnach muß notwendig $(B_k f,\ B_l f)$ verschwinden. Somit gilt der Satz von *Clebsch*:

Satz 13: Jedes r-gliedrige vollständige System:

$$A_1 f = 0,\ A_2 f = 0, \ldots A_r f = 0$$

läßt sich in ein Involutionssystem:

$$B_1 f = 0, \; B_2 f = 0, \ldots B_r f = 0$$

verwandeln, d. h. in ein System, bei dem alle Klammerausdrücke $(B_k f, B_l f)$ *identisch verschwinden. Dies kann z. B. dadurch erreicht werden, daß man das System nach r partiellen Ableitungen von f auflöst und dann alle Glieder der hervorgehenden Gleichungen auf eine Seite bringt.*

Die Gesamtheit der bisherigen Betrachtungen gibt schließlich den

Satz 14: Die Aufgabe, die gemeinsamen Lösungen mehrerer homogener linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zu bestimmen, läßt sich stets mittels Differentiationen auf die Aufgabe zurückführen, ein gewisses Involutionssystem zu integrieren.

869. Integration eines Involutionssystems. Demnach liege jetzt die Aufgabe vor, ein r-gliedriges Involutionssystem:

$$(1) \qquad A_1 f = 0, \quad A_2 f = 0, \quad \ldots \quad A_r f = 0$$

in n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu integrieren. Wenn man im stande ist, eine Gleichung des Systems für sich vollständig zu integrieren, läßt sich die Aufgabe, wie wir zeigen wollen, auf die der Integration eines nur noch $(r-1)$-gliedrigen Involutionssystems in nur noch $n-1$ unabhängigen Veränderlichen zurückführen.

Es werde also angenommen, die Gleichung $A_r f = 0$ habe die $n-1$ voneinander unabhängigen Lösungen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$. Da ein Involutionssystem vorliegt, ist jeder Klammerausdruck gleich Null, also insbesondere:

$$(A_r f, A_k f) = A_r(A_k f) - A_k(A_r f) = 0,$$

und weil $A_r \omega_j = 0$ wird, folgt hieraus für $f = \omega_j$, daß $A_r(A_k \omega_j)$ verschwindet, so daß $A_k \omega_j$ ebenfalls eine Lösung von $A_r f = 0$ sein muß. Alle $A_k \omega_j$ (für $k = 1, 2, \ldots r-1$; $j = 1, 2, \ldots n-1$) sind daher Funktionen von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ allein. Von diesem Umstande machen wir nachher Gebrauch.

Der größeren Bequemlichkeit der Ausdrucksweise halber darf angenommen werden, daß $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ gerade in bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ von einander unabhängig sind. Vermöge der Gleichungen:

$$y_1 = \omega_1, \quad y_2 = \omega_2, \quad \ldots \quad y_{n-1} = \omega_{n-1}$$

kann man nun an Stelle von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ die neuen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ einführen, indem man als n^{te} Veränderliche x_n beibehält. Nach Nr. 862 nimmt das System (1) dabei die Form an:

$$A_k f = A_k\omega_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + A_k\omega_{n-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} + A_k x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots r).$$

Die r^{te} Gleichung wird besonders einfach, denn $A_r\omega_1, \ldots A_r\omega_{n-1}$ sind sämtlich gleich Null, während $A_r x_n \neq 0$ ist, weil x_n keine Lösung von $A_r f = 0$ vorstellt. Wenn man die Funktion $A_r x_n$, geschrieben in $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ und x_n, mit γ_r bezeichnet, lautet mithin die letzte Gleichung so:

$$(2) \qquad A_r f = \gamma_r(y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

In den $r-1$ ersten Gleichungen sind die Koeffizienten von $\partial f : \partial y_1, \ldots \partial f : \partial y_{n-1}$ nach der vorausgeschickten Bemerkung Funktionen von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ oder also von $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ allein. Haben also die Gleichungen jetzt die Form:

$$(3) \quad A_k f = \beta_{k1}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \beta_{k2}\frac{\partial f}{\partial y_2} + \cdots + \beta_{k,n-1}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} + \gamma_k\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots n-1),$$

so sind $\beta_{k1}, \beta_{k2}, \ldots \beta_{k,n-1}$ Funktionen von $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ allein, während γ_k außerdem noch von x_n abhängen kann. Nach (2) müssen alle Lösungen des Systems (1), geschrieben in $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ und x_n, frei von x_n sein. Deshalb sind sie nach (3) identisch mit denjenigen Funktionen von $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ allein, die den $r-1$ Gleichungen:

$$(4) \qquad B_k f = \beta_{k1}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \beta_{k2}\frac{\partial f}{\partial y_2} + \cdots + \beta_{k,n-1}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots r-1)$$

in den $n-1$ unabhängigen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ Genüge leisten. In diesen Gleichungen tritt x_n gar nicht mehr auf.

Nun ist nur noch zu beweisen, daß die $r-1$ Gleichungen (4) ein $(r-1)$-gliedriges Involutionssystem bilden. Wären sie voneinander abhängig, so bestände wenigstens eine Gleichung von der Form:

$$\lambda_1(y_1, y_2, \dots y_{n-1}) B_1 f + \dots + \lambda_{r-1}(y_1, y_2, \dots y_{n-1}) B_{r-1} f = 0$$

für alle Funktionen f, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{r-1}$ nicht sämtlich verschwinden. Nun ist aber nach (4), (3) und (2):

$$B_k f = A_k f - \frac{\gamma_k}{\gamma_r} A_r f,$$

so daß käme:

$$\lambda_1 A_1 f + \dots + \lambda_{r-1} A_{r-1} f - \frac{\lambda_1 \gamma_1 + \dots + \lambda_{r-1}\gamma_{r-1}}{\gamma_r} A_r f = 0,$$

was unmöglich ist, weil die r vorgelegten Gleichungen (1) voneinander unabhängig sind. Ferner zeigt die Art, wie man in die Gleichungen des Systems (1) nach Nr. 862 die neuen Veränderlichen einzuführen hat, daß die Klammerausdrücke nicht nur bei der alten Schreibweise (1) des Involutionssystems, sondern auch bei der neuen Schreibweise (2), (3) dieses Systems identisch verschwinden. Nach (3) und (4) ist aber:

$$A_k f = B_k f + \gamma_k \frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad A_l f = B_l f + \gamma_l \frac{\partial f}{\partial x_n}$$
$$(k = 1, 2, \dots r-1; \; l = 1, 2, \dots r-1),$$

und da die Veränderliche x_n in $B_k f$ und $B_l f$ gar nicht auftritt, folgt hieraus:

$$(A_k f, A_l f) = (B_k f, B_l f) + \left(B_k \gamma_l - B_l \gamma_k + \gamma_k \frac{\partial \gamma_l}{\partial x_n} - \gamma_l \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_n}\right) \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Hierbei stellt $(B_k f, B_l f)$ die Gesamtheit derjenigen Glieder dar, die Ableitungen von f nach $y_1, y_2, \dots y_{n-1}$ allein enthalten. Daher wird insbesondere:

$$(B_k f, B_l f) = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots r-1; l = 1, 2, \dots r-1).$$

Die Gleichungen (4) bilden also in der Tat ein $(r-1)$-gliedriges Involutionssystem. Hiernach gilt der

Satz 15: Liegt ein r-gliedriges Involutionssystem:

$$A_1 f = 0, \quad A_2 f = 0, \dots A_r f = 0$$

in n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ *vor, und kennt man* $n-1$ *voneinander unabhängige Lösungen* $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{n-1}$ *einer Gleichung des Systems, etwa der Gleichung* $A_r f = 0$, *so sind die Lösungen des Systems identisch mit den Lösungen desjenigen* $(r-1)$*-gliedrigen Involutionssystems in* $n-1$ *unab-*

hängigen Veränderlichen $y_1, y_2, \dots y_{n-1}$, *das sich ergibt, wenn man in den* $r-1$ *Gleichungen:*

$$A_k\omega_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_1} + A_k\omega_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_2} + \cdots + A_k\omega_{n-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} = 0$$
$$(k = 1, 2, \dots r-1),$$

deren Koeffizienten Funktionen von $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{n-1}$ *allein werden, die neuen Veränderlichen:*

$$y_1 = \omega_1, \quad y_2 = \omega_2, \dots y_{n-1} = \omega_{n-1}$$

einführt.

Das neue, $(r-1)$-gliedrige Involutionssystem kann genau in derselben Weise weiter vereinfacht werden, sobald man eine seiner Gleichungen vollständig zu integrieren vermag, usw. Schließlich gelangt man so zu einem eingliedrigen Systeme in nur noch $n-r+1$ unabhängigen Veränderlichen, also zu einer einzigen homogenen linearen Differentialgleichung, die gerade $n-r$ voneinander unabhängige Lösungen hat, Demnach folgt, weil jedes vollständige System nach Satz 13. Nr. 868, als Involutionssystem dargestellt werden kann:

Satz 16: Ein r-gliedriges vollständiges System in n unabhängigen Veränderlichen hat gerade $n-r$ *voneinander unabhängige Lösungen. Jede andere Lösung ist eine Funktion von diesen, und jede Funktion von Lösungen ist wieder eine Lösung.*

870. Beispiele. Im Falle $n=2$ sind für r die drei Werte $r = 1, 2, 3$ möglich. Zu $r=1$ gehört eine einzelne homogene lineare partielle Differentialgleichung. Ist $r=3$, so hat das vollständige System nur die trivialen Lösungen $f = \text{konst.}$ Daher interessieren uns hier nur die *zwei*gliedrigen vollständigen Systeme. Die drei Veränderlichen seien mit x, y, z bezeichnet und als rechtwinklige Koordinaten im Raume gedeutet. Alsdann hat ein zweigliedriges System nach dem letzten Satze nur eine unabhängige Lösung $\omega(x, y, z)$, indem jede andere eine Funktion von ω ist. Die durch $\omega = \text{konst.}$ dargestellten Flächen, die sogenannten *Integralflächen*, bilden eine einfach unendliche Schar, die sich geometrisch wie folgt definieren läßt. Sind:

$$(1) \qquad \alpha_1\frac{\partial f}{\partial x} + \beta_1\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_1\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \alpha_2\frac{\partial f}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_2\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

die beiden Gleichungen des vollständigen Systems, so ordnet jede irgend einem Punkte M oder (x, y, z) nach Nr. 856 je ein Linienelement l_1 und l_2 zu, indem die Richtungskosinus der beiden Elemente proportional zu α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 sind. *Die durch M gehende Integralfläche $\omega = konst.$ muß beide Linienelemente enthalten.*

Sind dx, dy, dz die Differentiale der Koordinaten auf einer Integralfläche, so muß daher:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(2)\quad (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)dx + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)dy + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)dz = 0$$

sein. *Die Integralflächen des vollständigen Systems* (1) *sind demnach identisch mit den Integralflächen dieser totalen Differentialgleichung.* Auf solche totale Differentialgleichungen kommen wir im nächsten Paragraphen zurück. Man kann auch sagen, *daß die Normalen der Integralflächen Richtungskosinus haben, die den drei in* (2) *auftretenden Determinanten proportional sind.*

1. Beispiel: Die beiden Gleichungen:

$$Af = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad Bf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

bilden ein Involutionssystem, da $(Af, Bf) = 0$ wird. Die zweite Gleichung ist nach Satz 1, Nr. 853, dem Systeme:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

mit den beiden Lösungen $x : z$ und $y : z$ äquivalent. Nach der Methode der vorigen Nummer führt man daher

$$\bar{x} = \frac{x}{z}, \quad \bar{y} = \frac{y}{z}$$

ein und bildet:

$$A\bar{x} = A\left(\frac{x}{z}\right) = -\frac{y}{z} - z\frac{x}{z^2} = -\bar{x} - \bar{y},$$

$$A\bar{y} = A\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{x}{z} - z\frac{y}{z^2} = \bar{x} - \bar{y},$$

so daß noch die Gleichung:

$$(\bar{x} + \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - (\bar{x} - \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = 0$$

in $\bar{x}$ und $\bar{y}$ allein integriert werden muß. Sie ist der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{d\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}} + \frac{d\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}} = 0$$

äquivalent, die als homogene Gleichung nach Nr. 715 das Integral

$$\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} + \ln \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

hat. Die Integralflächen werden also durch:

$$z = \text{konst.} \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}$$

dargestellt. Sie sind diejenigen Flächen, die an jeder Stelle (x, y, z) nach (2) eine Normale haben, deren Richtungskosinus den Größen $z(x-y)$, $z(x+y)$ und $-(x^2+y^2)$ proportional sind.

2. Beispiel: In n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ mögen die beiden Gleichungen:

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$$Bf = x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

vorliegen. Nach dem Beispiele in Nr. 867 ergänzen wir sie durch:

$$Cf = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

zu einem dreigliedrigen vollständigen Systeme, das nach Satz 16 gerade $n-3$ voneinander unabhängige Lösungen hat. Man könnte die Integrationsmethode der vorigen Nummer anwenden, müßte jedoch zu diesem Zwecke das System erst auf Grund des Satzes 13 von Nr. 868 in ein Involutionssystem verwandeln. Da aber dabei die Symmetrie verloren geht, ziehen wir das folgende direkte Integrationsverfahren vor. Die Gleichung $Af = 0$ hat die $n-1$ voneinander unabhängigen Lösungen:

$$y_1 = x_1 - x_n, \quad y_2 = x_2 - x_n, \ldots y_{n-1} = x_{n-1} - x_n.$$

Die gesuchten Lösungen des Systems müssen Funktionen von $y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$ allein sein. Für eine Funktion f von $y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$ allein ist aber:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots n-1),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = -\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y_2} - \cdots - \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}},$$

so daß $Cf = 0$ für sie die Form:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \cdots + y_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} = 0$$

bekommt. Diese Gleichung aber hat die $n-2$ voneinander unabhängigen Lösungen:

$$z_k = \frac{y_k}{y_{n-1}} = \frac{x_k - x_n}{x_{n-1} - x_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots n-2).$$

Die gesuchten Lösungen sind somit Funktionen von $z_1, z_2, \ldots z_{n-2}$ allein. Aber für jede Funktion f von $z_1, z_2, \ldots z_{n-2}$ allein nimmt die noch zu befriedigende Gleichung $Bf = 0$ nach Streichen des überall auftretenden Faktors y_{n-1} die Form an:

$$z_1(z_1 - 1)\frac{\partial f}{\partial z_1} + z_2(z_2 - 1)\frac{\partial f}{\partial z_2} + \cdots + z_{n-2}(z_{n-2} - 1)\frac{\partial f}{\partial z_{n-2}} = 0,$$

und diese Gleichung hat die $n-3$ voneinander unabhängigen Lösungen:

$$\frac{z_l - 1}{z_l} : \frac{z_{n-2} - 1}{z_{n-2}} \quad \text{oder} \quad \frac{x_l - x_{n-1}}{x_l - x_n} : \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{x_{n-2} - x_n} \ (l = 1, 2, \ldots n-3),$$

d. h. die $n-3$ Doppelverhältnisse $(x_{n-1} x_n x_l x_{n-2})$, vgl. Nr. 748. Da sich alle Doppelverhältnisse von je vieren der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch diese $n-3$ ausdrücken lassen, sind die gesuchten Lösungen identisch mit den *Funktionen der Doppelverhältnisse von je vieren aller Veränderlicher* $x_1, x_2, \ldots x_n$.

§ 4. Pfaffsche Gleichungen.

871. Geometrische Deutung einer Pfaffschen Gleichung in drei Veränderlichen. In engem Zusammenhange mit den homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen stehen diejenigen *totalen* Differentialgleichungen (vgl. Nr. 671), die man auf eine Form bringen kann, in der sie linear und homogen in den Differentialen der Veränderlichen sind, also die Gleichungen von der allgemeinen Form:

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \cdots + X_n\, dx_n = 0,$$

wo $X_1, X_2, \ldots X_n$ gegebene Funktionen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ bedeuten. Solche Gleichungen heißen *Pfaffsche Gleichungen*.

Wir beschränken uns auf den Fall von nur *drei* Veränderlichen, die mit x, y, z bezeichnet seien, also auf die Betrachtung einer Pfaffschen Gleichung von der Form:

(1) $X(x, y, z)\, dx + Y(x, y, z)\, dy + Z(x, y, z)\, dz = 0.$

Nach Nr. 671 wird hier die Aufgabe gestellt, alle diejenigen Gleichungen zwischen den drei Veränderlichen x, y, z zu ermitteln, infolge deren zwischen den Veränderlichen und ihren Differentialen die Gleichung (1) besteht. Es kommen nur zwei Fälle in Betracht: Entweder bestehen zwischen x, y, z *zwei* voneinander unabhängige Gleichungen, oder es ist nur *eine* Gleichung zwischen ihnen vorhanden, denn der dritte Fall, wo x, y, z alle drei bestimmte Werte haben, ist trivial. Deutet man x, y, z als rechtwinklige Koordinaten im Raume, so heißt dies: Entweder sucht man *Integralkurven* oder *Integralflächen* der totalen Differentialgleichung (1). Es fragt sich nun, ob es solche gibt. In beiden Fällen wären dx, dy, dz proportional den Richtungskosinus einer Tangente der Kurve bzw. Fläche. Aber alle diejenigen von einem Punkte M oder (x, y, z) ausgehenden Richtungen, deren Richtungskosinus proportional dx, dy, dz sind, liegen unter der Bedingung (1) in der Ebene durch M:

(2) $X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = 0$

mit den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. Mithin folgt:

Vermöge der Differentialgleichung (1) wird jedem Punkte M oder (x, y, z) eine durch ihn gehende Ebene und daher ein *Flächenelement* (vgl. Nr. 856) zugeordnet. Es ist alsdann die Aufgabe gestellt, *alle Kurven oder Flächen zu finden, die in jedem ihrer Punkte M das zugeordnete Flächenelement berühren.*

Daß es solche *Kurven* in unbegrenzter Anzahl gibt, ist leicht einzusehen. Denn längs einer Kurve kann man etwa y und z als Funktionen von x betrachten. Wählt man nun eine Gleichung $y = \varphi(x)$ beliebig, so gibt (1):

$$[X(x, \varphi, z) + Y(x, \varphi, z)\, \varphi']\, dx + Z(x, \varphi, z)\, dz = 0,$$

und dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion z von x. Hat sie die allgemeine Lösung $z = \psi(x, C)$, die eine willkürliche Konstante C enthält und außerdem natürlich durchaus davon abhängt, welche Funktion man als Funktion $\varphi(x)$ angenommen hat, so geben die Gleichungen $y = \varphi(x)$ und $z = \psi(x, C)$ eine Schar von Integralkurven an. Diese Schar ist wegen der beliebigen Wahl von $\varphi(x)$ noch in sehr hohem Maße willkürlich.

In der nächsten Nummer beantworten wir die nicht ebenso einfache Frage, unter welchen Umständen die Differentialgleichung (1) Integral*flächen* hat.

872. Integrabilitätsbedingung. Soll die Pfaffsche Gleichung:

(1) $$X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz = 0$$

infolge einer einzigen etwa nach z auflösbaren Gleichung zwischen x, y und z bestehen, so muß für die gesuchte Funktion z von x und y:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = 0$$

sein und zwar für alle Werte von dx und dy, d. h. es muß einzeln:

$$X + Z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad Y + Z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

sein. Dies sind zwei lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktion z von x und y. Nach Nr. 854 können sie *singuläre* Lösungen z gemein haben, nämlich wenn es Funktionen z von x und y gibt, für die X, Y und Z verschwinden. Solche Lösungen können also nur vereinzelt vorkommen. Wir fragen aber, ob es eine Lösung geben kann, für die X, Y und Z nicht sämtlich verschwinden. Solche Lösungen würden implizite durch eine Gleichung $f(x,y,z) = $ konst. definiert sein, wenn f den beiden homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen:

(2) $$Af = Z\frac{\partial f}{\partial x} - X\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad Bf = Z\frac{\partial f}{\partial y} - Y\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Genüge leistete, nach Satz 3, Nr. 854. Nach Satz 16, Nr. 869, gibt es solche Funktionen f nur dann, wenn $Af = 0$ und $Bf = 0$ ein zweigliedriges vollständiges System bilden, d. h. wenn $(Af, Bf) = 0$ infolge von $Af = 0$ und $Bf = 0$ besteht. Durch Nullsetzen des Klammerausdruckes ergibt sich aber:

$$(-ZZ_y + YZ_z)\frac{\partial f}{\partial x} + (ZZ_x - XZ_z)\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$+ (-ZY_x + XY_z + ZX_y - YX_z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

und diese Gleichung besteht infolge von (2) nur dann für beliebige Funktionen f, wenn die Determinante der Koeffizienten der Ableitungen von f in allen drei Gleichungen verschwindet. Daraus folgt die Bedingung:

$$(3) \qquad X(Y_z - Z_y) + Y(Z_x - X_z) + Z(X_y - Y_x) = 0.$$

Da sie in X, Y, Z symmetrisch ist, war die besondere Annahme, daß die gesuchte Gleichung nach z auflösbar sei, nicht nötig. Mithin ergibt sich der

Satz 17: Die Pfaffsche Gleichung:

$$X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz = 0$$

wird dann und nur dann durch eine einzige Gleichung in x, y, z befriedigt, infolge deren X, Y, Z nicht alle drei verschwinden, wenn die drei Funktionen X, Y, Z für alle Werte von x, y, z der Bedingung:

$$X(Y_z - Z_y) + Y(Z_x - X_z) + Z(X_y - Y_x) = 0$$

Genüge leisten. Alsdann bilden die Gleichungen:

$$Z\frac{\partial f}{\partial x} - X\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad Z\frac{\partial f}{\partial y} - Y\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ein zweigliedriges vollständiges System, und wenn $f(x, y, z)$ eine Lösung des Systems vorstellt, besteht die Pfaffsche Gleichung infolge von:

$$f(x, y, z) = \text{konst.}$$

Man kann auch so sagen:

Satz 18. Eine einfach unendliche Flächenschar:

$$f(x, y, z) = \text{konst.},$$

bei der an jeder Stelle (x, y, z) vorgeschrieben wird, daß die Normale Richtungskosinus proportional drei Funktionen X, Y, Z von x, y, z habe, gibt es dann und nur dann, wenn X, Y, Z der Bedingung:

$$X(Y_z - Z_y) + Y(Z_x - X_z) + Z(X_y - Y_x) = 0$$

Genüge leisten.

In Nr. 870 lag in der Gleichung (2) eine Pfaffsche Gleichung vor, bei der die Bedingung des Satzes erfüllt ist.

Diese Bedingung (3) heißt die *Integrabilitätsbedingung* der Pfaffschen Gleichung (1) und die Funktion f ein *Integral*. Jede Funktion von f allein ist ebenfalls ein Integral, und sonst gibt es keines. Man nennt die Pfaffsche Gleichung (1) *integrabel*, wenn die Bedingung (3) besteht; dies ist jedoch eine etwas irreführende Bezeichnung.

Den Satz 17 kann man noch anders ausdrücken: Ist die Integrabilitätsbedingung (3) erfüllt und f ein Integral, so besteht die Gleichung (1) infolge von $df = 0$ allein, d. h. es gibt einen Faktor M derart, daß identisch:

$$M(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = df$$

wird. Dieser Faktor M, der im allgemeinen von x, y und z abhängt, heißt ein *Multiplikator* der Pfaffschen Gleichung (1). Daher gilt der

Satz 19: Der Differentialausdruck:

$$X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz$$

hat dann und nur dann einen Multiplikator M derart, daß der Ausdruck nach Multiplikation mit M ein vollständiges Differential $df(x, y, z)$ wird, wenn X, Y, Z die Bedingung:

$$X(Y_z - Z_y) + Y(Z_x - X_z) + Z(X_y - Y_x) = 0$$

erfüllen.

873. Homogene Pfaffsche Gleichungen in drei Veränderlichen. Die Gleichung:

$$X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz = 0 \tag{1}$$

heißt *homogen*, wenn X, Y, Z homogene Funktionen gleichen Grades m sind. Ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, so kann man, um das Integral zu finden, entsprechend wie in Nr. 715 so vorgehen:

Vermöge $x = \mathfrak{x}z$ und $y = \mathfrak{y}z$ führt man neue Veränderliche $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ statt x und y ein. Dann nehmen X, Y, Z Formen:

$$X = z^m\mathfrak{X}, \quad Y = z^m\mathfrak{Y}, \quad Z = z^m\mathfrak{Z} \tag{2}$$

an, worin $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ nur noch von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ abhängen, und aus (1) geht hervor:

$$z\mathfrak{X}\,d\mathfrak{x} + z\mathfrak{Y}\,d\mathfrak{y} + (\mathfrak{x}\mathfrak{X} + \mathfrak{y}\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z})\,dz = 0. \tag{3}$$

Die Integrabilitätsbedingung lautet bei dieser neuen Form der Pfaffschen Gleichung:

$$\mathfrak{X}\frac{\partial}{\partial\mathfrak{y}}(\mathfrak{x}\mathfrak{X} + \mathfrak{y}\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}) - \mathfrak{Y}\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}\mathfrak{X} + \mathfrak{y}\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z})$$
$$= (\mathfrak{X}_\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}_\mathfrak{x})(\mathfrak{x}\mathfrak{X} + \mathfrak{y}\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}).$$

Wenn nun zunächst:

$$xX + yY + zZ \neq 0,$$

also auch $\mathfrak{x}\mathfrak{X}+\mathfrak{y}\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}\neq 0$ ist, läßt sie sich so schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial\mathfrak{y}}\,\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{x}\mathfrak{X}+\mathfrak{y}\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}}=\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}}\,\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{x}\mathfrak{X}+\mathfrak{y}\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}}, \tag{4}$$

während sich die Pfaffsche Gleichung (3) so darstellt:

$$\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{x}\mathfrak{X}+\mathfrak{y}\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}}\,d\mathfrak{x}+\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{x}\mathfrak{X}+\mathfrak{y}\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}}\,d\mathfrak{y}+\frac{dz}{z}=0. \tag{5}$$

Aus (4) folgt nach Satz 1, Nr. 609, daß die beiden ersten Summanden das vollständige Differential einer Funktion $\varphi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ sind, die man durch Quadraturen finden kann, so daß alsdann aus (5) das Integral in der Form:

$$\varphi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})+\ln z=\text{konst.}\quad\text{oder}\quad\varphi\left(\frac{x}{z},\,\frac{y}{z}\right)+\ln z=\text{konst.}$$

hervorgeht.

Wenn dagegen:

$$xX+yY+zZ=0,$$

also auch $\mathfrak{x}\mathfrak{X}+\mathfrak{y}\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}=0$ ist, reduziert sich (3) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ allein:

$$\mathfrak{X}\,d\mathfrak{x}+\mathfrak{Y}\,dy=0.$$

Ist $\varphi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ ihr Integral, so stellt:

$$\varphi\left(\frac{x}{z},\,\frac{y}{z}\right)=\text{konst.}$$

das Integral von (1) dar.

Beispiel: Die Pfaffsche Gleichung:

$$(y^2+yz+z^2)\,dx+(z^2+zx+x^2)\,dy+(x^2+xy+y^2)\,dz=0$$

ist homogen und erfüllt die Integrabilitätsbedingung. Hier liefert das soeben vorgetragene Verfahren die Gleichung:

$$\frac{(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{y}+1)\,d\mathfrak{x}+(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{x}+1)\,d\mathfrak{y}}{(\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{x}+\mathfrak{y})\,(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}+1)}+\frac{dz}{z}=0.$$

Da der Zähler des ersten Bruches als die Differenz:

$$(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}+1)\,d(\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{x}+\mathfrak{y})-(\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{x}+\mathfrak{y})\,d(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}+1)$$

geschrieben werden kann, geht sofort:

$$\ln(\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{x}+\mathfrak{y})-\ln(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}+1)+\ln z=\text{konst.}$$

oder:

$$\frac{yz+zx+xy}{x+y+z}=\text{konst.}$$

als Integral hervor.

Achtes Kapitel.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 1. Die Lagrange-Mongesche Theorie.

874. Geometrische Deutung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Die von *Lagrange* entwickelte Theorie der *allgemeinen* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wurde von *Monge* geometrisch gedeutet und durchsichtiger gestaltet. In dem gegenwärtigen Paragraphen legen wir mehr Gewicht auf diese geometrische Auffassung; im zweiten Paragraphen soll alsdann die von *Cauchy* geschaffene endgültige Integrationstheorie rein analytisch entwickelt werden.

Wir betrachten eine allgemeine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine unbekannte Funktion z der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

die wir bequemer so schreiben:

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

indem wir unter p und q die partiellen Ableitungen erster Ordnung der gesuchten Funktion z hinsichtlich der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y verstehen.

Die analytischen Betrachtungen werden wir im komplexen Gebiete durchführen, indem wir annehmen, daß es einen Bereich von komplexen Wertsystemen x, y, z, p, q gebe, innerhalb dessen sich die Funktion F regulär verhält. Dies ist dann der *Bereich der Differentialgleichung*, den wir nicht verlassen wollen. Bei allen künftig auftretenden Funktionen $z = \varphi(x, y)$ setzen wir daher immer stillschweigend voraus, daß die Gleichungen $z = \varphi(x, y)$, $p = \varphi_x$, $q = \varphi_y$ durch Wertsysteme x, y, z, p, q innerhalb des

Bereiches der Differentialgleichung befriedigt werden. Wenn man will, kann man auch im komplexen Gebiete die geometrischen Deutungen beibehalten, indem man z. B., falls x, y, z komplex sind, unter einem Punkte ein Wertsystem x, y, z versteht, unter einer Ebene den Inbegriff aller Wertsysteme x, y, z, die eine lineare Gleichung erfüllen, usw. (vgl. Nr. 829). Wir werden in diesem ersten Paragraphen ohne Rücksicht auf Reelles oder Imaginäres die Sprache der Geometrie anwenden. Man vergleiche auch die Bemerkung am Anfange von Nr. 856.

Eine sich regulär verhaltende Funktion $z = \varphi(x, y)$ heißt eine *Lösung* der Differentialgleichung, wenn die Gleichung:

(2) $$F(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) = 0$$

für alle erlaubten Werte von x und y erfüllt ist, d. h. für diejenigen Werte x, y, die zusammen mit $z = \varphi$, $p = \varphi_x$, $q = \varphi_y$ Wertsysteme x, y, z, p, q im Bereiche der Differentialgleichung ausmachen. Im Raume mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z wird jede Lösung durch eine Fläche, eine sogenannte *Integralfläche*, dargestellt. Die Tangentenebene eines Punktes M oder (x, y, z) der Integralfläche hat nach (5) in Nr. 253 in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichung:

(3) $$p(\mathfrak{x} - x) + q(\mathfrak{y} - y) - (\mathfrak{z} - z) = 0.$$

Der Punkt und diese Ebene bilden zusammen ein *Flächenelement* (x, y, z, p, q), vgl. Nr. 856, und nach (2) kann man sagen: *Eine Fläche $z = \varphi(x, y)$ ist dann und nur dann eine Integralfläche, wenn alle ihre Flächenelemente (x, y, z, p, q) zu denjenigen gehören, die durch die Differentialgleichung* (1) *definiert werden.*

Die Differentialgleichung (1) kann nämlich, ganz abgesehen von ihren Integralflächen, in der Tat als eine Gleichung aufgefaßt werden, vermöge deren aus der fünffach unendlichen Gesamtheit aller Flächenelemente (x, y, z, p, q) des Raumes eine *vierfach* unendliche Schar herausgegriffen wird, die man die Schar der *Flächenelemente der Differentialgleichung* (1) nennt. Wir erinnern dabei daran, daß p und q die Stellung der Ebene des Elements (x, y, z, p, q) bestimmen, nämlich nach Nr. 856 die Tangens derjenigen Winkel sind, unter denen die Schnittgeraden der Ebene des Elements mit der xz- und yz-Ebene zur xy-Ebene geneigt sind.

Wir betrachten jetzt insbesondere diejenigen Flächenelemente (x, y, z, p, q) der Differentialgleichung, die zu einem beliebig, aber bestimmt gewählten Punkte M oder (x, y, z) gehören. Für sie haben x, y, z bestimmte Zahlenwerte, so daß die Gleichung (1) nur noch *eine* der beiden Größen p und q, etwa p, willkürlich zu wählen gestattet. Der Punkt M gehört somit einer nur noch *einfach* unendlichen Schar von Flächenelementen der Differentialgleichung an, und alle Ebenen dieser Elemente umhüllen einen Kegel mit der Spitze M, den man den *Elementarkegel* von M nennt. Die grundsätzliche Benutzung des Elementarkegels verdankt man *Bonnet*. Nach Nr. 281 kann man die Mantellinien des Kegels als Grenzlagen der Schnittlinien benachbarter Ebenen so bestimmen: Die Gleichung (3) der Ebene wird nach der willkürlichen Größe p, von der auch q infolge der Gleichung (1) abhängt, differenziert. Dies gibt:

$$\mathfrak{x} - x + \frac{dq}{dp}(\mathfrak{y} - y) = 0.$$

Weil aber q die durch (1) definierte Funktion von p bedeutet, liefert die Differentiation von (1):

$$F_p + F_q \frac{dq}{dp} = 0,$$

und wenn der hieraus folgende Wert von $dq : dp$ in die vorige Gleichung substituiert wird, kommt:

$$(4) \qquad \frac{\mathfrak{x} - x}{F_p} = \frac{\mathfrak{y} - y}{F_q}.$$

Die beiden Gleichungen (3) und (4) stellen zusammen bei gegebenen Werten von x, y, z die gesuchten Mantellinien dar, wenn p und q an die Bedingung (1) gebunden werden. Bezeichnen wir mit u, v, w die Richtungskosinus einer dieser Geraden, so sind sie zu $\mathfrak{x} - x$, $\mathfrak{y} - y$, $\mathfrak{z} - z$ proportional, so daß aus (3) und (4) folgt:

$$(5) \qquad \frac{u}{F_p} = \frac{v}{F_q} = \frac{w}{pF_p + qF_q}.$$

Ein Flächenelement (x, y, z, p, q) also, dessen Bestimmungsstücke die Gleichung $F = 0$ befriedigen, berührt den Elementarkegel des Punktes M oder (x, y, z) längs der Geraden, deren Richtungskosinus u, v, w der Proportion (5) genügen. Siehe Fig. 59.

Unbestimmt wird die Richtung der Geraden nur dann, wenn F_p und F_q beide gleich Null sind. Solche Flächenelemente (x, y, z, p, q), die nicht nur der Gleichung $F = 0$, sondern auch den beiden Gleichungen $F_p = 0$ und $F_q = 0$ genügen, heißen *singulär*. Wir setzen voraus, *die vorgelegte Differentialgleichung $F = 0$ sei so beschaffen, daß nicht für alle Wertsysteme x, y, z, p, q, die ihrem Bereiche angehören und ihr Genüge leisten, $F_p = 0$ und $F_q = 0$ ist.*

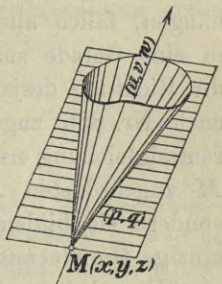

Fig. 59.

Unter einer *singulären Integralfläche* wird eine Integralfläche verstanden, deren Flächenelemente sämtlich singulär sind, d. h. die Funktion $z = \varphi(x, y)$ heißt eine *singuläre Lösung*, wenn für $z = \varphi$, $p = \varphi_x$ und $q = \varphi_y$ nicht nur $F = 0$, sondern auch $F_p = 0$ und $F_q = 0$ ist. In der Folge beschäftigen wir uns im wesentlichen nur mit den nicht singulären Integralflächen. Wie man die singulären Integralflächen bestimmt, soll in Nr. 888 erörtert werden, wobei sich zeigen wird, daß das keine Schwierigkeiten macht. *Die nicht singulären Integralflächen sind diejenigen Flächen, die in jedem ihrer Punkte den zugehörigen Elementarkegel des Punktes berühren.* Dies soll Fig. 60 veranschaulichen.

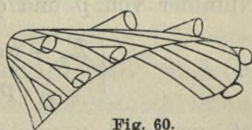
Fig. 60.

Elementarkegel fehlen nur solchen Punkten M oder (x, y, z), deren zugeordnete Flächenelemente (x, y, z, p, q) sämtlich singulär sind.

875. Nochmals die linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Daß wir die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung schon im vorigen Kapitel gebracht haben, hat seinen Grund darin, daß sie in der Tat unter den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung eine besondere Rolle spielen. Bei der linearen Differentialgleichung:

(1) $$\alpha(x, y, z) p + \beta(x, y, z) q = \gamma(x, y, z)$$

ist nämlich $F = \alpha p + \beta q - \gamma$ zu setzen, d. h. $F_p = \alpha$, $F_q = \beta$, so daß aus $F = 0$ noch $pF_p + qF_q = \gamma$ folgt. Mithin gibt hier die Proportion (5) der letzten Nummer:

(2) $$u : v : w = \alpha : \beta : \gamma,$$

und da α, β, γ nur von x, y, z und nicht von p und q abhängen, fallen alle Mantellinien des Kegels eines Punktes M in eine Gerade zusammen. Die Richtung dieser Geraden ist die Richtung desjenigen Linienelements l, das dem Punkte M nach Nr. 856 zugehört. Bei einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung also umhüllen alle einem Punkte M zugeordneten Flächenelemente nicht mehr einen Kegel, sondern sie bilden ein *Büschel*. Der Kegel ist eben in eine einzige Gerade ausgeartet.

Umgekehrt: Der einem Punkte M oder (x, y, z) vermöge einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

(3) $$F(x, y, z, p, q) = 0$$

zugeordnete Elementarkegel artet in eine Gerade aus, wenn die Verhältnisse u, v, w in der Proportion (5) der letzten Nummer von p und q unabhängig sind, also:

(4) $$\begin{cases} F_p = \varrho\alpha(x, y, z), \quad F_q = \varrho\beta(x, y, z), \\ \qquad pF_p + qF_q = \varrho\gamma(x, y, z) \end{cases}$$

ist, wo α, β, γ nur von x und y abhängen, dagegen ϱ noch außerdem von p und q abhängen darf. Die Gleichungen (4) sollen dabei infolge von (3) bestehen. Setzt man die Werte von F_p und F_q aus den beiden ersten Gleichungen (4) in die dritte ein, so fällt der Faktor ϱ heraus, und es bleibt übrig, daß die Bedingung:

$$\alpha(x, y, z) p + \beta(x, y, z) q = \gamma(x, y, z)$$

infolge von (3) bestehen soll, was aber besagt, daß die vorgelegte Differentialgleichung (3) auf die *lineare* Form (1) gebracht werden kann.

Die linearen partiellen Differentialgleichungen sind also die einzigen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, bei denen der einem beliebigen Punkte M zugeordnete Elementarkegel in eine Gerade ausartet.

875]

Von den linearen partiellen Differentialgleichungen, deren Theorie ja schon im vorigen Kapitel gegeben wurde, nehmen wir künftig Abstand.

876. Begriff und Anwendung einer bekannten vollständigen Lösung. Nach *Lagrange* bezeichnet man als eine *vollständige* Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

(1) $$F(x, y, z, p, q) = 0$$

eine solche Lösung:

(2) $$z = \varphi(x, y, a, b),$$

die noch zwei willkürliche Konstanten a und b derart enthält, *daß die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung* φ_x *und* φ_y *hinsichtlich* a *und* b *voneinander unabhängig sind.* Natürlich ist für a und b ein gewisser Variabilitätsbereich anzunehmen, und φ soll sich als Funktion von allen vier Größen x, y, a, b regulär verhalten.

Eine solche Lösung (2) heißt nicht deshalb *vollständig,* weil sie etwa alle Lösungen von (1) umfaßt, im Gegenteil, wir werden zeigen, daß es, falls eine vollständige Lösung (2) überhaupt vorhanden ist, noch unbegrenzt viele andere Lösungen gibt. Sie heißt vielmehr deshalb so, weil *zu einer gegebenen vollständigen Lösung eine bestimmte partielle Differentialgleichung erster Ordnung gehört.* Denn man erhält diejenige partielle Differentialgleichung erster Ordnung, der die Funktion (2) genügt, durch Elimination von a und b aus (2) und:

(3) $$p = \varphi_x, \quad q = \varphi_y.$$

Wie man überhaupt eine vollständige Lösung finden kann, wird in Nr. 881 gezeigt werden. Hier nehmen wir an, daß eine solche in der Form (2) schon bekannt sei.

Wir erinnern nun an die in Nr. 92 angestellte Betrachtung, die wir anwenden können, indem wir die damals mit V bezeichnete Funktion in der Form:

(4) $$V = \varphi(x, y, \alpha, \omega(\alpha)) - z$$

annehmen. In Nr. 92 stand allerdings φ statt ω; da jedoch hier das Zeichen φ schon in anderer Bedeutung aufritt, ist die Abänderung der Bezeichnung nötig. Die Betrachtung in Nr. 92

lehrt: Wird eine Funktion ω von α *willkürlich* gewählt und setzt man die durch $\partial V : \partial \alpha = 0$ oder:

$$\frac{\partial \varphi(x, y, \alpha, \omega(\alpha))}{\partial \alpha} = 0 \tag{5}$$

definierte Funktion α von x und y in $V = 0$ oder:

$$z = \varphi(x, y, \alpha, \omega(\alpha)) \tag{6}$$

ein, so genügen *alle* so hervorgehenden Funktionen z von x und y einer gewissen partiellen Differentialgleichung, die unabhängig davon ist, wie man die Funktion $\omega(\alpha)$ wählen mag, und nach (2) in Nr. 92 durch Elimination von α und $\omega(\alpha)$ aus den drei Gleichungen (6) und:

$$p - \varphi_x = 0, \quad q - \varphi_y = 0 \tag{7}$$

hervorgeht. Hierbei bedeutet φ die Funktion (6) von x, y und α. Da aber α und ω eliminiert werden, ist es für das Ergebnis gleichgültig, ob man die beiden Größen so oder mit a und b bezeichnet. Setzt man aber dafür a und b, so treten an die Stelle von (6) und (7) die Gleichungen (2) und (3), und wir wissen, daß durch Elimination von a und b aus (2) und (3) die vorgelegte partielle Differentialgleichung (1) hervorgeht. Der partiellen Differentialgleichung (1) genügt demnach außer ihrer angenommenen vollständigen Lösung (2) jede Funktion (6), worin $\omega(\alpha)$ eine willkürliche Funktion von α bedeutet und α selbst die durch (5) definierte Funktion von x und y ist.

Der innere Zusammenhang dieser Theorie wird viel klarer, wenn man nach dem Vorgange von *Monge* geometrische Veranschaulichungen benutzt. Deshalb wollen wir sie von neuem so ableiten:

Die vollständige Lösung (2) stellt eine *zweifach* unendliche Schar von Integralflächen dar. Unter einer *Einhüllenden* sei eine solche Fläche verstanden, die an *jeder* Stelle eine der Flächen der Schar berührt. Sie hat an jeder Stelle ein Flächenelement, das einer Fläche der Schar (2) und deshalb auch der vorgelegten Differentialgleichung angehört. *Folglich müssen alle Einhüllenden der Schar* (2) *ebenfalls Integralflächen sein.* In Nr. 278—280 war von den Einhüllenden *einfach* unendlicher Flächenscharen die Rede, während hier in (2) eine *zweifach* unendliche Schar vorliegt. Trotz dieses Unterschiedes werden wir doch, wie sich in der nächsten Nummer zeigen wird, auf den damals behandelten Fall zurückkommen.

Um allgemein eine Einhüllende der Flächenschar (2) zu gewinnen, schließt man so: Zu jedem gestatteten Wertepaare x, y muß eine dritte Koordinate z der gesuchten Fläche und ein Konstantenpaar a, b gehören, das die den Punkt (x, y, z) enthaltende eingehüllte Fläche aus der Schar (2) bestimmt, so daß die Koordinate z dieser Fläche der Schar (2) mit jener Koordinate z der gesuchten Fläche übereinstimmt. Wird aber jedem Wertepaare x, y ein Wertepaar a, b zugeordnet, so heißt dies, daß es zwei *Funktionen* α und β von x und y geben soll, derart, daß sie zu jedem Veränderlichenpaare x, y die zugehörigen Werte von a und b angeben. Anders ausgedrückt: die z-Koordinate der *gesuchten* Fläche muß sich so darstellen:

$$z = \varphi(x, y, \alpha(x, y), \beta(x, y)). \tag{8}$$

Die Funktionen α und β sind nun noch so zu bestimmen, daß die Fläche (8) an der zu x und y gehörigen Stelle diejenige Fläche der Schar (2) berührt, bei der a und b die zugehörigen Werte von α und β haben. Die Tangentenebene der Fläche (8) hat in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichung:

$$(\varphi_x + \varphi_\alpha \alpha_x + \varphi_\beta \beta_x)(\mathfrak{x} - x) + (\varphi_y + \varphi_\alpha \alpha_y + \varphi_\beta \beta_y)(\mathfrak{y} - y) - (\mathfrak{z} - z) = 0,$$

dagegen die Tangentenebene der zu a und b gehörigen Fläche (2) die Gleichung:

$$\varphi_x(\mathfrak{x} - x) + \varphi_y(\mathfrak{y} - y) - (\mathfrak{z} - z) = 0,$$

worin φ zwar die Funktion von x, y, a und b und nicht die von x, y, α und β ist, aber a und b doch gerade diejenigen Werte haben sollen, die α und β für das angenommene Wertepaar x, y zukommen. Eine Berührung tritt ein, falls beide Tangentenebenen übereinstimmen, also:

$$\varphi_\alpha \alpha_x + \varphi_\beta \beta_x = 0, \quad \varphi_\alpha \alpha_y + \varphi_\beta \beta_y = 0 \tag{9}$$

ist. *Die Fläche* (8) *stellt somit eine Einhüllende der Schar* (2) *und mithin eine Integralfläche dar, wenn die Funktionen α und β die Bedingungen* (9) *erfüllen.*

877. Diskussion der aus einer vollständigen Lösung abzuleitenden Lösungen. Wir haben jetzt die Bedingungen:

(1) $$\varphi_\alpha \alpha_x + \varphi_\beta \beta_x = 0, \quad \varphi_\alpha \alpha_y + \varphi_\beta \beta_y = 0$$

näher zu betrachten. Wenn α_x, β_x, α_y und β_y sämtlich gleich Null wären, würden α und β Konstanten sein, d. h. wir kämen auf die gegebene vollständige Lösung zurück. Mithin setzen wir voraus, daß α und β nicht beide konstant seien. Je nachdem dann die Determinante

(2) $$\begin{vmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ \alpha_y & \beta_y \end{vmatrix}$$

gleich Null oder von Null verschieden ist, gehen wesentlich verschiedene Ergebnisse hervor.

Ist die Determinante (2) gleich Null, so ist β von α abhängig. Daher werde für β irgend eine Funktion ω von α allein gesetzt. Dann kommen die beiden Forderungen (1) auf die eine zurück:

(3) $$\varphi_\alpha + \varphi_\beta \omega'(\alpha) = 0.$$

Dies aber ist, weil $\beta = \omega(\alpha)$ eingesetzt werden muß, eine Gleichung in x, y und α allein. Gibt es eine Funktion α von x und y, die ihr genügt, so ist auch $\beta = \omega(\alpha)$ als Funktion von x und y bestimmt und:

(4) $$z = \varphi(x, y, \alpha, \omega(\alpha))$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung. Die Gleichung (5) in voriger Nummer ist in der Tat gerade die Bedingung (3), und mithin sind wir hier aufs neue zu dem alten Ergebnisse gelangt (siehe (6) in voriger Nummer). Die Funktion $\beta = \omega(\alpha)$ war zwar willkürlich. Aber man muß sich in ihrer Wahl soweit einschränken, daß die für α und β infolge von (3) hervorgehenden Funktionen von x und y Werte annehmen, die dem Variabilitätsbereiche der Konstanten a und b in der vollständigen Lösung $\varphi(x, y, a, b)$ angehören.

Wenn dagegen die Determinante (2) nicht gleich Null ist, sind α und β voneinander unabhängig. Dann folgt aus (1):

(5) $$\varphi_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta = 0.$$

Gibt es also zwei voneinander unabhängige Funktionen α und β von x und y, die den Bedingungen (5) genügen und deren Werte dem für die Konstanten a und b gestatteten Variabilitätsbereiche angehören, so muß $\varphi(x, y, \alpha, \beta)$ eine Lösung der

Differentialgleichung sein. Diese Lösung aber ist notwendig *singulär* (vgl. Nr. 874), und zwar sieht man das so ein:

Für jede Lösung z der Differentialgleichung besteht nicht nur die Differentialgleichung $F = 0$ selbst, sondern auch jede durch partielle Differentiation nach x bzw. y hervorgehende Gleichung. Wenn man die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von z nach x und y mit r, s, t bezeichnet (wie in Nr. 85), so ist also:

$$(6) \quad F_x + F_z p + F_p r + F_q s = 0, \quad F_y + F_z q + F_p s + F_q t = 0.$$

Diese Gleichungen gelten für die vollständige Lösung:

$$z = \varphi(x, y, a, b)$$

und für die neue Lösung:

$$z = \varphi(x, y, \alpha, \beta).$$

Bei der ersten haben p und q die Werte φ_x und φ_y. Bei der zweiten haben sie zwar anscheinend andere Werte, nämlich:

$$\varphi_x + \varphi_\alpha \alpha_x + \varphi_\beta \beta_x \quad \text{und} \quad \varphi_y + \varphi_\alpha \alpha_y + \varphi_\beta \beta_y,$$

aber nach (5) sind dies doch wieder φ_x und φ_y. Die Ableitungen r, s, t gehen also bei beiden Lösungen durch nochmalige Differentiation von φ_x und φ_y nach x bzw. y hervor. Bei der vollständigen Lösung sind sie:

$$(7) \qquad r = \varphi_{xx}, \quad s = \varphi_{xy}, \quad t = \varphi_{yy},$$

dagegen bei der neuen Lösung:

$$(8) \qquad \begin{cases} r = \varphi_{xx} + \varphi_{x\alpha}\alpha_x + \varphi_{x\beta}\beta_x, \\ s = \varphi_{xy} + \varphi_{x\alpha}\alpha_y + \varphi_{x\beta}\beta_y = \varphi_{yx} + \varphi_{y\alpha}\alpha_x + \varphi_{y\beta}\beta_x, \\ t = \varphi_{yy} + \varphi_{y\alpha}\alpha_y + \varphi_{y\beta}\beta_y. \end{cases}$$

Nach (6) und (7) ist nun bei der vollständigen Lösung:

$$(9) \qquad \begin{cases} F_x + F_z\varphi_x + F_p\varphi_{xx} + F_q\varphi_{xy} = 0, \\ F_y + F_z\varphi_y + F_p\varphi_{xy} + F_q\varphi_{yy} = 0. \end{cases}$$

Bei der neuen Lösung treten hierin an die Stelle von φ_{xx}, φ_{xy}, φ_{yy} die Werte (8). Da aber die Gleichungen (9) für alle erlaubten Werte der Konstanten a und b gelten, sind sie auch richtig, wenn a und b durch die Funktionen α und β ersetzt werden. Dann stimmen die Werte von φ_{xx}, φ_{xy}, φ_{yy} in (9) mit den in (8) rechts ebenso bezeichneten Werten überein. Nun gelten bei der neuen Lösung entsprechend den Gleichungen

(9) diejenigen, die aus (9) hervorgehen, wenn φ_{xx}, φ_{xy} und φ_{yy} durch die Werte (8) von r, s, t ersetzt werden. Zieht man von diesen Gleichungen die entsprechenden Gleichungen (9) ab, so ergeben sich die beiden folgenden Formeln, die für die Lösung $\varphi(x, y, \alpha, \beta)$ und für alle erlaubten Werte von x und y gelten:

$$(10) \quad \begin{cases} F_p(\varphi_{x\alpha}\alpha_x + \varphi_{x\beta}\beta_x) + F_q(\varphi_{x\alpha}\alpha_y + \varphi_{x\beta}\beta_y) = 0, \\ F_p(\varphi_{y\alpha}\alpha_x + \varphi_{y\beta}\beta_x) + F_q(\varphi_{y\alpha}\alpha_y + \varphi_{y\beta}\beta_y) = 0. \end{cases}$$

Für z, p und q sind darin natürlich die Werte φ, φ_x und φ_y eingesetzt zu denken. Hier liegen nun in F_p und F_q lineare homogene Gleichungen vor, deren Determinante gleich dem Produkte

$$\begin{vmatrix} \varphi_{x\alpha} & \varphi_{x\beta} \\ \varphi_{y\alpha} & \varphi_{y\beta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ \alpha_y & \beta_y \end{vmatrix}$$

von zwei Determinanten ist, die beide nicht verschwinden, weil erstens φ_x und φ_y hinsichtlich α und β und zweitens α und β hinsichtlich x und y voneinander unabhängig sind. Das erste folgt nämlich aus der in voriger Nummer gemachten Voraussetzung, wonach die partiellen Ableitungen von $\varphi(x, y, a, b)$ nach x und y hinsichtlich a und b voneinander unabhängig sein sollen, da α und β demselben Variabilitätsbereiche wie a und b angehören. Also ergibt sich aus (10), daß $F_p = 0$ und $F_q = 0$ für $z = \varphi(x, y, \alpha, \beta)$ wird, d. h. daß die Lösung $z = \varphi(x, y, \alpha, \beta)$ *singulär* ist, nach Nr. 874.

Da α und β in dem soeben betrachteten Falle voneinander unabhängige Funktionen von x und y sind, gibt es zu irgendeinem erlaubten Wertepaare a, b solche Werte von x und y, für die α und β gerade gleich a und b werden. Dies bedeutet, *daß die singuläre Integralfläche wirklich von der zweifach unendlichen Schar der in der vollständigen Lösung enthaltenen Integralflächen eingehüllt wird und nicht von einer darin enthaltenen nur einfach unendlichen Schar.*

Anders ist es in dem vorhergehenden Falle, d. h. bei der Integralfläche:

$$(11) \qquad z = \varphi(x, y, \alpha, \omega(\alpha)),$$

wobei nach (3):

$$(12) \qquad \varphi_\alpha + \varphi_\omega \omega'(\alpha) = 0$$

877]

ist. Hier nämlich kommen, da $\beta = \omega(\alpha)$ gesetzt worden war, nur diejenigen Integralflächen der Schar $z = \varphi(x, y, a, b)$ in betracht, bei denen die Konstante b gleich $\omega(a)$ ist, *d. h. die Fläche* (11) *ist die Einhüllende der einfach unendlichen Flächenschar:*

(13) $$z = \varphi(x, y, a, \omega(a)).$$

878. Die Charakteristiken. Wir erinnern jetzt an die in Nr. 278—280 angestellten Betrachtungen über die Einhüllende einer einfach unendlichen Flächenschar. Danach sind die Grenzlagen der Schnittkurven benachbarter Flächen der Schar, d. h. die *Charakteristiken,* diejenigen Kurven, längs deren die Flächen die Einhüllende berühren. *Die Einhüllende enthält also eine einfach unendliche Schar von Charakteristiken,* längs deren sie je eine Fläche der Schar berührt.

Wenn man sich die Frage vorlegt, wie viele Charakteristiken es hier überhaupt gibt, hat man zu bedenken, daß man aus der zweifach unendlichen Schar der Integralflächen:

(1) $$z = \varphi(x, y, a, b),$$

die durch die vollständige Lösung gegeben sind, auf unbegrenzt viele Arten einfach unendliche Scharen:

(2) $$z = \varphi(x, y, a, \omega(a))$$

herausgreifen kann, indem man für b eine willkürliche Funktion von a setzt. Da nun zu jeder solchen Schar (2) eine Einhüllende:

(3) $$z = \varphi(x, y, \alpha, \omega(\alpha))$$

gehört, nämlich diejenige, bei der die Funktion α von x und y der Gleichung:

(4) $$\varphi_\alpha + \varphi_\omega \omega'(\alpha) = 0$$

genügt, ist man zunächst vielleicht zu der Vermutung geneigt, daß die Gesamtheit aller Charakteristiken viel umfangreicher sei, als sie sich in Wahrheit herausstellt und zwar so:

Die Einhüllende (3) berührt die zu einem bestimmten Werte von a gehörige Fläche (2) längs derjenigen Kurve der Fläche (3), längs deren $\alpha(x, y)$ den konstanten Wert a hat, d. h. längs der Kurve, die durch die beiden Gleichungen:

(5) $$z = \varphi(x, y, a, \omega(a)), \quad \varphi_a + \varphi_\omega \omega'(a) = 0$$

dargestellt wird. Die Konstante a ist willkürlich; da $\omega(a)$ eine willkürliche Funktion von a bedeutet, sind auch $\omega(a)$ und $\omega'(a)$ willkürliche Konstanten. Bezeichnen wir sie mit b und c, so folgt: *Alle überhaupt vorkommenden Charakteristiken werden durch die beiden Gleichungen:*

$$(6) \qquad z = \varphi(x, y, a, b), \quad \varphi_a + \varphi_b c = 0$$

mit nur drei willkürlichen Konstanten a, b, c dargestellt. Die Schar aller Charakteristiken ist somit höchstens *dreifach* unendlich. Sie ist aber auch *gerade* dreifach unendlich. Wenn sich nämlich die Gleichungen (6) so umformen ließen, daß sie nur zwei willkürliche Konstanten enthielten, würden sich für bestimmte Werte von x, y, z zwei Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten ergeben, d. h. dann würde durch einen beliebig gewählten Punkt M oder (x, y, z) keine unbegrenzte Anzahl von Charakteristiken gehen, und dies ist falsch. Denn bei gegebenen Werten von x, y, z kann man a noch beliebig annehmen, während die erste Gleichung (6) alsdann b und die zweite noch c bestimmt, weil $\varphi_b \neq 0$ ist.

Hierbei erinnern wir daran, daß der Begriff der Charakteristiken auch bei den *linearen* partiellen Differentialgleichungen in Nr. 856 auftrat. Aber die Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung in x, y, z bilden, weil sie durch zwei Integrale dargestellt werden (vgl. (7) in Nr. 856), eine nur *zweifach* unendliche Schar. Dies findet seine Erklärung darin, daß die Annahme der Existenz einer vollständigen Lösung $z = \varphi(x, y, a, b)$, bei der φ_x und φ_y hinsichtlich a und b voneinander unabhängig sind, bei einer linearen partiellen Differentialgleichung nicht erlaubt ist. *Wir schließen ja auch die linearen partiellen Differentialgleichungen nach Nr. 875 von der Betrachtung aus.*

Soeben sahen wir, daß durch einen beliebig gewählten Punkt M oder (x, y, z) unbegrenzt viele Charakteristiken gehen, die eine *einfach* unendliche Schar bilden. Sie haben in dem Punkte M Tangenten, die einen Kegel bilden, und die Vermutung liegt nahe, daß dieser Kegel der Elementarkegel von M (vgl. Nr. 874) ist. Dies läßt sich so beweisen: Sind dx, dy, dz die Differentiale längs einer Charakteristik, so folgt aus (6):

$$(7)\qquad dz = \varphi_x dx + \varphi_y dy,$$
$$(\varphi_{xa} + \varphi_{xb} c)\, dx + (\varphi_{ya} + \varphi_{yb} c)\, dy = 0.$$

Fassen wir einen bestimmten Punkt M oder (x, y, z) ins Auge, so sind a und b der ersten Bedingung (6) zu unterwerfen, d. h. *b ist als Funktion von a zu betrachten.* Ferner ist c nach der zweiten Bedingung (6) gleich $-\varphi_a : \varphi_b$ zu setzen, so daß die letzte Gleichung diese wird:

$$(8)\qquad (\varphi_{xa}\varphi_b - \varphi_{xb}\varphi_a)\, dx + (\varphi_{ya}\varphi_b - \varphi_{yb}\varphi_a)\, dy = 0.$$

Andererseits wird aber die Differentialgleichung $F = 0$ von $z = \varphi$ erfüllt, d. h. es ist:

$$F(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) = 0$$

für alle erlaubten Werte von x, y, a und b. Daher kann sie nach a differenziert werden. Dies gibt:

$$(9)\quad F_z\left(\varphi_a + \varphi_b \frac{db}{da}\right) + F_p\left(\varphi_{xa} + \varphi_{xb}\frac{db}{da}\right) + F_q\left(\varphi_{ya} + \varphi_{yb}\frac{db}{da}\right) = 0.$$

Zur Abkürzung sind dabei φ, φ_x und φ_y mit z, p und q bezeichnet. Die erste Gleichung (6) dagegen liefert:

$$0 = \varphi_a + \varphi_b \frac{db}{da}.$$

Wird hieraus $db : da = -\varphi_a : \varphi_b$ entnommen und in (9) eingesetzt, so kommt:

$$(10)\qquad F_p(\varphi_{xa}\varphi_b - \varphi_{xb}\varphi_a) + F_q(\varphi_{ya}\varphi_b - \varphi_{yb}\varphi_a) = 0.$$

Diese Gleichung besteht also, falls b als die bei gegebenen Werten von x, y und z durch $z = \varphi(x, y, a, b)$ definierte Funktion von a betrachtet wird, und die Vergleichung von (8) mit (10) ergibt somit, daß für die Differentiale dx, dy, dz der Charakteristiken an der Stelle M außer der Bedingung (7) noch die Bedingung:

$$(11)\qquad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q}$$

gilt, d. h. daß für sie:

$$(12)\qquad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q}$$

wird. Dies aber besagt nach (5) in Nr. 874: *In jedem Punkte M oder (x, y, z) sind die Tangenten der hindurchgehenden Charakteristiken die Mantellinien des Elementarkegels von M.*

Bei dieser Schlußfolgerung wurde ohne weiteres angenommen, daß die Koeffizienten von F_p und F_q in (10) nicht beide verschwinden. Wäre:

$$\varphi_{xa}\varphi_b - \varphi_{xb}\varphi_a = 0, \quad \varphi_{ya}\varphi_b - \varphi_{yb}\varphi_a = 0,$$

so müßte wegen $\varphi_a \neq 0$ und $\varphi_b \neq 0$ auch:

$$\varphi_{xa}\varphi_{yb} - \varphi_{ya}\varphi_{xb} = 0$$

sein, d. h. φ_x und φ_y wären entgegen der Annahme in Nr. 876 voneinander hinsichtlich a und b abhängig.

Wir kehren zur Einhüllenden (3) einer einfach unendlichen Schar von Integralflächen (2) zurück. Es sei M ein Punkt, den die Einhüllende mit der zu einem bestimmten Werte von a gehörigen Fläche (a) der Schar gemein hat. Die Einhüllende berührt die Fläche (a) längs einer Charakteristik k. Diese hat in M eine Tangente t, die eine Mantellinie des Elementarkegels von M ist. Andererseits berührt der Elementarkegel in M sowohl die Fläche (a) als auch die Einhüllende, nach Nr. 876. *Mithin berührt der Elementarkegel von M die Fläche* (a) *und die Einhüllende gerade längs der Charakteristik k.* Siehe Fig. 61. Anders ausgesprochen: *Das Flächenelement, das die Fläche* (a) *mit der Einhüllenden an der Stelle M gemein hat, berührt den Elementarkegel längs der Tangente t der Charakteristik k.*

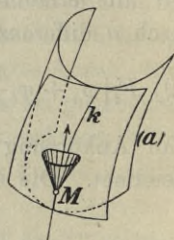

Fig. 61.

879. Die charakteristischen Streifen. Wir haben gesehen: Wenn eine vollständige Lösung $\varphi(x, y, a, b)$ der partiellen Diffentialgleichung erster Ordnung vorliegt und die Einhüllende einer in ihr enthaltenen einfach unendlichen Schar von Integralflächen bestimmt wird, ergibt sich eine Integralfläche, die jede Fläche der durch die vollständige Lösung definierten Schar längs einer Charakteristik berührt und also längs der Kurve mit ihr die Flächenelemente gemein hat. Die Schar dieser Elemente längs der Charakteristik heißt nach *Lie* ein *charakteristischer Streifen.* Vgl. Fig. 58, Nr. 858. Um die Bedingungen für die charakteristischen Streifen aufzustellen, verfahren wir entsprechend wie in Nr. 858:

Zunächst sind z, p, q auf der Einhüllenden Funktionen von x und y, die der Differentialgleichung:

(1) $$F(x, y, z, p, q) = 0$$

und folglich auch den beiden Gleichungen:

$$F_x + F_z p + F_p p_x + F_q q_x = 0, \quad F_y + F_z q + F_p p_y + F_q q_y = 0$$

genügen. Da aber $p_y = \partial^2 z : \partial x \, \partial y = q_x$ ist, folgt hieraus:

(2) $$F_p p_x + F_q p_y = -F_x - pF_z, \quad F_p q_x + F_q q_y = -F_y - qF_z.$$

Längs einer Charakteristik kann man x und y als Funktionen einer einzigen Hilfsveränderlichen t betrachten, und dabei ist, falls man $dx : dt = F_p$ annimmt, nach (12) in voriger Nummer:

(3) $$\frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q, \quad \frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q.$$

Längs des charakteristischen Streifens sind auch p und q gewisse Funktionen von t. Da nun:

$$\frac{dp}{dt} = p_x \frac{dx}{dt} + p_y \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dq}{dt} = q_x \frac{dx}{dt} + q_y \frac{dy}{dt}$$

ist, ergibt sich aus den Gleichungen (3):

$$\frac{dp}{dt} = F_p p_x + F_q p_y, \quad \frac{dq}{dt} = F_p q_x + F_q q_y,$$

also nach (2):

(4) $$\frac{dp}{dt} = -F_x - pF_z, \quad \frac{dq}{dt} = -F_y - qF_z.$$

Mithin genügen die Flächenelemente (x, y, z, p, q) *eines charakteristischen Streifens den fünf Gleichungen* (3) *und* (4).

Man kann diese Gleichungen auch von t befreien, indem man die Verhältnisse von dy, dz, dp und dq zu dx bildet Dann liegt ein System erster Ordnung von vier gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Funktionen y, z, p, q von x vor, das vier unabhängige Integrale hat. *Ein Integral ist F selbst*, weil das vollständige Differential von F infolge von (3) und (4) verschwindet. Außerdem sind noch drei von F unabhängige Integrale ω_1, ω_2, ω_3 vorhanden. Da nun die Gleichung $F = 0$ von den Flächenelementen erfüllt werden muß, folgt, daß jeder charakteristische Streifen aus Elementen (x, y, z, p, q) besteht, die den vier Gleichungen:

(5) $$F = 0, \quad \omega_1 = \text{konst.}, \quad \omega_2 = \text{konst.}, \quad \omega_3 = \text{konst.}$$

genügen.

Ein beliebig gewähltes nicht singuläres Flächenelement $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, das der Gleichung $F = 0$ genügt, gehört nach Nr. 876 einer Integralfläche an, die in der vollständigen Lösung enthalten ist, und diejenige Einhüllende, die diese Fläche im Punkte (x_0, y_0, z_0) berührt, hat mit ihr einen charakteristischen Streifen längs der gemeinsamen Berührungslinie, der Charakteristik, gemein. Da nun das System (3), (4), wenn es von t befreit wird, auch gerade *ein* Lösungensystem hat, dem für $x = x_0$ bestimmte Anfangswerte y_0, z_0, p_0, q_0 zukommen, folgt, daß die Gleichungen (5) stets einen charakteristischen Streifen darstellen, wie auch die drei willkürlichen Konstanten innerhalb eines gewissen Bereiches gewählt sein mögen.

Weil die Bestimmung der charakteristischen Streifen nur die Integration des Systems (3), (4) von gewöhnlichen Differentialgleichungen erfordert, das man aufstellen kann, ohne eine vollständige Lösung zu kennen, so *läßt sich der Begriff der charakteristischen Streifen auch unabhängig von der Annahme einer bekannten vollständigen Lösung entwickeln.* Hierauf fußt die von *Cauchy* gegebene Integrationsmethode, die wir im nächsten Paragraphen auseinandersetzen werden.

Das System (3), (4) hat dieselbe Form wie das System (7) in Nr. 858. Dort aber war F in p und q linear und ganz, und infolge davon waren insbesondere zwei von p und q freie Integrale vorhanden, was hier nicht der Fall ist.

880. Ein Beispiel. Man kann sich dadurch Beispiele zu den Betrachtungen der letzten Nummer bilden, daß man von einer gegebenen zweifach unendlichen Flächenschar ausgeht und diejenige partielle Differentialgleichung erster Ordnung berechnet, die diese Flächen als Integralflächen hat.

Die Schar aller Ebenen, die die Kugel:

(1) $$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

mit dem Radius R berühren, wird durch die Gleichung:

(2) $$ax + by + cz - R = 0$$

dargestellt, wenn die drei Konstanten a, b, c der Bedingung:

(3) $$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

genügen, so daß also nur zwei von ihnen wesentlich sind.

Faßt man z als Funktion von x und y auf, so gibt die Differentiation von (2) nach x und y:

$$a + cp = 0, \quad b + cq = 0.$$

Elimination von a, b, c aus diesen beiden Gleichungen und den beiden Gleichungen (2) und (3) liefert eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F = (xp + yq - z)^2 - R^2(p^2 + q^2 + 1) = 0, \tag{4}$$

bei der die Schar der Tangentenebenen der Kugel (1) eine vollständige Lösung darstellt. Die durch einen Punkt M gehenden Tangentenebenen der Kugel umhüllen den zu M gehörigen Elementarkegel, der daher der Tangentialkegel ist, den man von M an die Kugel legen kann. *Jede* Integralfläche von (4) muß in jedem ihrer Punkte M den Elementarkegel berühren, d. h. alle Tangentenebenen der Integralflächen müssen Tangentenebenen der Kugel sein, also aus diesen Ebenen durch Einhüllung hervorgehen. Entweder wird die Fläche von *allen* Tangentenebenen der Kugel eingehüllt, und dann ist sie die Kugel selbst und nach Nr. 877 *singulär*, oder sie wird von einer nur einfach unendlichen Schar von Tangentenebenen eingehüllt, und dann ist sie nach Nr. 281 *die Tangentenfläche irgendeiner Kurve, deren Tangenten die Kugel berühren.* Jeder charakteristische Streifen besteht hier aus solchen Flächenelementen, deren Punkte eine Tangente der Kugel bilden und deren Ebenen in diejenige Tangentenebene der Kugel zusammenfallen, die diese Tangente enthält.

881. Ermittlung einer vollständigen Lösung. Diejenige partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die nach Nr. 876 durch eine gegebene vollständige Lösung definiert wird, hat nur solche Flächenelemente, die den Integralflächen der vollständigen Lösung angehören. Mithin muß *jede* Integralfläche an jeder Stelle eine von den Flächen der vollständigen Lösung berühren, d. h. das in Nr. 876, 877 entwickelte Verfahren der Einhüllung muß *alle* Integralflächen liefern.

Hiernach ist die vollständige Integration einer vorgelegten Differentialgleichung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

mittels Differentiation, Elimination und Substitution zu leisten, sobald eine vollständige Lösung bekannt ist. Es erübrigt daher nur noch zu zeigen, wie *Lagrange* eine solche Lösung bestimmte:

Wenn man zu der Gleichung (1) noch eine Gleichung:

$$f(x, y, z, p, q) = a \tag{2}$$

mit einer willkürlichen Konstanten a hinzufügt, kann man p und q als die durch beide Gleichungen definierten Funktionen von x, y und z auffassen; aber es gibt nur dann Integralflächen, auf denen p und q diese Funktionen sind, wenn alsdann die *totale* Differentialgleichung:

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{3}$$

die *Integrabilitätsbedingung* in Satz 17, Nr. 872, erfüllt. Sie lautet, da hier $X = p$, $Y = q$, $Z = -1$ zu setzen ist, so:

$$pq_z - qp_z - p_y + q_x = 0. \tag{4}$$

Nun aber gelten für die durch (1) und (2) definierten Funktionen p und q von x, y, z die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
F_x + F_p p_x + F_q q_x &= 0, & f_x + f_p p_x + f_q q_x &= 0,\\
F_y + F_p p_y + F_q q_y &= 0, & f_y + f_p p_y + f_q q_y &= 0,\\
F_z + F_p p_z + F_q q_z &= 0, & f_z + f_p p_z + f_q q_z &= 0.
\end{aligned}$$

Substituiert man die hieraus zu berechnenden Werte von q_z, p_z, p_y und q_x in (4), so ergibt sich:

$$F_p \frac{\partial f}{\partial x} + F_q \frac{\partial f}{\partial y} + (pF_p + qF_q)\frac{\partial f}{\partial z} - (F_x + pF_z)\frac{\partial f}{\partial p} - (F_y + qF_z)\frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

Dies ist eine homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für f. Nach Satz 1, Nr. 853, muß daher f ein Integral desjenigen Systems sein, das die charakteristischen Streifen bestimmt, vgl. (3) und (4) in Nr. 879.

Hat man ein solches Integral $f(x, y, z, p, q)$ gefunden, so sind die aus (1) und (2) folgenden Funktionen p und q von x, y, z in (3) einzusetzen. Nach Nr. 872 kommt alsdann die Integration der totalen Differentialgleichung (3) auf die eines zweigliedrigen vollständigen Systems hinaus, indem es sich darum handelt, diejenigen Funktionen $\Phi(x, y, z)$ zu ermitteln, für die:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial z} = p : q : -1$$

ist. Da nun die durch (1) und (2) definierten Funktionen p und q von x, y, z auch von der Konstanten a abhängen, gilt dasselbe von den Funktionen Φ. Mithin ergibt sich schließlich eine Gleichung:

$$\Phi(x, y, z, a) = b$$

als Integral von (3), und darin bedeutet b ebenfalls eine willkürliche Konstante. Implizite wird diese Gleichung demnach im allgemeinen eine *vollständige* Lösung $z = \varphi(x, y, z, a, b)$ der vorgelegten partiellen Differentialgleichung (1) definieren.

Hiermit ist der Vortrag der Integrationsmethode von *Lagrange* beendet. Die Betrachtungen dieses Paragraphen haben nur einen vorläufig orientierenden Charakter. Wir gehen jetzt dazu über, die vollkommenere *Cauchy*sche Integrationsmethode zu entwickeln.

§ 2. Die Integrationstheorie von Cauchy.

882. Lösungen erzeugt durch charakteristische Streifen. Im Gegensatze zum ersten Paragraphen soll jetzt die *Cauchy*sche Integrationstheorie einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

rein analytisch entwickelt werden. Der Vollständigkeit halber sind dabei einige im ersten Paragraphen ausgeführte Rechnungen zu wiederholen. Der geometrische Inhalt der neuen Methode soll aber doch nachher (in Nr. 886) angedeutet werden.

Unter dem *Bereiche der Differentialgleichung* (1) wird wie in Nr. 874 ein Bereich verstanden, innerhalb dessen F eine reguläre Funktion der fünf komplexen Veränderlichen x, y, z, p, q ist. *Singulär* heißen solche Wertsysteme x, y, z, p, q, für die außer F auch F_p und F_q gleich Null sind. Es wird vorausgesetzt, daß nicht für alle Wertsysteme des Bereiches, die F zum Verschwinden bringen, auch F_p und F_q gleich Null werden. Wir betrachten nur solche Lösungen $z = \varphi(x, y)$, die zusammen mit $p = \varphi_x$ und $q = \varphi_y$ reguläre Funktionen von x und y innerhalb des Bereiches sind. Eine Lösung heißt *singulär*, wenn sie zusammen mit $p = \varphi_x$ und $q = \varphi_y$ nur durch lauter singuläre Wertsysteme x, y, z, p, q befriedigt wird.

Nun bedeute $z = \varphi(x, y)$ eine nicht singuläre Lösung. Mit z sind auch $p = \varphi_x$ und $q = \varphi_y$ reguläre Funktionen von x und y, für die $F = 0$ wird. Partielle Differentiation von (1) nach x und y gibt daher (wie in Nr. 879):

$$F_x + F_z p + F_p p_x + F_q q_x = 0, \quad F_y + F_z q + F_p p_y + F_q q_y = 0.$$

Da $p_y = q_x$ ist, folgt hieraus:

$$(2)\quad F_p p_x + F_q p_y = -F_x - pF_z, \quad F_p q_x + F_q q_y = -F_y - qF_z.$$

Wir betrachten jetzt das folgende System erster Ordnung von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform:

$$(3)\qquad \frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q,$$

in dem t die unabhängige Veränderliche bedeutet und F_p und F_q ebenso wie z, p und q Funktionen von x und y allein sind und zwar offenbar reguläre Funktionen. Es sei a, b ein Wertepaar von x, y, zu dem es einen Wert von $z = \varphi(x, y)$ gibt. Wird ein Wertepaar x_0, y_0 in der Umgebung der Stelle (a, b) gewählt, so hat das System (3) nach Satz 11, Nr. 824, ein und nur ein System von Lösungen x und y, die für $t = 0$ die Anfangswerte x_0 und y_0 haben:

$$(4)\qquad x = \lambda(x_0, y_0, t), \quad y = \mu(x_0, y_0, t).$$

Dabei sind λ und μ in der Umgebung der Stelle $(a, b, 0)$ reguläre Funktionen von x_0, y_0, t, nach Satz 12, Nr. 825. Setzt man in $z = \varphi(x, y)$ die Werte (4) ein, so wird z eine Funktion von x_0, y_0, t, für die dasselbe gilt. Ebenso für p und q. Dabei ist nach (3):

$$\frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt} = pF_p + qF_q$$

und nach (3) und (2):

$$\frac{dp}{dt} = p_x\frac{dx}{dt} + p_y\frac{dy}{dt} = p_xF_p + p_yF_q = -F_x - pF_z,$$

$$\frac{dq}{dt} = q_x\frac{dx}{dt} + q_y\frac{dy}{dt} = q_xF_p + q_yF_q = -F_y - qF_z,$$

so daß x, y, z, p, q als Funktionen von t das System erster Ordnung von fünf gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_p, \quad \dfrac{dy}{dt} = F_q, \quad \dfrac{dz}{dt} = pF_p + qF_q, \\ \dfrac{dp}{dt} = -F_x - pF_z, \quad \dfrac{dq}{dt} = -F_y - qF_z \end{cases}$$

befriedigen. *Insbesondere hat dies System das Integral F,* da das vollständige Differential von F infolge von (5) verschwindet.

Wenn unter z_0, p_0, q_0 diejenigen Werte verstanden werden, die $z = \varphi(x, y)$, $p = \varphi_x$, $q = \varphi_y$ für $x = x_0$, $y = y_0$ annehmen, hat das System (5) ein und nur ein System von Lösungen x, y, z, p, q, dem für $t = 0$ die Anfangswerte x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 zukommen und das aus Funktionen von x_0, y_0 und t besteht, die sich in der Umgebung der Stelle $(a, b, 0)$ regulär verhalten. Da andererseits diejenigen Funktionen von t, die durch die Substitution (4) aus $z = \varphi$, $p = \varphi_x$, $q = \varphi_y$ hervorgehen, für $t = 0$ gerade die Werte z_0, p_0, q_0 haben, folgt mithin:

Satz 1: Es liege eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion z von x und y vor:

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

und F verhalte sich in einem gewissen Bereiche als Funktion der fünf Veränderlichen x, y, z, p, q regulär. Ferner sei $z = \varphi(x, y)$ eine Lösung von $F = 0$, die sich in der Umgebung eines Wertepaares $x = a$, $y = b$ regulär verhält; dabei werde vorausgesetzt, daß die Werte von x, y, $z = \varphi$, $p = \varphi_x$, $q = \varphi_y$ innerhalb dieser Umgebung dem Bereiche angehören und daß dabei F_p und F_q nicht beide verschwinden. Ist alsdann x_0, y_0 ein Wertepaar in der Umgebung der Stelle (a, b) und sind z_0, p_0 und q_0 die zugehörigen Werte von $z = \varphi(x, y)$, $p = \varphi_x$ und $q = \varphi_y$, so werden die Gleichungen:

$$z = \varphi(x, y), \quad p = \varphi_x, \quad q = \varphi_y$$

in einer gewissen Umgebung von $t = 0$ durch dasjenige Lösungensystem x, y, z, p, q des Systems erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q, \quad \frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q,$$
$$\frac{dp}{dt} = -F_x - pF_z, \quad \frac{dq}{dt} = -F_y - qF_z$$

befriedigt, das für $t = 0$ die Anfangswerte x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 hat.

[**882**

Unter einem *charakteristischen Streifen* der Differentialgleichung $F=0$ soll jedes reguläre Lösungensystem des Systems (5) verstanden werden, dessen Anfangswerte für $t=0$ der Gleichung $F=0$ Genüge leisten. Diese analytische Definition besagt dasselbe wie die geometrische Definition in Nr. 879.

Der Satz 1 läßt sich nun so aussprechen:

Satz 2: In der Umgebung einer Stelle $x=a$, $y=b$, wo die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q)=0$$

eine ihrem Bereiche angehörende nicht singuläre Lösung $z=\varphi(x,y)$ hat, wird das Gleichungensystem:

$$z=\varphi(x, y),\ p=\varphi_x,\ q=\varphi_y$$

von jedem charakteristischen Streifen befriedigt, dessen Anfangswerte x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 beliebige Werte x_0 und y_0 in der Umgebung der Stelle (a, b) und die zugehörigen Werte von φ, φ_x und φ_y sind.

883. Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. In der letzten Nummer wurde von einer Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$F(x, y, z, p, q)=0 \tag{1}$$

ausgegangen und gezeigt, daß sie durch charakteristische Streifen befriedigt wird. Jetzt wird die Betrachtung umzukehren sein: Aus den charakteristischen Streifen sollen die Lösungen abgeleitet werden.

Es seien x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 solche in der Umgebung von $\tau=0$ reguläre *Funktionen einer Hilfsveränderlichen* τ, deren Werte dem Bereiche der Differentialgleichung (1) angehören und den beiden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} & p_0\frac{dx_0}{d\tau}+q_0\frac{dy_0}{d\tau}-\frac{dz_0}{d\tau}=0, \\ & F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)=0 \end{aligned}\right. \tag{2}$$

genügen; die Ableitungen F_p und F_q sollen aber für diese Wertsysteme nicht beide verschwinden. Im Laufe der Betrachtung wird diesen Funktionen x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 von τ noch eine Bedingung auferlegt werden. Ob es überhaupt derartige Funktionen gibt, ist eine Frage, deren Erörterung der Nr. 885 vorbehalten bleibt.

Unter x, y, z, p, q sei nunmehr dasjenige Lösungensystem des Systems erster Ordnung von fünf gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_p, \quad \dfrac{dy}{dt} = F_q, \quad \dfrac{dz}{dt} = pF_p + qF_q, \\ \dfrac{dp}{dt} = -F_x - pF_z, \quad \dfrac{dq}{dt} = -F_y - qF_z \end{cases}$$

verstanden, das für $t = 0$ die Anfangswerte x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 hat und sich in der Umgebung von $t = 0$ regulär verhält. Da die Anfangswerte selbst von τ abhängen, besteht das Lösungensystem aus *Funktionen von t und τ*, die sich in der Umgebung von $t = \tau = 0$ regulär verhalten. Deshalb wird es deutlicher sein, die geraden Differentiationszeichen in (3) zu vermeiden und statt (3) zu schreiben:

$$(4)\qquad \begin{cases} x_t = F_p, \quad y_t = F_q, \quad z_t = pF_p + qF_q, \\ p_t = -F_x - pF_z, \quad q_t = -F_y - qF_z. \end{cases}$$

Das Lösungensystem sei etwa dieses:

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \lambda(t, \tau), \quad y = \mu(t, \tau), \quad z = \nu(t, \tau), \\ \qquad p = \pi(t, \tau), \quad q = \varkappa(t, \tau). \end{cases}$$

Da F nach Nr. 882 ein Integral von (3) ist, wird F für diese fünf Funktionen von t und τ konstant, und weil F insbesondere für $t = 0$ nach der zweiten Gleichung (2) verschwindet, *befriedigen die fünf Funktionen* (5) *die vorgelegte Differentialgleichung* (1) *für alle Werte von t und τ in der Umgebung von* $t = \tau = 0$. Indem wir nun t und τ aus (5) eliminieren, werden wir zu einer Lösung der Differentialgleichung gelangen, nämlich so: Die Funktionen (5) mögen für $t = \tau = 0$ die Werte a, b, c, h_1, h_2 haben. Alsdann definieren die beiden ersten Gleichungen (5) nach Satz 13, Nr. 826, umgekehrt t und τ als reguläre Funktionen von x und y in der Umgebung der Stelle (a, b), wo sie verschwinden, sobald nur noch feststeht, daß die Funktionaldeterminante $x_t y_\tau - y_t x_\tau$, d. h. nach (4) die Determinante $F_p y_\tau - F_q x_\tau$ für $t = \tau = 0$ nicht verschwindet. Aber für $t = 0$ werden x, y, z, p, q gleich x_0, y_0, z_0, p_0, q_0. *Also setzen wir noch voraus, daß:*

$$(6)\qquad \left[\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)}{\partial p_0}\frac{dy_0}{d\tau} - \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)}{\partial q_0}\frac{dx_0}{d\tau}\right]_{\tau = 0} \neq 0$$

sei. Substituiert man nun die durch die beiden ersten Gleichungen (5) definierten Funktionen t und τ von x und y in die drei übrigen Gleichungen, so ergeben sich drei Funktionen:

(7) $$z = \varphi(x, y), \quad p = \chi(x, y), \quad q = \psi(x, y),$$

die sich in der Umgebung der Stelle (a, b) regulär verhalten. Außerdem erfüllen sie die Gleichung $F = 0$. Es braucht also nur noch gezeigt zu werden, daß die Funktionen $p = \chi$ und $q = \psi$ die partiellen Ableitungen der Funktion $z = \varphi$ hinsichtlich x und y sind. Da die Funktionen z, p und q von x und y durch Elimination von t und τ hervorgegangen sind, genügt es zu beweisen, daß die Funktionen x, y, z, p und q von t und τ, die als Lösungensystem von (3) oder (4) definiert waren, den Ausdruck $dz - p dx - q dy$ oder:

$$(z_t - px_t - qy_t)\, dt + (z_\tau - px_\tau - qy_\tau) d\tau$$

zum Verschwinden bringen, d. h. daß die beiden Gleichungen:

(8) $$z_t - px_t - qy_t = 0, \quad z_\tau - px_\tau - qy_\tau = 0$$

bestehen. Die Richtigkeit der ersten leuchtet ein, wenn man darin die Werte von x_t, y_t, z_t aus (4) substituiert. Um die der zweiten zu beweisen, setzen wir:

(9) $$\varrho = z_\tau - px_\tau - qy_\tau.$$

Dann ist:

(10) $$\varrho_t = z_{t\tau} - px_{t\tau} - qy_{t\tau} - p_t x_\tau - q_t y_\tau.$$

Nach (4) ist aber:

$$z_{t\tau} = p_\tau F_p + q_\tau F_q + p\frac{\partial F_p}{\partial \tau} + q\frac{\partial F_q}{\partial \tau},$$

$$x_{t\tau} = \frac{\partial F_p}{\partial \tau}, \quad y_{t\tau} = \frac{\partial F_q}{\partial \tau}.$$

Setzt man diese Werte und die aus (4) zu entnehmenden Werte von p_t und q_t in (10) ein, so kommt:

$$\varrho_t = F_x x_\tau + F_y y_\tau + F_p p_\tau + F_q q_\tau + F_z(px_\tau + qy_\tau)$$

oder, wenn rechts $F_z z_\tau$ addiert und wieder subtrahiert wird, mit Rücksicht auf (9):

$$\varrho_t = \frac{\partial F}{\partial \tau} - F_z \varrho.$$

Aber für das Lösungensystem x, y, z, p, q von (3) ist $F = 0$. Demnach bleibt:

$$\varrho_t = -F_z \varrho.$$

Wäre nun $\varrho \neq 0$, so käme:

$$\frac{\partial \ln \varrho}{\partial t} = -F_z, \text{ d. h. } \varrho = \varrho_0 e^{-\int\limits_0^t F_z\, dt},$$

wo ϱ_0 den Wert von ϱ für $t = 0$, d. h. nach (9) den Wert:

$$\varrho_0 = \frac{dz_0}{d\tau} - p\frac{dx_0}{d\tau} - q\frac{dy_0}{d\tau}$$

bedeutet, der nach der ersten Gleichung (2) verschwindet. Folglich ist in der Tat $\varrho = 0$, also die zweite Gleichung (8) ebenfalls bewiesen. *Mithin ist die unter* (7) *gefundene Funktion* $z = \varphi(x, y)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* $F = 0$.

884. Beweis der Vollständigkeit des Integrationsverfahrens. In der vorigen Nummer haben wir ein Integrationsverfahren gewonnen, durch das, falls man Funktionen x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 von τ finden kann, die den dort aufgestellten Bedingungen genügen, stets eine Lösung $z = \varphi(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung hervorgeht. Wie man diese Bedingungen in allgemeinster Weise zu erfüllen vermag, soll in der nächsten Nummer erörtert werden. Vorher soll hier gezeigt werden, daß das Integrationsverfahren *jede* überhaupt vorhandene nicht singuläre Lösung liefert.

Es sei nämlich $z = \varphi(x, y)$ irgendeine nicht singuläre Lösung der Differentialgleichung $F = 0$. Sie verhalte sich in der Umgebung der Stelle $x = a$, $y = b$ regulär. Dann sind $p = \varphi_x, q = \varphi_y$ und folglich auch F_p und F_q in dieser Umgebung reguläre Funktionen von x und y, und F_p und F_q mögen an der Stelle (a, b) selbst die Werte c_1 und c_2 haben, die nicht beide verschwinden, weil die Lösung nicht singulär ist. Nun mögen unter x_0 und y_0 irgend solche zwei Funktionen von τ verstanden werden, die sich in der Umgebung von $\tau = 0$ regulär verhalten, für $\tau = 0$ die Anfangswerte a und b haben und der Bedingung:

$$\text{(1)} \qquad \left[c_1 \frac{dy_0}{d\tau} - c_2 \frac{dx_0}{d\tau}\right]_{\tau = 0} \neq 0$$

genügen. Solche Funktionen gibt es stets, da c_1 und c_2 nicht beide verschwinden. Ferner bedeute z_0 die Funktion $\varphi(x_0, y_0)$, und es seien p_0 und q_0 ihre partiellen Ableitungen nach x_0

und y_0, so daß auch z_0, p_0, q_0 in der Umgebung von $\tau = 0$ reguläre Funktionen von τ vorstellen. Diese Funktionen genügen nun wegen (1) der Bedingung (6) der letzten Nummer. Außerdem ist für sie dz_0 gleich $p_0 dx_0 + q_0 dy_0$ sowie $F = 0$, d. h. auch die beiden Bedingungen (2) der letzten Nummer sind befriedigt. Man kann somit, ausgehend von diesen fünf bekannten Funktionen x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 von τ, das Integrationsverfahren der letzten Nummer anwenden. Nach Satz 1, Nr. 882, befriedigt alsdann das Lösungensystem x, y, z, p, q die Gleichungen:

$$z = \varphi(x, y), \quad p = \varphi_x, \quad q = \varphi_y,$$

d. h. das Integrationsverfahren liefert gerade diejenige Lösung $z = \varphi(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung, von der wir vorhin ausgingen.

Mithin kann man die Ergebnisse der letzten Nummer so formulieren:

Satz 3: Es liege eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion z von x und y vor:

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

und F verhalte sich in einem gewissen Bereiche als Funktion der fünf Veränderlichen x, y, z, p, q regulär. Jede nicht singuläre Lösung $z = \varphi(x, y)$, die dem Bereiche der Differentialgleichung angehört und sich in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y = b$ regulär verhält, ergibt sich so: Unter x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 werden fünf solche in der Umgebung von $\tau = 0$ reguläre Funktionen einer Hilfsveränderlichen τ verstanden, die den Bedingungen:

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0, \quad \frac{dz_0}{d\tau} = p_0 \frac{dx_0}{d\tau} + q_0 \frac{dy_0}{d\tau},$$

$$[x_0]_{\tau=0} = a, \quad [y_0]_{\tau=0} = b,$$

$$\left[\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)}{\partial p_0}\frac{dy_0}{d\tau} - \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)}{\partial q_0}\frac{dx_0}{d\tau}\right]_{\tau=0} \neq 0$$

genügen. Dasjenige Lösungensystem x, y, z, p, q des Systems erster Ordnung von fünf gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform:

$$\frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q, \quad \frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q,$$
$$\frac{dp}{dt} = -F_x - pF_z, \quad \frac{dq}{dt} = -F_y - qF_z,$$

das für $t = 0$ die Anfangswerte x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 hat und sich in der Umgebung der Stelle $t = 0$ regulär verhält, besteht aus Funktionen:

$$x = \lambda(t, \tau), \quad y = \mu(t, \tau), \quad z = \nu(t, \tau),$$
$$p = \pi(t, \tau), \quad q = \varkappa(t, \tau)$$

der beiden Hilfsveränderlichen t und τ, und diese Funktionen sind in der Umgebung der Stelle $t = \tau = 0$ regulär. Durch $x = \lambda$ und $y = \mu$ werden t und τ als Funktionen von x und y definiert, die für $x = a$, $y = b$ den Wert Null haben und sich in der Umgebung der Stelle (a, b) regulär verhalten. Ihre Substitution in $z = \nu$ liefert eine Lösung:

$$z = \varphi(x, y)$$

von der gesuchten Art. Dieselbe Substitution verwandelt $p = \pi$ und $q = \varkappa$ in die partiellen Ableitungen dieser Lösung nach x und y.

885. Nachweis der Existenz von Lösungen. Schließlich erübrigt nur noch zu zeigen, wie man die Bedingungen befriedigen kann, die für die Funktionen x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 von τ in dem letzten Satze aufgestellt worden sind.

Es sei:

$$(1) \qquad x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad p = h_1, \quad q = h_2$$

ein bestimmtes dem Bereiche der Differentialgleichung $F = 0$ angehöriges Wertsystem, das die Differentialgleichung erfüllt und nicht singulär sein soll, sodaß F_p und F_q für dies Wertsystem solche Werte c_1 und c_2 annehmen, die nicht beide gleich Null sind. Nun wählt man drei Funktionen x_0, y_0, z_0 von τ, die für $\tau = 0$ gleich a, b, c werden und sich in der Umgebung von $\tau = 0$ regulär verhalten. Ihre Ableitungen nach τ sollen außerdem an der Stelle $\tau = 0$ den Bedingungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \left[c_1 \dfrac{dy_0}{d\tau} - c_2 \dfrac{dx_0}{d\tau}\right]_{\tau=0} \neq 0, \\ \left[\dfrac{dz_0}{d\tau}\right]_{\tau=0} = h_1 \left[\dfrac{dx_0}{d\tau}\right]_{\tau=0} + h_2 \left[\dfrac{dy_0}{d\tau}\right]_{\tau=0} \end{cases}$$

genügen. Diese Annahmen sind immer erfüllbar, weil c_1 und c_2 nicht beide verschwinden. Um nun noch p_0 und q_0 als Funktionen von τ zu gewinnen, bildet man die beiden Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0, \\ p_0 \dfrac{dx_0}{d\tau} + q_0 \dfrac{dy_0}{d\tau} - \dfrac{dz_0}{d\tau} = 0. \end{cases}$$

Sie lassen sich durch Funktionen p_0 und q_0 von τ erfüllen, die für $\tau = 0$ die Anfangswerte h_1 und h_2 haben. Denn die linken Seiten dieser Bedingungen stellen, weil x_0, y_0 und z_0 von τ abhängen, Funktionen von τ, p_0 und q_0 dar, die sich in der Umgebung von $\tau = 0$, $p_0 = h_1$, $q_0 = h_2$ regulär verhalten. Außerdem hat ihre Funktionaldeterminante hinsichtlich p_0 und q_0, nämlich:

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)}{\partial p_0}\frac{dy_0}{d\tau} - \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)}{\partial q_0}\frac{dx_0}{d\tau},$$

für $\tau = 0, p_0 = h_1, q_0 = h_2$ nach der ersten Bedingung (2) einen von Null verschiedenen Wert. Nach Satz 13, Nr. 826, haben die Gleichungen (3) folglich Auflösungen p_0 und q_0, denen für $\tau = 0$ die Anfangswerte h_1 und h_2 zukommen und die sich in der Umgebung von $\tau = 0$ als Funktionen von τ regulär verhalten.

Hiermit sind solche fünf Funktionen x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 von τ gefunden, die den Bedingungen des Satzes 3 genügen. Überdies gibt dies Verfahren *jedes* System von Funktionen von der verlangten Art. Die Voraussetzungen also, unter denen die in Nr. 883 entwickelte Integrationsmethode anwendbar ist, sind erfüllt. Mithin folgt

Satz 4: Es liege eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion z von x und y vor:

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

und F verhalte sich in einem gewissen Bereiche als Funktion der fünf Veränderlichen x, y, z, p, q regulär. Ferner sei:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad p = h_1, \quad q = h_2$$

ein Wertsystem, das dem Bereiche angehört und der Gleichung $F = 0$ genügt, für das aber F_p und F_q solche Werte c_1 und c_2 haben, die nicht beide gleich Null sind. Alsdann hat die Differentialgleichung unbegrenzt viele nicht singuläre Lösungen $z = \varphi(x, y)$, die sich in der Umgebung der Stelle $x = a$, $y = b$ regulär verhalten und zusammen mit $p = \varphi_x$, $q = \varphi_y$ für $x = a, y = b$ die Werte c, h_1 und h_2 haben. Man kann insbesondere vorschreiben, daß die Gleichung $z = \varphi(x, y)$ durch solche drei bestimmt ge-

wählte in der Umgebung von $\tau = 0$ *reguläre Funktionen* x_0, y_0, z_0 *von* τ *erfüllt werden, denen für* $\tau = 0$ *die Anfangswerte* a, b, c *zukommen und für die:*

$$c_1 \frac{dy_0}{d\tau} - c_2 \frac{dx_0}{d\tau}$$

an der Stelle $\tau = 0$ *nicht verschwindet, dagegen:*

$$\frac{dz_0}{d\tau} - h_1 \frac{dx_0}{d\tau} - h_2 \frac{dy_0}{d\tau}$$

an dieser Stelle gleich Null wird. Diesen Forderungen genügt stets eine und nur eine Lösung.

886. Geometrische Deutung des Integrationsverfahrens. Wenn man x, y, z als rechtwinklige Koordinaten auffaßt, besteht das Integrationsverfahren in folgendem: Zuerst wird *ein bestimmtes Flächenelement* der Differentialgleichung:

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

ausgewählt, dessen Punkt A die Koordinaten a, b, c hat, während h_1 und h_2 die Bestimmungsstücke der Stellung seiner Ebene bedeuten. Dies Flächenelement darf aber nicht singulär sein. Es berührt den zu A gehörigen Elementarkegel längs einer Geraden g, siehe Fig. 62. Diese Gerade ist die Tangente einer von A ausgehenden Charakteristik k_0, und nach (5) in Nr. 874 verhalten sich die Differentiale von x und y beim Fortschreiten längs g zueinander wie c_1 und c_2, wenn dies die Werte von F_p und F_q für das betrachtete Flächenelement von A bedeuten.

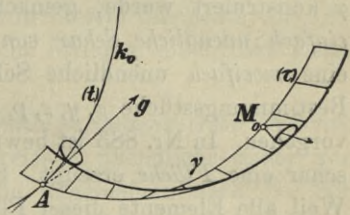

Fig. 62.

Nach dem letzten Satze wählt man nun drei Funktionen x_0, y_0, z_0 von τ, die für $\tau = 0$ die Anfangswerte a, b, c haben. Diese Funktionen sind die laufenden Koordinaten einer von A ausgehenden *Kurve* γ, längs deren τ die unabhängige Veränderliche bedeutet. Die Bedingungen, die der Kurve γ nach (2) in voriger Nummer aufzuerlegen sind, besagen, daß sie in A das Flächenelement (a, b, c, h_1, h_2) zwar berühren soll, aber nicht längs der Geraden g. Im Übrigen ist die Kurve γ noch willkürlich.

Alsdann werden p_0 und q_0 auf Grund der Forderungen (3) der letzten Nummer als Funktionen von τ ermittelt. Diese Forderungen bedeuten: Man konstruiert an jeder Stelle (x_0, y_0, z_0) oder M_0 von γ ein Flächenelement $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, das sowohl den zu M_0 zugeordneten Elementarkegel als auch die Kurve γ berührt. So entsteht längs γ ein *Streifen von Flächenelementen*, die zwar der Differentialgleichung angehören, jedoch *keinen* charakteristischen Streifen bilden.

Nun wird — vgl. Satz 3, Nr. 884, — von jedem Element $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ dieses Streifens aus derjenige *charakteristische Streifen* längs je einer Charakteristik k konstruiert, der es zum Anfangselement hat, ebenso wie schon k_0 von A ausgehend konstruiert wurde, denn die Differentialgleichungen jenes Satzes, d. h. die Gleichungen (5) in Nr. 882, definieren ja die charakteristischen Streifen, indem die Bestimmungsstücke x, y, z, p, q der Elemente eines solchen Streifens als Funktionen einer Hilfsveränderlichen t dargestellt werden.

Da diese Operation von jedem Elemente aus, das längs γ konstruiert wurde, gemacht werden soll, ergibt sich eine *einfach unendliche Schar von charakteristischen Streifen*, daher eine *zweifach* unendliche Schar von Flächenelementen, deren Bestimmungsstücke x, y, z, p, q als Funktionen von t und τ hervorgehen. In Nr. 883 ist bewiesen worden, daß diese Elementenschar eine *Fläche* erzeugt. Siehe die Gleichungen (8) ebenda. Weil alle Elemente dieser Fläche der Differentialgleichung angehören, geht so eine *Integralfläche* hervor.

In Nr. 882 wurde bewiesen, daß überhaupt jede nicht singuläre Integralfläche durch eine einfach unendliche Schar von charakteristischen Streifen erzeugt wird, und in Nr. 885 wurde die geometrisch sofort einleuchtende Tatsache analytisch dargetan, daß es auf einer solchen Fläche stets Kurven γ gibt, die den oben formulierten Anfangsbedingungen genügen. Daraus ergibt sich alsdann, daß die vorhin ausgeführte Konstruktion der Integralflächen *sämtliche* nicht singulären Integralflächen liefern muß.

Eine Aufgabe, bei der jedem Punkte M des Raumes gesetzmäßig ein Elementarkegel mit der Spitze M zugeordnet ist und diejenigen Flächen gesucht werden, die überall die Elementarkegel berühren, führt nach Nr. 874 stets auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Dabei können die Elementarkegel unter anderen von solchen Flächenelementen (x, y, z, p, q) berührt werden, die der z-Achse parallel sind, so daß wenigstens eines der Bestimmungsstücke p und q unendlich wird. Solche Elemente sind bei der analytischen Behandlung ausgeschlossen. In der älteren Fassung der Cauchyschen Integrationsmethode pflegte man nun die Kurve γ von vornherein zu beschränken, z. B. auf eine der Koordinatenebenen zu legen, und da konnte es vorkommen, daß diejenige Integralfläche, die eine solche Kurve γ enthält, gerade längs γ Elemente parallel der z-Achse aufwies, woraus sich alsdann ergab, daß die Methode bei der analytischen Durchführung versagte. Bei der allgemeinen Fassung, die wir hier der Methode nach *Lie* gegeben haben, sind diese Mängel beseitigt.

Man erkennt leicht: Wenn zwei nicht singuläre Integralflächen einander in einem Punkte M_0 berühren, haben sie nicht nur das Flächenelement von M_0, sondern den ganzen charakteristischen Streifen gemein, der von diesem Elemente ausgeht. Ferner gehört jeder charakteristische Streifen unbegrenzt vielen Integralflächen an.

Die *linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* haben nach Nr. 856 eine nur *zwei*fach unendliche Schar von Charakteristiken, dagegen wie die allgemeinen nach Nr. 858 eine *drei*fach unendliche Schar von charakteristischen Streifen. Der Unterschied liegt hier darin, daß bei einer linearen Differentialgleichung jede einzelne Charakteristik unbegrenzt vielen charakteristischen Streifen angehört, bei einer nicht-linearen jedoch nicht.

887. Ein Beispiel. Vorgelegt sei die partielle Differentialgleichung:

$$(1) \qquad F = zp - ypq - mq = 0,$$

in der m eine von Null verschiedene gegebene Konstante bedeute. Wäre $m = 0$, so zerfiele die Gleichung in zwei lineare. Das System für die charakteristischen Streifen ist nach (5) in Nr. 882 dieses:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=z-yq, \quad \dfrac{dy}{dt}=-yp-m, \quad \dfrac{dz}{dt}=zp-2ypq-mq, \\ \dfrac{dp}{dt}=-p^2, \quad \dfrac{dq}{dt}=0. \end{cases}$$

Ein Integral ist, wie immer, F selbst; ein zweites ist augenscheinlich q und ein drittes $1:p-t$. Da die Anfangswerte für $t=0$ mit x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 bezeichnet werden sollen, ist also:

$$zp-ypq-mq=z_0p_0-y_0p_0q_0-mq_0, \quad q=q_0, \quad \frac{1}{p}-t=\frac{1}{p_0}$$

zu setzen. Werden die hieraus für z, p und q folgenden Werte in die beiden ersten Gleichungen (2) substituiert, so geht aus der zweiten eine *lineare* gewöhnliche Differentialgleichung für y hervor, die nach Nr. 716 die Lösung:

$$y=\frac{2y_0p_0+m}{2p_0}\,\frac{1}{p_0t+1}-\frac{m}{2p_0}(p_0t+1)$$

liefert, sodaß die erste Gleichung schließlich noch gibt:

$$x=x_0+(z_0-y_0q_0)\left(\tfrac{1}{2}p_0t^2+t\right).$$

Demnach ist das allgemeine Lösungensystem von (2) dieses:

$$(3)\quad \begin{cases} x=x_0-\dfrac{z_0-y_0q_0}{2p_0}+\dfrac{z_0-y_0q_0}{2p_0}(p_0t+1)^2, \\ y=\dfrac{2y_0p_0+m}{2p_0}\,\dfrac{1}{p_0t+1}-\dfrac{m}{2p_0}(p_0t+1), \\ z=\dfrac{q_0(2y_0p_0+m)}{2p_0}\,\dfrac{1}{p_0t+1}+\dfrac{2z_0p_0-2y_0p_0q_0-mq_0}{2p_0}(p_0t+1), \\ p=\dfrac{p_0}{p_0t+1}, \quad q=q_0. \end{cases}$$

Es gilt jedoch nicht für $p_0=0$, denn dann hat die vierte Gleichung des Systems (2) nicht mehr das Integral $1:p-t$, sondern die Lösung $p=0$. Auf diesen Fall kommen wir nachher zurück.

Die Anfangswerte x_0, y_0, z_0 sind nun als willkürliche Funktionen von τ zu wählen und p_0 und q_0 als Funktionen von τ nach Satz 3, Nr. 884, aus den Bedingungen:

$$(4)\qquad z_0p_0-y_0p_0q_0-mq_0=0, \quad p_0x_0'+q_0y_0'-z_0'=0$$

zu ermitteln. Hieraus ergeben sich zwei Wertepaare für p_0 und q_0. Allgemein geredet gehen also durch eine beliebige Kurve γ, deren laufende Koordinaten die Funktionen x_0, y_0, z_0 von τ sind, je zwei Integralflächen. Diese Flächen werden dann analytisch durch die drei ersten Gleichungen (3) dargestellt, die x, y, z als Funktionen von t und τ definieren, vorausgesetzt, daß p_0 und q_0 darin die durch (4) bestimmten Funktionen von τ bedeuten.

Die Hilfsveränderliche t läßt sich aus den Gleichungen der Fläche eliminieren, nicht aber die Hilfsveränderliche τ, da sie in willkürlichen Funktionen auftritt. Es gilt vielmehr hier wie meistens bei der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung die Bemerkung, daß die explizite Darstellung der *allgemeinen* Lösungen z als Funktionen von x und y an der Unausführbarkeit von Eliminationen scheitert, was natürlich nicht hindert, daß *partikulare* Lösungen explizite darstellbar sein können, nämlich solche, die sich ergeben, wenn man für x_0, y_0, z_0 spezielle Funktionen von τ wählt.

Die Gleichungen der Integralflächen lassen sich aber übersichtlicher gestalten. Setzt man nämlich:

$$(5)\qquad \frac{p_0}{p_0 t + 1} = u, \qquad \frac{2y_0 p_0 + m}{p_0{}^2} = v$$

und berücksichtigt man noch, daß sich der Wert von z in (3) vermöge der ersten Bedingung (4) bedeutend vereinfacht, so kommt:

$$(6)\qquad \begin{cases} x = x_0 - \dfrac{z_0 - y_0 q_0}{2p_0} + \dfrac{z_0 - y_0 q_0}{2} p_0 \cdot \dfrac{1}{u^2}, \\ y = \frac{1}{2}\left(uv - \dfrac{m}{u}\right), \quad z = \dfrac{q_0}{2}\left(uv + \dfrac{m}{u}\right). \end{cases}$$

Außer u und v treten hierin noch q_0 und die beiden Größen:

$$(7)\qquad \lambda = x_0 - \frac{z_0 - y_0 q_0}{2p_0}, \quad \mu = \frac{z_0 - y_0 q_0}{2} p_0$$

auf. Für q_0 darf man infolge von (7) und der ersten Gleichung (4) auch $2\mu : m$ setzen.

Nun kann man sich vorstellen, daß u und v statt t und τ vermöge (5) als neue Hilfsveränderliche eingeführt werden. Insbesondere ist v eine Funktion von τ allein oder also umgekehrt τ eine Funktion von v allein, folglich auch λ und μ. Deshalb stellen sich die Integralflächen so dar:

$$(8)\qquad x = \lambda(v) + \frac{\mu(v)}{u^2}, \quad y = \frac{1}{2}\left(uv - \frac{m}{u}\right), \quad z = \frac{\mu(v)}{m}\left(uv + \frac{m}{u}\right).$$

Dabei sind λ und μ jedoch nicht völlig willkürliche Funktionen von v, denn die zweite Bedingung (4) muß noch berücksichtigt werden. Welche Form sie in den neuen Hilfsveränderlichen u und v annimmt, ermittelt man am bequemsten so:

Nach den letzten beiden Gleichungen (3) und nach (5) ist:

$$p = u, \quad q = q_0 = \frac{2\mu(v)}{m}, \tag{9}$$

und alle Werte (8) und (9) befriedigen die partielle Differentialgleichung (1). Also ist nur noch zu verlangen, daß p und q auch wirklich die partiellen Ableitungen von z nach x und y bedeuten, d. h. daß für alle Werte von u und v die durch (8) definierten Funktionen von u und v der Bedingung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

oder:

$$dz - u\,dx - \frac{2\mu(v)}{m}\,dy = 0$$

Genüge leisten. Setzt man hierin die vollständigen Differentiale der Werte (8) von x, y und z ein, so reduziert sich die Bedingung auf:

$$m\lambda' - v\mu' = 0.$$

Da sie durch teilweise Integration gibt:

$$m\lambda = v\mu - \int \mu\,dv,$$

kann man für das mit m dividierte Integral von μ eine willkürliche Funktion ω von v einführen und also setzen:

$$\mu = m\omega', \quad \lambda = v\omega' - \omega.$$

Substitution dieser Werte in (8) liefert schließlich die neue Darstellung der Integralflächen:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\omega'(v)}{u}\left(uv + \frac{m}{u}\right) - \omega(v), \\ y &= \tfrac{1}{2}\left(uv - \frac{m}{u}\right), \quad z = \omega'(v)\left(uv + \frac{m}{u}\right). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

In dem Falle $p_0 = 0$ ergibt sich aus der ersten Bedingung (4) auch $q_0 = 0$ und aus der zweiten Bedingung (4) noch $z_0 =$ konst. Er tritt also ein, wenn die Kurve γ in einer Ebene parallel zur xy-Ebene gewählt wird. Alsdann liefern die drei ersten Gleichungen (2):

$$x = x_0 + z_0 t, \quad y = y_0 - mt, \quad z = z_0.$$

Dabei ist z_0, wie gesagt, eine Konstante, während x_0 und y_0

887]

irgendwie als Funktionen von τ gewählt werden können, denn die Bedingungen (4) sind befriedigt. Jene Gleichungen aber definieren die Ebene $z = z_0$. In der Tat hat die partielle Differentialgleichung (1) auch die Lösungen $z =$ konst.

Singuläre Lösungen sind nicht vorhanden, denn für sie müßte nach Nr. 874 außer (1) auch das Gleichungenpaar gelten:

$$F_p = z - yq = 0, \quad F_q = -yp - m = 0,$$

so daß sich $z = 0$, $q = 0$ und daher auch $p = \partial z : \partial x = 0$ ergäbe, was mit der Gleichung $F_q = 0$ wegen $m \neq 0$ unvereinbar ist.

§ 3. Nachträge und Verallgemeinerungen.

888. Die singulären Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Nach Nr. 874 sind diejenigen Lösungen der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

(1) $$F(x, y, z, p, q) = 0$$

singulär, für die auch F_p und F_q verschwindet. Weil nach (1) für jede Lösung:

(2) $$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz + F_p\,dp + F_q\,dq = 0$$

wird, folgt aus $F_p = 0$ und $F_q = 0$ sowie wegen $dz = p\,dx + q\,dy$, daß im Falle einer singulären Lösung $F_x + pF_z$ und $F_y + qF_z$ gleich Null werden. *Die singulären Lösungen sind somit diejenigen, für die die rechten Seiten der Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen gleich Null sind,* vgl. (5) in Nr. 882. Von welchen Flächenelementen $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ einer singulären Integralfläche man auch ausgehen mag, stets geben diese Differentialgleichungen für x, y, z, p, q die Anfangswerte x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 selbst, so daß also *die singulären Integralflächen nicht durch charakteristische Streifen erzeugt werden.*

Will man alle singulären Lösungen ermitteln, so sucht man zunächst diejenigen Funktionen z, p und q von x und y, die außer der Gleichung (1) auch die Gleichungen:

(3) $$F_p = 0, \quad F_q = 0, \quad F_x + pF_z = 0, \quad F_y + qF_z = 0$$

befriedigen. Im allgemeinen darf man das Vorhandensein solcher Funktionen nicht erwarten. Gibt es aber solche, gehören sie ferner dem Bereiche der Differentialgleichung an und verhalten sie sich regulär, so muß noch verlangt werden, daß die Funktionen p und q die partiellen Ableitungen der Funktion z sind. *Diese letzte Untersuchung ist jedoch nicht mehr nötig, wenn* F_z *für die durch* (3) *definierten Funktionen* z, p *und* q *von* x *und* y *nicht verschwindet.* Denn wenn man in (2) die Werte von F_x, F_y, F_p und F_q aus (3) einsetzt, so kommt wegen $F_z \neq 0$ von selbst:

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

In jedem Falle erfordert die Bestimmung der singulären Lösungen nur Differentiationen, Eliminationen und Substitutionen. Ist eine *vollständige* Lösung:

$$z = \varphi(x, y, a, b)$$

bekannt, so ergibt sich eine eventuell vorhandene singuläre Lösung nach Nr. 877 durch Elimination von a und b aus dieser Funktion vermöge der beiden Gleichungen:

$$\varphi_a = 0, \quad \varphi_b = 0.$$

889. Verallgemeinerung der Clairautschen Differentialgleichungen. Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung drückt nach Nr. 874 eine Eigenschaft der Flächenelemente (x, y, z, p, q) ihrer Integralflächen aus, indem diese Elemente die ihren Punkten zugeordneten Elementarkegel berühren müssen. Dies ist also eine Eigenschaft, die den Tangentenebenen der Flächen und ihren Berührungspunkten zukommt. Eine solche Eigenschaft kann aber unter Umständen *unabhängig von der Lage der Berührungspunkte* der Tangentenebenen sein. Da die Ebene des Elements (x, y, z, p, q) in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichung:

$$p(\mathfrak{x} - x) + q(\mathfrak{y} - y) - (\mathfrak{z} - z) = 0$$

oder:

$$p\mathfrak{x} + q\mathfrak{y} - \mathfrak{z} = px + qy - z$$

hat, sind p, q und $px + qy - z$ die Bestimmungsstücke der Ebene allein. Mithin liegt eine Eigenschaft von der angegebenen besonderen Art vor, wenn die Differentialgleichung die Form:

$$(1) \qquad F(p, q, px + qy - z) = 0$$

oder, nach z aufgelöst, die Form:

$$(2) \qquad z = px + qy + f(p, q)$$

hat. Hiermit wird eine Bemerkung in Nr. 721 über Clairautsche Differentialgleichungen sinngemäß auf den Raum übertragen, so daß man die partiellen Differentialgleichungen von der Form (1) oder (2) als *Verallgemeinerungen der Clairautschen Differentialgleichungen* bezeichnen kann.

Jede Ebene:

$$(3) \qquad z = ax + by + f(a, b)$$

mit den beiden willkürlichen Konstanten a und b ist eine Integralfläche von (2), da hier $p = a$ und $q = b$ ist. Durch (3) wird eine *vollständige* Lösung (vgl. Nr. 876) dargestellt, und nach Nr. 877 (vgl. auch den Anfang von Nr. 881) ergeben sich alle übrigen Integralflächen durch Einhüllung aus den Ebenen (3). Die übrigen nicht singulären Integralflächen sind deshalb nach Nr. 281, 282 *abwickelbare* Flächen. Eine singuläre Integralfläche ist vorhanden, wenn sich a und b vermöge:

$$(4) \qquad x + f_a = 0, \quad y + f_b = 0$$

aus (3) eliminieren lassen.

890. Die Legendresche und die Eulersche Transformation. Wenn die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

nicht gerade abwickelbare Flächen sind, werden p und q auf den Integralflächen nach Satz 33, Nr. 349, voneinander unabhängige Funktionen von x und y sein. *Man kann daher p und q statt x und y als unabhängige Veränderliche benutzen.* Als *abhängige* Funktion kann man alsdann statt z eine Funktion von x, y, z, p und q wählen.

Insbesondere benutzte *Legendre* als abhängige Größe $px + qy - z$. Die dadurch bewirkte *Legendresche Transformation* der Differentialgleichung (1) kommt wie folgt zustande. Man setzt:

$$(2) \qquad \bar{x} = p, \quad \bar{y} = q, \quad \bar{z} = px + qy - z$$

und definiert $\bar{p}$ und $\bar{q}$ durch:

$$d\bar{z} = \bar{p}\, d\bar{x} + \bar{q}\, d\bar{y}.$$

Substituiert man hierin die Werte (2), so kommt:

$$x\,dp + y\,dq + p\,dx + q\,dy - dz = \bar{p}\,dp + \bar{q}\,dq,$$

d. h. wegen $dz = p\,dx + q\,dy$:

$$(x - \bar{p})dp + (y - \bar{q})dq = 0$$

oder einzeln:

(3) $$\bar{p} = x, \quad \bar{q} = y.$$

Folglich geht die Differentialgleichung (1) vermöge der Legendreschen Transformation über in die neue partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(\bar{p}, \bar{q}, \bar{p}\bar{x} + \bar{q}\bar{y} - \bar{z}, \bar{x}, \bar{y}) = 0$$

für die Funktion $\bar{z}$ von $\bar{x}$ und $\bar{y}$. Hat sie z. B. die Lösung $\bar{z} = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$, so setzt man:

$$\bar{z} = \varphi(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{p} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{q} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{y}}$$

und führt hierin nach (2) und (3) wieder die ursprünglichen Veränderlichen ein. Dann kommt:

$$px + qy - z = \varphi(p, q), \quad x = \frac{\partial \varphi(p, q)}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial \varphi(p, q)}{\partial q}.$$

Berechnet man aus den beiden letzten Gleichungen p und q als Funktionen von x und y und setzt sie in die erste Gleichung ein, so geht z als Funktion von x und y und damit als Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung (1) hervor.

Diese zuweilen zur Vereinfachung einer partiellen Differentialgleichung nützliche Legendresche Transformation, die übrigens schon in Nr. 100 besprochen wurde, ist unbrauchbar, wenn die Integralflächen der vorgelegten Gleichung (1) abwickelbare Flächen sind. In einem solchen Falle kann sie nur die etwa vorhandenen nicht abwickelbaren singulären Integralflächen liefern. Dies ist der Fall bei der in der vorigen Nummer besprochenen Differentialgleichung von der besonderen Form:

(4) $$z = px + qy + f(p, q).$$

Infolge von (2) und (3) geht sie über in die Differentialgleichung *nullter* Ordnung:

$$\bar{z} + f(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

die eben nur die eine Lösung $\bar{z} = -f(\bar{x}, \bar{y})$ liefert. Dabei ist:

$$\bar{p} + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \bar{q} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = 0,$$

so daß die Einführung der alten Veränderlichen außer (4) noch die Gleichungen:

$$x + \frac{\partial f(p, q)}{\partial p} = 0, \quad y + \frac{\partial f(p, q)}{\partial q} = 0$$

gibt. Eliminiert man mittels dieser beiden Gleichungen p und q aus (4), so geht demnach nur die singuläre Lösung der Differentialgleichung (4) hervor. Man sieht, daß dies Verfahren mit dem in voriger Nummer übereinstimmt, vgl. (3) und (4) ebenda.

Die Legendresche Transformation ist nur ein spezieller Fall einer sehr umfangreichen Klasse von Transformationen, die in voller Allgemeinheit erst von *Lie* gefunden wurden und *Berührungstransformationen* heißen. Die Grenzen, die wir uns gezogen haben, gestatten uns aber nicht, hierauf einzugehen. Wir erwähnen nur noch eine ältere, nämlich von *Euler* benutzte Transformation von dieser Art und zeigen ihre Anwendbarkeit an einem Beispiele.

Bei der *Eulerschen Transformation* werden p und y als unabhängige Veränderliche gewählt, während $z - px$ als abhängige angenommen wird. Man setzt also:

(5) $$\bar{x} = p, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z - px$$

und außerdem:

$$d\bar{z} = \bar{p}\,d\bar{x} + \bar{q}\,d\bar{y}.$$

Hieraus folgt durch Substitution der Werte (5):

$$dz - p\,dx - x\,dp = \bar{p}\,dp + \bar{q}\,dy$$

oder wegen $dz = p\,dx + q\,dy$:

$$(q - \bar{q})dy = (x + \bar{p})dp,$$

woraus man schließt:

(6) $$\bar{p} = -x, \quad \bar{q} = q.$$

Die Gleichungen (5) und (6) stellen zusammen die in Rede stehende Transformation dar. Sie verwandelt die Differentialgleichung (1) in:

$$F(-\bar{p}, \bar{y}, \bar{z} - \bar{p}\bar{x}, \bar{x}, \bar{q}) = 0.$$

Hat sie die Lösung $\bar{z} = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$, so setzt man:

$$\bar{z} = \varphi(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{p} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{q} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{y}}$$

nnd führt hierin nach (5) und (6) wieder die alten Veränderlichen ein. Dann kommt:

$$z - px = \varphi(p, y), \quad x = -\frac{\partial \varphi(p, y)}{\partial p}, \quad q = \frac{\partial \varphi(p, y)}{\partial y}.$$

Eliminiert man hieraus p und q, so geht z als Funktion von x und y und damit als Lösung von (1) hervor.

Beispiel: Die in Nr. 887 betrachtete Differentialgleichung:

$$(7) \qquad zp - ypq - mq = 0$$

geht vermöge der Eulerschen Transformation über in:

$$(8) \qquad \bar{x}^2 \bar{p} + (\bar{x}\bar{y} + m)\bar{q} = \bar{x}\bar{z}.$$

Dies aber ist eine *lineare* Differentialgleichung:

$$\bar{x}^2 \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}} + (\bar{x}\bar{y} + m)\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}} = \bar{x}\bar{z},$$

die nach Satz 3, Nr. 854, und Satz 1, Nr. 853, dem Systeme:

$$\frac{d\bar{x}}{\bar{x}^2} = \frac{d\bar{y}}{\bar{x}\bar{y} + m} = \frac{d\bar{z}}{\bar{x}\bar{z}}$$

äquivalent ist, das die Integrale

$$\frac{2\bar{x}\bar{y} + m}{\bar{x}^2} \quad \text{und} \quad \frac{\bar{z}}{\bar{x}}$$

hat. Somit stellt:

$$\bar{z} = \bar{x}\,\omega\left(\frac{2\bar{x}\bar{y} + m}{\bar{x}^2}\right)$$

die Lösungen von (8) dar; dabei ist ω eine willkürliche Funktion. Nun wird:

$$\bar{p} = \omega - 2\frac{\bar{x}\bar{y} + m}{\bar{x}^2}\,\omega', \quad \bar{q} = 2\omega'.$$

Führt man wieder die ursprünglichen Veränderlichen vermöge (5) und (6) ein, so kommt:

$$z - px = p\omega, \quad x = -\omega + 2\frac{py + m}{p^2}\,\omega', \quad q = 2\omega',$$

wobei jetzt ω eine willkürliche Funktion von

$$v = \frac{2py + m}{p^2}$$

bedeutet. Bezeichnet man p mit u, so folgt:

$$x = \frac{\omega'(v)}{u}\left(uv + \frac{m}{u}\right) - \omega(v),$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left(uv - \frac{m}{u}\right), \quad z = \omega'(v)\left(uv + \frac{m}{u}\right).$$

Genau dieselbe Darstellung der Integralflächen der Differentialgleichung (7) mittels zweier Hilfsveränderlicher u und v ergab sich in Nr. 887 unter (10).

891. Integrationsmethode im Falle von n unabhängigen Veränderlichen. Wir kommen zur Verallgemeinerung der im zweiten Paragraphen gegebenen Integrationsmethode auf den Fall einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(1) \qquad F(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0$$

für eine Funktion z von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$. Dabei bedeuten $p_1, p_2, \ldots p_n$ die partiellen Ableitungen erster Ordnung von z nach $x_1, x_2, \ldots x_n$. Unter dem *Bereiche der Differentialgleichung* wird ein Variabilitätsbereich aller $2n+1$ Veränderlicher verstanden, innerhalb dessen sich F regulär verhält. Es wird vorausgesetzt, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung von F nach $p_1, p_2, \ldots p_n$ nicht sämtlich für alle diejenigen Wertsysteme verschwinden, die der Gleichung (1) Genüge leisten.

Unter Lösungen der Differentialgleichung (1) verstehen wir solche Funktionen z von $x_1, x_2, \ldots x_n$, deren Werte zusammen mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ und ihren Ableitungen $p_1, p_2, \ldots p_n$ dem Bereiche angehören, die sich ferner regulär verhalten und überdies die Gleichung (1) befriedigen. *Singulär* heißen solche Lösungen, für die alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von F nach $p_1, p_2, \ldots p_n$ verschwinden. Ihre Ermittlung erfordert nur Differentiationen, Eliminationen und Substitutionen.

Ist $z = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Lösung, so sind auch $p_1, p_2, \ldots p_n$ reguläre Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, und aus (1) folgt dann durch Differentiation nach x_i:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z} p_i + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial x_i} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Weil nun $\partial p_k : \partial x_i$ dasselbe wie $\partial p_i : \partial x_k$ bedeutet, kann man hierfür schreiben:

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_i}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_i}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_i}{\partial x_n} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i\frac{\partial F}{\partial z}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Entsprechend den Entwicklungen in Nr. 882 betrachtet man das System erster Ordnung von n gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Normalform:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \dots n), \tag{3}$$

worin t die unabhängige Veränderliche bedeutet und die rechten Seiten nur von $x_1, x_2, \dots x_n$ abhängen, da $z = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ ist. Setzt man nun in $z = \varphi$ dasjenige Lösungensystem von (3) ein, das für $t = 0$ die Anfangswerte $x_1{}^0, x_2{}^0, \dots x_n{}^0$ hat, so wird z eine Funktion von t, und es ist nach (3):

$$\frac{dz}{dt} = p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial F}{\partial p_2} + \cdots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_n}$$

sowie:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial p_i}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{\partial p_i}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n},$$

so daß sich mit Rücksicht auf (2) insgesamt ergibt:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dz}{dt} = \sum_1^n{}_k\, p_k \frac{\partial F}{\partial p_k}, \\ &\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial F}{\partial z} \qquad (i = 1, 2, \dots n). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Dies System tritt hier an die Stelle des Systems (5) von Nr. 882, und wenn man jedes solche Lösungensystem von (4), dessen Anfangswerte $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0, z_0$ und $p_1^0, p_2^0, \dots p_n^0$ für $t = 0$ der vorgelegten Gleichung (1) Genüge leisten, einen *charakteristischen Streifen* nennt, ergibt sich wie in Satz 2 jener Nummer, daß jede Lösung $z = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ von charakteristischen Streifen erzeugt wird.

Zur Integration der Differentialgleichung (1) verfährt man nun nach Nr. 883 so: Es werden unter $x_1^0, \dots x_n^0, z_0, p_1^0, \dots p_n^0$ solche $2n + 1$ in der Umgebung von $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_{n-1} = 0$ reguläre *Funktionen von* $n - 1$ *Hilfsveränderlichen* $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{n-1}$ verstanden, deren Werte dem Bereiche der Differentialgleichung (1) angehören und den n Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &F(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0, z_0, p_1^0, p_2^0, \dots p_n^0) = 0, \\ &p_1^0 \frac{\partial x_1^0}{\partial \tau_k} + p_2^0 \frac{\partial x_2^0}{\partial \tau_k} + \cdots + \frac{\partial x_n^0}{\partial \tau_k} - \frac{\partial z_0}{\partial \tau_k} = 0 \\ &\qquad (k = 1, 2, \dots n - 1) \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Genüge leisten (vgl. (2) in Nr. 883). Überdies wird noch vorausgesetzt, daß die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1^0}{\partial \tau_1} & \frac{\partial x_1^0}{\partial \tau_2} & \cdots & \frac{\partial x_1^0}{\partial \tau_{n-1}} & \frac{\partial F_0}{\partial p_1^0} \\ \frac{\partial x_2^0}{\partial \tau_1} & \frac{\partial x_2^0}{\partial \tau_2} & \cdots & \frac{\partial x_2^0}{\partial \tau_{n-1}} & \frac{\partial F_0}{\partial p_2^0} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n^0}{\partial \tau_1} & \frac{\partial x_n^0}{\partial \tau_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^0}{\partial \tau_{n-1}} & \frac{\partial F_0}{\partial p_n^0} \end{vmatrix}$$

an der Stelle $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_{n-1} = 0$ von Null verschieden sei, vgl. (6) in Nr. 883. Hierbei bedeutet F_0 den Wert von F für die $2n + 1$ Funktionen $x_1^0, \ldots x_n^0, z_0, p_1^0, \ldots p_n^0$. Alsdann bestimmt man dasjenige Lösungensystem von (4), das für $t = 0$ als Anfangswerte eben diese $2n + 1$ Funktionen hat. Es besteht aus Funktionen $x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n$ von t und $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{n-1}$. Gerade so wie in Nr. 883 läßt sich nun beweisen, daß sie die Differentialgleichung (1) befriedigen und daß dabei:

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

ist. Wenn man also $t, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{n-1}$ als die zu $x_1, x_2, \ldots x_n$ inversen Funktionen auffaßt, was wegen des Nichtverschwindens jener Determinante für $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_{n-1} = 0$ möglich ist, erscheint z als eine Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und demnach als eine Lösung der Differentialgleichung (1).

Wie in Nr. 884 kann man beweisen, daß sich so *jede* nicht singuläre Lösung ergeben muß, und wie in Nr. 885 zeigt man, daß sich Funktionen $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, z_0$ und $p_1^0, p_2^0, \ldots p_n^0$ von $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{n-1}$ auf Grund der an sie gestellten Forderungen stets finden lassen.

§ 4. Mongesche Gleichungen.

892. Geometrische Deutung einer Mongeschen Gleichung in drei Veränderlichen. Wie die linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung nach Nr. 872 in enger Beziehung zu den Pfaffschen Gleichungen stehen, hängen auch die allgemeinen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit den allgemeinen totalen Differentialgleichungen:

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots x_n, dx_1, dx_2, \ldots dx_n) = 0$$

innig zusammen. Eine derartige totale Gleichung, in der natürlich die Differentiale nur in ihren Verhältnissen auftreten dürfen (vgl. Nr. 671), heißt eine *Mongesche Gleichung.*

Wir beschränken uns auf den Fall $n = 3$, in dem die drei Veränderlichen mit x, y, z bezeichnet seien und als rechtwinklige Koordinaten im Raume gedeutet werden können. Die Mongesche Gleichung:

$$\Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = 0 \tag{1}$$

stellt nach Nr. 671 die Aufgabe, alle Gleichungen zwischen x, y, z zu ermitteln, infolge deren sie gilt. Drei voneinander unabhängige Gleichungen würden zu der trivialen Lösung $x =$ konst., $y =$ konst., $z =$ konst. führen. Bestände nur eine Gleichung zwischen x, y, z, etwa $f(x, y, z) = 0$, so müßte die Gleichung (1) infolge von $f = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

gelten, was aber nur dann möglich wäre, wenn sie selbst sich in dx, dy, dz linear schreiben ließe, d. h. insbesondere eine Pfaffsche Gleichung wäre. Da wir diese schon im vierten Paragraphen des vorigen Kapitels besprochen haben, soll vorausgesetzt werden, daß die vorgelegte Mongesche Gleichung (1) nicht auf eine Pfaffsche zurückkomme. Alsdann bleibt nur noch die eine Möglichkeit übrig, daß die Gleichung (1) infolge *zweier* voneinander unabhängiger Gleichungen in x, y, z besteht. Will man keine der drei Veränderlichen x, y, z bevorzugen, so kann man sie auch als Funktionen einer Hilfsveränderlichen t betrachten. Demnach ergibt sich die Aufgabe, x, y, z als Funktionen von t zu bestimmen, so daß die Gleichung (1) oder:

$$\Omega(x, y, z, x', y', z') = 0 \tag{2}$$

für alle Werte von t innerhalb eines gewissen Bereiches gilt. Dabei deutet der Akzent die Differentiation nach t an, denn man darf x', y', z' statt dx, dy, dz setzen, weil doch nur die Verhältnisse von dx, dy, dz auftreten, d. h. weil die Gleichung ungeändert bleibt, wenn man dx, dy, dz mit dt dividiert.

Drei solche Funktionen x, y, z von t, die der Gleichung (2) genügen, bestimmen eine *Integralkurve.* Geht durch den Punkt M oder (x, y, z) eine Integralkurve und ist $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ irgendein Punkt auf der Tangente von M, so sind x', y', z' zu $\mathfrak{x}-x$, $\mathfrak{y}-y$, $\mathfrak{z}-z$ proportional, d. h. es muß:

$$(3) \qquad \Omega(x, y, z, \mathfrak{x}-x, \mathfrak{y}-y, \mathfrak{z}-z)=0$$

sein, was nach (1) in Nr. 346 besagt, daß der Ort der Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ oder also der Ort aller Tangenten von M bei allen durch M gehenden Integralkurven ein *Kegel* mit der Spitze M oder (x, y, z) ist. Denn man muß bedenken, daß die letzte Gleichung nur die Verhältnisse von $\mathfrak{x}-x$, $\mathfrak{y}-y$, $\mathfrak{z}-z$ enthält.

Demnach ordnet die Mongesche Gleichung (1) *jedem Punkte* (x, y, z) *einen Elementarkegel zu,* und eine Kurve ist dann und nur dann eine Integralkurve, *wenn sie an jeder Stelle M ein Linienelement hat, das dem der Stelle M zugeordneten Elementarkegel angehört.* Da eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung nach Nr. 874 ebenfalls jedem Punkte M einen Elementarkegel, eingehüllt von Flächenelementen, zuordnet, liegt es nahe, die Verbindung zwischen einer Mongeschen Gleichung (1) und einer solchen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung herzustellen, die beide jedem Punkte M identische Kegel zuweisen. Dies soll in der nächsten Nummer geschehen.

Vorher sei noch erwähnt, daß die Integration der Mongeschen Gleichung (1) in folgender Art geleistet werden kann: Man setzt für x und y irgend welche bestimmte Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ und erhält alsdann eine Gleichung:

$$\Omega\left(\varphi(t), \psi(t), z, \varphi'(t), \psi'(t), \frac{dz}{dt}\right)=0,$$

die nichts andres als eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion z von t ist. Diese Art der Integration hat aber bloß formalen Wert, denn die gewöhnliche Differentialgleichung wird sich nur bei besonderer Wahl von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ integrieren lassen, d. h. man wird nicht imstande sein, hiernach alle Integralkurven der Mongeschen Gleichung zu ermitteln. Außerdem gibt diese Methode keinen Aufschluß über den Zusammenhang zwischen den verschiedenen

Integralkurven. Erst die Herstellung der Beziehung zu den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung führt zu einer in diesen beiden Hinsichten vollkommeneren Integrationsmethode, die übrigens von *Monge* herrührt.

893. Die zur Mongeschen Gleichung gehörige partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Diejenige partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die jedem Punkte M oder (x, y, z) denselben Elementarkegel wie die Mongesche Gleichung:

$$\Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = 0 \tag{1}$$

zuordnet, wird von allen denjenigen Flächen befriedigt, deren Flächenelemente die ihren Punkten (x, y, z) zugehörigen Kegel berühren. Nun ist einerseits:

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0$$

in den laufenden Koordinaten X, Y, Z die Gleichung der Ebene eines Flächenelements (x, y, z, p, q) und andererseits:

$$\Omega(x, y, z, \mathfrak{x} - x, \mathfrak{y} - y, \mathfrak{z} - z) = 0$$

in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichung des dem Punkte M oder (x, y, z) zugeordneten Kegels und folglich:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial(\mathfrak{x} - x)}(X - x) + \frac{\partial \Omega}{\partial(\mathfrak{y} - y)}(Y - y) + \frac{\partial \Omega}{\partial(\mathfrak{z} - z)}(Z - z) = 0$$

in den laufenden Koordinaten X, Y, Z die Gleichung einer Tangentenebene des Kegels. Dabei kann man $\mathfrak{x} - x$, $\mathfrak{y} - y$, $\mathfrak{z} - z$ nach voriger Nummer durch x', y', z' ersetzen. Also fällt die Ebene des Flächenelements mit einer Tangentenebene des Kegels dann und nur dann zusammen, wenn es ein Wertsystem x', y', z' derart gibt, daß:

$$p : q : -1 = \Omega_{x'} : \Omega_{y'} : \Omega_{z'} \tag{2}$$

wird, wobei Ω die Funktion $\Omega(x, y, z, x', y', z')$ bedeutet.

Weil x', y', z' in Ω nur in ihren Verhältnissen vorkommen, kann man diese Verhältnisse nach (2) als Funktionen von x, y, z, p, q betrachten. Werden sie in (1) für die Verhältnisse von dx, dy, dz substituiert, so geht eine Gleichung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{3}$$

hervor. Sie definiert alle diejenigen Flächenelemente (x, y, z, p, q), die die Elementarkegel der Mongeschen Gleichung (1) umhüllen, und ist daher *die zugehörige partielle Differentialgleichung erster Ordnung.*

Liegt dagegen eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung (3) vor, so weiß man nach (5) in Nr. 874, daß die Richtungskosinus der Mantellinien des zum Punkte (x, y, z) gehörigen Elementarkegels proportional F_p, F_q und $pF_p + qF_q$ sind. Bei der zugehörigen Mongeschen Gleichung sind aber x', y', z' diesen Richtungskosinus proportional. Folglich wird man p und q aus:

$$(4) \qquad x' : y' : z' = F_p : F_q : (pF_p + qF_q)$$

als Funktionen der Größen x, y, z und der Verhältnisse von x', y', z' berechnen und in (3) substituieren, um die zugehörige Mongesche Gleichung:

$$\Omega(x, y, z, x', y', z') = 0$$

zu erhalten. Demnach haben wir den

Satz 5: Die Mongesche Gleichung:

$$\Omega(x, y, z, x', y', z') = 0$$

ordnet den Punkten (x, y, z) dieselben Elementarkegel zu wie diejenige partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die durch Elimination von x', y', z' aus $\Omega = 0$ vermöge:

$$p : q : -1 = \Omega_{x'} : \Omega_{y'} : \Omega_{z'}$$

hervorgeht. Umgekehrt: Die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

ordnet den Punkten (x, y, z) dieselben Elementarkegel zu wie diejenige Mongesche Gleichung, die durch Elimination von p und q aus $F = 0$ vermöge:

$$x' : y' : z' = F_p : F_q : (pF_p + qF_q)$$

hervorgeht.

894. Integration der Mongeschen Gleichung. Wir wollen hier auf geometrischem Wege zeigen, wie man die vorgelegte Mongesche Gleichung:

$$(1) \quad \Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = 0 \quad \text{oder} \quad \Omega(x, y, z, x', y', z') = 0$$

vollständig integrieren kann, wenn man die charakteristischen Streifen der zugehörigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung schon gefunden hat. Wir nehmen dabei an, daß

$$(2) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

diese zugehörige partielle Differentialgleichung sei, so daß das System:

$$\frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q, \quad \frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q,$$

$$\frac{dp}{dt} = -F_x - pF_z, \qquad \frac{dq}{dt} = -F_y - qF_z$$

nach (3) und (4) in Nr. 879 oder nach (5) in Nr. 882 die charakteristischen Streifen definiert.

Vor allem ist zu bemerken, daß die Charakteristiken k nach Nr. 878 an jeder Stelle M eine Mantellinie des Elementarkegels von M zur Tangente haben und deshalb *selbst Integralkurven der Mongeschen Gleichung* (1) *sind.* Bedeutet nun c irgendeine Integralkurve der Mongeschen Gleichung und zwar eine, die keine Charakteristik ist, so hat sie an jeder Stelle M eine Tangente, die dem zu M zugeordneten Elementarkegel als Mantellinie angehört, und nach Nr. 878 gibt es eine Charakteristik k, die in M dieselbe Mantellinie zur Tangente hat. *Demnach wird die Integralkurve c an jeder Stelle M von einer Charakteristik k berührt.* Längs dieser Charakteristik k liegt ein charakteristischer Streifen. Er geht von demjenigen Flächenelemente aus, das in M den Kegel längs der Tangente von c berührt. Betrachtet man die Integralkurve c als die in Nr. 886 mit γ bezeichnete Kurve, so folgt, daß die einfach unendliche Schar derjenigen charakteristischen Streifen, die man so konstruieren kann, eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (2) erzeugt. *Diese Integralfläche enthält demnach eine einfach unendliche Schar von Charakteristiken k, und die Kurve c ist die Einhüllende aller dieser Charakteristiken.*

Wir gehen jetzt umgekehrt von irgendeiner nicht singulären Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (2) aus. Nach Nr. 886 wird sie so erzeugt: Man nimmt irgendeine Kurve γ an, die keine Charakteristik ist, und konstruiert längs γ einen Streifen von Flächenelementen, die an jeder Stelle sowohl γ als auch den Elementarkegel berühren. Die von diesen Flächenelementen ausgehenden *charakteristischen* Streifen erzeugen eine Integralfläche. Sie enthält die einfach unendliche Schar der Charakteristiken k, längs deren die charakteristischen

Streifen liegen. Diese Kurven k können nun eine Einhüllende c haben, siehe Fig. 63. Die Existenz der Einhüllenden von einfach unendlichen Kurvenscharen k auf einer krummen Fläche kann man wie in Nr. 779 dadurch erkennen, daß man die Fläche etwa auf die xy-Ebene projiziert (siehe Fig. 41 in Nr. 779) und die Einhüllende der Projektionen der Charakteristiken k bestimmt. Sie ist die Projektion der fraglichen Einhüllenden c der Charakteristiken k selbst. Die Einhüllende c berührt an jeder Stelle eine Charakteristik k und hat daher an jeder Stelle eine Mantellinie des zugeordneten Elementarkegels zur Tangente, d. h. *sie muß eine Integralkurve der Mongeschen Gleichung sein.* Nach der vorhergehenden Betrachtung erhellt zugleich, *daß man auf diesem Wege alle diejenigen Integralkurven der Mongeschen Gleichung findet, die keine Charakteristiken sind.*

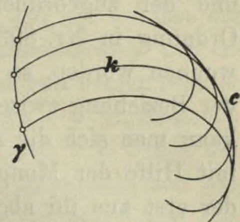

Fig. 63.

Die Einhüllende c trat übrigens schon in Nr. 279 und 280 auf. Ist nämlich:

$$z = \varphi(x, y, a, b)$$

eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (2), so entsteht jede nicht singuläre Integralfläche nach Nr. 877 als Einhüllende einer in $z = \varphi$ enthaltenen einfach unendlichen Flächenschar, und zwar berührt sie jede einzelne Fläche dieser Schar längs einer Charakteristik. Es liegt demnach für diese einfach unendliche Flächenschar der Fall von Nr. 279 vor, wo auseinandergesetzt wurde, daß die Charakteristiken auf der Einhüllenden *Grenzpunkte* haben, d. h. Grenzlagen der Schnittpunkte benachbarter Charakteristiken, und in Satz 11, Nr. 280, ergab sich, daß der Ort dieser Grenzpunkte, die sogenannte *Gratlinie* der einhüllenden Fläche, an jeder Stelle eine Charakteristik berührt, also die einhüllende Kurve der Charakteristiken ist.

Kurz gesagt zeigt sich demnach, *daß die Integralkurven der Mongeschen Gleichung* (1) *aus den Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung* (2) *und aus den Gratlinien der nicht singulären Integralflächen von* (2) *bestehen.*

Weiter wollen wir die Theorie der Mongeschen Gleichungen nicht verfolgen, obgleich das Vorgetragene noch nach zwei Richtungen hin zu vervollständigen wäre. Einerseits nämlich ist der Zusammenhang zwischen einer Mongeschen Gleichung und der zugeordneten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in Nr. 893 mittels geometrischer Betrachtungen gewonnen worden, so daß noch die rein analytische Herstellung der Beziehung zwischen beiden zu fordern ist, und andererseits kann man sich die Aufgabe stellen, die Charakteristiken direkt mit Hilfe der Mongeschen Gleichung selbst anstatt mit Hilfe der erst aus ihr abgeleiteten partiellen Differentialgleichung zu definieren, um dadurch zu einer Integrationstheorie zu gelangen, die von der zugeordneten partiellen Differentialgleichung unabhängig ist. Die Grenzen, die wir uns gesteckt haben, erlauben uns aber nicht, dies zu entwickeln.

Wir begnügen uns damit, an einem Beispiele die Anwendung der vorgetragenen Theorie zu erläutern.

895. Loxodromen. Wir behandeln die Aufgabe, *alle Kurven zu bestimmen, die ein Ebenenbüschel unter einem konstanten Winkel ε schneiden.* Diese Kurven heißen *Loxodromen.* Dreht man eine solche Kurve um die Achse des Büschels, so entsteht eine *Rotationsfläche,* auf der die Kurve alle Breitenkreise oder (was dasselbe ist) alle Meridiane unter konstantem Winkel schneidet.

Die Achse des Büschels werde als z-Achse gewählt. Die Ebene durch einen Punkt M oder (x, y, z) und die Büschelachse hat eine Normale, deren Richtungskosinus

$$\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 0$$

sind. Bedeuten α, β, γ die Richtungskosinus der Tangente einer durch M gehenden Loxodrome, so wird also gefordert:

$$\frac{-\alpha y+\beta x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varepsilon.$$

Sind dx, dy, dz die Differentiale längs der Kurve, so ist nach (3) in Nr. 252:

$$\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}, \quad \beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Mithin ergibt sich die Forderung:

(1) $(x\,dy - y\,dx)^2 - \sin^2\varepsilon\,(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0.$

Dies ist demnach die zu integrierende Mongesche Gleichung.

Der dem Punkte M zugeordnete Kegel enthält alle Strahlen von M aus, die mit der Ebene durch M und die z-Achse den Winkel ε bilden und ist folglich ein *Rotationskegel*, der die Normale dieser Ebene in M zur Achse hat und dessen Mantellinien mit der Kegelachse den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ einschließen. Die zugeordnete partielle Differentialgleichung $F = 0$ hat dieselben Elementarkegel. Mithin sind ihre Integralflächen diejenigen *Flächen, die alle Ebenen des Büschels unter dem konstanten Winkel ε schneiden*, woraus nebenbei nach Satz 22, Nr. 325, folgt, daß jede Integralfläche von allen Ebenen des Büschels in *Krümmungskurven* geschnitten wird.

Das Verfahren zur Ermittlung aller Integralkurven der Mongeschen Gleichung kann man hier wie folgt anwenden:

Insbesondere heißen Loxodromen, die auf solchen Kugeln verlaufen, deren Mittelpunkte auf der Büschelachse liegen, *sphärische Loxodromen*. Auf jeder Kugel, die ihren Mittelpunkt auf der z-Achse hat, gibt es eine einfach unendliche Schar von solchen Kurven. In Polarkoordinaten sind nach Nr. 251:

(2) $x = r\sin\theta\cos\psi, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad z = a + r\cos\theta$

die Gleichungen einer Kugel vom Radius r, deren Mittelpunkt auf der z-Achse liegt und die z-Koordinate a hat, während θ und ψ Hilfsveränderliche bedeuten. Setzt man diese Werte sowie die aus ihnen folgenden Werte der Differentiale dx, dy, dz in die Mongesche Gleichung (1), ein, so kommt:

$$d\psi = \pm\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\cdot\frac{d\theta}{\sin\theta}$$

oder nach dem 1. Beispiele in Nr. 452:

(3) $$\psi = \pm\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\;\ln\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\theta + b,$$

wo b eine willkürliche Konstante ist. Versteht man also unter ψ die Funktionen (3) von θ, so stellen die Gleichungen (2) alle sphärischen Loxodromen dar, ausgedrückt mittels der Hilfsveränderlichen θ. Dabei sind r, a und b willkürliche Konstanten.

Wir behaupten, daß diese dreifach unendliche Schar von sphärischen Loxodromen die Charakteristiken sind. Faßt man nämlich eine Kugel mit einem Mittelpunkte S auf der z-Achse und eine auf ihr gelegene sphärische Loxodrome ins Auge, so ist der *Kegel*, der S zur Spitze hat und dessen Mantellinien die Strahlen von S nach der Kurve sind, eine Fläche, die alle Ebenen des Büschels unter dem Winkel ε schneidet, folglich eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung. Da man die Kegelspitze S irgendwo auf der z-Achse wählen kann und auf jeder Kugel um S eine einfach unendliche Schar von Loxodromen liegt, gelangt man auf diese Art zu einer zweifach unendlichen Schar von Integralflächen. Sie bilden zusammen eine *vollständige Lösung* der partiellen Differentialgleichung (vgl. Nr. 876). Nun weiß man nach Nr. 878, daß die Charakteristiken diejenigen Kurven auf den Flächen der vollständigen Lösung sind, die überall Mantellinien der zugehörigen Elementarkegel zu Tangenten haben, d. h. die Charakteristiken sind die auf den soeben konstruierten Kegeln gelegenen Integralkurven der Mongeschen Gleichung (1), demnach in der Tat die sphärischen Loxodromen.

Folglich läßt sich jede Loxodrome nach Nr. 894 so konstruieren: Man wählt irgend eine Kurve γ und legt in jedem Punkte von γ eine Ebene durch die Tangente von γ, die auch den zugehörigen Elementarkegel berührt. Die Berührungslinie ist zugleich Tangente einer gewissen sphärischen Loxodrome k. Die einfach unendliche Schar dieser sphärischen Loxodromen bildet einerseits eine allgemeine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung und wird andererseits von einer allgemeinen Integralkurve der Mongeschen Gleichung eingehüllt. Da diese Konstruktion rechnerisch nur Differentiationen, Eliminationen und Substitutionen erfordert, kann man also alle Loxodromen ohne Integrationsprozesse bestimmen.

Neuntes Kapitel.

Einleitung in die Variationsrechnung.

§ 1. Die Eulersche Differentialgleichung.

896. Die einfachste Aufgabe der Variationsrechnung. Außer den im sechsten Kapitel des ersten Bandes besprochenen Aufgaben, bei denen es sich darum handelte, diejenigen Werte von Veränderlichen zu ermitteln, für die gegebene Funktionen Extremwerte erreichen, gibt es eine andere viel ausgedehntere Klasse von Aufgaben über Maxima und Minima. Bei ihnen werden *Funktionen* gesucht, für die gewisse Größen Extremwerte annehmen. Das einfachste derartige Problem lautet so:

Gegeben ist eine reelle Funktion f von drei reellen Veränderlichen x, y, y'; dabei soll y eine Funktion von x bedeuten und y' ihre Ableitung. Der Funktion y wird vorgeschrieben, daß sie für zwei gegebene Werte x_0 und x_1 von x ebenfalls gegebene Werte y_0 und y_1 annehme. Die Frage ist dann, *für welche Funktion y das Integral*

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$$

ein Maximum oder Minimum hat.

Dabei muß man wohlbemerkt noch definieren, was unter einem Maximum oder Minimum des Integrals zu verstehen ist, weil die Definition in Nr. 140 nicht anwendbar ist. Denn das Integral J kann man nicht als eine Funktion der gesuchten Funktion y bezeichnen.

Die vorstehende Aufgabe ist die einfachste im Bereiche der *Variationsrechnung*. Dieser Name wird in der nächsten Nummer seine Erklärung finden. Im Laufe der Zeiten hat sich die von

Bernoulli, *Euler* und *Lagrange* begründete Variationsrechnung zu einer besonderen und nicht einfachen Disziplin herausgebildet; deshalb geben wir nur eine Einleitung in diese Theorie. Insbesondere werden wir uns immer mit der Feststellung solcher Bedingungen für die gesuchten Funktionen begnügen, die ausreichen, die Funktionen zu ermitteln, ohne dabei auf die viel schwierigere Frage einzugehen, ob für diese Funktionen wirklich ein Maximum oder Minimum zustande kommt. Auch in bezug auf die Voraussetzungen, die über das Verhalten der auftretenden Funktionen zu machen sind, begnügen wir uns, um alle Schwierigkeiten zu vermeiden, mit den einfachsten Annahmen, ohne zu ergründen, ob man nicht auch mit geringeren Mitteln auskommen kann.

Um auch äußerlich den rein einleitenden Charakter dieses Kapitels zu kennzeichnen, unterlassen wir die ausdrückliche Formulierung der Ergebnisse als Sätze. Man wird erkennen, daß die Ermittlung der gesuchten Funktionen die Integration von *Differentialgleichungen* erfordert.

897. Definition der Extremwerte eines Integrals. Weil es sich um Maxima und Minima handelt, benutzen wir ausschließlich *reelle* Veränderliche und Funktionen. Von *allen* vorkommenden Funktionen wird vorausgesetzt, daß sie stetig seien und daß sich auch alle ihre partiellen Ableitungen, soweit sie gebraucht werden, stetig verhalten, indem wir immer annehmen, daß alle Betrachtungen innerhalb solcher Variabilitätsbereiche stattfinden, wo diese Voraussetzungen erfüllt sind.

Nun sei $f(x, y, y')$ eine *gegebene* Funktion der drei Größen x, y, y'. Ferner seien Anfangs- und Endwerte x_0, y_0 und x_1, y_1 von x und y vorgeschrieben. Unter y soll irgend eine Funktion von x verstanden werden, die für $x = x_0$ und $x = x_1$ die Werte y_0 und y_1 annimmt, und y' bedeute ihre Ableitung. Alsdann betrachten wir das Integral:

$$(1)\qquad J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx.$$

Denken wir uns hierin für y eine *bestimmte* Funktion eingesetzt, so erhält J einen bestimmten Wert. Indem wir nun y durch irgend eine *benachbarte* Funktion $\bar{y}$ ersetzen, die ebenfalls für $x = x_0$ und für $x = x_1$ die vorgeschriebenen Werte y_0 und y_1 hat, verändern wir den Wert des Integrals, und diese Änderung heißt die *vollständige Variation des Integrals.* Es muß aber noch gesagt werden, was unter einer zu y *benachbarten* Funktion $\bar{y}$ verstanden wird: Vorweg sei eine beliebig kleine positive Zahl σ angenommen; für jeden Wert x im Intervalle von x_0 bis x_1 soll nun der absolute Betrag der Differenz $\bar{y} - y$ kleiner als σ sein. Diese Differenz heißt die *Variation der angenommenen Funktion* y und wird mit δy bezeichnet, während man die zugehörige vollständige Variation von J durch δJ ausdrückt. *Nach Voraussetzung hat* δy *an den Integralgrenzen* x_0 *und* x_1 *den Wert Null.* Wegen $\bar{y} = y + \delta y$ ist ferner:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y + \delta y, y' + (\delta y)')\, dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$$

oder:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [f(x, y + \delta y, y' + (\delta y)') - f(x, y, y')]\, dx. \tag{2}$$

Den Integranden von δJ bezeichnet man auch als die zu δy gehörige Variation δf der Funktion f, so daß:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \delta f\, dx,$$

d. h.:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} f\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta f\, dx$$

ist, in Worten: *das Variationszeichen* δ *ist mit dem Integralzeichen* $\int$ *vertauschbar.*

Nunmehr können wir definieren: *Das vorgelegte Integral* J *hat für die angenommene Funktion* y *von* x *ein Maximum bzw. Minimum, wenn es eine positive Zahl* σ *derart gibt, daß alle diejenigen vollständigen Variationen* δJ *des Integrals, bei denen* $|\delta y| < \sigma$ *ist, nie positive bzw. nie negative Werte haben.*

898. Das Verschwinden der ersten Variation des Integrals. Um zu Bedingungen für die Funktionen y zu gelangen, die das Integral J zu einem Extremwerte machen, wählen wir die Variation δy von y in spezieller Weise. Unter

$\eta(x)$ sei irgend eine Funktion von x verstanden, *die für* $x = x_0$ *und* $x = x_1$ *verschwindet.* Da ihr absoluter Betrag nach den allgemein in voriger Nummer über alle vorkommenden Funktionen gemachten Annahmen im Intervalle von x_0 bis x_1 unterhalb einer gewissen Grenze m bleibt, können wir unter h eine Zahl verstehen, die der Bedingung $|h| < \sigma : m$ genügt. Dann ist $|\eta h| < \sigma$, d. h. man darf δy insbesondere gleich ηh wählen. Die Variation δJ von J wird nun nach (2) in voriger Nummer:

$$(1) \qquad \delta J = \int_{x_0}^{x_1} [f(x, y + \eta h, y' + \eta' h) - f(x, y, y')]\, dx.$$

Hat man σ hinreichend klein gewählt, so gilt dasselbe von h wegen $|h| < \sigma : m$, so daß sich der Integrand nach ganzen positiven Potenzen von h in der Form:

$$\frac{h}{1!}(f_y \eta + f_{y'} \eta') + \frac{h^2}{2!}(f_{yy} \eta^2 + 2 f_{yy'} \eta \eta' + f_{y'y'} \eta'^2) + \cdots$$

entwickeln läßt. Dabei bedeutet f die Funktion $f(x, y, y')$. Nach Satz 26, Nr. 426, vgl. auch die Bemerkungen in Nr. 428, darf diese unendliche Reihe gliedweise integriert werden. Mithin kommt:

$$\delta J = \frac{h}{1!} \int_{x_0}^{x_1} (f_y \eta + f_{y'} \eta')\, dx + \frac{h^2}{2!} \int_{x_0}^{x_1} (f_{yy} \eta^2 + 2 f_{yy'} \eta \eta' + f_{y'y'} \eta'^2)\, dx + \cdots.$$

Der Faktor von $h^n : n!$ heißt die n^{te} *Variation des Integrals* J, so daß insbesondere:

$$\int_{x_0}^{x_1} (f_y \eta + f_{y'} \eta')\, dx$$

die *erste Variation* von J ist.

Hat nun das Integral J für die gewählte Funktion y z. B. ein *Minimum*, so ist nach der Definition in voriger Nummer $\delta J \geqq 0$, also nach (1):

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_1} f(x, y + \eta h, y' + \eta' h)\, dx \geqq \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx.$$

Wenn auch η bestimmt gewählt worden ist, stellt die linke Seite von (2) eine Funktion $F(h)$ von h allein dar und zwar in dem Variabilitätsbereiche $|h| < \sigma : m$. Man kann folglich statt (2) schreiben:

$$F(h) \geqq F(0). \tag{3}$$

Dabei ist $F(h)$ nach Satz 18, Nr. 487, eine stetige Funktion von h, und sie hat nach Satz 19, Nr. 488, die Ableitung:

$$F'(h) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial h} f(x, y + \eta h, y' + \eta' h)\, dx. \tag{4}$$

Die Ungleichung (3) besagt nun nach Nr. 140, daß $F(h)$ für $h = 0$ ein Minimum hat. *Folglich muß* $F'(0) = 0$ *sein,* d. h. nach (4):

$$\int_{x_0}^{x_1} (f_y \eta + f_{y'} \eta')\, dx = 0. \tag{5}$$

Dabei bedeutet f wieder die Funktion $f(x, y, y')$. Dieselbe Bedingung (5) geht im Falle eines *Maximums* hervor; ihre linke Seite ist die erste Variation von J.

Somit hat sich ergeben, *daß die erste Variation von J verschwinden muß, falls J für die angenommene Funktion y von x ein Maximum oder Minimum erreicht.* Dies Merkmal reicht aber für das wirkliche Eintreten eines Extremwertes von J nicht aus. Zu hinreichenden Bedingungen gelangt man erst, wenn man auch die höheren Variationen von J berücksichtigt, die nämlich hier eine ähnliche Rolle spielen wie die höheren Ableitungen einer Funktion $f(x)$ bei der Feststellung der Maxima und Minima der Funktion (in Satz 1, Nr. 142). Wie gesagt (vgl. Nr. 896), wollen wir jedoch keine hinreichenden Bedingungen für die Maxima und Minima des Integrals J aufstellen.

899. Die Eulersche Differentialgleichung. Die für einen Extremwert des Integrals J notwendige Bedingung, nämlich das Verschwinden der ersten Variation:

$$\int_{x_0}^{x_1} (f_y \eta + f_{y'} \eta')\, dx = 0,$$

formt man um, indem man auf das über $f_{y'}\eta'$ erstreckte Integral die Methode der teilweisen Integration anwendet, siehe

Gleichung (1) in Nr. 415, worin u und v durch $f_{y'}$ und η zu ersetzen sind. Es kommt dann:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_y \eta\, dx + [f_{y'}\eta]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{df_{y'}}{dx}\eta\, dx = 0.$$

Weil η nach Nr. 898 für $x = x_0$ und $x = x_1$ verschwindet, ist das zweite Glied gleich Null. Mithin bleibt übrig:

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \eta\left(f_y - \frac{df_{y'}}{dx}\right) dx = 0.$$

Da diese Bedingung für jede Funktion η von x gelten muß, die an den Integralgrenzen verschwindet, folgt, wie wir sogleich zeigen werden, daß der Ausdruck:

$$(2) \qquad E = f_y - \frac{df_{y'}}{dx}$$

an jeder Stelle im Intervalle von x_0 bis x_1 verschwindet. Denn man kann insbesondere η gleich $(x - x_0)(x_1 - x)E$ annehmen, weil diese Funktion für $x = x_0$ und $x = x_1$ den Wert Null hat, und bekommt dann statt (1) insbesondere:

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x_1 - x) E^2 dx = 0,$$

und hier ist der Integrand positiv. Wenn also z. B. $x_1 > x_0$ und x irgend eine Stelle zwischen x_0 und x_1 ist, wird das in (3) linksstehende Integral gleich der Summe der beiden von x_0 bis x und von x bis x_1 erstreckten Integrale, die beide positiv sind, so daß infolge von (3) insbesondere auch das von x_0 bis x erstreckte Integral verschwindet:

$$\int_{x_0}^{x} (x - x_0)(x_1 - x) E^2 dx = 0.$$

Links steht hier eine Funktion der oberen Integralgrenze x, die im Intervalle von x_0 bis x_1 willkürlich ist, und folglich verschwindet diese Funktion überall im Intervalle, so daß auch ihre Ableitung nach x gleich Null sein muß, d. h. $(x - x_0)(x_1 - x)E^2$ muß verschwinden. Demnach ist E überall im Intervalle gleich Null. Dasselbe ergibt sich bei der Annahme $x_1 < x_0$, wo anstelle positiver Integrale negative auftreten.

Wegen (2) folgt demnach, *daß die erste Variation von J dann und nur dann verschwindet, wenn überall im Intervalle von x_0 bis x_1*

$$f_y - \frac{df_{y'}}{dx} = 0 \tag{4}$$

ist. Mit anderen Worten: *Wenn das Integral J für die angenommene Funktion y einen Extremwert erreicht, muß die Funktion y die Gleichung* (4) *befriedigen.* Diese Gleichung lautet ausführlich geschrieben so:

$$f_y - f_{xy'} - f_{yy'}y' - f_{y'y'}y'' = 0 \tag{5}$$

und ist mithin eine *gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung* für die Funktion y von x. Sie wurde von *Euler* aufgestellt und soll deshalb die *Eulersche Differentialgleichung* heißen. Ihre allgemeine Lösung y enthält *zwei* Integrationskonstanten. Andererseits sind aber auch gerade noch *zwei* Bedingungen zu befriedigen, denn y soll für $x = x_0$ und für $x = x_1$ die vorgeschriebenen Werte y_0 und y_1 annehmen. *Mithin reichen die Ergebnisse aus zur Ermittlung einer jedenfalls beschränkten Anzahl von Funktionen y, für die allein das Integral J ein Maximum oder Minimum haben kann.* Ob aber für eine solche Funktion wirklich ein Extremwert auftritt, steht noch dahin.

In den nächsten und auch in späteren Beispielen werden wir in der Problemstellung stets entweder von einem Maximum oder Minimum sprechen, obgleich das wirkliche Eintreten eines Maximums oder Minimums nicht bewiesen wird. Immerhin sind die Beispiele so einfacher Art, daß man in jedem Falle rein anschaulich ausfindig machen kann, ob es sich nun gerade um ein Maximum oder um ein Minimum handelt.

900. Das Katenoid. In der Ebene seien zwei Punkte gegeben. *Man soll diejenige Kurve vom ersten Punkte zum zweiten Punkte ziehen, die bei der Drehung um die x-Achse eine Rotationsfläche von kleinstem Flächeninhalte liefert.* Die y-Achse kann man so annehmen, daß beide Punkte entgegengesetzt gleiche Abszissen $-a$ und $+a$ bekommen. Die zugehörigen gegebenen Ordinaten y_0 und y_1 seien *positiv.* Der *Schwerpunkt* einer Kurve hat, wenn ds ihr Bogenelement und S ihre Gesamtlänge ist, nach (11) und (10) in Nr. 602 die Ordinate:

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{S}\int_0^S y\,ds,$$

und nach der *Guldinschen Regel* in Nr. 589 ist daher der Flächeninhalt der durch die Drehung der Kurve erzeugten Rotationsfläche:

$$F = 2\pi\mathfrak{y}S = 2\pi\int_0^S y\,ds$$

oder, wenn man x als unabhängige Veränderliche einführt, nach (1) in Nr. 193:

$$F = 2\pi\int_{-a}^{+a} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Dabei ist die Wurzel positiv. Es handelt sich somit um die Ermittlung derjenigen Funktionen y von x, die das Integral:

$$J = \int_{-a}^{+a} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

zu einem Minimum machen. Der Integrand f ist hier $y\sqrt{1+y'^2}$. Folglich lautet die Eulersche Differentialgleichung (4) der letzten Nummer so:

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx}\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

oder:

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{yy''}{\sqrt{1+y'^2}^3} = 0.$$

Multiplikation mit $y'\sqrt{1+y'^2} : y$ gibt sofort:

$$\ln y - \ln\sqrt{1+y'^2} = \text{konst.}$$

Hieraus folgt, falls b und c Integrationskonstanten bedeuten:

$$dx = \frac{b\,dy}{\sqrt{y^2-b^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{x-c}{b} = \ln\frac{y+\sqrt{y^2-b^2}}{b},$$

d. h.:

(1) $$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x-c}{b}} + e^{-\frac{x-c}{b}}\right).$$

Die gesuchte Kurve ist daher ein Stück einer *Kettenlinie* und zwar einer solchen Kettenlinie, deren zugehörige *Traktrix* (vgl.

900]

das 2. Beispiel in Nr. 713) die x-Achse zur Leitlinie hat. Durch Drehung der Kettenlinie um diese Leitlinie, die man übrigens auch die *Leitlinie der Kettenlinie selbst* nennt, entsteht das *Katenoid* (vgl. Nr. 799).

Für $x = -a$ und $x = +a$ soll y die Werte y_0 und y_1 haben. Dies liefert die beiden Bedingungen für die in (1) auftretenden Konstanten b und c:

$$(2) \qquad y_0 = \frac{b}{2}\left(e^{-\frac{a+c}{b}} + e^{\frac{a+c}{b}}\right), \quad y_1 = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{a-c}{b}} + e^{-\frac{a-c}{b}}\right).$$

Sie sind nicht immer erfüllbar. Wenn z. B. $y_1 = y_0$ ist, geben sie $c = 0$ und zur Bestimmung von b:

$$(3) \qquad \frac{y_0}{a} = \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\left(e^{a:b} + e^{-a:b}\right).$$

Dabei ist y_0 ebenso wie a positiv, mithin auch b. Die rechte Seite von (3) ist eine Funktion von $a:b$, die für positive Werte von $a:b$ stets positiv ist und ihr Minimum an derjenigen Stelle $u = a:b$ hat, die der Bedingung:

$$e^{2u} = \frac{u+1}{u-1}$$

genügt. Mittels der Fehlerrechnung findet man leicht für u abgerundet den Wert 1,1997 und nach (3) als den zu $a:b = u$ gehörigen Wert von $y_0 : a$ die Zahl 1,5089. Ist also $y_0 : a$ kleiner als dieser Betrag, so ist es unmöglich, b so zu wählen, daß die Bedingung (3) befriedigt wird.

901. Die gemeine Zykloide als Brachistochrone. In einer lotrechten Ebene seien zwei Punkte gegeben. *Es soll diejenige von dem höheren Punkte nach dem tieferen Punkte verlaufende und in der Ebene liegende Bahnkurve gefunden werden, die ein materieller Punkt unter dem Einflusse der Schwere, aber ohne Reibung, am schnellsten zurücklegt.* Bahnkurven kürzester Fallzeit heißen *Brachistochronen.* Hier handelt es sich also um die Brachistochrone in einer gegebenen lotrechten Ebene und mit gegebenem Anfangs- und Endpunkte.

Den höher gelegenen Punkt wählt man zweckmäßig als Koordinatenanfangspunkt und die Vertikale nach unten als positive x-Achse. Der tiefer gelegene Punkt habe die Koordinaten x_1 und y_1. Dann darf $x_1 > 0$ und $y_1 > 0$ vorausgesetzt werden. Die Mechanik lehrt, daß bei der Bewegung die Gleichung gilt:

$$(1)\qquad \sqrt{1+y'^2}\,\frac{dx}{dt}=\sqrt{2gx}.$$

Dabei bedeutet t die Zeit und g die Gravitationskonstante. Hieraus folgt:

$$dt=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}\,dx,$$

daher als Fallzeit:

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}\,dx.$$

Folglich ist das Integral:

$$J=\int\limits_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}\,dx$$

mit positiver Wurzel zu betrachten. Hier gibt die Eulersche Gleichung (4) von Nr. 899 sofort, da der Integrand von y frei ist:

$$\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}=\text{konst.}$$

oder, wenn a eine Integrationskonstante bedeutet:

$$y'=\sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

Vertauscht man x mit y, so geht die Differentialgleichung hervor, die im 1. Beispiele von Nr. 711 betrachtet wurde. Die gesuchte Brachistochrone ist demnach eine *gemeine Zykloide*, die durch Abrollen eines Kreises auf der geraden horizontalen y-Achse längs ihrer unteren Seite hervorgeht und *im Anfangspunkte eine Spitze hat.* Nach (1) in Nr. 231 läßt sie sich mittels einer Hilfsveränderlichen φ so darstellen:

$$x=a\,(1-\cos\varphi),\qquad y=a\,(\varphi-\sin\varphi).$$

Nun ist a so zu wählen, daß die Kurve auch durch den Punkt (x_1, y_1) geht. Ist φ_1 der zugehörige Wert der Hilfsveränderlichen, so wird demnach gefordert:

$$(2)\qquad x_1=a\,(1-\cos\varphi_1),\qquad y_1=a\,(\varphi_1-\sin\varphi_1).$$

Außerdem hat man, da Unstetigkeiten ausgeschlossen werden, noch zu fordern, daß die Stelle (x_1, y_1) auf demjenigen ersten Zykloidenbogen liege, der vom Anfangspunkte ausgeht, d. h. φ_1

muß im Intervalle von Null bis 2π liegen. Um zu zeigen, daß es immer bestimmte Werte $a > 0$ und φ_1 gibt, die unter dieser Beschränkung die beiden Bedingungen befriedigen, genügt es nachzuweisen, daß es eine und nur eine zwischen 0 und 2π gelegene Wurzel φ_1 der Gleichung:

$$(3) \qquad \frac{\varphi_1 - \sin\varphi_1}{1 - \cos\varphi_1} = \frac{y_1}{x_1}$$

gibt. In der Tat ist die linke Seite hiervon eine Funktion von φ_1, die sich im Intervalle von 0 bis 2π überall stetig verhält, für $\varphi_1 = 0$ den Wert Null hat und für $\lim \varphi_1 = 2\pi$ nach Unendlich strebt. Ihre Ableitung nach φ_1 ist gleich:

$$\frac{2(1-\cos\varphi_1) - \varphi_1 \sin\varphi_1}{(1-\cos\varphi_1)^2} \quad \text{oder} \quad \frac{1 - \frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\varphi_1}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi_1}$$

und daher überall im Intervalle von 0 bis 2π positiv. Mithin wächst die linke Seite von (3) beständig von Null bis Unendlich, wenn φ_1 von 0 bis 2π wächst, so daß die Behauptung richtig ist.

§ 2. Verallgemeinerungen.

902. Extremwerte von Integralen, in denen mehrere unbekannte Funktionen vorkommen. Die Betrachtungen lassen sich leicht auf den Fall ausdehnen, wo die Funktion f unter dem Integralzeichen mehr als eine unbekannte Funktion nebst ihren Ableitungen erster Ordnung enthält. Es wird genügen, den Fall von *zwei* Funktionen zu betrachten. Demnach handle es sich darum, diejenigen Funktionen y und z von x zu ermitteln, für die das Integral

$$(1) \qquad J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z')\,dx$$

mit gegebenen Grenzen x_0 und x_1 ein Maximum oder Minimum erreicht. Dabei wird vorgeschrieben, daß y und z für $x = x_0$ gegebene Werte y_0 und z_0 und für $x = x_1$ gegebene Werte y_1 und z_1 annehmen.

Indem wir unter σ eine beliebig klein gewählte positive Zahl und unter δy und δz solche Funktionen von x verstehen, die an den Grenzen x_0 und x_1 verschwinden und deren absolute Beträge im Intervalle von x_0 bis x_1 kleiner als σ sind, bilden wir wie in Nr. 897 die *vollständige Variation* δJ des Integrals J:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [f(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + (\delta y)', z' + (\delta z)') - f(x, y, z, y', z')] \, dx.$$

Nun wird *definiert*: Das Integral J hat für die Funktionen y und z von x ein Maximum bzw. Minimum, wenn δJ nie positiv bzw. nie negativ wird.

Wie in Nr. 898 seien unter η und ζ solche Funktionen von x verstanden, *die für* $x = x_0$ *und für* $x = x_1$ *verschwinden*, und es bedeute m eine Zahl, die größer ist als die absoluten Beträge von η und ζ im Intervalle von x_0 bis x_1; ferner sei h eine Zahl, die der Bedingung $|h| < \sigma : m$ genügt. Nun kann $\delta y = \eta h$ und $\delta z = \zeta h$ angenommen werden, so daß kommt:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{h}{1!} (f_y \eta + f_z \zeta + f_{y'} \eta' + f_{z'} \zeta') + \cdots \right] dx$$

oder:

$$\delta J = \frac{h}{1!} \int_{x_0}^{x_1} (f_y \eta + f_z \zeta + f_{y'} \eta' + f_{z'} \zeta') \, dx + \cdots.$$

Dabei deuten die Punkte Glieder an, die mit den höheren ganzzahligen Potenzen von h behaftet sind, während f die Funktion $f(x, y, z, y', z')$ vorstellt. Gerade so wie in Nr. 898 folgt: Wenn das Integral J für die Funktionen y und z ein Maximum oder Minimum erreicht, muß *die erste Variation des Integrals* verschwinden, d. h.:

$$\int_{x_0}^{x_1} (f_y \eta + f_z \zeta + f_{y'} \eta' + f_{z'} \zeta') \, dx = 0$$

sein. Wie in Nr. 899 findet man hieraus durch teilweise Integration:

$$\int_{x_0}^{x_1} (f_y \eta + f_z \zeta) dx + [f_{y'} \eta + f_{z'} \zeta]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d f_{y'}}{dx} \eta + \frac{d f_{z'}}{dx} \zeta \right) dx = 0,$$

und weil η und ζ an den Grenzen x_0 und x_1 verschwinden, vereinfacht sich diese Gleichung so:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(f_y - \frac{df_{y'}}{dx}\right)\eta + \left(f_z - \frac{df_{z'}}{dx}\right)\zeta\right]dx = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$E = f_y - \frac{df_{y'}}{dx}, \quad F = f_z - \frac{df_{z'}}{dx},$$

so hat man also zu fordern:

$$\int_{x_0}^{x_1}(E\eta + F\zeta)\,dx = 0.$$

Insbesondere kann man $\zeta = 0$ und $\eta = (x - x_0)(x_1 - x)E$ wählen und daraus wie in Nr. 899 schließen, daß $E = 0$ sein muß. Entsprechend folgert man $F = 0$. Also ergibt sich hier ein *System von zwei Eulerschen Gleichungen:*

$$(2) \qquad f_y - \frac{df_{y'}}{dx} = 0, \quad f_z - \frac{df_{z'}}{dx} = 0,$$

d. h. ein System *zweiter* Ordnung von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Funktionen y und z von x, und wir wissen, daß das Integral (1) nur für solche Funktionen y und z von x ein Maximum oder Minimum erreichen kann, die Lösungen des Systems (2) sind. Doch ist nicht gesagt, daß diese Bedingungen (2) für das wirkliche Eintreten eines Extremwertes hinreichen, selbst dann nicht, wenn man noch, wie es sein muß, die Lösungen y und z den vier Bedingungen unterwirft, daß sie für $x = x_0$ und $x = x_1$ die gegebenen Werte y_0 und z_0 bzw. y_1 und z_1 annehmen. Übrigens ist die Anzahl dieser Bedingungen gerade so groß wie die der noch zur Verfügung stehenden Integrationskonstanten. Denn wenn man das System (2) nach der Methode von Nr. 663 dadurch in ein System *erster* Ordnung verwandelt, daß man noch y' und z' als unbekannte Funktionen einführt, gehen insgesamt vier Differentialgleichungen hervor, so daß in der Tat gerade vier Integrationskonstanten auftreten.

903. Die Brachistochrone im Raume. In Nr. 901 wurde die Brachistochrone oder Bahnkurve kürzester Fallzeit in einer lotrechten Ebene bestimmt. Wir lassen jetzt die Bedingung fallen, daß die Bahnkurve in einer lotrechten Ebene liege. *Es soll also im Raume diejenige Kurve von einem gegebenen Punkte nach einem anderen gegebenen Punkte ermittelt werden, die ein materieller Punkt unter dem Einflusse der Schwere ohne Reibung am schnellsten durchläuft.* Der höher gelegene Punkt wird als Koordinaten-Anfangspunkt angenommen und die Vertikale nach unten als positive x-Achse. Entsprechend der Gleichung (1) von Nr. 901 gilt, wie die Mechanik lehrt, jetzt die Gleichung:

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,\frac{dx}{dt}=\sqrt{2gx},$$

woraus sich als Fallzeit ergibt:

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{x}}\,dx.$$

Es handelt sich somit um das Minimum des Integrals:

$$J=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{x}}\,dx,$$

in dem die Wurzel positiv ist und diejenige Funktion f vorstellt, mit der man die beiden Eulerschen Gleichungen (2) der letzten Nummer zu bilden hat. Es kommt, weil f frei von y und z ist, sofort:

$$\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{x}}=C_1,\quad \frac{\partial}{\partial z'}\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{x}}=C_2,$$

wobei C_1 und C_2 Konstanten sind. Hieraus folgt:

$$\frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2+z'^2)}}=C_1,\quad \frac{z'}{\sqrt{x(1+y'^2+z'^2)}}=C_2,$$

so daß:

$$C_2y'-C_1z'=0,$$

d. h.:

$$C_2y-C_1z=\text{konst.}$$

ist. Mithin verläuft die gesuchte Kurve in einer lotrechten Ebene und folglich kommt man zu derselben Lösung des Problems wie in Nr. 901.

904. Extremwerte von Integralen, in denen höhere Ableitungen einer unbekannten Funktion vor-

kommen. Wir gehen zu dem Falle über, wo ein Integral von der Form vorliegt:

$$(1) \qquad J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})\, dx,$$

dessen Integrand die Ableitungen der gesuchten Funktion y bis zu der von der n^{ten} Ordnung enthält. Dabei sein x_0 und x_1 gegeben, außerdem seien diejenigen Werte vorgeschrieben, die $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ für $x = x_0$ und $x = x_1$ zukommen. Die sehr leicht auszuführende Verallgemeinerung der Betrachtung in Nr. 897 gibt hier die *vollständige Variation* des Integrals J in der Form:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [f(x, y + \delta y, \ldots y^{(n)} + (\delta y)^n) - f(x, y, \ldots y^{(n)})]\, dx.$$

Dabei bedeutet δy eine solche Funktion von x, die nebst ihren $n - 1$ ersten Ableitungen für $x = x_0$ und für $x = x_1$ verschwindet und deren absoluter Betrag im Intervalle von x_0 bis x_1 kleiner als eine vorgegebene positive Zahl σ ist. Wiederum wird *definiert*, daß das Integral J für die Funktion y ein Maximum bzw. Minimum hat, wenn δJ nie positiv bzw. nie negativ wird. Wie in Nr. 898 wählt man nun $\delta y = \eta h$. Dabei bedeutet η eine Funktion von x, die nebst ihren $n - 1$ ersten Ableitungen an den Grenzen x_0 und x_1 verschwindet, während h die damals angegebene Bedingung erfüllt. Nun wird:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [f(x, y + \eta h, \ldots y^{(n)} + \eta^{(n)} h) - f(x, y, \ldots y^{(n)})]\, dx,$$

und dieselbe Schlußfolgerung wie in Nr. 898 liefert: Wenn J für die betrachtete Funktion y einen Extremwert erreicht, muß die *erste Variation* von J verschwinden:

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_1} [f_y \eta + f_{y'} \eta' + \cdots + f_{y^{(n)}} \eta^{(n)}]\, dx = 0.$$

Zur Umformung dieser Bedingung bedient man sich wieder der teilweisen Integration, wobei zu beachten ist, daß $\eta, \eta', \ldots \eta^{(n-1)}$ für $x = x_0$ und für $x = x_1$ den Wert Null haben. Es ist nämlich danach:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_{y'}\eta' dx = [f_{y'}\eta]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{df_{y'}}{dx}\eta\, dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{df_{y'}}{dx}\eta\, dx,$$

und ebenso, wenn man y' und η' durch y'' und η'' ersetzt:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_{y''}\eta'' dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{df_{y''}}{dx}\eta' dx.$$

Hier läßt sich die rechte Seite wieder durch teilweise Integration in

$$-\left[\frac{df_{y''}}{dx}\eta\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2 f_{y''}}{dx^2}\eta\, dx$$

umformen, so daß kommt:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_{y''}\eta'' dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2 f_{y''}}{dx^2}\eta\, dx,$$

usw. Folglich läßt sich die Gleichung (2) so schreiben:

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \left[f_y - \frac{df_{y'}}{dx} + \frac{d^2 f_{y''}}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n f_{y^{(n)}}}{dx^n}\right]\eta\, dx = 0.$$

Bezeichnet man den Inhalt der eckigen Klammer mit E und wählt man, wie gestattet ist:

$$\eta = (x - x_0)^n (x_1 - x)^n E,$$

weil dann $\eta, \eta', \ldots \eta^{(n-1)}$ für $x = x_0$ und für $x = x_1$ verschwinden, so ergibt sich wie in Nr. 899, daß E an jeder Stelle des Intervalles von x_0 bis x_1 gleich Null sein muß. Mithin geht die Bedingung hervor:

$$(4) \qquad f_y - \frac{df_{y'}}{dx} + \frac{d^2 f_{y''}}{dx^2} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n f_{y^{(n)}}}{dx^n} = 0.$$

Dies ist die *Eulersche Gleichung* des Problems. Rechnet man die hierin auftretenden n vollständigen Ableitungen nach x aus, so geht eine *gewöhnliche Differentialgleichung* $2n^{\text{ter}}$ *Ordnung* für die Funktion y von x hervor. Ihre allgemeine Lösung enthält $2n$ Integrationskonstantan. Gerade so groß ist die Anzahl der noch zu erfüllenden Grenzbedingungen, weil $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ für $x = x_0$ und $x = x_1$ vorgeschriebene Werte haben sollen.

904]

Wieder ist zu bemerken, daß wir zwar so zu einer jedenfalls nur beschränkten Anzahl von Funktionen y gelangen, die allein für die Ermittlung der Maxima und Minima des Integrals J in Betracht kommen, daß es aber nicht feststeht, ob sie wirklich J zu einem Extremwerte verhelfen.

905. Besondere Fälle. Beschränken wir uns auf die Annahme $n = 2$, d. h. suchen wir diejenigen Funktionen y von x, für die das Integral:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'')\,dx \tag{1}$$

ein Maximum oder Minimum wird, falls für y und y' an den Grenzen bestimmte Werte vorgeschrieben werden, so müssen diese Funktionen y Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung *vierter* Ordnung sein:

$$f_y - \frac{df_{y'}}{dx} + \frac{d^2 f_{y''}}{dx^2} = 0. \tag{2}$$

In einigen Fällen kann man die Ordnung erniedrigen:

Enthält die Funktion f die Veränderliche y nicht, so folgt aus (2) wegen $f_y = 0$, daß:

$$f_{y'} - \frac{df_{y''}}{dx} = \text{konst.} \tag{3}$$

wird. Dies aber ist eine gewöhnliche Differentialgleichung *dritter* Ordnung für y.

Ist die Funktion f in bezug auf y linear und ganz und der Koeffizient von y dabei eine Konstante, d. h. hat f die Form:

$$f = ay + \varphi(x, y', y''), \tag{4}$$

wobei $a =$ konst. ist, so gibt (2):

$$a - \frac{d\varphi_{y'}}{dx} + \frac{d^2\varphi_{y''}}{dx^2} = 0,$$

also:

$$ax - \varphi_{y'} + \frac{d\varphi_{y''}}{dx} = \text{konst.}, \tag{5}$$

d. h. eine gewöhnliche Differentialgleichung *dritter* Ordnung für y.

Enthält die Funktion f die Veränderliche x nicht, so ist identisch:

$$df - f_y dy - f_{y'} dy' - f_{y''} dy'' = 0.$$

Addiert man diese Gleichung zu der mit dy multiplizierten Gleichung (2), so kommt:

$$df - \left(\frac{df_{y'}}{dx}dy + f_{y'}dy'\right) + \left(\frac{d^2 f_{y''}}{dx^2}dy - f_{y''}dy''\right) = 0$$

oder wegen $dy = y'\,dx$, $dy' = y''\,dx$:

$$df - (y'\,df_{y'} + f_{y'}dy') + \left(y'd\frac{df_{y''}}{dx} - f_{y''}dy''\right) = 0.$$

Hier aber ist der Inhalt der ersten Klammer das vollständige Differential von $y'f_{y'}$ und der Inhalt der zweiten Klammer das vollständige Differential von

$$y'\frac{df_{y''}}{dx} - y''f_{y''}.$$

Mithin gibt eine Integration:

$$(6)\qquad f - y'f_{y'} + y'\frac{df_{y''}}{dx} - y''f_{y''} = \text{konst.},$$

und dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung *dritter* Ordnung für y.

Wenn die Funktion f von x und y frei ist, gelten die beiden Gleichungen (3) und (6). Durch Multiplikation der ersten mit y' und Addition zur zweiten geht für y eine gewöhnliche Differentialgleichung *zweiter* Ordnung hervor:

$$(7)\qquad f - y''f_{y''} - \text{konst.}\, y' - \text{konst.} = 0.$$

In den betrachteten Fällen gelingt es demnach *allgemeine intermediäre Integralgleichungen* der Differentialgleichung (2) zu ermitteln, vgl. Nr. 792.

906. Kurve, die mit ihrer Evolute eine kleinste Fläche einschließt. In der Ebene seien zwei Punkte A und B einer gesuchten Kurve nebst ihren Tangenten gegeben, so daß auch die Normalen von A und B gegeben sind. *Die Kurve soll so bestimmt werden, daß die Fläche, die von ihr, von der Anfangs- und der Endnormale und von der Evolute eingeschlossen wird, ein Minimum erreicht.* Natürlich muß vorausgesetzt werden, daß die gesuchte Kurve zwischen A und B keinen Wendepunkt hat, weil sonst die zugehörige Stelle der

Evolute unendlich fern läge, d. h. die Kurve muß von A bis B einerlei Krümmung, etwa *positive* Krümmung haben.

Es seien (x, y) und $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ zwei benachbarte Punkte der Kurve mit den positiven Krümmungsradien R und $R + \Delta R$, die einen positiven Winkel $\Delta\tau$ miteinander bilden. Die Fläche ΔF, die von dem zugehörigen Kurvenbogen, den beiden Krümmungsradien und dem zugehörigen Evolutenbogen eingeschlossen wird, liegt nun, falls die beiden gewählten Punkte hinreichend benachbart sind, zwischen den Flächen zweier rechtwinkliger Dreiecke mit dem Winkel $\Delta\tau$ und der dem Winkel $\Delta\tau$ anliegenden Kathete R bzw. $R + \Delta R$, so daß man im Falle $\Delta R > 0$ hat:

$$\tfrac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} \Delta\tau < \Delta F < \tfrac{1}{2}(R + \Delta R)^2 \operatorname{tg} \Delta\tau.$$

Durch Division mit der positiven Bogenlänge Δs vom ersten bis zum zweiten Punkte folgt:

$$\frac{1}{2} R^2 \frac{\operatorname{tg} \Delta\tau}{\Delta\tau} \cdot \frac{\Delta\tau}{\Delta s} < \frac{\Delta F}{\Delta s} < \frac{1}{2}(R + \Delta R)^2 \frac{\operatorname{tg} \Delta\tau}{\Delta\tau} \cdot \frac{\Delta\tau}{\Delta s}.$$

Beim Grenzübergange $\lim \Delta s = 0$ wird auch $\lim \Delta\tau = 0$ und $\lim \Delta R = 0$, und es kommt, falls ds das Bogenelement und $d\tau$ den Kontingenzwinkel bezeichnet:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{1}{2} R^2 \frac{d\tau}{ds}$$

oder:

$$dF = \tfrac{1}{2} R^2 d\tau.$$

Dies ergibt sich auch im Falle $\Delta R < 0$.

Da nun nach (1) in Nr. 197 bzw. in Nr. 193:

$$R = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''}, \quad ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

ist, folgt weiter:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2} \frac{(1 + y'^2)^2}{y''}.$$

Demnach handelt es sich um die Ermittlung derjenigen Funktionen y von x, für die das Integral:

$$(1) \qquad F = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{(1 + y'^2)^2}{2 y''}\,dx$$

ein Minimum erreicht.

[906

Hier liegt der *letzte* Fall der vorigen Nummer vor, so daß nach (7) ebenda die Differentialgleichung:

$$\frac{(1+y'^2)^2}{y''} = \text{konst.}\, y' + \text{konst.}$$

zu integrieren ist. Sie läßt sich mit Rücksicht auf (1) in Nr. 169 auch so schreiben:

$$R = \frac{ds}{d\tau} = \text{konst.}\sin\tau + \text{konst.}\cos\tau = 4a\cos(\tau - \alpha),$$

wenn a und α Konstanten bezeichnen. Dreht man das Achsenkreuz um den Winkel α, so tritt an die Stelle des Tangentenwinkels τ der Winkel $\tau - \alpha$, während der Krümmungsradius R ungeändert bleibt. Man darf daher einfacher $R = 4a\cos\tau$ annehmen. Dann aber kommt nach (1) in Nr. 194:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau}\cos\tau = R\cos\tau = 4a\cos^2\tau,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau}\sin\tau = R\sin\tau = 4a\sin\tau\cos\tau,$$

folglich:

$$x = a(2\tau + \sin 2\tau) + \text{konst.}, \quad y = a(1 - \cos 2\tau) + \text{konst.}$$

Führt man die neue Hilfsveränderliche $\varphi = 2\tau - \pi$ ein, so ergibt sich, wenn man geeignete Konstanten zu x und y addiert, d. h. eine geeignete Verschiebung des schon vorhin gedrehten Achsenkreuzes vornimmt:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = a(\cos\varphi - 1).$$

Nach (1) in Nr. 231, worin y durch $-y$ zu ersetzen ist, besagt dies, daß die gesuchte Kurve eine *gemeine Zykloide* sein muß. Daß hier y durch $-y$ zu ersetzen ist, hängt damit zusammen, daß die gemeine Zykloide, die in Nr. 231 durch die Formeln (1) dargestellt wird, überall negative Krümmungsradien hat, während wir $R > 0$ annahmen.

907. Extremwerte von Integralen, in denen höhere Ableitungen von mehreren unbekannten Funktionen vorkommen. Die Betrachtungen in Nr. 904 lassen sich weiterhin verallgemeinern, wenn es sich um die Maxima und Minima von Integralen handelt, deren Integranden außer x mehr als eine unbekannte Funktion mit ihren Ableitungen bis zu gewissen Ordnungen enthalten, z. B. wenn ein Integral mit *zwei* unbekannten Funktionen y und z von x in der Form:

$$(1) \qquad J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots y^{(n)}, z, z', \ldots z^{(n)})\, dx$$

vorliegt. Dabei werde vorgeschrieben, daß $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ und $z, z', \ldots z^{(n-1)}$ an den gegebenen Grenzen x_0 und x_1 gegebene Werte annehmen. Entsprechend der Formel (2) von Nr. 904 ergibt sich, falls für die in J auftretenden Funktionen y und z ein Extremwert des Integrals vorkommt:

$$\int_{x_0}^{x_1} [f_y \eta + f_{y'} \eta' + \cdots + f_{y^{(n)}} \eta^{(n)} + f_z \zeta + f_{z'} \zeta' + \cdots + f_{z^{(n)}} \zeta^{(n)}]\, dx = 0.$$

Wie in Nr. 904 formt man dies Integral durch teilweise Integration um und folgert alsdann wie in Nr. 902, daß statt der einen Gleichung (4) von Nr. 904 hier die beiden *Eulerschen Gleichungen* hervorgehen:

$$(2) \qquad \begin{cases} f_y - \dfrac{d f_{y'}}{dx} + \dfrac{d^2 f_{y''}}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \dfrac{d^n f_{y^{(n)}}}{dx^n} = 0, \\ f_z - \dfrac{d f_{z'}}{dx} + \dfrac{d^2 f_{z''}}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \dfrac{d^n f_{z^{(n)}}}{dx^n} = 0. \end{cases}$$

Dies ist ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen $2n^{\text{ter}}$ Ordnung für y und z. Wenn man außer y und z auch die Ableitungen $y', y'', \ldots y^{(2n-1)}$ und $z', z'', \ldots z^{(2n-1)}$ nach der Methode von Nr. 663 als unbekannte Funktionen einführt, geht ein äquivalentes System erster Ordnung von $4n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen für die $4n$ unbekannten Funktionen hervor. Demnach enthält das allgemeine Lösungensystem y und z von (2) gerade $4n$ Integrationskonstanten. Da gefordert wird, daß $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ und $z, z', \ldots z^{(n-1)}$ an den Grenzen x_0 und x_1 vorgeschriebene Werte annehmen, sind andererseits gerade $4n$ Bedingungen zu erfüllen, also gerade so viele, als willkürliche Konstanten zur Verfügung stehen.

Bei manchen Aufgaben, wo es sich um die Ermittlung einer Kurve in der xy-Ebene handelt, für die ein gewisses Integral ein Maximum oder Minimum erreicht, ist es bequemer, statt x eine Hilfsveränderliche t zu benutzen, indem man x und y als Funktionen von t betrachtet, vgl. Nr. 93

und Nr. 168. Dies ist sogar nötig, wenn es sich um Kurven handelt, die von Parallelen zur y-Achse in mehr als einem Punkte getroffen werden, denn solche Kurven lassen sich nicht durch Funktionen y von x darstellen, wenn wir — wie immer — nur einwertige Funktionen zulassen. Liegt z. B. das Integral vor:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^n y}{dx^n}\right) dx,$$

so wird man, wenn x und y als Funktionen von t betrachtet werden, nach Nr. 93 die Ableitungen von y nach x durch die Ableitungen von x und y nach t ausdrücken. Kennzeichnet der Akzent diese Ableitungen nach t, so setzt man überdies $dx = x' dt$. Alsdann geht ein Integral von der Form:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi\,(x, y, x', y', \ldots x^{(n)}, y^{(n)})\, dt$$

hervor, das nach der vorhin vorgetragenen Methode wie das Integral (1) zu behandeln ist, in dem jetzt t, x und y an die Stelle von x, y und z treten.

§ 3. Integrale mit veränderlichen Grenzen.

908. Vorbereitende Betrachtung von Integralen mit festen Grenzen und willkürlichen Konstanten. Bei der einfachsten Aufgabe der Variationsrechnung, siehe Nr. 896, handelte es sich um die Bestimmung derjenigen Funktionen y von x, die ein gegebenes Integral:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$$

zu einem Maximum oder Minimum machen, vorausgesetzt, daß x_0 und x_1 sowie die Werte y_0 und y_1 von y für $x = x_0$ und $x = x_1$ gegeben sind. Wir beabsichtigen, dies Problem auf den Fall veränderlicher Grenzen zu verallgemeinern. Zur Vorbereitung ist es zweckmäßig, eine andere Erweiterung der Aufgabe zu betrachten:

Nach wie vor seien die Integralgrenzen x_0 und x_1 sowie die Werte y_0 und y_1, die der gesuchten Funktion y an den

Grenzen vorgeschrieben werden, gegeben. Dagegen möge der Integrand f von J noch eine *willkürliche Konstante* α enthalten. Dann handelt es sich darum, *die Funktion* y *und die Konstante* α *so zu bestimmen, daß das Integral:*

$$(1) \qquad J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \alpha)\, dx$$

einen Extremwert erreicht.

Zur Definition der Maxima und Minima verfahren wir entsprechend Nr. 897 so: Es sei σ eine beliebig kleine positive Zahl. Ferner bedeute $y + \delta y$ irgend eine Funktion von x, die ebenfalls für $x = x_0$ und $x = x_1$ die Werte y_0 und y_1 hat und im Intervalle von x_0 bis x_1 um weniger als σ von y abweicht, so daß $|\delta y| < \sigma$ ist. Außerdem weiche die Konstante $\alpha + \delta\alpha$ um weniger als σ von α ab; es sei also auch $|\delta\alpha| < \sigma$. Alsdann wird die *vollständige Variation* gebildet:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y + \delta y, y' + (\delta y)', \alpha + \delta\alpha)\, dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \alpha)\, dx.$$

Man *definiert* nun: J erreicht für die Funktion y und den Wert α der Konstanten ein Maximum bzw. Minimum, falls δJ nie positiv bzw. nie negativ wird.

Nun kann wie in Nr. 898 eine Funktion η von x beliebig im Intervalle von x_0 bis x_1 gewählt werden, doch so, daß sie für $x = x_0$ und $x = x_1$ verschwindet. Ist ihr absoluter Betrag überall kleiner als m, so sei h eine Zahl, die der Bedingung $|h| < \sigma : m$ genügt. Alsdann erfüllt $\delta y = \eta h$ die vorhin an die Variation δy gestellten Anforderungen. Ferner sei k eine beliebige Zahl, deren absoluter Betrag ebenfalls kleiner als m ist. Dann wird, wenn man $\delta\alpha = kh$ setzt, auch $|\delta\alpha| < \sigma$, wie verlangt wurde. Bei diesen besonderen Annahmen $\delta y = \eta h$, $\delta\alpha = kh$ nimmt die Variation δJ den Wert an:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [f(x, y + \eta h, y' + \eta' h, \alpha + kh) - f(x, y, y', \alpha)]\, dx.$$

Nach den allgemeinen Voraussetzungen zu Anfang von Nr. 897 können wir die in der eckigen Klammer stehende Differenz bei hinreichend kleinem $|h|$ nach ganzen positiven Potenzen von h entwickeln, wodurch sich entsprechend wie in Nr. 898 ergibt:

$$\delta J = \frac{h}{1!}\int_{x_0}^{x_1}(f_y\eta + f_{y'}\eta' + f_\alpha k)\,dx + \cdots.$$

Nun heißt wieder:

$$\int_{x_0}^{x_1}(f_y\eta + f_{y'}\eta' + f_\alpha k)\,dx$$

die *erste* Variation von J, und wie in Nr. 898 ergibt sich: Falls die Funktion y von x und die Zahl α das vorgelegte Integral (1) zu einem Maximum oder Minimum machen, muß die erste Variation gleich Null sein:

$$\int_{x_0}^{x_1}(f_y\eta + f_{y'}\eta')\,dx + k\int_{x_0}^{x_1} f_\alpha\,dx = 0.$$

Hier bedeutet aber k eine beliebige Zahl, die nur der Bedingung $|k| < m$ zu genügen hat. Also muß einzeln:

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_1}(f_y\eta + f_{y'}\eta')\,dx = 0, \qquad \int_{x_0}^{x_1} f_\alpha\,dx = 0$$

sein. Die erste Bedingung führt wie in Nr. 899 zur *Eulerschen Differentialgleichung:*

$$(3) \qquad f_y - \frac{d f_{y'}}{dx} = 0.$$

Sie ist von der *zweiten* Ordnung und enthält die Konstante α. Ihre allgemeine Lösung y wird also außer von x und den beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 noch von α abhängen:

$$(4) \qquad y = \varphi(x, C_1, C_2, \alpha).$$

Nun ist noch die zweite Bedingung (2) zu befriedigen, nämlich:

$$(5) \qquad \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x_1} f_\alpha\,dx = 0.$$

Durch Substitution von (4) in (5) ergibt sich, wenn man das Integral auszuwerten vermag, eine Gleichung zwischen C_1, C_2 und α. Außerdem ist zu fordern, daß y für $x = x_0$ und $x = x_1$ die vorgeschriebenen Werte y_0 und y_1 annimmt. Dadurch gehen noch zwei Bedingungen für C_1, C_2 und α hervor. Wenn es nun möglich ist, den drei so gewonnenen Bedingungen für C_1, C_2 und α zu genügen, ist damit ebenso wie früher immer noch nicht gesagt, daß für die alsdann bestimmte Funktion y und Konstante α das Integral (1) wirklich einen Extremwert erreicht, denn wir haben nur notwendige, nicht aber hinreichende Bedingungen für das Eintreten eines Maximums oder Minimums aufgestellt.

Es ist leicht, diese Betrachtung auf den Fall zu verallgemeinern, wo der Integrand f nicht nur eine, sondern mehrere willkürliche Konstanten enthält. Wenn es sich z. B. um die Extremwerte des Integrals:

$$(6) \qquad J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \alpha, \beta)\, dx = 0$$

mit zwei willkürlichen Konstanten α und β handelt, ergeben sich außer der Eulerschen Differentialgleichung noch die beiden Bedingungen:

$$(7) \qquad \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial \beta} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial \beta}\, dx = 0.$$

Ebenso bedarf es keiner weiteren Erörterungen darüber, daß Entsprechendes gilt, wenn das Integral mehrere unbekannte Funktionen mit Ableitungen höherer Ordnungen enthält.

909. Umformung eines Integrals mit veränderlichen Grenzen in ein Integral mit festen Grenzen. Wir gehen zu der angekündigten Verallgemeinerung der Betrachtungen in Nr. 896 bis 899 über, nämlich zur Betrachtung von Integralen:

$$(1) \qquad J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx,$$

bei denen weder die Grenzen x_0 und x_1 noch die Werte y_0 und y_1, die der Funktion y von x an den Grenzen zukommen, vorgeschrieben sind, vielmehr nur *verlangt wird, daß* y_0 *und* y_1 *gegebene Funktionen von* x_0 *bzw.* x_1 *seien:*

$$(2) \qquad y_0 = \lambda(x_0), \qquad y_1 = \mu(x_1).$$

Solche Integrale lassen sich leicht durch Anwendung der in Nr. 485 angedeuteten Methode in Integrale mit festen

Grenzen verwandeln. Man führt nämlich die neue unabhängige Veränderliche t vermöge der Substitution:

$$(3) \qquad x = x_0 + (x_1 - x_0)\,t$$

ein. Dann durchläuft x das Intervall von x_0 bis x_1, wenn t von 0 bis 1 wächst. Wegen $dx = (x_1 - x_0)\,dt$ lautet das hervorgehende Integral so:

$$(4) \qquad J = \int_0^1 f(x, y, y')\,(x_1 - x_0)\,dt.$$

Hierin soll x natürlich die Funktion (3) von t bedeuten. Infolgedessen wird auch y als Funktion von t aufzufassen sein. Sie hat für $t = 0$ (d. h. $x = x_0$) den Wert y_0 oder $\lambda(x_0)$ und für $t = 1$ (d. h. für $x = x_1$) den Wert y_1 oder $\mu(x_1)$. Man kann nun auch statt der gesuchten Funktion y eine neue Funktion u einführen, die an den Grenzen feste Werte, z. B. an beiden Grenzen den Wert Null hat. Dies ist der Fall bei der Funktion:

$$(5) \qquad u = y - \lambda(x_0)\,(1 - t) - \mu(x_1)\,t.$$

Demnach machen wir in (4) noch die Substitution:

$$(6) \qquad y = u + \lambda(x_0)\,(1 - t) + \mu(x_1)\,t.$$

Da y' die Ableitung $dy : dx$ vorstellt, muß außerdem wegen (6) und (3) noch die Substitution:

$$(7) \qquad y' = \frac{\frac{du}{dt} - \lambda(x_0) + \mu(x_1)}{x_1 - x_0}$$

ausgeführt werden.

Versteht man also unter x, y und y' in (4) die Ausdrücke (3), (6) und (7), so hat das Integral die allgemeine Form:

$$(8) \qquad J = \int_0^1 \varphi\left(t, u, \frac{du}{dt}, x_0, x_1\right) dt.$$

Dabei ist u eine noch unbekannte Funktion von t, die an den Grenzen $t = 0$ und $t = 1$ verschwindet, während x_0 und x_1 willkürliche Konstanten bedeuten. Mithin ordnet sich jetzt das Integral der allgemeinen Form (6) in voriger Nummer unter, wenn man dabei x, y, α und β durch t, u, x_0 und x_1 ersetzt. Deshalb können wir jetzt definieren: Als Funktion

y von x, die das vorgelegte Integral (1) *mit veränderlichen Grenzen* x_0 *und* x_1, *unter den Grenzbedingungen* $y_0 = \lambda(x_0)$ *und* $y_1 = \mu(x_1)$ zu einem Maximum oder Minimum macht, wird jede solche Funktion y bezeichnet, zu der nach (5) und (3) eine Funktion u von t gehört, die das Integral in der neuen Form (8), worin x_0 und x_1 *willkürliche Konstanten* bedeuten, zu einem Maximum oder Minimum macht, und zwar unter der *Bedingung, daß* u *für* $t = 0$ *und* $t = 1$ *verschwindet.*

Aus den Ergebnissen der vorigen Nummer folgen drei Bedingungen, die dann erfüllt sein müssen, einmal die Eulersche Differentialgleichung für die Funktion u von t, dann die Bedingung $\partial J : \partial x_0 = 0$ und schließlich noch die Bedingung $\partial J : \partial x_1 = 0$. In der nächsten Nummer werden wir untersuchen, wie sich diese drei Gleichungen in den ursprünglichen Größen x und y ausdrücken.

910. Bedingungen für die Extremwerte eines Integrals mit veränderlichen Grenzen. Es handelt sich jetzt darum, das Integral:

$$(1) \qquad J = \int_0^1 f(x, y, y')\,(x_1 - x_0)\,dt,$$

worin x, y und y' die Bedeutungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)\,t, \\ y = u + \lambda(x_0)\,(1-t) + \mu(x_1)\,t, \\ y' = \dfrac{\dfrac{du}{dt} - \lambda(x_0) + \mu(x_1)}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

haben, durch geeignete Wahl der Funktion u von t, die für $t = 0$ und $t = 1$ verschwindet, und durch geeignete Wahl der Konstanten x_0 und x_1 zu einem Maximum oder Minimum zu machen.

Da $(x_1 - x_0) f$ der Integrand ist, lautet die Eulersche Differentialgleichung für u entsprechend (3) in Nr. 908 so:

$$\frac{\partial (x_1 - x_0) f}{\partial u} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial (x_1 - x_0) f}{\partial \dfrac{du}{dt}} = 0.$$

Nach (2) ist aber:

$$\frac{\partial(x_1-x_0)f}{\partial u}=(x_1-x_0)\frac{\partial f}{\partial u}=(x_1-x_0)f_y,$$
$$\frac{\partial(x_1-x_0)f}{\partial\frac{du}{dt}}=(x_1-x_0)\frac{\partial f}{\partial\frac{du}{dt}}=f_{y'},$$

d. h.:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(x_1-x_0)f}{\partial\frac{du}{dt}}=\frac{df_{y'}}{dt}=\frac{df_{y'}}{dx}\frac{dx}{dt}=(x_1-x_0)\frac{df_{y'}}{dx}.$$

Mithin nimmt die Eulersche Differentialgleichung wieder die bekannte alte Form an:

$$f_y-\frac{df_{y'}}{dx}=0. \tag{3}$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial J}{\partial x_1}=\int_0^1\left[(x_1-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_1}+f\right]dt.$$

Da x_1 nach (2) in x, y und y' auftritt, muß hierin:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=f_x t+f_y\mu' t+f_{y'}\frac{\mu'(x_1-x_0)-\frac{du}{dt}+\lambda-\mu}{(x_1-x_0)^2}$$
$$=f_x\frac{x-x_0}{x_1-x_0}+f_y\mu'\frac{x-x_0}{x_1-x_0}+f_{y'}\frac{\mu'-y'}{x_1-x_0}$$

gesetzt werden. Außerdem ist $dt=dx:(x_1-x_0)$. Also kommt:

$$(x_1-x_0)\frac{\partial J}{\partial x_1}=\int_{x_0}^{x_1}[f_x(x-x_0)+f_y\mu'(x-x_0)+f_{y'}(\mu'-y')+f]\,dx. \tag{4}$$

Hier kann man nun:

$$f_x=\frac{df}{dx}-f_y y'-f_{y'}y''$$

einsetzen, so daß sich ergibt:

$$(x_1-x_0)\frac{\partial J}{\partial x_1}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{d(x-x_0)f}{dx}\,dx-\int_{x_0}^{x_1}f_{y'}y''(x-x_0)\,dx \tag{5}$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}[f_y(\mu'-y')(x-x_0)+f_{y'}(\mu'-y')]\,dx.$$

Das zweite hierin auftretende Integral kann man mittels teilweiser Integration umformen in:

$$[f_{y'} y'(x - x_0)]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} y' \frac{d f_{y'}(x - x_0)}{dx} dx.$$

Führt man diesen Wert in (5) ein und ersetzt man f_y in Gemäßheit der Eulerschen Gleichung (3) durch $df_{y'} : dx$, so kommt:

$$(x_1 - x_0)\frac{\partial J}{\partial x_1} = -[f_{y'} y'(x - x_0)]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d(x - x_0) f}{dx} dx + \mu' \int_{x_0}^{x_1} \frac{d(x - x_0) f_{y'}}{dx} dx.$$

Hier aber lassen sich die Integrale auswerten, so daß sich ergibt:

$$(x_1 - x_0)\frac{\partial J}{\partial x_1} = [(x - x_0)(f - y' f_{y'} + \mu' f_{y'})]_{x_0}^{x_1}.$$

Da ferner $x - x_0$ für $x = x_0$ verschwindet, bleibt:

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = [f + (\mu' - y') f_{y'}]_1, \tag{6}$$

wenn der Index 1 andeutet, daß der in der Klammer stehende Ausdruck für $x = x_1$ zu bilden ist.

Mithin lautet die Bedingung $\partial J : \partial x_1 = 0$ so:

$$[f + (\mu' - y') f_{y'}]_1 = 0.$$

Ganz entsprechend muß sich $\partial J : \partial x_0 = 0$ darstellen. *Folglich haben wir für diejenigen Funktionen y von x, die unter den Vorschriften $y_0 = \lambda(x_0)$ und $y_1 = \mu(x_1)$ das Integral:*

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$$

mit veränderlichen Grenzen zu einem Extremwerte machen, drei Bedingungen erhalten, nämlich außer der Eulerschen Gleichung:

$$f_y - \frac{d f_{y'}}{dx} = 0 \tag{7}$$

noch die beiden Grenzbedingungen:

$$[f + (\lambda' - y') f_{y'}]_0 = 0, \quad [f + (\mu' - y') f_{y'}]_1 = 0. \tag{8}$$

Die allgemeine Lösung von (7) enthält *zwei* Integrationskonstanten, und sie sind den beiden Grenzbedingungen (8) zu unterwerfen. Wieder ist aber zu bemerken, daß man so zwar zu einer jedenfalls beschränkten Anzahl von Funktionen y und Grenzwerten x_0 und x_1 gelangt, die allein für das Eintreten eines Maximums oder Minimums von J in Betracht kommen, daß aber nicht notwendig ein Extremwert einzutreten braucht.

911. Extremwerte von Integralen mit veränderlichen Grenzen und zwei unbekannten Funktionen. Wir betrachten nunmehr wie in Nr. 902 ein vorgelegtes Integral:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z')\, dx \tag{1}$$

mit *zwei* unbekannten Funktionen y und z von x. Deutet man x, y, z als rechtwinklige Koordinaten im Raume, so stellen die Funktionen y und z von x eine Raumkurve dar. Es sollen also diejenigen Raumkurven gesucht werden, die das Integral J zu einem Maximum oder Minimum machen. Jetzt aber sollen entgegen den Annahmen von Nr. 902 die Grenzen x_0 und x_1 nicht bestimmt gegeben sein. Wenn die Werte von y und z an der Grenze $x = x_0$ mit y_0 und z_0 und an der Grenze $x = x_1$ mit y_1 und z_1 bezeichnet werden, so daß die gesuchte Kurve von der Stelle (x_0, y_0, z_0) zur Stelle (x_1, y_1, z_1) geht, sind insbesondere zwei Arten von Vorschriften über diese beiden Punkte geometrisch wichtig:

Erster Fall: Es wird vorgeschrieben, daß die Punkte (x_0, y_0, z_0) und (x_1, y_1, z_1) auf gegebenen *Kurven* k_0 und k_1 liegen, d. h. analytisch: Es sind Gleichungen von der Form gegeben:

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_0(x_0), & z_0 = \mu_0(x_0), \\ y_1 = \lambda_1(x_1), & z_1 = \mu_1(x_1). \end{cases} \tag{2}$$

Die beiden Kurven k_0 und k_1 heißen die *Grenzkurven.*

Zweiter Fall: Es wird vorgeschrieben, daß die Punkte (x_0, y_0, z_0) und (x_1, y_1, z_1) auf gegebenen *Flächen* F_0 und F_1 liegen. Da man sich die Gleichungen der Flächen nach der x-Koordinate aufgelöst denken kann, seien also Gleichungen von der Form gegeben:

$$x_0 = \lambda(y_0, z_0), \qquad x_1 = \mu(y_1, z_1). \tag{3}$$

Die beiden Flächen F_0 und F_1 heißen die *Grenzflächen.*

Im ersten Falle sind x_0 und x_1 willkürliche Konstanten, während y_0, z_0, y_1, z_1 die gegebenen Funktionen (2) von x_0 und x_1 bedeuten; im zweiten Falle dagegen sind y_0, z_0, y_1, z_1

willkürliche Konstanten, während x_0 und x_1 die gegebenen Funktionen (3) von ihnen bedeuten.

In beiden Fällen gelingt es durch einfache Substitutionen, das Integral J in ein Integral zu verwandeln, das feste Grenzen hat, und zugleich solche gesuchte Funktionen einzuführen, die an diesen Grenzen ebenfalls bestimmte Werte, z. B. insbesondere sämtlich den Wert Null, haben. Aber im ersten Falle treten in dem hervorgehenden Integral noch *zwei* willkürliche Konstanten x_0 und x_1, im zweiten Falle noch *vier* willkürliche Konstanten y_0, z_0, y_1, z_1 auf. Im ersten Falle treten demgemäß zu den Eulerschen Gleichungen noch *zwei* Bedingungen:

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial x_1} = 0 \tag{4}$$

und im zweiten Falle noch *vier* Bedingungen:

$$\frac{\partial J}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial z_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial z_1} = 0 \tag{5}$$

hinzu.

Im *ersten Falle* machen wir die Substitutionen:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)\,t, \\ y = u + \lambda_0(x_0)\,(1-t) + \lambda_1(x_1)\,t, \\ z = v + \mu_0(x_0)\,(1-t) + \mu_1(x_1)\,t, \end{cases} \tag{6}$$

indem wir t als unabhängige Veränderliche und u und v als unbekannte Funktionen einführen. Man sieht, daß x, y, z für $t = 0$, $u = 0$, $v = 0$ infolge von (6) gleich x_0, $\lambda_0(x_0)$, $\mu_0(x_0)$ und für $t = 1$, $u = 0$, $v = 0$ gleich x_1, $\lambda_1(x_1)$, $\mu_1(x_1)$ werden, wie verlangt wird. Infolge von (6) ist ferner:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{du}{dt} - \lambda_0(x_0) + \lambda_1(x_1)}{x_1 - x_0}, \\[2ex] z' = \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\dfrac{dv}{dt} - \mu_0(x_0) + \mu_1(x_1)}{x_1 - x_0}, \end{cases} \tag{7}$$

während das Integral (1) wegen $dx : dt = x_1 - x_0$ übergeht in:

$$J = \int_0^1 f(x, y, z, y', z')\,(x_1 - x_0)\,dt. \tag{8}$$

Hierin betrachtet man also x, y, z, y', z' als die Funktionen (6) und (7), und es liegt, abgesehen davon, daß noch die beiden willkürlichen Konstanten x_0 und x_1 unter dem Integralzeichen auftreten, dasselbe Problem wie in Nr. 902 vor, indem t, u, v an die Stelle von x, y, z treten. Demnach ergeben sich entsprechend den Gleichungen (2) von Nr. 902 die beiden *Eulerschen Gleichungen:*

$$\frac{\partial (x_1 - x_0) f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial (x_1 - x_0) f}{\partial \frac{du}{dt}} = 0, \quad \frac{\partial (x_1 - x_0) f}{\partial v} - \frac{d}{dt} \frac{\partial (x_1 - x_0) f}{\partial \frac{dv}{dt}} = 0.$$

Führt man wieder die alten Veränderlichen ein, so erkennt man leicht wie in voriger Nummer, daß diese Bedingungen auf die gewohnten Eulerschen Gleichungen:

$$(9) \qquad f_y - \frac{d f_{y'}}{dx} = 0, \quad f_z - \frac{d f_{z'}}{dx} = 0$$

zurückkommen. Dazu treten nun die beiden Bedingungen (4). Nach (8) ist aber:

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = \int_0^1 \left[(x_1 - x_0) \frac{\partial f}{\partial x_1} + f \right] dt,$$

und hierin hat man nach (6) und (7) zu setzen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_x t + f_y \lambda_1' t + f_z \mu_1' t$$
$$+ f_{y'} \frac{\lambda_1'(x_1 - x_0) - \frac{du}{dt} + \lambda_0 - \lambda_1}{(x_1 - x_0)^2} + f_{z'} \frac{\mu_1'(x_1 - x_0) - \frac{dv}{dt} + \mu_0 - \mu_1}{(x_1 - x_0)^2}.$$

Man kann gerade so wie in Nr. 910 das Integral $\partial J : \partial x_1$ umformen, indem man die Gleichungen (9) benutzt, und es ergibt sich entsprechend der Formel (6) der vorigen Nummer:

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = [f + (\lambda_1' - y') f_{y'} + (\mu_1' - z') f_{z'}]_1.$$

Der Index 1 deutet dabei an, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer für $x = x_1$ zu bilden ist. Ein entsprechender Wert geht für $\partial J : \partial x_0$ hervor, so daß die beiden Gleichungen (4) die *Grenzbedingungen* liefern:

$$(10) \qquad \begin{cases} [f + (\lambda_0' - y') f_{y'} + (\mu_0' - z') f_{z'}]_0 = 0, \\ [f + (\lambda_1' - y') f_{y'} + (\mu_1' - z') f_{z'}]_1 = 0. \end{cases}$$

Wir wenden uns zum *zweiten Falle.* Hier erreichen wir durch die Substitution:

$$(11)\qquad \begin{cases} x = \lambda(y_0, z_0) + [\mu(y_1, z_1) - \lambda(y_0, z_0)]\,t, \\ y = u + y_0(1-t) + y_1 t, \\ z = v + z_0(1-t) + z_1 t \end{cases}$$

das Gewünschte, da x, y, z dann für $t = 0$, $u = 0$, $v = 0$ die Werte $\lambda(y_0, z_0)$, y_0 und z_0 und für $t = 1$, $u = 0$, $v = 0$ die Werte $\mu(y_1, z_1)$, y_1 und z_1 annehmen. Außerdem ist zu setzen:

$$(12)\qquad \begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{du}{dt} - y_0 + y_1}{\mu - \lambda}, \\[2ex] z' = \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\dfrac{dv}{dt} - z_0 + z_1}{\mu - \lambda}, \end{cases}$$

während das Integral (1) wegen $dx : dt = \mu - \lambda$ die Form:

$$(13)\qquad J = \int_0^1 f(x, y, z, y', z')\,(\mu - \lambda)\,dt$$

annimmt. Man erhält also wie in Nr. 902 *zwei Eulersche Gleichungen,* die auf u und die auf v bezügliche:

$$\frac{\partial(\mu-\lambda)f}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(\mu-\lambda)f}{\partial\dfrac{du}{dt}} = 0, \qquad \frac{\partial(\mu-\lambda)f}{\partial v} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(\mu-\lambda)f}{\partial\dfrac{dv}{dt}} = 0,$$

die in den alten Bezeichnungen infolge von (11) wieder die gewohnten Formen (9) annehmen. Hierzu treten aber, weil in dem Integranden von (13) noch die vier willkürlichen Konstanten y_0, z_0, y_1, z_1 vorkommen, die vier Grenzbedingungen (5). Insbesondere wird nach (13):

$$\frac{\partial J}{\partial y_1} = \int_0^1 \Big[\frac{\partial f}{\partial y_1}(\mu - \lambda) + f\frac{\partial \mu}{\partial y_1}\Big]dt,$$

und hierin ist nach (11) und (12) für $\partial f : \partial y_1$ der Wert:

$$f_x\frac{\partial\mu}{\partial y_1}t + f_y t + f_{y'}\frac{\mu - \lambda - \Big(\dfrac{du}{dt} - y_0 + y_1\Big)\dfrac{\partial\mu}{\partial y_1}}{(\mu-\lambda)^2} - f_{z'}\frac{\dfrac{dv}{dt} - z_0 + z_1}{(\mu-\lambda)^2}\frac{\partial\mu}{\partial y_1}$$

zu setzen, so daß sich ergibt:

$$(\mu-\lambda)\frac{\partial J}{\partial y_1} = \int_{x_0}^{x_1}\Big[\frac{\partial\mu}{\partial y_1}\{f_x(x-\lambda) - y'f_{y'} - z'f_{z'} + f\} + f_y(x-\lambda) + f_{y'}\Big]dx.$$

Dies Integral kann man gerade so wie das Integral in (4), Nr. 910, behandeln, indem man darin:

$$f_x = \frac{df}{dx} - f_y y' - f_z z' - f_{y'} y'' - f_{z'} z''$$

einführt, überdies die Umformungen benutzt:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_{y'} y''(x-\lambda)\,dx = \left[f_{y'} y'(x-\lambda)\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} y'\left[(x-\lambda)\frac{df_{y'}}{dx} + f_{y'}\right] dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f_{z'} z''(x-\lambda)\,dx = \left[f_{z'} z'(x-\lambda)\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} z'\left[(x-\lambda)\frac{df_{z'}}{dx} + f_{z'}\right] dx$$

und f_y und f_z nach (9) durch $df_{y'} : dx$ und $df_{z'} : dx$ ersetzt. Dann kommt:

$$(\mu - \lambda)\frac{\partial J}{\partial y_1} = \left[(x-\lambda)\left\{\frac{\partial \mu}{\partial y_1}(f - y' f_{y'} - z' f_{z'}) + f_{y'}\right\}\right]_{x_0}^{x_1},$$

oder, da $x_0 = \lambda$ und $x_1 = \mu$ ist:

$$\frac{\partial J}{\partial y_1} = \left[\frac{\partial \mu}{\partial y_1}(f - y' f_{y'} - z' f_{z'}) + f_{y'}\right]_1,$$

wobei wieder der Index 1 andeutet, daß der Inhalt der eckigen Klammer an der Grenze $x = x_1$ zu bilden ist. Entsprechende Werte gehen für $\partial J : \partial x_1$ sowie für $\partial J : \partial y_0$ und für $\partial J : \partial z_0$ hervor, so daß die Gleichungen (5) die *vier Grenzbedingungen* liefern:

$$(14)\quad \begin{cases} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial y_0}(f - y' f_{y'} - z' f_{z'}) + f_{y'}\right]_0 = 0, & \left[\frac{\partial \lambda}{\partial z_0}(f - y' f_{y'} - z' f_{z'}) + f_{z'}\right]_0 = 0, \\ \left[\frac{\partial \mu}{\partial y_1}(f - y' f_{y'} - z' f_{z'}) + f_{y'}\right]_1 = 0, & \left[\frac{\partial \mu}{\partial z_1}(f - y' f_{y'} - z' f_{z'}) + f_{z'}\right]_1 = 0. \end{cases}$$

912. Geometrische Deutung der Grenzbedingungen bei einer gewissen Klasse von Aufgaben. In der xy-Ebene oder im Raume mit den drei rechtwinkligen Koordinaten x, y, z sei jeder Stelle eine gewisse Zahl zugeordnet. Dies geschieht durch Annahme einer Funktion $\varphi(x, y)$ bzw. $\varphi(x, y, z)$ der Koordinaten. Ferner sei ds das Bogenelement einer Kurve, die in der Ebene durch eine Funktion y von x und im Raume durch zwei Funktionen y und z von x dargestellt wird. Dabei ist nach (1) in Nr. 193 bzw. nach (5) in Nr. 257:

(1) $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ oder $ds = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx$.

Man kann nun die Aufgabe stellen, *eine Kurve zu ermitteln für die das Integral:*

$$\int \varphi\, ds$$

einen Extremwert erreicht, vorausgesetzt, daß dabei vorgeschrieben wird, daß der Anfangspunkt und der Endpunkt der Kurve entweder auf *zwei gegebenen Grenzkurven* k_0 *und* k_1 oder auf *zwei gegebenen Grenzflächen* F_0 *und* F_1 liegen sollen. Das Integral läßt sich nach (1) auf die Form bringen:

(2) $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$ bzw. $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$.

Man kann dem Probleme eine physikalische Deutung beilegen, indem man unter $\varphi(x, y)$ bzw. $\varphi(x, y, z)$ die *Dichtigkeit der mit Masse belegten Kurve* an der Stelle (x, y) bzw. (x, y, z) versteht. Denn dann stellt J die Gesamtmasse der Kurve dar, so daß es sich etwa um die Aufgabe handelt, diejenige Kurve zu ermitteln, deren Masse ein Minimum hat. Doch ist diese Deutung nicht nötig, denn z. B. auch das Problem der Rotationsfläche von kleinstem Flächeninhalte in Nr. 900 sowie das der Brachistochrone in Nr. 901 und 903 führt auf die Betrachtung eines Integrals von der Form (2).

Wir betrachten der Einfachheit des Ausdruckes halber nur *Raum*kurven, und es seien α, β, γ die Richtungskosinus der Tangente der gesuchten Kurve, so daß nach (7) in Nr. 252:

(3) $$y' = \frac{\beta}{\alpha}, \quad z' = \frac{\gamma}{\alpha}$$

wird. Bei der Annahme zweier *Grenzkurven* k_0 und k_1, d. h. im *ersten* Falle der letzten Nummer, wo:

$$y_0 = \lambda_0(x_0), \quad z_0 = \mu_0(x_0), \qquad y_1 = \lambda_1(x_1), \quad z_1 = \mu_1(x_1)$$

ist, seien α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 die Richtungskosinus der Tangenten der Grenzkurven, so daß entsprechend (3) auch:

$$\lambda_0' = \frac{\beta_0}{\alpha_0}, \quad \mu_0' = \frac{\gamma_0}{\alpha_0}, \qquad \lambda_1' = \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad \mu_1' = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}$$

wird. Weil überdies nach (2):

(4) $$f = \varphi(x, y, z)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

zu setzen ist, ergibt die erste Grenzbedingung (10) der letzten Nummer, wenn $\varphi(x_0, y_0, z_0)$ nicht verschwindet:

$$\left[1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}-\frac{\beta}{\alpha}\right)\frac{\beta}{\alpha}+\left(\frac{\gamma_0}{\alpha_0}-\frac{\gamma}{\alpha}\right)\frac{\gamma}{\alpha}\right]_0=0$$

oder wegen $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$:

$$[\alpha_0\alpha+\beta_0\beta+\gamma_0\gamma]_0=0,$$

und die zweite liefert entsprechend:

$$[\alpha_1\alpha+\beta_1\beta+\gamma_1\gamma]_1=0.$$

Dies aber bedeutet: *Die gesuchte Kurve trifft in ihrem Anfangs- und in ihrem Endpunkte die beiden gegebenen Grenzkurven k_0 und k_1 senkrecht.*

Dasselbe gilt im Falle eines Problems von der gekennzeichneten Art in der *Ebene.* Da außerdem die Eulerschen Differentialgleichungen immer dieselben wie im Falle fester Anfangs- und Endpunkte sind, kann man z. B. aus Nr. 900 sofort schließen: Wenn in der Ebene zwei Kurven k_0 und k_1 gegeben sind und zwischen ihnen diejenige Kurve gezogen werden soll, durch deren Drehung um die x-Achse eine *Rotationsfläche von kleinstem Flächeninhalte* entsteht, muß die gesuchte Kurve eine *Kettenlinie* sein, die die x-Achse zur Leitlinie hat und beide Grenzkurven k_0 und k_1 senkrecht trifft. Ebenso folgt aus Nr. 901: Diejenige Kurve zwischen zwei gegebenen Kurven k_0 und k_1, auf der ein Punkt unter dem Einflusse der Schwere ohne Reibung am schnellsten von einem Ende zum andern gelangt, d. h. die *Brachistochrone,* ist eine *gemeine Zykloide,* die beide Grenzkurven senkrecht schneidet.

Schließlich kommen wir zu der Annahme, daß das vorgelegte zweite Integral (2) einen Extremwert unter der Voraussetzung zweier *Grenzflächen* F_0 und F_1 haben soll. Dabei mögen X_0, Y_0, Z_0 und X_1, Y_1, Z_1 die Richtungskosinus der Normalen der beiden Flächen sein. Hier liegt der *zweite* Fall der letzten Nummer vor, wobei also die Grenzflächen durch die Gleichungen:

$$x_0=\lambda(y_0, z_0) \quad \text{und} \quad x_1=\mu(y_1, z_1)$$

gegeben sind. Folglich ist nach (10) in Nr. 253:

$$\frac{Y_0}{X_0}=-\frac{\partial\lambda}{\partial y_0}, \quad \frac{Z_0}{X_0}=-\frac{\partial\lambda}{\partial z_0}, \quad \frac{Y_1}{X_1}=-\frac{\partial\mu}{\partial y_1}, \quad \frac{Z_1}{X_1}=-\frac{\partial\mu}{\partial z_1}.$$

912]

Da außerdem die Annahme (4) vorliegt, nehmen die vier Grenzbedingungen (14) der letzten Nummer mit Rücksicht auf (3) die Form an:

$$\left[\frac{Y_0}{X_0}-\frac{\beta}{\alpha}\right]_0=0,\quad \left[\frac{Z_0}{X_0}-\frac{\gamma}{\alpha}\right]_0=0,\quad \left[\frac{Y_1}{X_1}-\frac{\beta}{\alpha}\right]_1=0,\quad \left[\frac{Z_1}{X_1}-\frac{\gamma}{\alpha}\right]_1=0,$$

vorausgesetzt, daß die Funktion φ für die Wertsysteme x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 nicht verschwindet. Sie besagen, daß die Normale der ersten Grenzfläche an der Stelle (x_0, y_0, z_0) und die Normale der zweiten Grenzfläche an der Stelle (x_1, y_1, z_1) mit der Tangente der gesuchten Kurve zusammenfällt, daß *also die gesuchte Kurve beide Grenzflächen senkrecht schneidet.*

§ 4. Probleme mit Nebenbedingungen.

913. Isoperimetrische Probleme. Dieser Name wird auf eine Reihe von Aufgaben angewandt, weil sich die einfachste unter ihnen auf die Bestimmung derjenigen geschlossenen Kurve in der Ebene bezieht, die *bei vorgeschriebenem Umfange* die größte Fläche einschließt. Diese Kurve ist, nebenbei bemerkt, ein Kreis (vgl. Nr. 914). Der Umfang einer Kurve oder die Länge eines Kurvenstückes wird durch ein Integral dargestellt. Das angegebene Problem ordnet sich deshalb der folgenden allgemeineren Fassung unter:

Vorgelegt sei ein Integral:

$$(1)\qquad J=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx.$$

Es werden diejenigen Funktionen y von x gesucht, für die J ein Maximum oder Minimum erreicht, *vorausgesetzt, daß ein anderes vorgelegtes Integral*:

$$(2)\qquad K=\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')\,dx$$

einen gegebenen Wert l hat. Dabei seien x_0 und x_1 gegebene Konstanten, ebenso seien diejenigen Werte y_0 und y_1 gegeben, die der Funktion y an den Grenzen x_0 und x_1 zukommen.

Die in Nr. 897 gegebene Definition der Extremwerte ist auch hier anwendbar, wenn man sich nur bei der Variation der Funktion y auf solche Funktionen $y+\delta y$ beschränkt, die dem Integral K auch nach der Substitution von $y + \delta y$ statt y den vorgeschriebenen Wert l erteilen.

Wie in Nr. 897 nehmen wir die Variation δy von y in spezieller Art an, aber in etwas anderer Art als damals:

Es seien η und ϑ zwei Funktionen von x im Intervalle von x_0 bis x_1, *die für* $x = x_0$ *und* $x = x_1$ *verschwinden.* Die absoluten Beträge von η und ϑ werden dabei unterhalb einer Grenze m bleiben. Ist σ eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl, so mögen h und k zwei Zahlen sein, für die:

(3) $$|h| < \frac{\sigma}{2m}, \quad |k| < \frac{\sigma}{2m}$$

ist. Dann hat $\eta h + \vartheta k$ im Intervalle von x_0 bis x_1 stets einen absoluten Betrag, der kleiner als σ ist. Folglich darf man, wenn man die Definition der Extremwerte in Nr. 897 anwenden will, insbesondere:

$$\delta y = \eta h + \vartheta k$$

setzen, so daß J die Variation bekommt:

(4) $$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [f(x, y + \eta h + \vartheta k, y' + \eta' h + \vartheta' k) - f(x, y, y')]\, dx.$$

Dabei erfährt auch K einen Zuwachs δK, der aber wegen $K = l$ gleich Null sein soll. Also darf man h und k nur so wählen, daß:

(5) $$\delta K = \int_{x_0}^{x_1} [\varphi(x, y + \eta h + \vartheta k, y' + \eta' h + \vartheta' k) - \varphi(x, y, y')]\, dx = 0$$

wird.

Wenn das Integral J für eine gewisse Funktion y ein Maximum bzw. Minimum erreicht, während K für sie gleich der vorgeschriebenen Zahl l wird, ist δJ nie positiv bzw. negativ, wie auch h und k unter den Bedingungen (3) und (5) gewählt sein mögen. Denken wir uns nicht nur diese noch gesuchte Funktion y in (4) und (5) eingesetzt, sondern auch η und ϑ in bestimmter Weise als Funktionen von x gewählt, so ist die Variation δK in (5) eine bestimmte Funktion von h und k allein, so daß die Gleichung (5) die Form:

(6) $$\omega(h, k) = 0$$

hat. Insbesondere wird sie für $h = k = 0$ erfüllt. Die Ableitung von ω oder δK nach k ist an der Stelle $h = k = 0$ nach Satz 19, Nr. 488, diese:

$$(7) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \varphi(x, y, y')}{\partial y} \vartheta + \frac{\partial \varphi(x, y, y')}{\partial y'} \vartheta'\right] dx,$$

und wir wollen vorläufig annehmen, daß sich ϑ immer so als Funktion von x wählen lasse, daß diese Ableitung nicht verschwindet. Dann definiert die Gleichung (5) oder (6) implizite k als Funktion von h in der Umgebung der Stelle $h = k = 0$, nach Satz 13, Nr. 694. Mithin dürfen wir k in (4) als diese Funktion von h betrachten. Dann bedeutet δJ eine Funktion $F(h)$ von h allein, und wie in Nr. 898 schließt man, daß $F'(h) = 0$ für $h = 0$ sein muß. Diese Bedingung aber stellt sich, weil k von h abhängt, nach (4) so dar:

$$(8) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \left[f_y \eta + f_{y'} \eta' + (f_y \vartheta + f_{y'} \vartheta') \left(\frac{dk}{dh}\right)_0\right] dx = 0,$$

wobei f die Funktion $f(x, y, y')$ bedeutet. Andererseits aber gibt (5) für $h = 0$:

$$(9) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \left[\varphi_y \eta + \varphi_{y'} \eta' + (\varphi_y \vartheta + \varphi_{y'} \vartheta') \left(\frac{dk}{dh}\right)_0\right] dx = 0,$$

wo φ die Funktion $\varphi(x, y, z)$ ist. Der Index Null soll in (8) und (9) die Annahme $h = 0$ andeuten. Setzt man nun:

$$\lambda = -\frac{\int_{x_0}^{x_1} (f_y \vartheta + f_{y'} \vartheta')\, dx}{\int_{x_0}^{x_1} (\varphi_y \vartheta + \varphi_{y'} \vartheta')\, dx},$$

so ist λ, da y und ϑ als bestimmte Funktionen gedacht worden sind, eine Konstante, und es folgt, wenn die Gleichung (9) mit λ multipliziert und von der Gleichung (8) abgezogen wird:

$$(10) \qquad \int_{x_0}^{x_1} (f_y \eta + f_{y'} \eta')\, dx + \lambda \int_{x_0}^{x_1} (\varphi_y \eta + \varphi_{y'} \eta')\, dx = 0.$$

Dies aber ist diejenige Bedingung, die sich durch Nullsetzen der ersten Variation nach Nr. 898 ergibt, wenn das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} [f(x, y, y') + \lambda\varphi(x, y, y')]\, dx$$

für die Funktion y von x einen Extremwert erreicht.

Mithin muß die gesuchte Funktion y von x die zu diesem Integrale gehörige Eulersche Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial y}(f + \lambda\varphi) - \frac{d}{dx}\frac{\partial(f + \lambda\varphi)}{\partial y'} = 0 \tag{11}$$

befriedigen, nach Nr. 899. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion y von x, und sie enthält noch eine willkürliche Konstante λ. Ihre allgemeine Lösung hängt also von x, λ und noch zwei Konstanten C_1 und C_2 ab. Nun ist erstens zu fordern, daß das zweite vorgelegte Integral K für diese Funktion y gleich l werde, zweitens, daß y für $x = x_0$ den Wert y_0 habe, und drittens, daß y für $x = x_1$ den Wert y_1 habe. Mithin ergeben sich gerade drei Bedingungen für die drei Konstanten λ, C_1 und C_2.

Vorhin wurde der Fall ausgeschlossen, wo der Ausdruck (7) für jede Funktion $\vartheta(x)$ verschwindet. Tritt dies ein, so heißt es, daß die erste Variation des Integrals K gleich Null wird, d. h. daß y die Eulersche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0 \tag{12}$$

befriedigt. Von diesem Falle wollen wir absehen.

Hiernach hat sich gezeigt, daß man das vorgelegte isoperimetrische Problem so zu behandeln hat, als ob es sich nicht um die Extremwerte des Integrals J unter der Bedingung $K = l$ handelte, sondern um die Extremwerte des Integrals $J + \lambda K$ ohne jede Nebenbedingung, wobei λ eine Konstante bedeutet, vorausgesetzt, daß die Funktion y, die sich alsdann auf Grund der Eulerschen Differentialgleichung (11), der Bedingung $K = l$ und der Grenzbedingungen $y = y_0$ und $y = y_1$ für $x = x_0$ und $x = x_1$ ergibt, nicht auch die Eulersche Gleichung (12) erfüllt.

914. Kurve größten Flächeninhalts bei gegebener Bogenlänge. Zunächst behandeln wir als Beispiel hierzu die in voriger Nummer zuerst erwähnte Aufgabe: *In der Ebene seien zwei Punkte* (x_0, y_0) *und* (x_1, y_1) *gegeben. Alsdann soll diejenige Kurve gefunden werden, die von einem Punkte zum andern geht, die gegebene Länge* l *hat und zusammen mit der* x*-Achse und den Ordinaten des Anfangs- und Endpunktes die größte Fläche einschließt.* Hier soll also das Integral:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx$$

unter der Bedingung (vgl. Satz 2, Nr. 542):

$$K = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = l$$

zu einem Maximum werden. Die Eulersche Differentialgleichung (11) der letzten Nummer ist für $f = y$ und $\varphi = \sqrt{1 + y'^2}$ zu bilden, und da $f + \lambda\varphi$ von x frei ist, ergibt sich nach (6) in Nr. 905 (für den Fall $f_{y'} = 0$):

$$f + \lambda\varphi - y'\frac{\partial(f + \lambda\varphi)}{\partial y'} = C, \tag{1}$$

wo C eine Konstante ist, d. h.:

$$y + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

oder:

$$dx = \frac{(C - y)\,dy}{\sqrt{\lambda^2 - (C - y)^2}}.$$

Demnach wird, wenn C' eine Konstante vorstellt:

$$x = C' + \sqrt{\lambda^2 - (C - y)^2}$$

oder:

$$(x - C')^2 + (y - C)^2 = \lambda^2.$$

Also ist die Kurve ein *Kreisbogen.*

915. Rotationsflächen von kleinstem Flächeninhalte bei gegebener Meridianlänge. Als zweites Beispiel behandeln wir eine Aufgabe, die zwar an die in Nr. 900 erinnert, aber doch wesentlich anders ist: *In der Ebene seien zwei Punkte* (x_0, y_0) *und* (x_1, y_1) *gegeben. Es soll diejenige Kurve vom einen zum andern Punkte gefunden werden, die eine gegebene Länge* l *hat und bei der Drehung um die* x*-Achse eine Rota-*

tionsfläche von kleinstem Flächeninhalte erzeugt. Nach Nr. 900 handelt es sich um das Minimum des Integrals:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

unter der Bedingung:

$$K = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l.$$

Insbesondere kann man wie in Nr. 900 die y-Achse so wählen, daß $x_0 = -a$, $x_1 = +a$ wird. Nach den Ergebnissen von Nr. 913 verfährt man nun, als ob es sich um die Extremwerte des Integrals:

$$J + \lambda K = \int_{-a}^{+a} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

handelte, das aber aus dem Integral J von Nr. 900 hervorgeht, wenn man y durch $y+\lambda$ ersetzt, da dann y' ungeändert bleibt. Folglich ergibt sich eine *Kettenlinie, deren Leitlinie eine gewisse Parallele zur x-Achse ist*, und zwar ist es diejenige Kettenlinie, die die beiden gegebenen Punkte verbindet und die gegebene Länge l hat.

Nach der *Guldinschen Regel* in Nr. 589 ist die Ordinate des *Schwerpunktes* der Kurve gleich dem Flächeninhalte der Rotationsfläche, dividiert mit $2\pi l$. Mithin erreicht sie zugleich mit dem Flächeninhalte ein Minimum. Dies steht damit im Einklange, daß man die Kettenlinie mit wagerechter Leitlinie in der Mechanik als diejenige Kurve von gegebener Länge zwischen zwei Punkten definiert, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

916. Rotationsflächen von größtem Volumen bei gegebener Meridianlänge. Wieder seien in der Ebene zwei Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) gegeben. *Gesucht wird diejenige Kurve von einem zum andern Punkte, die eine vorgeschriebene Länge l hat und durch Drehung um die x-Achse eine Rotationsfläche von größtem Volumen erzeugt.* Nach (2) in Nr. 566 handelt es sich um das Maximum des Integrals:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx$$

unter der Bedingung:

$$K = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l.$$

Weil $f = y^2$ und $\varphi = \sqrt{1 + y'^2}$, also $f + \lambda\varphi$ von x frei ist, gibt die Eulersche Gleichung (11) von Nr. 913 nach (6) in Nr. 905:

$$y^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = C,$$

wo C eine Konstante ist. Hieraus folgt:

$$dx = \frac{(C - y^2)\, dy}{\sqrt{\lambda^2 - (C - y^2)^2}}.$$

Durch Vertauschen von x mit y erkennt man, daß die gesuchte Kurve eine *elastische Kurve* ist, vgl. 1. Beispiel, Nr. 797.

917. Rotationsflächen von kleinster Oberfläche bei gegebenem Volumen. *Es soll diejenige Kurve in der Ebene zwischen zwei gegebenen Punkten* (x_0, y_0) *und* (x_1, y_1) *bestimmt werden, die bei der Drehung um die* x*-Achse eine Rotationsfläche von gegebenem Volumen* V *und kleinstem Flächeninhalte erzeugt*, d. h. das Integral:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

soll unter der Bedingung:

$$K = \int_{x_0}^{x_1} y^2\, dx = V$$

ein Minimum werden. Die Eulersche Differentialgleichung (11) von Nr. 913 gibt, da auch hier $f + \lambda\varphi$ von x frei ist:

$$\lambda y^2 + \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{konst.},$$

und die Auflösung dieser Gleichung nach $1 : y'$ oder $dx : dy$ zeigt, daß es sich um die in Nr. 799 besprochenen Kurven handelt, siehe (3) ebenda. Mithin ist die gesuchte Fläche eine *Rotationsfläche von konstanter mittlerer Krümmung.*

918. Allgemeine isoperimetrische Probleme. Vorgelegt sei das Integral:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'')\, dx. \tag{1}$$

Man soll y so als Funktion von x bestimmen, daß J unter den beiden gegebenen Bedingungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} K_1 = \int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y', y'')\, dx = l_1, \\ K_2 = \int\limits_{x_0}^{x_1} \psi(x, y, y', y'')\, dx = l_2. \end{cases}$$

einen Extremwert erreicht. Dabei sind x_0, x_1, l_1, l_2 und die Werte y_0, y_0' und y_1, y_1', die y und y' für $x = x_0$ und $x = x_1$ erreichen, gegeben. Außerdem sollen f, φ und ψ gegebene Funktionen von x, y, y' und y'' bedeuten.

Da man hier wie in Nr. 913 schließen kann, dürfen wir uns auf die notwendigsten Angaben darüber beschränken: Als Variation δy wählt man:

$$(3)\qquad \delta y = \eta h + \vartheta_1 k_1 + \vartheta_2 k_2,$$

wobei η, ϑ_1, ϑ_2 drei Funktionen von x bedeuten, die nebst ihren Ableitungen erster Ordnung für $x = x_0$ und für $x = x_1$ verschwinden, während h, k_1, k_2 drei Zahlen sind, die wie k und h in Nr. 913 gewissen Ungleichungen genügen. Wie in Nr. 913 unter (4) ergibt sich für die Variation δJ ein Integral, dessen Integrand aber jetzt die Differenz von

$$f(x,\, y + \eta h + \vartheta_1 k_1 + \vartheta_2 k_2,\, y' + \eta' h + \vartheta_1' k_1 + \vartheta_2' k_2,\\ y'' + \eta'' h + \vartheta_1'' k_1 + \vartheta_2'' k_2)$$

und $f(x, y, y', y'')$ ist. Entsprechend der Gleichung (5) in Nr. 913 bestehen dabei zwischen h, k_1 und k_2 die beiden Bedingungen:

$$\delta K_1 = 0, \quad \delta K_2 = 0.$$

Dabei sind δK_1 und δK_2 gerade so wie δJ zu bilden, nur steht φ bzw. ψ anstelle von f. Diese Bedingungen sind Gleichungen, die k_1 und k_2 in der Umgebung von $h = k_1 = k_2 = 0$ als Funktionen von h definieren, vorausgesetzt, daß die Funktionaldeterminante von δK_1 und δK_2 hinsichtlich k_1 und k_2 für $h = k_1 = k_2 = 0$ nicht verschwindet (nach Satz 17, Nr. 697). Mithin hat man δJ als eine Funktion von h allein aufzufassen und zu fordern, daß ihre Ableitung für $h = 0$ verschwinde. Dies liefert die Gleichung:

$$\int_{x_0}^{x_1}(f_y\eta + f_{y'}\eta' + f_{y''}\eta'')\,dx + \left(\frac{dk_1}{dh}\right)_0 \int_{x_0}^{x_1}(f_y\vartheta_1 + f_{y'}\vartheta_1' + f_{y''}\vartheta_1'')\,dx$$
$$+ \left(\frac{dk_2}{dh}\right)_0 \int_{x_0}^{x_1}(f_y\vartheta_2 + f_{y'}\vartheta'_2 + f_{y''}\vartheta_2'')\,dx = 0.$$

Der Index Null deutet dabei an, daß $h = 0$ gesetzt werden soll. Die Ableitungen $dk_1 : dh$ und $dk_2 : dh$ genügen ferner für $h = 0$ denjenigen beiden Gleichungen, die aus dieser Gleichung hervorgehen, wenn man f durch φ bzw. ψ ersetzt. Es gibt nun (wie in Nr. 165) Faktoren λ_1 und λ_2 derart, daß die Addition der beiden mit λ_1 und λ_2 multiplizierten Bedingungen zur angegebenen Gleichung eine von den Ableitungen von k_1 und k_2 nach h freie Gleichung liefert:

$$\int_{x_0}^{x_1}(f_y\eta + f_{y'}\eta' + f_{y''}\eta'')\,dx + \lambda_1\int_{x_0}^{x_1}(\varphi_y\eta + \varphi_{y'}\eta' + \varphi_{y''}\eta'')\,dx$$
$$+ \lambda_2\int_{x_0}^{x_1}(\psi_y\eta + \psi_{y'}\eta' + \psi_{y''}\eta'')\,dx = 0.$$

Dieselbe Bedingung aber ergibt sich, wenn man sich die Aufgabe stellt, diejenigen Funktionen y von x zu ermitteln, für die das Integral:

$$J + \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = \int_{x_0}^{x_1}(f + \lambda_1\varphi + \lambda_2\psi)\,dx$$

ein Maximum oder Minimum erreicht, wobei λ_1 und λ_2 als Konstanten zu betrachten sind. Mithin hat man nach (4) in Nr. 904 die zugehörige *Eulersche Differentialgleichung* zu bilden:

$$\frac{\partial(f + \lambda_1\varphi + \lambda_2\psi)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(f + \lambda_1\varphi + \lambda_2\psi)}{\partial y'}$$
$$+ \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial(f + \lambda_1\varphi + \lambda_2\psi)}{\partial y''} = 0.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung *vierter* Ordnung für y, deren allgemeine Lösung außer x, λ_1, λ_2 noch vier Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3, C_4 enthält. Also ist noch über sechs Konstanten λ_1, λ_2, C_1, C_2, C_3, C_4 zu verfügen. Es sind aber auch gerade noch sechs Bedingungen zu erfüllen, denn erstens sollen K_1 und K_2 die gegebenen Werte l_1 und l_2 und zweitens sollen y und y' für $x = x_0$ und $x = x_1$ die gegebenen Werte y_0, y_0' und y_1, y_1' haben.

Es leuchtet ein, wie man dies Ergebnis auf den Fall verallgemeinern kann, wo das Integral:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots y^{(n)})\, dx$$

unter den n Bedingungen:

$$K_i = \int_{x_0}^{x_1} \varphi_i(x, y, y', \ldots y^{(n)})\, dx = l_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

einen Extremwert haben soll.

919. Ein anderes Problem mit einer Nebenbedingung. Es handle sich jetzt darum, y und z so als Funktionen von x zu bestimmen, daß das vorgelegte Integral:

$$(1) \qquad J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z')\, dx$$

unter einer vorgeschriebenen Bedingung von der Form:

$$(2) \qquad F(x, y, z) = 0$$

zu einem Maximum oder Minimum wird. Werden x, y, z als rechtwinklige Koordinaten im Raume gedeutet, so liegt die Aufgabe vor, diejenigen durch die Funktionen y und z von x dargestellten *Kurven auf der Fläche* (2) zu ermitteln, für die das Integral (1) einen Extremwert erreicht. Dabei sollen für y und z an den gegebenen Grenzen x_0 und x_1 gegebene Werte y_0, z_0 und y_1, z_1 vorgeschrieben sein, die also den Bedingungen:

$$(3) \qquad F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F(x_1, y_1, z_1) = 0$$

genügen.

Implizite definiert (2) die Größe z als Funktion von x und y. Bezeichnen p und q ihre partiellen Ableitungen nach x und y, so ist:

$$(4) \qquad dz = p\,dx + q\,dy$$

und:

$$(5) \qquad p = -\frac{F_x}{F_z}, \quad q = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Aus (4) folgt, weil y und z Funktionen von x sein sollen, für die Ableitungen nach x:

(6) $$z' = p + qy'.$$

Man wird also in (1) unter z die durch (2) definierte Funktion von x und y und unter z' die durch (6) mit Rücksicht auf (5) definierte Funktion von x, y und y' verstehen. Dann aber nimmt das Integral die Form:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')\,dx$$

an, so daß aus (4) in Nr. 899 das Bestehen der *Eulerschen Differentialgleichung*:

$$\varphi_y - \frac{d\varphi_{y'}}{dx} = 0$$

folgt. Wegen $\varphi = f$ ist aber dabei nach (2), (5) und (6):

$$\varphi_y = f_y + f_z q + f_{z'}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y} y'\right),$$
$$\varphi_{y'} = f_{y'} + f_{z'} q$$

zu setzen, so daß sich ergibt:

$$f_y + f_z q + f_{z'}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y} y'\right) - \frac{d(f_{y'} + f_{z'} q)}{dx} = 0.$$

Hierin ist:

$$\begin{aligned}\frac{d(f_{y'} + f_{z'} q)}{dx} &= f_{xy'} + f_{yy'} y' + f_{zy'} z' + f_{y'y'} y'' + f_{y'z'} z'' \\ &\quad + (f_{xz'} + f_{yz'} y' + f_{zz'} z' + f_{y'z'} y'' + f_{z'z'} z'') q \\ &\quad + f_{z'}\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} y'\right).\end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß $\partial p : \partial y = \partial q : \partial x$ ist, so kommt also, wenn man überdies den Wert (5) von q einsetzt:

$$\frac{f_y - f_{xy'} - f_{yy'} y' - f_{zy'} z' - f_{y'y'} y'' - f_{y'z'} z''}{F_y} = \frac{f_z - f_{xz'} - f_{yz'} y' - f_{zz'} z' - f_{y'z'} y'' - f_{z'z'} z''}{F_z}.$$

Bezeichnet man beide Brüche mit $-\lambda$, so kann man schreiben:

(7) $$f_y + \lambda F_y - \frac{df_{y'}}{dx} = 0, \qquad f_z + \lambda F_z - \frac{df_{z'}}{dx} = 0.$$

Zu diesen Formeln gelangt man aber auch, wenn man die Extremwerte des Integrals:

(8) $$\int_{x_0}^{x_1} [f(x, y, z, y', z') + \lambda F(x, y, z)]\,dx$$

unter der Voraussetzung sucht, daß λ eine gegebene *Funktion von x allein* bedeutet und y und z zwei gesuchte Funktionen von x sind, denn nach (2) in Nr. 902 hat man alsdann zu bilden:

$$\frac{\partial(f+\lambda F)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(f+\lambda F)}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial(f+\lambda F)}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(f+\lambda F)}{\partial z'} = 0,$$

und dies sind gerade die Gleichungen (7), weil λ und F von y' und z' frei sind.

Da der Wert der Funktion λ von x von vornherein nicht bekannt ist, muß man λ zunächst aus den Gleichungen (7) eliminieren. Es geht also eine einzige gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung hervor, die die beiden unbekannten Funktionen y und z von x enthält. Außerdem aber besteht die gegebene Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0,$$

mittels derer man z. B. z, z' und z'' eliminieren kann. Dann bleibt eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für y allein übrig. Ihre allgemeine Lösung enthält zwei Konstanten, die daher auch in der durch $F = 0$ implizite definierten Funktion z auftreten. Die Bedingungen, daß y und z für $x = x_0$ und für $x = x_1$ gegebene Werte y_0, z_0 und y_1, z_1 annehmen sollen, kommen aber auch gerade auf zwei Gleichungen zurück, weil ja die Gleichungen (3) von vornherein bestehen.

920. Geodätische Kurven. Als Anwendung behandeln wir die Aufgabe, *auf einer gegebenen Fläche*:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Punkten zu bestimmen. Gesucht werden hier solche Funktionen y und z von x, die der Bedingung (1) genügen und das Integral:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

zu einem Minimum machen. Die Gleichungen (7) der letzten Nummer sind also:

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \lambda F_y, \quad \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \lambda F_z.$$

Bedeuten nun α, β, γ die Richtungskosinus der Tangente der gesuchten Kurve, so kann man hierfür nach (3) in Nr. 252 schreiben:

$$\frac{d\beta}{F_y} = \frac{d\gamma}{F_z}.$$

Wenn l, m, n die Richtungskosinus der Hauptnormale der gesuchten Kurve sind, ergibt sich daraus nach den Frenetschen Formeln (1) von Nr. 272:

$$\frac{m}{F_y} = \frac{n}{F_z}.$$

Andererseits sind F_x, F_y, F_z nach (8) in Nr. 253 den Richtungskosinus X, Y, Z der Normale der gegebenen Fläche (1) proportional. Mithin finden wir, daß sich m zu n wie Y zu Z verhält. Dies genügt, um zu folgern, *daß die Hauptnormalen der kürzesten Linien der Fläche mit den Flächennormalen zusammenfallen*, oder auch, *daß die Schmiegungsebenen der kürzesten Linien der Fläche überall zu den Tangentenebenen der Fläche senkrecht sind.*

Immer aber haben wir nur notwendige, nicht hinreichende Bedingungen für das wirkliche Eintreten eines Maximums oder Minimums aufgestellt. Eine Flächenkurve also, deren Hauptnormalen mit den Flächennormalen zusammenfallen, ist nicht notwendig eine kürzeste Linie auf der Fläche; wohl aber muß jede kürzeste Linie auf der Fläche eine derartige Kurve sein. Man nennt die Flächenkurven, deren Hauptnormalen mit den Flächennormalen zusammenfallen, *geodätische Kurven* der Fläche und kann also nur das Eine folgern, daß jede kürzeste Linie auf der Fläche ein Teil einer geodätischen Kurve sein muß.

An einem einfachen Beispiele kann man deutlich sehen, daß die aufgestellten Bedingungen in der Tat nicht hinreichen. Denn auf der *Kugel* sind die geodätischen Linien augenscheinlich die größten Kreise der Kugel. Aber ein Teil eines größten Kugelkreises ist doch nur dann auf der Kugel die kürzeste Linie zwischen seinen beiden Endpunkten, wenn der zugehörige Zentriwinkel der Kugel weniger als zwei Rechte beträgt.

[920

Sachregister.

Die Zahlen bedeuten die Nummern des Textes.

Für die Anordnung unter ein- und demselben Stichworte war meistens die natürliche Reihenfolge maßgebender als die alphabetische; im übrigen gehen die allgemeineren Begriffe den spezielleren voran.

Abkürzungen: Dffgl. = Differentialgleichung, Fkt. = Funktion, gew. = gewöhnlich, hom. = homogen, inf. = infinitesimal, kompl. = komplex, lin. = linear, O. = Ordnung, part. = partiell, Trf. = Transformation.

F.

G.

Berichtigungen.

Man beachte außer den folgenden Berichtigungen auch die in den beiden ersten Bänden schon angegebenen.

Zum ersten Bande (in der 4. u. 5. Auflage).

Seite 558, Zeile 5 von unten lies: *Moduls.*
„ 619, „ 5 „ „ „ in der zweiten Spalte: Funktionen.

Zum zweiten Bande.

Seite 39, Zeile 15 von unten lies: (3) statt (2).
„ 108, „ 6 „ „ „ $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = t$.
„ 169, „ 6 „ „ „ $\varDelta X$ statt $\varDelta x$.
„ 170, „ 7 „ „ „ $|\varDelta X| < h$ statt $|\varDelta F| < h$.
„ 175, „ 10 „ „ fehlt beim zweiten Integralzeichen die obere Grenze X.
„ 343, „ 15 „ „ lies: τ statt f_α.
„ 498, „ 14 „ oben sind die Striche auf den rechten Seiten der Ungleichungen nicht nötig.
„ 501, „ 16 bis 11 von unten ist die Behauptung, daß $p - q$ konstant bleibt, nur für solche Wege σ richtig, die den bald darauf erwähnten Integrationsweg $\varkappa$ nicht treffen.
„ 572, „ 5 von unten lies: dx statt: du.
„ 586, „ 2 „ „ „ der Differenz statt: des Differentials.

Zum dritten Bande.

Seite 69, Zeile 5 von unten lies zu Anfang: stetig.
„ 105 beachte man bei Satz 6 die in Nr. 777 am Schlusse angegebene Korrektur.
„ 281 in Formel (6) lies: Δ statt $\varDelta$.
„ 335, Zeile 15 von unten lies: Konstanten.
„ 379, „ 12 „ „ „ Differentialgleichung.
„ 425, „ 8 „ oben „ (1) statt (2).
„ 426 ist die Formelnummer (11) zu streichen.

Ahrens, Dr. W., in Magdeburg, mathematische Unterhaltungen und Spiele. Mit 1 Tafel und vielen Figuren. [X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In 2 Hälften geh. je n. *M.* 5.— In Original-Leinwandband mit Zeichnung von P. Bürck in Darmstadt. (2. Auflage in Vorbereitung.) n. *M.* 10.—

——— Kleine Ausgabe: Mathematische Spiele. 170. Band der Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen „Aus Natur und Geisteswelt". Mit einem Titelbild und 69 Figuren. [VI u. 118 S.] 8. 1907. Geh. n. *M.* 1.—, in Leinwand geb. n. *M.* 1.25.

„Der Verfasser derselben wollte sowohl den Fachmann, den der theoretische Kern des Spieles interessiert, als den mathematisch gebildeten Laien befriedigen, dem es sich um ein anregendes Gedankenspiel handelt; und er hat den richtigen Weg gefunden, beides zu erreichen. Dem wissenschaftlichen Interesse wird er gerecht, indem er durch die sorgfältig zusammengetragene Literatur und durch Einschaltungen mathematischen Inhalts die Beziehungen zur Wissenschaft herstellt; dem Nichtmathematiker kommt er durch die trefflichen Erläuterungen entgegen, die er der Lösung der verschiedenen Spiele zuteil werden läßt, und die er, wo nur irgend nötig, durch Schemata, Figuren und dergleichen unterstützt."

(Professor Czuber in der **Zeitschrift für das Realschulwesen.**)

Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten sowie die Studierenden der Mathematik und Physik. Gegründet 1841 durch J. A. Grunert. III. Reihe. Im Anhange: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausg. von E. Lampe in Berlin, W. Franz Meyer in Königsberg in Pr. und E. Jahnke in Berlin. 1909/10. 15. Band. gr. 8. Preis für den Band von 24 Druckbogen in 4 Heften n. *M.* 16.—

Das Archiv ist das einzige Organ, das sich nicht nur die Erweiterung der mathematischen Erkenntnis, sondern auch die Verbreitung mathematischer Forschung als Ziel steckt. Zur Fesselung des Leserkreises sollen auch solche Aufsätze gebracht werden, die die Kenntnisnahme und das Verständnis der neueren mathematischen Anschauungen und Entdeckungen vermitteln.

Um zu selbständigen Arbeiten anzuregen, werden Aufgaben zu stellen versucht, die dem Stoffe des Hochschulunterrichts entnommen sind. Die Namen der Einsender richtiger Lösungen werden in den nächsten Heften veröffentlicht. Bearbeitungen, die sich durch Originalität und Eleganz der Darstellung auszeichnen, werden, soweit der Platz verfügbar ist, zum Abdruck gelangen. Durch die Mannigfaltigkeit der Gaben soll vor allem die Langweiligkeit und die Kleinigkeitskrämerei aus dem Archiv verbannt werden.

Borel, Dr. E., Professor an der Sorbonne zu Paris, die Elemente der Mathematik. Deutsche Ausgabe, besorgt von P. Stäckel, Professor in Karlsruhe i. B. 2 Bände. gr. 8.

I. Band: Arithmetik und Algebra. Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. [XVI u. 431 S.] 1908. In Leinwand geb. n. *M.* 8.60.
II. — Geometrie. [ca. 350 S.] [Unter der Presse.]

Die Vorschläge zu einer Reform des Unterrichtes in den Elementen der Mathematik, die neuerdings seitens der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte gemacht worden sind, hatten in Frankreich bereits seit 1900 in den offiziellen Lehrplänen Verwirklichung gefunden. Auf dieser modernen Grundlage hat E. Borel seine vortrefflichen Lehrbücher aufgebaut, die in Frankreich weite Verbreitung gefunden haben. Es erschien daher angebracht, diese Elemente der Mathematik in einer den deutschen Verhältnissen angepaßten Bearbeitung dem deutschen Publikum zugänglich zu machen.

Burkhardt, Dr. H., Professor an der Universität München, Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Mit 38 Figuren. [XII u. 252 S.] gr. 8. 1907. Geb. n. *M.* 6.—

Das Buch gibt eine Darstellung der Elemente der höheren Analysis, die nach Möglichkeit den Bedürfnissen der Studierenden sowohl der Mathematik wie auch der Naturwissenschaften, insbesondere auch der Chemie gerecht werden soll. Aus diesem Grunde mußte einerseits der Stoff den letzteren in für sie genießbarer Form dargeboten, also auf Arithmetisieren verzichtet werden; andrerseits mußte erreicht werden, daß auch die ersteren nicht in die Notwendigkeit versetzt werden, das, was sie in der elementaren Vorlesung gelernt haben, später wieder verlernen zu müssen. Verfasser hat diesem Ziele nahe zu kommen geglaubt durch sorgfältige Auswahl des Stoffes, ausführliche Entwicklung der fundamentalen Begriffe an konkreten Problemen und verschiedene Abänderungen in der herkömmlichen Anordnung.

Das Werkchen, das zunächst auf die besonderen Verhältnisse einer kleinen Universität zugeschnitten ist, dürfte doch auch anderwärts von Nutzen sein; namentlich auch Lehrern, die sich über die Frage der Tunlichkeit der Einführung der Elemente der Differentialrechnung in den Schulunterricht ein Urteil zu bilden wünschen. Doch ist es nicht als Schulbuch gedacht, auch nicht als ein Buch für Techniker, sondern vor allem als ein Buch für Studenten der Universitäten in den ersten Semestern.

Czuber, Hofrat Dr. E., Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2 Bände. 2., sorgfältig durchgesehene Auflage. gr. 8. 1906. In Leinwand geb.

I. Band. Mit 115 Figuren. [XIV u. 560 S.] n. *M.* 12.—
II. — Mit 87 Figuren. [VIII u. 532 S.] n. *M.* 12.—

Das Werk verfolgt das Ziel, eine Darstellung der theoretischen Grundlagen der Infinitesimalrechnung in organischer Verbindung mit deren Anwendungen, insbesondere den geometrischen, von solchem Umfange zu geben, als es einerseits für das Studium jener angewandten Disziplinen, in welchen die Mathematik den Grund zu legen hat, erforderlich ist, und als es andererseits die Vorbereitung für das Eintreten in Spezialgebiete der Analysis voraussetzt. Es hat in erster Linie die Bedürfnisse der technischen Hochschulen im Auge, wird aber auch von Studierenden der Mathematik im engeren Sinne mit Nutzen gebraucht werden können, denn die reichliche Bedachtnahme auf die Anwendung der theoretischen Sätze ist wesentlich geeignet, das Verständnis der Theorie zu fördern und zu vertiefen.

Die zweite Auflage weist gegenüber der ersten einige größere Erweiterungen im Inhalt auf, insofern u. a. im ersten Bande die hyperbolischen Funktionen und der Begriff der Funktion einer komplexen Variablen, im zweiten Bande die Theorie der Eulerschen Integrale, der Fourierschen Reihen, die Moment- und Schwerpunktsbestimmungen und die Sätze von Green hinzugefügt wurden.

——— Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Aufl. in 2 Bänden.

I. Band. Wahrscheinlichkeitstheorie. Fehlerausgleichung. Kollektivmaßlehre. Mit 18 Figur. [X u. 410 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. *M.* 12.—
II. — [Unter der Presse.]

Das vorliegende Buch gibt eine Darstellung der Wahrscheinlichkeitstheorie zusammen mit ihren hauptsächlichsten Anwendungsgebieten: Fehlerausgleichung, mathematische Statistik und Lebensversicherungsrechnung.

In dem grundlegenden ersten Teil wird auf die fundamentalen Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingegangen; eine große Auswahl von Problemen, darunter selbstverständlich die klassischen, ist dazu bestimmt, in den Geist der Wahrscheinlichkeitssätze und ihren richtigen Gebrauch einzuführen.

Der zweite Teil begründet die Fehlertheorie und die aus ihr entspringende Methode der kleinsten Quadrate; Beispiele aus verschiedenen Wissenszweigen geben eine zureichende Vorstellung von der Verwendung dieses wichtigen Instruments zur Bearbeitung von Beobachtungsergebnissen.

Im dritten Teile werden die modernen Hilfsmittel der wissenschaftlichen Beurteilung und Ausnützung von Erfahrungstatsachen auf statistischem Gebiete erörtert; die Probleme der Sterblichkeits- und Invaliditätsmessung stehen im Vordergrunde der Betrachtung.

Der vierte Teil erklärt das Wesen und behandelt alle belangreichen Probleme der Lebensversicherungsrechnung; um auch einen Einblick in die Auswertung der hier maßgebenden Formeln und die auftretenden Zahlwerte zu gewähren, sind Tabellen und Rechnungsbeispiele in größerer Zahl eingefügt.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Herausgegeben im Auftrage der Akademien der Wissenschaften in Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden. Jährlich etwa 6 Hefte. gr. 8. Geh. und in Halbfranz geb.

II. Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Von K. W. Wagner, Ingenieur in Charlottenburg. Mit 23 Textfiguren. [IV u 109 S.] 1908. Steif geh. n. ℳ 2.40, in Leinwand geb n. ℳ 2.80.

III. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Von Dr. Cl. Schaefer, Privatdozent an der Universität Breslau. Mit Bildnis J. C. Maxwells und 32 Textfiguren. [VIII u. 174 S.] 1908. Steif geh. n. ℳ 3.40, in Leinwand geb. n. ℳ 3.80.

IV. Die Theorie der Besselschen Funktionen. Von Dr. P. Schafheitlin, Professor am Sophien-Realgymnasium zu Berlin. Mit 1 Figurentafel. [V u. 129 S.] 1908. Steif geh. n. ℳ 2.80, in Leinwand geb. n. ℳ 3.20.

V. Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Von Dr. E. Jahnke, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Berlin, und F. Emde, Ingenieur in Berlin. Mit 53 Fig. [XII u. 176 S.] 1909. Steif geh, in Leinwand geb.

Weitere Bände in Vorbereitung.

Tannery, J., Professor an der Universität Paris, Subdirektor der École normale supérieure zu Paris, Elemente der Mathematik. Mit einem geschichtlichen Anhang von P. Tannery. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. P. Klaess, Gymnasiallehrer in Echternach (Luxemburg). Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 184 Textfiguren. [XII u. 364 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 7.—, in Leinwand geb. n. ℳ 8.—

Das vorliegende Buch entspricht den neuen französischen Lehrplänen von 1902 und behandelt das mathematische Pensum der Philosophie-Klasse. Aus dem reichen Inhalte des Werkes seien einige der bemerkenswertesten Kapitel hervorgehoben: algebraische Geometrie, Koordinaten, empirische Kurven, graphische Darstellung der Funktionen (graphische Fahrpläne), graphische Methoden zur Auflösung der Gleichungen, Elemente der Differential- und Integralrechnung, Grenzwerte, Reihen. — In ebenso klassischer Form behandelt am Schlusse der Bruder des Verfassers, P. Tannery, einige wichtige Kapitel der Geschichte der Mathematik; sie beziehen sich meistens auf die im Buche selbst behandelten Fragen.

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, unter Mitwirkung von Fr. Auerbach, O. Knopf, H. Liebmann, E. Wölffing u. a. herausg. von Felix Auerbach. Mit 1 Bildnis Lord Kelvins. [XLIV u. 450 S.] 8. I. Jahrgang 1909. In Leinwand geb. n. ℳ 6.—

Während es Taschenbücher und Kalender für Chemiker, Geographen, Techniker, Elektrotechniker, Astronomen usw. gibt, entbehren die Mathematiker und Physiker bis heute dieses bequemen und, wenn einmal vorhanden, unentbehrlichen Hilfsmittels. Es wird hiermit dem Kreise der Interessenten zum ersten Male vorgelegt, und zwar mit Rücksicht auf die nahen Beziehungen zwischen Mathematik und Physik in einer beide Wissenschaften umfassenden Form. Es enthält Angaben über Personalien, Literatur, Praktisches usw., hauptsächlich aber ein Gerippe des Tatsachenmaterials der genannten Disziplinen, zu denen noch Astronomie, Geodäsie und physikalische Chemie als Annexe hinzugefügt wurden, um allseitigen Bedürfnissen entgegenzukommen. Bei dem gewaltigen Umfange der in Rede stehenden Wissenschaften mußte man sich für diesen ersten Jahrgang auf eine Auswahl des zunächst Wichtigsten und Dringendsten beschränken; es ist aber in Aussicht genommen, in den folgenden Jahrgängen immer wieder Neues hinzuzufügen, so daß die Abnehmer nach und nach ein, dem Charakter eines Taschenbuches entsprechend, lückenloses Material in die Hand bekommen.

Weber, Dr. H., u. Dr. **J. Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8.

I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von Heinrich Weber. 2. Aufl. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 9.60.

II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von Heinrich Weber, Joseph Wellstein und Walther Jacobsthal. 2. Aufl. Mit 251 Textfiguren. [XII u. 596 S.] 1907. In Leinwand geb. n. ℳ 12.—

III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von Heinrich Weber, Joseph Wellstein und Rud. H. Weber (Rostock). Mit 358 Textfiguren. [XIII u. 666 S.] 1907. In Leinwand geb. n. ℳ 14.—

Das vorliegende Werk wendet sich in erster Linie an die gegenwärtigen und künftigen Lehrer an höheren Schulen, an die Studierenden der Mathematik unserer Hochschulen. Es beansprucht nicht, wie die große Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, das Material allseitig zu erschöpfen, nach der historischen und literarischen Seite hin vollständigen Aufschluß zu geben. Es will eine Verbindung herstellen zwischen der höheren Mathematik und der Mathematik der Schule, indem es einerseits dem Studierenden ein Führer ist, wo er der Auffrischung und Ergänzung früher erworbener Kenntnisse bedarf, andererseits dem Lehrer ein Wegweiser, um das im Studium der höheren Mathematik Erworbene der Vertiefung und Bereicherung des Unterrichts nutzbar zu machen. Besonderes Gewicht ist auf die wissenschaftliche Ausgestaltung der allgemeinen Grundlagen gelegt.